ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
I. BARTA, E. BÖLCSKEI, P. O. GESZTI, A. LÉVAI

REDIGIT
M. MAJOR

TOMUS 62 FASCICULI 1—2

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1968

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 120 forint, külföldre 165 forint. Megrendelendő a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

Tomus 62

INDEX

Bitó, J.: On the Cathode Spaces of Discharges — Über die Kathodenräume der Entladungen — Des espaces cathodiques des décharges — *Я. Бито:* О катодных полях разрядов 317

Bitó, J.: On the Emission Dependence of the Cathode Fall — Die Abhängigkeit des Katodenfalls von der Emission — Dépendance de la chute cathodique de l'émission — *Я. Бито:* Эмиссионная зависимость падения потенциала 375

Bitó, J.: Energiegleichgewicht der Oxydkatoden für Niederdruck-Lichtbogenentladungen — On the Energy Equilibrium of Arc Discharges of Oxyde Cathodes — L'équilibre d'énergie des cathodes à oxyde des décharges en arc à basse pression — *Я. Бито:* Энергетическое равновесие оксидных катодов дуговых разрядов низкого давления 409

Bogárdi, J. L.: Incipient Sediment Motion in Terms of the Critical Mean Velocity — Charakterisierung der Inbewegungsetzung der Geschiebe durch die kritische Durchschnittsgeschwindigkeit — Caractérisation du début de charriage par la vitesse moyenne critique — *Богарди, Я. Л.:* Характеристика начала движения наносов при помощи средней критической скорости 1

Csáki, F.—Magyar, P.—Bars, R.: Détermination of Transfer Functions of Direct Current Machines with the Aid of Signal-Flow Graphs — Die Bestimmung der Übertragungsfunktionen der Gleichstrommaschinen mit Hilfe von Signalfließdiagrammen — Détermination de la fonction de transfert des machines à courant continu par la méthode des graphes de transfert — *Ф. Чаки, П. Мадяр* и *Р. Барш:* Определение передаточных функций машин постоянного тока при помощи графов 267

Csonka, P.: Particular Solutions to the Homogeneous Differential Equation of Spherical Shells — Partikuläre Lösungen der homogenen Differentialgleichung der Kugelschalen — Solutions particulières de l'équation différentielle homogène des calottes sphériques — *Чонка, П.:* Частные решения гомогенного дифференциального уравнения сферической оболочки 115

Heller, L.: Entropie oder Exergie? — Entropy Aspect or Exergy? — Entropie ou exergie? *Л. Хеллер:* Метод энтропии или эксергия? 241

Horacsek, O.—Millner, T.: Eine handliche elektronenoptische Apparatur zur laufenden Untersuchung von metallographischen Vorgängen hocherhitzter hochschmelzender Metalle — A Simple Apparatus for Investigating by Electron Optics the High-Temperature Metallographic Phenomena of Metals with High Melting Point — Appareil simple pour l'examen électronoptique des processus métallographiques à haute température des métaux à point de fusion élevé — *О. Хорачек—Т. Мильнер:* Простой прибор, пригодный для электронно-оптических исследований металлографических процессов, протекающих при высоких температурах в тугоплавких металлах 253

Horler, M.: Principes de la conservation et de la restauration des monuments historiques — Governing Principles in Renovation of Ancient Monuments — Richtlinien der Denkmalwiederherstellung — *Хорлер, М.:* Принципы восстановления памятников 203

Kézdi, Á.—Nagyváti, B.: Strength of Stabilized Soils — Festigkeit stabilisierter Böden — Résistance des sols stabilisés — *Кезди, А. — Надьвати, Б.:* Прочности стабилизорованных грунтов 75

Király, B.: Fortpflanzung von elastischen Biegeschwingungen in Stäben — Propagation of Elastic Bending Vibrations in Bars—Propagation des oscillations de flexion élastiques dans les barres — *Кирай, Б.:* Распространение упругих изгибающих колебаний в стержнях 45

Kollár, L.—Gárdonyi, Z.: Stabilité latérale des voiles en arc à tirants — Lateral Stability of Arch Shells with Tie Rods — Seitliche Stabilität der Schalenbogen mit Zugbändern — *Коллар, Л.—Гардони, З.:* Боковая устойчивость изгибу оболоченных сводов со стяжным поясом 159

Kolonits, F.: Steady-State Thermal Stresses in the Vessel of a Pressurized Water Reactor — Stationäre Wärmespannungen im Behälter eines Druckwasserreaktors — Contraintes thermiques stationnaires dans la cuve d'un réacteur à eau sous pression — *Ф. Колонич:* Стационарные термонапряжения в реакторном сосуде, работающем на воде под давлением 351

Kovácsházy, F.: Model Studies on Retaining Walls — Modellversuche an Stützmauern — Essais sur modèles réduits de murs de soutènement — *Ковачхази, Ф.:* Моделирование опорных стен 187

Michelberger, P.: Einige Probleme der Berechnung der statisch unbestimmten Fahrzeugkonstruktionen nach dem Kraftgrößenverfahren — Some Problems of the Calculation of Statically Indeterminate Structures of Vehicles by the Aid of the Energy Theorem — Quelques problèmes du calcul statique des structures et caisses de véhicules par la méthode de forces — *Михельбергер, П.:* Вопросы статического расчета шасси и кузовотранспортных средств 141

Pásztor, E.: Methode zur Bestimmung des Reibungsmitteldruckes von Kolben-Verbrennungsmotoren — A Method for the Determination of the Mean Frictional Pressure of I.C. Piston Engines — Méthode pour la détermination de la pression moyenne de frottement dans les moteurs à piston à combustion interne — *Е. Пастор:* Метод определения среднего давления трения поршневых двигателей внутреннего сгорания 381

Szabó, P.: Some Properties of 4-Bit Unit-Distance Decimal Codes — Über einige Eigenschaften von einschrittigen dezimalen Coden mit vier Binärstellen — Quelques propriétés des codes décimaux d'un seul pas à quatre chiffres binaires — *Сабо: П.* Некоторые свойства одношаговых десятичных кодов с четырьмя двоичными знаками 305

Széchy, K.: Soil-Deformations around and below Driven and Vibrated Test Tubes — Formänderung des Bodens umher und unter den eingerammten und vibrierten Versuchsröhren — Déformation autour et au-dessous de tubes d'essai battus et vibrés — *Сечи, К.:* Деформация грунта под опытными трубами и вокруг них при условии опускания их методом забивки и вибрации 97

Szmodits, K.: Numerical Solution of Mixed Boundary Value Problems in Disc Analysis — Numerische Lösung der komplexen Randwertaufgaben von Scheibenproblemen — Solution numérique du problème mixte de la valeur au contour de l'élasticité à deux dimensions — *Смодич, К.:* Числовое решение смешанных задач по значениям периметров дисковых проблем 25

Szmodits, K.: Applications of the Method of Fixed Points — Anwendungen des Festpunktverfahrens — Applications de la méthode des foyers — *Смодич, К.:* Области применения неподвижной точки 177

Szombatfalvy, Á.: Nouvelle méthode pour l'examen du fluage des aciers — New Methods for the Investigation of the Creep of Iron Alloys — Neue Verfahren zur Untersuchung der Kriechvorgänge von Eisenlegierungen — *Сомбатфальви, А.:* Новые методы исследования процессов крипа стальных сплавов 31

Vácz, I.—Kerényi, I.: Electronical (Initial Current) Measurement of the Cathode Temperature — Elektronische Kathodentemperaturmessung (mittels des Anlaufstroms) — Mesure électronique par courant initial de la température des cathodes — *И. Керени* и *И. Вац:* Электронный метод измерения температуры катода 285

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU — ОБЗОР КНИГ

Bares, R.—Massonet, Ch.: Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon—Massonnet—Bares *(Csonka, P.)* 239

Beles, A. A.—Soare, M.: Les paraboloïdes elliptique et hyperbolique dans les constructions *(Csonka, P.)* 235

Berceli, T.: Reflex Klystron Circuits *(Valkó, I. P.)* 437

Betontechnische Berichte 1966 *(Goschy, B.)* 236

Nagy, Gy.—Szilágyi, M.: Introduction to the Theory of Space Charge Optics *(Budincsevics, A.)* 437

Rosman, R.: Gegliederte Windscheiben mit stufenartig veränderlichen Querschnittswerten *(Csonka, P.)* 238

Soare, M.: Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis *(Csonka, P.)* 236

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
I. BARTA, E. BÖLCSKEI, P. O. GESZTI, A. LÉVAI

REDIGIT
M. MAJOR

TOMUS 62

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1968

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 1—24 (1968)

INCIPIENT SEDIMENT MOTION IN TERMS OF THE CRITICAL MEAN VELOCITY

J. L. BOGÁRDI
CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received February 15, 1968]

Previous papers have given reviews on the critical tractive force pertaining to the incipient movement of sediment as variable even for a sediment-material of a given particle diameter d and specific gravity γ_1 is concerned. The magnitude of this force was found to depend primarily on depth D and particle diameter d, respectively, on the relative roughness defined as the ratio D/d of the two. Obviously the critical mean velocity pertaining to incipient sediment movement is also variable and depends on observation conditions, as well as on relative roughness. Starting from the classical impact theory the variation of critical mean velocity and its dependence on parameters which can be formed from various physical quantities is investigated for several alternatives. As a conclusion the ratio of critical mean velocity and shear velocity has been defined in terms of the relative roughness and a parameter depending on particle size and viscosity. Relying on theoretical considerations and actual experimental data the relationships are presented in graphical as well as analytical forms.

For a better understanding of the complex phenomenon of sediment transportation the study of the incipient movement may probably be regarded as the most important. The boundary condition of incipient movement, the so-called critical condition, is usually described in terms of the critical tractive force τ_c and the critical velocity v_c.

The approach to the critical condition using the critical tractive force has recently been reviewed [1] and the critical tractive force τ_c pertaining to a particular sediment fraction of size d and specific gravity γ_1 was found to be variable and to depend primarily on the magnitude of relative roughness D/d, defined as the ratio of water depth D and particle diameter d. It follows therefrom that for different values of the relative roughness D/d the critical condition occurrs at different gradients S.

Attention should be called here to earlier statements made in connection with the variability of τ_c (experiments by SHIELDS in 1936, [2] and by the author in 1937—38 in Iowa [3]), but these were partly forgotten and could not be allowed for at that time.

The following notations will be used hereafter:

d [cm] = particle diameter,
D [cm] = water depth,
S [—] = gradient,
γ_1 and γ [p/cm^3] = specific gravity of sediment and water, respectively,
ϱ_1 and ϱ [p sec^2/cm^4] = the corresponding densities,
ν [cm^2/sec] = kinematic viscosity,
g [cm/sec^2] = gravitational acceleration,
$U_* = \sqrt{gDS}$ [cm/sec] = shear velocity.

During recent studies referred to above concerning the variability of τ_c [1], Shields' resistance coefficient f_c involved in the expression

$$\tau_c = f_c (\gamma_1 - \gamma) d \tag{1}$$

has been expressed from the general, dimensionless five-variable relationships

$$f_c = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}, \frac{D}{d}, \frac{U_* d}{\nu}, \varrho'\right) \tag{2}$$

and

$$f_c = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}, S, \varrho', \frac{U_* d}{\nu}\right) \tag{3}$$

by introducing the three-variable relationships

$$f_c = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}, \frac{D}{d}\right) \tag{4}$$

and

$$f_c = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}, S\right) \tag{5}$$

in which the influence of $U_* d/\nu$ and $\varrho' = (\varrho_1 - \varrho)/\varrho$ has been neglected (see Figs 1 and 2). As will be seen from these figures the magnitude and the variability of f_c and in turn, with reference to Eq. (1), that of τ_c could be determined on the basis of observation data ranging between the limits indicated in Table I.

Table I

Hydraulic data of observations

Regime of movement	Depth D cm		Water temperature t °C		Particle diameter d mm		Gradient S		Specific gravity of sediment γ_1 p/cm³	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
Critical	46,1	1,52	27	7,6	15,49	0,021	0,066	0,000055	2,65	2,59

Results included have been observed by J. BOGÁRDI, L. IVICSICS, L. RÁKÓCZY, GUY—SIMONS—RICHARDSON, NEILL, BARTON—LIU and collaborators.

For a more detailed theoretical development and interpretation of Eqs (2), (3), (4) and (5) reference is made to earlier papers [4, 5, 6, 7]. Supplementing these the following remarks are deemed as being appropriate concerning Eqs (4) and (5), as well as Figs 1 and 2.

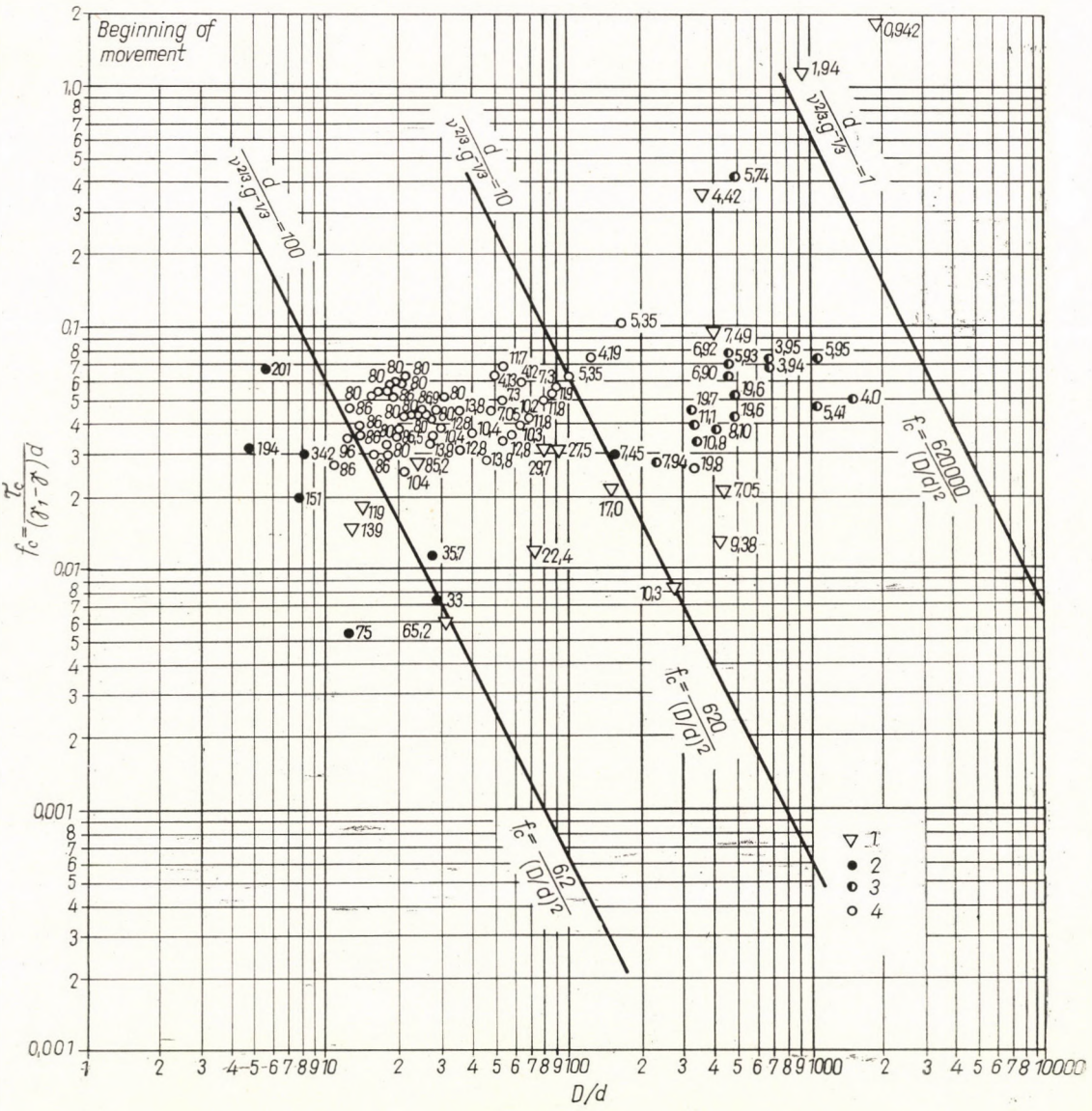


Fig. 1. Plot of the relationship between $f_c = \frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d}$, D/d and $\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}$ at the critical condition

1. Rákóczy, L.; 2. Bogárdi, J.—Ivicsics, L.; 3. Guy, Simons, Richardson; 4. Barton, Liu, Bogárdi, Yen, Brooks. Norman, Nomicos, Vanoni, Casey, Gilbert, Ho Pang Yung, Kalinske, Lane, Laursen, H. K. Liu, T. Y. Liu, Plate

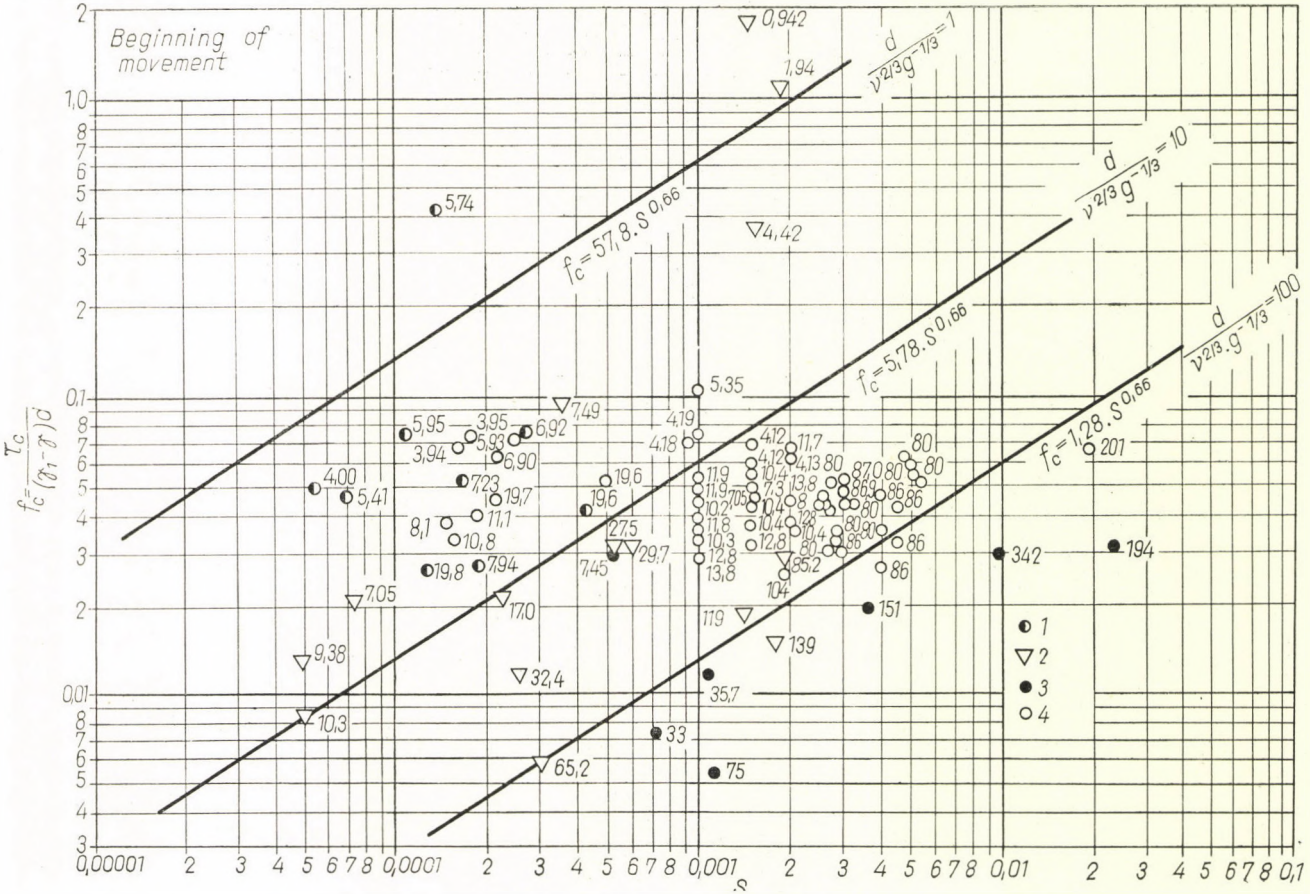


Fig. 2. Plot of the relationship between $f_c = \frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)d}$, S and $\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}$ at the critical condition

1. Guy, Simons, Richardson; 2. Rákóczy, L.; 3. Bogárdi, J.—Ivicsics, L.; 4. Barton, Liu, Bogárdi, Yen, Brooks, Norman, Nomicos, Vanoni, Casey, Gilbert, Ho Pang Yung, Kalinske, Lane, Laursen, H. K. Liu, T. Y. Liu, Plate

Since, as will be seen from Table I, the value of γ_1 hardly differs from 2,65 p/cm^3, the relationship between Figs 1 and 2 holds only for the case of a specific gravity $\gamma_1 = 2{,}65$ p/cm^3. This implies consequently that the simultaneous use of the two diagrams is possible for a specific gravity $\gamma_1 = 2{,}65$ only.

Indeed it is theoretically conceivable that in the possession of observation results for γ_1 values ranging between wide limits, relationships different from those in Figs 1 and 2 might have been obtained. It is equally conceivable that the relationships thus determined would have been correlated on the basis of the actual γ_1 value (rather than 2,65) which would have made the simultaneous use of the new graphical relationships permissible for specific gravities other than 2,65.

Actually, however, the graphical relationships represented by Figs 1 and 2 can be applied exclusively to sediments having a specific gravity of 2,65. Nevertheless, in the light of present knowledge the two diagrams can be used separately for estimating the critical tractive force even in the case of sediment materials having specific gravities other than 2,65. In these cases it will be obvious that some of the effects due to specific gravity have been omitted but the error introduced by this neglect is not likely to be significant.

For instance, in the case of a sediment material having a diameter $d = 0{,}047$ cm and a specific gravity $\gamma_1 = 3{,}65$ p/cm^3, the critical tractive force in a current $D = 4{,}7$ cm deep can be estimated approximately using Fig. 1 by the following procedure.

In water of 20 °C temperature $\nu^{2/3} \cdot g^{-1/3} = 0{,}0047$ cm, whence

$$\frac{d}{\nu^{2/3} \cdot g^{-1/3}} = 10 \quad \text{and} \quad D/d = 100.$$

According to Fig. 1 the resistance coefficient corresponding to these values is $f_c = 0{,}062$, and thus we have

$$\tau_c = 0{,}062 \cdot (3{,}65 - 1) \cdot 0{,}047 = 0{,}00777 \text{ p/cm}^2.$$

For determining the critical gradient S_c prevailing at incipient movement we obtain

$$\tau_c = \gamma D_c S_c = 0{,}00777 = 1 \cdot 4{,}7 \cdot S_c$$

whence the critical gradient is obtained as $S_c = 0{,}001645$.

It will be readily perceivable that this value of S_c when introduced into Fig. 2 would yield an entirely different critical tractive force from which it should be clear that the two diagrams must not be used simultaneously for sediments having specific gravities other than 2,65.

As far as *the description of the critical condition in terms of critical velocities* is concerned it should be obvious that in principle both mean and bottom velocities can be used. Since, however, simple considerations of hydraulics will demonstrate the dependence of mean velocity on water depth, the critical mean velocity pertaining to a sediment of a given specific gravity and particle size is bound to be of variable magnitude. Consequently, bottom velocity must be resorted, the determination and observation of which presents considerable difficulties but which appears to describe the critical condition in an unambiguous manner. Unfortunately as was indicated by recent studies neither can the critical bottom velocity be regarded as a constant value as it depends among other things on the width of the channel as well [8, 9]. With regard to this fact the consideration of critical mean velocities still appears to be preferable, since mean velocities are readily determined, e.g. they are easily obtained from the discharge and the flow cross section.

In order to clear the role of velocity the problem will be investigated first on a theoretical basis. In this context the force necessary to deplace a sediment particle is represented by the impact force of the moving fluid. If the velocity of water relative to the sediment particle is v, then the impact force is [10]:

$$H = \Phi \left(\frac{\pi d^2}{4} \cdot v^2 \cdot \frac{\gamma}{g} \right) \tag{6}$$

where Φ varies with the area exposed to the impact force of water and the angle of slope. The weight of the sediment particle is

$$G' = \frac{\pi}{6} d^3 \ (\gamma_1 - \gamma). \tag{7}$$

At the moment where the sediment particle starts to move, $H = \varphi G'$, where φ depends on the angle of slope and on friction. With v_c denoting the critical velocity, in the boundary condition of incipient motion we have

$$\Phi \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) v_c^2 \frac{\gamma}{g} = \varphi \left[\frac{\pi d^3}{6} (\gamma_1^4 - \gamma) \right]. \tag{8}$$

Table II

Hydraulic data

Regime of movement	Depth D cm		Water temperature t °C		Particle diameter d mm	
	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
Critical	46,1	1,52	27	7,6	20,0	0,021

Results included have been observed by J. BOGÁRDI, L. IVICSICS, L. RÁKÓCZY, GUY—

Solving Eq. (8) for v_c, and combining Φ, φ, and the numerical proportionality coefficients into a single constant we obtain

$$v_c = \text{const } \sqrt{gd\,\varrho'}\,, \tag{9}$$

wherein

$$\varrho' = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} = \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho}\,.$$

In analogy to the theorem of constant tractive forces it was originally assumed that for a sediment of given particle size d and specific gravity γ_1

$$\frac{v_c}{\sqrt{gd\,\varrho'}} = t_{c_1} = \text{const}\,. \tag{10}$$

As was previously demonstrated the theorem of constant tractive forces proved to be incorrect [1, 2, 3]. Consequently the value of t_{c_1} may be expected to vary in a manner similar to that assumed in connection with the resistance coefficient f_c.

An attempt will be made hereafter to determine, relying on observation data ranging between the limits indicated in Table II, the resistance coefficient t_{c_1}, respectively the variation thereof. Table II differs from Table I in that it includes data of NEILL as well [11]. As will be demonstrated later the resistance coefficient is preferably considered in a different form, as t_{c_2} and t_c.

For determining the critical velocity v_c, resp. the resistance coefficient t_{c_1}, the theoretical form of the relationships will be derived by applying a new analytical method [4, 5, 6, 7].

Assuming the channel to be very wide in relation to depth, and further that the sediment is adequately described by its particle diameter d as well as its specific gravity, represented by the dimensionless number ϱ' introduced in the foregoing, then the boundary condition between stable bed and move-

of observations

Gradient S		Specific gravity of sediment γ_1 p/cm³		Flow velocity v_c cm/sec	
Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.
0,066	0,000055	2,65	2,49	113,0	14,5

SIMONS—RICHARDSON, NEILL; BARTON—LIU and collaborators as well as the *Technical University* Budapest (BOGÁRDI).

ment is obviously characterized by gravitational acceleration g [cm/sec^2], the mean water depth D [cm], the kinematic viscosity ν [cm^2/sec] and the gradient S [—] of the energy line. Assuming the details of our method to be familiar, all of the most frequently encountered potential dynamic velocities will preferably be taken into consideration. In this manner 15 potential dynamic velocities can be included in the 5 columns and 3 rows given below:

$$\sqrt{gR}; \quad \sqrt{gd}; \quad \nu/\mathrm{R}; \quad \nu/d; \quad \sqrt[3]{g\nu}; \tag{11}$$

$$\sqrt{gRS}; \quad \sqrt{gdS}; \quad (\nu/R)\,S; \quad (\nu/d)\,S; \quad \sqrt[3]{g\nu S}; \tag{12}$$

$$\sqrt{gR\varrho'}; \quad \sqrt{gd\varrho'}; \quad (\nu/R)\,\varrho'; \quad (\nu/d)\,\varrho'; \quad \sqrt[3]{g\nu\varrho'}\,. \tag{13}$$

It has been pointed out earlier that the above 15 velocities can be combined into groups containing no more than 5 independent velocities. Assuming the rules to be observed in selecting the independent velocities as familiar, let us select the group comprising the following 5 independent velocities:

$$\nu/d; \quad \sqrt[3]{g\nu}; \quad \sqrt{gDS}; \quad \nu/D; \quad \sqrt{gd\varrho'}\,. \tag{14}$$

From the velocities in Eq. (14) the following 4 independent velocity ratios can be formed:

$$\frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\nu/d} = \frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}, \tag{15a}$$

$$\frac{\nu/d}{\nu/D} = \frac{D}{d}, \tag{15b}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\nu/d} = \frac{U_* d}{\nu}, \tag{15c}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\nu/D} = \frac{U_* D}{\nu}\,. \tag{15d}$$

If the resultant mean velocity of the water course in the boundary condition between stable bed and movement is v_c, then the ratio t_{c_1} characteristic for this resultant velocity — see Eq. (10) — is defined theoretically by the following relationship:

$$\frac{v_c}{\sqrt{gd\varrho'}} = t_{c_1} = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}\ ;\ \frac{D}{d}\ ;\ \frac{U_* d}{\nu}\ ;\ \frac{U_* D}{\nu}\right). \tag{16}$$

In contrast to Eq. (10) it is to be seen from Eq. (16) that the resistance coefficient t_{c_1} is not constant but may depend on the 4 dimensionless parameters expressed by Eqs (15a)—(15d).

From observation results it may be concluded that one, or even several of the velocity ratios disappear in the actual relationships, since the desired resultant value is unaffected by them. This discrepancy is naturally an apparent one only, since Eq. (16) implies no more than the parameters on which the desired resultant value may depend mathematically (in accordance with the basic assumptions), but it does not necessarily depend on all of them.

Experimental results demonstrated the effect of $Re_{*S} = U_* d/\nu$ and $Re_* = U_* D/\nu$ to be mostly negligible in comparison with the other two parameters. (The effect of $U_* d/\nu$ and $U_* D/\nu$ will be analysed later.)

Neglecting, on the basis of this information, the effect of the sediment shear velocity Reynolds number, Re_{*S}, and that of the shear velocity Reynolds number, Re_*, the relationship

$$t_{c_1} = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}} \; ; \; \frac{D}{d}\right) \tag{17}$$

has been plotted in Fig. 3. The lines of the $d/\nu^{2/3} g^{-1/3} = \text{const.}$ values could, however, not be determined positively in the diagram, owing to the relatively narrow range of the t_{c_1} values. Nevertheless, the decreasing trend of this parameter with increasing D/d values is clearly revealed. The available experimental results thus offer no satisfactory foundation for the use of Eq. (17).

Continuing the investigation, let us now select from among the potential dynamic velocities in Eqs (11), (12) and (13) the following independent group comprising five velocities:

$$\frac{\nu}{d} \; ; \; \sqrt[3]{g\nu} \; ; \; \sqrt{gDS} \; ; \; \frac{\nu}{D} \; ; \; \sqrt{gD\varrho'} \, . \tag{18}$$

From these, four independent velocity ratios can be formed:

$$\frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\nu/d} = \frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}} \, , \tag{19a}$$

$$\frac{\nu/d}{\nu/D} = \frac{D}{d} \, , \tag{19b}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\sqrt{gD\varrho'}} = \sqrt{\frac{S}{\varrho'}} \, , \tag{19c}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\nu/D} = \frac{U_* D}{\nu} \, . \tag{19d}$$

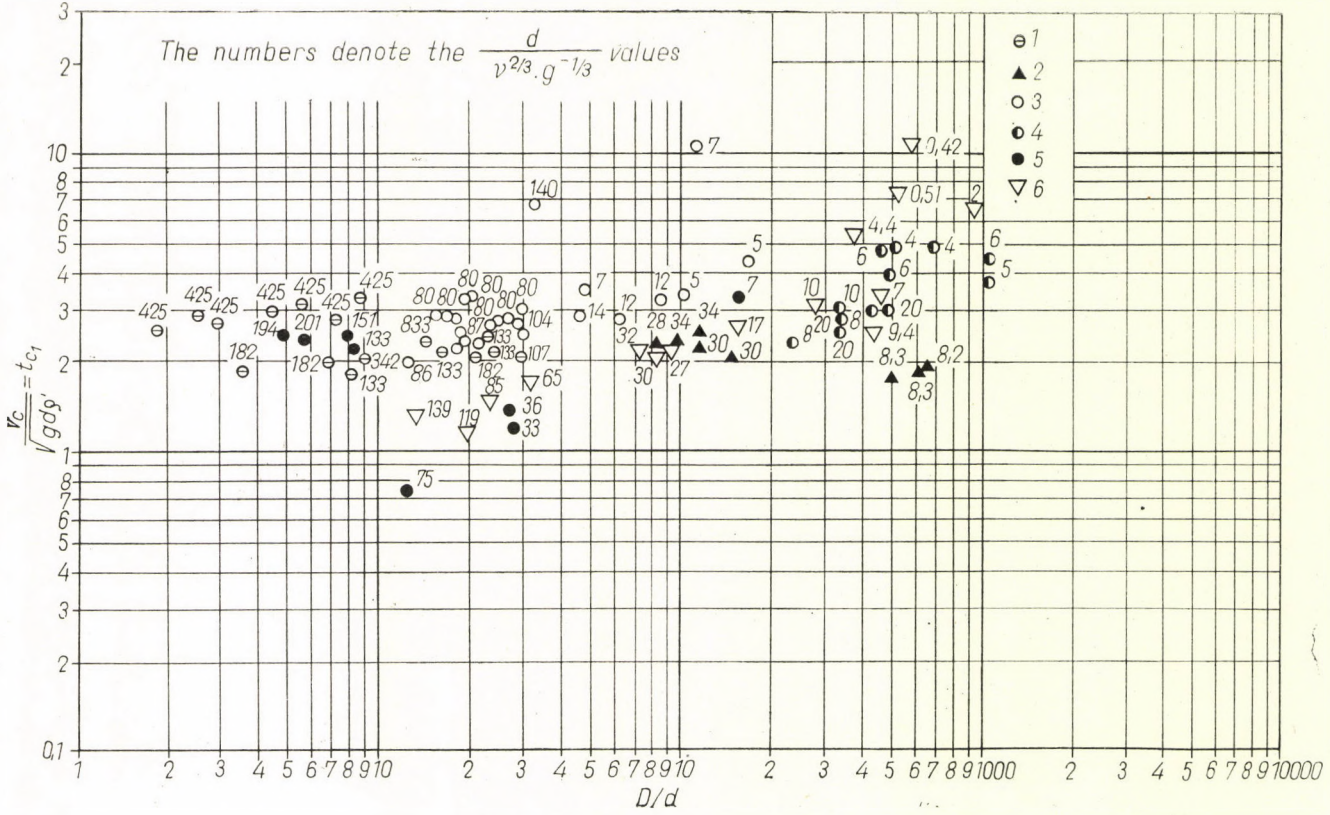


Fig. 3. Plot of the relationship between $t_{c1} = \frac{v_c}{\sqrt{g\, d\varrho'}}$, D/d and $\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}$ at the critical condition

1. Neill; 2. Bogárdi, (Techn. Univ. Budapest); 3. Barton, Liu, etc.; 4. Guy, Simons, Richardson; 5. Bogárdi—Ivicsics; 6. Rákóczy

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae 62, 1968

The resultant mean velocity v_c of the watercourse at the boundary condition of incipient movement should be characterized by the ratio

$$t_{c_2} = \frac{v_c}{\sqrt{gD\varrho'}} .$$

In this case the parameter t_{c_2} is defined theoretically by the following relationship:

$$\frac{v_c}{\sqrt{gD\varrho'}} = t_{c_2} = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}} \; ; \; \frac{D}{d} \; ; \; \frac{S}{\varrho'} \; ; \; \frac{U_* D}{\nu}\right). \tag{20}$$

By neglecting, in the definition of t_{c_2}, the parameters S/ϱ' and $U_* D/\nu$ we obtain

$$\frac{v_c}{\sqrt{gD\varrho'}} = t_{c_2} = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}} \; ; \; \frac{D}{d}\right). \tag{21}$$

The relationship is represented graphically in Fig. 4. In spite of the observable scatter it will be perceived positively from the diagram that the parameter t_{c_2} can be directly expressed in terms of the ratio D/d. According to the figure this relationship takes the form

$$\frac{v_c}{\sqrt{gD\varrho'}} = t_{c_2} = 1{,}7\left(\frac{D}{d}\right)^{-0{,}405} . \tag{22}$$

In Fig. 4 decreasing values of $d/\nu^{2/3} g^{-1/3}$ pertain to increasing values of D/d, but owing to the narrow range of values it was found impossible to determine lines pertaining to individual constant values. On the other hand, there appears to be a definite relationship between $d/\nu^{2/3} g^{-1/3}$ and the ratio D/d. On the strength of this relationship the values $d/\nu^{2/3} g^{-1/3} = 1$, 10 and 100 have been selected in Fig. 4 (denoted by dotted circles) to trace the graphical relationship of these two parameters in Fig. 5. According to the latter this relationship can be expressed as

$$\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}} = 6920\left(\frac{D}{d}\right)^{-1{,}18} . \tag{23}$$

As was demonstrated by the relationships given in the form of Eqs (22) and (23) the parameter t_{c_2} can be also expressed in terms of $d/\nu^{2/3} g^{-1/3}$. In fact, from the two relationships the third

$$\frac{v_c}{\sqrt{gD\varrho'}} = t_{c_2} = 0{,}085\left(\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}\right)^{0{,}34} \tag{24}$$

can be readily derived, which is illustrated in Fig. 6.

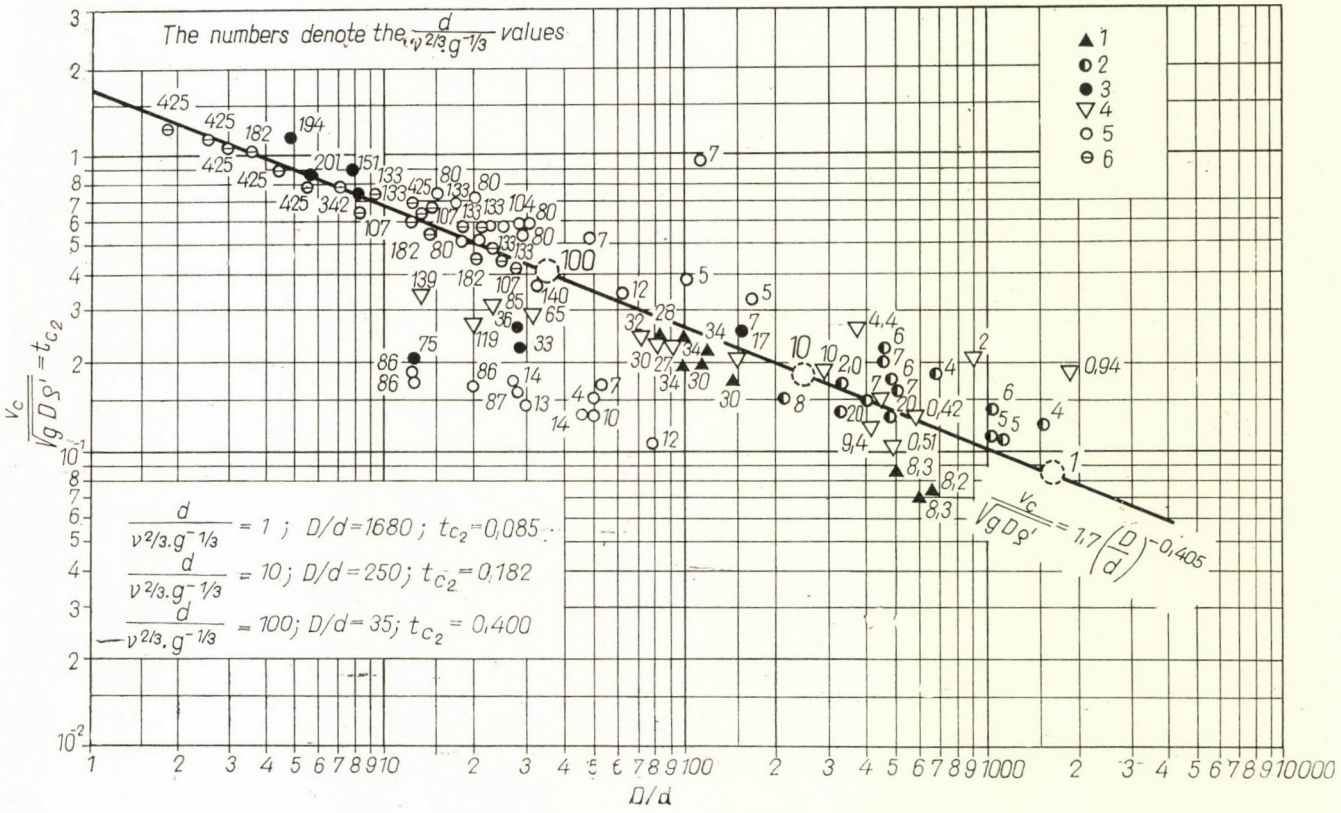


Fig. 4. Plot of the relationship between $t_{c2} = \frac{v_c}{\sqrt{gD\varrho'}}$, D/d and $\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}$ at the critical condition

1. Bogárdi, (Techn. Univ. Budapest); 2. Guy, Simons, Richardson; 3. Bogárdi—Ivicsics 4. Rákóczy; 5. Barton, Liu etc.; 6. Neill

In connection with Figs 4, 5 and 6 the following conclusions can be arrived at.

Within the range of experimental values Fig. 4 can be applied for estimating the critical mean velocity v_c. It should also be noted in this context

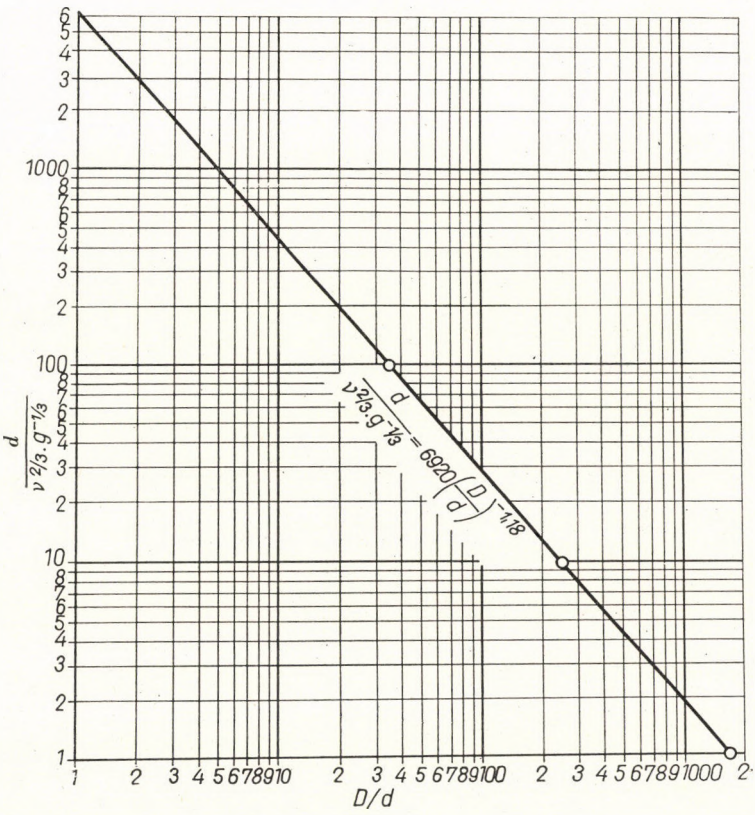


Fig. 5. Plot of the relationship between $\frac{d}{\nu^{2/3}\, g^{-1/3}}$ versus D/d based on Fig. 4

that the diagram yields useful values for a sediment having a specific gravity of $\gamma_1 = 2{,}65$ p/cm³ only, since the sediment used in all experiments had a specific gravity of $\gamma_1 = 2{,}65$ p/cm³, or one close to it. A further drawback of Fig. 4 is that it yields no information whatsoever on the gradient pertaining to the critical condition. As a consequence thereof, in the case of a particular sediment material and water depth the critical slope at which the critical mean velocity v_c according to Fig. 4 occurs, must be determined by trial and error.

From the remarks made in connection with Fig. 4 it should be obvious that neither Figs 5 and 6 are of general validity and describe no more than the particular relationships applying within the range of experimental data. Their validity thus remains restricted to particular cases.

Although in the relationships discussed so far the resistance coefficients t_{c_1} and t_{c_2} proved theoretically fully adequate for the determination of the criti-

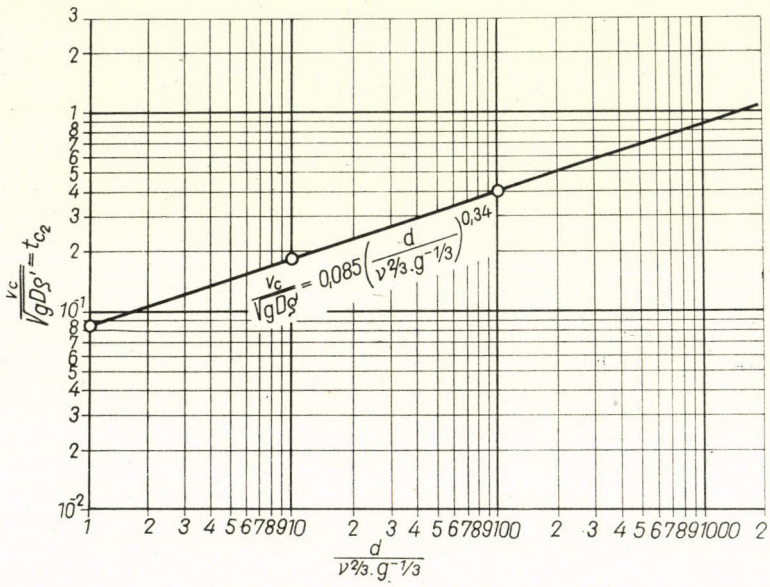


Fig. 6. Plot of $t_{c_2} = \dfrac{v_c}{\sqrt{gD\varrho'}}$ versus $\dfrac{d}{\nu^{2/3}\, g^{-1/3}}$ based on Figs 4 and 5

cal mean velocity v_c, it appears still preferable to introduce the parameter $t_c = v_c/\sqrt{gDS}$ instead, since in this manner the shear velocity $U_* = \sqrt{gDS}$ can also be introduced permitting thereby the application of Chézy's velocity formula. It should be remembered that the ratio of the shear velocity U_* and the mean velocity calculated from Chézy's formula is essentially Chézy's velocity coefficient c expressed in dimensionless form,

$$\frac{c\sqrt{DS}}{\sqrt{gDS}} = \frac{c}{\sqrt{g}} = c_1 . \tag{25}$$

Using the parameter $t_c = v_c/\sqrt{gDS}$ the critical velocity is estimated with the aid of the five-term velocity group of Eq. (14), or of the velocity ratios Eqs (15a) to (15d) developed therefrom.

From experience gained during the processing of experimental data it appears desirable to investigate the relationship

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{U_* d}{\nu};\quad \frac{D}{d}\right) \tag{26}$$

first. This investigation is all the more desirable since in the studies concerning the critical tractive force [1] the predominant influence of the relative roughness D/d was first demonstrated in connection with relationships similar to the graphical plots of Shields. The relationship of Eq. (26) has been plotted in Fig. 7 where the parameter t_c — regarding now the critical mean velocity — is similar to the parameter f_c in Shields' graphical plot. The scatter in Fig. 7 is, however, too large to permit the tracing of lines corresponding to D/d = const. values. This circumstance can be interpreted to indicate the slightness of the influence of the sediment shear velocity Reynolds number Re_{*s} on the critical mean velocity.

Reviewing the relationships of Eqs (17), (21), (22), (24) and (26) used so far for determining the critical mean velocity it will appear logically desirable to consider also the forms of theoretical relationships involving as independent variable Shields dimensionless resistance coefficient

$$f_c = \frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d}\,.$$

For this purpose let us select from among the velocities found in Eqs (11), (12) and (13) the five-term velocity group

$$\sqrt{gDS};\ \sqrt{gd\varrho'};\ \nu/d;\ \nu/D;\ \sqrt{gd}. \tag{27}$$

From these the independent velocity ratios

$$\sqrt{\frac{gDS}{gd\varrho'}} = \sqrt{f_c} = \sqrt{\frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d}}\,, \tag{28a}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\nu/d} = \frac{U_* d}{\nu}\,, \tag{28b}$$

$$\frac{\nu/d}{\nu/D} = \frac{D}{d}\,, \tag{28c}$$

$$\sqrt{\frac{gd\varrho'}{gd}} = \sqrt{\varrho'} \tag{28d}$$

should be formed.

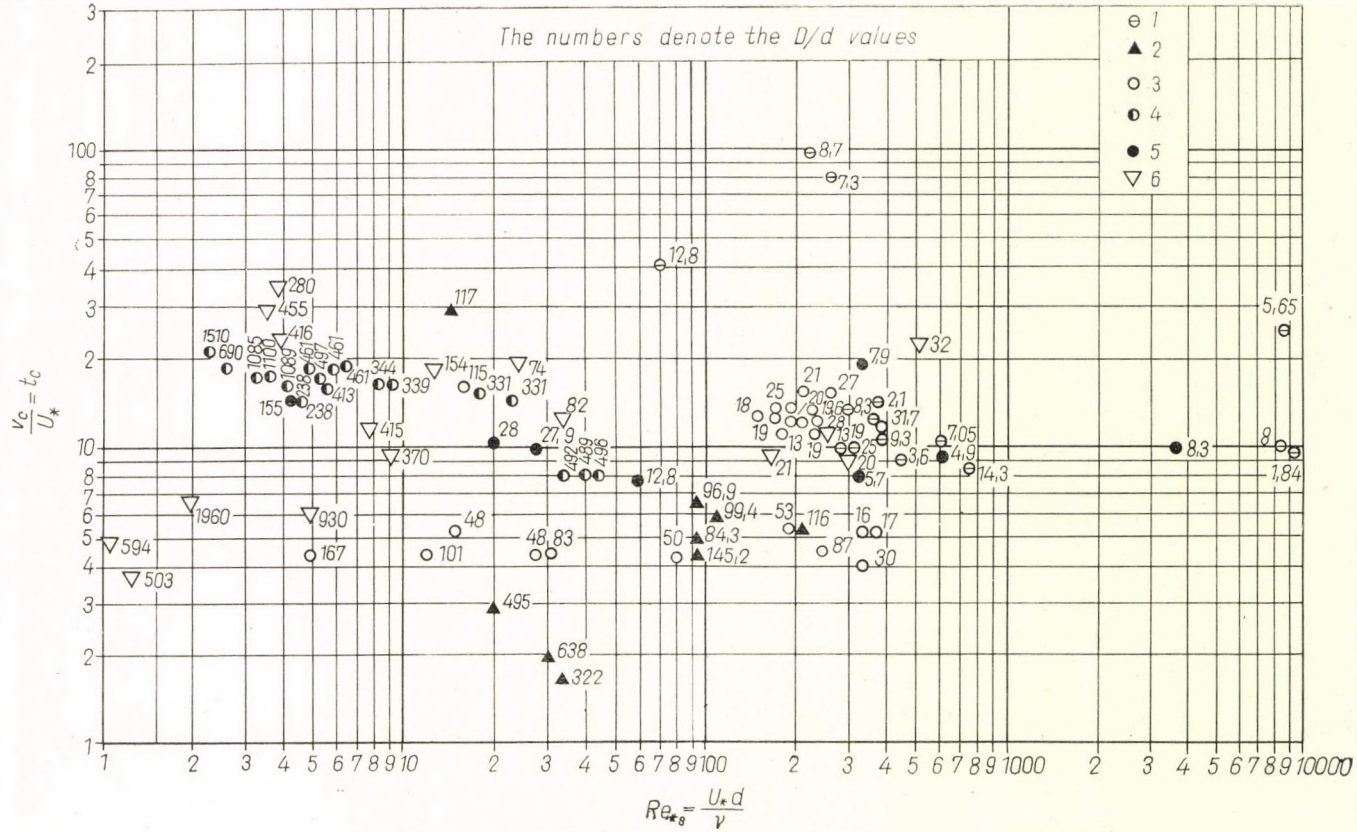


Fig. 7. Plot of the relationship between $\frac{v_c}{U_*}$, $\frac{U_* d}{\nu}$ and D/d at the critical condition

1. Neill; 2. Bogárdi (Techn. Univ. Budapest); 3. Barton, Liu, etc.; 4. Guy, Simons, Richardson; 5. Bogárdi—Ivicsics; 6. Rákóczy

The expressions of Eqs (28a) to (28b) yield the ratio of the critical mean velocity and theoretically the shear velocity in the following form:

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d};\ \frac{U_* d}{\nu};\ \frac{D}{d};\ \varrho'\right). \tag{29}$$

On the basis of the theoretical relationship under Eq. (29) several three-variable relationships have been considered. Of these the relationships

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{D}{d};\ \varrho'\right) \tag{30}$$

and

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d};\ \frac{U_* d}{\nu}\right) \tag{31}$$

failed to produce useful results, although the dependence on D/d and f_c was in agreement with earlier conclusions.

A slightly more definite relationship was observed in the case of the three-variable relationship

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{D}{d};\ \frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d}\right), \tag{32}$$

but the $f_c = \text{const.}$ lines could still not be determined in a positive manner.

Subsequently an attempt was made to introduce instead of the sediment shear velocity Reynolds number the shear velocity Reynolds number $\mathrm{Re}_* = U_* D/\nu$ and the gradient S.

For deriving theoretical relationships of this form let us select from the 15 velocities in Eqs (10), (11) and (12) the indepedent five-term velocity group

$$\sqrt{gD};\ \sqrt{gDS};\ \sqrt{gdS};\ \sqrt{gd\varrho'};\ \nu/D \tag{33}$$

which can be combined into the four independent dimensionless parameters

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\sqrt{gD}} = \sqrt{S}, \tag{34a}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\sqrt{gdS}} = \sqrt{\frac{D}{d}}, \tag{34b}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\sqrt{gd\varrho'}} = \sqrt{f_c} = \sqrt{\frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d}}, \tag{34c}$$

$$\frac{\sqrt{gDS}}{\nu/D} = \frac{U_* D}{\nu}. \tag{34d}$$

The parameter $v_c/U_* = t_c$ is defined theoretically by the relationship

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(S, \frac{D}{d}, \frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\,d}, \frac{U_* D}{\nu}\right). \tag{35}$$

Eventually, on the basis of the theoretical relationship under Eq. (35) the relationships

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\,d}\,;\; S\right) \tag{36}$$

and

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\,d}, \frac{U_* D}{\nu}\right) \tag{37}$$

have been examined, but as in the case of Eqs (17), (26), (30), (31) and (32) neither yielded useful results.

Within the range defined by available experimental data the most useful result was obtained when using the five-term velocity group given by Eq. (14) and the theoretical relationship

$$\frac{v_c}{U_*} = t_c = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3}\, g^{-1/3}}\,;\; \frac{D}{d}\,;\; \frac{U_* d}{\nu}\,;\; \frac{U_* D}{\nu}\right) \tag{38}$$

defined by the velocity ratios of Eqs (15a) to (15d), whereby — neglecting the effect of Re_{*s} and Re_* — the relationship

$$\frac{v_c}{U_*} = F\left(\frac{D}{d}\,;\; \frac{d}{\nu^{2/3}\, g^{-1/3}}\right) \tag{39}$$

was plotted. This relationship is illustrated in Fig. 8 revealing that the lines corresponding to constant $d/\nu^{2/3}\, g^{-1/3}$ values (1, 10 and 100 in Fig. 8) could be determined with an accuracy appreciably higher than before.

Since the functions $v_c/U_* = a(D/d)^n$ could be determined individually for the values 1, 10 and 100 of $d/(\nu^{2/3}\, g^{-1/3})$, these can be used to plot the relationship between the coefficient a and $d/\nu^{2/3}\, g^{-1/3}$, as was done in Fig. 9. Analytically this relationship assumes the form

$$a = 0{,}000044 \left(\frac{d}{\nu^{2/3}\, g^{-1/3}}\right)^{1{,}8} \tag{40}$$

whence the three-variable relationship

$$\frac{v_c}{U_*} = 0{,}000044 \left(\frac{d}{\nu^{2/3}\, g^{-1/3}}\right)^{1{,}8} \left(\frac{D}{d}\right)^{1{,}6} \tag{41}$$

is obtained.

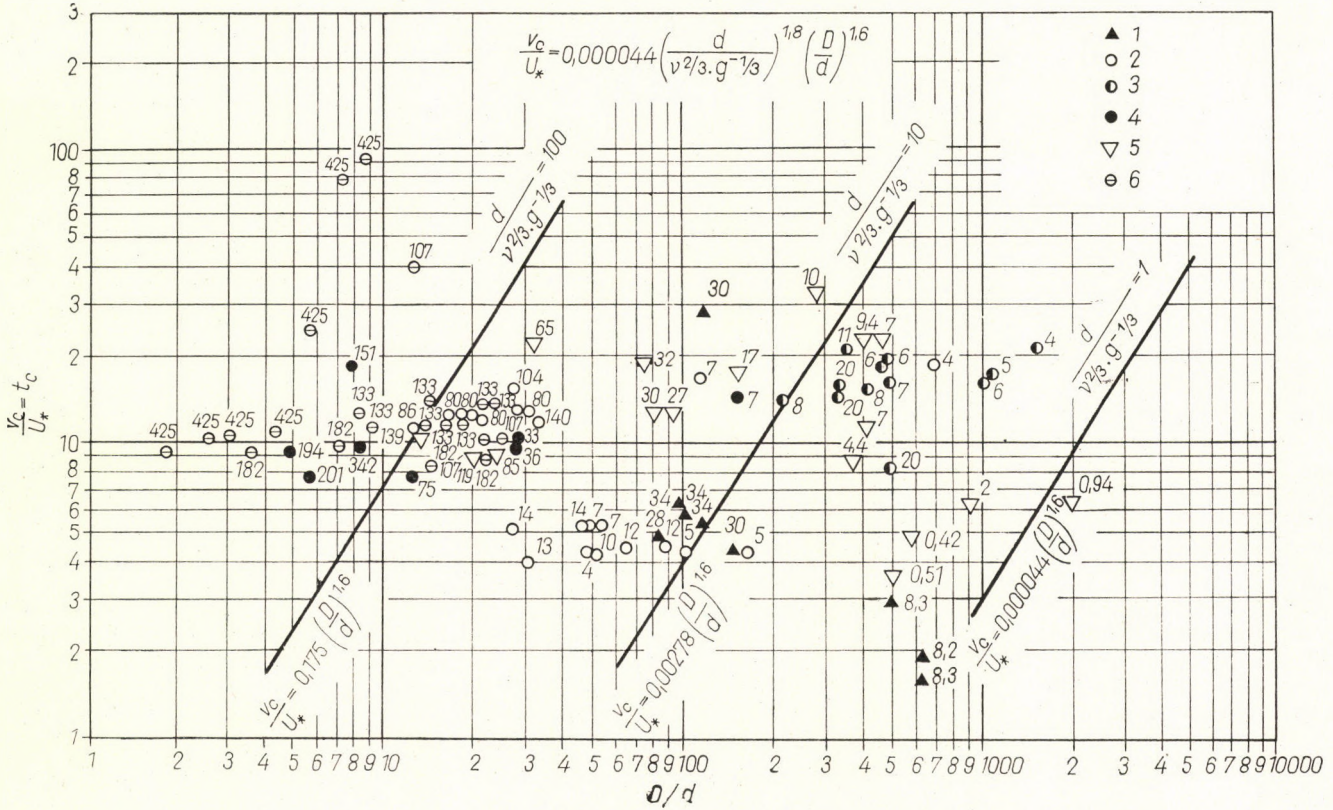


Fig. 8. Plot of the relationship between $\frac{v_c}{U_*}$, D/d and $\frac{d}{\nu^{2/3}\, g^{-1/3}}$ at the critical condition

1. Bogárdi (Techn. Univ. Budapest); 2. Barton, Liu, etc.; 3. Guy, Richardson, Simons; 4. Bogárdi —Ivicsics; 5. Rákóczy; 6. Neill

For the case of a given combination of water depth D, particle diameter d and water temperature, no more than the ratio v_c/U_* can be determined from Fig. 8. For this reason a different approach must be used for determining the critical gradient S_c necessary for calculating the magnitude of U_*, whereafter the ratio v_c/U_* will yield the desired critical mean velocity v_c. Fig. 1 which has not been discussed here in detail but explained in earlier papers, appears suitable for this purpose. In fact, for a given ratio D/d and $d/(\nu^{2/3} g^{-1/3})$ value the parameter

$$f_c = \frac{\tau_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d} = \frac{\gamma D S_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d}$$

will yield the critical gradient S_c.

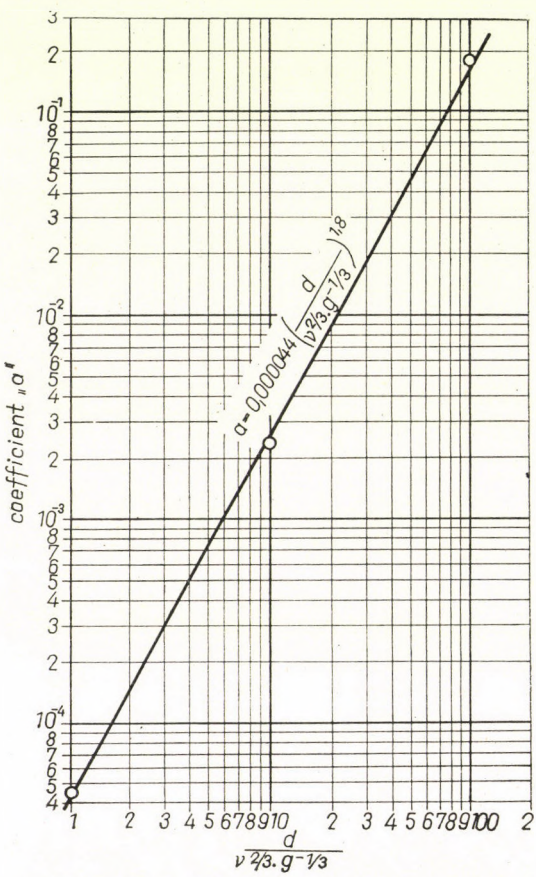


Fig. 9. The coefficient a of the relationship

$$\frac{v_c}{U_*} = a \left(\frac{D}{d}\right)^n$$

plotted versus parameter

$$\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}$$

on the basis of Fig. 8

Example: With the following basic data: water depth $= D = 9{,}4$ cm; sediment particle size $= d = 0{,}047$ cm; water temperature $= 20\ ^\circ$C, and thus $\nu^{2/3} g^{-1/3} = 0{,}0047$ cm, find the critical mean velocity v_c.

From Fig. 8: $D/d = 0{,}4/0{,}047 = 200$, further

$$\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}} = \frac{0{,}047}{0{,}0047} = 10$$

and thus the value

$$\frac{v_c}{U_*} = \frac{v_c}{\sqrt{gdS}} = 11{,}6$$

is obtained.

In Fig. 1 the pair of values $D/d = 200$ and $d/(\nu^{2/3} g^{-1/3}) = 10$ defines the parameter

$$f_c = \frac{\gamma D S_c}{(\gamma_1 - \gamma)\, d} = 0{,}0155\,.$$

Consequently, the gradient required to produce critical conditions is

$$S_c = \frac{0{,}0155 \cdot (\gamma_1 - \gamma)\, d}{\gamma \cdot D} = \frac{0{,}0155(2{,}65 - 1) \cdot 0{,}047}{1 \cdot 9{,}4} = 0{,}000127\,.$$

$$U_* = \sqrt{gDS} = \sqrt{981 \cdot 9{,}4 \cdot 0{,}000127} = \sqrt{1{,}17} = 1{,}08 \text{ cm/sec.}$$

and thus the desired critical mean velocity is

$$v_c = 11{,}6 \cdot 1{,}08 = 12{,}5 \text{ cm/sec.}$$

For the sake of completeness let us calculate hereafter the critical tractive force as well:

$$\tau_c = f_c\,(\gamma_1 - \gamma)\, d = 0{,}0155 \cdot 1{,}65 \cdot 0{,}047 = 0{,}0012 \text{ p/cm}^2.$$

In *engineering practice* the problem frequently encountered is to determine for a given combination of water depth, gradient, temperature and corresponding mean velocity the largest sediment particle diameter which is still set into motion, i.e., beyond which the coarser fractions remain at rest. Problems of this nature must be solved by trial and error, reversing the above procedure.

Let the water depth be given as $D = 9{,}4$ cm, the gradient as $S = 0{,}000127$, the water temperature as $20\ ^\circ$C and the mean velocity observed, or calculated therefrom as $v_c = 12{,}5$ cm/sec. Determine the particle diameter which will be in the boundary condition of incipient movement.

Calculating the value

$$U_* = \sqrt{981 \cdot 9{,}4 \cdot 0{,}000127} = 1{,}08 \text{ cm/sec,}$$

we have

$$\frac{v_c}{U_*} = \frac{12{,}5}{1{,}08} = 11{,}6\,.$$

As a first approximation assume $D/d = 100$, i.e. the desired particle diameter is

$$d = \frac{9{,}4}{100} = 0{,}094 \text{ cm.}$$

Since at 20 °C temperature $\nu^{2/3} g^{-1/3} = 0{,}0047$, we obtain $d/(\nu^{2/3} g^{-1/3}) = 20$, and in Fig. 8 the D/d value corresponding to this and to the parameter $v_c/U_* = 11{,}6$ is about $20 \div 30$. The particle size must consequently be reduced, or conversely for a given D depth, the ratio D/d must be increased.

As a *second approximation* assume $D/d = 250$, i.e. the particle diameter is now

$$d = \frac{9{,}4}{250} = 0{,}0376 \text{ cm}.$$

Thus

$$\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}} = \frac{0{,}0376}{0{,}0047} = 8{,}02\,,$$

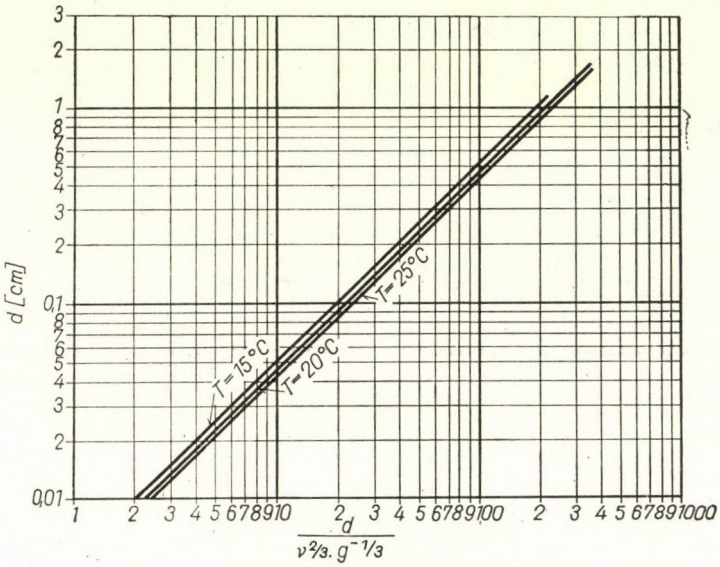


Fig. 10. The d versus $\frac{d}{\nu^{2/3} g^{-1/3}}$ relationship plotted for water temperatures $t = 15$, 20 and 25 °C

which together with the corresponding $v_c/U_* = 11{,}6$ value yields from Fig. 8 for the ratio D/d the value 300 to 320. The desired particle size must be somewhat larger to obtain for a given depth D a lower ratio D/d.

After additional trials we obtain $D/d = 200$ for the correct value, indicating according to the example demonstrated in detail that the sediment fraction of diameter $d = 0{,}047$ cm will then be in the boundary condition of incipient movement.

In connection with Fig. 8 it should be emphasized that it applies only to a sediment with a specific gravity of $\gamma_1 = 2{,}65$ p/cm³. In contrast with the remarks made previously in connection with the critical tractive force, it should be added that for sediments having a specific gravity other than 2,65 the relationships dealt with above must not be used for estimating the critical velocity v_c.

Since it is usually desired to determine the particle diameter for different temperatures, and since it would be inconvenient to use the parameter $d/(\nu^{2/3}\ g^{-1/3})$ given for a single temperature only, the relationships

$$d = F\left(\frac{d}{\nu^{2/3}\ g^{-1/3}}\right)$$

have been plotted in Fig. 10 also for temperatures $t = 15$, 20 and 25 °C.

REFERENCES

1. BOGÁRDI, J. L.: Bestimmung der Grenzzustände bei der Geschiebebewegung. *Die Wasserwirtschaft.* (In print.)
2. SHIELDS, A.: Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. *Mitt. der Preuss. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Heft 26, Berlin 1936.
3. BOGÁRDI, J. L.—YEN, C. H.: Traction of Pebbles by Flowing Water. Iowa City 1938.
4. BOGÁRDI, J. L.: Kapcsolatok elméleti vizsgálata a vízfolyások hordalékszállításánál (Theoretical Considerations on the Relationships Describing Sediment Transportation in Watercourses). — *Hidrológiai Közlöny* (1967), pp. 215—226.
5. BOGÁRDI, J. L. A vízfolyások hordalékszállításának néhány elméleti tétele (Theoretical Relations in Sediment Transportation by Watercourses). — *ÉKME Tud. Közl.* Budapest XIII (1967), pp. 363—371.
6. BOGÁRDI, J. L.: Discussion (closure) of European Concepts of Sediment Transportation. — *Proc. of the ASCE, Hydraulics Division.* **93,** No. HY6 (1967), USA, pp. 411—422.
7. BOGÁRDI, J. L.: Validity of Theoretical Foundations of the Relationships. *Corso Internazionale di Idrologia di Padova.* Section: Stream Hydraulics, Padova 1967, pp. 31.
8. STELCZER, K.: Problems Relating to Bed-Morphology with Special Regard to Permissible Velocities — *XIth Congress, IAHR*, Paper 3.32, Leningrad 1965.
9. BOGÁRDI, J. L.: Sediment Transportation in alluvial streams. — International Post-Graduate Course on Hydrological Methods for Developing Water Resources Management — Budapest 1968. Series of Manuals, No. 13, Subject 12, pp. 133.
10. BOGÁRDI, J. L.: A hordalékmozgás elmélete (Theory of Sediment Transportation). — Akadémiai Kiadó, Budapest 1955.
11. NEILL, C. R.: Stability of Coarse Bed-Material in Open-Channel Flow. — Preliminary Report. Research Council of Alberta Highways Division, Edmonton, Canada, January 1967.

Charakterisierung der Inbewegungsetzung der Geschiebe durch die kritische mittlere Geschwindigkeit. Aus den vorigen Abhandlungen des Verfassers stellt sich heraus, daß die kritische Schleppkraft, die die Inbewegungsetzung des Geschiebes charakterisiert, auch bei einem Geschiebematerial gegebenen Korndurchmessers d und spezifischen Gewichts γ_1 nicht konstant ist, und in erster Linie von der durch das Verhältnis der Wassertiefe D und des Korndurchmessers d charakterisierten relativen Rauhigkeit abhängt. Offenbar, den Beginn der Geschiebebewegung determinierende kritische mittlere Geschwindigkeit ist auch selbst kein Festwert, sondern hängt von den Umständen der Beobachtung, in erster Linie von der relativen Rauhigkeit ab. Die Abhandlung, von der klassischen Theorie der Stoßkraftstärke ausgehend, untersucht die Änderung der kritischen mittleren Geschwindigkeit und ihre Abhängigkeit von den aus den verschiedenen physikalischen Größen bildbaren Parametern in zahlreichen Varianten. Schließlich wird der Quotient der kritischen mittleren Geschwindigkeit und der Gleitgeschwindigkeit als Funktion der relativen Rauhigkeit sowie des vom Korndurchmesser und von der Viskosität abhängigen Parameters ermittelt. Die Zusammenhänge werden auf Grund von theoretischen Überlegungen, sowie mittels tatsächlicher Versuchsergebnisse in graphischer Form und auch numerisch angegeben.

Caractérisation du début de charriage par la vitesse moyenne critique. Il ressort des travaux antérieurs de l'auteur qu'en cas même d'une grosseur de grains d et d'un poids spécifique γ_1 des matériaux solides, la force d'entraînement critique des matériaux caractérisant le début du charriage n'est pas constante et dépend en premier lieu de la rugosité relative d déterminée par le quotient de la profondeur d'eau D et du diamètre d des grains. La vitesse moyenne critique caractérisant le début du charriage ne doit pas être non plus de valeur constante, mais dépend des conditions de l'observation, et notamment de la rugosité relative. L'étude partant de la méthode classique de la force de choc, examine de nombreuses alternatives de la variation de la vitesse moyenne critique et sa dépendance des paramètres pouvant être formés des différentes quantités physiques. En fin de compte, le quotient de la vitesse moyenne critique et de la vitesse de glissement est déterminé en fonction de la rugosité relative et du paramètre dépendant du diamètre des grains et de la viscosité. Les rapports sont donnés, sous formes graphique et numérique, sur la base de considérations théoriques et à l'aide de résultats expérimentaux réels.

Характеристика начала движения наносов при помощи средней критической скорости *(Я. Богарди)*. Из предыдущей работы вытекает, что критическое усилие смещения наносов, характеризующее начало движения наносов, не является постоянным ни для материала наносов с данной крупностью d_1 и с данным удельным весом γ_1 и зависит, в первую очередь, от глубины воды и относительной шероховатости, определяемой частным диаметра зерен D/d. Естественно, что средняя критическая скорость начала движения наносов также не является постоянной величиной, а зависит от условий наблюдения, и в первую очередь от относительной шероховатости. Работа, исходя из классической теории ударной силы, в ряде вариантов изучает изменение средней критической скорости и ее зависимость от параметров, которые можно образовать из различных физических количеств. В конечном результате автор частное средней критической скорости и скорости смещения определяет в функции параметра, зависящего от относительной шероховатости, а также диаметра зерен и вязкости. В работе существующие связи даются на основе теоретических соображений, а также результатов действительных опытов в графической и цифровой форме.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 25—30 (1968)

NUMERICAL SOLUTION OF MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN DISC ANALYSIS

K. SZMODITS
DR. OF TECHN. SC.
BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

Author treats the solution of the problem of mixed peripheral values of symmetric and antimetric discs in respect to the axes x and y. The problem is solved by treating the question according to the theory of complex functions of the plane stress state. In solving the problem the holomorph complex stresses are written in the form of power series expansion, and the constants of these series are determined by peripheral collocation. The procedure gives the solution without introducing the stress function F, because thus it is simpler to write down the peripheral conditions.

A solution is presented for mixed boundary value problems arising in the analysis of discs that are symmetrical and antimetrical with respect to the x and y axes. The approach is based on the complex function form of the plane stress state. Holomorphic complex stresses are expanded into a power series the constants of which are determined by collocation along the boundary. The solution does not involve the introduction of the stress function F, the boundary conditions being more readily determined in this manner.

In mixed boundary value problems of disc analysis the contour curve consists of sections which can be classified into two groups, in the first of which the boundary forces, in the second the displacements are given at discreet points. Depending on whether the contourline is formed by a single closed curve pertaining to the first group, or one belonging to the second group, the first, or the second boundary value problem is to be solved.

In the case of arbitrary contour curves the boundary value problems of disc analysis can be solved by numerical methods only. In the methods commonly applied the aim is to find the stress function F. Since boundary forces as well as boundary displacements can be expressed in terms of F, the boundary conditions can also be related to F. The resulting expressions are as a rule involved and consequently the development of the set of linear equations for determining the independent constants of the stress functions F satisfying the disc equation $\Delta\Delta F = 0$, under the restriction that these should also approximately satisfy the boundary conditions, is a lengthy and difficult task.

An appreciably simplified approach to the development of these equations can be followed by applying the method of complex function analysis to two-dimensional problems [1]. In this case rather than the stress function F

the complex stresses $W(z)$ and $w(z)$ are sought for in terms, of which the boundary conditions can be expressed readily even for arbitrary contours and the resulting expressions can readily be resolved into real functions.

In the case of a two-plane stress state the boundary conditions of the first and second boundary value problems for a disc in the complex plane are obtained by a slight modification of the expressions on p. 71 in [1] as

$$2\,(N - iS) = W(z) + \overline{W}(\bar{z}) - [\bar{z}W'(z) + w(z)]\,e^{2i\alpha} \tag{1}$$

$$4\,E(U_n + iU_s) = \{(3 - \eta)\,{}'W(z) - (1 - \eta)\,[z\overline{W}(\bar{z}) - {}'\overline{w}(\bar{z})]\}\,e^{-i\alpha}, \tag{2}$$

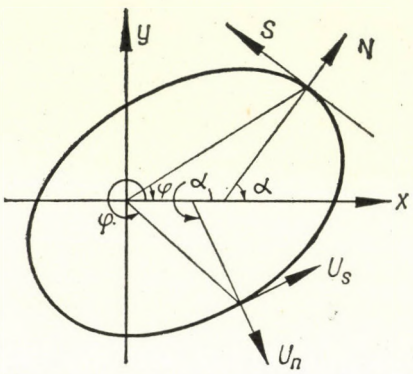


Fig. 1

where N and S are normal and tangential boundary forces, respectively, U_n and U_s are normal and tangential boundary displacements, respectively, α is the angle included by the surface normal and the x axis, E is Young's modulus of elasticity of the disc material, η is Poisson's number, where the upper right-hand comma indicates differentiation, the upper left-hand comma integration, i.e., $W(z) = \int W(z)\,dz$ (Fig. 1). Since the constants of integration denote translations and rotations of the disc as a rigid body, these can be neglected in the present analysis.

The stresses σ_x, σ_y and τ_{xy}, as well as the displacements u and v in the directions x and y, respectively, are related to the complex stresses as [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= W(z) + \overline{W}(\bar{z}) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2\,i\tau_{xy} &= \bar{z}W'(z) + w(z) \\ 4\,\mu(u + iv) &= \varkappa\,{}'W(z) - z\overline{W}(\bar{z}) - {}'\overline{w}(\bar{z})\,, \end{aligned} \tag{3}$$

where in the case of plane stresses $\varkappa = 3 - \eta/(1 + \eta)$ and in the case of plane strains $\varkappa = 3 - 4\eta$, while

$$2\,\mu = \frac{E}{1 + \eta}\,.$$

In the knowledge of the complex stresses $W(z)$ and $w(z)$ the stresses and displacements are obtained from Eqs (3).

The complex stresses being holomorphous functions, they can be expanded into the following power series:

$$W(z) = \sum_n A_n z^n; \quad w(z) = \sum_n a_n z^n; \tag{4}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

where A_n and a_n are unknown real constants.

With the substitutions $Z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ and $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$, Eqs (4) are rewritten into a trigonometric form and on substitution into Eqs (1) and (2), further by separating real and imaginary parts, we obtain for the boundary forces and boundary displacements the following expressions:

$$\begin{aligned}
2N &= \sum_n A_n \{2 r^n \cos n\varphi - n r^{n-1} [\cos(n-1)\varphi \cdot \Phi - \sin(n-1)\varphi \cdot \psi\} - \\
&\quad - \sum_n a_n r^n (\cos n\varphi \cos 2\alpha - \sin n\varphi \sin 2\alpha), \\
2S &= - \sum_n A_n n r^{n-1} \{\cos(n-1)\varphi\psi + \sin(n-1)\varphi \cdot \Phi\} + \\
&\quad + \sum_n a_n r^n (\sin n\varphi \cos 2\alpha + \cos n\varphi \sin 2\alpha),
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
4EU_n &+ \sum_n A_n \left\{(3-\eta) \frac{r^{n+1}}{n+1} [\cos(n+1)\varphi \cos\alpha + \right. \\
&+ \sin(n+1)\varphi \sin\alpha] - (1+\eta) r^n (\cos n\varphi \cdot \Phi_1 + \\
&\left. + \sin n\varphi \cdot \psi_1)\right\} - \sum_n a_n (1+\eta) \frac{r^{n+1}}{n+1} \times \\
&\times [\cos(n+1)\varphi \cos\alpha - \sin(n+1)\varphi \sin\alpha],
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
4EU_s &= \sum_n A_n \left\{(3-\eta) \frac{r^{n+1}}{n+1} [\sin(n+1)\varphi \cos\alpha - \right. \\
&- \cos(n+1)\varphi \sin\alpha] - (1+\eta) r^n (\cos n\varphi \cdot \psi_1 - \\
&\left. - \sin n\varphi \cdot \Phi_1)\right\} + \sum_n a_n (1+\eta) \frac{r^{n+1}}{n+1} \times \\
&\times [\cos(n+1)\varphi \sin\alpha - \sin(n+1)\varphi \cos\alpha],
\end{aligned}$$

where

$$\Phi = \cos\varphi \cos 2\alpha + \sin\varphi \sin 2\alpha,$$
$$\psi = \sin\varphi \cos 2\alpha - \cos\varphi \sin 2\alpha,$$
$$\Phi_1 = \cos\varphi \cos\alpha + \sin\varphi \sin\alpha,$$
$$\psi_2 = \sin\varphi \cos\alpha - \cos\varphi \sin\alpha;$$
$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

For ease of calculation r is expediently reduced to a dimensionless form by division with the length unit. Hereafter, the constants will have a dimension identical to that of stresses.

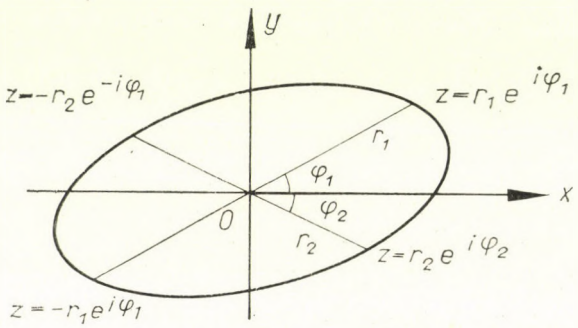


Fig. 2

The numerical values of the constants are determined by collocation along the boundary. For this purpose Eqs (5) and (6) are written for fairly closely spaced boundary points and solved for the unknown constants. In the boundary points N and S, or U_n and U_s which are given, two equations can be written for each of the boundary points. If the number of boundary points is n, the number of available equations is $2n$, from which $2n$ unknown constants can be determined in an unequivocal manner.

In the special case where both the contour curve and the acting load are antimetric to the x axis, it will be perceived from Fig. 2 that for $n = 0, 2, 4, \ldots$ in the antimetric points Z^n will become identical, and consequently the solution given by Eq. (4) will also become antimetric to the x axis. Boundary conditions should then be written for discreet points lying on one side of the x axis only. On the other hand, in that particular case where both the acting load and the contour curve are symmetrical about the x axis, the complex stresses become

$$W(z) = \sum_n A_n (z^n + z^{-n}),$$
$$w(z) = \sum_n a_n (z^n + z^{-n}), \tag{7}$$

where $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. When the acting load and the contour curve are symmetrical to both the x and y axes, in Eqs (7) $n = 0, 2, 4, \ldots$. Resolving Eqs (7) into real and imaginary parts, Eqs (5) and (6) supplemented with the terms containing $(-n)$ are obtained.

These terms, denoted by an upper dash, are as follows:

$$2\bar{N} = \sum_n A_n \{2 r^{-n} \cos n\varphi + n r^{-(n+1)} [\cos (n+1)\varphi \cdot \Phi + \sin (n+1)\varphi \cdot \psi]\} -$$

$$- \sum_n a_n r^{-n} (\cos n\varphi \cos 2\alpha + \sin n\varphi \sin 2\alpha) ;$$

$$2\bar{S} = \sum_n n A_n r^{-(n+1)} [\cos (n+1)\varphi \cdot \psi - \sin (n+1)\varphi \cdot \Phi] +$$

$$+ \sum_n a_n r^{-n} (\cos n\varphi \sin 2\alpha - \sin n\varphi \cos 2\alpha) ;$$

$$4E\bar{U}_n = \sum_n A_n \left\{(3-\eta) \frac{r^{1-n}}{1-n} [\cos (1-n)\varphi \cos \alpha - \right.$$

$$\left. - \sin (1-n)\varphi \sin \alpha] - (1+\eta) r^{-n} (\cos n\varphi \cdot \Phi_1 - \sin n\varphi \cdot \psi_1)\right\} -$$

$$- \sum_n a_n (1+\eta) \frac{r^{1-n}}{1-n} [\cos (1-n)\varphi \sin \alpha - \sin (1-n)\varphi \cos \alpha] ;$$

$$4E\bar{U}_s = - \sum_n A_n \left\{(3-\eta) \frac{r^{1-n}}{1-n} [\sin (1-n)\varphi \cos \alpha + \cos (1-n)\varphi \sin \alpha] + \right.$$

$$\left. + (1-\eta) r^{-n} (\cos n\varphi \cdot \psi_1 + \sin n\varphi \cdot \Phi_1)\right\} +$$

$$+ \sum_n a_n (1+\eta) \frac{r^{1-n}}{1-n} [\cos (1-n)\varphi \sin \alpha - \sin (1-n)\varphi \cos \alpha] .$$

Example

Let us find the state of stress in a circular disc loaded by the uniformly distributed boundary forces N. Owing to full axial symmetry Eqs (5) and (6) must be written for a single boundary point only. Since for all φ values $S = 0$, all constants of Eq. (6) are eliminated and thus from Eq. (5), in which only $A_0 \neq 0$ and $N = A_0$, and further from Eqs (3) we have

$$\sigma_x + \sigma_y = 2N ; \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 0$$

and thus

$$\sigma_x = \sigma_y = N ; \quad \tau_{xy} = 0 .$$

Since the boundary condition is satisfied at each of the boundary points, the solution obtained is the exact one.

REFERENCE

1. MILNE, L. M.—THOMSON: Plane Elastic Systems. Springer Verlag, Berlin 1960.

Numerische Lösung der komplexen Randwertaufgaben von Scheibenproblemen. In diesem Aufsatz beschäftigt sich der Verfasser mit der Lösung der komplexen Randwertaufgabe von zu den Achsen x und y antimetrischen und symmetrischen Scheiben. Die Lösung wird durch eine komplexe Behandlungsweise der Funktionenlehre des ebenen Spannungszustandes durchgeführt. Im Laufe der Lösung werden die holomorphen komplexen Spannungen in in Potenzreihen entwickelten Formen aufgeschrieben, und die Konstanten dieser Reihen werden durch Randkollokation ermittelt. Dem Verfahren gemäß wird die Lösung ohne Einführung der Spannungsfunktion F bestimmt, da das Aufschreiben der Randbedingungen auf diese Weise viel einfacher ist.

Solution numérique du problème mixte de la valeur au contour de l'élasticité à deux dimensions. L'étude présente la solution du problème mixte de la valeur au contour des disques antimétriques et symétriques aux axes x et y. La solution s'obtient par la méthode des variables complexes. Au cours de la solution, les complexes holomorphes sont exprimés sous forme développée en série et les constantes des séries déterminées par une collocation au contour. On obtient la solution sans introduire la fonction de contrainte F et l'expression des conditions au contour est considérablement simplifiée.

Числовое решение смешанных задач по значениям периметров дисковых проблем (*К. Смодич*). Работа посвящена решению смешанных задач по значениям периметров дисков, антиметрических и симметрических к осям x и y. Решение осуществляется при помощи комплексной функциональной трактовки плоскостного напряженного состояния. В прцессе решения голоморфные комплексные напряжения записываются в виде разложенного в степенной ряд и постоянные этих рядов определяются периметрической коллокацией. Предлагаемый метод определяет решение без введения функции напряжения F, так как периметрические (окружные) условия таким образом можно записать значительно проще.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 31—43 (1968)

NOUVELLE MÉTHODE POUR L'EXAMEN DU FLUAGE DES ACIERS

Á. SZOMBATFALVY
INSTITUT DE RECHERCHES SIDÉRURGIQUES

[Manuscrit reçu le 13 mars 1967]

Les processus de ségrégation se déroulant au cours du fluage des aciers ont été examinés sur la base de la variation de la résistance électrique et de la force coercitive. Des essais de 10 000 heures effectués à 550° et 565 °C ont montré que la force coercitive varie rapidement au début et plus lentement après 3000 heures. Sur la base de relations connues, on en peut conclure à la vitesse de ségrégation des carbures. L'accroissement de la conductivité électrique indique un appauvrissement en éléments d'alliage de la matrice. D'après nos expériences, ce processus est indépendant de la sollicitation mécanique, tandis que la ségrégation de carbures est modifiée par les contraintes.

I. Introduction

L'étude de la vaste littérature consacrée au fluage des matériaux métalliques permet de constater que le fluage est un phénomène fort complexe qui peut s'accomplir sous l'effet de plusieurs mécanismes. Dans le fond, c'est une conséquence du mouvement des dislocations [1—7], dont la vitesse est déterminée par différents phénomènes accompagnants: ségrégation, recristallisation, grossissement du grain, polygonisation, effet Snoek, effet thermoélastique, etc. Il semble très probable que chacun de ces mécanismes entre en jeu en cas d'efforts de longue durée, leur effet variant en fonction de la composition et de la structure de l'alliage, de la température et de l'effort. Des essais multiples prouvent que le fluage s'accompagne toujours d'une ségrégation de carbures, à laquelle on attribue une assez grande importance du point de vue de la vitesse du processus [8—14]. Mais des précipités ne s'observent au microscope que dans les phases ultérieures du fluage, après quelques milliers d'heures [15], tandis que les déformations plus rapides apparaissent surtout dans la phase initiale de l'essai. On peut donc supposer que le fluage est également lié à la formation de précipités submicroscopiques, de germes et de zones Guiner-Preston qui pourraient être responsables du ralentissement de la déformation, plus rapide au début du processus. Pour élucider ce problème, nous avons tenté d'appliquer des méthodes plus sensibles que celle microscopique, qui nous permettraient un contrôle quantitatif du processus de ségrégation de carbures. Les méthodes d'examen qui pouvaient entrer en ligne de compte sont basées sur la mesure des *propriétés physiques:* frottement interne [16—17], force coercitive [18—21] et résistance électrique [22].

Nous avons dès l'abord rejeté l'idée de mesurer le frottement interne, car d'un côté l'appareil de Ké [23] ne se prête qu'à l'examen des fils et d'autre part, l'Elastomat de Förster ne s'est pas avéré suffisamment sensible au cours des essais préalables que nous avons effectués.

Les relations entre la force coercitive et la ségrégation sont depuis longtemps connues. On les explique par le fait que le déplacement des parois de Bloch provoqué par le champ magnétique extérieur est entravé par les ségrégations [24—26]. Cet effet est le plus grand quand le diamètre des particules est à peu près identique à l'épaisseur de la paroi de Bloch, donc s'il est de l'ordre de 0,01 micron. La force coercitive dépend, en dehors de la dimension critique, du nombre des ségrégations par unité de volume et varie à peu près linéairement avec lui.

La grandeur de la *conductivité électrique* est une propriété caractéristique de tous les métaux; l'alliage la diminue dans tous les cas, car les atomes étrangers inclus dans le réseau atomique empêchent le mouvement des électrons de conduction. Mais cet effet dépend du genre d'alliage: dans les alliages d'une structure hétérogène, la conductivité varie presque linéairement avec le pourcentage atomique des phases, tandis qu'en cas de solutions solides, une faible quantité d'alliants la diminue déjà considérablement [27]. Les processus de ségrégation s'accompagnent donc de l'accroissement de la conductivité électrique [28—31].

Il ressort de ces constatations que les deux méthodes se complètent et peuvent même permettre un contrôle mutuel. En effet, de l'appauvrissement en éléments d'alliage de la matrice résulte une amélioration de la conductivité, tandis que la modification des propriétés magnétiques indique l'apparition de zones G. P., germes ou carbures.

C'est à partir de cette hypothèse que nous avons examiné la transformation des propriétés magnétiques des éprouvettes sous charge constante pendant 10 000 heures, et effectué des essais systématiques en mesurant la conductivité électrique et la force coercitive. Les éprouvettes étaient de l'acier moulé de qualité 10 CrMo 910. Leur composition variait dans les limites suivantes:

C 0,08 ÷ 0,15%,
Si 0,15 ÷ 0,50%,
Mn 0,40 ÷ 0,60%,
Cr 2,0 ÷ 2,5%,
Mo 0,9 ÷ 1,1 %.

Traitement thermique: refroidissement à l'air de l'acier chauffé à 950 °C, revenu à 720 °C pendant 2 heures. La dimension des éprouvettes était: ∅ 8 × 120 mm.

La résistance électrique a été mesurée par un pont Thomson de 5 décades. Pour la mesure de la force coercitive, nous avons utilisé un appareil construit par nos propres moyens, enfin pour l'indication de l'intensité du champ magnétique nous avons eu recours au «Rissdetektor» de Förster. Pour assurer la magnétisation saturée, nous avons magnétisé les éprouvettes dans un champ ayant une intensité de 28 000 oersteds.

II. Résultats expérimentaux

1. Essais magnétiques

A titre préliminaire, nous avons mesuré la force coercitive de 21 éprouvettes sous charge constante pendant 10 000 heures et celle de leur matériau, qui correspondait à l'état initial. Les données expérimentales et le changement de la force coercitive au bout de 10 000 heures sont résumés sur le tableau I.

Tableau I

L'allongement, la force coercitive et sa variation

Température d'essai [°C]	Sollicitation [kp/mm²]	Allongement en 10^4 heures [%]	Force coercitive [Oersted]		Variation de la force coercitive [%]
			au début de l'essai	à la fin de l'essai	
550	7,5	0,89	5,02	5,96	18,0
550	7,5	0,54	5,96	6,33	6,3
565	7,5	2,32	5,96	7,20	20,8
565	6,0	1,48	6,25	7,21	15,3
550	7,5	1,44	5,17	6,12	18,3
550	7,5	0,48	6,10	6,25	2,4
550	7,5	1,68	5,52	8,00	44,0
565	6,0	0,98	7,85	8,65	10,2
550	6,0	0,40	8,00	8,31	3,9
550	7,0	0,28	6,68	7,10	6,3
550	7,0	0,36	6,27	6,54	4,3
550	7,0	2,16	6,27	7,22	15,2
550	7,0	0,48	7,60	7,92	4,2
550	7,0	0,64	8,78	8,15	7,8
550	7,5	0,52	8,10	8,71	7,6
550	7,5	0,68	8,40	8,85	5,4
550	7,5	0,52	6,85	7,12	5,3
550	7,5	0,92	8,95	10,20	7,6
550	7,5	2,24	6,12	10,20	67,0
550	7,5	0,46	6,20	6,30	1,6
550	7,5	1,44	5,17	6,12	18,4

Les valeurs correspondantes de l'allongement et de la force coercitive de chaque éprouvette sont mises en vue sur la figure 1. Pour des raisons de simplicité, nous y avons adopté une échelle logarithmique.

Nous y avons tracé aussi une droite de régression déterminée par la méthode des moindres carrés. Le coefficient caractérisant l'étroitesse de la corrélation: $r = 0{,}75$, valeur très bonne surtout si l'on considère que les essais de

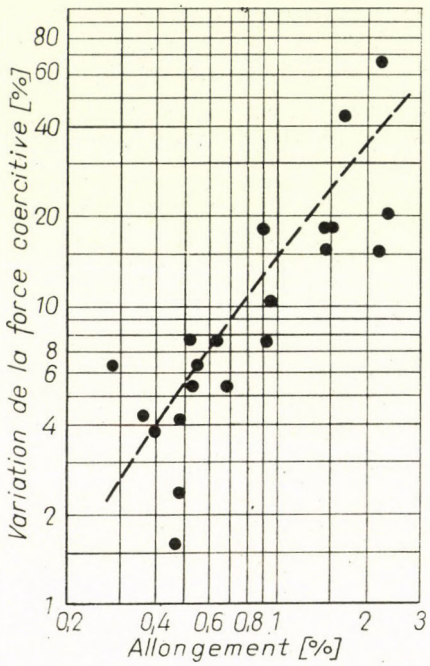


Fig. 1. L'accroissement de la force coercitive et l'allongement au bout de 10 000 heures, à 550° et 565 °C

fluage ne peuvent être reproduits qu'avec une précision de 20% environ [32—33].

Les résultats de ces examens démontrent donc l'existence d'une corrélation entre l'allongement survenu pendant 10 000 heures et le changement de la force coercitive. Sur la base des ouvrages de KERSTEN et NÉEL, on peut aussi établir qu'*une plus grande vitesse de fluage s'accompagne d'une précipitation accélérée des carbures;* il se peut même qu'elle soit la conséquence de cette dernière.

La majeure partie des éprouvettes figurant au tableau I avait été utilisée déjà précédemment pour d'autres essais, mais 7 parmi elles étaient laissées exclusivement à notre disposition. De la tête de celles-ci, nous avons fait des éprouvettes pratiquement détensionnées maintenues à 550 °C. La comparaison

des propriétés magnétiques des matériaux non chargés et sollicités a permis d'étudier les corrélations entre la charge et les processus de ségrégation. Les données sont contenues dans le tableau II., les résultats sont mis en vue sur la

Tableau II

L'allongement et l'accroissement de la force coercitive à 550 °C au bout de 10 000 heures, dans l'éprouvette chargée et non chargée

Allongement [%]	Force coercitive [Oersted]			Accroissement de la force coercitive [%]	
	état initial	$\sigma = 7{,}5$	$\sigma = 0$	$\sigma = 7{,}5$	$\sigma = 0$
0,46	6,20	6,30	6,44	1,6	3,5
0,48	6,10	6,25	6,80	2,4	11,7
0,89	5,02	5,96	6,65	18,0	32,5
1,44	5,17	6,12	7,60	18,4	40,5
1,56	5,77	6,35	6,75	10,1	17,0
1,68	5,52	8,00	19,60	44,0	218,0
2,24	6,12	10,20	21,60	67,0	257,0

figure 2. Sur celle-ci, nous avons représenté les changements de la force coercitive de la partie non chargée et chargée d'une éprouvette en fonction de l'allongement produit pendant 10 000 heures. Pour illustrer la différence, nous avons relié entre eux les points se rapportant aux mêmes éprouvettes. Il est bien visible que dans le matériau prélevé de la partie non chargée, la force coercitive accuse une augmentation beaucoup plus grande que dans celle provenant de la partie soumise à une charge de 7,5 kp/mm². Cela indique que *la sollicitation mécanique modifie la vitesse de la précipitation des carbures.* Cette constatation est d'ailleurs en accord avec celle de KRISCH [34], selon qui les carbures isolées d'éprouvettes non sollicitées mécaniquement contiennent un peu plus d'alliants.

Ayant constaté que la force coercitive avait accusé dans chaque cas une nette augmentation au bout de 10 000 heures, nous avons examiné les variations dans le temps de cette valeur, pour en conclure aux variations de vitesse de la ségrégation de carbures. Dans ce but, nous avons maintenu quelques éprouvettes à la température de 550 °C et mesuré de temps en temps les valeurs magnétiques ci-dessus. Ainsi qu'il ressort de la figure 3, la variation est rapide au début, mais sa vitesse décroît fortement après 3000 heures environ. Les éprouvettes provenant de différentes coulées — tout en donnant des résultats numériques divers — ont présenté un comportement essentiellement analogue.

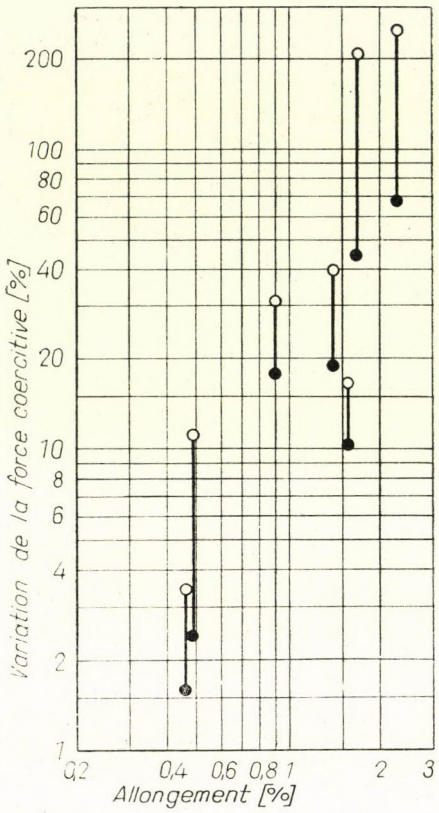


Fig. 2. **L'accroissement de la force coercitive d'éprouvettes sous charge (×) et non chargées (○) à 550 °C**

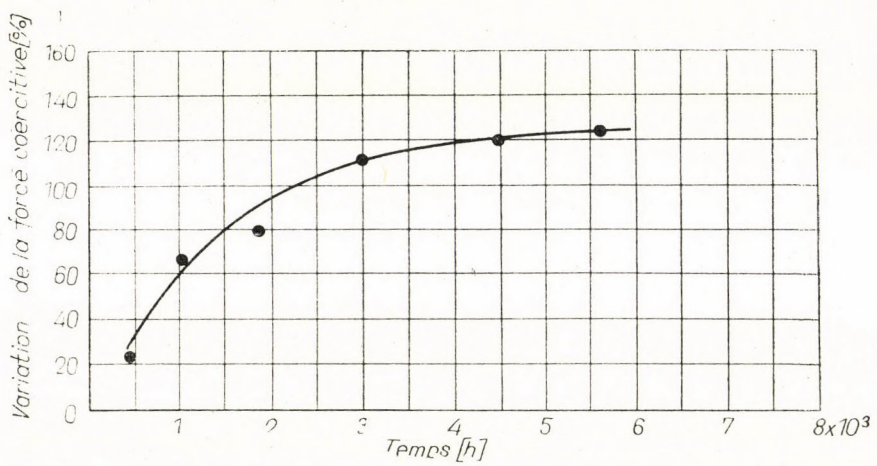


Fig. 3. **L'accroissement de la force coercitive en fonction du temps à 550 °C, dans une éprouvette non chargée**

2. *Examen de la conductivité*

La conductivité électrique a été mesurée sur des éprouvettes en partie non chargées et en partie maintenues sous une charge de 7,5 kp/mm². La température de l'essai a été de 550 °C. Nous avons procédé parallèlement à trois séries d'expériences, qui ont abouti à des résultats identiques. Les données de l'une de ces séries de mesures ont été résumées dans le Tableau III, les changements de résistance étant mis en vue par la figure 4.

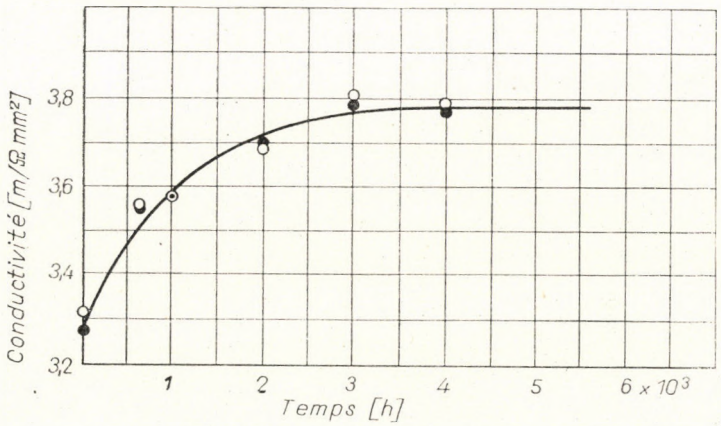


Fig. 4. Variation de la conductivité en fonction du temps à 550 °C, dans des éprouvettes non chargées (○) et chargées (×)

Tous les essais concordent à montrer que la diminution de la résistance, rapide pendant quelques centaines d'heures, se ralentit progressivement, jusqu'à ce que la résistance devienne constante entre 1500 et 3000 heures. On en peut conclure qu'à cette température, les éléments d'alliage ou du moins

Tableau III

Variation de la conductivité C *550 °C d'éprouvettes sous 7,5 kp/mm² et d'éprouvettes non chargées*

Durée de l'essai [heure]	Conductivité [m/Ohm mm²]	
	essai sans charge	essai sous charge
0	3,27	3,31
650	3,55	3,56
1010	3,58	3,58
2023	3,70	3,68
3004	3,77	3,81
4006	3,74	3,79

leur plus grande partie se précipitent de la matrice pendant 3000 heures environ. Ce processus se déroule d'abord à une allure plus rapide, pour se ralentir ensuite et cesser tout à fait au bout de 3000 heures environ. A partir de là, la composition de la matrice paraît inchangée. Il ressort également du diagramme que le changement de la résistance est identique sur les éprouvettes chargées et non chargées, ce qui signifie que les contraintes mécaniques n'influent pas sur le processus de ségrégation des alliants.

3. Examen métallographique

Nous avons essayé de suivre le processus de ségrégation des carbures par des examens microscopiques. Les éprouvettes non chargées maintenues à une température de 550 °C ont été refroidies de temps en temps, ensemble avec le four, puis polies électrolytiquement et attaquées au nital. Nous les avons examinées ensuite sous des grossissements variés. On pouvait constater que la dimension et la quantité des carbures augmentaient progressivement avec le temps. Le degré de cette augmentation est représenté sur les figures 5 à 8, qui appuient qualitativement notre conclusion tirée de la variation de la force coercitive.

III. Interprétation des résultats expérimentaux

Les résultats des essais effectués peuvent être interprétés à la base de la figure 9. Nous y avons représenté, en fonction du temps, la variation de la conductivité et de la force coercitive de l'éprouvette maintenue à la température de 550 °C, ainsi que l'allongement produit par une charge de 7,5 kp/mm sur une éprouvette de matière identique. Sur la base des relations connues entre la structure des alliants et les propriétés magnétiques et électriques, le diagramme en question permet de tirer plusieurs conclusions:

a) La matrice s'appauvrit progressivement en alliants (augmentation de la conductivité). Le processus qui est d'abord rapide, se ralentit ensuite et se termine au bout de 3000 heures environ.

b) L'accroissement de la force coercitive indique que *les alliants précipités forment des carbures,* dont le nombre et la dimension augmentent à un rythme d'abord rapide, mais qui va décroissant. Les dimensions s'approchent d'une valeur critique, la plus favorable du point de vue de la force coercitive. Selon la théorie de Kersten, celle-ci doit être de l'ordre de 0,01 micron.

c) La ségrégation des alliants cessant déjà aux environs de 3000 heures, alors que la force coercitive continue à augmenter, on peut conclure qu'il ne se forme plus de nouveaux carbures par la suite et que c'est seulement la dimension ou la composition des précipités antérieurement ségrégés qui subissent

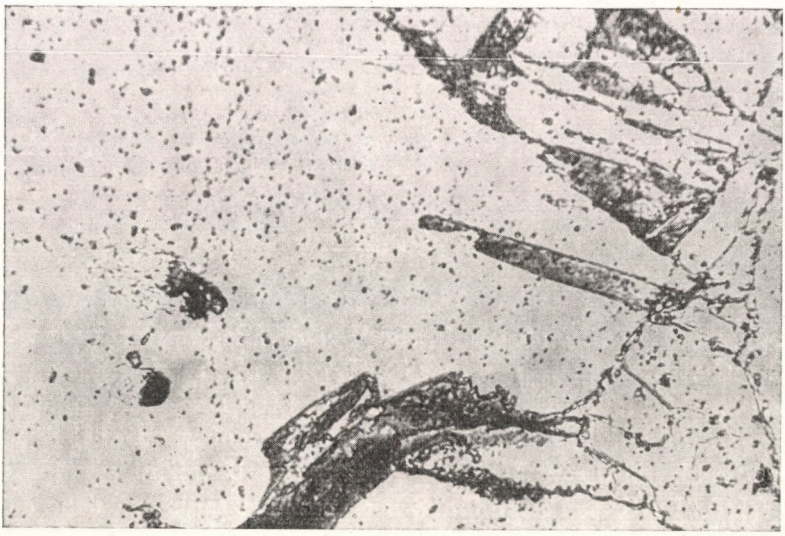


Fig. 5

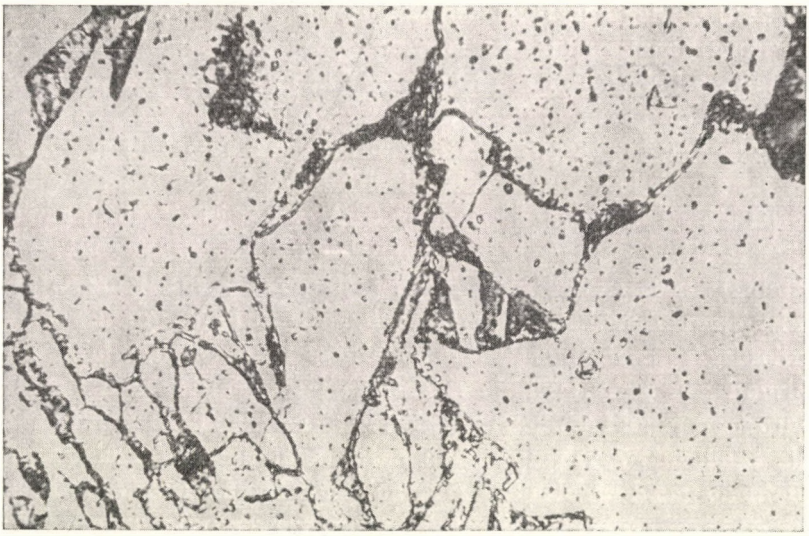


Fig. 6

une certaine modification. Le fait de l'augmentation est confirmé aussi par les observations microscopiques.

d) Les courbes représentant l'allongement et la variation en pourcent de la force coercitive semblent être à peu près parallèles, ce qui indiquerait — en accord avec les constatations d'autres auteurs — que l'allongement est

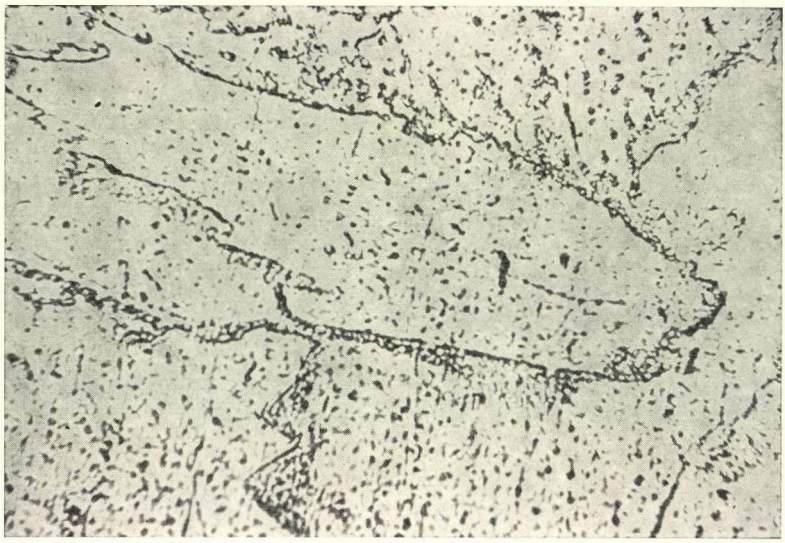


Fig. 7

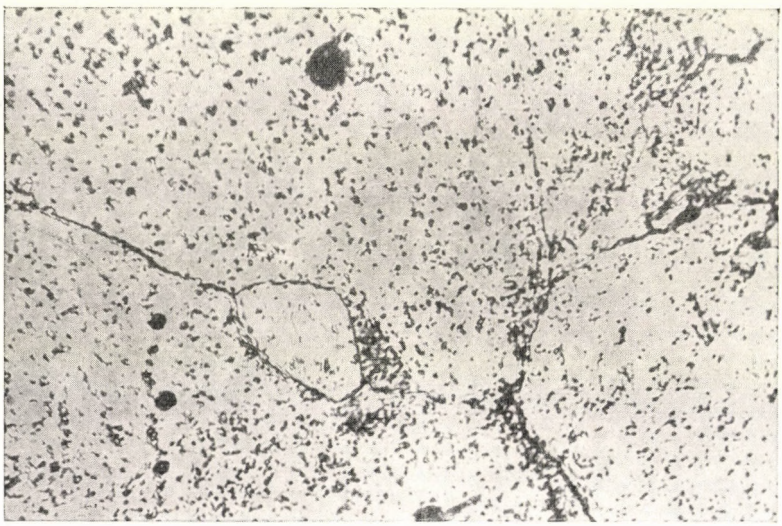


Fig. 8

Fig. 5—8. Modification de la structure à 550 °C, au bout de 627, 1000, 3000 et 4400 heures ($N = 1200\times$)

en rapport avec la formation de carbures. Cette constatation se trouve également appuyée par la figure 1, dont il apparaît qu'une corrélation assez serrée existe entre la grandeur de l'allongement produit au bout de 10^4 heures et les modifications survenues dans les phases de carbures.

e) Les contraintes mécaniques n'influent pas sur la précipitation des atomes d'alliants dissous (figure 4), mais elles retardent le processus de formation de carbures.

Bien que les constatations ci-dessus soient basées sur des résultats mesurés sur un assez grand nombre d'éprouvettes, il faut souligner que la durée de nos expériences relatives à la force coercitive et à la conductivité électrique n'a

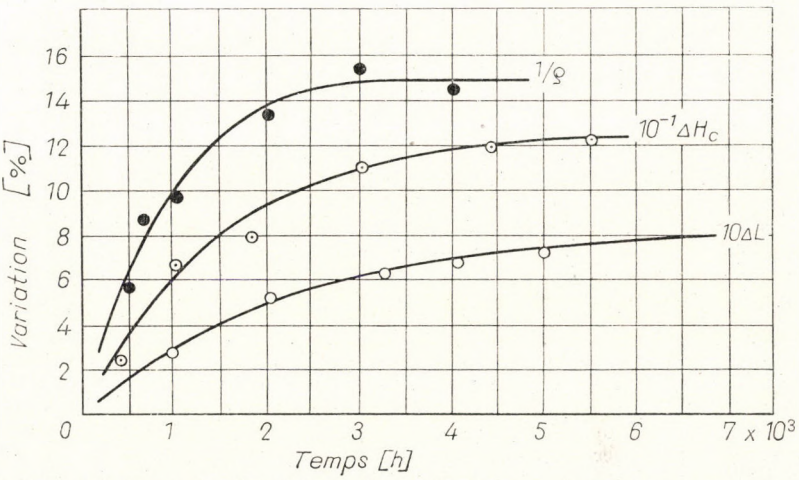


Fig. 9. Variation de la conductivité, de la force coercitive et de la longueur en fonction du temps, à 550 °C

été que de 5000 heures au plus et que nos essais de mesure des allongements ont été poursuivis durant 10 000 heures. La température des essais a été de 550°, resp. de 565 °C et le matériau des éprouvettes était de l'acier 10 CrMo 910. Aussi nos constatations ne sont-elles valables que dans ces limites et ne sauraient être généralisées.

IV. Conclusions

Nos examens et nos essais ont permis d'établir que les ségrégations de carbures accompagnant le processus du fluage peuvent être détectées et suivies par la mesure des variations de la force coercitive et de la conductivité électrique. La corrélation entre les variables est assez étroite et les conclusions qu'on en peut tirer sont en accord avec les constatations publiées dans la littérature.

Nous avons utilisé le même matériau pour tous les essais, poursuivis à deux températures durant 5000 et 10 000 heures et c'est d'un nombre relativement restreint de données que nous avons tiré nos conclusions. Mais même nos résultats d'essais peu nombreux ont suffi pour établir que la conductivité et la force coercitive peuvent être efficacement utilisées pour l'observation des ségrégations de carbures.

Les mesures pouvant être effectuées sur un appareil relativement simple, il semble être utile de procéder à l'avenir, parallèlement aux essais de fluage, à la détermination des propriétés magnétiques et électriques mentionnées. Il est à supposer que sur la base de l'interprétation statistique d'un grand nombre de données, on pourra mieux connaître les processus qui suivent le fluage et diminuer aussi le nombre ou le temps des essais de longue durée, fort coûteux.

BIBLIOGRAPHIE

1. MOTT, N. F.: A discussion of some models of the rate-determining process in creep. «Creep and fracture of metals at high temperatures.» *Proceedings of a Symposium held by the National Physical Laboratory* **31** *May — 2 June* **1954**, London 1956; 21—24.
2. BUEREN, H. G.: Imperfections in crystals. Nord-Holland Publ. Co., Amsterdam 1960.
3. MASON, W. P.: Physical acoustics and the properties of solids. Van Nostrand, Princeton 1958.
4. SIEGFRIED, W.: Analyse thermodinamique des essais de maintien prolongé sous tension. *Mém. Scient. de la Rev. Mét.* **49** (1962), 501.
5. DORN, J. E.: Some fundamental experiments on high-temperature creep (cf. [1]; 89—132).
6. CONSTANT, A.—DELBART, D.: Basic principles of a creep-resisting alloy (cf. [1]; 191—210).
7. COTRELL, A. H.: Dislocations and plastic flow in crystals; Oxford 1965, 39.
8. SCHRADER, A.—KRISCH, A.: Mikroskopische Beobachtungen von Ausscheidungen in austenitischen und ferritischen Stählen nach dem Kriechversuch; Köln—Opladen 1959.
9. WOODHEAD, J. H.—QUARELL, A. C.: Role of carbides in low-alloy creep resisting steels. *JISI* **203** (1965), 605—620.
10. BAERLECKEN, E.: Der Einfluss einer langzeitigen Glühung bei 500 bis 700 °C auf das Kriechverhalten des Stahles 13 CrMo 44 bei 550 °C. *Arch. Eisenhüttenw.* **37** (1966), 569—578.
11. BELKA, G.: Ergebnisse von Zeitstanduntersuchungen an warmfesten austenitischen Stählen. *Neue Hütte* **11** (1966), 495—502.
12. EIJI MIYOSHI—TAKAYASU OKADA: Microscopic observation of precipitates in some alloy steels after creep testing. *Suomitomo Metals* **18** (1965), 95—120.
13. GLEEN, J.: A new approach to the problem of creep. *JISI*, **189**, 333—343.
14. WILD, M.: Analyse des Zeitstandverhaltens warmfester ferritischer Stähle bei Temperaturen von 450—600 °C. *Arch. Eisenhüttenw.* **34** (1963), 935—950.
15. KRISCH, A.—NAUMANN, F. K.: Gefügeänderungen und ihre Bedeutung für die Zeitstandfestigkeit am Beispiel eines Cr—Mo-Stahles. *Arch. Eisenhüttenw.* **37** (1966), 749—757.
16. DIJKSTRA, L. J.: Precipitation phenomena in the solid solutions of nitrogen and carbon in alpha iron below the eutectoid temperature. *Transactions AIME* (Metal Branch) **185** (1949); *J. Metals*, **1** (1949), 252—260.
17. NACKEN, M.—HELLER, W.: Untersuchungen über die Abschreckalterung weicher unlegierter Stähle unterschiedlicher Erschmelzungsart. *Arch. Eisenhüttenw.* **31** (1960), 39—46.
18. KÖSTER, W.: Zur Frage des Stickstoffs im technischen Eisen. *Arch. Eisenhüttenw.* **4** (1930), 289—294.
19. KÖSTER, W.: Einfluss der Zustandsänderungen unterhalb A_1 auf die Eigenschaften des technischen Eisens. *Arch. Eisenhüttenw.* **21** (1950), 305—311.
20. KERSTEN, M.: Über die Bedeutung der Versetzungsdichte für die Theorie der Koerzitivkraft rekristallisierter Werkstoffe. *Z. f. Angew. Physik* **9** (1956), 496—502.
21. KRAINER, H.: Untersuchungen über angelassenen Martensit. *Arch. Eisenhüttenw.* **22** (1951), 53—62.
22. BELLOT, J.—RICHARD, P.—HERZOG, E.: Différents stades du vieillissement après déformation à froid d'aciers doux en relation avec leurs traitements thermiques. *Mém. Sci. Rev. Mét.* **49** (1962), 425—439.
23. KÉ, T.-ing SUI: *Am. Inst. Eng. Techn. Publ.* (1949), 2379.
24. KERSTEN, M.: Grundlagen einer Theorie der ferromagnetischen Hysterese und Koerzitivkraft, Leipzig 1943.
25. NÉEL, L.: *Cahiers de Physique* **25** (1944), 1—39.
26. WEIL, L.: *C. R. Acad. Sci. Paris* **225** (1947), 229.
27. MOTT, N. F.: *Proc. Phys. Soc.* **47** (1935), 571—588.

28. GRUHL, W.: Über die Änderung des elektrischen Widerstandes einer Eisen-Kohlenstoff-Legierung nach dem Abschrecken. *Z. Metallkde.* **41** (1950), 171—177.
29. COTTRELL, A. H.—CHURCHMAN, A. T.: Change of electrical resistance during strain ageing of iron. *JISI* **162** (1949), 271—276.
30. DAHL, W.—LÜCKE, K.: Die Ausscheidung des Kohlenstoffs in α-Eisen während der Auslagerung. *Arch. Eisenhüttenw.* **25** (1954), 241—250.
31. KÖSTER, W.—BANGERT, L.: Die Teilchengrösse des Eisennitrids bei der Ausscheidung aus einem an Kohlenstoff und Stickstoff übersättigten α-Eisen. *Arch. Eisenhüttenw.* (1954), 231—238.
32. ZSCHOKKE, H.: Die Streuung der Messergebnisse bei Zeitstandversuche an warmfesten Stählen, *Brown-Bovery Mitt.* **40** (1953), 199.
33. BELKA, G.: Ergebnisse von Zeitstanduntersuchungen an warmfesten austenitischen Stählen. *Neue Hütte* **11** (1966), 495—502.
34. KRISCH, A.: Metallkundliche Untersuchungen an austenitischen und ferritischen Stählen nach Langzeit-Standbeanspruchung. *Arch. Eisenhüttenw.* **28** (1957), 305—311.

New Methods for the Investigation of the Creep of Iron Alloys. The segregation phenomena during the creep of steels were investigated on the basis of the changes in the electrical resistance and in the coercive force. The tests carried out at 550 °C and 565 °C show that in the beginning the coercive force changes faster and after approx. 3000 hours it changes slowly. From this one may draw conclusions, on the basis of the known relations, on the speed of carbide segregation. The increase of the electrical conductivity indicates that the alloying element content of the basic metal is reduced. According to the experiments, this phenomenon is independent of the mechanical load, but the carbide segregation is modified by the stresses.

Neue Verfahren zur Untersuchung der Kriechvorgänge von Eisenlegierungen. Die Segregationsvorgänge während des Kriechens der Stähle wurden auf Grund der Änderung des elektrischen Widerstands und der Koerzitivkraft untersucht. Die bei 550 °C und bei 565 °C durchgeführten Versuche zeigten, daß die Koerzitivkraft sich anfänglich rasch und nach etwa 3000 Stunden langsamer ändert. Hieraus kann auf Grund der bekannten Zusammenhänge auf die Geschwindigkeit der Karbidausscheidung geschloßen werden. Das Ansteigen der elektrischen Leitfähigkeit weist darauf hin, daß das Basismaterial ärmer an Legierungselementen wird. Die Versuche zeigen, daß dieser Vorgang unabhängig von der mechanischen Beanspruchung ist, die Ausscheidung des Karbids wird jedoch von den Spannungen beeinflußt.

Новые методы исследования процессов крипа стальных сплавов *(А. Сомбатфальви).* Сегрегационные процессы, протекающие во время крипа сталей, исследованы на основе изменения электрического сопротивления и коэрцитивной силы. Опыты, проведенные при 550° и 565° С в течение 10 000 *час*, показали, что коэрцитивная сила в начале изменяется быстрее, а приблизительно через 3000 *час* медленнее. Исходя из этого, на основе известных зависимостей можно сделать вывод относительно скорости образования карбидов. Рост электрической проводимости указывает на то, что материал теряет легирующие элементы. На основе опытов процесс является независимым от механической нагрузки, однако процесс выделения карбидов изменяется напряжениями.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 62 (1—2), pp. 45—73 (1968)

FORTPFLANZUNG VON ELASTISCHEN BIEGESCHWINGUNGEN IN STÄBEN

B. KIRÁLY

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
"MÁVTI" ENTWURFSBÜRO DER UNG. STAATSEISENBAHNEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 18. Mai 1967]

Der Verfasser führt zur Beschreibung der elastischen Biegeschwingungen eine neue vektorielle physikalische charakteristische Größe ein, welche eine der Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung analoge Differentialgleichung befriedigt. Sich auf diese thermodynamische Analogie stützend untersucht er die Gesetze der Entwicklung und Ausbreitung der durch Impulslasten erregten Biegeschwingungen in den Fällen des unendlich langen homogenen Stabes mit unveränderlichem Querschnitt und des zweistützigen gelenkigen Trägers. Die Abhandlung, von ausgesprochen theoretischem Interesse, stützt sich auf das einfachste Biegeschwingungsmodell des Stabes.

1. Einleitung

Die Entwicklung und Fortpflanzung der elastischen Biegeschwingungen in den durch impulsartige Belastungen auf Biegung beanspruchten Stäben — auch vom Gesichtspunkt der auf dem Grund der elementaren Biegetheorie ruhenden Schwingungstheorie betrachtet — ist ein eigenartiger und verwickelter Vorgang. Nach seinem Charakter kann derselbe zu den sog. transienten Erscheinungen eingereiht werden.

Die theoretische Behandlung dieser komplexen Erscheinungen ist nur auf Grund von gewissen idealisierenden Voraussetzungen möglich. In diesem Aufsatz wird das Ziel von ausdrücklich theoretischer Bedeutung vor uns gesetzt, daß wir auf Grund eines neuen Gesichtspunktes alle jene Ergebnisse in einem anschaulichen und einheitlichen Bild zusammenfassen, welche im Zusammenhang mit dem obenerwähnten Vorgang auf dem einfachsten Biegeschwingungsmodell des Stabes im Bereich der linearen Elastizität festgestellt werden können. Dies wird dadurch erreicht, daß wir die mathematische Erörterung des so eingeengten Themenkreises einheitlich auf eine anschauliche charakteristische Größe und eine gewisse thermodynamische Analogie zeigende Funktion vom Greenschen Typ begründen. Selbstverständlich können wir keinen Anspruch darauf erheben, daß dieses einfache Modell die Wirklichkeit mit einer die praktischen Ansprüche befriedigenden Treue widerspiegelt. In Grenzfällen können gewisse Widersprüche nicht vermieden werden, wofür das auf dem unendlich langen Stabe zum konzentrierten Impuls gehörige Schwingungsbild ein charakteristisches Beispiel bildet.

Das genannte Modell entspricht folgenden Voraussetzungen:

1. Der Stab ist geradachsig mit einem unveränderlichen Querschnitt und hat in der Längsrichtung wenigstens eine Symmetrieebene. Die äußeren erregenden Kräfte wirken in derselben Symmetrieebene, senkrecht zu der durch den Querschnittsschwerpunkt gehenden Stabachse.

2. Der Stab kann aus dem Gesichtspunkt der Biegeschwingungen für eine materielle Linie von konstanter Biegesteifigkeit angesehen werden, deren Masse in einer eindimensionalen Anordnung gleichmäßig verteilt ist.

3. Die äußeren Erregungskräfte sind massenlos, und die Länge ihrer Verteilungsstrecke ist im Vergleich mit dem Abstand vom nächsten Auflager sehr klein.

4. Die Dämpfung kann vernachlässigt werden.

Aus Voraussetzung 1 folgt, daß die Biegeschwingungen in der Erregungsebene der äußeren Kräfte stattfinden. Aus Voraussetzung 2 geht hervor, daß die gegen die Verdrehung der Querschnitte auftretenden Trägheitskräfte sowie die örtlichen Flächenformänderungen in den Angriffspunkten der äußeren Kräfte außer acht gelassen werden können. Voraussetzung 3 ermöglicht die Untersuchung der Entwicklung und Fortpflanzung der Biegeschwingungen unabhängig von der Art der Unterstützung. Infolge der Trägheit des Materials können sich nämlich die Schwingungen nur stufenweise entwickeln, weiter ist auch zu ihrer Ausbreitung eine endliche Zeitdauer nötig. Bis zum Augenblick, wo die Biegeschwingungsfront das nächste Auflager erreicht, kommt auch dessen Einfluß nicht zur Geltung, und der Träger verhält sich als ein unendlich langer Stab ohne Unterstützung. Wir beschränken unsere Untersuchungen im allgemeinen auf diese (in der Wirklichkeit außerordentlich kurze) Anfangsperiode. Jedoch werden wir für den Fall der in der Praxis vorkommenden wichtigsten Trägerarten, d. h. der zweistützigen gelenkigen Balken vorstellen, wie die Entwicklung des Schwingungsvorgangs auch über die Anfangsperiode hinaus unter Berücksichtigung der Auflager verfolgt werden kann.

In einem in der Schwingungsebene aufgenommenen solchen Koordinatensystem x, y, dessen x-Achse mit der Anfangsruhelage der elastischen Linie zusammenfällt, besteht für die von der Stelle x und von der Zeit t abhängigen Durchbiegungen $y(x, t)$ der elastischen Linie, auf Grund der obigen Voraussetzungen, die folgende wohlbekannte Differentialgleichung:

$$EJ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t), \tag{1}$$

worin

EJ — die Biegesteifigkeit der elastischen Linie,
m — die Masse der Einheitslänge der elastischen Linie und
$p(x,t)$ — die äußere verteilte Erregungskraft

Sucht man die mathematische Beschreibung des zu untersuchenden Schwingungsvorgangs auf die gewohnte Weise, so kann man zwischen zwei Lösungen der Gleichung (1) wählen.

1. Im Falle eines gegebenen Trägertyps drückt man die Biegeschwingungen, indem dieselben in die den Eigenschwingungsformen des Trägers entsprechenden Komponenten zerlegt werden, in der Form einer unendlichen Reihe aus. Diese Form der Lösung ist wenig zweckentsprechend, weil dadurch die mathematische Beschreibung des Schwingungsvorgangs in eine für die zu untersuchende Anfangsperiode nicht charakteristische Form hineingezwungen wird.

2. Der Beschaffenheit unserer Aufgabe liegt die mit dem unendlich langen stützenlosen Balken verbundene Lösung der Gleichung (1) mit Hilfe des Fourierschen Integrals am nächsten. Diese hat jedoch den Nachteil, daß die Auswertung des die Durchbiegung $y(x, t)$ ergebenden parametrischen Integrals auch im Falle von einfachen Erregungsverhältnissen schwierig ist, denn sie kann im allgemeinen nicht auf tabellierte Funktionen zurückgeführt werden.

Für den Fall der unendlich langen elastischen Linie wurde das Fouriersche Integral erstmalig von RAYLEIGH [1] zur prinzipiellen Lösung einer Anfangswertaufgabe von allgemeinem Charakter angewendet.

Im Laufe der Untersuchung der Rayleighschen Lösung brachte die Form der in dieser Lösung vorkommenden Ausdrücke dem Verfasser den Gedanken der Möglichkeit einer interessanten thermodynamischen Analogie. Bei näherer Betrachtung bezog sich diese Vermutung darauf, daß zwischen der Ausbreitung der Biegeschwingungen und der zeitlichen Veränderung der Temperaturverteilung in einem von der Umgebung isolierten linienartigen Leiter eine solche Analogie von mathematischem Charakter bestehen kann, welche an die die zyklometrischen und hyperbolischen Funktionen verknüpfende Beziehung erinnert.

Zur Aufklärung dieser Vermutung versuchte der Verfasser auch im Falle der Biegeschwingungen denselben Weg zu folgen, welcher in der Thermodynamik von einer differentiellen Energiebilanz ausgehend zur Differentialgleichung der linienartigen Wärmeleitung führt. Als Versuchsergebnis stellte sich heraus, daß eine vektorielle neue physikalische charakteristische Größe der Biegeschwingungen, welche wir wegen ihrer Bedeutung den Energievektor nennen werden, eine der Differentialgleichung der Wärmeleitung analoge Differentialgleichung befriedigt. Diese letztere erwies sich als Ausgangspunkt für die Untersuchungen dieser Abhandlung geeigneter als die Differentialgleichung (1). Die durch die sinngemäße Übertragung der thermodynamischen Gedankenfolge erhaltbare Lösung hat nämlich eine verhältnismäßig einfache Form, und ist vermöge des anschaulichen Inhalts des Energievektors leicht zu erklären. In den folgenden Abschnitten werden die Auslegung, Bestätigung und Anwendung dieser heuristischen, theoretischen Methode erörtert.

2. Der Energievektor der Biegeschwingungen

Wir gehen von der Bilanz der Energieänderungen aus, die in einer elementaren Länge dx der elastischen Linie während der Schwingungen stattfinden (Bild 1). Die Fortpflanzung der Biegeschwingungen wird von einem Energiestrom begleitet. Es sei dessen Intensität, d. h. die durch den Querschnitt des Stabes in der Zeiteinheit in Richtung der $+x$-Achse durchfließende Energiemenge $Z(x, t)$.

Die Leistung der verteilten äußeren Erregekraft ist

$$p(x, t) \cdot dx \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = pv \cdot dx .$$

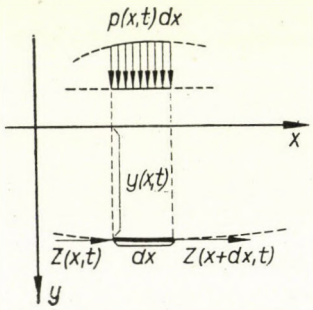


Bild 1. Änderung der Schwingungsenergie im Element dx

Die Schwingungsenergie des Stabelements dx ist

$$A(x, t)\, dx = \left[\frac{M^2(x, t)}{2EJ} + \frac{mv^2(x, t)}{2}\right] dx ,$$

worin

$$M(x, t) = -EJ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -EJy''$$

das Biegemoment,

$$v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \dot{y}$$

die Geschwindigkeit ist.

Dem Energieprinzip gemäß wird also die Bilanz der in der Zeiteinheit stattfindenden Energieänderungen

$$Z(x, t) - Z(x + dx, t) + pvdx = \frac{\partial A}{\partial t} dx$$

und in bezug auf ein Element der Einheitslänge

$$-\frac{\partial Z}{\partial t} + pv = \frac{\partial A}{\partial t} \tag{2}$$

sein.

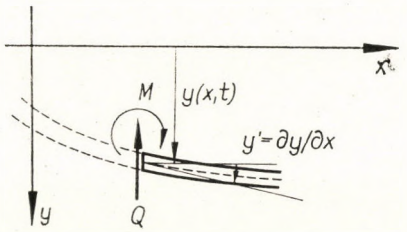


Bild 2. Der Wirkungssinn der Querschnittskräfte zur Bestimmung deren Leistung

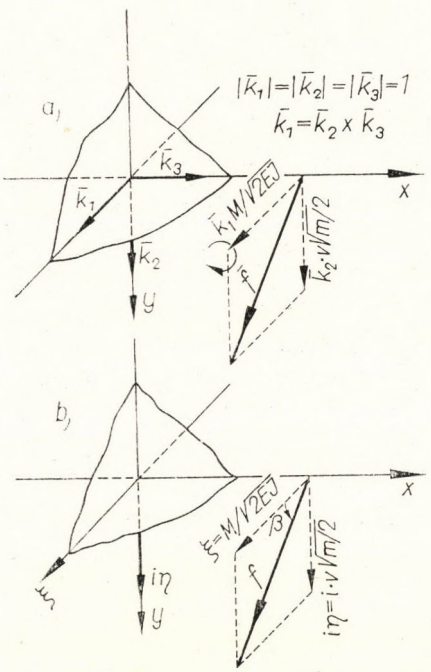


Bild 3. a) Darstellung von $\bar{f}$ mit den Einheitsvektoren $\bar{k}_1$; $\bar{k}_2$; *b)* f als Komplexzahl

Die Stärke des Energiestromes kann als die Leistung der inneren Kräfte, d. h. des Moments M und der Schubkraft Q ausgedrückt werden (Bild 2):

$$Z = M\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} - Q\frac{\partial y}{\partial t}$$

oder, nachdem $Q = \partial M/\partial x = M'$ ist,

$$Z = Mv' - Mv'.$$

Diese Gleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$Z = 2\sqrt{\frac{EJ}{m}}\left(\frac{M}{\sqrt{2EJ}}\sqrt{\frac{m}{2}}v' - \frac{M'}{\sqrt{2EJ}}\sqrt{\frac{m}{2}}v\right). \tag{3}$$

Mit Hilfe des im Bild 3a sichtbaren rechteckigen Einheitsvektortripels $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, $\bar{k}_3$ kann Gl. (3) als der Betrag eines vektoriellen Produkts interpretiert werden, wenn man den Vektor

$$\bar{f} = \bar{k}_1 \frac{M}{\sqrt{2EJ}} + \bar{k}_2 \sqrt{\frac{m}{2}}v \tag{4}$$

einführt.

Diesen im Stabquerschnitt liegenden, also zur x-Achse senkrechten Vektor werden wir den Energievektor nennen, da das Quadrat seiner Länge der spezifischen Schwingungsenergie gleich ist:

$$\bar{f}^2 = A = \frac{M^2}{2EJ} + \frac{mv^2}{2}, \tag{4'}$$

$$Z\bar{k}_3 = 2\sqrt{\frac{EJ}{m}}\begin{vmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \\ \dfrac{M}{\sqrt{2EJ}} & \sqrt{\dfrac{m}{2}}v & 0 \\ \dfrac{M'}{\sqrt{2EJ}} & \sqrt{\dfrac{m}{2}}v' & 0 \end{vmatrix} = 2\sqrt{\frac{EJ}{m}}\bar{f}x\bar{f}'. \tag{5}$$

Gl. (5) ist der in der positiven Richtung der x-Achse gerichtete Vektor des Energiestromes.

Setzt man (5) in Gl. (2) ein, und zieht man (4') sowie die folgenden Zusammenhänge in Betracht:

$$Z = 2\sqrt{\frac{EJ}{m}} \cdot (\bar{f} \times \bar{f}') \cdot \bar{k}_3 \text{ (Skalarprodukt)}$$

und

$$\bar{f}'x\bar{f}' = 0,\ \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2 = 0,\ \bar{k}_2^2 = 1,\ pv = \sqrt{\frac{2}{m}}\, p \cdot \bar{f} \cdot \bar{k}_2,$$

so bekommt man aus (2)

$$-2\sqrt{\frac{EJ}{m}}(f\times\bar{f}'')\cdot\bar{k}_3+p\sqrt{\frac{2}{m}}\cdot\bar{f}\cdot\bar{k}_2=2\bar{f}\cdot\dot{f}.$$

Nachdem $-(\bar{f}x\bar{f}'')\bar{k}_3=\bar{f}(\bar{k}_3x\bar{f}'')$ ist, wird (2) auf das folgende skalare Produkt reduziert:

$$\left[\sqrt{\frac{EJ}{m}}(\bar{k}_3\times\bar{f}'')+\frac{p}{\sqrt{2m}}\bar{k}_2-\dot{\bar{f}}\right]\cdot\bar{f}=0.$$

Wir behaupten, daß [. . .] gleich Null ist. Um diese Behauptung nachzuweisen, ist es zweckmäßiger auf die komplexe Darstellung dem Bild 3b gemäß überzugehen, was, zugelassen werden kann da alle drei Glieder des Ausdrucks in der Querschnittsebene befindliche Vektoren sind. Unsere Behauptung stellt sich in dieser Form wie folgt dar (wir haben das Vektorzeichen über f fortgelassen):

$$\dot{f}=i\sqrt{\frac{EJ}{m}}f''+\frac{ip}{\sqrt{2m}}, \tag{6}$$

worin

$$f=M/\sqrt{2EJ}+iv\sqrt{m/2}$$

schon eine komplexe Zahl ist.

Gl. (6) in ausführlicher Form geschrieben wird:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M}{\sqrt{2EJ}}+i\sqrt{\frac{m}{2}}v\right)=i\sqrt{\frac{EJ}{m}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{M}{\sqrt{2EJ}}+i\sqrt{\frac{m}{2}}v\right)+\frac{ip}{\sqrt{2m}}.$$

Nach Trennung der reellen Glieder von den imaginären, erhalten wir die Ausdrücke

$$\partial M/\partial t=-EJ\partial^2 v/\partial x^2$$

bzw.

$$-\partial^2 M/\partial x^2+m\partial v/\partial t=p,$$

deren Richtigkeit aus dem bekannten Zusammenhang

$$M=-EJ\partial^2 y/\partial x^2$$

unmittelbar durch Differentiation nach t bzw. auf Grund der Differentialgleichung (1) folgt. Damit wurde die Differentialgleichung (6) des Energievektors nachgewiesen.

Die homogene Form der Gl. (6) ist (der Stab ist unbelastet, $p = 0$):

$$\dot{f} = i \sqrt{\frac{EJ}{m}} \cdot f'' . \tag{6'}$$

Aus der Ableitung ist ersichtlich, daß die physikalischen Grundlagen der Gleichungen (6) und (1) identisch sind; sie unterscheiden sich voneinander hinsichtlich der Beschreibung des Schwingungsvorgangs nur durch die Ausdrucksweise.

Als ein Beweis für die thermodynamische Analogie sei nachstehend die Differentialgleichung angeführt, welche die Temperaturänderungen (Ausbreitung der Wärme) im wärmeisolierten linienartigen Leiter beschreibt, [2]:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{v(x,t)}{c}, \tag{7}$$

worin

T — die Temperatur,
α — den Koeffizienten der Wärmeleitung,
v — die auf der Längeeinheit des Wärmeleiters aus inneren Heizquellen in einer Sekunde erzeugte Wärme,
c — die spezifische Wärmekapazität des Wärmeleiters (Masse der Längeneinheit spezifische Wärme) bezeichnen.

Fügt man jedem Punkte der x-Achse die im gegebenen Zeitpunkt zugehörigen Vektoren hinzu, so beschreiben die Endpunkte derselben im allgemeinen im Koordinatensystem ξ, η, x des Bildes 3b eine Spirale, welche sich um die x-Achse windet. Die Projektion derselben auf die Ebene ξ, x ist das Diagramm $M/\sqrt{2EJ}$ der Momentenkomponente, während diejenige auf die Ebene η, x, das Diagramm v. $\sqrt{m/2}$ der Geschwindigkeitskomponente in bezug auf den gegebenen Zeitpunkt. Im Gange der Untersuchung der Biegeschwingungen werden wir die Entwicklung dieser Spirale verfolgen. Ihre Gleichung $f(x,t) = \xi(x,t) + i\eta(x,t)$ wird sich als Lösung von (6) bzw. (6') ergeben. Diese Spirale kann auch die Energiespirale genannt werden, weil der Rauminhalt des Rotationskörpers, erhalten durch Drehung der Spirale um 360° um die x-Achse, der totalen Schwingungsenergie der elastischen Linie, multipliziert mit π gleich ist.

Mit Hilfe der komplexen Schreibart können wir den Ausdruck (5) des Energiestromes auf eine andere Form bringen. Mit Rücksicht auf Gleichung (4') erhalten wir

$$f = \frac{M}{\sqrt{2EJ}} + i \sqrt{\frac{m}{2}} v = \sqrt{A} \cdot e^{i\beta},$$

worin

$$\beta = \arctan \frac{v \sqrt{m/2}}{M/\sqrt{2JE}}$$

ist (Bild 3b).

$$f' = \frac{\partial\sqrt{A}}{\partial x} e^{i\beta} + i\sqrt{A}\frac{\partial\beta}{\partial x} e^{i\beta}.$$

Aus (5) wird

$$Z = 2\sqrt{\frac{EJ}{m}}|\bar{f}\times\bar{f}'| = 2\sqrt{\frac{FJ}{m}} A\frac{\partial\beta}{\partial x}, \tag{8}$$

worin $\partial\beta/\partial x$ das Windungsmaß der Spirale genannt werden kann.

3. Erregung durch Elementarimpuls (durch infinitesimalen Impuls)

Es sei die unendlich lange, nicht unterstützte elastische Linie im Punkt $x = 0$ und im Zeitpunkt $t = 0$ durch einen unendlich kleinen Impuls q senk-

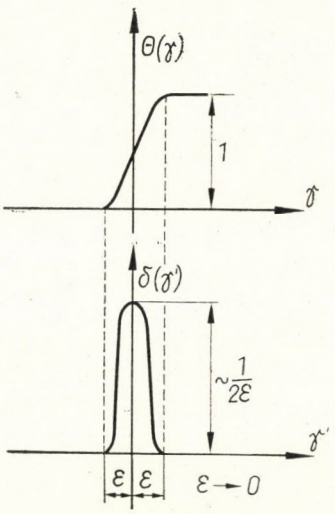


Bild 4. Die durch die Kraft P erregte Energiespirale. *a)* Momentenkomponente, *b)* Geschwindigkeitskomponente, *c)* Projektion der Spirale auf die Querschnittsebene

recht angegriffen. Dies kann durch eine in der engen Umgebung $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ des Punktes $x = 0$ im sehr kurzen Zeitintervall $-\mu \leq t \leq \mu$ wirkende verteilte Kraft $p(x, t)$ durchgeführt werden.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \cdot \int_{-\mu}^{\mu} p(x,t)\, dt = q \text{ [Megapondsec]}$$

$p(x, t)$ kann durch die Hilfsfunktion δ [2] dargestellt werden, welche die formale Ableitung der Einschaltfunktion θ ist (Bild 4). Diese besitzen die folgenden Eigenschaften:

$$\Theta(\gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} \delta(\gamma')\, d\gamma' \begin{cases} = 1 & (\gamma > 0) \\ = 0 & (\gamma < 0) \end{cases}$$

$$\delta(\gamma) = \frac{d\Theta(\gamma)}{d\gamma}$$

(die Dimension ist wie die von $1/\gamma$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\gamma')\, d\gamma' = 1\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} b(\gamma)\, \delta(\gamma)\, d\gamma = b(0)\,,$$

wenn $\varepsilon \to 0$ (Bild 4). Deshalb ist $p(x, t) = q \cdot \delta(x) \cdot \delta(t)$.

Die zu lösende Differentialgleichung (6) wird also die folgende Form annehmen:

$$\dot{f} = iaf'' + iq\delta(x)\, \delta(t)/\sqrt{2\,m}\,, \quad \text{worin } a = \sqrt{EJ/m}\,.$$

Der Gang der Lösung ist im weiteren derselbe wie bei der analogen thermodynamischen Aufgabe, wo die Rolle des Impulses q die dem Wärmeleiter im Punkt $x = 0$ plötzlich zugeführte Wärmemenge Q_0 erfüllt. Deshalb weisen wir bezüglich der Ableitung auf das Lehrbuch der Thermodynamik [2] hin.

Die Gleichung der durch den Elementarimpuls q erregte Energiespirale wird

$$f_q(x,t) = \frac{q\sqrt{i}}{\sqrt{2\,m}} \cdot \frac{e^{ix^2/4at}}{\sqrt{4\,\pi at}} \cdot \Theta(t)\,. \tag{9}$$

Durch Substitution können wir uns davon überzeugen, daß in der Zeit $t > 0$ (6′) befriedigt wird, entsprechend der Tatsache, daß die elastische Linie nach der momentanen Wirkung des Impulses q unbelastet ist. Darauf weist auch der Faktor $\Theta(t)$ hin. Gleichung (9) hat im Zeitpunkt $t = 0$ Singularität.

Gleichung (9) ist der Ausgangspunkt der Lösungen der im folgenden behandelten Aufgaben.

Lösung der erwähnten analogen thermodynamischen Aufgabe ist [2]:

$$T(x,t) = \frac{Q_0}{c} \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{\sqrt{4\,\pi\,\alpha t}}\, \Theta(t)\,.$$

4. Erregung durch eine Einzelkraft von konstanter Größe

Es sei ein Stab von unendlicher Länge mit dem Zeitpunkt $t' = 0$ beginnend im Punkte $x = 0$, zur x-Achse senkrecht durch eine Einzelkraft $P(t')$, deren Größe vorläufig eine Funktion der Zeit ist, angegriffen. Die bis zum

Zeitpunkt t vergangene Zeit kann in kleine Zeitabschnitte dt' zerlegt werden, worin die Wirkung von $P(t')$ durch den Elementarimpuls $q = P(t')dt'$ ersetzt werden kann. Eine durch einen solchen Elementartimpuls erregte Energiespirale gemäß (9) ist

$$f_q(x, t-t') = \frac{\sqrt{i}\, P(t')\, dt'}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{e^{ix^2/4a(t-t')}}{\sqrt{4\pi a\,(t-t')}} .$$

Diese Wirkungen müssen bis zum Zeitpunkt t überlagert werden; dies kann zugelassen werden, nachdem Gleichung (6′) eine lineare und homogene Differentialgleichung ist:

$$f_p(x,t) = \int_0^t \frac{\sqrt{i}\, P(t')\, dt'}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{e^{ix^2/4a(t-t')}}{\sqrt{4\pi a\,(t-t')}} .$$

Wenn nun $P(t') = P = \text{konst.}$, und führt man anstatt t' die neue Integrationsvariable $\tau = x/\sqrt{2\pi a(t-t')}$ ein, weiter mit den neuen Integralgrenzen

$$t' = 0,\ \tau = u = x/\sqrt{2\pi a t}$$

$$t' \to t,\ \tau \to \infty$$

wird:

$$f_p(x,t) = \frac{\sqrt{i}\, P \sqrt{t}}{\sqrt{2\pi m a}} \cdot u \cdot \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{i\tau^2\pi/2}, \tag{10}$$

worin

$$u = x/\sqrt{2\pi a t}$$

und

$$a = \sqrt{EJ/m}$$

sind. Funktion (10) ist eine gerade Funktion von x, weil der Integrand gerade ist, und das Vorzeichen der oberen Grenze mit dem Vorzeichen von u übereinstimmt ($\text{sg}\,\infty = \text{sg}\,u$). (10) kann durch partielle Integration auf Fresnelsche Integrale zurückgeführt werden, deren Tabellen (für nicht zu große Werte von u) zur Verfügung stehen [3].

Benutzt man die in [3] angewendeten Bezeichnungen so erhält man:

$$\int_0^u e^{i\tau^2\pi/2}\, d\tau = \int_0^u \cos\frac{\pi}{2}\tau^2 \cdot d\tau + i\int_0^u \sin\frac{\pi}{2}\tau^2 \cdot d\tau = C(u) + i\,S(u)$$

$$\int_0^\infty e^{i\tau^2\pi/2}\, d\tau = (1+i)/2\,, \quad \text{weil} \quad C(\infty) = S(\infty) = 1/2\,.$$

Unter Berücksichtigung des Vorangehenden:

$$u\int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{i\tau^2\pi/2} = e^{iu^2\pi/2} + i\pi u\left[\frac{1+i}{2} - C(u) - iS(u)\right]. \tag{11}$$

An der Stelle der Kraft $P(x = 0, u = 0)$ ist der Wert von (11) gleich 1, dementsprechend wird an dieser Stelle aus (10):

$$f_p(0,t) = \frac{P\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi ma}} \frac{1+i}{2} = \frac{M(0,t)}{\sqrt{2EJ}} + i\sqrt{\frac{m}{2}}\, v(0,t), \tag{12}$$

das heißt

$$M(0,t) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\, P\sqrt{t}, \tag{13}$$

$$v(0,t) = \frac{P\sqrt{t}}{m\sqrt{2\pi a}}. \tag{13'}$$

Integriert man (13') in bezug auf t, so wird die Durchbiegung an der Stelle $x = 0$:

$$y(0,t) = \frac{2}{3m\sqrt{2\pi a}} Pt^{3/2}. \tag{14}$$

Auf Grund von (14) wird die im Stabe bis zum Zeitpunkt t angehäufte totale Schwingungsenergie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{M^2}{2EJ} + \frac{mv^2}{2}\right) dx = \frac{2}{3m\sqrt{2\pi a}} P^2 t^{3/2}. \tag{15}$$

Man sieht aus (12), daß an der Stelle der Kraft P der Energievektor immer einen Winkel $\beta = 45°$ mit der $+\xi$-Achse bildet und die Länge desselben

$$|f_p(0,t)| = \frac{P\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi ma}} \tag{12'}$$

ist. Setzt man (11) in Gl. (10) und beachtet man (12'), so erhält man:

$$f_p(x,t) = \frac{|f_p(0,t)|}{\sqrt{2}} [\xi(u) + i\eta(u)], \tag{16}$$

$$\xi(u) = \cos\frac{\pi}{2}u^2 - \sin\frac{\pi}{2}u^2 - \pi u\,[1 - C(u) - S(u)],$$

$$\eta(u) = \cos\frac{\pi}{2}u^2 + \sin\frac{\pi}{2}u^2 - \pi u\,[C(u) - S(u)],$$

Bild 5 stellt den Faktor $[\xi(u) + i\eta(u)]$ der Gleichung der Energiespirale (16) in drei Projektionen dar. Da $u = x/\sqrt{2\pi at}$ ist, repräsentiert die Achse u in einem anderen Maßstab auch die Achse x. Der dimensionlose Parameter u setzt die

Raumrichtung der Energievektoren eindeutig fest. Der zu einem festgesetzten Wert von u gehörige Energievektor, dem Zeitgesetz $x = u\sqrt{2\pi at}$ entsprechend, entfernt sich von der Stelle der Kraft P, indem die Länge desselben, den Gleichungen (16) bzw. (12′) gemäß, $\sqrt{t}$ proportional zunimmt, jedoch mit der $+\xi$-Achse den konstanten Winkel $\beta = \text{arctg}\ \eta(u)/\xi(u)$ einschließt. Diese zwei letzteren Umstände zeigen sich in der Projektion auf die Querschnittebene

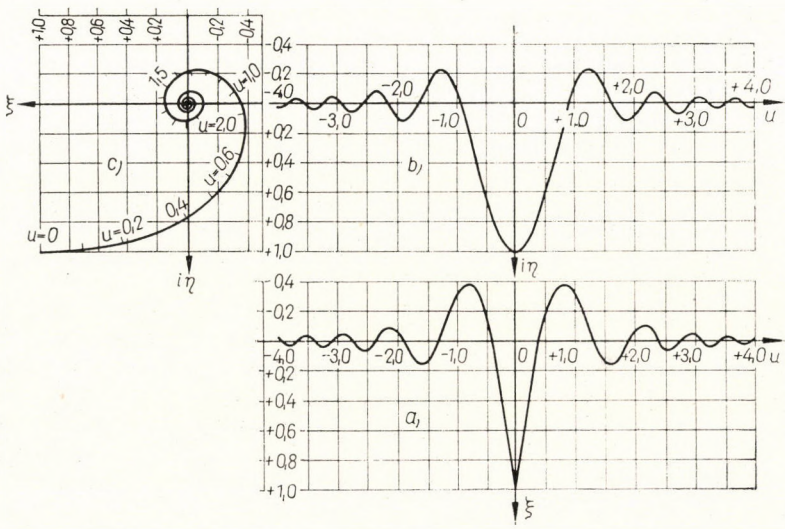


Bild. 5

(Bild 5c) in der Weise, daß die Abmessungen der Spirale, $\sqrt{t}$ proportional, ohne Drehung und Verzerrung zunehmen. Dementsprechendi st der Parameter u die Phase des Energievektors.

Die Phasengeschwindigkeit an der Stelle x beträgt im Zeitpunkt t

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u\sqrt{2\,\pi a}}{2\sqrt{t}} = \frac{u^2\,\pi a}{x} = \frac{x}{2\,t} \tag{17}$$

und ist der Quatratwurzel der Zeit bzw. dem Weg umgekehrt proportional und der Momentanwert derselben ist gleich der Hälfte der Durchschnittsgeschwindigkeit.

Untersuchen wir nun die Anordnung der wechselseitigen Position zweier, auf derselben Seite des Anfangspunktes befindlichen Energievektoren von konstanten Phasen u_1 bzw. u_2.

Im Zeitpunkt t_1

$$x_1(t_1) = u_1\sqrt{2\,\pi a t_1} \qquad \text{bzw.} \qquad x_2(t_1) = u_2\sqrt{2\,\pi a t_1}\ ;$$

im Zeitpunkt t_2

$$x_1(t_2) = u_2 \sqrt{2\,\pi a t_2} \qquad \text{bzw.} \qquad x_2(t_2) = u_2 \sqrt{2\,\pi a t_2}$$

$$\frac{x_1(t_1)}{x_1(t_2)} = \frac{x_1(t_2)}{x_2(t_2)} .$$

d. h., auch die zur Achse x parallelen Abmessungen der Energiespirale vergrößern sich proportional $\sqrt{t}$ in beiden Richtungen symmetrisch in bezug auf den Anfangspunkt. Infolgedessen repräsentiert Bild 5 die Energiespirale in jedem Zeitpunkt, wenn die Koordinaten in geeigneten, jedoch $\sqrt{t}$ umgekehrt proportional verändernden Einheiten gemessen werden. Es kommt auf die gewählten Koordinateneinheiten an, wie ausführlich die Einzelheiten der Spirale dargestellt werden können.

Nachdem die Energiespirale sich in allen ihren Dimensionen $\sqrt{t}$ proportional erweitert, nimmt der Rauminhalt des durch Drehung um die x-Achse erzeugbaren Rotationskörpers (welcher π mal der Wert der Schwingungsenergie ist) dem Werte von

$$(\sqrt{t})^3 = t^{3/2}$$

proportional zu, in Übereinstimmung mit (15).

Bei dem Näherungsgrad der Wirklichkeit, der durch (6) und (1) repräsentiert ist, haben wir uns vom zeitlichen Verlauf der Erscheinung die folgende Vorstellung verschaffen:

Im auf den Beginn der Wirkung der Kraft P folgenden Moment erscheint eine mathematisch in allen Einzelheiten vollendete, dem Bild 5 entsprechende kleine Energiespirale, welche, indem sie ihre Proportionen bewahrt, $\sqrt{t}$ proportional auszudehnen beginnt. Von einer im strengen mathematischen Sinne genommenen Wellenfront können wir nicht sprechen, da die Ausbreitung der Spirale der x-Achse entlang in beiden Richtungen unbegrenzt ist. Wir weisen aber nach, daß an den zwei Rändern der Spirale über einen gewissen — von der Zeit abhängigen — Punkt x hinaus die Länge der Energievektoren monoton abnimmt und unter irgendeinem, im voraus angegebenen kleinen Wert bleibt. Wenn dieser letztere der Schwellenwert ist, unter dem die Komponenten (das Moment und die Geschwindigkeit) des Energievektors praktisch schon für Null betrachtet werden können, wird die Wellenfront (infolge der beiderseitigen Symmetrie) durch jenen kleinen Energievektor repräsentiert, dessen Länge im gegebenen Zeitpunkt genau dem Schwellenwert gleich ist.

Zum Nachweis des oben Gesagten müssen wir bei vorübergehend festgesetztem t das Benehmen von $f_p(x, t)$ bei großen Werten von x bzw. u untersuchen. Dazu sind die Gleichungen (10) bzw. (11) in einer unmittelbaren Anwendung nicht geeignet. Wenn aber in (11) die partielle Integration zweimal nacheinander auf die Weise durchgeführt wird, daß im Nenner des Integranden

der Exponent von τ sich vergrößert, so wird aus (11)

$$u \cdot \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{i\tau^2\pi/2} = \frac{i}{\pi u^2} e^{iu^2\pi/2} + \frac{3}{\pi^2 u^4} e^{iu^2\pi/2} - \frac{15\,u}{\pi^2} \cdot \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^6} e^{i\tau^2\pi/2}. \quad (18)$$

(18) kann folgendermaßen grob abgeschätzt werden:

$$\left| u \cdot \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{i\tau^2\pi/2} \right| \leq \frac{1}{\pi u^2} + \frac{3}{\pi^2 u^4} + \frac{15\,u}{\pi^2} \cdot \left| \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^6} e^{i\tau^2\pi/2} \right|,$$

$$\left| \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^6} e^{i\tau^2\pi/2} \right| < \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^6} = \frac{1}{5u^5}.$$

Im ungünstigsten Falle also

$$\left| u \cdot \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{i\tau^2\pi/2} \right| < \frac{1}{\pi u^2} \left(1 + \frac{6}{\pi u^2} \right),$$

d. h. (18) und damit zugleich auch (10) konvergieren in absolutem Wert bei großen u-Werten ebenso nach Null wie $1/u^2$. Die auf der rechten Seite der Gleichung (18) befindlichen ersten zwei Glieder bilden eine sogenannte asymptotische Funktion der linken Seite derselben Gleichung. Diese Funktion ist für numerische Berechnungen mit einer beschränkten, jedoch mit u zunehmenden Genauigkeit geeignet. (Die partielle Integration kann nicht unbeschränkt fortgesetzt werden, da diese zu einer divergenten Reihe führt.) Das dritte Glied dient zur Fehlerschätzung. Für diese leiten wir die folgende Näherung ab. Die Genauigkeit derselben wird geometrisch veranschaulicht.

Der Wert

$$g(u) = \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^6} e^{i\tau^2\pi/2}$$

kann in der komplexen Ebene als eine sich um den Anfangspunkt windende Spirale dargestellt werden. $g(u)$ ist ein vom Anfangspunkt aus bis zum mit dem Parameter u charakterisierten Punkt der Spirale gezogene Vektor. Durch Anschauung kann man darauf folgern, daß bei großen, zunehmenden Werten von u die Windungen der Spirale, indem sie auf den Anfangspunkt schrumpfen, sich einander immer mehr nähern, und immer mehr als um den Anfangspunkt gezeichnete konzentrische Kreise betrachtet werden können. In diesem Falle konvergieren die Krümmungsmittelpunkte auch gegen den Anfangspunkt, aber nach der Größenordnung in einem mehr gesteigerten Maße als die Spirale selbst. Folgt man diesem Gedankengang mit Berechnung, so ist der Wert eines kleinen Bogenelements der Funktion $g(u)$ im durch den Parameter u bestimm-

ten Punkte

$$|ds| = \left| -\frac{e^{iu^2\pi/2}}{u^6} \right| du = \frac{du}{u^6} .$$

Der Einheitsvektor der Tangente ist

$$-e^{iu^2\pi/2} .$$

Ihr kleiner, zu du gehöriger Drehungswinkel ist

$$|d\alpha| = |-i\pi u e^{iu^2\pi/2}|\, du = \pi u\, du ,$$

worin der Einheitsvektor

$$-ie^{iu^2\pi/2}$$

sich gegen den Krümmungsmittelpunkt richtet.

Der Krümmungshalbmesser ist

$$R = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right| = \frac{1}{\pi u^7} .$$

Die Stelle des Krümmungsmittelpunktes als eine Funktion von u wird

$$K(u) = g(u) - iRe^{iu^2\pi/2} = \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^6} e^{i\tau^2\pi/2} - \frac{i}{\pi \cdot u^7} e^{iu^2\pi/2} .$$

Wenn $u \to \infty$, ist die rechte Seite $\to 0$, also auch $K(u) \to 0$. Dementsprechend, wenn u groß ist, ist $K(u) \approx 0$, d. h.

$$\int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^6} e^{i\tau^2\pi/2} \approx \frac{i}{\pi u^7} e^{iu^2\pi/2} .$$

Setzt man dies in Gleichung (18) ein, so erhält man

$$u \cdot \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} e^{i\tau^2\pi/2} \approx \left(\frac{i}{\pi u^2} + \frac{3}{\pi^2 u^4} - \frac{15\,i}{\pi^3 u^6} \right) \cdot e^{iu^2\pi/2} . \qquad (18')$$

Wir bemerken, daß das Korrektionsglied genau damit übereinstimmt, was wir aus (18) durch Wiederholung der partiellen Integration erhalten hätten. (Sogar umgekehrt: alle drei Glieder können durch aneinander überlagerte Krümmungsspiralen veranschaulicht werden.) Wenn $u > 4$, ist die Formel (18) für numerische Berechnungen geeigneter als Formel (11), da hier dieselbe

die Genauigkeit der Tabellen [3] schon erreicht, wogegen die Dichte der letzteren nicht ausreicht.

Zur Untersuchung der Wellenfront benutzen wir aus (18′) nur das erste Glied. Setzt man dieses in (10) ein, so erhält man:

$$f_p(x,t) \approx \frac{\sqrt{i}\, P \sqrt{t}}{\sqrt{2\pi m a}} \frac{i}{\pi u^2} e^{iu^2\pi/2}. \tag{19}$$

Die Wellenfront ist dadurch gekennzeichnet, daß hier

$$|f_p(x,t)| = \frac{P\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi m a}} \frac{1}{\pi u^2} = \varepsilon \,\text{konst.}, \tag{19′}$$

worin ε eine kleine, im voraus angegebene Schwellenzahl ist. Benutzt man eine auch die Konstanten in sich fassende Schwellenzahl ε_0 anstatt ε und da

$$u = x/\sqrt{2\pi a t}$$

ist, so erhalten wir aus (19′), daß

$$t^{3/2}/x^2 = \varepsilon_0$$

ist. Daraus folgt, daß die Lage der beiden Wellenfronten im Zeitpunkt t symmetrisch in bezug auf die Angriffsstelle der Kraft P wird

$$x = \pm\, t^{3/4}/\sqrt{\varepsilon_0}.$$

Dividiert man (15) durch den doppelten Wert dieses Ausdrucks, d. h. durch die Breite des Wellenzugs, so ist zu ersehen, daß der Durchschnittswert der spezifischen Schwingungsenergie dem Werte von $t^{3/4}$ proportional zunimmt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenfront ist

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt[4]{t}} = \frac{3}{4} \frac{1}{\varepsilon_0^{2/3}\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{4} \frac{x}{t},$$

d. h. das 1,5fache der Phasengeschwindigkeit (17). Daraus folgt, daß der Energievektor, dem die Rolle der Wellenfront im gegebenen Moment zukam, im nächsten Augenblick hinter der Front zurückbleibt und in das innere des Wellenzuges hereinkommt. Auf diese Weise kommen aus der sich fortbewegenden Wellenfront als aus einer Quelle immer neuere und neuere Windungen der Spirale zum Vorschein.

Die Intensität des sich mit der Wellenfront mitbewegenden Energiestromes ist auch von einer einfachen Form.

Aus (8) mit Rücksicht auf (19) und (19′), da

$$\beta = \frac{\pi}{2} u^2 + \frac{3\pi}{4}$$

und

$$A = |f_p(x,t)|^2 = \varepsilon^2 ,$$

ist

$$Z = \varepsilon^2 \frac{x}{t}$$

ebenfalls im Zusammenhang mit der Durchschnittsgeschwindigkeit.

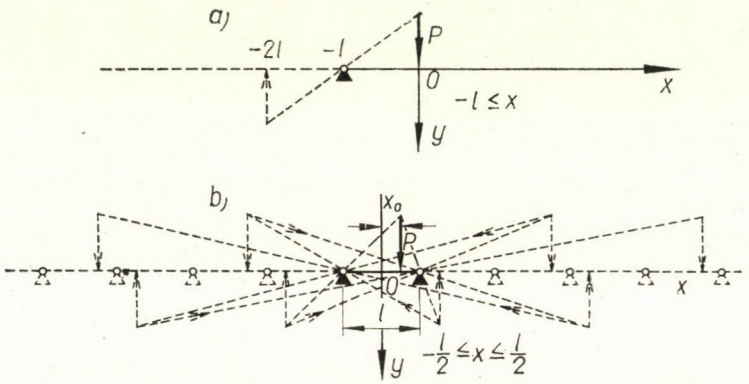


Bild 6. Befriedigung der Randbedingungen durch gespiegelte Lasten. *a)* Gelenkig unterstützter Stab von halbunendlicher Länge. *b)* Zweistütziger gelenkiger Stab

Auf Grund der bisher erhaltenen Ergebnisse kann die Anfangsperiode der Entwicklung des Schwingungsvorgangs auch im Falle des gelenkigen zweistützigen Trägers behandelt werden.

Betrachten wir vorerst den im Bild 6a dargestellten, am linken Ende gelenkig unterstützten sogenannten halbunendlichen Stab. Die Kraft P zusammen mit ihrem auf der Stütze durch zentrale Spiegelung erhaltenen Spiegelbild würde auf dem in beide Richtungen unendlich ausgedehnten Stab (das Auflager entfernt gedacht) die folgende Energiespirale erregen:

$$f(x,t) = f_p(x,t) - f_p(x + 2l, t)$$

Beim Auflager ($x = -l$) ist der Energievektor

$$f(-l,t) = f_p(-l,t) - f_p(l,t) ,$$

da f_p eine gerade Funktion von x ist. D. h., $M(-l,t) = v(-l,t) = 0$ auf der Stelle des Auflagers in jedem Zeitpunkt, womit wir gerade die Randbedin-

gungen der gelenkigen Unterstützung realisiert haben. (Wenn die Geschwindigkeit von Anfang an gleich Null ist, so ist auch die Durchbiegung gleich Null.) Was die Energiebilanz des Trägers anbelangt, ist auch diese in Ordnung, denn auf Grund von (3) ist es einzusehen, daß der Energiestrom beim Auflager $Z = 0$ ist, d. h., der Träger seine Energie bewahrt. (Genauer gesagt: die Summe der durch das Auflager hinaus bzw. hereintretenden Energiemengen ist in jedem Zeitpunkt gleich Null.) Die vom Spiegelbild der Kraft P herrührenden Wellen repräsentieren die vom Auflager mit entgegengesetzter Phase reflektierten Wellen.

Hiernach ist aus dem Bild 6b ohne weiteres ersichtlich, daß die Befriedigung der Randbedingungen des zweistützigen gelenkigen Trägers durch wiederholte und immer auf dem ferneren Auflager durchgeführte Spiegelung der rechts- und linksseitigen Spiegelbilder von Kraft P gesichert werden kann. Die Spiegelungen kehren den Richtungssinn der Kraftwirkung abwechselnd auf den entgegengesetzten um. Der Verallgemeinerung halber befindet sich der Angriffspunkt der Kraft P nicht in der Mitte der Spannweite, sondern im Punkte $x = x_0$. Die auf der rechten und linken Seite des Trägers befindlichen Spiegelbilder sind paarweise die virtuellen Ausgangspunkte der auf den Auflagern 1-, 2-, 3- . . .mal reflektierten Wellen. Innerhalb des Trägers entwickelt sich der Schwingungszustand aus der Überlagerung der primären und der reflektierten Wellen.

$$\begin{aligned} f(x,t) = {} & f_p(x - x_0, t) - f_p(x + x_0 + l, t) - \\ & - f_p(x + x_0 - l, t) + f_p(x - x_0 - 2\,l, t) + \\ & + f_p(x - x_0 + 2\,l, t) - f_p(x + x_0 + 3\,l, t) - \\ & - f_p(x + x_0 - 3\,l, t) + \ldots - \ldots \\ & - l/2 \leq x \leq l/2 . \end{aligned}$$

Es ist nicht schwer uns davon zu überzeugen, daß der Stab von unendlicher Länge bei einem derartigen Kraftsystem in eine unendliche Reihe von zweistützigen Trägern zerfällt (Bild 6b). Irgendeiner davon, zusammen mit der Belastungskraft, ist das fokale Spiegelbild der beiden benachbarten Träger in bezug auf das gemeinsame Auflager.

Greift die Kraft P in der Mitte der Spannweite an, so ist der resultierende Energievektor auf derselben Stelle

$$f(0,t) = f_p(0,t) - 2f_p(l,t) + 2f_p(2\,l,t) - 2f_p(3\,l,t) + \ldots . \qquad (20)$$

In der Thermodynamik wird bei einem linienartigen Wärmeleiter von endlicher Länge die Befriedigung der Randbedingungen auf gleiche Weise, mit Hilfe von gespiegelten Wärmequellen durchgeführt.

Untersuchen wir nun, indem wir (20) benutzen, wie sich das Biegemoment in der Mitte des Trägers in der Anfangsperiode, d. h. bei einem kleinen

Wert von t, somit bei einem großen Wert von u gestaltet. Ausführlicher aufgeschrieben stellt sich Gl. (20) auf Grund von (10) und (12) wie folgt vor:

$$f(0,t) = \frac{\sqrt{i}\,P\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi m a}}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\, 2\,ku \cdot \int_{ku}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2}\, e^{i\tau^2\pi/2}\right],$$

worin

$$\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$$

und

$$u = l/\sqrt{2\pi a t}.$$

Das Biegemoment, wenn man Gl. (13) und nur das erste Glied aus Gl. (18′) beachtet, wird

$$M(0,t) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,P\sqrt{t}\left[1 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi u^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}k^2u^2 + \frac{3\pi}{4}\right)}{k^2}\right]. \qquad (21)$$

Der Ausdruck vor der eckigen Klammer ist das Moment am Stabe von unendlicher Länge im Angriffspunkt der Kraft P. Darauf überlagert sich der Einfluß der von den Auflagern reflektierten Wellen, die bald verstärkend, bald abschwächend wirken. Die untere und obere Schranken des Maßes der Beeinflussung können mühelos angegeben werden:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}k^2u^2 + \frac{3\pi}{4}\right)}{k^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

folglich

$$\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,P\sqrt{t}\left(1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{3u^2}\right) < M(0,t) < \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,P\sqrt{t}\left(1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{3u^2}\right).$$

Es sei der Größtwert des Einflusses (d. h. der Einfluß der Auflager auf den Stab von unendlicher Länge) $\pm 1\%$, so ist $\pi\sqrt{2}/3u^2 = 0{,}01$, d. h. $u^2 \approx 148$ und $u \approx 12{,}16$. Aus $u = l/\sqrt{2\pi a t}$ wird $\sqrt{t} = l/u\sqrt{2\pi a}$. Setzt man dies in das Moment des Stabes von unendlicher Länge ein, so erhält man

$$\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,P\sqrt{t} = \frac{Pl}{4}\,\frac{2}{\pi u} = \frac{Pl}{4} \cdot 0{,}052\,,$$

oder

$$\frac{Pl}{4}\,0{,}052\,(1 - 0{,}01) < M(0,t) < \frac{Pl}{4} \cdot 0{,}052\,(1 + 0{,}01).$$

Demzufolge hat sich schon in der Mitte des Trägers 5,2 % des statischen Moments entfaltet im Zeitpunkt, wo der Einfluß der Auflager nur $\pm 1\%$ ist. Die bis zu diesem Augenblick vergangene Zeit wird im Vergleich mit der Grundschwingungszeit des zweistützigen Trägers bestimmt. Die letztere ist $T = 2l^2/\pi a$, während $t = l^2/2\pi a u^2$ und folglich $t/T = l/4u^2 = 1/592$.

Es kann beobachtet werden, daß ein Impuls von sehr kurzer Zeitdauer aber von großer Intensität die Tragfähigkeit des Trägers auch nur durch Biegebeanspruchung erschöpfen kann, bevor der Träger an der Lastentragung beachtenswert mitwirken könnte. Dies ist die Folge der unter der Kraft auftretenden Momentenspitze. (In der Wirklichkeit steigert die an der Angriffstelle des Impulses entstehende Flächenzerstörung diesen Effekt, und die auf den Schutzbrücken angewendete Dämpfungsschicht verringert denselben und zieht den Impuls in der Zeit aus.)

Während der verlaufenden Zeit beeinflussen die zurückgeworfenen Wellen noch weniger die Durchbiegung des Trägers. Rechnet man demnach nur mit der Durchbiegung des Stabes von unendlicher Länge (14), so erreicht

$$y(0,t) = \frac{2\,Pt^{3/2}}{3m\sqrt{2\,\pi a}} = \frac{Pl^3}{48\,EJ}\,\frac{8}{\pi^2 u^3} = \frac{Pl^3}{48\,EJ}\cdot 0{,}45\cdot 10^{-3}$$

nicht einmal $1^0/_{00}$ der statischen Durchbiegung. Die Intensität der Momentenvergrößerung ist in derselben Zeit 115mal so groß als die der Durchbiegung.

Die bis jetzt gemachten Feststellungen sind von den Abmessungen und vom Material des Trägers nicht abhängig. Um eine Aufklärung über die Größenordnung der hier angeführten Werte zu erhalten, nehmen wir eine Stahlbetonbrücke von der Spannweite l. Die Plattendicke sei $h = l/20$.

Ermitteln wir zuerst die Durchschnittsgeschwindigkeit jener zwei Energiewellen, welche von der Kraft P rechts und links ausgehend nach einmaliger Reflexion im oben angegebenen Zeitpunkt $t = l^2/296\,\pi a$ in der Mitte der Spannweite sich begegnen. Da l der zurückgelegte Weg ist, wird die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{l}{t} = \frac{296\,\pi a}{l} = \frac{296\,\pi}{l}\cdot\sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

$$\frac{EJ}{m} = \frac{Eh^2 g}{12\,\varrho} = \frac{El^2 g}{4800\,\varrho}.$$

$E = 3\,000\,000$ Mp/m²
$\varrho = 2{,}4$ Mp/m³ (spezifisches Gewicht des Stahlbetons)
$g = 9{,}81$ m/sec² (Schwerkraftbeschleunigung).

Auf Grund dieser Angaben ist $l/t = 47\,000$ m/sec.

Die momentane Phasengeschwindigkeit ist nach Gl. (17) genau die Hälfte dieser Größe.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit der zum k-ten Mal zurückgeworfenen Wellen ist kl/t.

Es sei nun $l = 8$ m, so wird $t = 8/47\,000 = 1{,}7\cdot 10^{-4}$sec; die Grundschwingungsdauer des Trägers ist $T = 592\,t \approx 0{,}1$ sec.

Wir bemerken, daß die in Gl. (21) angeführte unendliche Reihe für mehrere Wertefolge von u genau ausgewertet werden kann, ohne Anwendung eines besonderen Summierungsverfahrens.

5. Erregung durch ein konzentriertes Moment von konstanter Größe

Da Gl. (10) in Bezug auf P linear ist, kann dieselbe formell wie folgt geschrieben werden:

$$f_p(x,t) = Pf_1(x,t)\,,$$

worin

$$f_1(x,t) = \frac{\sqrt{i}\,\sqrt{t}}{\sqrt{2\,\pi m a}}\,u \cdot \int_u^\infty \frac{d\tau}{\tau^2}\,e^{i\tau^2\pi/2}\,, \qquad a = \sqrt{\frac{EJ}{m}}\,,\; u = \frac{x}{\sqrt{2\,\pi a t}} \tag{22}$$

sind.

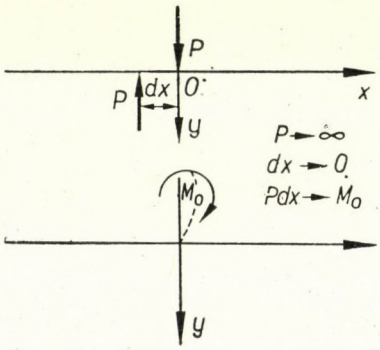


Bild 7. Ableitung des konzentrierten Erregungsmoments mit Hilfe des Grenzübergangs

Dem Bild 7 gemäß ist

$$f(x,t) = -\,Pf_1(x+dx,t) + Pf_1(x,t) \to -\,Pdx\,\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x} \to -\,M_0\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\,.$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi a t}} \cdot \frac{\partial}{\partial u}$$

durchführt man die Differentiation, und nach der partiellen Integration erhält man:

$$f(x,t) = -\,\frac{i^{3/2}\,M_0}{2\,\sqrt{EJ}} \cdot \int_u^\infty e^{i\tau^2\pi/2}\,d\tau = -\,\frac{i^{3/2}\,M_0}{2\,\sqrt{EJ}}\left(\int_0^\infty e^{i\tau^2\pi/2}\,d\tau - \int_0^u e^{i\tau^2\pi/2}\,d\tau\right). \tag{23}$$

Auf Grund der im Zusammenhang mit der Gleichung (10) über das Vorzeichen der oberen Integralgrenze gemachten Bemerkung ist $f(x,t)$ diesmal eine ungerade Funktion von x. Durch Fresnelsche Integrale erhalten wir

aus (23)

$$f(x,t) = \pm \frac{M_0}{2\sqrt{2EJ}} + \frac{M_0}{2\sqrt{2EJ}}(-1+i)\,[C(u)+iS(u)]\,, \qquad (23')$$

$$f(\pm 0, t) = \pm \frac{M_0}{2\sqrt{2EJ}}\,.$$

Das innere Moment hat demnach einen Sprung M_0 im Angriffspunkt von M_0

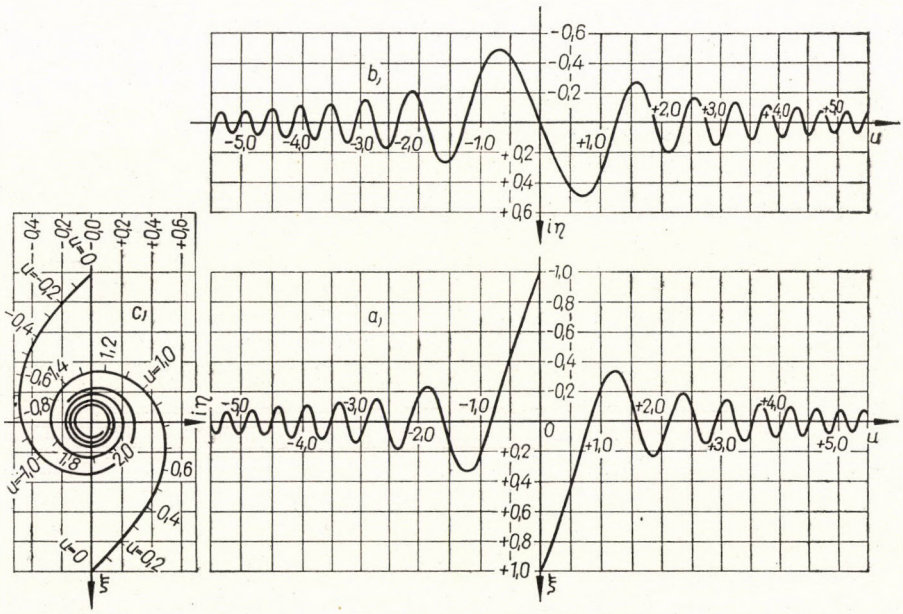


Bild 8. Eine durch konzentriertes Moment erregte Energiespirale. *a)* Momentenkomponente, *b)* Geschwindigkeitskomponente, *c)* die Projektion der Spirale auf die Querschnittsebene

(an der Stelle $x = 0$), und $v(o,t) = 0$ in jedem Zeitpunkt, wie dies auch zu erwarten war.

Durch Trennung des reellen Teiles von dem imaginären wird aus Gl. (23):

$$f(x,t) = \frac{M_0}{2\sqrt{2EJ}}\,[\xi(u) + i\eta(u)]\,,$$

$$\xi(u) = \pm 1 - C(u) - S(u) \quad \text{und} \quad \eta(u) = C(u) - S(u). \qquad (24)$$

Bild 8 stellt Gl. (24) in drei Projektionen dar.

Die in bezug auf das in Gleichung (23) vorkommende erste Integral den Gleichungen (18) bzw. (18') ähnlich ableitbare asymptotische Funktion ist

$$\int_u^\infty e^{i\tau^2\pi/2}\,d\tau \approx \left(\frac{i}{\pi u} + \frac{1}{\pi^2 u^3} - \frac{3\,i}{\pi^3 u^5} - \frac{15}{\pi^4 u^7}\right) e^{iu^2\pi/2}\,, \qquad (25)$$

Wenn $u > 4$ ist, so ist der Absolutwert des letzten Gliedes kleiner als 10^{-5}, infolgedessen sichern die drei ersten Glieder die Genauigkeit der vierstelligen Tabelle [3]. Aus den Gleichungen (23), (24) und (25) lassen sich die asymptotischen Funktionen für $C(u)$ und $S(u)$ ableiten.

Da Gl. (23) von der Zeit t nur durch den Parameter u abhängt, wird die dem vorangehenden Abschnitt gleichartig definierbare Wellenfront stets durch den kleinen Energievektor repräsentiert, dessen Phasengeschwindigkeit zugleich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Front übereinstimmt. Daraus folgt, daß zwischen den zwei Wellenfronten die Windungszahl der Energiespirale unveränderlich bleibt. Auch die Querabmessungen ändern sich nicht, nachdem die Länge der Energievektoren nur von der Phase abhängt. Die zur Achse parallelen Abmessungen dagegen vergrößern sich $\sqrt{t}$ proportional. Demzufolge vergrößert sich der Energieinhalt des Stabes $\sqrt{t}$ proportional.

Bei einem Träger auf zwei Stützen wird die Lösung ebenfalls durch das Spiegelungsverfahren geliefert, mit dem Unterschied, daß mittlerweilen der Drehungssinn von M_0 nicht verändert werden darf. Dies ist übrigens auch aus der Ableitung vom Kräftepaar des Drehungsmoments Pdx einsehbar (Bild 7).

Aus der Ableitung ist auch ersichtlich, daß wir mit dem vorangehenden Abschnitt eine enge Verbindung schaffen, indem wir anstatt M_0 die Kraft P einsetzen. In diesem Falle repräsentiert nämlich Bild 8a das Diagramm der Schubkräfte (an der Stelle $x = 0$ mit $\pm P/2$), und Bild 8b stellt das Diagramm der Winkelgeschwindigkeit der Querschnittsverdrehungen dar.

6. Aufgaben von allgemeinem Charakter

a) Freie Schwingungen eines Stabes von unendlicher Länge mit einer gegebenen Anfangsverteilung der Energievektoren.

Es sei die Energievektorverteilung im Zeitpunkt $t = 0$ (Bild 9) wie folgt

$$f_0(x) = \frac{M_0(x)}{\sqrt{2\,EJ}} + i\sqrt{\frac{m}{2}}\, v_0(x) = \xi(x) + i\eta(x)\,, \qquad (26)$$

$$x_1 \leq x \leq x_2\,.$$

Die Aufgabe ist: man soll die homogene Differentialgleichung (6′) lösen bei der Anfangsbedingung (26).

Wir behaupten, daß die Lösung auch in diesem Falle mit der Hilfsfunktion (9) in folgender Form gefunden werden kann:

$$f(x,t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f_0(x')}{\sqrt{i}\,\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{i(x-x')^2/4at}}{\sqrt{4at}}\, dx'\,. \qquad (27)$$

Durch Substitution können wir uns davon überzeugen, daß dieselbe (6′) befriedigt. Deshalb bleibt nur noch zu beweisen, daß (27) auch der Anfangsbedingung (26) genügt, d. h. $f(x, 0) = f_0(x)$.

Setzt man die neue Veränderliche

$$h = (x - x')/\sqrt{2\pi at}$$

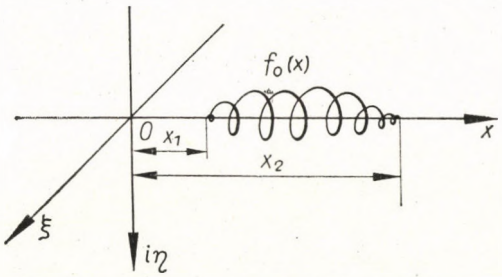


Bild 9. Anfängliche Energievektorverteilung

anstatt x' em, so wird aus (27)

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\,i}} \cdot \int_{-\frac{x_2-x}{\sqrt{2\pi at}}}^{\frac{x-x_1}{\sqrt{2\pi at}}} f_0\left(x - h\sqrt{2\pi at}\right) \cdot e^{ih^2\pi/2} \cdot dh.$$

Infolge der Eigenschaften des Integranden kann der Grenzübergang $t \to 0$ — in den Stetigkeitspunkten der Funktion $f_0(x)$ — schon sowohl im Integranden wie auch in den Integrationsgrenzen durchgeführt werden. Hinsichtlich der Lage von x müssen wir aber zwei Fälle unterscheiden.

Fall 1: x liegt außerhalb des Abschnittes (x_1, x_2).

Dem Bild (9) gemäß ist auf diesen zwei Abschnitten der x-Achse $f_0(x) = 0$. Außerdem verschiebt sich der ganze Integrationsbereich (mit Grenzen von gleichem Vorzeichen) in derselben Richtung gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Der Wert des Integrals ist gleich Null. Es gilt also: $f(x, o) = fo(x) = 0$.

Fall 2: $x_1 \leq x \leq x_2$.

Führt man den Grenzübergang $t \to 0$ durch, so erhält man

$$f(x,0) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{2\,i}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ih^2\pi/2} \cdot dh = \frac{f_0(x)}{\sqrt{2\,i}}(1+i) = f_0(x).$$

Wenn $f_0(x)$ Unstetigkeitsstellen hat (wofür Bild 8 ein Beispiel darstellt), beschreibt (27) den Schwingungsvorgang eigentlich auf Grund einer solchen Anfangsverteilung, worin zu den Sprungstellen das arithmetische Mittel der rechts- und linksseitigen Grenzwerte zugeordnet ist, obwohl die Funktion $f_0(x)$

in diesen Punkten gelegentlich nicht einmal definiert ist. Solche einzelne Energievektoren von endlicher Zahl beeinflussen aber nicht die Richtigkeit von (27).

Funktion (27) beschreibt die Zerströmung der im Zeitpunkt $t = 0$ auf dem Abschnitt $x_2 - x_1$ des Stabes konzentrierten Schwingungsenergie. Die Gesetzmäßigkeiten dieses Vorgangs werden wir an einem einfachen Beispiel studieren. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, daß die Anfangsverteilung der Energievektoren bloß durch die Geschwindigkeitsverteilung in folgender Form repräsentiert ist:

$$f_0(x) = i \sqrt{\frac{m}{2}}\, v_0\, e^{-x^2/d^2}.$$

Die in der Form einer Glockenkurve angegebene Geschwindigkeitsverteilung breitet sich praktisch — infolge der sehr schnellen Abnahme der exponentiellen Funktion — nur auf eine endliche symmetrische Umgebung des Anfangspunktes aus, deren Grenzpunkte durch den Schwellenwert der Beobachtbarkeit der Geschwindigkeit bedingt sind. Der Verteilungsabschnitt kann durch Verringerung von d beliebig eingeengt werden. Eine ähnliche Geschwindigkeitsverteilung kann z. B. durch einen Schlag hervorgerufen werden.

Durch Substitution in Gleichung (27) kann das Integral — infolge der speziellen Form von $f_0(x)$ — in einer geschlossenen Form angegeben werden:

$$f(x,t) = \sqrt{\frac{m}{2}}\, v_0\, \frac{d\sqrt{i}}{\sqrt{4\,at - id^2}} \cdot e^{-x^2 d^2/(16a^2t^2+d^4)} \cdot e^{i4atx^2/(16a^2t^2+d^4)}.$$

Untersuchen wir die zeitliche Veränderung der spezifischen Schwingungsenergie:

$$|f(x,t)|^2 = \frac{M^2(x,t)}{2\,EJ} + \frac{mv^2(x,t)}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\, \frac{d^2}{\sqrt{16\,a^2t^2 + d^4}} \cdot e^{-2x^2d^2/(16a^2t^2+d^4)}.$$

Die Energieverteilung wird also durch eine mit der Zeit immer mehr verflachende und sich in bezug auf den Anfangspunkt symmetrisch erstreckende Glockenkurve dargestellt. Durch Differentiation nach t kann man nachweisen, daß in der Umgebung $-d/2 \leq x \leq d/2$ des Anfangspunktes die spezifische Energie vom Zeitpunkt $t = 0$ an fortwährend abnimmt. Die Verringerung des an der Stelle $x = 0$ befindlichen Scheitelpunktwertes ist der Zeit nahe umgekehrt proportional. In jedem Punkte, der außer diesem Abschnitt liegt, vergrößert sich die Energie bis zu einem gewissen Maximum, wonach sie abzunehmen beginnt. Der Zeitpunkt der Erreichung der lokalen Maximalwerte ist

$$t = \frac{d^2}{4\,a} \cdot \sqrt{\frac{4\,x^2}{d^2} - 1},$$

und die Größe des Maximalwertes

$$|f(x,t)|^2_{\max} = \frac{mv_0^2}{2\sqrt{e}} \cdot \frac{d}{2x} .$$

Bezeichnet man den Schwellenwert der Beobachtbarkeit der spezifischen Energie mit

$$\frac{mv_0^2}{2\sqrt{e}} \cdot \varepsilon ,$$

so liegt der am fernsten befindliche Punkt, bis wohin die Schwingungsenergie praktisch gelangen kann, in einer Entfernung $x_{\max} = \pm d/2\varepsilon$. Die Zerströmung der Schwingungsenergie kann demgemäß durch das folgende anschauliche Bild gekennzeichnet werden.

Die anfangs in der Umgebung des Punktes $x = 0$ angehäufte Energie breitet sich nach Art eines reibungslosen Sandhügels aus. Der Fuß des Hügels (d. h. die Wellenfront) kriecht beiderseits bis zu dem oben erwähnten kritischen Punkte vorwärts, um danach zurückzukehren. Schließlich wird der »Energiehügel« scheinbar verschwinden: die spezifische Energie vermindert sich unter den Schwellenwert der Beobachtbarkeit den ganzen Stab entlang, der Stab selbst gelangt in Ruhelage parallel zur Anfangslage (theoretisch unendlich weit verschoben). Für den Vorgang ist es charakteristisch, daß wir dieses Ergebnis durch Vernachlässigung der Dämpfung gefunden haben.

Mit dieser Untersuchung wollten wir eine der Eigenschaften der Biegeschwingungen zu demonstrieren. Die beschriebene Erscheinung ist nämlich kennzeichnend für die dispersen Ausbreitungsvorgänge. Es ist die Dispersion, welche die Biegeschwingungen — vom Gesichtspunkt der Gesetzmäßigkeit der Fortpflanzung aus — von denjenigen Schwingungsarten (Dilatations-, Drillungsschwingungen, Körperschall usw.) unterscheidet, deren Ausbreitung durch die Wellengleichung beschrieben wird, und deren Ausbreitungsgeschwindigkeit nur von Materialkonstanten abhängt. Aus der Fourierschen Analyse der Biegeschwingungen ist es bekannt, daß die Phasengeschwindigkeit der harmonischen Wellenkomponenten auch von der Wellenlänge abhängt, woraus sich die Verzerrung, »Dispersion«, der aus solchen Komponenten bestehenden Schwingungsformen ergibt.

b) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (6)

Der Abschnitt $x_1 \leq x \leq x_2$ des Stabes soll durch eine stetig verteilte, auch von der Zeit abhängige Erregungskraft $p(x, t)$ angegriffen werden. Außer diesem Abschnitt ist $p(x, t) = 0$. Die Lösung wird ebenfalls durch Anwendung der Hilfsfunktion (9) durchgeführt. An der innerhalb des belegten Abschnitts

befindlichen Stelle x' im Zeitpunkt t' wird der Elementarimpuls $q = p/x', t'/dx'\, dt'$. Summiert man diese in bezug auf den belasteten Abschnitt und für die Zeitdauer t, so erhält man:

$$f(x,t) = \int_0^t dt' \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2m}} \frac{p(x'\,t')\,dx'}{\sqrt{4\pi a\,(t-t')}}\, e^{i(x-x')^2/4a(t-t')}.$$

Der Integrand befriedigt an jeder Stelle und in jedem Zeitpunkt die homogene Gleichung (6'). Das auf der rechten Seite der Gleichung (6) befindliche Inhomogenitätsglied $ip(x,t)\sqrt{2m}$ ergibt sich durch die Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze t. Vordem aber muß man die im Punkte *a)* vorgeführte Variablentransformation anwenden um die Singularität, mit der der Integrand zur Zeit $t' = t$ behaftet ist, zu beheben.

Bei einer Einzelkraft P können wir im Sinne des oben Gesagten derart vorgehen, daß wir mit Hilfe der im dritten Abschnitt erwähnten δ-Funktion in der engen Umgebung des Anfangspunktes die Einzelkraft in eine verteilte Kraft von der Intensität $P\delta(x)$ umwandeln.

c) Allgemeine Lösung des zweistützigen gelenkigen Trägers

Das Spiegelungsprinzip, das im Abschnitt 4 erörtert wurde, ist von allgemeiner Gültigkeit. Wir können alle Erregungsfälle umfassen, wenn wir den in der Hilfsfunktion (9) befindlichen Elementarimpuls q dem Spiegelungsverfahren unterwerfen. Gleichung (9) wandelt sich dementsprechend formell in eine unendliche Reihe, d. h. in die Hilfsfunktion des zweistützigen Trägers um

$$f_q(x,t) = \frac{q\sqrt{i}}{\sqrt{2m}\sqrt{4\pi at}} \cdot \left(e^{ix^2/4at} - e^{i(x+l)^2/4at} - e^{i(x-l)^2/4at} + \right.$$
$$\left. + e^{i(x+2l)^2/4at} + e^{i(x-2l)^2/4at} - + \ldots\right),$$
$$-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}.$$

Die Anwendung derselben hat schon im Abschnitt 4 (in verhüllter Form) stattgefunden. Bei einem Erregungsmoment ist die Hilfsfunktion die negative Ableitung nach x der obigen Funktion.

Im Falle von Anfangswertaufgaben ist es der verallgemeinerte komplexe Impuls

$$\frac{\sqrt{2m} \cdot f_0(x) \cdot dx}{i}$$

welcher die Rolle des normalen Impulses q übernimmt, wie es sich durch eine Gegenüberstellung von (9) und (27) erkennen läßt.

Schließlich bemerken wir, daß die obigen Ergebnisse — obwohl in einer umständlicher Weise — auch durch die Lösung von (1) (mit Hilfe des Fourierschen Integrals) nachgewiesen werden können.

SCHRIFTTUM

1. RAYLEIGH: The Theory of Sound. London and New York 1894. 2nd edition. Vol. I. &. 192.
2. MACKE, W.: Thermodynamik und Statistik. Leipzig 1962, 19—24.
3. JAHNKE—EMDE: Tafeln höherer Funktionen (Tables of Higher Functions) Leipzig 1952, 35—36.

Propagation of Elastic Bending Vibrations in Bars. Author introduces a new vector-like physical characteristic for the description of elastic bending vibrations which satisfies the differential equation analogous to that of the linear heat conduction. On the basis of the thermodynamic analogy, he investigates the laws of development and propagation of bending vibrations excited by impulsive loads in the case of homogeneous bars of infinite length and of constant cross-section, as well as of the simply supported hinged beams. Treating of the subject is positively of theoretical interest and is demonstrated by the simplest bending vibration model of the bar.

Propagation des oscillations de flexion élastiques dans les barres. L'auteur introduit une nouvelle caractéristique physique de forme vectorielle pour décrire les oscillations de flexion élastiques. La caractéristique en question satisfait à l'équation différentielle analogue à celle de la conduction de chaleur linéaire. Sur la base de cette analogie thermodynamique, l'auteur examine les lois du développement et de la propagation des oscillations de flexion engendrées par des charges d'impulsion, pour les cas de barres de profil constant et de longueur infinie et de poutres articulées à deux appuis. L'auteur traite ce sujet sur un plan expressément théorique, en s'appuyant sur le modèle le plus simple de l'oscillation de flexion des barres.

Распространение упругих изгибающих колебаний в стержнях *(Б. Кирай)*. Для описания упругих изгибающих колебаний автор вводит новый физический показатель векторной формы, который удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному дифференциальному уравнению теплопроводности по прямой. Исходя из этой термодинамической аналогии, автор исследует законы возникновения и распространения изгибающих колебаний, возбужденных импульсными нагрузками, в случае однородного бесконечно длинного стержня неизменного поперечного сечения и двухопорной шарнирной балки. Анализ носит выраженно теоретический характер и основывается на простейшей модели изгибающих колебаний стержня.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 75—95 (1968)

STRENGTH OF STABILIZED SOILS

Á. KÉZDI
DOCTOR OF TECHN. SC.

B. NAGYVÁTI
CIVIL ENGINEER

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received June 21, 1967]

One of the most important properties of stabilized soils is their strength; this is the first decisive factor in determining their behaviour in connection with other effects. Therefore, authors first investigate the mechanisms of failure, classify the grain assemblies from this viewpoint, and present the characteristic form of deformations. Using an original way of representation, they demonstrate that soil mixtures have a definite mixing ratio which is optimum from the viewpoint of strength; in case of cement stabilized soils they define those ranges of mixing ratios where cement stabilized soils can be produced and show the optimal composition. In respect to the strength of the cement stabilized soil, the degree of pulverization of the soil is an important factor; the effect of this is indicated by the series of experiments. The results of authors' experiments show the effect on the strength of addition of lime and bitumen; finally examples are presented for showing the strength of soils stabilized with phosphoric acid, aniline and furfural.

1. Introduction

The world-wide increasing significance of stabilized earth roads urges the investigation of the properties of stabilized soils. Among these an ever more prominent part is taken by those which are essential from the viewpoint of functional use or physical processes occurring in the course of stabilization. Also in these investigations the new attitude prevails which recently led to many new results in Soil Physics: becoming acquainted with physical processes instead of empirisms, research and mathematical description of relationships permitting technical design on an ever widening base.

Among the physical properties, it is the strength which determines the behaviour of stabilized soils; other effects, such as frost action, water absorption, etc. could be judged most expediently through the strength. In general, as is customary, one means by strength in this respect unconfined compression strength, and though it is doubtless that this value does not definitely characterize the absolute strength of the material, being also the function of the measurements of the sample, yet, from the point of view of the relative comparison, and even of the judgement of the behaviour of the mixture, it might be considered as a reliable value.

In this treatise, the effect of the different stabilizing agents exerted on the strength will be treated, mostly on the basis of the results of original

experiments. It will also be examined, by what mechanism the different stabilizers could increase strength.

2. Failure mechanisms of stabilized soils

According to the nature of the interaction between the stabilizing agent and soil particles, i.e. according to the fact whether the stabilizer does constitute a continuous matrix or not, two basic cases can be distinguished. In the first case soil particles are perfectly embedded in the chemical agent or in the material produced by the chemical processes, in the second this is not the case. In the first case the properties of the resulting system are, at all events, determined by the stabilizing agent. If, namely, the soil particles are floating in the solidified stabilizer, as inert filler, then it is evident that failure under the effect of the load takes place in the stabilizer, for this latter forms a continuous skeleton, the particles of the filler obtain no load. If, in turn, a surface bond is produced between the stabilizer and the soil particles, and the bond strength is higher than the own strength of the stabilizer, then, evidently, it is the stabilizer itself which will be destroyed first during the increase of the load; however, if the bond strength is lower than that of the stabilizer, then the former will be discontinued, and so the soil particle will become an inert filler; the strength of the system will again be governed by the strength of the stabilizing substance.

In case of a discontinuous matrix, stabilizing effect might be obtained in three ways.

First of these is the change of the surface properties by adsorption or change of the ions with the aid of chemical agents.

In the case of a discontinuous matrix, the *second* effect producing stabilization might be created by filling the voids between grains with inert filling substances. This effect gives origin to the strength of the mixtures in the course of mechanical stabilization; but one could imagine that filling up voids might also be effected with the aid of chemical reaction.

The *third* mechanism, which in case of a discontinuous matrix might produce stabilization, is the connection of particles in certain points, so to say, "by spot welding". In such a system two kinds of cohesion exist: the own cohesion of the soil particle and stabilizer, besides adhesion between the soil particle and the stabilizer is acting too. Fracture might take place in two ways:

Fig. 2. Failure mechanisms of stabilized soils and relationships between displacement and shear stress. *a* — cohesion is produced between particles by surface forces; failure is caused by the increase of the distance between particles and decrease of bond strength; *b* — the stabilizer constitutes a continuous matrix the strength of which is less than that of the particles floating in it; *c* — strength of bonds between particles is greater than that of the particles, consequently failure occurs in the particles; *d* — strength of bonds between the particles is lower than that of the particles, after failure the medium becomes a grain assembly

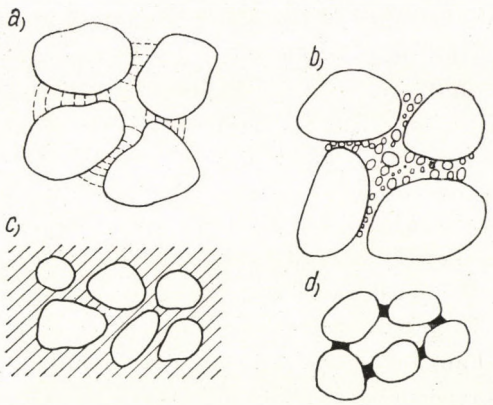
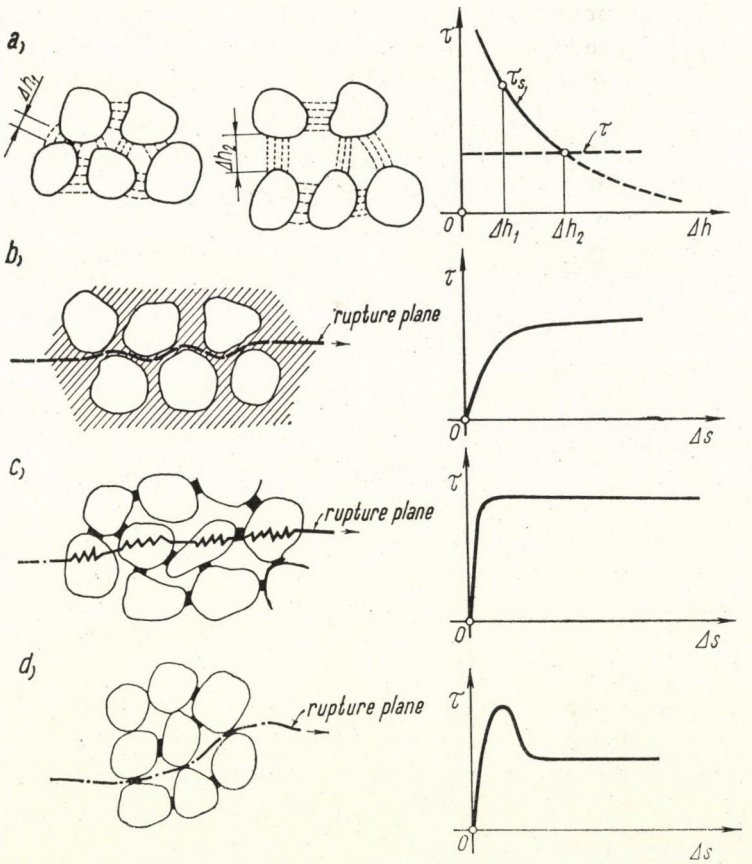


Fig. 1. Structure of soil grains in the different stabilizations. *a* — cohesion is produced by the surface forces between particles; *b* — voids between particles are filled with inert substance; *c* — soil particles are embedded in continuous matrix; *d* — strength of the connection between soil particles is assured by "spot welding"



if adhesion is stronger than the two kinds of cohesion, fracture takes place in the stabilizer or in the soil particle (or in such grain assemblies within which the binding force is not produced by the effect of the stabilizer); if, contrarily, the value of the cohesion surpasses that of the adhesion, failure will occur on the surface of contact between the particle and stabilizer. Knowledge of the kind of fracture is also important from a practical viewpoint, because, e.g., if the fracture of the stabilized soil occurred in consequence of the insufficiency of adhesion, the increase of cohesion does not cause increase in strength.

Correspondingly with the above discussions the characteristics of the different structure of grains are indicated in Fig. 1. In Fig. 2 we intend to demonstrate the mechanisms of fracture; the relationships between displacement and shear stress for certain cases are also represented.

3. Mechanical stabilization

Strength of soils stabilized without any admixture other than soils is motivated by the bond effected by the small particles of the material to be found in the mixture between coarse grains which keep the assembly together otherwise possessing only friction. Fine particles are attached to the surfaces

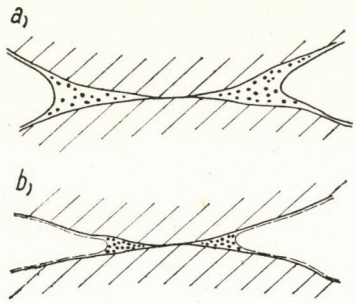


Fig. 3. Effect on cohesion of small solid particles floating in the pore-water. *a* — fine particles are floating freely in the water; *b* — after drying they increase the surface, where attraction forces caused by surface tension, are acting

of the coarse ones by hydrogen bonds; strength of this will be the greater, the smaller is the number of layers of water molecules through which bonds are effected. The cation of particles bonded in this way are binding further particles until between the coarse grains, at the smallest voids, veritable bridges will be formed which produce cohesion. The power of this effect is promoted also by the fact that during the drying of the soil the fine grains of the binding material are crowded just into the small voids. In the pore-water filling up the voids between the grains, the particles of material are drifting freely in the beginning, then when drying goes on, they will become jammed into smaller and smaller spaces (Fig. 3). The particles do not permit any further shrinkage of

the water films, and the arising strength, which increases with drying, will work at about the same surface as drying proceeds. Therefore, the attraction force increases considerably and creates strength.

However, the strength of these bonds is always lower than the own strength of the coarse grains. This determines the way of fracture; fracture

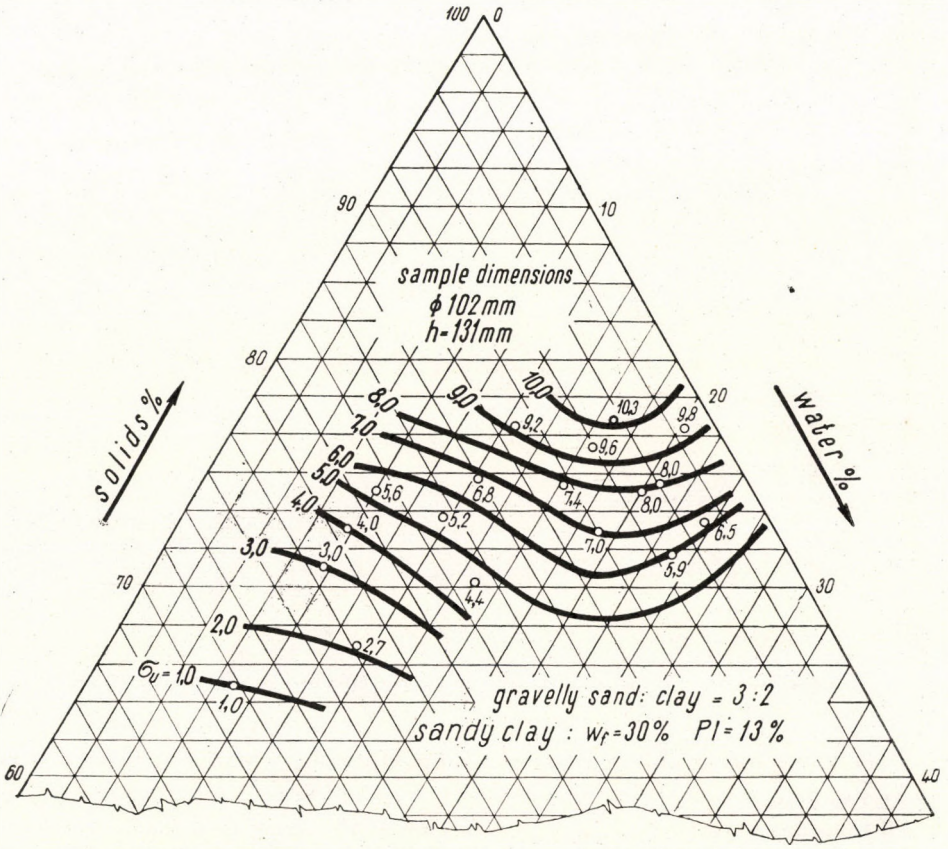


Fig. 4. Unconfined compressive strength of soil mixture in function of the volume percentage of the phases

takes place always on the surface of the coarse grains or on surfaces going through the voids; i.e. though bonds are producing adhesion on the surface of the particles, they do not create cohesion between the grains. The value of the attraction force of adhesion governs the strength of the stabilized soil. This strength depends, beside the properties of the binder and the strength of the above said bonds, on the density and water content of the mixture; the results of a series of tests are indicated in Fig. 4. The influence of water content is particularly considerable; therefore, let us examine by what phenomena water decreases the strength of the mechanically stabilized soil.

a) Filling up the voids with water destroys the cohesion owing to the capillary stress.

b) In consequence of hydration, the force of the hydrogen bonds connecting the particles decreases.

c) When the water molecules settled into the skeleton system, the clay minerals, susceptible to swelling, which are present in the binder, are forcing apart the coarse grains by swelling, after the water molecules have entered into the lattice structure, the skeleton structure will be destroyed. Owing to swelling, density decreases too.

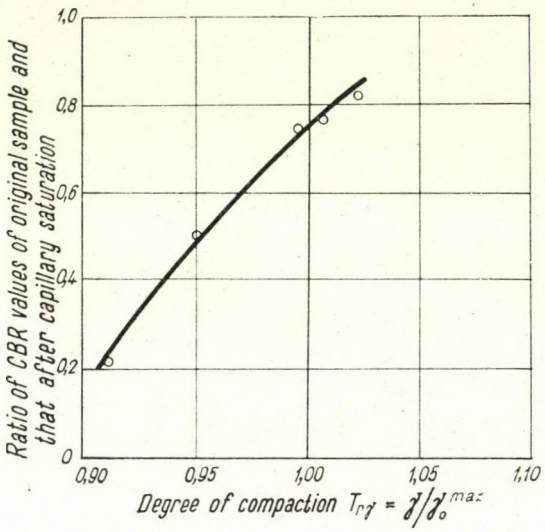


Fig. 5. Decrease of strength of soil mixtures under the effect of capillary water absorption

d) Compaction and expansion produced by the wheels passing on, loading and unloading cause water movement, a so-called pumping effect will arise which together with the shear stresses acting at the same time entirely destroy the different bonds binding the particles together and disintegrate the soil.

e) During frost period in stabilized soil mixtures, which are in general qualified as frost susceptible, ice lenses are formed if there is a possibility of water supply, and so the swelling effect again reduces the cohesion of the whole mass.

f) At thawing of the frozen soil the water accumulated in the ice lenses will be absorbed and the dynamic effect of traffic kneads the wet soil thoroughly and destroys its strength.

Accordingly, simultaneous effects of water and traffic are decisive. The amount of strength reduction caused by the capillary-water absorption depends mainly on the intensity of the effects mentioned in points *a)* to *c)*. The greater the strength reduction caused by the capillary saturation, the less the

initial density of the soil; a numerical example is given by the test result indicated in Fig. 5. For characterizing strength, the CBR value of the mixture is used here because the unconfined compression strength could not be determined in all cases in the saturated state.

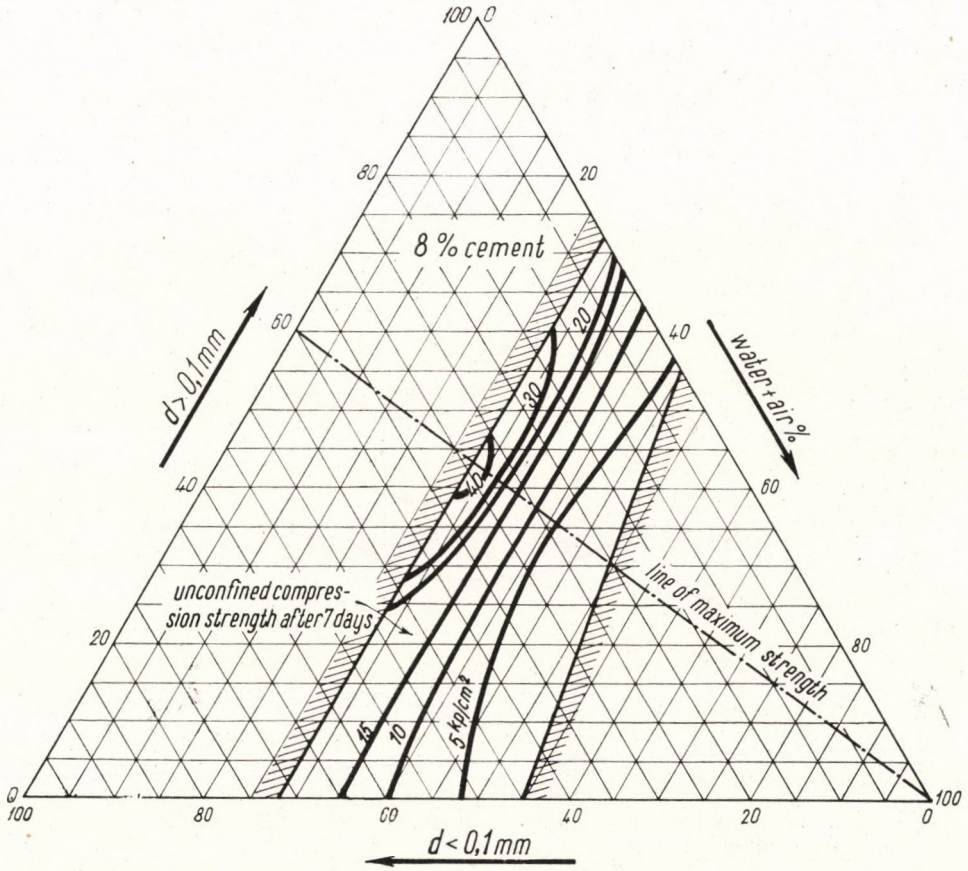


Fig. 6. Compressive strength of soil cement in function of percentage of the composition, at a proportion of 8% of cement

4. Strength of soil cement

In order to characterize the strength of soil cement, in most cases the value of the unconfined compression strength is again used. This reflects best the degree of the reaction and advancement of hardening of the mixture of soil, cement and water; in general, the required quantity of cement will be determined on the basis of the value of the compressive strength established by test.

In addition to many values in the literature for the compression strength of soil cements, we are in possession of numerous results of our own tests. The diagram in Fig. 6 is plotted with the aid of these data: with the ce-

ment content, indicated in the triangular diagram (8 per cent cement by weight, class 500) the value of the compression strength determined at the age of 7 days may be seen. On the sides of the triangle the sand content ($d > 0{,}1$ mm), the silt content as well as the per cent value of the volumes taken up by air + water are plotted. On the basis of the figure one can, on the one hand, define

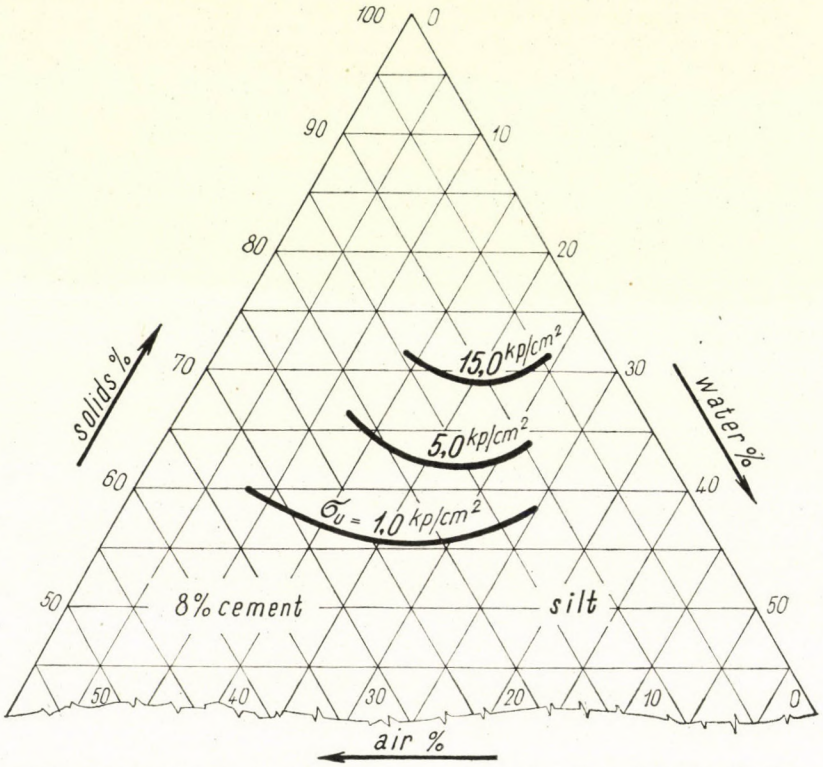


Fig. 7. Variation of the compressive strength in function of the distribution of soil—water—cement according to volume percentage

the range in which the soil cement can be produced and its strength determined, on the other hand, one gets a good idea of the variation of the strength and the effect of density and water content. Further interesting informations are given in Fig. 7 where also at a given rate of cement the strength will be presented as a function of the volume per cent of the solid parts—water—air. This diagram also gives information on the optimal mixture ratios. The effect of the density is particularly important. This is to be seen also in Fig. 8: the 10 per cent increment in the value of the dry density increased the compression strength by 30 to 40 per cent, influence being exerted by the change of the volume of water which is connected with the density. By applying the same compacting effort in producing the cement soil, the bulk density will depend on the water content, accord-

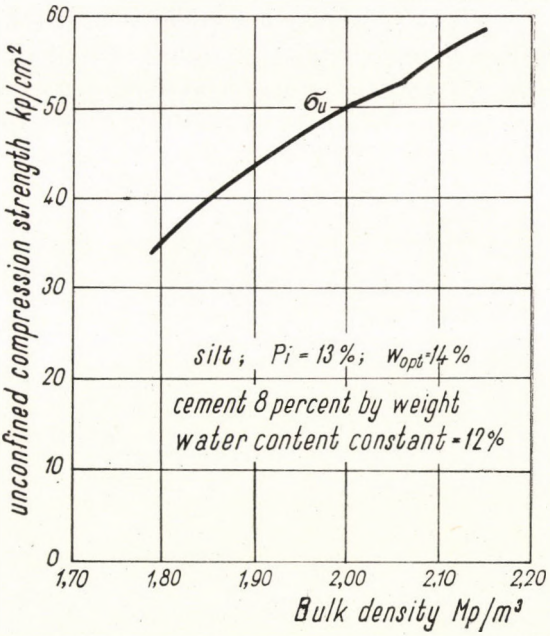


Fig. 8. **Value of the compressive strength in function of bulk density**

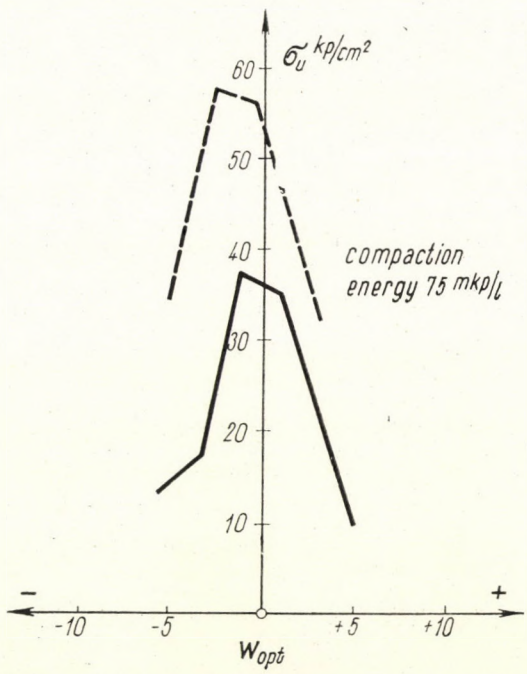


Fig. 9. **Relation between the water content and compressive strength at identical compaction effort**

ing to the laws of compaction. The values of the compression strength show a variation similar to Proctor's curve, the difference being at most in obtaining the maximum of the compression strength at a value w of the water content which is less than the optimum value for the compaction (Fig. 9). Fig. 10 also

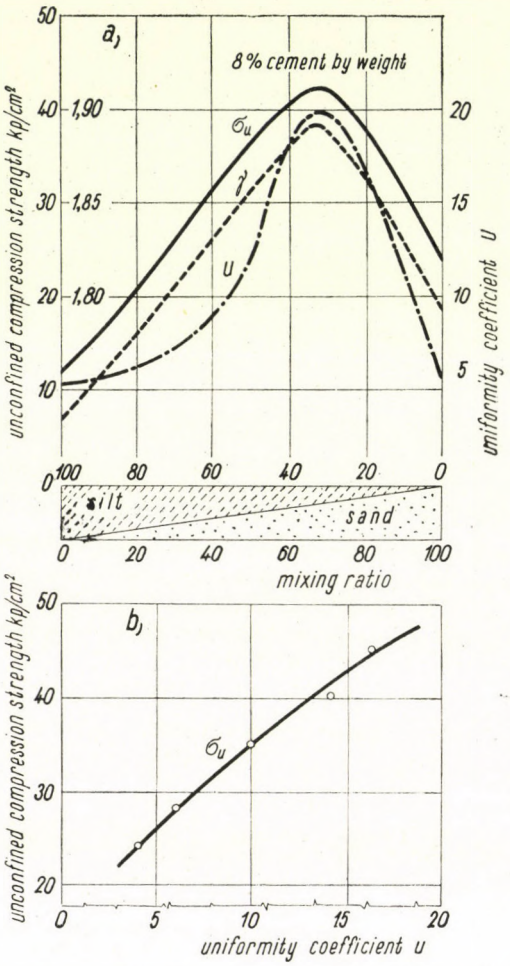


Fig. 10. a — compressive strength, bulk density and uniformity coefficient of the soil cement vs. the mixing ratio; *b* — value of the compressive strength in function of the uniformity coefficient

indicates an interesting result which represents the strength, dry density and uniformity coefficient of the mixtures of two soils as the function of the mixing ratio, with the same amount of cement. The optimum of the mixing ratio is the same from the viewpoint of all three values; the greatest strength and dry density are the greatest, where the value of U is the greatest, and vice versa. Between the unconfined compression strength and the coefficient of uniform-

ity an unambiguous relationship could be established: with different mixing ratios but with the same U value, the compression strength remains the same.

The strength of the cement soil is also influenced by the conditions existing during the period of setting. According to the experiments of GÁSPÁR (1964), between the strength of the test specimens stored during setting in a humid place and under water, 20 to 30 per cent difference could be observed in

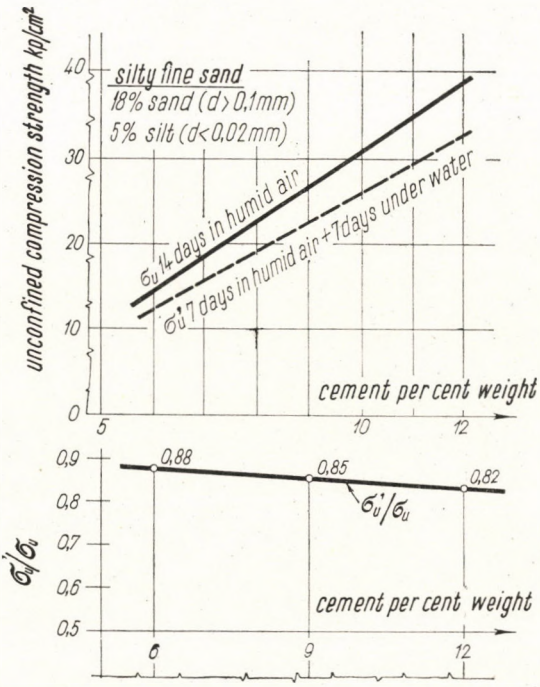


Fig. 11. Effect on compressive strength of the way of storage of the test pieces

favour of the former. A test result can be seen in Fig. 11; Fig. 12 shows a result of an Indian experiment (CHADDA, 1956): the values of the compressive strength of two kinds of soils measured in dry and in humid state show considerable difference.

For the production of soil cement the soil found in a site should be broken up, pulverized, and mixed with cement or perhaps also with other additives, then with water, and the mixture should be compacted. On the strength of the soil cement these operations have also influence.

The question of pulverization is important mainly in the case of cohesive soils, and here this is of great importance, for the degree of pulverization determines the possible rate of mixing.

The effect of the degree of pulverization on frost resistance and compression strength might be shown by the following series of experiments. To the

samples of three kinds of soils (silt, Pi = 9%; silty clay, Pi = 17%; clay, Pi = 23%) we added after pulverization in increasing weight per cent lumps of soil with 5 to 10 mm diameter, and then cement and water was added to the mixture. The amount of mixing was in all cases the same, and the most part of the lumps remained unbroken. These lumps of soil were, in the first series of the experiments, entirely dry, however, in the second, the water content of the soil used for preparing the lumps was identical with that of the stabilized mixture.

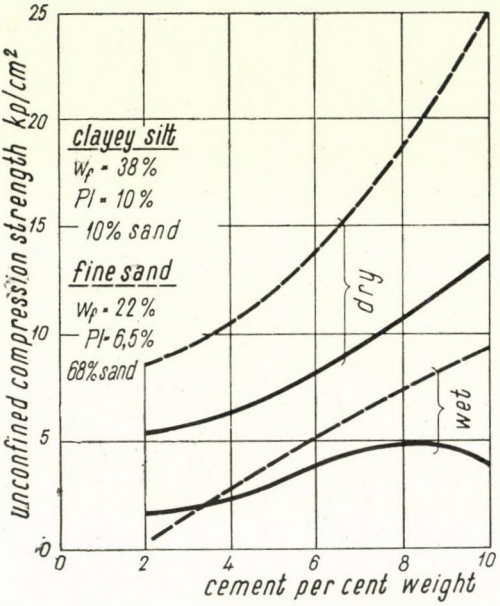


Fig. 12. Value of the unconfined compressive strength in dry and in humid conditions as a function of cement content

Quantity of water added related to the dry weight of the whole mixture was the same, difference could be observed only in the distribution: in the first case dry lumps were embedded in humid clay, in the second the water content was uniform. The amount of cement was in each case the same; only the percentage of the lumps made up the differences in the samples.

Results of the experiments are indicated in Figs 13 and 14. In Fig. 13 one can observe the drop of the compression strength; especially the presence of dry lumps has a detrimental effect. However, this is always the case when the natural water content of the soil is less than optimum and water should be added to the mixture. By wetting, only the surface of the unbroken lumps will become somewhat wet, inside they remain dry. Fig. 14 demonstrates the losses in weight of the specimens in 12 freezing cycles. The insufficient pulverization here also involves severe consequences.

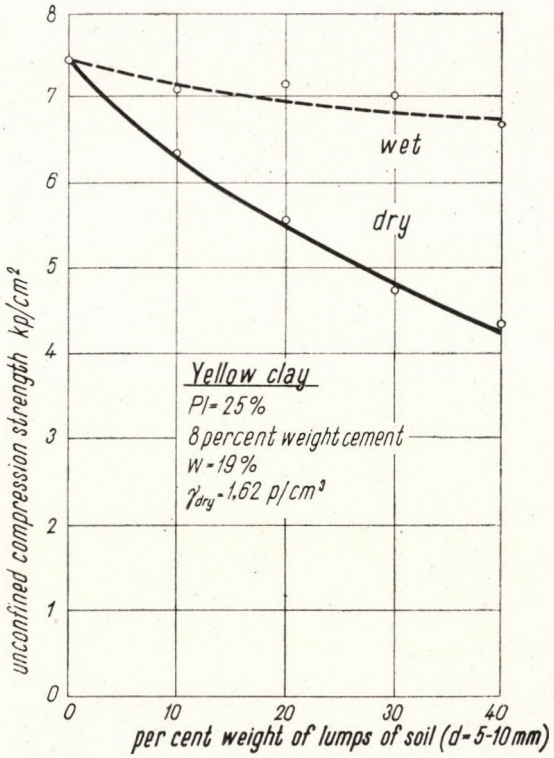


Fig. 13. Decrease of the compressive strength in function of the weight per cent of lumps

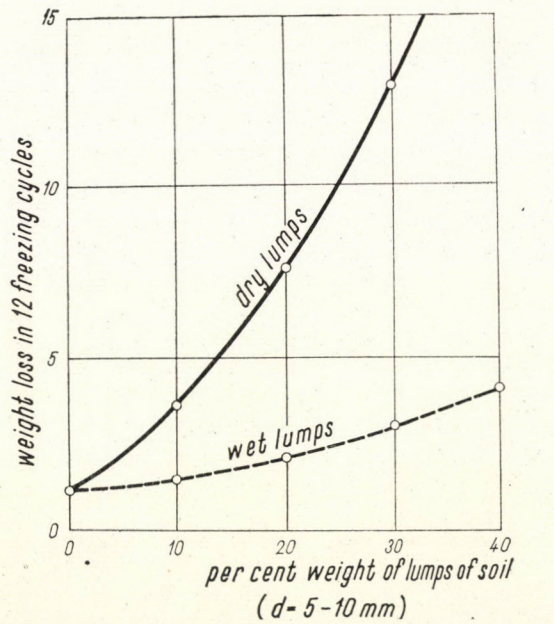


Fig. 14. Losses in weight in the freezing cycle in function of the weight per cent of lumps

5. Effect on strength due to the addition of lime

In lime stabilization for road construction one of the important effects of lime is the increase of strength. The rate of hardening depends on a number of factors. First, it is the lime content which has an important influence. This is illustrated by Fig. 15 which represents the unconfined compression strength plotted vs. the percentage of lime added for three different cohesive soils.

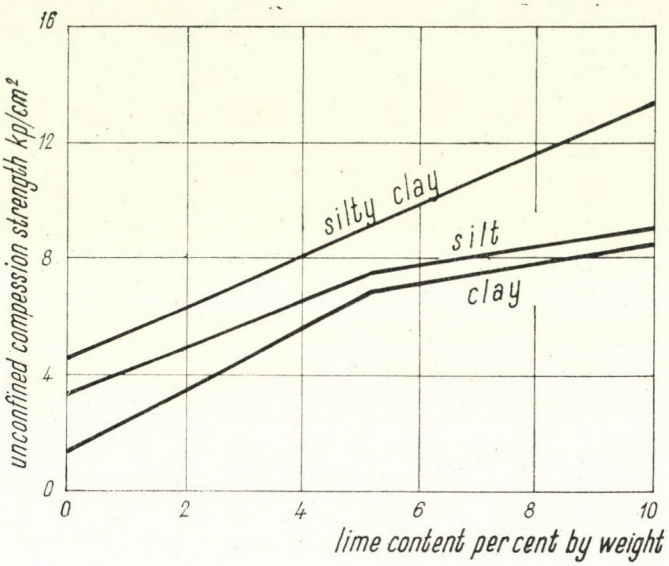


Fig. 15. Effect of lime on the compressive strength

According to Fig. 16, at a small lime content, the effect of the time elapsed is insignificant, however, at a greater lime content it has a considerable influence. Hardening takes place rather slowly, thus no final conclusion might be reached either in case of test specimens aged 7 or even 28 days. It may also occur that by increasing the lime content, the strength decreases.

From the point of view of strength the way of adding the lime is also important. In general, one might say that burned lime is more effective than the hydrated one. However, the manner of adding cannot be chosen at will: if the soil to be stabilized is wetter during constructions than it is desirable with respect to compaction, then burned lime should be added in pulverized form; the water needed for slaking will be extracted from the soil. To a soil with a water content w_{opt} or so, it is advisable to add hydrated lime; dry soil might best be stabilized with lime milk in such a concentration that by its use the soil should be brought into the optimum condition for compaction. Unfortunately, from the viewpoint of the pozzolanic reaction which, however, is an important source of strength, certain chemical properties of the added lime

have very important effect; but the classification of limes from this viewpoint is not yet possible. (Other physical and chemical relations to calcareous soil stabilization are shown with full particulars in the book of the senior author.)

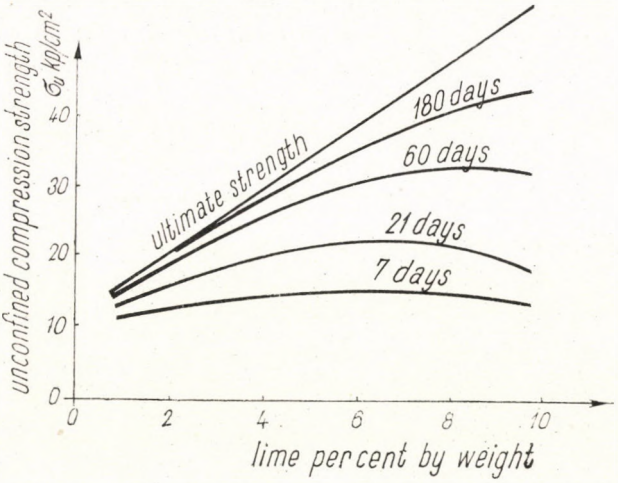


Fig. 16. Variation of the compressive strength in function of proportion of lime and of time

6. Bituminous soil stabilization

From the viewpoint of the efficiency of stabilization with bitumen, the strength of the stabilized mixture is also an important value. In general one obtains the relationship indicated in Fig. 17; the bitumen content has an opti-

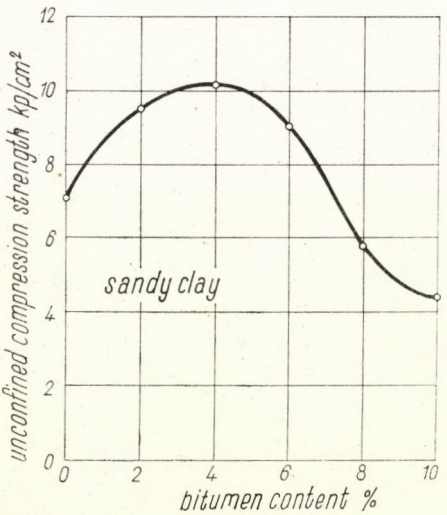


Fig. 17. Effect of the proportion of bitumen on the unconfined compressive strength of the mixture

mum value as it can be concluded on the basis of the analysis of the structure. The strength increases with the proportion of the bitumen up to 4 per cent, this value having been surpassed, it decreases. Strength reduction is also connected with the fact that at an increasing bitumen content the greatest dry bulk density reached by the same amount of compaction effort also decreases, because the specific weight of bitumen is less than that of the mixture.

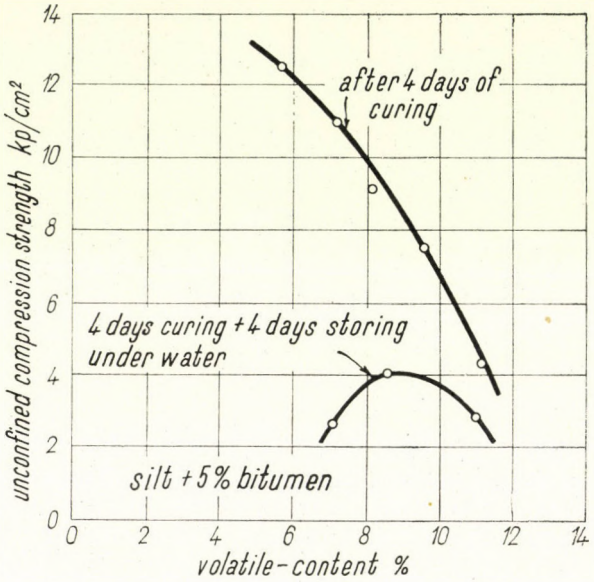


Fig. 18. Effect of storage under water on the compressive strength of silt stabilized with bitumen

However, the value of the unconfined compression strength determined after the preparation of the mixture does not govern alone the behaviour of the latter. Particularly with cohesive soils, if the bitumen content is low, swelling, destruction of the structure, loosening, i.e. reduction in strength occur, because the small quantity of bitumen could not make the mixture impermeable. In order to analyze this effect, test specimens prepared from the stabilized soil mixture are stored in a humid place for four days, then immersed in water for another four days. On the basis of the strength drop of the specimens treated in this way, it might be concluded, what amounts of the dissolving agent will give the best results. Such a test result is to be seen in Fig. 18.

The duration of mixing is also of importance. The strength and particularly that of the wetted samples increases, in general, with the duration of the mixing time. This is always the case at sand stabilization, but it may occur that at the start of mixing, some grain assemblies which are stuck together, will be coated with bitumen, then, during further mixing, they will be broken

up into small pieces, the surface increases, consequently, there will not be enough bitumen for coating this greater surface, thus water absorption grows and strength will be reduced (Fig. 19).

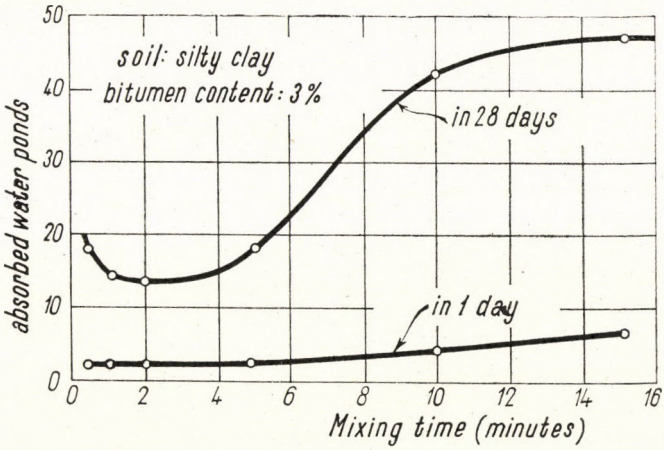


Fig. 19. Water absorption of stabilized soil in function of the mixing time

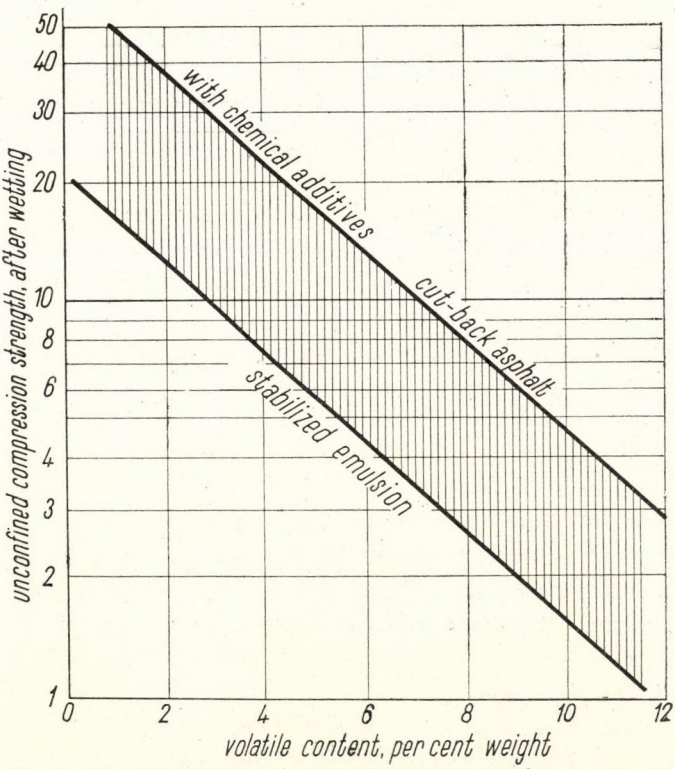


Fig. 20. Strength of soils after wetting, stabilized with bitumen, in function of the content of volatile substance

From the viewpoint of soil stabilization with bitumen, an important relationship has been established by MICHAELS and PUZINAUSKAS (1956): whatever soil mixture should be in question, the greater its content of volatiles the less its compressive strength. This rule applies equally to emulsions, bitumens, and mixtures modified by different additives; the general characteristics of the relationship and the scattering zone are shown in Fig. 20. (The paper mentioned above treats the question in a more detailed manner, here we wanted to indicate only the character of the relationship.)

7. Chemically stabilized mixtures

Owing to the variety of the chemical stabilizations of soils, which, in many cases, are up to the present only at an experimental stage, we must be content with referring to some examples for not very well known procedures, as a matter of course, without the aim of a full treatment.

Recently, stabilization with phosphoric acid shows great promise. Its effect on strength had already been examined in connection with a number of soil types, but no unambiguous relationship could be established as yet. The way of mixing, proportioning and compacting as well as the curing seem to be important. The results available in the literature show great scattering. Extensive research work has been made by MICHAELS and TAUSCH (1960), who added also slight quantities of fluor compounds to the mixture, and observed their strength-increasing effect. In the course of stabilizing a soil containing illit clay-mineral with a plasticity index PI = 6%, the laboratory tests furnished the results indicated in Fig. 21. At a given concentration of the acid, the strength of the test specimens stored in a humid room for 24 hours, in creases nearly directly with the added quantity of sodium silicofluoride (Na_2SiF_6). This remarkable effect originates in all probability in the fact that according to experiences fluorides strongly accelerate the solution of aluminium in phosphoric acid. This might be explained as follows. The surface of metallic aluminium, in general, is coated with hydrated aluminium oxide. If we want to dissolve such an aluminium in phosphoric acid, then on the surface of this latter phosphates would be absorbed, however, the process extend to a thin layer only, it cannot penetrate further. Fluorides promote the partition of this impeding, passive film, and thus chemical reaction takes place far more effectively. Clay minerals resemble the material of the hydrated aluminium oxide layer, consequently the solution, i.e. formation of stabilizers — phosphates — also here is slow. The fluor compounds develop the above mentioned effect also in this case, thus stabilization will be accelerated. This effect could be achieved with a number of fluor compounds (K_2SiF_6, $ZnSiF_6$, AlF_3).

Stabilization with phosphoric acid is not successful if the soil contains a considerable amount of lime. In this case a great part of the phosphoric acid

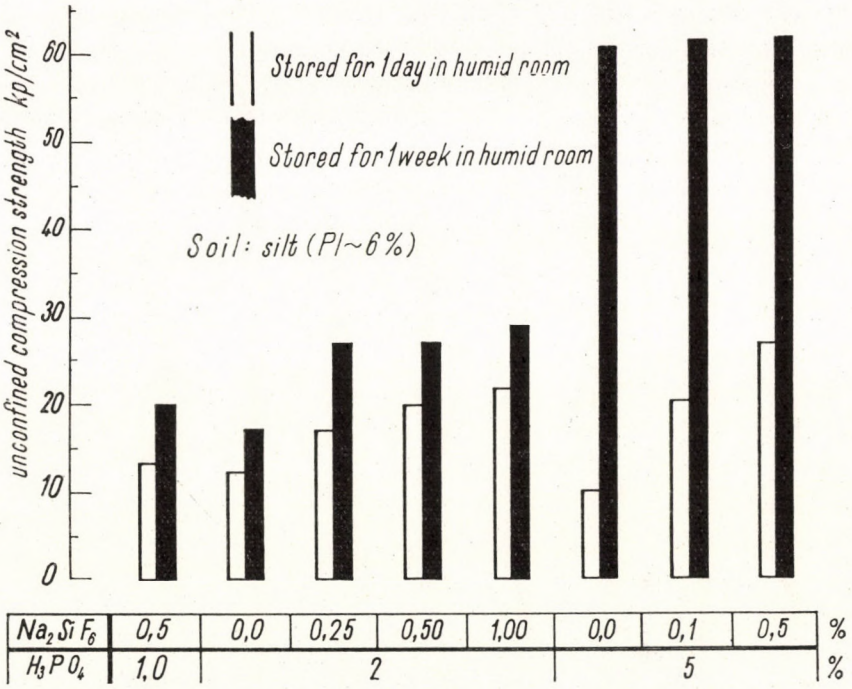


Fig. 21. Effect of adding sodium silicofluoride on the strength of fine silty sand stabilized with phosphoric acid

will be used up for neutralization of calcium carbonate and no stabilization takes place.

Finally the effect of aniline and furfural developing polymerizing stabilization should be mentioned. The effect on the physical characteristics of the addition of aniline and furfural (C_4H_3OCHO), numerically expressible, is not

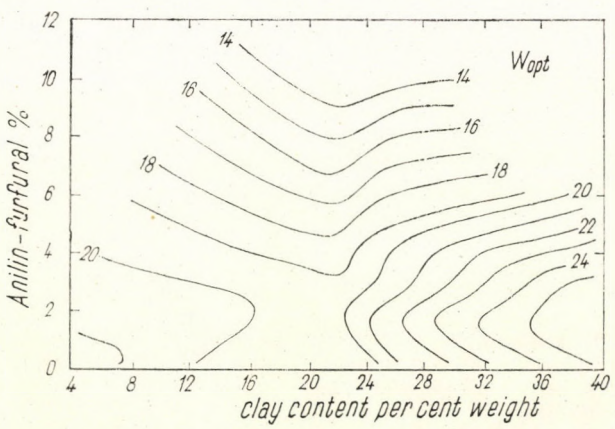


Fig. 22. The optimum water content for compaction (stabilization with aniline–furfural)

yet cleared satisfactorily. The reason for this is that this kind of stabilization could not be made economic as yet. Therefore, only certain details of an interesting series of experiments should be presented. OGILVIE, SHEELER and DAVIDSON (1957) carried out experiments on loess samples which originate from the State of Iowa, applying aniline and furfural mixed in a volume ratio 2 to 1. The test specimens of 5 cm diameter had been compacted, then, after ten days' storage, they were subjected to different experiments.

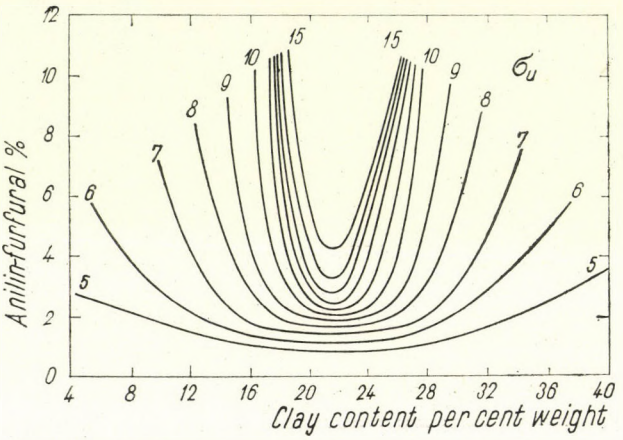


Fig. 23. Unconfined compressive strength (stabilization with aniline—furfural)

Two details of the results are indicated in Figs 22 and 23. As it turned out in the course of processing, the clay content ($d < 2\mu$) of the test specimens strongly affects the properties of the mixture which is to be understood, for reactions producing stabilizing effect are taking place with clay minerals. Authors chose such a manner of representation that the examined characteristics were given as parameter, in function of the content of aniline and furfural. Thus, in Fig. 22 and in Fig. 23 those of the unconfined compressive strength are indicated.

REFERENCES

1. GÁSPÁR, L.: Timely Problems of Soil Stabilization *Mélyépítéstudományi Szemle* (1964), No. 12.
2. MICHAELS, A. S.—TAUSCH, F. W.: Fine-grained Soil Stabilization with Phosphoric Acid and Secondary Additives. Highway Research Board, Bulletin 241. Washington D. C. 1960.
3. OGILVIE, J. G.—SHEELER, J. B.—DAVIDSON, D. T.: Stabilization of Loess with Aniline—Furfural. *Proceedings*, Highway Research Board (1957), 36.
4. MICHAELS, A. S.—PUZINAUSKAS, V.: Additives as Aids to Asphalt Stabilization of Fine-grained Soils. Highway Research Board, Bulletin 129. Washington D. C. 1956.
5. CHADDA, L. R.: Effect of Moisture on the Compressive Strength of Soil—Cement Mixtures. *The Indian Concrete Journal* (India) **30** (1956), No. 4.
6. KÉZDI, Á.: Stabilizált földutak. Akadémiai Kiadó, Budapest 1967.

Festigkeit stabilisierter Böden. Eine der wichtigsten Eigenschaften der stabilisierten Böden ist die Festigkeit; in erster Reihe entscheidet dieselbe darüber, wie sich der stabilisierte Boden gegen sonstige Einwirkungen verhält. Demzufolge untersucht die Abhandlung in erster Reihe die Bruchmechanismen, klassifiziert von diesem Gesichtspunkt aus die Kornmengen und gibt die charakteristische Form der Formänderungen an. Der Verfasser weist in einer neuartigen Darstellung nach, daß die auf eine mechanische Art stabilisierten Böden eine von dem Gesichtspunkt der Festigkeit aus optimale Zusammensetzung besitzen. Für Zementböden grenzt der Verfasser die Bereiche der Zusammensetzung ab, die zur Herstellung eines Zementbodens geeignet sind, und weist auch auf die optimale Zusammensetzung hin. Im Zusammenhang mit der Festigkeit des Zementbodens ist der Verstaubungsgrad ein wichtiger Faktor; die Einwirkung desselben wird durch Versuchsserien dargestellt. Die eigenen Versuchsergebnisse des Verfassers veranschaulichen die Einwirkung der Beimischung von Kalk und Bitumen auf die Festigkeit. Schließlich wird ein Beispiel für die Festigkeit der mit Phosphorsäure, Anilin und Furfurol stabilisierten Böden angeführt.

Résistance des sols stabilisés. La résistance à la rupture est l'une des propriétés les plus importantes des sols stabilisés, dont dépend essentiellement le comportement de ces sols vis-à-vis d'autres influences. L'article examine donc tout d'abord les mécanismes de rupture, classe de ce point de vue les milieux pulvérulents et détermine la forme caractéristique des déformations. Il utilise ensuite une méthode graphique nouvelle pour démontrer que les sols stabilisés par voie mécanique ont une composition optimale du point de vue de la résistance. Pour le sol-ciment, il délimite les domaines de composition se prêtant à la production d'un sol-ciment et indique la composition optimale. Sous le rapport de la stabilité du sol-ciment, le degré de pulvérisation constitue un facteur important, dont l'effet a été démontré par des séries d'expériences. Les résultats d'essais faits par les auteurs montrent à leur tour l'influence du dosage de chaux et de bitume sur la résistance. Un exemple illustrant la résistance à la rupture des sols stabilisés par acide phosphorique, par aniline et par furfurale termine l'étude.

Прочность стабилизированных грунтов *(А. Кезди, Б. Надьвати).* Одним из основных свойств стабилизированных грунтов является их прочность; это свойство решает, в первую очередь, каким образом ведет себя стабилизированный грунт по отношению к прочим воздействиям. Поэтому статья сначала исследует механизмы излома, классифицирует множества зерен и указывает на характерную форму деформаций. Показано (при помощи нового вида отображения), что стабилизированные механическим путем грунты располагают с механической точки зрения оптимальным составом; в случае цементных грунтов определяются те диапазоны состава, которые подходят для получения цементных грунтов и также указывается оптимальный состав. В отношении прочности цементного грунта важным фактором является степень измельчения грунта; действие этого фактора демонстрируется серией опытов. Собственные опытные результаты иллюстрируют действие прибавки извести и битума на формирование прочности. Наконец, статья указывает примеры прочности грунтов, стабилизированных фосфорной кислотой, анилином и фурфуролом.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 97—113 (1968)

DEFORMATIONS AROUND AND BELOW DRIVEN AND VIBRATED TEST TUBES

K. SZÉCHY
CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received March 22, 1968]

In this paper the results of experiments will be presented which were carried out with the financial help of the Hungarian Academy of Sciences, with the view of observing the displacements brought about by the penetration of driven and vibrated test tubes which were either open or closed at their bottom end.

1. Introduction

The way in which precast piles are driven or brought into the soil evidently plays an important part in their bearing capacity. The recognition of this is reflected in some recent studies [1] in so far that deep foundations should not be classified into the known conservative groups as

1. pile-foundations,
2. well-foundations,
3. caisson-foundations,

but should be discriminated according to the way in which they were driven or brought into the soil, i.e. we may distinguish between deep foundations:

a) where the way of penetration brings about a change in the original structural properties of the surrounding soil (i.e. driving, vibration, injection, etc.);

b) where the way of penetration is not, or not sensibly altering the original soil properties (sinking, flushing, etc.).

This new grouping is the more reasonable, because the large-scale increase in the diameter and penetration length of piles and chiefly the advent of hollow-caisson piles largely eliminates the distinction between pile- and well-foundations.

Therefore great importance must be attributed to the investigation of the following problems:

1. What is the measure and extension of the structural changes brought about in various soils by the various methods of penetration?

2. To what extent do these changes affect the strength and deformation properties (shear strength, compressibility) of the surrounding resp. underlying soil layers, which are to overtake and carry the loads from the deep foundation elements?

3. In which way and to what extent are these changes affected by the shape and dimensions of these deep foundation elements (pile, well, caisson).

4. How much will the time factor influence the produced changes?

Looking now upon these four items, we may conclude that fairly little investigation was carried out in this field to throw some theoretical or empirical light on the problems involved.

The laboratory experiments to be described in the following will also comprise only a small part of them. Steel tubes both with closed and open bottom were driven resp. vibrated into a fairly uniform sand and into a sandy gravel soil of varying density. Deformations, displacements and changes in the density of the surrounding layers were measured and observed, and partly correlated to the bearing load of the tubes.

The investigations also covered a small part of the first three questions, whereas the fourth question and the entire field of cohesive soils were not studied at all.

Experimental work was carried out in the Geotechnical Laboratory of the Technical University of Budapest in a steel box, $1.40 \times 1.40 \times 1.30$ m in size, filled with the test-soil. Ordinary gas tubes 500 mm resp. 700 mm long and with 25,6—89 mm varying outside diameter were driven resp. vibrated and then subjected to loading tests by a hydraulic piston of 5000 kg capacity. Tubes with open bottom and with closed bottom (flat and conical wood plug) were equally tested.

2. Influence of relative density and effective diameter of test soil, the type of bottom, the manner of penetration on bearing capacity

A detailed treatment of these test results may be omitted here, because it was already published elsewhere [2—4], only their summary is given in the following.

1. *The bearing capacity was always greater for driven tubes than for vibrated ones* — under the same conditions both for the open-bottom and for the closed-bottom specimens. The difference varied with the increase of both the silo factor $\varkappa = l/D_k$ (tube length vs. external tube diameter) and of the original relative density D_r of soil. The comparison of bearing stresses σ_t, related to the cross-sectional area of tube in function of the $\varkappa$ ratios clearly indicates the change of this difference in sand (Fig. 1a) and in sandy gravel (Fig. 1b) test soils.

2. *The bearing capacity of closed-bottom tubes is superior to open-bottom tubes, for both vibrated and driven specimens.* This difference considerably decreases with driven tubes by the increase of the silo factor $\varkappa$ indicating the progressive compaction of the inner earth plug, thus performing more and more the role of the closed pile-point. A similar but less pregnant tendency was to be

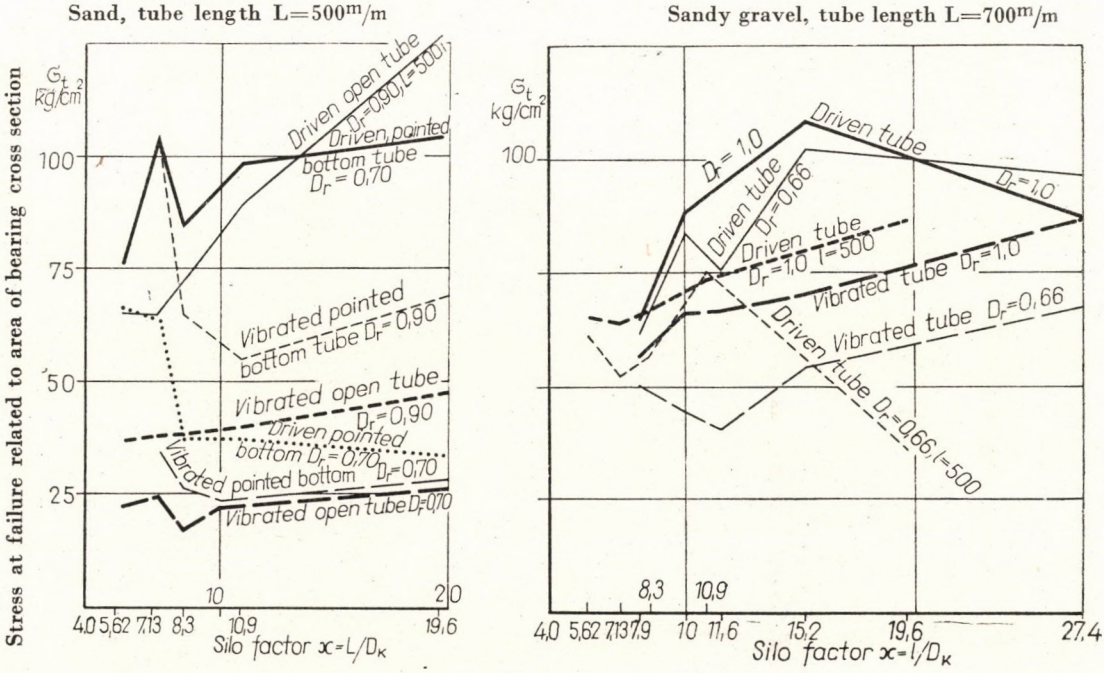


Fig. 1. Variation of bearing stresses in function of the silo factor ($\varkappa = l/D_k$) for various methods of penetration, and of bottom closures, in sandy (*a*) and sandy gravel (*b*) test soils of varying relative density

observed with vibrated open-bottom tubes in sand — a still less increase being shown in the sandy gravel soil, where driven tubes manifested a somewhat opposite tendency.

On the other hand, it is shown in Fig. 1a that the bearing stress of vibrated conically closed bottom tubes first decreases with $\varkappa$ to a critical value of about $\varkappa \simeq 10$ followed by a slight increase. This observation must be attributed to the phenomenon of critical density which might be approached and even surpassed at this value.

3. *Initial density of soils has increased the bearing stress for both driven and vibrated tubes.* This increase was bigger in sand than in sandy gravel soils and again bigger for closed-bottom ones than for open-bottom tubes.

It was actually found that in sand this increase amounted up to 100%, within the tested range of $D_r = 0.70 \div 0.90$; and to $10 \div 15\%$ for driven tubes

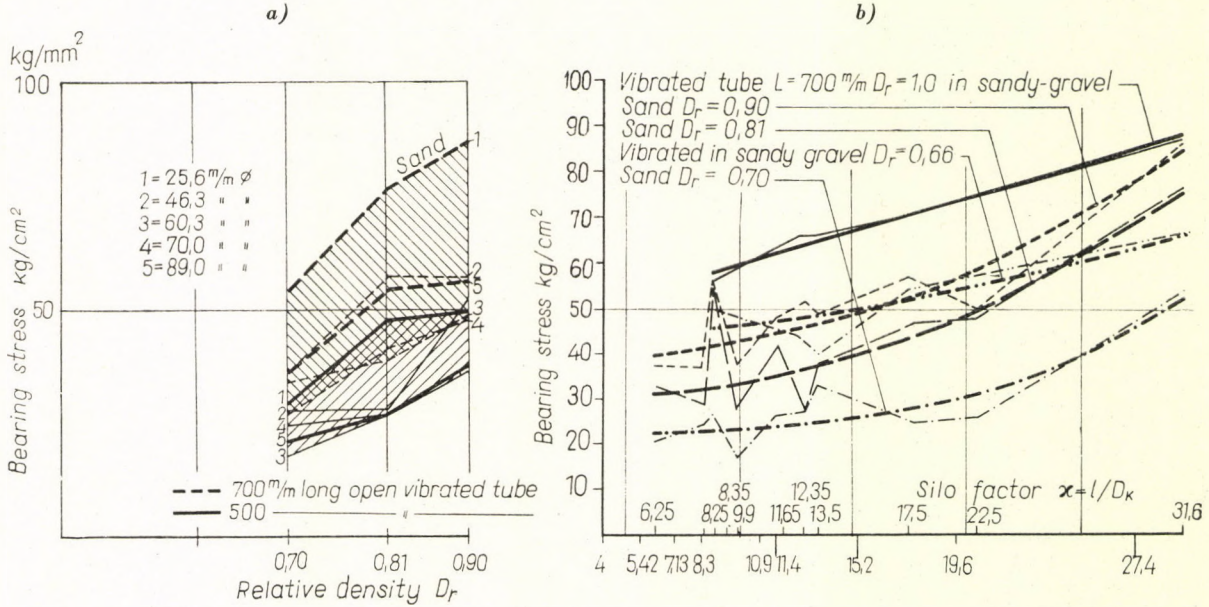


Fig. 2. Variation of bearing stresses σ_t of vibrated open-bottom tubes (500 mm resp. 700 mm long) in function of the relative density D_r of sand (*a*) and of the silo factor $\varkappa = l/D_k$ (*b*)

and about $20 \div 25\%$ for vibrated tubes in sandy gravel within the tested range of $D_r = 0.66 \div 1.0$.

4. *The variation of bearing stresses σ_t for open-bottom vibrated tubes in function of the relative density of sand (a) resp. with the silo factor $\varkappa$ (b), is indicated in* Fig. 2. It may be observed that the rate of increase is much bigger within the range of $D_r = 0.70 \div 0.81$ than within the range $D_r = 0.81 \div 0.90$ mainly for the longer (700 mm) tubes *(a)*.

In contrast to this the increase of the σ_t values with the silo factor, in sand, progressively indicates the increasing bearing value of the inner earth-plug for all densities. The rate of increase is, however, more likely to be linear in sandy gravel soils *(b)*.

In this paper the results of experiments will be presented which were carried out with the view of observing the displacements brought about by the penetration of driven and vibrated test tubes which were either open or closed at their bottom end.

At first the produced changes in the condition of the surrounding soil had to be observed. For this effect the sand material was built in layers with vertical colouring in alternating stripes when lateral (horizontal) displacements had to be fixed and with coloured horizontal separation lines when vertical displacements were to be determined.

3. Observation of lateral displacements

This investigation was carried out with 500 mm long and 60 mm dia. tubes vibrated resp. driven into the test box filled with sand coloured alternately in 20 mm thick vertical stripes. After having completed the penetration the sand was slightly moistened, so that the apparent cohesion should make possible the careful vertical removal of the soil material from the test box in the axial plane of the tubes. Thus, the displacement of each vertical stripe could be observed, measured and photographed. Fig. 3a indicates the lateral displacements in the axial plane of a vibrated open-bottom tube, Fig. 3b that of a vibrated conically closed-bottom tube, Fig. 3c that of a driven conically closed-bottom tube, Fig. 3d that of a driven closed flat-bottom tube, Figs 4a—4d represent at the same time the measure and extension of lateral displacements.

Looking at Figs 3a and 4a it may be seen that the vibration of an open-bottom tube will not incur any sensible lateral displacement in the surrounding soil, in contrast to the closed-bottom tube, where vibration has produced displacements shown in Figs 3b and 4b. Quite similar displacements are to be seen in Figs 3c and 4c around the conically closed-bottom tube repre-

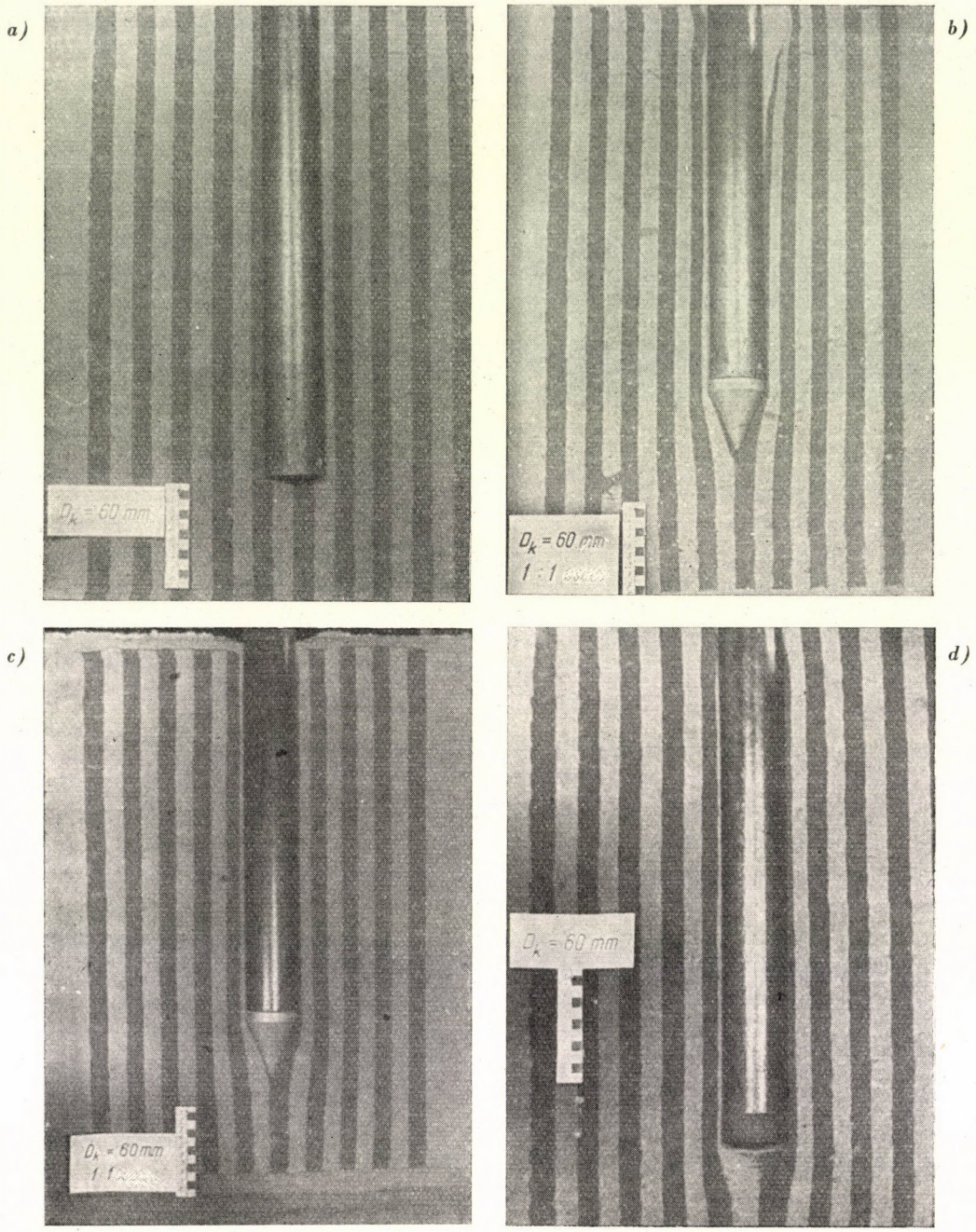


Fig. 3. Lateral displacement patterns around vibrated resp. driven 60 mm dia. tubes in vertically striped sand. *a)* around a vibrated tube with open bottom, *b)* around a vibrated tube with conically closed bottom, *c)* around a driven tube with conically closed bottom, *d)* around a driven tube closed by a flat plug

senting the displacement brought about by driving. Figs 3d and 4d finally display the displacements around driven flat-bottom tubes.

The percentual compressions computed from the change of the annular areas as can be seen in Figs 4a—4d are shown in Fig. 5a, whereas Fig. 5b indicates the measure of lateral displacements of respective layers in function of the distance from tube mantle.

This comparison displays that compaction produced by vibrated resp. driven tubes with conically closed bottom is about the same in the near vicinity of the tube shaft, but the extension is somewhat greater for vibrated tubes.

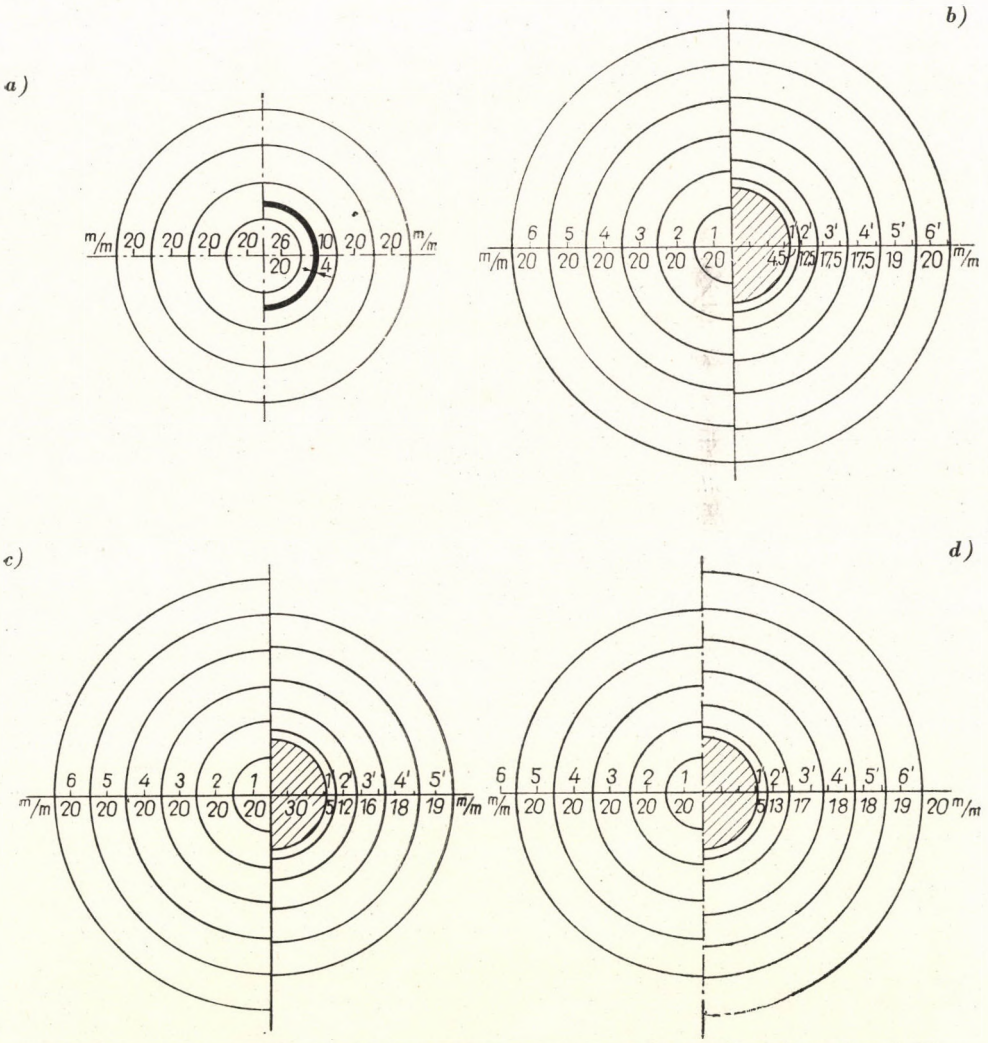


Fig. 4. Compression pattern of the horizontal layers around 60 mm dia. vibrated and driven test tubes. *a)* vibrated, open-bottom tube, *b)* vibrated, conically closed-bottom tube, *c)* driven conically closed tube, *d)* driven tube closed with a flat plug

It is interesting to note that flat-bottom driven tubes produced smaller compaction effect in the near vicinity of the pile shaft, but considerably bigger extension of the compacted zone.

However, lateral displacements indicate the same tendency with smaller deviations. Displacements were actually of measurable size only to a distance of $3r$ from the shaft mantle.

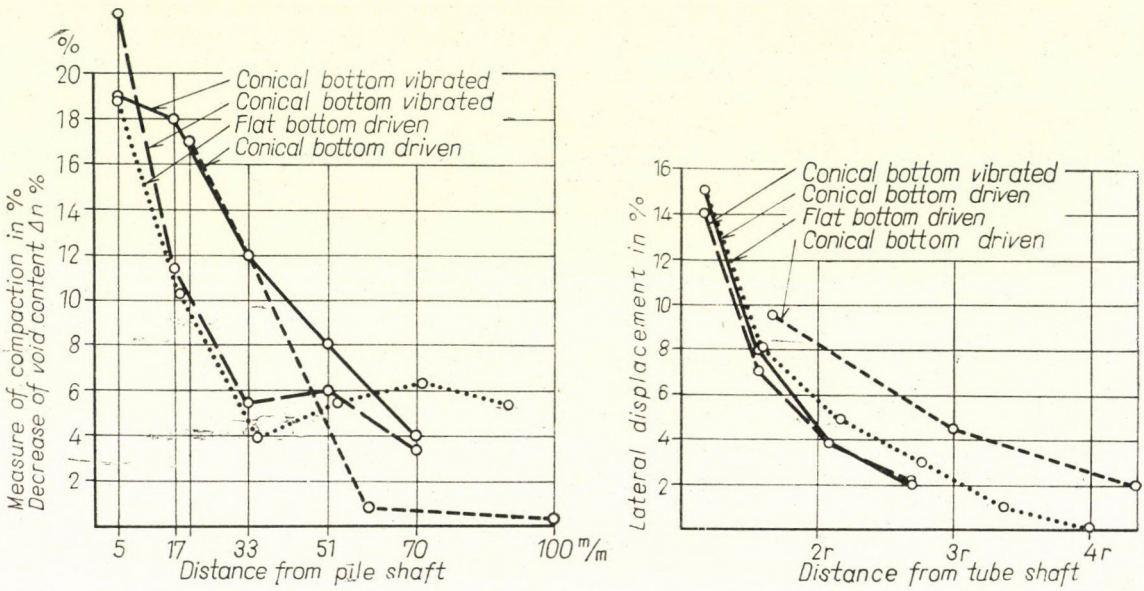


Fig. 5. Measure and extension of compaction (*a*) and of lateral displacement (*b*) in function of the distance from the tube shaft

Considering now the correlation existing between compaction i.e. decrease of void content ($\Delta n\%$) and the increase of the angle of inner friction ($\Delta\varphi$) of the cohesionless material ($\Delta\varphi^\circ = \Delta n/2\%$, [5]), we may determine the numerical values by which the shearing strength of the tested sand was actually increased by driving or vibrating down the tubes. As the maximum decrease of void content along the shaft mantle was about $\Delta n = 24 \div 18\%$, the maximum increment of the angle of inner friction may be at about $\Delta\varphi = 12^\circ \div 9^\circ$. Computing now an average φ_a within the observed compaction zone bordered approximately by a parabolic envelope of the extension of $3r$, we obtain for the average increment $\Delta\varphi_a = 4^\circ \div 3^\circ$. It is beyond doubt that when calculating the bearing value of mantle friction, this increase must be considered. It must be noted, however, that the above data must be related to an original void content of $n = 34.6\%$ ($\varphi = 40°20'$).

4. Observation of vertical displacements

For this effect the test box was filled with the sand material with uniformly compacted layers of 50 mm thickness, the surface of each layer being strewn with black coloured grains. After completed vibration resp. driving of the test tubes, the material was moistened in the same manner as before and the established apparent cohesion made possible again the careful removal of the material along a vertical plane just to the axis of the tube and so the produced distortion pattern could be observed, measured and photographed.

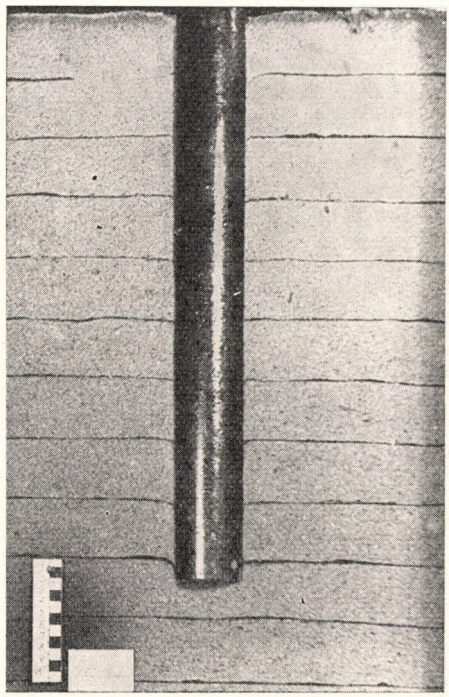


Fig. 6a

These are shown in Fig. 6a for a vibrated open-bottom tube of 60 mm dia. in Fig. 6b for the driven open-bottom 60 mm dia. tube, in Fig. 6c for the vibrated conical-bottom 60 mm dia. tube, in Fig. 6d for the driven conical-bottom 60 mm dia. tube and finally in Fig. 6e for the driven flat-bottom 60 mm dia. tube.

It is apparent from the photos 6a and 6b that no sensible vertical displacement was produced when the open-bottom tube was *vibrated*, excepting some movement in the head and tip region of the tube. This latter does not extend over a depth of $0.6 \div 0.7\ D$.

On the other hand, the displacements around and below the *driven* open-bottom tubes are well traceable in all layers and display a growing tendency

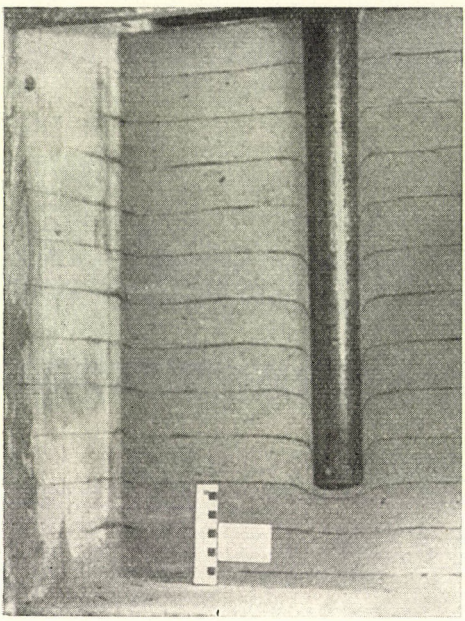


Fig. 6b

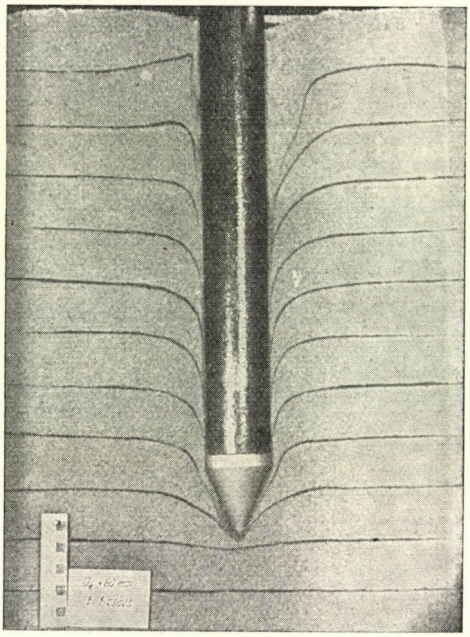


Fig. 6c

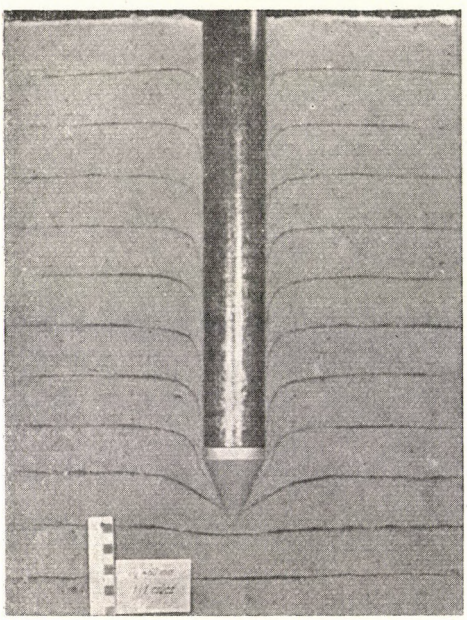


Fig. 6d

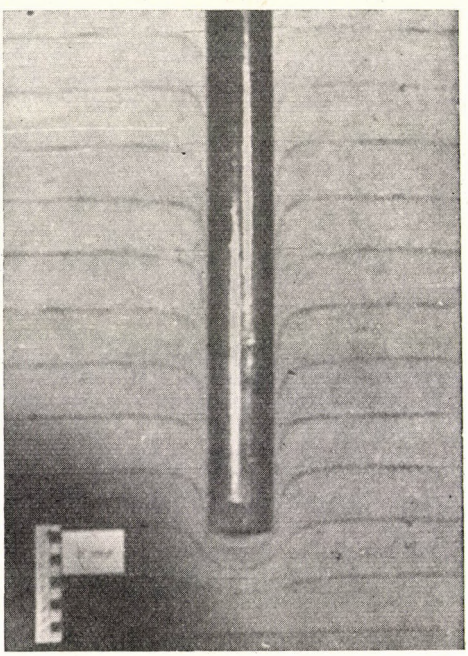


Fig- 6e

Fig. 6. Vertical displacements around and below the vibrated and driven test tubes in sand: *a)* open-bottom vibrated tube; *b)* open-bottom driven tube; *c)* conical-bottom vibrated tube; *d)* conical-bottom driven tube; *e)* flat-bottom driven tube

with the depth. Distinct displacement is to be observed not only of the layer level with the tube tip — but also of the underlying one. Thus, the thickness of the deformation zone may be estimated by extrapolation at about $1.4\,D \div 1.5\,D$.

For the sake of comparison the displacements around 25 mm dia. open-bottom tubes were also tested, which when *vibrated* showed distinct displacements in all layers up to $0.5\,D$ in average. Below the tube tip not only the nearest but also the following layer was deformed indicating a depth of influence at about $2.0\,D \div 2.5\,D$. Practically no difference was observed when the same tube was *driven*. This fact shows that the *silo factor* $\varkappa$ essentially increases not only the bearing capacity but also the deformation zones of open-bottom tubes.

The specific displacement of the environment of *conical-bottom vibrated tubes* decreases (Fig. 6c) while that of the *conical-bottom driven piles* increases (Fig. 6d.) with the depth. The big displacement near to and at the surface and the upper subsidence cone extending to the surface indicate that the amplitude of the established oscillation (which is naturally bigger in the vicinity of the surface where no lateral masses damp the oscillation effects) also plays an important role in the displacements (cf. Ref. 2).

The variation with the depth of the specific displacements of the subsequent horizontal coloured lines is presented in Fig. 7a for 25 mm dia. and in Fig. 7b for 60 mm dia. tubes, clearly supporting the above statements.

Displacement patterns below the tube tips are nearly the same for both vibrated and driven resp. for 25 mm dia. and 60 mm dia. tubes. The disturbed zone extends to a depth of about 1 D below the tube tip. It is interesting to note that the soil grains below the vibrated conical tip became crushed and the boundary lines displayed tulip-like displacement shapes around it (cf. Fig. 6c).

The displacement zone below the closed flat-bottom tube finally shows an entirely different picture. Displacements at the mantle surface also here display a downwards growing tendency and are superior by about $25 \div 50\%$ to the displacements performed around conical-bottom tubes. Deviations are, however, much bigger below the tube tip proper. First of all the affected zone extends to a depth of about $2.5\,D$ (which figure is at about the maximum observed below the tip of 25 mm dia. vibrated open-bottom tubes) and the shape of the displacement figure is also different.

The displacement pattern of the 50 mm thick layers below the tube tip may be distinctly traced in Fig. 8. Measuring now the compression of layers 1, 2 and 3 in an appropriate scale, exact values could be plotted in function of their thickness versus depth below the tube tip (Fig. 9). Considering that the vertical settlement may be expressed as

$$s = \frac{1}{M} \int_0^z \sigma_z \cdot dz \,,$$

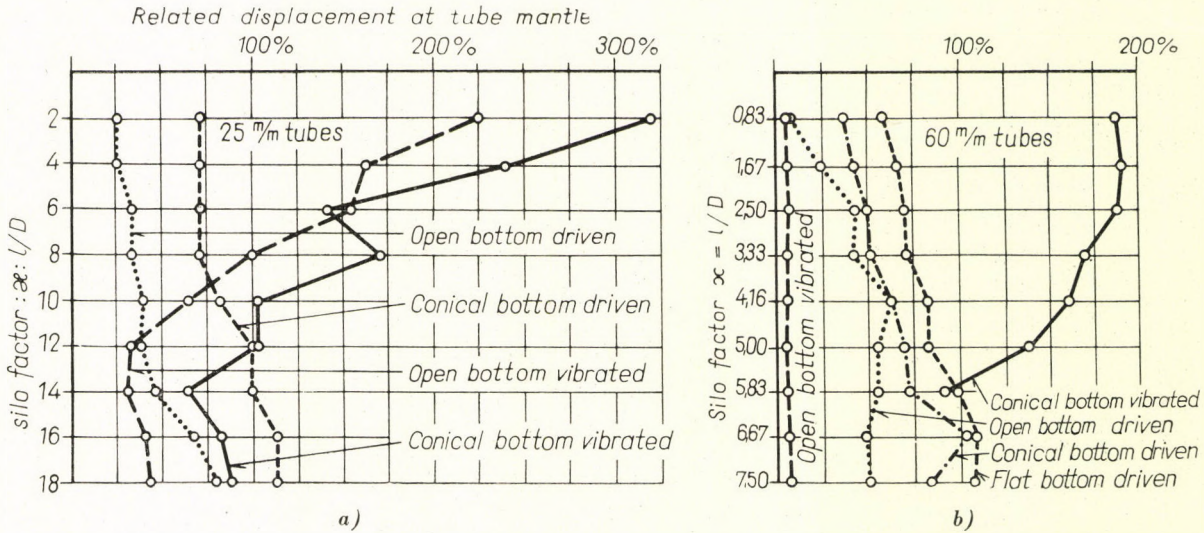


Fig. 7. Specific vertical displacement s/D values in function of the relative depth t/D for various vibrated and driven tubes: *a)* 25 mm dia. tubes; *b)* 60 mm dia. tubes

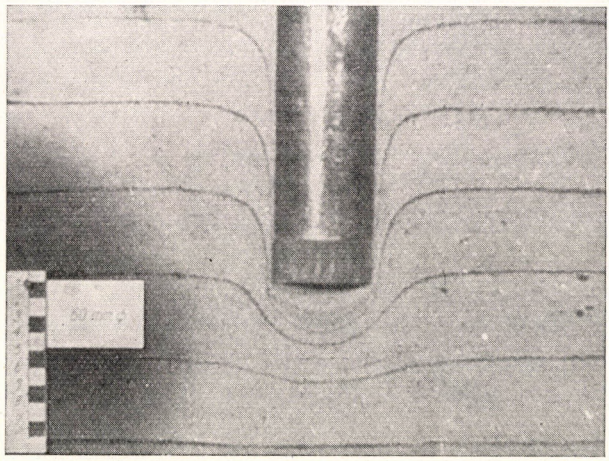


Fig. 8. Displacement pattern of 50 mm thick layers below the flat-bottom tube tip

the differential curve of this plotted settlement curve may be related directly to the distribution curve of vertical stresses σ_z. Thus, with the simple reduction of the settlement curve by plotting the finite elementary differences, the σ_z/M curve may be derived (Fig. 9b). Comparing now the shape of this σ_z/M curve to the theoretical σ_z curve of MICHELL and of KÖGLER it may be observed that the first one represents smaller values in the vicinity of the tube tip, but from a depth of about $D/2$ downwards it will become superior, the two curves coinciding in a depth of about 2,5 D.

This deviation may be well explained by the apparent variation of the compression modulus of sand, brought about by the compacting viz. loosen-

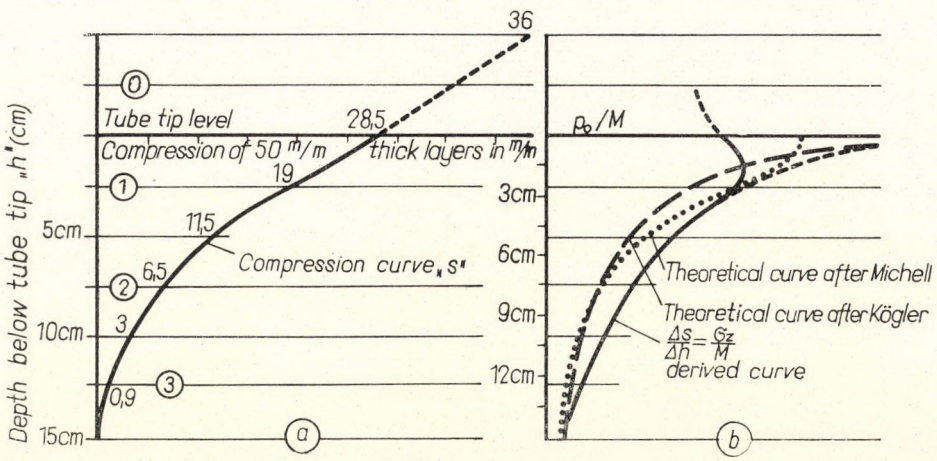


Fig. 9. Compression of subsequent layers below flat-bottom driven tube in function of the depth below tube tip (*a*). Derived vertical stress diagram related to a uniform compression modulus and compared to the theoretical figures (*b*)

ing action of driving. According to the figure this change extended in the given sand test soil of $D_r = 0{,}7$ initial density, to a depth of about 2.5 D of which about 0,5 D marked the extent of the compression — and 2.0 D beyond that of the loosening zone. These statements prove, on one hand, the existence of *Terzaghi's sliding wedge* at the contacting bottom surface and the existence of a *failure zone* beyond, in which the sand particles were compacted beyond their critical density and became loosened. This latter observation was proved by our void content change measurements (described in previous papers mentioned under [2—4]) in the course of which around the tips of driven tubes closed with any type of shoe at their bottom — a definite loosening was stated. Exception can be made only with open-bottom tubes, where overcompaction could not take place because of the possible intrusion of soil particles into the hollow interior of tube.

5. Representation of energy consumed for penetration in the bearing load of tubes

At last this item was analyzed, i.e. how far the driving resp. vibration energy, consumed for bringing in the tubes in their tested bearing values has been reflected. For this purpose the tested bearing value of the tube was divided by the total driving energy $\Sigma Q \cdot h$ resp. by the total vibration energy $\Sigma m \cdot r \cdot \omega^2$ consumed. (This latter quantity was measured as a fairly good approximation with the time in seconds during which the vibrator was operated. The work done by the applied vibrator is equal to 20 mkg per second.)

The comparison was made at first, as represented in Fig. 10a, between open-bottom tubes 500 mm and 700 mm long driven and vibrated into sandy gravel test soil of various initial densities. As to be seen, the effectivity *of driving energy* (work done by ramming) η is only slightly increasing (and not without exception) with the diameter of driven tubes. This increase is greater in the test soils of originally looser condition ($D_r = 0{,}66$) than in those of originally denser condition ($D_r \cong 1{,}0$). The effectivity of driving energy as related to bearing capacity was less for longer (700 mm) than for shorter (500 mm) tubes in case of both densities, indicating that the increase of driving resistance with the depth is greater than that of the bearing value obtained.

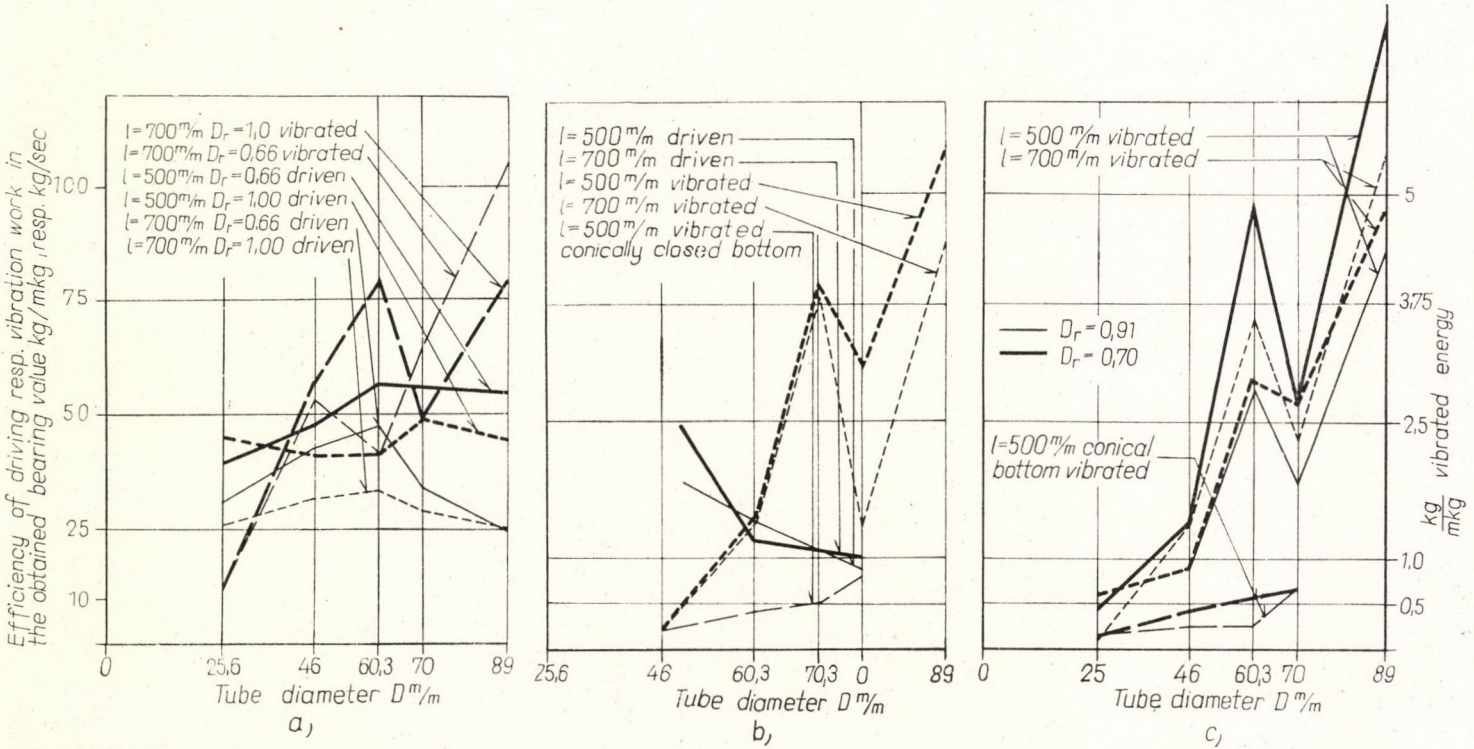


Fig. 10. Efficiency of driving resp. vibration work done in relation to the tested bearing capacity: *a)* bearing efficiency of driven and vibrated open bottom tubes of various length in a sandy gravel test soil of varying initial density; *b)* the same in a sand test soil of medium density and compared with the efficiency of conically closed-bottom tubes; *c)* the same in sands of two initial densities and compared to tubes vibrated with conically closed bottom

On the other hand, the obtained effectivity of bearing capacity of vibrated tubes considerably increased with the diameter showing but a slight declining tendency. The influence of initial density was more favourable with smaller diameter than with larger diameter tubes. (A possible reason may be that the inside arching effect of larger diameter grains was no longer as effective in the larger space as in the smaller one.)

In Fig. 10b the η effectivity values are shown for both kinds of tubes driven resp. vibrated in *a medium dense sand* ($D_r = 0{,}81$) test soil. For the sake of comparison the η values of vibrated tubes with conically closed bottom are also shown. The figure indicates the same conclusion, namely, the effectivity of vibration work increases with the diameter, while that of the driving work here was more definitely decreasing. The relative superiority of shorter (500 mm) tubes is also apparent here. Another item is that the vibration efficiency of conically closed-bottom tubes was only about $15 \div 20\%$ that of the open-bottom tubes.

Finally in Fig. 10c comparison is made between the vibration efficiency of 500 m resp. 700 mm long open-bottom and conically closed-bottom tubes in sand of various initial density. It is quite clearly demonstrated that the efficiency rapidly increases with the diameter. For closed-bottom tubes this was demonstrated, however, at a much smaller rate. The increase was again always larger for shorter (500 mm) than for longer (700 mm) tubes and was also larger in the sand of the looser ($D_r = 0{,}7$) than in that of the denser ($D_r = 0.90$) initial condition. The efficiency of vibration for closed-bottom piles was again only a small fraction ($20 \div 10\%$) of that observed with open-bottom tubes. This difference, however, was rapidly increasing, with the diameter, indicating again the role of the successive development of the bottom-plug, not only in the bearing resistance, but still more in the penetration resistance of hollow open-bottom tubes.

Finally it may be concluded that *vibration is really effective for open-bottom hollow piles*. Consequently vibration constitutes a really efficient and valuable asset and tool of piling in bringing down *tubular open-bottom piles* into cohesionless soils, an item which *must give preference to these piles as against solid piles, wherever vibration may be considered.*

Still it must be noted that the efficiency of vibration work as related to produced bearing capacity is far less (about $5 \div 6\%$ only; cf. the right-hand scale of Fig. 10c) than that of driving work. An item which is responsible for the increasing use of *vibration-rams* where the advantages of both actions (i.e. ramming + vibration) come to prevalence.

The experiments were carried out by G. FAZAKAS, research engineer and L. FARKAS research laborant. The author is very much indebted for their effective cooperation.

*

REFERENCES

1. VESIČ, A. S.: A Study of Bearing Capacity of Deep Foundations. Georgia Institute of Technology, Final Report, B. 189. 1967.
2. SZÉCHY, CH.: The Effects of Vibration and Driving upon the Voids in Granular Soil Surrounding a Pile. *Proc. Vth Int. Conf. Paris* (1961), Vol. II. ppa. 161. 38 (25).
3. SZÉCHY, K.: Versuche mit vibrierten Stahlröhren und die Tragfähigkeitsfaktoren der vibrierten Rohrpfähle. Bericht der Donaueuropäischen Konferenz, Wien 1968.
4. SZÉCHY, CH.: Experiments with Open-end Vibrated Tubes. *Acta Polytechnica*, Budapest (1968).
5. SZÉCHY, K.: New Pile Bearing Formula. Symposium on Pile Foundations. Preliminary Report, Stockholm 1960.

Formänderung des Bodens ringsum und unter den eingerammten und vibrierten Versuchsröhren. In dieser Abhandlung werden die Ergebnisse der Versuche vorgeführt, die in der Absicht angestellt wurden, die durch die Eindringung von eingerammten und vibrierten Versuchsröhren mit offenen oder abgeschlossenen Enden hervorgerufenen Verdrückungen zu beobachten.

Déformation autour et au-dessous de tubes d'essai battus et vibrés. L'étude présente les résultats d'essais effectués pour observer les déplacements produits autour de tubes d'essai battus et vibrés, aux extrémités ouvertes ou fermées. Au cours des essais, on se proposait d'observer avant tout les changements d'état produits dans le sol environnant.

Деформация грунта под опытными трубами и вокруг них при условии опускания их методом забивки и вибрации *(К. Сечи)*. В работе показаны результаты опытов, проведенных с целью определения тех деформаций, которые возникают при проникновении в грунт опытных труб с открытым или закрытым концом, опущенных в грунт путем забивки или вибрации.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 115—140 (1968)

PARTICULAR SOLUTIONS TO THE HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION OF SPHERICAL SHELLS

P. CSONKA

DOCTOR OF TECHN. SC.

WORKING COMMUNITY FOR BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received February 13, 1968]

Technical literature deduces the Fourier-type general solution of the homogeneous differential equation of spherical membrane shells in a spherical coordinate system and characterizes their stress state by the actual specific inner forces. This manner of treatment is inconvenient from several points of view in the case of spherical shells rectangular in plan. In order to eliminate the difficulties arising hereby, present paper uses orthogonal coordinates instead of spherical ones and characterizes the stress state of the shell by the so-called reduced specific inner forces, instead of the actual ones. In addition to the Fourier-type solutions paper also presents certain other solutions, hitherto not expounded in technical literature.

1. Introduction

The analysis of spherical calotte shells involves serious mathematical difficulties even when using the simplifying assumptions of the so-called membrane theory. This is the reason, why practice is compelled to turn to different approximate methods when treating the above-mentioned problem.

The approximate methods applied in practice are usually so-called *peripheral methods* which produce the solution in two steps. As a first step of the analysis, a particular solution of the *inhomogeneous* differential equation of the problem is constructed, naturally in general not satisfying the boundary conditions. Therefore, as a second step of analysis, the afore-mentioned inhomogeneous particular solution has to be completed by some particular solutions of the *homogeneous* differential equation. This operation has to be carried out in such a manner that the completed solution should satisfy the boundary conditions of the problem with sufficient exactitude.

Technical literature gives the solutions of the differential equation of spherical shells in a spherical coordinate system and characterizes the stress state of the shell by the actual stress components running in the directions of the coordinate lines on the surface. This treatment may be very appropriate in the case of spherical domes covering a circular ground-plan. However, it has many drawbacks in the case of calotte shells rectangular in plan, so frequently used in practice. In such cases it is indicated to use orthogonal coordinates instead of spherical ones and to reckon with the so-called reduced inner forces instead of the actual ones.

The present paper endeavours to offer aid to the designer in the analysis of spherical calotte shells rectangular in plan, and presents appropriate solutions of the homogeneous differential equation according to the principles explained above. Some of these solutions are transformed versions of the well-known Fourier-type solutions, expressed in an orthogonal coordinate system, others are entirely new in technical literature.

2. Fundamentals

It is assumed that the spherical shell is in a membrane-like stress state, and its statical behaviour can be described with adequate exactitude by the simplifying assumptions of the so-called membrane theory.

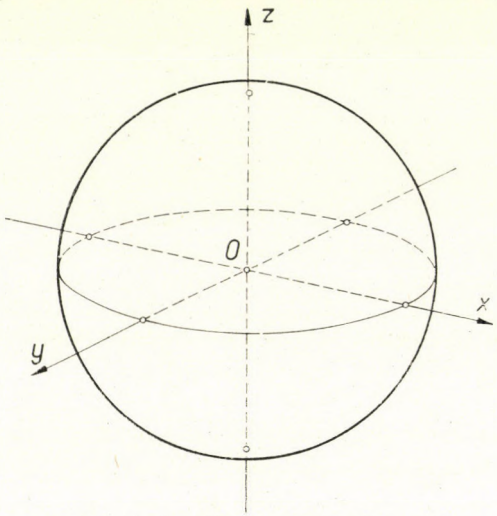


Fig. 1. Coordinate system $O(x, y, z)$

For the investigations an orthogonal coordinate system $O(x, y, z)$ should be introduced, the origin of which lies in the centre of the sphere (Fig. 1) with radius R. The axis z is vertical and its positive branch points upwards.

The investigations refer to the whole (closed) spherical shell, but the formulae to be deduced can be immediately applied only to the upper $z < 0$ part of the sphere. Here the shape of the middle surface of the shell can be described by the equation

$$z = (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}. \tag{1}$$

Introducing relative coordinates explained by the relations

$$\xi \equiv \frac{x}{R}, \quad \eta \equiv \frac{y}{R}, \quad \zeta \equiv \frac{z}{R}, \tag{2}$$

the former equation can be expressed as

$$\zeta = (1 - \xi^2 - \eta^2)^{1/2}. \tag{3}$$

3. Homogeneous differential equation of the spherical shell

The x, y directed reduced inner forces of the shell (Fig. 2) should be denoted by

$$n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y.$$

As is well known, these reduced inner forces may be expressed as the second derivatives of Pucher's stress function $F = F(x, y)$ in the following

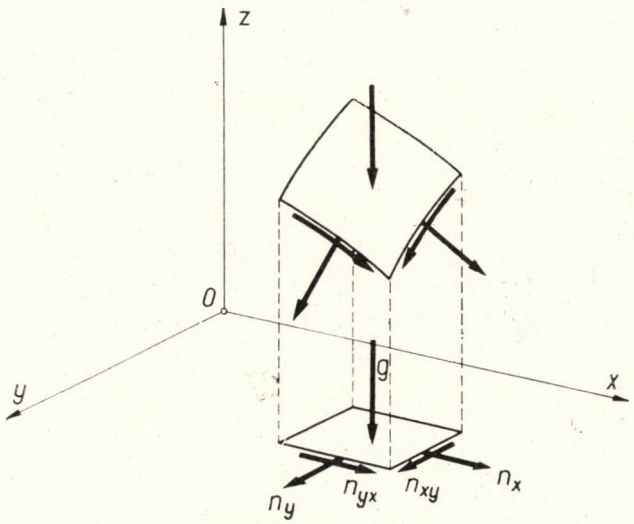


Fig. 2. Reduced inner forces n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y

way:

$$n_x = F_{yy}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -F_{xy}, \quad n_y = F_{xx}. \tag{4}$$

Using the relative coordinates ξ, η the former formulae become

$$n_x = \frac{1}{R^2} F_{\eta\eta}, \qquad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{1}{R^2} F_{\xi\eta}, \qquad n_y = \frac{1}{R^2} F_{\xi\xi}. \tag{5}$$

The stress function figuring in the foregoing formulae has to satisfy the well-known differential equation of membrane theory which takes the following shape on the unloaded parts of the shell surface:

$$(R^2 - y^2) F_{yy} - 2xy F_{xy} + (R^2 - x^2) F_{xx} = 0. \tag{6}$$

This same equation — the *homogeneous differential equation* of the spherical shell — can be written, by introducing the relative coordinates ξ, η, as follows:

$$(1-\eta^2)\,F_{\eta\eta} - 2\,\xi\eta F_{\xi\eta} + (1-\xi^2)\,F_{\xi\xi} = 0\,. \tag{7}$$

In the following certain particular solutions of the above differential equation will be presented, but the investigations remain limited to cases symmetrical to the vertical coordinate planes.

4. Fourier-type regular solutions of the homogeneous differential equation

The general solution of the differential equation mentioned in the title is well known from technical literature [1—7]. The actual inner forces N_1, N_{12},

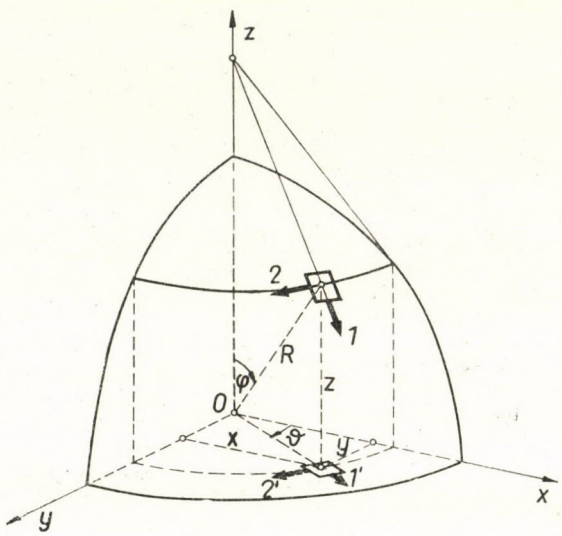


Fig. 3. Symbols

N_{21}, N_2 corresponding to this solution can be expressed in the spherical co-ordinate system $O(\varphi, \vartheta)$ shown in Fig. 3 by the following formulae:

$$\begin{aligned}
N_1 &= A_m \frac{\tan^m(\varphi/2)}{\sin^2\varphi}\cos m\vartheta = A_m \frac{\sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m}\cos m\vartheta\,,\\
N_{12}=N_{21} &= -A_m \frac{\tan^m(\varphi/2)}{\sin^2\varphi}\sin m\vartheta = -A_m \frac{\sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m}\sin m\vartheta\,,\\
N_2 &= -A_m \frac{\tan^m(\varphi/2)}{\sin^2\varphi}\cos m\vartheta = -A_m \frac{\sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m}\cos m\vartheta\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

In these formulae for reasons of symmetry

$$m = 2, 4, 6, \ldots .$$

The case $m = 0$ must be excluded since it has a singularity at point $\varphi = 0$.

The ground-plan projection of the actual inner forces (8) may be expressed as

$$\begin{aligned} N_1' &= N_1 \cos\varphi = N_1 \frac{z}{R}, \\ N_{12}' &= N_{12}, \\ N_{21}' &= N_{21} \cos\varphi = N_{21} \frac{z}{R}, \\ N_2' &= N_2, \end{aligned}$$

and the reduced (specific) value of these forces is:

$$\begin{aligned} n_1' &= N_1' \quad = N_1 \frac{z}{R}, \\ n_{12}' &= N_{12}' \quad = N_{12}, \\ n_{21}' &= \frac{N_{21}'}{\cos\varphi} = N_{21}, \\ n_2' &= \frac{N_2'}{\cos\varphi} = N_2 \frac{R}{z}. \end{aligned} \tag{9}$$

After this, the x, y directed reduced inner forces can be calculated by the aid of simple stress transformation:

$$\begin{aligned} n_x &= n_1' \cos^2\vartheta + n_2' \sin^2\vartheta - n_{12}' \sin 2\vartheta, \\ n_{xy} &= (n_1' - n_2') \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta + n_{12}' \cos 2\vartheta, \\ n_y &= n_1' \sin^2\vartheta + n_2' \cos^2\vartheta + n_{12}' \sin 2\vartheta. \end{aligned}$$

Substituting values (8) and (9) into above formulae, the result is:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{A_m \sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m} \left[\left(\frac{z}{R} \cos^2\vartheta - \frac{R}{z} \sin^2\vartheta \right) \cos m\vartheta + \sin 2\vartheta \cdot \sin m\vartheta \right], \\ n_{xy} &= \frac{A_m \sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m} \left[\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \frac{\sin 2\vartheta}{2} \cos m\vartheta - \cos 2\vartheta \cdot \sin m\vartheta \right], \\ n_y &= \frac{A_m \sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m} \left[\left(\frac{z}{R} \sin^2\vartheta - \frac{R}{z} \cos^2\vartheta \right) \cos m\vartheta - \sin 2\vartheta \cdot \sin m\vartheta \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Since relations

$$\frac{z}{R}\cos^2\vartheta - \frac{R}{z}\sin^2\vartheta = \cos\varphi\cdot\cos^2\vartheta - \frac{1}{\cos\varphi}\sin^2\vartheta = \\ = \frac{\cos^2\varphi\cdot\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}{\cos\varphi},$$

$$\frac{z}{R} + \frac{R}{z} = \cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1+\cos^2\varphi}{\cos\varphi},$$

$$-\frac{z}{R}\sin^2\vartheta - \frac{R}{z}\cos^2\vartheta = \cos\varphi\cdot\sin^2\vartheta - \frac{1}{\cos\varphi}\cos^2\vartheta = \\ = \frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta}{\cos\varphi}$$

hold, the former formulae may also be written as follows:

$$n_x = -\frac{A_m\sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m}\left[\frac{\sin^2\vartheta - \cos^2\varphi\cdot\cos^2\vartheta}{\cos\varphi}\cos m\vartheta - \sin 2\vartheta\cdot\sin m\vartheta\right],$$

$$n_{xy} = +\frac{A_m\sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m}\left[\frac{1+\cos^2\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin 2\vartheta}{2}\cos m\vartheta - \cos 2\vartheta\cdot\sin m\vartheta\right], \quad (11)$$

$$n_y = -\frac{A_m\sin^{m-2}\varphi}{(1+\cos\varphi)^m}\left[\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varphi\cdot\sin^2\vartheta}{\cos\varphi}\cos m\vartheta + \sin 2\vartheta\cdot\sin m\vartheta\right].$$

a) *Special case:* $m = 2$

Carrying out the substitutions

$$\xi \equiv \frac{x}{R}, \quad \eta \equiv \frac{y}{R},$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \equiv \zeta, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \equiv \varrho,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\xi}{\varrho}, \qquad \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\eta}{\varrho},$$

the formulae (10) of the x, y directed inner forces take the following shape:

$$n_x = -\frac{A_2}{(1+\zeta)^2\varrho^4}\left[\frac{\eta^2 - \xi^2\zeta^2}{\zeta}(\xi^2 - \eta^2) - 4\xi^2\eta^2\right],$$

$$n_{xy} = +\frac{A_2}{(1+\zeta)^2\varrho^4}\xi\eta\,(\xi^2 - \eta^2)\frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}, \quad (12)$$

$$n_y = -\frac{A_2}{(1+\zeta)^2\varrho^4}\left[\frac{\xi^2 - \eta^2\zeta^2}{\zeta}(\xi^2 - \eta^2) + 4\xi^2\eta^2\right].$$

b) *Special case:* $m = 4$

Taking into consideration relations

$$\sin 4\vartheta = 4\cos\vartheta \cdot \sin\vartheta\,(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,,$$
$$\cos 4\vartheta = \cos^4\vartheta - 6\cos^2\vartheta \cdot \sin^2\vartheta + \sin^4\vartheta\,,$$

the formulae (10) of x, y directed inner forces become:

$$n_x = -\frac{A_4}{(1+\zeta)^4\varrho^4}\left[\frac{\eta^2-\xi^2\zeta^2}{\zeta}(\xi^4-6\xi^2\eta^2+\eta^4)-8\xi^2\eta^2(\xi^2-\eta^2)\right],$$

$$n_{xy} = +\frac{A_4}{(1+\zeta)^4\varrho^4}\left[\frac{1+\zeta^2}{\zeta}\xi\eta(\xi^4-6\xi^2\eta^2+\eta^4)-4\xi\eta(\xi^2-\eta^2)^2\right], \qquad (13)$$

$$n_y = -\frac{A_4}{(1+\zeta)^4\varrho^4}\left[\frac{\xi^2-\eta^2\zeta^2}{\zeta}(\xi^4-6\xi^2\eta^2+\eta^4)+8\xi^2\eta^2(\xi^2-\eta^2)\right].$$

5. Fourier-type singular solutions of the homogeneous differential equation

The Fourier-type general solution, singular in certain points of section $z = 0$, is also known from technical literature [1—7]. In cases when the conditions of symmetry of the problem are satisfied, the actual inner forces N_1, N_{12}, N_{21}, N_2, corresponding to the general solution, expressed in the spherical coordinate system shown in Fig. 4, will be as follows:

$$N_1 = \frac{B_m}{2\sin^2\alpha}[+\tan^m(\alpha/2)+\cot^m(\alpha/2)]\cos m\beta =$$
$$= \frac{B_m}{2\sin^{m+2}\alpha}[+(1-\cos\alpha)^m+(1+\cos\alpha)^m]\cos m\beta\,,$$
$$N_{12} = N_{21} = \frac{B_m}{2\sin^2\alpha}[-\tan^m(\alpha/2)+\cot^m(\alpha/2)]\sin m\beta = \qquad (14)$$
$$= \frac{B_m}{2\sin^{m+2}\alpha}[-(1-\cos\alpha)^m+(1+\cos\alpha)^m]\sin m\beta\,,$$
$$N_2 = \frac{B_m}{2\sin^2\alpha}[-\tan^m(\alpha/2)-\cot^m(\alpha/2)]\cos m\beta =$$
$$= \frac{B_m}{2\sin^{m+2}\alpha}[-(1-\cos\alpha)^m-(1+\cos\alpha)^m]\cos m\beta.$$

In the above formulae

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

The ground-plan projections of the actual inner forces (13) can be expressed by

$$N_1' = N_1 \cos\gamma = N_1 \frac{u}{v},$$

$$N_{12}' = N_{12} \cos\beta = N_{12} \frac{z}{s},$$

$$N_{21}' = N_{21} \cos\gamma = N_{21} \frac{u}{v},$$

$$N_2' = N_2 \cos\beta = N_2 \frac{z}{s},$$

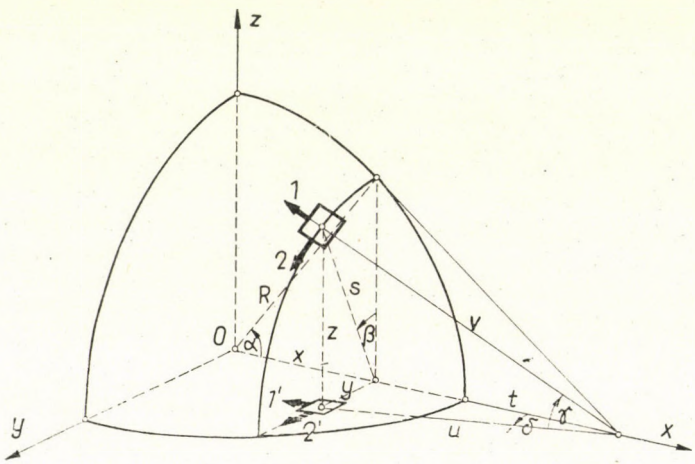


Fig. 4. Symbols

while the reduced (specific) values of the same are:

$$n_1' = \frac{N_1'}{\cos\beta} = N_1 \frac{u}{v} \cdot \frac{s}{z},$$

$$n_{12}' = \frac{N_{12}'}{\cos\beta} = N_{12} \frac{z}{s} \cdot \frac{s}{z} = N_{12},$$

$$n_{21}' = \frac{N_{21}'}{\cos\gamma} - N_{21} \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u} = N_{21},$$

$$n_2' = \frac{N_2'}{\cos\gamma} = N_2 \frac{z}{s} \cdot \frac{v}{u}.$$

Thus the x, y directed reduced inner forces can be determined by investigating the equilibrium conditions of shell element shown in Fig. 5:

$$n_x = n_1' \cos\delta = n_1' \frac{t}{u} = N_1 \frac{s\,t}{v\,z},$$

$$n_{xy} = n_{12}' - n_1' \sin\delta = -N_{12} - N_1 \frac{s\,y}{v\,z},$$

$$n_y = \frac{n_2'}{\cos\delta} + n_{21}' \tan\delta - n_{xy} \tan\delta =$$

$$= N_2 \frac{v\,z}{s\,t} + 2\,N_{12} \frac{y}{t} + N_1 \frac{s\,y^2}{t\,v\,z}.$$

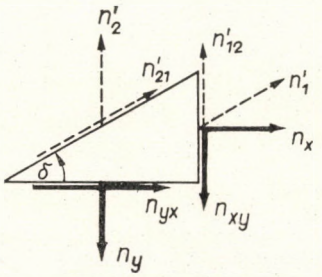


Fig. 5. Ground-plan projection of the investigated shell element

Taking into consideration relations

$$s = \sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - \xi^2},$$

$$t = \frac{s^2}{x} = \frac{R^2 - x^2}{x} = \frac{R(1 - \xi^2)}{\xi},$$

$$v = \frac{R\,s}{x} = \frac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{x} = \frac{R\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi},$$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = R\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} = R\,\zeta,$$

the former formulae can be written as

$$n_x = N_1 \frac{1 - \xi^2}{\zeta},$$

$$n_{xy} = -N_{12} - N_1 \frac{\xi\eta}{\zeta}, \tag{15}$$

$$n_y = N_2 \frac{\zeta}{1 - \xi^2} + 2\,N_{12} \frac{\xi\eta}{1 - \xi^2} + N_1 \frac{\xi^2 \eta^2}{(1 - \xi^2)\,\zeta}.$$

a) *Special case:* $m = 0$.

α) Basic problem. When $m = 0$, formulae (14) are simplified as follows:

$$N_1 = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha} = \frac{B_0 R^2}{R^2 - \mathbf{x}^2} = \frac{B_0}{1 - \xi^2},$$
$$N_{12} = N_{21} = 0, \tag{16}$$
$$N_2 = -\frac{B_0}{\sin^2 \alpha} = -\frac{B_0 R^2}{R^2 - x^2} = -\frac{B_0}{1 - \xi^2}.$$

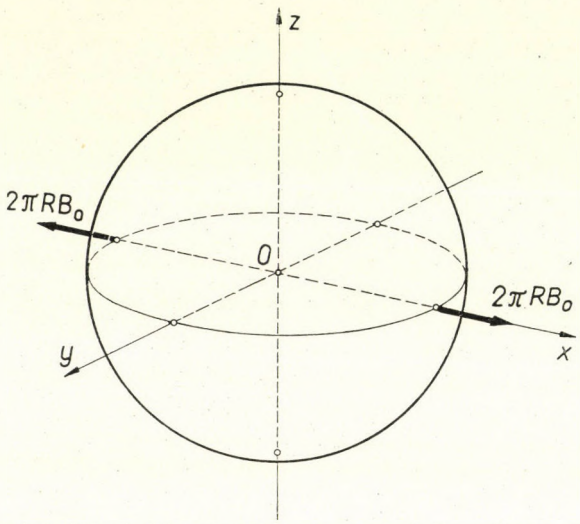


Fig. 6. Spherical shell loaded by opposite concentrated forces in two diametral points

Substituting these values into formulae (15), the following group of formulae will be obtained:

$$n_x = \frac{B_0}{\zeta},$$
$$n_{xy} = \frac{B_0}{(1 - \xi^2)\zeta}, \tag{17}$$
$$n_y = \frac{B_0 (\xi^2 \eta^2 - \zeta^2)}{(1 - \xi)^2 \xi}.$$

The stress function corresponding to the above system of inner forces can easily be expressed as:

$$F = B_0 R^2 \left(\eta \arcsin \frac{\eta}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \zeta \right). \tag{18}$$

A simple calculation will prove that formulae (17) and (18) represent the solution of the basic problem shown in Fig. 6.

β) First variant of the basic problem. The problem shown in Fig. 7 can be dealt with similarly to the basic problem under *α)*. In this case

$$F = B_0' R^2 \left(\xi \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{1-\eta^2}} + \zeta \right), \tag{19}$$

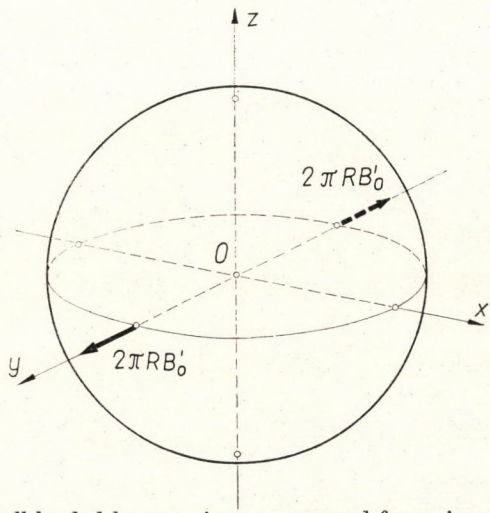


Fig. 7. Spherical shell loaded by opposite concentrated forces in two diametral points

and the x, y directed reduced inner forces are:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{B_0'(\xi^2 \eta^2 - \zeta^2)}{(1-\eta^2)^2 \zeta}, \\ n_{xy} &= -\frac{B_0' \xi \eta}{(1-\eta^2)\zeta}, \\ n_y &= \frac{B_0'}{\zeta}. \end{aligned} \tag{20}$$

γ) Second variant of the basic problem. Knowing the solution of the basic problem under *α)*, the solution of the composite problem shown in Fig. 8 can also be easily found. In this case, the stress function can be assembled from two parts, corresponding to the two systems of loads, each consisting of two opposite forces:

$$F = B_0'' R^2 \left(\lambda_1 \arcsin \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\varkappa_1^2}} + \lambda_2 \arcsin \frac{\lambda_2}{\sqrt{1-\varkappa_2^2}} + 2\zeta \right). \tag{21}$$

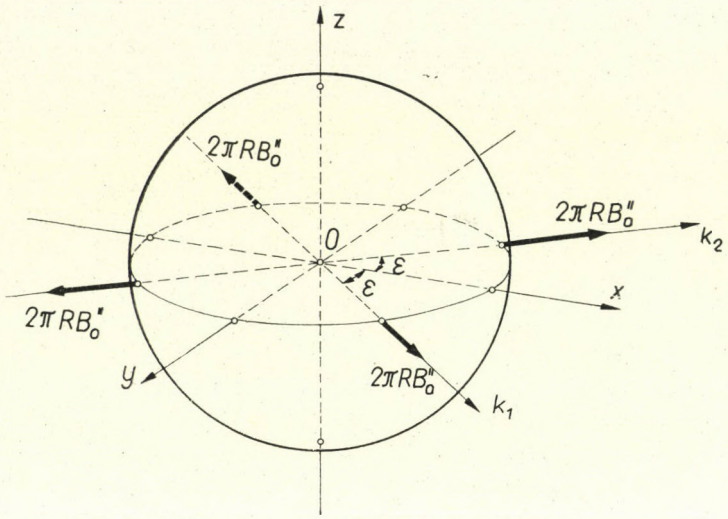


Fig. 8. Spherical shell loaded by concentrated forces symmetrically arranged in respect to the vertical coordinate planes

The meaning of the symbols in the above formula is as follows:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \frac{k_1}{R} = \quad \xi \cos\varepsilon + \eta \sin\varepsilon\,, \\
\lambda_1 &= \frac{l_1}{R} = -\xi \sin\varepsilon + \eta \cos\varepsilon\,, \\
\varkappa_2 &= \frac{k_2}{R} = \quad \xi \cos\varepsilon - \eta \sin\varepsilon\,, \\
\lambda_2 &= \frac{l_2}{R} = \quad \xi \sin\varepsilon + \eta \cos\varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

The values of coordinates k_1, l_1, k_2, l_2 are explained by Fig. 9.

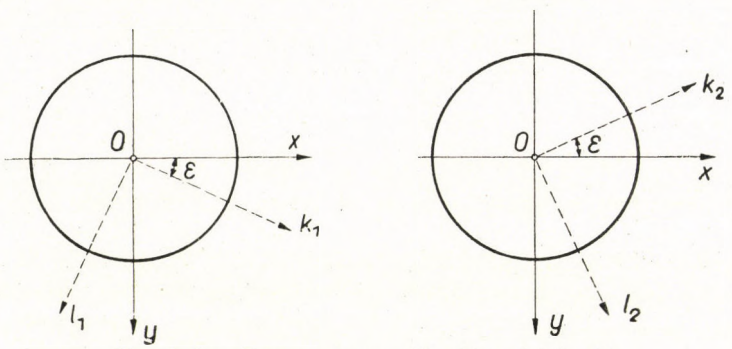


Fig. 9. Coordinate systems $O(k_1, l_1)$ and $O(k_2, l_2)$

Knowing the stress function, the x, y directed reduced inner forces may be determined by the aid of formulae

$$
\begin{aligned}
n_x &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2}\right)\cos^2\varepsilon + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2^2}\right)\sin^2\varepsilon + \\
&\quad + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1 \cdot \partial \lambda_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2 \cdot \partial \lambda_2}\right)\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon\,, \\
n_{xy} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2^2}\right)\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon - \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1 \cdot \partial \lambda_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2 \cdot \partial \lambda_2}\right)\cdot(\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon)\,, \\
n_y &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2}\right)\sin^2\varepsilon + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2^2}\right)\cos^2\varepsilon - \\
&\quad - 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1 \cdot \partial \lambda_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2 \cdot \partial \lambda_2}\right)\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

In the present case

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} = \frac{B_0''}{\zeta}\,, && \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} = \frac{B_0''}{\zeta}\,, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1 \cdot \partial \lambda_1} = \frac{B_0''\,\varkappa_1\,\lambda_1}{(1-\varkappa_1^2)\,\zeta}\,, && \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2 \cdot \partial \lambda_2} = \frac{B_0''\,\varkappa_2\,\lambda_2}{(1-\varkappa_2^2)\,\zeta}\,, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1^2} = \frac{B_0''(\varkappa_1^2\,\lambda_1^2 - \zeta^2)}{(1-\varkappa_1^2)^2\,\zeta}\,, && \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2^2} = \frac{B_0''(\varkappa_2^2\,\lambda_2^2 - \zeta^2)}{(1-\varkappa_2^2)^2\,\zeta}\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

b) *Special case:* $m = 1$

α) Basic problem. Substituting the value $m = 1$ in the formulae valid for the general case, the following simplified formulae are obtained:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{B_1}{\sin^3\alpha}\cos\beta = \frac{B_1 R^3 z}{(R^2 - x^2)^2} = \frac{B_1\,\zeta}{(1-\xi^2)^2}\,, \\
N_{12} = N_{21} &= \frac{B_1\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\sin\beta = \frac{B_1 R^2 xy}{(R^2 - x^2)^2} = \frac{B_1\,\xi\eta}{(1-\xi^2)^2}\,, \\
N_2 &= -\frac{B_1}{\sin^3\alpha}\cos\beta = -\frac{B_1 R^3 z}{(R^2 - x^2)^2} = -\frac{B_1\,\zeta}{(1-\xi^2)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

With these relations formulae (15) are altered as follows:

$$n_x = \frac{B_1}{1-\xi^2},$$

$$n_{xy} = -\frac{2\,B_1\,\xi\eta}{(1-\xi^2)^2}, \tag{26}$$

$$n_y = \frac{B_1\,(3\xi^2\eta^2-\zeta^2)}{(1-\xi^2)^3}.$$

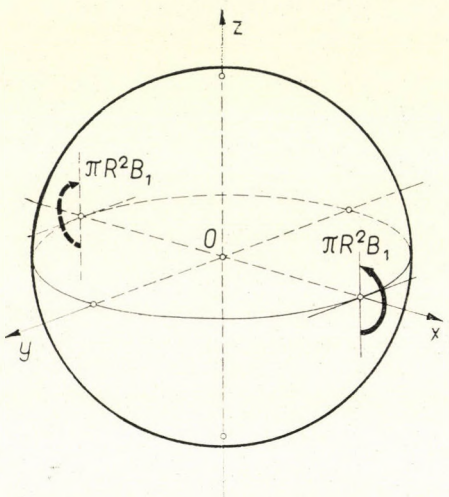


Fig. 10. Spherical shell loaded by opposite couples in two diametral points

The stress function corresponding to the above system of inner forces is

$$F = \frac{B_1 R^2}{2}\left(\frac{\eta^2}{1-\xi^2} - \frac{\xi}{2}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right). \tag{27}$$

Formulae (26) and (27) represent the solution of problem shown in Fig. 10.

β) First variant of the basic problem. In case of the problem shown in Fig. 11 the formulae to be applied are similar to those valid for the problem treated under *α)*. In the present case the stress function is

$$F = \frac{B_1' R^2}{2}\left(\frac{\xi^2}{1-\eta^2} - \frac{\eta}{2}\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right), \tag{28}$$

and consequently the reduced inner forces are:

$$n_x = \frac{B_1' (3\xi^2 \eta^2 - \zeta^2)}{(1-\eta^2)^3},$$

$$n_{xy} = -\frac{2 B_1' \xi \eta}{(1-\eta^2)^2}, \tag{29}$$

$$n_y = \frac{B_1'}{1-\eta^2}.$$

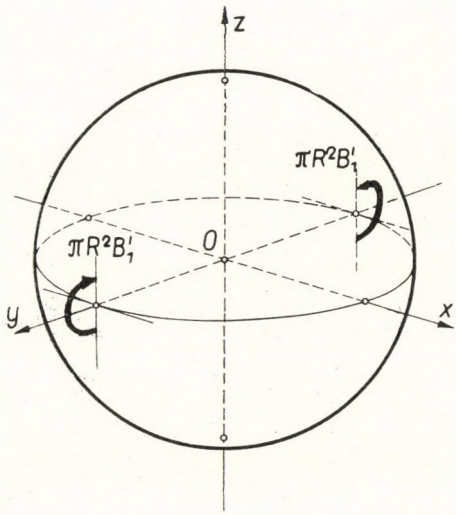


Fig. 11. Spherical shell loaded by opposite couples in two diametral points

γ) Second variant of the basic problem. The composite problem shown in Fig. 12 can also be solved by the aid of the set of formulae belonging to the problem dealt with under *α)*. The stress function of the present problem can be assembled from two parts each corresponding to one of the two opposite couples. As a result, the stress function can be expressed, by use of symbols explained by formulae (22) and Fig. 9, as follows:

$$F = \frac{B_1'' R^2}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{1-\varkappa_1^2} - \frac{\varkappa_1}{2} \ln \frac{1+\varkappa_1}{1-\varkappa_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_2^2}{1-\varkappa_2^2} - \frac{\varkappa_2}{2} \ln \frac{1+\varkappa_2}{1-\varkappa_2} \right). \tag{30}$$

The x, y directed inner forces can be determined by the aid of formulae (23) which, in the present case, lead to the following relations:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} = \frac{B_1''}{1-\varkappa_1^2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} = \frac{B_1''}{1-\varkappa_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1 \cdot \partial \lambda_1} = \frac{2\,B_1''\,\varkappa_1 \lambda_1}{(1-\varkappa_1^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2 \cdot d\lambda_2} = \frac{2\,B_1''\,\varkappa_2 \lambda_2}{(1-\varkappa_2^2)^2}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1^2} = \frac{B_1''\,(3\,\varkappa_1^2 \lambda_1^2 - \zeta^2)}{(1-\varkappa_1^2)^3}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2^2} = \frac{B_1''\,(3\,\varkappa_2^2 \lambda_2^2 - \zeta^2)}{(1-\varkappa_2^2)^3}.$$

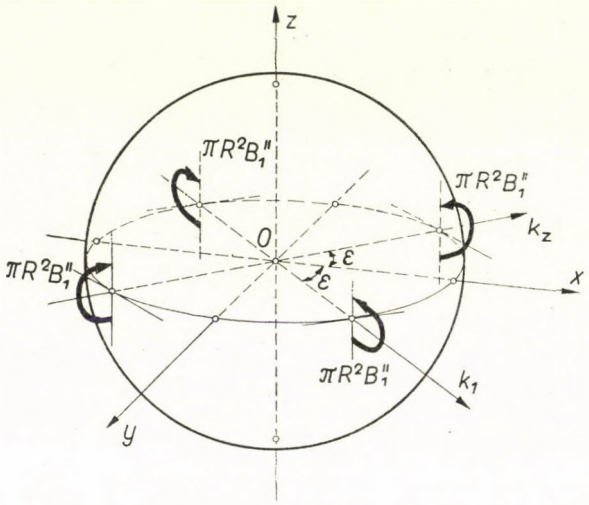


Fig. 12. Spherical shell loaded by opposite couples symmetrically arranged to the vertical coordinate planes

6. Other singular solutions of the homogeneous differential equation

In the following some hitherto unknown solutions of the homogeneous differential equation of spherical shells will be presented, namely solutions with certain singularities at some points of the section $z = 0$.

a) *First solution*

α) Basic problem. The solution of the task dealt with in the following can be arrived at by subtracting two particular solutions of the *inhomogeneous* differential equation of the spherical shell loaded by forces $p = C_1/2R = \text{const.}$ from each other. In the case of one of these solutions, the shell is supported by equally distributed vertical forces (Fig. 13a) along the section $z = 0$; in

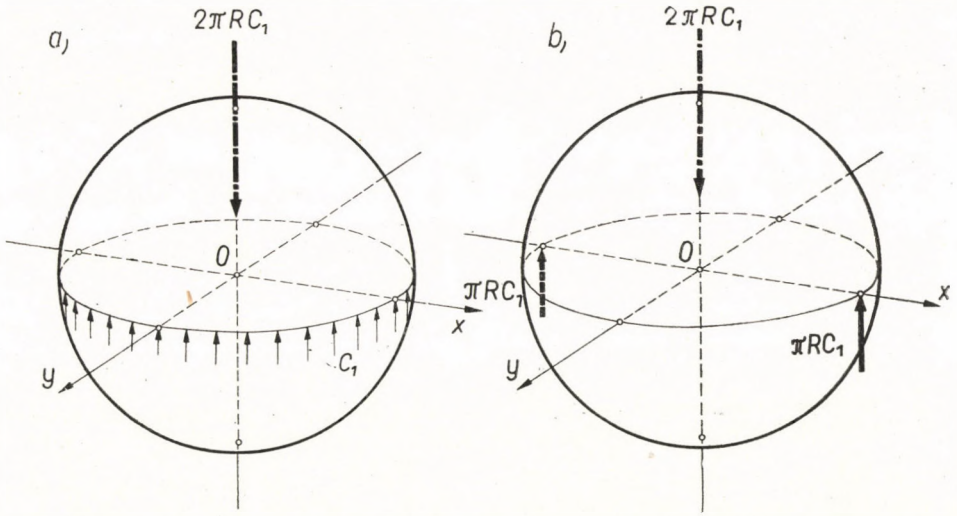


Fig. 13. Two particular ways of supporting the spherical shell loaded by the force system $p = C_1/2R = \text{const.}$ (dead load); the dash and dot line in the figure indicates the resultant of the loads acting on the shell

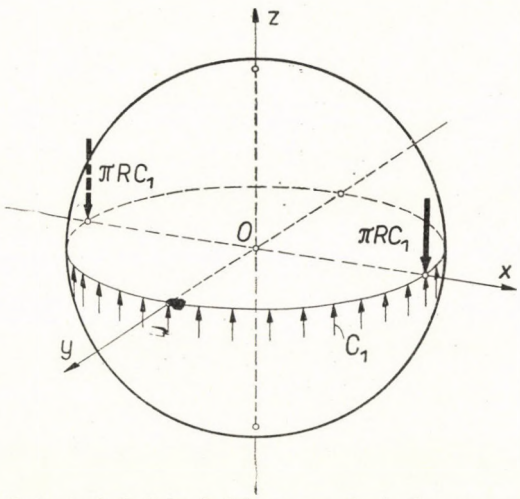


Fig. 14. Spherical shell loaded by an equipoised system of forces

The case of the other particular solution the shell is supported by two vertical concentrated forces (Fig. 13b) in two diametral points of the section $z = 0$. As the result of the subtraction of these two loading cases from each other, the loading case seen in Fig. 14 comes into being. It can easily be demonstrated that the stress function of the problem shown in Fig. 13a is

$$F_I = \frac{C_1 R^2}{2} [\ln (1 + \zeta) - \varrho^2 - \zeta] , \tag{31a}$$

while that of the problem in Fig. 13b can be expressed as

$$F_{II} = \frac{C_1 R^2}{2}\left[\frac{1}{2}(1+\xi)\ln(1+\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi)\ln(1-\xi) - \frac{\varrho^2}{2}\right]. \qquad (31b)$$

The stress function of the basic problem shown in Fig. 14 is the result of subtraction of the stress function (31b) from (31a)

$$F = \frac{C_1 R^2}{2}\left[\ln(1+\zeta) - \frac{\varrho^2}{2} - \zeta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(1+\xi)\ln(1+\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi)\ln(1-\xi)\right]. \qquad (32)$$

Having determined the stress function, the x, y directed reduced inner forces can be obtained according to formulae (5):

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{C_1}{2}\cdot\frac{(1-\xi^2+\zeta)}{(1+\zeta)^2\zeta}, \\ n_{xy} &= -\frac{C_1}{2}\cdot\frac{\xi\eta}{(1+\zeta)^2\zeta}, \\ n_y &= \frac{C_1}{2}\left[\frac{1-\eta^2+\zeta}{(1+\zeta)^2\zeta} - \frac{1}{1-\xi^2}\right]. \end{aligned} \qquad (33)$$

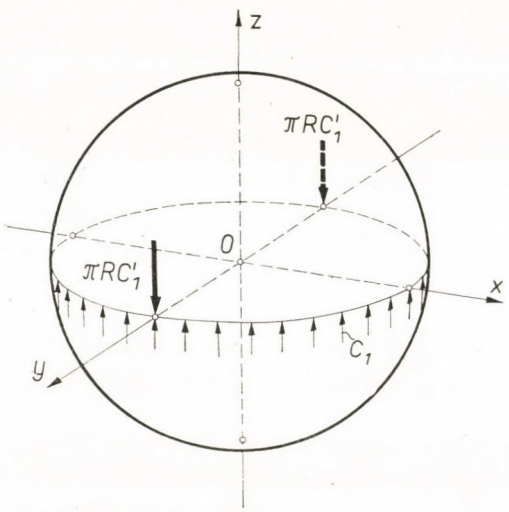


Fig. 15. Spherical shell loaded by an equipoised system of forces

β) First variant of the basic problem. Task shown in Fig. 15 can be dealt with similarly to basic problem under *α)*. In this case the stress function will be

$$F = \frac{C_1' R^2}{2}\left[\ln(1+\zeta) - \frac{\varrho^2}{2} - \zeta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(1+\eta)\ln(1+\eta) - \frac{1}{2}(1-\eta)\ln(1-\eta)\right], \tag{34}$$

and the reduced inner forces will take the form

$$n_x = \frac{C_1'}{2}\left[\frac{1-\xi^2+\zeta}{(1+\zeta)^2\zeta} - \frac{1}{1-\eta^2}\right],$$

$$n_{xy} = -\frac{C_1'}{2}\cdot\frac{\xi\eta}{(1+\zeta)^2\zeta}, \tag{35}$$

$$n_y = \frac{C_1'}{2}\cdot\frac{1-\eta^2+\zeta}{(1+\zeta)^2\zeta}.$$

γ) Second variant of the basic problem. Formulae mentioned under *α)* give a simple possibility for the solution of the problem shown in Fig. 16 as well. In this case the load system acting on the shell can be split into two load systems similar to those dealt with under *α)*. The stress function is obtained by adding

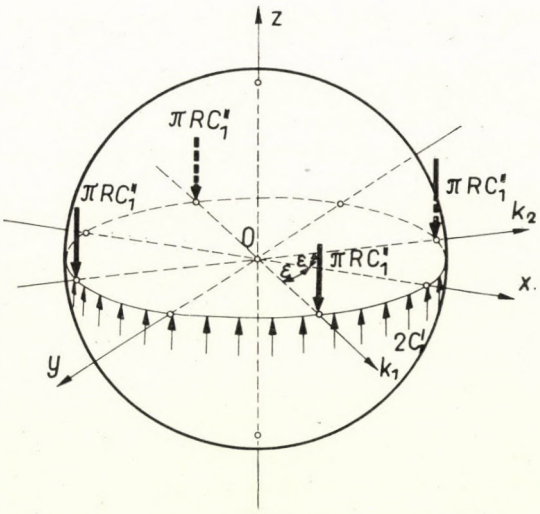


Fig. 16. Spherical shell loaded by forces symmetrically arranged to the vertical co-ordinate planes

up the stress functions corresponding to these two load systems

$$F = \frac{C_1'' R^2}{2}\left[2\ln(1+\zeta) - \varrho^2 - 2\zeta - \right.$$

$$- \frac{1}{2}(1+\varkappa_1)\ln(1+\varkappa_1) - \frac{1}{2}(1-\varkappa_1)\ln(1-\varkappa_1) -$$

$$\left. - \frac{1}{2}(1+\varkappa_2)\ln(1+\varkappa_2) - \frac{1}{2}(1-\varkappa_2)\ln(1-\varkappa_2)\right]. \tag{36}$$

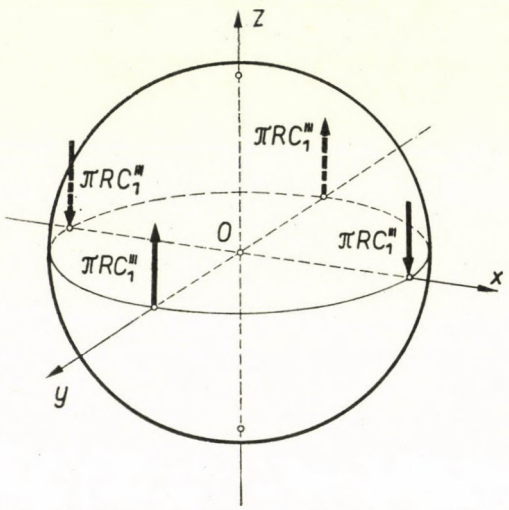


Fig. 17. Spherical shell loaded by concentrated forces symmetrically arranged to the vertical coordinate planes

Thus, as the stress function is known, the x, y directed reduced inner forces can be obtained by the aid of formulae (23). The result of this calculation is:

$$n_x = \frac{C_1''}{2}\left[\frac{2(1-\xi^2+\zeta)}{(1+\zeta)^2\zeta} - \frac{\sin^2\varepsilon}{1-\varkappa_1^2} - \frac{\sin^2\varepsilon}{1-\varkappa_2^2}\right],$$

$$n_{xy} = \frac{C_1''}{2}\left[-\frac{2\xi\eta}{(1+\zeta)^2\zeta} + \frac{\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon}{1-\varkappa_1^2} - \frac{\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon}{1-\varkappa_2^2}\right], \tag{37}$$

$$n_y = \frac{C_1'''}{2}\left[\frac{2(1-\eta^2+\zeta)}{(1+\zeta)^2\zeta} - \frac{\cos^2\varepsilon}{1-\varkappa_1^2} - \frac{\cos^2\varepsilon}{1-\varkappa_2^2}\right].$$

Symbols $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ figuring in above formulae should be determined according to formulae (22).

δ) Third variant of the basic problem. Owing to its simplicity, solution of the problem presented in Fig. 17 is also given here. In this case the stress function is equal to the difference between stress functions (32) and (34):

$$F = \frac{C_1''' R^2}{4} \left[-(1+\xi)\ln(1+\xi) - (1-\xi)\ln(1-\xi) + \right.$$
$$\left. + (1+\eta)\ln(1+\eta) + (1-\eta)\ln(1-\eta) \right]. \tag{38}$$

The reduced inner forces can be calculated in a similar manner, they are the

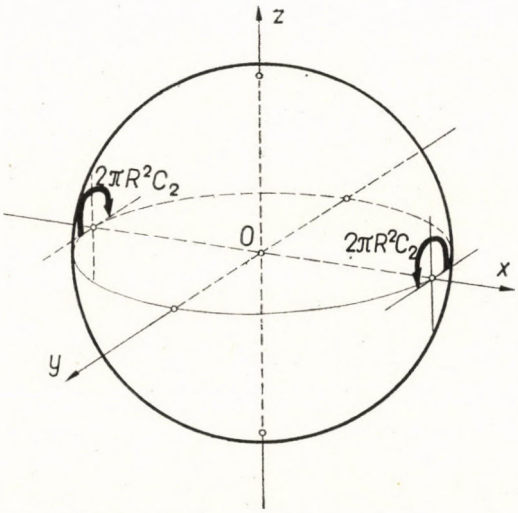


Fig. 18. Spherical shell loaded by opposite couples in two diametral points

differences between the values (33) and (35):

$$n_x = \frac{C_1'''}{2(1-\eta^2)},$$
$$n_{xy} = 0, \tag{39}$$
$$n_y = -\frac{C_1'''}{2(1-\xi^2)}.$$

b) *Second solution*

In order to solve this problem one has to start out from the solution given below of the *non-symmetrical* problem shown in Fig. 18:

$$N_1 = 0,$$
$$N_{12} = N_{21} = -\frac{C_2 R^2}{R^2 - x^2} = -\frac{C_2}{1-\xi^2}, \tag{40}$$
$$N_2 = 0.$$

The x, y directed reduced inner forces corresponding to the above actual inner forces can be determined by formulae (15):

$$n_x = 0\,,$$

$$n_{xy} = +\frac{C_2 R^2}{R^2 - x^2} = +\frac{C_2}{1-\xi^2}\,, \tag{41}$$

$$n_y = -\frac{2\,C_2 R^2 xy}{(R^2 - x^2)^2} = -\frac{2\,C_2\,\xi\eta}{(1-\xi^2)^2}\,.$$

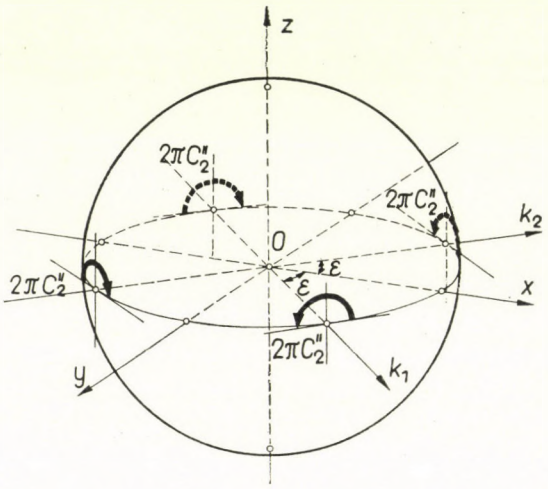


Fig. 19. Spherical shell loaded by opposite couples symmetrical to the vertical coordinate planes

The stress function itself is also easily obtained:

$$F = -\frac{C_2 R^2}{2}\,\eta \ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\,. \tag{42}$$

After the former investigations it is now possible to proceed to the solution of the problem presented in Fig. 19, which is *symmetrical* regarding the vertical coordinate planes. In this case the stress function can be made up of two parts, each corresponding to the loading cases which are similar to those shown in Fig. 18. By so doing and applying the symbols explained by formulae (22) and Fig. 9, respectively, the following result will be obtained:

$$F = -\frac{C_2'' R^2}{2}\left(\lambda_1 \ln\frac{1+\varkappa_1}{1-\varkappa_1} - \lambda_2 \ln\frac{1+\varkappa_2}{1-\varkappa_2}\right). \tag{43}$$

After this, the x, y directed reduced inner forces can be calculated according to formulae (23). The result will be:

$$
\begin{aligned}
n_x &= 2\,C_2'' \sin\varepsilon \left[\frac{-\cos\varepsilon + \xi\varkappa_1}{(1-\varkappa_1^2)^2} - \frac{\cos\varepsilon + \xi\varkappa_2}{(1-\varkappa_2^2)^2} \right], \\
n_{xy} &= C_2'' \left[(1-\xi^2)\cos^2\varepsilon - (1-\eta^2)\sin^2\varepsilon \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{(1-\varkappa_1^2)^2} - \frac{1}{(1-\varkappa_2^2)^2} \right], \\
n_y &= 2\,C_2'' \cos\varepsilon \left[\frac{\sin\varepsilon - \eta\varkappa_1}{(1-\varkappa_1^2)^2} + \frac{\sin\varepsilon + \eta\varkappa_2}{(1-\varkappa_2^2)^2} \right].
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Values $\varkappa_1$, λ_1 and $\varkappa_2$, λ_2 figuring in above formulae are to be determined by the aid of relations (22).

c) *Third solution*

In order to obtain this solution one has to start out from problem sketched in Fig. 20, which differs from problem shown in Fig. 10 only in that respect, that the plane of loading couples is parallel not with the coordinate plane xz, but with the plane xy.

This special problem can immediately be solved according to the pattern given by formulae (25). Applying the symbols to be seen in Fig. 21

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{C_3}{\sin^3\alpha}\cos\omega = \frac{C_3 R^3 y}{(R^2-x^2)^2} = \frac{C_3\eta}{(1-\xi^2)^2}, \\
N_{12} = N_{21} &= -\frac{C_3}{\sin^3\alpha}\sin\omega = -\frac{C_3 R^2 x z}{(R^2-x^2)^2} = -\frac{C_3\xi\zeta}{(1-\xi^2)^2}, \\
N_2 &= -\frac{C_3}{\sin^3\alpha}\cos\omega = -\frac{C_3 R^3 y}{(R^2-x^2)^2} = -\frac{C_3\eta}{(1-\xi^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Thus, on ground of relations (15), following formulae are obtained for the x, y directed reduced inner forces:

$$
\begin{aligned}
n_x &= \frac{C_3\eta}{(1-\xi^2)\zeta}, \\
n_{xy} &= \frac{C_3\xi(\zeta^2-\eta^2)}{(1-\xi^2)^2\zeta}, \\
n_y &= \frac{C_3\eta(2\xi^4 + 3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2 - \zeta^2)}{(1-\xi^2)^3\zeta}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Neither does the determination of the stress function of present problem cause any difficulty whatever:

$$F = -\frac{C_3 R^2}{2}\left(\frac{\eta\zeta}{1-\xi^2} + \arcsin\frac{\eta}{1-\xi^2}\right). \tag{46}$$

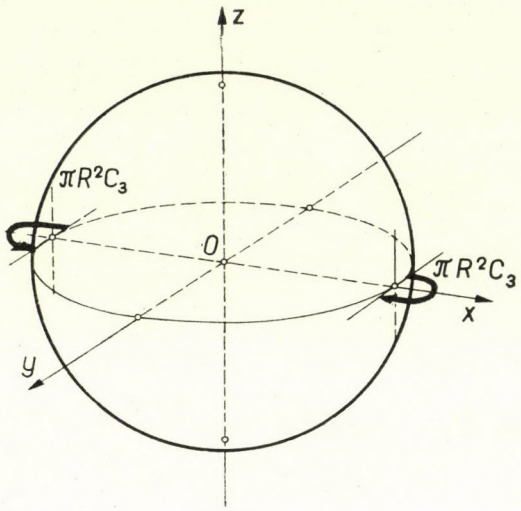


Fig. 20. Spherical shell loaded by two opposite couples in diametral points

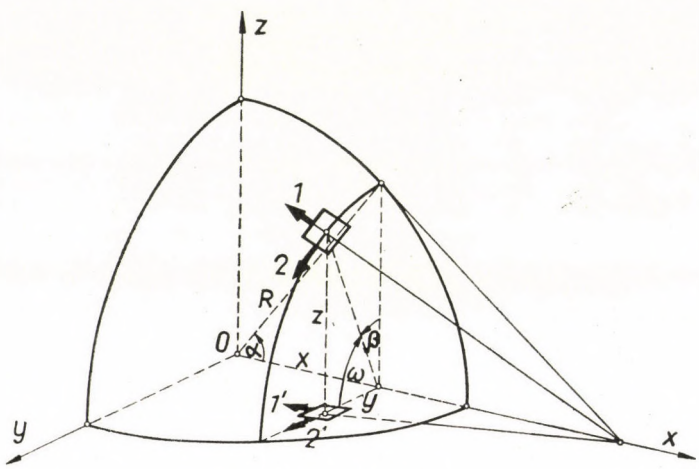


Fig. 21. Symbols

Possessing above solution, the problem to be seen in Fig. 22 — *symmetrical* in respect to the coordinate plane *xz* and *antimetrical* in respect to the coordinate plane *yz* — can also be easily solved. In this case the load system can be split into two parts which are both similar to the loading case shown in Fig. 20. Consequently, the stress function can be assembled from two parts similar to

the one under (46):

$$F = -\frac{C_3'' R^2}{2}\left(\frac{\lambda_1 \zeta}{1-\varkappa_1^2} + \arcsin\frac{\lambda_1}{1-\varkappa_1^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda_2 \zeta}{1-\varkappa_2^2} - \arcsin\frac{\lambda^2}{1-\varkappa_2^2}\right). \tag{47}$$

The meaning of symbols $\varkappa_1$, λ_1 and $\varkappa_2$, λ_2 figuring here is explained by formulae (22).

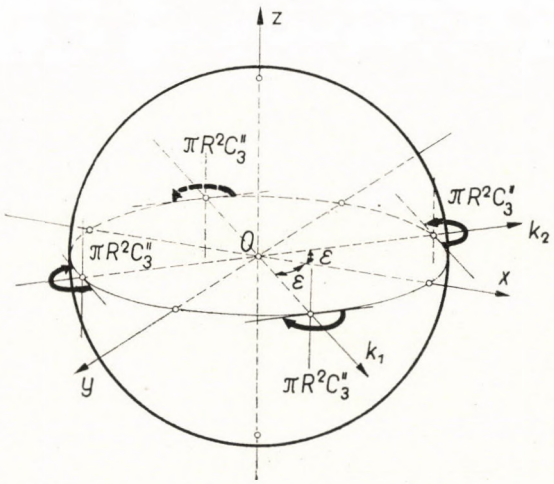


Fig. 22. Spherical shell loaded by opposite couples, symmetrically arranged to the vertical coordinate plane *xz* and antimetrically to the coordinate plane *yz*

The x, y directed inner forces can be determined according to formulae (23). In this case

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} = +\frac{C_3'' \lambda_1}{(1-\varkappa_1^2)\zeta},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} = -\frac{C_3'' \lambda_2}{(1-\varkappa_2^2)\zeta},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1 \cdot \partial \lambda_1} = -\frac{C_3'' \varkappa_1 (\zeta^2 - \lambda_1^2)}{(1-\varkappa_1^2)^2 \zeta},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2 \cdot \partial \lambda_2} = +\frac{C_3'' \varkappa_2 (\zeta^2 - \lambda_2^2)}{(1-\varkappa_2^2)^2 \zeta}, \tag{48}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_1^2} = +\frac{C_3 \lambda_1 (2\varkappa_1^4 + 3\varkappa_1^2 \lambda_1^2 - 2\varkappa_1^2 - \zeta^2)}{(1-\varkappa_1^2)^3 \zeta},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varkappa_2^2} = -\frac{C_3 \lambda_2 (2\varkappa_2^4 + 3\varkappa_2^2 \lambda_2^2 - 2\varkappa_2^2 - \zeta^2}{(1-\varkappa_2^2)^3 \zeta}.$$

7. Closing remarks

In the above considerations particular solutions have been given for the homogeneous differential equation of spherical shells without bending, namely solutions appropriate for the analysis of spherical shells rectangular in plan. Application of the deduced formulae will be presented in a subsequent paper.

REFERENCES

1. FLÜGGE, W.: Statik u. Dynamik der Schalen. III. Aufl. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.
2. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960.
3. HERMITE, R.: Résistance des matériaux, théorique et expérimentale, Dunod, Paris 1954.
4. JACOBSEN, A. AAS: Kugelschalen über vier- und vieleckigem Grundriß. *Mémoires, Abhandlungen, Publications.* **5** (1937—38), 1—17.
5. JACOBSEN, A. AAS: Beitrag zur Theorie der Kugelschale auf Einzelstützen. *Ingenieur-Archiv* **8** (1937), 275.
6. REISSNER, E.: Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells. *J. Math. and Phys.* **25** (1946) Nr. 1, (1947) Nr. 4.
7. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells, II. Ed. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York—Toronto—London 1959.

Partikuläre Lösungen der homogenen Differentialgleichung der Kugelschalen. Nach der Fachliteratur wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung der biegefreien Kugelschale mit Hilfe von trigonometrischen Reihen in einem Kugelkoordinatensystem abgeleitet, und der tatsächliche Spannungszustand der Schale wird durch die wirklichen spezifischen Spannkräfte charakterisiert. Diese Behandlungsart ist bei auf rechteckigem Grundriß errichteten Kugelschalen unbequem. Um die hieraus herrührenden Schwierigkeiten zu beheben, drückt der Verfasser die bekannten Lösungen, anstatt Kugelkoordinaten, mit Orthogonalkoordinaten aus und charakterisiert den Spannungszustand der Schale anstatt der wirklichen durch die sog. reduzierten Spannkräfte. Außer der Lösungen mit trigonometrischen Reihen werden auch andere, in der Fachliteratur noch nicht behandelten Lösungen herangeführt, und in allen diesen Fällen wird außer der Formeln der reduzierten Spannkräfte auch die Gleichung der Spannungsfunktion angegeben.

Solutions particulières de l'équation différentielle homogène des calottes sphériques. La solution générale, sous forme de série Fourier, de l'équation différentielle homogène des calottes sphériques sans flexion est déduite, dans la littérature, dans un système de coordonnées sphériques, l'état de contrainte de la calotte étant caractérisé par les forces intérieures effectives. En cas de calottes sphériques construites sur une base rectangulaire, ce procédé pose des difficultés sous plusieurs rapports. L'étude tente de les éliminer en exprimant les solutions connues par des coordonnées rectangulaires au lieu de coordonnées sphériques, et en caractérisant l'état de contrainte de la calotte par les forces intérieures réduites, au lieu des forces effectives. Outre les solutions par série Fourier, l'auteur présente quelques autres solutions inédites en donnant chaque fois l'équation de la fonction de contraintes, en plus des formules relatives aux forces intérieures réduites.

Частные решения гомогенного дифференциального уравнения сферической оболочки *(П. Чонка).* Решение в общем виде по Фурье гомогенного дифференциального уравнения неизгибаемой сферической оболочки в литературе выводится в системе сферических координат, и напряженное состояние оболочки характеризуется действительными удельными усилиями натяжения. Такой способ трактовки в случае сферических куполообразных оболочек с планом в виде прямоугольного четырехугольника во многих отношениях является неудобным. Для устранения вытекающих из этого затруднений в данной работе известные решения вместо сферических координат выражаются прямоугольными координатами, а напряженное состояние оболочки вместо действительных усилий натяжения характеризуется т. н. приведенными усилиями натяжения. В работе кроме решений Фурье описываются также некоторые прочие решения, не излагавшиеся до сих пор в литературе, и во всех этих случаях кроме формул приведенных усилий натяжения дается также уравнение функции напряжения.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 141—158 (1968)

EINIGE PROBLEME DER BERECHNUNG DER STATISCH UNBESTIMMTEN FAHRZEUGKONSTRUKTIONEN NACH DEM KRAFTGRÖSSENVERFAHREN

P. MICHELBERGER
KAND. DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 19. Oktober, 1967]

Das Matrizenkraftgrößenverfahren, ergänzt durch die lineare Transformation der Grundsysteme und durch die Verallgemeinerung der statisch unbestimmten Grundsysteme, kann die Berechnung der Fahrzeugkonstruktionen wesentlich vereinfachen. Die Berechnung der unregelmäßigen zusammengesetzten Konstruktion kann auf die Untersuchung von leicht behandelbaren, unabhängigen, regelmäßigen Elementarkonstruktionen zurückgeführt werden. Die Unregelmäßigkeit und die Zusammengesetztheit der Konstruktion können gleicherweise als eigenartige störende Belastungen erfaßt werden.

Bei der Berechnung der Fahrzeugkonstruktionen, infolge deren linienartigen Ausführung, wird im allgemeinen das Kraftgrößenverfahren bevorzugt. (Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist im allgemeinen wesentlich kleiner als die Freiheitsgradzahl; der linienartige Aufbau ermöglicht auch im Falle der Anwendung des Kraftgrößenverfahrens die Aufstellung eines Bandmatrizengleichungssystems bei der Wahl eines geeigneten Grundsystems.) Im nachfolgenden werden wir uns deshalb nur mit dem Kraftgrößenverfahren beschäftigen, jedoch ohne Außerachtlassung der Tatsache, daß die Deformationsmethode in manchen Fällen die Anwendung wesentlich einfacherer Berechnungen erlaubt (z. B. Annäherungsuntersuchung der Verdrehung von rechteckigen Fahrgestellrahmen mit Querträgern) [1].

1. Definition des Grundsystems des Kraftgrößenverfahrens und Regeln der Wahl des Grundsystems

MAKUSIN [2] gibt für die Wahl des Grundsystems des Kraftgrößenverfahrens die folgenden Anforderungen an: »... soll *formbeständig und statisch bestimmt* sein. Beide sind erforderliche Anforderungen. Außerdem muß das richtig ausgewählte Grundsystem sichern: in erster Linie, daß die größtmögliche Anzahl seiner Nebenverschiebungen (Beiwerte mit gemischten Indizes) gleich Null, ferner, daß seine Momentenlinien leicht konstruierbar werden«.

Von der obigen Festlegung kann nur die auf die Nebenverschiebungen (Beiwerte mit gemischten Indizes) gleich Null Setzung bezügliche Bemerkung angenommen werden. Die übrigen Teile der Festlegung, besonders die Formbeständigkeit und statische Bestimmtheit betreffende Anforderung entspricht

der sich in der Praxis eingebürgerten Gewohnheit, jedoch betrachtet der Verfasser dieselbe als unbegründet.

Eine *erforderliche* und ausreichende Bedingung bei der Auswahl des *Grundsystems* — gegenüber der vorstehenden Definition — ist die Innehaltung der Regel, daß die virtuellen Schnitte durch das Tragwerk derart angenommen werden müssen, daß es *bei der gegebenen äußeren Belastung und unter der Wirkung überzähliger Verbindungskräfte* nicht labil werde. Das Grundsystem darf also im allgemeinen labil, und statisch bestimmt oder unbestimmt sein, nur bei der gegebenen Belastung darf es sich nicht labil verhalten.

Unsere modifizierte Definition ermöglicht, daß wir das Tragwerk durch steife, nicht deformierende Stäbe oder Tragelemente ergänzen, die zu den beiden Seiten der fiktiven Schnitte verbunden sein können, um die überzähligen Verbindungskräfte aus dem durchgeschnittenen Querschnitt auf beliebige Stelle zu setzen (σ- und Σ-Punktmethode). In diesen Fällen wird unter der Einwirkung der gesamten äußeren Kräfte die relative Verschiebung der beiden durch steife Verbindungselemente vereinigten Schnitte des Schnittpunktes gleich Null, damit wird aber auch die relative Verschiebung des wirklichen Schnittes gleich Null.

Die eingehende Behandlung der Ungeeignetheit des unter der Einwirkung der gegebenen äußeren und inneren Belastung sich labil verhaltenden Grundsystems ist nicht notwendig; ein solcher Träger wird nämlich unter der Belastung so große Verschiebungen erfahren, die den Bruch oder eine grundsätzliche Verformung der ursprünglichen geometrischen Form der Konstruktion zur Folge haben. Es ist aber weitaus schwerer einzusehen, daß alle von diesem abweichenden Grundsysteme zu unseren Berechnungen angewendet werden können. Wir werden deshalb die Anwendbarkeit des für eine allgemeine Belastung labilen, aber für die gegebene äußere Belastung und für die überzähligen Verbindungskräfte stabilen Grundsystems anstatt des mathematischen Nachweises im folgenden mit Beispielen bestätigen, da die Wahlmöglichkeit der Grundsysteme schon durch ein einziges Beispiel über dieses Gebiet erstreckt wird.

Als labiles Grundsystem kann das bei den innerlich unbestimmten Fachwerken allgemein gebrauchte Grundsystem betrachtet werden, falls es durch einen fiktiven Durchschnitt der überzähligen Stäbe ausgebildet wird. Dieses Grundsystem ist nur stabil für die gegebene äußere Belastung und für die untersuchten Verbindungskräfte, es wird aber labil unter den im Schnitt, jedoch nicht in der Stabrichtung angreifenden Kräften, unabhängig davon, ob der Stab vermöge seiner Abmessungen unter Umständen in sich selbst zur Übernahme auch von Querbelastungen geeignet wäre (Bild 1a).

Das durch die über den Auflagern angewendeten Schnitte ausgebildete Grundsystem des Durchlaufträgers ist gegenüber der in der Trägerrichtung wirkenden Belastung auch labil (Bild 1b).

In den angeführten Beispielen wurde die Stabilität nicht bewußt ausgenutzt. Es kann aber auch solch ein Fall vorkommen, wo das absichtlich für labil gewählte Grundsystem die statischen Rechnungen erleichtert und die Behandelbarkeit des Gleichungssystems der Formänderungen begünstigt. Dazu wird ein Beispiel vorgeführt in einem durch Einfügung von Kugelgelenken in Teilträger zerlegten Grundsystem, angewendet von ERZ bei der Ver-

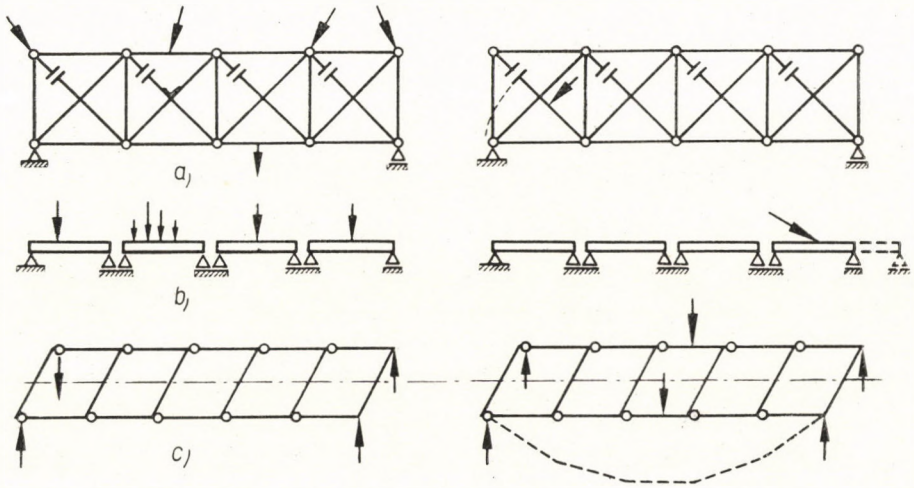


Bild 1. Richtige und unrichtige Benutzung von labilen Grundsystemen

drehungsbelastung von symmetrischen Rechteckrahmen mit Querträgern [1] (Bild 1c).

Die Benutzung der statisch unbestimmten Grundsysteme bei manchen Aufgaben (z. B. Verbindung von Pontonbrücken) ist schon ein allgemein bekanntes Verfahren. Jedoch werden wir die Berechtigung deren Benutzung im Abschnitt 3 gesondert nachweisen, da wir damit solche allgemeineren Folgerungen zu ziehen ermöglichen, welche die statischen Berechnungen der Fahrzeugkonstruktionen wesentlich erleichtern.

In der Lösung der statisch vielfach unbestimmten Aufgaben können wir den zu den Rechnungen erforderlichen Arbeitsaufwand durch entsprechende Wahl des Grundsystems grundsätzlich beeinflussen. Trotzdem kann man in der Fachliteratur kein systematisches Verfahren zur Wahl der Grundsysteme finden. Die Auswahl des geeigneten Grundsystems ist dem statischen Sinne des Konstrukteurs überlassen. In der Praxis haben sich bereits die zu den im allgemeinen gebrauchten Konstruktionstypen geeigneten Grundsysteme selbstverständlich ausgestaltet (z. B. bei den Durchlaufträgern der Schnitt über den Auflagern, bei den Rahmentragwerken das σ-, bzw. Σ-Punktverfahren usw.).

Die Charakteristiken des richtig ausgewählten Grundsystems sind im allgemeinen die Folgenden:

a) der Kräfteverlauf des Systems ist infolge der äußeren Kräfte »ähnlich« dem wirklichen Kräfteverlauf (dies sichert im allgemeinen eine größere numerische Genauigkeit);

b) das Gleichungssystem der Formänderungen, in Übereinstimmung mit der *Makusin*schen Voraussetzung, enthält möglicherweise viel Einheitsfaktoren, deren Wert gleich Null sind (was die Aufstellung und Auflösung des Gleichungssystems gleicherweise erleichtert);

c) die Koeffizienten mit gleichen Indizes (d. h. die Einheitskoeffizienten) des Gleichungssystems der Formänderungen sind wesentlich größer als dieselben mit gemischten Indizes; die letzteren sind um so kleiner, je größer die Differenz der zwei Indizes (Bandmatrizenaufbau) derselben ist. Dies erleichtert die Auflösung des Gleichungssystems mit Hilfe der Iterations- oder Relaxationsmethode und ermöglicht die Entwicklung einfacherer Näherungsverfahren.

Man überzeugt sich von der richtigen Auswahl der Charakteristik *a)* am zweckmäßigsten durch die Aufzeichnung der geänderten Form. Bei ähnlichem Kräfteverlauf sind nämlich auch die Formänderungen ähnlich, und ein grobes Bild der Formänderung kann mühelos dargestellt werden.

Charakteristik *b)* wird erfüllt, wenn die Vektoren, entstanden aus dem in zwei beliebig ausgewählten Schnitten i und k angenommenen Kräftepaare, in jedem Abschnitt des Trägers aufeinander senkrecht oder während des sich über den ganzen Träger erstreckenden Integrationsprozesses die positiven und negativen Integralwerte untereinander gleich sind, und folglich die Summierung derselben Null ergibt.

Die Erfüllung der Charakteristiken *b)* und *c)* wird befördert durch die Trennung des Trägers durch Schnitte in Trägerelemente (so daß die einzelnen Abschnitte nur mit wenigen anschließenden Abschnitten in Berührung kommen). In diesem Falle, wenn die Schnitte i und k voneinander entfernt sind, wird entweder der Einheitskoeffizient δ_{ik} gleich Null oder sein Absolutwert wesentlich kleiner als z. B. δ_{kk} oder δ_{ii}.

2. Lineartransformation der Grundsysteme

Mit der Definition der Grundsysteme und mit einigen Regeln für deren zweckmäßige Ausbildung gaben wir noch keine solchen Mittel in die Hände des Konstrukteurs, wodurch er das vorteilhafteste Grundsystem systematisch ermitteln könnte. Suchen wir deshalb die Beziehungen zwischen den einzelnen Grundsystemen, da wir im Besitztum derselben von einem beliebig ausgewählten Grundsystem auf ein anderes, mehr geeignetes, mühelos übergehen können.

Durch die beliebig ausgewählte Ausgestaltung des Grundsystems haben wir zugleich mittels der überzähligen Verbindungskräfte die zur Ermittlung der Einheitskoeffizienten dienenden inneren Kräfte auch bestimmt. Somit können wir zu einem bestimmten Grundsystem einige Vektoren der inneren Kräfte koordinieren (der Einfachheit halber ziehen wir ausschließlich das Biegemoment in Betracht, die Gedankenfolge kann aber sinngemäß auf solche Fälle erstreckt werden, wo außer dem Biegemoment auch andere innere Kräfte, z. B. Drillungs-, Schub-, Normalkräfte usw. berücksichtigt werden müssen).

Bezeichnen wir diesen inneren Kraftvektor mit $\mathbf{m}$, so wird offensichtlich

$$\mathbf{m}^* = [M_1'(s)\,,\ M_2'(s)\,,\ \ldots\ M_i'(s)\,,\ \ldots\ M_n'(s)]\,,$$

wenn man die einzelnen Koordinaten des Trägerabschnittes mit s bezeichnet. M_1', M_2', . . ., M_i', ..., M_n' sollen bedeuten die in den 1-ten, 2-ten, . . ., i-ten, bzw. n-ten gedachten Schnitten wirkenden, aus den unitären Verbindungs-Kräftepaaren entstehenden inneren Kräfte, als Funktionen von s. Die Funktion der durch die äußere Belastung hervorgerufenen, zu demselben Grundsystem gehörigen inneren Kraft wird mit dem skalaren $M_0(s)$ bezeichnet. Die Größen der in den Schnitten auftretenden, vorläufig unbekannten Verbindungskräfte werden durch den Vektor

$$\mathbf{x}^* = [X_1, X_2, \ldots X_i, \ldots X_n]$$

angegeben.

In den gedachten Schnitten wird der Wert der durch den Einfluß der äußeren Belastung und der Verbindungskräfte verursachten relativen Formänderung gleich Null, d. h., die abgesonderten Trägerschnitte bleiben einander angeschlossen. Schreiben wir das auf in Form einer Gleichung:

$$\int_{(s)} \mathbf{m}\,\mathbf{m}^* \frac{ds}{JE}\,\mathbf{x} + \int_{(s)} \mathbf{m} M_0 \frac{ds}{JE} = \mathbf{o}$$

oder kurz

$$\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{o}\,, \tag{1}$$

wenn wir die Steifigkeit des Trägerabschnittes ds mit JE bezeichnen.

Multiplizieren wir nun das Gleichungssystem von links nach rechts mit einer invertierbaren quadratischen Matrix $\mathbf{T}$ vom Typ $n \times n$, und zugleich substituieren wir die Unbekannte $\mathbf{x}$ durch $\mathbf{T}^*\mathbf{y}$, so erhalten wir

$$\mathbf{T}\left(\int_{(s)} \mathbf{m}\mathbf{m}^* \frac{ds}{JE}\right)\mathbf{T}^*\,\mathbf{y} + \mathbf{T}\int_{(s)} \mathbf{m} M_0 \frac{ds}{JE} = \mathbf{o}.$$

Setzen wir die Werte von **T** und **T*** unter das Integralzeichen und ordnen die Abhängigkeit:

$$\int_{(s)} (\mathbf{Tm})\,(\mathbf{Tm})^* \frac{ds}{JE}\,\mathbf{y} + \int_{(s)} (\mathbf{Tm})\,M_0 \frac{ds}{JE} = \mathbf{o}.$$

Bezeichnen wir in der Folge den Ausdruck (**Tm**) mit $\overline{\mathbf{m}}$, damit erhalten wir

$$\int_{(s)} \overline{\mathbf{m}}\overline{\mathbf{m}}^* \frac{ds}{JE}\,\mathbf{y} + \int_{(s)} \overline{\mathbf{m}} M_0 \frac{ds}{JE} = \mathbf{o}\,,$$

oder kurz

$$\overline{\mathbf{D}}\mathbf{y} + \overline{\mathbf{d}} = \mathbf{o}. \tag{2}$$

Der Ausdruck (2) stimmt mit (1) vollständig überein; und kann aufgefaßt werden, als wenn derselbe ein zu einem anderen Grundsystem gehöriges Gleichungssystem wäre. Selbstverständlich können wir die vollständige M-Beanspruchung des Tragwerkes mittels der Gleichungen (1) oder (2) ermitteln:

$$M(s) = M_0(s) + \mathbf{m}^*\mathbf{x} = M_0(s) + \overline{\mathbf{m}}^*\mathbf{y}\,, \tag{3}$$

da wir uns von der Richtigkeit der Beziehung $\mathbf{m}^*\mathbf{x} = \overline{\mathbf{m}}^*\mathbf{y}$ durch die Substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{T}^*\mathbf{y}$ bzw. $\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{Tm}$ leicht überzeugen können.

Die Ausdrücke (1), (2) und (3) ermöglichen, daß wir ausgegangen von einem als Basis gewählten Grundsystem, während des Lösungsprozesses der Aufgabe auf ein anderes, beliebiges Grundsystem übergehen, welches als das linear Transformierte des ursprünglichen Grundsystems betrachtet werden kann.

Vorteil des Verfahrens ist, daß die Matrix **T** auf Grund der Gegenüberstellung der Momente **m** ausgewählt werden kann, folglich können wir auch bei einem unrichtig angenommenen Grundsystem — mittels linearer Kombination — die Erfüllung der zu Anfang dieses Abschnittes festgesetzten Charakteristiken erreichen.

Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) folgt, daß wir die Einheitskräftepaare auf verschiedene Grundsysteme setzen können, d. h., im Laufe der Lösung der Aufgabe müssen wir nicht an einem einzigen Grundsystem festhalten, vorausgesetzt, daß jedes dieser Grundsysteme durch invertierbare Transformation aus dem anderen hervorgeht.

Die Transformation ermöglicht selbstverständlich auch, daß wir ohne jede mechanische Erwägung, allein infolge der Erkenntnis von gewissen günstigen Eigenschaften der Koeffizienten des Gleichungssystems die Matrix **T** nur auf mathematische Weise behandeln; wie es ARGYRIS in seinem grundlegenden Werk [4] vorschlägt.

Die lineare Transformation der Grundsysteme bedingt zur Durchführung der praktischen Berechnungen die Ersetzung eines Tragwerkes von verwickelter

Konstruktion durch irgendein leicht überblickbares einfacheres mathematisches Modell, welches auch zur Behandlung mit programmierten Rechenanlagen geeignet ist. Solch ein praktisches Modell kann man erhalten, wenn man das Gitterwerk des Trägers, einschließlich der eventuell nur als Flächen behandelten Teile, durch eine einzige Linie darstellt. Jeder einzige Punkt dieses Geradenabschnittes entspricht den einzelnen Punkten des Originaltragwerkes; (bei Flächentragwerken nur wenn die Verteilung der inneren Kräfte wenigstens längs einiger Geraden der Fläche konstant ist). Die Punkte des Tragwerkes, welche zugleich Teile von mehreren Trägern bilden (einander überquerende Träger, Schlußpunkte von geschlossenen Trägern), werden auf dem linearisierten Modell offenbar so oft figurieren, auf wie vielen Trägerelementen dieselben vorkommen. Dann können wir die Werte der durch die äußere Belastung hervorgerufenen inneren Kräfte in dem auf diese Weise erhaltenen Geradennetz einzeichnen. Hiermit erhalten wir eine in Reihe geordnete Flächenschar (Flächenreihe). Offensichtlich ist es zweckmäßig, die lineare Transformation auf diesem topologischen Modell durchzuführen, da dieses mehr übersichtlich ist und für die Rechenanlage unmittelbar programmiert werden kann.

Die in einer Reihe angeordneten Beanspruchungsdiagramme können immer mit einigen Polygonen angenähert werden; dort, wo das Polygon infolge irgendeiner Belastung (äußerer Belastung oder einer der Einheitsbelastungen) einen Knickpunkt besitzt, ist es zweckmäßig, einen Teilungspunkt in das Geradennetz einzuschalten. Ebenso ergibt sich ein Teilungspunkt auch infolge der Steifheitsänderung des Trägerabschnittes. In jedem Teilungspunkte kann die Beanspruchung durch eine Zahl (in Sprungfällen durch zwei Zahlen), durch die Größe der Beanspruchung charakterisiert werden. Im Falle von mehreren Belastungsarten müssen mehrere Zahlen zu den einzelnen Teilungspunkten koordiniert werden. Der Zweck der linearen Transformation ist, daß man mittels der linearen Kombination der auf diese Weise in Reihe angeordneten Beanspruchungsdiagramme, in so vielen Teilen als möglich, die Beanspruchungswerte gleich Null setzt. Das Verfahren ist ähnlich der Regel, die die Entwicklung der Determinanten erleichtert, wonach sich der Wert der Determinante nicht ändert, wenn man zu einer ihrer Reihe das λ-fache einer anderen Reihe addiert oder davon abzieht. Im Falle der Grundsysteme legt auch die linear transformierende Matrix **T** praktisch zwischen den in Reihen angeordneten Zahlen solche Abhängigkeit fest. Für die verschiedenen Beanspruchungen ist es am zweckmäßigsten, gesonderte Netzsysteme zu entwickeln; es versteht sich aber von selbst, daß wenn man bei einer Beanspruchung das λ-fache einer Reihe zu einer anderen Reihe addiert, dies für jede Beanspruchungsart durchgeführt werden muß. Die so erhaltenen λ-Werte werden die Elemente der transformierenden Matrix **T**. Diese letztere kann am einfachsten derart aufgebaut werden, daß als erste die Hauptdiagonale gewählt wird, z. B. in der Gestalt einer reinen Einheitsmatrix, und zur letzteren werden auf Grund von

Betrachtung oder durch Benutzung der Rechenanlage die einzelnen λ-Werte addiert. Damit wird die ganze Aufgabe vom geometrischen Modell des wirklichen Tragwerkes auf ein topologisches System zurückgeführt, welches durch diskrete Zahlen zum Gebrauch in der Digitalrechenanlage charakterisiert werden kann.

3. Statisch unbestimmte Grundsysteme

Wie bereits erwähnt wurde, werden die statisch unbestimmten Grundsysteme in manchen Fällen auch bei den Berechnungen des Kraftgrößenverfahrens gebraucht. Es muß dessenungeachtet nachgewiesen werden, daß auch die Anwendung des statisch unbestimmten Grundsystems zugelassen werden kann (dies muß teils der Korrektheit halber durchgeführt werden, teils um aus der Ableitung fernere Folgerungen ziehen zu können).

3.1. Formänderung der statisch unbestimmten Träger

Zur Anwendung des statisch unbestimmten Grundsystems muß vorerst ein Hilfssatz nachgewiesen werden. Benutzt man nämlich zur Ermittlung der Formänderung eines statisch unbestimmten Trägers die Gleichheitsbedingung der äußeren und inneren fremden Arbeiten, so muß man die auf den Formänderungsstellen wirkende virtuelle Einheitsbelastung nicht auf den wirklichen Träger setzen, es genügt, wenn man dieselbe auf das Grundsystem (auf irgendwelches Grundsystem) setzt. Diese Behauptung ist logisch leicht zu verstehen, wenn man überlegt, daß es hinsichtlich des Trägers gleichgültig ist, ob dessen Belastung tatsächlich durch eine »äußere Kraft« oder durch die überzähligen Verbindungskräfte des statisch unbestimmten Trägers verursacht wird. Aus dem Gesichtspunkt des Trägers sind beide wirkliche Belastungen, eine prinzipielle Unterscheidung derselben ist überflüssig, sie könnte allein aus rechnungstechnischen Gesichtspunkten begründet werden.

Obgleich die Gültigkeit des Hilfssatzes durch die oben angeführte Veranschaulichung stark bekräftigt wurde, kann sie auch formal nachgewiesen werden. Die Beanspruchung des Trägers mit den bisher benutzten Bezeichnungen ist nach (3)

$$M(s) = M_0(s) + \mathbf{m}^*(s)\,\mathbf{x}\,.$$

Die Größe der Beanspruchung, welche aus der an der Stelle der behandelten Formänderung wirkenden Einheitskraft entsteht, wenn die letztere auf den Originalträger (und nicht auf das Grundsystem) gesetzt wird, ist wie folgt:

$$\overline{M}(s) = \overline{M}_0(s) + \mathbf{m}^*(s)\,\mathbf{y}\,. \tag{4}$$

Hier ist $\overline{M}_0(s)$ die innere Kraft, hervorgerufen durch die Einheitskraft, welche auf das bei der Auflösung der statisch unbestimmten Aufgabe benutzten Grundsystem gesetzt wurde; $\mathbf{y}^*$ ist der Reihenvektor der zu dieser Einheitskraft als äußere Belastung gehörigen überzähligen Verbindungskräfte. Unserer Behauptung gemäß ist es gleichgültig, ob wir die Einheitslast entweder auf das Grundsystem oder auf den wirklichen Träger wirken lassen, dementsprechend ist

$$\delta = \int_{(s)} \frac{M\overline{M}}{JE}\, ds = \int_{(s)} \frac{M\overline{M}_0}{JE}\, ds \tag{5}$$

und in entwickelter Form:

$$\delta = \int_{(s)} (M_0 + \mathbf{x}^*\mathbf{m})\,(\overline{M}_0 + \mathbf{y}^*\mathbf{m})\,\frac{ds}{JE} = \int_{(s)} (M_0 + \mathbf{x}^*\mathbf{m})\,\overline{M}_0\,\frac{ds}{JE}\,. \tag{5'}$$

Führt man die erforderlichen Operationen und die möglichen Reduktionen durch, so erhält man

$$\int_{(s)} (M_0\,\mathbf{y}^*\mathbf{m} + \mathbf{x}^*\mathbf{m}\mathbf{y}^*\mathbf{m})\,\frac{ds}{JE} = \mathbf{o}. \tag{6}$$

Da $\mathbf{x}^*\mathbf{m}$ und $\mathbf{y}^*\mathbf{m}$ gleicherweise Skalargrößen sind, deren Folge versetzt werden kann, ferner $\mathbf{y}$ von s unabhängig ist, kann letzteres vom Integralzeichen herausgehoben werden; das zweite Glied des Klammerausdrucks kann auf Grund der Beziehung

$$\mathbf{m}\mathbf{x}^*\,\mathbf{m} = \mathbf{m}\mathbf{m}^*\,\mathbf{x}$$

umgeordnet, und auf die folgende Form gebracht werden

$$\mathbf{y}^*\left[\int_{(s)} \mathbf{m}M_0\,\frac{ds}{JE} + \left(\int_{(s)} \mathbf{m}\mathbf{m}^*\,\frac{ds}{JE}\right)\mathbf{x}\right] = \mathbf{o}. \tag{7}$$

In diesem Produkt $\mathbf{y}^* \neq 0$, folglich muß nur das Skalarprodukt oder der in der eckigen Klammer befindliche Ausdruck gleich Null sein. Der Klammerausdruck ist aber nach (1) das zur äußeren Belastung gehörige Gleichungssystem der Formänderungen (dessen Reihen einzelweise gleich Null sind), somit wurde unser Hilfssatz auch formal nachgewiesen.

3.2. Formeller Nachweis der Benutzung des statisch unbestimmten Trägers

Betrachten wir nun ein $n + m$-fach statisch unbestimmtes Tragwerk. Wählen wir das Grundsystem für n-fach unbestimmt und schreiben wir auf für dieses statisch unbestimmte Grundsystem das zur Ermittlung der m über-

zähligen Verbindungskräfte dienende Gleichungssystem. Die Ermittlung der im n-fach unbestimmten Grundsystem durch die äußere Belastung hervorgerufenen inneren Kräfte ist nun offensichtlich eine gesonderte Aufgabe, und die Größen dieser Kräfte können mittels der Gleichung

$$\overline{M}_0 = M_0 + \mathbf{z}^* \mathbf{m}_1 \tag{8}$$

berechnet werden.

Hier ist M_0 die aus der äußeren Belastung im statisch bestimmten Grundsystem entstehende Kraft, $\mathbf{z}$ ist der Spaltenvektor der zur Behebung der n überzähligen Verbindungen erforderlichen unbekannten Kräfte; $\mathbf{m}_1$ ist der Spaltenvektor der inneren Kräfte, welche durch die Einheitskräftepaare, die an den n Verbindungsstellen wirken, verursacht wurden.

(Mit dem oberen Querstrich bezeichnen wir die inneren Kräfte des statisch *unbestimmten* Grundsystems.)

Ähnlicherweise können auch die infolge der in den gedachten Schnitten $n+1, n+2, \ldots, n+m$ wirkenden Einheitskräftepaare entstehenden Beanspruchungen ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 &= M'_{n+1} + \mathbf{y}_1^* \mathbf{m}_1 , \\ \overline{M}_2 &= M'_{n+2} + \mathbf{y}_2^* \mathbf{m}_1 , \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \overline{M}_m &= M'_{n+m} + \mathbf{y}_m^* \mathbf{m}_1 , \end{aligned} \tag{9}$$

oder kurz in einer Vektorgleichung zusammengefaßt:

$$\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_2 + \mathbf{Y}^* \mathbf{m}_1 . \tag{9'}$$

Hier ist $\mathbf{m}_2$ der Spaltenvektor der Beanspruchungen, welche durch die in den $n+1, n+2, \ldots, n+m$-ten Schnitten des statischen vollständig bestimmten Grundsystems wirkenden Einheitskräftepaare hervorgerufen werden; $\mathbf{Y}$ ist das zum Abschluß der ersten n Schnitte erforderliche unbekannte Kraftsystem hervorgerufen durch die an den Schnittstellen $n+1, n+2, \ldots, n+m$ wirkenden Kräftepaare.

Die Matrix $\mathbf{Y}$ enthält also m Spalten und n Zeilen

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \ldots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \ldots & Y_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & Y_{n3} & \ldots & Y_{nm} \end{bmatrix} .$$

Das Element Y_{ik} der Matrix ergibt die im i-ten Schnitt unter der Wirkung des im $n+k$-ten Schnitt angreifenden Einheitskräftepaares — als äußere Belastung — entstehende Verbindungskraft.

Zur Ermittlung der an den $n+1, n+2, \ldots, n+m$-ten überzähligen Schnittstellen entstehenden inneren Kräfte müssen wir aufschreiben, daß die relativen Formänderungen an denselben Schnittstellen gleich Null sind. In kurzer Form:

$$\Delta \mathbf{x}_2 + \delta = \mathbf{o}. \tag{10}$$

In Gleichung (10) ist die Größe Δ die Matrix der zum statisch unbestimmten Grundsystem gehörigen Einheitsvektoren und δ der Spaltenvektor der Belastungskoeffizienten. Benutzt man die Beziehungen (8) und (9), so kann man die Werte von Δ und δ mit Hilfe der Einheitskräftepaare und der äußeren Belastung ermitteln. Bei der Bestimmung der Formänderung benutzt man den im vorhergehenden nachgewiesenen Hilfssatz; d.h. man berechnet die Formänderung des statisch unbestimmten Trägers mittels der auf das Grundsystem angewendeten Einheitskräfte; somit erhält man:

$$\Delta = \int_{(s)} \overline{\mathbf{m}}\,\overline{\mathbf{m}}^* \frac{ds}{JE} = \int_{(s)} (\mathbf{m}_2 + \mathbf{Y}^* \mathbf{m}_1)\, \mathbf{m}_2^* \frac{ds}{JE} = \mathbf{D}_{22} + \mathbf{Y}^* \mathbf{D}_{12},$$

$$\delta = \int_{(s)} \overline{\mathbf{m}}\,\overline{M}_0 \frac{ds}{JE} = \int_{(s)} \mathbf{m}_2 (M_0 + \mathbf{z}^* \mathbf{m}_1) \frac{ds}{JE} = \mathbf{d}_2 + \mathbf{D}_{21}\, \mathbf{z}.$$

Mit Rücksicht darauf, daß $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{z}$ die überzähligen Verbindungskräfte des n-fach unbestimmten Grundsystems bedeuten, können sie aus der für den n-fach unbestimmten Träger geltenden Gleichung wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{z} = -\mathbf{D}_{11}^{-1}\, \mathbf{d}_1,$$

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{D}_{11}^{-1}\, \mathbf{D}_{12},$$

wo

$$\mathbf{D}_{11} = \int_{(s)} \mathbf{m}_1\, \mathbf{m}_1^* \frac{ds}{JE},$$

$$\mathbf{D}_{12} = \int_{(s)} \mathbf{m}_1\, \mathbf{m}_2^* \frac{ds}{JE},$$

$$\mathbf{d}_1 = \int_{(s)} \mathbf{m}_1\, M_0 \frac{ds}{JE}$$

sind.

Setzt man diese Werte in Gleichung (10) zurück, und beachtet man, daß

$$(\mathbf{D}_{11}^{-1}\, \mathbf{D}_{12})^* = \mathbf{D}_{21}\, \mathbf{D}_{11}^{-1},$$

so erhält man die Beziehung:

$$(\mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21}\, \mathbf{D}_{11}^{-1}\, \mathbf{D}_{12})\, \mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_2 - \mathbf{D}_{21}\, \mathbf{D}_{11}^{-1}\, \mathbf{d}_1 = \mathbf{o}. \tag{11}$$

Gleichung (11) stimmt aber mit der allgemeinen (das statisch bestimmte Grundsystem betreffenden) Lösung der $n + m$-fach unbestimmten Aufgabe vollständig überein, wenn man dieselbe anstelle der kurzen Form $\mathbf{Dx} + \mathbf{d} = 0$ in der folgenden partitionierten Gestalt anschreibt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_1 &= \mathbf{o} \\ \mathbf{D}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_{21}\mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_2 &= \mathbf{o}. \end{aligned} \tag{12}$$

Aus Gleichung (12) ergibt sich nämlich für $\mathbf{x}_2$ mit dem Ausdruck von $\mathbf{x}_1$ auch die Gleichung (11). Damit bewiesen wir auch formal, daß die Benutzung des statisch unbestimmten Grundsystems gerechtfertigt ist, da die endgültigen inneren Kräfte sich für ebenso groß ergeben wie bei dem statisch bestimmten Grundsystem; und dazu können wir aus der genauen Übereinstimmung der Ableitung auch feststellen, daß die zweierlei Verfahren dem Wesen nach sich voneinander nicht unterscheiden, endlich und schließlich lösen beide Verfahren die Gleichung $\mathbf{Dx} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ auf.

Die Benutzung des statisch unbestimmten Grundsystems kann auch als eine eigenartige lineare Transformation aufgefaßt werden. Während des Transformationsprozesses werden die ersten n Unbekannten durch neue Veränderliche ersetzt, die $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + m$-ten Unbekannten bleiben unverändert.

$$\left.\begin{aligned} &X_i = Z_i + X_{n+1} Y_{i1} + X_{n+2} Y_{i2} + \ldots + X_{n+m} Y_{im}, \\ &\text{wenn} \quad i \leqq n \\ &\text{und} \\ &X_i \equiv X_i, \\ &\text{wenn} \quad i > n. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Somit können die ersten n Gleichungen des ursprünglichen Gleichungssystems der Formänderung in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \delta_{ki} + \delta_{k0}\right)}_{A_0} + X_{n+1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{i1} \delta_{ki} + \delta_{k,n+1}\right)}_{A_1} + \ldots + X_{n+m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{im} \delta_{ki} + \delta_{k,n+m}\right)}_{A_m}, \tag{14}$$

worin $k = 1, 2, \ldots, m$ ist.

Wählen wir die Werte von Z_i, Y_{i1}; Y_{i2}, ..., Y_{im} so, daß die Bedingungen $A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_m = 0$ erfüllt werden. Es ist unmittelbar ersicht-

lich, daß die Auflösung der Gleichungssysteme $A_0 = A_1 = A_2 = \ldots A_m = 0$ die in der Folge durch die äußere Belastung und durch die an den Schnittstellen $n+1, n+2, \ldots, n+m$ wirkenden Kräftepaare hervorgerufenen unbekannten Verbindungskräfte des n-fach unbestimmten Grundsystems angibt. Selbstverständlich muß man zur Auflösung der einzelnen Gleichungssysteme die Matrix $[\delta_{ik}]$ nur einmal invertieren.

Die $n+1$, $n+2$, ..., $n+m$-ten Gleichungen des vollständigen Gleichungssystems, da $\mathbf{z}^*$ und $\mathbf{Y}$ schon bekannt sind, werden die Unbekannten X_{n+1}, X_{n+2}, ..., X_{n+m} nur einmal enthalten:

$$X_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{i1}\,\delta_{ki} + \delta_{k,n+1}\right) + X_{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{i2}\,\delta_{ki} + \delta_{k,n+2}\right) + \cdots +$$

$$+ X_{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{im}\delta_{ki} + \delta_{k,n+m}\right) + \sum_{i=1}^{n} Z_i\,\delta_{ki} + \delta_{k0} = 0\,, \qquad (15)$$

worin $k = n+1, n+2, \ldots, n+m$ ist.

Aus dem Gleichungssystem (15) können die Werte von X_{n+1}, X_{n+2}, ..., X_{n+m} ermittelt, und mittels der Lineartransformationsabhängigkeit (13) die endgültige Auflösung des vollständigen Gleichungssystems hergestellt werden.

Mit dem im vorangehenden geschilderten Gedankengang haben wir auch ein Rekursionsverfahren zur Lösung der linearen Gleichungssysteme entwickelt, indem wir die Auflösung des $n+m$ Unbekannte enthaltenden Gleichungssystems in eine iterative Auflösung von einem n Unbekannte enthaltenden, und in die einmalige Auflösung von einem m Unbekannte enthaltenden Gleichungssystems getrennt haben. Es versteht sich von selbst, daß die weniger Unbekannte enthaltenden Gleichungssysteme mittels des obigen Rekursionsverfahrens weiter getrennt werden können.

3.3. Anschluß von statisch unbestimmten Tragsystemen, Verallgemeinerung der statisch unbestimmten Grundsysteme

Die für die statisch unbestimmten Grundsysteme abgeleiteten Beziehungen und deren Auffassung als Lineartransformation werden wir zur unbestimmten Verbindung der statisch unbestimmten Tragsysteme anwenden. Bei der einfachsten Verbindung werden zwei Systeme durch Verbindungsglieder angeschlossen. Das Gleichungssystem, welches die überzähligen Verbindungskräfte des so angeschlossenen Systems ergibt, kann immer auch in partitionierter Form angeschrieben werden:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{a} = \mathbf{o} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

In diesem Gleichungssystem bezeichnen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_3$ die unbekannten inneren Eigenkräfte der Systeme I und III, und $\mathbf{x}_2$ ergibt die unbekannten inneren Kräfte des die beiden Systeme zusammenbindenden Verbindungsgliedes. Nehmen wir an, daß der Kräfteverlauf der Systeme I und III unmittelbar ermittelt werden kann. In dieser Untersuchung muß das Verbindungsglied II als statisch bestimmtes System betrachtet werden, d. h., es muß im statisch bestimmten Zustand beibehalten werden. Die inneren Eigenkräfte der Systeme I und III werden durch die folgenden Gleichungen angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{z}_1 + \mathbf{a}_1 &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{A}_{33}\,\mathbf{z}_3 + \mathbf{a}_3 &= \mathbf{o}. \end{aligned} \tag{17}$$

In diesem Falle wird die Konstruktion selbstverständlich an den im Verbindungsglied angenommenen, gedachten Schnittstellen im allgemeinen deformiert sein. Deshalb müssen die durch die in den Schnitten wirkenden gesonderten Einheitskräftepaare hervorgerufenen überzähligen Verbindungskräfte in den Systemen I und III ermittelt werden. Diese Kräfte können auf gleiche Weise wie Gleichung (17) aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{Y}_1 + \mathbf{A}_{12} &= \mathbf{o}\,, \\ \mathbf{A}_{33}\,\mathbf{Y}_3 + \mathbf{A}_{32} &= \mathbf{o}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Jetzt wenden wir die durch die Abhängigkeit (13) angegebene Lineartransformation in bezug auf die x Unbekannten an, d.h., wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{z}_1 + \mathbf{Y}_1\,\mathbf{x}_2\,, \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_2\,, \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{z}_3 + \mathbf{Y}_3\,\mathbf{x}_2\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Da wir die Werte von $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_3$ und $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_3$ aus den einfacheren Gleichungen (17) und (18) schon gefunden haben, kann der Wert von $\mathbf{x}_2$ aus Gleichung (16) gesondert ermittelt werden:

$$(\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{Y}_1 + \mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{23}\,\mathbf{Y}_3)\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{z}_1 + \mathbf{A}_{23}\,\mathbf{z}_3 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{o}\,. \tag{20}$$

Setzt man die Werte von z und Y ein, so erhält man für $\mathbf{x}_2$ denselben Ausdruck, welchen wir durch die formale Auflösung des durch die Partition der Matrizengleichung (16) aufschreibbaren Matrizengleichungssystems erhalten:

$$\mathbf{x}_2 = (-\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{23}\,\mathbf{A}_{33}^{-1}\,\mathbf{A}_{32})^{-1}\,(\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{a}_1 + \mathbf{A}_{23}\,\mathbf{A}_{33}^{-1}\,\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)\,.$$

Die vollständige Auflösung der Aufgabe kann mittels der Beziehung (19) gefunden werden, welche die Ermittlung der gesamten überzähligen Verbindungskräfte des ganzen Tragsystems ermöglicht.

Das Verfahren kann offenbar auch auf die Ermittlung der aus der statisch unbestimmten Verbindung von mehreren Tragsystemen herrührenden inneren Kräfte erstreckt werden; während des Lösungsprozesses ist es zweckmäßig, die Untersuchung der einzelnen voneinander unabhängigen Tragsysteme

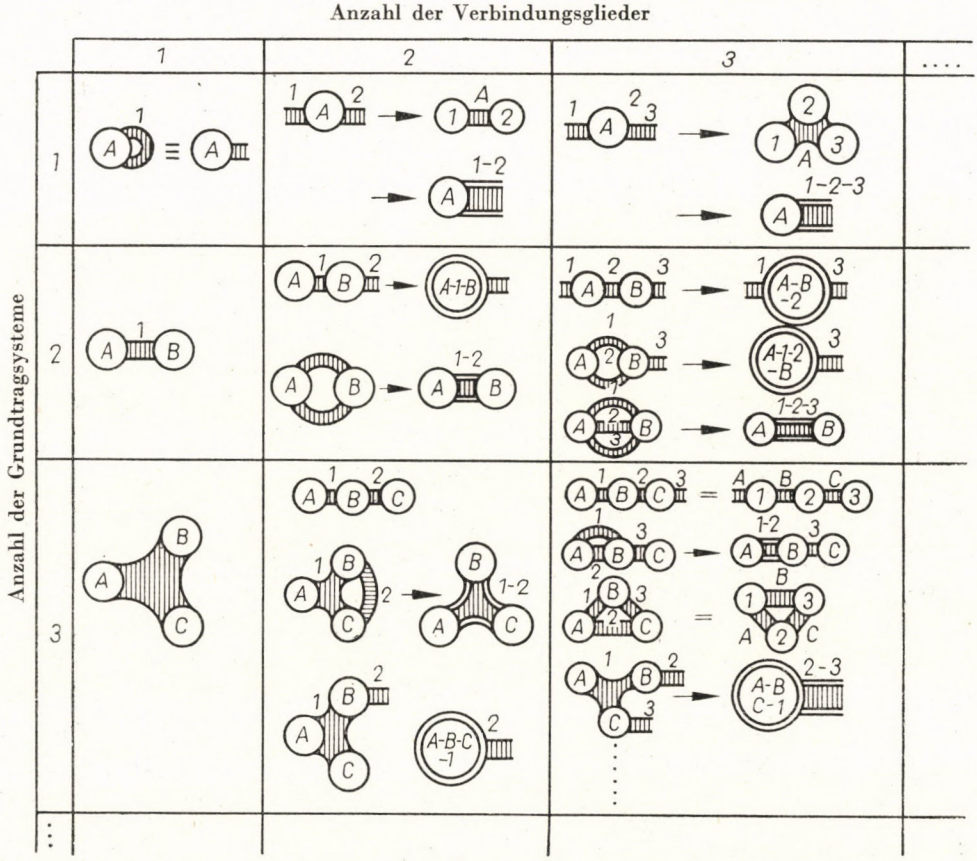


Bild 2. Verbindung von statisch unbestimmten Tragsystemen und Zurückführung der verwickelteren Verbindung auf einen einfacheren Fall

und die nachträgliche Verbindung mittels der im vorangehenden angeführten formalen algebraischen Matrizenoperationen in Betracht zu ziehen.

Zahlreiche Formen der Verbindung, d. h. des Anschlusses der voneinander unabhängigen Tragsysteme können in der Praxis vorkommen.

In den einfachsten Fällen ist die Anzahl der Verbindungsglieder eins, und die Anzahl der unabhängigen Systeme 1, 2, 3, . . . (Bild 2). Solch ein Fall wurde mittels Gleichungen (12) und (16) behandelt, wo die Anzahl der unabhängigen Systeme 1 bzw. 2 und die Anzahl der Verbindungsglieder eins

war. Die parallele Verbindung der Verbindungsglieder bildet prinzipiell im allgemeinen keine neue Aufgabe, und zwei parallele Verbindungen können immer durch ein einziges Verbindungsglied von höherem Unbestimmtheitsgrad ersetzt werden.

Sind die Verbindungsglieder und die Grundtragsysteme in einer Reihe aneinander angeschlossen, so ist es zweckmäßig, uns den Umstand zunutze zu machen, daß das Gleichungssystem, welches die überzähligen Verbindungskräfte der Verbindungsglieder determiniert, auch selbst in der Gestalt einer Bandmatrix aufgebaut ist; deshalb ist es zweckmäßig, die Rekursion wiederholt anzuwenden.

Die Verbindungsgleichung von einigen solchen Systemen kann immer in der Form eines Matrizengleichungssystems wie Gleichung (12) aufgeschrieben werden, worin wir die angeschlossenen Tragsysteme einzelweise behandeln können, und die Wirkung des Verbindungstragsystems (oder der Verbindungstragsysteme) nachträglich mittels einer besonderen Berechnung in Rücksicht ziehen können. Im besonderen Fall, wo das Verbindungstragsystem in sich selbst statisch bestimmt ist, fällt die nachträgliche Betrachtung weg, die individuelle Lösung der vereinzelten Tragsysteme ergibt immer unmittelbar das endgültige Ergebnis. Die grundlegende Eigenartigkeit dieser Berechnungen ist, daß die einzelnen Tragsysteme ohne das Verbindungsglied (oder die Verbindungsglieder) aus dem Gesichtspunkt von ihren eigenen Verbindungskräften unabhängig sind und infolgedessen ein vollständig zerfallendes Matrizengleichungssystem bilden. Die Berücksichtigung des Verbindungsgliedes bzw. der Verbindungsglieder behebt selbstverständlich den vollständig zerfallenden Charakter.

Diese Lösungsmethode hat eine besondere Bedeutung, wenn es uns gelingt, das verwickelte Tragsystem in solche, voneinander unabhängigen Tragsysteme zu zerlegen, welche durch verhältnismäßig einfaches Verbindungsglied bzw. einfache Verbindungsglieder (von niedrigem Unbestimmtheitsgrad) verbunden sind.

3.4. Praktische Auswirkungen der Verbindung von statisch unbestimmten Tragsystemen

Wir müssen bemerken, daß es zwischen den Grundtragsystemen und Verbindungsgliedern keinen prinzipiellen Unterschied gibt (der Unterschied zwischen dem Grundtragsystem und den Verbindungsgliedern verschwindet besonders beim Sternanschluß, in solchen Fällen ist es angebracht, in den endgültigen Berechnungen das für das Grundtragsystem gewählte Mittelglied als Verbindungsglied zu betrachten), jedoch, aus rechnungstechnischem Gesichtspunkt, weichen sie voneinander wesentlich ab. Die Veränderung der Steifigkeitsangaben der Grundtragsysteme macht das ganze Rechnungsergeb-

nis unbrauchbar, die Rechnungen müssen mit den neuen Steifigkeitszahlen voll und ganz von vorn begonnen werden. Die Veränderung der Steifigkeiten der Verbindungsglieder läßt die auf das Grundtragsystem bezüglichen Berechnungen unverändert (**Y** uns **z** sind unverändert), nur die inneren Kräfte des Verbindungsgliedes (der Verbindungsglieder) ändern sich, man muß also das ganze System nicht nochmals von vorn rechnen. Im Besitze der neuen Resultate erhält man die endgültige Kraftverteilung des Tragsystems (bzw. die überzähligen Verbindungskräfte) mittels der Abhängigkeit (19) oder mittels einer, derselben ähnlichen Lineartransformation.

Wir können uns dieses Resultat zur Umrechnung der statisch unbestimmten Träger zunutze machen, z. B. im Falle, wenn sich während des Bemessungsprozesses herausstellt, daß die angenommenen Bemessungen infolge der Über- bzw. Unterdimensionierung nicht entsprechen. Betrachten wir unser Originaltragsystem als Grundtragsystem und binden wir mit den entsprechend ausgewählten Tragelementen einige Ergänzungselemente parallel in der Konstruktion ein. Die Ergänzungselemente können als Verbindungsglieder betrachtet werden, jedoch mit solch einem speziellen Aufbau, daß sich dieselben mit den beiden Enden dem Tragsystem anschließen. Im Falle von Überbemessung besitzen die Verbindungsglieder eine negative Steifigkeit, die für die übliche mechanische Anschauung sehr ungewohnt ist, jedoch bis zu einem Absolutwert der nicht größer wie bei den Elementen des Grundsystems ist, einen reellen physikalischen Inhalt besitzt; die Steifigkeiten des Verbindungsgliedes und des Originalelements häufen sich nämlich an, ein gleicher Absolutwert entspricht also dem Fall, daß wir aus dem Tragsystem ein Element ausschalten.

Durch Veränderung der Steifigkeit des Verbindungsgliedes können wir den für unseren Zweck geeignetsten Steifigkeitswert ermitteln, damit können wir die Unter- bzw. Überdimensionierung der Konstruktion beheben, ohne das Grundtragsystem nochmals bemessen zu müssen.

Das Verfahren kann bei quasisymmetrischen Konstruktionen auch zur Wiederherstellung der Symmetrie angewendet und damit die Störung der Symmetrie auf die Untersuchung der äußeren Belastung zurückgeführt werden [5].

Ein Anschluß zwischen den Verbindungsgliedern und der Konstruktion, bei welchem wir die Mitwirkung des Grundtragsystems und des Verbindungsgliedes nicht nur im Anschlußpunkt, sondern in der ganzen Ausdehnung des Trägers erfordern, ist ein spezielles Problem. In den meisten Fällen kann auch dies auf die Verbindung von einigen Punkten zurückgeführt werden, jedoch, besonders wenn das untersuchte Tragelement auch eine eigene Belastung hat (und folgenderweise das Verbindungsglied auch an dieser teilnehmen muß), muß die Aneinanderfügung auf der ganzen Ausdehnung des behandelten Trägers und Verbindungsgliedes streng gesichert werden. In diesen Fällen müssen wir den Kräfteverlauf des Grundtragsystems wiederholt vom neuen berech-

nen, da sich die äußere Belastung — infolge der Mitwirkung des Grundtragsystems und des Verbindungsgliedes — ändert. Die inverse Koeffizientenmatrix des Verbindungsgliedes kann selbstverständlich infolge der Unveränderlichkeit des Grundtragsystems zu dieser Berechnung wiederholt angewendet werden.

Die Wirkung der Eigenbelastung ist aber in meisten Fällen zu vernachlässigen. (Z. B. die Annahme von in den Knotenpunkten belasteten Trägerrosten oder in den Gelenken belasteten Fachwerken.)

SCHRIFTTUM

1. Erz, K.: Über die durch Unebenheiten der Fahrbahn hervorgerufene Verdrehung von Straßenfahrzeugen. *ATZ.* **59** (1957), 89—96, 163—170, 345—347.
2. Ponomarjov, Sz. D.: Szilárdsági számítások a gépészetben, II kötet (Festigkeitsberechnungen im Maschinenbau, Band 2). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964.
3. Sályi, B.—Michelberger, P.: Sík elrendezésű zárt keretek általános térbeli terhelésének vizsgálata (Untersuchung der allgemeinen räumlichen Belastung von geschlossenen ebenen Rahmenwerken). MTA *VI. Oszt. Közl.* (Mitteilungen der Ung. Akademie der Wissenschaften, Abt. VI). Im Druck.
4. Argyris, J. H.—Kelsey, S.: Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworths, London—Toronto—Sydney—Wellington—Durban 1960.
5. Michelberger, P.: Verallgemeinerung der Perturbationsmethode und ihre Anwendung auf quasisymmetrische Konstruktionen. *Periodica Polytechnica* **6** (1962), No. 1.

Some Problems of the Calculation of Statically Indeterminate Structures of Vehicles by the Aid of the Energy Theorem. The matrix energy theorem completed by the linear transformation of primary systems and by generalizing the statically indeterminate primary systems, can considerably simplify the design calculation of vehicle structures. Calculation of irregular and complex structures may be attributed to the analysis of easily treatable, independent, regular elementary structures. Irregularity and complexity might be equally interpreted to be particular disturbing loads.

Quelques problèmes du calcul statique des structures et caisses de véhicules par la méthode de forces. La méthode de forces matricielle, complétée par la transformation linéaire des systèmes de base et la généralisation des systèmes de base hyperstatiques, peut simplifier considérablement le calcul des structures des véhicules. Le calcul des structures irrégulières et complexes peut être ramené à l'analyse de structures élémentaires, indépendantes et régulières, faciles à traiter. L'irrégularité et la complexité peuvent être interprétées comme des charges perturbatrices régulières.

Вопросы статического расчета шасси и кузова транспортных средств. *(П. Михельбергер).* Матричный метод усилий при дополнении его линейной трансформацией главных балок и обобщением статически неопределенных главных балок в значительной мере упрощает расчет конструкций транспортных средств. Расчет неправильных сложных конструкций можно свести к исследованию легко анализируемых независимых правильных элементарных конструкций. Неправильность конструкции и ее сложность можно трактовать в качествехарактерных мешающих нагрузок.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 159—176 (1968)

STABILITÉ LATÉRALE DES VOILES EN ARC A TIRANTS

L. KOLLÁR

DOCTEUR DES SCIENCES TECHNIQUES
BUVÁTI, INSTITUT D'URBANISME ET D'ARCHITECTURE DE LA MUNICIPALITÉ DE BUDAPEST

Z. GÁRDONYI

BUREAU D'ÉTUDES DE CONSTRUCTIONS POUR LES COMMUNICATIONS ET LES TRANSPORTS, BUDAPEST

[Manuscrit reçu le 23 novembre 1967]

L'étude offre l'examen de la stabilité latérale de voiles en arc à un ou deux tirants aux extrémités libres ou raidies par des diaphragmes, pour les cas de charges radiales uniformément réparties et de charges antimétriques, en utilisant la méthode de l'énergie de déformation. Après examen du choix opportun de la série de la fonction de déformation, l'étude se termine par un exemple numérique se rapportant à des voiles en arc aux extrémités libres, munis d'un ou de deux tirants.

1. Introduction

Nous avons déjà consacré plusieurs études aux problèmes de stabilité latérale des voiles en arc [1], [2], mais les modes d'appui considérés ont chaque fois supposé la suppression de toute rotation en torsion des sections extrêmes.

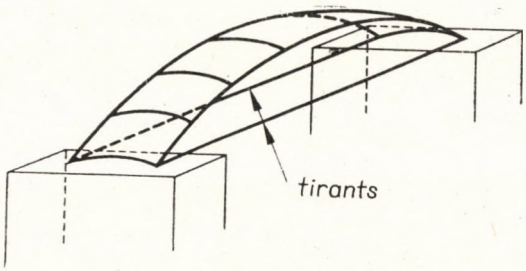


Fig. 1

Il existe cependant, dans la pratique, de nombreux cas d'appuis où les sections extrêmes peuvent — sous certaines conditions — effectuer une rotation en torsion. C'est par exemple le cas esquissé sur la figure 1, où le voile en arc repose sur un plan horizontal. Si on néglige le frottement, les sections extrêmes peuvent tourner librement dans le plan horizontal, leur rotation n'étant gênée que par les deux tirants.

Le voile en arc appuyé selon la figure 2 représente un cas analogue. La colonne à parois minces a une rigidité de torsion tellement faible qu'elle peut être négligée, de sorte que du point de vue statique, ce mode d'appui est

identique à celui de la figure 1, à cette différence près que sur la figure 2 l'arc n'a été muni que d'un tirant, fait indépendant du mode d'appui.

Par la suite, on traitera des problèmes de stabilité latérale des voiles en arc appuyés selon les figures 1 et 2, en cas de 1 et de 2 tirants.

Les deux sortes de structures ont été déjà réalisées: celle à deux tirants en Hongrie (voir dans [3]: les toitures de la Fabrique de Colle d'Ujpest) et celle à un tirant à Manchester (voir dans [3] et [4]: le hall de l'Usine d'éléments préfabriqués en Angleterre).

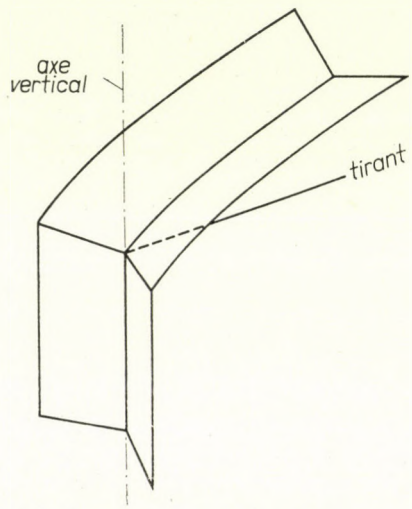


Fig. 2

2. Notations, hypothèses et équations fondamentales

Une partie des *notations* que nous allons utiliser sont visibles sur la figure 3. Le reste des notations employées sera défini dans le texte.

On suppose que

a) le *matériau* de l'arc est parfaitement élastique;

b) son *axe longitudinal* est de forme circulaire;

c) sa *section* est constante;

d) la *hauteur* de la section est faible par rapport au rayon de courbure de l'axe de l'arc:

$$d \ll R, \text{ donc}$$

$$R_S \approx R_T \approx R \tag{1}$$

e) la *rigidité de flexion latérale* est infiniment grande par rapport à la rigidité de torsion;

f) l'arc peut être considéré, *dans son plan*, comme ayant deux articulations (figure 5).

Les arcs à tirants seront examinés pour les *charges* suivantes:

A) charge radiale *uniformément répartie q* n'engendrant qu'une compression $N_q = qR$ (figure 4);

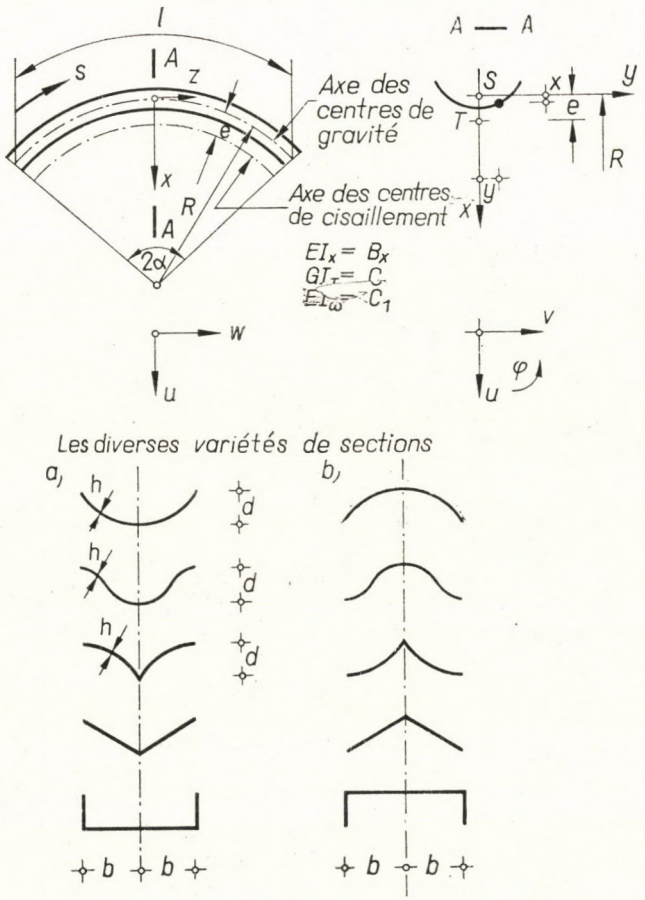


Fig. 3

B) charge *antimétrique* $p = p_2 \sin 2\pi s/l$. Selon la condition *f)* ci-dessus, celle-ci engendrera les efforts esquissés sur la figure 5.

A la base de la *méthode de l'énergie,* nous avons déduit pour ces charges les *équations fondamentales* suivantes pour le travail intérieur et extérieur [1], [2].

Le travail intérieur:

$$L_i = \frac{C}{2}\int_0^l \vartheta_T'^2\, ds + \frac{C_1}{2}\int_0^l \left(\frac{d\vartheta_T}{ds}\right)^2 ds \qquad (2)$$

où

$$\vartheta_T = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R}\,\frac{dv_T}{ds} \tag{3}$$

angle de torsion spécifique de l'axe des centres de cisaillement

φ rotation des sections autour de leur centre de cisaillement T
v_T déplacement latéral des centres de cisaillement T.

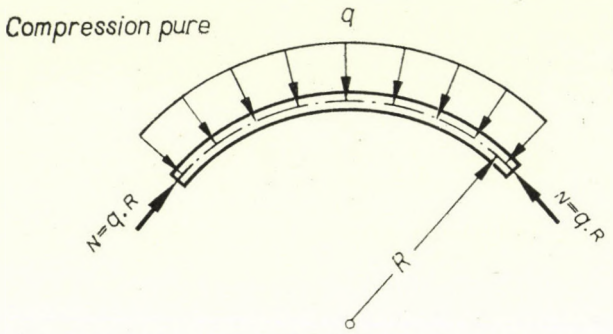


Fig. 4

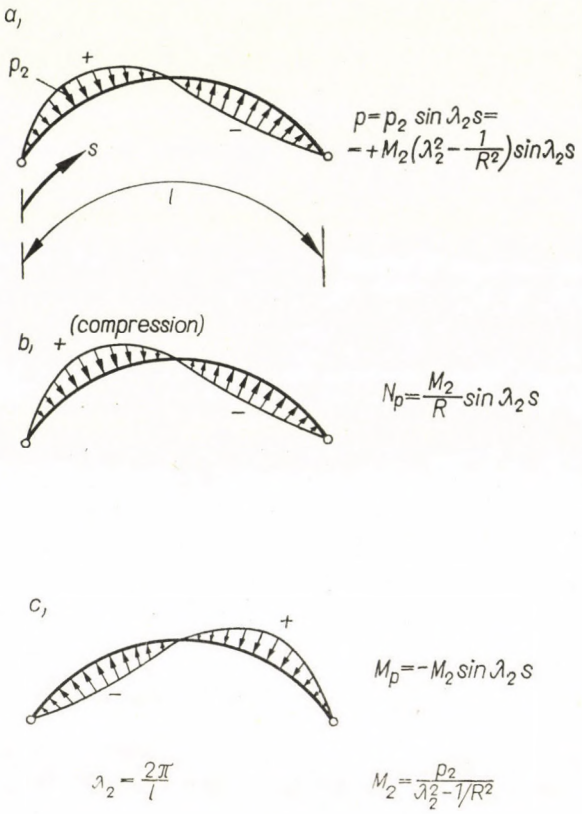


Fig. 5

En vertu de la condition *e)* ($B_x = \infty$), v_T peut être exprimé par φ, du fait que la courbure latérale ($\varkappa_{Tx}$) est nulle:

$$\varkappa_{T_x} = \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0\,, \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$v_T = \frac{1}{R}\iint \varphi\, ds\, ds + K_1 \cdot s + K_2 \tag{5}$$

(K_1 et K_2 étant des constantes d'intégration.)

Le *travail extérieur* s'exprimera, en cas de charge extérieure *uniforme* correspondant à la figure 4, par la formule:

$$L_e(q) = qR\left\{\left(\frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{R^2}\right)\int_0^l \varphi^2\, ds + \frac{1}{2}(i_x^2 + i_y^2 + e^2)\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dv_T}{ds}\right)^2 ds - e\int_0^l \frac{d\varphi}{ds}\,\frac{dv_T}{ds}\, ds\right\} \tag{6}$$

où

t — hauteur du point d'application de la charge q au-dessus du centre de cisaillement
i_x, i_y — rayons d'inertie de la section.

Enfin le travail extérieur de la charge *antimétrique* représentée sur la figure 5 sera (tous les efforts étant exprimés par M_2):

$$L_e(p) = \frac{M_2}{R}\left\{\left[\frac{tR}{2}\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2 j_y}{dR}\right)\right]\int_0^l \sin\lambda_2 s \cdot \varphi^2\, ds + \right.$$
$$+ \frac{R}{2}\left(2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d}\right)\int_0^l \sin\lambda_2 s \cdot \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds - \tag{7}$$
$$\left. - R\int_0^l \sin\lambda_2 s \cdot \frac{d\varphi}{ds}\,\frac{dv_T}{ds}\, ds\right\}.$$

Les valeurs j_x et j_y qui y figurent sont des quantités calculables à partir des dimensions géométriques de l'arc (voir [1]).

Il n'y a, dans ces expressions du travail, qu'une seule déformation inconnue: la fonction de rotation φ. On doit donc choisir la fonction φ de sorte qu'elle satisfasse les conditions d'appui. En égalisant ensuite les expressions du travail intérieur et extérieur, on détermine l'intensité de charge critique ($N_q = qR$, resp. M_2).

3. Équations des conditions d'appui

3.1 Arc à deux tirants (figure 1)

Aux deux extrémités de l'arc (soit à $s = 0$ et $s = l$), les conditions suivantes devront être satisfaites (figure 6):

3.11. — Les extrémités de l'arc ne se déplacent pas latéralement

$$(v_T)_0 = 0\,, \tag{8a}$$

resp.

$$(v_T)_l = 0\,. \tag{8b}$$

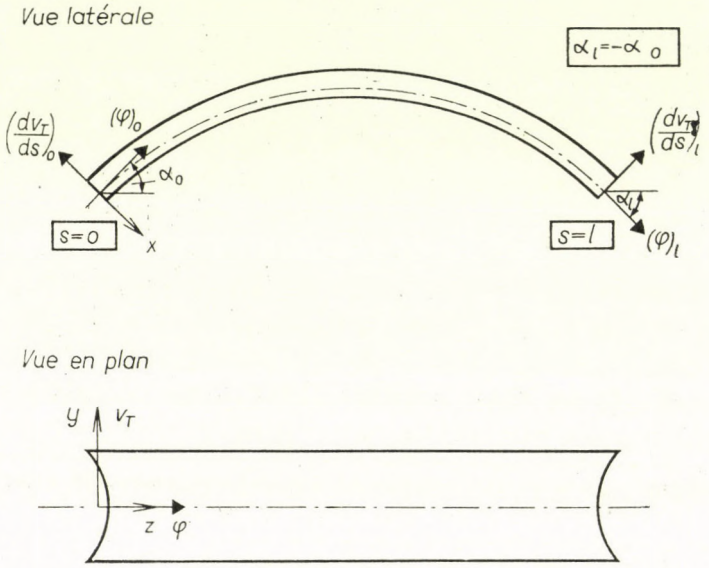


Fig. 6

3.12. — Les extrémités de l'arc peuvent gauchir librement:

$$\left(\frac{d\vartheta_T}{ds}\right)_0 = \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_0 + \frac{1}{R}\left(\frac{d^2 v_T}{ds^2}\right)_0 = 0\,, \tag{9a}$$

resp.

$$\left(\frac{d\vartheta_T}{ds}\right)_l = \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)_l + \frac{1}{R}\left(\frac{d^2 v_T}{ds^2}\right)_l = 0\,, \tag{9b}$$

ou — si elles sont raidies par des diaphragmes — leur gauchissement est impossible:

$$(\vartheta_T)_0 = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0 + \frac{1}{R}\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0 = 0\,, \tag{10a}$$

resp.

$$(\vartheta_T)_l = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_l + \frac{1}{R}\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l = 0\,. \tag{10b}$$

3.13. — Les deux sections extrêmes ne peuvent tourner que dans le plan horizontal, c'est-à-dire leur rotation dans le plan vertical est nulle:

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0 \cdot \sin\alpha_0 - (\varphi)_0 \cdot \cos\alpha_0 = 0\,, \tag{11a}$$

resp.

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l \cdot \sin\alpha_l - (\varphi)_l \cdot \cos\alpha_l = 0\,. \tag{11b}$$

3.14. — Enfin, à cause des deux tirants, les sections extrêmes ne peuvent tourner dans le plan horizontal que d'un angle identique:

$$\left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0 \cdot \cos\alpha_0 + (\varphi)_0 \cdot \sin\alpha_0 = \left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l \cdot \cos\alpha_l + (\varphi)_l \cdot \sin\alpha_l\,. \tag{12}$$

3.2 — Arc à un tirant (figure 2)

Les trois premières équations de conditions d'appui de l'arc à deux tirants: (8), (9) ou (10) et (11) demeurent valables, mais la dernière condition (12) n'intervient plus. A sa place, il faudrait exprimer que les sections extrêmes ne subissent pas l'action de moments extérieurs dans le plan horizontal. A l'extrémité $s = 0$, par exemple, cette condition s'écrit ainsi:

$$(M_x)_0 \cdot \cos\alpha_0 - (M_t)_0 \cdot \sin\alpha_0 = 0 \tag{13}$$

où

M_x est le moment fléchissant autour de l'axe x
M_t le moment de torsion.

Exprimons les moments par les rigidités et déformations correspondantes:

$$(B_x \cdot \varkappa_{Tx}) \cdot \cos\alpha_0 - \left(C \cdot \vartheta_T + C_1 \frac{d^2\vartheta_T}{ds^2}\right) \cdot \sin\alpha_0 = 0\,. \tag{14}$$

Étant donné que d'après nos suppositions $B_x = \infty$ et $\varkappa_{Tx} = 0$, le produit figurant dans la première parenthèse est de valeur indéterminée. Physiquement cela signifie qu'en cas de n'importe quel moment de torsion M_t engendré à l'extrémité de l'arc, M_x aura toujours une valeur juste suffisante pour satisfaire la condition (14): l'absence de tout moment extérieur dans le plan horizontal.

Cette quatrième équation de condition n'ayant donc plus de sens à cause de $B_x = \infty$ et $\varkappa_{Tx} = 0$, doit être omise. L'absence de tout moment dans le plan horizontal sera assurée si on réduit la charge au minimum selon les règles de la méthode de l'énergie, procédé qui nous donnera automatiquement un M_t correspondant à l'absence de contraintes.

4. Choix de la fonction de rotation

La forme générale de la fonction de rotation φ permettant de satisfaire n'importe quelle condition d'appui est la suivante:

$$\begin{aligned} \varphi = & \underbrace{\sum_i \varphi_i \cdot \sin \lambda_i s}_{\text{partie symétrique}} + \underbrace{\sum_p \Phi_p \sin \lambda_p s +}_{\text{partie antimétrique}} \\ & + \varphi_0 + \sum_p \varphi_p \cos \lambda_p s + \sum_i \Phi_i \cos \lambda_i s . \end{aligned} \tag{15}$$

où

φ_0 = constante
$i = 1, 3, 5, \ldots$ (impair)
$p = 2, 4, 6, \ldots$ (pair)

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{l} \quad (n = p, i) \tag{16}$$

Cette série contient la série Fourier complète du domaine de longueur l (les termes à indices $_0$ et $_p$), mais il y figure aussi des termes à indice $_i$, avec lesquels elle représente, en somme, la série Fourier complète d'un domaine de longueur $2l$. Si nous y avons ajouté ces derniers termes, c'est que la série Fourier du domaine de longueur l approcherait très mal l'onde mi-sinusoïdale par exemple (la forme de déversement de l'arc à deux articulations latérales), pour laquelle il suffit de prendre le premier des termes à indice $_i$ pour avoir une solution exacte.

Les termes de la série (15) ne sont naturellement pas tous orthogonaux, mais cela ne pose pas de difficultés de principe.

C'est pour plus de clarté que nous avons séparé les parties symétrique (φ_n) et antimétrique (Φ_n) de la série (15). En conservant cette séparation, écrivons à présent les autres quantités de déformation nécessaires.

D'après la relation (5):

$$\begin{aligned} R \frac{dv_T}{ds} = & \underbrace{- \sum_i \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \cos \lambda_i s +}_{\text{antimétrique}} \underbrace{- \sum_p \frac{\Phi_p}{\lambda_p} \cos \lambda_p s +}_{\text{symétrique}} \\ & + \left(- \frac{\varphi_0 l}{2} + \varphi_0 s \right) + \sum_p \frac{\varphi_p}{\lambda_p} \sin \lambda_p s + K_1 + \sum_i \frac{\Phi_i}{\lambda_i} \sin \lambda_i s , \end{aligned} \tag{17}$$

et

$$\begin{aligned} R \cdot v_T = & \underbrace{- \sum_i \frac{\varphi_i}{\lambda_i^2} \sin \lambda_i s +}_{\text{symétrique}} \underbrace{- \sum_p \frac{\Phi_p}{\lambda_p^2} \sin \lambda_p s +}_{\text{antimétrique}} \\ & + \left(K_2 - \frac{\varphi_0 l}{2} s + \varphi_0 \frac{s^2}{2} \right) + \left(- \frac{K_1 l}{2} + K_1 s \right) + \\ & - \sum_p \frac{\varphi_p}{\lambda_p^2} \cos \lambda_p s - \sum_i \frac{\Phi_i}{\lambda_i^2} \cos \lambda_i s . \end{aligned} \tag{18}$$

Dans l'expression (17), nous avons détaché de la constante d'intégration K_1 la partie $-\varphi_0 l/2$, et dans (18), de K_2 la partie $-K_1 l/2$, afin qu'elles donnent, ensemble avec les termes $\varphi_0 s$, resp. $K_1 s$, des fonctions antimétriques pures.

Les quantités de déformation dont nous avons encore besoin peuvent s'obtenir par différentiation de:

$$\begin{aligned} &\textit{antimétrique} && \textit{symétrique} \\ \frac{d\varphi}{ds} = &\sum_i \varphi_i \lambda_i \cos \lambda_i s - && + \sum_p \Phi_p \lambda_p \cos \lambda_p s - \\ &- \sum_p \varphi_p \lambda_p \sin \lambda_p s && - \sum_i \Phi_i \lambda_i \sin \lambda_i s \,, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\textit{symétrique} && \textit{antimétrique} \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} = &- \sum_i \varphi_i \lambda_i^2 \sin \lambda_i s - && - \sum_p \Phi_p \lambda_p^2 \sin \lambda_p s - \\ &- \sum_p \varphi_p \lambda_p^2 \cos \lambda_p s && - \sum_i \Phi_i \lambda_i^2 \cos \lambda_i s \,. \end{aligned} \tag{20}$$

La séparation des parties φ symétrique et antimétrique présente l'avantage de rendre évident qu'il suffit de satisfaire les conditions (8), (9) resp. (10), et (11) à l'une des extrémités de l'arc, la condition se trouvant par là même automatiquement satisfaite à l'autre extrémité.

On voit donc qu'en cas de satisfaction de la condition (8a), (8b) sera automatiquement satisfaite, qu'on ait choisi un φ symétrique ou antimétrique.

La situation est analogue pour la condition (9): si la condition (9a) est satisfaite, celle (9b) le sera également, du fait que les valeurs correspondantes

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v_T}{ds^2} = \frac{\varphi}{R}$$

(obtenues l'une de l'autre par intégration) sont à la fois symétriques ou à la fois antimétriques [cf. (15) et (20)]. La même considération est valable pour (10a—b).

Quant à (11a—b), on peut établir que, des deux quantités correspondantes dv_T/ds et φ, l'une est symétrique et l'autre antimétrique. Ainsi, si l'on satisfait (11a), (11b) subira un changement de signe. Mais celui-ci est compensé par le fait que $\sin \alpha_l = -\sin \alpha_0$, à cause de $\alpha_l = -\alpha_0$. Par conséquent, il suffira encore de satisfaire l'une seulement des deux conditions (11a—b).

Enfin la relation (12) se rapportant à l'arc à deux tirants est toujours satisfaite en cas d'un φ antimétrique, car alors

$$(\varphi)_l = -(\varphi)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dv_T}{ds}\right)_l = \left(\frac{dv_T}{ds}\right)_0$$

(cette dernière fonction étant symétrique), et $\alpha_l = -\alpha_0$. Mais en cas d'un φ *symétrique*, le côté gauche doit être égal à zéro (et du même coup le côté droit s'annule), ce qui correspond au cas d'encastrement latéral.

Les parties de déformation symétrique et antimétrique n'ont permis de satisfaire, chacune séparément, les conditions d'appui, que parce que celles-ci sont *homogènes*. Dans ce cas, si l'on désigne la quantité correspondante de la composante de déformation symétrique par A et celle de l'antimétrique par B, on obtient en effet des équations de forme

$$A + B = 0 \qquad \text{à} \qquad s = 0$$

et

$$A - B = 0 \qquad \text{à} \qquad s = l$$

qui ne peuvent être satisfaites que si $A = B = 0$, c'est-à-dire si les deux parties de déformation symétrique et antimétrique satisfont, *chacune séparément*, l'équation de condition à $s = 0$, mais ainsi la condition se trouve déjà automatiquement satisfaite aussi à $s = l$.

En cas d'équations de condition d'appui *inhomogènes*, il faudrait traiter ensemble les parties symétrique et antimétrique et satisfaire l'équation à $s = 0$ aussi bien qu'à $s = l$.

5. Applications de la méthode

Le mode d'application de la méthode exposée est présenté pour un voile en arc aux dimensions visibles sur la figure 7, comportant un ou deux tirants et soumis à une charge radiale uniforme (figure 4) ou antimétrique, répartie selon une loi sinusoïdale (figure 5). L'extrémité de l'arc est considérée chaque fois comme pouvant gauchir librement.

Notre but étant avant tout d'établir des comparaisons et d'offrir des résultats approchés, on se bornera à un nombre minime de paramètres libres: en cas de charge uniforme à 1 paramètre et en cas de charge antimétrique à 1 paramètre libre pour la composante de déformation symétrique et 1 autre paramètre pour celle antimétrique.

Nous voudrions aussi faire voir l'intérêt qu'il y a à choisir convenablement les termes à considérer dans la série (15) de la fonction de rotation φ, car on peut améliorer (ou affaiblir) ainsi notablement la convergence, c'est-à-dire il faudra considérer beaucoup moins (ou beaucoup plus) de termes pour arriver à l'exactitude nécessaire.

5.1. — Arc à deux tirants

5.11. — Charge radiale uniforme

En cas de deux tirants, la déformation *symétrique* correspond à celle produite en cas d'encastrement latéral. Nous avons déjà résolu ce problème dans [1] et obtenu comme résultat — avec un seul paramètre libre — $N_{cr} = 123{,}0$ Mp (voir ligne *a* du Tableau II).

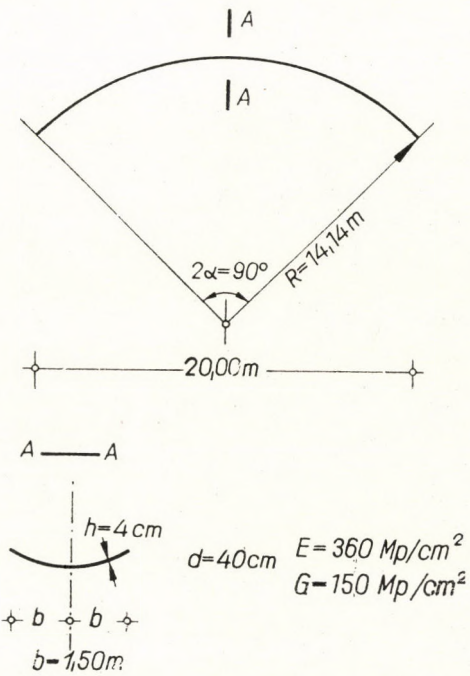


Fig. 7

Il nous faut examiner à présent la déformation *antimétrique*. En substituant la partie antimétrique de (15) dans les conditions d'appui (8a), (9a) et (11a), nous reçevons les trois équations suivantes:

$$-\frac{K_1 l}{2} - \sum_i \frac{\Phi_i}{\lambda_i^2} = 0\,, \tag{21}$$

$$-\sum_i \Phi_i \lambda_i^2 + \frac{1}{R^2} \sum_i \Phi_i = 0\,, \tag{22}$$

$$\frac{1}{R}\left(-\sum_p \frac{\Phi_p}{\lambda_p} + K_1\right) \sin \alpha_0 - \left(\sum_i \Phi_i\right) \cdot \cos \alpha_0 = 0\,. \tag{23}$$

Comme nous l'avons déjà dit, la condition d'appui se trouve automatiquement satisfaite.

Pour n'avoir qu'un paramètre libre au cours du calcul, il nous faut adopter, pour φ, une expression contenant *quatre* paramètres. En choisissant les termes, il faut prendre garde à ce qu'ils n'introduisent pas de contraintes supérieures aux conditions d'appui réelles. Nous adopterons donc deux combinaisons contenant les termes suivants:

a) 0 terme des Φ_p
3 termes des Φ_i
K_1 [voir (17)—(18)],

et

b) 1 terme des Φ_p
2 termes des Φ_i
K_1.

En substituant ces expressions de φ dans les expressions de travail (2) et (6) et en égalisant le travail extérieur et intérieur, on obtient les forces de compression critiques figurant dans les lignes *a)* et *b)* du Tableau I.

5.12. — Charge antimétrique

On sait de [2] que pour cette charge, il nous faut adopter une fonction de déformation contenant en même temps une partie symétrique et une autre antimétrique, autrement le travail extérieur sera nul. Nous choisirons donc de la série (15) de φ un nombre de termes tel qu'après la satisfaction des conditions d'appui, les deux parties de déformation symétrique et antimétrique aient chacune un paramètre libre.

Au paragraphe 5.11., nous avons déjà substitué la déformation antimétrique dans les équations de condition d'appui (8a), (9a) et (11a) (voir formules [21)—(23)]. Il n'y a donc que la partie *symétrique* à substituer dans les trois équations ci-dessus et dans (12). On reçoit alors les quatre équations suivantes:

$$K_2 - \sum_p \frac{\varphi_p}{\lambda_p^2} = 0\,, \tag{24}$$

$$-\sum_p \varphi_p \lambda_p^2 + \frac{1}{R^2}\left(\varphi_0 + \sum_p \varphi_p\right) = 0\,, \tag{25}$$

$$\frac{1}{R}\left(-\sum_i \frac{\varphi_i}{\lambda_i} - \frac{\varphi_0 l}{2}\right)\sin\alpha_0 - \left(\varphi_0 + \sum_p \varphi_p\right)\cos\alpha_0 = 0\,, \tag{26}$$

$$\frac{1}{R}\left(-\sum_i \frac{\varphi_i}{\lambda_i} - \frac{\varphi_0 l}{2}\right)\cos\alpha_0 + \left(\varphi_0 + \sum_p \varphi_p\right)\sin\alpha_0 = 0\,. \tag{27}$$

Les termes de φ doivent être choisis d'une façon telle qu'on n'exclue pas inutilement des déformations qui seraient permises dans les conditions d'appui existantes. C'est seulement ainsi qu'on peut espérer ne pas recevoir une charge critique dépassant de beaucoup la valeur réelle. On y arrive, par exemple, au moyen des combinaisons suivantes:

d) symétrique: 2 termes des φ_i
0 terme des φ_p
$K_2 = 0$
$\varphi_0 = 0$

antimétrique: 0 terme des Φ_p
3 termes des Φ_i
K_1.

e) symétrique: 2 termes des φ_i
0 terme des φ_p
$K_2 = 0$
$\varphi_0 = 0$

antimétrique: 1 terme des Φ_p
2 termes des Φ_i
K_1.

En les substituant dans les expressions de travail (2) et (7) et en réduisant la charge critique au minimum, on reçoit les résultats figurant dans les lignes *d)* et *e)* du Tableau I.

5.2. — Arc à un tirant

Les équations de condition d'appui de la déformation symétrique sont identiques aux équations (24), (25) et (26) de l'arc à deux tirants. [L'équation (27) ne figure pas ici, puisqu'elle exprimait la contrainte due à deux tirants.]

Par contre, en cas de déformation antimétrique, les solutions concordent parfaitement avec celles de l'arc à deux tirants, les mêmes conditions d'appui étant valables pour l'un et l'autre cas [équations (21), (22), (23)].

5.21. — Charge radiale uniforme

Une des sortes possibles de la déformation *symétrique* est celle où les sections extrêmes n'effectuent pas de rotation dans le sens horizontal. Cela correspond à l'encastrement latéral et nous conduit à la solution déjà vue chez l'arc à deux tirants (voir ligne *a* du Tableau II).

Mais ce qui distingue précisément les arcs à un et à deux tirants, c'est qu'en cas de déformation symétrique, les sections extrêmes des premiers peuvent tourner l'une par rapport à l'autre dans le plan horizontal. Comme exemple d'une déformation n'entravant pas inutilement les mouvements des sections extrêmes de l'arc, citons la combinaison suivante:

c) 1 terme des φ_i
φ_0
1 terme des φ_p
K_2.

On reçoit ainsi, en effet, une charge critique nettement plus faible que dans la solution *a)* (voir ligne *c* du Tableau I).

La déformation *antimétrique* nous conduit aux solutions déjà vues chez l'arc à deux tirants (voir lignes *a* et *b* du Tableau I).

5.22. — Charge antimétrique

On devra admettre une déformation contenant une partie symétrique et une autre antimétrique, avec un seul paramètre libre dans chacune d'elles:

f) *symétrique:* 2 termes des φ_i
antimétrique: 2 termes des Φ_i
K_1.

Le résultat est indiqué dans la ligne *f)* du Tableau I.

6. Interprétation des résultats

Du Tableau I, il ressort qu'on obtient des résultats numériques très divers suivant le choix des termes de la fonction φ. Comme la méthode de l'énergie de déformation ne peut donner que des valeurs supérieures à la charge critique réelle, c'est le résultat le plus faible numériquement qui approchera le plus la valeur exacte. On voit que le choix opportun de φ importe au cas même d'une solution programmée sur une calculatrice électronique, car la convergence devient alors beaucoup plus rapide.

Au Tableau II nous avons indiqué, à titre de comparaison, les solutions antérieures relatives à des voiles en arc dont les extrémités ne peuvent effectuer aucune rotation en torsion [1], [2]. Notons encore que malgré leur forme analogue, les fonctions de déformation symétrique figurant dans la ligne *f)* des Tableaux I et II ne sont point identiques, la relation entre les coefficients étant imposée par des équations de condition d'appui tout à fait différentes dans les deux cas.

D'après des considérations pratiques, les charges critiques des voiles en arc à tirants doivent se placer entre celles des voiles en arc encastrés et celles des voiles articulés latéralement. Naturellement, les charges critiques de l'arc à deux tirants doivent être supérieures à celles de l'arc à un tirant. Les contraintes d'appui de l'arc à deux, resp. à un tirant sont en effet semblables à celles de l'arc encastré, resp. articulé.

C'est qu'en cas de déformation symétrique, l'arc à deux tirants se trouve dans la même condition que l'arc encastré et son appui n'est plus faible que parce que ses sections extrêmes peuvent tourner antimétriquement aussi dans le plan horizontal.

L'arc à un tirant est, en revanche, appuyé plus rigidement que l'arc articulé, car bien que ses sections extrêmes puissent tourner librement autour de l'axe vertical, — ce qui signifie la rotation en torsion et la rotation en flexion latérale simultanée des sections — ces deux rotations correspondant à des formes de déversement de côté opposé, s'entravent mutuellement. Ainsi, bien que les sections extrêmes ne soient pas fixées contre les rotations en torsion, l'appui sera plus rigide que si l'arc était latéralement articulé.

Toutes ces considérations sont en parfait accord avec les résultats relatifs à la *charge radiale uniforme*, qui sont résumés dans les Tableaux I et II. En ce qui concerne cependant la charge *antimétrique*, il y a lieu de faire encore quelques considérations supplémentaires:

Du Tableau II, il apparaît que la convergence est moins bonne qu'en cas de charge radiale uniforme. C'est pourquoi nous avons indiqué aussi, en plus des résultats *c)* et *e)* obtenus avec 1 + 1 paramètres, ceux *d)* et *f)* calculés avec 2 + 2 paramètres libres, et qui approchent déjà la valeur exacte. (Ici, l'arc encastré a été supposé muni de diaphragmes, car on ne trouve pas d'autre solution en [2].) On peut donc s'attendre à ce que le moment M_2 critique des arcs à tirants sera aussi sensiblement plus faible si l'on considère plus de termes dans la série des φ.

La valeur M_{2cr} de l'arc à deux tirants est en effet plus petite que celle du moment critique (calculé avec 1 + 1 paramètres) de l'arc latéralement encastré, mais le M_{2cr} de l'arc à *un* tirant sera d'une valeur *inférieure* à celle de l'arc articulé.

Ce résultat contraire à notre raisonnement précédent s'explique par le fait que la contrainte empêchant la déformation *antimétrique* est *moins forte* chez l'arc à un tirant que chez celui à articulations latérales. Or, en cas de charge antimétrique, le rapport du travail (intérieur) de la déformation antimétrique à celui de la déformation symétrique a été plus grand chez l'arc articulé que chez l'arc à un tirant. Ainsi, le travail de la déformation symétrique aura beau être plus grand chez l'arc à un tirant que chez l'arc articulé, il importera davantage que le travail de la déformation antimétrique est d'une valeur nettement inférieure.

Tableau I

Charges critiques des voiles en arcs à tirants

	φ		Arc à deux tirants	Arc à un tirant
	symétrique	antimétrique		
Charge radiale uniforme	*a)* —	$\sum'_{1,3,5} \Phi_i \cos \lambda_i s \,(+K_1)$	$N_{cr} = 153{,}1\ Mp$	$N_{cr} = 153{,}1\ Mp$
	b) —	$\sum'_{1,3} \Phi_i \cos \lambda_i s + \Phi_2 \sin \lambda_2 s \,(+K_1)$	$N_{cr} = 67{,}44\ Mp$	$N_{cr} = 67{,}44\ Mp$
	c) $\varphi_0 + \varphi_1 \sin \lambda_1 s + \varphi_2 \cos \lambda_2 s \,(+K_2)$	—	—	$N_{cr} = 10{,}61\ Mp$
Charge antimétrique	*d)* $\sum'_{1,3} \varphi_i \sin \lambda_i s$	$+\sum'_{1,3,5} \Phi_i \cos \lambda_i s \,(+K_1)$	$M_{2cr} = 128{,}7\ Mpm$	—
	e) $\sum'_{1,3} \varphi_i \sin \lambda_i s$	$+\sum'_{1,3} \Phi_i \cos \lambda_i s + \Phi_2 \cos \lambda_2 s \,(+K_1)$	$M_{2cr} = 65{,}3\ Mpm$	—
	f) $\sum'_{1,3} \varphi_i \sin \lambda_i s$	$+\sum'_{1,3} \Phi_i \cos \lambda_i s \,(+K_1)$	—	$M_{cr} = 15{,}9\ Mpm$

Tableau II

Charges critiques des voiles en arc aux extrémités fixées contre toute rotation en torsion

	φ		arc à diaphragmes à encastrement latéral	arc à extrémités libres à encastrement latéral	arc à extrémités libres à articulation latérale
	symétrique	antimétrique			
Charge radiale uniforme	a) $\sum_{1,3}' \varphi_i \sin \lambda_i s$	—	—	$N_{cr} = 123\ Np$	—
	b) $\varphi_1 \sin \lambda_1 s$	—	—	—	$N_{cr} = 3{,}99\ Mp$
Charge antimétrique	c) $\sum_{2,4}' \varphi_p \cos \lambda_p s$	$+ \sum_{2,4,6}' \Phi_p \sin \lambda_p s$	$M_{2cr} = 89{,}39\ Mpm$	—	—
	d) $\sum_{2,4,6}' \varphi_p \cos \lambda_p s$	$+ \sum_{2,4,6,8}' \Phi_p \sin \lambda_p s$	$M_{2cr} = 62{,}10\ Mpm$	—	—
	e) $\varphi_1 \sin \lambda_1 s$	$+ \Phi_2 \sin \lambda_2 s$	—	—	$M_{2cr} = 198{,}53\ Mpm$
	f) $\sum_{1,3}' \varphi_i \sin \lambda_i s$	$+ \sum_{2,4}' \Phi_p \sin \lambda_p s$	—	—	$M_{2cr} = 33{,}55\ Mpm$

Toutes ces comparaisons montrent que l'influence des différents modes d'appui des voiles en arc constitue un problème assez complexe et qu'il faut considérer bien des facteurs si l'on veut aboutir à des conclusions qualitatives sans calcul.

LITTÉRATURE

1. KOLLÁR, L.—IVÁNYI, GY.: Kippen und Biegedrillknicken von Schalenbogen mit Hilfe der Energiemethode. *Bautechnik-Archiv*, H. 19 (1966).
2. KOLLÁR, L.—GÁRDONYI, Z.: Kippen von Schalenbogen unter antimetrischer Belastung. *Acta Techn. Hung.* **59** (1967), 243—264.
3. MOKK, L.: Bauen mit Stahlbeton-Fertigteilen. Hallen, Industriebauten. Verl. d. Ung. Akad. d. Wissenschaften — Ung. Verl. f. Technik. Budapest 1960.
4. New type of precast arch roof. *Concrete Buildings and Concrete Products* **31** (1956) 16—17. Neuartiges vorgefertigtes Hallendach. *Beton- und Stabilbetonbau* **51** (1956), 238.

Lateral Stability of Shell-Arches with Tie Rods. Lateral stability of shell-arches with free or diaphragm ends and with one or two tie rods is investigated under the effect of uniformly distributed, as well as antimetric loads, by the aid of the energy method. The practical choice of the deformation function is treated. A numerical example for a shell-arch with a free end, and with one and two tie rods is presented.

Seitliche Stabilität der Schalenbogen mit Zugbändern. Es wird die seitliche Stabilität von Schalenbogen mit freien oder Diaphragmen-Enden, mit einem oder zwei Zugbändern, für die Fälle von gleichmäßigen radialen und antimetrischen Belastungen, mit Hilfe der Energie-Methode untersucht. Die zweckmäßige Auswahl der Formänderungsfunktion wird erörtert. Ein numerisches Beispiel für einen Schalenbogen mit freien Enden und mit einem und zwei Zugbändern wird vorgeführt.

Боковая устойчивость изгибу оболочечных сводов со стяжным поясом *(Л. Коллар, З. Гардони)*. В работе исследование боковой устойчивости изгибу оболочечных сводов со свободным и диафрагмовым концом, имеющих один или два стяжных пояса, показано для случая радиально действующей, а также антиметрически действующей нагрузки с помощью энергетического метода. Рассматривается вопрос целесообразного подбора функции деформации. Приводится числовой пример для оболочечных сводов со свободным концом и с одним и двумя стяжными поясами.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 177—186 (1968)

APPLICATIONS OF THE METHOD OF FIXED POINTS

K. SZMODITS
DOCTOR OF TECHN. SC.
BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received November 21, 1967]

The method of fixed points known from the theory of continuous girders is adopted to the determination of the natural frequency and critical axial load of continuous girders. The procedure consists in checking of the assumed frequency and critical forces by constructing the fixed points. The estimated fixed points are precise if in the course of determination of the fixed points the fixed point of the last span falls on the exterior support and, thus, the deflection of the girder does not require an exterior moment. The method might be extended to the analysis of frame structures with fixed or movable joints as well as to the determination of stresses occurring in frame structures containing bars subjected to repeated load.

1. Introduction

The period of the development of structural statics is characterized in the first half of the last century by the geometric way of looking and by the graphical methods of solving structural problems. In that time structural statics bore the name graphical statics and having had eliminated all arithmetical operations out of the design work one endeavoured to solve the problems completely by geometric drawings. Introduction of monolithic reinforced concrete structures which could not be designed with the graphic methods used until then, diverted the structural statics in arithmetical direction and gradually ousted graphical procedures, with the exception of the Cremona diagram and the fixed point method applied to the design of continuous beams being described also in the up-to-date civil engineering manuals, but not yet adopted for large-scale use.

The fixed point method had been developed by CULMANN and RITTER in the last century, and generalized by SUTER for the analysis of frame structures in the twenties of our century. Development of the fixed point method has been carried out with geometric considerations following from the construction of the elastic line as a funicular diagram. By this method all values are determined graphically, omitting every arithmetic operation, included plotting of vectors calculated. Owing to this restriction the procedure is complicated and cannot be generalized for solving other problems. Further inadequacy of the method is that the moment diagram to be determined is to be constructed as the sum of the moment diagrams of each loaded span.

The deficiencies mentioned of the fixed point method may be eliminated and a modernized form of this procedure would be appropriate for solving not only structural, but also dynamic and stability problems. Advantage of this method is that drawing work is proportionate to the number of the unknown moments, while the solution by methods solving directly or indirectly the equations with three or four moments requires an amount of work being proportionate to the square of the number of the unknown values. A further benefit of the method is that the final rotation of the end of each bar is directly given by the method and thus the fulfilment of the deformation and equilibrium conditions might be readily checked. Graphic procedures are significant also from the didactical viewpoint, because avoiding the abstract arithmetical operations it makes understanding easier by geometrical and mechanical demonstrations.

2. Description of the method

In the following the dynamic and stability applications of the fixed point method will be presented. Let us consider a simply supported beam subjected to an axial force P and a dynamic end moment $M_b \cos \omega t$ (Fig. 1).

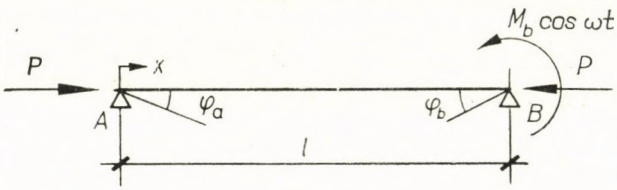


Fig. 1

By assuming that $v(x, t) = v(x) \cdot \cos \omega t$, the equilibrium of an element of unit length and of a mass μ will be expressed by the following differential equation

$$EIv''''(x) - \mu\omega^2 v(x) + Pv''(x) = 0 \tag{1}$$

where the first term is a force due to the flexural resistance of the element, the second that due to the mass inertia, and the third a force normal to the axis of the beam, due to the axial load.

One of the solutions of equation (1) is

$$v(x) = C_1 \sinh m_1 x + C_2 \sin m_2 x \tag{2}$$

where m_1 and m_2 are positive values. Substituting (2) into (1), it will be evident that (2) is a solution in case when

$$m_1^2 = \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EI} + \left(\frac{P}{2EI}\right)^2} - \frac{P}{EI},$$

$$m_2^2 = \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EI} + \left(\frac{P}{2EI}\right)^2} + \frac{P}{EI}.$$

Constants satisfying the boundary conditions

$v(0) = 0$, $w''(0) = 0$, and $v(l) = 0$, $EIv''(l) = M_b$

of the simply supported beam are:

$$C_1 = \frac{M_b}{EI(m_1^2 + m_2^2)\sinh m_l l}; \qquad C_2 = \frac{M_b}{EI(m_1^2 + m_2^2)\sin m_2 l}.$$

Introducing the parameters

$$\lambda_1 = m_1, \quad \lambda_2 = m_2,$$

and considering these constants, the rotations of the ends of the beam will be

$$\begin{aligned} \varphi_a = v'(o) &= \frac{M_b l}{EI}\left(-\frac{\lambda_1 \operatorname{cosech}\lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{cosec}\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right) = \frac{M_b l}{EI}\psi(\lambda_1 \cdot \lambda_2), \\ \varphi_b = -v'(l) &= \frac{M_b l}{EI}\left(\frac{\lambda_1 \coth\lambda_1 - \lambda_2 \cot\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right) = \frac{M_b l}{EI}\varphi(\lambda_1 \cdot \lambda_2). \end{aligned} \tag{3}$$

In the particular case when $P = 0$,

$$m_1 = m_2 = \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EI}} \quad \text{and} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

and equations (3) take the following forms:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{M_b l}{EI}\left(-\frac{\operatorname{cosech}\lambda - \operatorname{cosec}\lambda}{2\lambda}\right) = \frac{M_b l}{EI}\psi(\lambda), \\ \varphi_b &= \frac{M_b l}{EI}\left(\frac{\coth\lambda - \cot\lambda}{2\lambda}\right) = \frac{M_b l}{EI}\varphi(\lambda). \end{aligned} \tag{4}$$

And in the particular case when the beam is not subjected to dynamic but only to static end moment M_b, equation (1) takes the form

$$EIw''''(x) + Pv''(x) = 0. \tag{5}$$

One of the solutions of this equation is

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 x,$$

where

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Constants satisfying the above boundary conditions are

$$C_1 = \frac{M_b}{P \sin kl}, \quad C_2 = -\frac{M_b}{P}.$$

Rotations of the ends of beam will be:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{M_b l}{EI} \frac{1}{u} \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) = \frac{M_b l}{EI} \psi(u), \\ \varphi_b &= \frac{M_b l}{EI} \frac{1}{u} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u} \right) = \frac{M_b l}{EI} \varphi(u). \end{aligned} \tag{6}$$

In view of simplification of the calculations, functions (3) and (4) of the parameters λ_1, λ_2, and λ respectively, and function (6) of the parameter u might be tabulated in a chart.

Now we consider a simply supported girder (Fig. 2) of a span of unit length subjected to the dynamic end moments $M_a \cos \omega t$ and $M_b \cos \omega t$. The rotations of the ends of beam φ_a and φ_b should be proportionate to the vectors a' and b', respectively, cut out of the so-called base lines, being at a distance α from the supports, by the closing line of the moment diagram connecting the end points of the ordinates of the moment diagram M_a and M_b. Starting from this condition we define the value of α.

According to what was said above, (3), (4) and (6) are formulas of similar structure:

$$\begin{aligned} \frac{EI \varphi_a}{l} &= \varphi M_a + \psi M_b, \\ \frac{EI \varphi_b}{l} &= \varphi M_b + \psi M_a. \end{aligned} \tag{7}$$

From Fig. 2 one can see that

$$\begin{aligned} a' &= (1 - \alpha) M_a + \alpha M_b, \\ b' &= (1 - \alpha) M_b + \alpha M_a. \end{aligned} \tag{8}$$

From the initial condition and from (7) and (8) follows:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\psi}{\varphi}$$

and from here

$$\alpha = \frac{\psi}{\varphi+\psi}\,; \quad 1-\alpha = \frac{\varphi}{\varphi+\psi}\,. \tag{9}$$

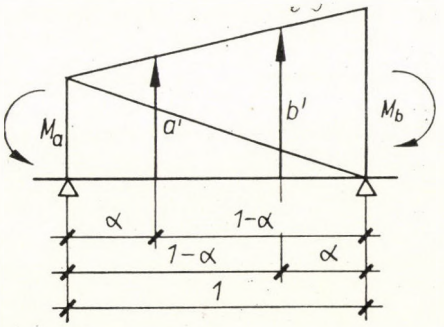


Fig. 2

Introducing (9) into (8) and taking (7) into consideration one obtains

$$a' = \frac{\psi}{\varphi+\psi} M_a + \frac{\psi}{\varphi+\psi} M_b = \frac{EI}{l(\varphi+\psi)} \varphi_a = \varrho\varphi_a\,,$$

$$b' = \frac{\varphi}{\varphi+\psi} M_b + \frac{\psi}{\varphi+\psi} M_a = \frac{EI}{l(\varphi+\psi)} \varphi_b = \varrho\varphi_b\,.$$

If $\omega = 0$, i.e. static end moment is applied, then

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad \varrho = \frac{2\,EI}{l}\,.$$

Accordingly the vectors a' and b' cut out of the base lines defined by $\alpha = \psi/(\varphi+\psi)$ are proportionate to the rotations of ends of beam φ_a and φ_b respectively, and the proportionality factor is

$$\varrho = \frac{EI}{l(\varphi+\psi)}\,.$$

In case when α is positive, the distance αl defining the position of the base line should be measured towards the span, and if α is negative, it should be brought up in the opposite direction.

The vectors a' and b' are called rotation vectors. These are turning in the same sense about the corresponding nodal point as the rotations of the ends of beam. The position of the arrows of the rotation vectors are indicated in Fig. 3 in dependence of the signs of ϱ and α.

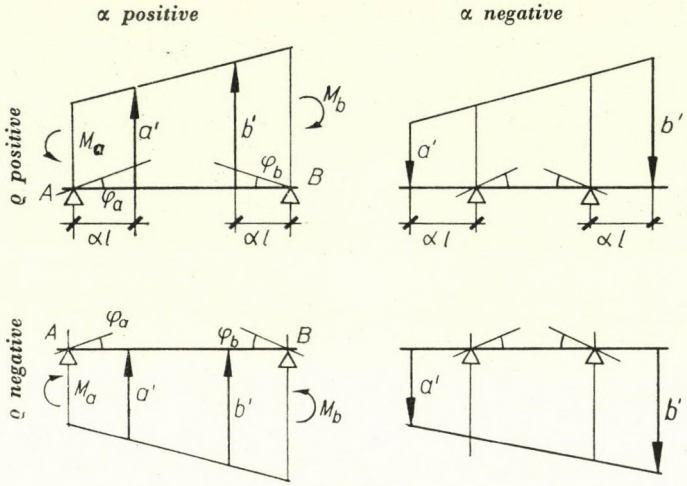


Fig. 3

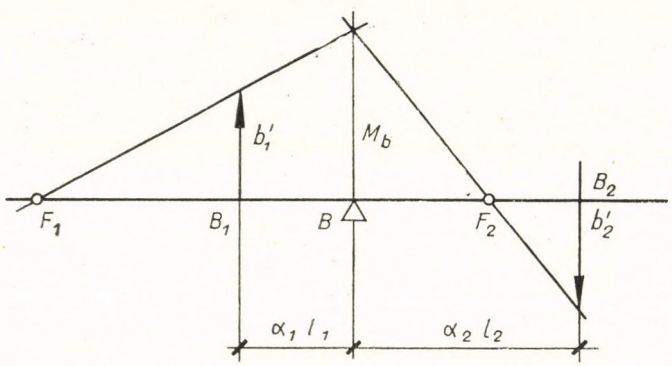


Fig. 4

If the closing line of the end moments is given in one of the spans, then in the following span of the continuous girder the closing line should be drawn further so that the rotation of the end sections φ_b of the to adjacent spans should be the same. Proportion of the rotation vectors b_1' and b_2', satisfying this condition, is (Fig. 4):

$$\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{\dfrac{EI_2}{l_2}\,\dfrac{\varphi_b}{\varphi_2+\psi_2}}{\dfrac{EI_1}{l_1}\,\dfrac{\varphi_b}{\varphi_1+\psi_1}} = \frac{l_1 I_1}{l_2 I_2}\,\frac{\varphi_1+\psi_1}{\varphi_2+\psi_2} = k_{12}$$

where φ_1, ψ_1 and φ_2, ψ_2 are related to the span l_1 and l_2, respectively.

From Fig. 4 it is to be seen that the relation $b_2'/b_1' = k_{12}$ exists, the closing lines intersect the straight of the girder in the fixed points F_1 and F_2, independently of the value of M_b. Defining the positions of the fixed points by drawing should be carried out in the way shown in Fig. 5, namely, advancing from the left to the right, starting from each defined fixed point by the aid of a new closing line and unit rotation vector the next fixed point should be determined.

The closing lines drawn through the static fixed points give the moment diagram of the end moment, while the moment diagram drawn through the dynamic fixed points is called linear moment diagram which gives the support moments within each span; but the moment does not change linearly, conse-

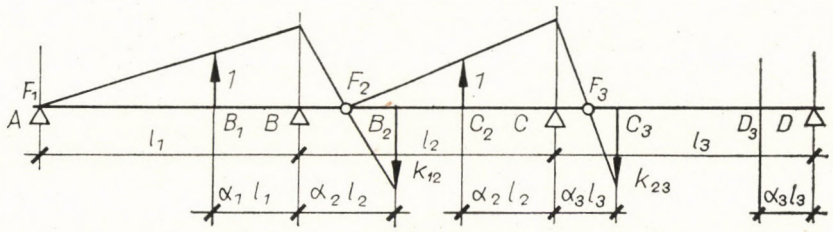


Fig. 5

quently the fixed points are here not zero points, and the linear moment diagram needs correction.

The fixed points belonging to the frequency $\omega = 0$ are static fixed points and if ω will be gradually increased, the fixed point of the exterior span comes nearer to the support, and at a value ω_1 falls upon the exterior support. Augmenting further the value of the frequency ω, the fixed point recedes from the support up to the infinite point of the straight of the beam, returning wherefrom it falls again on the exterior support at a value ω_2. By continuing this procedure further on, the values ω_3, ω_4, ... might be defined. Since the beam will be deflected under the effect of the vibrations of the frequencies ω_1, ω_2, ω_3, ... also without an exciting end moment, the frequencies ω_1, ω_2, ω_3, ... are the natural frequencies of the beam. The fixed point overlapping the exterior support might be given such an interpretation that the closing line of an end moment of any magnitude drawn through this fixed point, engenders infinitely great support moments at the interior supports, consequently resonance effect is existing.

Also in considering buckling, the critical force P is determined by the condition that from all fixed points determined by the aid of the parameters $\varkappa_n$ and k_{mn} belonging to the value $u = l/\sqrt{P/EI}$ that of the exterior span should fall upon the exterior support. Namely, in this case the beam without end

moment will be deflected only under the effect of the axial load, i.e., it suffers buckling.

If the axial force P and the vibration of frequency ω are acting at the same time, the coincidence of the exterior fixed point and exterior support

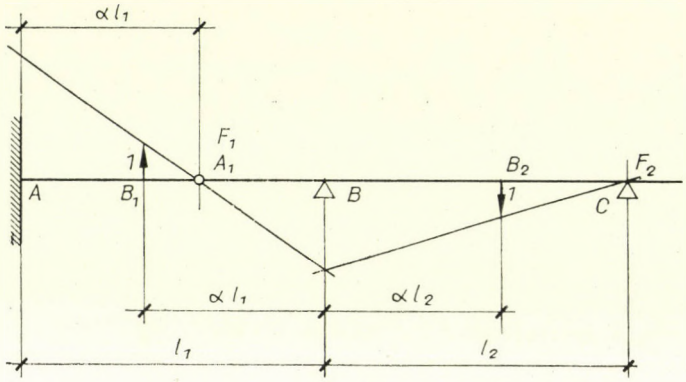


Fig. 6

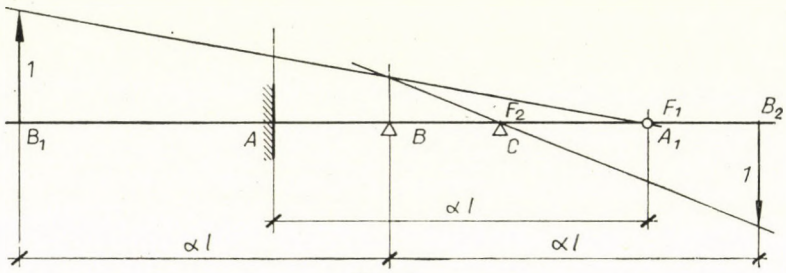


Fig. 7

has again to be fulfilled with formulae (3), by assuming in case of fixed P appropriate ω frequency, and in case of fixed ω, appropriate P value.

The procedure is applicable not only for the determination of the critical load and natural frequency of continuous girders, but also of frame structures with fixed or movable joints, as well as for defining moments due to static or dynamic loads by introducing new fixed points depending on the load.

3. Numerical examples

1) As an example we determine the first natural frequency of the continuous girder of two spans shown in Fig. 6. Be $l_1 = l_2 = 5{,}0$ m; $I_1 = I_2 = I$ and thus $k_{12} = 1$, further we assume by estimation $\omega_1 = 0{,}907\ EI/\mu$, $\lambda = 5{,}0\sqrt[4]{0{,}907} = 3{,}4$. Correspondingly $\varphi(\lambda) = -0{,}409$, $\psi(\lambda) = -0{,}585$. From this $\alpha = 0{,}589$.

The fixed point F_2 falls on the support C, therefore the assumed ω_1 is the first natural frequency.

2) Let determine the second natural frequency of the same girder. Be $\omega^2 = 0{,}972\ EI/\mu \cdot$ $\cdot\ \lambda = 5{,}0\ \sqrt[4]{0{,}972} = 4{,}46$. To this belong $\varphi(\lambda) = 0{,}083$, $\psi(\lambda) = -0{,}118$. From this $\alpha = 3{,}28$. Graphic construction is to be seen in Fig. 7.

The fixed point F_2 falls upon the support C, therefore the assumed ω_2 is the second natural frequency.

3) Let determine the critical load P_k of the second span of the same girder. Be the estimated critical load $P_k = 14{,}7\ EI/2$, this yields $u = \sqrt{14{,}7} = 3{,}83$. To these belong $\Phi(u) =$ $= -0{,}251$, $\psi(u) = -0{,}481$.

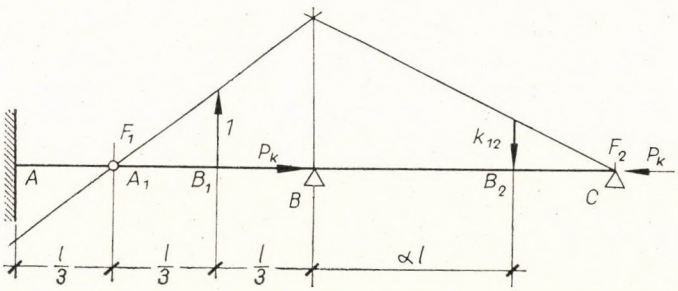


Fig. 8

This yields $\alpha = 0{,}66$, $k_{12} = 0{,}500/(-0{,}732) = -0{,}68$. Since the number ϱ_2 is negative, according to the interpretation rule of the rotation vectors the vector k_{12} should be brought up in a way that its arrow should be on the straight of the beam (Fig. 8).

The fixed point F_2 falls on the support C, accordingly the assumed force P_k is the critical force.

REFERENCE

1. Hohenemser—Prager: Dynamik der Stabwerke. Springer Verlag, Berlin

Anwendungen des Festpunktverfahrens. Der Verfasser benützt das aus der Theorie der durchlaufenden Träger bekannte Festpunktverfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenz und der kritischen Axialbelastung der Durchlaufträger. Das Verfahren besteht aus der Kontrolle der abgeschätzten Werte der Schwingungszahlen und der kritischen Kräfte durch graphische Ermittlung der Festpunkte. Die angenommenen Werte sind nur im Falle richtig, wenn der Festpunkt der letzten Öffnung im Laufe der Festpunktermittlung auf das Endauflager fällt, und die Biegung des Trägers kein äußeres Endmoment erfordert. Das Verfahren kann auch auf die Untersuchung der verschiebbaren und unverschiebbaren Rahmentragwerke sowie auf die Ermittlung der Beanspruchungen der Rahmentragwerke erstreckt werden, die durch periodische Belastungen angegriffene Balken enthalten.

Applications de la méthode des foyers. La méthode des foyers, connue de la théorie des poutres continues, est appliquée à la détermination des fréquences propres et des charges axiales critiques des poutres continues.

Le procédé consiste à contrôler les fréquences propres et forces critiques estimées par une construction graphique des foyers. Les valeurs estimées sont correctes si, au cours de la construction des foyers, le foyer de la travée de rive coïncide avec l'appui de rive, de sorte que la flexion de la poutre ne nécessite pas un moment à son extrémité.

Le procédé peut être étendu aussi à l'analyse de portiques à noeuds fixes ou à déplacement latéral, ainsi qu'à la détermination des sollicitations de portiques contenant des poutres soumises à des charges périodiques.

Области применения неподвижной точки *(К. Смодич)*. В работе метод неподвижной точки, из вестный из теории неразрезных балок, применяется для определения частоты собственных колебаний и критической осевой нагрузки неразрезных балок.

Метод состоит из проверки оцененных частот колебаний и критических усилий путем построения неподвижных точек. Оцененные данные являются правильными в том случае, когда во время построения неподвижной точки неподвижная точка последнего пролета лежит на крайней опоре и, таким образом, изгиб балки не требует приложения внешнего конечного момента.

Метод можно распространить для анализа неподвижных и смещающихся узловых рамных конструкций, а также для определения нагрузки рам, содержащих балки, нагруженные периодически действующими нагрузками.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 187—202 (1968)

MODEL STUDIES ON RETAINING WALLS

F. KOVÁCSHÁZY*
DR. ENG. SC.

[Manuscript received January 23, 1968]

In connection with studies aiming at the improvement of design procedures for retaining wall models, tests have been performed on several types of these structures. A report on the tests and the results obtained with ribbed, cantilever type walls is given in the present paper. Theoretical assumptions were verified by the test results. From the behaviour of ribbed, cantilever type retaining walls reliable conclusions could be drawn on the influence of surface roughness and spacing of the ribs. The original device developed for observing contact pressures proved successful in the tests and appears to be applicable to prototype structures as well.

1. Introduction

Together with theoretical studies on structural design problems [1] associated with retaining wall model, studies and tests have been performed. In the majority of cases retaining wall models of more involved design, rotating about one of their lower corner points were tested. The objective of these tests was to observe the behaviour of different retaining wall types under identical conditions of load. Observations included the determination of contact pressures, as well as of rotation and settlement — due to the acting load — of the model. Rather than on accurate numerical values, the main interest in these experiments was centered on determining ratios between displacement and load transmitted to the soil for different retaining wall types, and on observing the effect of structural design changes on the behaviour of the structure under load. Thus, in the case of ribbed retaining walls the variables studied included the number, magnitude, shape and surface roughness of ribs and observations were extended to the varying influence of stabilizing elements arranged between the ribs. In the case of crib wall-type models the silo effect of filling material between two longitudinal grillage members and the effect of using stabilizing elements were studied.

Model scales were selected to produce, if possible, failure conditions in the soil during the test, taking also into consideration the resulting dimensions of the model and the available loading facilities. The combinations made

* Address: Budapest I. Uri u. 64—66 (FÖMTERV), Hungary

possible and the application of stabilizing elements served the purpose of permitting detailed studies and observations on the model in the condition preceding failure.

A high degree of accuracy was aimed at during computations and observations alike with the objective of collecting information and data for the development of model laws for model tests serving similar purposes.

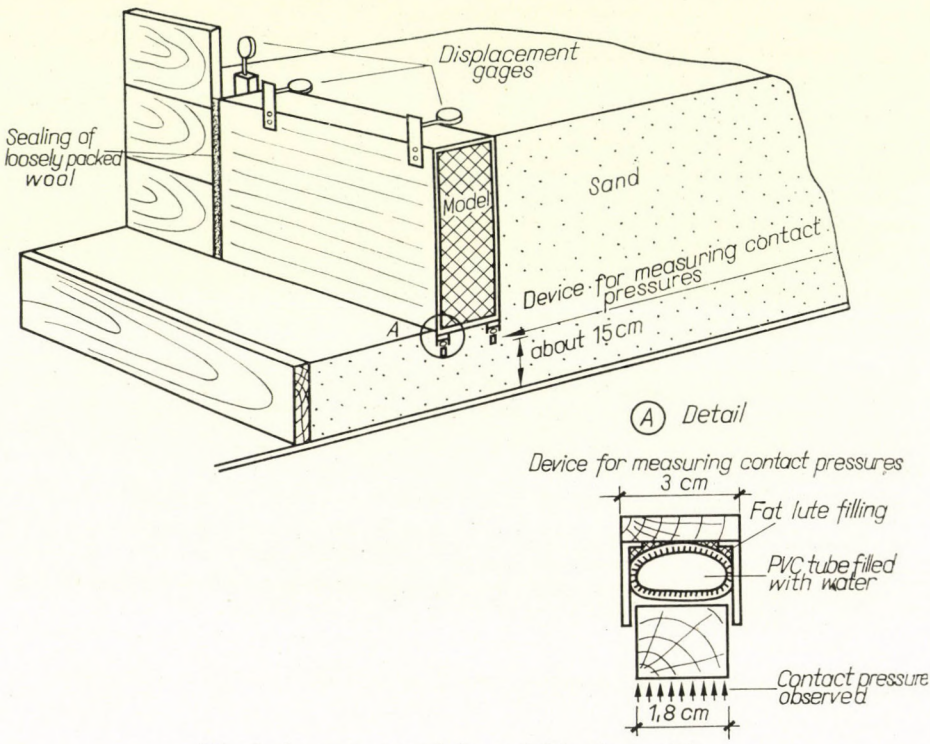


Fig. 1. Arrangement of the model in the sand box

2. Equipment used in the tests

The models used were about 40 cm high. The ratio of height to length adopted for these models was approximately 1 : 3 and thus the models were uniformly 1,3 m long. The necessary length of the sand box for these experiments was calculated at about 1,8 m at which a sand volume sufficiently high and long could be made available for the development of earth pressure and surface of rupture at failure.

The dimensions in the plan of the sand box were 2,20 by 2,20 m with the arrangement shown in the diagram and photograph of Figs 1 and 2.

The load on the retaining wall could be applied either by placing a horizontal fill behind the wall up to its crest height, by placing a 10 cm high sur-

charge layer thereon, or by the placement of plastic bags weighing 5 kg each at any of the elevations mentioned above.

The retaining wall model rested on a minimum 15 cm thick layer of uniformly compacted sand. Contact pressures were observed by a hydraulic device developed especially for this purpose by the author. Essentially the compression of a water-filled tube of PVC mounted at the base of the wall was observed with the aid of mercury filled differential gauges mounted on the side of the box and connected to the PVC tube by thick-walled rubber hoses. (See diagram and photographs in Figs 1, 2 and 3.)

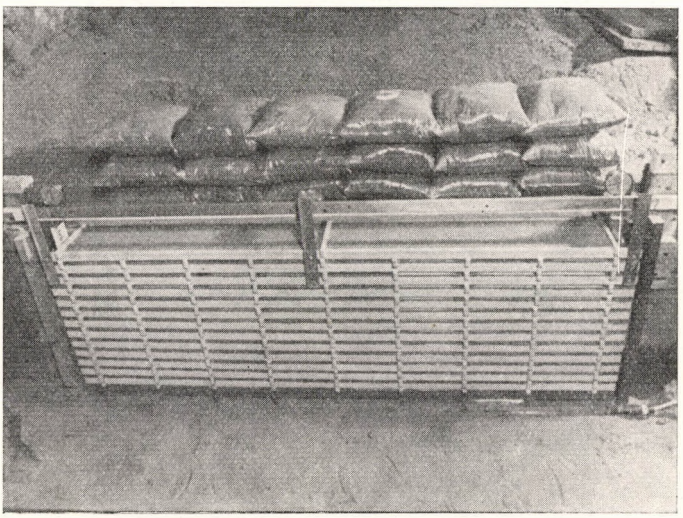


Fig. 2. Arrangement of testing equipment

The pressure gauges were calibrated by experimental methods. For this purpose the superstructure of the ribbed retaining wall of Type I, shown in Fig. 5, was removed and the structure consisting now of the base-plate, as well as the front and rear pressure transducers (Fig. 1) was repeatedly loaded by applying a uniformly distributed load in 5 kg increments. Plastic sand-bags were used for loading. Readings on the mercury gauges were taken and recorded at each load increment.

To a load increment of 1 kg the gauge responded by an about 1 mm change of the mercury column and this sensitivity was considered sufficient. The graduated scales along the mercury gauges could be adjusted to compensate for the effect of temperature differences.

The testing equipment permitted the observation of inclination and settlement of models tending to rotate about their lower corner point. Displacements were measured by dial gages reading to 1/100 mm accuracy. The large

deflections pertaining to failure exceeded the 10 mm measuring range of the gages. For this reason the gages were mounted in such a manner that the bearing plates should move away from the points in the case of large displacements and the gap between the fully extended point and its bearing plate could be determined with 1/10 mm accuracy using caliper gages. The arrangement of the instruments is shown in Figs 1 and 2.

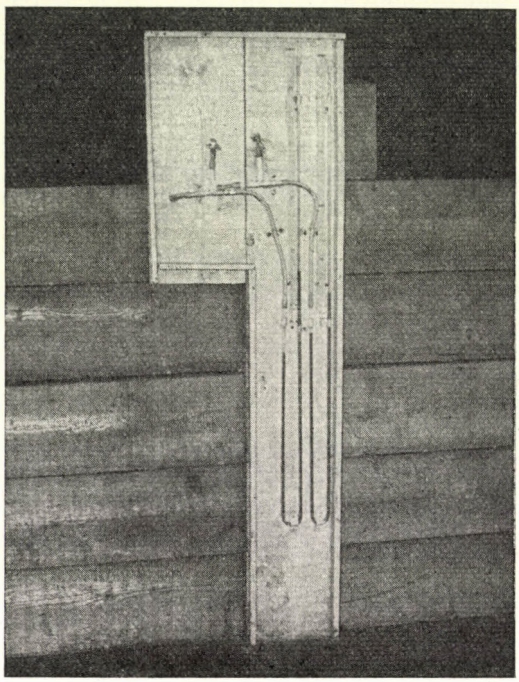


Fig. 3. Mercury pressure gages of the device for measuring contact pressures

The sand used for the tests was pit sand having the following physical properties:

Uniformity coefficient	$U = 2{,}3$
Bulk density (loose)	$= 1480$ kg/cu.m
Bulk density (slightly compacted)	$= 1600$ kg/cu.m
Bulk density (compacted)	$= 1760$ kg/cu.m
Void ratio (loose)	$e = 0{,}79$
Void ratio (compacted)	$e = 0{,}50$
Porosity (loose)	$n = 44{,}2\%$
Porosity (compacted)	$n = 33{,}4\%$
Water content	$w = 0{,}8$—$1{,}65\%$
Angle of internal friction (natural condition)	$\varphi = 35°$
Angle of internal friction (wetted to $w = 17{,}4\%$)	$\psi = 34°$
Compressive strength (slightly compacted)	$\sigma_{ny} = 0{,}5 \div 0{,}75$ kg/sq.cm

Different retaining wall models were subjected to the same types of loading the notations and grouping of which are shown in Fig. 4.

Having placed the sand fill behind various models according to the loading type 1, 2 or 3, it was compacted uniformly.

Using these load increments the horizontal thrust which can be transmitted to the model at the crown, at mid-height or at the third-points ranges from 0 to 25 kg.

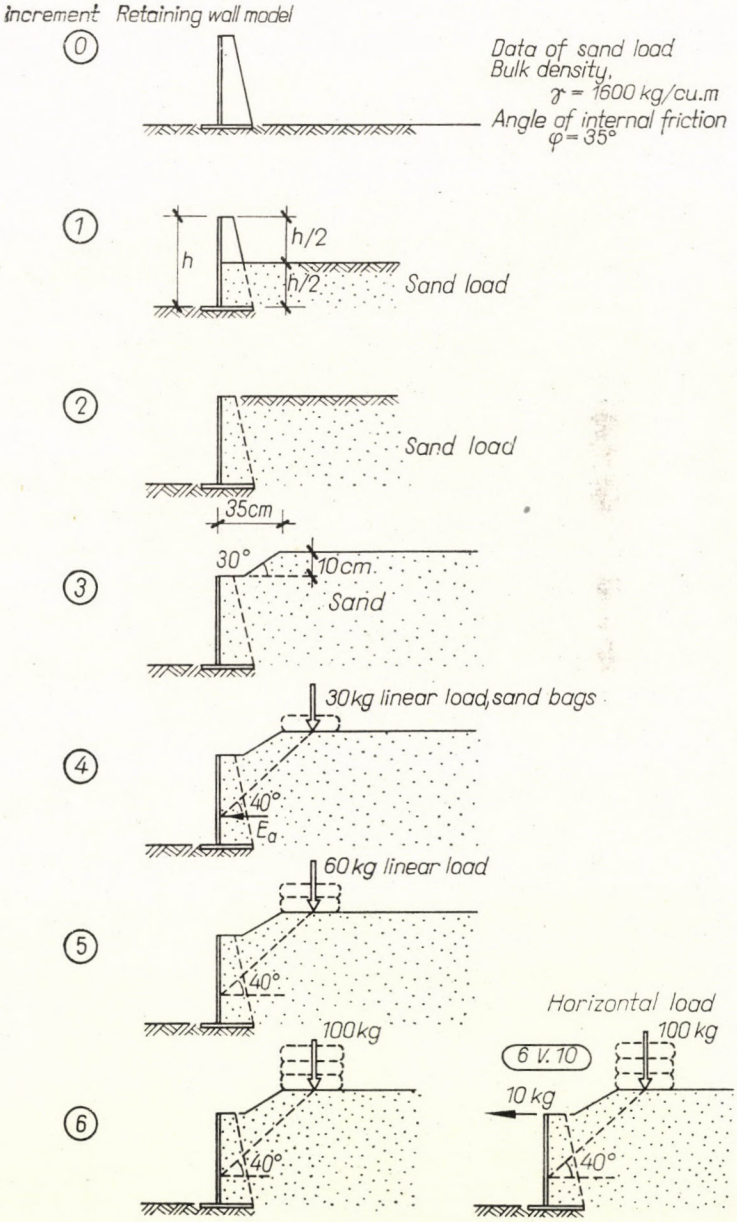


Fig. 4. Load increments

3. Models used in the tests

The following main types of model were tested:

Type I ribbed cantilever wall, with broad base;

Type II ribbed cantilever wall;

Type III cribb wall.

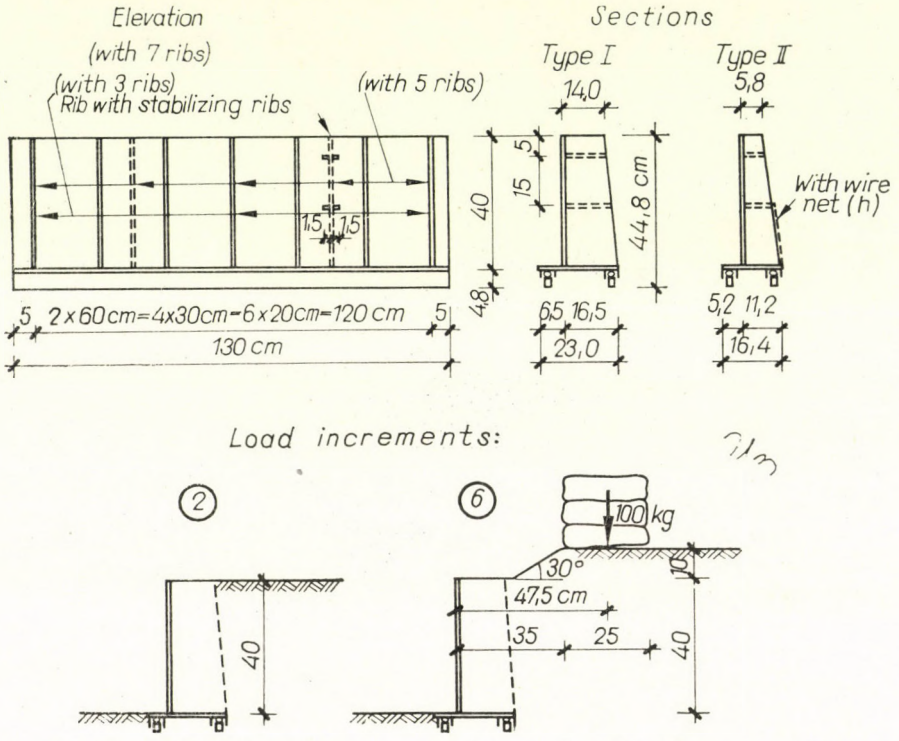


Fig. 5. Ribbed cantilever type retaining wall models (Types I and II)

Ribbed cantilever walls were made of 1,5 mm thick sheet aluminium with bolted joints. The spacing of ribs can be modified as follows:

Type	No.	No. of ribs	Spacing of ribs, mm
I	(3)	3	600
I	(5)	5	300
II	(3)	3	600
II	(5)	5	300
II	(7)	7	200

Besides varying the number of ribs (counterforts), stabilizing slabs can also be attached to the latter in order to increase friction. Stability may be

further increased by spanning a net between the ribs. In the notation used hereafter the Roman figure refers to the type, the figure in brackets to the number of ribs, the letter "*l*" to the 15 mm wide slabs attached on both sides to the ribs, while the letter "*h*" to the 1,5 mm mesh wire net spanned between the ribs (Fig. 5).

E.g. the notation II (3). *l*, *h* refers to a model of Type II with 3 ribs and stabilizing slabs, as well as wire net attached to the ribs.

The substructure for Type I and II retaining walls consists of the device for measuring contact pressures arranged as indicated in Figs 1 and 5.

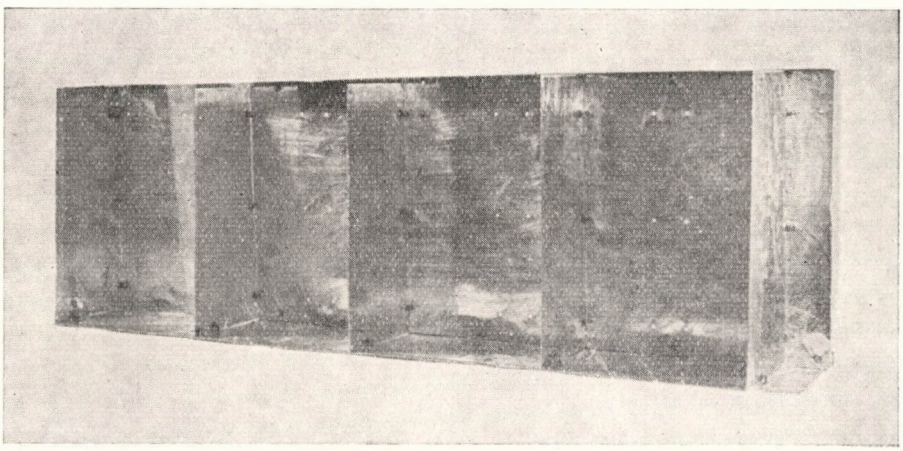


Fig. 6. Ribbed cantilever type retaining wall model (Model I/5)

The crib wall design (Type III) retaining wall is essentially a box composed of 9 by 19 mm wooden sticks where the transverse elements are secured with the aid of tongue and groove joints. The box thus formed by the front and rear walls is filled with sandy gravel.

Crib walls (Type III) have been discussed in detail in an earlier paper [2]. These types will not be dealt with here.

Various model types are founded essentially on continuous footings, justified on the one hand by the higher contact pressures enhancing the accuracy of measurement, and on the other, by the more pronounced development of overturning phenomena at failure permitting more reliable observations.

4. Objectives of the tests performed with ribbed retaining walls of Types I and II

In the design of ribbed retaining walls it is assumed that at least part of the weight of the soil mass between the ribs can be relied upon as ballast in stability investigations. It is not fully understood, however, to what extent

the magnitude of earth pressure and the stability of the structure are influenced by the spacing, shape and surface area of the ribs, as well as by a wire net arranged in the rear plane of the ribs.

Accordingly, studies have been grouped as follows:

a) studies by varying the number of ribs;

b) studies by increasing the roughness of ribs, accomplished by mounting 15 mm wide slabs in two rows on both sides of the ribs;

c) studies on the effect of a net mounted in the rear plane of the ribs.

Remembering the fact that rupture surfaces inclined steeper than 90° may also occur at angles of rotation pertaining to the failure of cantilever-type retaining walls, experiments have been conducted to find methods by which the slope of the rupture plane can be reduced, if possible, to values smaller than 90°. In the case of reduced rib spacings silo effects have been assumed to develop in the soil between the ribs, and a greater soil mass would then act as ballast to counteract lateral earth pressure. The same purpose is served even more effectively by the slabs mounted on the ribs to increase friction. Also it has been attempted, by the application of a net in the rear plane of the ribs, to exploit the full weight of the enclosed soil mass in resisting horizontal pressure. The tests were designed to verify these assumptions. At the same time they were intended to supply information on the order of magnitude of earth pressure and displacements occurring with different types of model, as well as on the ratio of these effects.

These tests were supplemented by experiments on friction developed on various wing-wall slabs. Pull-out tests were performed with smooth slabs of different sizes and with these provided 2 rows of double slab trips as well as with a frame of laths, all embedded in sand.

5. Theoretical computations preceding the model tests

For the case of the basic types I and II of ribbed retaining wall models the horizontal earth thrust and soil pressure arising under the main load conditions have been computed by the following method.

The magnitude of the horizontal earth thrust is first determined by the method commonly applied in the case of cantilever-type retaining walls, then friction developed on the ribs as a result of the lateral pressure of the granular soil contained in the silo cells assumed to exist between adjacent ribs, is estimated. Since rupture surfaces inclining steeper than 90° may also occur, the friction developed on the rib faces lying above the rupture surface should be taken into consideration (shaded area in Fig. 7).

The cross-section of the assumed silo cell may be rectangular, or square in plan. In the first case the length of one of the side-walls equals twice the

average rib width, while that of the other is the rib spacing. In the second case the sidelength of the square equals the rib spacing. From the two values the one resulting in smaller silo pressure should be taken into consideration.

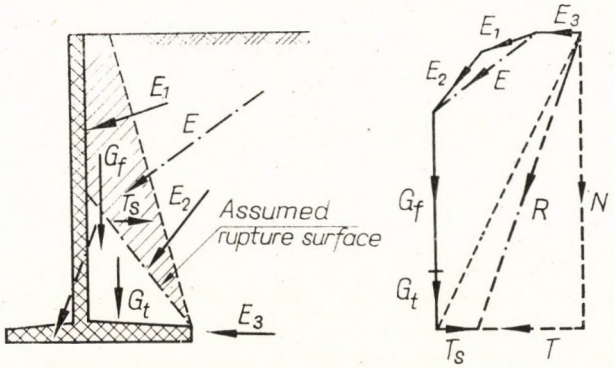


Fig. 7. Forces on ribbed cantilever-type retaining wall

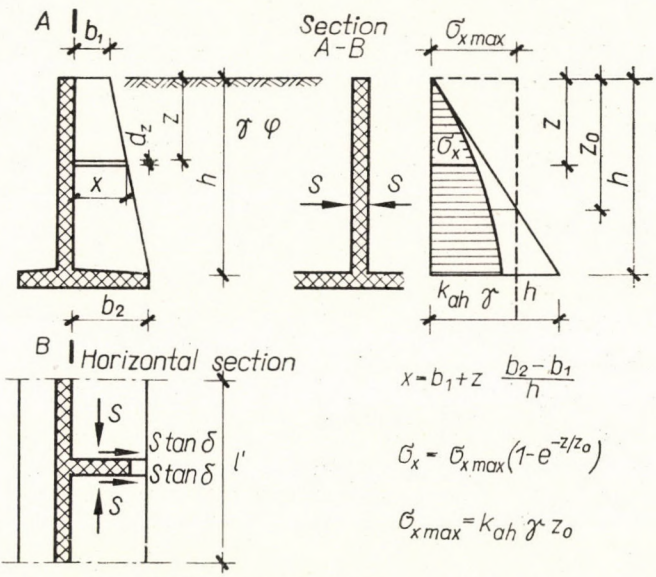


Fig. 8. Determination of silo pressure on ribs

On the rib surface thus determined the silo pressure determined with reference to Fig. 8 is assumed to act as the magnitude of which [1]:

$$\sigma_x = \sigma_{x\max}\,(1 - e^{-z/z_0}),$$

wherein

$$\sigma_{x\max} = \gamma z_0\, k_{ah}$$

$$z_0 = \frac{F}{Kk}$$

$k = k_{ah} \tan \delta$
δ — the angle of wall friction
k_{ah} — the coefficient of active earth pressure
F — the cross-section area of the assumed silo cell
K — the perimeter of the assumed silo cell, and
γ — the bulk density of soil.

Starting from the magnitude S of the silo pressure acting on the rib faces the friction force T_s acting against the earth thrust is obtained in the following manner (Fig. 7) for 1 metre run length of the retaining wall:

$$T_s = 2\frac{S}{1'}\tan\delta$$

where $1'$ is the rib spacing.

The results of computations performed in the above manner have been compiled in Tables I and II. It should suffice to note here that allowance for rib effect depending on the number of ribs resulted in the case of wide-base models (I) in an 8 to 15% reduction, while in that of narrow-base models (II) in a 5 to 12% reduction of horizontal thrust due to lateral earth pressure.

6. Experimental results

The results obtained by these model tests have been compiled in the following tables. The observation results correspond to readings taken at load increments according to Fig. 4 described in Section 2. From the readings on contact pressure the soil stresses were found by using the diagram constructed during the calibration tests. Besides the soil stress values actually observed, the theoretical values computed according the preceding paragraph have also been included in the tables for ease of comparison. The results on the inclination of the retaining wall model correspond to the average of readings taken on the three dial gages described in Section 2. The values on settlements are averages of readings taken on two dial gages.

The movement of the model under load (separation of the rear face) and the upper end of the rupture surface is shown in the photograph of Fig. 9.

The discussion of results and the comparison of different retaining wall designs will be given in the following section.

From among the model test results no more than the data relating to the following two types of loading can be included here owing to space limitations, with reference to Fig. 4:

Load condition No. 2: Fill up to the crest of the model
Load condition No. 6: Fill raised a further 10 cm and 100 kg linear load applied to the full length of the model

The experimental results have been compiled in the following two tables:
Ribbed retaining walls of Type I and II
Load condition No. 2 (Table I)
Load condition No. 6 (Table II)

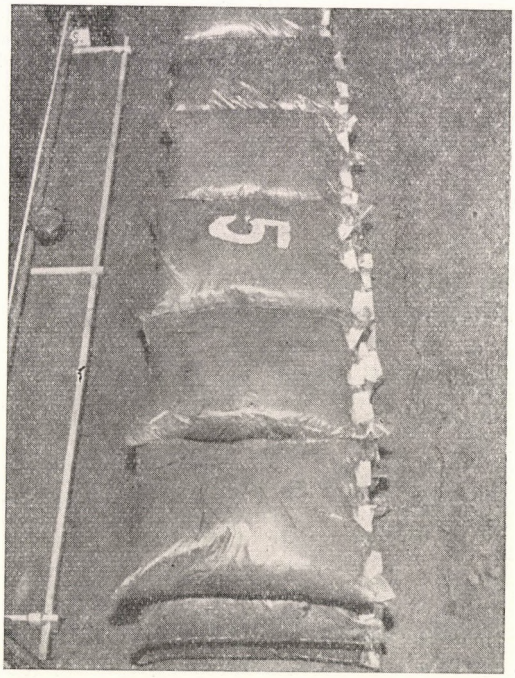


Fig. 9. Model under loading

Table I

Types I and II, Load No. 2

No. of model	Theoretical contact pressure		Observed contact pressure. kg/cm²		Horizontal displacement at crest of model, mm	Average settlement under load, mm
	front	rear	front	rear		
I (5) *l*	0,44	0,13	0,20	0,13	9,0	3,6
I (5)	0,44	0,13	0,22	0,14	13,1	3,3
I (3) *l*	0,45	0,11	0,39	0,18	17,6	5,0
II (7) *l*	0,36	0,03	0,34	0,03	16,7	0,3
II (7)	0,36	0,03	0,37	0,03	17,9	3,0
II (5) *l*	0,38	0,02	0,45	0,04	17,3	1,6
II (5)	0,38	0,02	0,44	0,02	30,8	3,7
II (3) *l*	(0,39)	0	0,38	0,07	31,8	4,2
II (3) *l*, *h*	0,34	0,20	0,29	0,05	25,4	0,2

Table II

Types I and II, Load No. 6

No. of model	Theoretical contact pressure		Observed contact pressure kg/cm²		Horizontal displacement at crest of model, mm	Average settlement under load, mm
	front	rear	front	rear		
I (5) *l*	0,64	0,11	0,23	0,19	10,8	3,9
I (5)	0,64	0,11	0,26	0,18	14,8	4,3
I (3) *l*	0,64	0,11	0,39	0,22	24,6	7,8
II (7) *l*	(0,72)	0	0,39	0,07	18,3	1,4
II (7)	(0,72)	0	0,42	0,06	22,1	4,3
II (5) *l*	(0,72)	0	0,50	0,08	20,1	3,9
II (5)	(0,72)	0	0,49	0,04	32,1	4,9
II (3) *l*	(0,72)	0	0,44	0,10	45,3	5,9
II (3) *l*, *h*	(0,72)	0	0,31	0,05	27,0	0,8

7. Discussion of experimental results

It is of interest to note that the observation equipment used in these tests proved successful in every respect. During repeated tests performed with models of the same type the device used for observing contact pressures indicated almost identical results. The standard deviation was smaller than 5% and ranged generally from 2 to 3%.

Altogether 15 alternative combinations of the basic model types were tested.

Evaluation will first be limited to alternatives within individual basic types.

a) *Results concerning wide-base, ribbed cantilever retaining wall models (Type I)*

From the detailed data compiled in Tables I and II, as well as in [1], it will be readily perceived that there is a significant difference in contact pressures observed under the front edges of models having 5 and 3 ribs. In the case of the three-rib model the development of a rupture surface could be observed under the load increment No. 5 already indicating that no reliance can be placed any longer on the full weight of earth acting on the base slab of the assumed cantilever retaining wall, i.e., the inclination of the rupture surface is greater than 90°. It is for this reason that a considerable rotation occurs at contact pressures lower than the theoretical one. The contact pressure under the front edge of 3-rib models was more than 1,5 times as high as that observed

in the case of 5-rib models, demonstrating the beneficial effect of closer rib spacing. As long as the ribs are of adequate roughness — and in the present case they were provided with slabs for increasing roughness — a greater number of ribs is advantageous for the more uniform distribution of contact pressures and improved stability alike. The practical rule according to which the rib spacing should not exceed 0,8 to 1,0 times the height of the wall is corroborated by these experiments. Friction developed on the rib surfaces and silo effect which can be assumed to result between the ribs increase the mass of soil moving together with the retaining wall and thus contribute to its stability. It is probably due to this effect that the contact pressures observed were appreciably lower than the theoretical ones.

Increasing the number of ribs and the roughness of their surfaces are of a beneficial effect for both the inclination and settlement of the models. As will be seen from Table II the data on inclination and settlement are almost twice as high for the three-rib model as for the five-rib model under the same load and with identical roughness conditions.

Interesting results have been obtained from the tests performed for determining the influence of surface roughness. A force of 6,5 kg was necessary to pull out a smooth rib embedded vertically in sand (with a 2 cm deep cover), whereas the pullout force required to move the rib provided with the slabs according to Fig. 5 was as high as 15 kg. It should be noted that in the latter case hairline cracks were observed in the soil above the rib already at a force of 13 kg. It was concluded therefrom that for all practical purposes ribs provided with slabs mobilize under otherwise identical conditions a friction force twice as high as in the case of ribs without slabs. During the pullout tests the corners between the slabs and the face of the rib were found to be filled with soil.

It is interesting to observe that the application of an increased number of ribs is advantageous not only in the case of ribs having artificial roughness elements, or designed with a rough surface, since for instance the five-rib model with no artificial roughness (Model I/5) showed a behaviour which was far superior to that of the three-rib model having a roughened surface (Model I/3/1).

In the case of five-rib arrangements it was the more favourable development of overturning resistance, rather than the distribution of contact pressures which showed significant differences in the favour of models having roughened ribs.

b) *Results concerning narrow-base, ribbed cantilever retaining wall models (Type II)*

On the basis of data compiled in Tables I and II showing observation results, as well as described in detail in [1] it was concluded for, contact pressures observed with this type of retaining wall, under the

first stages of loading a better agreement with theoretical values was arrived at than in the case of the preceding type. The regularities observed there concerning the number and roughness of the ribs apply to this type as well. In comparison with the model having 7 smooth ribs the contact pressures under the front edge of the five-rib model were higher by about 20%, while rotation angles wider by more than 50%. The situation is more favourable in the case of models having rough ribs, i.e., such provided with slabs, where contact pressures increased as the number of ribs was decreased, yet stability conditions deteriorated with the three-rib arrangement only.

In the case of Type II a narrow-base design was selected with the pronounced purpose of obtaining detailed information in the vicinity of failure. As will be perceived from the observation results (Table I) the five- and seven-rib alternatives with roughened surfaces approximate more closely the conditions assumed during computations. Consequently, in the case of narrow-base, ribbed cantilever walls a rib spacing corresponding to 0,75 to 0,80 times the wall height is adequate, provided that care has been taken to make the rib surfaces sufficiently rough. Smooth ribs, on the other hand, must be spaced closer to each other. In the present case the seven-rib II (7) model and the II (5) l model provided with 5 roughened ribs showed almost identical properties. It should be noted, however, that in the seven-rib model the rib spacing equals one-half of the wall height.

The correct rib spacing is thus seen to be influenced by the roughness and width of the ribs. It was interesting to observe the behaviour of the model in which the three-rib design was combined with a narrow-mesh wire net located in the rear plane of the ribs and reaching up to mid-height (model (II) 3 l, h). Contact pressure values under these types of model were the most favourable, at all load increments. Although the safety against overturning was not the highest, rupture surfaces did not develop and settlement values were very favourable. From the tests performed with these models the important conclusion could be drawn that the inclusion of the soil mass above the base plate into load bearing has a beneficial effect. No solid rear wall is required but the development of rupture surfaces starting from the rear edge of the base plate and steeper than 90° can be prevented and a favourable distribution of forces can be realized by means of a light elastic structure as well.

Interesting conclusions could be derived also during the processing of observation data for the test in which the model II (5) l was provided with an aluminium anchor plate in the backfill to simulate the condition of backfill consisting of a cohesive soil. The anchor plate was 8 and 13 cm behind the rear edge of the ribs at the bottom and at the top, respectively. Sand ballast was placed between the plate and the model which exerted silo pressure only on the retaining wall model, owing to the narrowness of the space filled thereby. In spite of the anchoring effect of the backfill contact pressures of considerable

magnitude were observed in this case under the front edge, which were approximately of the same value as those observed in the case of model II (3) *l, h*, which showed the most favourable values. On the other hand, outstandingly good resistance against overturning was found in this model.

The conclusion drawn from this last test is that even in the case of retaining walls constructed before soil masses having high cohesion values (capable of standing with a vertical face) an earth pressure corresponding to the silo pressure of the filling material should be taken into consideration during the design.

c) *Comparison of different model types*

From the two basic types of retaining wall tested contact pressures were most favourable under the broad-base, ribbed cantilever design (Type I), both as regards order of magnitude and the uniformity of values under the front and rear edges. These statements apply mainly to the five-rib arrangement with the ribs spaced at 0,75 times the wall height. Broad-base retaining walls were further superior to the other type in their resistance to overturning. On the other hand, the settlements under load were higher with broad-base models, for which the greater dead weight can be offered as an explanation.

7. Conclusion

In conclusion it may be stated that the model tests performed with the types of retaining wall studied were successful. The device developed for measuring contact pressures offered opportunities for comparing theoretical values with observed ones. Displacements of the models under load could be observed accurately by means of dial gages.

The main results of the test series are as follows:

a) The agreement between theoretical and observed contact pressures may be regarded as fair, especially at lower loading stages and taking into consideration the results of similar model test results.

As indicated by Table II containing data on higher loading stages, the rib-effect was higher than anticipated in the computations, i.e., the actual contact pressures were appreciably lower.

b) The tests provided information on the extent of friction to be assumed in the case of models made of metal with smooth and rough surfaces, as well as of wood.

c) From the behaviour of ribbed retaining wall models under load important conclusions could be derived concerning the shape, number and roughness of ribs.

d) In all model alternatives tested the influence of any modification of the model could be observed and the effects were of the anticipated magnitude.

e) Observation results corroborated the conclusions of parallel theoretical studies thus permitting well founded improvement of design procedures commonly used so far.

f) The device developed for observing contact pressures during the model tests was found to function accurately enough to permit its application for the observation of the behaviour of structures during their construction and for extended periods thereafter.

REFERENCES

1. KOVÁCSHÁZY, F.: Támfalak szerkezete és méretezése (The Design and Analysis of Retaining Walls), Budapest 1963. (Thesis Presented for the Degree of Doctor of Technical Sciences.)
2. KOVÁCSHÁZY, F.: The Structural Analysis of Crib Walls. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Budapest, September 1963.
3. KOVÁCSHÁZY, F.: Támfal model kísérletek (Model Tests on Retaining Walls). *Mélyépítéstudományi Szemle* (1965), No. 9.

Modellversuche an Stützmauern. Im Zusammenhang mit den Bestrebungen, die Bemessungsverfahren für Stützmauerbauten weiter zu entwickeln, wurden einige Typen an Modellen untersucht. In der vorliegenden Arbeit werden die an Modellen von mit Querrippen versehenen Winkelstützmauern durchgeführten Untersuchungen und deren Ergebnisse beschrieben. Die Richtigkeit von theoretischen Erwägungen konnte durch die Versuchsergebnisse erwiesen werden. Das Verhalten der Modelle unter der Belastung lieferte zuverlässige Angaben über den Einfluß der Oberflächenrauhigkeit und des gegenseitigen Abstandes der Querrippen. Ein neuartiges, zur Messung der Sohlendrücke konstruiertes Instrument hat sich gut bewährt und kann auch bei Bauwerken angewendet werden.

Essais sur modèles réduits de murs de soutènement. Cherchant à développer les procédés de dimensionnement des murs de soutènement, l'auteur a effectué des essais sur modèles réduits relatifs à certains types de ces murs. L'article rend compte des essais sur modèles de murs de soutènement à contreforts et en fait connaître les résultats. Les résultats expérimentaux sont venus appuyer les considérations théoriques. Le comportement sous charge des murs de soutènement a contreforts a permis de tirer quelques conclusions importantes sur l'influence de la forme, de la distance et de la rugosité des contreforts. Lors des essais, on a utilisé un nouveau type d'appareil pour mesurer la pression sur le sol, qui a fait ses preuves et dont l'emploi peut être aussi recommandé dans la construction des ouvrages d'art.

Моделирование опорных стен *(Ф. Ковачхази).* Автор в интересах усовершенствования методик расчета опорных стен по некоторым типам опорных стен провел опыты на моделях. В данной статье автор описывает опыты, проведенные на моделях ребристых опорных стен, и полученные при этом результаты. Опытные результаты подтвердили теоретические соображения. На основе поведения под нагрузкой моделей ребристых опорных стен можно сделать точные выводы относительно воздействия расстояния друг от друга ребер, их формы и их шероховатости. Анализируемое устройство для измерения напряжения подошвы хорошо оправдало себя при опытах на моделях, таким образом устройство можно применять также при строительстве технических сооружений.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 62 (1—2), pp. 203—234 (1968)

PRINCIPES DE LA CONSERVATION ET DE LA RESTAURATION DES MONUMENTS HISTORIQUES*

M. HORLER**
INTENDANCE DES MONUMENTS HISTORIQUES, BUDAPEST

[Manuscrit reçu le 26 septembre 1967]

L'étude résume les principes approuvés et appliqués dans la pratique hongroise de la protection des monuments historiques, en conformité avec la Charte Internationale sur la Conservation et la Restauration des Monuments adoptée en 1964 à Venise.

1. Introduction

Les travaux de conservation et de restauration des monuments historiques visent à sauvegarder les valeurs du patrimoine culturel en conservant, dans leur état authentique, des documents historiques et des oeuvres d'art irremplaçables. Du fait que les monuments, témoins de la culture constituent en même temps des sources majeures de la science historique, la protection des monuments a dès le début, senti la nécessité d'avoir une base théorique pour faire reconnaître et justifier son existence. Les premières positions de principe ont été prises au siècle dernier, sous forme de déclarations personnelles, d'articles, etc . . . Mais ce n'est qu'en 1931 que les principes de la conservation et de la restauration des monuments furent fixés et adoptés à l'échelle internationale par la Charte d'Athènes qui servit aussi de première définition des principes modernes de protection des monuments. Le temps écoulé depuis a rendu nécessaire de réexaminer sur le plan international la situation de la protection des monuments en vue de redéfinir les constatations et les principes antérieurement établis en leur donnant une portée plus large et un contenu plus moderne. C'est ce qui a été fait au IIe Congrès International des Architectes et Techniciens des Monuments Historiques tenu en 1964 à Venise et qui créa le nouveau document international de la conservation et de la restauration des monuments, à savoir la Charte de Venise.

Cette Charte de 1964 a dégagé dans leurs grandes lignes et défini sur le plan international les principes fondamentaux qui doivent présider à la conservation et à la restauration des monuments historiques, tout en laissant à

* Étude faite sur demande de la Commission pour l'Histoire et la Théorie de l'Architecture de l'Académie des Sciences de Hongrie. L'étude utilisant les résultats de l'enquête de 1965 sur la conservation et la restauration des monuments, prépare la prise de position de la Commission académique concernant les méthodes de restauration à adopter.

** Miklós HORLER, Tárnok u. 5. Budapest I. (Hongrie).

chaque nation le soin d'assurer l'application de ces principes dans le cadre de sa propre culture et de ses propres traditions. En Hongrie, les principes et les méthodes de la protection des monuments ont été en partie fixés et en partie



Fig. 1. Antécédents historiques. — Zsámbék, ruines d'église conservées en 1889 par István Möller. A l'époque des restaurations puristes du XIXe siècle, ces travaux ont marqué la première apparition en Hongrie des principes modernes de conservation et de restauration des monuments

matérialisés dans des restaurations et d'autres entreprises dès avant le Congrès de Venise (figures 1—2). Ces dernières années en effet, notamment en 1962, 1964 et 1965 l'Académie des Sciences de Hongrie a consacré à cette question plusieurs conférences et enquêtes qui ont grandement contribué à l'éclaircissement et à l'unification des problèmes théoriques. Dans ce qui suit, nous tenterons de formuler la conception généralement adoptée et mise en application en Hongrie dans la protection des monuments. Les principes directeurs dont il s'agit — et qui se trouvent d'ailleurs en parfait accord avec la Charte de Venise — s'appuient, d'une part, sur des expériences et sur des constatations tirées d'une pratique menée dans les conditions sociales et historiques particulières à la Hongrie, et d'autre part, sur les échanges de vues professionnels qui furent organisés ces années dernières sur l'initiative de l'Académie des Sciences.

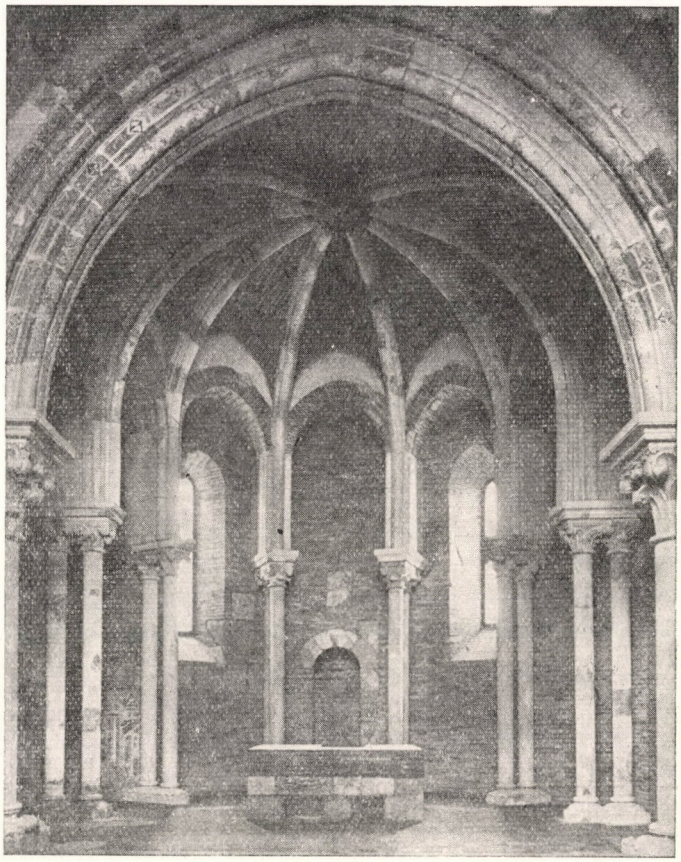


Fig. 2. Antécédents historiques. — Esztergom, chapelle royale restaurée en 1938 par KÁLMÁN LUX et GÉZA LUX. Dans la protection des monuments de Hongrie, elle représente un exemple classique d'application des principes de la Charte d'Athènes

2. Notions et définitions

La notion de monument historique

Les monuments sont des créations architecturales ou des oeuvres d'art se rattachant à l'architecture qui portent témoignage du passé. En raison de leur signification culturelle complexe, on tend à les conserver et à les intégrer dans le cadre de la vie quotidienne. En tant que documents authentiques irremplaçables, les monuments constituent l'expression vivante d'une époque ou d'une évolution sociale et économique. Aussi la contemplation des oeuvres monumentales d'une époque peut-elle donner une expérience directe particulière, qu'il serait impossible d'obtenir d'une autre manière. Le contenu de cette expérience peut être aussi multiple que varié: elle peut communiquer

des connaissances et révéler des données nouvelles, offrir un plaisir esthétique ou avoir un effet éducatif et stimulant. Mais elle est liée chaque fois à la présence de deux facteurs: le contact direct avec l'oeuvre et l'authenticité historique de cette dernière. Il s'ensuit que ni la reproduction, la description ou le relevé, ni la copie, la maquette ou même le plan original — bien que nous mettant en contact direct avec l'esprit créateur, — ne sauraient faire éprouver l'impression spéciale produite par le monument original lui-même.

La valeur du monument

Les facteurs déterminant la valeur d'un monument sont liés dans chaque cas à un contexte historique; ils se différencient en outre, conformément aux valeurs culturelles universelles de la science, de l'art et de la morale. La valeur du monument historique comporte donc trois composantes qu'il faut considérer tour à tour au moment de l'appréciation: la valeur documentaire, la valeur esthétique, et l'effet éducatif ou la valeur morale. Ces trois facteurs peuvent se manifester séparément ou conjuguer leur effet; la valeur du monument sera toujours considérée comme leur résultante. Les composantes de la valeur attribuée à un monument ont, dans le fond, un caractère historique et elles reflètent par là même la conception du monde et la manière de voir d'une époque.

Les buts de la protection des monuments

De la valeur et de la notion même de monument historique découle un certain nombre de travaux requis par ce dernier. Il s'agit de mettre tout en oeuvre pour entretenir, protéger et conserver dans leur état original les monuments et de rendre accessibles à tout le monde leurs valeurs intrinsèques.

Plus concrètement, cela signifie qu'il faut les intégrer à notre vie sociale et économique; assurer les conditions politiques, juridiques, urbanistiques et économiques de leur conservation; explorer leur passé historique par un travail systématique et minutieux et vérifier leur authenticité dans l'intérêt de la conservation et de la restauration; effectuer sur cette base les interventions nécessaires pour maintenir en état le monument et le dégager des éléments sans valeur des couches qui déforment son état primitif.

Une autre partie des tâches concerne l'affectation du monument à une fonction éducative ou utilitaire. Dans ce but, les données relatives au monument et intéressant l'histoire de l'architecture, une fois mises au jour et analysées, doivent être étudiées systématiquement et respectées au cours de la restauration; les monuments doivent être rendus accessibles à l'ensemble de la société; il faut s'efforcer à ce que l'impression directe, particulière et irremplaçable qu'ils font naître, puisse s'exercer dans sa plénitude, que le public le plus large puisse se familiariser avec la juste interprétation de la notion de monument et

prendre conscience de l'importance et de la valeur des monuments; il faut enfin chercher, pour les édifices affectés à une fonction pratique, l'affectation qui leur convienne le mieux du double point de vue de leurs données et des exigences de la vie actuelle.

Travaux relevant de la protection des monuments

Les interventions pratiques que comporte la protection des monuments peuvent aller depuis la simple réparation des altérations dues au vieillissement ou à l'usage, jusqu'aux travaux de restauration pouvant entraîner des modifications plus importantes.

La conservation

On appelle conservation l'ensemble des interventions destinées à conserver, protéger, consolider et entretenir un monument sans en modifier l'état existant, y compris son emplacement original, sa substance, ses installations et son cadre traditionnel.

La restauration

La notion de restauration comprend, en dehors de celles mentionnées, toute opération entraînant une modification quelconque de l'état existant et visant, en plus de la protection, à mettre au jour et à mieux révéler les valeurs esthétiques et historiques du monument.

Un certain nombre d'opérations de ces catégories ne relèvent pas spécifiquement de la conservation et de la restauration des monuments et ne nécessitent donc pas une définition à part. Par contre, il y en a d'autres dont l'interprétation et la définition présentent un haut intérêt du point de vue de l'adoption d'une pratique uniforme. Ce sont les travaux de reconstitution, de complément, d'anastylose et de reconstruction.

La reconstitution

La reconstitution est une opération scientifique théorique, par laquelle on tente d'établir et de fixer soit par dessin, soit par description, l'état antérieur et déjà inexistant d'un monument. La reconstitution peut se rapporter à l'ensemble ou à une partie du monument et aux différentes périodes de sa construction. L'authenticité de la reconstitution dépend de la quantité, du degré d'authenticité et de l'exactitude des données dont on dispose et peut comporter de très nombreux degrés depuis l'authenticité indubitable et parfaite jusqu' aux tentatives de reconstitution conjecturale, basées sur de simples hypothèses et

sur des analogies. La reconstitution théorique est un auxiliaire important du travail de restauration effectué sur une base scientifique et s'avère être, dans la plupart des cas, un instrument indispensable pour le restaurateur.

Toutes les opérations ayant pour but la restauration de parties détruites, notamment le travail de complément, l'anastylose et la reconstruction se basent sur le travail de reconstitution théorique et en constituent dans une certaine mesure la réalisation.

Le complément

On appelle travail de complément l'opération qui consiste à reproduire une partie manquante du monument, en vue d'assurer soit l'unité structurale ou celle de la forme, soit la meilleure compréhension des parties en état de conservation fragmentaire. Le complément peut se faire avec des matériaux et sous une forme identiques ou différents de l'original, mais il ne signifie jamais la reconstruction de l'ensemble ou même d'une partie importante du monument. C'est même son trait essentiel de n'intéresser que des éléments qui reçoivent tout leur sens des parties existantes originales. Il découle de la notion de complément que celui-ci suppose toujours la prédominance des parties restées conservées en original, en comparaison desquelles les compléments ne peuvent jouer qu'un rôle nettement secondaire du point de vue quantitatif ou de celui qui concerne leur importance et leur effet.

L'anastylose

L'anastylose consiste à recomposer les parties existantes mais démembrées d'un monument, opération par laquelle celles-ci reprennent leur fonction et leur rôle dans l'architecture originale. Son trait caractéristique est que les formes du monument sont recomposées ici à partir des matériaux primitifs. L'anastylose signifie donc la recomposition des parties d'un édifice tombé en ruines, à partir d'éléments porteurs des formes architecturales originales.

Reconstruction

On appelle reconstruction l'exécution d'une partie suivie ou de l'ensemble du monument avec des matériaux nouveaux dans leur majorité. Le travail de reconstruction repose, de son côté, sur les résultats de la reconstitution théorique, mais dans ce cas, les parties exécutées avec des matériaux nouveaux dominent par leur quantité, leur importance et leur effet, en comparaison des parties originales.

3. Conservation et restauration

Facteurs intervenant dans la conservation et la restauration

Les facteurs influant sur le choix des méthodes de conservation et de restauration sont de deux ordres. Il y a d'abord ceux qui découlent de la qualité même de monument: le besoin d'authenticité historique et celui d'un contact direct avec le monument, témoin d'art et d'histoire. Il y a ensuite d'autres facteurs déterminants, indépendants de la qualité de monument, à savoir le genre, les matériaux et l'époque de la construction. Par conséquent, les problèmes relatifs à la conservation et à la restauration des monuments peuvent se différencier suivant qu'il s'agit, par exemple, de maisons d'habitation, de châteaux ou d'églises, comporter des solutions particulières pour les édifices du moyen âge ou de l'âge baroque, ou se diversifier selon les cas de restauration de pierres, de briques, d'enduit, de stuc, de fresques, de bois, de fer, de vitraux ou de mosaïques.

Quand on cherche donc le meilleur moyen de résoudre une tâche concrète, il faut examiner d'abord les interventions nécessaires et ensuite les répercussions que ces interventions — compte tenu du genre, de l'époque et des matériaux de construction — peuvent avoir sur le fond même et sur la valeur intrinsèque du monument.

Les conditions historiques particulières des monuments de Hongrie ne devant jamais être perdues de vue lors de l'application des principes généraux, l'appréciation des données relatives au genre, à l'époque et aux matériaux en tiendra forcément compte, en leur accordant tout l'intérêt qu'elles méritent. A ce propos, on peut souligner d'une part le fait de la destruction massive de nos monuments d'avant l'occupation turque (c'est-à-dire du moyen âge et de la renaissance) et l'intérêt que revêtent, par là même, des monuments fragmentaires ou comportant plusieurs états superposés et des monuments en ruines, et d'autre part l'influence des matériaux de construction d'origine locale et des conditions climatiques propres au pays.

Les travaux de conservation et de restauration que nécessite la protection des monuments se trouvent, au cours de l'exécution, en contradiction plus ou moins flagrante avec des exigences aussi fondamentales que la préservation de l'état original ou du caractère d'authenticité historique, car ces travaux ne vont jamais sans apporter quelque changement à l'état antérieur du monument. Ce changement découle de la nature même des travaux et des buts que se proposent la conservation, la consolidation, l'aménagement et la mise en valeur. Il est, d'une part, inévitable d'enlever certaines parties de la substance existante (originale) au cours des interventions qui s'imposent et, d'autre part, on en ajoute aussi presque toujours de nouvelles. Alors même que le respect de la valeur du monument et le besoin d'un contact direct avec le document d'art et d'histoire nous font réduire les changements au strict minimum, la modifi-

cation de l'état original apparaît comme inévitable si l'on veut résoudre les problèmes architecturaux posés par la protection du monument.

C'est la mise en balance des divers facteurs en jeu qui fournit la solution. Le monument, témoin d'histoire, vaut surtout par son authenticité. Aussi quand, par un souci de protection exigée par la vie actuelle, on lui fait subir certaines modifications nécessaires, il faut toujours considérer la mesure dans laquelle ces modifications qui enlèvent ou ajoutent quelque chose, altèrent l'authenticité historique du monument; combien elles vont diminuer sa valeur ou même l'augmenter éventuellement en mettant au jour des valeurs jusque-là cachées; enfin, quels sont les motifs pouvant justifier la diminution éventuelle de la valeur du monument.

Il s'entend que ce travail d'appréciation ou l'établissement d'un tel bilan devra être refait pour chaque cas individuel, l'importance des valeurs mises en parallèle et la proportion des modifications prévues variant d'un cas à l'autre. Sous ce rapport, tous les problèmes ont donc une solution particulière. Ce qui demeure constant, en revanche, ce sont le schéma conceptuel dans lequel les données concrètes sont à substituer et les directives qui doivent nous guider dans l'appréciation et la prise des décisions nécessaires. Quand il s'agit de modifications à apporter à des monuments de haute valeur, dont il faut éliminer ou dégager certaines couches historiques, la décision ne peut jamais dépendre d'un seul spécialiste, mais doit s'appuyer sur le jugement et la prise de position unanimes de plusieurs personnes compétentes.

Les trois catégories fondamentales de modifications pouvant être apportées à un monument sont: l'élimination de parties existantes, le complément, et l'adjonction de parties nouvelles n'ayant pas existé primitivement.

Élimination de parties existantes

On qualifie d'élimination toute opération destinée à enlever, dans un but quelconque, n'importe quelle partie du matériau existant d'un monument. Au cours de la solution architecturale des problèmes que pose la protection des monuments, l'enlèvement peut s'imposer pour plusieurs raisons. L'une d'elles est le travail même de conservation du monument, destiné à empêcher ou à limiter le processus de vieillissement naturel, ou à réparer les dégâts survenus à la suite de ce processus. Au cours du travail sont enlevés généralement tous les éléments structuraux trop altérés pour pouvoir être conservés dans leur état actuel, soit qu'ils menacent de s'écrouler, soit qu'ils ne puissent plus être consolidés par les moyens techniques actuels et rendus aptes à remplir leur rôle fonctionnel, soit qu'ils constituent un danger pour la sécurité publique.

Naturellement, il faut s'efforcer de réduire au minimum les parties à éliminer pour des raisons techniques. La décision doit être précédée chaque

fois par un examen technique approfondi et il faut développer aussi, par un effort incessant les moyens techniques et technologiques permettant de conserver, de maintenir en place et de consolider les structures originales.

Conservation des parties usées

Le monument en tant que témoin du passé, suppose naturellement un certain degré de vieillissement. Aussi la conservation et la restauration ne consisteront-elles pas à enlever et à remplacer toutes les parties usées, ébréchées ou fissurées, en cédant à un besoin esthétique mal compris. L'intervention ayant pour but de conserver et non pas de renouveler l'édifice, il s'ensuit qu'à part les considérations structurales déjà mentionnées, la restauration des parties originales n'est permise que dans une mesure telle que l'ensemble de l'édifice ne donne pas une impression de délabrement et d'abandon.

Protection des éléments de sculpture

L'édifice peut comporter des éléments de sculpture présentant une valeur individuelle en tant qu'oeuvres représentatives de leur époque, qui offrent à ce titre un haut intérêt non seulement comme parties du monument, mais aussi comme oeuvres sculpturales indépendantes. L'enlèvement et la conservation en musée du détail en question ne peuvent être admis, en dernière ressource, que lorsque celui-ci serait, sans cette mesure, menacé de destruction. Mais dans la grande majorité des cas, ces parties sont moins précieuses par elles-mêmes que dans leur relation avec le reste du monument. En les séparant de leur contexte, on peut certes en prolonger l'existence, mais on sacrifie alors fatalement l'impression d'authenticité que donnait l'ensemble de l'édifice. Il faut donc des raisons extrêmement valables pour enlever des détails originaux en vue de leur conservation au musée et l'on utilisera tous les moyens possibles, y compris l'application de toitures de protection, de recouvrements périodiques, etc . . ., pour pouvoir les laisser à leur place originale.

Détachement de peintures murales

Pour les peintures murales, il peut être nécessaire de les détacher du mur ou de l'enduit original pour en assurer la conservation. Mais même en procédant avec le maximum de soins on endommage inévitablement certains détails de la surface, il faut ainsi faire des retouches et des réparations à l'endroit des coupures, etc., aussi cette solution ne sera-t-elle adoptée qu'en dernière extrémité. On n'aura recours au détachement qu'en l'absence complète de tout autre moyen de fixer et de préserver la peinture à sa place originale.

Même dans ce cas, la peinture une fois détachée et fixée devra être replacée, autant que possible, à l'endroit initial en sorte que son rapport organique avec l'édifice puisse s'affirmer comme auparavant.



Fig. 3. Élimination de parties sans valeur. — Budapest, 2 rue Országház. Arcade gothique murée, avant le dégagement

Présentation de plusieurs états superposés

Certaines parties du monument peuvent être enlevées définitivement, soit parce qu'un ou plusieurs états superposés correspondant aux périodes de construction successives sont sans valeur du point de vue historique et que leur présence empêche les parties vraiment précieuses de produire leur plein effet (figures 3—4), soit parce qu'ils masquent un état antérieur présentant un plus haut intérêt et dont le dégagement et la mise au jour s'imposent au prix même du sacrifice de la période postérieure (figures 5—6). Bien que les monu-

ments soient l'expression non pas d'une époque, mais de la continuité historique, on ne saurait considérer toutes les couches historiques comme ayant la même valeur et méritant d'être conservées au même titre. Une partie en est,

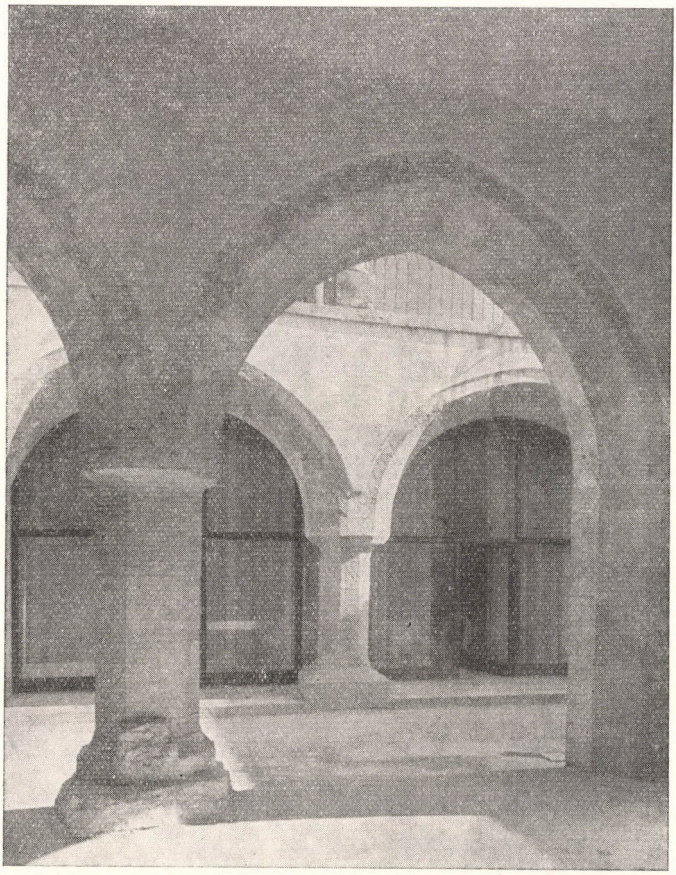


Fig. 4. Élimination de parties sans valeur. — Budapest, 2 rue Országház. Arcades gothiques après le dégagement. Sur l'emplacement des vieux logements démolis, on a construit un restaurant. (Architectes: J. CSEMEGI—A. BUDAI 1959—63)

en effet, sans intérêt ou ne présente qu'une valeur purement documentaire, et le simple enregistrement de leurs données peut suffire, tandis que d'autres ont une vraie valeur de monument qui justifie leur présentation. Le choix de ces dernières est affaire d'appréciation.

En cherchant la solution juste, il faut examiner deux aspects de l'ensemble de problèmes. On devra considérer d'abord la valeur des périodes à enlever ou à mettre au jour. Citons à ce propos un problème très fréquent dans la pratique hongroise, celui de l'élimination des parties datant des XVIIIe—XIXe siècles, superposées à des antécédents du moyen âge.

L'autre problème est de savoir dans quelle mesure l'éventuelle présentation simultanée va modifier l'aspect architectural de l'ensemble de l'édifice. Notons à cet égard qu'il faut se garder d'adopter des solutions outrées juxtaposant aux parties d'une valeur réelle des restes qui ne présentent qu'un intérêt documentaire. Par ce procédé, l'édifice peut revêtir l'aspect d'une préparation



Fig. 5. Élimination de parties moins précieuses. — Mátraverebély, choeur d'une église paroissiale du moyen âge. La voûte construite en 1793 avait changé l'intérieur du choeur gothique. La voûte baroque présentait dans ce cas une valeur moindre, que l'on pouvait sacrifier afin de présenter l'état gothique original

scientifique et perdre son effet d'ensemble harmonieux, sans parler de cette surabondance d'éléments hétéroclites qui rendra difficile la reconnaissance, précisément, des périodes vraiment essentielles. Il faudra par conséquent faire preuve de modération pour que l'appréciation soit juste.

D'un autre côté, il faut souligner qu'en raison même de la destruction massive de l'architecture médiévale de Hongrie, on doit attribuer une impor-

tance accrue aux fragments individuels, qui sont à apprécier aussi dans l'effet d'ensemble.

Pour conclure: une grande réserve s'impose en ce qui concerne le sacrifice définitif des parties datant des XVIIIe et XIXe siècles; il faut éviter de

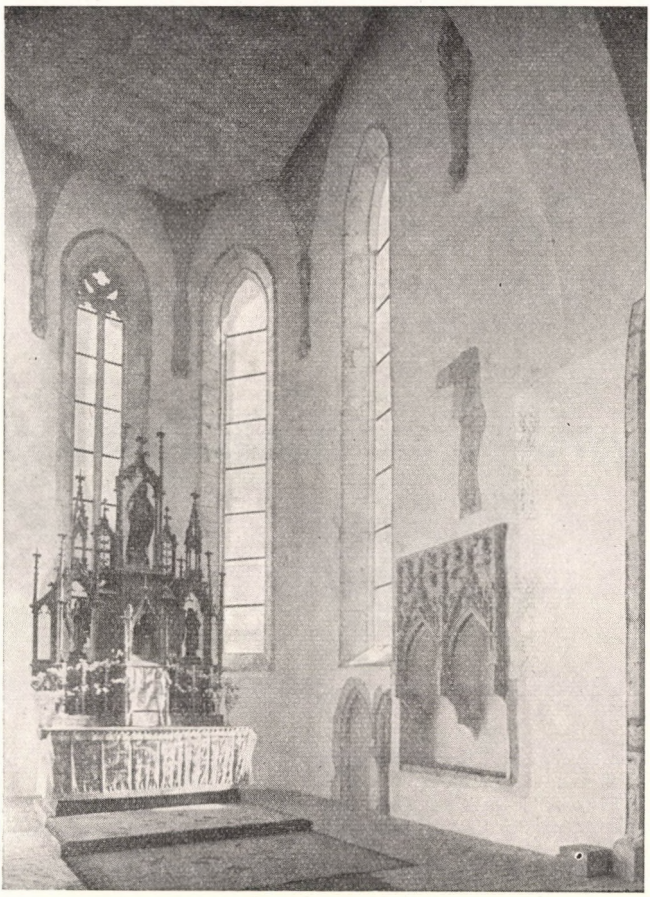


Fig. 6. Élimination de parties moins précieuses. — Mátraverebély, choeur d'une église paroissiale du moyen âge, après la restauration. Par le dégagement des fenêtres gothiques et des fragments de voûte, le choeur a repris ses proportions médiévales. Les remplages manquants n'ont pas été reconstruits. A l'emplacement de la voûte gothique détruite, un plafond en planches suspendu indique la hauteur approximative de l'intérieur. (Architecte: T. KOPPÁNY 1963)

présenter tous les détails d'un édifice au détriment de l'unité architecturale, tout en s'efforcant de mettre en valeur les fragments plus importants datant du moyen âge (figures 7—8).



Fig. 7. Présentation simultanée de plusieurs périodes historiques. — Pannonhalma, cloître de l'abbaye bénédictine. Le portail du réfectoire de l'époque romane avait été maçonné lors de la construction de la voûte gothique. Après son dégagement, les deux périodes également importantes ont dû être présentées ensemble. Les retombées de la voûte gothique sont suspendues à une poutre d'acier dissimulée. (Architecte: J. SEDLMAYR 1962)

Peintures murales à plusieurs couches

En cas de peintures murales comportant plusieurs couches, le détachement éventuel de la couche supérieure n'en signifie pas forcément la destruction, puisqu'elle peut être conservée à part. Pourtant, le dégagement destiné à mettre au jour un état antérieur ne saurait être admis que dans des cas bien motivés, vu la difficulté q'uil y a à déterminer d'avance l'état de conservation et la qualité de toute l'étendue de la couche datant d'une période antérieure. En cas de peintures ornementales surtout, il est possible de présenter simultanément des couches correspondant à différentes périodes; on se contente alors de présenter une partie seulement de la couche sous-jacente, à l'endroit de



Fig. 8. Présentation simultanée de plusieurs périodes historiques. — Sopron, église St-Georges. Lors de la restauration de la façade baroque de cette église médiévale transformée au XVIIIe siècle, on a retrouvé les tympans gothiques ornés de reliefs. Ces détails précieux ont été présentés avec conservation de l'architecture baroque. (Architecte: J. SEDLMAYR 1962)

l'altération ou de l'enlèvement partiel de la couche supérieure. Le point de vue esthétique doit être naturellement respecté dans une telle solution.

Utilisation pratique

Quand des édifices classés monuments historiques sont affectés à une fonction utile, la nouvelle fonction nécessite d'ordinaire des modifications plus ou moins substantielles, qui impliquent l'élimination d'un certain nombre de détails originaux. Ces édifices construits à d'autres époques pour d'autres destinations ne se prêtent généralement pas, tels quels, aux exigences de notre vie actuelle. Il convient de souligner, à ce propos, que chaque édifice forme un tout homogène et uni traduisant son époque non seulement par sa façade, mais

par l'organisme vivant et complexe que constituent ensemble sa disposition intérieure, son plan, sa structure et ses matériaux. Si on lui attribue de la valeur, c'est précisément parce qu'il reflète l'époque qui l'avait créé pour satisfaire ses propres besoins.

Quant aux monuments d'architecture rurale, toute l'unité économique, théâtre de la vie économique d'autrefois comportant la totalité des bâtiments



Fig. 9. Utilisation. — Sopron, maison Caesar. Aux locaux impropres à l'habitation, il fallat chercher une utilisation respectant le caractère de l'édifice. L'aile médiévale de la maison Caesar a été aménagée en taverne. (Architecte: Mme KISS, née J. NAGYPÁL 1963)

d'exploitation et des dépendances, doit être considérée en outre comme faisant partie intégrante du monument.

Les éliminations à faire en vue de l'affectation nouvelle d'un monument ne peuvent donc nullement signifier qu'on renonce à en conserver l'intérieur, sous prétexte que la fonction doit déterminer à elle seule, ce qu'il faut enlever de l'original. La sauvegarde du caractère d'authenticité historique doit porter aussi sur l'intérieur de l'édifice, ce qui veut dire pratiquement qu'on doit déterminer l'affectation en fonction du plan et de la structure de l'édifice existant, au lieu d'adapter de force le monument à des besoins dictés par un programme mal établi (figures 9—10).

L'intégration des monuments à notre vie actuelle est la meilleure garantie de leur sauvegarde. Alors même que leur utilisation pratique proprement dite est impossible, ils ont un rôle vivant en vertu de leur valeur culturelle.

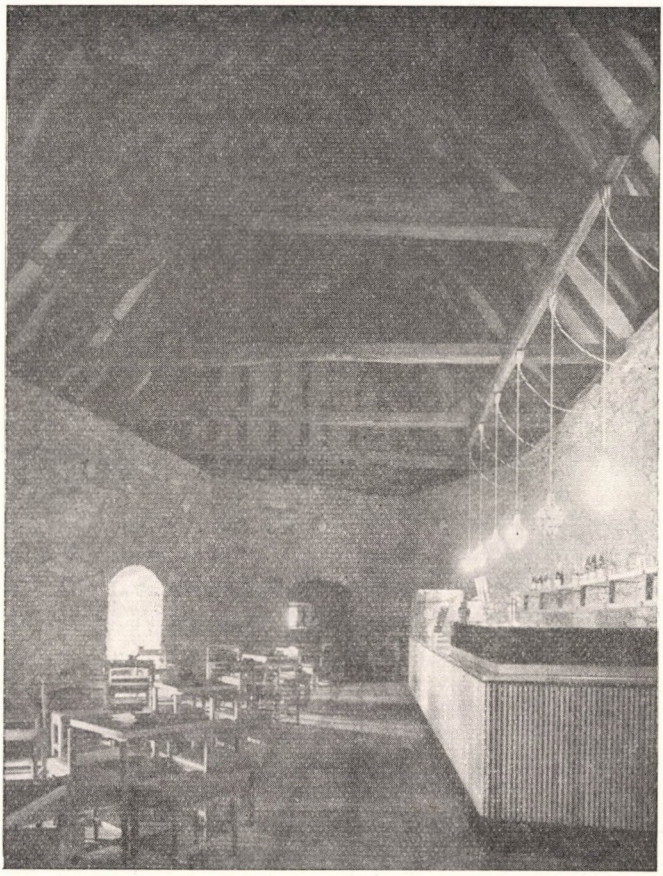


Fig. 10. Utilisation. — Kőszeg, «grand bastion». Ce fort du moyen âge est mis aujourd'hui au service du tourisme. Bar aménagé à l'intérieur du bastion. (Architecte: J. SEDLMAYR 1962)

Aussi la mise en valeur des monuments signifie-t-elle avant tout une affirmation des valeurs culturelles qu'ils représentent, ce qui fait recommander la présentation sur place, en rapport avec l'édifice, de toutes les annexes et du matériel archéologique découvert.

La restauration peut comporter, à côté de l'enlèvement de certaines parties, une autre sorte de modification consistant, au contraire, à ajouter quelque chose au monument, soit qu'on y remplace des détails enlevés par des parties

nouvelles, soit qu'on reconstruise des parties manquantes, soit enfin qu'on incorpore dans l'ancien bâtiment de nouveaux éléments architecturaux ou qu'on y ajoute une annexe de réalisation nouvelle.

L'originalité des matériaux

Dans le remplacement et le complément, la question de l'originalité des matériaux utilisés apparaît comme un facteur décisif. La forme architecturale ne saurait, en effet, être distinguée des structures et des matériaux qui la portent. La même remarque est, en somme, valable aussi pour les éléments de sculpture, de peinture et de décoration. On ne peut parler de l'authenticité absolue des formes que si celles-ci sont restées conservées dans les matériaux primitifs. Le caractère unique et individuel de l'acte créateur de formes fait que l'artiste lui-même ne saurait reproduire celles-ci d'une façon entièrement identique. La chose est encore moins possible pour autrui, plusieurs siècles plus tard. Les copies ne donnent donc jamais qu'une image plus ou moins approchante de l'original, mais sans en avoir la valeur. Ce seul fait doit déjà nous faire rechercher tous les moyens de conserver l'original. Mais il y a en outre, le profit scientifique que l'on peut tirer de la connaissance des matériaux et des structures utilisés aux différentes époques, et qui font partie de l'impression complexe que l'on éprouve à la vue du monument. L'originalité des matériaux a donc une importance essentielle, puisqu'elle est inséparable de la notion même de monument.

Les formes étant directement liées à la surface extérieure de la matière, il importe non seulement de conserver la masse des matériaux primitifs, mais aussi d'en garder intacte la surface originale, qui peut présenter le plus haut intérêt. La surface des enduits, le parement des pierres, les revêtements, etc. . . conservés dans leur état primitif contribuent donc pour une bonne part à créer l'impression d'originalité et d'authenticité du monument, et tout travail de remaniement ou de renouvellement qu'on y opère entraîne inévitablement la suppression des formes primitives.

Par suite du vieillissement naturel de ses matériaux, le monument lui-même est exposé à l'effet d'une usure progressive et menacé d'une lente destruction. La protection des monuments a précisément pour tâche d'empêcher, ou du moins de ralentir ce processus. Le plus souvent, la restauration ne va pas sans le remplacement de certaines parties originales et il faut bien le dire, la valeur du monument sort amoindrie de cette intervention. La destruction, le remplacement de tout détail primitif, si petit soit-il, entraîne une certaine diminution de la valeur, la copie n'étant jamais équivalente à l'original. Toute intervention de ce genre constituant donc un pis aller, on a intérêt à la limiter le plus possible.

Compléments

Les compléments et les anastyloses effectués au cours de la restauration peuvent avoir deux buts différents. L'un est d'avoir une meilleure compréhension des anciens rapports et proportions d'un monument resté conservé à l'état fragmentaire, une idée plus claire des principes de la construction et de la conti-

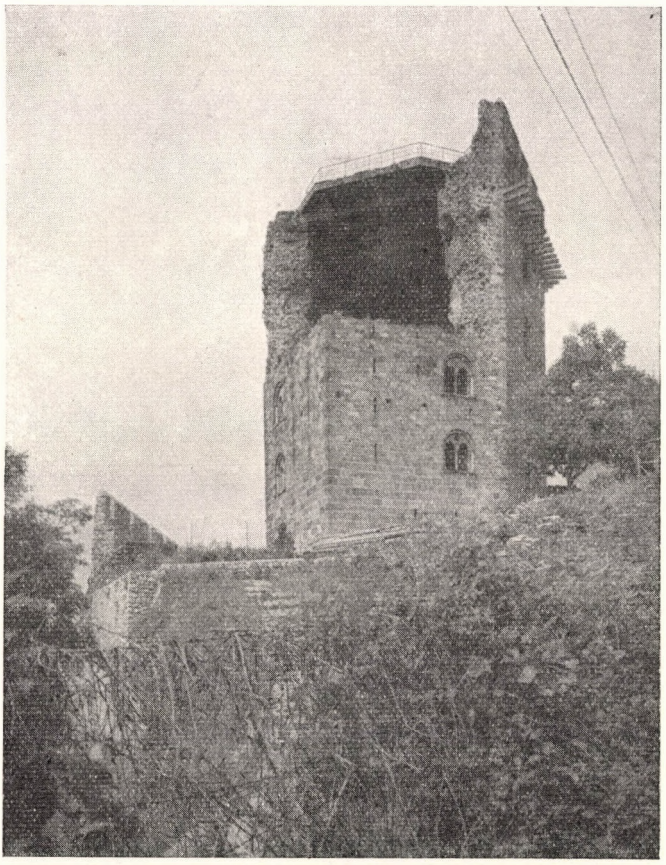


Fig. 11. Complément. — Visegrád, tour Salomon. Le côté sud de la tour construite au XIIIe siècle s'était écroulé au XVIe. Les travaux de restauration entrepris à la fin du XIXe siècle ont été abandonnés

nuité des détails sans lien apparent, autant de raisons qui militent en faveur de la reconstruction à un certain degré des parties manquantes.

L'intervention a pour effet d'enrichir et d'approfondir l'impression que l'on éprouve à la contemplation du monument original incomplet. Le second but que peut se proposer la reconstruction de parties manquantes suivant la conception originale, est de faciliter l'utilisation ou de rétablir l'aspect extérieur et l'unité architecturale du monument incomplet (figures 11—12).

En procédant au travail de complément, il faut tenir compte de trois aspects également importants de la question, qui sont: l'authenticité, le degré et le mode de l'intervention.

L'authenticité des formes est bien le premier critère de tout travail de complément, en l'absence duquel aucune intégration ne saurait être tolérée.

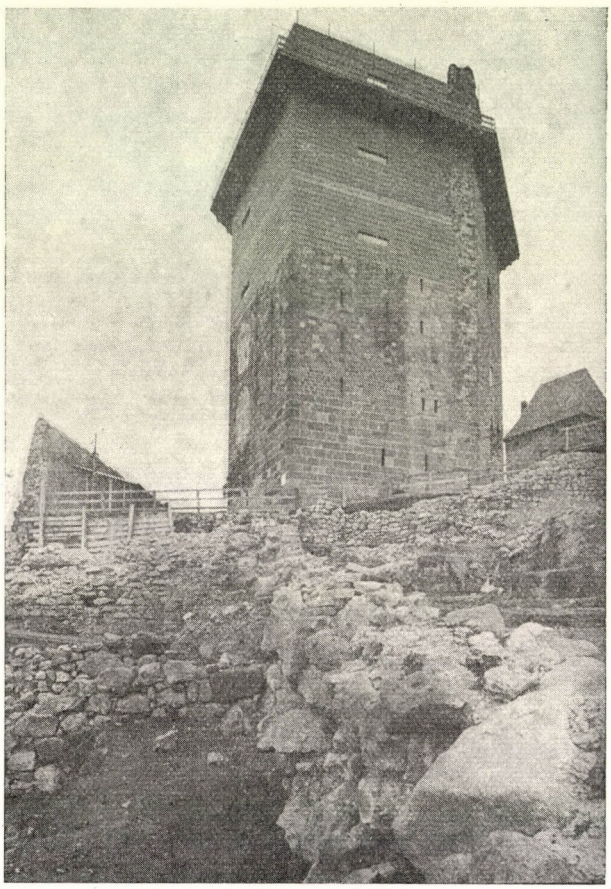


Fig. 12. Complément. — Visegrád, tour Salomon. Pour la restauration définitive, on a utilisé des coques en béton. Les résultats de la restauration du XIXe siècle ont été corrigés pour assurer l'authenticité historique. (Architecte: J. SEDLMAYR 1964)

A la base de la quantité et de la valeur des données scientifiques dont on dispose, on commencera donc par distinguer ce qu'on peut reconstruire avec une authenticité parfaite, de ce qui reste simplement conjectural. Quant à la réalisation effective, c'est-à-dire à l'ampleur de l'intervention, celle-ci est limitée par un autre critère selon lequel la partie originale existante doit prévaloir nettement dans l'effet d'ensemble produit par le monument. Les complé-

ments didactiques dépendent donc, d'une part, de l'existence de données authentiques et d'autre part, des rapports des parties neuves et de l'original. Il s'ensuit que le complément ainsi défini ne saurait prétendre qu'à éveiller les idées et faciliter le travail de reconstruction mentale s'ébauchant à la vue du monument original incomplet (figure 13).



Fig. 13. Reconstruction. — Visegrád, tour Salomon. Pour la reconstruction de la voûte gothique de l'étage supérieur, on a utilisé un filet d'acier donnant une idée de l'intérieur et laissant voir aussi les fragments originaux. (Architecte: J. SEDLMAYR 1966)

Enfin, par respect de l'authenticité historique, le mode d'intégration doit être choisi d'une façon telle que les éléments ajoutés au cours de la restauration se distinguent clairement de l'original. Les matériaux et les méthodes utilisés devront donc être choisis en conséquence (figure 14).

En somme, les mêmes principes sont valables pour les compléments intéressant les éléments de sculpture, de peinture et de décoration, à cette

différence près que leur réalisation se distingue suivant les particularités de l'art dont ils relèvent.

L'anastylose

Le mode de restauration le plus favorable est l'anastylose, par laquelle on évoque l'aspect antérieur d'un édifice ou partie d'édifice tombé en ruine,



Fig. 14. Complément. — Diósgyőr, château-fort. Le mâchicoulis du bastion ayant été détruit une coque en béton donne une idée de son ancien volume. (Architecte: K. Ferenczy 1960)

en en recomposant les parties existantes originales, mais démembrées. L'anastylose est un mode de restauration non seulement possible, mais souhaitable toutes les fois que l'on dispose d'un nombre suffisant de parties originales démembrées, généralement en pierre, qu'il faudrait autrement placer au lapidaire ou mettre en dépôt pour assurer leur conservation. La notion même d'anastylose suppose logiquement l'utilisation d'un certain nombre d'éléments d'in-

tégration. En d'autres termes, l'anastylose théoriquement pure ne peut jamais se réaliser qu'en liaison avec le travail de complément déjà défini (figures 15, 16, 17). Or, d'après cette définition, l'anastylose aussi bien que le complément des parties *in situ* suppose la nette prédominance des parties originales dans l'effet d'ensemble produit par le monument. On ne saurait cependant qualifier d'anastylose la restauration de parties de bâtiment ou de structures, dont la substance aurait été altérée au point de provoquer la destruction définitive des formes originales.

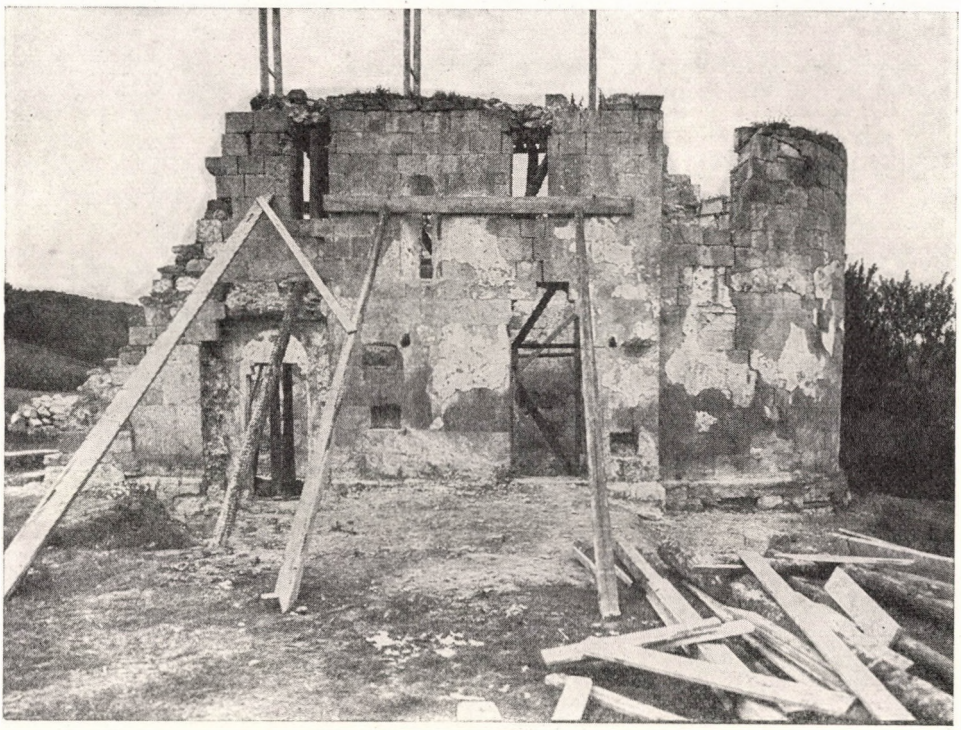


Fig. 15. Complément — anastylose. — Váraszó, église de l'époque romane, agrandie au XVIIIe siècle par démolition de l'architecture romane. Les pierres de l'église romane avaient été utilisées comme matériaux de construction

Déplacement de monuments d'architecture rurale

La situation est, sinon identique, du moins analogue dans une certaine mesure, en cas de déplacement de monuments d'architecture rurale et de leur exposition dans une collection ethnographique de plein air. Pour autant que l'opération du transfert respecte au maximum les structures et la substance originales, il s'agit ici de l'application d'un principe analogue à celui de l'anastylose. Bien que la séparation du cadre traditionnel original diminue dans

chaque cas la valeur du monument, cette solution peut aussi s'imposer en dernière ressource, pour parer au danger d'une destruction totale. Mais il est alors indispensable qu'après le déplacement, la majeure partie des structures originales soit réintégrée à l'édifice, sans quoi l'opération ne relève plus de la protection des monuments.

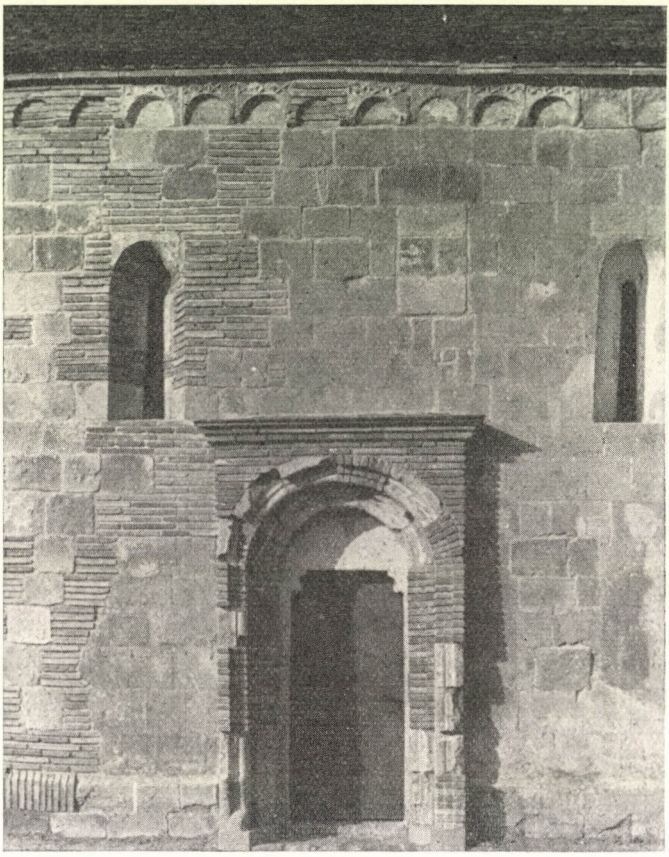


Fig. 16. Complément — anastylose. — Váraszó, église de l'époque romane. Les éléments de l'architecture romane incorporés dans les murs du XVIIIe siècle une fois dégagés, ont été remis à leur place originale. Pour compléter les parties manquantes, on a utilisé des briques. (Architecte: F. ERDEI 1963)

Reconstruction

Chaque fois qu'on utilise, soit en grande partie, soit exclusivement, des matériaux nouveaux pour réaliser les résultats du travail de reconstitution théorique, on parle de reconstruction, qui peut être partielle ou intégrale selon qu'elle porte sur une partie donnée ou sur l'ensemble du monument.

La reconstruction intégrale de monuments détruits est considérée comme un procédé contraire à la notion de protection. Cette opération doit être exclue en principe, comme signifiant une falsification de l'histoire. La construction de copies et de faux conduit à la confusion des justes notions relatives à la protection des monuments et peut compromettre aussi les valeurs historiques réelles, en suscitant à leur égard la méfiance de l'opinion publique.



Fig. 17. Anastylose. — Szombathely, temple d'Isis. Les fragments de corniche du temple romain, remis dans leur position originale, reposent sur une construction en béton évoquant les proportions et le volume des éléments de structure détruits. (Architecte: Gy. Hajnóczy 1962)

Une reconstruction partielle peut être justifiée quand il s'agit de rétablir les parties détruites de bâtiments en usage: maisons d'habitation et édifices publics, en vue de leur utilisation actuelle. Dans ce cas, l'édifice endommagé ne pouvant généralement être conservé à l'état de ruine, on peut soit sacrifier, en la démolissant, la partie restante, soit — si c'est possible et justifié — l'in-

tégrer au nouvel édifice à construire (figures 18—19), soit enfin reconstruire la partie manquante sous sa forme primitive. Les facteurs déterminant le choix de l'opération sont la valeur du monument, base de toute appréciation, le rapport des parties existantes et détruites, le genre et enfin les matériaux de construction de l'édifice.

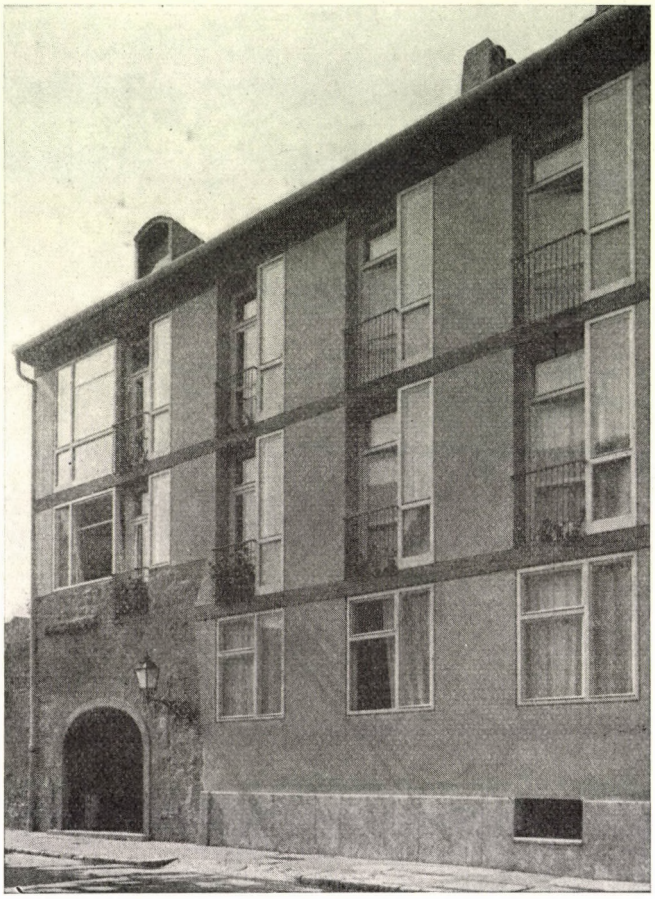


Fig. 18

La reconstruction partielle peut encore se justifier du point de vue didactique, quand elle intéresse un élément ou une unité de composition d'une partie détruite et vise le même but que le travail de complément: faciliter la compréhension du tout et donner une idée de son système architectural. Naturellement, ici encore demeurent valables les critères admis pour le complément, à savoir l'authenticité, l'importance et le mode de l'intervention.

On peut aussi considérer comme une reconstruction partielle l'exécution, à partir de matériaux nouveaux, de certains éléments de structure détruits mais indispensables tels que plancher, toitures, escaliers, etc.

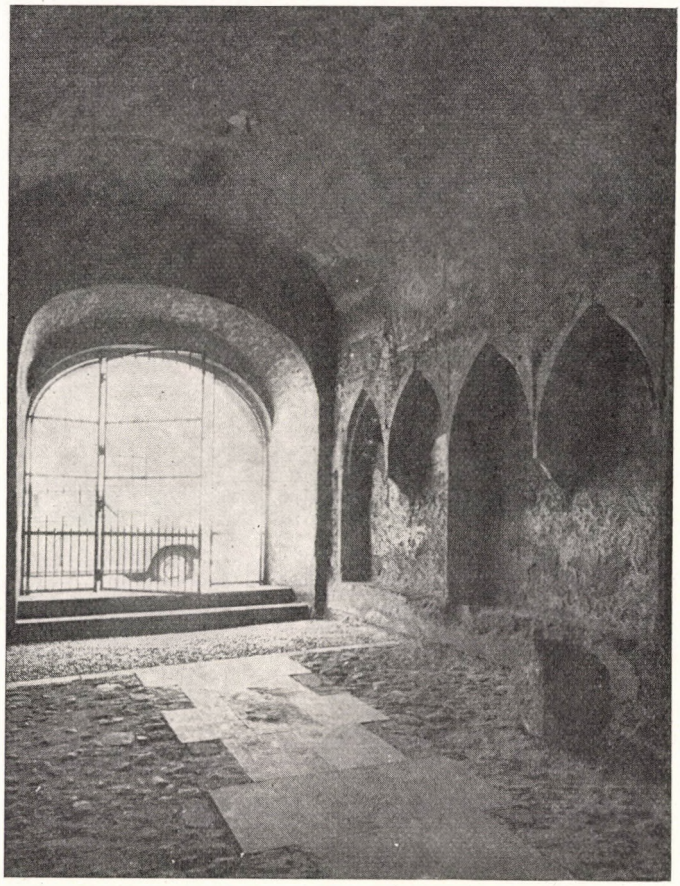


Fig. 19

Fig. 18—19. Intégration. — Budapest, 32 rue Uri. La porte cochère médiévale, conservée de l'ancien bâtiment détruit, a été intégrée à la nouvelle maison d'habitation. (Architecte: Z. Farkasdy 1960)

Adjonction de parties nouvelles

L'aspect du monument peut être enfin modifié par adjonction ou intégration à l'édifice de structures architecturales nouvelles qui n'y figuraient pas auparavant. De telles adjonctions peuvent être motivées soit par la sauvegarde de l'édifice, soit par le souci de présenter ses valeurs monumentales ou archéologiques, soit enfin par son affectation à une fonction nouvelle, comme dans les cas des toitures ou des bâtiments de protection (figure 20), des lapidaires ou des musées, des constructions utilitaires ou mises au service du tourisme.

Pour pouvoir juger de l'opportunité d'une adjonction, il faut en apprécier la nécessité, tenir compte du rapport des parties originales et nouvelles et de l'aspect architectural que présentera le monument après l'intervention. Il est essentiel, sous ce rapport, de choisir correctement le programme et l'affectation nouvelle, qui doivent être chaque fois adaptés au caractère particulier du monument. Une exigence primordiale est que l'aspect d'ensemble du document

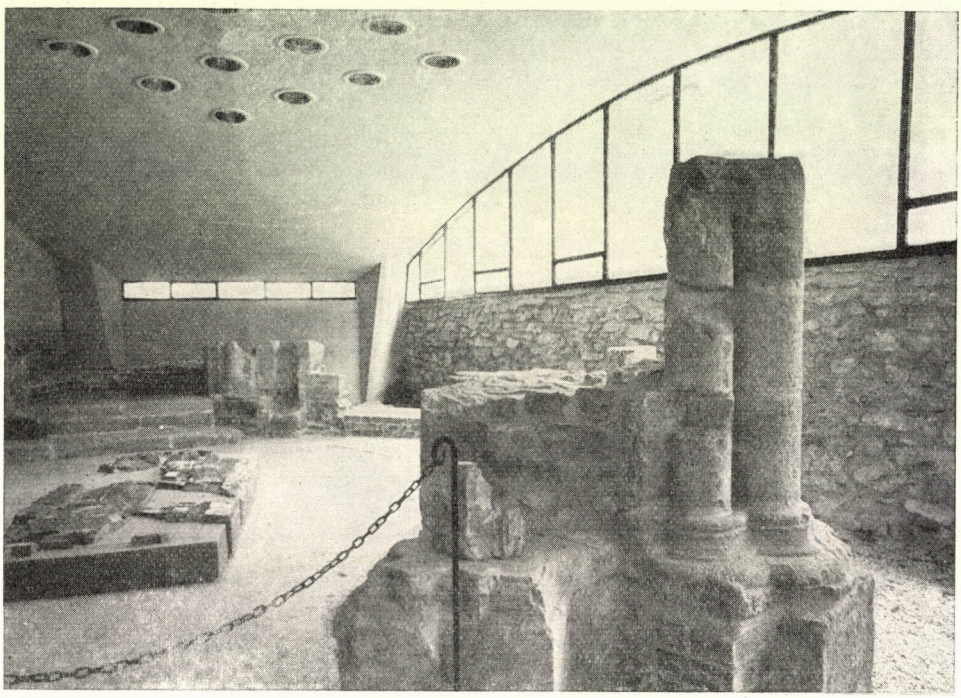


Fig. 20. Adjonction de nouveaux éléments architecturaux. — Veszprém, bâtiment pour la protection des ruines de la Chapelle St-Georges. (Architecte: F. ERDEI 1961)

d'art et d'histoire soit conservé intact et ressorte pleinement malgré les adjonctions.

En ce qui concerne les adjonctions, il faut admettre comme un principe fondamental que l'emploi des techniques modernes et la juxtaposition de formes et de structures anciennes et nouvelles n'ont rien de choquant ou de préjudiciable au monument. Au contraire, c'est la la seule solution correcte, qui fait encore mieux ressortir le caractère d'authenticité historique, au lieu de le diminuer.

4. Recherche et documentation

Points de vue et méthode de la recherche

Le travail de recherche et de documentation relatif à la protection des monuments est régi par deux points de vue fondamentaux propres aux disciplines de la protection du travail et de l'histoire de l'architecture. Bien qu'on poursuive, ici et là, des buts pour la plupart identiques en utilisant des méthodes analogues, les points de vue en question demandent à être définis séparément. La protection des monuments s'appuie sur l'histoire de l'architecture en fixant son choix et portant son jugement sur les objets à préserver. Elle en utilise même les méthodes, mais s'en écarte pourtant quant à son objectif final. Alors que l'histoire de l'architecture étudie les monuments sans se soucier de la nécessité ou des possibilités de leur sauvegarde, la protection des monuments se propose aussi et avant tout de les conserver. Il est donc normal que dans le choix et le jugement sur la valeur des monuments, elle formule et fasse prévaloir ses propres points de vue spéciaux venant s'ajouter à ceux de l'histoire de l'architecture. La protection des monuments adopte donc certains points de vue de cette dernière et lui fournit en revanche une multitude de données précieuses résultant de la recherche, de l'inventaire et du classement des monuments historiques.

Au cours des travaux de conservation et de restauration, on étudie la valeur, l'authenticité et l'histoire du monument, afin d'en faire ressortir et rendre accessibles les valeurs intrinsèques. Pour ce travail on utilise encore les méthodes propres à l'histoire de l'architecture ou à l'histoire de l'art et à l'archéologie, mais au lieu de se contenter d'établir certaines données et certains rapports, on cherche aussi les modes d'application pratique de ces résultats qui enrichissent aussi, tout naturellement, l'histoire de l'architecture.

L'histoire de l'architecture se référant de plus en plus, à côté des sources écrites, à des données et des constatations basées sur les monuments mêmes, sur les conclusions qui en peuvent être tirées, ou sur des détails mis au jour, il n'est pas sans intérêt de savoir jusqu'à quand et par quelles méthodes peuvent être conservés les monuments qui nous restent, ces sources vivantes de la science, et dans quelle mesure l'activité visant leur entretien est susceptible d'augmenter ou de diminuer leur valeur de source. Le travail scientifique ayant pour objet d'établir les principes et les méthodes de la protection des monuments présente donc, au delà de ses visées spéciales, un intérêt presqu'aussi grand pour l'histoire de l'architecture.

Les domaines de recherche

La recherche scientifique relative à la protection des monuments a donc un but déterminé par les tâches concrètes de la sauvegarde; ses méthodes sont celles mêmes de l'histoire de l'architecture, mais adaptées à ce but spécial;

enfin ses résultats servent aussi, directement ou indirectement, l'histoire de l'architecture.

L'activité de recherche ayant trait à la protection des monuments se poursuit en deux domaines principaux, qui sont la recherche des sources écrites et la recherche archéologique. La première comprend la recherche et le classement des données pouvant être découvertes dans les bibliothèques, les archives et les collections des musées, tandis que la seconde concerne l'étude approfondie du monument et de son milieu, par déplâtrage, par dégagement et par fouilles. La recherche est suivie de l'appréciation des données individuelles et de l'éclaircissement des rapports qu'elles permettent de déterminer. Grâce à ces activités on arrive à dégager, avec plus ou moins de détails, l'histoire de la construction du monument. Les deux domaines de recherche se complètent mutuellement.

Documentation

La marche des travaux de recherche et les résultats obtenus doivent être consignés dans la documentation. Celle-ci se propose un double but. Elle sert d'une part de justification scientifique aux interventions opérées et aux méthodes choisies au cours des travaux et rend possible la publication des documents. D'autre part, elle sert à exposer les résultats de la recherche et à consigner les phases du travail de restauration pour l'histoire de l'architecture.

Par conséquent, le travail de documentation scientifique a pour tâche de fixer l'état du monument avant la restauration, d'enregistrer toutes les observations résultant de recherches et d'études antérieures ou parallèles aux travaux de restauration et pouvant intéresser l'histoire de l'art, l'histoire de l'architecture ou l'archéologie, enfin de réunir tout autre donnée scientifique susceptible de changer ou de justifier le mode de restauration choisi.

La documentation scientifique peut s'effectuer le plus utilement en deux étapes. Dans la première, on rassemble tous les résultats et données découverts resp. réunis au cours de la phase préparative de la restauration, qui sont nécessaires pour l'établissement des projets et pour leur approbation. Dans la seconde étape, qui peut être parallèle ou postérieure à la restauration, on enregistre les données, trouvailles ou autres résultats découverts au cours de la réalisation. C'est à ce stade que l'on procède aussi à la révision et au parachèvement de la documentation, à la correction éventuelle des données et des observations antérieures et à la synthèse des résultats définitifs.

Les données et les résultats seront consignés dans la documentation sous forme de rapports, de dessins et de photographies.

Le rapport contient la description de l'état de l'édifice avant la recherche ou la restauration, les données historiques pouvant être établies d'après le témoignage des sources, les comptes rendus des recherches archéologiques et l'histoire de la construction, telle qu'elle peut être reconstituée sur la base de

tous ces résultats. C'est l'exposé historique de la construction qui doit faire la synthèse des différents résultats de la recherche, en considérant l'ensemble du monument comme un tout homogène et en exposant les résultats partiels dans leurs rapports mutuels.

La partie graphique contient les relevés techniques détaillés de l'état antérieur à la recherche, ainsi que les dessins enregistrant les résultats des recherches effectuées sur le monument, chacun des résultats partiels étant représenté dans ses rapports avec l'ensemble de l'édifice. Les diverses périodes historiques définitivement établies doivent être indiquées par des signes graphiques appropriés.

La documentation photographique doit réunir les anciennes images photographiques de l'édifice, les reproductions d'anciens dessins et de gravures et les nouvelles photographies destinées à documenter d'une façon systématique l'état antérieur à la recherche, le déroulement et les résultats de cette dernière, les principales phases des travaux et l'état postérieur à la restauration.

*

Je tiens à exprimer ici mes remerciements à Mm. Dezső Dercsényi, Géza Entz et Frigyes Pogány, ainsi qu'à Mme Anna Zádor qui, sur la demande de la Commission pour l'Histoire et la Théorie de l'Architecture, ont discuté les idées contenues dans cette étude et m'ont aidé par leurs observations précieuses.

LITTÉRATURE

1. Kisléghy Nagy, I.—Pogány, F.: A műemlék helyes értékelése (L'appréciation raisonnée de la valeur des monuments). *Építés-Építészet* **2** (1950), 6. sz. 385—397.
2. Pogány, F.: A városépítéstörténet néhány módszertani kérdése (Quelques problèmes méthodologiques de l'histoire de l'urbanisme). *Építés és Közlekedéstudományi Közlemények* (1957) 1—2. sz. 235.
3. Kisléghi Nagy, I.: A műemléki tervezés néhány irányelve (Quelques principes de la restauration des monuments). *Magyar Építőművészet* **12** (1963) 2. sz. 38—39.
4. Horler, M.: A műemlékvédelem elméleti kérdéseiről (Des questions théoriques de la protection des monuments). *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* **8** (1964) 1—2. sz. 265—292.
5. Horler, M.: Romok műemlékvédelmének módszerei (Les méthodes de protection des ruines). *Műemlékvédelem* **8** (1964) 1. sz. 1—24.
6. Horler, M.: A velencei Carta és a magyar műemlékvédelem időszerű elvi kérdései (La Charte de Venise et les principes fondamentaux actuels de la protection des monuments en Hongrie). *Az ICOMOS Magyar Tagozatának Kiadványai* **1** (1967). 6—26.
7. Pogány, F.: A történeti és esztétikai szempont a műemlékek értékelése és helyreállítása során (Les points de vue historique et esthétique dans l'appréciation et la restauration des monuments). *Ibidem* **1** (1967). 27—36.
8. Entz, G.: A tudományos kutatás eredményeinek érvényesítése a műemlékhelyreállítás gyakorlatában (L'application des résultats de la recherche scientifique dans la pratique de la restauration des monuments). *Ibidem* **1** (1967). 106—113.
9. Vargha, L.: Az anyag és hely eredetiségének szempontja a népi építészet emlékeinek védelme során (L'importance de l'originalité des matériaux et du lieu dans la protection des monuments de l'architecture rurale). *Ibidem* **1** (1967). 157—175.

Governing Principles in Renovation of Ancient Monuments. Principles concerning conservation and restoration of ancient monuments considered to be right by the International Charter adopted in Venice, 1964, and being applied in practice by the Hungarian monument protection are summarized.

Richtlinien der Denkmalwiederherstellung. Es werden die der Bewahrung und Wiederherstellung der Denkmäler bezüglichen und in Übereinstimmung mit der in Venedig im Jahre 1964 genehmigten internationalen Charta die für richtig erachteten und in der Praxis des ungarischen Denkmalschutzes geübten Grundsätze zusammengefaßt.

Принципы восстановления памятников *(М. Хорлер)*. В работе сделана попытка обобщить считающиеся правильными и применяемые в венгерской практике по защите памятников принципы Консервации и Реставрации Памятников в согласии с Международным Положением, принятым в Венеции в 1964 году.

RECENSIONES

Beles, A. A.—Soare, M.:

LES PARABOLOÏDES ELLIPTIQUE ET HYPERBOLIQUE DANS LES CONSTRUCTIONS

Dunod, Paris 1967, 686 pages, 206 figures, 60 tableaux

Ce livre est la traduction française de l'ouvrage: «Paraboloidul Elliptic şi Hiperbolic in Construcţii» publié en 1964 en langue roumaine et complété depuis par les plus récentes données de la littérature internationale et surtout par les derniers résultats des investigations des auteurs eux-mêmes.

Le livre se divise en trois parties principales. La première présente sur 180 pages les *éléments généraux* de l'architecture des coques. Elle traite en détail des relations d'équilibre, de déformation et d'élasticité rapportées à des lignes de coordonnées curvilignes et cartésiennes orthogonales. Elle présente aussi la forme simplifiée de ces mêmes relations dans les cas de coques de révolution et de coques surbaissées. La même partie traite ensuite de la géométrie des paraboloïdes elliptique et hyperbolique construits sur des plans de formes diverses et fait connaître les méthodes mathématiques permettant de résoudre les problèmes de coques. On y trouve enfin des explications concernant le principe des méthodes variationnelles d'application fort pratique pour le calcul des coques, suivies de l'exposé des différents procédés numériques.

La seconde partie du livre, contenant 187 pages, fait connaître *la théorie de membrane des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques*. Après l'exposé des solutions élémentaires, les auteurs y passent aux solutions par séries trigonométriques doubles et simples, respectivement aux solutions numériques. Suivent les problèmes de l'état de déformation du paraboloïde elliptique en divers cas de charge et d'appui, ainsi que ceux qui concernent l'état de contraintes et de déformations du paraboloïde hyperbolique rapporté aux génératrices rectilignes et du paraboloïde hyperbolique en selle, problèmes traités dans le cadre de la théorie de membrane.

La troisième partie du livre expose, en 247 pages, *la théorie de la flexion des paraboloïdes elliptique et hyperbolique*. Elle présente la solution des équations de base par la méthode des séries trigonométriques doubles et simples pour des coques construites sur contour rectangulaire et fait connaître différentes méthodes simplifiées de calcul. Des tableaux et diagrammes facilitent le calcul des paraboloïdes de révolution sur contour carré soumis à des charges diverses. Suit la théorie de la flexion des paraboloïdes de révolution sur contour circulaire les auteurs s'occupant en détail des coques surbaissées. Ils font enfin connaître la solution trigonométrique des paraboloïdes hyperboliques en selle, respectivement de ceux rapportés aux génératrices rectilignes.

L'annexe du livre, consacré à la question des grandes déformations des paraboloïdes surbaissés, esquisse aussi le problème de leur stabilité. Les auteurs y proposent aussi une série de différentes formules, de solutions élémentaires et de fonctions exponentielles amorties jouant un rôle dans la théorie des coques.

Comme il ressort de l'énumération ci-dessus, le livre contient toutes les connaissances nécessaires à l'ingénieur voulant résoudre les problèmes des coques à paraboloïde elliptique et hyperbolique. En dehors des ingénieurs constructeurs, il est utile à tous ceux qui s'intéressent aux problèmes des coques du point de vue des coques paraboloïdes mais les méthodes exposées sont également utilisables et généralisables à des coques de différentes formes.

L'énorme documentation littéraire que les auteurs ont réunie et réduite à un commun dénominateur présente un avantage particulier pour l'ingénieur constructeur aussi bien que pour le théoricien. La liste bibliographique figurent à la fin de chaque chapitre et contenant 354 titres, est très utile pour ceux qui veulent poursuivre des investigations plus poussées dans ce domaine. Elle comprend entre autres un grand nombre de publications des auteurs eux-mêmes, parues dans différentes revues scientifiques. Leur publication rehausse encore l'intérêt de cet ouvrage de haute valeur.

Les explications du livre sont claires et faciles à comprendre, son argumentation est convaincante. Malgré le caractère essentiellement théorique du sujet traité, la partie mathématique est limitée, les auteurs cherchant avant tout à faciliter la solution rationnelle de problèmes pratiques. Dans ce but, ils font volontiers appel à des procédés approximatifs et — a côté du traitement analytique — assurent aussi une large place aux méthodes numériques. Les diagrammes, tableaux et exemples numériques complètent de façon heureuse ce livre, que l'on peut recommander chaleureusement à tous ceux qui s'intéressent aux problèmes des coques.

P. Csonka

BETONTECHNISCHE BERICHTE 1966

Beton Verlag GmbH, Düsseldorf

Das Verlagswerk faßt die Ergebnisse einer fortdauernden Beobachtung von Forschungsinstituten zusammen, im Zusammenhang mit der zeitlichenÄnderung der mechanischen Eigenschaften des Betons.

Die bedeutsamsten Untersuchungen und Feststellungen können im folgenden zusammengefaßt werden:

Die Zusammensetzung, Güte und Herstellung der Zemente beeinflussen die Dauerfestigkeit des Betons nicht wesentlich. Die Widerstandsfähigkeit des Betons gegen Sulfate nimmt mit der Verminderung des Ca_3Al-Gehalts zu. Die künstlich hergestellten Luftporen erhöhen die Frostbeständigkeit; dieser Umstand fördert eine vorteilhafte Ausführungsweise, besonders in der Anwendung des Betons im Straßenbau.

In Stallungen kann der glattflächige Stahlbetonbalkenrost mit einem Trapezquerschnitt, hergestellt aus Beton B 300, angewendet werden.

Die aus Beton gefertigte Straßendecke wird durch Korrosion des Gefrierschutzmittels weniger beschädigt, wenn der Luftporengehalt $L_a \geq 3{,}5\%$, die Menge der Poren von 0,3 mm Durchmesser $L_{300} \geq 1{,}5\%$ und der Porenabstand A $F \leq 0{,}2$ mm sind.

Zur Bestimmung des Innen- und Flächenfeuchtigkeitsgehalts des Aggregats wurde von dem Institut Otto Graf ein genaues Verfahren ausgearbeitet. Die Studie erstreckt sich auf die Beschreibung des Meßverfahrens und der Meßgeräte.

Für die Änderung der Festigkeit und Wasserdurchlässigkeit der Betons, in Abhängigkeit vom Zementgehalt, vom Wasserzementwert und Alter, steht eine reichliche Menge von Angaben zur Verfügung. Bei der Herstellung der hochfesten Betons ist es wichtig, eine niedrige Temperatur (+5 °C) und einen Druck von ungefähr 20 kp/cm² während des Abbindevorgangs anzuwenden.

Mit der chemischen Umwandlung des mit Ölen von mineralischer Herkunft getränkten Betons rechnet man nicht; unter der Einwirkung des Öls nimmt die Bruchfestigkeit der Betons um 10 bis 20 Prozent ab, die hochfesten Betons verlieren aber nichts an Festigkeit.

Hinsichtlich der Durchführung der Betoninjektion können die Vorschriften der Vereinigten Staten von Amerika als die geeignetsten angenommen werden.

Die Behandlung der Unterwasserbetonierung enthält außer den wohlbekannten Regeln keine bemerkenswerten Feststellungen.

B. Goschy

M. Soare:

APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE EQUATIONS TO SHELL ANALYSIS

Pergamon Press, Oxford – London – etc. – Publishing House of the Academy of the Socialistic Republic of Roumania, Bucharest 1967, 499 pages. 130 figures, 61 tables, 11 numerical examples (partly in several variations)

This book was published in 1959 under the title "Aplicarea ecuaţiilor cu diferente finite la calculul plăcilor curbe subţiri" in the Roumanian language, and in 1962 under the title "Application des équations aux différences finies au calcul des coques" in French. The present English edition is a variant of the former, partly revised, partly completed, mainly by literary references.

The book is divided into 10 chapters. Chapter I, one of the best in the book, expounds after a brief introduction the fundamental principles and basic relations of the theory of surfaces. It deals in detail with the case of flat shells, further, mainly on ground of NOVOZHILOV's and GOL'DENVEIZER's investigations, with the criticism of the so-called membrane theory.

Chapter II explains methods and basic principles of calculation with finite difference equations and presents the procedures to be applied in the cases of rectangular, oblique and triangular networks. The multilocal method and that of the funicular polygon are also described.

Chapters III and IV apply the methods of finite differences to shells of revolution, whether symmetrically loaded or not. The numerous examples in these chapters offer ample possibility for the critical evaluation of the different procedures.

Chapter V presents the calculation of a spherical shell rectangular in plan with the aid of finite differences, after explaining the membrane theory of double-curved shells having an arbitrary shape. This chapter gives an interesting comparison between results obtained by applying networks with different intervals, also comparing these results with the exact values.

Chapter VI applies the difference method to the investigation of shells of translation. The calculation of the following shells of translation is given so as to provide examples: a shell with circular director curves, rectangular in plan; an elliptic paraboloid shell covering a rectangular plan; a paraboloid shell of revolution over a rhomboidal ground-plan. The cross-checking of the different varieties of calculation lead to instructive statements here too.

Chapter VII contains the applications of difference methods to the calculation of various types of conoid shells.

Chapters VIII and IX apply the difference methods for solving bending problems of shells. Questions relating to shells of revolution loaded by axisymmetrical forces, as well as those of circular cylindrical and folded shells are dealt with.

Chapter X gives a brief survey of the possibilities of solving problems, not to be approached by numerical methods, with the aid of experiments made on models.

Author explains the application of the procedures presented in the book by the detailed elaboration of 11 numerical examples chosen from industrial architecture. It is to be appreciated that in many instances several alternative procedures are used for the solution of the problems. Thus, a chance is given also to compare the amount of work needed for each of these solutions. Comparing the results of the various procedures, it is possible at the same time to see, to what degree the exactitude of the calculation depends on the number of unknowns. All the above-said can serve as an indication to show how fine a network should be chosen in a given case.

It must be emphasized that author carried out pioneer's work by applying the finite difference methods to the analysis of shell structures. A considerable part of the methods described in the book were first introduced by him. This statement refers among others to the application of the funicular method and especially the multilocal method to investigate shell structures. The same is true for the methods elaborated to calculate cooling towers in hyperbolic hyperboloid shape, and conoid shells, as well as for the further development of difference calculation methods in several directions.

Summarizing, it may be stated that Mr. Mircea SOARE's book is an excellent work in every respect satisfying the needs of engineering practice. Being from now on available in English, it is likely to increase the international reputation of its author.

P. Csonka

Márkus, Gy.:

THEORIE UND BERECHNUNG ROTATIONSSYMMETRISCHER BAUWERKE

Akadémiai Kiadó, Budapest 1967, 600 Seiten, 226 Bilder, 81 Tafeln, 69 Diagramme

Dieses Werk ist die vom Werner Verlag, Düsseldorf herausgegebene deutsche Übersetzung des bei dem Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1964 erschienenen Werkes unter dem Titel »Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása«.

Rotationssymmetrische Bauwerke kommen in der Ingenieurpraxis, besonders im Tiefbau, sehr häufig zur Anwendung und oft bereitet ihre Berechnung nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Das vorliegende Buch beschränkt sich auf rotationssymmetrische Belastungsfälle der erwähnten Konstruktionen, mit dem Zweck, ihre Berechnung zu vereinfachen.

Das Buch ist in acht Kapitel gegliedert, wovon das erste die Berechnung der *Kreisplatten* behandelt. Nach einer kurzen theoretischen Einleitung erörtert Verfasser verschiedene Belastungs- und Lagerungsfälle von Kreisplatten von gleichbleibender bzw. veränderlicher Dicke.

Er gibt ein Verfahren zur Lösung des Problems von Kreisplatten mit veränderlicher Dicke mittels der Differenzenmethode. Es werden auch Aufgaben bezüglich Kreisplatten auf elastischer Bettung erschöpfend behandelt. Die Ausführungen werden durch eine überaus reiche, gut übersichtliche Formelsammlung und durch Tafeln für den praktischen Ingenieur besonders nützlich gestaltet.

Das zweite und dritte Kapitel machen den Leser mit dem Problem der *Kreisscheiben* und *Kreisringe* bekannt. Auch hier wird die Behandlung durch eine wertvolle Formelsammlung ergänzt.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Frage der *Rotationsschalen*. Im Rahmen der *Membrantheorie* werden die verschiedensten Belastungsfälle der Zylinder-, Kegel- und Kugelschalen sowie die der elliptischen Rotationsschalen ausführlich behandelt. In der Folge wird die Anwendung der *Biegetheorie* auf Zylinder-, Kegel- und Kugelschalen erörtert, all das von reichlichem Bildmaterial begleitet. Für die Praxis ist die mitgeteilte reiche Formelsammlung von großem Nutzen.

Das fünfte Kapitel befaßt sich mit der Berechnung aus rotationssymmetrischen Elementen *zusammengesetzter Konstruktionen*. Der Gang der Berechnung wird an einem praktischen Beispiel gezeigt.

Kapitel sechs, sieben und acht enthalten ein *Literaturverzeichnis*, *Tafeln* und *Diagramme*. In den Tafeln sind Biegemomente und Querkräfte von Kreis- und Kreisringplatten sowie von durchlaufenden Kreisplatten bei verschiedenen Maßverhältnissen zusammengestellt. In der Tafelsammlung sind reichliche Funktionentafeln für die Thompson-Funktionen und ihre Derivierte sowie für die zur Berechnung von Zylinderschalen notwendigen Angaben zu finden. Die Diagramme bieten eine recht einfache Möglichkeit zur annähernden Behandlung von Kreis- und Kreisringplatten, bzw. von Zylinderschalen.

Das Buch von Gy. MÁRKUS bietet ein ausgezeichnetes Beispiel dafür, wie man die Ergebnisse der Elastizitäts- und Schalentheorie der Praxis unmittelbar zugänglich und für sie verwendbar machen kann. Auch die Erläuterung verschiedener Annäherungsverfahren, die die Vereinfachung der Berechnungen bezwecken, ist äußerst nützlich. Dies bezieht sich hauptsächlich auf die Anwendung des aus der Theorie der Durchlaufträger bekannten Crossschen Verfahrens zur Lösung verschiedener zusammengesetzter Aufgaben, eine Methode, die durch den Verfasser eingeführt wurde. Die in den Text eingefügten praktischen Berechnungsbeispiele bedeuten für das Verständnis eine erhebliche Erleichterung.

Fraglos wird das von Gyula MÁRKUS mit aufopferungsvoller Arbeit und unermüdlichem Fleiß verfaßte Buch — wie in Ungarn — so auch im Ausland eine sehr günstige Aufnahme finden und in der Reihe der in der Ingenieurpraxis unentbehrlichen Fachbücher eine ihm gebührende vornehme Stelle einnehmen.

P. Csonka

Rosman, R.:

GEGLIEDERTE WINDSCHEIBEN MIT STUFENARTIG VERÄNDERLICHEN QUERSCHNITTSWERTEN

Heft 67 der Buchreihe *Bauingenieur-Praxis*. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München 1967; 50 Seiten, 23 Bilder, 7 Zahlentafeln

Dieses Heft ist die organische Ergänzung der vom selben Verfasser geschriebenen und in der Buchreihe *Bauingenieur-Praxis* bereits veröffentlichten zwei Hefte mit den Titeln: *Die statische Berechnung von Hochhauswänden mit Öffnungsreihen* (Heft 65), bzw. *Zahlentafeln für die Schnittkräfte von Windscheiben mit Öffnungsreihen* (Heft 66).

Im Gegensatz zu den vorhergehenden Heften befaßt sich vorliegendes Heft mit Hochhauswindscheiben, deren Querschnitts- und Öffnungswerte im oberen Abschnitt des Gebäudes von denen des unteren Abschnittes verschieden sind. Verfasser behandelt gesondert den Fall wo die Achsenlinien der Öffnungen durchlaufen, d. h. in dem unteren und oberen Gebäudeabschnitt in eine gemeinsame Vertikale fallen und jenen, wo die Öffnungsachsen des unteren Abschnittes im Verhältnis zu denen des oberen Abschnittes seitwärts versetzt sind. Für all diese Fälle gibt er ein Verfahren an, um den Spannungs- und Verformungszustand zu bestimmen. Die Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens beleuchtet er durch interessante Zahlenbeispiele. Die Behandlung wird durch Untersuchung des Einflusses lotrechter Lasten sowie der beim Erdbeben auftretenden Massenkräfte ergänzt.

Professor ROSMAN's Buch wurde für die Baupraxis geschrieben und wird als solches all jenen eine wertvolle Hilfe bieten, die sich mit dem Entwerfen und der Konstruktion der neuerlich immer häufiger auftauchenden Hochhäusern befassen.

P. Csonka

Bareš, R.—Massonnet, Ch.:

LE CALCUL DES GRILLAGES DE POUTRES ET DALLES ORTHOTROPES SELON LA MÉTHODE GUYON—MASSONNET—BAREŠ

SNTL — Maison d'Edition Technique, Prague — Dunod éditeur, Paris 1966, 431 pages, 176 figures, 4 photos 122 pages de tableaux.

Le calcul exact des grillages de poutres selon les méthodes de la théorie de l'élasticité comporte de grandes difficultés mathématiques. Il est donc certainement indiqué d'élaborer des méthodes approximatives qui permettent à l'ingénieur d'exécuter le calcul de telles structures par les simples moyens à sa disposition, d'autant plus que les structures en question s'emploient très fréquemment dans la pratique. Sans doute, il ne peut être question de telles méthodes approximatives que si elles sont suffisamment exactes.

L'idée fondamentale de la méthode présentée dans ce livre a été fixée par Y. GUYON dans son étude parue en 1946; cependant, afin de simplifier le problème, il n'a pas pris en considération la résistance torsionnelle des éléments. C'est Ch. MASSONNET qui a perfectionné le procédé en tenant compte de la résistance des éléments en torsion.

Les idées du procédé ainsi modifié ont eu un écho considérable dans la littérature internationale et ont conduit à la publication de nombreux articles spéciaux. En 1963, R. BAREŠ a résumé les résultats de ceux-ci dans un livre paru en langue tchèque. Le présent ouvrage est la variante en français du livre complété par l'exposé des derniers résultats obtenus par les deux auteurs.

Ceux-ci remplacent le grillage de poutres par une dalle orthotrope présentant les mêmes rigidités moyennes de flexion et de torsion que le grillage. Les charges réelles sont remplacées par des charges distribuées dans la direction longitudinale suivant une sinusoïde. Dans ce cas, le calcul des grillages devient relativement simple si on suppose que les poutres longitudinales sont à appuis simples et que les poutres transversales ne s'appuient que sur elles.

En dehors des cas fondamentaux, le livre traite des constructions à poutres de rive d'une rigidité variée, des constructions à poutres ayant un moment d'inertie variable, enfin des constructions continues et précontraintes. On trouve dans le livre le calcul des grillages de poutres appuyés sur leur rive et celui des ponts à deux poutres-maîtresses. Le livre se termine par différentes remarques au sujet de la pratique des calculs, suivies d'une énumération intéressante des notions récentes dans le domaine traité.

L'annexe contient une ample collection de tableaux destinés à faciliter l'exécution des calculs.

Cet ouvrage d'un style clair et sobre comble une lacune de la littérature des grillages, et deviendra par là même aussi bien que par son contenu de haute valeur un auxiliaire indispensable des bureaux d'ingénieurs.

P. Csonka

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1968. IV. 1. — Terjedelem: 21,25 (A/5) ív, 141 ábra, 4 melléklet

68.65396 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

Bogárdi, J. L.: Incipient Sediment Motion in Terms of the Cricital Mean Velocity — Charakterisierung der Inbewegungsetzung der Geschiebe durch die kritische Durchschnittsgeschwindigkeit — Caractérisation du début de charriage par la vitesse moyenne critique — *Богарди, Й. Л.:* Характеристика начала движения наносов при помощи средней критической скорости 1

Szmodits, K.: Numerical Solution of Mixed Boundary Value Problems in Disc Analysis — Numerische Lösung der komplexen Randwertaufgaben von Scheibenproblemen — Solution numérique du problème mixte de la valeur au contour de l'élasticité à deux dimensions — *Смодич, К.:* Числовое решение смешанных задач по значениям периметров дисковых проблем 25

Szombatfalvy, Á.: Nouvelle méthode pour l'examen du fluage des aciers — New Methods for the Investigation of the Creep of Iron Alloys — Neue Verfahren zur Untersuchung der Kriechvorgänge von Eisenlegierungen — *Сомбатфальви, А.:* Новые методы исследования процессов крипа стальных сплавов 31

Király, B.: Fortpflanzung von elastischen Biegeschwingungen in Stäben — Propagation of Elastic Bending Vibrations in Bars — Propagation des oscillations de flexin élastiques dans les barres — *Кирай, Б.:* Распространение упругих изгибающих колебаний в стержнях 45

Kézdi, Á.—Nagyváti, B.: Strength of Stabilized Soils — Festigkeit stabilisierter Böden — Résistance des sols stabilisés — *Кездн, А.* Прочность *Нагьвати, Б.:* стабилизованных грунтов 75

Széchy, K.: Deformations around and below Driven and Vibrated Test Tubes — Formänderung des Bodens ringsum und unter den eingerammten und vibrierten Versuchsröhren — Déformation autour et au-dessous de tubes d'essai battus et vibrés — *Сечи, К.:* Деформация грунта под опытными трубами и вокруг них при условии опускания их методом забивки и вибрации 97

Csonka, P.: Particular Solutions to the Homogeneous Differential Equation of Spherical Shells — Partikuläre Lösungen der homogenen Differentialgleichung der Kugelschalen — Solutions particulières de l'équation différentielle homogène des calottes sphériques — *Чонка, П.:* Частные решения гомогенного дифференциального уравнения сферической оболочки 115

Michelberger, P.: Einige Probleme der Berechnung der statisch unbestimmten Fahrzeugkonstruktionen nach dem Kraftgrößenverfahren — Some Problems of the Calculation of Statically Indeterminate Structures of Vehicles by the Aid of the Energy Theorem — Quelques problèmes du calcul statique des structures et caisses de véhicules par la méthode de forces — *Михельбергер, П,:* Вопросы статического расчета шасси и кузова транспортных средств 141

Kollár, L.—Gárdonyi, Z.: Stabilité latérale des voiles en arc à tirants — Lateral Stability of Shell-Arches with Tie Rods — Seitliche Stabilität der Schalenbogen mit Zug-

bändern — *Коллар, Л., — Гардони, З.:* Боковая устойчивость изгибу оболоченных сводов со стяжным поясом 159

Szmodits, K.: Applications of the Method of Fixed Points — Anwendungen des Festpunktverfahrens—Applications de la méthode des foyers — *Смодич, К.:* Области примеенния неподвижной точки 177

Kovácsházy, F.: Model Studies on Retaining Walls — Modellversuche an Stützmauern — Essais sur modèles réduits de murs de soutènement — *Ковачхази, Ф.:* Молирование опорных стен 187

Horler, M.: Principes de la conservation et de la restauration des monuments historiques — Governing Principles in Renovation of Ancient Monuments — Richtlinien der Denkmalwiederherstellung — *Хорлер, М.:* Принципы восстановления памятников 203

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU — ОБЗОР КНИГ

Beles, A. A.—Soare, M.: Les paraboloïdes elliptique et hyperbolique dans les constructions (Csonka, P.) 235

Betontechnische Berichte 1966 (Goschy, B.) 236

Soare, M.: Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis (Csonka, P.) 236

Márkus, Gy.: Theorie und Berechnung Rotationssymmetrischer Bauwerke (Csonka, P.) 237

Rosman, R.: Gegliederte Windscheiben mit stufenartig veränderlichen Querschnittswerten (Csonka, P.) 238

Bareš, R.—Massonnet, Ch.: Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon—Massonnet—Bares (Csonka, P.) 239

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 1—24

BOGÁRDI J. L.: *Incipient Sediment Motion in Terms of the Critical Mean Velocity*

Previous papers have given reviews on the critical tractive force pertaining to the incipient movement of sediment as variable even for a sediment material of a given particle diameter d and specific gravity γ, is concerned. The magnitude of this force was found to depend primarily on depth D and particle diameter d, respectively, on the relative roughness defined as the ratio D/d of the two. Obviously the critical mean velocity pertaining to incipient sediment movement is also variable and depends on observation conditions, as well as on relative roughness. Starting from the classical impact theory the variation of critical mean velocity and its dependence on parameters which can be formed from various physical quantities is investigated for several alternatives. As a conclusion the ratio of critical mean velocity and shear velocity has been defined in terms of the relative roughness and a parameter depending on particle size and viscosity.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 25—30

SZMODITS, K.: *Numerical Solution of Mixed Boundary Value Problems in Disc Analysis*

Author treats the solution of the problem of mixed peripheral value of symmetric and antimetric discs in respect to the axes x and y. The problem is solved by treating the question according to the theory of complex functions of the plane stress state. In solving the problem the holomorph complex stresses are written in the form of power series expansion, and the constants of these series are determined by peripheral collocation. The procedure gives the solution without introducing the stress function F, because thus it is simpler to write down the peripheral conditions.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 31—43

SZOMBATFALVY, Á.: *New Methods for the Investigation of the Creep of Iron Alloys*

The segregation phenomena during the creep of steels were investigated on the basis of the changes in the electrical resistance and in the coercive force. The tests carried out at 550 °C and 565 °C show that in the beginning the coercive force changes faster and after approx. 3000 hours it changes slowly. From this one may draw conclusions, on the basis of the known relations, on the speed of carbide segregation. The increase of the electrical conductivity indicates that the alloying element content of the basic metal is reduced. According to the experiments, this phenomenon is independent of the mechanical load, but the carbide segregation is modified by the stresses.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 45—73

KIRÁLY, B.: *Propagation of Elastic Bending Vibrations in Bars*

Author introduces a new vector-like physical characteristic for the description of elastic bending vibrations which satisfies the differential equation analogous to that of the linear heat conduction. On the basis of the thermodynamic analogy, he investigates the laws of development and propagation of bending vibrations excited by impulsive loads in the case of homogeneous bars of infinite length and of constant cross-section, as well as of the simply supported hinged beams. Treating of the subject is positively of theoretical interest and is demonstrated by the simplest bending vibration model of the bar.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 75—95

KÉZDI, Á.—NAGYVÁTI, B.: *Strength of Stabilized Soils*

One of the most important properties of stabilized soils is their strength; this is the first decisive factor in determining their behaviour in connection with other effects. Therefore, authors first investigate the mechanisms of failure, classify the grain assemblies from this viewpoint, and present the characteristic form of deformations. Using an original way of representation, they demonstrate that soil mixtures have a definite mixing ratio which is optimum from the viewpoint of strength; in case of cement stabilized soils they define those ranges of mixing ratios where cement stabilized soils can be produced and show the optimal composition. In respect to the strength of the cement stabilized soil, the degree of pulverization of the soil is an important factor; the effect of this is indicated by the series of experiments. The results of authors' experiments show the effect on the strength of addition of lime and bitumen; finally examples are presented for showing the strength of soils stabilized with phosphoric acid, aniline and furfural.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 97—113

SZÉCHY, K.: *Deformations around and below Driven and Vibrated Test Tubes*

In this paper the results of experiments will be presented which were carried out with the financial help of the Hungarian Academy of Sciences, with the view of observing the displacements brought about by the penetration of driven and vibrated test tubes which were either open or closed at their bottom end.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 115—140

CSONKA, P.: *Particular Solutions to the Homogeneous Differential Equation of Spherical Shells*

Technical literature deduces the Fourier-type general solution of the homogeneous differential equation of spherical membrane shells in a spherical coordinate system and characterizes their stress state by the actual specific inner forces. This manner of treatment is inconvenient from several points of view in the case of spherical shells rectangular in plan. In order to eliminate the difficulties arising hereby, present paper uses orthogonal coordinates instead of spherical ones and characterizes the stress state of the shell by the so-called reduced specific inner forces, instead of the actual ones. In addition to the Fourier-type solutions, paper also presents certain other solutions, hitherto not expounded in technical literature.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 141—158

MICHELBERGER, P.: *Some Problems of the Calculation of Statically Indeterminate Structures of Vehicles by the Aid of the Energy Theorem*

The matrix energy theorem completed by the linear transformation of primary systems and by generalizing the statically indeterminate primary systems, can considerably simplify the design calculation of vehicle structures. Calculation of irregular and complex structures may be attributed to the analysis of easily treatable, independent, regular elementary structures. Irregularity and complexity might be equally interpreted to be particular disturbing loads.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 159—176

KOLLÁR, L.—GÁRDONYI, Z.: *Lateral Stability of Shell-Arches with Tie Rods*

Lateral stability of shell-arches with free or diaphragm ends and with one or two tie rods is investigated under the effect of uniformly distributed, as well as antimetric loads, by the aid of the energy method. The practical choice of the deformation function is treated. A numerical example for a shell-arch with a free end, and with one and two tie rods is presented.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 177—186

SZMODITS, L.: *Applications of the Method of Fixed Points*

The method of fixed points known from the theory of continuous girders is adopted to the determination of the natural frequency and critical axial load of continuous girders. The procedure consists in checking of the assumed frequency and critical forces by constructing the fixed points. The estimated fixed points are precise if in the course of determination of the fixed points the fixed point of the last span falls on the exterior support and, thus, the deflection of the girder does not require an exterior moment. The method might be extended to the analysis of frame structures with fixed or movable joints as well as to the determination of stresses occurring in frame structures containing bars subjected to repeated load.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 187—202

KOVÁCSHÁZY, F.: *Model Studies on Retaining Walls*

In connection with studies aiming at the improvement of design procedures for retaining wall models, tests have been performed on several types of these structures. A report on the tests and the results obtained with ribbed, cantilever type walls is given in the present paper. Theoretical assumptions were verified by the test results. From the behaviour of ribbed, cantilever type retaining walls reliable conclusions could be drawn on the influence of surface roughness and spacing of the ribs. The original device developed for observing contact pressures proved successful in the tests and appears to be applicable to prototype structures as well.

Acta Techn. Hung. **62** (1968), 203—234

HORLER, M.: *Governing Principles in Renovation of Ancient Monuments*

Principles concerning conservation and restoration of ancient monuments considered to be right by the International Charter adopted in Venice, 1964, and being applied in practice by the Hungarian monument protection are summarized.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 165 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«*Acta Technica*» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «*Acta Technica*» — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Raznoiznos
1, Tzar Assen
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA

Artia
Ve Smečkách 30
Praha 2
Poštovná novinová služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arská Kultura
Václavské nám. 2
Praha I
Poštová novinová služba
Dovoz tlače
Leningradská 14
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough, Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP
GPO Post Box 1374
Bombay I

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Nauka Ltd.
92, Ikebukur O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O Box 72
Tokyo

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND

Ruch
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
Bucuresti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA

Stechert Hafner Inc.
31, East 10th Street
New York, N. Y. 10003
Walter J. Johnson
111, Fifth Avenue
New York, N. Y. 10003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
I. BARTA, E. BÖLCSKEI, P. O. GESZTI, A. LÉVAI

REDIGIT
M. MAJOR

TOMUS 62 FASCICULI 3–4

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1968

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 120 forint, külföldre 165 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 241—252 (1968)

ENTROPIE ODER EXERGIE?

L. HELLER
MITLGIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 20. Mai, 1968]

In letzter Zeit wird die Benutzung der maximalen technischen Arbeitsfähigkeit mit der Bezeichnung »Exergie« von vielen propagiert. Dem Verfasser nach ist diese Methodik nicht nur teils ungenau, teils unübersichtlich, sondern sie wirkt sich vor allem störend auf die Geltung der sowohl vom thermodynamischen als auch vom praktischen Standpunkt aus richtigen Entropie-Anschauung aus. Der Vortrag erläutert die Hauptzüge des Problems anhand einiger diesbezüglicher Beispiele.

In der letzten Zeit trifft man in der Fachliteratur mehr als häufig Aufsätze, die sich mit dem Exergiebegriff bzw. mit der Anwendung desselben befassen. Der Exergiebegriff selber ist nichts anderes als die in der Thermodynamik schon im vorigen Jahrhundert von GOUY [1] definierte maximale technische Arbeitsfähigkeit. Dieser Begriff wurde nachher auch von STODOLA [2] praktisch verwendet und BOSNJAKOVIĆ [3] schuf mit seiner geistreichen »Umgebungsgerade« ein gutes Hilfsmittel, mit dessen Hilfe man praktische Aufgaben in gegebenen Fällen einfach und rasch lösen kann. Besonders gute Dienste leistet das Verfahren, wenn man nicht einen Kreisprozeß, sondern einen Arbeitsprozeß zu beurteilen hat, wo also das Arbeitsmittel aus einem »unerschöpfbaren« Behälter kontinuierlich zugeliefert wird.

Nun hat RANT [4] vor einigen Jahren vorgeschlagen, den Begriff »Maximale technische Arbeitsfähigkeit« »Exergie« zu nennen. Der Vorschlag dürfte nur begrüßt werden, solange dieser nur eine Umbenennung eines etwas komplizierten Ausdruckes bezweckte. Demgegenüber scheint es sich seitdem herausgestellt zu haben, daß fast alle Autoren in dem Begriff Exergie eine neue *Zustandsgröße* sehen und diesen zur Betrachtung von Kreisprozessen als Zustandsgröße auch heranziehen. Die Betrachtung der Exergie als Zustandsgröße ist aber — thermodynamisch betrachtet — falsch und die Heranziehung derselben als Zustandsgröße bei der Betrachtung von Kreisprozessen scheint auch gefährlich zu sein.

Die *Exergie* ($= I - T_0 S$) ist keine Zustandsgröße, da sie nicht nur von dem durch die Zustandsgrößen I und S bestimmten Wärmezustand allein, sondern auch von der Umgebungstemperatur T_0 — also von einer dem Wärmezustand des Körpers vollständig unabhängigen Zustandsgröße — abhängig ist! Auf

diesen Einwand wurde zwar der Vorschlag gemacht, die Umgebungstemperatur T_0 — die ohnehin schon praktisch nicht zu definieren ist — als einen konstanten Wert anzunehmen. Wo bleibt aber dann der ganze Sinn der exergetischen Betrachtungsweise? Um so eher, da ein beträchtlicher Teil der praktischen Probleme sich eben an dem »kalten Ende« der Kreisprozesse stellt. Die Gefahr ihrerseits besteht darin, daß der Ingenieur durch die stark propagierte exergetische Betrachtungsweise von der in den letzten Jahrzehnten glücklicherweise entwickelten und sowohl praktisch wie auch thermodynamisch vollkommen einwandfreien Entropie-Anschauung abgelenkt wird.

Die *Entropie-Anschauung* beruht auf dem Grundsatz der Thermodynamik, wonach jede Irreversibilität einen Arbeitsverlust verursacht und jede Irreversibilität eine Entropiezunahme hervorruft, wobei die Entropiezunahme ein einwandfreies Maß für die Größe der durch die Irreversibilität hervorgerufenen Verluste darstellt. Somit ist dem Ingenieur ein außerordentlich einfaches und praktisches Mittel in die Hand gegeben, um die Stellen und Größen der Verluste bestimmen zu können. Hat er diese, so kann er dann versuchen, die Größe der gefundenen Irreversibilität und damit auch die Größe des Verlustes zu vermindern. Er braucht also nichts anderes zu tun, als die Entropieänderungen bei den einzelnen Vorgängen bzw. Zustandsänderungen des Arbeitsprozesses zahlenmäßig zu bestimmen. Die Entropie mit der er zu rechnen hat, ist dabei eine klare Zustandsgröße, die durch den Wärmezustand, d. h. durch andere Zustandsgrößen eindeutig bestimmt ist. Obzwar zur Bestimmung des absoluten Wertes des Verlustes ($T_0 \cdot \Delta S$) auch die Kenntnis der tatsächlichen Umgebungstemperatur nötig wäre, ist dieser letztere Wert — von welchem sonst die »Exergie« eindeutig abhängt (wobei dieser nicht nur praktisch undefinierbar ist, sondern auch von Stunde zu Stunde sich ändert) — bei dieser Betrachtungsweise völlig uninteressant, soweit es nur auf die qualitative Verminderung der Irreversibilität bzw. des Verlustes ankommt. (Wie später es anhand eines Beispieles gezeigt wird.)

Einige Autoren vertreten den Standpunkt, daß die meisten Ingenieure den Begriff Entropie *nicht verstehen* und mit dieser Größe nur ungern rechnen, da sie »unanschaulich« ist. Diese Behauptung mag zutreffen, kann aber sicherlich nicht die Begründung für die Einführung der »exergetischen Betrachtungsweise« liefern. Derjenige Ingenieur, der wegen des Unverständnisses des Entropie-Begriffes ein Problem nicht lösen konnte, wird nämlich das Problem mit Hilfe der Exergie noch weniger lösen können. Zuerst weil von Ingenieuren, die die Entropie nicht verstehen, das Lösen derartiger Probleme nicht erwartet werden kann, zweitens: wie soll einer, ohne die Entropie zu verstehen, die Exergie verstehen, wenn dieser Begriff eine eindeutige Funktion der Entropie ist und an das Verstehen der Herleitung und des Inhaltes desselben, ohne das Verständnis des Entropie-Begriffes und des zweiten Hauptsatzes, garnicht zu denken ist.

Denkt man daran, daß der Ingenieur einfach mit tabellierten Zahlenwerten der »Zustandsgröße« Exergie rechnen kann, die er aus Tabellen oder Diagrammen nur abzugreifen braucht, ohne den Sinn zu verstehen, so kann man sich eine solche Praxis mit der Entropie viel eher vorstellen. Die Entropie nämlich ist tatsächlich eine Zustandsgröße, die durch den Wärmezustand eindeutig gegeben ist, wogegen einer, der mit tabellierten Exergie-Werten zu rechnen hat, zuerst die Umgebungstemperatur wählen muß, bevor er die Tabelle (falls diese Werte für alle möglichen Umgebungstemperaturen enthält) zum Ablesen der Zahlenwerte in die Hand nimmt. Es mußte dabei natürlich noch vorausgesetzt werden, daß die Umgebungstemperatur ohne weiteres festgestellt werden kann. Das ist aber weitaus nicht der Fall.

Die *Umgebungstemperatur* — wie schon früher erwähnt — ist praktisch keine definierbare Größe. Nehmen wir den Fall eines Dampf-Kraftwerkes mit Kühlturmkühlung. Nimmt man die Lufttemperatur als Umgebungstemperatur an, so führt eine exergetische Betrachtung sicher zu falschem Ergebnis, da eine Ersparnis infolge einer Verminderung der Irreversibilität im Prozeß kleiner erscheint als die tatsächliche Abnahme des Wärmeverbrauchs. Will man demgegenüber den wirklichen Wert der erzielbaren Ersparnis mit Exergie rechnend erhalten, so muß man als Umgebungstemperatur den tatsächlichen Wert der Durchschnittstemperatur der Wärmeabfuhr (praktisch die Kondensationstemperatur) einsetzen. Diese letztere ist aber ihrerseits eine verwickelte Funktion nicht nur der Lufttemperatur, sondern auch der Luftfeuchte, der Kühlturmgröße, der umgewältzen Kühlwassermenge, der Größe der Kondensatorfläche usw.

Rechnet man demgegenüber mit der Entropie, so kann die Entropieänderung infolge irgendeines Eingriffes im System, auf Grund der für die Entropie als wirkliche Zustandsgröße vorhandenen Tabellenwerte ohne weiteres bestimmt werden. Man muß dann die errechnete Entropieänderung mit dem Wert der Durchschnittstemperatur der Wärmeabfuhr multiplizieren und erhält ohne weiteres die tatsächliche Abnahme oder Zunahme des Wärmeverbrauchs infolge des Eingriffes.

In beiden Fällen muß also zuerst die untere Temperaturgrenze des Kreisprozesses festgelegt sein. Liegt aber diese schon fest, so kann man mit der einfachen Berechnung der Entropieänderung die Ersparnis oder den Mehrverbrauch auf einfachste Weise erhalten. Für eine Tabellierung von Exergiewerten (wenn diese für jede mögliche Temperatur der Wärmeabfuhr überhaupt denkbar wäre) liegt also kein praktischer Bedarf vor.

Hätte man eine solche Tabellierung doch vorgenommen, so könnte man die exergetische Betrachtungsweise noch immer nicht gebrauchen, wenn z. B. diese zur Beurteilung des »kalten Endes« des Prozesses herangezogen werden sollte. Hier handelt es sich nämlich eben um die Bestimmung des

optimalen Wertes der Durchschnittstemperatur der Wärmeabfuhr, also der Ausgangsbasis der exergetischen Rechnung.

Schließlich sollte es noch ganz allgemein festgehalten werden, daß eine thermodynamische Betrachtungsweise nicht so sehr für quantitative, viel eher für *qualitative Beurteilung* der Vorgänge dient. Verfolgt man die Entropieänderungen während des Vorganges, so zeigt sich das Maß der Irreversibilität qualitativ sofort, ohne den genauen Wert der Abfuhr-Temperatur des Kreisprozesses zahlenmäßig zu kennen, und — was noch wichtiger ist — es weist auf die Richtung einer Verbesserungsmöglichkeit eindeutig hin. Die zahlenmäßige Berechnung erfolgt dann ohnehin auf konventionelle Art, indem man sich in erster Linie der Zahlenwerte der Enthalpie bzw. der inneren Energie bedient. So z. B. konnte die Verbesserung des »kalten Endes« des Dampfkreisprozesses, d. h. der Kondensation, durch die kühlwasserseitige Serieschaltung der Kondensatoren durch die Entropie-Anschauung eingeleitet werden [5]. Die Berechnung der optimalen Lösung der einzelnen konkreten Fälle erfolgte dann auf konventionelle Weise, indem man die erhebliche Zahl von maßgebenden Faktoren, bis auf den Einfluß der Turbinenkonstruktion, alle einbezogen hatte [6].

Die qualitative Beurteilung eines Systems ist von ausschlaggebender Bedeutung besonders dann, wenn man bisher unbekannte Wege einzuschlagen versucht und sich zeitraubende Einzelrechnungen ersparen, oder eben im Gegenteil, Ermutigung zur Durchführung derselben schöpfen will.

Nun soll es in dem folgenden anhand eines interessanten *Beispiels* gezeigt werden, wie man durch die qualitative Beurteilung auf Grund der Entropie-Anschauung zur einwandfreien Bestätigung einer auf den ersten Blick höchst paradox erscheinenden Annahme gelangen kann:

Es wird zur Zeit eifrig an einem Dampfkraftwerk-System gearbeitet, welches den Bau von Maschinen mit sehr hoher Einheitsleistung (über 1000 MW) ermöglichen sollte. Die Schwierigkeiten, die sich aus den riesigen Abdampfvolumina der Niederdruckteile ergeben, sollten durch die Verwendung eines Zweistoff-Systems umgangen werden, wobei als Arbeitsstoff für die zweite Stufe ein sog. Kältemedium gewählt wird [7].

Die vorgeschlagene Schaltung scheint auf den ersten Blick einen eindeutigen Nachteil aufzuweisen, indem zwischen den Arbeitsstoffen ein Wärmetauscher eingeschaltet werden muß, und so durch den in diesem letzteren benötigten Temperaturunterschied ein entsprechender Verlust im Wärmegefälle entsteht. Nun kann es bewiesen werden, daß ein solcher Verlust, solange der angewendete Temperaturunterschied ein gewisses Maß nicht überschreitet, garnicht zu entstehen braucht. Wird der Temperaturunterschied kleiner als der oben erwähnte Grenzwert, so wird sogar ein Gewinn erzielt!

Zwecks besserer Übersicht sollte der vorliegende Fall folgenderweise modelliert werden: In einer einfachen Kondensations-Dampfmaschine (ein-

fachster Rankine-Prozess, ohne Regenerativ-Vorwärmung) soll die Expansion bei irgendeinem Zwischendruck unterbrochen und die gesamte Dampfmenge an dieser Stelle aus der Maschine entnommen werden. Die Dampfmenge soll nachher bei unverändertem Entnahmedruck in einem Wärmetauscher kondensiert werden, wobei gleichzeitig eine der abgegebenen Wärmemenge entsprechende Kondensatmenge vorgewärmt und verdampft und zur weiteren Expansion wieder in die Maschine zurückgeführt wird. Der Verdampfungsdruck ist dabei dem Temperaturunterschied entsprechend tiefer als der Entnahmedruck.

Wir behaupten jetzt, daß — falls der Temperaturunterschied einen gewissen Wert nicht übersteigt — der Kreisprozeß mit dem Wärmetauscher, d. h. mit der unterbrochenen Expansion einen besseren thermischen Wirkungsgrad haben kann, als der ursprüngliche Kreisprozeß, bei welchem die Expansion bis zur Kondensation ununterbrochen verläuft!

Diese Behauptung erscheint auf den ersten Blick paradox zu sein. Eine nähere Betrachtung im Sinne des zweiten Hauptsatzes ergibt aber eindeutig, daß sie — mindestens in dem Fall, wenn der Temperaturunterschied gegen Null tendiert (unendlich große Wärmeaustauschfläche) — doch richtig sein kann. Durch die Unterbrechung der Expansion wird nämlich die Durchschnittstemperatur der äußeren Wärmezufuhr höher als bei der ununterbrochenen Expansion und so — da die Durchschnittstemperatur der Wärmeabfuhr unverändert blieb — muß der thermische Wirkungsgrad höher ausfallen.

In praktischen Fällen müssen wir uns natürlich mit endlich großen Heizflächen begnügen, womit auch die Verdampfung irreversibel verläuft. (Eine gewisse Irreversibilität ist nämlich auch bei der Verwendung einer unendlich großen Wärmeaustauschfläche vorhanden, da auf der Sekundärseite der Heizfläche das zu verdampfende Wasser auch von Kondensationstemperatur bis zur Sättigungstemperatur erwärmt werden muß.) Nun kann es mit Hilfe der Entropie-Anschauung einwandfrei gezeigt werden, daß solange die Irreversibilität der Wärmeübertragung — d. h. der gewählte Temperaturunterschied — ein gewisses Maß nicht übersteigt, der Gewinn durch die Erhöhung der Durchschnittstemperatur der äußeren Wärmezufuhr auch in diesem Falle höher ausfallen kann als der Verlust durch die Nichtumkehrbarkeit im Wärmetauscher.

Man muß also die Entropieänderungen in beiden Prozessen genau verfolgen. Da beim Wärmeaustausch die Entropiezunahme

$$\Delta S = \Delta S_k + \Delta S_w = \frac{\Delta Q}{T_k} - \frac{\Delta Q}{T_w} = \Delta Q \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_w} \right)$$

ist (die Indexe k bzw. w beziehen sich auf das kalte bzw. warme Medium) und auch der irreversible, isobare Mischvorgang diesbezüglich als Wärme-

austausch angesehen werden kann (andere Irreversibilitäten, wie Reibung, usw. werden beim Vergleich außer Acht gelassen), kann man sich des $1/T - Q$ Diagramms — wie dies von einem meiner Schüler und Mitarbeiter bereits vor langen Zeit vorgeschlagen worden ist — sehr gut bedienen [8].

Betrachten wir zuerst den Fall, wo der Temperaturunterschied gegen Null tendiert, d. h. die Wärmeaustauschfläche unendlich groß ist. Beide

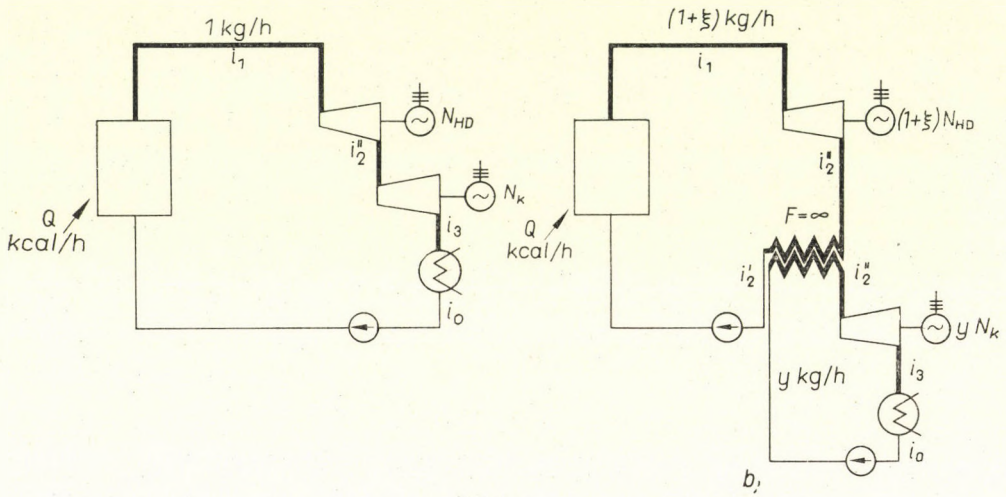


Bild 1

Schaltungen sind in Bild 1 dargestellt. Einfachheitshalber wurde ein Sattdampfprozeß angenommen und die im Kessel zugeführte Wärmemenge Q für beide Fälle als unverändert vorausgesetzt. Die beiden Verhältniszahlen ξ und y ergeben sich sofort aus den einfachen Beziehungen, wonach

$$\xi = \frac{i_2' - i_0}{i_1 - i_2'}$$

und

$$y = \frac{i_1 - i_0}{i_1 - i_2'} \cdot \frac{i_2'' - i_2'}{i_2'' - i_0}$$

ist.

Nun verfolgen wir die Entropiezunahmen in $1/T - Q$ Diagrammen, in welchen diese — entsprechend dem Zusammenhang $\Delta S = \Delta Q(1/T_k - 1/T_w)$ — als Integrationsflächen erscheinen. So stellt die in Bild 2 von links nach rechts schräg schraffierte Fläche die Entropiezunahme infolge der Irreversibilität der Verbrennung und die horizontal schraffierte Fläche die Entropiezunahme infolge der Irreversibilität der Wärmeübertragung im Kessel dar.

Die Verbesserung durch die Einschaltung des Wärmetauschers kommt eindrucksvoll in dem $1/T - Q$ Diagramm (Bild 2b) zum Vorschein. Die

zusätzlich weiß gebliebene Fläche zeigt die Abnahme in der Entropievermehrung, was den eindeutigen Beweis der Verbesserung durch die Schaltung nach Bild 1 ergibt. Der Gesamtgewinn ergibt sich natürlich, indem man noch die karierte Fläche — die die Entropievermehrung infolge der Vergrößerung der Flüssigkeitsmenge, die im Kessel von T_2 auf T_1 erwärmt wird, angibt — in Abzug bringt. (T_1 ist die zum Kesseldruck und T_2 die zum Entnah-

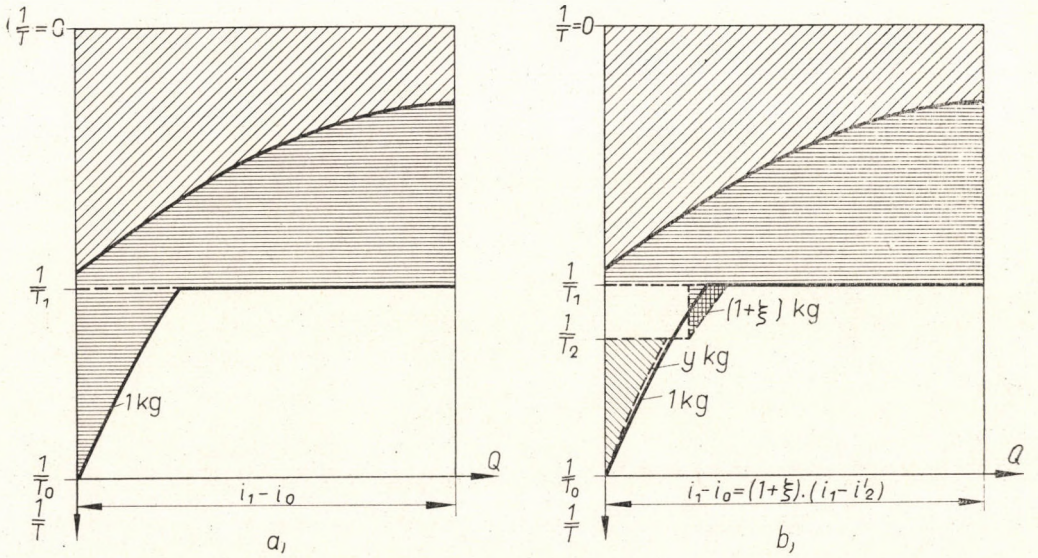


Bild 2

medruck gehörende Sättigungstemperatur.) Eine kleine Ersparnis muß auch noch berücksichtigt werden, die sich daraus ergibt, daß in dem dampfbeheizten Wärmetauscher, statt 1 kg nur noch y kg Flüssigkeit erwärmt wird. (Die Entropiezunahme im Wärmetauscher stellt die von rechts nach links schräg schraffierte Fläche dar.)

Will man außer der qualitativen Beurteilung noch den Arbeitsgewinn feststellen, so hat man — nach den Regeln der Thermodynamik — die Abnahme der Entropievermehrung mit der Mitteltemperatur der Wärmeabfuhr, in diesem Fall mit T_0, zu multiplizieren.

Der behandelte Fall ist übrigens prinzipiell der Einführung der regenerativen Speisewasservorwärmung gleichzustellen. Der thermodynamische Effekt ist nämlich auch dort der gleiche: die Erhöhung der Mitteltemperatur der äußeren Wärmezufuhr.

Wird von der Schaltung nach Bild 1a — wie früher — ausgegangen, so ergibt sich die Schaltung nach Bild 3 nach der Einführung der regenerativen Speisewasservorwärmung. Die unendlich große Wärmeübertragungsfläche

der Schaltung 1b kann hier einfach durch einen Mischvorwärmer abgebildet werden, und es zeigt sich auch sofort, daß

$$1 + \xi - x = y$$

ist. Somit stellt die von rechts nach links schräg schraffierte Fläche in Bild 2b auch die Entropiezunahme der Mischung im Bild 3 dar, und wir haben so genau dasselbe Bild der Entropieänderungen für den Fall der reg. Speisewasservorwärmung wie für die Schaltung nach Bild 1b.

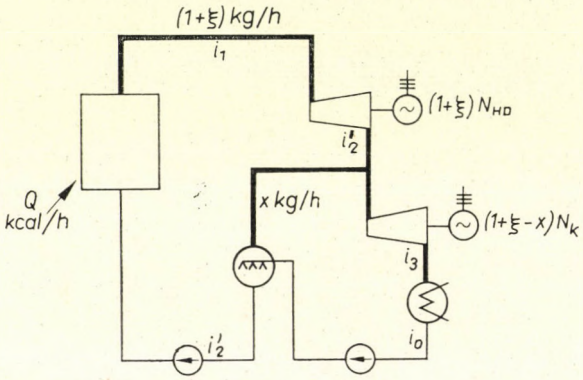


Bild 3

Übrigens kann man durch diese Darstellungsart äußerst einfach zu der sonst schon bekannten Feststellung gelangen, wonach die thermodynamisch günstigste Vorwärmtemperatur $T_2 = \sqrt{T_1 T_0}$ ist. Vereinfacht man das Diagram im Bild 2b derart, daß die Gesamtersparnis in der Entropiezunahme nur noch durch das Viereck (allerdings die rechte untere Ecke jetzt auf der Flüssigkeitserwärmungslinie liegend, wie es einfachheitshalber auch in Bild 4 erscheint) dargestellt wird, was im Mittelfeld der Temperaturen auch zahlenmäßig ohne weiteres zulässig ist, so hat man nur den Maximumwert dieses Viereckes zu suchen, um die optimale Vorwärmetemperatur finden zu können. Die Breite der Viereck-Fläche beträgt ΔQ, im Fall von Wasser also $(T_2 - T_0)$, und als Höhe derselben ergibt sich der Wert $(1/T_2 - 1/T_1)$. Der Flächeninhalt ΔS beträgt also $(T_2 - T_0)$. $(1/T_2 - 1/T_1)$ und ein Maximum dafür ergibt sich aus dem Zusammenhang

$$\frac{d\Delta S}{dT_2} = -\frac{1}{T_1} + \frac{T_0}{T_2^2} = 0$$

und daraus

$$T_2 = \sqrt{T_1 T_0}.$$

Damit sollte natürlich keinesfalls abgeleitet worden, daß zur Verbesserung des Rankine-Prozesses die Schaltung nach Fig. 1b ebenso gut wie die reg. Vorwärmung herangezogen werden könnte. Zuerst sind beide Schaltungen nur im Falle der Verwendung unendlich großer Wärmeübertragungsflächen thermodynamisch gleichwertig, sobald endlich große Flächen verwendet werden, zeigt sich, daß zur Schaltung 1b eine vielmal so große Fläche wie zur Speisewasservorwärmung nötig wäre, soweit die Temperaturunterschiede dabei gleich groß gewählt werden. Ferner verursacht der endliche Tempera-

turunterschied auch einen Arbeitsverlust, welch letzterer bei Schaltung 1b wieder das Vielfache desjenigen bei der Regenerativ-Vorwärmung ausmacht.

Der Zweck obiger Ausführungen war demgegenüber zu zeigen, wie einfach und eindrucksvoll mit Hilfe der Entropie-Anschauung der qualitative Beweis der Richtigkeit einer auf den ersten Blick so paradox erscheinenden Annahme erbracht werden kann, wonach in Fällen wie die Zweistoff-Prozesse, wo der Einsatz eines Wärmetauschers unumgänglich ist, dieser Einsatz des Wärmetauschers nicht unbedingt zu thermodynamischen Verlusten führen muß.

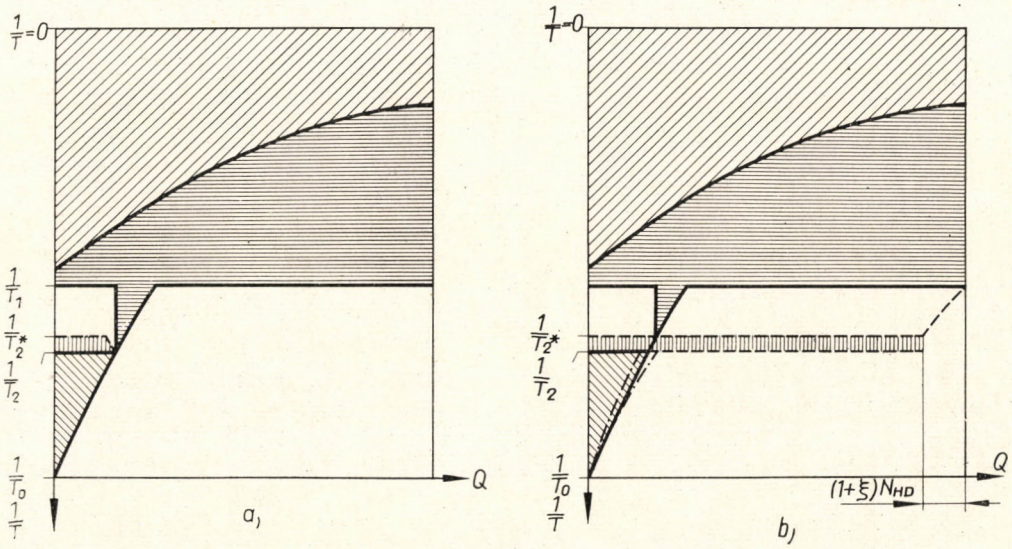


Bild 4

Wird beim Wärmeaustausch eine entsprechend kleine Temperaturdifferenz gewählt, so kann sogar ein Gewinn erzielt werden. Fällt der Temperaturunterschied aus nicht thermodynamischen Gründen doch größer aus, so braucht der Verlust auch in diesem Falle nicht so groß auszufallen, wie man ihn sonst nur schätzungsweise annehmen würde.

Die oben erörteten Verhältnisse, im Falle endlich großer Wärmetauscher, können übrigens im Bild 4 sehr einfach verfolgt werden. Der Einfluß der endlichen Temperaturdifferenz im Falle der regenerativen Speisewasservorwärmung zeigt sich auf der linken Seite des Bildes 4. Die vertikal schraffierte Fläche entspricht der Entropiezunahme infolge der Vergrößerung der Irreversibilität der Wärmeübertragung, die entsteht, weil man statt der unendlich großen Fläche (im Schema in Bild 3 durch einen Mischvorwärmer angedeutet) eine endlich große Fläche nimmt, wodurch sich dann ein der Sättigungstemperatur T_2^* entsprechender Entnahmedruck ergibt, um die Erwärmung des Speisewassers bis T_2 zu ermöglichen. (Der Grund des schrägen Verlaufs an der rechten Seite liegt in dem Umstand, daß die Irreversibilität der Zumischung

des Heizdampfkondensates zum Speisewasser kleiner ist, als wenn diese letzte Erwärmung des Speisewassers auch durch kondensierenden Heizdampf erfolgte.)

Wird jetzt auch in der Schaltung nach Bild 1b die unendlich große Fläche durch eine endliche ersetzt, womit auch hier der der Sättigungstemperatur T_2^* entsprechende Gegendruck nach der Hochdruck-Maschine sich einstellt, so ändern sich die Verhältnisse entsprechend dem Verlauf in Bild 4b. (Im Bild 4 sind die Verhältnisse etwas vereinfacht dargestellt, wie früher bereits erwähnt.)

Man sieht es sofort, daß in diesem Falle die Verschlechterung viel größer ist, und die vertikal schraffierte Fläche die die Vergrößerung der Entropiezunahme infolge der endlich großen Fläche darstellt, ein Vielfaches derjenigen der Speisewasservorwärmung ausmacht. Der Grund dafür liegt natürlich in dem Umstand, daß während bei Speisewasservorwärmung nur ein Teil der Dampfmenge beim höheren Druck aus der Maschine entnommen werden muß, hier die gesamte Dampfmenge mit dem höheren Druck entnommen wird.

Nun sieht man es auch, daß dieser zusätzliche Verlust den mit der unendlich großen Fläche erzielten Gewinn bald zunichte machen kann. Während nämlich bei dem Regenerativ-Verfahren auch mit zunehmender Temperaturdifferenz ein Gewinn immer zu erzielen ist (solange natürlich T_2^* kleiner als T_1 bleibt, d. h., die Dampfmenge aus der Maschine entnommen wird), verschwindet hier der Gewinn, sobald die Temperaturdifferenz $T_2^* - T_2$ einen Wert erreicht, bei welchem die vertikal schraffierte Fläche der ursprünglich weiß gebliebenen gleich wird.

Man sieht es auch aber gleichzeitig, daß solange die Temperaturdifferenz unterhalb dieses Grenzwertes gehalten wird, ein thermodynamischer Gewinn gegenüber der ununterbrochenen Expansion erzielt werden kann.

Zu welchen Feinheiten man mit Hilfe dieser Anschauung gelangen kann, sollte noch mit den Folgenden gezeigt werden.

Bei den vorangehenden Betrachtungen haben wir bei der Schaltung nach Bild 1b einfachheitshalber angenommen, daß die Enthalpie des Sekundärdampfes, wie diejenige des Abdampfes nach der Hochdruckmaschine, i_2'' betragen soll. Nun kann aber dieser Enthalpiewert sowohl kleiner, wie auch größer (natürlich höchstens bis zur Sattdampf-Enthalpie bei dem zu T_2 gehörenden Sättigungsdruck) gewählt werden. Nun zeigt Bild 4b sehr eindrucksvoll, daß thermodynamisch der Prozeß um so besser wird, je größer die Enthalpie des Sekundärdampfes gewählt wird. Der y-Wert wird nämlich durch diesen Enthalpiewert eindeutig bestimmt, und mit y ändert sich in dem Diagramm — während alles andere unverändert bleibt — die Erwärmungslinie der Flüssigkeit, wie dies auf der Figur strichpunktiert angedeutet ist. Wird also die Enthalpie des Dampfes größer, so nimmt y ab, und damit nimmt auch die schräg von rechts nach links schraffierte Fläche, d. h. die Entropie-

zunahme ab. Der sich so ergebende und dann auch weiß erscheinende Flächenstreifen gibt ein eindeutiges Maß für die so erzielte Mehrarbeit.

Autoren, die die exergetische Betrachtungsweise vertreten, bedienen sich auch oft des $1/T - Q$ Diagramms, wobei ein fester unterer Temperaturwert T_u bzw. $1/T_u$ angenommen wird. Das ist wohl sehr verständlich, da die Entropieänderung in einem Arbeitsprozeß multipliziert mit dem Wert der unteren Grenztemperatur den Arbeitsverlust ergibt, der infolge der durch die Entropieänderung angezeigten Irreversibilität aufgetreten ist. Steht die »Umgebungstemperatur« also bereits fest, so ist auch die maximale technische Arbeitsfähigkeit in einem gegebenen Zustand gegeben und diese letztere wird also um den durch die Irreversibilität verursachten Arbeitsverlust vermindert. Diese Verminderung wird dann als »Exergieverlust« genannt.

Um das alles rechnen zu können, ist aber die Kenntnis der »Umgebungstemperatur« eine unerläßliche Voraussetzung. Wäre es auch denkbar, daß man die Umgebungstemperatur praktisch definieren kann, so müßten — falls man tatsächlich »exergetisch« rechnen will — Exergie-Diagramme für jede mögliche Umgebungstemperatur entworfen werden. Das scheint aber praktisch ziemlich hoffnungslos zu sein, und so bedient man sich einfach der Annahme einer unteren Temperaturgrenze als Umgebungstemperatur, die entweder für einen gegebenen Prozeß bereits gegeben ist, oder auf Grund anderweitiger praktischer Überlegungen bestimmt wird. (Allerdings könnte zu dieser letzteren Aufgabe das »exergetische« Rechnen nicht gebraucht werden, da man dabei eben die praktische »Umgebungstemperatur«, d. h. die Mitteltemperatur der Wärmeabfuhr zu bestimmen hat, und für das »exergetische« Rechnen diese — als Basis — bereits vorhanden sein müßte.) In diesem Falle wird aber eigentlich nichts anderes gemacht als man die Entropieänderungen verfolgt (wenn es auch nicht erwähnt) und eine anderweitig bestimmte untere Grenztemperatur als Multiplikator verwendet.

Es stellt sich also die Frage, wozu das alles nützen soll? Warum neue Diagramme und Tabellen entwerfen (die sowieso nicht komplettiert werden können), wenn man sich sowieso der Entropiewerte bedient, was sonst auch richtig ist und eine dem Ingenieur gebührende Arbeit darstellt. Nur heißt es nicht exergetische Betrachtungsweise, sondern Entropie-Anschauung!

Die Entropie-Anschauung schließt natürlich die Anwendung der »maximalen technischen Arbeitsfähigkeit« keinesfalls aus. Der Begriff »maximale technische Arbeitsfähigkeit« (wenn sie auch Exergie genannt wird) bleibt weiterhin ein wichtiges Hilfsmittel für technische Berechnungen, besonders wenn man es — wie einleitend bereits erwähnt — zu Beurteilung von Arbeitsprozessen, wo das Arbeitsmittel aus einem »unerschöpfbaren« Behälter zugeliefert wird, heranzieht.

Schließlich kann sich der Verfasser auch der Anschauung nicht anschließen, wonach jede Energieform — wenn auch gedanklich — in Exergie und

Anergie, d.h. in unbeschränkt und in nicht unbeschränkt umwandelbare Teile zerlegt werden kann. Äußerst störend wirkt an dieser Anschauung, daß man dadurch zu einer Energieform gelangt, die von äußeren Zuständen, die vom Zustand des Stoffes vollkommen unabhängig sind, abhängt. Die äußeren Zustände sind dabei nicht nur *praktisch* undefinierbar, aber können sich *praktisch* auch von Stunde zu Stunde ändern.

Natürlich ist die potentielle Energie auch eine Energieform, die von der relativen Lage des Körpers abhängt. Wird die Lage des Körpers geändert, so genügen aber die Methoden der klassischen Mechanik immer die Folgen dieser Änderung zu berechnen. Es wäre sicher zu weit getrieben, wenn z. B. die Hydrauliker die Energie eines hochgelegten Wasserbehälters irgendwo auf der Panama-Erdenge in einen umwandelbaren und in einen nicht umwandelbaren Teil zerlegen wollten, wobei diese Teile sich ändern, je nachdem man das Wasser nach links in den Pazifischen, oder nach rechts in den bedeutend höher liegenden Atlantischen Ozean durch eine Wasserturbine strömen läßt, obzwar hier — gegenüber dem Umgebungszustand der Thermodynamik — nur zwei Möglichkeiten vorliegen.

SCHRIFTTUM

1. Gouy, M.: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1889), 11. Mars.
2. Stodola, A.: Dampf- und Gasturbinen.
3. Bosnjaković, F.: Technische Thermodynamik.
4. Rant, Z.: Exergie ein neues Wort für »technische Arbeitsfähigkeit«. *Forsch.-Ing.-Wes.* **22** (1956), 36.
5. Heller, L.: Beiträge zum Kampf gegen die Nichtumkehrbarkeiten. *Acta Techn. Hung.* **6** (1953), 264.
6. Peakl, C. C.—Coit, R. L.: New designs for large condensers. *Power Engineering* (1966); December, 58.
7. Heller, L.: New Power Station System for Unit Capacities in the 1000 MW Order. *Acta Techn. Hung.* **50** (1965), 93.
8. Zátony, A.: Eine neuartige Darstellung thermodynamischer Prozesse (ungarisch). *Magyar Energiagazdaság* (1953), 367.

Entropy Aspect or Exergy? In recent years several authors are advocating the use of the term "maximum technical working capacity" called "exergy" as a property of state. In the author's opinion, this method is both inaccurate and confusing. Its main drawback is the interference with the application of the term of entropy, correct for thermodynamical and practical points alike. The paper illustrates the main lines of the problem with numerous examples.

Entropie ou exergie? Ces dernières années, plusieurs auteurs utilisent le terme d'exergie signifiant la capacité maximum de travail technique comme un caractéristique d'état. Ce procédé présente l'inconvénient d'être imprécis et de prêter à confusion, et surtout d'entraver l'application correcte de la notion d'entropie se justifiant du double point de vue thermodynamique et pratique. Le problème est illustré, dans ses grandes lignes, par plusieurs exemples présentés par l'auteur.

Метод энтропии или эксергии? *(Л. Хеллер).* В последние годы многие рекомендуют назвать максимальную работоспособность рабочей среды «эксергией», что, якобы, является новым калорическим параметром состояния. Согласно словам автора, такое название является, с одной стороны, неточным, а с другой, некорректным, но, что самое главное, этим затрудняется распространение метода энтропии, как являющейся наилучшей с точки зрения термодинамики и практики. В докладе говорится о главных чертах данной проблемы и приводятся освещающие её суть проблемы.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 253—266 (1968)

EINE HANDLICHE ELEKTRONENOPTISCHE APPARATUR ZUR LAUFENDEN UNTERSUCHUNG VON METALLOGRAPHISCHEN VORGÄNGEN HOCHERHITZTER HOCHSCHMELZENDER METALLE

O. HORACSEK
und
T. MILLNER

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR TECHNISCHE PHYSIK DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 7. Februar, 1968]

Es wird eine einfache, auf Grund im Text angegebener elektronenoptischer Berechnungen selbst gebaute, elektronenoptische Apparatur (ein sog. Emissions-Elektronenmikroskop) beschrieben. Die zum Selbstbau nötigen Daten und Hinweise werden angeführt. Mit der beschriebenen Apparatur kann man Gefügeänderungen bei hocherhitzten hochschmelzenden Metallen mittels ihrer eigenen Elektronenemission von einem 60fachen bis zu einem 150fachen Vergrößerungsgrad visuell beobachten oder laufend photographieren. Zur Bestimmung des Vergrößerungswertes einerseits und der Temperatur des abgebildeten Drahtoberflächenbereiches andererseits genügen einmalige Ablesungen an den betreffenden Zeigerinstrumenten. Das von uns gesammelte Bildmaterial, und darunter auch die mitgeteilten Bilder, lassen es erkennen, daß man an unseren elektronenoptischen Bildern oft mehr Einzelheiten erkennen kann als z. B. an den üblichen lichtmikroskopischen Bildern. Wir benutzten unsere Apparatur vorwiegend zur Untersuchung des Rekristallisationsprozesses von Wolfram- und Molybdändrähten. Zugleich wird auch eine neuartige Methode zur Bestimmung der Temperaturen der abgebildeten Oberflächengebiete angegeben.

I. Einleitung

Es ist bekannt, daß — zwecks Erreichung besonderer Eigenschaften — zu den übrigens sehr reinen Ausgangsmaterialen der pulvermetallurgisch hergestellten Wolfram- und Molybdändrähte, also zu den hochschmelzenden Metallen der Glühlampen- und Radioröhrenindustrie, spezielle Fremdstoffe zugegeben werden, von denen geringe Mengen in den fertigen Drähten in hochwirksamer Form zurückbleiben. Heutzutage enthalten Wolframdrähte wirksame K-, Si- und Al-Spuren in einer Durchschnittskonzentration von etwa 10—1 ppm. Diese Fremdstoffspuren bestimmen in einer noch unaufgeklärten Weise weitgehend das Kristallgefüge und die mechanisch-technologischen Eigenschaften, die sich im Rekristallisationsprozeß der hocherhitzten Drähte entwickeln. Um das zweckmäßigste Kristallgefüge und damit die bestmöglichen Eigenschaften der Wolframglühkörper erreichen zu können, müssen Einzelheiten ihrer Rekristallizationsprozesse erforscht und aufgeklärt werden. Die Rekristallisationserscheinungen können aber an den gebräuchlichen Wolframdrähten mit den üblichen metallmikroskopischen Methoden nicht aus-

reichend untersucht werden, da die Rekristallisationstemperaturen derselben meist sehr hoch (z. B. im Falle von manchen Wolframmetallsorten bei etwa 2400 °C) liegen.

NELSON und ROBINSON [1, 2] sowie MILLNER, PROHÁSZKA und HORVÁTH [3—5] untersuchten schon früher die sog. sekundäre Rekristallisation von gebräuchlichen Wolframdrähten, doch benutzten sie dazu noch nicht das Abbilden der glühenden Drahtoberflächen mittels elektronenoptischer Linsensysteme. Ihre Wolframdrähte wurden in einer inwändig mit Leuchtstoff überzogenen evakuierten Glasröhre koaxial ausgespannt und zum Glühen gebracht. Die glühenden Drahtoberflächen wurden mit Hilfe ihrer emittierten Elektronen durch ein zwischen Leuchtschirm und Draht angebrachtes Spannungsfeld an der Glasoberfläche »abgebildet«. Es erschienen am Leuchtschirm die während der Rekristallisation entstehenden Kristallite als hellere dunklere, mehr oder weniger breite Ringe. In der Achsenrichtung trat keine Vergrößerung auf: die Ringe hatten Breiten, die den Original-Längen der Kristallite entsprachen. Man konnte in dieser Weise zwar das zeitliche Erscheinen und Wachsen der Kristallite in der Längsrichtung verfolgen, doch konnte man die wahre Gestalt der Kristallite nicht feststellen und die Bilder mit eventuellen metallographischen Abbildungen nicht vergleichen. Die Methode lieferte wertvolle Informationen über die Keimbildungshäufigkeiten verschiedener Wolframdrähte und über die Wachstumsgeschwindigkeiten einzelner Kristallite in der Längsrichtung des Drahtes, sie ist aber zu weiteren Aufklärungen — z.B. zur Aufklärung von Besonderheiten des Kristallwachstumes in der Querrichtung — nicht fähig.

Wir haben deshalb in den letzten Jahren eine einfache elektronenoptische Methode und Apparatur entwickelt, mit der man, wesentlich detaillierter als mit der Nelson–Robinson Methode und viel einfacher als mittels der handelsüblichen Elektronenmikroskope, wichtige Strukturänderungen (u. A. Rekristallisationserscheinungen) von Drähten und Folien hochschmelzender Metalle mit mäßiger Vergrößerung beobachten und photographisch festhalten kann. Man kann unsere Apparatur leicht selbst laboratoriumsmäßig aufbauen. In unserer Zusammenstellung wird die in Vakuum glühende Metalloberfläche mit Hilfe der thermischen Elektronen durch eine einzige elektrostatische Linse an einem Leuchtschirm flächentreu abgebildet. Diejenigen Strukturänderungen, die sich an den abgebildeten Metalloberflächen mit örtlichen Austrittsarbeitsänderungen abspielen, erscheinen an dem Bildschirm als örtliche Helligkeitsänderungen. Man kann also am Bildschirm z.B. Kristallgrenzenverschiebungen zwischen den an der Metalloberfläche ungleich orientierten Kristallbezirken verfolgen und mittels in bekannten Zeitabschnitten nacheinanderfolgender Aufnahmen (z.B. mittels Filmaufnahmen) die Kristallwachstumsgeschwindigkeiten in jeder Richtung der abgebildeten Metalloberfläche zahlenmäßig auswerten. In dem Umstand, daß man mit unserem Verfahren Vergrößerungen (und zwar die gleichen Vergrößerungen) in zueinander senkrechten Richtungen,



Bild 1. Elektronenoptische *(a, b)* und lichtmikroskopische *(c)* Aufnahmen desselben flachgeschliffenen Abschnittes eines rekristallisierten Molybdändrahtes von 320 Mikron Durchmesser; Vergrösserung 110fach

also z. B. in der axialen und radialen Richtung eines Drahtes bekommt, liegt ein wesentlicher Vorteil gegenüber der Methode von Nelson und Robinson, da unsere elektronenoptische Bilder mit den metallographischen Lichtbildern derselben Stelle unmittelbar vergleichbar sind (Bild 1).

II. Beschreibung der Elektronenoptik und der Versuchsanordung

Die Elektronenbahnen kann man im Falle eines axialsymmetrischen elektrischen Feldes mit Hilfe der mit veränderlichen Koeffizienten angegebenen homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Phi(z)r''(z) + \frac{1}{2}\Phi'(z)r'(z) + \frac{1}{4}\Phi''(z)r(z) = 0 \qquad (1)$$

bestimmen. Hier bedeuten $r(z)$ den Abstand einer Elektronenbahn von der Symmetrieachse im Achsenpunkt z und $\Phi(z)$ das Potential entlang der Achse. Die Bestimmung von einzelnen Elektronenbahnen stößt auf keine prinzipiellen Schwierigkeiten: man muß nur die durch die Elektrodenanordnung bestimmte Funktion $\Phi(z)$ aufstellen, dieselbe und ihre Ableitungen in die Gleichung (1) einsetzen und die so erhaltene Differentialgleichung von $r(z)$ lösen. Man kann aber für Elektrodenanordnungen, die als Linsen wirken, die Funktion $\Phi(z)$ meistens nicht als eine einfache analytische Funktion angeben, da sich die Laplace-Gleichung unter den Grenzbedingungen solcher Elektrodenanordnungen meistens nicht in geschlossener analytischer Form lösen läßt. Die Potentialverteilung muß deswegen in irgendeiner experimentellen Weise, z.B. mit Hilfe eines elektrolytischen Troges ermittelt werden. Dies kann aber für irgendein gegebenes Kraftfeld nur nachträglich, d. h. nach der Wahl einer bestimmten Linsenausführung erfolgen. Die Formel (1) ist also zu zahlenmäßigen Linsendimensionierungen nicht benutzbar, und man muß sich für solche Zwecke mit

$\Phi(z)$-Funktionen begnügen, die den tatsächlichen Verhältnissen zwar nur näherungsweise entsprechen, konkrete Berechnungen aber ermöglichen. Die optischen Eigenschaften derartig konstruierter Elektrodensysteme können — wenn nötig — nachträglich genauer berechnet werden.

Nach solchen elektronenoptischen-geometrischen Näherungsberechnungen stellt ein aus zwei koaxialen Lochblenden bestehendes Elektrodensystem

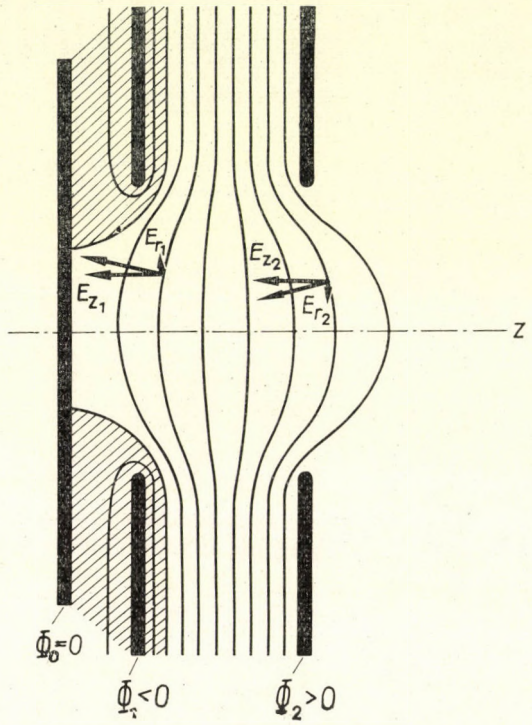


Bild 2. Skizze eines elektrostatischen »Immersionsobjektives« mit Andeutungen einiger Äquipotentialflächen des achsensimmetrischen Kraftfeldes bei negativen Φ_1-Werten; die Feldstärkekomponenten E_{r_1} bzw. E_{r_2} haben entgegengesetzte Vorzeichen und veranschaulichen die Sammelwirkung bzw. Zerstreuungswirkung des elektrischen Feldes in den betreffenden zwei verschiedenen Punkten des Raumes

mit den Blendenpotentialen Φ_1 und Φ_2 und mit dem als Kathode geschalteten Gegenstand ein sog. Immersionsobjektiv dar. In einem solchen Elektrodensystem besteht ein achsensymmetrisches elektrostatisches Feld (Bild 2), an dessen Äquipotentialflächen als Brechungsflächen die Elektronen eine kontinuierliche Richtungsänderung erfahren, ähnlich den gewöhnlichen Lichtstrahlen, die ein Medium mit nicht konstantem Brechungsindex durchlaufen. Einer derartigen elektrostatischen Linse entspricht in der gewöhnlichen Lichtoptik etwa eine Anordnung, in der der Brechungsindex an der Gegenstandseite der Linse den konstanten Wert n_G besitzt und an der Bildseite den davon abwei-

chenden konstanten Wert n_B hat, wie das bei einer lichtoptischen Ölimmersionslinse der Fall ist, bei der die Brechnungsindizes die Werte $n_G = n_{\text{Öl}}$ und $n_B = n_{\text{Luft}}$ annehmen. In diesem Sinne kann man derartige elektrostatische Linsen als Immersionslinsen bezeichnen. Nur muß man beachten, daß in einem solchen elektronenoptischen System n_G sich zwischen Gegenstand und Lochblende kontinuierlich ändert, also nicht als konstant betrachtet werden darf.

Die Berechnungen derartiger Linsensysteme [6] führen zu folgenden Zusammenhängen:

$$z_B = \frac{4\,d\,\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}\left(3 + 2\sqrt{\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}} - \dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} + \dfrac{3\,d}{D}\right)}{3\left[\left(\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} - 1\right)^2 + \left(1 - 2\sqrt{\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}} - 3\,\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)\dfrac{d}{D}\right]}\,; \tag{2}$$

$$V = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\Phi_2}{\Phi_1}}\right) + \frac{1}{2\left(1 + \sqrt{\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}}\right)} \cdot \frac{d}{D} + \\ + \frac{1}{8\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}}\left[3\left(1 - \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)\left(\sqrt{\frac{\Phi_2}{\Phi_1}} - 1\right) + \left(3\sqrt{\frac{\Phi_2}{\Phi_1}} - 1\right)\frac{d}{D}\right]\frac{z_B}{d}\,. \tag{3}$$

Es bedeuten hier z_B den Bildabstand, d den Abstand zwischen den zwei Lochblenden, D den Dingabstand, Φ_1 und Φ_2 die Blendenpotentiale entsprechend der angeführten Skizze (Bild 3). V bezeichnet die Vergrößerung. Solche Linsensysteme ergeben scharfe Abbildungen und ermöglichen die elektronenoptische Untersuchung von plangeschliffenen Metalloberflächen, falls diese genügend hohe Elektronenemission aufweisen, wie dies z.B. bei hocherhitzten W-, Mo- und Ta-Gegenständen der Fall ist.

Wie wir es gefunden haben, können die Gleichungen (2) und (3) trotz der vereinfachten Rechnungsweise (d. h. trotz der Ersetzung des wahren Ablaufes von $\Phi(z)$ durch ein Polygon nach Bild 4) als eine gute Grundlage für den Entwurf eines Abbildungssystems dienen. Man muß nur dafür sorgen, daß ausreichende Möglichkeiten für Bildschärfe-Korrekturen offen bleiben. Dieses Ziel erreichten wir bei unseren Apparaten folgendermaßen. Von den vier, die Abbildungsschärfe bestimmenden Parametern d, D, Φ_2/Φ_1 und z_B darf man zwar (zwischen gewissen Grenzen) drei Parameter willkürlich festlegen, wir haben aber nur für zwei Parameter, d. h. nur für d und z_B feste Werte gewählt und dadurch für die Scharfeinstellung der Bilder gleichzeitig zwei Möglichkeiten freigehalten, u. zw. die Regelung der Bildschärfe einerseits durch eine Änderung

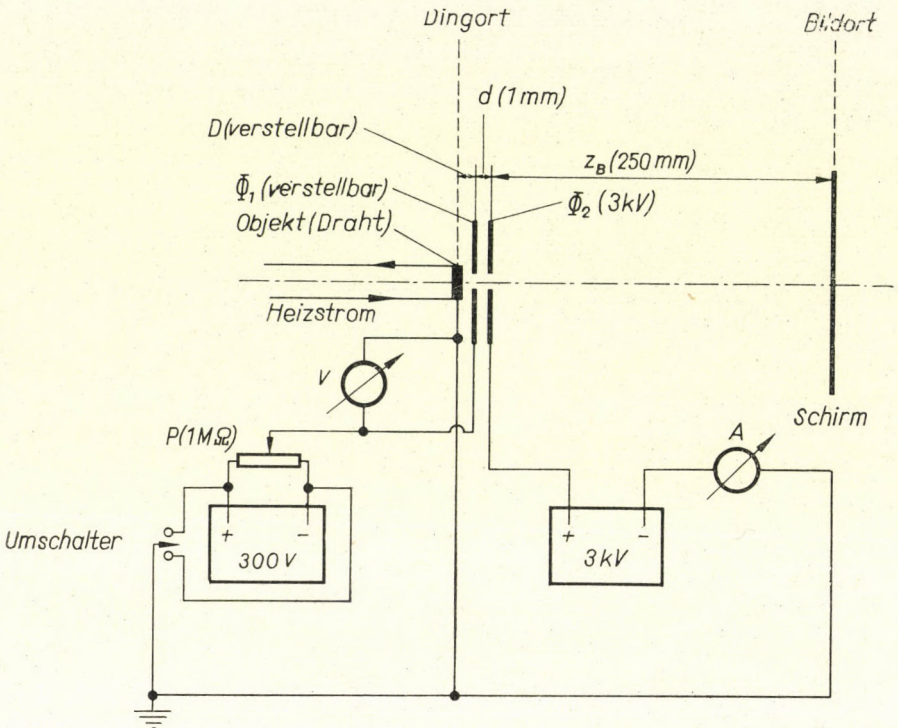


Bild 3. Schaltskizze einer elektronenoptischen Apparatur mit 60facher bis 150facher Vergrößerung, zur Abbildung thermische Elektronen emittierender hocherhitzter Metalloberflächen, zwecks laufender Verfolgung von Gefügeänderungen hocherhitzter Metalle

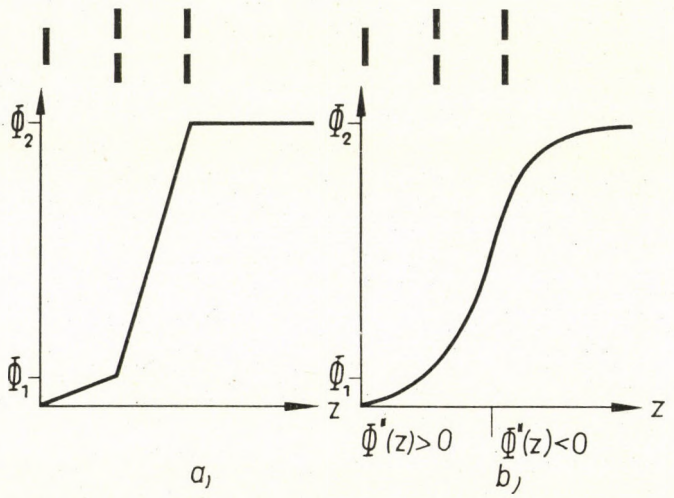


Bild 4. Ablauf des Potentiales Φ_z entlang der z-Achse im achsensymmetrischen Kraftfeld eines Immersionsobjektives« nach Gleichungen (2) und (3) berechnet (*a*) bzw. mittels in einem elektrolytischen Trog durchgeführter Messungen bestimmt (*b*)

des Verhältnisses der Blendenpotentiale Φ_2/Φ_1 und andererseits durch die Änderung des Dingabstandes D.

Den zahlenmäßigen Wert von z_B, von welchem die äußeren Abmessungen eines solchen Apparates am meisten abhängen, haben wir für den eigenen Apparat zu 250 mm bestimmt. Bei der Wahl des d-Wertes muß man zwei gegeneinander wirkende Faktoren beachten. Zur Erreichung eines möglichst großen Brechungsvermögens und zur Verwirklichung einer Konstruktion, in welcher die positiven Äquipotentialflächen durch die Öffnung der näherliegenden Lochblende die Kathodenoberfläche (den abzubildenden Gegenstand) richtig erreichen, sollte man einen möglichst kleinen d-Wert wählen. Kleine d-Werte bringen aber große Durchschlagsgefahren mit sich: dadurch wird man eher zu größeren d-Werten geführt. Da wir uns im voraus für eine Beschleunigungsspannung von 3 kV entschieden haben, wählten wir dazu einen d-Wert von rund 1 mm, wodurch in unserem Apparat die Feldstärke nirgends den Wert von 30 kV/cm überstieg. Unter diesen Umständen ereigneten sich bei uns keine Durchschläge.

Nach dem Einsetzen der Zahlenwerte von $z_B = 250$ und $d = 1$ gibt Gleichung (2) nur einen Zusammenhang allein zwischen den Größen Φ_2/Φ_1 und D an. Man kann diesen Zusammenhang graphisch als Bild 5 darstellen. Alle Punkte dieser Kurve entsprechen Bedingungen scharfer Abbildungen: für einen jeden Kathodenabstand des Diagrammes findet man mit Hilfe der Kurve denjenigen Φ_2/Φ_1-Wert, mit dem man ein scharfes Bild erzeugen kann. Die zusammengehörigen Wertepaare bestimmen gemäß Gleichung (3) gleichzeitig auch den Vergrößerungsgrad, wobei, mit einer Verringerung des D-Wertes ein Anwachsen der Vergrößerung verbunden ist.

Auf Grund der Zahlenwerte des als Bild 5 angeführten Diagrammes läßt unsere Apparatur eine Verschiebung der Kathode in der Achsenrichtung von $D = 0$ bis auf $D = 4$ mm zu. Eine größere Verschiebung als 1,5 mm hat sich jedoch als nicht ausnutzbar erwiesen. Die Bewegung des Gegenstandes geschieht mittels einer geriffelten Metallröhre (mittels einer sog. Bourdonröhre). Diese Art der Kathodenbewegung sichert nicht nur die Feineinstellung von kleinen D-Werten, sie ermöglicht auch gleichzeitig eine einfache und rasche Änderung der Vergrößerung.

Es sollen z. B. die Werte $(\Phi_2/\Phi_1)_1$ und D_1 ein scharfes Bild mit der Vergrößerung V_1 ergeben. Wollen wir dann zu einer stärkeren Vergrößerung V_2 übergehen, dann verschieben wir die Kathode (z.B. den Drahtschliff) in der Richtung zu der Linse auf den (kleineren) Abstand D_2 und stellen das unscharf gewordene Bild mittels des Potentiometers (s. Bild 3) — durch Einstellung eines neuen, zu einer scharfen Abbildung führenden $(\Phi_2/\Phi_1)_2$ Wertes — scharf ein. Da in unserer Anordnung Φ_2 einen konstanten Wert von 3000 V besitzt, erfolgt diese Scharfeinstellung lediglich durch eine Änderung des Φ_1-Wertes. Die Vergrößerung wird also in unserem Apparat allein nur durch den Zahlen-

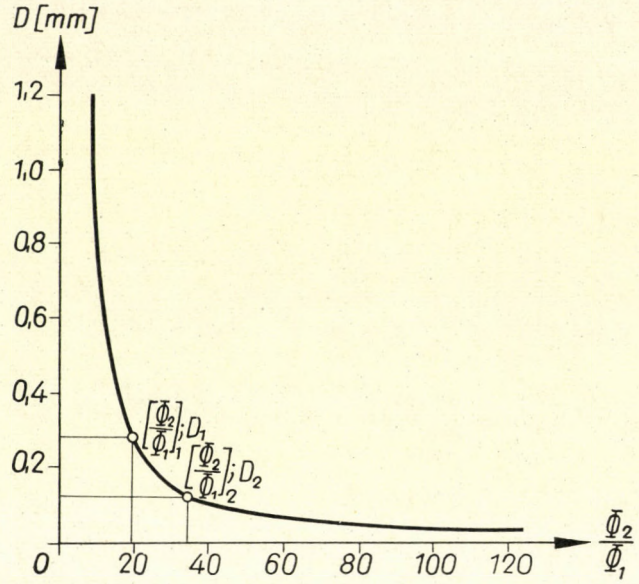


Bild 5. Graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen den zusammengehörigen, zu scharfer Abbildung führenden Kathodenabstand-Werte (D) und Blendenpotentialquotienten (Φ_2/Φ_1), nach Gleichung (2), mit $z_B = 250$ mm und $d = 1$ mm berechnet (siehe auch Bild 3)

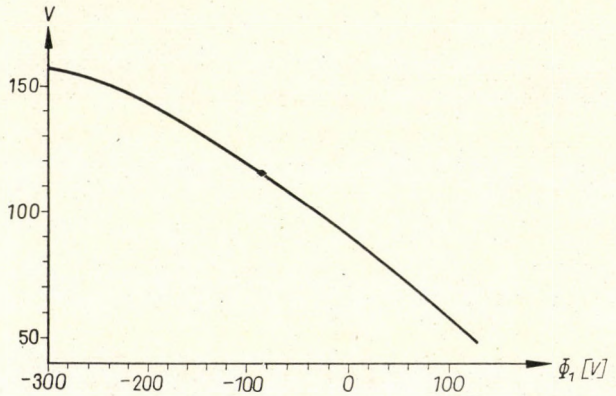


Bild 6. Zu den, am Zeigerinstrument U abgelesenen Potentialwerten (Φ_1-Werten) gehörigen Werte der linearen Vergrößerung (V) bei den nach Bild 3 gebauten Apparaten

wert von Φ_1 bestimmt. Dadurch besteht bei uns die Möglichkeit die Vergrößerungen auf Grund einer einzigen Instrumentenablesung mit Hilfe eines Diagrammes (Bild 6) direkt festzustellen. Dieses Diagramm wurde durch unmittelbares Vermessen von zusammengehörigen Kathoden- und Bild-Abmessungen bestimmt. Demzufolge sind unsere Vergrößerungswerte von den Fehlermöglichkeiten der Näherungsgleichung (3) völlig frei.

Für stärkere Vergrößerungen benutzen wir negative Werte von Φ_1. Gleichung (2) läßt zwar eine solche Möglichkeit unmittelbar nicht erkennen,

die Spuren der Äquipotentialflächen des Bildes 2 weisen aber klar darauf hin, daß an der Kathodenoberfläche (d. h. an der glühenden Metalloberfläche) auch im Falle von negativen Φ_1-Werten ein Gebiet existiert, aus dem die Elektronen — auch solche mit einer Anfangsgeschwindigkeit Null — in das Beschleunigungsfeld gelangen. Dieses Gebiet wird durch die Null-Äquipotentialfläche von dem im Bilde 2 schraffiert dargestellten Bremsgebiet abgegrenzt und verkleinert sich durch das Negativerwerden des Φ_1-Wertes immer mehr. Gemäß der Gestalt der aus Meßwerten gewonnenen Kurve des Bildes 4b bewegen sich die, in das Beschleunigungsfeld gelangenden Elektronen im Bereich der ersten Blende in einem der Bedingung $\Phi''(z) > 0$ gehorchenden, und im Bereich der zweiten Blende in einem der Bedingung $\Phi''(z) < 0$ gehorchenden Potentialfeld. Dies entspricht für die Elektronen einer Einwirkung zuerst von einer Sammellinse und dann von einer Zerstreuungslinse, wie dies aus einer zweimaligen Integrierung der Gleichung (1) hervorgeht. Die Streuwirkung der zweiten Blende ist aber wegen der in seiner Nähe schon stark angestiegenen (im kV-Bereich liegenden) kinetischen Energie viel schwächer als die Sammelwirkung der ersten Blende, wodurch ein solches Immersionsobjektiv auch noch mit negativen Φ_1-Werten als Sammellinse wirkt. Die im Bilde 2 dargestellten Komponenten der Feldstärke E_r zeigen dieses Verhalten ganz augenscheinlich.

Durch den Umstand, daß wir in unserer Apparatur auch negative Werte von Φ_1 zur Abbildung verwenden können, sind wir zu einer wertvollen Möglichkeit von Temperaturbestimmungen hocherhitzter Kathoden gelangt.

III. Temperaturmessung von hocherhitzten Kathoden

Unsere elektronenoptische Apparatur wurde eigentlich zu Untersuchungen von Rekristallisationserscheinungen pulvermetallurgisch erzeugter gezogener Wolframdrähte entwickelt [7]. Für solche Untersuchungen sind rasche Temperaturbestimmungen an Wolframdrähten erforderlich. Temperaturmessungen auf Widerstandsmessungen zurückzuführen ist nur bei langen dünnen Drähten ein gangbarer Weg. Bei kürzeren, dickeren Wolframdrahtstücken bedient man sich im allgemeinen der Temperaturmessungen mittels irgendeines optischen Pyrometers. Es besteht auch bei unseren etwa 15 mm langen und 300—400 Mikron dicken Wolframdrahtstücken — bei welchen sich die Temperatur von Abschnitt zu Abschnitt wesentlich ändert — die Möglichkeit, die Temperatur der einzelnen Abschnitte mit Hilfe eines außerhalb der durchsichtigen Glasapparatur angebrachten optischen Pyrometers zu bestimmen. Es ist aber fast unmöglich, denselben Abschnitt, dessen Abbildung am Bildschirm eben erscheint, im Pyrometer genau einzustellen. Es gibt nur einen einzigen Fall, in dem dies gelingt. Stellt man am Bildschirm den hellsten Abschnitt ein, dann sieht man das Bild des Abschnittes höchster Temperatur und kann denselben auch im Sichtfeld des Pyrometers als den hellsten Drahtteil

leicht einstellen. Man ist aber so auf die Untersuchung des höchsterhitzten Drahtabschnittes beschränkt.

Es ist aber mit einer nachfolgend näher beschriebenen Methode möglich, die Temperatur eines jeden beliebigen Drahtabschnittes befriedigend zu bestimmen.

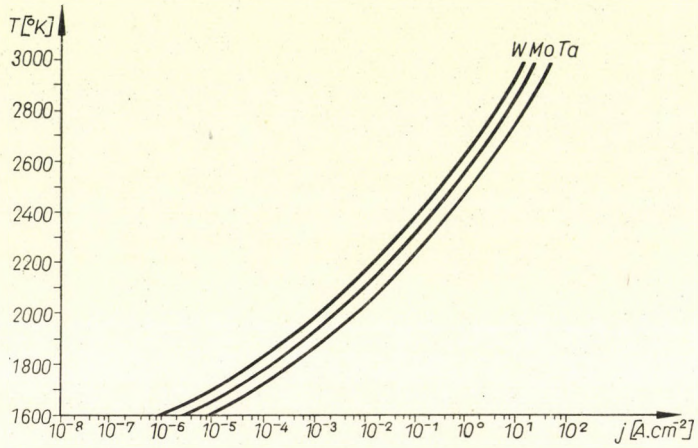


Bild 7. Zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen den Temperaturen (T) und den Emissionsstromdichten (j) der elektronenoptisch abgebildeten Drahtoberflächenbereiche; die Emissionsstromdichten können mit Hilfe des am Instrument A des Bildes 3 abgelesenen Stromwertes (i) und aus der festgestellten Vergrößerung berechneten Oberflächenbereiches (o) leicht zahlenmäßig bestimmt werden, falls man mit negativen Werten arbeitet (der Zusammenhang ist hier für W, Mo und Ta dargestellt)

Es ist bekannt, daß die Stromdichte des Emissionsstromes einer bei T [°K] glühenden, Elektronen emittierenden Metalloberfläche durch die Gleichung (4) von RICHARDSON und DUSHMANN angegeben werden kann,

$$i = AT^2 e^{-W_k/kT}, \tag{4}$$

wo A eine von der Metallart abhängende Konstante; T die absolute Temperatur; W_k die von der Metallart abhängende Austrittsarbeit der Elektronen und k die Boltzmann-Konstante bedeuten.

Benutzt man in unserer Anordnung zu der Bilderzeugung negative Werte von Φ_1, dann stammen Bild und Elektronenstrom ausschließlich von demjenigen Oberflächengebiet der Kathode, von welchem die Null-Äquipotantialfläche die Elektronen abfließen läßt (also im Falle von Bild 2 von dem »nichtschraffierten« Kathodenteil). Eben dieser Elektronenstrom wird durch das Meßinstrument A des Bildes 3 angezeigt, und kann mit Hilfe von Gleichung (4) zu einer Temperaturbestimmung benutzt werden. Dazu muß man den abgelesenen Stromwert durch den Zahlenwert des strombestimmenden Oberflächenteiles dividieren, welch letzteren man in Kenntnis der Bildfläche

und der Vergrößerung leicht berechnen kann. Bild 7 gibt uns die zu den in dieser Weise bestimmten Stromdichtewerten gehörige Temperaturwerte der abgebildeten Oberflächengebiete einiger Metalle an. Arbeitet man mit unveränderten Kathodenabmessungen und mit gleichbleibender Vergrößerung, dann kann man die Temperatur des untersuchten Kathodenteiles durch eine einzige Instrumentenablesung feststellen.

Man muß dazu noch folgendes beachten. Die meisten Literaturangaben über Austrittsarbeiten stammen von Emissionsmessungen an Kathoden mit polykristallinem Gefüge. Die Oberfläche solcher Kathoden besteht aus einer großen Zahl kristallographisch verschiedentlich orientierter Flächengebiete. Zu den verschiedenen kristallographischen Orientierungen gehören aber verschiedene Werte der A-Konstante und der Austrittsarbeit. Die meisten Literaturangaben stellen also Durchschnittswerte vieler, verschiedentlich orientierter Oberflächenelemente dar. So gibt uns Bild 7, das auf Grund von Literaturangaben entworfen worden ist, z. B. für Wolframkathoden nur dann einen richtigen Temperaturwert an, wenn und bis die Kathode polykristalline Oberfläche hat. Wird die Bildfläche nur durch wenige Kristalle ausgefüllt, dann darf man Bild 7 zu Temperaturbestimmungen nicht benutzen.

IV. Einige Anwendungsbeispiele

Mit einer, gemäß den im Bild 3 angegebenen elektrischen und geometrischen Angaben aufgebauten Apparatur haben wir eine beträchtliche Zahl von klar auswertbaren und mit lichtmikroskopischen Aufnahmen gut vergleichbaren Bilder erhalten. Der Vergrößerungsbereich lag dabei zwischen den 60-fachen und 150fachen Vergrößerungen. Der jeweilige Vergrößerungswert konnte mittels einer einzigen Ablesung eines Zeigerinstrumentes ermittelt werden. Auch die Temperatur des abgebildeten Drahtabschnittes konnte — wie oben angegeben — einfach bestimmt werden. Während der Untersuchungen und Aufnahmen herrschte in der Apparatur ein Druck von 10^{-5} Torr. Von den am Bildschirm erschienenen Bildern haben wir auf 16 mm Schmalfilme sowohl Einzelaufnahmen wie auch Kinoaufnahmen erzeugt.

Vorwiegend untersuchten wir die Erscheinungen des Rekristallisationsvorganges verschiedener, d. h. mit verschiedenen chemischen Zusätzen erzeugten Wolframdrähte. Bild 8 zeigt uns Einzelaufnahmen dieser Untersuchungen. Bei Molybdändrähten läßt sich dieser Vorgang nicht verfolgen, da die Rekristallisation der Molybdändrähte schon bei einer so niedrigen Temperatur erfolgt, bei welcher die Elektronenemission zu einer deutlichen Abbildung der Oberfläche nicht ausreicht. Hier konnten wir nur diejenigen Strukturänderungen beobachten, welche sich in einem schon voll rekristallisierten Draht bei erhöhter Temperatur später noch ereignen. Bild 1a und Bild 1b zeigen uns solche nachträgliche Strukturänderungen eines Molybdändrahtes von 320

Mikron Durchmesser. Bei derartigen Untersuchungen zeigen sich die entscheidenden Vorteile einer laufenden elektronenoptischen Untersuchungsweise am meisten. Man sieht bei direkter Beobachtung des elektronenoptischen Bildes irgendeines Molybdändrahtstückes manchmal blitzschnelle Orientierungsänderungen gewisser Oberflächengebiete. Solche Erscheinungen kann man mittels gewöhnlicher metallographischer Methoden nicht erfassen. Auch kann man die viel langsamere Bewegung der Kristallitgrenzen von rekristallisieren-

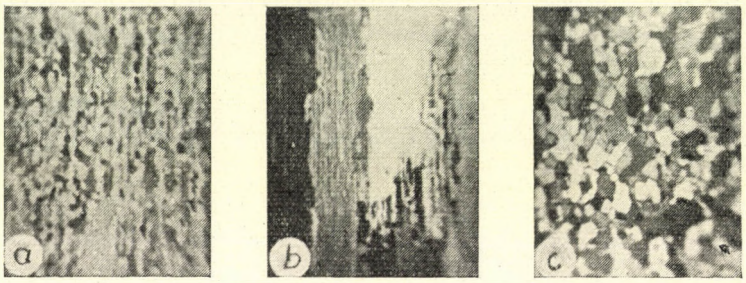


Bild 8. Elektronenoptische Aufnahmen von mit verschiedenen chemischen Zusätzen hergestellten pulvermetallurgischen Wolframdrähten (Vergrösserung 120fach):
Ein mit K, Si und Al enthaltenden Zusätzen hergestellter, sog. GK-Draht [MILLNER, T.—TÚRY, P.: Ung. Pat. Nr. 106.268] nach erfolgter primärer Rekristallisation und bevorstehender sekundärer Rekristallisation, am unteren Bildrand sieht man einen einzigen, im Wachsen befindlichen sekundären Kristallit (*a*);
ein mit K, Si und Ga enthaltenden Zusätzen hergestellter, sog. Ga-Wolframdraht [MILLNER T.—NEUGEBAUER, J.—KERÉNYI, L.: Ung. Pat. Nr. 152.086] nach abgelaufener sekundärer Rekristallisation (*b*);
ein mit nur K und Al enthaltenden Zusätzen hergestellter, sog. KAl-Draht [MILLNER, T.—NEUGEBAUER, J.: Ung. Pat. Nr. 149.187] nach völliger abgelaufener Rekristallisation (*c*).

den Wolframdrähten kaum mit lichtoptischer Metallographie studieren, auch dann nicht, wenn man Hochtemperatur-Mikroskope anwendet, da bei dieser Methode die neuentstandenen Korngrenzen (durch Vakuum-Ätzung) erst nach längerer Zeit sichtbar werden.

Die beschriebene elektronenoptische Methode bringt auch noch den weiteren Vorteil mit sich, daß ihre Bilder neben den »metallographischen« Einzelheiten, die von den Orientierungsunterschieden einzelner Strukturelemente stammen, auch solche Besonderheiten der Struktur zum Vorschein bringt, die durch Verschiedenheiten der Austrittsarbeit bedingt und mit licht-optischen Methoden nicht zu finden sind. So zeigt uns z. B. Bild 8b, daß die im Rekristallisationsvorgang entstandenen großen Kristallite gewisser Wolframdrahtsorten in der Richtung der Drachtachse oft eine feine Parallel-Streifung aufweisen. Dies hängt sehr wahrscheinlich mit einer inhomogenen Verteilung der Zusatzspuren in diesen Kristallen zusammen. Diese Inhomogenität wurde erstmal mit der hier beschriebenen Emissions-Elektronenmikroskopmethode beobachtet.

SCHRIFTTUM

1. NELSON, R. B.: M. I. T. Physics Thesis (Ph. D.) 1938.
2. ROBINSON, C. S.: *J. Appl. Phys.* **13** (1942), 647.
3. MILLNER, T.—PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.: *MTA VI. Oszt. Közl.* **21** (1957), 349.
4. MILLNER, T.—PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.: *Acta Techn. Hung.* **18** (1957), 289.
5. PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.—MILLNER, T.: Festkörperphysik (Festkörperphysik-Tagung in Balatonfüred 1959). Akademie Verlag, Berlin 1961; 60.
6. GLASER: Elektronenoptik; Springer 1952.
7. HORACSEK, O.—MILLNER, T.: *Z. Metallkunde* **58** (1967), 345.

A Simple Apparatus for Investigating by Electron Optics the High-Temperature Metallographic Phenomena of Metals with High Melting Point. The paper describes a simple electron optics method and a home-made apparatus for the investigation of the structural changes of high-melting point metals with the aid of thermal electrons. The surfaces of the heated specimens and their changes can be observed and photographed directly with a magnification ranging from 60× to 150×. The paper also presents a simple method suitable for the rapid determination of the temperature of the observed part of the surface. The apparatus was used by the authors mainly for investigating the recrystallization phenomena of W and Mo wires and they found that the electron optic images provide informations not to be observed on ordinary photo-micrographs.

Appareil simple pour l'examen électronoptique des processus métallographiques à haute température des métaux à point de fusion élevé. L'étude décrit un appareil construit par les auteurs, ainsi qu'une méthode simple d'optique électronique pour l'examen des électrons thermiques et des changements de structure des métaux à point de fusion élevé. La surface des éprouvettes chauffées et ses variations peuvent être observées et photographiées directement avec un grossissement de 60 à 150 fois. L'étude communique aussi une méthode simple pour déterminer rapidement la température de la surface observée. Les auteurs ont utilisé l'appareil avant tout pour l'examen des phénomènes de recristallisation des fils de W et de Mo et ont constaté que les images électronoptiques offrent aussi des informations qui ne peuvent pas être lues sur l'image microscopique ordinaire.

Простой прибор, пригодный для электронно-оптических исследований металлографических процессов, протекающих при высоких температурах в тугоплавких металлах *(О. Хорачек и Т. Мильнер).* В работе описывается простой электронно-оптический метод и прибор собственного изготовления, пригодный для исследования изменений текстуры тугоплавких металлов при помощи термических электронов. Поверхность нагретых образцов и происходящие на их поверхности изменения можно непосредственно наблюдать и фотографировать при 60—150 кратном увеличении. В работе дается также описание простого метода, пригодного для быстрого определения температуры отображенного участка поверхности. Авторы предлагаемый прибор в основном использовали для исследования рекристаллизационных процессов, протекающих в вольфрамовых и молибденовых проволоках, и при этом установили, что электронно-оптические изображения дают также информации и такого порядка, которые не могут быть установлены на основе простых световых оптических изображений.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 267—284 (1968)

DETERMINATION OF TRANSFER FUNCTIONS OF DIRECT CURRENT MACHINES WITH THE AID OF SIGNAL-FLOW GRAPHS

F. CSÁKI

CORRESPONDENT MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

P. MAGYAR and R. BARS

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received January 29, 1968]

The paper demonstrates the application of the signal-flow graphs for the solution of a special task in control technics, namely for the determination of the transfer functions of direct current machines.

I. Introduction

In the field of control engineering the properties, construction, reduction and applications of the signal-flow graphs—utilized more and more extensively for their clear suggestiveness and simplicity — are dealt with by an ample literature [1—6] and by a previous paper published in *Elektrotechnika* [7]. As a continuation of the paper published previously [7] we will first introduce the general formula of the signal-flow graphs, the so-called Mason formula which permits avoiding the lengthy, though thoroughly methodical reductions necessary for the determination of the transfer functions (or gain factors) establishing the relationship between the input and output signals of the signal-flow graphs representing systems of a higher complexity and which permits the writing down of the result directly.

The derivation of the Mason general formula is found in the available literature e.g. [2—4], therefore in the following we will only briefly discuss the structure of the expression.

II. The general formula of signal-flow graphs

The general formula of Mason is given for transfer functions [1], but naturally it may be applied judiciously for frequency-functions or gain factors as well:

$$W(s) = \frac{\sum_k W_k(s)\, \Delta_k(s)}{\Delta(s)}\,, \tag{1}$$

or by an abbreviated notation

$$W = \frac{\sum_k W_k \Delta_k}{\Delta}\,. \tag{2}$$

In this formula W denotes the resultant transfer function and W_k the transfer function of the k-th forward path. Further Δ is the determinant of the system of equations represented by the signal-flow graph. The determinant can be calculated with the formula given below:

$$\Delta = 1 - \sum_{m_1} P_{m1}^{(1)} + \sum_{m_2} P_{m2}^{(2)} - \sum_{m_3} P_{m3}^{(3)} + \ldots , \tag{3}$$

where

$P_{m1}^{(1)}$ is the transfer function of the m_1-th H_i loop;
$P_{m2}^{(2)}$ is the m_2-th product of the transfer functions of two distinct (not in contact with each other, i.e. possessing no common junction) H_i and H_j loops each;
$P_{m3}^{(3)}$ is the m_3-th product of three distinct H_i, H_j and H_l loops' transfer functions each, etc . . . .

For calculating system-determinant Δ the appearing summations must be extended to all the possible combinations. Lastly Δ_k is the Δ determinant of the part — not contacting the k-th forward path — of the signal-flow graph, in other words the k-th subdeterminant.

So the determinant Δ (resp. Δ_k) can be computed with the formula

$$\Delta = 1 - \sum_{i} H_i + \sum_{i,j} H_i H_j - \sum_{i,j,l} H_i H_l H_l + \ldots . \tag{4}$$

III. Examples for transfer function determinations of direct current machines

In the following the utilization of the Mason general formula by way of several examples is shown. As examples the electric machines used frequently in control engineering are chosen with working point dependent transfer functions and non-linear equations of behaviour, e.g. with the product of two dependent variables involved. For simplifying the problem we assume small variations around the working point, as in this case the gain factor may be taken for constant, and due to the linearization of the equations, the Laplace transformation may be applied. For details of the method we refer to the literature [8]. The following notations are used: lower case letters with lower case letter indices mean time variable quantities. The variation itself is denoted by Δ, while capital letters with capital letter indices mean constant working point values. E.g.

$$i_g = I_G + \Delta i_g$$

or (5)

$$r_g = R_G + \Delta r_g .$$

The Laplace transforms are expressed by lower case letter indexed capital letters. E.g.:

$$\mathscr{L}[\Delta i_g] = \Delta I_g(s), \qquad \mathscr{L}[\Delta r_g] = \Delta R_g(s). \tag{6}$$

Finally we mention, that e.g. the variation of the product function

$$u_g = r_g i_g \tag{7}$$

is

$$\Delta u_g = \Delta(r_g i_g) = R_G \Delta i_g + I_G \Delta r_g \tag{8}$$

and its Laplace transform is

$$\Delta U_g(s) = R_G \Delta I_g(s) + I_G \Delta R_g(s). \tag{9}$$

1. Separately excited direct current generator

First let us examine a direct current generator loaded by an arbitrary operational admittance $Y_T(s)$, with a variable excitation voltage and excitation circuit resistance (Fig. 1). Assuming small variations of the input variables

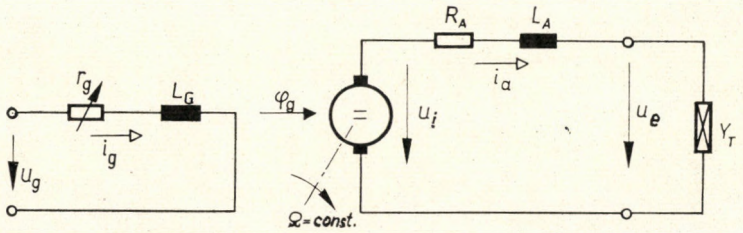


Fig. 1. Separately excited d.c. generator

the operation of the machine may be described by the following system of equations:

$$\begin{aligned}
\Delta U_g(s) &= (R_G + sL_G)\Delta I_g(s) + I_G \Delta R_g(s),\\
\Delta \Phi_g(s) &= K_\Phi \Delta I_g(s),\\
\Delta U_i(s) &= K_U \Delta \Phi_g(s),\\
\Delta U_e(s) &= \Delta U_i(s) - (R_A + sL_A)\Delta I_a(s),\\
\Delta I_a(s) &= Y_T(s)\Delta U_e(s).
\end{aligned} \tag{10}$$

Introducing the time constants $T_G = L_G/R_G$ and $T_A = L_A/R_A$ we have:

$$\begin{aligned}
\Delta U_g(s) &= R_G(1 + sT_G)\Delta I_g(s) + I_G \Delta R_g(s),\\
\Delta \Phi_g(s) &= K_\Phi \Delta I_g(s),\\
\Delta U_i(s) &= K_U \Delta \Phi_g(s),\\
\Delta U_e(s) &= \Delta U_i(s) - R_A(1 + sT_A)\Delta I_a(s),\\
\Delta I_a(s) &= Y_T(s)\Delta U_e(s).
\end{aligned} \tag{11}$$

Fig. 2 shows the signal-flow graph representing equation-system (11).

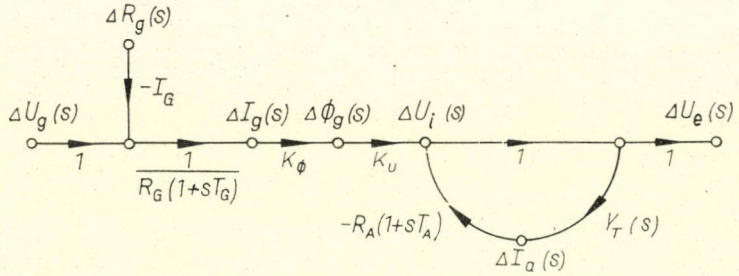


Fig. 2. Signal-flow graph representing the equation system of separately excited generator

Let us determine transfer functions $W = W_{\Delta U_g}^{\Delta U_e}$ by the Mason formula, where

$$W = W_{\Delta U_g}^{\Delta U_e} = \frac{\Delta U_e(s)}{\Delta U_g(s)} . \tag{12}$$

From the signal-flow graph of Fig. 2 the following consequences may be drawn: There exists only one forward path, whose transfer function is

$$W_1 = \frac{K_\Phi K_U}{R_G} \frac{1}{1 + sT_G} .$$

There exists one loop, whose transfer function is

$$P_1^{(1)} = H_1 = - R_A(1 + sT_A)Y_T(s),$$
$$(m_1 = 1).$$

There are no separate loops

$$P_{m2}^{(2)} = 0, \qquad P_{m3}^{(3)} = 0, \ldots$$

so

$$\Delta = 1 - H_1 = 1 + R_A(1 + sT_A)Y_T(s).$$

As the loop is in contact with the forward path, therefore

$$1 = 1 - 0 + \ldots = 1.$$

Substituting this into relationship (2) we have

$$W = \frac{W_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{K_\Phi K_U}{R_G} \frac{1}{1 + sT_G} \frac{1}{1 + R_A(1 + sT_A)Y_T(s)} . \tag{13}$$

Let us load the generator by an operational impedance of $R_T + sL_T$; this may mean e.g. the excitation coil of a synchron machine. Then

$$Y_T(s) = \frac{1}{R_T + sL_T}. \tag{14}$$

Substituting this into (13) we obtain

$$W_{\Delta U_g}^{\Delta U_e} = \frac{\Delta U_e(s)}{\Delta U_g(s)} = A_G \frac{R_T}{R_T + R_A} \frac{1 + sT_T}{(1 + sT_G)(1 + sT_V)} \tag{15}$$

where

$$A_G = \frac{K_\Phi K_U}{R_G}$$

machine constant;

$$T_T = \frac{L_T}{R_T}$$

time-constant of the load;

$$T_V = \frac{L_A + L_T}{R_A + R_T}$$

electric time-constant of the armature circuit.

2. *Separately excited direct current motor*

On the basis of Fig. 3 using the notations of the figure, the equation system describing the operation of the machine may be written down in the form of Laplace transforms, if we assume small variations:

$$\begin{aligned}
\Delta U_e(s) &= (R_A + sL_A)\Delta I_a(s) + I_A \Delta R_a(s) + \Delta U_i(s),\\
\Delta U_i(s) &= K_U \Phi_G \Delta \Omega_m(s) + K_U \Omega_M \Delta \Phi_g(s),\\
\Delta M_m(s) &= K_M I_A \Delta \Phi_g(s) + K_M \Phi_G \Delta I_a(s),\\
\Delta M_m(s) - \Delta M_t(s) &= J_M s \Delta \Omega_m(s),\\
\Delta U_g(s) &= (R_G + sL_G)\Delta I_g(s) + I_G \Delta R_g(s),\\
\Delta \Phi_g(s) &= K_\Phi \Delta I_g(s).
\end{aligned} \tag{16}$$

Introducing the time constants $T_V = L_A/R_A$ and $T_G = L_G/R_G$, Fig. 4 shows the signal-flow graph representing equation-system (16).

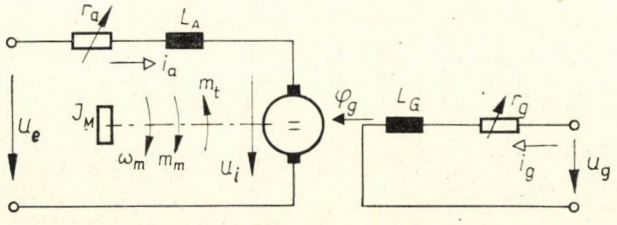


Fig. 3. Separately excited d.c. motor

Let us determine the transfer function existing between the variation of the angular velocity, as output signal, and the variation of the torque of the load, as input signal:

$$W = W_{\Delta M_t}^{\Delta \Omega_m} = \frac{\Delta \Omega_m(s)}{\Delta M_t(s)} . \tag{17}$$

Between the input signal and the output signal there is only one forward path:

$$W_1 = -\frac{1}{J_M s} .$$

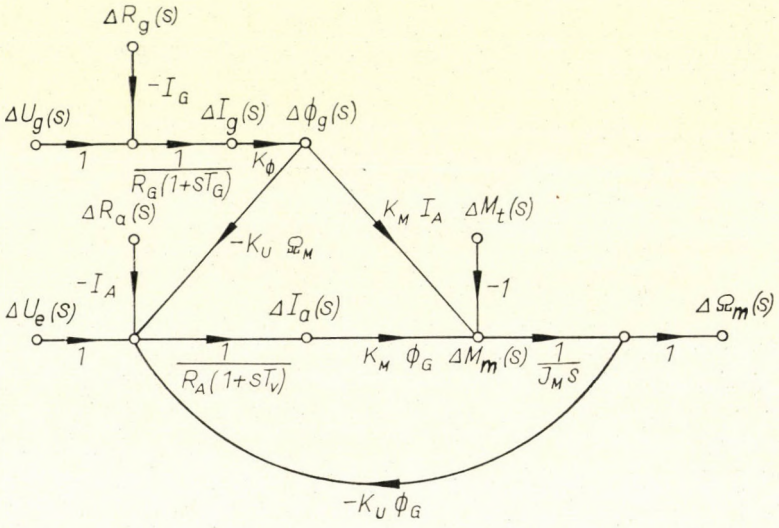


Fig. 4. Signal-flow graph representing the equation system of separately excited d.c. motor

The signal-flow graph contains a loop, whose transfer function is:

$$P_1^{(1)} = H_1 = -\frac{K_M K_U \Phi_G^2}{R_A J_M} \frac{1}{s(1+sT_V)} = -\frac{1}{sT_M(1+sT_V)} ,$$

$$(m_1 = 1)$$

where

$$T_M = \frac{R_A J_M}{K_M K_U \Phi_G^2}$$

is the electro-mechanical time constant of the motor, and J_M denotes the moment of inertia of the total mass on the motor axis.

Separate loops do not exist

$$P_{m2}^{(2)} = 0, \quad P_{m3}^{(3)} = 0 \ldots ,$$

so

$$\Delta = 1 - H_1 .$$

As loop H_1 is in contact with the forward path

$$\Delta_1 = 1 - 0 + 0 - \ldots = 1.$$

Substituting this into (2) and taking (17) into consideration, we have:

$$W_{\Delta M_t}^{\Delta \Omega_m} = \frac{\Delta \Omega_m(s)}{\Delta M_t(s)} = -\frac{R_A}{K_M K_U \Phi_G^2} \frac{1 + sT_V}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}. \tag{18}$$

Other transfer functions may also be determined in a similar way, on the basis of the signal-flow graph. Table I summarizes all the transfer functions concerning the separately excited motor.

3. Ward-Leonard aggregate

The system of equations characteristic of the aggregate is written down on the basis of the above principles, i.e. by assuming small variations we linearize the equation system and write it directly in the form of the Laplace transforms.

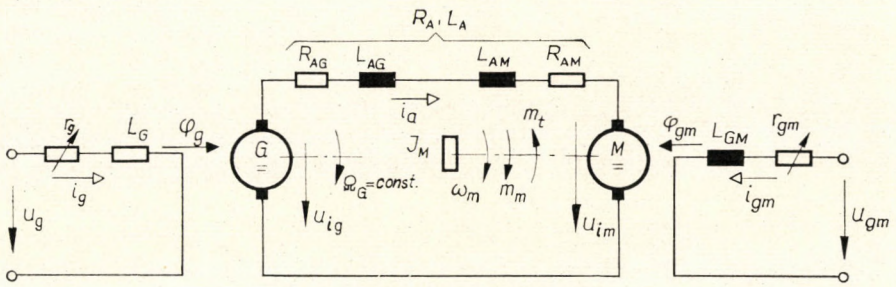


Fig. 5. Ward-Leonard aggregate

For simplicity's sake we assume, that the angular velocity of the generator may not even suffer any transient variation, i.e. $\omega_g = \Omega_G$ is a constant. The notations used in the equation system are identical with those in the figure:

$$\begin{aligned}
&\Delta U_g(s) = (R_G + sL_G)\Delta I_g(s) + I_G \Delta R_g(s),\\
&\Delta \Phi_g(s) = C_G \Delta I_g(s),\\
&\Delta U_{ig}(s) = K_G \Delta \Phi_g(s);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta U_{gm}(s) = (R_{GM} + sL_{GM})\,\Delta I_{gm}(s) + I_{GM}\,\Delta R_{gm}(s),\\
&\Delta \Phi_{gm}(s) = C_M\,\Delta I_{gm}(s),\\
&\Delta U_{im}(s) = K_U\,\Phi_{GM}\,\Delta \Omega_m(s) + K_U\,\Omega_M\,\Delta \Phi_{gm}(s);
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta U_{ig}(s) - \Delta U_{im}(s) = (R_A + sL_A)\,\Delta I_a(s)\,,\\
&\Delta M_m(s) = K_M\,\Phi_{GM}\,\Delta I_a(s) + K_M\,I_A\,\Delta \Phi_{gm}(s)\,,\\
&\Delta M_m(s) - \Delta M_t(s) = J_M\,s\Delta \Omega_m(s).
\end{aligned}$$

Table I

Transfer functions of the separately excited d. c. motor

Output signal	Input signal	Transfer function
$\Delta\Omega_m$	ΔU_e	$W_{\Delta U_e}^{\Delta\Omega_m} = \frac{1}{K_U \Phi_{GM}} \frac{1}{1 + sT_M + s^2 T_V T_M}$
	ΔR_a	$W_{\Delta R_a}^{\Delta\Omega_m} = -\frac{I_A}{K_U \Phi_{GM}} \frac{1}{1 + sT_M + s^2 T_V T_M}$
	ΔU_g	$W_{\Delta U_g}^{\Delta\Omega_m} = -\frac{K_\Phi \Omega_M}{R_G \Phi_{GM}} \left(1 - \frac{I_A R_A}{K_U \Omega_M \Phi_{GM}}\right) \frac{1 - sT_V \frac{I_A R_A}{K_U \Omega_M \Phi_{GM} - I_A R_A}}{(1 + sT_G)(1 + sT_M + s^2 T_M T_V)}$
	ΔR_g	$W_{\Delta R_g}^{\Delta\Omega_m} = \frac{K_\Phi \Omega_M I_G}{R_G \Phi_{GM}} \left(1 - \frac{I_A R_A}{K_U \Omega_M \Phi_{GM}}\right) \frac{1 - sT_V \frac{I_A R_A}{K_U \Omega_M \Phi_{GM} - I_A R_A}}{(1 + sT_G)(1 + sT_{GM} + s^2 T_M T_V)}$
	ΔM_t	$W_{\Delta M_t}^{\Delta\Omega_m} = -\frac{R_A}{K_M K_U \Phi_{GM}^2} \frac{1 + sT_V}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}$
ΔI_a	ΔU_e	$W_{\Delta U_e}^{\Delta I_a} = \frac{1}{R_A} \frac{sT_M}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}$
	ΔR_a	$W_{\Delta R_a}^{\Delta I_a} = -\frac{I_A}{R_A} \frac{sT_M}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}$

ΔI_a	ΔU_g	$W_{\Delta U_g}^{\Delta I_a} = -\frac{K_\Phi I_A}{R_G \Phi_{GM}} \cdot \frac{1 + sT_M \frac{K_U \Omega_M \Phi_{GM}}{I_A R_A}}{(1 + sT_G)(1 + sT_M + s^2 T_M T_V)}$
	ΔR_g	$W_{\Delta R_g}^{\Delta I_a} = \frac{K_\Phi I_A I_G}{R_G \Phi_{GM}} \cdot \frac{1 + sT_M \frac{K_U \Omega_M \Phi_{GM}}{I_A R_A}}{(1 + sT_G)(1 + sT_M + s^2 T_M T_V)}$
	ΔM_t	$W_{\Delta M_t}^{\Delta I_a} = \frac{1}{K_M \Phi_{GM}} \cdot \frac{1}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}$
ΔM_m	ΔU_g	$W_{\Delta U_g}^{\Delta M_m} = -\frac{K_M \Phi_{GM}}{R_A} \cdot \frac{sT_M}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}$
	ΔR_a	$W_{\Delta R_a}^{\Delta M_m} = -\frac{K_M \Phi_{GM} I_A}{R_A} \cdot \frac{sT_M}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}$
	ΔU_g	$W_{\Delta U_g}^{\Delta M_m} = -\frac{K_\Phi K_M I_A}{R_G} \cdot \frac{K_U \Omega_M \Phi_{GM} - I_A R_A}{I_A R_A} \cdot \frac{sT_M \left[1 - sT_V \left(\frac{I_A R_A}{K_U \Omega_M \Phi_{GM}} - 1\right)\right]}{(1 + sT_G)(1 + sT_M + s^2 T_M T_V)}$
	ΔR_g	$W_{\Delta R_g}^{\Delta M_m} = \frac{K_\Phi K_M I_A I_G}{R_G} \cdot \frac{K_U \Omega_M \Phi_{GM} - I_A R_A}{I_A R_A} \cdot \frac{sT_M \left[1 - sT_V \left(\frac{I_A R_A}{K_U \Omega_M \Phi_{GM}} - 1\right)\right]}{(1 + sT_G)(1 + sT_M + s^2 T_M T_V)}$
	ΔM_t	$W_{\Delta M_t}^{\Delta M_m} = \frac{1}{1 + sT_M + s^2 T_M T_V}$

In the signal-flow graph representing equation system (19) the following notations are used:

$T_G = L_G/R_G$ the excitation circuit time-constant of the generator;
$T_{GM} = L_{GM}/R_{GM}$ the excitation circuit time-constant of the motor;
$T_V = L_A/R_A$ the electric time-constant of the armature circuit.

As an example let us determine the transfer function between the armature circuit current as output signal, and the generator's excitation voltage

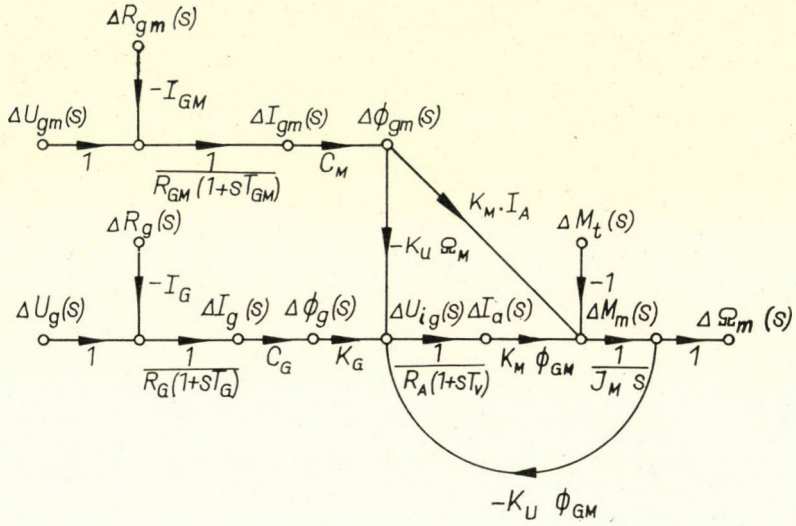


Fig. 6. Signal-flow graph representing the equation system of the Ward-Leonard aggregate

as input signal, for the case of small variations:

$$W = W_{\Delta U_g}^{\Delta I_a} = \frac{\Delta I_a(s)}{\Delta U_g(s)} . \tag{20}$$

There exists one forward path, whose transfer function is

$$W_1 = \frac{C_G K_G}{R_G R_A} \frac{1}{(1 + sT_G)(1 + sT_V)} .$$

There exists one loop, separate loops do not exist:

$$P_1^{(1)} = H_1 = -\frac{K_M K_\Omega \Phi_{GM}^2}{J_M R_A} \frac{1}{s(1 + sT_V)} = -\frac{1}{sT_M(1 + sT_V)},$$

$$(m_1 = 1)$$

where

$$T_M = \frac{J_M R_A}{K_M K_\Omega \Phi_{GM}^2}$$

is the motor's electro-mechanical time constant.

As

$$P_{m2}^{(2)} = 0,\ P_{m3}^{(3)} = 0 \ldots .$$

so

$$\Delta = 1 - H_1 = 1 + \frac{1}{sT_M(1 + sT_V)}$$

and

$$\Delta_1 = 1 - 0 + 0 + \ldots = 1 .$$

Substituting this into Mason's formula (2) and taking (20) into consideration, we have

$$W_{\Delta U_g}^{\Delta I_a} = \frac{\Delta I_a(s)}{\Delta U_g(s)} = \frac{C_G K_G}{R_G R_A} \frac{sT_M}{(1 + sT_G)(1 + sT_M + s^2 T_M T_V)} . \tag{21}$$

4. *The amplidyn*

In the case of the amplidyn a new condition aggravates the calculation, namely frequently several control coils are used on one pole. The system is made more complex in a physical sense too as a consequence of the coils being coupled inductively to each other, the number of the equations describing the process increases and so does the work of computation. Let us consider the frequent practical case, when three control coils of the amplidyn are used and let us examine the transfer function of the excitation circuit, with the variation of flux in the excitation circuit as output signal and the variation of the control voltage as input signal:

$$W = W_{\Delta U_e}^{\Delta \Phi_g} = \frac{\Delta \Phi_g(s)}{\Delta U_v(s)} . \tag{22}$$

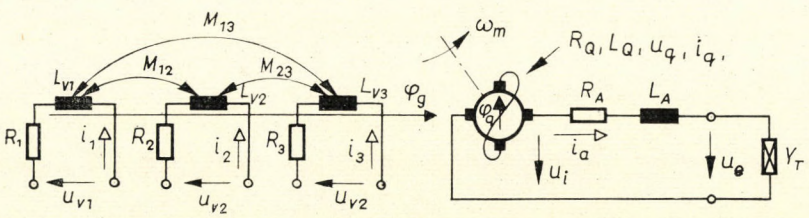


Fig. 7. Amplidyn with 3 control coils for each pole

The determination of the excitation circuit transfer function (22) is greatly facilitated, without incurring any grave error, by the usual neglection of the control coils' leakage:

$$L_S = 0 \tag{23}$$

i.e. by assuming the coupling of the coil's total number of turns with the φ_g pole flux.

If we reduce the control circuit data to an identical number of turns, then we necessarily have

$$L_{V1} = L_{V2} = L_{V3} = L_V \tag{24}$$

where L_{V1}, L_{V2}, L_{V3} denote the control coil's inductions reduced to the common number of turns.

It follows both physically, — on the basis of (24) — and mathematically — on the basis of $M_{ik} = \sqrt{L_i L_k}$ — that

$$M_{12} = M_{23} = M_{13} = L_V \,. \tag{25}$$

The number of time constants has been reduced with the aid of the relationships (24) and (25) and so the calculation has been made more elucidate. Let us write down, on the basis of Fig. 7 assuming small variations the linearized and Laplace transformed equation system describing the control circuit:

$$\begin{aligned}
\Delta U_{v1}(s) &= (R_1 + sL_{V1})\,\Delta I_1(s) + sM_{12}\,\Delta I_2(s) + sM_{13}\,\Delta I_3(s)\,, \\
\Delta U_{v2}(s) &= sM_{12}\,\Delta I_1(s) + (R_2 + sL_{V2})\,\Delta I_2(s) + sM_{23}\,\Delta I_3(s)\,, \\
\Delta U_{v3}(s) &= sM_{13}\,\Delta I_1(s) + sM_{23}\,\Delta I_2(s) + (R_3 + sL_{V3})\,\Delta I_3(s)\,; \\
\Delta \Phi_g(s) &= C_G[\Delta I_1(s) + \Delta I_2(s) + \Delta I_3(s)]\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

where R_1, R_2 and R_3 denote the resistances reduced to an identical number of turns of the control coils and C_G the machine constant. Taking into consideration the relationships (24) and (25) and introducing the control circuit time constants

$$\begin{aligned}
T_{V1} &= L_V/R_1\,, \\
T_{V2} &= L_V/R_2
\end{aligned} \tag{27}$$

and

$$T_{V3} = L_V/R_3$$

we have:

$$\begin{aligned}
\Delta U_{v1}(s) &= R_1(1 + sT_{V1})\,\Delta I_1(s) + sL_V\,\Delta I_2(s) + sL_V\,\Delta I_3(s)\,, \\
\Delta U_{v2}(s) &= sL_V\,\Delta I_1(s) + R_2(1 + sT_{V2})\,\Delta I_2(s) + sL_V\,\Delta I_3(s)\,, \\
\Delta U_{v3}(s) &= sL_V\,\Delta I_1(s) + sL_V\,\Delta I_2(s) + R_3(1 + sT_{V3})\,\Delta I_3(s)\,; \\
\Delta \Phi_g(s) &= C_G[\Delta I_1(s) + \Delta I_2(s) + \Delta I_3(s)]\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Fig. 8 shows the signal-flow graph representing equation system (28).

The insight of the signal-flow graph may be greatly improved if we transpose the paths arriving at junction $\Delta_{vi}(s)$ into junction $\Delta I_i(s)$ and utilize the relationships under (27) [see also Fig. 9].

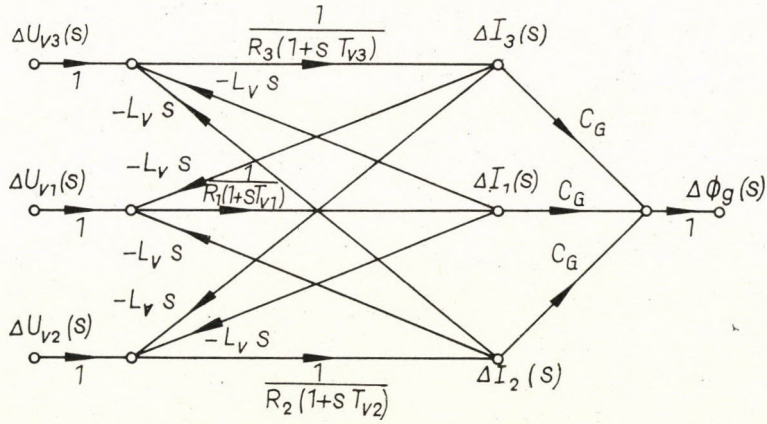


Fig. 8. Signal-flow graph of the equation system of three interconnected control coils

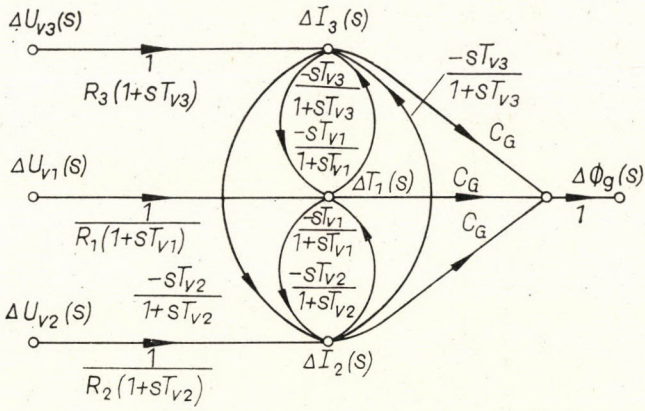


Fig. 9. Signal-flow graph of Fig. 8 after conversion

On the basis of the rule shown in Fig. 9 the signal-flow graph of a system of control coils consisting of an arbitrary number of coils coupled to each other can easily be plotted.

Let us determine now, what kind of transfer function holds between the output point of the signal-flow graph $\Delta\Phi_g(s)$ and one of the input points, e.g. $\Delta U_{v1}(s)$:

$$W = W_{\Delta U_{v1}}^{\Delta\Phi_g} = \frac{\Delta\Phi_g(s)}{\Delta U_{v1}(s)} . \tag{29}$$

There exist five forward paths, with the following transfer functions in turns:

$$W_1 = \frac{C_G}{R_1} \frac{1}{1 + sT_{V1}},$$

$$W_2 = \frac{C_G}{R_1} \frac{-sT_{V2}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V2})},$$

$$W_3 = \frac{C_G}{R_1} \frac{-sT_{V3}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V3})},$$

$$W_4 = \frac{C_G}{R_1} \frac{s^2 T_{V2} T_{V3}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V2})(1 + sT_{V3})},$$

$$W_5 = \frac{C_G}{R_1} \frac{s^2 T_{V2} T_{V3}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V2})(1 + sT_{V3})}.$$

For the easier identification of the forward paths of transfer function W_i $(1 < i < 5)$ and loops Fig. 10 shows their locations in the signal-flow graph.

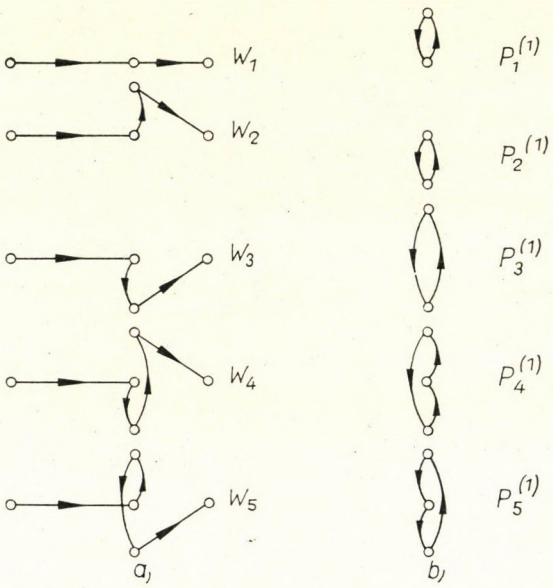


Fig. 10. The forward paths of the signal-flow graph in Fig. 9 (*a*) and the loops to be found in the signal-flow graph of Fig. 9 (*b*)

There exist five loops in the signal-flow graph with the following transfer functions in turns:

$$P_1^{(1)} = H_1 = \frac{s^2 T_{V1} T_{V2}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V2})},$$

$$P_2^{(1)} = H_2 = \frac{s^2 T_{V1} T_{V3}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V3})},$$

$$P_3^{(1)} = H_3 = \frac{s^2 T_{V2} T_{V3}}{(1 + sT_{V2})(1 + sT_{V3})},$$

$$P_4^{(1)} = H_4 = \frac{-s^3 T_{V1} T_{V2} T_{V3}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V2})(1 + sT_{V3})},$$

$$P_5^{(1)} = H_5 = \frac{-s^3 T_{V1} T_{V2} T_{V3}}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V2})(1 + sT_{V3})}.$$

$$(m_1 = 1, 2, 3, 4, 5)$$

There are no separate loops:

$$P_{m2}^{(2)} = 0, \qquad P_{m3}^{(3)} = 0, \ldots$$

so

$$\Delta = 1 - (H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5) + 0 + \ldots .$$

After substitution we obtain for the value of Δ:

$$\Delta = \frac{1 + s(T_{V1} + T_{V2} + T_{V3})}{(1 + sT_{V1})(1 + sT_{V2})(1 + sT_{V3})}.$$

Loop $P_3^{(1)}$ is not in contact with forward path W_1, therefore

$$\Delta_1 = 1 - H_3 = \frac{1 + s(T_{V2} + T_{V3})}{(1 + sT_{V2})(1 + sT_{V3})}.$$

A loop not in contact with the forward paths W_2, W_3 and W_4 cannot be found, thus

$$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 1.$$

Substituting the values of W_k, Δ_k and Δ into (2) and taking into consideration relationship (29) we obtain:

$$W_{\Delta U_{v1}}^{\Delta \Phi_g} = \frac{\Delta \Phi_g(s)}{\Delta U_{v1}(s)} = \frac{C_G}{R_1} \frac{1}{1 + s(T_{V1} + T_{V2} + T_{V3})}. \tag{30}$$

It can be seen, that by using a system of control coils coupled with each other has the disadvantage, that the excitation circuit time constant increases, the calculation must be made with the sum of the control coils' time constants. In the following we will examine the equation system describing the armature circuit of the amplidyn and the corresponding signal flow graph.

In accordance with the notations of Fig. 7 we may write down the linearized equation system concerning the quadratic machine in its Laplace transformed form:

$$\begin{aligned}
\Delta U_q(s) &= K_1 \Omega_M \Delta\Phi_g(s) + K_1 \Phi_G \Delta\Omega_m(s)\,, \\
\Delta U_q(s) &= (R_Q + sL_Q)\,\Delta I_q(s)\,, \\
\Delta\Phi_q(s) &= C_Q\,\Delta I_q(s)\,, \\
\Delta U_i(s) &= K_2 \Omega_M \Delta\Phi_q(s) + K_2 \Phi_Q \Delta\Omega_m(s)\,, \\
\Delta U_e(s) &= \Delta U_i(s) - (R_A + sL_A)\,\Delta I_a(s)\,, \\
\Delta I_a(s) &= Y_T(s)\,\Delta U_e(s)
\end{aligned} \tag{31}$$

we have assumed, that φ_g, the excitation flux does not vary under the influence of the load, i.e. the machine is ideally compensated. The compensation circuit time constant increases the time constant of the control circuit according to (30). After introducing

$$T_Q = \frac{L_Q}{R_Q}$$

the cross circuit time constant, and

$$T_A = \frac{L_A}{R_A}$$

the armature circuit time constant Fig. 11 shows the signal-flow graph representing equation system (31).

Let us determine the transfer function with the aid of Mason's formula utilized in all the cases aforementioned.

$$W = W_{\Delta\Phi_g}^{\Delta U_i} = \frac{\Delta U_e(s)}{\Delta\Phi_g(s)}\,. \tag{32}$$

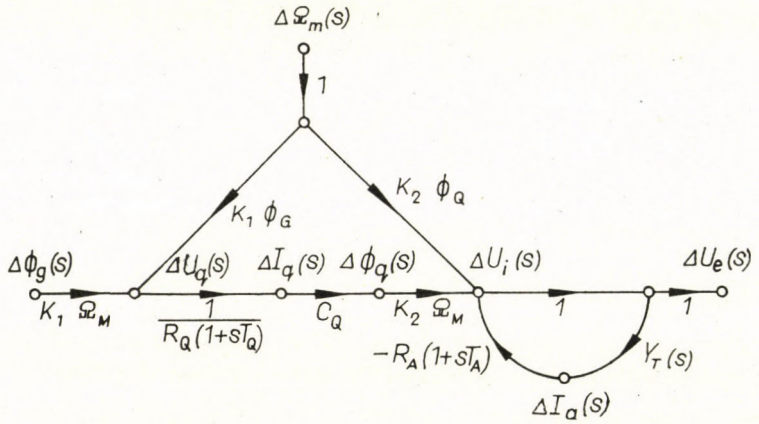


Fig. 11. Signal-flow graph of the amplidyn armature circuit

There exists one forward path, whose transfer function is

$$W_1 = \frac{K_1 K_2 C_Q \Omega_M^2}{R_Q} \frac{1}{1 + sT_Q} .$$

There exists one loop, whose transfer function is

$$P_1^{1)} = H_1 = - R_A(1 + s T_A) Y_T(s) ,$$
$$(m_1 = 1) .$$

Separate loops do not exist.

$$P_{m2}^{(2)} = 0 , \; P_{m3}^{(3)} = 0 \ldots$$

Determinant Δ and subdeterminant Δ_1 of the system are:

$$\Delta = 1 - H_1 = 1 + R_A(1 + s T_A) Y_T(s) ,$$
$$\Delta_1 = 1 .$$

Substituting this into (2) and taking (32) into consideration we obtain the required transfer function:

$$W_{\Delta\Phi_g}^{\Delta U_e} = \frac{\Delta U_e(s)}{\Delta\Phi_g(s)} = \frac{K_1 K_2 C_Q \Omega_m^2}{R_Q} \frac{1}{(1 + sT_Q)[1 + R_A(1 + sT_A) Y_T(s)]} . \tag{33}$$

Let $Y_T(s)$ take the form of $Y_T(s) = \frac{1}{R_T + sL_T} = \frac{1}{R_T(1 + sT_T)}$, then our transfer function takes the form of

$$W_{\Delta\Phi_g}^{\Delta U_e} = \frac{K_1 K_2 C_Q \Omega_M^2}{R_Q} \frac{R_T}{R_T + R_A} \frac{1 + sT_T}{(1 + sT_Q)(1 + sT'_A)} \tag{34}$$

where

$$T'_A = \frac{L_A + L_T}{R_A + R_T}$$

is the armature circuit time constant.

The complete transfer function of the amplidyn results in the case of an inductive load, from the product of (30) and (34):

$$W_{\Delta U_{v1}}^{\Delta U_e} = \frac{\Delta U_e(s)}{\Delta U_{v1}(s)} = A_A \frac{R_T}{R_A + R_T} \frac{1 + sT_T}{[1 + s(T_{V1} + T_{V2} + T_{V3})](1 + sT_Q)(1 + sT'_A)}$$

where

$$A_A = \frac{K_1 K_2 C_Q C_G \Omega_M^2}{R_Q R_1}$$

is the machine constant, the gain factor of the amplidyn.

III. Conclusions

By writing down the different transfer functions of electrical machines in the case of the above four examples the application of the general signal-flow graph formula, the so-called Mason-formula has been shown. The structure of this formula is simple, it is easily applicable and especially in the case of systems of higher complexity it requires less computation work — with less possibilities of error — than the solution of the equation system by the Cramer-rule, or the serial reduction of the signal-flow graph. According to our knowledge we have for the first time utilized the signal-flow graphs for the solution of the demonstrated tasks.

REFERENCES

1. Csáki, F.: Szabályozások dinamikája. Akadémiai Kiadó, Budapest 1966.
2. Mason, S. J.: Feedback Theory — Some Properties of Signal-Flow Graphs. *Proc. IRE* **41** (1953), 1144—1156.
3. Mason, S. J.: Feedback Theory — Further Properties of Signal-Flow Graphs. *Proc. IRE* **44** (1956), 920—926.
4. Mason, S. J.—Zimmermann, H. J.: Electronic Circuits Signals and Systems. John Wiley, New York 1960.
5. Chow, Y.—Cassignol, E.: Linear Signal-Flow Graphs and Applications. John Wiley, New York 1962.
6. *Абрахамс — Каверли:* Анализ электрических цепей методом графов. Издательство "МИР", Москва 1967,
7. Csáki, F.: Jel-folyam ábrák. *Elektrotechnika* **56** (1963), 185—191.
8. Csáki, F.— Bars, R.: Automatika II (Textbook). Tankönyvkiadó, Budapest 1966.

Die Bestimmung der Übertragungsfunktionen der Gleichstrommaschinen mit Hilfe von Signalfließdiagrammen. Im vorliegenden Artikel wird es gezeigt, wie die Signalfließdiagramme zur Lösung der in der Regelungstechnik vorkommenden Aufgaben benutzt werden können; namentlich zur Bestimmung des Frequenzganges der Gleichstrommaschinen.

Détermination de la fonction de transfert des machines à courant continu par la méthode des graphes de transfert. L'étude montre les applications des graphes de transfert à la solution des problèmes spéciaux se présentant dans la régulation, et notamment à la détermination de la fonction de transfert des machines à courant continu.

Определение передаточных функций машин постоянного тока при помощи графов *(Ф. Чаки, П. Мадьяр и Р. Барш).* В статье показано, каким образом может быть использован метод графов при решении специальных задач теории регулирования, а именно при определении передаточных функций машин постоянного тока.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 285—304 (1968)

ELECTRONICAL (INITIAL CURRENT) MEASUREMENT OF THE CATHODE TEMPERATURE

I. VÁCZ and I. KERÉNYI
CAND. OF TECHN. SC.
RESEARCH INSTITUTE OF TECHNICAL PHYSICS OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received June 12, 1967]

The cathode temperature of electron tubes can be determined from the starting current characteristic. In order to eliminate the sources of error inherent with the d.c. measurement of the characteristic, IKEHARA—WILSON use a.c. superposed on d.c. and determine the cathode temperature from the change of the upper harmonics. By using the compensation method of the authors, instead of the upper harmonics the fundamental harmonic is used for the measurement and this being a larger signal, it permits the extention of the measurement to lower temperatures (appr. 600° K). Checking the measurements by thermocouple and by optical pyrometer shows agreement within $\pm 2\%$. For estimating the error caused by the thermal conduction of the thermocouple, an approximate calculation has been made.

I. Introduction

The knowledge of temperature of thermionic cathodes is indispensable for testing them and predicting their life time. Besides the optical and electrical temperature measurement, the electronical temperature measurement gives almost uneqivocal advantages. As is known, the kinetic energy of the electrons emitted into the vacuum — in the temperature range to be investigated — exhibits Maxwell-Boltzmannian distribution. Thus, it is possible to draw conclusions in case of a retarding electric field on the temperature of the emitter by the voltage vs. emission current characteristics. This might be applied first of all in the measurement of the cathode temperature of sealed electron tubes and electron tubes with special cathodes, resp. (where the cathode surface cannot be observed optically).

The present paper deals with the well-known Ikehara—Wilson a.c. electronical measuring method and aims at improving it. The described method enables the extention of the cathode temperature measurement elaborating a simple experimental technique, to lower temperatures as well, where the loading of the electron tube cathode is very slight during the measurement. The method described has the following advantages in comparison with those published previously: better accuracy, reproducibility, extension of cathode temperature measurement to lower temperatures.

II. A short critical review of the cathode temperature measurement methods published as far

1. D.c. measurements

Some decades ago it became necessary to test the cathodes of electron tubes by temperature measurement, especially in the case of certain special tubes (e.g. metal-ceramic tubes, where the cathode cannot be observed optically). That is to say: measuring methods were needed by which the electron tubes could be tested without any particular design. The initial current characteristics $I-U_a$ met this condition based on the experiences of many decades relating to such measurements and investigations well [1].

The main point of the temperature measurement based on the initial current characteristics is the following: in case of a retarding anode voltage the anode current assuming the Maxwell–Boltzmannian velocity distribution — might be written in the formula:

$$I_a = I_s e^{\frac{\varepsilon}{kT} U_a} \tag{1}$$

where the parameter I_s has the dimension of current, it depends on the tube geometry and the saturation current, independent of the anode voltage; ε electronic charge; U_a anode voltage (above formula is valid but for $U_a < 0$); k the Boltzmann constant; T absolute temperature.

Plotting equation (1) on logarithmic scale:

$$\log I_a = \log I_s + \frac{\varepsilon}{2{,}3\,kT} U_a \tag{2}$$

a linear relationship between $\log I_a$ and U_a is obtained, the slope of which is:

$$s = \frac{\varepsilon}{2{,}3\,kT}, \tag{3}$$

T can be determined from the experimental values.

Many articles deal with this method [2]. The obtained temperature values are generally higher and they show stronger deviations than those obtained by other methods (micropyrometry, thermocouple) nevertheless, according to some of the publications this method is considered to be adequate. (In these publications the difference between the measurements and the checked data is less than 5%.)

According to our experiences the above method is not suitable to perform reproducible measurements within the cathode temperature range of

600—800° K. Based on our numerous measurements, the obtained results proved to be contradictory (e.g. temperature increases at reduced filament heating, etc.) and the reproducibility was not sufficient either. By applying an ampere-meter having a better efficiency the lower limit of the current measurement could be extended from 10^{-7}A to 10^{-14}A, thus we succeeded in measuring saturation current and other emission parameters in the mentioned range of temperature, without damaging the oxide-cathode electron tube. (We shall discuss the measurements in a separate paper.)

Here we have to point out that when measuring an initial current of such a low intensity, one has to take the inverse electron emission of the electrode used as anode into consideration, since the order of magnitude of the two kinds of currents is commensurable. Due to the latter effect, the hot cathode emission could not be determined above 800—900° K with the initial current method.

2. A.c. measurements

Data available on a.c. cathode temperature measurements are summarized and discussed by IKEHARA [3]. The method was improved by WILSON, especially by his handy evaluation system. Preceding papers can now be considered almost as pioneer works, thus our discussion is restricted to the works of IKEHARA and WILSON.

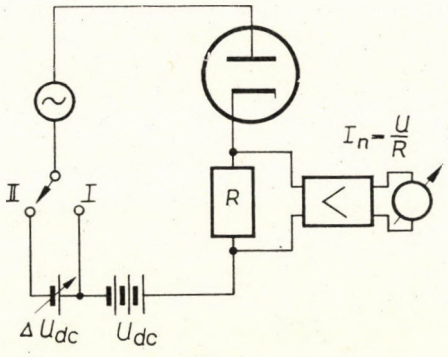


Fig. 1

The mathematical treatment and experimental principle of a.c. measurements was published by IKEHARA. In his method a.c. is superimposed on the d.c. initial current. It was shown that for a retarding field interval the cathode temperature could be determined by the a.c. relationship. Measuring the harmonic relations, several perturbing effects could be eliminated: e.g. the effects due to cathode interface resistance, leakage current and deviations from parallel geometry.

Let us refer to Equ. (1) and plot $U_{a2} - U_{a1} = \Delta U_a$ against $\ln (I_{a2}/I_{a1})$

$$\ln \frac{I_{a2}}{I_{a1}} = \frac{\varepsilon}{kT} \Delta U_a \tag{4}$$

thus, we obtain the same slope as for Equs (2) and (4), consequently the cathode temperature can be derivated in a similar manner:

$$T = \frac{\Delta U_a}{\frac{k}{\varepsilon} \ln \frac{I_{a2}}{I_{a1}}} = \frac{\Delta U_a}{\frac{2{,}3\,k}{\varepsilon} \Delta (\log I_a)} \tag{5}$$

using (MKSA units)

$$T = 5036 \frac{1}{s} [°\mathrm{K}]. \tag{6}$$

Superimposing on the (U_{dc}) d.c. voltage an a.c. voltage ($U_{ac} \cdot \sin \omega t$) the current will be given (see Fig. 1)

$$I = I_s e^{\frac{\varepsilon}{kT} U_{dc}} \cdot e^{\frac{\varepsilon}{kT} U_{ac} \sin \omega t}. \tag{7}$$

Increasing U_{dc} voltage in negative direction by ΔU_{dc} the amplitude of the n-th harmonic changes, composing the relations of original and modified amplitudes, according to Equs (3) and (4), thus we obtain

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{e^{\frac{\varepsilon}{kT} U_{dc}}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT} (U_{dc} - \Delta U_{dc})}} = e^{\frac{E}{kT} \Delta U_{dc}} \tag{8}$$

and consequently

$$T = \frac{\Delta U_{dc}}{\frac{k}{\varepsilon} \ln \frac{I_n}{I'_n}} = \frac{\Delta U_{dc}}{\frac{2{,}3\,k}{\varepsilon} \Delta (\log I_n)}. \tag{9}$$

Comparing Equs (9) and (5), the cathode temperature can be determined equally by the retarding voltage — initial current relations, or by superimposing a.c. on the d.c. plate voltage and considering the change of the logarithme of a certain harmonic amplitude. In practice the a.c. measurement is simpler since a great change in the plate voltage has to be measured and small a.c. current is to be measured instead of the small d.c. current. The a.c. current can easily be amplified.

According to WILSON [4] and using MKSA units:

$$\frac{k}{\varepsilon} = \frac{1{,}38 \times 10^{-23} [\mathrm{VA\,sec/°K}]}{1{,}6 \times 10^{-19} [\mathrm{A\,sec}]} = 8{,}61 \cdot 10^{-5} [\mathrm{V/°K}], \tag{10}$$

by the suitable change of $\ln I_n/I'_n$ we get

$$\frac{k}{\varepsilon} \ln \frac{I_n}{I'_n} = 10^{-4}\,[\mathrm{V/°K}]\,;$$

$$\ln \frac{I_n}{I'_n} = \frac{10^{-4}}{8{,}61 \cdot 10^{-5}} = 1{,}16\,; \tag{11}$$

$$\frac{I_n}{I'_n} = 3{,}192$$

thus the cathode temperature is given by

$$T^{(°K)} = 10^4\, \Delta U_{dc}\,. \tag{12}$$

For the harmonic amplitude relationship $I_n/I'_n = 3{,}192 = 10$ dB the d.c. voltmeter can be calibrated in °K units.

IKEHARA made measurements with normal and reduced heating currents. He checked his measurements with an optical pyrometer (in which the spectral emmissivity of the cathode coating was taken as 0,3). The measurable lowest limit of the cathode temperature was found to be 550° K, however, the optical pyrometer control could be used only at abt. 900° K, thus there was no possibility for comparing lower cathode temperature values. On the other hand, his d.c. and a.c. measurements exhibit a reasonable agreement.

WILSON described in detail his apparatus, designed for direct reading of the cathode temperature. As was pointed out by WILSON, in order to reduce the noise effect, associated with amplification, he amplified the second harmonic 1000 c/s, the input frequency being 500 c/s. IKEHARA in his measurements used the first harmonic too, however, in this case discrepancies occurred. IKEHARA achieved reliable measurements with the second harmonic, the higher order harmonics producing smaller signals.

It might be assumed that the quoted authors obtained more disturbing signals because of the use of the first harmonic and a broad band amplifier, since the first harmonic was transmitted through the passive elements of the circuit, independently of the operating diode.

III. The fundaments of the further development of electronic cathode temperature measurements

As was shown in the previous section the Ikehara—Wilson method is based on the relationship:

$$\frac{I_n}{I'_n} = e^{\frac{\varepsilon}{kT} \Delta U_{dc}}\,. \tag{8}$$

Restricting ourselves to small signals following from the exponential characteristics of initial current, Equ. (8) this holds directly for the first harmonic, too. This can easily be explained (see Fig. 2).

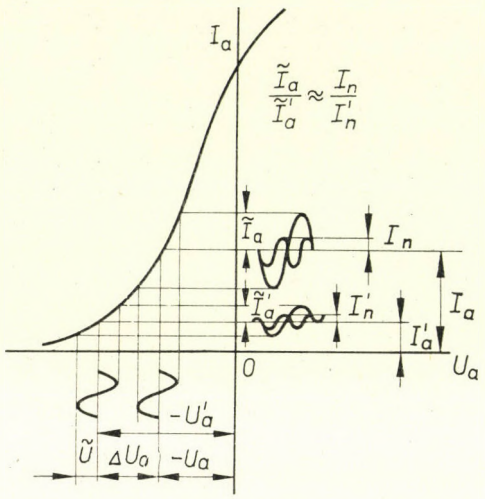


Fig. 2

In the case of small signals the a.c. current is given:

$$\tilde{I}_a = \frac{\tilde{U}}{R_b}, \tag{13}$$

for R_b diode resistance. In consequence of Equ. (1)

$$R_b = \frac{dU_a}{dI_a} = \frac{1}{\frac{dI_a}{dU_a}} = \frac{kT}{\varepsilon I_a} \tag{14}$$

and thus

$$\tilde{I}_a = \tilde{U} \frac{\varepsilon}{kT} I_a. \tag{15}$$

Making use of the notations of Fig. 2

$$\frac{\tilde{I}_a}{\tilde{I}'_a} = \frac{I_a}{I'_a} = \frac{Is\, e^{\frac{\varepsilon U_a}{kT}}}{Is\, e^{\frac{\varepsilon U'_a}{kT}}} = e^{\frac{\varepsilon}{kT}\Delta U_{dc}} \tag{16}$$

this is identical with Equ. (8):

$$\frac{\tilde{I}_a}{\tilde{I}'_a} = \frac{I_n}{I'_n} \tag{17}$$

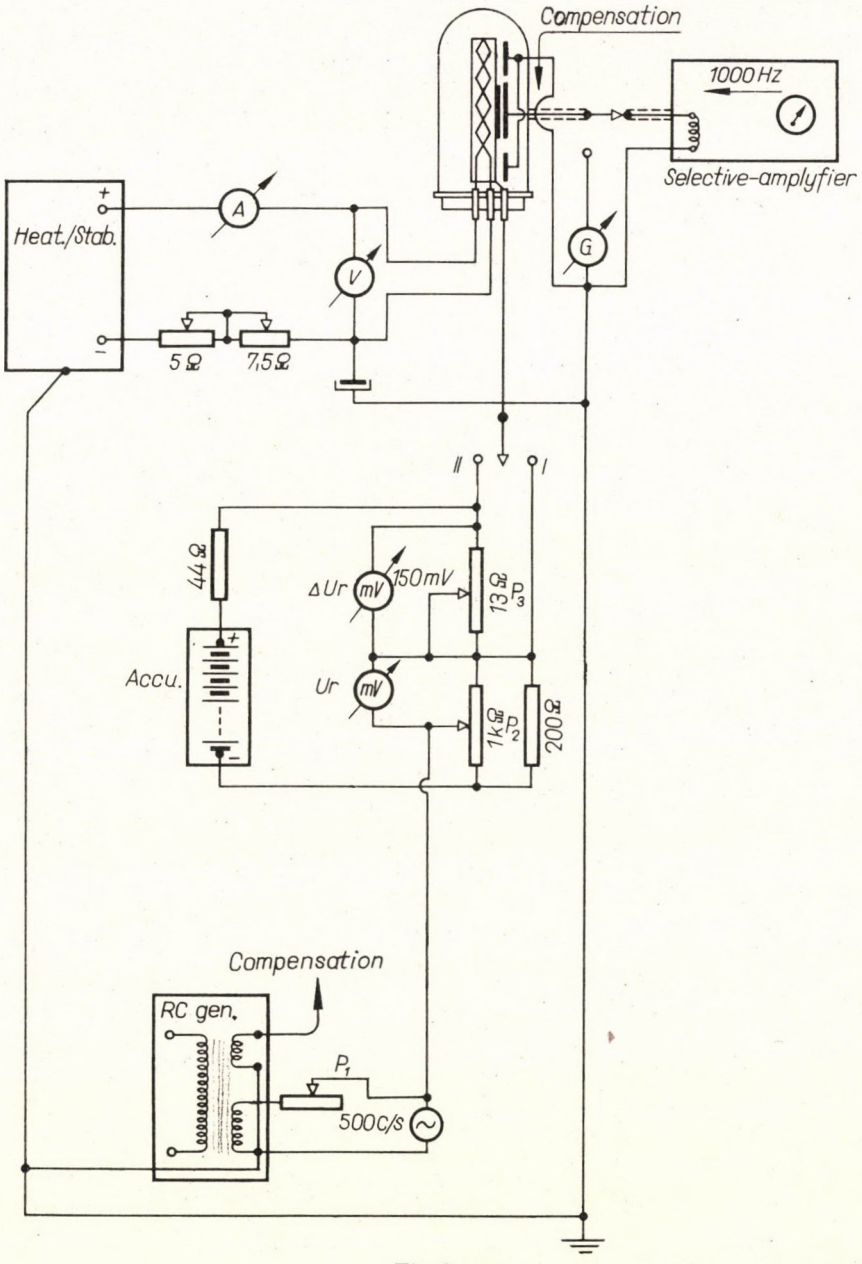


Fig. 3

thus Equ. (9) can be written

$$T = \frac{\Delta U_{dc}}{\frac{k}{\varepsilon} \ln \frac{I_a}{I'_a}}, \tag{18}$$

and with the a.c. current relationship Wilson's method is on the base of (11)

$$\frac{\tilde{I}_a}{\tilde{I}'_a} = 3{,}192 \quad \text{and} \quad T = 10^4 \, \Delta U_{dc} \,,$$

and so direct reading can be applied.

The appearance of one part of the input signal — due to the passive elements of the network — has to be prevented in the output. Our circuit diagram is presented on Fig. 3.

The elimination of the disturbing signal was achieved by compensation as shown on Fig. 3. The compensation was effected by capacitive feed-back

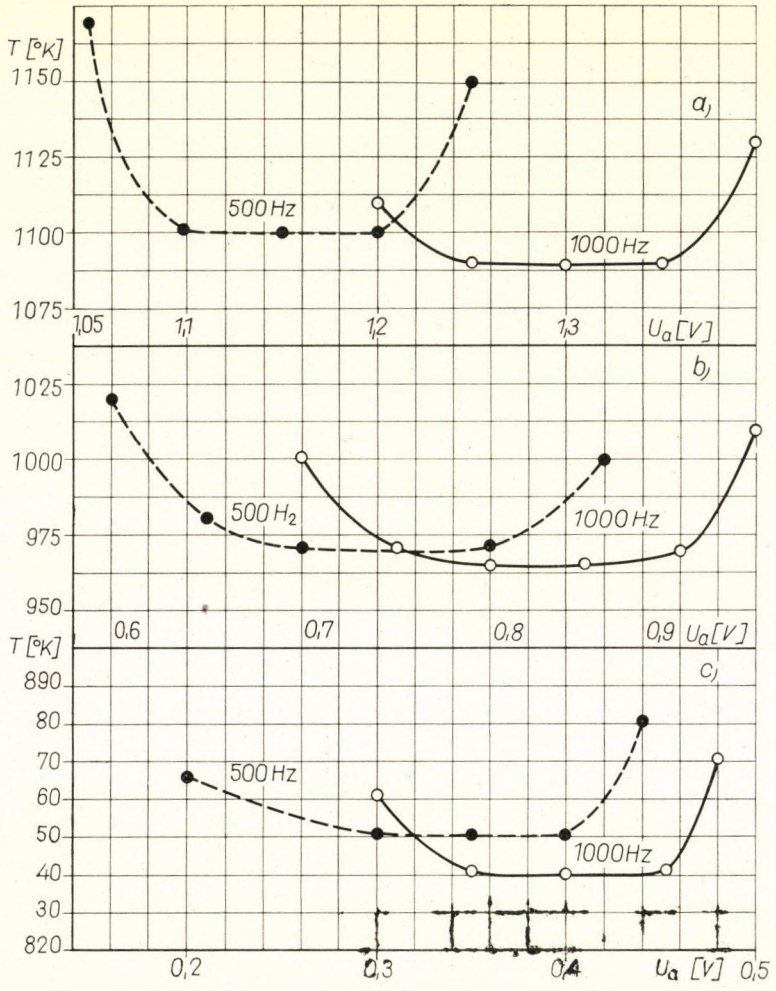


Fig. 4

of a series a.c. voltage, matched, subjected to 180° phase conversion and fed to the anode of the tested diode. In this way the disturbing signals going with the basic frequency could be reduced to minimum and the accuracy of measurements and reproducibility were greatly improved. Cathode temperature measurements could be carried out on multigrid and special electron tubes. A further advantage of measurements with basic frequency over the harmonics lies in the fact that the range of measurements can be extended to a 600—700° K lower limit. Since the larger signals need less amplification, in our laboratory measurements were carried out also with the harmonics in the range of operating cathode temperature. In practice an agreement was found between the two methods (see Fig. 4).

According to other authors, generally constant frequency generators and tuned amplifiers coupled to the output are used. As is shown in Fig. 3 in our set-up a selective amplifier of 1000 c/s and a tuned audiofrequency generator in the input were used. From the latter the compensating signal was directly fed back.

The a.c. signal used for temperature measurements was generally 0,1 V_{eff} the initial current was measured in the range of 10^{-7}—10^{-9} A.

Changing the value of ΔU_a by 0,1—0,05 V steps, the values of the cathode temperature T are given according to Fig. 4 by the constant minimum sections of the curves. The two limits of the constant sections are determined for slight currents by the anode reverse current and for high currents by the space charge, resp. This latter is in quantitative agreement with the theoretical determination [5] according to which the minimum of U_m has the order of magnitude $U_T = kT/\varepsilon$ thermal voltage.

Curves displayed in Fig. 4 serve continuously to check the accuracy of the measurements. According to our measurements it was found that deviations of ΔU_{dc} values which were needed for matching the 3,192 a.c. current relationship, indicate the anomalous emission conditions of the cathode surface [6].

The method described above was checked by a great number of measurements, the results of which are presented in the proceding section.

IV. Experimental results and discussion

Measurements were at first carried out on oxide cathodes of special testing diodes. The cathode was of elliptical cross section (3,1 × 1,6 mm ∅), the anode was of pure Ni (6,6 mm ∅). The cathode was coated with the conventional carbonates (Ba—Sr) and (Ba—Sr—Ca), resp. [7]. In order to achieve a uniform temperature distribution on the cathode, for 7 mm distances at both ends were not coated.

The heating filament was a conventional Al_2O_3 insulated tungsten filament of uniform winding, bended in a hair-pin form. Our measurements

Table I

Comparison of different

Fe-Constantan (I), Wilson's method (II), optical

U_f [V]	*04—1*				*04—2*			
	T [°K]				T [°K]			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
7,0	1169	1155	1148		1172	1160	1148	
6,8			1126				1141	
6,5	1138	1135			1139	1125		
1,4	607	626*	—	624	601	606*	—	619
1,0								
0,7	450	473*	—	475	451	434*	—	460

refer to filaments of the above design. The local overheating of the filament on uncoated cathodes was checked by applying small pin-holes on the anodes and by determining the cathode temperature distribution with an optical pyrometer.

The cathode temperature generally exhibited a monotonous decrease towards the ends. The discussion of this phenomenon will be given later on. Special processing and stabilization resp., was applied. As was found experimentally this was needed for achieving reliable reproducibility of the cathode emission and for achieving 10^{-8}A initial current, indispensable for accurate and reliable electronic temperature measurements.

Temperature measurements were carried out by using the following methods:

a) Electronic method;

b) by Fe-Constantan thermocouple;

c) optical micropyrometer of Schmidt—Haensch;

d) besides this latter the cathode temperature was calculated by the slope of the initial current too.

In the following the experimental results of five special testing diodes — provided with a thermocouple — are presented, determined by the above indicated four methods.

The cathode temperatures in the low temperature range were determined by linear extrapolation of the electronically obtained log T—log U_f terms. The further developed Ikehara—Wilson electronic method was applied to some commercial electr. tubes. For checking the reliability of the method, test tubes were prepared with the cathode of the penthode, type *EL 84* and provided

measuring methods

pyrometer (III), initial current (IV)

04—3				*04—4*				*04—5*			
T [°K]				T [°K]				T [°K]			
I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1177	1150	1153		1147	1140	1143		1152	1140	1121	
		1143				1128			1110		
1142	1115			1117	1110			1119	1110		
605	600*	—	610	559	579*	—	570	584	593*	—	591
				480	502*	—	484	502	517*	—	514
418	435*	—	439								

* *Note:* The values of the Wilson's method in the case of $U_f = 1{,}4$; 1,0 and 0,7 are extrapolated.

with Fe-Constantan thermocouples. Measurements were carried out with different filament voltages in the range of 7—0,5 V, corresponding to abt. 1150—380° K cathode temperature range. The results are shown in Table I. Sources of error have been taken into consideration and possibly eliminated.

The stability of the tubes is an important factor, thus measurements were carried out after a previous aging for 100 hours. In the aging process 10—15% overheating and 2—2,5 mA/cm² loading (charging) of the cathode was applied.

The electronic method gives an average temperature value of the cathode

Table II

Data of the coated cathode zone calculated by approximate formulae

t_1 [°C]	$\bar{t}$ [°C]	t_m [°C]	Δl [mm]
195,3	199,7	214,6	16,80
289,7	298,8	306,1	8,08
385,9	398,4	408,4	8,12
483,5	497,8	505,1	6,14
582,0	597,0	602,6	4,49
680,4	696,2	701,5	3,12
779,0	795,2	800,8	2,01
877,7	894,3	900,4	1,28

Table III

The difference in % between the cathode temperatures measured by electronical

U_f [V]	04—1			04—2		
	T [°K]		%	T [°K]		%
	I	II		I	II	
7,0	1169	1155	—1,2	1172	1160	—1,0
6,5	1138	1135	—0,3	1139	1125	—1,2
6,3	1121	1110	—1,0	1133	1100	—2,9
5,0	1026	1030	0,4	1026	1010	—1,55
4,5	984	1000	1,6	983	960	—2,3
4,0	936	960	2,6	936	920	—1,7
3,5	882	905	2,6	885	870	—1,7
3,0	829	840	1,33	821	830	1,1
2,5	768	780	1,56	758	760	0,3
2,0	698	710	1,7	687	—	—

The thermocouple was mounted to the edge of the cathode coating (since it could not be welded to the coating). This fact causes a systematic difference between the two methods and this was taken into consideration. The relationship between the temperature values as determined by the two methods, — can be approximately calculated, — assuming a quadratic temperature distribution, provided the temperature values are given at the two edges (t_1, t_2) and at the center of the cathode. These measurements were made on five special testing tubes of the same design but uncoated.

Table II *contains* the cathode temperature calculated by this approximation, the mean temp. of the cathode ($\bar{t}$), the maximum temperature t_m and the distance of the site of maximum temperature from the center of the cathode (Δl).

Measurements were carried out with 5 testing tubes of the same design but coated with 50—50% $BaCO_3$ $SrCO_3$. The experimental results are summarized in Table III.

In the high temperature range, measurements were completed by an optical pyrometer tube. The results are plotted on a log-scale. Taking merely the radiation into account, we obtain the following relationship for the filament power:

$$P = U_f I_f \cong \sigma k T^4 .$$

Thus

$$\log P = 4 \log [\sigma k T] = A + B \log T$$

and thermocouple methods resp. by Fe-Constantan (I) and Wilson's method (II)

04—3			*04—4*			*04—5*		
T [°K]		%	*T* [°K]		%	*T* [°K]		%
I	II		I	II		I	II	
1177	1150	−2,3	1147	1140	−0,6	1152	1140	−2,0
1142	1115	−2,4	1117	1110	−0,6	1119	1110	−0,8
1127	1190	−3,3	1115	1095	−2,0	1010	1090	−2,0
1026	1030	0,4	1003	1000	—	1003	990	−1,0
983	970	−1,3	963	945	−2,0	959	952	−0,7
933	930	−0,3	916	910	−0,7	926	915	−1,2
888	905	1,9	858	852	−0,7	862	860	−0,2
830	840	1,2	808	810	−0,25	815	810	−0,6
771	770	—	743	740	−0,4	761	753	−0,1
698	—	—	673	670	−0,4	690	685	−0,7

consequently we get a linear relationship between filament power and cathode temperature plotting them on a logarithmic scale in the high temperature range.

According to our experiences, we obtain a better linear approximation with log U_f-log T than for log P-log T. Therefore, this relation is more suitable for extrapolation in the low temperature range up to $U_f = 1{,}5$ V [8]. The results are presented in Table III and Fig. 5, resp.

The thermovoltages appearing on the metal–glass seal inlets of the thermocouples were also taken into account. These thermovoltages were determined by testing tubes of special design, providing the thermocouple with two leads, one of them mounted with the glass–metal seal inlets, the other one introduced into the tube directly without break (Fig. 6). Thermocouples were prepared from 0,8 mm ∅ iron- and constantan wires, resp. (*Degussa* manufacture). The thermocouples were calibrated by a *Goerz* 2 kohm/mV millivoltmeter applying a 0° C junction [9]. The calibration was made with glycol (b.p. 197,3° C), potassium bichromate (m.p. 397,5° C) and pure Al (m.p. 658° C) covering the entire low temperature range. According to the calibration the error can be estimated to be maximum 0,3—0,6% [10].

In our measurements Fe-Constantan compensating leads were applied and the deviations between the arrangements *I—II* (see Fig. 6) were corrected. The thermal conductivity of thermocouple wires was taken into consideration as well. The error due to thermal conductivity can be estimated by an approximate calculation — as given in the appendix of this paper. This error comes to 1,66% for 1000° C.

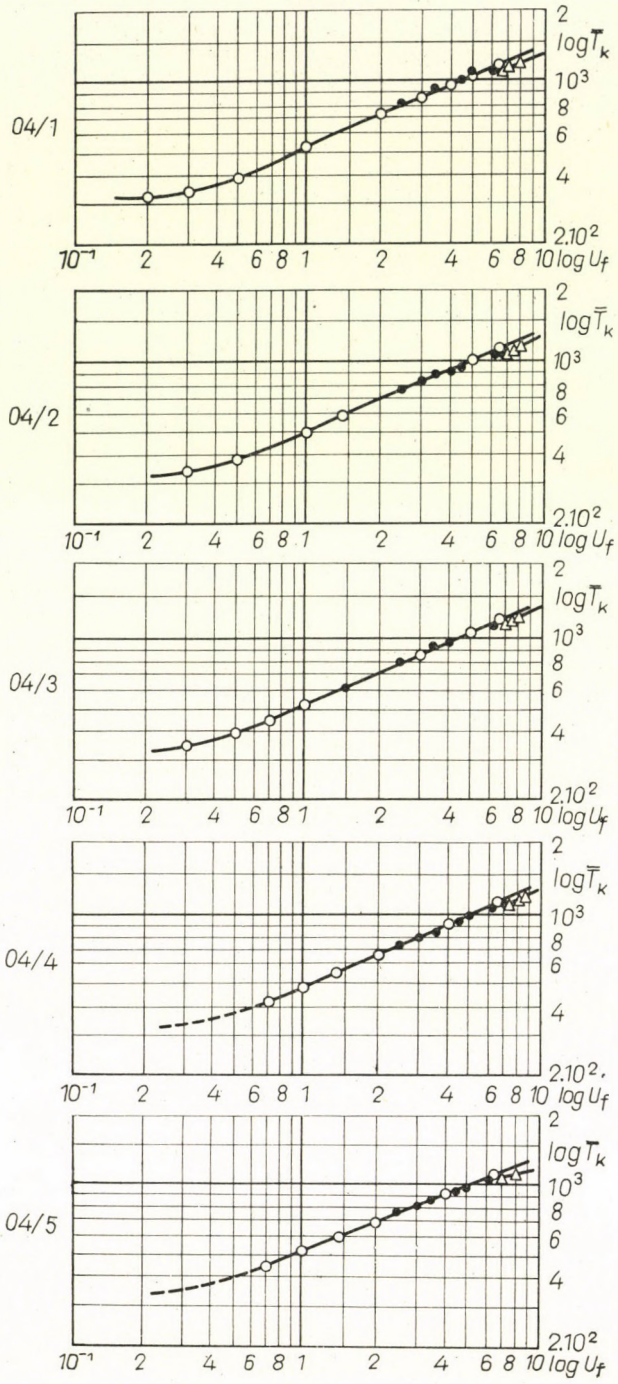

04/1
04/2
04/3
04/4
04/5
2
log T̄k
10³
8
6
4
2.10²
10⁻¹ 2 4 6 8 1 2 4 6 8 10 log Uf

Fig. 5

Further, as mentioned previously, the temperature difference between the thermocouple junction site and the average temperature zone of the cathode was taken into account. Comparing the optical pyrometer measurements with the thermocouple results, it was found that the emmissivity of

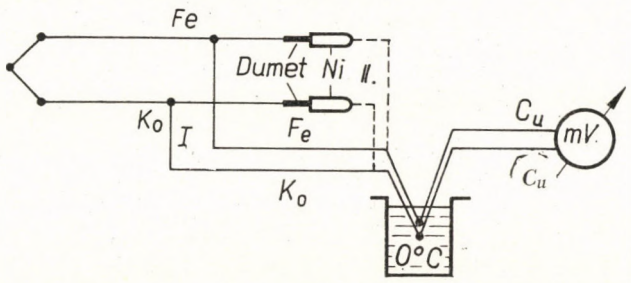


Fig. 6

the cathode coating cannot be characterized by a defined value (0,3 according to IKEHARA). The emmissivity is not constant, it depends on the thickness of the coating, on its colour and on the core used.

Finally it was found that the emission parameters of cathodes, loaded below 10^{-4} A, are almost as well reproducible as those of pure metals (Tungsten, Molybden). The contact voltage between cathode and anode was determined by the *Intersection Method*, value was abt. 0,8 eV and it proved to be temperature dependent.

V. Conclusions

In this paper a report was given on cathode temperature measurements. The Ikehara—Wilson a.c. electronic cathode temperature measuring method was reproduced with improved accuracy. The fundaments of the methods and the probable origins of several disturbing factors were analyzed, methods were elaborated for eliminating the error factors.

The features of our method are: The application of a compensating signal and its capacitive feedback by means of a micromanipulator to the output. By these means the electronic temperature measurement can be carried out on the base frequency, too, instead of using the harmonics. Thus, a larger signal is obtained and the low temperature measuring range can be extended to 600° K. This low temperature limit can be further extended by the linear extrapolation of the log T-log U_f relationship, in case of 1 cm^2, cathode surface measurements can be made in the filament voltage range of 6,3 to 1,48 V.

Our method was successfully applied for the cathode temperature measurements of diodes and multigrid electron tubes. The electronic measurements were completed and checked by optical pyrometer and thermocouple measure-

ments. The deviation never exceeded $\pm 2\%$. By an approximate calculation a relation was determined between the cathode border and the average cathode temperature values of the operating zone.

By an approximate calculation the heat conduction of thermocouples was taken into account. These calculations are given in the appendix. The application limits of the electronic cathode temperature measurements were determined. In this range the method gives information on the emission characteristics and on the quality of the cathode.

ACKNOWLEDGEMENTS

Acknowledgements are due to Mr. E. WINTER, academician for his interest and encouragement; to the *Department for Electronphysics of the Research Institute of Technical Physics of the Hungarian Academy of Sciences;* further to Mr. J. SZONDI for the designs of apparatuses; and to Mr. Ö. KENCZLER, assistant professor for the valuable discussions.

REFERENCES

1. WINTER, E.—VÁMBÉRY, L.—FISCHER, F.—TOMASCHEK, Z.—KONCZ, I.—RÉDL, E.: Vákuumtechnika II (Vacuumtechnics II). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1954.
2. HEINZE—HASS: *Zeitschrift für technische Physik* **6** (1958), 166.
3. IKEHARA, S.: *Journal of Applied Physics* **25** (1954), No. 6.
4. WILSON, A. D.: The Measurement of Cathode Electron Temperature Utilizing an A. C. Retarding Potencial Device (in a Report on the *XXI. Annual Conference on Physical Electronics*, 1961). Massachussetts Institute of Technology (1962), 3/10.
5. NOTTINGHAM, V. B.: Thermionic Emission. Handbuch der Physik **21/2,** 1956.
6. *Царев, Б. Н.:* Контактная разность потенциалов; Москва 1949.
7. HERMANN—WAGENER: The Oxide-Coated Cathode; London 1951.
8. SZELÉNYI—VÁCZ: Árammal izzított drótok alacsonyabb hőmérsékletének megállapítása extrapolációval (Extrapolation to Lower Temperatures of Electrical Heated Wires). *MTA VI. Oszt. Közleményei* (1959).
9. ARDENNE: Tabellen der Elektronenphysik, Ionenphysik und Übermikroskopie, I—II.
10. ROTHE, H.—KLEEN, W.: Grundlagen und Kennlinien der Elektronröhren; Berlin 1953.

APPENDIX

Approximate calculation of the experimental errors caused by the heat conductivity of thermocouple wires used for cathode temperature measurements

List of symbols

l	half length of the cathode tube [cm];
s	half circumference of the cathode tube [cm];
δ	wall thickness of the cathode tube [cm];
d	diameter of the thermocouple wires [cm];
L	length of the thermocouple wires [cm];
λ_{Ni}	heat conductivity of the cathode tube material;
λ_{Fe}	heat conductivity of the iron wire;
λ_{Ko}	heat conductivity of the constantane wire;
T_m	temperature to be determined [°K];
ϑ	temperature of the thermocouple pin seals [°K];
c_1	radiation constant of the filament (cathode);
c_2	radiation constant of the filament cathode (anode).

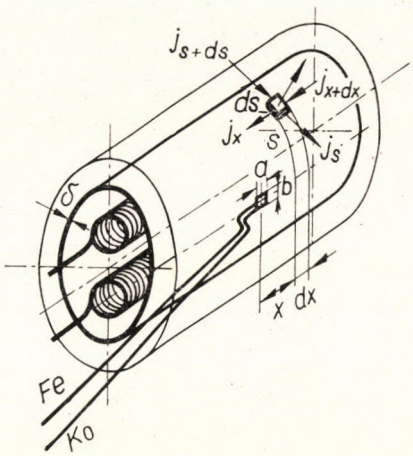


Fig. 1A

Applying the fundamental equation of heat conduction for our case

$$\delta\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_s}{\partial s}\right)=w_1-w_2 \tag{1A}$$

where j_x, j_s are the components of the heat flow vector, and w_1, w_2 the power delivered by the filament and received by the anode resp., per unit area

$$w_1=c_1\,(\bar{\Theta}^4-T_k^4)\,,$$
$$w_2=c_2\,(T_k^4-\bar{T}_A^4)\,.$$

The average temperature of the filament and of the anode are denoted by $\bar{\Theta}$ and $\bar{T_A}$ resp.,

$$jx=-\lambda_{\mathrm{Ni}}\frac{\partial T_k}{\partial x}\,,$$

$$js=-\lambda_{\mathrm{Ni}}\frac{\partial T_k}{\partial s}\,.$$

Introducing w_1 and w_2 in Equ. (1A), we obtain

$$-\delta\lambda_{\mathrm{Ni}}\left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_k}{\partial s^2}\right)=c_1\,(\bar{\Theta}^4-T_k^4)-c_2\,(T_k^4-\bar{T}_A^4)\,,$$

$$T_m-T_k=\tau$$

using now a new variable

$$T_k=T_m\left(1-\frac{\tau}{T_m}\right).$$

Since $\tau/T_m\ll 1$ the approximate formula

$$T_k^4\sim T_m^4\left(1-4\,\frac{\tau}{T_m}\right)$$

might be applied. Thus from Equ. (1A) it follows:

$$\delta\lambda_{\mathrm{Ni}}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial s^2}\right)=4\,(c_1+c_2)\,T_m^3\,\tau+[c_1(\bar{\Theta}^4-T_m^4)-c_2(T_m^4-\bar{T}_{\mathrm{A}}^4)]\,.$$

Owing to the fact that in the stationary case the expression in square brackets is equal to zero if the losses at the end of the cathode tube are neglected, we obtain for Equ. (1A)

$$kh=\frac{4(c_1+c_2)\,T_m^3}{\delta\lambda_{\mathrm{Ni}}}\,,$$

where

$$\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial s^2}\right)-k\tau=0\,.$$

Introducing co-ordinate (y) instead of (s) on the surface of the cylindrical cathode tube

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}-k\tau=0\,. \tag{2A}$$

The temperature decrease towards the thermocoupled junction of the tube is given by the solution of Equ. (2A) making use of following boundary conditions:

$$\tau(l,0)=\tau(0,s)\,; \tag{I}$$

$$-s<y<s\qquad \left.\frac{\partial\tau}{\partial x}\right|_{x=l}=0\,; \tag{II}$$

$$-l<x<l\qquad \left.\frac{\partial\tau}{\partial y}\right|_{y=s}=0\,. \tag{III}$$

From the continuity condition at the junction site it follows:

$$2\,\delta\lambda_{\mathrm{Ni}}\left(b\left.\frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial x}\right|_{x=a/2}+a\left.\frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial y}\right|_{y=b/2}\right)=(\lambda_{\mathrm{Fe}}+\lambda_{\mathrm{K_o}})\;\frac{d^2\pi}{4}\;\frac{T_k(0,0)-\bar{\vartheta}}{L}$$

and since $T_k=T_m-\tau$

$$-b\left.\frac{\partial\tau}{\partial x}\right|-a\left.\frac{\partial\tau}{\partial y}\right|=\mathscr{M}[T_m-\bar{\vartheta}-\tau(0,0,]\,.\quad\begin{vmatrix}x=a/2 & y=b/2\\ y=0 & x=0\end{vmatrix} \tag{IV}$$

In the latter Equ. $a.b$ is the contact area of the thermocouple and

$$M=\frac{0{,}785\,d^2\,(\lambda_{\mathrm{Fe}}+\lambda_{\mathrm{K_o}})}{2\,\delta\lambda_{\mathrm{Ni}}L}\,.$$

Finally we get

$$\tau(x,y) = \tau_{\max} \frac{\cosh(l-x)\sqrt{m} \cdot \cosh(1-y/s)l\sqrt{m}}{\cosh^2 l\sqrt{m}}$$

where in the knowledge of

$$\tau\ 0{,}0) = \tau_{\max} = \frac{\mathscr{M}(T_m - \bar{\vartheta})}{(b\sqrt{m} + a\sqrt{n})\ th\, l\sqrt{m} - \dfrac{ab}{2}(m+n) + \mathscr{M}}$$

and

$$\sqrt{m} = s\sqrt{\frac{k}{l^2+s^2}} \quad \sqrt{n} = l\sqrt{\frac{k}{l^2+s^2}}$$

the experimental error of temperature measurements in percents might be calculated:

$$T\% = \frac{\tau_{\max}}{T_m} 100.$$

In the above described calculations, the heat obtained by the termocoupled wires from the radiation of the cathode, was not taken into consideration. Due to this latter fact the temperature gradiant developing in the thermocoupled wires will be smaller than the calculated values. Thus the heat loss calculated for the most unfavourable case refers for an upper limit, consequently the real error is always less.

The thermoelectrical power consumption of the thermocouples was neglected as well. A high internal resistance millivoltmeter was used (2kΩ/mV) thus the energy consumption and equivalent heat loss was greatly reduced compared to the heat loss, caused by thermal conduction this could be neglected.

The final formula obtained was applied for the evaluation of our measurements, taking into consideration the physical constants valid for the measurements. According to these in the case of

$$T_m = 1000^\circ\,\mathrm{K},$$

the values of experimental errors are

$$\tau_{\max} = 16{,}6^\circ\,\mathrm{C} \quad \text{and} \quad T_m = 1{,}66\,\%;$$

whereas
in the case of $T_m = 600^\circ$ K

$$\tau_{\max} = 7{,}12^\circ\,\mathrm{C} \quad \text{and} \quad T_m = 1{,}19\,\%.$$

Elektronische Kathodentemperaturmessung (mittels des Anlaufstroms). Die Kathodentemperatur der Elektronenröhren kann aus der Anlaufstromcharakteristik bestimmt werden. Um die Fehlerquellen bei der Gleichstrommessung dieser Charakteristik zu eliminieren, verwenden IKEHARA—WILSON auf Gleichstrom superponierten Wechselstrom und bestimmen die Kathodentemperatur aus der Änderung der Oberschwingungen. Mit der von den Verfassern ausgearbeiteten Kompensationsmethode kann für die Messung statt der oberen Harmonischen die Grundfrequenz verwendet werden, die es als größeres Signal ermöglicht, die Messung auch auf niedrigere Temperaturen (ca. 600 °K) zu erstrecken. Die Kontrolle der Messungen mittels Thermoelements und optischen Pyrometers zeigt Übereinstimmung innerhalb von $\pm 2\%$. Zur Abschätzung des durch die Wärmeleitung des Thermoelements verursachten Fehlers wurde eine Näherungsrechnung durchgeführt.

Mesure électronique par courant initial de la température des cathodes. La température des cathodes peut être déterminée à partir de la caractéristique du courant initial. Pour éliminer les possibilités d'erreur des mesures en courant continu servant au relevé de cette caractéristique, IKEHARA—WILSON utilisent du courant alternatif superposé à du courant continu et déterminent la température cathodique à partir de la variation des harmoniques supérieurs. Grâce à la méthode de compensation élaborée par les auteurs, on peut, pour la mesure, utiliser au lieu des harmoniques supérieures le terme fondamental qui, étant un signal plus fort, permet d'étendre les mesures aux températures plus basses (de 600° K env.). Le contrôle des mesures par couple thermoélectrique et par pyromètre optique montre un accord à moins de $\pm 2\%$ près. Pour l'évaluation de l'erreur causée par la conduction thermique du couple, un calcul approché a été élaboré par les auteurs.

Электронный метод измерения температуры катода *(И. Вац и И. Керени).* Температура катода электронных ламп может быть определена по характеристике начального тока. В интересах устранения возможных ошибок измерения постоянным током, служащего для снятия этой характеристики, *Икехара—Вильсон* применяют переменный ток, наложенный на постоянный ток, и по изменению высших гармоник определяют температуру катода. Применением компенсации, разработанной авторами, вместо высших гармоник для целей измерения может быть использована основная гармоника, которая вследствие того, что она является более сильным сигналом, позволяет распространить измерение и на более низкие температуры (прибл. около 600° К). Проверка измерений термопарой и оптическим пирометром показала, что совпадение получается в пределах $\pm 2\%$. Для оценки погрешности термопары от теплопроводности дается приближенный расчет.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 305—316 (1968)

SOME PROPERTIES OF 4-BIT UNIT-DISTANCE DECIMAL CODES

P. SZABÓ

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE OF PHYSICS, DEPARTMENT OF ELECTRONICS, BUDAPEST

[Manuscript received June 14, 1966]

The patterns of 4-Bit Unit-Distance Decimal (4-BUDD) codes were investigated on specially prepared pattern-tables constructed from their codisets, in order to evaluate the possible types of these codes. Unambiguous identification of the code-types investigated is obtained by means of so-called Binary Ratios (*B-s*), defined by the bit-sequences of each code. This method of labelling is invariant under the changes in code-forms of the same type. Finally some possible other uses of the method, such as the evaluation of the actual number and complementing properties of the 4-BUDD codes are discussed.

I. Introduction

Decade counters with four bistable counting stages are extensively used in digital techniques. In the classical manner these decades are realized from the 16 position binary counting chain by feed-forward or feed-back methods. Recently several reports [1—3] have dealt with the design of decade counters based on a new principle, called coincidence or pulse routing method [2, 4]. Essentially, both methods are based on the use of homogeneous (i.e. containing counting stages with an equal number of stable states) simple counting chains from which the decades are realized by changing the natural sequence of the triggering of their counting stages by altering (modifying) their gatings [5]. In the "classic" manner a decade counter is built as a modified series counting chain, while by the "coincidence" method as a modified parallel counting chain, since here the counting stages, being triggered after a given input pulse, are actually triggered by this pulse simultaneously by parallel connected gating circuits. An advantage of the latter method is that the time delay between the tenth input pulse and the output pulse of a decade depends on the individual delay of a single counting stage only, contrary to the classic design, where the overall time delay is the sum of the individual delays of 2—4 counting stages.

The principle of operation of modified parallel counting chains is described in detail in [2]. This method in principle, permits the use of any possible four-bit decimal code. The extremely high number ($n = 16!/6!$) of the existing coding possibilities enables the realization of decade counters with advantageous properties by selecting codes satisfying prescribed conditions. A possible

condition which can be prescribed is that only one of the binary stages can be triggered by any of the input pulses, that is, the use of a cyclic Unit-Distance code. This gives the possibility for a substantial reduction in the load of the driving source, and also reduces by half the maximum triggering rate of the fastest-driven bistable counting stage. In the following some features of these codes will be discussed, in particular those which are important for their application in decade counters.

II. Evaluation and labelling of existing types of 4-BUDD-codes

1

Binary Unit-Distance (BUD) codes can be defined as binary codes in which two adjacent code-words differ from each other only in a single bit [6]. This is equivalent to the definition that there is a Hamming distance of unity between any two adjacent code-words [7]. The possible types of cyclic BUD codes were determined by E. N. GILBERT [8] who investigated the graphs produced by the code-words assigned to the vertices of an n-dimensional "cube", connected along the edges of the cube. However, the possible types of 4-BUDD codes can be determined without the use of graph analysis methods by individually considering the possible variations remaining after a few restrictions have been applied.

An arbitrary 4-Bit Decimal i.e. having a cycle of ten (4-BD) code can be given by an ordered set of its digits, usually called codiset, arranged in ten rows, each of them being a code-word labelled by the ten digits from 0 to 9, and in four columns lettered from A to D, each containing a sequence of bits. In a general form the bits of a codiset can be given by their row number and column letter e.g. 6C (Fig. 1). The actual bits, of course, may have either one of the two possible values 0 (zero) or L (one).

	A	B	C	D
0	0A	0B	0C	0D
1	1A	1B	1C	1D
2	2A	2B	2C	2D
3	3A	3B	3C	3D
4	4A	4B	4C	4D
5	5A	5B	5C	5D
6	6A	6B	6C	6D
7	7A	7B	7C	7D
8	8A	8B	8C	8D
9	9A	9B	9C	9D

Fig. 1

The actual values of the bits in a column of any given codiset vary in a manner prescribed by the structure of the code. The values may be either identical or different in two adjacent code-words. In the latter case a *change* was made between two adjacent bits of a column. The actual number of these changes in a column must be even for any closed (cyclic) binary codiset.

The total number of possible bit-changes in any Unit-Distance Decimal code is, by definition, always ten. In 4-Bit codes the changes can be distributed over the columns A, B, C, D (Fig. 1) in the manner 2—2—2—4 only, that is, the codiset of each of these codes always contains one and only one column with four changes between its bits, while the remaining three columns contain two changes each.

No Binary Unit-Distance (BUD) code exists with two succesive bit-changes within any individual column. This follows from the unit-distance property of the code. After two successive changes in a column, the value of the third bit will be the same as that of the first one and because of the unit-distance condition, no other change can be made within the three successive code-words containing the bits in question, thus the first code-word will necessarily contain the same bits as the third one and this makes the code degenerate.

The bit-changes within the columns in a given 4-BUDD codiset are characteristic of the code under investigation. The type of each of these codes can be labelled by fixing the relative positions of these changes. This method was used by E. N. GILBERT [8] who identified each of the existing types by a series of ten numbers, the n-th of which indicates the particular column of a codiset in which a change should take place at the n-th transition between successive code-words.

The type of any particular 4-BUDD code being determined by the relative positions of the bit-changes only, there should exist some operations under which the code-type is invariant [8] These are the following:

a) Cyclic permutation of the code-words (10 possible choices);

b) reversal of the direction of the code-word sequence (2 possible choices);

c) simultaneous complementing of one or more bits in each code-word ($2^4 = 16$ possible choices)*;

d) simultaneous changing of the sequence of digits in each code-word, this being equivalent to a mutual change of places of two or more columns in a codiset ($4! = 24$ possible choices).

Using all possible combinations of the above operations any particular 4-BUDD code ought to take $10 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 24 = 7680$ different forms, all of the same structure i.e. of the same type. Actually, however, not all the possible

* Equivalent to adding to each code-word mod. 2 (without carry) a code-word chosen from the possible 16.

combinations of the above operations would yield in each case a form different from all the others. Owing to the symmetry properties of some codes the number of possible variations is restricted (see chapter III and [10]).

2

It is reasonable to label a code type in such a way that it should be characteristic uniquely of the type in question so that it will remain invariant as far as possible under the operations listed in point *1* under *(a) — (d)*. This requirement is not fully met, if one uses the labelling applied by GILBERT [8], since the cyclic permutation of the code-words *(a)* and the reversal of the direction of the code-word sequence *(b)* involves a cyclic permutation of the digits and a direction reversal in the coordinate sequence, while a change of places in some columns within the codiset means a change in the order of the digits in the corresponding coordinate sequence.

To establish an unambiguous labelling system which is more invariant under the operations in point *1 (a) — (d)* let us define special fractional terms, called *Binary Ratios* (*B*-s). The Binary Ratio of a column in the binary codiset is the ratio of the number of bits with one of the bit values to that of the bits having the other bit value in that column. The sum of the numerator and the denominator of the fractional term thus defined is obviously equal to the number of code-words in the code under investigation. For any binary code having the same number of bits per code-word, as many *B*-s can be written as the number of columns in its codiset. Any *B* can be expressed also by writing as numerator a sum of terms, each term being the number of succesive bits within a column having the same value of either of the two possible ones, and as denominator the same formula for the other one of the possible values. The number of terms in the numerator and in the denominator will then give the number of changes in this column.

The *B*-s of columns in non-degenerating Four-Bit Decimal codes may have any of seven possible values, given as

$$\frac{2}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{6}, \frac{5}{5}, \frac{6}{4}, \frac{7}{3}, \frac{8}{2}.$$

B-s cannot have the values 1/9 or 9/1, since the three-bit parts of the code-words belonging to the 9 equal bit-values of this *B* have only 8 possible combinations and the so constructed code would be degenerating. To preserve invariance under the operations mentioned and to ensure uniform notation, reciprocal *B*-s should be regarded as equivalent, thus the last three pseudo-fractional terms have to be omitted. The remaining fractional terms are minimized forms and can be referred to as minimum Binary Ratios ($B_{\min}$-s).

3

4-BUDD codes are allowed to contain only one column with four changes, as mentioned in point *1*, since only 10 changes are available for 4 columns and each column must always contain an even number of changes, at least two. The relative position of these changes are governed by the following rules:

Out of the bits of such a four-change column maximum four bits in a sequence can be identical and only one such foursome of bits can occur. The remaining six bits can then be identical in pairs only, or else the conditions in point *1* would not be satisfied. The B of this column can be written in the form

$$B = \frac{2+2}{2+4}.$$

The pattern in question can be visualized on a column of a so-called *pattern table* (Fig. 2a) derived from a codiset. In such a table each bit of an original codiset is represented by a square drawn with thick line where a change

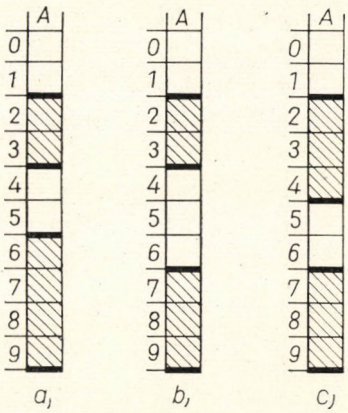


Fig. 2

takes place between two successive bits of a column. The two possible values of the bits are distinguished by leaving the squares empty, or shadowing them after a bit-change.

If in a four-change column there are three identical bits in a sequence, there must be still another threesome in the column, while the remaining four bits are identical in pairs. There are two alternatives: the second threesome of bits may have either different or identical values as compared with the first sequence. The first alternative is then characterized by the $B = (2 + 3)/(2 + 3)$ (Fig. 2b), the second by the $B = (2 + 2)/(3 + 3)$ (Fig. 2c).

The changes in a four-change column of any 4-BUDD code cannot have any relative configurations different from one of the above three patterns. The rules discussed are sufficient for determining the possible types of 4-BUDD codes. If one combines each one of the three possible patterns of four-change columns with all the possible variations of patterns of three two-change columns maximum 29 possible patterns of codisets are obtained. It will be shown, however, that some of these patterns are degenerate variants, while some others are of the same code-type. These have to be ignored.

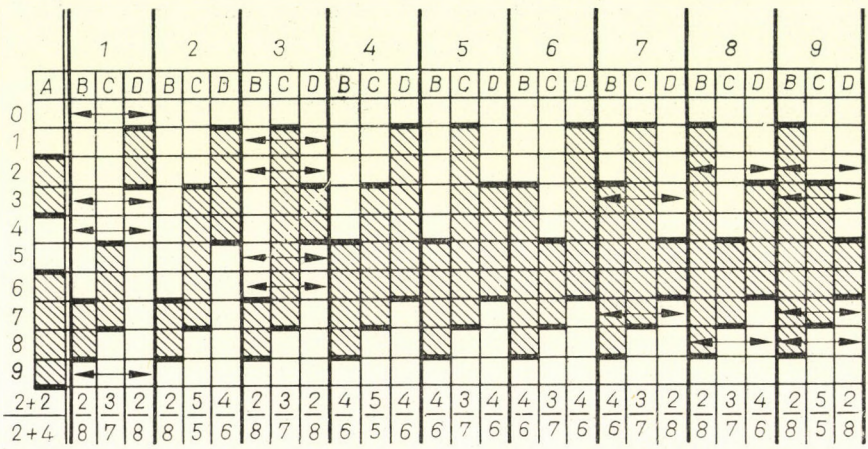


Fig. 3

The pattern of the four-change column with $B = (2 + 2)/(2 + 4)$ shown in Fig. 2a can be combined in 9 different configurations with the three other patterns of two-change columns of a 4-BUDD codiset (Fig. 3).

When constructing the pattern tables, the possible changes in columns B, C, D were first chosen to lie at the minimum possible distance from the bottom (Fig. 3, pattern *1*) then, the next possible configuration was written in column B (pattern *2*) and so on to pattern 9, taking the restrictions in point *1* and the last paragraph of point *2* into account.

The combinations possible with the pattern of the four-change column of Fig. 2b having a $B = (2 + 3)/(2 + 3)$ are numbered as patterns 10 to 19 in Fig. 4 and those of Fig 2c, having a $B = (2 + 2)/(3 + 3)$, as patterns 20 to 29 in Fig. 5. (The last rows of the figures give the respective $B_{\min}$-s of the columns.)

16 out of the 29 patterns: No. 1, 3, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 18, 19, 20, 22, 25, 27, 28 and 29 are degenerate. The code-word pattern-pairs with identical bits, thus causing degeneration are marked by horizontal lines with arrows in the figures. The sorting out of degenerating patterns is relatively simple, considering that every codiset pattern having a pair of identical code-word patterns

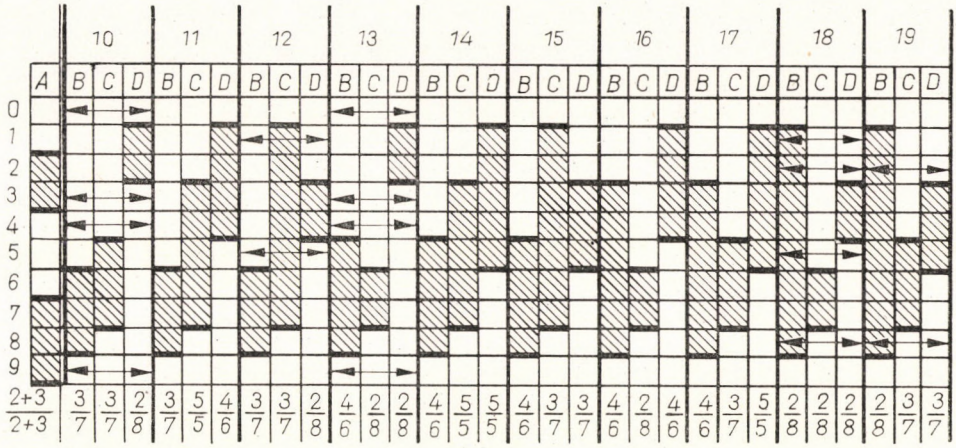


Fig. 4

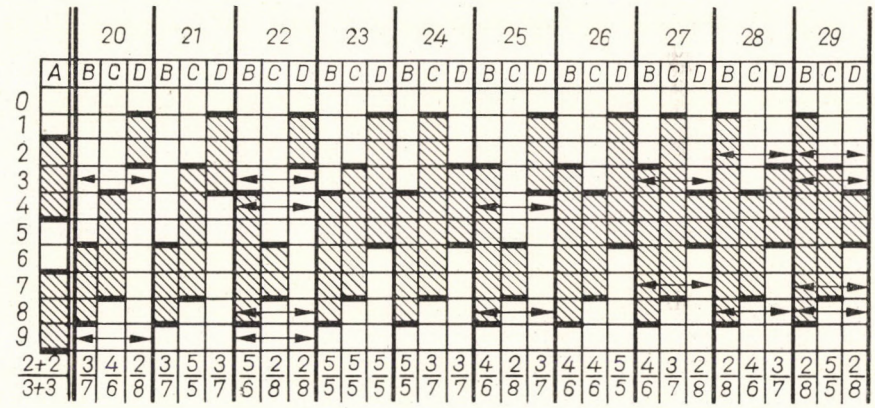


Fig. 5

has also a column with $B = 2/8$ and one with $B = 3/7$, while for two pairs of identical code-word patterns one mostly finds two columns, each with $B = 2/8$.

By omitting the degenerating combinations, 13 patterns will remain, out of which three pairs are seen to have the same B-s, namely, Nos 5 and 6, 11 and 17, 21 and 24. We have to find out whether the pairs are structurally equivalent, i.e. the codisets are different forms of the same code-type only, or do they belong actually to different code-types? This can be established by performing the operations mentioned in point *1* under *(a) — (d)*. If there is any particular combination of these operations (called transformation), by which one of the forms can be transformed into another, the two forms investigated are of the same type, since their relative pattern i.e. type remains

invariant under any combination of the operations mentioned. One member of such pairs can then be omitted from further considerations.

Let us write for example a codiset for each of the patterns 5 and 6 in Fig. 3 putting 0-s instead of the empty and L-s instead of the shadowed squares (Figs 6a and 6b).

	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	L	0
2	L	0	L	0
3	L	0	L	L
4	0	0	L	L
5	0	L	L	L
6	L	L	L	L
7	L	L	L	0
8	L	L	0	0
9	L	0	0	0

a)

	A	B	C	D	
0	0	0	0	0	5
1	0	0	0	L	4
2	L	0	0	L	3
3	L	L	0	L	2
4	0	L	0	L	1
5	0	L	L	L	0
6	L	L	L	L	9
7	L	L	L	0	8
8	L	L	0	0	7
9	L	0	0	0	6

b)

Fig. 6

Such a codiset can be labelled by [0, ABCD, 9] meaning that the code-words are numbered from 0, to 9, the columns lettered from A to D.

Operation in point 1 *(a)* on a chosen codiset is symbolized by the use of the above labeling by shifting the first and the last numbers simultaneously by the given digits, operation *(b)* by a mutual change of places of these numbers, operations *(c)* by dashes above the appropriate letters and operation *(d)* by changing the sequence of the letters.

The transformation [5, $A\bar{D}\bar{C}\bar{B}$, 6] on the codiset in Fig. 6a gives the codiset shown in Fig. 6b, thus definitely of the same type.

Similarly, the transformation [3, $\bar{A}C\bar{D}\bar{B}$, 4] yields from pattern 17 the Pattern 11 (in Fig. 4) and [6, $A\bar{C}\bar{B}D$, 7] transforms pattern 24 to 21 (in Fig. 5). The patterns having the same B-s are seen to be of the same type. It follows that the 4-BUDD code-types can be labelled unambiguously by their B-s. The now remaining patterns in Figs 3, 4 and 5 thus comprise all possible types available on having applied the restricting conditions. The code-types associated with the structures, correspond, of course, to the types specified by GILBERT [8], as shown in Table I.

Any type of 4-BUDD codes can be readily and unambiguously identified by making use of the B-s: one has only to write out the values of $B_{\min}$-s for a given codiset to identify the type in Table I. This cannot be done in each case when the coordinate sequence is used as a means of identification, since

Table I

Gilbert's notation	No. of code-type in Figs 3, 4 and 5	Notation by B_{min}-s	Complementing	Remarks
1 2 1 3 4 3 1 2 1 4	2	$\frac{2+2}{2+4}\ \frac{2}{8}\ \frac{5}{5}\ \frac{4}{6}$	9	One form is the Excess-3 Gray-code [9]
1 2 1 3 4 1 2 1 3 4	23	$\frac{2+2}{3+3}\ \frac{5}{5}\ \frac{5}{5}\ \frac{5}{5}$	9,10	Lippel code-type [6]
1 2 1 3 4 1 2 1 4 3	26	$\frac{2+2}{3+3}\ \frac{4}{6}\ \frac{4}{6}\ \frac{5}{5}$	9,10	
1 2 1 3 4 1 2 3 1 4	14	$\frac{2+3}{2+3}\ \frac{4}{6}\ \frac{5}{5}\ \frac{5}{5}$	9	
1 2 1 3 1 2 2 4 1 3	11	$\frac{2+3}{2+3}\ \frac{3}{7}\ \frac{5}{5}\ \frac{4}{6}$	—	
1 2 1 3 4 1 4 2 1 3	16	$\frac{2+3}{2+3}\ \frac{4}{6}\ \frac{2}{8}\ \frac{4}{6}$	9	
1 2 1 3 4 1 3 1 2 4	21	$\frac{2+2}{3+3}\ \frac{3}{7}\ \frac{5}{5}\ \frac{3}{7}$	—	
1 2 1 3 4 2 1 3 1 4	4	$\frac{2+2}{2+4}\ \frac{4}{6}\ \frac{5}{5}\ \frac{4}{6}$	9	
1 2 1 3 4 2 1 4 1 3	5	$\frac{2+2}{2+4}\ \frac{4}{6}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{6}$	—	
1 2 1 3 1 4 3 1 2 4	15	$\frac{2+3}{2+3}\ \frac{4}{6}\ \frac{3}{7}\ \frac{3}{7}$	9	

two code forms of the same type may have coordinate sequences with entirely different numbers, so that one has to find and apply an appropriate transformation to the given coordinate sequence prior to the actual identification.

As an example let us consider the Excess-3 Gray-code [9] (Fig. 7a).

The coordinate sequence associated with the code-form on Fig. 7a is 2434143421 which cannot be immediately identified with any of the coordinate sequences in Table I. The B_{min}-s, on the other hand can be written out at once, as

$$\frac{5}{5}\ \frac{2}{8}\ \frac{4}{6} \quad \text{and} \quad \frac{2+2}{2+4}.$$

The $B_{min} = (2 + 2)/(2 + 4)$ of the four-change column gives only three possible choices, namely, the code-types Nos 2, 4 and 5. The remaining three

	A	B	C	D
0	0	0	L	0
1	0	L	L	0
2	0	L	L	L
3	0	L	0	L
4	0	L	0	0
5	L	L	0	0
6	L	L	0	L
7	L	L	L	L
8	L	L	L	0
9	L	0	L	0

a)

	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	L
2	L	0	0	L
3	L	0	L	L
4	0	0	L	L
5	0	0	L	0
6	L	0	L	0
7	L	L	L	0
8	L	L	0	0
9	L	0	0	0

b)

Fig. 7

B-s can be found only among the *B*-s of code-type 2. Thus, the type has been uniquely identified. The statement can be immediately checked by applying the transformation [2, $\overline{\mathrm{D}}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{C}}$, 1] to the codiset in Fig. 7a which reproduces the codiset in Fig. 7b, being a possible form of the pattern 2 in Fig. 3.

III. Further possible uses

1

The use of the 4-BUDD code pattern tables and the labelling by Binary Ratios is by no means confined to the determination of their types. Further investigation of the pattern tables of the 10 4-BUDD code-types reveals a special kind of symmetry in some of these. In most of the patterns one or two pairs of symmetry axes can be found, relative to which the changes between the digits of consecutive code-words are symmetrically located. These pairs of symmetry axes can be visualized and singled out on the pattern tables and utilized for determining the actual number of these codes.

Theoretically each combination of operations given in point *1* under *(a)* and *(b)* should give, when applied to a chosen form of a 4-BUDD code-type, a different code form, thus each type is expected to take $10 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 24 = 7680$ different forms, totalling 76 800. Actually, however, some of these code-types cannot be transformed into as many different forms as was calculated, since for certain types one or more combinations of the operations reproduce — although no inverse operation are prescribed — the same original code-form. An example of this is the well known family of *Unit-Distance Lippel* codes, investigated by H. E. TOMPKINS [6], who calculated 1920 different forms for this code-type. This type is listed by E.N. GILBERT in Table I of [8]

in the group "Length 10", second row, as the coordinate sequence: 1213412134, and can be found in Table I. of the present article in the second row, as code-type No. 23 of Fig. 5 with

$$B = \frac{2+2}{3+3}\,\frac{5}{5}\,\frac{5}{5}\,\frac{5}{5}\,.$$

The presence of a pair of symmetry axes on a pattern table indicates that there always exists one particular set of operations under *(a)* and *(d)* i.e. one transformation, under which, without any inverse operation, the given code-form is invariant. The existence of a pair of symmetry axes reduces the possible number of different code forms of the same type by half for this reason and two pairs of symmetry axes reduce the possible number of different forms by a factor of 4. Thus, it is sufficient to simply establish the existing symmetries on the pattern-tables in order to evaluate the actual number of different 4-BUDD codes [10].

The total number of possible 4-BUDD codes is 42 240, in agreement with the results of [11] obtained by the investigation of the *Veitch–Karnaugh Mappings* of these codes.

2

The possibility of complementation can be a considerable asset to codes used in counting systems. Though, the 4-BUDD codes are not self-complementing codes, that is, the code-words assigned to (9 or 10) complementary decimal digits are not binary complements, most of the 4-BUDD code-types have forms which can be complemented in a simple manner — often even simpler than self-complementing. These, too, can be evaluated by staking out the symmetry axes on the pattern tables. Code-types in which the changes between code-words are placed symmetrically to one or two pairs of symmetry axes have always code-forms which can be simply complemented.

In the case of 9-complementary codes, one of the symmetry axes must be at the transition between the code-words 9 and 0. In the case of 10-complementary codes the code-word 0 must be a symmetry axis.

Code types 2, 4, 14, 15, 16, 23 and 26 have 9-complemetary forms and the last two (23, 26) have 10-complementary forms as well (see column "Complementing" on Table I).

*

ACKNOWLEDGEMENT

The author is indebted to Mr. J. DÉNES for valuable discussions and advice.

REFERENCES

1. Improvements in or Relating to Pulse-Counting Apparatus, *British Patent* No. 801.540.
2. Goss, J. A.: "ISABEL". *Electronic Engineering* (1960), 630—634.
3. Hawkes, H. W.: New High Speed Counter-Divider. *Electronic Technology* (1962), 48—55.
4. Radeka, V.: Fast Decimal Counting with Binary-Decimal Logic. *IEEE Transaction on Nuclear Science* **NS-11** (1964), 296—301.
5. Szabó, P.: The Build-up of Pulse-Counting Devices (in Hungarian). *Mérés és Automatika* (1964), 321—324.
6. Tompkins, H. E.: Unit-Distance Binary-Decimal Codes for Two-Track Commutation. *IRE Transactions on Electronic Computers* **EC-5** (1956), 139.
7. Hamming, R. W.: Error Detecting and Error Correcting Codes. *BSTJ* **29** (1950), 147—160.
8. Gilbert, E. N.: Gray-Codes and Paths on the n-Cube. *BSTJ* **37** (1958), 815—826.
9. Flores, I.: Reflected Number Systems. *IRE Transactions on Electronic Computers* **EC-5** (1956), 79—82.
10. Szabó, P.: A Simple Method for Determining the Possible Number of Four-Bit Unit-Distance Decimal Codes (in Hungarian). *Reports of the Central Research Institute for Physics* (Budapest) **15** (1967), 3—9.
11. Tompkins, H. E.: Unit-Distance Binary Codes. *Moore School of Elec. Engng. University of Pennsylvania;* Report No. 58—09, 1957.

Über einige Eigenschaften von einschrittigen dezimalen Coden mit vier Binärstellen Es werden die Gefüge von einschrittigen dezimalen Coden mit vier Binärstellen (4-BUDD Coden) durch spezielle, von ihren Codisets abgeleitete Gefüge-Tafeln untersucht, um ihre mögliche Typen zu bestimmen. Die Code-Typen können mittels sogenannter »Binärer Verhältniszahlen« (*B-s*), bestimmt durch die Bit-Sequenzen der Codes, eindeutig bezeichnet werden. Diese Bezeichnungsart ist invariant gegen Änderungen der einzelnen Code-formen desselben Typs. Zuletzt werden einige andere Verwertungsmöglichkeiten der angewendeten Methode, z. B. die Bestimmung der Zahl der existierenden 4-BUDD Codes und ihre Komplementierungsmöglichkeiten diskutiert.

Quelques propriétés des codes décimaux d'un seul pas à quatre chiffres binaires. La détermination des types possibles des codes décimaux d'un seul pas à quatre chiffres bi. naires (4-BUDD) se fait à l'aide de schémes dérivables de leurs vocabulaires de mots-codes. Ces types de codes peuvent être caractérisés sans équivoque par des nombres proportionnels binaires (dits B) coordonnés aux séries des chiffres-codes. Cette méthode est invariable par rapport aux variations des formes de codes de même type. Finalement, l'auteur traite de quelques domaines d'application supplémentaires, comme la détermination du nombre possible de codes 4-BUDD et la définition des propriétés de complément.

Некоторые свойства одношаговых десятичных кодов с четырьмя двоичными знаками *(П. Сабо).* Определение возможных типов одношаговых десятичных кодов (4-БУДД) с четырьмя двоичными знаками производится при помощи структурных схем, являющихся производными состава кодовых наборов. Эти типы кодов можно однозначно характеризовать при помощи т. н. двоичных показателей (Б-к), придаваемых сериям знаков кодов. Этот способ обозначения является инвариантным по отношению к вариантам форм кодов идентичного типа. Наконец, говорится о нескольких дополнительных областях применения данного метода, например — определение возможного числа кодов 4-БУДД, а также их комплементирующих свойств.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 317—350 (1968)

ON THE CATHODE SPACES OF DISCHARGES

J. BITÓ

CAND. OF TECHN. SC.

INDUSTRIAL RESEARCH INSTITUTE FOR ELECTRONICS "HIKI", BUDAPEST

[Manuscript received December 29, 1967]

The author describes the most characteristic basic processes of cathode spaces, among others, the phenomena occurring on the surface of the cathode and the volume interactions. He discusses in detail the different cathode spaces of glow discharges, on the base of the general analysis of the cathode spaces. After this he treats the development of arc discharge and the glow arc transition, and later he discusses the general analysis of the cathode space, the role of the cathode spot and refers to the relation between the cathode spot and the cathode space of arc discharges.

I. Introduction

Four characteristic space-parts can be distinguished in the build-up of the discharges which, though closely interconnected with each other, still indicate characteristics different in their respective nature. These are the cathode spaces, the anode spaces, the positive column and the transition domains (double layers). Out of these spaces, the cathode (cathodal) spaces have fundamental significance from the viewpoint of maintaining the discharges.

The electrons leaving the cathode, are accelerated in the cathode dark space, excite, ionize the gas or vapour atoms and molecules along their paths thus generating, by a multiplication process, further charge carriers. The positively-charged particles of the space within the discharge flow toward the cathode, those with negative charges toward the anode and partake along their flow in further ionization, excitation, diffusion, etc. processes. The cathode, by means of the cathodal spaces, acts to produce the electrons, the basic elements of the discharge processes in the required number and also accelerates the electrons to a certain extent. Considering the electric characteristics of these spaces, these differ not only from the other discharge spaces but to a considerable extent even among themselves. These are the discharge spaces which are the most difficult to describe and though their importance made their theoretical observation necessary already for some time, consideration and characterization, up to the present it proved to be, however, impossible to publish a continuous, consistent general description on them. By making use of the results of the experiments already carried out and of the theoretical examinations, in the following there is given a comparatively continuous

and consistent notion on these spaces which covers the characterization of the cathodal spaces of the glow discharges and arc discharges and eventually also throws light, from several angles, on the part played by the cathode.

Up to now, it proved to be impossible to systematize the highly varied phenomena which depend on a number of parameters of the cathodal spaces even so far as this succeeded for the fundamental processes in the positive column and therefore the uniform method of theoretical description for these phenomena are not available. The various partial processes themselves can be described individually, moreover the characteristics and methods of theoretical description of the space-charge domains are also known, but their cumulative description, e.g. the dimensions of the spaces before the cathode and the unambiguous description of the relations between the electron current, ion current, diffusion current, cathode drop, cathode temperature is not yet given. The situation is particularly involved in the case of the cathodes provided with electron-emission coats as the interpretation of the processes taking place there requires the knowledge of not only the phenomena of the gases ionized to a varying extent but also that of the characteristics of the emission coat generally showing semiconductor properties and of the properties of the carrier metal. The methods of the experimental analyses are highly varied. The cathode-face current densities of the discharges are generally defined visually or photographically and the sizes of the various cathodal spaces are usually defined by identical methods though the limits of such spaces are not sharp, being generally rather diffused and therefore causing considerable difficulties and uncertainties in the measurements. The limits of these spaces can also be indicated by indirect methods, based on the measurements of the electric field strength. The usual probe-type measurements are generally unsuitable for the taking of the electric parameters as the velocity distribution of the charged particles, in the majority of these spaces, cannot be characterized by Maxwell–Boltzmann's distribution. By the application of heated probes, however, even the traditional method may yield results of approximate accuracy [1]. At present, however, a number of recently developed probe measuring processes are already known [2] which possess the advantageous property enabling application independently of the distribution of velocity and thus yield, by considering the required accuracies of such measurements, results of satisfactory accuracies.

The electron-beam method serves e.g. for the determination of the field strength. In this method, an electron beam is "fired" into the space to be examined and the deviation of this electron beam, which depends on the magnitude of the field strength prevailing there is observed on a fluorescent screen [2].

After a suitable standardization, the value of the field strength can be read off directly from the difference observed on the screen. The Stark effect

is made use of in a further method of the field strength measurement. Evidently, this method can be applied reliably only above a certain minimum field strength. The classical or traditional method can be applied exclusively for the measurement of the cathode drop [1] where one of the discharge electrodes is built so as to enable axial movement and by moving this electrode toward the other one, the minimum burning voltage occurring at the discharge current kept at the given constant value is observed, and taken as the cathode drop. Optical pyrometric methods are usually applied for the measurement of the temperature of the cathode face or thermoelement measurements, resp. for helical cathodes the direct bridge method can eventually be used, in the latter case, conclusions for the temperature of the Tungsten helix generally forming the cathode are drawn from the increase of the resistance. The description and detailed characterization of the test methods of the cathodal spaces embraces even in itself a large subject-matter [3]; in the following the detailed analysis or even examination of some special cases of these test methods is omitted and the discussion is limited only to the presentation of experimental results enabling general application, or to methods of theoretical description.

II. Brief review of the fundamental processes of the cathodal spaces

The phenomena can be classified into three groups:
processes occurring on the cathode face;
phenomena in the volume;
phenomena of wall faces or of other neutral boundary surfaces.

Processes occurring on the cathode face are evidently influenced essentially by the material, shape, contamination and sizes of the cathode face. In these processes, physical and chemical reactions often occur interminglingly and in a considerable number of the cases, chiefly with cathodes provided with electron-emission coats, these reactions are completely interwoven. The fundamental processes of the cathode face are connected to the phenomena of the cathodal space directly, by the electron emission. The cathodes are usually classified by taking this into consideration and the electron emission is taken as an exclusive cathode phenomenon in a qualified sense.

One of the most frequently occurring forms of the electron emission is the *thermal emission* wherein the elctrons, in a number depending on the cathode temperature, escape from the cathode through the effect of heat. The power required for this process may originate from external power sources (external heating) or from the discharge proper (self-maintaining discharge). The electrons thus produced are generally not sufficient to maintain the discharge and in addition to the purely thermal electron production, the ions from the discharge accelerated in the cathodal spaces also contribute, and in a significant way, to the production of the electrons; the emission thus developing

is then called being the combination of the two fundamental cases, *thermoionic emission*. The supplementarily contributed electron emission by the positive ions is usually called secondary emission and a factor γ_i is used for its charaterization, representing the number of the secondary electrons excited by a positive ion incident on the surface. Even this factor depends, of course, on a very high number of parameters and can be specified only under given, well definable discharge conditions. At the same time, the photons, metastable atoms and high-energy neutral atoms incident on the cathode may also contribute to the electron production, due to the secondary electrons released by the energy lost through them. Corresponding to the order of the above enumeration, usually further factors, essentially of similar definition, are introduced for their characterization, γ_p, γ_m, γ_n and considering the secondary emission effect of the ions, the total secondary emission coefficient, factor γ, is generally introduced as a sum of all these factors.

$$\gamma = \gamma_i + \gamma_p + \gamma_m + \gamma_n. \tag{1}$$

The total secondary emission coefficient is also a highly involved multivariable function and is generally generated [1] as a function of the reduced field strength (quotient of the electric field strength and pressure) by keeping the other parameters at constant value or at least by presuming their constancy.

The electron emission caused by the electric field before the cathode (space charge comprising positive ions), the *field emission* plays an important role primarily in cold cathodes. During field emission, the temperature of the cathode increases but slightly, e.g. for the case of a tungsten cathode, on the field emission of an electron current of a few milliampers, by not more than approx. 3 to 4 per cent. The reason for this is the character of the emission process: the electric pulling field does not change the energy distribution of the electrons of the cathode. Field emission requires high field strength, generally of a value of approx. 10^6 V/cm and the magnitude of the emission current thus released depends, of course, even in this case, on the material, shape, surface, contaminations, etc. of the cathode. With certain thin layers, chiefly with coats of $Al-Al_2O_3-Cs_2O$ composition, considerable field emission has been observed (Malter effect) [4], here, however, in the development of the electron emission further polarization phenomena are also taking part. According to Schottky's observation [5], the escape energy of the cathode or of the cathode coat may virtually decrease according to relation

$$\varphi = \varphi_0 - (e^3 E)^{1/2} \tag{2}$$

where

φ_0 original work function, for the case when no external field strength exists;
φ work function decreased by the effect of electric field strength;
e elementary charge;
E electric field strength.

Correspondingly, if the cathode supplies, for the case when there is no field, by purely thermal process, at temperature T an electron current of i_0, then, on the effect of a sufficiently high electric field, the cathode will emit at the same temperature an electron current i_E, complying with relation

$$i_E = i_0 \exp\left[e^{3/2} \frac{E^{1/2}}{KT}\right] \tag{3}$$

computed by Richardson's equation, where k Boltzmann's constant. This relation is valid up to a field strength of 10^6 volts/cm and correspondingly, the increase of the electron emission ensuing can be observed in nearly all discharges of such small field strength.

Consequently, it can be stated that electron emission has generally a complex character. The high temperature and the intensive ion bombardment are both disadvantageous for the life of the cathodes, these processes may considerably damage the cathode surface, connected with the evaporation and powdering phenomena. When selecting the mechanism for producing the required electron emission current, the cathode loads imposed by these phenomena should, therefore, be taken into consideration and if the development of long-life cathodes is striven for, the electron production should be assured, as far as possible, by such processes which impose minimum loads on the cathode.

The *bulk* (volumetric) *phenomena* occurring in the cathodal spaces can not be compared with the bulk (volumetric) processes in the plasma of the positive column. The reason for the fundamental difference should be sought for in the space charges of the cathodal space. These are the necessary concomitants of the cathodal spaces. Fundamentally, the basic discharge processes are identical to those in the positive column and essential differences occur only in their modes and conditions of realization: the collision and scatter processes, the excitations, various ionization processes, the diffusion and the ambipolar diffusion, the Coulomb interactions, screenings, recombinations, charging processes can also be found in this cases. These phenomena are usually described empirically, by introducing the differential ionization factors α and β, i.e. the number of ion pairs produced by an electron, resp. by an ion covering a path of 1 cm length. Occasionally, the knowledge of η can be advantageous, being, by the definition

$$\eta = \frac{E}{\alpha}, \tag{4}$$

i.e. as can be conceived by elementary conversion, the product of η and the elementary charge yields the energy necessary to produce a pair of ions by

electron collision. The energy necessary to produce a pair of ions by ions striking can be given by an expression of similar character, if the factor ε given in equation (5) is multiplied by the elementary charge. The ε value to be specified for this end, can be characterized by the following equation:

$$\varepsilon = \frac{E}{\beta} . \tag{5}$$

The processes occurring within the cathodal cpaces can be characterized by the aforegoing equations and by the equations describing the motions of the electrons and ions, by the distribution functions and eventually by the relations of kinetic gas theory. HORNBECK [6] and MOLNÁR [7] have worked out ingenious methods for the separation and definition of the evaluation of the various secondary emission factors. In order to define e.g. the factor γ_p, these authors subjected the surface of the cathode to pulsating UV illumination [7] and measured the emission pulsation thus produced.

The above described phenomena are considered as processes causing considerable losses, in the first place due to the radial diffusion and to the charging processes developing due to this diffusion.

The traditional experimental methods afford only characterization in part of these processes, by measuring the wall potential and the diffusion current. A considerable number of other measuring data are additionally required for their accurate description. The recombination phenomena occurring along the wall can be approached, just as the thermal wall losses, by the theory of the double layers.

The character and built of the cathode influences, as has already been shown, the cathodal spaces in a number of respects and has even an impact on the initiation of the discharge [1]. The cathode applied, corresponding to the objectives of the discharge, can be liquid (mercury cathode), a metal-carrier cathode of different shapes provided with solid, metallic and electron-emission type coats, i.e. with coats of lower escape energy and generally having semiconductor properties.

Corresponding to the parameters of the discharge, the cathode may or may not have a cathode spot but simultaneously one or several, stationary or moving, luminuous cathode spot may form on the cathode, as will be discussed later on. The cathode spot is a special location, its temperature is considerably higher than that of the surrounding cathode surface, its current density attains 5 to 100-times that of the surrounding areas and the resulting light intensity considerably exceeds the luminous intensity of any other portion of the cathode surface.

Though as mentioned by way of introduction, the phenomena of the cathodal spaces cannot be separated definitely from the properties of the

cathode which can be characterized by solid-state physics, in the following we are still dealing rather with the discharge spaces, by considering the interactions between the cathode and these spaces, without turning to the details of deeper physical changes occurring in the cathode during the discharge processes here considered.

III. Cathode spaces of the glow discharges

The glow discharges obtained this name by their characteristic glow light around the cathode separating the cathode from the dark-space. The basic processes briefly reviewed in the foregoing can be observed almost without exception in the cathodal spaces and by the cumulative effect of these processes, the space charge conditions prevailing in the cathodal spaces,

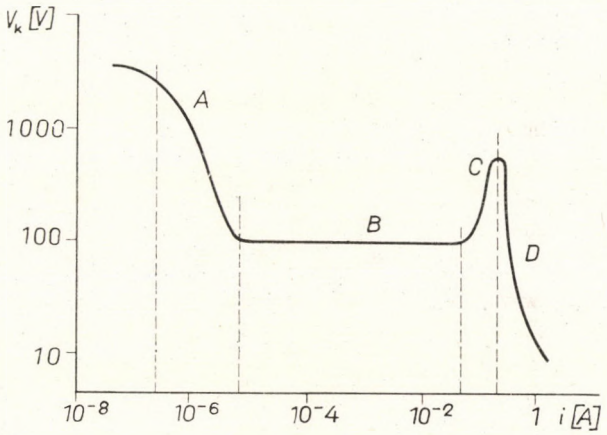


Fig. 1. Voltage/current characteristic of the discharges (characteristics featuring the *A* subnormal, *B* normal, *C* anomalous glow discharges)

the voltage drops there occurring and eventually the current density on the cathode face determine the type of the voltage/current characteristics.

Up till now, nobody has undertaken to elaborate the general and brief definition of the glow discharges. It is usually said that these are comparatively low current density cathode discharges where cathode surface current densities of less than 10^{-1} A/sq. cm occur. In the glow-discharge section of the discharge characteristic shown in Fig. 1, there are shown, in the portion denoted by *A*, the subnormal, in the portion denoted by *B* the normal, at *C* the anomalous glow discharge domains; the section denoted by *D* of the characteristic, showing negative slope, following the previous portions, is characteristic for the arc discharges. The curve presented in Fig. 1 is indicative of the discharge current dependence of the cathode drop of the self-maintaining discharges [1].

A form of discharge where cathode drop is not necessary, could, however, also be conceived, e.g. in such a case when a sufficient volume of electrons to maintain the discharge at unchanged current density is supplied by some

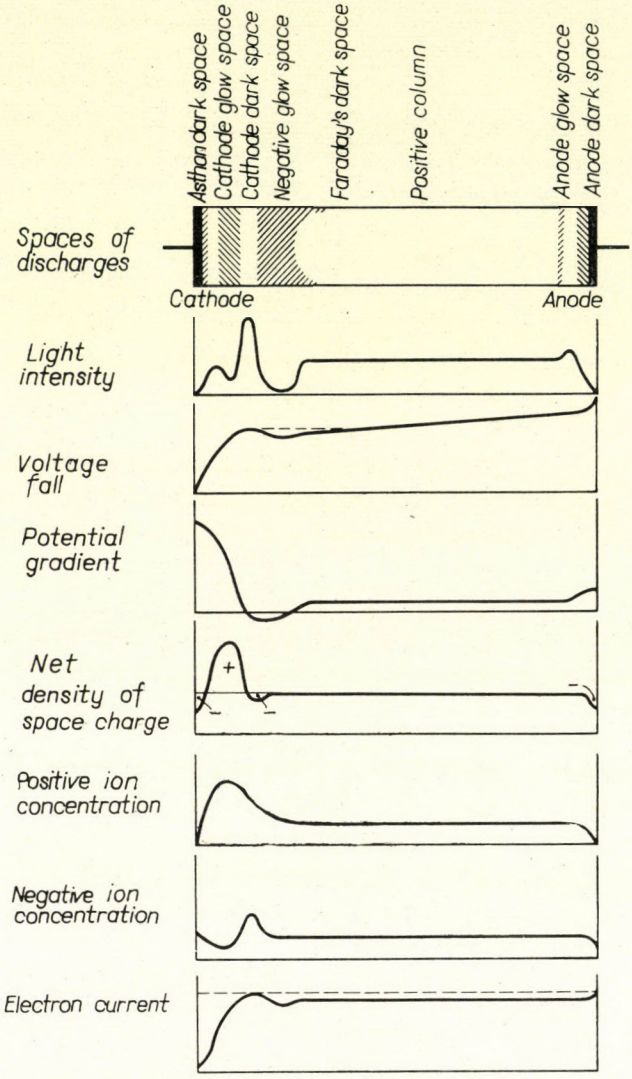


Fig. 2. Arrangement of the most important spaces of the glow discharges, their potential slopes, field strengths, concentrations and current densities of their positive and negative charge carriers

type of electron production process and thus the positive ions, photons, etc. incident to the cathode become unnecessary. This can be approixmated advantageously by applying a thermal cathode emitting as much electrons as

necessary and sufficient for the discharge and which causes formation of neither positive, nor negative space charge before the cathode.

The condition without cathode-drop can be approached also in the case when the surface of the cathode is covered by a special insulation layer. Under such conditions, namely, the dielectric layer charged by the positive ions accelerates the electrons escaping through this layer and thus may take the place of the accelerating space preceding the cathode; the range of the negative glow discharge extends up to the surface of the cathode [8]. These types of discharge should be treated as special cases, just as the discharges at cavity or sleeve cathodes.

In normal glow discharges, the cathode spot covers only part of the cathode surface and as is to be seen in Fig. 1, the normal cathode drop is independent of the discharge current and as will be shown subsequently, is similarly independent of the applied gas pressure. By the increase of the current, in this case it is not the surface current density of the cathode which increases but the area of the cathode spot. As soon as the cathode spot extends to the whole cathode, by covering its entire surface, the current density taken on the surface of the cathode also increases by the further increase of the discharge current — then begins the positive — characteristic anomalous glow discharge and when this prevails, the cathode drop will already also increase, in a way as shown in Fig. 1, upon increasing the discharge current.

At cathode surface current densities lower then the cathodal current density of the normal glow discharge, a subnormal glow discharge developed which can be characterized by a negative characteristic; in this case, increasing cathode drops will develop with decreasing current density. This is caused by the fact that with decreasing current strength, the diameter of the discharge also decreases, along with the sizes of the cathode spot and as can be shown, in this case more charge carriers take part in the radial wall-diffusion, the loss increases and thus a stronger acceleration space and larger cathode drop is necessary to maintain the required discharge current [1].

The arrangement of the cathode spaces of the glow discharges is shown in Fig. 2. These spaces can partly be separated also optically and it can be observed that the boundary lines of the spaces are the more defined the higher the cathode drop is. Usually three larger space portions are separated out of these spaces, the cathode dark space, the negative glow space and the Faraday dark space connecting the cathodal section to the negative end of the positive column, by the so-called cathode-end meniscus.

The cathode dark space is not uniformly, homogeneously dark and clearer layers can also to be found there, thus e.g. the various layers of the cathode glow occur immediately at the cathode surface, the first, second, etc. negative cathode glow, separated from the surface of the cathode by the Asthon dark space. The number of each of the cathode dark spaces depends,

in the first place, on the gas and gas pressure of the discharge and on the surface and material properties of the cathode. The dark space between the cathode glow and the negative glow is called after the first researchers who investigated this space, both as Crookes' or Hittorf's dark space.

The Asthon's dark space is entirely dark, the first cathode glow is sharply separated from it. The distance of the first cathode glow is characteristic for the energy absorbed by the electrons and for the excitation potential of the gas or vapour: namely the electrons escaping from the cathode can absorb the energy sufficient to excite the neutral particles at any higher probability after having travelled this distance. The number of the luminous cathode layers is similarly interrelated with the magnitude of the mean free path length on the same base. These layers determine the number and sizes of the different cathode dark spaces. If the cathode is coated with an electron-emitting coat, the entire cathode dark space, including the luminous layers, fuses together to form a plasma-like negative glow. The cathode drop is usually measured up to the negative-end limit of this glow as will be shown in the following, and this can be considered to be a sufficiently good approximation both for theoretical and experimental purposes. The negative glow is the brightest part of the discharge (Fig. 2). The negative glow is connected with the positive column by the Faraday's dark space. The phenomena occurring here will be dealt with in detail later on.

1. General analysis of the cathode spaces

As can also be established experimentally [9], in the domain from the cathode to the boundary of the cathode dark space common with that of the negative glow space, the electric field strength can be characterized in an approximate way by a linear relation

$$E = C(d - x)\,, \tag{6}$$

where

d length of the cathode dark space;
C constant.

As has been revealed by more accurate measurements, this linear relation is primarily inaccurate at the cathode surface and at the boundary of the negative glow space. In these sections, a certain distortion can be detected along the slope of the field strength. This is caused partly by the double layers formed on the boundary surfaces, resp. before these surfaces, and partly by diffusion flows of balancing character.

Though according to relation (6), the change of the field strength is indicated only in the x direction, this does not exclude the fact that the field strength may vary only along the x-axis coincident with the axis of the discharge.

The field strength also varies in the radial direction, even in stationary discharges which are constant in time. This would therefore mean that it is purposeful to introduce e.g. a cylindrical co-ordinate system for the more accurate characterization of the field strength vector and moreover, the time function of the field strength should also be considered. This would, however, make the discussion exceedingly difficult and therefore the calculations are made on the assumption of quasi-stationary discharge conditions, by assuming that the significant change of the field strength with respect to time is zero. The consideration of the radial field strength component would entail further difficulties and, therefore, it is usually assumed that in a given cross section of a given discharge space, the field strength can be approximated adequately by a parabolic function and by implicitly assuming that this function is known, in further calculations all statements are specified exclusively for the change of the field strength along the discharge axis, i.e. a one-dimensional description is applied. This considerably facilitates the calculations and it can be shown that this method does not introduce higher inaccuracies in these empirical calculations than by any other approximation. In the following, the calculations are carried out correspondingly, also reduced for the one-dimensional case, by assuring constancy in time and by implicitly recognizing the possibility of the radial change in the field strength. The results here presented only hold for the field strengths, current densities, etc. measured in the axis of the discharge, for the case of quasi-stationary discharges. Corresponding to relation (6), the potential distribution is

$$V_x = \int_0^d E_x \cdot dx = C \int_0^d (d - x)\, dx = C \left(dx - \frac{x^2}{2} \right). \tag{7}$$

By taking the integration constant as zero and by applying the boundary conditions $V_x = V_k$ (V_k = cathode drop) existing at $x = d$, the value of the constant C and be determined

$$C = \frac{2\, V_k}{d^2} \tag{8}$$

and by inserting this into relation (7) and by differentiating this relation twice with respect to x, we may put down the Poisson-Laplace equation,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = - \frac{2\, V_k}{d^2} = - 4\, \pi \varrho \tag{9}$$

where ϱ is the space charge density function in the cathode dark space of length d here considered. Based on relation (9) it can be seen, however, that at a given discharge current, this is constant,

$$\varrho = \frac{V_k}{2\, \pi d^2}\,. \tag{10}$$

Based on this, THOMPSON has shown (9) that the following relation holds for the current density j of the cathode dark space

$$j = \frac{d^2}{V_k^{3/2}} \cdot \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{2e}{M}} \tag{11}$$

where M stands for the mass of the positive ions.

The current density occurring on the cathode surface can also be approximated by the assumption that the electron emission is exclusively caused by the positive ions. In this case, namely, the electron current released is γ_i-times the current density j_{0p} of the positive ions and correspondingly, the total current j_0 is

$$j_0 = j_{0p}(1 + \gamma_i) \tag{12}$$

or, expressed in terms of the space charge density, resp. velocity ϱ_{0p} and v_{0p} of the positive ions,

$$j_0 = \varrho_{0p} v_{0p}(1 + \gamma_i) \tag{13}$$

and then making use of the mobility of the ions K_p and relation (9), equation

$$j_0 = \frac{(E_0)^2 \cdot (K_p) \cdot (1 + \gamma_i)}{4\pi d} \tag{14}$$

is obtained for the approximate description of the current density occurring at the cathode. This characterization can be refined further by considering not only the γ_i-effect but the total secondary ionization coefficient. Based on Towsend's exponential relation for α, and by considering only the ionizations caused by the electrons, an approximate relation can be obtained also for the cathode drop which, after considerable reduction, can be written in the following form

$$V_k = \frac{7{,}25B}{A} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma_i}\right) \tag{15}$$

with discharge constants A and B. For the case of argon gas e.g. $A = 13{,}6$ and $B = 235$ volts/cm Torr. Taking this as a base, the length of the normal cathode drop domain d_n can be computed for a normal glow discharge,

$$d_n = 3{,}76 \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{\gamma_i}\right)}{Ap}; \tag{16}$$

where

p gas pressure in Torr.

From relation (16) it can be seen that the product $d_n \cdot p$ depends only on the gas pressure and on the surface properties of the cathode.

For anomalous glow discharges, relation (15) assumes the following form

$$V_{an} = E + \frac{Fj^{1/2}}{p} \tag{17}$$

where V_{an} stands for the cathode drop of the anomalous glow discharge, E and F are discharge constants and the length of the anomalous cathode dark space can be specified by relation

$$d_{an} = \frac{A}{p} + \frac{B}{j^{1/2}} \tag{18}$$

or, by substituting the current density, in the form

$$p \cdot d_{an} = A + \frac{BF}{V_{an} - E} \tag{19}$$

[9].

The fundamental parameters of the cathode spaces — the field strength distribution, the potential drop, the current density, the geometrical dimensions — are multivariable functions which can rarely be interpreted even by composite function analysis. In the foregoing, only the changes along the discharge axis have been presented but as has already been mentioned, their characterization would not be complete without the consideration of the radial changes and of the possible variations in time. Neither the radial functions, nor the time functions are, however, stated for the general case and these functions are known only by measurements carried out under certain special discharge conditions. By experiments carried out under carefully controlled conditions on these special discharge tubes, it was demonstrated that the field strength, the current density, the electron temperature, electron concentration can be represented by second-order radial functions but for the general case, their representation in a closed form did not succeed.

In analyses dealing with these problems, two theoretical methods of dissimilar nature can be distinguished [10]. Following the earlier ideas, the cathode dark space should be considered as an isolated, independent part of the space and the cathode-end boundary surface of the negative glow space neighbouring the dark space takes part in the discharge as an anode or as an ion source of a given strength. The foundation of the empirical approximating description method of the theory is the cumulative multiplication characterized by the α and γ processes and Towsend's remanence criterion. According to more recent ideas, the cathode dark space can be investigated only together with the negative glow space and these two spaces form an integral unit

which is the *conditio sine qua non* of the discharge [10]. Both theories contain reasonable foundations and due to their approximating nature, also deficiencies. The methods to be applied and reasonable for theoretical representation can be demonstrated by two models. In the more simple model, the cathodal spaces are described separately, independently of each other and the surface phenomena of the cathode similarly form a separate unit. For stationary cases, the different partial cases are interconnected by boundary conditions, by taking over in an approximate way also the role of the close coupling which really exists there in the theoretical representation. The fundamental relations are identical in all three cases.

The second approximating model leads to the uniform representation of the cathodal spaces, involving, of course, essentially more approximations and omissions. By using a demonstrative example, the difference between the two models is that in the first case a conductor of varying properties is considered electric field, resistance, etc. with current flowing along it where space charges may accumulate and in the second case, the conductor is examined by separating it into sections of nearly uniform behaviour.

In the most simple cases, for discharges without external magnetic field, in the analysis, we usually set out from Poisson-Laplace's equation

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi e(N_p - N_e) = -4\pi\varrho \tag{20}$$

where

N_p concentration of the positive ions;
N_e electron concentration,

and from the continuity equation taken for the ions and electrons

$$Z = f(E) = \frac{d}{dx}(N_p v_p), \tag{21}$$

$$Z = g(E) = \frac{d}{dx}\left(N_e v_e + D\frac{d}{dx}N_e\right) \tag{22}$$

where

Z number of ionizations occurring in 1 cu.cm during one sec, at a given x place;
v_p, v_e velocity distribution function for the ion, resp. electron;
D diffusion constant

and form the equations for mobility, by assuming the prevailing of equilibrium conditions.

COMPTON and MORSE [10] carried out their calculations in 1927 by starting out from these equations but the results obtained by their work failed to comply with the data obtained by experiments; later on, MORSE, in 1928 again carried out approximations by assuming the equality of the ion and electron temperatures. In 1934, ENGEL and STEENBECK disregarded the conti-

nuity equation and applied the linear field strength distribution as a fundamental equation and obtained approximating results by such method. ROGOWSKI in 1932, then WEIZEL, ROMPE and SCHÖN in 1939 neglected the diffusion and considered the value of α to be constant and carried out calculations by only assuming the drift velocities. SCHERZER, in his calculations dated from 1939, assumed that all positive ions flowing toward the cathode are generated by the negative glow space and by taking into consideration only the fast and slow electrons, obtained approximate relations for the different spaces which failed to be, however, of general validity. SEELIGER later on endeavoured to reconcile up to a certain point the theory suggested by SCHERZER and WEIZEL, ROMPE, SCHÖN.

The theoretical investigations carried out up to the present indicated that even if closed relationships were found these would fail to be of general validity and would yield only approximate results. It was further revealed that the linear field strength slope — relation (7) — obtained by approximation was in reality only a rough approximation; essential field distortions could be detected which could easily be demonstrated by experiments on the cathode surface and at the boundaries of the cathode dark space and the negative glow space, caused by the unstable phenomena which occurred in the processes of the radially formed and coincident electric processes. The electron beam emerging from the cathode did not show homogeneous energy distribution [1]; generally three electron sets of different velocities were distinguished, the groups of the primary, secondary and ultimate electrons. The primary group included the high-energy electrons which arrived to the negative glow space without collisions or if it collided, then mainly in an elastic manner or possibly inelastically but at the expense of only small energy loss. These electrons flowed through the cathode dark space in beams.

The secondary electrons lost a considerable part of their energy during the ionization interactions. These electrons disposed of not more energy than did the secondary electrons released by them by their ionization interactions — that was the reason for their denomination — and from the energetic viewpoint, these electrons could not even be distinguished from each other. Their distribution was statistic. The ultimate electrons were assuming the least velocity. Such electrons were preponderantly present in the negative glow space, in the positive column and these electrons should be reckoned with also in the neutralization of the positive space charges. Among the respective energies of the electrons belonging to the three groups here presented, a difference of one or two orders of magnitude can be detected on the average, the number of the ultimate electrons being at the same time by two orders of magnitude higher than that of the secondaries and the number of the secondary electrons exceeds that of the primary electrons by one order of magnitude.

2. The Asthon space, the cathode glow and luminous layers, the cathode dark space

Fig. 2 demonstrates that the complex space called the cathode dark space comprises several small part-spaces, corresponding to the type of the cathode, to the magnitude of the applied gas pressure and to the kind of gas where the discharge is present. The series of the smaller spaces begins with the Asthon dark space arranged immediately at the surface of the cathode which is dark [8] as the energy of the electrons passing through this space is not sufficient yet to excite the neutral gas or vapour particles. The Asthon-space ends where the electrons are already capable of exciting the neutral particles, i.e. where the particles may absorb sufficient energy for excitations from the covered space. The sizes of this space can consequently brought into relationship with the excitation potential of the respective gas or vapour and also with the velocity of the electrons.

At lower gas pressures, a group of luminous and dark spaces, comprising several layers follows the Asthon space, in case of higher pressures, on the other hand, the so-called cathode negative glow space produced by the excitations effected by the accelerated positive ions [10].

DRUYVESTEYN and PENNING [8] introduced the term of cathode glow, for the case of the oxide cathodes and other cathodes easier liable to powdering or evaporation. In such cathodes namely, the luminosity of the originally neutral cathode coating particles peeling off due to the ionic bombardment and excited in the space before the cathode weakens the different dark and luminous spaces and surrounds the cathode by a glow of a wavelength characteristic for the substance of the cathode. This glow may often extend up to the negative glow, thus surrounding the entire cathodal dark space. The luminous spaces at the cathode are often muddled and so the first cathode layer formed by electron excitation, generally at lower pressures is confused with the negative glow produced by ionic excitation and mostly at higher pressures and also with the later mentioned cathode glow accounted for by the deterioration of the cathode [8].

The results obtained by the field strength measurements of the cathode dark spaces [10] has often shown such values which necessarily led to the conclusion that negative field strength occurred in the negativ glow space. Later on, this was attributed to the oscillations and stratification processes developed there [10]. So much could be established reliably from these measurements that the field strength increased toward the cathode and decreased gradually toward the negative glow space and eventually assumed, in that space, zero value. This field strength distribution was, however, by no means linear and could be characterized, as shown by more recent measurements, rather by the $1/x$ function. The theoretical interpretation for the explanation of this phenomenon was suggested along two lines, by presuming ions moving

in vacuum, resp. ions moving at a drift velocity proportional to the $^1/_2$ power of the field strength. The latter representation approximated the result the closest of the different measurements, full reconciliation, however, was not attained. The sizes of the dark space were usually determined primarily by optical methods. For the case of electrically negative gases, the boundaries were demonstrated as sharper, due to the less intensive electron diffusion. According to SEELIGER, relation (10) should be valid between the ion masses and the sizes of the dark space. By the relations obtained empirically, current densities limited by the space charges occurred here,

$$j \approx \frac{V^{3/2}}{d^2} \tag{23}$$

where d length of the dark space and this is related to pressure p by relation

$$p \cdot d = A + \frac{Bp}{j^{1/2}} \tag{24}$$

resp. by relation

$$dj^{1/2} = C + D(V - V_0) \tag{25}$$

where A, B, C, D and V_0 were constants.

The high number of the constants here presented properly characterizes the highly empirical and approximating nature of the relations. The measurements are made more difficult also by the fact that the velocity distribution of the electrons in the dark space is considerably different from the Maxwell—Boltzmann's distribution. The ion energies are determined by a holed cathode and thus the ion beam forming the "tube beam" is led out through a collecting vessel. The cathode drop occurs essentially in the cathode dark space, consequently it is this space, where the positive ions and also the electrons incident on the cathode are accelerated. The sizes of the cathode dark space cannot be specified generally and exactly, not even for a defined type of glow discharge as in addition to the gas pressure, current density, cathode drop, a considerable number of individual factors, generally depending on the surface quality of the cathode, had to be considered, that would not afford, according to our present knowledge, the arrangement in a closed shape. For some special cases, as shown by the aforegoing deduction [equations (23), (24) and (25)], an approximate representation is possible if many constants are presumed.

The complex space called cathode dark space — the boundaries of which are, in case of oxide cathodes, quite weakened off — thus contains positive space charge and corresponding to the distribution, high electric field strength develops on the cathode surface decreasing toward the negative

glow space. At a given cathode drop, its current density is inversely proportional to the second-power of its length. This space can be considered as the most active one among the cathode spaces and the characteristics at the cathode-end are essentially determined by this space. When extracted from the cathode spaces, this space in itself cannot give a full idea on the phenomena at the cathode but it is still purposeful to analyse primarily in this part of the space together with the cathode, by considering the appropriate boundary conditions and on specifying the boundary conditions, it should be borne in mind that for the processes occurring here, uniform and whole interpretation is given by this space together with the other spaces.

3. The negative glow space

The cathode dark space is connected to the positive column by the space of the negative glow and by Faraday's dark space. Many research workers [10] consider these two domains inseperable, contrarily to the cathode dark space and the space of the negative glow. The space of the negative glow is thus limited by two dark spaces but these boundaries are very weak. The brightest portion of the negative glow space and also of the whole discharge is about in the centre of the space of the negative glow, the luminous intensity of the glow space increases steeply at the cathode-end, by decreasing slower toward the positive column and fuses diffusely into the Faraday's dark space where occasionally, for pure rare gas discharges, some luminous phenomenon can also be demonstrated. The shape of the negative glow space is influenced not only by the ambipolar and wall-diffusion processes but even by the current density parameters of the cathode. In discharges including cathode spots, correspondingly asymmetrical negative glow spaces can often be detected. In certain cases, e.g. with hot-cathodes, a spatial change can be attained resulting in the extension of the negative glow as far as the surface of the cathode.

The Faraday's dark-space is generally longer than the space of the negative glow. Their total length is influenced by the gas or vapour pressure and by the magnitude of the discharge current [10]; at a given current strength, by decreasing pressure, the length of the spaces increases but the increase of the current — at given pressure — may also result in the increase of the common length of these spaces.

The phenomena of the negative glow are quite well known [9] — chiefly due to the measurements by probes and to the optical observations — but their uniform theory has not yet been elaborated. The reasons for this can again be found in the complex nature of the phenomena occurring here. No realistic results can be expected from probe measurements at the negative end of the negative glow space — though by such measurements the workers succeeded in demonstrating, among others, the occasional occurrence of primary, secon-

dary and ultimate electrons in the glow space — as the velocity distribution of the electrons deviate there fromt the Maxwell–Boltzmann distribution. Proceeding in this same space toward the positive column, the velocity distribution increasingly approaches the Maxwell–Boltzmann distribution and this affords possibilities also for the application of the traditional probe measuring methods.

Theoretically, there is no field strength in the negative glow space. According to certain authors [10], in this space even negative field strength can be demonstrated regularly, though unambiguous reasons for the prevailing of the negative fields have not been put forward yet. Therefore, a number of research workers attribute these data to inaccuracies in the measurements.

According to examinations by WEIZEL and OLMESDAHL [11], the space of the negative glow can be divided by a thin grid or screen into two or more sections if proper voltage is impressed on this grid. The sections thus separated may exist even separately, having slightly different potentials and theoretically, no exchange of the charge carriers is necessary between them. Due to the built of the negative glow space, to the field strength conditions there prevailing and to the plasma state this is conceivable.

Lines characteristic for the arch and spark spectra of excited atoms and ions can be observed at the cathode-end [10]. This is interconnected with the simultaneous excitation and ionization effect of the fast, primary atoms arriving from the cathode dark space. At the same place, lines characteristic for such molecule spectra have already been observed which can be interpreted by the assumption of treble collisions (two neutral atoms and a neutral atom in metastable state) and usually the slow electrons are assumed to be responsible for the luminous phenomenon.

The importance of the electron excitation is considerably reduced toward the positive end of the space of the negative glow, as compared to the excitation of metastable atoms by the second-kind collisions effected by resonance radiation. Certain workers presume that the production of positive ions is the exclusive task of the cathode dark space and others suggest that the negative glow space may be responsible for this process. According to measurements by BREWER and WESTHAVER [12],0,5 to 1 ion/electron is formed, on the average, in the cathode dark space and others [9] consider that one electron is able to produce 100 ions under identical conditions. Keeping in mind the highly scattering results [9], it can be stated that the cathode dark space provides considerable ion volumes which are, however, alone still insufficient for the cathode and the supplement necessary is supplied by the ions of the negative glow space.

According to the measurements [8], the space of the negative glow contains electrons and ions in nearly equal numbers and is in plasma-state. Immediately at its cathode-end, a local potential maximum prevails. Proceed-

ing toward the Faraday's dark space, the potential may decrease, according to certain measurements already mentioned, occasionally by 1 to 2 volts. Considerably different values are also attributed to the constant of the volumetric recombination processes and a number of resarch workers [8] even contest the existence of the volumetric recombination in this space.

As evidenced by the experiments, the electron and ion concentration in the space of negative glow may exceed the corresponding values measured in the positive column even by one or two orders of magnitude [9]; it is known that a plasmoid state may develop at the cathode surface, even before the cathode spot and here, too, very high electron and ionic concentrations may occur. The corresponding concentrations in the space of negative glow approach, in their orders of magnitude, the values of these states. The length of the space of negative glow also depends on the cathode drop and as a matter of fact, much more closely and unambiguously than on the gas pressure. With increasing cathode drop the length of the glow space increases in the pressure range from 1 to 4 Torr, by following approximately e.g. the qualitative curves shown in Fig. 3. With reducing pressure, the length of this part-place increases slightly [12].

The space of the negative glow is thus in nearly a stationary plasma state but the phenomena there occurring are modified by the electron beam (primary electrons) shot from the cathode. During the ionizations and excitations, the electrons lose a considerable proportion of their energy in the glow space and arrive thereafter at the Faraday's dark space considerably decelerated, having generally an energy of even less than 1 eV which is sufficient only for the excitation of the metastable atoms. The density of the electron current here flowing [10] can be given by relation

$$j_e = j_1 + e\,D_e + \frac{dNe}{dx} + e\,N_e\,b_e\,E \tag{26}$$

where

j_1 current density of the electrons entering the glow space;
b_e mobility of the electrons;

the other symbols being identical to those already used.

The ionic current density j_p [12] can be set down, patterned after the aforegoing, in the following form

$$j_p = -\,e\,D_p\,\frac{d\,Np}{dx} + e\,N_p B_p E \tag{27}$$

where

D_p diffusion constant for the positive ions;
b_p ionic mobility.

The ionic equilibrium (equilibrium of the ionization and recombination in space and in time) is

$$\frac{d_{jp}}{dx} = \alpha |j_e| + \beta |j_p| N_e - \varrho e N_e N_p - \tau e N_e^2 Np \tag{28}$$

where

ϱ recombination coefficient;
τ life of the atoms and molecules in excitation state.

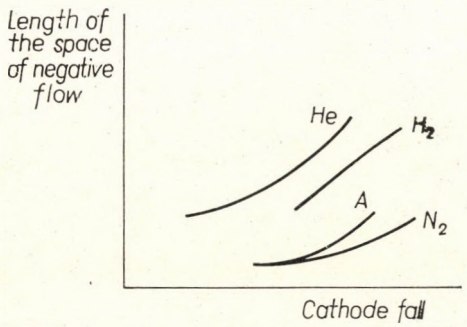


Fig. 3. Relation between the length of the negative glow space of glow discharges and the cathode drop, at a pressure from 1 to 4 Torr

By adding the Poisson–Laplace equation additionally to equations (26), (27) and (28), the system of the basic relations applicable to the classical description of the space of the negative glow is already complete [10]. In this classical description, the boundary conditions are naturally specified arbitrarily and the results obtainable by theoretical methods depend considerably on the appropriateness and realistic nature of the boundary conditions.

These phenomena can also be characterized by the application of the methods of plasma physics. In this case, it is usual to set out from the continuity equation, from the equations of motion and from the transport equations, by presuming the prevailing of the Maxwell–Boltzmann distribution and taking the kinetic gas theory and hydrodynamic considerations as a base. This representation similarly necessitates arbitrary boundary conditions and the results depend considerably on the different specifications of these conditions

4. Faraday's dark space

The contact between the space of the negative glow and the positive column is maintained by a space nominated after Faraday the negative end of which is strongly diffuse; the luminous intensity of the negative glow space decreases gradually in the transition toward the Faraday's dark space. In this space there is practically no electron excitation and ionization at all and the few interactions between the electrons possessing excessively small ener-

gies are generally of very little significance. Whatever excitation or ionization process occurs that can essentially be attributed to the resonance radiation, to the second-kind collisions. The processes connected with the metastable atoms are therefore assuming first-kind character, all the more so as the concentration of the metastable atoms shows here the highest values, considering the entire discharge space [9]. According to certain measurements [9], the field strength in the domain between the space of the negative glow and the Faraday's dark space is inverted. The current in the Faraday's dark space is determined by the diffusion processes. The sizes of the dark space were first determined by THOMPSON [9] by applying the presumption that the electrons occur at the boundary between the space of the negative glow and the Faraday's dark space at zero velocity. For a discharge brought about at not excessively low pressure, the validity of relation

$$\frac{m_e v_e^2}{2} = eEL \tag{29}$$

can be assumed, where

m_e electron mass;
L mean free path length free from energy loss.

From this

$$V_e = \left[\frac{2eEL}{m_e}\right]^{1/2} \tag{30}$$

and consequently, the density of the electron current is

$$j_e = N_e v_e N_e = N_e \cdot e \left[\frac{2eEL}{m_e}\right]^{1/2} \tag{31}$$

and by the assumption that the concentration of the ions is negligibly small as compared to that of the electrons, the Poisson—Laplace's equation can be written in the following form

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N_e e. \tag{32}$$

Direction x is also considered in this case to be the direction from the cathode toward the anode and the distances are taken from the positive-end boundary of the space of the negative glow. From equations (31) and (32), we obtain

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi j_e}{\left[2eE\dfrac{L}{m_e}\right]^{1/2}} \tag{33}$$

and by integrating this expression, the distribution of the field strength is obtained,

$$E(x) = (6\,\pi j_e)^{2/3} \left(\frac{2e\,L}{m_e}\right)^{-1/3} \cdot x^{2/3} \tag{34}$$

which increases, at given pressure and current density, by the $^2/_3$ power of the distance measured from the boundary of the space of the negative glow. From this, by applying relation (29), the relation between length d_F of the Faraday's dark space and the mean free electron path length free from energy loss and the current density there developing can be stated as:

$$d_F \approx \frac{1}{L j_e} \tag{35}$$

and from this it can be stated that the energy of the electrons entering the positive columns is, at low gas pressures, proportional to relation $(j_e\, d_F^2)^{3/2}$.

While the group of electrons including electrons of three different velocities breaks down, due to the interactions occurring in the space of the negative glow to two groups of electrons of lower velocity, in the Faraday's dark space even this difference becomes weakened, eliminated and the electrons enter the positive column at comparatively homogeneous energy distribution. The diffusion of the flow electrons entering the dark space causes a concentration gradient which may constitute a further reason for the occurrence of the few excitation and ionization processes, just as the continuous spectrum which can hardly be detected and may be attributed to recombination processes, though this spectrum can be observed mainly in the space of the negative glow and at the negative boundary of the Faraday's dark space.

The series of the cathode spaces is terminated by Faraday's dark space. The Faraday's dark-space homogenizes (from energetic point of view) the electron aggregate produced and accelerated by the cathode and the subsequent spaces and starts the flow of this electron aggregate, at a defined average energy, toward the positive column. The space of the negative glow and the Faraday's dark space both contribute to this effect and the common part taken by these spaces in connection with the electrons can approximately be defined in this way.

In the development of the ionic flow, the Faraday's dark space has no effect, this task is fulfilled, together with the production of the ions, by the space of the negative glow and by the cathode dark space. The concentration of the space charge comprising positive ions and determining the cathode drop and the electron current, the ionic energies, the cathode spot temperature, the cathode surface current density are closely interrelated.

The cathode spaces, as a whole, serve the purposes of the electron supply and by this intermediary, the maintenance of the discharge processes. The concentration of the space charges, the intensities of the ionic currents are all governed by these spaces and provided that the cathode can emit as much electrons of sufficient energy as required by the positive column, the existence of the cathode spaces is not absolutely necessary to maintain the discharge, the space complex loses its importance, the so-called zero-space discharge develops, i.e. the discharge can be maintained without cathode drop.

IV. Cathode spaces of arc discharges

1. The glow/arc transition

The section of negative slope marked by *D* of the discharge characteristic shown in Fig. 1 is the arc discharge domain. Arc discharge can be obtained from an anomalous glow discharge by increasing the discharge current. When doing so, an arc discharge of lesser cathode drop is obtained from a low current density anomalous glow discharge of high cathode drop, the resulting arc discharge will, however, have higher current density. For this end, it is absolutely necessary that the electron emission properties of the cathode should change and together with this change, the increase in the current density of the anomalous glow discharge is also followed by the reduction of the sizes of the anomalous cathode drop space [9]. Simultaneously, the total energy transferred to the positive ions decreases and the number of the positive ions released on the average by one electron decreases [9]. Due to the increased positive ionic energies, the temperature of the cathode surface increases and attains the temperature where already considerable thermal electron emission occurs. During this process, the number of the ions produced in the cathode spaces also increases and therefore further increase is again caused in the temperature of the cathode. This process results in an ever more increasing discharge current at ever more decreasing voltage drops. Without the limiting element of the external circuit, therefore, catastrophal increase of the current would ensue.

The transition is often characterized also by the cathode temperature [9], thus e.g. in neon discharges with tungsten cathodes, the critical temperature belonging to the transition between the anomalous glow discharge and the arc discharge is 2000° K. With low melting point cathodes, this transition is not continuous but is manifested by an abrupt stope-like phenomenon. The transition can be provided, on one hand, by increasing the current at a given constant pressure and on the other hand, by increasing the gas pressure at a given current strength. For the purposes of the afore described mechanism, both procedures essentially result in an identical effect.

The contaminations of the cathode may facilitate, resp. displace the transition into the domain of the lower currents and consequently it may occur that the arc discharge already ensues in the current domain characteristic for the normal glow discharges. In such cases, namely, the current concentrates at the small irregularities of the cathode surface and therefore the electron emission increases at extremely high rates and a cathode spot stabilizes.

During the transition between the glow discharge and the arc discharge thus, a state of smaller cathode drop and cathode loss occurs, due to the fundamental changes in the cathode mechanism and as a result, the entire discharge characteristic can be featured by negative resistance. The arc discharge thus produced is self-maintaining and suitable for the conduction of high currents even at low voltage. The arc discharges are also classified by the gas pressure, independently of the cathode properties, into low, medium and high-pressure discharges, a fundamental microphysical property of which is the electron temperature depending significantly on the pressure. The value of the electron temperature is considerably higher in the positive column of the high-pressure discharges than in the low-pressure discharges and in the positive column of the high-pressure discharges, the thermal balance is, at the same time, approximately also realized.

COMPTON suggested the following definition for the arc discharge [9]: "The arc discharge is an electric discharge brought about in gas or vapour between various electrodes where the cathode drop is close to the excitation or ionization potential of the gas or vapour applied." The cathode drop can be further reduced by the application of external heating. The cathodal mechanisms of the glow discharges and arc discharges show essential differences as compared to each other, the purpose of the cathode spaces is still identical in both cases: the cathode spaces have to supply the electrons in a number necessary for the maintenance of the discharge and at the required energy and further to maintain the conductive path of the line of discharge. In special cases, positive discharge characteristics can also be attained [9] by variations in the positive column, though only in a narrow current range. The burning voltage can generally be increased by increasing the gas pressure or by decreasing the discharge current. Moreover, the type and purity of the gas or vapour applied also considerably influences the voltage drop in the arc discharge. By taking these facts into considerations, usually separate static and dynamic discharge characteristics are specified. On taking the static characteristic, the discharge current is varied at slow rate to enable that the temperature and pressure equilibrium may ensue during the variation of the discharge current at each of the current values. On determining the dynamic characteristic, on the other hand, the current is varied as rapidly as to exclude, in principle, the possibility of change in the pressure during this variation.

2. General cathode phenomena

The cathode current density is much higher in the arc discharges than in the glow discharges and the current density is practically independent of the discharge current.

In arc discharges, the cathode dark space may assume minute sizes excluding the possibility of the detection of its length and this is essentially the size of the domain of the cathode drop which is of the same order of magnitude as the mean free path length of the electrons. The current density of the positive ions promoting the thermal emission can be determined by making use of the space charge equations. For the one-dimensional case, the current density of the positive ions can be derived by setting out from the Poisson—Laplace's equation and from the equation of motion:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi\varrho, \tag{36}$$

$$m_e \frac{dv_e}{dt} = e\frac{dV}{dx} \tag{37}$$

where

V the potential measured at point x.

From the expression for the kinetic energy, we obtain

$$v_e = \left[\frac{2eV}{m_e}\right]^{1/2} \tag{38}$$

provided that the velocity of the electron is, at the instant of the emission, equal to zero.

The current density is

$$j = -N_e e v_e = -\varrho_e v_e \tag{39}$$

and from this, the space charge density ϱ_e is, according to (38),

$$\varrho_e = -j_e \left(\frac{m_e}{2eV}\right)^{1/2} \tag{40}$$

and by substituting this into equation (36), we obtain

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4\pi j_e \left(\frac{m_e}{2e}\right)^{1/2} \cdot V^{1/2} \tag{41}$$

By multiplying both sides by $2\,dV/dx$, the expression thus obtained can easily be integrated and written in the following form

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 16\,\pi j \left(\frac{m_e}{2\,e}\right)^{1/2} \cdot V^{1/2} + C \tag{42}$$

and if it is presumed that the cathode emits more electrons than the number of the electrons which arrive at the anode, i.e. that the current is limited by space charges, then the field strength has to disappear at the cathode, i.e. at the immediate surface of the cathode or, by putting it in another way, the value of the integration constant C has to be zero:

$$\frac{dV}{dx} = AV^{1/4} \tag{43}$$

and by integration, we obtain the following expression

$$\frac{4\,V^{3/4}}{3} = Ax + C_1 \tag{44}$$

where

C_1 in necessarily equal to zero if $V = 0$, $x = 0$.

Therefore,

$$A^2 = \frac{16\,V^{3/2}}{9\,x^2} = 16\,\pi j_e \left(\frac{m_e}{2\,e}\right)^{1/2} \tag{45}$$

expressed in j_e wherefrom we obtain for the value of the current density relation

$$j_e = \frac{\left(\frac{2\,e}{m_e}\right)^{1/2} \cdot V^{3/2}}{9\,\pi x^2} \tag{46}$$

the so-called Child's law and by applying this law to the positive ions in the domain of the cathode drops of arc discharges, we obtain the following relation:

$$j_p = \frac{1}{9\,\pi} \left(\frac{2\,e}{m_p}\right)^{1/2} \frac{V_k^{3/2}}{d_k^2} \tag{47}$$

where

j_p current density of the positive ions;
V_k cathode drop;
d_k length of the space of the cathode drop.

The field strength occurring at the cathodes of arc discharges can similarly be determined by the space charge equations, as

$$E_k = \frac{dV_k}{dx} = \frac{4}{3}\left[\frac{9\pi j_p}{\left(\frac{2e}{m_p}\right)^{1/2}}\right] \cdot d_k^{1/3} \tag{48}$$

and by inserting the value of j_p into this expression, we obtain relation

$$E_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_k}{d_k} . \tag{49}$$

By the equation for space charge phenomena is derived for electrons flowing in high vacuum between plane electrodes in parallel to each other, Child's law obtained from these equations is still often used for gas discharges by noting that the results thus obtained are only of approximate character. In the original deduction it is further usually presumed that the cathode surface is an infinitely large equipotential surface. The application of the space charge relations thus obtained from the arc discharges would, in fact, mean only a very rough approximation but at present there is no other method at our disposal which would yield better, more accurate results. The cathode spots of the discharges can be fixed, in constant positions but may also move on the surface of the cathode. With pure tungsten and carbon electrodes it could be observed [9] that with the steadying of the moving cathode spot, with its transformation into a fixed spot, the burning (glowing) potential of the discharge increased.

At the surface of the cathode, occasionally a layer consisting of positive ions may form which causes a high electrostatic field. A similar ionic layer may form also from the gases adsorbed on the cathode surface but the escape of the electrons is similarly facilitated also by surface contaminations of small escape energy. According to RAMBERG [13], the carbon, calcium, magnesium, tungsten cathodes behave in arc discharges thermally, the copper, mercury, silver and gold being space emission type cathodes. In general, both thermal and space emission characters can be found even simultaneously in the cathode mechanism of different arc discharges but the most frequently occurring phenomena, chiefly in cathode spaces characterized by low field strength, are the emission processes described by SCHOTTKY [5]. The situation is similar also in case of oxide cathodes provided with electron emitting coats where again a complex emission process may develop. The space emission notion is widely applied for low melting point cathodes and this theory gives results in good agreement with experiments. According to certain authors, the thermal emission of cathodes kept in hot condition by external heating is not suf-

ficient to maintain the arc discharges without cathode drop [9]. As regards this question, the opinions are greatly divided and presently already a number of workers suggest different theories, based on the adjustment of the state without cathode drop and well reproducible results are obtained. The conflicting statements here presented are not singular in the interpretation of the cathode phenomena of the discharges. Just as the general theory for the cathode drops has not yet been successfully elaborated, the general relations existing among the cathode spot temperature, sized of the cathode drop, cathode current density, etc. are similarly unknown.

3. The cathode spot

By taking the phenomena of the cathode spot as a base, the arc discharges can be classified into three large groups. The first group includes the discharges where no cathode spots occur. In such discharges, the substance of the cathode is at very high temperature and the entire surface of the cathode takes part in the electron emission. Such are e.g. the high-temperature carbon and tungsten cathode arcs.

The second group is formed by the arc discharges where spots constant in time and space form on the cathodes, the stationary cathode-spot discharges. In these discharges, the discharge itself is essentially concentrated to a small area of the cathode. Such are e.g. the tungsten cathodes of not too high current strength, the rare gas and mercury vapour discharges. The third group comprises the non-stationary cathode-spot discharges. Here the cathode spot is constantly moving, often also varying its sizes. As has already been mentioned by way of introduction, the discharges with cathode spots can be further particularized according to the number of the cathode spots to be observed on their cathodes. The cathode spot is a high-temperature plasma characterized by very high electron and ionic concentration [10] which does not always adhere entirely to the surface of the cathode and occasionally dark space can be observed between the cathode surface and the plasma.

From discharges having cathode spots, discharges without cathode spots can be formed by the increase of the discharge current and a hysteresis-like phenomenon can be observed during this process [10]. In discharges without cathode spots, the average temperature of the cathode is higher and therefore the discharge can produce a considerable part of the ions by thermal process. In cathode-spot discharges, the contracted high-temperature plasma acts, up to a certain extent, as an intermediary medium or distributor: it prompts electrons toward the positive column, corresponding to the electron supply from the cathode, resp. positive ions toward the cathode. Correspondingly, as the electrons escaping from the cathode space of discharges without cathode spot are preponderantly of thermal origin, the electrons of discharges

having stationary cathode spots derive from the plasma connected with the spot; moreover, the number of the electrons from discharges of non-stationary spots is also increased by the electrons produced by cathode evaporation and powdering.

In a.c. discharges, where the electrodes assume alternatively, by each half-period, the role of a cathode, resp. anode, a restriking process occurs at the beginning of each half-period. This depends considerably on the character of the arc discharge.

If the arc discharge considered has no cathode spot, no voltage step at all can be observed at the beginning of the half-period; in discharges having cathode spots, however, this restriking peak — can be easily shown by means of an oscilloscope — becomes necessary. In discharges without cathode spots, the temperature of the cathode is very high and after the return from the anodic half-period, the cathode is able to immediately emit the electrons in the required number. The cathode of discharges operating with cathode spots is unable alone to emit the necessary number of electrons by the thermal process; the building-up of the plasma aggregate — spot plasma — is the prerequisite of this process, requiring, however, surplus energy and this is manifested in the restriking voltage peak. In other words, this means that the cathode drop of discharges having cathode spots necessarily increasing on restriking, in the first instants of the restrike, to enable the maintaining of the discharge at the given arc current. Due to the increased cathode drop and by the previously described mechanism, the required equilibrium in the electron production ensues and during this process the auxiliary plasma preceding the cathode develops and during the further time of the half-period, this plasma is already able to supply the required electron current even at the reduced cathode drop. The initial section of increased cathode drop, which can be considered to be of purely transient character, takes generally only approx. 1/6th of the half-period. During this time, the sizes of the cathode spaces are evidently changing and their length generally increase.

The emission of the electrons in discharges without cathode spot can be discussed based on the thermal space emission theory where the positive ions incident to the cathode surface considerably contribute to the heating of the cathode. The energy delivered by the ions can represent very high values. When e.g. in a discharge of a cathode current density of 10^6 A/sq. cm the ionic current is not more than 10 per cent of the discharge current, even the $6 \cdot 10^{23}$ ions are incident to the surface. If the extreme case is considered wherein each of these ions loses its full kinetic and recombination energy, being 5 to 10 eV/ion, an idea can be formed as to the extent of the deterioration caused by these ions. In 1 sq. cm. surface there are namely approx. 10^{15} atoms and the energy transferred by the ions is several times more than necessary to dislocate these atoms from the lattice [10]. In case of a stationary cathode

spot, even a power density of 1000 kW/sq. cm may occur at the place which corresponds to the spot [10] which is then drained off partly by electron emission and partly by evaporation, radiation, thermal conduction processes.

Thermal equilibrium can be presumed between the cathode spot and the plasma preceding the cathode. It may often occur that the cathode emits plasma and not electrons [10]. According to MAECKER's observations [10], for the case when gases are released from the cathode — e.g. by the effect of ionic bombardment — these gases, ionized to a plasma beam of 10^3 to 10^5 cm/sec velocity, flow toward the minimum-concentration spaces of the positive column. The position and the motion of the cathode spot is primarily determined by the character and purity of the cathode surface and further also by the position of the connection to the external circuit. The motion of the spot can also be influenced from outside, by magnetic means and even retracing of the spot can be effected.

FINKELNBURG and MAECKER separated the emission mechanism of the cathode spaces in to three types [10], and after the purely thermal and purely space emission electron emission mechanism, the third type considered by these authors was the fundamental case wherein the electron current was transferred within the cathode space, from the negative-end meniscus of the positive column, by the positive ions. As regards this case, even the aforementioned authors noted [10] that generally all three cases could be observed simultaneously and usually these mechanisms occurred only in a combined form.

Schottky's effect, decreasing the electric field escape energy [equation (2)] has already been mentioned in the introduction. In practice, usually it is this effect which is primarily considered and the resulting electron current density can be written in the following form:

$$j_e = \frac{4\pi e m_e k^2}{h^3} \cdot T_k^2 \exp\left(-\frac{e\varphi - (e^3 E)^{1/2}}{kT_k}\right) \tag{50}$$

where

T_k temperature of the cathode surface and the other symbols are known from the previous equations, resp. test.

If the strength of the field preceding the cathode is over 10^6 V/cm, also an additional electron current term should be taken into consideration, the saturation current density, j_e of which, according to Fowler—Nordheim's relations [14] assumes the following form:

$$j_e^* = 1{,}55 \cdot 10^{-6} \frac{E^2}{e\varphi} \exp\left[\frac{-6{,}9\,10^7 (e\varphi)^{3/2}}{E}\right]. \tag{51}$$

The relation between the electron and ionic current, with respect to the cathode dark space, can be estimated approximately from the energy equilibrium of the cathode and based on this, e.g. for discharges without cathode spot, the following expression can be obtained:

$$\frac{j_e}{j_i} = \frac{V_k + V_i - \varphi}{\varphi} \tag{52}$$

where V_i is the first ionization potential of the gas or vapour wherein the discharge takes place [10]. By substituting the numerical values, ionic current values of 20 to 50 per cent are obtained, as functions of the accommodation coefficients of the various cathodes and of the discharge characteristics.

According to other observations [9], the ionic current component is considerably smaller and therefore primarily only the thermal space emission and above a field strength over 10^7 to 10^8 volts/cm, the case with purely space-emission is usually considered, by taking the ionic current as 2 to 3 per cent of the discharge current.

The end-contraction frequently detected in discharges with stationary cathode spots is also caused by the energy coupling to the cathode surface which is colder than the plasma [10]. In order to decrease the energy losses, the plasma layer tends to take the possibly least volume, following, in a way the minimum principle. STEENBECK has put forward a similar minimum principle for the cathode drop; the discharge tends to develop in a way that its final state which can be considered to be stationary, could be characterized by the least voltage drip. This applies primarily to the cathode and anode spaces, these being the spaces which define in the first place the magnitude of the burning voltage at given arc length.

4. The cathode spaces

The cathode spaces of the arc discharge are not as separated as those of the glow discharge, mainly due to the higher discharge currents. Therefore the cathode dark spaces are generally missing, together with the luminous layers within the dark space which are parallel to the cathode surface; instead a luminous space convergent with the space of the negative glow can be found, known as the cathode glow, the existence of which is provided, as already hinted at before, by the excitations of the separating atoms of the cathode. Visually, this glow cannot be separated from the space of the negative glow but by observing the lines characteristic for the cathode and the lines of the recombination radiation, some differentiation can be obtained by spectroscopic methods though the positive-end limits of the cathods dark space cannot be marked out reliably even if this method is applied. The boundaries of the space

of the negative glow and of the Faraday's dark space can already be distinguished more accurately and the same statement also holds for the meeting of the positive end of the Faraday's dark space and of the positive column.

Practically, the cathode spaces of the arc discharges consequently comprise two groups, the luminous spaces extending up to the positive-end limit of the negative glow space and the Faraday's dark space, following the luminous spaces. The cathode glow includes the cathode drop domain and therefore no dark space can be observed here.

The fundamental processes occurring in the cathode spaces of the arc discharges are of the same character as the phenomena briefly reviewed for the case of the glow discharges. Due to the high number of parameters involved, it has not been possible, up to the present, to put forward a continuous theoretical description. For the arc discharges, the electric field strength of the cathode spaces, the cathode current density and the quotient of the discharge currents supplied by the positive, resp. negative charges form the fundamental quantities, the reference bases wherefrom the further fundamental quantities of the discharge are usually expressed. Three equations are necessary for those which are provided by the thermal/space emission relation, by the current of the charge carriers limited by the space charges and by the energy equilibrium of the cathode. Out of these parameters, the energy equilibrium of the cathode was not dealt with in the preceding discussion, this was, however, done deliberately. Based on the considerations briefly reviewed here, the general energy equilibrium of the cathode can easily be worked out for any type of discharge though even its approximate solution is possible only in case of well-defined forms of discharge, in cases which afford checking by accurate measurements.

On establishing the energy volumes absorbed by the cathode, it is decisive to consider the energy volume released by the heating of the cathode (external heating, heating by the discharge, Joule heat lost by the discharge current flowing through the cathode), by the ionic bombardment (release of the kinetic and recombination energy), by radiations, metastable atoms, gas atoms mainly in very high-pressure and high-temperature discharges but in certain special cases, further terms can evidently also be involved (e.g. external α, β, γ radiation). To specify approximately the energy transported from the cathode, the electron current emitted by the cathode, the evaporation of the substance of the cathode, the losses caused by radiation and conduction and eventually the energy absorbed by thermal transfer by the gas or vapour particles should be taken into consideration. Further, more detailed discussion of the energy equilibrium of the cathodes is not dealt with in the frame of the present study. A few fundamental principles of the drafting of the energy balance are presented here only for synoptical purposes.

The losses of the cathodes, cathode spaces of the discharges and the sizes of these spaces are highly important for practical purposes. The objective of

the applied research work on discharges is generally the realization of minimum cathode losses and cathode space lengths as in the majority of the applications, the phenomena of the positive column, the advantageous properties of its plasma are made use of and the cathode spaces are only considered as the necessary accessories of the discharges. For the regulation of the discharge, as a whole, in the required sense, their knowledge is, however, of fundamental importance.

REFERENCES

1. von ENGEL, A.: Ionized Gases. Clarendon Press, Oxford 1955.
2. BITÓ, J.: *Magyar Fizikai Folyóirat* (to be published soon).
3. BITÓ, J.: *Magyar Fizikai Folyóirat* **10** (1962), 411.
4. MCKAY, K. G.: *Adv. in Electronics* **1** (1948), 65.
5. SCHOTTKY, W.: *Z. Phys.* **14** (1963), 63; **25** (1924), 342; **25** (1924), 635.
6. HORNBECK, J. A.: *Phys. Rev.* **83** (1951), 375.
7. MOLNÁR, J. P.: *Phys. Rev.* **83** (1951); 933, 940.
8. DRUYVESTEYN, M. J.—PENNING, F. M.: *Rev. Mod. Phys.* **12** (1940); 2, 88.
9. COBINE, J. D.: Gaseous Conductors. Dover Publications, New York 1958.
10. Encyclopedia of Physics; **22.** Springer, Berlin 1956.
11. WEIZEL, W.—OLMESDAHL, W.: *Z. Phys.* **114** (1939), 719.
12. BREWER, A. K.—WESTHAVER, J. W.: *J. Appl. Phys.* **8** (1937), 779.
13. RAMBERG, W.: *Ann. Phys.* **12** (1932), 319.
14. FOWLER, R. H.—NORDHEIM, L. W.: *Proc. Roy. Soc. London* **119** (1928); Series A, 173.

Über die Kathodenräume der Entladungen. Der Verfasser beschreibt die kennzeichnendsten, grundlegenden Vorgänge in den Kathodenräumen, unter anderem die Erscheinungen auf der Oberfläche der Kathode und die räumlichen Wechselwirkungen. Eingehend behandelt er die verschiedenen Kathodenräume der Glimmentladungen, ausgehend von der allgemeinen Analyse der Kathodenräume. Hiernach behandelt er die Entstehung der Lichtbogenentladungen und den Übergang Glimm-Lichtbogen. Nach der allgemeinen Analyse des Kathodenraums untersucht er die Rolle des Kathodenflecks und weist auf den Zusammenhang zwischen dem Kathodenfleck und den Kathodenräumen der Lichtbogenentladungen hin.

Des espaces cathodiques des décharges. L'auteur présente les processus de base les plus caractéristiques des espaces cathodiques, et notamment les phénomènes se produisant à la surface de la cathode et les interactions volumétriques. Il traite en détail des différents espaces cathodiques des décharges d'effluves, en partant de l'analyse générale des espaces cathodiques, examine les conditions de formation des décharges en arc et la transition des arcs en décharge d'effluves. Après l'analyse générale des espaces cathodiques, il étudie enfin le rôle de la tache cathodique et les relations existant entre celle-ci et les espaces cathodiques des décharges d'effluves.

О катодных полях разрядов *(Я. Бито)*. Автор описывает наиболее характерные основные процессы катодных полей, между прочим явления, протекающие на поверхности катода, и объемные взаимодействия. Детально рассматриваются различные катодные поля газового разряда, исходя из общего анализа катодных полей. Затем занимается вопросом формирования дуговых разрядов, газовым — дуговым переходом, а после общего анализа катодного поля рассматривает роль катодного пятна, затем указывает на связи катодных полей катодного пятна и дуговых разрядов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 351—374 (1968)

STEADY-STATE THERMAL STRESSES IN THE VESSEL OF A PRESSURIZED WATER REACTOR

F. KOLONITS

OFFICE FOR POWER STATION AND NETWORK DESIGN, BUDAPEST

[Manuscript received December 11, 1967]

The present work analyses the stresses in the pressure vessel of a pressurized water reactor under steady-state operating conditions, with some simplifying assumptions. The correctness of the approximations is examined and calculations are presented concerning the vessel of the reactor of type "Voroniesh". This study is a developed part of the investigations made in 1967 by the author at the Institute of Thermal Power Stations, Technical University, Budapest.

List of symbols

T	temperature [°C], the reference point of the calibration is the temperature of cooling water at the inlet 250° C;
q	intensity of thermal source [cal/cm³ s];
μ	factor of energy absorption [1/cm];
E	energy density of radiation [kcal/cm² s];
r	radial coordinate in the wall of the vessel [cm];
$R_{b,k}$	the inner and outer (without subscript, medium) radius of the wall of the vessel [cm];
λ	thermal conductivity [kcal/mh °C, kcal/cm s °C];
α	heat transfer coefficient [kcal/m² h °C];
m	the half height of the active zone [cm];
s	denotes $\pi/2m$;
δ	wall thickness of the vessel [cm];
p	denotes $\sqrt{\alpha/\lambda\delta}$;
x	wall thickness coordinate (its value is 0 at the inner surface);
γ	denotes λ/α;
Z	denotes $\mu\delta$;
β	denotes $\sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2\,\delta^2}}$, where ν is the Poisson-number;
σ	normal stress [kp/cm²];
H	error.

I. Introduction

In the course of dimensioning vessels the non-uniform heating of the wall must be frequently taken into account. In such cases above the mechanical stresses even thermal stresses will occur which may be significant in a given case.

In some cases in the practice that the temperature-field involved is a result of heat transfer through the wall causes a significant simplification. In

such cases the term representing the heat-source will be dropped from the differential equation of heat conduction:

$$\nabla^2 T - \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

The differential equation without the source-term is discussed abundantly in the literature [1].

In several cases, however, the source-term cannot be neglected. Such a field is characteristically the nuclear technics. If a vessel contains some radioactive material or nuclear processes take place in it, a part of the radiation emitted will be absorbed in the wall. It will cause a diffused heating in the whole volume of the wall.

This problem has a special importance in the case of the tank-type PWR reactors. Though the radiation-load of the wall of the pressure vessel containing the reactor is reduced by thermal protection the inner-wall heat sources cause considerable surplus stresses [2].

In the present paper the PWR reactor of the type "Voroniesh" (see its arrangement of Fig. 1) [5] will be examined.

This is on one hand, a typical representative of its group and on the other hand it is of the most interest because the reactor designed for the first atomic power station in our country is of this type.

For our considerations a steady state is assumed to be and as the radiation-load is the heaviest at about the half of the active zone our considerations will be restricted to that section of the vessel.

The problem may be divided into three interrelated parts:

The examination of radiations and their absorption in the wall (evaluation of the heat sources);

what will the temperature response be to these heat sources;

what thermal stresses will arise from the differences in the temperature.

II. Examination of radiations

If the scattering and the secondary effects are disregarded the diminuation of intensity of the radiation over the wall will obey the well-known exponential law. The thermal source intensity can be deduced from this in the form

$$q = \sum_{i=1}^{n} E_{bi}\,\mu_i\, e^{-\mu_i x} = \sum_{i=1}^{n} q_{0i}\, e^{-\mu_i x} \tag{2}$$

where μ_i is the factor of energy absorption (its value depending on the energy of the radiation which can be taken into account by dividing the radiation into components considered to be monoenergetic);

E_{bi} is the initial energy density of the radiation ofs its sort or component.

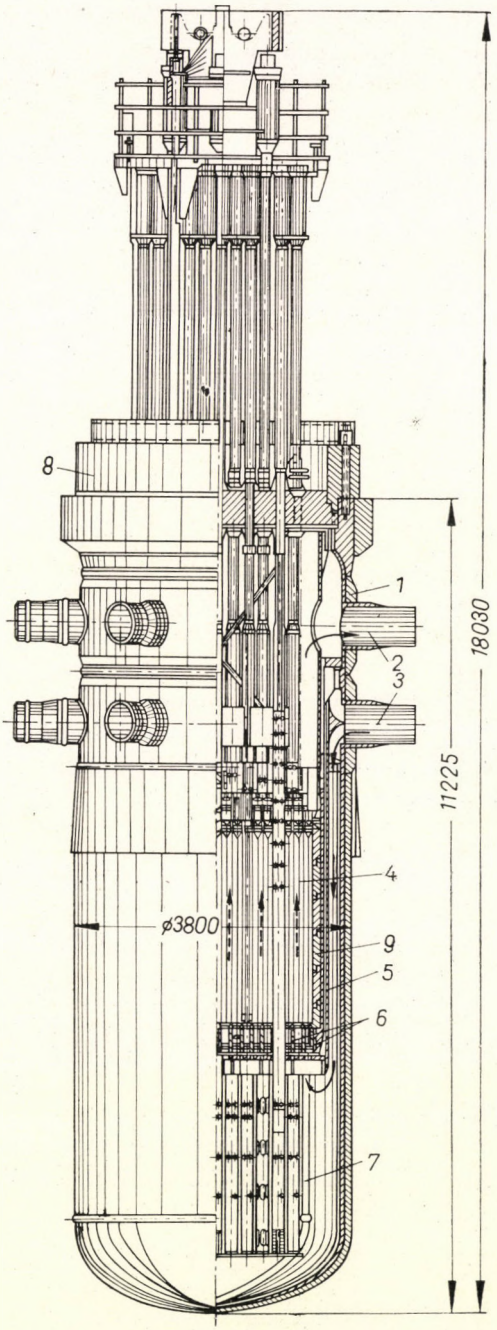


Fig. 1

Notations (according to STERMAN [5]): *1* body of the vessel; *2* cooling water outlet; *3* cooling water inlet; *4* active zone of the reactor; *5* reactor well; *6* raisable basket; *7* drain tube; *8* hold-down ring; *9* thermal protection (the arrows indicate the direction of the stream of the cooling water).

In case a cylindrical wall should be irradiated the surface grows in a radial direction; the intensity of radiation decreases because of this, too. For the elementary annulus sector of the aperture $d\varphi$:

$$(E + dE)(r + dr)\,d\varphi - Er \cdot d\varphi = -\mu E r \,.\, dr \cdot d\varphi$$

rearranged it is

$$\frac{dE}{E} = -\left(\frac{1}{r} + \mu\right) dr \,.$$

Having integrated both members into the corresponding R_b, E_b — r, E boundaries one will obtain

$$E = E_b \frac{R_b}{r} e^{-\mu(r-R_b)} \,.$$

The source

$$q = \sum_{i=1}^{n} E_{bi}\,\mu_i \frac{R_b}{r} e^{-\mu_i(r-R_b)} = \sum_{i=1}^{n} q_{0i} \frac{R_b}{r} e^{-\mu_i(r-R_b)} \,. \tag{3}$$

According to UNTERMYER [3] the wall is heated mainly by γ radiation in case of reactors having a H_2O reflector. He suggests to take into account the primary γ-s with the energy 2 MeV the secondary γ-s [thermal (n, γ) reaction] with the energy 5 MeV. The latter is the more favourable from our view-point because as the casing of the heating elements was made of zirconium it mostly emits such secondary γ-s.

The proportion of the radiations of the two sorts can be taken from the table of [2] (instantaneous and late γ 2 MeV, capture 5 MeV) to be $11 : 9 = 1 : 0{,}818$.

The corresponding energy absorption factors [3] 0,1813 and 0,1782. The proportion of the heat sources at the inner surface $q_0 = E_0\mu$ is $1 : 0{,}804$.

In order to simplify the computations let us see how the multi-component heating can be replaced by a monoenergetic one. Let us see a plain wall at first.

Let the conditions be:

a) The (maximal) intensity of the heat sources at the inner surface and

b) the total heat generated in the width of the wall remain unchanged.

These mean

$$q_0 = \sum_{i=1}^{n} q_{0i} \,, \tag{4}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}}{\mu}(1 - e^{-\mu\delta}) = \sum_{i=1} \frac{q_{0i}}{\mu_i}(1 - e^{-\mu_i\delta}) \,. \tag{5}$$

For the first approximation

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{0i}}{\mu_i}} . \tag{6}$$

A more exact result can be obtained by iteration of Equ. (5). Thus, the heating

$$\sum_{i=1}^{n} q_{0i} \exp\ (-\mu_i x)$$

can be approximated by the expression $q_0 \exp\ (-\mu x)$.

The reduced factor of absorption for the two component heating determined above $\mu = 0{,}1797$ 1/cm (the first approximation resulted in 0,179).

The μ and q_0 can be calculated identically in the case of a cylindrical wall. The heat-generation included in condition (*b*) has to be referred to an elementary annulus sector, and then because of the multiplication with $rd\varphi$ the divisor r will be eliminated.

III. Temperature distribution

The vessel is covered with a layer of heat-insulating the character of which is assumed to be perfect. Hence, one of the boundary conditions is that the radial gradient is zero here. This assumption increases safety causing the difference in the temperatures of the outer and inner surface of the vessel and even inside the wall to be greater.

According to the descriptions [4] the cooling water entering at a temperature of 250° C moves downward between the wall of the vessel and the thermal protection then turning back goes through the cooling channels of the reactor, its temperature being increased up to 278° C.

The heat generated in the wall is totally and the heat generated in the thermal protection is partially transferred to the water. This heat is, however, only a little part of the total heat transferred to the water since the proper heating due to the operation takes place in the cooling channels of the reactor. As the total increase in the temperature is not very high itself (28° C) the water temperature all along the wall can be tightly approximated with the value 250° C.

The water cools the wall, thus the other boundary condition is

$$\alpha(T|_w - 250) = \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_w ,$$

or introducing the notation $\lambda/\alpha = \gamma$ and taking 250° C as the reference point of the calibration one obtains

$$T|_w = \gamma \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_w . \tag{7}$$

In the following, two problems will be considered:

a) What will be the consequences of neglecting the axial heat conduction;

b) whether the cylindrical shell could be approximatly replaced with a plain wall.

In cases of steady state the latter problem is not of importance (in such cases the cylindrical problem can also be solved easily), however, the favourable result makes it probable that this approximation may be adopted even in solving more complicated, unsteady problems.

1. The effect of the axial heat-streaming on an approximative model

Let a prism of the width of unity be cut out of the wall (let its bend be neglected). It may be assumed that the intensity of the radiations along the height of the reactor are proportional to the number of fissions. For the purposes of our approximative calculation let us assume the distribution of those to be cosinusoidal (characterizing the bare homogeneous reactor).

If the height of the active zone is 2 *m* (in the present case 250 cm) and the origin of the coordinate system is placed into the centre, then over the active zone

$$q = q_0 \cos sy , \tag{8}$$

where $s = \pi/2$ *m*.

In the centre the axial gradient has a value of zero due to the symmetry. Our prism is a half-infinite rod insulated on three sides with heat transfer on the fourth side.

In the course of heat-technical calculations concerning thin, long rods the transverse temperature differences are often neglected [6]. Having assumed this approximation the temperature T of the section of the coordinate y ($y = 0$ corresponds to the section at the half height of the active zone) can be calculated as follows, the temperature is assumed to be constant.

The heat generated in the elementary volume in the time of unity ($dq = \delta dyq$) and the difference of heat streams of conduction

$$dq_1 = -\lambda\delta \left[\left.\frac{dT}{dy}\right|_y - \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y+dy} \right]$$

departs into the surroundings:

$dq_2 = dy\alpha T$, if the reference point of the calibration is the temperature of the surroundings (see Fig. 2). After rearrangement one obtains

$$\frac{d^2T}{dy^2} - \frac{\alpha}{\lambda\delta}T = -\frac{q_0}{\lambda}\cos sy\,. \tag{9}$$

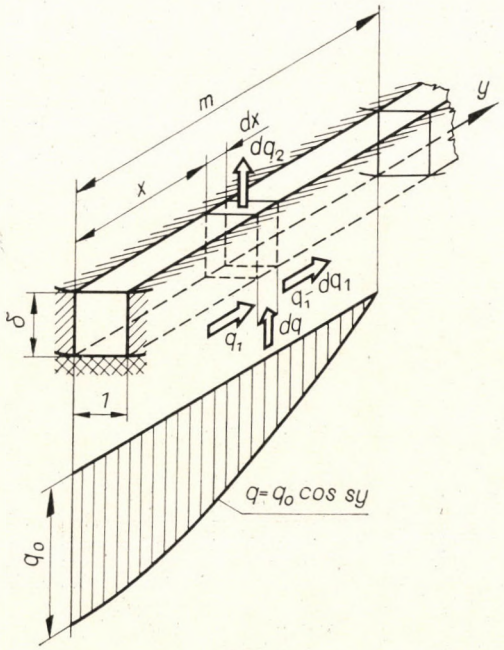


Fig. 2

For the unheated part the solution vanishing into infinity of the homogeneous equation is valid, the solutions for the two parts connect without breaking.

The solution on the positive semi-axis will be for the heated part

$$T_f = K\left(e^{-pm}\cosh py + \frac{p}{s}\cos sy\right),$$

for the unheated part (10)

$$T_h = Ke^{-py}\cosh pm$$

where

$$p = \sqrt{\alpha/\lambda\delta}\,,\quad K = (q_0\, s/\lambda p)(s^2 + p^2)\,.$$

If the heat-streaming in an axial direction is neglected the total heat generated in the elementary volume departs into the surroundings. Hence the temperature distribution will be

$$T'_f = \frac{\delta}{\alpha} q_0 \cos sy = \frac{q_0}{\lambda p^2} \cos sy,$$
$$T'_h \equiv 0. \tag{11}$$

The value for the temperature over the unheated part and at the boundary will be, of course, be higher if the axial heat-stream is taken into consider-

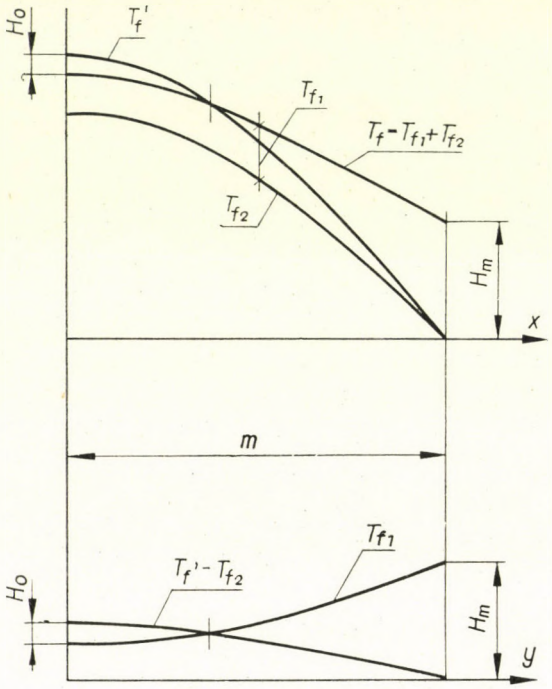


Fig. 3

ation. In the middle, however, $T_f < T'_f$, this condition may be written on the basis of Equs (10) and (11) in the form

$$\frac{2}{\pi} pm < e^{pm}$$

which is valid for any value of pm.

Let the cosh and the cosinusoidal component of T_f be denoted by T_{f1} and T_{f2}, respectively. T'_f differs from T_{f2} only in a constant factor, the difference between them is cosinusoidal and it decreases to zero monotonously from the middle to the end of the interval considered. T_{f1} grows monotonously and it is convex from below (see Fig. 3). The maximal deviations can be found at 0 and m (in the middle and at the boundaries). Differences related to T'_f:

$$H_0 = \frac{sp}{s^2+p^2}\left(\frac{s}{p} - e^{-pm}\right) \approx \frac{1}{1+(p/s)^2},$$

$$H_m = \frac{sp}{s^2+p^2}\ \frac{1+e^{-2pm}}{2} \approx \frac{1}{2\left(\frac{s}{p}+\frac{p}{s}\right)} = \frac{p}{2s} H_0. \tag{12}$$

These approximations hold true in the case $pm \gg 1$. The error in the middle is the smaller.

The heat transfer coefficient at the wall

$$\alpha = 18270 \text{ kcal/m}^2\text{hC}^\circ$$

evaluated according to [6]. The value for λ is taken to be

$$\lambda = 35{,}1 \text{ kcal/mhC}^\circ$$

according to the corresponding Soviet material standards [7]. From the formulae deducted above

$$H_0 = 0{,}0364\%, \quad H_m = 0{,}953\%$$

which are not high particularly in the middle.

As the value of the gradient is low or near zero there, the heat flux is not significant. Neglecting it, all the heat generated has to escape into the radial direction, thus the gradients grow in this direction which causes an error on the safety side.

2. *Equation of heat conduction for cylinder*

$$\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}\left(r\ \frac{dT}{dr}\right) = -\ \frac{q_0 R_b}{\lambda r}\ e^{-\mu(r-R_b)}.$$

Having integrated twice and having determined the two constants from the boundary conditions ([7] and grad $T = 0$ at the outer surface of the wall) one obtains

$$T = \frac{q_0}{\lambda\mu}\left\{\gamma(1-e^{-\mu\delta}) + R_b\left[e^{-\mu\delta}\ln\frac{R_b}{r} + \int_{R_b}^{r}\frac{e^{-\mu(r-R_b)}}{r}\,dr\right]\right\}. \tag{13}$$

For a plain wall

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\ \frac{q_0}{\lambda}\ e^{-\mu x}.$$

The solution satisfying the corresponding boundary conditions is

$$T = \frac{q_0}{\lambda\mu}\left[\gamma(1 - e^{-\mu\delta}) + \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu x}) - e^{-\mu\delta}\, x\right]. \tag{14}$$

Let us examine what can be the basis of a relatively real comparison of the densities of heat sources in a plain and a cylindrical wall. Let the same conditions he made as those in the course of the determination of the monoenergetic heating.

Condition 1 (subscript h refers to cylinder, s refers to plane):

$$q_{0,h}\frac{R_b}{R_b}\, e^{-\mu_h(R_b - R_b)} = q_{0,s}\, e^{-\mu_h 0},$$

hence $q_{oh} = q_{os} = q_0$.

Condition 2 (equality of heats generated in the elementary sectors, see Fig. 4):

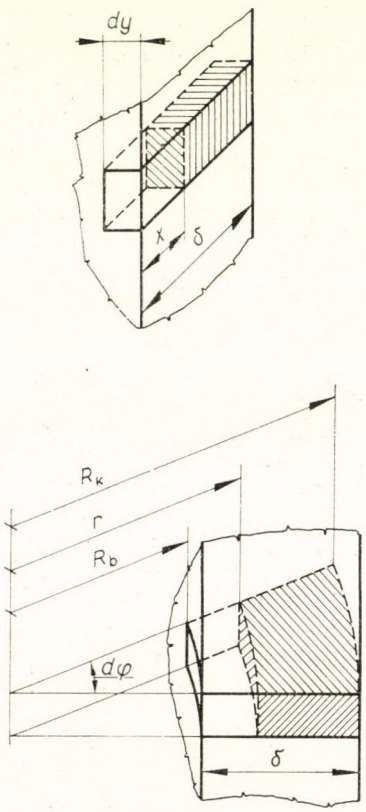


Fig. 4

$$\int_{R_b}^{R_k} r dr d\varphi q_0 \frac{R_b}{r} e^{-\mu_h(r-R_b)} = \frac{q_0}{\mu_h} R_b \, d\varphi \, (1 - e^{-\mu_h \delta}) =$$

$$= \int_0^{\delta} q_0 e^{-\mu_s x} \, dx dy \qquad = \frac{q_0}{\mu_s} dy (1 - e^{-\mu_s \delta}),$$

hence, if $R_b \, d\varphi = dy$, then $\mu_s = \mu_h = \mu$.

From such a comparison it can be seen that approximating the cylinder with a plain wall will cause an error on the safe side. The total heat generated in both cases departs into the surroundings through the inner surface. The heat flux inside the wall in case of a cylinder (adopting the notation $r - R_b = x$):

$$q_0 \frac{R_b \, d\varphi}{r d\varphi} \int_r^{R_k} e^{-\mu(r-R_b)} \, dr = \frac{q_0}{\mu} \frac{R_b}{r} (e^{-\mu x} - e^{-\mu \delta}). \tag{15}$$

In case of plane (the cross-sectional area is constant):

$$q_0 \int_0^{\delta} e^{-\mu x} \, dx = \frac{q_0}{\mu} (e^{-\mu x} - e^{-\mu \delta}). \tag{16}$$

Taking into consideration that $R_b \leqq r$ the plane-formula in general, yields the greater heat flux. There is an exact equality at the highest value (at the inner surface) and at the outer surface where both fluxes have a value of zero. But the value of the heat flux is proportional to the gradient which is in turn in tight connection with the growth of thermal stresses. If the plane-approximation is exact at the two surfaces of the wall (where the gradient has its maximal and minimal value) and inside the wall it overestimates the value of the gradient, it will cause an error in stresses on the safe side.

The patterns of temperature will be examined more closely. Both temperature distributions have a constant part which represent the temperature step at the inner surface and which are equal for the two cases by the above-mentioned conditions of comparison of plane and cylinder. Therefore, it is enough to compare only the variable parts. Neglecting the factor $q_0/\lambda\mu$ and partially integrating one obtains

$$\begin{aligned} T_{h,v} &= \int_0^x \frac{R_b}{R_b + x} e^{-\mu x} \, dx - R_b e^{-\mu \delta} \ln \left(1 + \frac{x}{R_b}\right) = \\ &= R_b \ln \left(1 + \frac{x}{R_b}\right) (e^{-\mu x} - e^{-\mu \delta}) + \mu R_b \int_0^x \ln \left(1 + \frac{x}{R_b}\right) e^{-\mu x} \, dx. \end{aligned} \tag{17}$$

Expansion of logarithm will result in

$$\ln \left(1 + \frac{x}{R_b}\right) = \frac{x}{R_b} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R_b}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R_b}\right)^3 - \ldots \tag{18}$$

As $x \ll R_b$ the series is of Leibniz-type. Approximating the ln with the first term it will be over-estimated, but this approximation will improve with the increase in R_b and with the decrease in x.

The value of $T_{h,v}$ tend to grow with ln, therefore, substituting an over-estimated value for ln the value of $T_{h,v}$ will be over-estimated too.

After the substitution

$$T_{h,v} < \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu x}) - e^{-\mu\delta}\, x = T_{s,v}$$

consequently this estimation will give the variable part of the plane-formula.

From this two consequences can be deducted. According to the chosen comparison of the plane and the cylinder:

a) The limit of the distribution in the cylinder is the plane-formula when $R_b \to \infty$;

b) the two formulae give the same result for the inner surface ($x = 0$) and the difference in the results grows towards the outer surface.

The error at the outer surface can be estimated by taking one more term of the expansion of the ln into account. So the value of ln and consequently of $T_{h,v}$ will be under-estimated. The difference is

$$\frac{q_0}{\lambda\mu}\,\frac{1}{R_b\mu}\left[1 - e^{-\mu\delta}\left(1 + \mu\delta + \frac{\mu^2\delta^2}{2}\right)\right]. \tag{19}$$

Dividing it by the value obtainable from the plane-formula for $x = \delta$ the relative error will be obtained in the form

$$H < \frac{1}{R_b\mu} \cdot \frac{1 - \dfrac{\mu^2\delta^2 e^{-\mu\delta}}{2(1 - e^{-\mu\delta} - \mu\delta\, e^{-\mu\delta})}}{1 + \gamma\mu\,\dfrac{1 - e^{-\mu\delta}}{1 - e^{-\mu\delta} - \mu\delta\, e^{-\mu\delta}}} < \frac{1}{R_b\,\mu} \cdot \frac{1 - \dfrac{\mu^2\delta^2}{2}\, e^{-\mu\delta}}{1 + \gamma\mu}\,. \tag{20}$$

It can be seen that the value of the error depends on the values of $R_b\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ and it decreases with the growth of the first two.

Evaluation of the effect of $\delta\mu$ is more complicated.

Let us assume the notation $Z = \mu\delta$. In the first place let us present the following

Auxiliary theorem which can be easily understood:

$$f(Z) \leqq 0$$

holds true for all $Z \geqq 0$, if $f(0) \leqq 0$ and $f'(Z) \leqq 0$, in the case $Z \geqq 0$.

In the denominator of H the Z is represented in the expression

$$f_1(Z) = \frac{1 - e^{-Z}}{1 - e^{-Z} - Ze^{-Z}} = \frac{e^Z - 1}{e^Z - 1 - Z} .$$

If it decreases monotonously for $Z = 0$ its derivative is negative.

Therefore, the sign of the derivative is determined by the expression

$$- Z e^Z - 1 + e^Z \leqq 0 .$$

On the basis of the auxiliary theorem

$$- Z e^Z \leqq 0$$

which evidently holds true.

The numerator changes with Z according to the function

$$f_2(Z) = \frac{Z^2 e^{-Z}}{1 - e^{-Z} - Ze^{-Z}} = \frac{Z^2}{e^Z - 1 - Z} .$$

If

$$2 Ze^Z - 2 Z - Z^2 - Z^2 e^Z \leqq 0 ,$$

then $f_2(Z)$ will decrease monotonously for $Z \geqq 0$ on the analogy of the preceding function. Having adopted the auxiliary theorem twice one obtains

$$-4 Ze^Z - Z^2 e^Z \leqq 0$$

which holds true.

But with the decrease of $f_1(Z)$ and $f_2(Z)$ H grows and therefore it can be stated that according to the more exact error-formula H tends to grow with the increase of $\mu\delta$.

Taking into consideration the approximative error formula it can be seen that it is valid only for cases $Z \geqslant 2$, below this value this error-formula will result in lower values for H as $\mu\delta$ grows.

That is to say that in case of a cylinder having a greater radius, a wall of less thickness, improving heat conduction (or diminishing heat transfer) the approximation with a plane will be more exact. The effect of the heating is not unambiguous.

These tendencies are well known and the fact that they follow from our considerations is an indirect evidence of the correctness of these considerations and of our other results.

In the case considered here $R_b = 178$ cm, $\gamma = 0{,}1923$ cm, $\delta = 12$ cm, $\mu = 0{,}1797$ 1/cm. The approximative formula yields a value of 1,907% and the more exact one yields 1,715% for the upper limit of error.

IV. Strength calculation

The vessel is in fact a pipe closed at both ends and loaded by an internal pressure of 120 kp/cm^2 and by thermal stresses arising from the non-uniform heating.

1. The effect of the internal pressure

The thickness of the vessel is little in comparison with its dimensions and, therefore, it may be considered to be a shell. The complete analysis of the problems would exceed the extent of the present paper, therefore, our work, will be restricted to the considerations of a qualitative nature which prove the correctness of our approximations.

According to TIMOSHENKO [8] if a long pipe with a closure head the growth of which differs from that if the pipe is pressurized, then, at the juncture, discontinuity forces and moments will take place to preserve the continuity of the wall. These will result moments and shearing forces existing also in other sections of the pipe. The distributions are governed by exponentially damped trigonometrical functions. The "half wave length" of these functions is π/β where

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3\,(1-\nu^2)}{R^2\,\delta^2}}\,.$$

The factor of damping referring to two points at a distance of the half wave length is $e^{-\pi} = 0{,}04321$.

The forces and moments do not reach their maximal values inevitably at the juncture (for the discontinuity moment produces shearing force and *vice versa*; these have to be added). If they were pure trigonometrical functions the maximum value of both functions would occur in the first period. This can be only brought about by the exponential damping.

In our case $\beta = 0{,}02735$ 1/cm, the half wave length is 115 cm. The vessel is closed with an ellipsoidal bottom and a self-sealing plain lid. At the first juncture according to [8] discontinuity shearing forces occur. The forces acting on the lid pressing it against the packing ring bends the wall of the vessel.

The junctures are at a distance of 402 cm and 585 cm from the half height of the active zone at the bottom and the lid, respectively, and in addition the wall is reinforced above by the inlet nozzles.

The stresses produced by these loadings are superposed to the stresses in the pipe itself arising from the inside pressure. These together must not exceed the allowable stress not even in the neighbourhood of the junctures. The allowable stress is $\sigma_{0\,2}/1{,}65 = 3030$ kp/cm^2 the $\sigma_{0,2}$ which are taken to be

5000 kp/cm^2 for the material of the vessel and the factor of safety being chosen according to MARGULOVA [9].

The membrane-stresses (assuming a uniform distribution over the wall thickness being little in comparison to the diameter of the vessel) are

$$\sigma_a = 912{,}5 \text{ kpcm}^{-2}, \quad \sigma_t = 1825 \text{ kpcm}^{-2}.$$

It can be seen that the discontinuity stresses which must be added to the stresses above may reach a value of the same order without exceeding the allowable stress. The section considered at the half-height of the active zone is at a distance from the junctures long enough to neglect these stresses in comparison to the membrane stresses.

Finally the stresses produced by the internal pressure are characterized by the membrane stresses in the section considered, more accurate results can be obtained from the well-known formulae for thick-wall pipes.

2. Thermal stresses

Uneven heating is mainly caused by radiation and in the following this will be discussed. Here will be merely mentioned as the most important of the other reasons the fact that there is a difference of 28° C in temperatures of inlet and outlet nozzles. These are, however, at a long distance from the section considered and the stresses are of exponentially damped character and they occur at a well reinforced part. Therefore, their effect on the section considered will be neglected.

The intensity of radiations diminishes in both directions from the section considered (this diminuation is assumed to be cosinusoidal). This diminuation is, however, the slightest just in the vicinity of the section considered.

In the following the effect of the variable intensity will be examined qualitatively compared to the effect of constant intensity.

Let the heated part of the container be cut out of it. If it were heated uniformly in the axial direction it would remain cylindrical but in our case it becomes barrel-shaped. It must be taken into account that the outer layer is warmer thus it stretches in a higher rate; consequently the stripe cut out along the generating line would be stress-free in a curved form. For the differences in temperatures of the surfaces and the mean-temperatures of every section obeys the same function determined by the heating distribution, very high additional stresses are not expected to arise.

The other consequence of the barrel-shaped formation is that the free expansion of the section considered is hindered in the radial direction; annular compression stresses are induced in it.

In addition, in other sections there is even shear stress in the plane of symmetry it is missing.

It may be taken into account that the change in the heating is the less in the vicinity of the section considered. On the other hand the high tension-stress caused by the inside pressure is reduced by this hoop stress.

In the third rate at the boundary of the heated and unheated parts stresses take place to preserve the continuity of the wall. These are but at a distance of 125 cm from the section considered so their influence cannot be significant.

For these reasons the axial change will not be taken into consideration and the formulae of equally heated thick wall pipe will be used for the calculations.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu}\left[-\frac{1}{r^2}\int_{R_b}^{r}\alpha T r dr + \frac{r^2 - R_b^2}{r^2(R_k^2 - R_b^2)}\int_{R_b}^{R_k}\alpha T r\, dr\right],$$

$$\sigma_a = \frac{E}{1-\nu}\left[\frac{2}{R_k^2 - R_b^2}\int_{R_b}^{R_k}\alpha T r dr - \alpha T\right], \tag{21}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu}\left[\frac{1}{r^2}\int_{R_b}^{r}\alpha T r dr + \frac{r^2 + R_b^2}{r^2(R_k^2 - R_b^2)}\int_{R_b}^{R_k}\alpha T r dr - \alpha T\right]$$

where α is the coefficient of thermal extension, E is the modulus of elasticity and ν is the Poisson-number [10; p. 364].

The consideration of the axial change would lead to a very complicated formulae (11); the approximation discussed above is the more satisfactory because it will probably result in good results for practical purposes.

V. Numerical results

The present calculation is only a developed part of the more extensive examination which was made at the *Institute of Thermal Power Stations Technical University Budapest* as a diploma work which included even a number of unsteady states of operation. The character and volume of the numerical calculations in connection with this examinations required the use of a digital computer.

The elaborated computational program (for computer of the type ELLIOTT 803/B, in the programming language AUTOCODE A 103) computes temperature distributions in a wall for various heat-conduction problems with the aid of plane-approximation, and it is able to produce several superposition of these. In addition, it computes the stress components of various directions and the reduced stress according to HUBER—MISES—HENCKY in points of given number across the wall thickness on the basis of formulae (21) and the formulae concerning the thick-wall pipe loaded by internal pressure. It evaluates the integrals in formulae (21) on the basis of the Simpson-formula taking the given number of dividing points into consideration.

For the sake of the maximal flexibility of the program it is possible to print the individual wall-temperature distributions on a paper tape. The tapes obtained can be re-read with arbitrary signs and switching the control onto the suitable subroutine the stresses corresponding to the superposed temperature pattern can be evaluated. The problems of thermal conduction which are not included in the program can be solved by an arbitrary method and having made a similar punched-tape the stress computing subroutine can be used.

In the present case the formula for the cylindrical wall was programmed individually, this program produces a tape which can be used in the above way. The integral in the formula [13] was also evaluated with the Simpson-formula.

The stresses have been determined at every 2 cm, the wall was divided into 6 sections. So the temperatures had to be determined at 12 dividing points i.e. at every 1 cm for the evaluation of the integral in formula (13) 24 dividing points had to be taken into account.

The error of the Simpson-formula according to the literature is

$$H < \frac{(b-a)^5}{2880\, \nu^4} |y^{(4)}|_{\max}$$

where b is the width of the interval of integration, ν is the number of the couples of dividing points (the total $n = 2\nu$), y is the function to be integrated. Let this formula be rewritten by setting in the n and the length h of the sections

$$H < \frac{h^5\, n\, |y^{(4)}|_{\max}}{180} . \tag{22}$$

Let the integral of Equ. (13) be considered first

$$I = \int_0^x \frac{e^{-\mu\eta}}{R_b + \eta}\, d\eta .$$

For the integrand

$$|y^{(4)}| = e^{-\mu\eta}\left[\frac{\mu^4}{(R_b+\eta)} + \frac{4\,\mu^3}{(R_b+\eta)^2} + \frac{6\,\mu^2}{2\,(R_b+\eta)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{4\,\mu}{6\,(R_b+\eta)^4} + \frac{1}{24\,(R_b+\eta)^5}\right].$$

Its maximum occurs in the interval $0 \leqq \eta \leqq x \leqq \delta$ at $x = 0$. In the same interval for any dividing point

$$I > nh\frac{e^{-\mu\delta}}{R_b + \delta} .$$

Consequently the relative error in the interval ranging from 0 to any dividing point is

$$H < \frac{1}{180}\left(\frac{h}{R_b}\right)^4\left(1+\frac{\delta}{R_b}\right)e^{\mu\delta}\left[(\mu R_b)^4+4(\mu R_b)^3+\right.$$
$$\left.+3(\mu R_b)^2+\frac{2}{3}\mu R_b+\frac{1}{24}\right]. \tag{23}$$

In our case $\mu = 0{,}1797$ 1/cm, $R_b = 178$ cm, $h = 0{,}5$ cm is

$$H < 3{,}73 \cdot 10^{-6},$$

which means perfect accuracy in the practice.

In the formula (21) integrals of the form

$$\int_{R_b}^{r} Trdr$$

are present—being the temperature dependence of the material parameters neglected. Let us examine the error of the Simpson formula in case of plane-formula.

In this case (taking into consideration the actual data)

$$|y^{(4)}| = \frac{q_0\,\mu}{\lambda}\,e^{-\mu x}\,[(R_b+x)\,\mu-4]\,.$$

Its derivative apart from a multiplication factor is

$$e^{-\mu x}\,[5-(R_b+x)]$$

which in our case is negative for every value of x.
Consequently the maximum sought for is at $x = 0$

$$|y^{(4)}|_{\max} = \frac{q_0\,\mu}{\lambda}\,(R_b\,\mu-4).$$

The error estimation calculated by this formula is valid for every couples of dividing points. The relatively highest error is obtained evidently for the first couple of dividing points (since henceforth both the radius and the temperature tend to grow, consequently the integrals corresponding to the individual sections grow as well).

Approximating the temperature curve as being concave from below with a straight line, will evidently cause an error on the safe side

$$\int_{R_b}^{R_1} Trdr > \int_{R_b}^{R_1}\left[T_b+\frac{T_1-T_b}{R_1-R_b}(r-R_b)\right]rdr\,.$$

The value for the integral on the right side

$$R_b (T_1 + T_b) h + 2 h^2 \frac{2 T_1 + T_b}{3} .$$

Introducing the notation

$$T_i = \frac{q_0}{\lambda \mu} \vartheta_i :$$

$$H < \frac{h^4 \mu^2 (R_b \mu - 4)}{90 R_b (\vartheta_1 + \vartheta_0) + 60 h (2 \vartheta_1 + \vartheta_0)} . \tag{24}$$

Numerically $\vartheta_0 = 0{,}170$, $\vartheta_1 = 1{,}6124$ and

$$H < 3{,}141 \cdot 10^{-5}$$

which is entirely negligible.

The intensity q_0 of thermal sources can be determined numerically by evaluating the nuclear processes of the reactor or by measurements. Because on the basis of the laconic data of the literature available only a very rough approximation could have been determined, q_0 was calculated by the assumption that in steady case the value of the reduced stress would reach the allowable 3030 kp/cm^2 in place of the heaviest load (i.e. by the assumption that in this way the vessel was dimensioned for permanent operation).

During the course of the above-mentioned examinations for unsteady state because of the limited computer capacity available, for the sake of simplicity all the material characteristics were taken into consideration with their values referring to 250° C. In order to be able to adapt the results obtained there, we calculated in the same way here.

The components of the temperatures and thermal stress are directly proportional to q_0. If the stresses arising from the inside pressure are denoted by the subscript p, and the thermal stress produced by q_0 of the value of unity is denoted by the subscript q, for any component

$$\sigma = \sigma_p + q_o \sigma_q .$$

For the reduced stress

$$2 \sigma_r^2 = \sum_{x,y,z} [(\sigma_{pi} - \sigma_{pj}) + q_0 (\sigma_{qi} - \sigma_{qj})]^2 . \tag{25}$$

In case of multicomponent heating (the rate of components is naturally fixed) the σ_q is related to the unit value of one of the components.

The values for σ_p and σ_q were determined in plane approximation by running the program with suitable data and then from the Equ. (25) the heat-

ing producing the reduced stress of the value of the maximal 3030 kp/cm^2. For two-component heating for the components $\mu = 0{,}1813$ 1/cm and 0,1782 1/cm, respectively, the values $q_0 = 0{,}1364$ and 0,1096 cal/cm^{3}s were obtainable and for the reduced value of 0,1797 1/cm^2 the value of 0,246 cal/cm^{3}s (this is just the sum of the two previous ones).

The program was run with the initial data

$$\delta = 12\,\text{cm},\ R_b = 178\,\text{cm},\ \gamma = 0{,}1923\,\text{cm},\ \lambda = 9{,}767 \cdot 10^{-5}\,\text{kcal/cms°C},$$

$$a = 0{,}0937\,\text{cm}^2/\text{s},\ p = 119\,\text{kp/cm}^2,\ E = 2{,}04 \cdot 10^6\,\text{kp/cm}^2,$$

$$\alpha = 13{,}6 \cdot 10^{-6}\,1/°\text{C}.$$

Number of dividing points were 6.

Table I

The stresses arising from the internal pressure [kp/cm^2]

x [cm]	Stresses [kp/cm^2]			
	radial	tangential	axial	reduced
0	— 119,00	1826,6	853,8	1684,9
2	— 97,502	1805,1	853,8	1647,7
4	— 76,709	1784,3	853,8	1611,7
6	— 56,591	1764,2	853,8	1576,8
8	— 37,118	1744,7	853,8	1543,1
10	— 18,263	1725,9	853,8	1510,5
12	0	1707,6	853,8	1478,8

The stresses arising from the internal pressure [kp/cm^2] are given in Table I. The results are represented by the dotted line in the diagram (with subscript p) of Fig. 5. Other calculations are given in Tables II—V.

Table II

Plane approximation and reduced factor of absorption

x [cm]	T [°C]	Stresses [kp/cm^2]			
		radial	tangential	axial	reduced
0	252,38	— 119,00	3274,2	2301,4	3026,4
2	272,69	— 86,270	2436,7	1496,6	2208,5
4	285,88	— 61,772	1889,3	973,71	1690,7
6	294,11	— 42,594	1543,9	647,48	1377,8
8	298,88	— 26,740	1339,1	458,55	1199,2
10	301,23	— 12,851	1232,1	365,49	1105,5
12	301,89	0	1193,2	339,35	1064,8

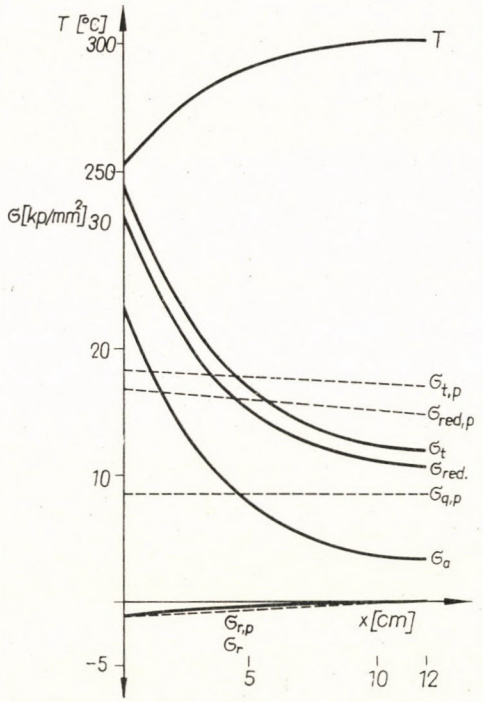


Fig. 5

Table III

Plane approximation and two-component heating

x [cm]	T [°C]	Stresses [kp/cm²]			
		radial	tangential	axial	reduced
0	252,38	— 119,00	3272,4	2299,6	3024,7
2	272,66	— 86,285	2435,8	1495,7	2207,6
4	285,84	— 61,794	1889,0	973,42	1690,5
6	294,06	— 42,615	1544,1	647,71	1378,0
8	298,82	— 26,757	1339,7	459,14	1199,7
10	301,16	— 12,860	1232,9	366,27	1106,1
12	301,82	0	1194,0	340,19	1065,4

Examination of our results shows that the thermal stresses (in comparison with the relatively uniform stresses produced by the internal pressure) makes the stress distribution non-uniform ($\sigma_{r,\min}/\sigma_{r,\max} = 0{,}352$ instead of 0,877) — the utilization of the material becomes worse.

Examining the accuracy of the approximations it is striking how little is the error caused by the reduction of the factors of absorption. Having com-

Table IV

Calculated as for a cylindrical wall, with reduced factor of absorption

x [cm]	T [°C]	Stresses [kp/cm²]			
		radial	tangential	axial	reduced
0	252,37	— 119,00	3254,5	2281,7	3007,5
2	272,57	— 86,470	2421,4	1481,2	2194,4
4	285,55	— 62,093	1882,6	966,67	1685,1
6	293,56	— 42,936	1545,9	649,20	1379,8
8	298,15	— 27,016	1348,1	467,33	1206,5
10	300,39	— 13,002	1245,5	378,68	1115,5
12	301,01	0	1207,8	354,01	1075,4

Table V

Calculated as for a cylindrical wall, with two-component heating

x [cm]	T [°C]	Stresses [kp/cm²]			
		radial	tangential	axial	reduced
0	252,37	— 119,00	3252,7	2279,9	3005,8
2	272,55	— 86,485	2420,5	1480,2	2193,6
4	285,51	— 62,115	1882,3	966,39	1684,9
6	293,51	— 42,957	1546,2	649,43	1380,0
8	298,09	— 27,033	1348,7	467,90	1207,0
10	300,32	— 13,011	1246,3	379,44	1116,0
12	300,94	0	1208,6	354,83	1076,0

pared Table II—III and Table IV—V to one another the error in the temperature is 0,022%, in the reduced stress (referring to its maximal value at the outer fibre) is 0,056% (it is the maximum at the inner surface, but it deviates toward safety).

The error caused by the approximation of the cylindrical wall by plane is also favourable, though not quite so well.

The temperatures at the inner surface are in good agreement from a practical viewpoint the error at the outer fibre is 0,293% (less than the estimated value).

Our preliminary evaluation of stresses was based on gradients which are higher everywhere in case of plane-approximation. For other factors also have a role in producing thermal stresses, this may be considered as only the first approximation. In the place of the highest loading the stresses are actually higher in the case of plane, and that is the case along the inner half of the wall. Outside it is in the reverse. But the differences are always less than 1% which means practically good approximation.

REFERENCES

1. CARSLAW-JAEGER: Conduction of Heat in Solids; 2nd edition. Clarendon Press, Oxford 1959.
2. LÉVAI: Atomtechnika IV (Atomtechnics IV). Tankönyvkiadó, Budapest 1964.
3. ETHERINGTON: Nuclear Engineering Handbook. McGraw-Hill, New York 1958.
4. *Крамеров:* Некоторые пути развития реакторов ВВЭР. *Атомная Энергия* **17** (1964), дек.
5. *Стерман:* Тепловая часть атомных электростанций. Госатомиздат, Москва 1963.
6. MIHEJEV: A hőátadás gyakorlati számításának alapjai. Tankönyvkiadó, Budapest 1956.
7. *Имбрицкий—Никитин:* Справочник по трубопроводам арматуре для тепловых электрических станции. Госэнергоиздат, Москва 1962.
8. TIMOSHENKO—WOINOWSKI—KRIEGER: Lemezek és héjak elmélete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966.
9. *Маргулова:* Расчёт и проектирование парогенераторов атомных электростанции. Госэнергоиздат, Москва 1962.
10. PONOMARJOV: Szilárdsági számítások a gépészetben, III. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1965.
11. ZUDANS—YEN—STEIGELMANN: Thermal Stress Techniques in the Nuclear Industry. American Elsevier, New York 1965.
12. ROTHE: Matematika gépészmérnökök számára (Mathematics for Mechanical Engineers). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1960.

Stationäre Wärmespannungen im Behälter eines Druckwasserreaktors. Die Arbeit untersucht unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen die Beanspruchung des Druckbehälters eines Druckwasserreaktors im stationären Betriebszustand. Weiterhin wird die Berechtigung der Näherung untersucht, und es werden Berechnungen für den Behälter eines Reaktors vom »Woronescher« Typ durchgeführt. Der Aufsatz ist ein Teil und die Weiterentwicklung der vom Verfasser im Jahre 1967 am Lehrstuhl für Wärmekraftwerke der Technischen Universität Budapest ausgeführten Untersuchungen.

Contraintes thermiques stationnaires dans la cuve d'un réacteur à eau sous pression. L'auteur analyse les sollicitations de la cuve d'un réacteur à eau sous pression, sous certaines conditions simplificatrices et à l'état stationnaire. Il examine la valeur des approximations faites et effectue des calculs relatifs à la cuve du réacteur du type «Voronej». L'ouvre fait partie des études de l'auteur en 1967 à la Chaire des Centrales thermiques de l'Université de Budapest et en constitue un développement ultérieur.

Стационарные термонапряжения в реакторном сосуде, работающем на воде под давлением *(Ф. Колонич).* В работе анализируется нагрузка выдерживающего давление сосуда реактора, работающего на воде под давлением, при определенных упрощающих предположениях в стационарном режиме работы. Исследуется допустимость приближений и выполняются вычисления по реакторному сосуду типа «воронежского». Статя является частью исследований автора в 1967 г. на Кафедре теплоэлектростанций Будапештского политехнического университета, и содержит ряд дальнейших разработок этой темы.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 375—380 (1968)

ON THE EMISSION DEPENDENCE OF THE CATHODE FALL

J. BITÓ
CAND. OF TECHN. SC.
INDUSTRIAL RESEARCH INSTITUTE FOR ELECTRONICS "HIKI", BUDAPEST

[Manuscript received January 15, 1968]

By way of a cathodic perturbation brought about by pressure variation it was possible to deduce the basic relation for the cathode side of the discharges of oxyde cathodes, characterized by a cathode spot. For a cathode with a given work function and for a given area of the cathode spot there exists a univocal relation between the cathode drop and the increasing emission current of the cathode. It was possible to prove a similar relation between the temperature of the cathode spot and the cathode drop. Tests with d.c. and with a.c. discharges also point to possibilities of the economical coordination of surface and of volume electron generation.

I. Introduction

We have not succeeded in giving an unambiguous, general description of the cathode side phenomena of the different types discharges so far. In many respects the experimental data are not unambiguous either, and thus they cannot be generalized.

The producibility of the plasma (of the positive column) and through it the energetics of the whole discharge are considerably influenced by the cathode side phenomena. Therefore, in general, it is desirable to create, such cathodic conditions which can ensure, by a relatively small loss, the stationary maintenance of the desired discharge. In order to ensure a higher discharge current density we must count first on the arc discharge range and if other reasons do not oppose it the application of cathodes of small work functions furnished with emission coating, is suitable. In order to get better acquainted with the cathodic phenomena we looked for a connection between the cathodic thermionic emission of the arc discharge and the cathode fall in the case of discharges of direct and 50 cps frequency alternating current.

II. Experimental conditions, measuring methods

The examination of the coordination between the cathode side and the cathode was carried out with such oxide cathode discharge tubes in which the pressure of the argon was changed in the range of 1—5 Torr and besides it a constant mercury vapour pressure of $6 \cdot 10^{-3}$ was maintained in the discharge.

The measurements which we are going to publish were carried out at 400 mA discharge current, by d.c. and a.c. discharges, with 1100 mm long glass wall discharge tubes of 36 mm internal diameter.

In the course of the experiments probe measurements and emission current measurements were made to clear up the connection between the cathode fall and the emission current of the cathode. The probe measurements were carried out with the aid of three small cylindrical probes placed in the homogeneous positive column part near to the cathode. The probes were immersed into the axis of the discharge tube at the same depth. The temperature of the tungsten spiral cathode having an emission coating, that of the cathode spot, and the temperature distribution of the cathode surface were measured by an optical pyrometer. A cathetometric system served for the control of the extension and situation of the cathode spot.

III. Results

Our aim was to establish the connection between the cathode fall and the thermionic emission from the cathode under the above outlined conditions. We employed for this purpose the influence of the change of pressure resulting from the measurements carried out with seven tubes of different types. It turned out, namely, that during the changing of the argon pressure — under

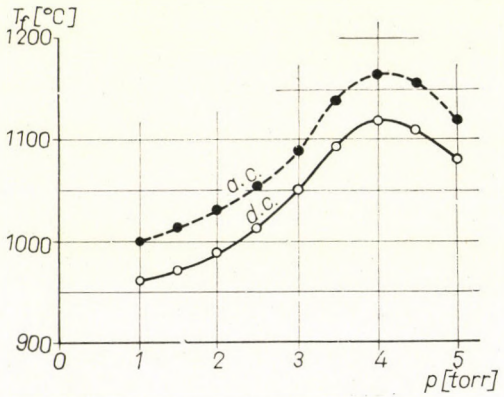


Fig. 1. The pressure dependence of the cathode spot temperature in a.c. and d.c. case

identical discharge conditions — on the size of the cathode spot does not change in the 1—5 Torr range, and so at a given, constant 400 mA discharge current the current density of the cathode spot does not change either. But because of the changing of the argon pressure the interactions of the cathode space and together with it the interactions on the cathode surface were changed. With the increase of the pressure — as it can be seen in Fig. 1 — the T_f cathode

spot temperature increases in the pressure range up to 4 Torr, and for the maintenance of the a.c. discharge higher spot temperature is needed (a.c. curve) than at the d.c. discharges (d.c. curve) occurring under the same circumstances. The difference in the a.c. case is explicable with the transient phenomena and with the loss of charged particles. In Fig. 2 can be seen the T_f spot temperature dependence of the V_c cathode fall obtained by probe measurements. The different spot temperatures were produced by the change of the argon pressure with unchanged cathode spot current density and at a constant mercury vapour pressure. To the cathode spot temperature obtained in the d.c. case belong

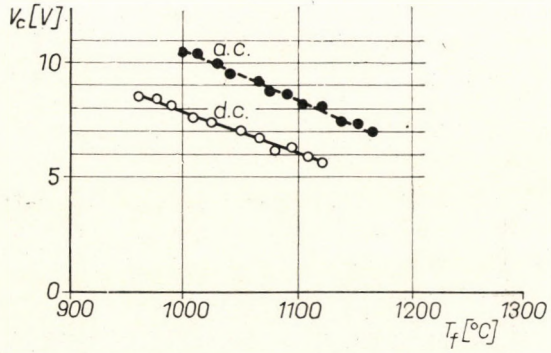


Fig. 2. The cathode spot temperature dependence of the cathode fall in a.c. and d.c. case

essentially lower cathode falls, thus a discharge may be maintained at a given cathode spot temperature with a smaller cathode fall, respectively at a given cathode fall with a smaller cathode spot temperature in d.c. discharges than in the a.c. case. In the examined temperature interval a linear relation exists between the cathode fall and the spot temperature (Fig. 2). The dependence from the i_e emission current of the T_f spot temperature and of the V_c cathode fall is shown in Fig. 3. in the case of d.c. and a.c. currents. In accordance with our expectations with a cathode of a given work function there is a linear relation between the cathode spot temperature and the electron current emitted decisively (at $60 \div 70\%$) from the cathode spot. The changes of the cathode spot are followed in our case by the change of the average temperature of the cathode.

As it can be seen from the curves of the cathode fall (which are determined with another cathode) shown in Fig. 3. the cathode fall may be diminished by the formation of a cathode of great emissivity. In our case the taking of the curve was made possible by the change of the argon pressure, but we can get curves of similar character also then, if we change the thermionic emission of the cathode applying an external cathode heating. In the latter

case, however, we cannot say anything about the current density on the cathode surface and the size of the cathode spot.

Thus, in the case of a given discharge current density such a situation can be created on the cathode side when the cathode has an electron emission, which makes the cathode fall unnecessary and in extreme cases — at very high emission current — a retarding space appears [2] which shadows the cathode in the form of a considerable negative space charge.

The task of the cathode side range is the producing of an electron current with convenient energy distribution and intensity for the positive column of the discharge. The electrons must be produced partly by the cathode and

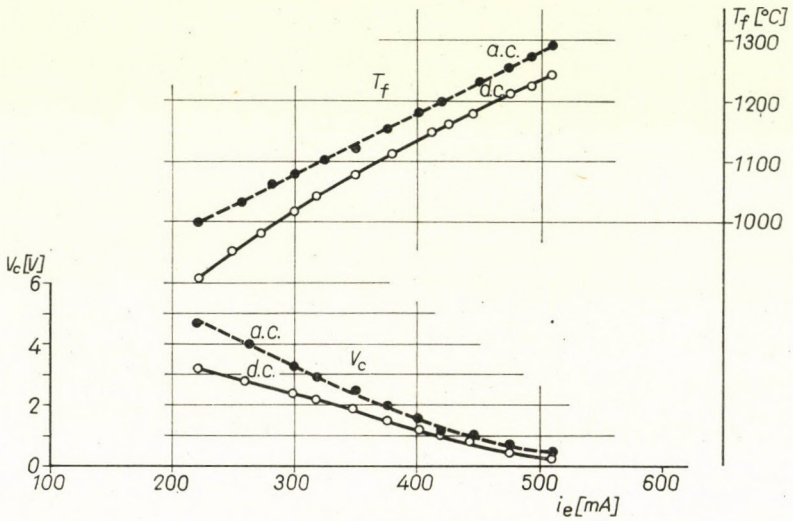


Fig. 3. The thermionic emission dependence of the cathode spot temperature and the cathode fall

partly by the spaces of a great field strength before the cathode. As can be seen in Fig. 3 the voltage fall of the fields — which can generally be considered as a loss compared to the complete discharge — may be reduced corresponding to the given connection by the selection of cathodes of a good emissivity. The potential conditions of the cathode spaces are thus determined by the emissivity of the cathode. The cathode is primarily influenced by the changed discharge parameters through the intermediation of the ion current change: the cathode spot temperature is changed and consequently its emission current too, which in the here outlined form determines the cathode fall; namely, that electron quantity which is to be produced by volumetric ionization in the cathode space, first in the cathode dark space and in the negative glow space for the substitution of the thermionic emission from the cathode.

REFERENCES

1. Bitó, J.: *Magyar Fizikai Folyóirat* **14** (1966); 185, 297.
2. Clayless, M. A.: *Brit. J. Appl. Phys.* **8** (1957), 331.

Die Abhängigkeit des Katodenfalls von der Emission. Mit Hilfe einer durch Druckänderung hervorgerufenen katodenseitigen Perturbation war es möglich, die katodenseitige Grundgleichung für die durch einen Katodenfleck charakterisierbare Oxydkatoden-Entladungen zu bestimmen. Für eine Katode mit gegebener Austrittsarbeit besteht bei gegebener Katodenoberfläche ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Katodenpotentialabfall und dem Emissionsstrom der Katode: der Katodenfall nimmt proportional dem steigendem Emissionsstrom ab. Es gelang einen ähnlichen Zusammenhang zwischen der Temperatur des Katodenflecks und dem Katodenfall nachzuweisen. Versuche mit Gleichstrom- und Wechselstromentladungen weisen zugleich auf die Möglichkeiten der wirtschaftlichen Abstimmung der Oberflächen- und der Volumen-Elektronenerzeugung hin.

Dépendance de la chute cathodique de l'émission. Une perturbation du côté cathodique provoquée par variation de la pression permettait de déterminer la relation fondamentale du côté cathode des décharges des cathodes à oxyde caractérisées par une tache cathodique. Pour une cathode d'un travail de sortie et d'une surface de la tache cathodique donnés, il y a une relation univoque entre la chute cathodique et le courant d'émission de la cathode: la chute cathodique est réduite en raison inverse du courant d'émission. L'auteur a réussi d'établir une relation semblable entre la température de la tache cathodique et la chute cathodique. Les essais avec décharges à courant continu et à courant alternatif montrent en même temps les possibilités d'un accord économique entre les générations d'électrons superficielle et volumétrique.

Эмиссионная зависимость падения потенциала *(Я. Бито)*. В процессе возмущения со стороны катода, созданного изменением давления, стало возможным определить основные зависимости разрядов на оксидных катодах со стороны катода, характеризуемых катодным пятном. В случае катода с данной работой выхода и при данной поверхности катодного пятна между падением потенциала и эмиссионным током катода существует однозначная зависимость, а именно: падение потенциала уменьшается пропорционально с ростом эмиссионного тока. Аналогичную зависимость удалось показать также между температурой катодного пятна и падением потенциала. Опыты, проведенные при разрядах постоянного и переменного токов, одновременно указывают также на возможность экономичного согласования поверхностного и объемного генерирования электронов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 381—408 (1968)

METHODE ZUR BESTIMMUNG DES REIBUNGS-MITTELDRUCKES VON KOLBEN-VERBRENNUNGS-MOTOREN

E. PÁSZTOR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR WÄRMEKRAFTMASCHINEN, TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST

[Eingegangen am 18. Januar, 1968]

In der Arbeit wird der Zusammenhang zwischen dem Reibungsmitteldruck der Verbrennungs-Kolbenmotoren und dem Arbeitsprozeß untersucht. Um den Zusammenhang zu ermitteln, führt der Verfasser den Begriff des Durchschnittsdruckes ein, mittels dessen zwischen dem mechanischen Wirkungsgrad und dem Arbeitsprozeß des Motors ein allgemein gültiger Zusammenhang aufgestellt werden kann. Zur Untersuchung der obigen Probleme wurde eine exaktere Methode des Fremdantriebsverfahrens als die bisherigen ausgearbeitet, mit deren Hilfe der Zusammenhang zwischen dem Reibungsmitteldruck und der Motorkonstruktion, bzw. den thermisch-mechanischen Charakteristiken des Arbeitsprozesses genauer als mit den bisherigen Methoden untersucht werden kann.

Bezeichnungen

p [kp/cm²]	Mittlerer Druck, indizierter mittlerer Druck, durchschnittlicher Druck, Druck eines gegebenen Punktes des Arbeitsprozesses (die konkrete Bedeutung ist von dem angewandten Index abhängig);
S_g [m]	der zu dem gesamten Zylindervolumen gehörige Hub;
S_h [m]	tatsächlicher Hub des Motors;
S [m]	zu einem gegebenen ΔT gehörige Verschiebung des Kolbens;
m_n	zum n-ten Teilhub gehöriger Polytropenexponent;
T_0 [°K]	Anfangstemperatur des Prozesses;
Q_n [kcal/sec]	während des n-ten Teilhubes durch die Wand strömende Wärmemenge;
α_n [kcal/m² h °C]	Wärmeübergangszahl;
A_n [m²]	während des n-ten Teilhubs an der Wärmeübergabe beteiligte mittlere Oberfläche;
W [m/sec]	mittlere Kolbengeschwindigkeit;
D [m]	Kolbendurchmesser;
ε	Kompressionsverhältnis;
T_w [°K]	Wandtemperatur;
Δt_n [sec]	die zur Verschiebung des Kolbens auf gegebenem Abschnitt nötige Zeit;
$\Delta\varphi' n$	Winkeldrehung der Kurbelwelle;
n [l/min]	Drehzahl der Kurbelwelle;
L_g [kg]	Menge der während eines Arbeitsprozesses des Motors angesaugten Luft (Arbeitsmedium);
c [kcal/kg °C]	spezifische Wärme;
ΔM [kg]	Menge des zufolge der unvollkommenen Dichtung während eines Hubelements durchsickernden Mediums;
ΔM_g	während des gesamten Arbeitsprozesses (2 Umdrehungen) durchsickernde Menge des Mediums;
U [kcal]	innere Energie;
ΔU [kcal]	Abfall der inneren Energie im Zylinder während eines Hubelements zufolge Undichtheit;
ΔI [kcal]	Enthalpie des zufolge Undichtheit aussickernden Mediums;
H [m]	Kolbenhöhe;
M [kg/sec]	die zufolge der unvollkommenen Dichtung während der Zeiteinheit durchsickernde Gasmenge;

p_{min} [kp/cm²]	minimaler Druck des im Motor verwirklichten künstlichen Arbeitsprozesses;
δ [m; mm]	Spalt zwischen dem Kolben und der Zylinderwand;
m	Luftverhältnis;
λ	Füllgrad.

I. Einleitung

Die Werte der mechanischen Reibungsverluste in Verbrennungs-Kolbenmotoren sind mit jenen der inneren (indizierten) Verluste von gleicher Größenordnung, so kann ihre Wirkung auf die Gestaltung der Charakteristiken des wirklichen (verlustbehafteten) Motors nicht vernachlässigt werden, im Gegensatz zu den kalorischen Strömungsmaschinen (Dampf- und Gasturbinen usw.), wo der mechanische Reibungsverlust höchstens $1 \div 2\%$ der Nutzleistung ausmacht.

Mit der Bestimmung der mechanischen Verluste der Kolbenmotoren, mit der Auswertung der Resultate hat man sich bis jetzt, in erster Linie wegen der später erwähnten meßtechnischen Schwierigkeiten, unverdient wenig beschäftigt. Die Berechnung der Reibungsverluste ist wegen der Kompliziertheit der Schmierverhältnisse praktisch undurchführbar, bzw. kommen die erhaltenen Ergebnisse der Wirklichkeit selbst im Charakter nur mit großen Fehlern näher.

Die über dieses Thema bisher erschienenen Publikationen haben sich mit der Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den Reibungsverlusten und dem Arbeitsprozeß des Motors im wesentlichen nicht befaßt, sie haben den Umstand, daß die Reibungsverluste in entscheidendem Maße gerade durch den Arbeitsprozeß bestimmt werden, außer Acht gelassen.

Zielsetzung dieser Studie ist der Versuch, die thermischen Zusammenhänge zwischen den mechanischen Reibungsverlusten und den wichtigsten Charakteristiken des Arbeitsprozesses aufzudecken, sowie eine Methode anzugeben, mit der die Reibungsverluste genauer als mit den bisherigen bestimmt werden können.

II. Problem der Untersuchung der mechanischen Reibungsverluste, die bisher entwickelten Verfahren

Die größte Schwierigkeit bei der Bestimmung der mechanischen Verluste bzw. des aus diesen errechneten mittleren Druckes p_m besteht darin, daß dieser nur durch den Unterschied zwischen dem aus dem Indikator-Diagramm berechneten indizierten mittleren Druck p_i und dem aus den Bremsdaten des Motors gewonnenen effektiven mittleren Druck p_e exakt bestimmt werden kann,

$$p_m = p_i - p_e, \tag{1}$$

wo p_m der, der Summe der Leistungsaufnahmen der Reibungsverluste (p_r) und der Hilfseinrichtungen (p_h) entsprechende, mittlere Druck ist.

Eine solche Bestimmung von p_m setzt einen, Nutzleistung abgebenden, unter tatsächlichen Betriebsverhältnissen mit einem wirklichen Arbeitsprozeß arbeitenden Motor voraus. Dabei ergibt sich p_m aus dem ungenau bestimmbaren Unterschied zwischen zwei verhältnismäßig großen Werten $(p_i - p_e)$, außerdem kann bei mehrzylindrigen Motoren auch die Arbeit der einzelnen Zylinder voneinander abweichen. So kann dieses Verfahren, obgleich es vollkommen korrekt ist, in der Praxis nicht angewendet werden, da der Meßfehler von nahezu gleicher Größenordnung wie die zu messende Größe ist.

Wegen der meßtechnischen Schwierigkeiten wurden zur Bestimmung der mechanischen Verluste mehrere, von dem obigen Prinzip abweichende Verfahren ausgearbeitet.

Die bekanntesten von diesen sind die Verfahren von WILLIAMS und von MORZE [1—4]. Die grundlegende Ungenauigkeit beider ist, daß der mittlere Reibungsdruck, im Gegensatz zur Wirklichkeit, als vom Arbeitsprozeß bzw. den während des Arbeitsprozesses entstehenden thermisch-mechanischen Verhältnissen unabhängig vorausgesetzt wird.

Bei den sogenannten »Auslauf-Verfahren« [5] wird die Brauchbarkeit der Methode durch den Umstand beeinträchtigt, daß während des Messens die Drehzahl sich laufend verringert, und so die drehzahlabhängigen Schmierverhältnisse im Motor sich nicht der jeweiligen Drehzahl entsprechend gestalten können. Deshalb eignet sich das Auslaufverfahren nicht zur kontinuierlichen Untersuchung der Reibungsverluste des Motors in Abhängigkeit von der Drehzahl.

Laut den bisherigen Untersuchungen des Verfassers kann die Wirklichkeit am besten mittels Fremdantriebs des Motors angenähert werden, wenn die tatsächlichen Betriebsverhältnisse möglichst vollkommen nachgeahmt werden, und wenn die so gewonnenen Resultate unter Berücksichtigung des im Motor zustandegebrachten Arbeitsprozesses analysiert werden. Bei den bisherigen in dieser Richtung ausgeführten Untersuchungen [6, 7, 20] wurden die obigen Bedingungen im wesentlichen nicht erfüllt, deshalb schlägt der Verfasser für die Untersuchungen der mechanischen Reibungsverluste bei Fremdantrieb eine genauere Methode als die bisherigen vor und analysiert den Zusammenhang zwischen dem Reibungsverlust und dem Arbeitsprozeß.

III. Die Möglichkeit der Bestimmung des Zusammenhanges zwischen dem Arbeitsprozeß und den Reibungsverlusten bzw. dem mechanischen Wirkungsgrad

Der Reibungsverlust, bzw. der Reibungsmitteldruck (p_r) sind von den Charakteristiken des Arbeitsprozesses des Motors nicht unabhängig.

Laut den bisherigen Untersuchungen des Autors sowie seinen Versuchsergebnissen [4, 8] ist der Reibungsmitteldruck in erster Reihe Funktion des

durchschnittlichen Druckes p_d des Arbeitsprozesses und mit seiner Hilfe kann der Zusammenhang zwischen dem Arbeitsprozeß und dem Reibungsverlust untersucht werden. Der durchschnittliche Druck der Verbrennungsmotoren (Bild 1) kann als Quotient der Fläche des in Funktion des Hubs ausgelegten Indikator-Diagramms und der Basis des Diagramms definiert werden. Als Bezugsgrundlage kann statt des Hubs auch die Winkeldrehung der Kurbelwelle verwendet werden. Der Verfasser hat den dem Hub entsprechenden

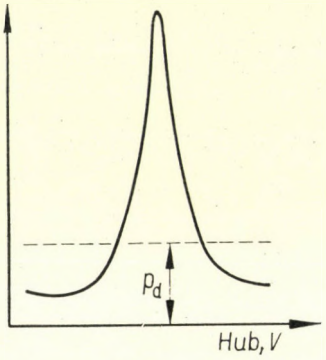


Bild 1

Durchschnittsdruck in Betracht gezogen, da dieser mit dem ebenfalls gemäß dem Hub bestimmten indizierten mittleren Druck unmittelbar verglichen werden kann.

Der Begriff des indizierten mittleren Druckes und der des durchschnittlichen Druckes sind von einander scharf zu trennen, da der erstere nicht für den Reibungsmitteldruck des Motors, sondern für die aus dem Arbeitsprozeß zu gewinnende Nutzarbeit charakteristisch ist. Zwischen dem indizierten mittleren Druck und dem durchschnittlichen Druck besteht mit Hilfe der thermischen Charakteristiken des Arbeitsprozesses ein komplizierter, jedoch im wesentlichen eindeutiger Zusammenhang.

Der Reibungsmitteldruck wird außer dem grundlegenden Parameter, dem durchschnittlichen Druck, in geringerem Maße auch durch den Arbeitsprozeß bzw. durch sonstige Charakteristiken des Motors beeinflußt: Charakter des Arbeitsprozesses, Verhältnis der maximalen und minimalen Drücke, der Wärmezustand des Motors, die Drehzahl bzw. die mittlere Kolbengeschwindigkeit.

Der Reibungsmitteldruck kann also folgendermaßen angegeben werden

$$p_r = f(p_d; p_{\max}/p_{\min}; n; \text{ Wärmezustand}; \text{ Konstruktion}). \qquad (2)$$

Der funktionelle Zusammenhang (2) kann mit Hilfe der im folgenden beschriebenen theoretisch-experimentellen Methode, im Wege des Fremdantriebs des Motors bestimmt werden.

Zwischen dem den Reibungsverlust entscheidend bestimmenden durchschnittlichen Druck und den übrigen Parametern sowie dem indizierten mittleren Druck p_i des tatsächlichen Arbeitsprozesses besteht ein mit hinreichender Genauigkeit berechenbarer bzw. meßbarer, im wesentlichen eindeutiger Zusammenhang [9, 11—13]:

$$p_i = f(p_d;\ \varepsilon;\ m;\ \lambda;\ T_0;\ p_0;\ n;\ \text{Wärmezustand};\ \text{Wärmeübertragungsgesetz}). \tag{3}$$

Mit Hilfe der Funktionen (2) und (3) kann zwischen dem Reibungsdruck p_r und dem indizierten Mitteldruck p_i ein Zusammenhang geschaffen werden:

$$p_r = f(p_i;\ \varepsilon;\ m;\ \lambda;\ T_0;\ p_0;\ n;\ \text{Wärmezustand};\ \text{Wärmeübertragungsgesetz}). \tag{4}$$

Der mechanische Wirkungsgrad η_m des Motors ist eine eindeutige Funktion von p_r; p_i und des zur Leistungsaufnahme der Hilfseinrichtung nötigen Druckes p_h:

$$\eta_m = \frac{p_i - p_m}{p_i} = \frac{p_i - (pr + p_h)}{p_i} = f(\varepsilon;\ m;\ \lambda;\ T_0;\ p_0;\ n;\ \text{Wärmezustand};\ \text{Wärmeübertragungsgesetz}), \tag{5}$$

wo

ε Kompressionsverhältnis;
m Luftverhältnis;
λ Füllgrad;
T_0, p_0 Umgebungscharakteristiken;
n Drehzahl.

Mit dem oben beschriebenen Verfahren (Einzelheiten siehe Schrifttum [8, 14]) kann also ein im Grunde eindeutiger Zusammenhang zwischen den thermischen Charakteristiken und dem Reibungsverlust bzw. dem mechanischen Wirkungsgrad geschaffen werden.

IV. Bestimmung des Reibungsmitteldruckes mittels Fremdantriebs des Motors

1. Aufbau der Versuchseinrichtung

Gemäß den bisherigen Untersuchungen können die Reibungsverhältnisse des Verbrennungsmotors am genauesten mit Hilfe des Fremdantriebs des unter betriebsmäßige Verhältnisse gebrachten Motors ermittelt werden. Zwecks möglichst vollkommener Annäherung an die Betriebsverhältnisse des wirklichen Motors wird im Motor ein künstlicher Arbeitsprozeß zustandegebracht, der eine dem ursprünglichen Arbeitsprozeß gleichwertige mechanische Belastung

sichert. Vom Gesichtspunkt der thermischen und mechanischen Charakteristiken aus kann der ursprüngliche Arbeitsprozeß am besten durch einen Arbeitsprozeß ohne Wärmeübertragung angenähert werden, der jedoch im übrigen über die gleichen Charakteristiken wie der ursprüngliche verfügt, wie Bild 2

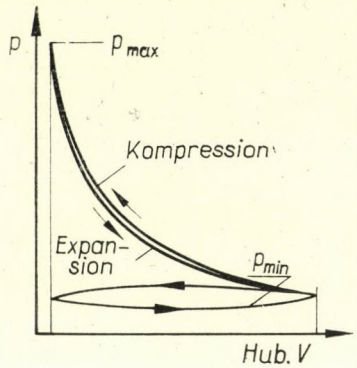


Bild 2

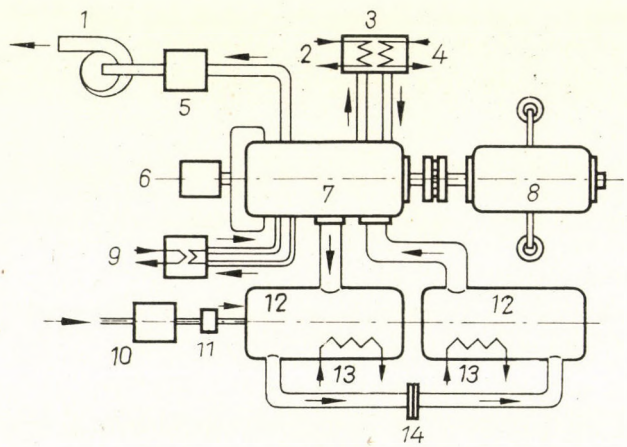


Bild 3

Bezeichnungen: 1 Saugventillator; *2* Heizung; *3* Ölkessel oder Kühler; *4* Kühlung; *5* Leckgasmessung; *6* Hubgeber zur Indizierung; *7* Versuchsmotor; *8* Pendelmotor; *9* Schmierölkühlung; *10* Luftkompressor; *11* Druckregler; *12* Luftbehälter; *13* Kühler; *14* Luftblende.

darstellt. Der künstliche Arbeitsprozeß besteht aus folgenden Teil-Arbeitsprozessen: Ansaugen, Kompression, Expansion, Auspuffen.

Auf Bild 3 ist die Skizze der Versuchseinrichtung zu sehen. Der Motor saugt aus dem einen Luftbehälter an und pufft in den anderen aus, die beiden Luftbehälter sind durch eine mit einer Meßblende versehenen Rohrleitung miteinander verbunden. Durch Änderung des Druckes in den Luftbehältern kann der Anfangsdruck des Arbeitsprozesses und gleichzeitig der durchschnittliche Druck des Arbeitsprozesses eingestellt werden. Mittels dieses Verfahrens, allein

durch Änderung des Druckes in den Luftbehältern, können auch die Reibungsverhältnisse der in verschiedenem Grad aufgeladenen Motoren beobachtet werden. Die Menge des infolge der unvollkommenen Dichtung des Kolbens fortsickernden Arbeitsmediums wird durch ein Spezial-Pitotrohr bestimmt, dabei wird im Interesse der Meßgenauigkeit im Kurbelgehäuse immer atmosphärischer Druck gesichert. Gemäß unseren Experimenten hängt der gemessene Wert des durchsickernden Arbeitsmediums in entscheidendem Ausmaß von dem im Kurbelgehäuse herrschenden Druck ab. Im Falle von Überdruck strömt

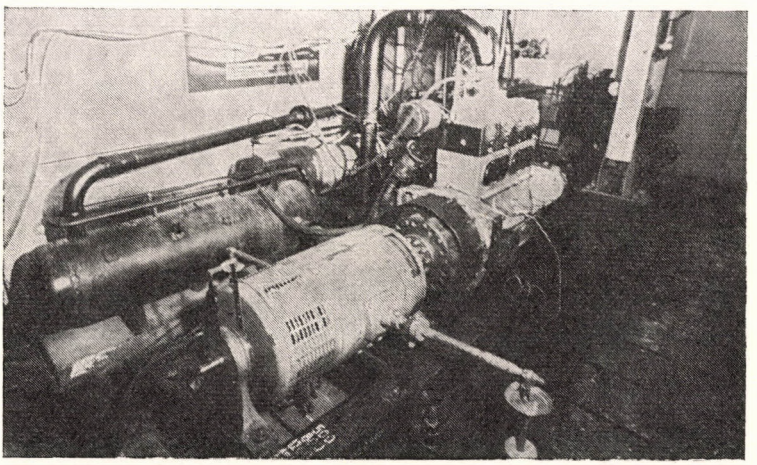


Bild 4

auch bei den Dichtungen zwischen den rotierenden Wellen und dem Gehäuse eine bedeutende Menge von Medium aus, und so verringert sich der gemessene Wert bedeutend. Mittels Einschaltung eines Saugventilators nach dem Pitotrohr kann im Kurbelgehäuse immer genau atmosphärischer Druck hergestellt werden, dadurch hört in den Spalten — mangels Druckunterschieds — das Sickern auf. Mittels obigen Verfahrens kann die Meßgenauigkeit der aussickernden Gasmenge wesentlich gesteigert werden. Im Kühlsystem des Motors wurde statt Wasser heißes Öl zirkuliert, das in einem kombinierten Kühl- und Heizsystem auf die gewünschte Temperatur eingestellt wurde. Ähnlich wurde auch die Temperatur des Schmieröls in einem Kühlsystem geregelt.

Mittels Änderung des Anfangsdruckes, des Kompressionsverhältnisses, der Zylinderwand- und der Öltemperatur sowie der Drehzahl gehört zu jedem tatsächlichen Betriebszustand des Motors ein durch einen künstlichen Arbeitsprozeß geschaffener Betriebszustand, der vom Gesichtspunkt der Reibung aus mit dem ursprünglichen gleichwertig ist.

Die Experimente bzw. die Ausarbeitung des Meßverfahrens wurden mit Unterstützung der *Ungarischen Akademie der Wissenschaften*, des *Instituts*

für Fahrzeugentwicklung und der *Autofabrik* CSEPEL durchgeführt. Auf Bild 4 ist das Foto der für den Motor Typ *D 414* der Autofabrik CSEPEL gebauten Versuchseinrichtung zu sehen.

2. *Prinzip des Verfahrens*

Der in mittlerem Druck ausgedrückte Gesamtverlust p_{gv} des von außen angetriebenen, den künstlichen Arbeitsprozeß verwirklichenden Motors ist aus den Daten des den Motor drehenden Gleichstrom-Pendelmotors eindeutig festzustellen. Dieser Gesamtverlust p_{gv} ist jedoch, laut den bisherigen Untersuchungen nicht identisch mit dem mechanischen Reibungsverlust des Motors, sondern die Summe der folgenden Komponenten:

$$p_{gv} = p_r + p_{pm} + p_h + p_{gw} + p_{ki} + p_{di}\,, \tag{6}$$

wo

p_r tatsächlicher Reibungsverlust, der einen entscheidenden Teil des Gesamtverlustes, ca. 50—70% bildet;

p_{pm} eigener mechanischer Ventilationsverlust des Pendelmotors;

p_h der zur Betätigung der durch den untersuchten Motor angetriebenen eventuellen Hilfseinrichtungen nötige mittlere Druck;

p_{gw} indizierter mittlerer Druck des Gaswechselvorganges;

p_{ki} der aus der Wärmeübergabe zwischen dem Arbeitsmedium und der Zylinderwand stammende beim Hauptarbeitsprozeß (Kompression-Expansion) zustandekommende, in den praktischen wichtigen Fällen immer negative, indizierte mittlere Druck,

p_{di} der aus dem Durchblasen des Mediums (Undichtheit) zwischen dem Kolben–Kolbenring und der Zylinderwand sich ergebende, beim Hauptarbeitsprozeß entstehende- in jedem Fall negative, indizierte mittlere Druck.

Durch Bestimmung der Verluste, die nicht Reibungscharakter haben, kann mit Hilfe des Grundzusammenhanges (6) die Änderung des Reibungsverlustes p_r in Abhängigkeit von den verschiedenen thermischen und mechanischen Parametern geprüft werden.

V. Bestimmung der einzelnen Teilverluste ohne Reibungscharakter

1. *Die meßbaren Teilverluste*

Der Eigenverlust des Pendelmotors (p_{pm}) kann in Kenntnis seiner Charakteristik bzw. durch deren Aufnahme unmittelbar bestimmt werden. Die in mittlerem Druck ausgedrückte *Leistungsaufnahme* p_h der durch den untersuchten Motor angetriebenen *Hilfseinrichtungen* kann in Kenntnis der Leistungsdaten der Hilfsmaschinen ebenfalls ohne Weiteres berechnet werden. Der indizierte mittlere Druck des *Gaswechselvorganges* p_{gw} kann aus dem Schwachfeder-Indikatordiagramm des Vorgangs bestimmt werden. Eine solche Anwendung des Schwachfeder-Indikatordiagramms bei der Untersuchung des mittleren Reibungsdruckes verursacht um eine Größenordnung geringere

Ungenauigkeit, als wenn der mittlere Reibungsdruck aus dem Unterschied zwischen dem indizierten und dem effektiven mittleren Druck bestimmt werden sollte. Gemäß den Meßergebnissen steigt der Wert p_{gw} in Abhängigkeit von der Drehzahl und dem Anfangsdrucke bedeutend. Der im Vergleich zum effektiven Betriebszustand bedeutend angewachsene Gaswechselverlust wird durch die an mehreren Stellen der Versuchseinrichtung zwangsläufig auftretenden Drossel- und Strömungsverluste begründet.

2. Die mittels Berechnung bestimmbaren Teilverluste

Der zwischen der Zylinderwand und dem Arbeitsmedium auftretende Wärmeaustauschverlust p_{ki} bzw. der aus der unvollkommenen Dichtung der Kolben stammende Verlust p_{di} ergeben sich beim Hauptarbeitsprozeß während der Kompressions- und Expansionstakte. Zufolge dieser Verluste ist der Unterschied zwischen den zu gleichen Kolbenlagen gehörenden Kompressions- bzw. Expansionsdrücken maximum 1 kp/cm^2. Nachdem der Höchstdruck der Kompression d. h. der maximale Druck des künstlichen Arbeitsprozesses zwischen 90 und 120 ata liegt, ist es praktisch unmöglich, den max. 1 kp/cm^2 Druckunterschied zwischen den Kompressions- und Expansionskurven durch Indizierung nachzuweisen. Die Fehlergrenze selbst des genauesten Indikators kommt dem nachzuweisenden Druckunterschied gleich, daher ist die Bestimmung der obigen Verluste unter den gegenwärtigen Umständen nur durch Berechnung möglich. Die Berechnung kann, wenn alle wesentlichen Nebenumstände der Vorgänge berücksichtigt werden, mit entsprechender Genauigkeit ausgeführt werden, und der Arbeitsaufwand ist (im gegebenen Fall sind 200—300 Betriespunkte zu bestimmen) im Vergleich zum Indizieren um eine Größenordnung geringer.

a) Bestimmung des beim Hauptarbeitsprozeß entstehenden von der Wärmeübergabe zwischen dem Arbeitsmedium und der Zylinderwand stammenden, negativen, indizierten mittleren Druckes. Gemäß dem zur Bestimmung des Reibungsmitteldruckes ausgearbeiteten und in dieser Studie erörterten Verfahren besteht der Hauptarbeitsprozeß des untersuchten Motors aus Kompressions- und Expansionskurve. Die Expansion folgt der Kompression ohne Wärmeübergabe, der Höchstdruck des den künstlichen Arbeitsprozeß verrichtenden Motors stimmt aber mit dem Höchstdruck des Motors überein, der einen tatsächlichen Arbeitsprozeß (mit Wärmeübergabe) verrichtet.

Im Falle von isentropischer Kompression und Expansion (Bild 5a) decken sich die beiden Kurven genau, so daß der indizierte mittlere Druck des Hauptarbeitsprozesses in jedwedem Betriebszustand identisch gleich Null ist. Im Fall einer wirklichen Zustandsänderung steigt zu Beginn der Kompression die Entropie des Mediums, nachdem die Zylinderwand wärmer als das Arbeitsmedium ist und die Wärme von der Zylinderwand in das Arbeitsme-

dium strömt. Nach dem sogenannten adiabatischen Punkt, wo die Temperatur der Zylinderwand und die des Arbeitsmediums gleich sind, kehrt sich die Richtung der Wärmeströmung um, und so verringert sich die Entropie des Mediums. Bei der Expansion ist die Richtung der Wärmeströmungen gleich der Richtung der während der Kompression auftretenden Strömung, auf diese Weise entsteht der auf Bild 5b dargestellte Kreisprozeß mit negativem Vorzeichen, also ein arbeitverzehrender Vorgang.

Zur Berechnung des indizierten mittleren Druckes des Kreisprozesses muß sowohl die Kompression als auch die Expansion auf isentropische elementare Zustandsänderungen sowie auf elementare isochore (Wärmeübergabe

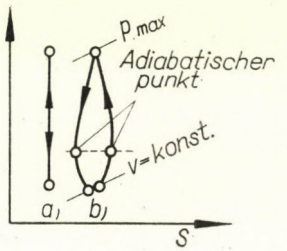


Bild 5

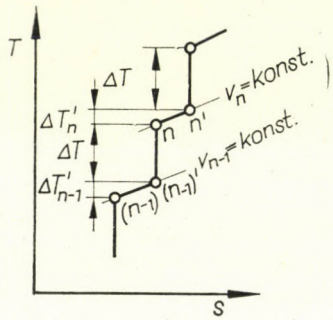


Bild 6

bzw. Wärmeentnahme) Vorgänge aufgeteilt werden (Bild 6). In Anbetracht der außerordentlich niedrigen mittleren Drücke wurden zwecks Steigerung der Genauigkeit die isentropischen elementaren Abschnitte derart bestimmt, daß die in dem Abschnitt zustandekommende Temperaturabnahme bzw. Zunahme ΔT immer identisch sei. Mit Hilfe dieses Verfahrens ist die Durchschnittstemperatur des gegebenen n-ten Abschnitts und damit auch der isentropische Exponent des wirklichen Arbeitsmedium simmer genau bestimmbar. Dadurch wird die Berechnung etwas umfangreicher, aber so kann die sich aus der ungenauen Aufnahme des isentropischen Exponenten ergebende Unsicherheit vermieden werden. Der Exponent wurde in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur des Gases linear angenähert.

Grundgleichung der Aufteilung des Hubs:

$$\Delta S_n = \left(S_g - \sum_{1}^{n-1} \Delta S\right)\left\{1 - \left[\frac{T_0 + (n-1)\,\Delta T}{T_0 + n\Delta T}\right]^{1/m_n - 1}\right\}, \tag{7}$$

wo

Δs_n der n-te Teilhub;
s_g der dem gesamten Zylindervolumen entsprechende Hub;
T_0 Anfangstemperatur;
$m_n = 1{,}423 - 8{,}36 \cdot 10^{-5}\,[T_0 + (n - 1/2)\Delta T]$.

Hier kommt der Vorteil der Hubaufteilung nach konstantem ΔT zum ersten Mal zum Vorschein. Der Polytropenexponent kann so mit großer Genauigkeit vorausbestimmt werden, da die Durchschnittstemperatur des gegebenen n-ten Abschnitts bekannt ist.

Für ein gegebenes Kompressionsverhältnis ε_k muß S_g bis zum k-ten Teilhub aufgeteilt werden

$$\varepsilon_k = \frac{S_g}{S_g - \sum_1^k \Delta S}, \tag{8}$$

wo

$$\sum_1^k \Delta S$$

der zum gegebenen ε_k gehörige Hub ist.

In Kenntnis der Aufteilung des Hubs ist der Druck am Ende des n-ten Abschnitts, mit den Bezeichnungen vom Bild 6:

$$p_n = p'_{n-1}\left(\frac{S_g - \sum_1^{n-1} \Delta S}{S_g - \sum_1^n \Delta S}\right)^{m_n}. \tag{9}$$

Der Polytropenexponent für den n-ten Abschnitt ist:

$$m_n = 1{,}423 - 8{,}36 \cdot 10^{-5}\left(T'_{n-1} + \frac{\Delta T}{2}\right).$$

Die zu m_n gehörige Bezugstemperatur bestimmen wir daher so, daß wir zu der bekannten Temperatur T'_{n-1} die Hälfte der isentropischen Temperaturerhöhung (ΔT) für den n-ten Abschnitt hinzuaddieren. Dieses Verfahren sichert maximale Genauigkeit bei der Bestimmung des Exponenten m_n.

Die Temperatur im Endpunkt des n-ten Teilhubs ist:

$$T_n = \frac{p_n}{p_0} T_0 \left(1 - \frac{\sum_1^n \Delta S}{S_g}\right). \tag{10}$$

Die während des n-ten Teilhubs durch die Wand strömende Wärmemenge ist

$$Q_n = \frac{\alpha_n A_n}{3600} \cdot \left(T_w - \frac{T_n + T'_{n-1}}{2}\right) \Delta t_n. \tag{11}$$

Bei isochorer Wärmeübergabe bzw. Wärmeentzug ist die Temperaturänderung des n-ten isochoren Abschnitts wegen der Wärmeübertragung

$$\Delta T'_n = \frac{\alpha_n A_n \left(T_w - \frac{T_n + T'_{n-1}}{2}\right) \Delta t_n}{3600\, L c_{vn}}, \tag{12}$$

wo

$$\alpha_n = \frac{23{,}9 \left(\frac{p_n + p'_{n-1}}{2}\right)^{0{,}7} W^{0{,}7}}{\left(\frac{T_n + T'_{n-1}}{2}\right)^{0{,}2} D_e^{0{,}3}}; \tag{13}$$

$(p_n + p_{n-1})/2$ der mittlere Druck des gegebenen Abschnitts;
D_e der zu gegebenem ε_k gehörige äquivalente Kolbendurchmesser, bei konstantem Verhältnis Hub/Kolbendurchmesser [m].

In seinen Berechnungen hat der Verfasser von den vielen Wärmeübergangszahlen die in [15, 16] ausgearbeiteten verwendet.

Die am Wärmeübergang teilnehmende Oberfläche:

$$A_n = \frac{D_k^2 \pi}{2} + D_k \pi \left(S_g - \sum_1^{n-1} \Delta S - \frac{\Delta S_n}{2}\right); \tag{14}$$

$$\Delta t_n = \frac{\Delta \varphi_n}{6\, n_{kw}}; \tag{15}$$

wo $\Delta\varphi_n$ zur Kolbenverschiebung des gegebenen Abschnitts gehörige Kurbelwellenverdrehung, die aus den Daten des Kurbeltriebs bestimmt werden kann;
L während eines Hubs angesaugte Luftmenge, wenn S_g 0,138 m,

$$L = 37{,}03 \frac{D_k^2 p_0}{T_0} \text{ [kg]}; \tag{16}$$

c_{vn} zum gegebenen Abschnitt gehörige isochore spezifische Wärme

$$c_{vn} = 0{,}159 + 4{,}33 \cdot 10^{-5} \left(T'_{n-1} + \frac{\Delta T}{2}\right).$$

Die zufolge der isochoren Temperaturänderung $\Delta T'_n$ zustandekommende Druckänderung ist

$$\Delta p'_n = p_n \frac{\Delta T'_n}{T_n}. \tag{17}$$

Temperatur und Druck nach dem isochoren Abschnitt sind

$$\begin{aligned} T'_n &= T_n + \Delta T'_n, \\ p'_n &= p_n + \Delta p'_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Hiermit ist der Anfangspunkt des nächsten Abschnitts erreicht, daher kann der Prozeß von neuem berechnet werden. Die Rechnung muß bis zu dem durch das Kompressionsverhältnis ε_k bestimmten Abschnitt fortgesetzt werden, dann kann die Expansion ähnlich den beschriebenen Prinzipien berechnet werden. Mit der obigen Methode können also der unter Berücksichtigung der

Wärmeströmung korrigierte Kompressionsvorgang und Expansionsvorgang berechnet werden.

Der indizierte mittlere Druck des Prozesses ist auf Grund von Bild 7:

$$p_{ki} = \frac{\sum_{1}^{k} \frac{1}{2}[(p_n^{e'} + p_{n-1}^{e}) - (p_n^{k} + p_{n-1}^{k'})]\,\Delta S_n}{\sum_{1}^{k} \Delta S}, \tag{19}$$

wo die Bezeichnungen e und k in den Exponenten auf die Expansion bzw. die Kompression Bezug nehmen.

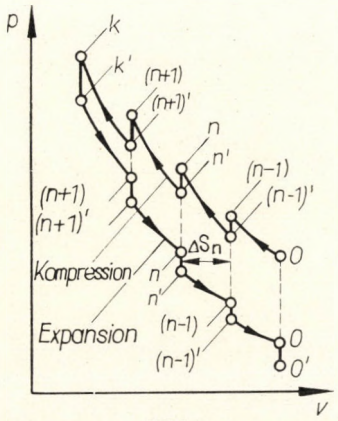


Bild 7

Mit der hier umrissenen Methode kann der indizierte mittlere Druck p_{ki} bestimmt werden. Die Rechnung wurde mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine für die veränderlichen Parameter T_0; p_0; T_w; ε_k; n durchgeführt. Für den Wert von ΔT wurde 10 °C angenommen. Einige herausgegriffene Ergebnisse der Rechnung zeigt (Bild 8). Der Betrag des aus der Wärmeübertragung stammenden negativen Mitteldruckes p_{ki} steigt mit steigendem Anfangsdruck und dem Kompressionsverhältnis sowie mit fallender Zylinderwandtemperatur und Drehzahl. Sein durchschnittlicher Wert liegt um 0,4—0,6 kp/cm^2 und kann daher bei der Analyse der bei Fremdantrieb erhaltenen Gesamtverluste p_{go} nicht vernachlässigt werden.

b) Bestimmung des durch die Undichtheit zwischen Kolben, Kolbenringen und der Zylinderwand verursachten negativen, indizierten mittleren Druckes. Zufolge der unvollkommenen Dichtung zwischen dem Kolben und der Zylinderwand sickert ein Teil des Arbeitsmediums in das Kurbelgehäuse, von wo es durch den Lüftungsstutzen ins Freie ausströmt. Auch wegen dieser Undichtheit liegt die Expansionskurve unter der Kompressionskurve, daher kommt Verlust an Arbeit, negativer indizierter Mitteldruck zustande.

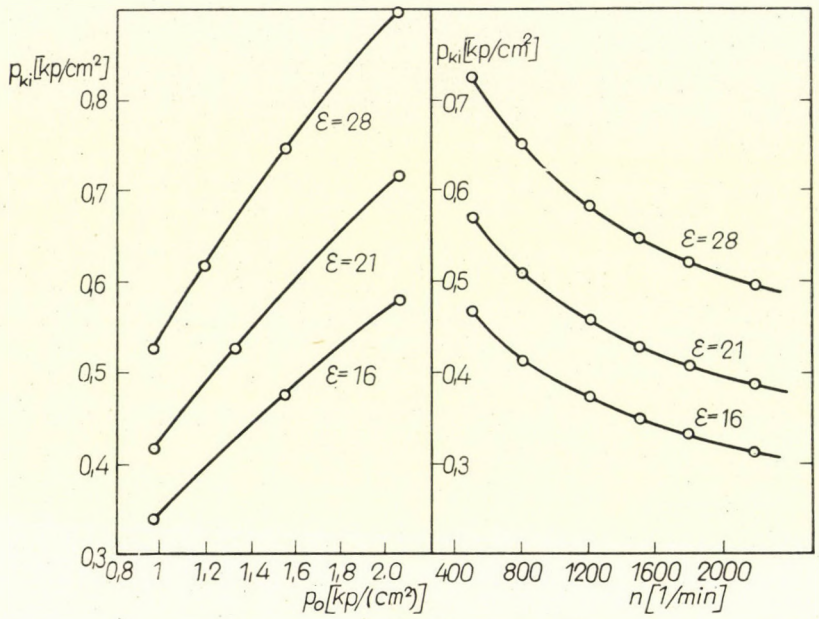


Bild 8

Parameter (links): $t_w = 160$ °C, $n = 1800$/min, $T_0 = 345$ °K; (rechts): $t_w = 160$ °C, $p_0 = 0{,}97$ kp/cm², $T_0 = 345$ °K.

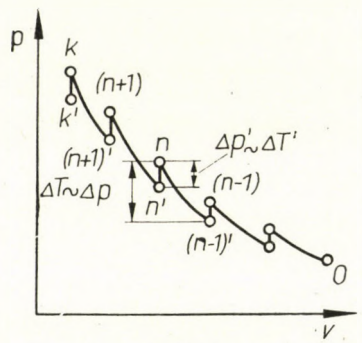


Bild 9

Den Vorgang verdeutlicht Bild 9. Die Kurve der Zustandsänderung (sowohl Kompression als auch Expansion) besteht aus isentropischen Elementarabschnitten und aus Druckabfällen, die unter der Wirkung der Undichtheiten bei konstantem Hubvolumen (angehaltener Kolben) zustandekommen. Das Verfahren für die Berechnung der isentropischen Abschnitte sowie des indizierten mittleren Drucks ist dasselbe wie das in Punkt *a)* mitgeteilte, deswegen besprechen wir hier nur die Berechnung des zufolge der Undichtheiten bei konstantem Volumen zustandekommenden Druckabfalls.

Das Problem kann auf die Ausströmung aus einem geschlossenen Behälter mit endlichem Volumen zurückgeführt werden. Die innere Energie des

Gases im Behälter ist vor dem Aussickern $L_g c_v T = U_1$. Aus dem Behälter strömt in einer gegebenen Zeit Medium von der Masse ΔM aus, während der Behälterdruck um $\Delta p'$, die Behältertemperatur um $\Delta T'$ sinkt und die innere Energie den Wert U_2 annimmt.

Die Verringerung der inneren Energie des Mediums ist

$$\begin{aligned} \Delta U = U_1 - U_2 &= L_g c_v T - [(L_g - \Delta M) c_v (T - \Delta T')] = \\ &= L_g c_v \Delta T' + \Delta M c_v T - \Delta M c_v \Delta T'. \end{aligned} \tag{20}$$

Die Verringerung der inneren Energie des Mediums im Behälter ist gleich der Enthalpie des aussickernden Mediums:

$$\Delta U = \Delta I = \Delta M c_p \left(T - \frac{\Delta T'}{2}\right) = L_g c_v \Delta T' + \Delta M c_v T - \Delta M c_v \Delta T'. \tag{21}$$

Im Interesse der Erhöhung der Genauigkeit der Rechnung wird die Durchschnittstemperatur des aussickernden Mediums in Betracht gezogen.

Wenn man für die Zustände vor und nach dem Ausströmen die allgemeine Gasgleichung anschreibt, so wird vor dem Ausströmen:

$$pV = L_g RT,$$

nach dem Ausströmen:

$$(p - \Delta p') . V = (L_g - \Delta M) R(T - \Delta T').$$

Die beiden Gleichungen dividiert ergeben:

$$1 - \frac{\Delta p'}{p} = \left(1 - \frac{\Delta M}{L_g}\right)\left(1 - \frac{\Delta T'}{T}\right). \tag{22}$$

In Kenntnis von ΔM können aus den Gleichungen (21) und (22) $\Delta p'$ und $\Delta T'$ bestimmt werden:

$$\Delta T' = \frac{(m-1)T}{\frac{m}{2} - 1 + \frac{L_g}{\Delta M}}, \tag{23}$$

wo $m = c_p/c_v$ der isentropische Exponent ist; und

$$\Delta p' = p\left(\frac{\Delta M}{L_g} + \frac{\Delta T'}{T} - \frac{\Delta M \Delta T'}{L_g T}\right). \tag{24}$$

Mit Hilfe der Grundgleichungen (23) und (24) können zum gegebenen Teilhub die unter dem Einfluß der Undichtheit auftretenden Druck- und Temperaturabnahmen bestimmt werden.

Grundlegende Bedingung für die Durchführung der Rechnung ist die Kenntnis der während der einzelnen Teilhübe durchsickernden Mengen des Mediums. Die während des gesamten Arbeitsprozesses bzw. während der Kompression und der Expansion durchsickernden Gesamtmengen sind meßbar, die Verteilung der durchsickernden Menge in Abhängigkeit von dem Hube ist jedoch unbekannt. Ausgehend von einer mit guter Annäherung laminaren, isothermischen Strömung zwischen dem Kolben, den Kolbenringen und der

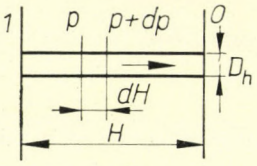


Bild 10

Zylinderwand kann auf Grund des im Bild 10 dargestellten Schemas der folgende grundlegende Zusammenhang angeschrieben werden. Das Problem ist bis zu einem gewissen Grade ähnlich dem Vorgang in den Kapillarröhren von Kühlmaschinen [17]

$$-dp = \lambda c^2 \frac{\varrho}{2} \frac{dH}{D_h} + \frac{c}{g} \frac{dc}{v} . \tag{25}$$

Der hydraulische Durchmesser des δ weiten und $D\pi$ langen Spalts ist $D_h = 2\delta$; mit einer solchen Definition des hydraulischen Durchmessers wird der Zusammenhang zwischen dem Rohrreibungskoeffizienten und der Reynolds-Zahl

$$\lambda = \frac{96}{R} = \frac{96 \cdot gv\mu}{c \cdot 2\delta} = \frac{48 \cdot gv\mu}{c\delta} , \tag{26}$$

wo μ die dynamische Viskosität ist und v das spezifische Volumen des Mediums.

Gleichung (25) drückt aus, daß der Druckunterschied dp längs des Abschnitts dH des Rohrs bzw. des Spalts zwischen dem Kolben und der Zylinderwand zur Überwindung der Reibung des Mediums und zur Beschleunigung des Mediums verbraucht wird.

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$c = \frac{M \cdot v}{D\pi\delta} ;$$
$$dc = \frac{M}{D\pi\delta} \cdot dv . \tag{27}$$

bzw.

Nach Einsetzen der Zusammenhänge (26) und (27) in die Grundgleichung (25):

$$-dp = \frac{12\,g v^2\,\mu M \varrho}{D\pi\delta^3}\,dH + \frac{M^2\,dv}{D^2\pi^2\delta^2 g}\,. \tag{28}$$

Nach Multiplizieren des zweiten Gliedes der Gleichung (Beschleunigungsglied) mit dp/dp und Trennung der Veränderlichen:

$$-dH\,\frac{12\,v\mu M}{D\pi\delta^3} = dp + \frac{M^2\,dp}{D^2\pi^2\delta^2 g}\,\frac{dv}{dp}\,. \tag{29}$$

Im Spalt zwischen dem Kolben und der Zylinderwand kommt unbedingt isothermische Strömung zustande, die Temperatur des strömenden Mediums ist mit guter Näherung die Durchschnittstemperatur der Berührungsflächen zwischen Kolben, Ringen und Zylinderwand.

Ausgehend von der Grundgleichung der isothermischen Strömung:

$$pv = RT = \text{const.},$$

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{v}{p} \tag{30}$$

bzw.

wo T die Durchschnittstemperatur der mit dem Gas in Berührung stehenden Oberfläche ist.

Nach Einsetzen von (30) in (29) and Auflösen der Gleichung nach dH:

$$-dH = \frac{D\pi\delta^3}{12\,\mu M}\left(\frac{p\,dp}{RT} - \frac{M^2}{D^2\pi^2\delta^2 g}\cdot\frac{dp}{p}\right). \tag{31}$$

Nach Integrieren der Gleichung zwischen den gegebenen Grenzen:

$$\int_0^H dH = \frac{D\pi\delta^3}{12\,\mu M}\int_{p_0}^{p_1}\left(\frac{p\,dp}{RT} - \frac{M^2}{D^2\pi^2\delta^2 g}\,\frac{dp}{p}\right), \tag{32}$$

wo H die Länge des Kolbens ist. Zu $H = 0$ (Anfang des Spalts) gehört p_1, zu $H = H$ (Ende des Spalts) gehört der atmosphärische Druck p_0.

Für die konkrete Lösung der Gl. (32) wurden folgende Konstanten angenommen:

$$D' = 0{,}112\text{ m};\ H = 0{,}145\text{ m};\ T = 423^\circ\text{ K};\ R = 29{,}3\,\frac{\text{mkp}}{\text{kg}\,^\circ\text{K}};$$

$$\mu = 2{,}46\cdot 10^{-6}\,\text{kp sec/m}^2;\ p_0 = 1\,\text{kp/cm}^2.$$

Der Spalt zwischen dem Kolben und der Zylinderwand wurde zwischen den Grenzen $\delta = (0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2)\cdot 10^{-3}$ m variiert.

Nach Integration:

$$H = \frac{D\pi\delta^3}{12\,\mu M}\left(\frac{p_1^2 - p_0^2}{RT} - \frac{M^2}{D^2\pi^2\delta^2 g}\ln\frac{p_1}{p_0}\right). \tag{33}$$

Die Ergebnisse der Rechnung zeigt Bild 12. Die pro Zeiteinheit durchgeblasene Menge des Mediums ist mit sehr guter Näherung dem Anfangsdruck p_1 proportional und wächst bedeutend mit Anwachsen des Spaltmaßes. Das in diesen Berechnungen eingesetzte Spaltmaß ist natürlich fiktiv und kann mit den wahren Verhältnissen nicht verglichen werden. Genauer gesagt, in Wirk-

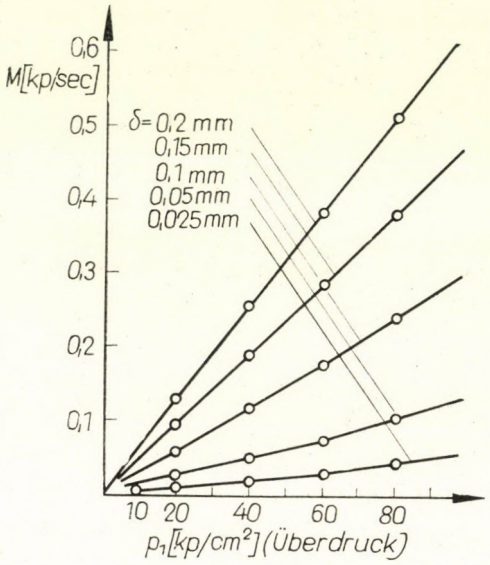


Bild 11

lichkeit komplizieren die Kolbenringe und der Ölfilm an der Zylinderwand die Erscheinungen derart, daß von einem wirklichen Spaltmaß nicht die Rede sein kann. Der gleichwertige Spalt zwischen dem wahren Kolben und der wahren Wand kann folgendermaßen definiert werden: unter gleichwertigem Spalt ist jener durch Gl. (33) definierte fiktive Spalt zu verstehen, der eine den wahren Verhältnissen gleiche Gasmenge liefert.

Die Versuchsergebnisse zeigen eine mit obigen theoretischen Erwägungen gleiche Tendenz. Die Fotografie der Versuchseinrichtung zeigt Bild 12. An Stelle des einen Zylinderkopfs des Versuchsmotors CSEPEL D 114 wurde das im Bild sichtbare druckfeste Rohr mit großem Rauminhalt montiert, so daß praktisch der Kompressionsvorgang und der Expansionsvorgang aufhörten, ohne daß der Zylinderraum mit der Atmosphäre verbunden werden hätte müssen. So befand sich auch während der Bewegung des Kolbens oberhalb dessel-

ben ein Medium von gut angenähertem konstantem Druck, und der Zusammenhang zwischen der während der Zeiteinheit durchgeblasenen Menge des Mediums und dem Anfangsdruck wurde dem Experiment zugänglich. Ohne Aufhebung des Kompressions- und Expansionsvorgangs herrscht über dem in Bewegung befindlichen Kolben ein ständig wechselnder Druck und so kann das

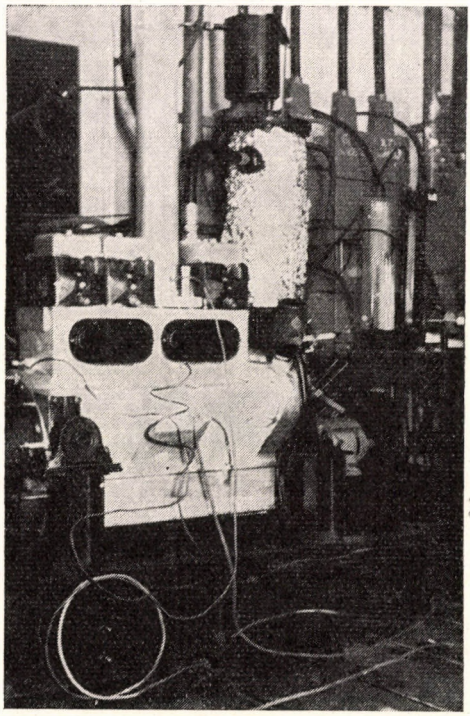


Bild 12

Problem nicht untersucht werden. Die Meßergebnisse zeigt Bild 13. Die Messungen wurden mit trockenem und stillstehendem, mit geöltem und stillstehendem und mit bewegtem, geöltem Kolben durchgeführt. Bei rotierendem Motor bzw. bewegtem Kolben wurde im Zylinderraum nur maximal 16 ata Druck zugelassen, da dies gleichzeitig der im Zylinderraum herrschende Durchschnittsdruck war. Ein solcher Durchschnittsdruck bringt im Motor selbst bei kleiner Drehzahl schon sehr gefährliche mechanische Reibungsbelastungen zustande, ein noch größerer Durchschnittsdruck würde im Motor mit großer Wahrscheinlichkeit Beschädigungen hervorrufen.

Die Versuchsergebnisse zeigen gleiche Tendenz mit den theoretischen Überlegungen, die durchsickernde Menge des Mediums, insbesondere bei größeren Drücken, ändert sich mit sehr guter Näherung linear in Abhängigkeit von dem im Zylinderraum herrschenden Druck. Bei bewegtem Kolben ändert

sich die durchsickernde Gasmenge zuerst parabolisch in Abhängigkeit vom Druck, über einem Druck von ca. 12 ata wird dann die Richtungstangente der Kurve gleich der Richtungstangente der Kurve, die die bei stillstehendem Kolben erzielten Ergebnisse darstellt.

Auf Grund des Vergleichs der theoretischen und experimentellen Ergebnisse kann daher der folgende Satz aufgestellt werden: die pro Zeiteinheit zu-

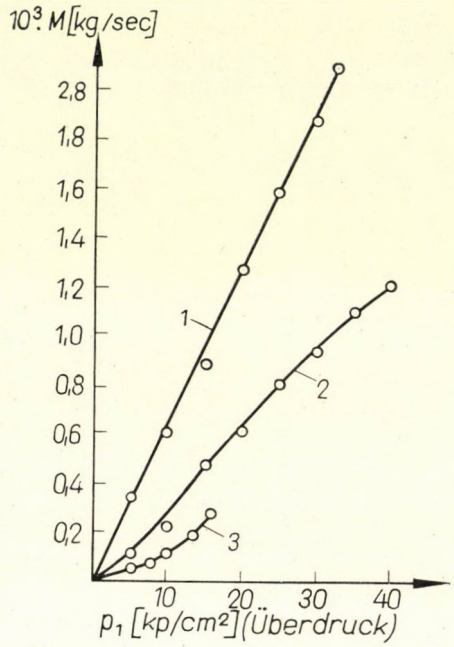


Bild 13

Parameter: $\delta_{eff.} = 0{,}16$ mm, Ringzahl $= 3 + 1$.
Bezeichnungen: 1 Unbeweglicher trockener Kolben, *2* unbeweglicher öliger Kolben, *3* beweglicher öliger Kolben

folge unvollkommener Dichtung aus dem Zylinderraum in das Kurbelgehäuse durchsickernde Gasmenge ist in sehr guter Näherung linear proportional dem im Zylinderraum herrschenden Druck.

$$M = K(p_1 - p_0). \tag{34}$$

In Besitz der grundlegenden Gleichung (34) kann die während der elementaren Teilhübe durchsickernde Menge des Mediums auf Grund der folgenden Überlegung bestimmt werden:

Es seien

ΔM_{gk} die während eines Hubs (z.B. Kompression) durchsickernde gesamte Menge des Mediums, das eindeutig gemessen werden kann;
ΔM_n die während des n-ten Teilhubs durchblasende Menge des Mediums;
M_n die während des n-ten Teilhubs pro Zeiteinheit durchblasende Menge des Mediums.

Auf Grund der Gl. (34) ist

$$M_n = K(p_n - p_0) = \frac{\Delta M_n}{\Delta t_n}, \tag{35}$$

wo

p_0 der im Kurbelgehäuse herrschende Druck;
Δt_n die zum Durchlaufen des n-ten Teilhubs benötigte Zeit.

Die während der gesamten Kompression durchblasende Menge des Mediums ist

$$\Delta M_{gk} = \sum_1^k \Delta M_n = K \sum_1^k (p_n - p_0)\, \Delta t_n.$$

Aus dieser Gleichung kann K berechnet werden:

$$K = \frac{\Delta M_{gk}}{\sum_1^k (p_n - p_0)\, \Delta t_n}. \tag{36}$$

Das Produkt $(p_n - p_0)$. Δt_n bzw. die Summierung dieser Produkte kann mit Hilfe der Aufteilung des Gesamthubs in Teilhübe (bei ΔT = const.) durchgeführt werden.

In Kenntnis des Wertes von K kann die während eines einzelnen Teilhubs durchblasende Menge des Mediums schon bestimmt werden:

$$\Delta M_n = K(p_n - p_0)\, \Delta t_n. \tag{37}$$

Der Gesamthub muß auch jetzt in solche Teilhübe aufgeteilt werden, daß die während der einzelnen Teilhübe auftretende Temperaturerhöhung T konstant bleibt.

Der Temperaturabfall während des n-ten Kompressions-Teilhubs ist auf Grund von Gl. (23)

$$\Delta T'_n = \frac{(m_n - 1)\left(T'_{n-1} + \dfrac{\Delta T}{2}\right)}{\dfrac{m_n}{2} - 1 + \dfrac{L_g - \sum_1^{n-1} \Delta M - \dfrac{\Delta M_n}{2}}{\Delta M_n}}, \tag{38}$$

wo m_n der zum n-ten Abschnitt gehörige Polytropenexponent;
$T_{n-1} + \Delta T/2$ die Durchschnittstemperatur des Abschnitts;
L_g die in das Zylindervolumen eingesaugte Gasmenge des Mediums, ihr Betrag kann aus Gl. (16) bestimmt werden;
$\sum_1^{n-1} \Delta M$ die während der Teilhübe 1 bis $n - 1$ durchgesickerte Menge des Mediums;
ΔM_n der Gasverlust während des untersuchten n-ten Teilhubs.

Die während des n-ten Kompressionsteilhubs auftretende Druckverminderung ist auf Grund von Gl. (24)

$$\Delta p'_n = \frac{p_n + p'_{n-1}}{2}\left[\frac{\Delta M_n}{L_g - \sum_1^{n-1}\Delta M - \Delta M_n/2} + \frac{\Delta T'_n}{T'_{n-1} + \Delta T/2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Delta M_n \Delta T'_n}{\left(L_g - \sum_1^{n-1}\Delta M - \Delta M_n/2\right)(T'_{n-1} + \Delta T/2)}\right]. \tag{39}$$

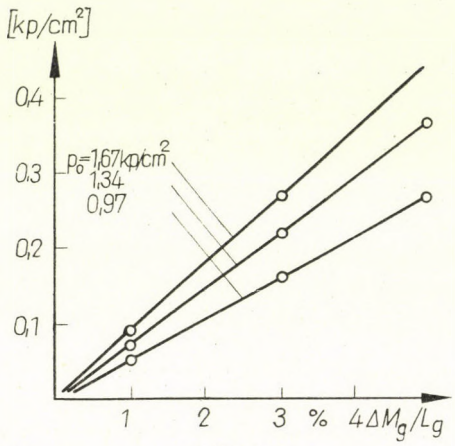


Bild 14

Parameter: $\varepsilon = 21{,}5$, $T_0 = 345$ °K.

Die während der isentropischen Teilhübe auftretende Temperatur- und Druckänderung kann, wie es bei der Berechnung des von der Kühlung herrührenden negativen Kreisprozesses dargelegt worden ist, mit Hilfe der Gl. (9) und (10) bestimmt werden.

Der Ausgangspunkt des nächsten Teilhubs, d. h. der Punkt n' kann auf Grund des vorangehenden jetzt bestimmt werden:

$$p'_n = p_n - \Delta p'_n;\ T'_n = T_n - \Delta T'_n. \tag{40}$$

Hiermit kann der ganze Kreisprozeß berechnet werden. Bei der Berechnung des Expansionsprozesses muß noch in Betracht gezogen werden, daß bei Beginn der Expansion um die während der Kompression durchsickernde Menge weniger Arbeitsmedium im Zylinder ist, d. h. vom Wert L_g (Gesamtmenge des Arbeitsmediums im Zylinder) müssen die während der einzelnen Teilhübe durchsickernden Teilmengen von Beginn der Kompression bis zum Ende der Expansion kontinuierlich subtrahiert werden.

Der indizierte mittlere Druck des Prozesses kann mit Hilfe von Gl. (19) bestimmt werden.

Einige Ergebnisse der mit einer elektronischen Rechenmaschine durchgeführten Berechnungen zeigt Bild 14. Der aus der Undichtheit stammende negative mittlere Druck ändert sich mit sehr guter Näherung linear als Funktion des prozentuellen Gasverlustes; mit Steigerung des Anfangsdruckes und des Kompressionsverhältnisses (letzteres ist aus der Abbildung nicht ersichtlich) steigt hingegen der Wert von p_{di}. Im Ausdruck für den in % ausgedrückten relativen Gasverlust

$$(\Delta M_g/L_g) \text{ ist } \Delta M_g$$

der Gasverlust für einen ganzen Arbeitsprozeß (2 Umdrehungen).

Gemäß unseren Versuchen ist der durchschnittliche Gasverlust 0,5—0,8%; und so ist der Durchschnittswert des aus der unvollkommenen Dichtheit des Kolbens stammenden negativen Mitteldrucks 0,05—0,08 kp/cm². Dieser Wert ist viel kleiner als der aus der Kühlwirkung stammende negative indizierte mittlere Druck p_{ki}, muß aber bei der genauen Berechnung unbedingt mit in Betracht gezogen werden. Der Wert des Gasverlusts erreichte bei kleinen Drehzahlen ($n = 500$/min) und bei Ringanordnung (3 + 1) 2%, bei Ringanordnung (2 + 1) überschritt er den Wert von 5%.

VI. Anwendung des Verfahrens, Versuchsergebnisse

Mit dem in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Verfahren wurden an mehreren modernen Verbrennungsmotoren ausgedehnte Messungen durchgeführt [18, 19]. Die Versuchsreihen bestätigten weitgehend die Richtigkeit der Vorstellungen. Mit Hilfe der Methode konnte der Zusammenhang zwischen dem mittleren Reibungsdruck und den verschiedenen thermischen und mechanischen Parametern sehr genau bestimmt werden. Während der Versuche [19] war es möglich, auch solche minimale Unterschiede des mittleren Reibungsdrucks zu messen (Abweichungen zwischen Kolben von gleichem Durchmesser aber verschiedener Form), deren Messung an einem Motor, der mit einem wirklichen, wärmefreisetzenden Prozeß arbeitet, überhaupt nicht denkbar gewesen wäre.

Bild 15 zeigt den Verlauf des mittleren Reibungsdrucks eines Motors bei gegebener thermischer und mechanischer Belastung, in Abhängigkeit von der Drehzahl. Zwecks Analyse der Ergebnisse wurden auch einzelne Verluste dargestellt, die nicht Reibungscharakter haben. Dementsprechend stellt die unterste Kurve den mittleren Reibungsdruck p_r, die oberste den Gesamtverlust p_g dar. In das Bild wurden auch die thermisch-mechanischen Parameter der Messung eingetragen. Es ist ersichtlich, daß bei einer solchen Meßmethode der Reibungsmitteldruck ungefähr die Hälfte des gemessenen Gesamtverlusts be-

trägt, während bei der Messung eines mit tatsächlichem Arbeitsprozeß arbeitenden Motors der Reibungsmitteldruck als die Differenz von ca. 7—9-mal größeren Werten bestimmt werden muß. Der indizierte mittlere Druck der Gaswechselfläche (p_{gw}) fällt nur bei höheren Drehzahlen ($n > 1000$/min) ins Gewicht, der Eigenreibungsverlust des Pendelmotors ist selbst bei hohen Drehzahlen vernachlässigbar. Der durch die Undichtheit verursachte negative Mittel-

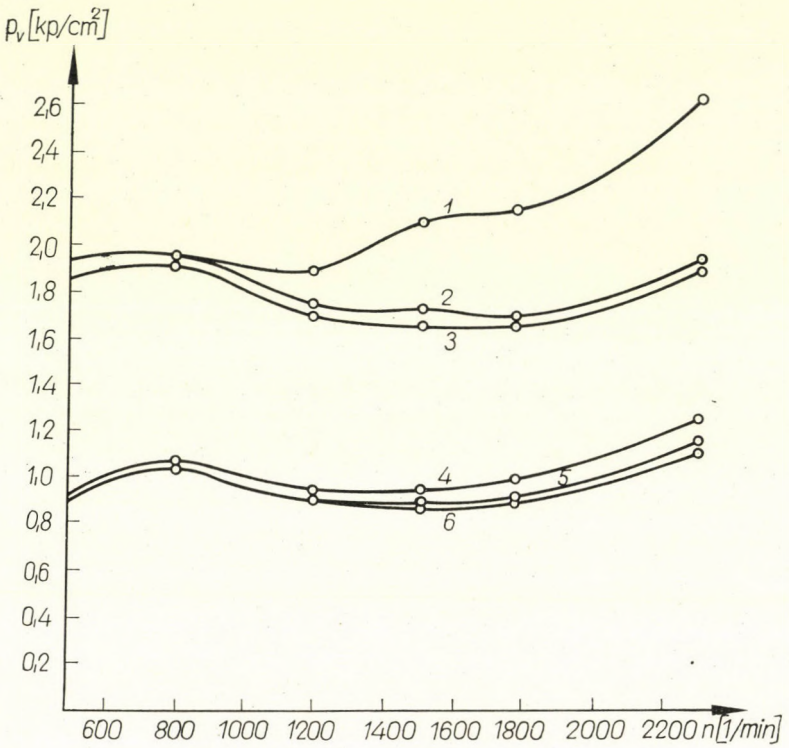


Bild 15

Daten des Motors: Dieselmotor der Autofabrik Csepel; $n_{max} = 2300$/min; $S = 140$ mm; $D = 110$ mm; $z = 4$; Ringzahl (3+ 1) $t_w = 160$ °C; $t_a = 95$ °C; $p_{min} = 1{,}34$ kp/cm²; $p_{max} = 102$ kp/cm²; $\varepsilon = 28$; $p_d = 4{,}75$ kp/cm²; $T_{min} = 345$ °K.
Bezeichnungen: 1 $p_{gv} = p_r + p_{pm} + p_h + p_{ki} + p_{di} + p_{gw}$; 2 $p_r + p_{pm} + p_h + p_{ki} + p_{di}$; 3 $p_r + p_{pm} + p_h + p_{ki}$; 4 $p_r + p_{pm} + p_h$; 5 $p_r + p_{pm}$; 6 p_r.

druck p_{di} kann gegenüber dem aus der Kühlung stammenden negativen indizierten Mitteldruck p_{ki}, der den entscheidenden Teil der nicht mechanischen Verluste ausmacht, vernachlässigt werden. Beim untersuchten Motor wurde bei dieser Untersuchungsmethode nur die Schmierölpumpe angetrieben, so daß es verständlich ist, daß der Mitteldruck p_{ha} der Leistungsaufnahme der Hilfseinrichtung gegenüber p_r in erster Annäherung vernachlässigt werden kann. Bild 16 zeigt die Änderung des Reibungsmitteldrucks p_r als Funktion des Durchschnittsdrucks p_d, bei verschiedenen Wandtemperaturen t_w und zugeordneten Schmieröltemperaturen $t_{öl}$ als Parameter. In dem Bild wurde auch

die Änderung des Anfangsdrucks des Arbeitsprozesses (p_{min}) eingetragen, die mittels verschiedener Aufladung der Luftbehälter erwirklicht wurde. Mit steigendem p_d wächst eindeutig auch p_r, also hängt der Reibungsmitteldruck grundlegend vom Durchschnittsdruck p_d ab. Mit Steigerung des Wärmezustands des Motors sinkt im untersuchten Bereich der Wert von p_r. Es wurden auch Messungen bei konstanter Wandtemperatur ($t_w = 160$ °C) und veränder-

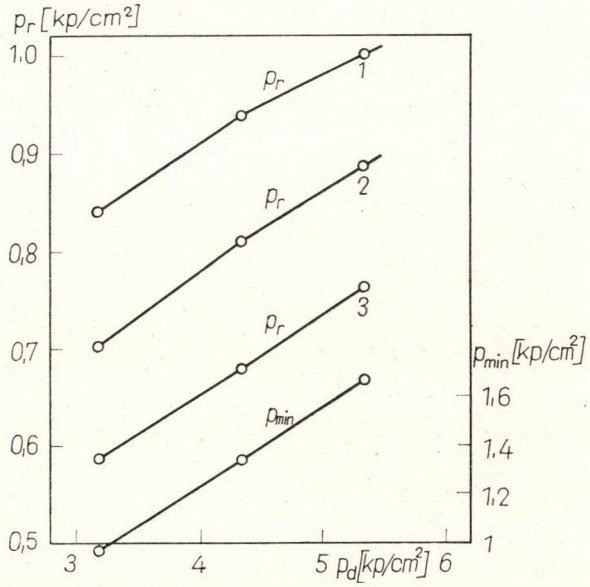


Bild 16

Parameter: $n = 1500$/min; $\varepsilon = 21$; $p_{max}/p_{min} = 56$,
Bezeichnungen: 1 $t_w = 120$ °C, $t_{öl} = 80$ °C; *2* $t_w = 160$ °C, $t_{öl} = 95$ °C; *3* $t_w = 200$ °C, $t_{öl} = 110$ °C.

lichem Öldruck durchgeführt. Auch in diesem Fall (Bild 17) hatte mit steigen; der Öltemperatur der Reibungsmitteldruck fallende Tendenz, das Absinken war aber geringer als im vorhergehenden Fall, ja in einzelnen Fällen bei Wandtemperaturen um $t_{öl} = 95$ °C wurde die Ausbildung eines schwach ausgeprägten Minimumpunktes beobachtet. Auch hier muß betont werden, daß bei arbeitendem Motor die Durchführung von derartigen Messungen (Einfluß der Änderung der Schmieröltemperatur innerhalb des Betriebstemperaturintervalls) unmöglich wäre.

Bei der Analyse von Kolben-Verbrennungsmotoren gemäß dem beschriebenen Verfahren müssen die Temperaturverteilungen des Kolbens und des Zylinders untersucht werden. Grundlegende Überlegungen [19] führen zu dem Schluß, daß die Temperatur und die Temperaturverteilung des Kolbens annähernd gleich derjenigen des Kolbens eines Motors mit Verbrennungsvorgang sind. Dies ist noch nicht experimentell bestätigt, bei den bisherigen Messungen war es nicht möglich, Kolbentemperaturmessungen durchzuführen.

Das zweite zu untersuchende Thema ist, in welchem Maße das Fehlen des Verbrennungsvorgangs bzw. die zufolge der Verbrennung auftretende Änderung der Druckanstieggeschwindigkeit die Reibungsverhältnisse beeinflußt. Ein solcher Einfluß des Verbrennungsvorgangs ist laut den bisherigen Überlegungen vernachlässigbar, der experimentelle Nachweis dieser Tatsache

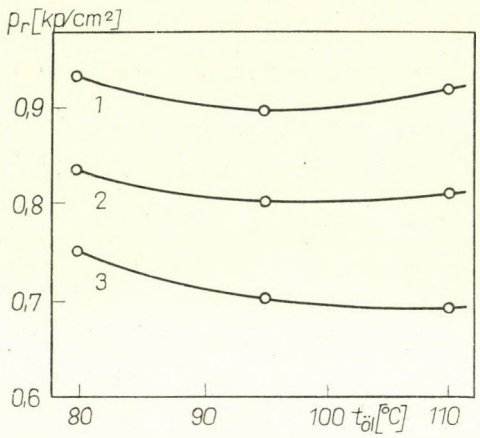


Bild 17

Parameter: $\varepsilon = 1500$/min; $\lambda = 21$; $p_{max}/p_{min} = 56$; $t_w = 160$ °C.
Bezeichnungen: 1 $p_d = 5{,}35$ kp/cm², $p_{min} = 1{,}67$ kp/cm²; *2* $p_d = 4{,}35$ kp/cm², $p_{min} = 1{,}34$ kp/cm²; *3* $p_d = 3{,}2$ kp/cm²; $p_{min} = 0{,}97$ kp/cm².

ist jedoch praktisch unmöglich, weil zu diesem Zwecke auch an einem arbeitenden Motor Messungen mit einer der beschriebenen Methode gleichwertigen Genauigkeit durchgeführt werden müssten.

Die hier herausgegriffenen Ergebnisse weisen nach, daß der Reibungsmitteldruck der Kolben-Verbrennungsmotoren mit den thermisch-mechanischen Kennwerten des Motors, in Zusammenhang gebracht werden kann, und daß mit Hilfe des Durchschnittsdrucks p_d wirklich ein allgemein gültiger Zusammenhang zwischen dem Arbeitsprozeß und dem mechanischen Wirkungsgrad aufgestellt werden kann.

SCHRIFTTUM

1. Ricardo, H. R.: Der schnellaufende Verbrennungsmotor. Springer-Verlag, Berlin (Göttingen) Heidelberg 1954.
2. Arama, C.: Randamentul mecanic al motoarelor cu ardere interna (Der mechanische Wirkungsgrad von Verbrennungsmotoren). *Metalurgia şi Construcţia de Maşini (Bucureşti)* **14** (1962), Nr. 1.
3. Zambrowsky, S.: O dokladności metod określania sprawności mechanicznej silnikow tłokowych ze szczególnym uwzglednieniem metody obcego napędu (Genauigkeit der Methoden für die Bestimmung der mechanischen Eignung von Kolbenmotoren, mit besonderer Berücksichtigung der Methode des Fremdantriebs). *Tęchnika Motoryzacyjna* (Warszawa) **15** (1965), Nr. 11.

4. PÁSZTOR, E.: Einige Probleme der Bestimmung der mechanischen Verluste von Verbrennungsmotoren. *Periodica Polytechnica* **9** (1965), No. 4.
5. *Муравев, В. Д.:* Использование метода выбега для определения потерь двигателя внутреннего сгорания (Auslaufverfahren für die Bestimmung der Verluste von Verbrennungsmotoren). *Автомобилная и тракторная промышленность* (1963), No. 11. Deutsch in *MTZ* (1964), 345—346.
6. PETERSEN, H.:Die mechanischen Verluste der Mittel- und Großdieselmotoren. *MTZ* **5** (1950), 118.
7. *Васильев, Б. Н.:* Механические потери двигателя автомобиля «Москвич» (Die mechanischen Verluste des PKW-Motors »Moskwitsch«). *Автомобилная и тракторная промышленность* (1954), Nr. 2. Deutsch in *Kraftfahrzeugtechnik* (1955), 390—393.
8. PÁSZTOR, E.: Über die Möglichkeit zur Bestimmung von Beziehungen zwischen dem Arbeitsprozeß und dem mechanischen Wirkungsgrad von Verbrennungsmotoren. *Periodica Polytechnica* **11** (1967), Nr. 1.
9. KALMÁR, I.: Dieselmotor munkafolyamatának számítása és számítógép alkalmazása ilyen számításokhoz (Berechnung des Arbeitsprozesses eines Dieselmotors und die Anwendung einer Rechenmaschine für eine derartige Berechnung). Dieselmotoren Konferenz; Ungarische Akademie der Wissenschaften, Budapest 1965 (Manuskript).
10. *Вибе, И. И.:* Новое о рабочем цикле двигателей (Neues von den Arbeitsprozessen der Motoren); Москва—Свердловск 1962.
11. WOSCHNI, G.: Elektronische Berechnung von Verbrennungsmotor-Kreisprozessen. *MTZ* **26** (1965), 439—446.
12. KALMÁR, I.: Munkafolyamatok elektronikus számításával nyert néhány eredmény (Einige mit der elektronischen Berechnung von Arbeitsprozessen erzielte Ergebnisse). Wissenschaftliche Konferenz an der Technischen Universität Budapest 1967 (Manuskript).
13. BRODSZKY, D.: Belsőégésű motorok termodinamikai analízisének néhány kérdése (Einige Fragen der thermodynamischen Analyse von Verbrennungsmotoren). Wissenschaftliche Konferenz an der Technischen Universität Budapest 1967 (Manuskript).
14. PÁSZTOR, E.: Belsőégésű dugattyús motorok munkafolyamata és mechanikai hatásfoka közötti kapcsolat meghatározása (Bestimmung des Zusammenhangs zwischen dem Arbeitsprozeß und dem mechanischen Wirkungsgrad von Kolben-Verbrennungsmaschinen). Wissenschaftliche Konferenz an der Technischen Universität Budapest 1967 (Manuskript).
15. SITKEI, G.: Beitrag zur Theorie des Wärmeüberganges im Motor. *Konstruktion* **14** (1962), 64—71.
16. WOSCHNI, G.: Beitrag zum Problem des Wärmeübergangs im Verbrennungsmotor. *MTZ* **26** (1965), 128—133.
17. LINNE, O.: Durchfluß siedender Flüssigkeiten durch Drosselrohre und Mündungen (Abhandlungen des Deutschen Kältetechnischen Vereins, Nr. 10). Verlag C. F. Müller, Karlsruhe 1955.
18. A *Pl-406 JAFI* típusú Dieselmotor mechanikai súrlódási veszteségeinek vizsgálata (Untersuchung der mechanischen Reibungsverluste des Dieselmotors *Pl-406 JAFI*). Lehrstuhl für Wärmekraftmaschinen, Technische Universität Budapest 1966 (Manuskript).
19. Jelentés a »Csepel gyártmányú Dieselmotorok mechanikai-súrlódási veszteségei csökkentése« vizsgálatról (Bericht über die Untersuchung »Herabsetzung der mechanischen Reibungsverluste der Dieselmotoren Fabrikat Csepel«). Lehrstuhl für Wärmekraftmaschinen, Technische Universität Budapest 1967 (Manuskript).
20. ULLMANN, K.: Die mechanischen Reibungsverluste der schnellaufenden Verbrennungsmotoren bei hohen pulsierenden Gasdrücken. *MTZ* (1940), 230—242.

A Method for the Determination of the Mean Frictional Pressure of I.C. Piston Engines. The author investigates the relationship between the mean frictional pressure and the working cycle of an engine. In order to establish this relationship the author introduces the concept of average pressure, permitting to establish a generally valid relationship between the mechanical efficiency and the working cycle of the engine. In order to investigate the above problems he has worked out a new method for driving the engine externally, suitable for more precise investigation of the relationship between the mean frictional pressure, the design of the engine and the thermo-mechanical characteristics of the working cycle.

Méthode pour la détermination de la pression moyenne de frottement dans les moteurs à piston à combustion interne. L'auteur examine la relation entre la pression moyenne de frottement des moteurs à piston à combustion interne d'une part et le cycle de travail d'autre part. Pour établir cette relation, l'auteur introduit la notion de pression moyenne permettant de créer une relation de validité générale entre le rendement mécanique et le cycle de travail du moteur. En vue de l'examen de ces questions, il a mis au point une méthode de commande extérieure plus précise que celles connues, qui permet un examen plus serré de la relation entre la pression de frottement moyenne, la construction du moteur et les caractéristiques thermo-mécaniques du cycle.

Метод определения среднего давления трения поршневых двигателей внутреннего сгорания *(Е. Пастор)*. В работе исследуется связь между средним давлением трения и рабочим процессом поршневых двигателей внутреннего сгорания. В интересах получения зависимости автор вводит понятие среднего давления, при помощи которого можно вывести общую зависимость между механическим коэффициентом полезного действия и рабочим процессом двигателя. Для исследования изложенных выше проблем автором разработан более точный, чем применявшийся до сих пор метод постороннего привода, при помощи которого можно исследовать, точнее чем до сих пор, зависимость между средним давлением трения и конструкцией двигателя соотв. зависимость термическо-механических показателей рабочего процесса.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 409—436 (1968)

ENERGIEGLEICHGEWICHT DER OXYDKATODEN FÜR NIEDERDRUCK-LICHTBOGENENTLADUNGEN

J. BITÓ

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR NACHRICHTENTECHNIK »HIKI«, BUDAPEST

[Eingegangen am 15. Januar, 1968]

Zur eingehenderen Untersuchung des Energiegleichgewichtes von Entladungen werden verschiedene Entladungsphasen festgelegt, dann für diese die zu berücksichtigenden Komponenten des Energietransportes und die mit denselben verbundenen Grundprozesse angegeben. Auf Grund der gewonnenen allgemeinen Zusammenhänge erfolgt eine ausführliche Analyse der Vorheizphase, und der stationären Gleichstrom-Brennphase mit und ohne Katodenfleck, ferner der Wechselstrom-Entladungen (mit und ohne Katodenfleck). Es wird auf die Anwendbarkeit der erzielten Ergebnisse zur Beeinflussung der Katodenfunktion sowie zur Reduzierung der Katodenverluste hingewiesen.

I. Einleitung

Wie bekannt, kann die Katode mit den Katodenräumen sowie die Anode und der dunkle Anodenraum im allgemeinen Fall für unerläßliche Requisiten der Entladungen betrachtet werden. Von diesen sind vor allem die Katodenerscheinungen von primärer, entscheidender Bedeutung. Bei ihrer Untersuchung müssen die Eigenschaften der Katode, aber auch die der um dieselbe entstandenen — bis zur positiven Säule sich erstreckenden — Räume, ferner die Wechselwirkungen zwischen denselben berücksichtigt werden. Die aufschlußreichste direkte Beschreibung ist durch die Bestimmung der Energiebilanz der Katode erzielbar. Dazu muß jedoch — wie auch bei der Charakterisierung der Niederdruck-Plasmen — auch hier der quasistationäre Energiezustand angenommen werden. Wie es von den Komponenten des Plasmas angenommen wurde, daß sie in thermischem Gleichgewicht miteinander sind, wird auch hier vorausgesetzt, daß zwischen der Katode und den um dieselbe entstandenen Entladungsräumen in stationären Fällen ein solches Energiegleichgewicht besteht. Das Energiegleichgewicht soll der leichteren Behandlung halber zweckmäßigerweise in der Form eines thermischen Gleichgewichtes analysiert werden, unter Berücksichtigung der aufgenommenen und abgegebenen Wärmeenergie, sehr häufig auf die Katodenflächeneinheit (Gleichgewicht der Energiedichte oder spezifisches Energiegleichgewicht) bezogen. Ein gewisser Vorteil, doch einigermaßen auch Nachteil dieser Beschreibung ist, daß sie gegen die auf die Katode wirkenden rasch verlaufenden Energiestöße nicht immer empfindlich ist. Dies hängt naturgemäß stark von dem Charakter der Katode sowie der Größe und Zeitdauer des Energiestoßes ab. In indirekter Weise kann jedoch mit Hilfe von metastabilen Atomen auch ein Teil dieser

Vorgänge, bereits in dem Ausgangsmodell, berücksichtigt werden. Unter Annahme eines Energiegleichgewichtes geht man bei diesen Berechnungen von dem Gleichgewicht der in die Katode eintretenden und von derselben ausgehenden Energiemenge, also vom Gleichgewicht des positiven und negativen Energietransportes aus.

Die Bestimmung des Gleichgewichtes kann, im Falle von aus einem fremden Stromkreis heizbaren Oxydkatoden, prinzipiell für drei wichtigere Entladungsphasen vorgenommen werden, und zwar

die Katoden-Vorheizung,

die als stationär annehmbare kontinuierliche Brennung und

die direkte Anlauf- bzw. Abklingphase der Entladung.

Die als dritte bezeichnete Phase kommt natürlich nur prinzipiell in Frage; während des Anlaufs der Entladung sowie während der Deionisationsperiode spricht man im allgemeinen nicht von Energiebilanz. Der Umstand, daß sie hier doch erwähnt wird, ist darauf zurückzuführen, daß eine spezielle, auch die Zeitabhängigkeiten berücksichtigende Form des Energiegleichgewichtes auch für diese Zeitperiode, selbstverständlich nur bei groben Annäherungen, feststellbar sind. Von diesen beiden ist in praktischer Hinsicht hauptsächlich die Verfolgung der während der Anlaufsperiode der Entladung auftretenden Katoden-Änderungen und die Modifizierung derselben von Bedeutung. Die mit Hilfe einer geeigneten Zeitaufteilung für die transiente Anlaufperiode feststellbaren »Gleichgewichtsbedingungen« können — zwar sie in enger Verbindung mit den Kennwerten des Gleichgewichtes der im obigen als die erste und zweite bezeichneten Entladungsphasen stehen — nicht im engeren Sinne als Bedingungen des quasistationären Energiegleichgewichtes betrachtet werden, eben wegen ihres schnell verlaufenden, transienten Charakters. Im folgenden gehen wir auf die Analyse derselben nicht näher ein.

Bei Entladungen, deren Katode durch Wendeln mit zwei Anschlüssen ausgebildet sind, ist die Möglichkeit geboten, das Entstehen der Entladungen durch die Erzeugung von mittels fremder Vorheizung hergestellten Elektronen hauptsächlich thermischer Herkunft zu erleichtern. Dies ist vor allem bei mit einer Elektronen emittierenden Schicht versehenen Katoden, z. B. Oxydkatoden, von Bedeutung. In diesem Falle kann an der Katode auch eine lokale, parasitäre Entladung auftreten, und zwar in der Form einer Glimmentladung, unter der Wirkung des fallweise gut definierten, entlang der Wendelachse (Katodenachse) entstandenen Spannungsabfalls. Diese Phase ist die Phase der Katoden-Vorheizung, in deren Verlauf Vorbedingungen geschaffen werden können, durch welche der Anlauf der Hauptentladung erleichtert wird. Praktisch ist das auch der Zweck dieser Entladungsperiode. Die Bestimmung des hierfür charakteristischen Energiegleichgewichtes ist bereits etwas leichter, als es bei der transienten Phase gewesen ist. Die hier vor sich gehenden Erscheinungen können im Falle von Oxydkatoden annähernd in drei Gruppen

geteilt werden. Mit dem Einleiten der Vorheizung beginnt die erste Phase, bei welcher die Metallwendel — meistens eine Wolframwendel — der Katode unter der Wirkung des sie durchfließenden Heizstromes sich allmählich erwärmt, in der zweiten Phase wird die Erwärmung bereits auch von der Oxydschicht übernommen, und schließlich wird dann nach Verlauf der erforderlichen Zeit ein Vorheizungs-Gleichgewichtszustand entstehen. Von der gesamten Katoden-Vorheizungsphase kann die Annahme eines Gleichgewichtes nur für diese Periode für reell betrachtet werden. Hinsichtlich der Vorheizungsphase werden im weiteren nur diesbezüglich die einzelnen Komponenten des Energiegleichgewichtes angegeben. Die Charakterisierung der ersten beiden Phasen der Vorheizung kann — genauso wie auch die der transienten Anlauf- und Abklingphasen — auf Grund unserer gegenwärtigen Kenntnisse auf diese Weise noch nicht befriedigend vorgenommen werden. Die meisten Autoren haben sich bisher mit dem Katoden-Energiegleichgewicht der im vorangehenden als die zweite bezeichneten, im allgemeinen als stationär annehmbaren Entladungs-Hauptphase beschäftigt [1—4]. Die Gleichgewichtsanforderungen werden in diesem Falle am meisten erfüllt.

Die Erscheinungen der stationären Entladungsphase werden durch den Umstand beeinflußt, ob die Entladung selbständigen Charakters ist, oder ob zur Erzeugung der thermischen Elektronen auch die fremde Katodenheizung beiträgt. Bei Oxydkatoden wird dadurch gleichzeitig auch die Gestaltung des Katodenfleckes, die Lage, sogar die Erscheinung, die Existenz desselben beeinflußt. Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes führt das Vorhandensein des Kathodenfleckes und die Berücksichtigung desselben zu weiteren Komplikationen. Es ist offensichtlich, daß die Festlegung der Katoden-Energiebilanz von Entladungen ohne Katodenfleck nicht nur leichter, sondern erwartungsgemäß auch genauer ist.

Schließlich müssen neben den stationären Gleichstrom-Entladungen die Katoden-Erscheinungen der — in einem gewissen Sinne ebenfalls für stationär annehmbaren — Wechselstrom-Entladungen berücksichtigt werden. Die Feststellung des Energiegleichgewichtes ist in gewissen Fällen mit guter Annäherung auch bei den Wechselstrom-Entladungen durchführbar. Eine Voraussetzung ersten Ranges dafür ist, daß die Entladungsfrequenz bedeutend höher als der reziproke Wert der für die den gegebenen Verhältnissen entsprechende Wärmeträgheit der Katode charakteristischen Relaxationszeit sein muß. In diesem Falle kann angenommen werden, daß die Katode auf irgendeinen, z. B. zeitlichen Integraldurchschnitt der mit der Periodenänderung sich ändernden Energietransportes reagiert und demgemäß mit einer durchschnittlichen Temperaturverteilung charakterisierbar sein wird. Mit dieser Gebundenheit und Erweiterung werden einige Kennwerte des Energiegleichgewichtes mit guter Annäherung auch für Entladungen feststellbar sein, deren elektrisches Feld sich schneller als eine gewisse Frequenz ändert.

Die Bestimmung des Energiegleichgewichtes ist jedoch nicht nur von dem Umstand abhängig, in welcher Entladungsphase sie vorgenommen werden soll, sondern sie hängt auch von den Kennwerten der Entladung, dem Aufbau und den Materialkennzeichen der Katode ab. Um die Behandlung einfacher und geschlossener zu gestalten, werden die in Frage kommenden Komponenten des Energiegleichgewichtes im weiteren ausschließlich bei den Niederdruck-Gas- oder Dampf-Bogenentladungen an wendelartigen Elektroden gleichen Aufbaus mit aus Wolfram als Grundmetall aufgetragener Oxydschicht (evtl. mit Hilfselektrode), im Falle von Vorheizungs- und stationären Gleichstrom- sowie Wechselstrom-Entladungen mit oder ohne Katodenfleck untersucht.

II. Die Komponenten der Energiebilanz

Wie bereits eingangs erwähnt, werden die das Eintreten des Energiegleichgewichtes verursachenden Energiearten in der Form von Wärmeenergie berücksichtigt. Der Grund dazu liegt in dem Umstand, daß die Elektronen emittierende Funktion der Katode überwiegend thermischen Charakters ist. Von der Erfüllung dieser Aufgabe hängen die Kennwerte und Maße der Katodenräume, und so auch die Größe des Katodenfalls und der Ionenstrom-Komponenten ab. Es wird dadurch in entscheidender Weise die Wirtschaftlichkeit der Katode bestimmt, sowie — über die Katoden- bzw. Katodenraum-Verluste — auch die Verluste der Entladung bedeutend beeinflußt.

Im nachstehenden werden die einzelnen, wichtigeren energieerzeugenden und Energieverluste verursachenden Vorgänge besonders behandelt, durch welche die Einstellung der Katodentemperatur auf den quasistationären Wert gewährleistet und überhaupt diese Temperatur bestimmt wird. In den folgenden Abschnitten wird das hier vorgeführte Modell des Energiegleichgewichtes für die verschiedenen Entladeverhältnisse angewandt.

1. Die einen Temperaturanstieg der Katode bewirkenden Vorgänge. Positiver Energietransport

Obzwar der Ionenstrom nur einige Prozente des Entladestromes ausmacht, trägt doch der Anprall der im Katodenraum beschleunigten Ionen bedeutend zum Anstieg der Katodentemperatur bei. Die an die Katodenfläche anprallenden positiven Ionen geben nicht nur einen Teil ihrer kinetischen Energie, sondern auch ihre Rekombinationsenergie und Kondensationsenergie ab.

Bezeichnet man mit i_0 den Entladestrom und mit i_e bzw. i_p den Elektronen- bzw. Ionenstrom, und wird auf Grund des Zusammenhanges

$$i_0 = i_e + i_p \tag{1}$$

berücksichtigt, daß

$$i_e = u \cdot i_0 \tag{2}$$

ist, so kann die Verhältniszahl u definiert werden, mit deren Hilfe dann z. B. der Ionenstrom in der Form von

$$i_p = (1 - u)\, i_0 \tag{3}$$

angegeben werden kann. Nun kann die aus der kinetischen Energie der an die Katode anprallenden positiven Ionen in der Zeiteinheit entstandene Energie Q_{ik} in der Form

$$Q_{ik} = (1 - u)\, i_0 (1 - a) \frac{m_p \cdot \overline{V}_p^2}{2\, e} \tag{4}$$

angegeben werden, wo

m_p die Masse der positiven Ionen;
v_p die Durchschnittsgeschwindigkeit der positiven Ionen;
e die elementare Ladung;
a den Akkomodations-Koeffizient der Katode bedeutet, und der Form nach, laut [2]

$$a = \frac{\frac{1}{2} m v_2^2 - kT}{\frac{1}{2} m v_1^2 - kT} \tag{5}$$

ist, wobei v_1 die Geschwindigkeit des sich aufschlagenden Teilchens vor dem Anprallen an die Katode, v_2 die Geschwindigkeit desselben nach dem Rückprall von der Katode, T die Temperatur der Katodenfläche und k die Boltzmannsche Konstante ist.

Der Akkomodations-Koeffizient zeigt also an, wie es aus (5) ersichtlich ist, welcher Anteil der kinetischen Energie des auf die Katodenfläche aufschlagenden Teilchens durch dieselbe nutzbar gemacht wird. Nimmt man an, daß die positiven Ionen ihre gesamte kinetische Energie in dem Bereich des Katodenfalls aufgenommen haben, und setzt man voraus, daß sie dem Katodenfall annähernd proportional ist, so wird der Zusammenhang (4) in der Form

$$Q_{ik} = (1 - u)(1 - a)\, i_0 \cdot V_k \cdot b \tag{6}$$

angegeben werden können, wobei b die obenerwähnte Proportionalitätszahl (Funktion) ist und in der Form

$$b = \frac{1}{2} \frac{m_p \cdot \overline{v}_p^2}{2\, e} \cdot \frac{1}{V_k} \tag{7}$$

aufgeschrieben werden kann. Die aus der kinetischen Energie der positiven Ionen herrührende und in der Zeiteinheit erzeugte Katodenheizung wird also in der Form der Gleichung (6) mit Hilfe des Entladungsstromes und des Katodenfalles angegeben werden können.

Es wird auch im Laufe der Neutralisation der positiven Ionen an der Katodenfläche Energie frei, die offensichtlich der Differenz zwischen der zur Gestaltung des positiven Ions erforderlichen Ionisationsarbeit und der Austrittsarbeit der Katodenfläche gleichgesetzt werden kann, d. h.

$$Q_{in} = (1 - u)\, i_0 \left[V_i - (\varphi_0 - e^{3/2} E_k^{1/2})\right], \tag{8}$$

wobei Q_{in} die im Laufe der Neutralisation in der Zeiteinheit frei werdende Energie;
V_i die zur Ausgestaltung des positiven Ions nötige Ionisationsarbeit;
φ_0 die ohne fremdes elektrisches Feld gemessene Austrittsarbeit der Katodenfläche;
E_k die elektrische Feldstärke vor der Katode bedeutet.

Wird das neutralisierte Ion an der Katodenfläche kondensiert, so wird die Katode auch durch die so frei werdende Kondensationsenergie Q_{il} geheizt. Nach Summierung derselben wird die durch die positiven Ionen übergegebene kinetische, potentielle und Kondensationsenergie auf Grund des Zusammenhanges

$$Q_i = Q_{ik} + Q_{in} + Q_{il} \tag{9}$$

in der Form

$$Q_i = (1 - u)\, i_0 \left[(1 - a) \cdot V_k \cdot b + V_i - (\varphi' - e^{3/2} E_k^{1/2}) + \frac{c_i}{e} q_k\right] \tag{10}$$

angegeben, wo q_k die bei der Kondensation eines Moleküls frei werdende Energie bedeutet, und durch c_i angezeigt wird, welcher Anteil der sich auf schlagenden positiven Ionen in die Oberfläche der Katode eintritt. Für Wechselstrom-Entladungen kann auf Grund ähnlicher Überlegungen die in der Zeiteinheit durch den die Elektrode während der Anoden-Halbperiode heizenden Elektronenstrom abgegebene Energie Q_e angegeben werden, die in diesem Falle zur Beurteilung der Katoden-Eigenschaften ebenfalls berücksichtigt werden muß:

$$Q_e = \frac{1}{t} \int_0^t \left[(1 - d)\left(\frac{2\,kT_e}{e} + V_a\right) + \varphi_a\right] i_0\, u \cdot dt\,, \tag{11}$$

wobei t die Zeitdauer der Anoden-Halbperiode;
V_a der Anodenfall;
φ_a die Austrittsarbeit an der Anode;
d der Akkomodations-Koeffizient der Anode;
T_e die in der positiven Säule gemessene Elektronentemperatur ist.

Wie es aus dem Zusammenhang (11) ersichtlich ist, setzt sich die durch die Elektronen in der Zeiteinheit abgegebene Energie aus zwei Teilen, und zwar der kinetischen und der Rekombinations-Komponente zusammen. In der letzteren ist im wesentlichen auch die Kondensationsenergie mit einbegriffen.

Wird ständige Fremdheizung verwendet, und entsteht zwischen den Enden der Wendel keine parasitäre Entladung, so wird bei einem Heizstrom von I_H für die Gesamtheit der Wendel mit einem Warmwiderstand von $R(T)$ in der Zeiteinheit die Energiemenge

$$Q_H = I_H^2 \cdot R(T) \tag{12}$$

gewährleistet. Damit gleichzeitig kann der die Oxydschicht der Wendel und einen Teil der Metallwendel durchfließende Entladestrom ebenfalls zum Temperaturanstieg der Wendel beitragen, wobei jedoch oberhalb einer gewissen Emissions-Stromstärke auch die Heizung durch den aus der Katode heraustretenden und die Oxydschicht durchfließenden Elektronenstrom berücksichtigt werden muß. Da jedoch der durch die an die Katode sich aufschlagenden Ionen erzeugte Entladestrom (der Strom der positiven Ionen) hauptsächlich durch die metallischen Teile der Katode in den äußeren Kreis strömt, kann diese Art der Oxydschichtheizung durch den Entladestrom vernachlässigt werden. Die direkte Heizung der Metallteile in der Zeiteinheit kann als

$$Q_k = i_0^2 \cdot r_k \tag{13}$$

bzw. für den Fall der Anode als

$$Q_{ka} = i_0^2 \cdot r_a \tag{13a}$$

gesetzt werden, wo mit r_k bzw. r_a der Widerstand der von dem Entladestrom durchflossenen Strecke der Wolframwendel bezeichnet ist; die Leistung der Oxydschichterhitzung durch den Elektronenaustritt kann mit Hilfe der Beziehung

$$Q_q = i_e^2 \cdot r_q \tag{14}$$

beschrieben werden, wo r_q den Innenwiderstand der Emissionsschicht, den sogenannten Querwiderstand bedeutet. Dieser letztgenannte Effekt ist eine spezifische Eigenschaft der Oxydkatode.

Es kann vorkommen, daß durch das Gas oder den Dampf der Entladung in der Form von neutralem Teilchenstrom Energie der Katode oder der Anode zugeführt wird, welch letzterer Fall jedoch wieder nur bei der Untersuchung des Katoden-Energiegleichgewichtes von Wechselstrom-Entladungen von Bedeutung sein kann.

Betrachten wir nun die in dem Katodenraum, in unmittelbarer Nähe der Katode existierende durchschnittliche Elektronentemperatur T_{ek}, welcher auf Grund von

$$\overline{T}_{ek} = \frac{2 \cdot e \cdot \overline{V}_{ek}}{3\,k} \tag{15}$$

eine V_{lk} proportionale Durchschnittsenergie entspricht. Wird zwischen den Gas- oder Dampfmolekülen und dem Elektronengas thermodynamisches Gleichgewicht angenommen [2], so entfällt pro Atom eine Energiemenge von

$$2\,k\overline{T}_{lk} = \frac{4}{3}\,e \cdot V_{lk}\,, \tag{16}$$

dementsprechend kann

$$Q_{gk} = \frac{4}{3}\,V_{lk} \cdot i_0 \tag{17}$$

gesetzt werden, wo Q_{gk} durch die neutralen Moleküle in der Zeitenheit der Katode zugeführte Energie ist, zu welcher noch bei den in Wechselstrom-Fällen in Frage kommenden Anodenerscheinungen der in der Form

$$Q_{ga} = \frac{4}{3}\,\overline{V}_{la} \cdot i_0 \tag{18}$$

aufschreibbare Wert hinzukommt, wo mit Q_{ga} die von den neutralen Molekülen in der Zeiteinheit der Anode zugeführte Energie angedeutet ist. Genau so, wie bei dem für die Katode angegebenen Zusammenhang durch V_{lk} die durchschnittliche Energie der Elektronen in dem Raum vor der Katode charakterisiert ist, bedeutet V_{la} den Potentialwert in dem entsprechenden Raum vor der Katode.

Auch ein weiterer Energiezuwachs kann durch die nicht-elektrischen Teilchen, die Photonen, die metastabilen Atome und die angeregten Atome, und zwar sowohl bei der Katode, wie auch bei der Anode gewährleistet werden. Die Wirkung derselben kann allgemeingültig nicht angegeben werden, nur in Kenntnis der gegebenen spezialen Entladungskennwerte. Im weiteren werden die daraus berechenbaren, in der Zeiteinheit an die Katodenfläche abgegebenen Energiewerte in der vorerwähnten Reihenfolge mit Q_{fk}, Q_{mk} und Q_{ek} und für den Anodenfall mit Q_{fa}, Q_{ma} und Q_{ea} bezeichnet.

Damit wurden die der Katode zugeführten Energiewerte, die als positiver Energietransport figurieren und die Temperatur der Katode erhöhen, bereits zusammengefaßt. Wird die Summe derselben mit Q_k bezeichnet, also

$$\begin{aligned} Q_k = \underbrace{(Q_{ik} + Q_{in} + Q_{il})}_{Q_i} + Q_e + Q_H + Q_K + Q_q + \\ + (Q_{gk} + Q_{ga} + Q_{fk} + Q_{mk} + Q_{lk})\,, \end{aligned} \tag{19}$$

so erhalten wir den auf die Zeiteinheit bezogenen positiven Energietransport, welcher den Ionen, den Elektronen, der evtl. Fremdheizung, der Entladung, dem Emissionsstrom und den elektrisch neutralen Teilen zugeschrieben werden kann. Bei der Bestimmung des der Katode der Wechselstrom-Entladungen

zugeführten Energieflusses Q^+ müssen auch die auf die Anode gelangenden Energiewerte berücksichtigt werden; wird die Summe derselben mit Q_a bezeichnet, so kann als sehr grobe Annäherung auch mit einem solchen mittleren positiven Energietransport [2] gerechnet werden, der der Durchschnitt des in der Katoden- und Anoden-Halbperiode vor sich gehenden Energietransportes ist:

$$Q^+ = \frac{1}{2}(Q_K + Q_a). \tag{20}$$

2. Die zur Verringerung der Katodentemperatur beitragenden Vorgänge — Negativer Energietransport

Die Katode emittiert — in Abhängigkeit von ihrer Temperatur — eine gewisse Zahl Elektronen, im Laufe der Emission nimmt jedoch ihre Temperatur ab. Es muß eine Beziehung zwischen der Temperatur der Katode und dem Emissionsstrom desselben bestehen: bei sonst gleichen Entladungsverhältnissen ist die Temperatur einer Katode mit höherem Emissionsstrom niedriger.

Im Laufe der Elektronenemission kommt jedoch manchmal auch vor, daß die auf Kosten der Wärmeenergie der Katode austretenden Elektronen die Katodenfläche mit einer gewissen kinetischen Energie verlassen. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes kann eine obere Grenze der durch die Elektronen in der Zeiteinheit abgeführten Energie Q_e mit der Beziehung

$$Q_{e\,\max}^- = u \cdot i_0 \left[(\varphi_0 - e^{3/2} E_k^{1/2}) + \frac{2\,kT_k}{e} \right] \tag{21}$$

angegeben werden, wo T_K die Temperatur der Katodenoberfläche ist. Der in der Beziehung (21) figurierende Ausdruck $u \cdot i_0$ bezeichnet die gesamte Elektronenkomponente des Entladestromes, die im allgemeinen größer als der aus der Katode austretende thermische Emissionsstrom ist, da die Zahl der Elektronen im Katodenraum im allgemeinen noch zunimmt, und erst so hoch genug zur Aufrechterhaltung der Entladung wird; darüber hinaus nimmt jedoch im allgemeinen auch die Ionenstrom-Komponente bis zu einigen Prozenten an der Aufrechterhaltung der Entladung teil. Der rein thermische Elektronenstrom entspricht nur unter spezialen Verhältnissen dem durch $u \cdot i_0$ bestimmbaren Stromwert; in diesem Falle ergibt die Beziehung (21) ein korrektes Ergebnis. Da jedoch wir gegenwärtig nur das Energiegleichgewicht der Katode zu besprechen wünschen, sehen wir von der eingehenden Behandlung dieser sekundären Katodenraumerscheinungen ab. Der Vollständigkeit der Beschreibung halber wäre noch wünschenswert, auch die durch die Elektronen von dem Katodenraum in der Zeiteinheit übernommene Energie zu berücksichtigen — die unter Annahme der Kommensurabilität der freien Weglänge der

Elektronen und der Abmessungen des Katodenfallbereiches — in der Form

$$Q_{et\,\max}^{-} = u \cdot i_0 \cdot V_k \tag{22}$$

angegeben werden kann. Auch dieser Wert kann als maximal betrachtet werden, da auch hier die gesamte Elektronenstrom-Komponente berücksichtigt wurde, obzwar dies hinsichtlich des Katodenraumes schon bedeutend besser die tatsächliche Lage widerspiegelt. Es kann nämlich angenommen werden, daß gegen die Mitte des negativen Glimmraumes bereits alle zur Aufrechterhaltung der Entladung nötigen Elektronen sich ausgebildet haben [6], und von nun an nur Schwankungen in der Temperatur und der statischen Konzentration sowie Geschwindigkeitsmodulationen geringere Änderungen hervorrufen werden.

In Abhängigkeit von dem Umstand, ob die Katode in dem Strombereich der Sättigungsemission oder aber in dem durch die Raumladung beschränkten Strombereich arbeitet, kann die Kühlwirkung der austretenden Elektronen in der Form

$$Q_{es}^{-} = i_s (\varphi_0 - e^{3/2} E_K^{1/2}) + 1{,}72 \cdot 10^{-4} \cdot i_s \cdot T_K \tag{23}$$

bzw.

$$Q_{et}^{-} = i_t \cdot T_K \cdot 10^{-4} \left[1{,}72 \cdot 1{,}98 \log 120{,}4 \cdot \frac{F_K \cdot T_K^2}{i_t} \right] \tag{24}$$

angegeben werden [5], wobei Q_{es}^{-} und Q_{et}^{-} die bei einem in dem Sättigungs- bzw. dem durch die Raumladung beschränkten Strombereich erzeugten Elektronenemissionsstrom in der Zeiteinheit abgeführte Energie ist, und die übrigen Symbole die folgende Bedeutung haben:

T_K Katodentemperatur;
F_K Katodenfläche;
E_K elektrische Feldstärke an der Katodenfläche;
i_s Sättigungsstrom;
i_t der durch die Raumladung begrenzte Emissionsstrom.

Es ist gebräuchlich, die zufolge des Elektronenaustritts entstandenen Energieverluste und den früher behandelten, ebenfalls auf Emissionsgründe zurückführbaren Energieanstieg Q_q gegenüberzustellen und zusammen zu untersuchen [5]. Es kann fallweise eine solche Emissions-Grenzstromdichte angegeben werden, oberhalb welcher die Emission die Katode bereits wegen der Aufheizung der Emissionsschicht [5] rückheizt, die so erzeugte Wärme also die zum Elektronenaustritt erforderliche Wärme überschreitet, selbstverständlich bei gleichzeitiger Anwesenheit der damit parallel wirkenden weiteren energieerzeugenden und Energieverluste verursachenden Vorgänge.

Die Temperatur der Katodenfläche kann auch durch jene Emissionsschichtschollen vermindert werden, die entweder durch Verdunstung oder

aber im Wege der mechanischen Zerstäubung von der Katode entfernt werden. Die Verdunstung hängt von der Katodentemperatur, von dem Charakter der Katodenschicht, vom Gasdruck, vom Katodenfall, von der Lage der Katode und der Kondensationsoberfläche usw. ab. Genauso, wie zur Charakterisierung des Stromes der durch die positiven Ionen ausgelösten Sekundärelektronen ein Faktor (γ) eingeführt wurde, kann ein weiterer Faktor δ auch zur Bestimmung der Zahl der durch die positiven Ionen verdunsteten und mechanisch entfernten Atome der Emissionsschicht eingeführt werden. Im allgemeinen ist jedoch zweckmäßiger, die Masse der abgerissenen Atome als z. B. die Funktion des Katodenfalls [1] anzugeben. Die durch die von der Katodenfläche austretenden Atome in der Zeiteinheit abgeführte Energie Q_r^- ist unter Berücksichtigung des Obenbesagten mit der Beziehung

$$Q_r^- = (1-u)\,\delta \cdot i_0\,[fQ_p + (1-f)\,Q_a] \tag{25}$$

charakterisierbar, wo

Q_p die zur Verdunstung eines Atoms der Emissionsschicht erforderliche Energie;
Q_a die im Wege der durch das Ionenbombardement mechanisch gebundenen Atome abgeführte Energie; und
$f\delta$ die Zahl der wegen des Anpralls eines Ions von der Katodenfläche verdunstenden Atoms ist.

Die Katode kann auch durch Strahlung bedeutende Energieverluste erleiden, in Abhängigkeit von ihrer Temperatur, ihrem Aufbau und ihrer Oberfläche. Dieser Verlust kann in der Form

$$Q_s^- = \sigma \int_{F_K} \varepsilon_b \cdot \nu (T_b^4 - T_0^4)\, df \tag{26}$$

angegeben werden, wo

Q_s^- die in der Zeiteinheit durch Strahlung abgegebene Wärmeenergie;
σ die Stefan–Boltzmannsche Konstante;
ε_b der für die Oxydschicht charakteristische Integrations-Strahlungskoeffizient;
ν der Abschirmungsfaktor der Katode;
T_b die Temperatur der Oxydschicht;
T_0 die Umgebungstemperatur; und
F_K die Katodenfläche ist.

Zur Angabe der von der Katode durch galvanische Leitung fortegeführte Wärmeenergie Q_{fv} ist die Kenntnis der Temperaturverteilungsfunktion der Katode entlang nötig. Zur detaillierten Beschreibung muß der Fall der Katode ohne Katodenfleck und der der Katode mit Katodenfleck getrennt behandelt werden. Die Anwesenheit des Katodenflecks übt einen bedeutenden Einfluß auf die Verteilung der Katodentemperatur aus. Bei der Bestimmung der durch galvanische Wärmeleitung in der Zeitenheit abgeführten Energie muß eine Differentialgleichung 2. Ordnung gelöst werden, die nicht linear ist [4]. Dies kann mit Annäherung durchgeführt werden. Da die so abgeführte Wärme-

energie im Vergleich zu den obenerwähnten nicht immer signifikant ist, wird hier auf die ausführliche Analyse und auf die Anwendung der bekannten Wärmeleitungs-Beziehungen [4] nicht näher eingegangen.

Zur Angabe der durch das die Katode umgebende Gas abgeführten Wärme ist in unserem Fall bei geringen Drücken (1—5 Torr) der auf Grund der Dushmannschen Methode entwickelte Berechnungsverlauf gut anwendbar (7), bei welchem von der von Dushmann angegebenen Beziehung

$$Q_{gv}^{-} = \frac{2\pi \cdot d \cdot \lambda_T \cdot \Delta T}{d \cdot \ln r/d} \tag{27}$$

ausgegangen werden kann, wobei

Q_{gv}^{-} die durch Wärmeleitung im Gas in der Zeiteinheit abgeführte Wärmeenergie;
d der Durchmesser des Glühfadens;
λ_T die Wärmeleitungszahl des Gases;
ΔT die auftretende Temperaturdifferenz;
r der Innenradius der Entladungsröhre ist.

Der in der Formel vorkommende und mit dem Buchstaben d angegebene Metallfadendurchmesser muß durch einen für die Wendel charakteristischen, auch die Oxydschicht berücksichtigenden Ausdruck ersetzt werden, dessen Angabe in Kenntnis sowohl der Wendelkennwerte wie auch der Lage der Emissionsschicht erfolgen kann. Der temperaturabhängige Wärmeleitungskoeffizient λ_T wird gebräuchlicherweise mit einem solchen Integraldurchschnittswert ersetzt [7], bei welchem die Integrierung sich auf die einzelnen in Frage kommenden Temperaturintervalle erstreckt; der Wert der so erhaltenen durchschnittlichen Wärmeleitzahl λ ist z. B. für Argon

$$\lambda = \frac{1{,}470 \cdot 10^{-5}}{T_2 - T_1} \cdot \left[\frac{2}{3} T^{3/2} - 2 \cdot 142 \cdot T^{1/2} + 2 \cdot 142^{3/2} \tanh \left(\frac{T}{142} \right)^{1/2} \right]_{T_1}^{T_2}, \tag{28}$$

wobei T_2 und T_1 die untere bzw. obere Grenze des in Frage kommenden Temperaturbereiches sind.

Die Gesamtheit der zur Verringerung der Katodentemperatur führenden Vorgänge ergeben einen Ausdruck (Q_k^{-}), der mit Hilfe der obigen Symbole in der folgenden Form zusammengefaßt werden kann:

$$Q_k^{-} = (Q_e^{-} + Q_{eb}^{-}) + Q_r^{-} + Q_s^{-} + Q_{fv}^{-} + Q_{gv}^{-}. \tag{29}$$

In dieser Gleichung ist durch die ersten beiden Glieder die durch die Elektronen in der Zeiteinheit verursachte Kühlung und durch die folgenden Glieder die mit der durch das Ionenbombardement bewirkten Beschädigung, mit der Strahlung sowie mit der galvanischen und im Gas oder im Dampf erfolgten Leitung in der Zeiteinheit abgeführte Energie repräsentiert.

Die Entladung strebt einen Zustand minimaler Energie (Flecktemperatur, Fleckenabmessungen usw.) auszubilden; im Laufe dieses Vorganges kann im stationären Fall ein Gleichgewicht zwischen dem hier vorgeführten positiven und negativen Energietransport angenommen werden:

$$Q_K = Q_k^- . \tag{30}$$

Bei Quecksilberdampfentladungen, bei einem Katodenfall von 10 V und bei Wolframelektroden ohne Fremdheizung können die wichtigeren Komponenten des Energiegleichgewichtes näherungsweise die folgenden Werte in V annehmen [1]:

Heizung durch Ionenbombardement	$0{,}15 \div 5{,}7$ V;
Beitrag der neutralen Teilchen	$0{,}5 \div 1{,}0$ V;
Kühlung durch Elektronenaustritt	$2{,}9 \div 4{,}6$ V;
Kühlung durch Verdunstung, Beschädigung	$0 \div 2{,}2$ V;
Kühlung durch Strahlung	0,04 V;
Kühlung durch galvanische Leitung	2,68 V;
Kühlung durch Leitung im Gas	$0 \div 5$ V.

Diese Angaben sind für eine Katodenfläche mit Akkomodations-Koeffizient zwischen $0{,}9 \div 1$ bei

$$0{,}1 < i_e/i_0 = u < 0{,}9 \tag{31}$$

berechnet worden [1]. Es muß hier erwähnt werden, daß die hier angeführten Ergebnisse, genauso wie alle bisher mitgeteilten übrigen Angaben [2—5, 8, 9], stark annähernden Charakters sind und im allgemeinen nicht als Basis gebraucht werden können. Die Ergebnisse der wenigen, bisher angestellten Prüfungen des Katoden-Energiegleichgewichtes [1—8] sind daher nicht übereinstimmend, das Gleichgewicht hängt bedeutend von den Eigenschaften der Katode und der Entladung selbst ab, wodurch die — auch sonst nur mit annähernden Berechnungen erzielten — Ergebnisse stark beeinflußt werden. Bei der Charakterisierung des positiven und des negativen Energietransportes wurde die Wirkung der Elemente der radioaktiven Emissionsschichten oder Gasverunreinigungen sowie Zusatzstoffe näher behandelt. Von der Diskussion derselben wird hier abgesehen.

III. Energiebilanz der Katoden-Vorheizung

Die Katoden-Vorheizung setzt sich bei Oxydkatoden mit Emissionsschicht aus zwei Phasen: der dem Glimmen vorangehenden Anheizungsphase und der dem Erscheinen der Glimmentladung folgenden Phase zusammen. Obzwar sie auf der Aufnahme der Charakteristik Heizspannung — Heizstrom anscheinend gut getrennt werden können, scheiterten bisher die Versuche, vom

Gesichtspunkt der Aufstellung einer Energiebilanz eine scharfe Grenze zwischen denselben anzugeben. Es entsteht nämlich bereits in der Anheizungsphase eine dunkle Entladung, deren Elektronen durch die an dem negativeren Wendelende befindliche, Elektronen emittierende Schicht gewährleistet werden, u. a. in Abhängigkeit von der durch die Anheizung erzielten Temperatur. Die wegen der Elektronen entstandene Emissionskühlung wird also nicht nur durch den auch dem Auge sichtbaren Beginn der Glimmentladung eingeleitet.

Laut genauerer Beobachtungen treten jedoch die Elektronen nicht nur an dem negativen Wendelende, sondern an allen mit Emissionsschicht versehenen Stellen der Wendel aus, wo dies durch die Temperatur der Schicht ermöglicht wird. Demgemäß treten also in der ganzen Länge der Wendel mit dem Anstieg der Wendeltemperatur im Sinne des Gesetzes nach Richardson Elektronen in stets zunehmender Zahl aus, welche teils eine Raumladung um die Wendel erzeugen, teils sich zum Wendelende mit einem höheren Potential als in einem quasistatischen Feld bewegen. Mit der Erhöhung des die Wendel durchfließenden Heizstromes nimmt die Temperatur der Wendel zu und steigt demgemäß auch deren Warmwiderstand und so auch der Spannungsabfall auf derselben an. Sobald dieser Spannungsabfall einen kritischen Wert erreicht (welcher Wert von dem Aufbau der Wendel, von der Länge derselben, von der Struktur der Katode, dem Gasdruck, der Gasart sowie von der Lage der Emissionsschicht abhängt), kann zwischen den beiden Enden der Wendel als Überschlag eine Glimmentladung, eine parasitäre Entladung entstehen, die im allgemeinen mit einer negativen Charakteristik in dem subnormalen Entladungsbereich beginnt, wobei doch mit der Erhöhung des Heizstromes nicht nur der die Wendel durchfließende Strom, sondern auch der der entwickelten Glimmentladung ansteigt. Demgemäß wird auch die Charakteristik der parallelen Entladung sich ändern, genau so wie die Abmessungen der Räume derselben.

Es können außerdem auch zwischen den einzelnen Wendelwindungen lokale Entladungen sich ausbilden. Das Erscheinen der Glimmentladung steht also mit den Kennwerten der Wendel und der Emissionsschicht in engster Verbindung und ist von einer sichtbaren Lichterscheinung begleitet. In diesem Raum können jedoch nicht nur Erregungen, sondern auch Ionisationen vor sich gehen. Das leuchtende Glimmlicht erscheint am positiven Ende der Wendel, und indem es sich mit der Erhöhung der Stromdichte dem negativen Spiralenende nähert, umgibt es auch dasselbe. Die Lage des Glimmlichtes ist für die Energieverteilung der thermischen Elektronen charakteristisch.

In der Vorheizungsphase mit Glimmentladung fließt also parallel zu der Wendel auch in dem Gas ein Strom, sozusagen die Wendel überbrückend, wodurch der durch dieselbe fließende Gesamtstrom vermindert und dadurch die Wendel auch gekühlt wird.

Das Erscheinen des gut sichtbaren Glimmentladungslichtes kann auch mit der kritischen Temperatur charakterisiert werden. Es kann nämlich im

Falle von Oxydkatoden solcher Ausbildung leicht jene Katodentemperatur gefunden werden, bei welcher die Glimmentladung sich eben ausgestaltet, doch sobald sie sich ausgestaltet hat, sie auch wieder verschwindet. Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß durch den die Wendel durchfließenden Strom die Katode in diesem Falle bereits vor Beginn der Entladung genügend erhitzt wird, um zum an der Wendel so entstandenen Spannungsabfall die genügende Anzahl Elektronen zum Überschlag erzeugen zu können. Sobald jedoch der Überschlag vor sich gegangen ist, wird ein Teil des bisher durch die Wendel fließenden Stromes durch das Gas fließen, wird also die Wendel durch diesen Teil nicht mehr erwärmt, infolgedessen die Temperatur derselben fallen, und so wird auch der an derselben entstandene Spannungsabfall und auch der thermische Elektronenstrom verringert und daher dann die Glimmentladung unterbrochen. Nun wird jedoch nach Verlauf einer gewissen Zeit der gesamte Vorheizungsstrom durch die Wendel fließen, und daher die Glimmentladung wieder eingeleitet. Dies ist ein für die Inertie der Wendel charakteristischer, sich wiederholender Vorgang, der zu einer pulsierenden, parallelen Entladung führt.

Das bisher Gesagte gilt für den Fall der Heizung mit Gleichstrom. Bei Wechselstromheizung spielen die Wendelenden abwechselnd die Rolle der Anode und der Katode, und demgemäß wird auch das für die Anodenseite charakteristische Glimmlicht vibrieren, was jedoch bei der Vorheizung mit 50 Hz mit dem bloßen Auge nicht mehr verfolgt werden kann.

Das im obigen umrissene Bild muß zur Aufzeichnung der Energiebilanz noch damit ergänzt werden, daß bei eingestelltem Heizstrom nach Verlauf einer gewissen Zeit eine Situation sich ergeben wird, in welcher sich die Temperatur der Katodenwendel nicht mehr ändert, und die dort vor sich gehenden Vorgänge eine Gleichgewichtstemperatur bewirken. Damit hat die Glimmphase der Vorheizung ihren Abschluß gefunden. Unter Berücksichtigung der oben geschilderten Eigentümlichkeiten dieser beiden Phasen kann ein annäherndes Gleichgewicht für Kathodenwendeln ohne Hilfselektrode in der unten folgenden Form berechnet werden.

1. Die der Glimmentladung vorangehende Vorheizphase

Diese Phase setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Zu Beginn der Vorheizung wird die Wolframwendel bis auf etwa 500—600 °C erhitzt, wobei die Kühlwirkung der Emissionsschicht sich erst dann bemerkbar macht [10]. Von nun an werden dann in der zweiten Phase durch das gemeinsame Verhalten derselben die Erhitzungs- und Abkühlungsvorgänge bestimmt.

In beiden Phasen wird die Temperatur der Wendel ausschließlich durch die mit Fremdheizung eingespeiste Energie erhöht, wobei als temperaturvermindernder Vorgang die Ausstrahlung und die im Gase bzw. im Metall vor

sich gehende Wärmeleitung in Frage kommt. Da das Glimmen in einem Temperaturbereich zwischen etwa 800—1200 °C auftritt, ist die Wirkung der in einem niedrigeren Temperaturbereich — in den eben untersuchten Phasen — austretenden thermischen Elektronen vernachlässigbar, doch kann, mindestens ebenso gut, auch die mit den Ionen verbundene, bedingte Wirkung vernachlässigt werden.

Für die beiden eben vorgeführten Phasen (vor allem für die erste) kann noch die Annahme gemacht werden, daß die Temperatur der Wolfram-Doppelwendel zu beliebigem Zeitpunkt überall die gleiche ist, und so kann auf Grund des Obengesagten die Energiebilanz in der Form

$$Q_H = Q_s^- + (Q_{gv}^- + Q_{fv}^-) \tag{32}$$

charakterisiert werden. In ausführlicherer Form kann das Energiegleichgewicht für die Anfangsphase mit der Gleichung

$$\begin{aligned} i_h^2 \cdot \varrho_w(T) \cdot \frac{l_w}{q_w} \cdot w(T) = \sigma v \int_{F_w} \varepsilon_w (T_w^4 - T_0^4)\, df + \\ + \frac{2\pi d_w \cdot \lambda_T \Delta T}{d_w \ln r/d_w} + C_w G_w (T_w - T_0) \end{aligned} \tag{33}$$

charakterisiert werden, wo

i_h der die Wolframwendel durchfließende Heizstrom;
ϱ_w der spezifische Widerstand des Wolframs;
l_w die Länge des Wolframfadens;
q_w der Querschnitt des Wolframfadens;
$w(T)$ ein Korrektionsfaktor für die im Laufe des Temperaturanstiegs entstandene Formänderung der Wolframwendel (bei niedrigen Temperaturen annähernd 1);
F_w die Fläche der Wolframwendel;
T_0, T_w die Temperatur der Umgebung bzw. der Wolframwendel;
ε_w der Integrations-Strahlungskoeffizient der Wolframfläche;
d_w der Durchmesser des Wolframs;
c_w die Wärmekapazität des Wolframs; und
G_w die Masse des Wolframs ist.

Die übrigen Symbole sind den im obigen verwendeten gleich. Bei der Beziehung (33) wurde die Zeitabhängigkeit außer Acht gelassen; sie bezieht sich auf den quasistationären Zustand für das Eintreten des Gleichgewichtes. Der Geltungskreis der Gleichung (33) kann jedoch erweitert werden, indem auch die Zeitabhängigkeit der einzelnen Größen berücksichtigt wird. Dadurch wird die Lage ziemlich schwieriger; Berechnungen solcher Art sind jedoch glücklicherweise im allgemeinen nicht so wichtig, daß die mit diesen Berechnungen verbundenen ernsten Anstrengungen als berechtigt betrachtet werden könnten.

Wird auch der anfängliche Einfluß der Oxydschicht berücksichtigt, so kann eine der Beziehung (33) ähnliche Beziehung auch für die Energiebilanz der zweiten Phase aufgeschrieben werden [3]:

$$i_h^2 \varrho_w(T) \frac{4l_w}{\pi d_w^2} = \sigma \int_{F_b} \varepsilon_b \cdot \nu (T_b^4 - T_0^4)\, df + \\ + \frac{2\pi d_w^* - \lambda_T \cdot \Delta T}{d_w^* \ln r/d_w^*} + \left[c_w \frac{\pi \cdot d_w^2}{4} l_w + \beta c_b g_b \right] \cdot dT \,, \tag{34}$$

wo

ε_b der Integrations-Strahlungskoeffizient der Oxydschicht;
F_b die Fläche der Oxydschicht;
T_b die Temperatur der Oxydschicht;
d_w^* der Gesamtdurchmesser von Wolfram und Oxydschicht;
β eine wegen der ungleichmäßigen Beanspruchung der Schicht zu berücksichtigende Konstante, die kleiner als die Einheit ist;
c_b die Wärmekapazität der Oxydschicht;
g_b die Masse der Oxydschicht bedeutet.

Es kann in beiden Fällen ein Zusammenhang zwischen den geometrischen Kennwerten der Wendel und den Oxydschicht-Kennwerten sowie der Temperatur der Wendel gefunden werden. Wird die Temperaturabhängigkeit von c_w und c_b [3] entweder für den zeitunabhängigen Gleichstromfall oder aber für den zeitabhängigen Fall bestimmt, so kann auch die Wirkung der Veränderungen der Wendel sowie die der mit der Emissionsschicht verbundenen Änderungen im voraus beurteilt werden. In dem ersten Teil der Vorheizungsphase ergibt vor allem die durch das Gas im Wege der Wärmeleitung abgeführte Wärmemenge den Energieverlust, wobei die Strahlung und die Leitung mit guter Annäherung vernachlässigt werden können. Demgemäß wird auch die Beziehung (33) bedeutend einfacher, wodurch die Möglichkeit geboten wird, daß in bezug auf die Wendelkonstruktion gewisse näherungsweise, anfängliche Bedingungen entstehen. Es wird u. a. dadurch die Untersuchung dieser Anfangsphase begründet, bei welcher der auf 1 cm² der Wolframfläche entfallende spezifische Energieverlust in der Zeiteinheit nicht einmal den Wert von 250 mW/cm² übersteigt.

In der über etwa 500 °C beginnenden zweiten Phase (wobei auch diese Temperatur von der Katodenkonstruktion abhängig ist) dominiert bereits vor allem der Verlust durch Strahlung, was den höheren Temperaturen zu immer mehr an Bedeutung gewinnt. In der Beziehung (34) kann daher das Strahlungsglied nicht mehr vernachlässigt werden; die wegen der galvanischen Wärmeleitung auftretenden Verluste können in einzelnen Fällen bei näherungsweisen Berechnungen im Vergleich zu den wegen der Wärmeleitung im Gas und der Strahlung sich ergebenden Verlusten vernachlässigt werden. In dieser Vorheizungsphase kann die von der Flächeneinheit in der Zeiteinheit abgeführte Wärmeenergie bereits den Wert von 2 W/cm² erreichen.

2. *Vorheizungsphase mit Glimmentladung*

Sobald die Temperatur der Wendel den im obigen erwähnten kritischen Wert erreicht hat, beginnt zwischen den beiden Wendelenden — und evtl. auch zwischen den einzelnen Windungen — eine parasitäre Entladung, die die dazu nötigen Elektronen der Wendelachse entlang kontinuierlich sammelt, da bei dieser Temperatur bereits die ganze Wendel emittiert. Die Fortbewegungsrichtung der Elektronen wird durch die an der Wendel entstandene, im allgemeinen ganz spezielle Potentialverteilung bestimmt, deren näherungsweise Messung bereits auf ernste Schwierigkeiten stößt. Die bisher aufgeschriebenen Beziehungen sind selbstverständlich zur Aufstellung der Energiebilanz der Vorheizungsphase mit Glimmentladung nicht mehr anwendbar. Es müssen die die Entladung begleitenden Änderungen, der nun bereits beträchtliche Elektronenaustritt, das evtl. Ionenbombardement, die durch die auftretende Strahlung hervorgerufenen Verluste, die Rollen der angeregten und metastabilen Atome berücksichtigt werden.

Man könnte schon in erster Annäherung erwarten, daß bei Gleichstrom-Vorheizung das negative Wendelende, von welchem die Elektronen vorwiegend austreten, eine bedeutend niedrigere Temperatur haben wird als das positivere Wendelende, wohin die Elektronen einschlagen. Dies ist aber doch nicht der Fall. Es steht zwar fest, daß im allgemeinen von dem Ionenbombardement des für kälter erwarteten negativen Wendelendes in diesem Falle abgesehen werden kann, doch wird durch die guten Wärmeleitfähigkeiten des metallischen Wolframs sowie durch die ständige Fremdheizung die mit dem — übrigens auch an anderen Stellen sich zeigenden — Elektronenaustritt verbundene Temperaturabnahme kompensiert. Dies bedeutet keinesfalls, daß mit der durch die Elektronen abgeführten Energie nicht gerechnet werden muß, sondern nur daß dieser Energieverlust kontinuierlich ersetzt wird.

Bedeutend beträchtlichere und gut wahrnehmbare Temperaturdifferenzen werden durch das stellenweise Fehlen der Emissionsschicht sowie durch die Ungedecktheit oder teilweise Gedecktheit der Wolframwendel verursacht. Diese Temperaturdifferenz erreicht fallweise Werte zwischen 150—200 °C, bei einer gegebenen Wendel, unabhängig von der Richtung der neben der Wendel zustande gekommenen parasitären Entladung.

Zur Bestimmung des Energiegleichgewichtes sind hier bereits ergänzende spektroskopische oder Mikrowellen-, evtl. auch Laser-Messungen erforderlich. In dieser Weise muß z. B. durch Aufnahme des Entladungsspektrums die wegen der Strahlung sich ergebende Wärmebeanspruchung kontrolliert und geeignete Prüfmethoden zur Berücksichtigung der Konzentration des Ionenstromes und der metastabilen Atome gefunden werden.

Die einfachere, näherungsweise Bestimmung bedarf lediglich der Bestimmung des Stromes der parallel zur Wendel sich entwickelnden Entladung.

In Kenntnis desselben kann nämlich — unter Vernachlässigung von evtl. Entladungen zwischen den Windungen- bereits ein annäherndes Bild über das Energiegleichgewicht der Vorheizungsphase der Glimmentladung geschaffen werden.

Von den energieerzeugenden Vorgängen ist auch in diesem Falle die durch den die Katodenwendel durchfließenden Heizstrom bewirkte Heizung (Q_H) am bedeutendsten. Wegen des beträchtlichen Emissionsstromes muß die am Querwiderstand der Emissionsschicht auftretende »Emissionsheizung« (Q_q) und gegebenenfalls auch die Wirkung der metastabilen (Q_{mk}) und der angeregten Atome (Q_{ek}) berücksichtigt werden. Von dem Ionenbombardement (Q_i) und der Wirkung der anprallenden Photonen (Q_{fk}) kann wegen des Charakters der parasitären Entladung in erster Annäherung abgesehen werden.

Bei der Festsetzung der negativen Seite des Energiegleichgewichtes: bei der Berechnung des negativen Energietransportes muß außer den bisher berücksichtigten Strahlungserscheinungen (Q_s) und den Leitungserscheinungen im Gas bzw. im Metall (Q_{gv} bzw. Q_{fv}) nicht nur die durch die emittierten Elektronen abgeführte Energie (Q_e^-), sondern auch die wegen der angestiegenen Temperatur auftretende Beschädigung der Emissionsschicht (vor allem die Verdunstung) und die infolgedessen abgeführte Wärmeenergie (Q_r) in Kauf genommen werden.

Unter Berücksichtigung des Obenbesagten können die Komponenten des Energiegleichgewichtes als

$$Q_H + Q_q + Q_{mk} + Q_{ek} + (Q_i + Q_{fk}) = Q_s^- + Q_{gv}^- + Q_{fv}^- + Q_e^- + Q_r^- \qquad (35)$$

zusammengefaßt werden, wobei in Klammern die durch das Ionenbombardement und die Strahlung evtl. erzeugte Wärme angedeutet ist. Bei der Angabe des Wertes von Q_H bedeutet lediglich die Bestimmung des die Wendel durchfließenden Heizstromes Schwierigkeiten, die weiteren Berechnungen können in der oben geschilderten Weise vorgenommen werden. Von dem Wert von Q_{mk} und Q_{ek} sowie $Q_i + Q_{fk}$ kann bei Entladungen in Niederdruck-Quecksilberdampf-Edelgas (Penning-Gas), z. B. auch in Leuchtröhren, auch bei dem dort angewandten Elektrodenaufbau abgesehen werden. Bei der Bestimmung von Q_q sowie bei der Angabe von Q_e^- ist mit einer der Methoden der Emissionsstrom der Katode bestimmt und von diesem Wert die Emissionsstromdichte berechnet worden, wobei dann in Kenntnis der Stärke und des spezifischen Widerstandes der Emissionsschicht der Wert von Q_q näherungsweise berechnet werden kann. Q_s^-, Q_{gv}^- und Q_{fv}^- können in der obenangeführten Weise berechnet und der den Wert von Q_r^- ergebende Schichtverdunstungsverlust auf Grund der Angaben der Verdunstungsmessung bestimmt werden.

Gemäß Erwartung wird die Gleichgewichtstemperatur auch in der Glimmphase neben der Wendelstruktur entscheidend durch die Eigenschaften und

Anordnung der Schicht bestimmt. Diese letztere, sowie die Berücksichtigung und näherungsweise Charakterisierung derselben, bedeuten die größten Schwierigkeiten.

Genauso wie bei der Behandlung des Beginns der Vorheizungsphase, können auch hier die Zeitabhängigkeiten berücksichtigt werden, die Berechnungen können jedoch auch für den Fall eines stationären Zustandes durchgeführt werden, wobei nach Verlauf einer gewissen Zeit sich eine ziemlich gut definierbare Gleichgewichtstemperatur ergibt, deren Größe ebenfalls von der Wendel und den Schichtkennwerten bestimmt wird.

Bei Wechselstrom-Vorheizung wird die Lage etwas verwickelter, da die Wendelenden abwechselnd die Rolle der Katode bzw. Anode spielen. Demzufolge wird der um das Anodenende erscheinende, kennzeichnende Leuchtbereich dem Periodenwechsel entsprechend zwischen den beiden Wendelenden überspringen. Es ist leicht einzusehen, daß dies zu keinen bedeutenden Änderungen der obigen Überlegungen führt; eine Modifikation wird dadurch lediglich bei der Berechnung der einzelnen Komponenten herbeigeführt.

Sowohl die mit der Wärmeleitung wie auch die mit dem Überschlag verbundenen und durch den Austritt von Elektronen hervorgerufenen Energieverlusterscheinungen werden wesentlich durch die mit der Wendel evtl. galvanisch sich berührenden, doch allerdings in deren Nähe angeordneten metallischen Hilfselektroden und Ansätze geändert. Sie können nicht durch die Angabe von einfachen Beschirmungsfaktoren berücksichtigt werden, da sie sowohl die Potentialverteilung in dem die Wendel umgebenden Raum wie auch die Stromdichte an der Wendel, die Größe des Stromes der parallelen Entladung usw. bedeutend verändern. Die Berücksichtigung derselben kann mit Hilfe von unter simulierten Verhältnissen angestellten Vorversuchen, doch auch dann nur mit starken Annäherungen erfolgen. Die bisher abgeleiteten Zusammenhänge und Feststellungen beziehen sich ausschließlich auf doppelt gewendelte Wolframkatoden ohne Hilfselektrode.

IV. Energiebilanz der stationären Gleichstrom-Lichtbogenentladungen mit Oxydkatode

Bevor auf die ausführlichere Behandlung eingegangen wird, müssen zwei Katodenfunktionen: der Fall der von einem fremden elektrischen Stromkreis ständig geheizten Katode und der Fall der nur durch die Entladung geheizten Katode unterschieden werden. In beiden Fällen kann auch ein Katodenfleck entstehen, der dann einen weiteren Gesichtspunkt bei der Aufstellung der Energiebilanz bildet.

Das Maß der fremden Katodenheizung übt einen starken Einfluß auf das Energiegleichgewicht der Katode aus. Näherungsweise kann gesagt werden,

daß in Fällen ohne Katodenfleck die Katodenwendel gleichmäßig Elektronen emittiert, auch gleichmäßig strahlt, und ihre Wärmeleitungsverluste, genauso wie das an ihre Fläche anprallende Ionenbombardement, gleichmäßig dicht sind, doch muß man bei der Berechnung derselben über die gesamte Katodenfläche integrieren, wobei wieder durch irgendeinen Koeffizienten, evtl. durch eine Funktion der Grad der Gedecktheit mit der Emissionsschicht berücksichtigt werden muß (z. B. bei dem Elektronenaustritt, der Strahlung usw.). Es wird also im Vergleich zu den bisherigen Berechnungen kein großer Fehler begangen, wenn die Energiebilanz durch die Realisierung der obengeschilderten Vorstellung und bei Vernachlässigung der evtl. lokalen Überschläge, von dem Falle ohne Fremdheizung ausgehend, angegeben wird, solange der fremde Heizstrom nicht jenen kritischen Stromwert (Wendeltemperatur) erreicht, bei welchem zwischen den beiden Enden der Wendel bereits eine parasitäre Entladung erscheint. Bei diesem Strom und in dem darüber liegenden Strombereich müssen bereits die für den Zustand mit Glimmentladungs-Vorheizung im vorangehenden abgeleiteten Angaben und die entsprechenden Angaben des für die im nachstehenden anzuführende stationäre Gleichstrom-Entladung gültigen Energiegleichgewichtes kombiniert werden.

Entsteht auch ein Katodenfleck an der fremdgeheizten Wendel, so muß man bei der Behandlung der später zu erwähnenden stationären Entladung mit Katodenfleck nur von dem durch die Entladung geheizten Gleichgewichtszustand ausgehen, wobei auch die temperaturausgleichende Wirkung der Fremdheizung und die Energieverläufe der dadurch evtl. ausgelösten parasitären Glimmentladung miteinberechnet werden müssen. Im weiteren wird auf die Wirkung der Frendheizung nicht näher eingegangen, weil, wie bereits erwähnt, die Berücksichtigung derselben in der obenbeschriebenen Weise mit fast mechanischen Berechnungen vorgenommen werden kann, und dies zu keinem größeren Fehler führt als die Berechnung der Komponenten des Energiegleichgewichtes.

1. Der Fall ohne Katodenfleck

Der an der Katode fallweise erscheinende Fleck hoher Temperatur und hoher Ladungsträgerkonzentration, der reich an Anregungen und Ionisationen ist, der sogenannte Katodenfleck oder auch Brennfleck genannt, kommt nach dem Prinzip des Energieminimums zustande, wobei seine Anwesenheit, Abmessungen und physikalischen Parameter vor allem durch die Gesamtwirkung des Katoden- und Entladungstyps und durch deren Abgestimmtheit aneinander bestimmt werden.

Ist kein Katodenfleck vorhanden, so nimmt die ganze Kathode mehr oder weniger gleichmäßig an der Erfüllung der Katodenfunktionen, in erster Linie also an der Elektronenerzeugung teil.

Ein annähernd gleichmäßiger Anstieg der Katodentemperatur wird — von den neben der Katode evtl. angewandten Hilfselektroden wieder abgesehen — durch die an der Katodenfläche anprallenden positiven Ionen bewirkt. Obzwar sie im allgemeinen gewissermaßen verteilt sind, kann in diesem Falle bei der Berechnung des Energiegleichgewichtes von der Bestimmung der Oberflächenverteilungsfunktion des Ionenstromes abgesehen und die Ionenstromverteilung für die gesamte Katodenfläche als gleichmäßig betrachtet werden. In Kenntnis der Ionenstrom-Komponente des Entladungsstromes kann also die Ionenheizung (kinetische Energie, Rekombinations- und Kondensationsenergie) verhältnismäßig einfach charakterisiert werden.

Genauso wie bei dem Ionenbombardement, kann auch bei der Elektronenemission in diesem Falle die Verteilung derselben an der Katodenfläche vernachlässigt werden. Ist die Größe der Elektronenstrom-Komponenten des Entladestromes bekannt — z. B. die Schätzungswerte von CAYLESS [11] oder die Ergebnisse von Sondenmessungen zugrunde legend — so kann eine gleichmäßige Emissionsstromdichte für die ganze aktive Fläche der Katode angegeben werden. Dies führt keinen größeren Fehler in die Berechnungen ein, als z. B. der bei der Bestimmung des mit Emissionsschicht gedeckten, aktiven Teiles der Katodenfläche auftretende Fehler ist. Die austretenden Elektronen heizen den Obenbesagten gemäß die Emissionsschicht beim Durchfluß durch dieselbe gleichmäßig auf, dem bei der gegebenen Temperatur sich ergebenden Querwiderstand entsprechend.

Die zufolge des Joule-Effektes auftretende Erhitzung des Wolframs erfolgt im Sinne des vorerwähnten ebenfalls in der ganzen Länge des Fadens und kann auch als gleichmäßig angenommen werden, da abgesehen von den mit Emissionsschicht versehenen Teilen und von solchen ohne Schicht — was durch die Charakterisierung der Gedecktheit berücksichtigt werden muß — an der Wendel keine Präferentialstellen (bevorzugte Stellen) gibt, da nämlich näherungsweise auch von den Grenzerscheinungen (Metalldurchführungen, Wendelträger usw.) abgesehen werden kann. Was jedoch die Charakterisierung der Gedecktheit betrifft, ist es zweckmäßig, teils den Weg der Experimentierung, teils den Weg der Theorien einzuschlagen. Der Experimentierteil reicht ganz bis zur präparativen Teil zurück. Bei diesen für Versuchszwecke dienenden Katodenwendeln muß zunächst eine solche Elektronen emittierende Schicht ausgebildet werden, die ausschließlich in der Umgebung der Windungen, z. B. bei Doppelwendeln zwischen den Primärwindungen in fast zylindrischer Form vorliegt. Die Oberfläche, der Durchmesser und das Volumen derselben kann mit geeigneter Streckung und in Kenntnis der Abmessungen des Wolframfadens und der Kennwerte der Wendelstruktur gut berechnet werden. Nach den für sie festgestellten Zusammenhängen können Untersuchungen angestellt werden, bei welchen die Emissionsschicht teils auch die Räume zwischen den Windungen ausfüllt. So kann der Fall der im allgemeinen erzielbaren Emis-

sionsschichten angenähert und auf diesem Wege auch die Kennwerte der Gedecktheit sowie deren Wirkung festgestellt werden.

Die weiteren, die Heizung der Katoden bewirkenden Vorgänge — Photonenbombardement, metastabile Atome, angeregte Atome und Ionen — wirken auf die gesamte Katodenfläche; die evtl. Wirkung derselben, die dann bei den verschiedenen zu untersuchenden Entladungen einzeln zu beurteilen sind, kann durch die Existenz des Katodenfleckes nicht beeinflußt werden.

Von den zur Verringerung der Katodentemperatur führenden Vorgängen ist vor allem der Elektronenaustritt, die Strahlung und die Wärmeleitung im Gas von entscheidender Bedeutung. In Abhängigkeit von der Katodentemperatur wird der wegen der Oberflächenbeschädigung (Verdunstung, Verstaubung) und der an den metallischen Teilen bestehenden Wärmeleitung auftretende Energieverlust in Rechnung gestellt. Bei der Angabe derselben muß man von der eine gleichmäßige Temperatur aufweisenden (Berücksichtigung der Gedecktheit) und, vom Gesichtspunkt des eben untersuchten Vorganges aus aktiven, gesamten Katodenfläche ausgehen. Von der detaillierten Anführung der anzuwendenden Grundbeziehungen wird hier abgesehen, da sie im allgemeinen bereits in Abschnitt II zusammengefaßt worden sind, und die Berücksichtigung und die in Einzelheiten gehende Analyse der verschiedenen zu erwartenden spezialen Entladungseigenschaften hier nicht unsere Zielsetzung bildet.

2. Berücksichtigung des Katodenfleckes

Im Falle ohne Katodenfleck wird die eingehende Analyse der das Energiegleichgewicht bildenden Komponenten bereits im Laufe der näherungsweisen Berechnungen jedermann davon überzeugen können, daß dies nicht die wirtschaftlichste, mit den geringsten Verlusten charakterisierbare Funktionsweise der Katode ist. Dazu nämlich, daß die ganze Katodenfläche zu emittieren vermag — und das ist eben doch das Kriterium — muß sie eine genügend hohe Temperatur haben, wodurch die Verluste stark (proportional der Katodenfläche) erhöht werden. Die Funktion der Katode gestaltet sich viel wirtschaftlicher, wenn an derselben nur ein geringer Flächenteil, der sogenannte Brennfleck, der Katodenfleck die zur Emission erforderliche Temperatur aufweist und die Verluste entscheidend der Temperatur und Größe dieses Flächenteiles proportional sind.

Die Katoden-Energiebilanz der Bogenentladungen mit Katodenfleck haben die gleichen Komponenten, welche bereits in dem Fall ohne Katodenfleck in Betracht gezogen worden sind. Bedeutend anders wurde jedoch die oberflächliche Strombeanspruchung der Katode sowie die Temperatur und die Emissionsstromstärke derselben. All dies ist durch die Erscheinung des Katodenfleckes hervorgerufen worden, wo eine bevorzugte Stelle entstanden ist;

diese Stelle ist in Nähe jenes Endes der Katodenwendel zu finden, durch welches der Entladestrom in den fremden elektrischen Kreis abläuft (aktives Wendelende).

Mittels näherungsweiser Berechnungen kann man sich davon überzeugen, daß sowohl vom Gesichtspunkt der Strahlungsverluste und der im Gas auftretenden Wärmeleitungsverluste wie auch vom Gesichtspunkt des Elektronenaustritts und des Ionenbombardements aus der Katodenfleck über einen entscheidenden Charakter verfügt; dieser Fleck ist im allgemeinen um 300—600 °C wärmer als die übrigen Teile der Katodenfläche. Eben deswegen ist es gebräuchlich, den Katodenfleck vom übrigen Teil der Wendel getrennt zu betrachten und nur für den Katodenfleck die Komponenten des Energiegleichgewichtes anzugeben [4]. Dies ist selbstverständlich wieder eine ernste Annäherung, über deren Zuverlässigkeit man sich von Fall zu Fall überzeugen muß. Die Aufstellung der gesamten Energiebilanz macht erforderlich, daß dazu auch das Verhalten der übrigen Teile der Katode, vor allem die Wärmeverlustvorgänge derselben miteinbezogen werden. Die nach den Berechnungen aus dem nur auf den Katodenfleck bezogenen Energiegleichgewicht erhaltenen Katodenkennwerte sollen eben deswegen zweckmäßigerweise auch auf anderen Wegen geprüft, und aus der sich zeigenden Abweichung zurückrechnend, eine Korrektion berücksichtigt werden, die dann im weiteren bei gegebenem Katodentyp als Modellkorrektion betrachtet werden muß.

Die einzige veröffentlichte Bestimmung des Energiegleichgewichtes des Katodenflecks stammt von RESCHENOW [4]. Er hat diese Berechnungen für Einfachwendel, für den Fall von mit der Elektronen emittierenden Schicht gleichmäßig ausgefüllten Zwischenräumen zwischen den Windungen ausgeführt. Bei seinen Untersuchungen hat er die wegen der Schichtbeschädigung (Zerstaubung, Verdunstung) auftretenden Wärmeverlustvorgänge nicht berücksichtigt.

Bei seinen Berechnungen machte einen — im Vergleich zu der durch das Gas abgeführten Energie — verhältnismäßig großen Wert die durch die galvanische Wärmeleitung abgeführte Energie aus, welche doch neben den im Gas auftretenden Wärmeverlusten im allgemeinen vernachlässigt wird [3, 8]. RESCHENOW nützt die erhaltenen Ergebnisse gleich aus [4] und stellt näherungsweise Zusammenhänge zwischen der Feldstärke vor der Kathode und dem Elektronenstrom, dem Ionenstrom sowie der Temperatur des Katodenflecks und dem prozentuellen Anteil des Ionenstromes (μ) auf. Er weist nach [4], daß mit dem Anstieg der Fläche des Katodenflecks bei gegebenem Entladestrom auch die Temperatur des Flecks sich erhöht, der prozentuelle Anteil der Ionenstrom-Komponente abnimmt, doch die Gesamtheizleistung ansteigen und so auch die durch die Emissionsschicht wirkende Emissionsheizung und, wegen des durch das Wolfram fließenden Stromes, auch der Joule-Effekt sowie die Energie des Ionenbombardements sich erhöhen muß. Das Gleichgewicht

macht selbstverständlich auch den Anstieg der Verluste erforderlich, und demgemäß wird sich auch die durch den Elektronenaustritt, die Strahlung und durch die im Gas und im Metall erfolgte Leitung abgeführte Energie erhöhen.

Auf Grund der graphisch gelösten Gleichungen und der von RESCHENOW mitgeteilten Berechnungen [4] ist leicht einzusehen, daß obzwar die Erniedrigung der unerwünschten Katodenverluste am leichtesten durch die Verminderung der Abmessungen des Katodenflecks erzielbar wäre, dies gleichzeitig auch zum Anstieg der Ionenstrom-Komponente führen würde. Dies ist wieder vom Gesichtspunkt der Dauerhaftigkeit der Emissionschicht — der Lebensdauer der Katode — nachteilig, gerade als Folge der ebenfalls Wärmeverluste bewirkenden, stets intensiver werdenden Verdunstungs- und Verstaubungsvorgänge. Obzwar RESCHENOW in diesem Artikel sich nicht mit der Beziehung zwischen der Lebensdauer und der Katodenwirtschaftlichkeit befaßt hat, doch wenn die mitgeteilten Angaben für die ganze Katode als gültig angenommen werden, so kann festgestellt werden, daß die an die lange Lebensdauer und die wirtschaftliche Funktion gestellten Anforderungen auch in dem von ihm behandelten Fall gleichzeitig restlos befriedigt werden können, sogar auch bei den Katoden mit Entladung ohne Katodenfleck.

V. Die Energiebilanz der Elektroden der wechselstromgespeisten Entladungen

Es fällt häufig die Aufgabe an, die Energiebilanz von Wechselstrom-Entladungen zu bestimmen. Es wird auch in diesem Falle vor allem der Begriff Gleichgewicht definiert werden müssen. Eine ganz genaue Beschreibung würde jedoch erfordern, daß sämtliche früher erörterten Katoden-Energietransportabläufe in Abhängigkeit von der Zeit angegeben werden und das Energiegleichgewicht auf Grund von einzelnen ganz kurzzeitigen, quasistationären Phasen untersucht werde. Dies würde jedoch wegen der hohen Anzahl von Zeitabhängigkeiten in einem schwer behandelbaren, evtl. graphisch lösbaren Integro-Differentialgleichungssystem resultieren. Anstatt dessen wird gebräuchlicherweise gesagt, daß bei sich schnell genug änderndem Entladestrom, z.B. bei 50 Hz, auch in diesem Falle die rein thermischen Erscheinungen, z. B. die Temperaturschwankung des Katodenflecks, mit einer Relaxationszeit charakterisiert werden kann, die allzu hoch dazu ist, daß die thermischen Erscheinungen den raschen Änderungen der rein elektrischen Erscheinungen (z. B. Ionenbombardement, Elektronenbombardement) folgen könnten. Die durch die Bestrahlung der Katodenfläche gelieferte Energie gehört bereits zu einer weiteren Gruppe: dieser Energietransport folgt kontinuierlich den Änderungen elektrischer Natur. Auch die von der Oberfläche der Elektroden ausgehende Energieabstrahlung müßte im Grunde genommen inertiefrei vor sich gehen, sie wird jedoch durch die langsam sich ändernde Elektrodentemperatur

bestimmt. Die mit der Ausbreitung des Gleichgewichtes verknüpften Schwierigkeiten berühren also die rein thermischen und die ausschließlich von diesen abhängigen, weiteren Transporterscheinungen, doch sie berühren z. B. den Elektronenaustritt nicht mehr.

Als überbrückende, näherungsweise Lösung kann unter Berücksichtigung der hohen thermischen Relaxation — auch sie ist in erster Reihe von der Elektrodenstruktur abhängig — ferner unter Berücksichtigung der Transporterscheinungen sowohl der Katoden- wie auch der Anoden-Halbperiode, und unter Annahme einer stationären Wechselstromentladung, das Energiegleichgewicht auf eine ganze Periode bezogen angegeben werden. Die im vorangehenden für die in mehreren Varianten beschriebenen Katoden aufgestellte Energiebilanz wird inzwischen hinsichtlich ihrer Form so weit modifiziert, daß die in Abschnitt II erwähnte, in der Anoden-Halbperiode entstehende Elektronenheizung ebenfalls berücksichtigt und ein Durchschnittswert der erhaltenen Ergebnisse auf die ganze Periode ermittelt werden muß. Vor der Herstellung der Energiebilanz der Wechselstrom-Elektroden empfiehlt es sich allerdings, unter den gegebenen Entladungsverhältnissen sowohl das Katoden- wie auch das im Vergleich zu diesem einfachere Anoden-Energiegleichgewicht festzustellen, die Komponenten derselben zu bestimmen, und im Besitz derselben die Wechselstrom-Versuche und Berechnungen vorzunehmen. Bei Entladeströmen von 50 Hz ist. z.B. näherungsweise jene Annahme akzeptabel, daß die Wolframwendeln mit genügend großer Masse, und bei genügend hohen Schichtgewichten die Durchschnittstemperaturen der Anoden- bzw. Katodenhalbperioden annähernd übereinstimmen. Die Energiebilanz der Anode kann aus der Energiebilanz der Katode abgeleitet werden, indem zu der entsprechend vereinfachten Katoden-Energieblanz auch die von dem Bombardement der an die Anode anprallenden Elektronen herrührende Wärme (kinetische, Rekombinationswärme) sowie die Energie der der Anode anfallenden Strahlung und die der neutralen Teile neben der entsprechenden Abstrahlungsenergie und der durch Wärmeleitung (Gas, Metall) abgeführten Energie hinzugenommen wird. Die einfachste, näherungsweise Methode der Angabe der Wechselstrom-Energiebilanz [2] stellt die auf Grund des arithmetischen Mittelwertes der Katoden- und Anoden- sowie positiven und negativen Energietransporte durchgeführte Berechnung dar.

VI. Die Anwendung des Energiegleichgewichtes; die ideale Katode

Im vorangehenden wurden die Komponenten der in den verschiedenen Arbeitsphasen der Oxydkatoden von Lichtbogenentladungen bestimmbaren Energiebilanz und deren wichtigere Kennwerte erläutert. Obzwar diese Versuche und Berechnungen, mit deren Hilfe die Komponenten des Energie-

gleichgewichtes angegeben werden können, stellenweise schwerfällig und nur näherungsweisen Charakters sind, muß ihnen grundentscheidende Bedeutung beigemessen werden, da sie stark zur Ausgestaltung der Katode beitragen. Wie wir in dem vorangehenden bereits darauf hingewiesen haben, wird von der Katode lange Lebensdauer und im Laufe derselben wirtschaftliche Funktion verlangt. Die ideale Katode würde also — falls eine solche überhaupt herstellbar wäre — eine solche Katode sein, die beide Anforderungen gleichzeitig und restlos zu befriedigen vermag.

Betrachtet man das Beispiel der sich als wirtschaftlichste erweisenden stationären Entladung mit Katodenfleck, so würde diese Anforderung bedeuten, daß ein solcher Katodenaufbau gesucht werden müßte, bei welchem die der Katode zugeführte Heizleistung und damit gleichzeitig auch die unerwünschten Energieverluste minimal wären, doch damit gleichzeitig die Katode restlos ihre Aufgabe erfüllen würde und auch ihre Lebensdauer ein realer, hoher Wert wäre. Diese beiden Anforderungen können im Besitz unserer gegenwärtigen Kenntnisse noch nicht restlos aufeinander abgestimmt werden, und es muß eine Kompromißlösung gefunden werden.

So viel kann allerdings gesagt werden, daß bei gegebenem Ladestrom die Katodentemperatur in erster Linie durch die Art der Katodenfunktion (Katodenfleck) bestimmt wird, dies dagegen von den Eigenschaften der Elektronen emittierenden Schicht abhängig ist. Es ist auch leicht einzusehen, daß nicht nur die Verluste der Katode, sondern auch die der Katodenräume vor allem von den Eigenschaften der Emissionsschicht abhängen. Die Rolle derselben kann bei gegebener Wendel- und Elektrodenstruktur experimentell geprüft werden. Je geringer die Austrittsarbeit der Emissionsschicht ist, desto höhere Anzahl von Elektronen vermag sie bei der gegebenen Temperatur zu emittieren, und desto größer wird auch der auf die Schichteinheit bezogene spezifische Emissionsstrom. Dies macht dagegen eine Mäßigung des Ionenbombardements möglich, was die Verringerung des Katodenfalls und die axiale Verkürzung der Katodenräume mit sich bringt. Damit parallel können naturgemäß, wegen der niedrigeren Katodentemperatur und des evtl. kleineren Fleckdurchmessers, auch die unerwünschten Wärmeverluste niedriger sein.

Das primäre Ziel der Energiegleichgewichtsberechnungen ist also die Ermessung der im Laufe der Funktion der Elektroden auftretenden Verluste und die Verringerung derselben durch einen geeigneten Eingriff in die Grundvorgänge der Entladung.

SCHRIFTTUM

1. COBINE, J. D.: Gaseous Conductors. Dover Publication Inc., New York 1958.
2. IWANOW, A. P.: Elektrische Lichtquellen; Gasentladungslampen. Akademie Verlag, Berlin 1955.
3. *Рохлин, Г. Н.—Решенов, Ш. П.: Светотехника* **10** (1964), 1.
4. *Решенов, Ш. П.: Светотехника* **11** (1965), 12.
5. HERRMANN, G.—WAGENER, S.: Die Oxydkatode. Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1955.
6. BITÓ, J.: *Magyar Fizikai Folyóirat* (unter Druck).
7. LAKATOS, G.—BITÓ, J.: *Acta Phys. Hung.* **20** (1966), 25.
8. FOUND, C. G.—WINNINGHOF, N. J.: *Ill. Eng.* **44** (1949), 161.
9. KÜHL, B.: *Technisch-Wissenschaftliche Abhandlungen der Osram G.m.b.H.* **7** (1958), 73.
10. FABÉNYI, E.: Persönliche Mitteilung.
11. CAYLESS, M. A.: *J. Electronics and Control* **8** (1958).

On the Energy Equilibrium of Arc Discharges of Oxyde Cathodes. For the more detailed examination of the energy equilibrium of the discharges, the author distinguishes different discharge periods and determines for them the component of the energy transport and the basic phenomena related. thereto. On the basis of the obtained general relations he carries out a more detailed analysis for the preheating period of lowpressure oxide cathode discharges, as well as for the stationary d.c. burning periods of lowpressure oxide cathode with and without cathode spot and of the a.c. discharges (with and without cathode spot). The author points to the possibilities of using the results for influencing the cathode operation and for moderating the cathode losses.

L'équilibre d'énergie des cathodes à oxyde des décharges en arc à basse pression. En vue de l'examen plus détaillé de l'équilibre d'énergie des décharges, l'auteur établit différentes périodes de décharges pour lesquelles il donne les composants de transport d'énergie à considérer et les processus de base qui s'y rapportent. D'après les relations générales obtenues, il effectue une analyse approfondie, en examinant les processus qui se déroulent dans les périodes de préchauffage et stationnaires des décharges en arc et des décharges de courant alternatif, avec ou sans tache cathodique. Il rappelle enfin les possibilités d'application des résultats obtenus permettant d'agir sur le fonctionnement de la cathode et modérer les pertes cathodiques.

Энергетическое равновесие оксидных катодов дуговых разрядов низкого давления *(Я. Бито).* В интересах более детального исследования энергетического равновесия разрядов автор определяет различные периоды разрядов, а затем дает учитываемые для них компоненты энерготранспорта, а также связанные с этими основные процессы. На основе полученных детальных общих зависимостей в период стационарного горения производится анализ при постоянном токе дуговых разрядов оксидных катодов низкого давления при предварительном подогреве, с катодным пятном и без него, далее при разрядах с переменным током (с катодным пятном и без него). Указывается воздействие полученных результатов на работу катода и применимость результатов в области снижения катодных потерь.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 62 (3—4), pp. 437—438 (1968)

RECENSIONES

T. Berceli:

REFLEX KLYSTRON CIRCUITS

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1967; 137 p., 41 Figs

Already numerous authors have published monographies on the reflex klystron, but nearly everyone has concentrated his attention on the klystron as an electron tube and has dealt at the most with the one-cavity reflex klystron oscillator. But the oscillator and modulator stages containing a coupled cavity reflex klystron have nowhere been treated quantitatively as microwave circuits, hence numerous detail problems have remained unsolved.

The present book eliminates these deficiencies, approaching the whole question from the point of view of the user and discussing in full detail the advantages of using the coupled cavity.

The first two chapters of the book briefly review the working of the one-cavity klystron oscillator and modulator. The next chapter deals with the ideal, generalized klystron modulator, in the fourth chapter the relations concerning the coupled cavities are deduced. The following three chapters present in full the theory, the stability and the noise of the coupled cavity modulator. After the chapter relative to the coupled cavity the work is concluded by a chapter analysing the operation of the coupled cavity modulator.

The new treatment, based on original research results of the author, permits accurate dimensioning, and for this the work gives a correct method. Thus, the book is valuable and useful for the research worker, for the designer of circuits and for the production engineer.

The get-up of the book is also worthy of praise.

I. P. Valkó

Nagy Gyula András—Szilágyi Miklós:

INTRODUCTION TO THE THEORY OF SPACE CHARGE OPTICS

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1967; 423 p

The forceful development of the Hungarian Electronics and Vacuum Industries requires at present, in addition to the already classical electron optics, the knowledge of the generation of high density electron beams. Serving this aim, the authors present to the specialists of electron optics a new treatment of space charge optics, collecting the most important published results and enlarging them by their own work.

Starting out from Maxwell's and Newton's basic equations, the book deals with different calculation methods of the electric and magnetic potential fields continuing the development of the classical electron optics. After the presentation of the basic equations and the methods of calculation, the reader is introduced to the calculation of the path of charged particles moving — in the case of space charge — in electrical and magnetic fields.

The determination of the trajectory equation serves practical purposes. Although the authors strived at mathematical accuracy, they always had an eye on the physical content of the equation, too; the general equation of motion of space charge flow was deduced taking these two conditions into account. Very fortunate is the establishment of the basic equations of space charge flow in a suitable system of co-ordinates. In consequence, when dimensioning and designing the guns the problem of bunching is greatly simplified.

One chapter of the book deals with the problem arising in the calculation of electron guns, with special regard to the practical importance of the Pierce-type guns. Based on the equations of space charge flow, this chapter presents practical cases. Moreover, the book thoroughly deals with the problems of bunching the electrons by purely electrical fields, by periodical electrostatic fields and by cylindrically symmetric fields; then it deals with calculating the inner limit trajectory of hollow beams and the solutions for holding the beam together, including such special cases, which differ from the optimum. Such a case occurs e.g. when the particles do not enter the bunching field in parallel. The authors treat the calculation of bunching with purely electrical fields in the case of ribbon, cylindrical and hollow beams, as well as the dimensioning of the high current density guns and beams. This is followed by investigating the effect of space charge on electron beams, presentation of the causes of expansion and of the distribution of the potential in the cross section of electron beams.

Another chapter is concerned with the calculation of bunching by magnetic and electrical-magnetic fields, including the screened-cathod guns. Other chapters discuss bunching by increasing magnetic fields and by quadrupole fields employing new solutions.

The principal merit of the book is, besides its ample contents, the maintaining of correct proportion as well as the thorough consideration of the requirements of physicists and engineers. This double requirement has been fortunately complied by the authors: they have created a work where all those, who wish to deepen their knowledge of the themes dealt with in the book and who are looking for help in the solution of electron optics problems, find the necessary subject matter in a comprehensively arranged unit, using a unified system of symbols and including the application of a new branch of science: space charge optics, to general and to special cases. This clearly written book is an important enrichment of Hungarian technical literature.

A. Budincsevits

INDEX

Heller, L.: Entropie oder Exergie? — Entropy Aspect or Exergy? — Entropie ou exergie? *Л. Хеллер:* Метод энтропии или эксергия? 241

Horacsek, O.—Millner, T.: Eine handliche elektronenoptische Apparatur zur laufenden Untersuchung von metallographischen Vorgängen hocherhitzter hochschmelzender Metalle — A Simple Apparatus for Investigating by Electron Optics the High-Temperature Metallographic Phenomena of Metals with High Melting Point — Appareil simple pour l'examen électronoptique des processus métallographiques à haute température des métaux à point de fusion élevé — *О. Хорачек — Т. Мильнер:* Простой прибор, пригодный для электронно-оптических исследований металлографических процессов, протекающих при высоких температурах в тугоплавких металлах 253

Csáki, F.—Magyar, P.—Bars, R.: Determination of Transfer Functions of Direct Current Machines with the Aid of Signal-Flow Graphs — Die Bestimmung der Übertragungsfunktionen der Gleichstrommaschinen mit Hilfe von Signalfließdiagrammen — Détermination de la fonction de transfert des machines à courant continu par la méthode des graphes de transfert — *Ф. Чаки, П. Мадьяр* и *Р. Барш:* Определение передаточных функций машин постоянного тока при помощи графов . 267

Vácz, I.—Kerényi, I.: Electronical (Initial Current) Measurement of the Cathode Temperature — Elektronische Kathodentemperaturmessung (mittels des Anlaufstroms) — Mesure électronique par courant initial de la température des cathodes — *И. Вац* и *И. Керени:* Электронный метод измерения температуры катода 285

Szabó, P.: Some Properties of 4-Bit Unit-Distance Decimal Codes — Über einige Eigenschaften von einschrittigen dezimalen Coden mit vier Binärstellen — Quelques propriétés des codes décimaux d'un seul pas à quatre chiffres binaires — *П. Сабо:* Некоторые свойства одношаговых десятичных кодов с четырьмя двоичными знаками 305

Bitó, J.: On the Cathode Spaces of Discharges — Über die Kathodenräume der Entladungen — Des espaces cathodiques des décharges — *Я. Бито:* О катодных полях разрядов 317

Kolonits, F.: Steady-State Thermal Stresses in the Vessel of a Pressurized Water Reactor — Stationäre Wärmespannungen im Behälter eines Druckwasserreaktors — Contraintes thermiques stationnaires dans la cuve d'un réacteur à eau sous pression — *Ф. Колонич:* Стационарные термонапряжения в реакторном сосуде, работающем на воде под давлением 351

Bitó, J.: On the Emission Dependence of the Cathode Fall— Die Abhängigkeit des Katodenfalls von der Emission — Dépendance de la chute cathodique de l'émission — *Я. Бито:* Эмиссионная зависимость падения потенциала 375

Pásztor, E.: Methode zur Bestimmung des Reibungsmitteldruckes von Kolben-Verbrennungsmotoren — A Method for the Determination of the Mean Frictional Pressure of I.C. Piston Engines — Méthode pour la détermination de la pression moyenne de

frottement dans les moteurs à piston à combustion interne — *Е. Пастор:* Метод определения среднего давления трения поршневых двигателей внутреннего сгорания 381

Bitó, J.: **Energiegleichgewicht der Oxydkatoden für Niederdruck-Lichtbogenentladungen — On the Energy Equilibrium of Arc Discharges of Oxyde Cathodes — L'équilibre d'énergie des cathodes à oxyde des décharges en arc à basse pression** — *Я. Бито:* Энергетическое равновесие оксидных катодов дуговых разрядов низкого давления 409

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU — ОБЗОР КНИГ

Berceli, T.: **Reflex Klystron Circuits** (*Valkó, I. P.*) 437

Nagy, Gy.A.—Szilágyi, M.: **Introduction to the Theory of Space Charge Optics** (*Budincsevits, A.*) 437

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

A kézirat nyomdába érkezett: 1968. V. 24. —

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

Terjedelem: 17,75 (A/5) ív, 65 ábra, 4 melléklet

68.65713 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

KRAUSSKOPF-FACHZEITSCHRIFTEN

Krausskopf-Fachzeitschriften bieten Ihnen die spezielle und unverwechselbare Kombination:

Qualifizierte Fachaufsätze anerkannter Autoren und aktuelle Kurzberichte über Maschinen, Geräte, Anlagen und Verfahren.

Zur Ergänzung und Vertiefung das Krausskopf-Fachbuch-Programm.

Bitte fordern Sie kostenloses Informationsmaterial.

f+h »fördern und heben«

Deutschlands älteste und führende Fachzeitschrift für Fördertechnik und Lagerwesen. Sie hat in allen Bereichen der Wirtschaft, im Klein-, Mittel- und Großbetrieb, ihren angestammten Platz. Organ der VDI/AWF-Fachgruppe Förderwesen. 1968 im 18. Jahrgang. 18 Ausgaben jährlich, einschließlich vier Schwerpunktausgaben Baubetriebstechnik und einer viersprachigen Exportausgabe.

vt »verfahrenstechnik«

Die vielfältigen physikalischen und chemischen Prozesse der Stoffbehandlung und Stoffumwandlung, die in der verarbeitenden Industrie, ebenso in der Grundstoff-Industrie, das Produktionsbild bestimmen, finden in »verfahrenstechnik« eine zusammenfassende anspruchsvolle Darstellung.
1968 im 2. Jahrgang. 12 Ausgaben jährlich.

st »steuerungstechnik«

Die neue Fachzeitschrift für Maschinensteuerung, Produktionssteuerung und Anwendung numerisch gesteuerter Maschinen. Sie berichtet über Bauelemente, Schalt- und Regelgeräte, komplette Steuerungen, über neue Anwendungsmöglichkeiten der maschinellen Datenverarbeitung, über Steuerung technischer Systeme und numerisch gesteuerte Produktionsanlagen. Redigiert in ständiger Zusammenarbeit mit dem Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen der Universität Stuttgart (TH). 1968 im 1. Jahrgang. 6 Ausgaben jährlich.

ant »antriebstechnik«

Deutschlands maßgebende Fachzeitschrift für den gesamten Bereich Antriebstechnik berichtet für Ingenieure und Konstrukteure der Investitionsgüterindustrie über mechanische, elektrisch/elektronische, hydraulische und pneumatische Antriebe sowie über Getriebekupplungen und einzelne Elemente und deren Herstellung. Ferner werden Präzisions- und Werkstoff-Fragen, vor allem Kunststoffe in der Technik, Gußkonstruktionen, Schmierstoffe usw. behandelt. 1968 im 7. Jahrgang. 12 Ausgaben jährlich.

o+p »ölhydraulik und pneumatik«

Hydraulische und pneumatische Systeme und Bauelemente sind aus der Technik nicht mehr wegzudenken. »o+p« ist die älteste deutsche Fachzeitschrift dieser expandierenden technischen Disziplin. »o+p« vermittelt die fundierten Kenntnisse für Konstruktion und Anwendung.
1968 im 12. Jahrgang. 12 Ausgaben jährlich.

k+g »kunststoff und gummi«

»k+g« ist spezialisiert auf die Verarbeitung von Kunststoff und Gummi sowie auf die hierzu erforderlichen Maschinen und Verfahren. Im „Jahrhundert der Kunststoffe" eine höchst aktuelle Technologie mit einer Vielfalt von Einsatzmöglichkeiten in der Investitions- und Konsumgüterindustrie. 1968 im 7. Jahrgang. 12 Ausgaben jährlich.

wlb »wasser, luft und betrieb«

Die führende Fachzeitschrift für industrielle Wasserwirtschaft, Luftreinhaltung (einschl. Klimatechnik) und Abfallverwertung. Technische, wirtschaftliche und rechtliche Abhandlungen, verbunden mit laufender Marktorientierung über den gesamten Herstellungsbereich, gewährleisten eine umfassende Information. Herausgegeben in Zusammenarbeit mit dem Institut für gewerbliche Wasserwirtschaft und Luftreinhaltung e.V. Köln. 1968 im 12. Jahrgang. 12 Ausgaben jährlich.

KRAUSSKOPF-VERLAG · D-65 MAINZ · Lessingstraße 12-14

Neuerscheinungen aus dem Bereich der technischen Wissenschaften des AKADÉMIAI KIADÓ, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest

GY. SEBESTYÉN

DIE GROßTAFELBAUWEISE IM WOHNUNGSBAU

In deutscher Sprache • Etwa 480 Seiten • 359 Abbildungen • 17×24 cm • Ganzleinen

Eine Gemeinschaftsausgabe mit Werner Verlag, Düsseldorf
Das Buch ist eine grundsätzlich überarbeitete und erweiterte Version der in 1965 erscheinenen englischen Ausgabe.

PROCEEDINGS OF THE II. COLLOQUIUM ON THIN FILM

Herausgegeben von E. HAHN

Beiträge in deutscher, englischer und französischer Sprache • Etwa 520 Seiten • 512 Abbildungen • Ganzleinen

Anläßlich des II. Dünnschichtskolloquiums zwischen dem 27. Juni und dem 2. Juli 1967 wurden die folgenden vier Fragekomplexe behandelt: 1. Entstehung und Struktur der Dünnschichten; 2. Die optischen Eigenschaften der Dünnschichten; 3. Allgemeine physikalische und chemische Eigenschaften der Dünnschichten; 4. Neuere Wege der Verwendung von Dünnschichten, mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Komponenten.

Á. KÉZDI und I. MARKÓ

ERDBAUTEN, STANDSICHERHEIT UND ENTWÄSSERUNG

2. verbesserte deutsche Ausgabe • Etwa 480 Seiten • 560 Abbildungen • 103 Tabellen • 21×24 cm • Ganzleinen

Eine Gemeinschaftsausgabe mit VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
Im Buch werden in erster Linie die alltäglichen Aufgaben des Bauingenieurs behandelt und nicht das Spezielle und Außerordentliche gezeigt; das gebotene Material wird dagegen in allen Einzelheiten, reich illustriert für den Gebrauch des Ingenieurs beim Konstruktionstisch vorgelegt.

AKADÉMIAI KIADÓ
VERLAG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 241—252

HELLER, L.; *Entropy Aspect or Exergy?*

In recent years several authors are advocating the use of the term "maximum technical working capacity" called "exergy" as a property of state. In the author's opinion, this method is both inaccurate and confusing. Its main drawback is the interference with the application of the term of entropy, correct for thermodynamical and practical points alike. The paper illustrates the main lines of the problem with numerous examples.

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 253—266

HORACSEK, O.—MILLNER, T.: *A Simple Apparatus for Investigating by Electron Optics the High-Temperature Metallographic Phenomena of Metals with High Melting Point*

The paper describes a simple electron optics method and a home-made apparatus for the investigation of the structural changes of high-melting point metals with the aid of thermal electrons. The surfaces of the heated specimens and their changes can be observed and photographed directly with a magnification ranging from 60× to 150×. The paper also presents a simple method suitable for the rapid determination of the temperature of the observed part of the surface. The apparatus was used by the authors mainly for investigating the recrystallization phenomena of W and Mo wires and they found that the electron optic images provide informations not to be observed on ordinary photo-micrographs.

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 267—284

CSÁKI, F.—MAGYAR, P.—BARS, R.: *Determination of Transfer Functions of Direct Current Machines with the Aid of Signal-Flow Graphs*

The paper demonstrates the application of the signal-flow graphs for the solution of a special task in control technics, namely for the determination of the transfer functions of direct current machines.

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 285—304

VÁCZ, I.—KERÉNYI, I.: *Electronical (Initial Current) Measurement of the Cathode Temperature*

The cathode temperature of electron tubes can be determined from the starting current characteristic. In order to eliminate the sources of error inherent with the d.c. measurement of the characteristic, IKEHARA—WILSON use a.c. superposed on d.c. and determine the cathode temperature from the change of the upper harmonics. By using the compensation method of the authors, instead of the upper harmonics the fundamental harmonic is used for the measurement and this being a larger signal, it permits the extension of the measurement to lower temperatures (appr. 600 °K). Checking the measurements by thermocouple and by optical pyrometer shows agreement within $\pm 2\%$. For estimating the error caused by the thermal conduction of the thermocouple, an approximate calculation has been made.

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 305—316

SZABÓ, P.: *Some Properties of 4-Bit Unit-Distance Decimal Codes*

The patterns of 4-Bit Unit-Distance Decimal (4-BUDD) codes were investigated on specially prepared pattern-tables constructed from their codisets, in order to evaluate the possible types of these codes. Unambiguous identification of the code-types investigated is obtained by means of so-called Binary Ratios (B-s), defined by the bit-sequences of each code. This method of labelling is invariant under the changes in code-forms of the same type. Finally some possible other uses of the method such as the evaluation of the actual number and complementing properties of the 4-BUDD codes are discussed.

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 317—350

BITÓ, J.: *On the Cathode Spaces of Discharges*

The author describes the most characteristic basic processes of cathode spaces, among others, the phenomena occurring on the surface of the cathode and the volume interactions. He discusses in detail the different cathode spaces of glow discharges, on the base of the general analysis of the cathode spaces. After this he treats the development of arc discharge and the glow arc transition, and he discusses later the general analysis of the cathode space, the role of the cathode spot and refers to the relation between the cathode spot and the cathode space of arc discharges.

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 351—374

KOLONITS, F.: *Steady-State Thermal Stresses in the Vessel of a Pressurized Water Reactor*

The present work analyses the stresses in the pressure vessel of a pressurized water reactor under steady-state operating conditions, with some simplifying assumptions. The correctness of the approximation is examined and calculations are presented considering the vessel of the reactor of type "Voroniesh".

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 375—380

BITÓ, J.: *On the Emission Dependence of the Cathode Fall*

By way of a cathodic perturbation brought about by pressure variation it was possible to deduce the basic relation for the cathode side of the discharges of oxyde cathodes, characterized by a cathode spot. For a cathode with a given work function and for a given area of the cathode spot there exists a univocal relation between the cathode drop and the increasing emission current of the cathode. It was possible to prove a similar relation between the temperature of the cathode spot and the cathode drop. Tests with d.c. and with a.c. discharges also point to possibilities of the economical coordination of surface and of volume electron generation.

Acta Techn. Hung. **61** (1968), 381—408

PÁSZTOR, E.: *A Method for the Determination of the Mean Frictional Pressure of I.C. Piston Engines*

The author investigates the relationship between the mean frictional pressure and the working cycle of an engine. In order to establish this relationship the author introduces the concept of average pressure, permitting to establish a generally valid relationship between the mechanical efficiency and the working cycle of the engine. In order to investigate the above problems we has worked out a new method for driving the engine externally, suitable for more precise investigation of the relationship between the mean frictional pressure, the design of the engine and the thermo-mechanical characteristics of the working cycle.

Acta Technica Hung. **61** (1968), 409—436

BITÓ, J.: *On the Energy Equilibrium of Arc Discharges of Oxyde Cathodes*

For the more detailed examination of the energy equilibrium of the discharges, the author distinguishes different discharge periods and determines for them the component of the energy transport and the basic phenomena related thereto. In the basis of the obtained general relations he carries out a more detailed analysis for the preheating period of low-pressure oxide cathode discharges, as well as for the stationary d.c. burning periods of low-pressure oxide cathode with and without cathode spot and of the a.c. discharges (with and without cathode spot). The author points to the possibilities of using the results for influencing the cathode operation and for moderating the cathode losses.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 165 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«*Acta Technica*» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA
Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA
A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA
Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I

BELGIUM
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA
Raznoiznos
1, Tzar Assen
Sofia

CANADA
Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA
Artia
Ve Směčkách 30
Praha 2
Poštovná novinová služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arská Kultura
Václavské nám. 2
Praha I
Poštová novinová služba
Dovoz tlače
Leningradská 14
Bratislava

DENMARK
Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND
Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE
Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN
Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough. Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA
Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP
GPO Post Box 1374
Bombay I

ITALY
Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN
Nauka Ltd.
92, Ikebukur O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo

KOREA
Chulpanmul
Phenjan

NORWAY
Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND
RUCH
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA
Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
București

SOVIET UNION
Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN
Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA
Stechert Hafner Inc.
31, East 10th Street
New York, N. Y. 10003
Walter J. Johnson
111, Fifth Avenue
New York, N. Y. 10003

VIETNAM
Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA
Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

30. IX. 1968. Index: 26.025