

# ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 59

FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1967

ACTA TECHN. HUNG.

# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*  
*Budapest V., Nádor u. 7.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 120 forint, külföldre 165 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Ungarn*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

## INDEX

- Almásy, G.—Romhányi, M.—Pallai, I.*: Static Optimization by Adaptive "Forgetting" Method — Statische Optimierung mit einer adaptiven »vergessenden« Methode — Optimisation statique par la méthode «d'oubli» adaptative — Алмаши, Г.—Ромхани, М.—Паллаи, И.: Статическая оптимализация адаптивным «забывающим» методом ..... 357
- Barát, J.—Muszély, Gy.*: Pattern Recognition Algorithm with Searching Method — Algorithmus für die Erkennung von Formen mittels einer adaptierenden Suchmethode — Un algorithme pour la reconnaissance de formes par le procédé de recherche adaptatif — Барат, Я.—Мусель, Дь.: Алгоритм распознавания образов, поисковым методом ..... 347
- Barta, J.*: Sätze über die Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes — Theorems Concerning the Stability of Equilibrium of an Elastic Body — Théorèmes concernant la stabilité de l'équilibre d'un corps élastique — Барта, Я.: Теоремы стабильности состояния покоя упругих форм ..... 165
- Bassa, G.—Reményi, K.*: Furnace Slag Crust Heat Conductivity Measurements — Messen der Wärmeleitfähigkeit der Schlackenablagerung im Feuerraum — Mesure de la conductivité thermique des incrustations de scorie dans les foyers à charbon — Башица, Г.—Ременьи, К.: Измерение теплопроводности отложений шлака в топке ..... 331
- Chakrabarti, S. K.*: Equilibrium of a Composite Cone under a Force Acting at the Vertex Perpendicular to the Axis Line — Das Gleichgewicht eines zusammengesetzten Kegels belastet mit einer auf die Achsenlinie senkrechten, im Scheitelpunkt wirkenden Kraft — L'équilibre d'un cône composé, chargé d'une force perpendiculaire à l'axe, appliquée au sommet du cône — Цхакрабартти, С. К.: Равновесие сложного конуса, нагруженного в вершине силой, действующей перпендикулярно к севшей линии ..... 235
- Csonka, P.*: Torsion von dickwandigen, prismatischen Stäben mit axialer Kreishöhlung — Torsion of Thick-Walled Prismatic Bars with a Circular Axial Hollow — Torsion des barres prismatiques à paroi épaisse, ayant un creux axial circulaire — Чонка, П.: Кручение толстостенных призматических стержней с аксиальной круговой полостью ..... 215
- Dulácska, E.*: Velaroidal Shell over Rectangular Plan — Segelschale über Rechteckgrundriß — Voile mince vélaroidal sur base rectangulaire — Дулачка, Е.: Парусная оболочка четырехугольного плана ..... 35
- Dulácska, E.*: Stability of Anisotropic Hyperbolic Paraboloidal Shells — Stabilität der anisotropischen Hyperbolisch-Paraboloidschale — Stabilité du voile mince hyperbolique parabolöide anisotropique — Дулачка, Е.: Устойчивость анизотропной гиперболической параболоидной оболочки ..... 123
- Frey, T.*: Direkte Zerlegung von Polynomen in Hurwitzsche und Antihurwitzsche Komponenten — Direct Decomposition of Polynomials into Hurwitz and Anti-Hurwitz Components — Décomposition directe des polynomes en composantes Hurwitz et anti-Hurwitz — Фрей, Т.: Непосредственное разложение полиномов на компоненты и антикомпоненты Гурвица ..... 325

<i>Füzy, J.</i> : Analysis of Homogeneous Orthotropic Quadrangular Panels — Untersuchung homogener orthotroper wandartiger Träger — Examen de parois portantes homogènes orthotropes — <i>Фюзи, Я.</i> : Исследование однородных ортотропных стеновых балок .....	11
<i>Halász, D.—Szendy, K.—Rédey, L.</i> : The Special Role of Peroxides in Gas Ionization — Die besondere Rolle der Peroxyde bei der Ionisation von Gasen — Le rôle spécial des peroxydes dans l'ionisation des gaz — <i>Халас, Д.—Сенди, К.—Редеи, И.</i> : Особая роль перекисей при ионизации газов .....	295
<i>Halász, O.</i> : Adoption of the Theory of Plasticity to Steel Structures — Anwendung der Plastizitätslehre auf die Stahlkonstruktionen — Application de la théorie de la plasticité aux constructions en barres métalliques — <i>Халас, О.</i> : Применение теории пластичности к стальным стержневым конструкциям .....	57
<i>Hangos, I.</i> : Some Problems of Vacuum-Tight Soldering of Metal to Ceramic — Einige Fragen der vakuumdichten metallkeramischen Lötung — Quelques questions au soudage métal-céramique étanche du vide — <i>Хангош, И.</i> : Некоторые вопросы металлокерамической вакуумостойкой пайки .....	283
<i>Huszár, I.</i> : Berechnung des Kräftespiels von Kommutatoren mit doppeltem Schrumpfring — The Calculation of the System of Forces in Double Shrink-Ring Commutators — Calcul du jeu de forces d'un collecteur à double bague de serrage — <i>Хусар, И.</i> : Расчет работы коллектора с двойным бандажным кольцом .....	407
<i>Кальман, Р. — Бакони, П.</i> : Программа БОКС для цифрового моделирования — <i>Kálmán, R. — Bakonyi, P.</i> : The vocs Digital Modelling System — Das digitale Modellersystem vocs — Le système digital de simulation vocs .....	395
<i>Kézdi, M.</i> : Plastizitätslehre von körnigen Materialien — Theory of Plasticity of Granular Substances — Théorie de la plasticité des substances granulaires — <i>Кезди, М.</i> : Теория пластичности сред зернистой структуры .....	103
<i>Kollár, L.—Gárdonyi, Z.</i> : Kippen von Schalenbogen unter antimetrischer Belastung — Lateral Stability of Shell-Arches under the Action of Antimetric Load — Stabilité latérale des coques en arc sous l'action de charges antimétriques — <i>Коллар, Л.—Гардоши, З.</i> : Боковая устойчивость оболочки арок при антиметрической нагрузке .....	243
<i>Kozák, I.</i> : On Equilibrium Equations of Solid Continua — Über die Gleichgewichtsgleichungen der festen Kontinua — Équations d'équilibre des continus solides — <i>Козак, И.</i> : Об уравнениях равновесия твердых континуумов .....	141
<i>Лернер, А. Я.</i> : Перспективы кибернетики — <i>Lerner, A. J.</i> : The Perspectives of Cybernetics — Die Perspektive der Kibernetik — Les perspectives de la cibernetique .....	269
<i>Линковский, Ж. Б.</i> : К расчету динамических свойств объектов регулирования в химической промышленности — <i>Linkovski, J. B.</i> : Contribution to the Calculation of the Dynamic Characteristics of Control Systems in the Chemical Industry — Zur Berechnung der dynamischen Eigenschaften von Regelstrecken in der chemischen Industrie — Contribution au calcul des caractéristiques dynamiques des installations réglées dans l'industrie chimique .....	303
<i>Matolcsy, M.</i> : Theoretical Foundations of the Investigation of the Loads of Vehicles — Theoretische Grundlagen der Untersuchung von Fahrzeugbelastungen — Bases théoriques de l'examen des charges de véhicules — <i>Матольши, М.</i> : Теоретические основы исследования нагрузок транспортных средств .....	75
<i>Palotás, L.</i> : Die Schubsicherung des Stahlbetonträgers auf Grund der Bruchtheorie — Shear Analysis of Reinforced Concrete Structures on the Basis of the Theory of Rupture — Essai de cisaillement de constructions en béton armé sur la base de la théorie de la rupture — <i>Палоташ, Л.</i> : Испытание на срез железобетонных конструкций на основе теории разрушения .....	183
<i>Paszycz-Stepkowska, E.</i> : Physico-Chemical Interpretation of the Shearing Process in Montmorillonitic Clays — Physiko-chemische Erklärung des Schubprozesses des Montmorillonit-Tons — Interprétation physico-chimique du processus du cisaillement de l'argile de montmorillonite — <i>Пашич-Степковска, Е.</i> : Физико-химическое объяснение процессов сдвига монтмориллонитной глины .....	151

- Rácz, I.:** Stromverteilung auf parallelgeschaltete Halbleiterzellen mit Ausgleichstransformatoren — Calculation of Current Distribution of Parallel Semi-Conductors with Current Sharing Transformers — Calcul de la distribution du courant des semi-conducteurs parallèles avec transformateurs de division — Рац, И.: Расчет распределения тока на параллельно соединенных полупроводниковых приборах при помощи делительных дросселей ..... 379
- Rózsa, M.:** Stability Analysis of Parabolic Arches Subjected to a Vertical Load Acting at the Apex — Stabilitätsuntersuchung der im Scheitel mit einer vertikalen Kraft belasteten Parabelbögen mit gleichbleibendem Querschnitt — Analyse de stabilité des arcs paraboliques à section transversale constante chargés d'une force verticale à leur sommet — Рोजа, М.: Анализ устойчивости параболических дуг неизменного сечения, нагруженных перпендикулярно действующей силой в вершине ..... 29
- Singer, D.—Demjén, Cs.:** Untersuchungen über die Temperaturverhältnisse des Sinterbandes und der Dynamik seiner automatischen Regelung — Examinations of the Temperature Conditions and the Dynamics of Control of an Ore Sintering Belt — Examen des conditions de température et de la dynamique de la régulation d'une bande transporteuse pour l'agglomération des minerais — Сингер, Д.—Демен, Ч.: Исследования в области температурных условий агломерационной ленты и динамики ее регулирования ..... 365
- Szabó, J.—Roller, B.:** Asymptotic and Iteration Methods for the Matrix-Analysis of Structures with Linear or Non-linear Character — Die mit der Matrizen-Analyse der linearen und nichtlinearen Tragkonstruktionen verbundenen asymptotischen und iterativen Methoden — Méthodes asymptotiques et itératives relatives à l'analyse matricielle des structures linéaires et non-linéaires — Сабо, Я.—Роллер, Б.: Асимптотические и итеративные методы по матричному анализу линейных несущих конструкций ..... 43
- Szmodits, K.:** Examination of Rectangular Panels — Statische Untersuchung der quadratischen Scheiben — Examen de parois portantes rectangulaires — Смодитш, К.: Исследование пластин имеющих форму параллелепипеда ..... 3
- Szmodits, K.:** A Simplified Method for Solving Smaller Systems of Linear Equations — Vereinfachte Lösung von kleineren linearen Gleichungssystemen — Une méthode simplifiée pour la solution de systèmes mineurs d'équations linéaires — Смодитш, К.: Упрощенное решение небольших систем линейных уравнений ..... 79
- Váczi, I.:** The Work Functions of Tungsten Wires Made with Various Ingredients — Die Austrittsarbeit von mit verschiedenen Zusätzen hergestellten Wolframdrähten — Le travail de sortie des fils de tungstène fabriqués avec différents additifs — Вац, И.: Работы выхода вольфрамовых проволок, изготовленных с использованием различных добавок ..... 311

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

- Hampe, E.:** Vorgespannte Konstruktionen (Csonka, P.) ..... 267
- Haas, A. M.:** Design of Thin Concrete Shells (Csonka, P.) ..... 267
- Knapp, O.:** Glasfasern (Déri, M.) ..... 265
- Rosman, R.:** Zahlentafeln für die Schnittkräfte von Windscheiben mit Öffnungsreihen (Csonka, P.) ..... 266
- Rudnai, Gy.:** Leichtbeton-Baukonstruktionen (Goschy, B.) ..... 265
- Piwinger F.:** Regelungstechnik für Praktiker. Elementare Einführung in die Prozeßregelung (Csáki, F.) ..... 423



ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,  
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 59



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST  
1967





## EXAMINATION OF RECTANGULAR PANELS

K. SZMODITS

DR. OF TECHN. SC.

BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received February 24, 1965]

Author deals here with the determination of the stress state of oblong panels charged with normal load on its opposite sides. The procedure presented is an improved alternative of the known method of Fadle. While with the method of Fadle on the side, charged with varying load, equilibrated shear stresses are remaining, with the procedure here presented, on the loaded side only normal stresses approaching the given load are acting. Therefore, the stress state computed by this method furnishes more precise approximate values than those calculated according to the Fadle method.

### 1. Introduction

The determination of the stress state of rectangle panels, loaded on two opposite sides but unloaded on the two others, has rather onerous mathematical difficulties. The reason for this is, on the one hand, that the boundary conditions can be satisfied only with complex constants, and on the other, that the boundary stresses cannot be transmitted into the Fourier's series of the given load, consequently they can be expanded only in non-orthogonal series having a complicated form.

FADLE [1] solved this problem by the stress state in demand putting it into an elementary stress state representable by closed expressions and into an eigenstress state, i.e. a stress state generated by a load being in equilibrium and acting on one of the sides only (Fig. 1).

The free constant members of the method defining the internal stress state are established in such a way that the peripheral conditions of the two

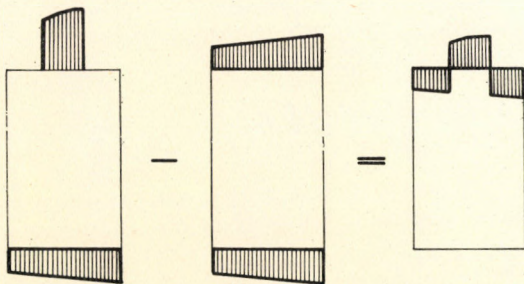


Fig. 1

unloaded sides should be perfectly satisfied, while on the two loaded sides the edge forces should turn approximately into the given load. If this load acts normally or parallel to the edge, on the loaded edge minor shear or normal forces, respectively, being in equilibrium, remain behind. As the height of the oblong panel is larger than its breadth, or at the most equal to it, the effect of the edge load in equilibrium on the opposite far side is insignificant, consequently the requirement concerning the unstressed state of this side is approximately satisfied.

The method described in the following resembles that of FADLE in the fact that the load is expanded in non-orthogonal series used by FADLE, but is distinguished from the latter by the fact that in case of normal load it makes the shearing edge forces disappear on the loaded side without making use of the free constants and, therefore, in the case of computations of the same exactitude, the number of the necessary constant members is only half of the number of those required by the Fadle method.

Let us examine the internal stress state of a high ( $b \gg 2a$ ) rectangular panel which arose by the effect of the load  $p(y)$  along the  $x = b$  side. The loads symmetrical to the  $x$  axis should be distinguished from those antisymmetrical to it.

## 2. Symmetric load

The stress state brought about by the load symmetric to the  $x$  axis, which is in equilibrium should be characterized by the following biharmonic stress function:

$$F = \sum A_n \operatorname{Re} \left\{ \left[ e^{-\lambda_n x} - B_n \cosh \lambda_n (b - x) \right] (k_n \cos \lambda_n y + \lambda_n y \sin \lambda_n y) \right\} \quad (1)$$

where  $n = 1, 3, 5, \dots$ , and  $A_n$  is a real constant, while  $\lambda_n, B_n, k_n$  complex constants because to only certain of the peripheral conditions can be given satisfaction by complex constants. As the stresses are of real values, only the real part of the complex stress function indicated by  $\operatorname{Re}$  should be taken into account.

The stresses expressed from (1) are:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 \left[ e^{-\lambda_n x} - B_n \cosh \lambda_n (b - x) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ (2 - k_n) \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sin \lambda_n y \right] \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 \left[ e^{-\lambda_n x} - B_n \cosh \lambda_n (b - x) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times (k_n \cos \lambda_n y + \lambda_n y \sin \lambda_n y) \right\} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 \left[ e^{-\lambda_n x} - B_n \sinh \lambda_n (b - x) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ (1 - k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y \right] \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

The boundary conditions in the case of loads symmetrical or antimetrical to the  $x$  axis are:

- |                           |                                  |
|---------------------------|----------------------------------|
| 1. in locus $y = \pm a$ : | $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$       |
| 2. in locus $x = 0$ :     | $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$       |
| 3. in locus $x = b$ :     | $\sigma_x = p(y); \tau_{xy} = 0$ |

where  $p(y)$  is the normal equilibrated load acting in locus  $x = b$ .

The stress generated by a tangential load cannot be determined by the method presented.

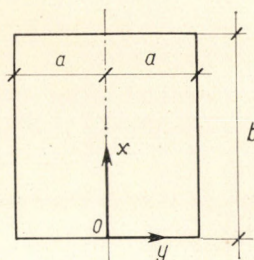


Fig. 2

By describing the boundary conditions (1) by the formula (2), we get for each  $n$  the following equations:

$$\begin{aligned} (1 - k_n) \sin \lambda_n a + \lambda_n a \cos \lambda_n a &= 0, \\ k_n \cos \lambda_n a + \lambda_n a \sin \lambda_n a &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

These equation should be solved to  $k_n$  and  $\lambda_n$ . Therefore, multiplying the first equation of (3) with  $\cos \lambda_n a$ , and the second one by  $\sin \lambda_n a$ , and by adding them together considering the equation thus obtained as well as the second equation of (3), one obtains:

$$\begin{aligned} \sin 2\lambda_n a + 2\lambda_n a &= 0, \\ k_n &= \sin^2 \lambda_n a. \end{aligned} \quad (4)$$

There is only a complex solution for equations (4), which is  $\lambda_n = \alpha + i\mu$ . By dividing the real and the complex parts, the first equation of (4) will be:

$$\sin 2\alpha\alpha \cdot \cosh 2a\mu + i \cos 2\alpha\alpha \cdot \sinh 2a\mu + 2a\alpha + i2a\mu = 0$$

or

$$\sin 2\alpha\alpha \cdot \cosh 2a\mu = -2a\alpha,$$

$$\cos 2\alpha\alpha \cdot \sinh 2a\mu = -2a\mu.$$

The solutions of these two transcendent equations are:

$$\begin{aligned} a\kappa_1 &= \pm 2,106196, & a\mu_1 &= \pm 1,125360, \\ a\kappa_2 &= \pm 5,35625, & a\mu_2 &= \pm 1,551570, \\ a\kappa_3 &= \pm 8,536680, & a\mu_3 &= \pm 1,775540, \\ a\kappa_4 &= \pm 11,669175, & a\mu_4 &= \pm 1,929400, \\ a\kappa_5 &= \pm 14,854055, & a\mu_5 &= \pm 2,046850. \end{aligned}$$

Describing the boundary conditions by formulae (2), one obtains the following equations for each  $n$ :

$$\begin{aligned} (1 - B_n \cosh \lambda_n b) [(2 - k_n) \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sin \lambda_n y] &= 0, \\ (1 - B_n \sinh \lambda_n b) [(1 - k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

The first equation disappears in the case when

$$1 - B_n \cosh \lambda_n b = 0,$$

and from this

$$B_n = \frac{1}{\cosh \lambda_n b}.$$

As

$$\begin{aligned} \cosh \lambda_n b &= \cosh \kappa b \cdot \cos \mu b + i \sinh \kappa b \cdot \sin \mu b \\ \sin \lambda_n b &= \sinh \kappa b \cdot \cos \mu b + i \cosh \kappa b \cdot \sin \mu b \end{aligned}$$

and  $b\kappa \gg 1$ ,  $b\mu \gg 1$  thus  $\kappa b$  and  $\mu b$  are large numbers and therefore

$$\cosh \lambda_n b \approx \sinh \lambda_n b,$$

consequently if the first equation of (5) disappears, then the second one approximately disappears, too.

Describing the (3) boundary conditions with the formulae (2), we obtain the following equations:

$$\tau_{xy} = \sum_n A_n \operatorname{Re} \{ \lambda_n^2 e^{-\lambda_n b} [(1 - k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \sin \lambda_n y] \} = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_x = p(y) = \sum_n A_n \operatorname{Re} \{ \lambda_n^2 [e^{-\lambda_n b} - B_n] [(2 - k_n) \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sin \lambda_n y] \}.$$

As

$$e^{-\lambda_n b} = e^{-\kappa b} (\cos \mu b + i \sin \mu b),$$

and  $b\kappa \gg 1$ ,  $b\mu$  is a large number, and therefore

$$e^{-\lambda_n b} \approx 0.$$

The first equation of (6) approximately disappears and the second equation is:

$$p(y) = - \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 B_n [2 - k_n] \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sin \lambda_n y \right\}. \quad (7)$$

The  $A_n$  constants should be chosen so that the non-orthogonal series (7) should turn into the load function  $p(y)$ .

### 3. Antimetric load

The stress state brought about by the equilibrated load antimetric to the  $x$  axis should be characterized by the following biharmonic stress function:

$$F = \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ [e^{-\lambda_n x} - B_n \cosh(b-x)] (k_n \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y) \right\} \quad (8)$$

where  $n = 1, 2, 4, 6, \dots$ , and  $A_n$  is a real number, while  $\lambda_n, B_n, k_n$  are complex constants. From (8) the stresses are the following:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 [e^{-\lambda_n x} - B_n \cosh \lambda_n(b-x)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [(2 + k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y] \right\}, \\ \sigma_y &= \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 [e^{-\lambda_n x} - B_n \cosh \lambda_n(b-x)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [k_n \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y] \right\}, \\ \tau_{xy} &= \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 [e^{-\lambda_n x} - B_n \sinh \lambda_n(b-x)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [(1 + k_n) \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sinh \lambda_n y] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

The boundary conditions are the same as those in the case of symmetric load.

Describing the 1) boundary conditions, we obtain for each  $n$  the following equations:

$$\begin{aligned} (1 + k_n) \cos \lambda_n a - \lambda_n y \sin \lambda_n a &= 0, \\ k_n \sin \lambda_n a + \lambda_n y \cos \lambda_n a &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

These equations should be solved for  $k_n$  and  $\lambda_n$ . Therefore, the first equation of (10) has to be multiplied by  $\sin \lambda_n a$ , and the second by  $\cos \lambda_n a$ , and the multiplied equations added, by taking into account the equation so obtained as well as the second equation of (10), one obtains:

$$\begin{aligned} \sin 2 \lambda_n a - 2 a \lambda_n &= 0, \\ k_n &= - \cos^2 \lambda_n a. \end{aligned} \quad (11)$$

The equations (11) have only a complex solution; i.e.  $\lambda_n = \alpha + i\mu$ . By dividing the real and the complex parts the first equation of the (11) will have the form:

$$\sin 2\alpha \cosh 2\mu + i \cos 2\alpha \sinh 2\mu - 2\alpha\alpha - i2\alpha\mu = 0,$$

or

$$\sin 2\alpha \cdot \cosh 2\mu = 2\alpha\alpha,$$

$$\cos 2\alpha \cdot \sinh 2\mu = 2\alpha\mu.$$

The solutions of these two transcendent equations are as follows:

$$\alpha\alpha_1 = \pm 3,748835, \quad \alpha\mu_1 = \pm 1,384335,$$

$$\alpha\alpha_2 = \pm 6,949975, \quad \alpha\mu_2 = \pm 1,676100,$$

$$\alpha\alpha_3 = \pm 10,119255, \quad \alpha\mu_3 = \pm 1,858380,$$

$$\alpha\alpha_4 = \pm 13,277270, \quad \alpha\mu_4 = \pm 1,991570,$$

$$\alpha\alpha_5 = \pm 16,429870, \quad \alpha\mu_5 = \pm 2,096625.$$

Describing the 2) boundary conditions with the formulae (9) to each  $n$ , one obtains the following equations:

$$\begin{aligned} (1 - B_n \cosh \lambda_n b) [(2 - k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y] &= 0, \\ (1 - B_n \sinh \lambda_n b) [(1 + k_n) \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sin \lambda_n y] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

The first equation will disappear in the case when

$$1 - B_n \cosh \lambda_n b = 0$$

and from this

$$B_n = \frac{1}{\cosh \lambda_n b}.$$

As  $\lambda_n b$  is a great number and therefore  $\cosh \lambda_n b \approx \sinh \lambda_n b$ , when the first equation disappears, approximately the second one disappears, too.

Describing the 3) boundary conditions by the aid of formulae (9), we obtain the following equations:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 e^{-\lambda_n b} [(1 + k_n) \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sin \lambda_n y] \right\} = 0, \\ \sigma_x = p(y) &= \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 [e^{-\lambda_n b} - B_n] [(2 + k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

As  $\lambda_n b$  is a great number and thus  $e^{-\lambda_n b} \approx 0$ , the first equation of (13) approximately disappears and the second one will be:

$$\sigma_x = p(y) = - \sum_n A_n \operatorname{Re} \left\{ \lambda_n^2 B_n [(2 + k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \cos \lambda_n y] \right\}. \quad (14)$$

The  $A_n$  constants should be chosen in such a way that (14) should turn into the given  $p(y)$  function.

The given  $p(y)$  loads should be expanded into series according to the method of minimum square errors. Accordingly at the symmetric load:

$$I_1 = \int_{-a}^{+a} \{p(y) - \sum_n p_n \operatorname{Re} [(2 - k_n) \cos \lambda_n y - \lambda_n y \sin \lambda_n y]\}^2 dy = \operatorname{Min}!$$

and at the antimetrical load:

$$I_2 = \int_{-a}^{+a} \{p(y) - \sum_n p_n \operatorname{Re} [(2 + k_n) \sin \lambda_n y + \lambda_n y \sin \lambda_n y]\}^2 dy = \operatorname{Min}!$$

The  $I_1$  and  $I_2$  integrals should be minimized by building up the  $\partial I_1 / \partial p_n = 0$  ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ) system of equations and solving them in respect to the constants  $p_n$ .

As the computation of the integrals is a lengthy operation, approaching the load can be done more simply if it is made by peripheral collocation, and not by minimizing the square error, by conveniently dividing the constants we can attain that in the points, assumed to be close enough, the given and the approaching loads should be the same.

The formulae deduced contain complex values, consequently they cannot be used for numerical computations. But one can turn them over to a real form by the following known formulae:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_n y} &= a_1(y) - i b_1(y), \\ \cos \lambda_n y &= b_2(y) + i b_2(y), & \sin \lambda_n y &= a_2(y) + i b_2(y), \\ \cosh \lambda_n y &= b_3(y) + i a_3(y) & \sinh \lambda_n y &= a_3(y) + i b_3(y), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{-xy} \cos \mu y, & b_1 &= e^{-xy} \sin \mu y, \\ a_2(y) &= \sin xy \cdot \cosh \mu y, & b_2 y &= \cos xy \cdot \cosh \mu y, \\ a_3(y) &= \sinh xy \cdot \cos \mu x, & b_3 y &= \cosh xy \cos \mu y. \end{aligned}$$

#### REFERENCES

1. J. FADLE: Die Selbstspannungs-Eigenwert Funktionen der quadratischen Scheibe. *Ingenieur-Archiv* **11** (1940), 125–149.
2. *Ingenieur-Taschenbuch, Bauwesen, Band I. Statik der Platten, Scheiben, Schalen.* Teubner, Leipzig 1963.

**Statische Untersuchung der quadratischen Scheiben.** Der Verfasser beschäftigt sich in diesem Artikel mit der Bestimmung des Spannungszustands von quadratischen Scheiben, beansprucht durch Normalbelastung an den zwei zueinander gegenüberliegenden Seiten. Das

vorgeführte Verfahren ist eine Weiterentwicklung der bekannten Methode von J. Fadle. Während bei dem Fadleschen Verfahren auf der durch veränderliche Belastung beanspruchten Seite ausgeglichene Schubspannungen zurückbleiben, wirken bei dem hier vorgeführten Verfahren nur die angegebene Belastung annähernden Normalspannungen auf die belastete Seite. Infolgedessen ergibt der berechnete Spannungszustand eine genauere Approximation als die Methode von Fadle.

**Examen de parois portantes rectangulaires.** L'auteur traite de la détermination de l'état de tension de disques quadrangulaires soumis sur deux côtés opposés à une charge normale. Le procédé présenté est une variante de la méthode bien connue de Fadle. Tandis que selon la méthode de Fadle, des contraintes de cisaillement équilibrées restent sur le côté supportant une charge variable, selon la méthode proposée il ne se produit, sur le côté chargé, que des contraintes normales s'approchant de la charge donnée. L'état de contrainte calculé d'après le procédé proposé est donc d'une approximation plus précise que celui calculé par la méthode de Fadle.

**Исследование пластин имеющих форму параллелепипеда.** Статья занимается определением напряженного состояния пластин — параллелепипедов, нагруженных с двух противоположных сторон нормальной нагрузкой. Демонстрируемый метод является усовершенствованным вариантом известного метода Фадля. Пока в случае метода Фадля по стороне, нагруженной временной нагрузкой остаются уравновешенные напряжения среза до тех пор в случае демонстрируемого метода на нагруженную сторону действуют только нормальные напряжения, близкие к заданной нагрузке. Вследствие этого расчетное напряженное состояние дает более точное приближение, чем решение, вычисленное при помощи метода Фадля.



## ANALYSIS OF HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC QUADRANGULAR PANELS

J. FÜZY

CAND. OF TECHN. SC.  
TOWN PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received Octobre 1, 1964]

The presented method describes stress and strain conditions using two parameter functions. In the course of the calculation, half of the unknowns can be produced in an explicit form and eliminated from the equations. Thereby, assuming an identically dense network, number of unknowns would be the same as for the Airy function. This method has the advantage that the boundary conditions can be formulated in a very simple manner. Calculation is further simplified by the fact that inner forces can be expressed by derivatives of the first order, instead of those of the second order.

### 1. Introduction

This paper deals with quadrangular panels — so-called *wall beams* — having different moduli of elasticity ( $E_x$  and  $E_y$ ) in the directions  $x$  and  $y$ , respectively, which, however, are constant throughout the beam. Such wall beams are termed *homogeneous orthotropic* ones. A numerical calculation method has been suggested for wall beams with edges acted upon by given active and passive forces.

Differential equation of the problem is reduced from the fourth to the third order and stresses derived from two introduced parameter functions by means of derivatives of the first order. Thereby the method of the difference equations can successfully be applied. The method can be applied by analogy to the case of homogeneous isotropy; see reference [5].

### 2. Differential equation of the problem expressed by two parameter functions

As is known [3], differential equation of the stress function of homogeneous orthotropic wall beams has the form:

$$\frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0 \quad (2,1)$$

where  $F(x, y)$  is the Airy stress function, yielding inner forces derived by means

of derivatives of the second order:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (2,2)$$

Introducing dimensionless number

$$\lambda = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}},$$

Eq. (2,1) can be written as:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (2,3)$$

As is known [1], boundary conditions, needed to establish the stress function, are:

$$\int_G p_x ds = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad (2,4)$$

$$\int_G p_y ds = \frac{\partial F}{\partial x},$$

where  $p_x$  and  $p_y$  are components in the directions  $x$  and  $y$ , resp., of the load acting on the edge curve  $G$  of the wall beam, and  $ds$  is an element of the edge curve.

To simplify the problem, let us introduce parameter functions

$$\frac{\partial F}{\partial x} = R, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = I. \quad (2,5)$$

In this case inner forces can be expressed by formulae

$$n_x = \frac{\partial I}{\partial y}, \quad n_{xy} = -\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial I}{\partial x}, \quad n_y = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (2,6)$$

and Eq. (2,3), uniting the equations of equilibrium and of compatibility, can be written as:

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{\partial^3 I}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^3 I}{\partial y^3} = 0. \quad (2,7)$$

While equations of the boundary conditions will be:

$$\int_G p_x ds = I, \quad (2,8)$$

$$\int_G p_y ds = -R.$$

It appears that boundary conditions of the introduced parameter functions are much easier to handle than those of the Airy stress function. The fact of having now two unknown functions is not an effective drawback, because — as it will be seen in Chapter 4 — one of the unknowns can simply be eliminated from the equations. Two equations, needed to establish the two parameter functions, are, from (2,6) and (2,7):

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial I}{\partial x}, \quad (I)$$

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{\partial^3 I}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^3 I}{\partial y^3} = 0. \quad (II)$$

### 3. Deformations

Displacement functions  $u(x,y)$  and  $v(x,y)$  are determined according to the known theory of elasticity [1].

Specific strain expressions relating to the orthotropic system [3] will be substituted into the known geometrical relationships:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3,1)$$

replacing stresses by expressions obtained from (2,6). By integrating

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{E_x} \left( \int \frac{\partial}{\partial y} I dx - \mu_x R \right) + f(y), \\ v(x,y) &= \frac{1}{E_y} \left( \int \frac{\partial}{\partial y} R dy - \mu_y I \right) + g(x). \end{aligned} \quad (3,2)$$

Integration constants  $f$  and  $g$  can be determined for the given case by means of the known relationship:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3,3)$$

### 4. Establishment of the parameter functions

Difference equations needed by the problem will be written by means of networks assumed for each of the functions  $R$  and  $I$ , at a relative distance (Fig. 1).

Values of function  $I$  (network traced with dashed line in Fig. 1) fit well beam sides parallel with the  $x$  axis, and intercept sides parallel with the  $y$  axis. The same is true reversed for function  $R$ . Values fitting the wall beam sides are given, while a set of intercepting values can be computed from (2,9).

The *first kind* of the difference equations in one point  $A$  can be written, according to relationship (I), as:

$$\frac{R_{A+1} - R_{A-1}}{\Delta y} = \frac{I_{A+1} - I_{A-1}}{\Delta x} \quad (4,1)$$

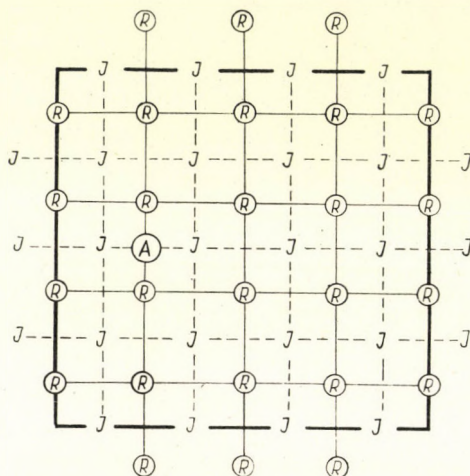


Fig. 1

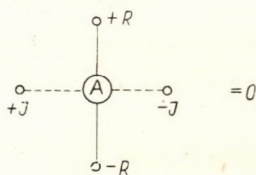


Fig. 2

If the network is so selected as to be square, then the denominators can be omitted. In this case the difference equation in an arbitrary center  $A$  can be plotted symbolically as in Fig. 2, by plotting the coefficients in their respective places in the network.

The *second kind* of the difference equations can be written according to Eq. (II). For a square network, scheme of this difference equation is illustrated in Fig. 3, using symbols as before.

If equations of the former kind (according to the scheme in Fig. 2) are to be written so as to directly give the expressed form of the unknowns  $R$ , then the scheme according to Fig. 4 should be applied.

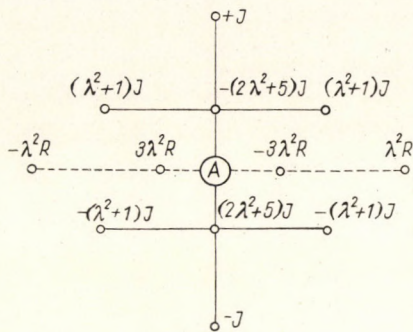


Fig. 3

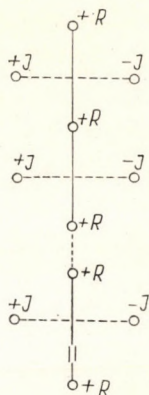


Fig. 4

### 5. Numerical example

Let us analyse the panel shown in Fig. 5. Boundary conditions can be computed from Eqs. (2,8) as shear diagrams of analogous simple beams each. Thereby, boundary values of functions  $R$  and  $I$  will develop according to Fig. 6. In view to the actual symmetry, in what follows, only one half of the panel will be examined. Let us assume the network shown in Fig. 7, showing direct parameters converted according to relationship (5,1).

Equations of the *first kind* are established according to the scheme in Fig. 4. Thereby, starting from the upper left corner, the following equations will be obtained:

+4	-I <sub>1</sub>	+4	-I <sub>1</sub>	+4	-I <sub>1</sub>
0		0	-I <sub>3</sub>	0	-I <sub>3</sub>
R <sub>1</sub>		R <sub>3</sub>		0	-I <sub>5</sub>
				R <sub>5</sub>	

and so on.

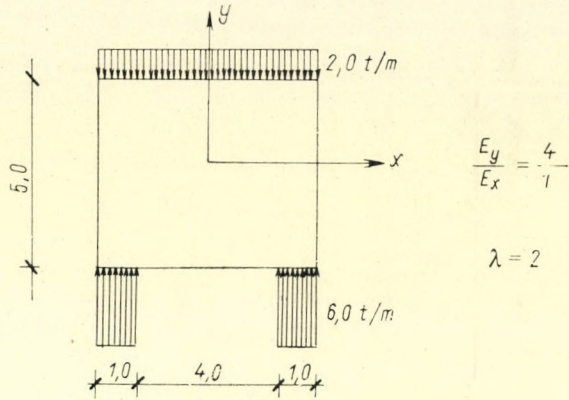


Fig. 5

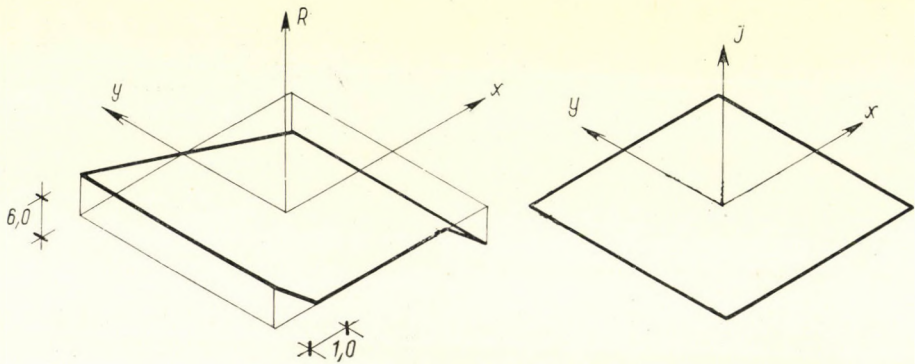


Fig. 6

Or, by putting the equations in order

$$R_1 = 4 - I_1$$

$$R_2 = 2 + I_1 - I_2$$

$$R_3 = 4 - I_1 - I_3$$

$$R_4 = 2 + I_1 - I_2 + I_3 - I_4$$

$$R_5 = 4 - I_1 - I_3 - I_5$$

$$R_6 = 2 + I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 - I_6$$

$$R_7 = 4 - I_1 - I_3 - I_5$$

$$R_8 = 2 + I_1 + I_3 + I_5 + I_7 - I_2 - I_4 - I_6 = 6 - I_2 - I_4 - I_6.$$

Equations of the *second kind* will be written according to the scheme in Fig. 3. Starting from the upper left corner, and remembering that in this case  $\lambda^2 = 4$ , it will be

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \\
 & 0 & & & -13 I_1 & & + 5 I_2 \\
 -24 & & + 12 R_1 & & & & - 12 R_2 & & 0 = 0 \\
 & 0 & & & + 13 I_3 & & & & - 5 I_4 \\
 & & & & - I_5 & & & & 
 \end{array}$$

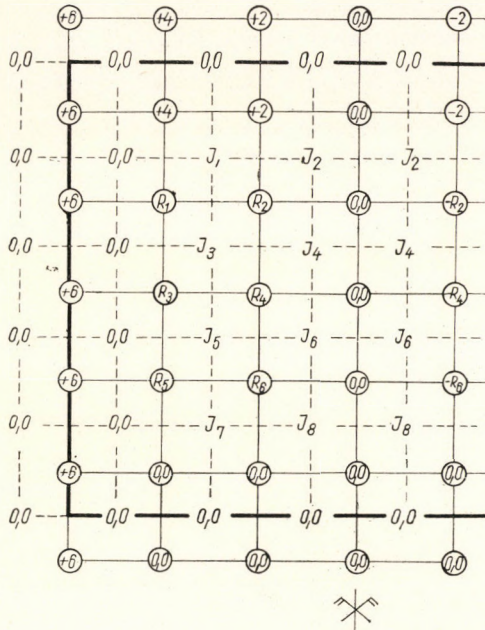


Fig. 7

$$\begin{array}{rccccccc}
 & & & I_1 & & & & \\
 + 5 I_1 & & & - 13 I_2 & & & + 5 I_2 & \\
 - 4 R_1 & & + 12 R_2 & & & 0 & & - 4 R_2 = 0 \\
 - 5 I_3 & & & + 13 I_4 & & & - 5 I_4 & \\
 & & & - I_6 & & & & 
 \end{array}$$

and so on. Putting equations in order and substituting the already expressed unknowns  $R$  from the results, the following parameter values will be obtained:

$$\begin{array}{rccccccc}
 - 37 I_1 + 17 I_2 + 13 I_3 - 5 I_4 - I_5 & & & & & & & = 0 \\
 + 17 I_1 - 16 I_2 - 5 I_3 + 8 I_4 & & & - I_6 & & & & = 0 \\
 - 23 I_1 + 12 I_2 - 37 I_3 + 17 I_4 + 13 I_5 - 5 I_6 - I_7 & & & & & & & = 0 \\
 + 12 I_1 - 7 I_2 + 17 I_3 - 16 I_4 - 5 I_5 + 8 I_6 & & & - I_8 & & & & = 0 \\
 - 24 I_1 + 12 I_2 - 23 I_3 + 12 I_4 - 37 I_5 + 17 I_6 + 13 I_7 - 5 I_8 & & & & & & & = 0 \\
 + 12 I_1 - 8 I_2 + 12 I_3 - 7 I_4 + 17 I_5 - 16 I_6 - 5 I_7 + 8 I_8 & & & & & & & = 0
 \end{array}$$

This equation system is advisably solved by iteration. By doing so, and calculating the unknowns  $R$  from the results, the following parameter values will be obtained:

$$\begin{array}{ll}
 I_1 = 0,24, & R_1 = 3,76, \\
 I_2 = 0,44, & R_2 = 1,8, \\
 I_3 = 0,54, & R_3 = 3,32, \\
 I_4 = 0,96, & R_4 = 1,38, \\
 I_5 = 1,18, & R_5 = 2,04, \\
 I_6 = 1,88, & R_6 = 0,68, \\
 I_7 = 2,04, & \\
 I_8 = 2,72, & 
 \end{array}$$

Figs 8 and 9 show the diagrams of these two functions.

Internal force diagram of the panel along the symmetry axis will be produced by means of the derivatives in direction  $y$  of the function  $I$ . Results are shown in Fig. 10.

The result can be checked by the equilibrium analysis of the half panel. As it appears from Fig. 11, equilibrium condition is met.

Apparently, orthotropy modified the stress state of the given panel as if it would be a such deeper beam. Applying, however, an orthotropy of the opposite sense, e.g.  $\lambda = 1/2$ , an almost linear stress distribution would result.

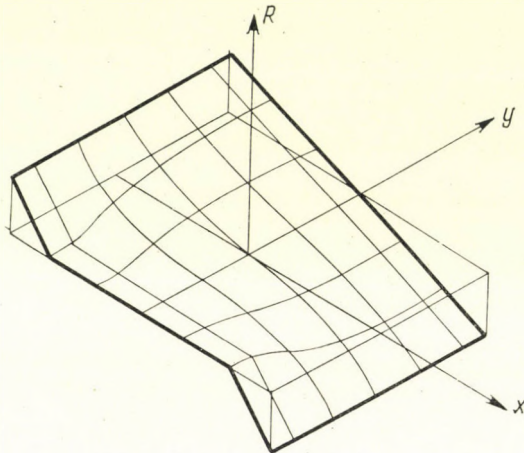


Fig. 8

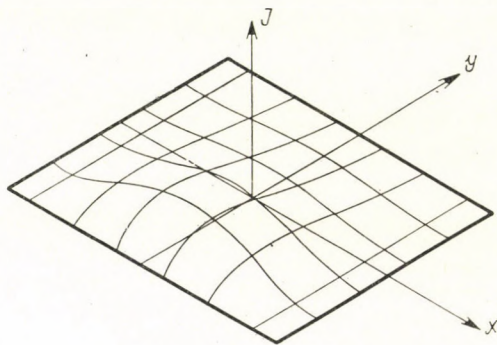


Fig. 9

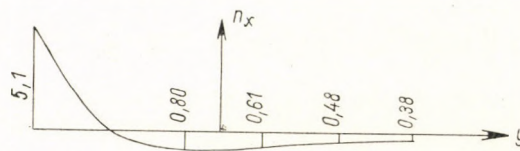


Fig. 10



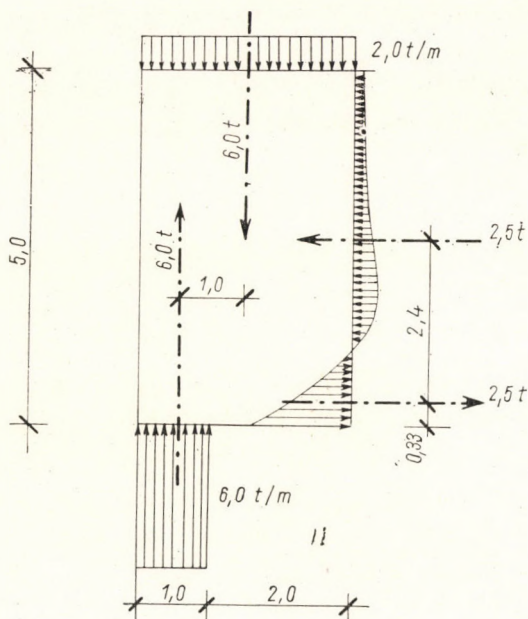


Fig. 11

## REFERENCES

1. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Springer Verlag, Wien 1956.
2. KOZMANN, GY.: Változó keresztmetszetű rudak szilárdságtana (Strength of Bars with Variable Cross-Section). Budapest 1954.
3. SAWIN, G. N.: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. Verlag Technik, Berlin 1956.
4. SCHWANK, F.: Randwertprobleme. Teubner Verlag, Leipzig 1951.
5. FÜZY, J.: Homogén isotropfaltartók feszültségvizsgálatának új módszere (Recent Method of Stress Analysis for Homogeneous Isotropic Wall Beams). *Mélyépitésstudományi Szemle*. 16 (1966), 90–93.

**Untersuchung homogener orthotroper wandartiger Träger.** Das behandelte Verfahren beschreibt den Spannungszustand und den Formänderungszustand mit Hilfe zweier Parameterfunktionen. Im Laufe der Berechnung kann die Hälfte der Unbekannten in expliziter Form dargestellt und so aus den Gleichungen eliminiert werden. Auf diese Weise ist die Anzahl der Unbekannten — gleiche Netzdichte vorausgesetzt — dieselbe, wie bei Verwendung der Airy-Funktion. Vorteil des Verfahrens ist, daß die Randbedingungen sehr einfach formuliert werden können. Eine weitere Vereinfachung ist, daß die Spannungen durch die ersten Ableitungen anstatt der zweiten Ableitungen ausgedrückt werden können.

**Examen de parois portantes homogènes orthotropes.** La méthode présentée décrit l'état de contrainte et l'état de déformation à l'aide de deux fonctions paramétriques. Au cours du calcul, la moitié des inconnues peut être produite sous forme explicite et être éliminée ainsi des équations. De cette façon, en supposant une densité de réseau identique, le nombre des inconnues est le même comme si on utilisait la fonction d'Airy. L'avantage de la méthode est que les conditions de pourtour peuvent être formulées très simplement. Une autre simplification est possible en exprimant les contraintes par des dérivées premières au lieu de dérivées secondes.

**Исследование однородных ортотропных стеновых балок.** Демонстрируемый метод описывает состояния напряжения и деформации при помощи двух параметрических функций. В процессе вычисления половина неизвестных может быть получена в явной форме и, таким образом, исключена из уравнений. Следовательно, предполагая идентичную плотность сети, число неизвестных получается таким же, как это имеет место в случае функции Айри. Преимуществом предлагаемого метода является то, что краевые условия можно формулировать очень просто. Дополнительным упрощением является, что напряжения можно выразить вместо производных второго порядка производными первого порядка.

## STABILITY ANALYSIS OF PARABOLIC ARCHES SUBJECTED TO A VERTICAL LOAD ACTING AT THE APEX

M. RÓZSA

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES  
BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received January 19, 1966]

An approximative method is presented for the stability analysis of two-hinged and fixed-end parabolic arches with constant cross-section, subjected to a vertical load applied at the apex. The parabolic arch is replaced by a chain of hinged bars. The numerical values obtained for the critical force of the substituting chain consisting of five bars, are shown in tables.

### 1. Introduction

The technical literature deals in detail with the stability analysis of parabolic arches subjected to a uniformly distributed vertical load [1-5]. Since changes in the length of the center line of the arches are neglected, under this kind of load no deformation comes into being before losing stability. Therefore, the aim of the stability investigation is to determine the load at which the arch in its *initial form* becomes unstable.

It is quite a different case the one in which the load acting to a parabolic arch consists of one or more concentrated forces. Then, before the stability comes to an end, deformations may grow up to an amount that the application of the second order theory is not satisfactory any longer. It can be explained by this fact that the stability of parabolic arches subjected to a load of concentrated forces, was investigated only through model tests [6-8]. The accuracy of these test results have not been checked by calculations.

In this paper the stability analysis of two-hinged and fixed-end parabolic arches of constant cross section subjected to a single vertical concentrated load applied at the apex of the arch, is dealt with. The investigation is limited to the case of displacements in the plane of the arch. The material of the arch is assumed to be perfectly elastic. Changes in length of the center line will be neglected. Since an exact solution of the problem is impossible, an approximative method of computation will be applied.

## 2. Method of computation in stability analysis

On investigating the stability of parabolic arches of constant cross section subjected to a single vertical concentrated load, applied at the apex, the arch is replaced by a hinged chain consisting of stiff straight bars of length  $l$  (Fig. 1). The hinges of the chain are lying in the center line of the parabolic arch. The adjoining bars are connected by springs. The spring constants  $c$  are equivalent to the bending stiffness  $IE/l$ ; i.e.

$$c = \frac{IE}{l} . \quad (1)$$

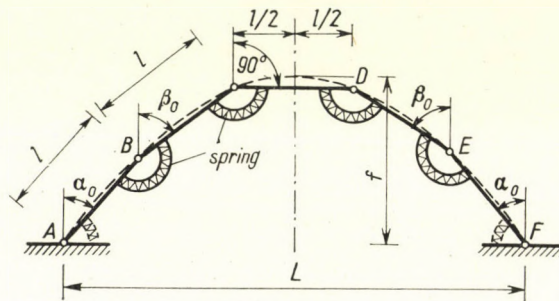


Fig. 1. Initial shape of the chain of bars

If the relative rotation of the adjoining bars is  $\varphi$ , the moment exerted by the spring will be

$$M = c\varphi . \quad (2)$$

In case of a chain of bars replacing a parabolic arch hinged at the supports no springs are at the hinges  $A$  and  $F$ .

In case of a chain of bars substituting a parabolic arch with fixed ends, at these hinges  $A$  and  $F$  springs symbolized by dashed line are set. Since the fixed ends may be replaced by the symmetrical image of the chain of bars with respect to the axis  $AF$ , at the hinges  $A$  and  $F$  the value of the relative rotation of the adjoining (i.e. that of the real and of the "image") bars is the double of that of the rotation of the real bar. Therefore, the value of the constant  $c_0$  of the springs replacing the fixed ends at  $A$  and  $F$  is the double of that of the spring constant according to (1):

$$c_0 = 2c = 2 \frac{IE}{l} . \quad (3)$$

The replacing chain of bars approaches the original arch the more the larger the number of bars is. On the other hand, the computation is becoming

more and more lengthy with the increase of the number of bars. In this paper a chain consisting of five bars have been taken up, because in this way we obtain such values for the critical forces which agree satisfactorily with the test results.

The deformation of the symmetrical arch and that of the replacing chain of bars subjected to symmetrical load, taking place before losing stability, will always be symmetrical (Fig. 2). The loss of stability can take place in two

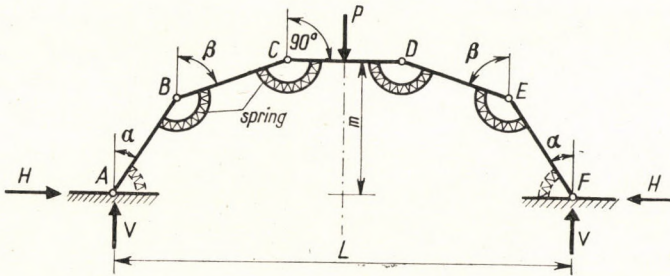


Fig. 2. Chain of bars in position I

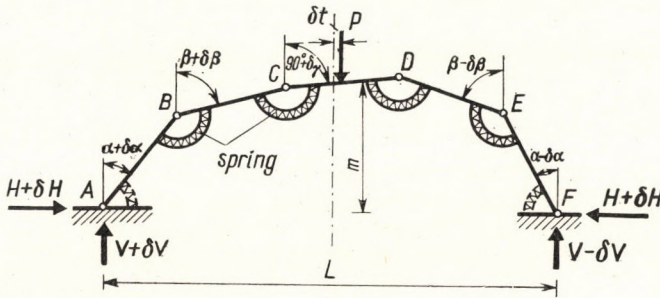


Fig. 3. Chain of bars in position II

different ways: accompanied by *antimetrical*, or by *symmetrical* deformation which will be superimposed upon the symmetrical deformation occurring before the loss of stability. The former is called *antimetrical*, and the latter *symmetrical loss of stability*.

The *antimetrical loss of stability* is characterized by the circumstance that the beam (parabolic arch or chain of bars) subjected to the load  $P$  is in equilibrium in a symmetrically bent position (Fig. 2), and continues to be in equilibrium also in a position characterized by an infinitely small antimetrical displacement superimposed upon this (Fig. 3). The former will be called position I, and the latter position II.

In the case of *symmetrical loss of stability* the beam subjected to the load  $P$  is in equilibrium in a symmetrically bent position (position I), and continues to be in equilibrium in a position characterized by an infinitely small symmet-

rical displacement superimposed upon this (Fig. 4), The latter will be called position II'.

To begin with, the problem of the antimetrical loss of stability, and afterwards that of the symmetrical loss of stability will be treated.

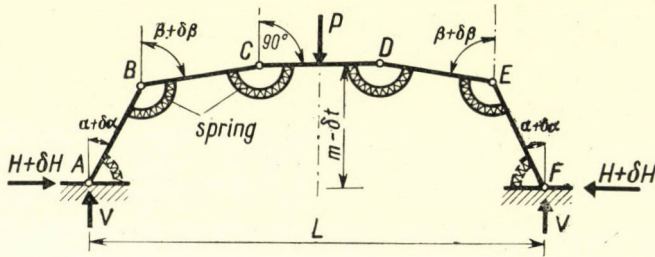


Fig. 4. Chain of bars in position II'

### 3. Computation of the antimetrical loss of stability

#### a) Two-hinged parabolic arch

With the view to resolve the stability problem we are to determine the changes  $\delta V$  and  $\delta H$  of the vertical and horizontal components  $V$  and  $H$ , respectively, of the left-hand side support reaction in position II, compared to that of position I (Figs 2 and 3).

In position I, owing to the symmetry:

$$V = \frac{P}{2}. \quad (4)$$

In position II the point of application of the force  $P$  will be horizontally displaced by  $\delta t$ . From the equilibrium condition of the moments of the forces related to the point  $F$ :

$$(V + \delta V) \cdot L - P \left( \frac{L}{2} - \delta t \right) = 0,$$

and taking into consideration (4):

$$\delta V = -2 \frac{\delta t}{L} V. \quad (5)$$

At the point of application of the force  $P$ , in consequence of the inflexion of the antimetrical accessory displacement the value of the bending moment does not change, therefore

$$V \frac{L}{2} - Hm = (V + \delta V) \left( \frac{L}{2} + \delta t \right) - (H + \delta H)m.$$

After substituting the expression (5) and neglecting the small values of higher order:

$$\delta H = 0. \quad (6)$$

At the points *B* and *C* of the chain of bars the moment of the left-hand side forces is in equilibrium with the moment of the spring placed at the point, calculated according to [2].

The condition of equilibrium in position I. (Fig. 2) at point *B*:

$$Vl \sin \alpha - Hl \cos \alpha = c[(\alpha - \beta) - (\alpha_0 - \beta_0)] \quad (7)$$

$\alpha_0, \beta_0$  being known angles included by the initial direction of the bars *AB* and *BC* respectively, and by the perpendicular (Fig. 1);

at point *C*:

$$V(l \sin \alpha + l \sin \beta) - H(l \cos \alpha + l \cos \beta) = c(\beta - \beta_0) \quad (8)$$

The condition of equilibrium in position II (Fig. 3.) at point *B*:

$$\begin{aligned} (V + \delta V)l \sin(\alpha + \delta\alpha) - (H + \delta H)l \cos(\alpha + \delta\alpha) = \\ = c[(\alpha + \delta\alpha - \beta - \delta\beta) - (\alpha_0 - \beta_0)]; \end{aligned} \quad (9)$$

at point *C*:

$$\begin{aligned} (V + \delta V)[l \sin(\alpha + \delta\alpha) + l \sin(\beta + \delta\beta)] - (H + \delta H)[l \cos(\alpha + \delta\alpha) + \\ + l \cos(\beta + \delta\beta)] = c(\beta + \delta\beta - \beta_0 - \delta\gamma). \end{aligned} \quad (10)$$

Between the unknown angles  $\alpha, \beta, \delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$  in equations (7)–(10) the following relations exist:

$\alpha$ ) in position I the horizontal projection of the left half of the chain is equal to the half of the span

$$l \sin \alpha + l \sin \beta + \frac{l}{2} = \frac{L}{2}; \quad (11)$$

$\beta$ ) in position II the distance “*m*” of the midpoint of the bar *C–D* from the straight line *AF* is the same as in position I (Fig. 3):

$$l \cos \alpha + l \cos \beta = l \cos(\alpha + \delta\alpha) + l \cos(\beta + \delta\beta) + \frac{l}{2} \cos(90^\circ + \delta\gamma); \quad (12)$$

$\gamma$ ) in position II the horizontal projection of the left half of the chain of bars is longer by  $\delta t$  than that in position I:

$$l \sin(\alpha + \delta\alpha) + l \sin(\beta + \delta\beta) - l \sin \alpha - l \sin \beta = \delta t. \quad (13)$$

Substituting the expressions (5) and (6) into equations (7)–(13) and taking into account the relations referring to the trigonometrical functions of the sum of the angles, further introducing the notations

$$V_1 = \frac{Vl}{c}; H_1 = \frac{Hl}{c}; \alpha_1 = \frac{\delta\alpha}{\delta t} \frac{L}{2}; \beta_1 = \frac{\delta\beta}{\delta t} \frac{L}{2}; \gamma_1 = \frac{\delta\gamma}{\delta t} \frac{L}{2}, \quad (14)$$

we obtain, after simplifying and neglecting the small values of higher order, the following equations:

$$V_1 \sin \alpha - H_1 \cos \alpha = (\alpha - \beta) - (\alpha_0 - \beta_0), \quad (15)$$

$$V_1 \sin \beta - H_1 \cos \beta = (2\beta - \alpha) - (2\beta_0 - \alpha_0), \quad (16)$$

$$V_1(\alpha_1 \cos \alpha - \sin \alpha) + H_1 \alpha_1 \sin \alpha = \alpha_1 - \beta_1, \quad (17)$$

$$V_1(\beta_1 \cos \beta - \sin \beta) + H_1 \beta_1 \sin \beta = 2\beta_1 - \alpha_1 - \gamma_1, \quad (18)$$

$$l \sin \alpha + l \sin \beta + \frac{l}{2} = \frac{L}{2}, \quad (19)$$

$$\alpha_1 \sin \alpha + \beta_1 \sin \beta + \frac{1}{2} \gamma_1 = 0, \quad (20)$$

$$\alpha_1 l \cos \alpha + \beta_1 l \cos \beta = \frac{L}{2}. \quad (21)$$

The system of equations (15)–(21) determines the unknowns  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  characterizing the antimetric loss of stability of the two-hinged parabolic arch. Equations (17), (18), (20), (21) represent a system of inhomogeneous linear equations for the unknowns  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , which can be solved only when the determinant belonging to the extended matrix of the coefficients of the systems of equations is equal to zero. This determinant is as follows:

$$\begin{vmatrix} V_1 \cos \alpha + & & & & \\ H_1 \sin \alpha - 1 & + 1 & 0 & V_1 \sin \alpha & \\ & + 1 & V_1 \cos \beta + & & \\ & & H_1 \sin \beta - 2 & + 1 & V_1 \sin \beta \\ \sin \alpha & & \sin \beta & + 1/2 & 0 \\ l \cos \alpha & & l \cos \beta & 0 & \frac{L}{2} \end{vmatrix} = 0.$$



We add to the second row of the determinant the first row, further the third row multiplied with  $(-H_1)$  and the fourth one multiplied with  $(-V_1/l)$ :

$$\begin{vmatrix} V_1 \cos \alpha + H_1 \sin \alpha - 1 & +1 & 0 & V_1 \sin \alpha \\ 0 & -1 & +1 - \frac{H_1}{2} & -\frac{V_1}{2} \\ \sin \alpha & \sin \beta & +1/2 & 0 \\ l \cos \alpha & l \cos \beta & 0 & \frac{L}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

By expanding the determinant we obtain the following equation:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{H_1}{2}\right) \left[ V_1 l \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + \frac{L}{2} (\sin \alpha + \sin \beta) - \right. \\ & \left. - \frac{L}{2} \sin \beta (V_1 \cos \alpha + H_1 \sin \alpha) \right] + \frac{1}{2} V_1 l \cos \alpha \left( \sin \alpha - \frac{1}{2} \right) + \\ & + (V_1 \cos \alpha + H_1 \sin \alpha - 1) \left( \frac{V_1 l}{4} \cos \beta - \frac{L}{4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

In the system of transcendent equations consisting of the equations (15), (16), (19), (22), only  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  unknowns are present. For solving this system of equations  $V_1$  and  $H_1$  should be expressed from equations (15) and (16):

$$V_1 = \frac{\cos \alpha (2\beta - \alpha - 2\beta_0 + \alpha_0) + \cos \beta (\beta - \alpha - \beta_0 + \alpha_0)}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad (23)$$

$$H_1 = \frac{\sin \alpha (2\beta - \alpha - 2\beta_0 + \alpha_0) + \sin \beta (\beta - \alpha - \beta_0 + \alpha_0)}{\sin(\beta - \alpha)}. \quad (24)$$

Then the course of the calculation is as follows. By giving a value to  $\beta$  one determines  $\alpha$  from (19), then the values of  $V_1$  and  $H_1$  from equations (23) and (24) should be determined. The values obtained in this way do not satisfy equation (22). Therefore, the value of  $\beta$  should be varied in a way of successive approximation until the values of the unknowns obtained at last also satisfy equation (22).

b) *Parabolic arch with fixed ends*

The course of the computation is essentially the same as that of the two-hinged parabolic arches.

In position II, the moment of the left-hand side external forces at the midpoint of the bar  $C-D$  is of the same value as in position I (Figs 2 and 3). The same statement is valid concerning the moment of the right-hand side external forces. Assuming the moments of the springs set at the hinges  $A$  and  $F$  with the spring constant given in formula (3), we obtain the following two equations:

$$\begin{aligned} (V + \delta V) \left( \frac{L}{2} + \delta t \right) - (H + \delta H) m - 2c(\alpha + \delta\alpha - \alpha_0) &= \\ &= V \frac{L}{2} - Hm - 2c(\alpha - \alpha_0), \\ (V - \delta V) \left( \frac{L}{2} - \delta t \right) - (H + \delta H) m - 2c(\alpha - \delta\alpha + \alpha_0) &= \\ &= V \frac{L}{2} - Hm - 2c(\alpha - \alpha_0). \end{aligned}$$

After neglecting the small values of higher order the solution of this system of equations is:

$$\delta V = -2 \frac{\delta t}{L} V + 4 \frac{c}{L} \delta\alpha, \quad (25)$$

$$\delta H = 0. \quad (26)$$

At points  $B$  and  $C$  of the chain of bars, the moment of the left-hand side external forces is in equilibrium with the spring moment acting on the hinge. From this, we can establish the following equations:

In position I  
at point  $B$ :

$$Vl \sin \alpha - Hl \cos \alpha - 2c(\alpha - \alpha_0) = c[(\alpha - \beta) - (\alpha_0 - \beta_0)]; \quad (27)$$

at point  $C$ :

$$V(l \sin a + l \sin \beta) - H(l \cos \alpha + l \cos \beta) - 2c(\alpha - \alpha_0) = c(\beta - \beta_0); \quad (28)$$

In position II  
at point  $B$ :

$$\begin{aligned} (V + \delta V) l \sin(\alpha + \delta\alpha) - (H + \delta H) l \cos(\alpha + \delta\alpha) - 2c(\alpha + \delta\alpha - \alpha_0) &= \\ &= c[(\alpha + \delta\alpha - \beta - \delta\beta) - (\alpha_0 - \beta_0)]; \end{aligned} \quad (29)$$

at point C:

$$(V + \delta V)[l \sin(\alpha + \delta\alpha) + l \sin(\beta + \delta\beta)] - (H + \delta H)[l \cos(\alpha + \delta\alpha) + l \cos(\beta + \delta\beta)] - 2c(\alpha + \delta\alpha - \alpha_0) = c(\beta + \delta\beta - \beta_0 - \delta\gamma). \quad (30)$$

After substituting expressions (25), (26) into equations (27)–(30) and repeating the transformations performed at the computation of the two-hinged arches, as well as introducing the notations (14), we obtain the following equations:

$$V_1 \sin \alpha - H_1 \cos \alpha = (3\alpha - \beta) - (3\alpha_0 - \beta_0), \quad (31)$$

$$V_1 \sin \beta - H_1 \cos \beta = (2\beta - \alpha) - (2\beta_0 - \alpha_0), \quad (32)$$

$$V_1 (\alpha_1 \cos \alpha - \sin \alpha) + H_1 \alpha_1 \sin \alpha + 4 \alpha_1 \frac{l}{L} \sin \alpha = 3 \alpha_1 - \beta_1, \quad (33)$$

$$V_1 (\beta_1 \cos \beta - \sin \beta) + H_1 \beta_1 \sin \beta + 4 \alpha_1 \frac{l}{L} \sin \beta = 2 \beta_1 - \alpha_1 - \gamma_1. \quad (34)$$

The geometric conditions (19)–(21) established for the two-hinged parabolic arches, are invariably valid also for the fixed-end parabolic arches.

With the view of the solution of the system of equations (19)–(21), and (31)–(34), just as at the two-hinged parabolic arches, it is to be assumed that the determinant belonging to the extended matrix of coefficients of the equations (20), (21), (33), and (34), constituting a linear system of equations for the unknowns  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , is equal to zero. After transformations, expanding this determinant the following equation will be obtained:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{H_1}{2}\right) \left[ V_1 l \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + \frac{L}{2} \sin \alpha - \frac{L}{2} \sin \beta \left( V_1 \cos \alpha + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + H_1 \sin \alpha + 4 \frac{l}{L} \sin \alpha - 3 \right) \right] + \frac{1}{2} V_1 l \cos \alpha \left( \sin \alpha - \frac{1}{2} \right) + \\ & \quad + \left( V_1 \cos \alpha + H_1 \sin \alpha + 4 \frac{l}{L} \sin \alpha - 3 \right) \left( \frac{V_1 l}{4} \cos \beta - \frac{L}{4} \right) + \\ & \quad + \frac{l}{L} \left( \frac{L}{2} - V_1 l \sin \alpha \cos \beta \right) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

The solution of the system of the transcendent equations (19), (31), (32), and (35) should be performed in the same manner for the unknowns  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ , and  $\beta$ , as at the two-hinged parabolic arches.

#### 4. Computation of the symmetrical loss of stability

##### a) *The two-hinged parabolic arch*

In the case of a symmetrical loss of stability, in the position II' (Fig. 4) the beam maintains its symmetry, therefore, the vertical component of the support reactions has the same value as in position I:

$$\delta V = 0. \quad (36)$$

From the symmetry it follows that

$$\delta \gamma = 0. \quad (37)$$

It should be taken into account that in case of symmetrical loss of stability  $\delta H \neq 0$ .

The equations (7)–(10) deduced for the antimetrical loss of stability are valid also in case of the symmetrical loss of stability. Between the angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta\alpha$ , and  $\delta\beta$ , the following relations exist:

a) Eq. (11) is invariably valid;

$\beta$ ) in position II' the distance of the midpoint of the bar  $C-D$  from the straight line  $AF$  is smaller by  $\delta t$ , than in position I (Fig. 4):

$$l \cos \alpha + l \cos \beta - l \cos(\alpha + \delta\alpha) - l \cos(\beta + \delta\beta) = \delta t; \quad (38)$$

$\gamma$ ) in position II' the horizontal projection of the left half of the chain of bars is of the same length as in position I:

$$l \sin(\alpha + \delta\alpha) + l \sin(\beta + \delta\beta) - l \sin \alpha - l \sin \beta = 0. \quad (39)$$

After substituting (36) and (37) into equations (7)–(10), (38), and (39) and performing the same transformations as those in the case of the antimetrical loss of stability, further, introducing besides the notations (14) the notation

$$k = \frac{\delta H}{\delta t} \cdot \frac{l}{c} \cdot \frac{L}{2}, \quad (40)$$

we obtain the following equations:

$$V_1 \sin \alpha - H_1 \cos \alpha = (\alpha - \beta) - (\alpha_0 - \beta_0), \quad (41)$$

$$V_1 \sin \beta - H_1 \cos \beta = (2\beta - \alpha) - (2\beta_0 - \alpha_0), \quad (42)$$

$$V_1 \alpha_1 \cos \alpha + H_1 \alpha_1 \sin \alpha - k \cos \alpha = \alpha_1 - \beta_1, \quad (43)$$

$$V_1 \beta_1 \cos \beta + H_1 \beta_1 \sin \beta - k \cos \beta = 2 \beta_1 - \alpha_1, \quad (44)$$

$$l \sin \alpha + l \sin \beta + \frac{l}{2} = \frac{L}{2}, \quad (45)$$

$$\alpha_1 l \sin \alpha + \beta_1 l \sin \beta = \frac{L}{2}, \quad (46)$$

$$\alpha_1 \cos \alpha + \beta_1 \cos \beta = 0. \quad (47)$$

The system of equations (41)–(47) determines the unknowns  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , and  $k$ , characterizing the symmetrical loss of stability of the two-hinged parabolic arch. The equations (43), (44), (46) and (47), represent a system of inhomogeneous linear equations for the unknowns  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , and  $k$ . This system can be solved only when the determinant belonging to the extended matrix of the coefficients is equal to zero. By expanding this determinant we obtain after transformations the following equation:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha (V_1 \cos \beta + H_1 \sin \beta - 2) + \cos^2 \beta (V_1 \cos \alpha + \\ + H_1 \sin \alpha - 1) - 2 \cos \alpha \cos \beta = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

The system of equations (41), (42), (45), and (48), can be solved for the unknowns  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , in the same way as in the case of the antimetric loss of stability.

#### b) Parabolic arch fixed at the supports

The equations (27)–(30) are also valid in the case of the symmetrical loss of stability of parabolic arches, fixed at the supports. After having substituted (36) and (37) into these equations and carrying out the transformations described above, using the notations (14) and (40), we obtain the following equations:

$$V_1 \sin \alpha - H_1 \cos \alpha = (3\alpha - \beta) - (3\alpha_0 - \beta_0), \quad (49)$$

$$V_1 \sin \beta - H_1 \cos \beta = (2\beta - \alpha) - (2\beta_0 - \alpha_0), \quad (50)$$

$$V_1 \alpha_1 \cos \alpha + H_1 \alpha_1 \sin \alpha - k \cos \alpha + 4 \alpha_1 \frac{l}{L} \sin \alpha = 3 \alpha_1 - \beta_1, \quad (51)$$

$$V_1 \beta_1 \cos \beta + H_1 \beta_1 \sin \beta - k \cos \beta + 4 \alpha_1 \frac{l}{L} \sin \beta = 2 \beta_1 - \alpha_1. \quad (52)$$

The equations (45)–(47) remain invariably valid.

By eliminating the unknowns  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $k$  from the equations (46), (47), (51), and (52) in the manner already presented, the following equation will be ob-

tained:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha (V_1 \cos \beta + H_1 \sin \beta - 2) + \cos^2 \beta \left( V_1 \cos \alpha + H_1 \sin \alpha + \right. \\ \left. + 4 \frac{l}{L} \sin \alpha - 3 \right) - 2 \cos \alpha \cos \beta \left( 1 + 2 \frac{l}{L} \sin \beta \right) = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

The system of equations (45), (49), (50), and (53) can be solved for the unknowns  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , in the same way as presented in the foregoing.

### 5. Numerical results

Starting from the formulae deduced in points 3 and 4, the critical load  $P$  and the critical horizontal lateral thrust  $H$  have been determined corresponding to the antimetrical and symmetrical loss of stability of two-hinged and fixed-end parabolic arches with relative rises of  $f/L = 0,1; 0,2; 0,3$  and  $0,4$ .

According to the calculations at these rises *the antimetrical loss of stability of the two-hinged parabolic arches takes place at a smaller load than the symmetrical one*, consequently, in practice, it is always the former which occurs. At the parabolic arches with fixed-ends antimetrical loss of stability can never occur (in the case of the given values of rises), because equation (35) has no real root. When the load reaches the critical value, these arches, show the phenomenon of loss of stability without bifurcation in conformity with the experiments of KOLLBRUNNER [7]. According to the calculations carried out concerning the parabolic arches with fixed-ends, an antimetrical loss of stability takes place only in case of  $f/L = 0,85$ , or of a still greater value of the relative rise of arch.

The critical vertical load  $P$  and the critical horizontal lateral thrust  $H$  are given by the following formulae:

$$P = k_P \frac{IE}{L^2}, \quad H = k_H \frac{IE}{L^2}$$

where  $k_P$  and  $k_H$  are coefficients, the values of which are given in Tables I, II and III.

Table I

*Symmetrical loss of stability of two-hinged parabolic arches*

$f/L$	0,1	0,2	0,3	0,4
$k_H$	32,42	26,87	19,80	13,63
$k_P$	15,78	26,90	31,04	29,65
$k_P \cdot Ch$	17,6	27,8	29,6	26,9

Table I refers to the antimetrical loss of stability of the two-hinged parabolic arches. In the third line of the table there are to be seen the coefficients  $k_{P.CH}$  calculated on the basis of the experiments carried out by CHWALLA and KOLLBRUNNER [7]. The difference between the calculated and the experimental values remains between the limits of  $\pm 12$  per cent.

Considering that the calculations were made with an approximative method, and errors in the experiments are inevitable, the agreement of the results obtained by the two different ways, is satisfactory.

Table II

*Symmetrical loss of stability of fixed-end parabolic arches*

$f/L$	0,1	0,2	0,3	0,4
$k_H$	44,32	40,49	35,30	29,80
$k_P$	17,37	31,27	40,08	44,06

Table II refers to the symmetrical loss of stability of the fixed-end parabolic arches. No test results are known in this respect.

Table III

*Antimetrical loss of stability of parabolic arches of large rise of arch*

$f/L$	0,85	1,0
$k_H$	10,00	5,85
$k_P$	35,04	28,37

Table III gives the coefficients  $k_P$  and  $k_H$ , belonging to the antimetrical loss of stability of fixed-end parabolic arches with relative rises of  $f/L = 0,85$  and  $f/L = 1$ . No test results are known. CHWALLA and KOLLBRUNNER made experiments concerning the stability of parabolic arches with fixed ends only of a relative rise of  $f/L = 0,4$ . Out of the examined 28 parabolic arches of the same form, in 23 cases symmetrical, and in 5 cases antimetrical losses of stability have taken place. Since, according to the theoretical calculations, an antimetrical loss of stability is impossible at this relative rise of arch, the phenomenon observed in 5 cases can be explained only by the initial asymmetry caused by the inexactitude of the experiments.

## REFERENCES

1. LOKSCHIN, A.: Über die Knickung eines gekrümmten Stabes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 16 (1936) 49—55.
2. DINNIK, A. N.: Prodoljnyi izgib. Kruchenie. (Longitudinal buckling of curved members.) *Izd. Akad. Nauk* 1955.
3. HAWRANEK, A.—STEINHARDT, O.: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer Verlag, 1958.
4. TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability, Mac Graw-Hill Book Comp. 1961.
5. RÓZSA, M.: Stability Analysis of Arches with Vertical Load. *Acta Techn. Hung.* 49 (1964), 387—397.
6. CHWALLA, E.—KOLLBRUNNER, C. F.: Über das Ausknicken symmetrischer Bogenträger unter symmetrisch verteilten Belastungen. *Stahlbau* (1937), 121—123, 133—142.
7. CHWALLA, E.—KOLLBRUNNER, C. F.: Beiträge zum Knickproblem des Bogenträgers und des Rahmens. *Stahlbau* (1938), 81—84, 94—96.
8. BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.—KRETZSCHMAR, H.: Stabilitätstheorie, II. Akademie-Verlag, Berlin 1963.

**Stabilitätsuntersuchung der im Scheitel mit einer vertikalen Kraft belasteten Parabelbögen mit gleichbleibendem Querschnitt.** In der Abhandlung wird ein Annäherungsverfahren zur Stabilitätsuntersuchung der im Scheitel mit einer vertikalen Kraft belasteten zweigelenkigen und eingespannten Parabelbögen mit gleichbleibendem Querschnitt dargelegt, bei welchem der Parabelbogen durch eine federnde gelenkige Stabkette ersetzt ist. Für die kritischen Kräfte der aus 5 Stäben bestehenden Ersatzstabketten erhaltene Werte sind in Tabellen angegeben.

**Analyse de stabilité des arcs paraboliques à section transversale constante, chargés d'une force verticale à leur sommet.** L'étude présente une méthode approchée pour l'analyse de stabilité des arcs paraboliques à deux articulations, encastés, à section transversale constante et chargés d'une force verticale à leur sommet. Dans cette méthode, l'arc parabolique est remplacé par une chaîne de barres articulée. Les valeurs numériques obtenues pour l'effort critique de la chaîne de remplacement composée de cinq barres sont indiquées dans des tableaux.

**Анализ устойчивости параболических арок постоянного сечения, нагруженных перпендикулярно действующей силой в вершине.** Работа излагает приближенный метод для анализа устойчивости двухшарнирных и заделанных параболических арок постоянного сечения, нагруженных перпендикулярно действующей силой в вершине. В методе параболическая арка замещается пружинной шарнирной стержневой цепью. Числовые значения, полученные для замещающей стержневой цепи, состоящей из пяти стержней, сведены в таблицу.



## VELAROIDAL SHELL OVER RECTANGULAR PLAN

E. DULÁCSKA

TOWN PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received May 6, 1966]

A design method is given for a parabolic shell similar in form to a sail stretched over a plane edge. Stress function of the shell is approached by a polynome of several members. Internal forces are determined for uniformly distributed snow load and approximate dead load.

### 1. Introduction

Velaroidal shell means a shell supported over a horizontal plan. Such a shell can only be balanced by membrane forces if lateral pressures are also allowed for. If in addition shearing forces can act at the shell edge, the shell becomes hyperstatic.

Membrane forces of hyperstatic shells can only be determined by meeting the boundary conditions for deformation, since a shell problem may have an infinity of structurally possible membrane solutions, independent of the deformation conditions. Selection of the actual solution among these would require deformation analysis. In the given case, however, this highly intricate analysis can be avoided by means of the method to be described, involving a shell edge acted upon by boundary pressures. Thereby, since the edge of the edge beam adjacent to the shell is itself compressed because of the bending due to lateral pressures transmitted by the shell, specific strains of the adjacent shell edges and of the edge beam are of the same kind. Adequately choosing edge beam's size and may be shape, undue differences between specific strains and corresponding stresses along the contact line of both structures can be avoided. This may help to eliminate problem redundancy.

### 2. Fundamental relationships

This problem will be referred to the co-ordinate system  $x, y, z$ . Only vertical loads  $p$ , symmetrical to the planes  $x, y$  and  $y, z$ , will be considered.

For the sake of simplicity, dimensionless co-ordinates  $\xi$  and  $\eta$  will be

introduced, related to  $x$  and  $y$  as:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

Indicating differentiation by a subscript, equilibrium differential equation of the problem can be written in dimensionless co-ordinates as:

$$z_{\xi\xi} F_{\eta\eta} - 2 z_{\xi\eta} F_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} F_{\xi\xi} = -a^2 b^2 p(\xi, \eta), \quad (1)$$

where

$z = z(\xi, \eta)$  is the median shell surface; and  
 $F = F(\xi, \eta)$  the stress function of the shell.

Projections of internal forces can be expressed from the stress function as:

$$n_x = \frac{1}{b^2} F_{\eta\eta}; \quad n_{xy} = -\frac{1}{ab} F_{\xi\eta}; \quad n_y = \frac{1}{a^2} F_{\xi\xi}. \quad (2)$$

The equation of the shell's median surface is:

$$z = -h(1 - \xi^2)(1 - \eta^2). \quad (3)$$

In this case, second order derivatives of the equation of the middle surface in (1) are:

$$z_{\xi\xi} = 2h(1 - \eta^2); \quad z_{\xi\eta} = -4h\xi\eta; \quad z_{\eta\eta} = 2h(1 - \xi^2). \quad (4)$$

Eq. (1) has an infinity of solutions. One of them, for a uniformly distributed load  $p_0$  will be the stress function.

$$F = \frac{p_0 a^2 b^2}{8h} [(1 + \xi) \ln(1 + \xi) + (1 - \xi) \ln(1 - \xi) + (1 + \eta) \ln(1 + \eta) + (1 - \eta) \ln(1 - \eta)] \quad (5)$$

obtained by inverting those stated in [1]. In this case the projections of internal forces are, in accordance with (2):

$$n_y = -\frac{p_0 b^2}{4h} \cdot \frac{1}{1 - \xi^2}; \quad n_x = -\frac{p_0 a^2}{4h} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2}; \quad n_{xy} = 0. \quad (6)$$

Solution (5) though it exactly satisfies differential equation (1), but yields infinite edge internal forces at the boundaries, hence infinite strains, which are incongruent with the edge beam's strain.

A solution with  $n_{xy} \neq 0$  at the boundary, hence with no singularity at the corner, has to be found.

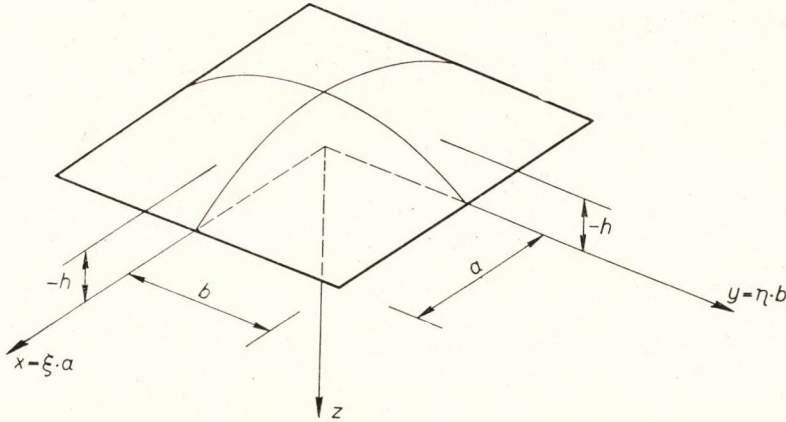


Fig. 1

### 3. Assumptions

As it was stated in the introduction, no structural boundary condition could be assumed for the problem. To find a particular solution for the problem, the following assumptions have to be made:

- 3,1. shell edge support should resist any force arising in the plane tangential to the shell;
- 3,2. edge support does not restrain shell edge deformations.

### 4. Stress function, internal forces and balanced load

From Eq. (1) written for edges  $\xi = 1$  or  $\eta = 1$  it appears that for a constant load or one that can be expressed by a polynome, the stress function is absolutely polynomial at the edge.

Exact stress function of the problem would be a polynome with an infinity of members. Practically, however, it is sufficient to produce a stress function with finite members, corresponding to our assumptions, balancing the assumed load exactly at  $\xi = \eta = 0$  and at  $\xi = \eta = 1$ , and at a fair approximation in other parts of the shell.

Let this stress function be:

$$\begin{aligned}
 F = & C_{22}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2) + C_{44}(1 - \xi^4)(1 - \eta^4) + C_{66}(1 - \xi^6)(1 - \eta^6) + \\
 & + C_{24}(1 - \xi^2)(1 - \eta^4) + C_{26}(1 - \xi^2)(1 - \eta^6) + C_{42}(1 - \xi^4)(1 - \eta^2) + \quad (7) \\
 & + C_{62}(1 - \xi^6)(1 - \eta^2) + C_{02}\eta^2 + C_{04}\eta^4 + C_{06}\eta^6 + C_{20}\xi^2 + C_{40}\xi^4 + C_{60}\xi^6.
 \end{aligned}$$

Internal forces can be computed from the stress function according to formulae (2), by means of the following derivatives of the second order:

$$F_{\xi\xi} = -2C_{22}(1 - \eta^2) - 12C_{44}\xi^2(1 - \eta^4) - 30C_{66}\xi^4(1 - \eta^6) - \\ - 2C_{24}(1 - \eta^4) - 2C_{26}(1 - \eta^6) - 12C_{42}\xi^2(1 - \eta^2) - 30C_{62}\xi^4(1 - \eta^2) + \\ + 2C_{20} + 12C_{40}\xi^2 + 30C_{60}\xi^4, \quad (8)$$

$$F_{\xi\eta} = 4C_{22}\xi\eta + 16C_{44}\xi^3\eta^3 + 36C_{66}\xi^5\eta^5 + 8C_{24}\xi\eta^3 + \\ + 12C_{26}\xi\eta^5 + 8C_{42}\xi^3\eta + 12C_{62}\xi^5\eta, \quad (9)$$

$$F_{\eta\eta} = -2C_{22}(1 - \xi^2) - 12C_{44}\eta^2(1 - \xi^4) - 30C_{66}\eta^4(1 - \xi^6) - \\ - 12C_{24}\eta^2(1 - \xi^2) - 30C_{26}\eta^4(1 - \xi^2) - 2C_{42}(1 - \xi^4) - 2C_{62}(1 - \xi^6) + \\ + 2C_{02} + 12C_{04}\eta^2 + 30C_{06}\eta^4. \quad (10)$$

Substituting values from (8, 9, 10) into Eq. (1) it gives the load balanced by stress function (7):

$$-p(\xi, \eta) \frac{a^2 b^2}{h} = 2(1 - \eta^2)[-2C_{22}(1 - \xi^2) - 12C_{44}\eta^2(1 - \xi^4) - \\ - 30C_{66}\eta^4(1 - \xi^6) - 12C_{24}\eta^2(1 - \xi^2) - 30C_{26}\eta^4(1 - \xi^2) - \\ - 2C_{42}(1 - \xi^4) - 2C_{62}(1 - \xi^6) + 2C_{02} + 12C_{04}\eta^2 + 30C_{06}\eta^4] + \\ + 8\xi\eta[4C_{22}\xi\eta + 16C_{44}\xi^3\eta^3 + 36C_{66}\xi^5\eta^5 + 8C_{24}\xi\eta^3 + \\ + 12C_{26}\xi\eta^5 + 8C_{42}\xi^3\eta + 12C_{62}\xi^5\eta] + \\ + 2(1 - \xi^2)[-2C_{22}(1 - \eta^2) - 12C_{44}\xi^2(1 - \eta^4) - \\ - 30C_{66}\xi^4(1 - \eta^6) - 2C_{24}(1 - \eta^4) - 2C_{26}(1 - \eta^6) - \\ - 12C_{42}\xi^2(1 - \eta^2) - 30C_{62}\xi^4(1 - \eta^2) + \\ + 2C_{20} + 12C_{40}\xi^2 + 30C_{60}\xi^4]. \quad (11)$$

## 5. Determination of load and constants

The most important loads of roof shells are dead load and snow load. This latter can be considered as a load  $p_0$  uniformly distributed over the ground plane, while dead load of a shell of uniform thickness can be expressed as:

$$g = g_0 \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \quad (12)$$

an expression extremely difficult to calculate with, therefore, in general, dead load is composed of a constant corresponding to the load  $p_0$ , and of a fairly well approaching variable.

Shell load according to this concept is shown in Fig. 2.

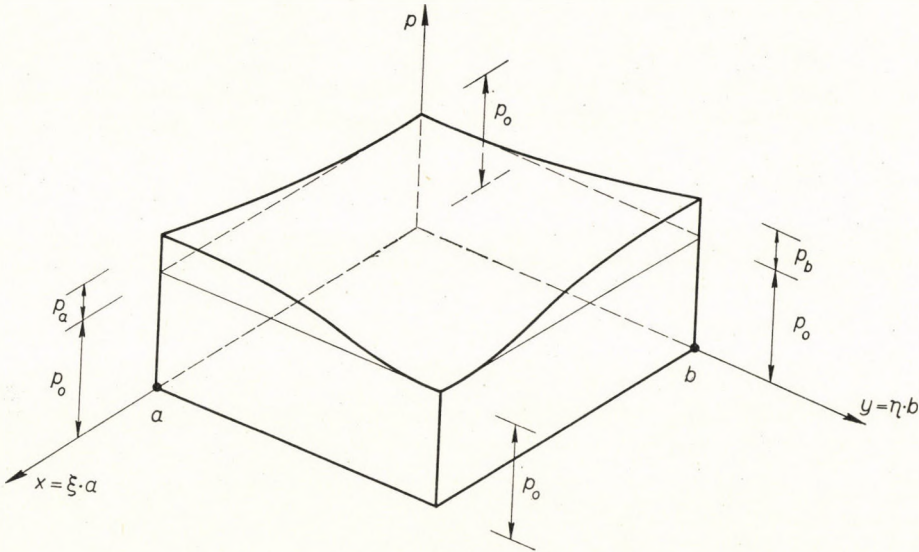


Fig. 2

Load values in Fig. 2 are as follows:

$$\begin{aligned}
 \text{at } \xi = 0 & & p &= p_0 + p_b \eta^2, \\
 \text{at } \eta = 0 & & p &= p_0 + p_a \xi^2, \\
 \text{at } \xi = 1 & & p &= p_0 + p_a (1 - 2\eta^2 + \eta^4), \\
 \text{at } \eta = 1 & & p &= p_0 + p_b (1 - 2\xi^2 + \xi^4), \\
 \text{at } \xi = \eta = 0,5 & & p &= p_0 + (9/64) (p_a + p_b).
 \end{aligned} \tag{13a-e}$$

Constants  $c_{m,n}$  are to be determined from the condition that the load balanced according to (11) equals those determined in (13). Substituting loads in (13) into (11), this latter can be divided according to different powers of the variables, to give the number of equations necessary to find the constants. These equations are, by substituting

$$\gamma = p_0 \frac{a^2 b^2}{h}; \quad \alpha = p_a \frac{a^2 b^2}{h}; \quad \beta = p_b \frac{a^2 b^2}{h} \tag{14}$$

the following:

$$\begin{aligned}
 2C_{22} + C_{24} + C_{26} + C_{42} + C_{62} - C_{02} - C_{20} &= 0,25\gamma, \\
 2C_{22} - 6C_{44} - 6C_{24} + C_{42} + C_{62} - C_{02} + 6C_{04} &= -0,25\alpha, \\
 6C_{44} - 15C_{66} + 7C_{24} - 15C_{26} + 15C_{06} - 6C_{04} &= 0, \\
 -15C_{66} - 16C_{26} + 15C_{06} &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2C_{22} - 6C_{44} - 6C_{42} + C_{24} + C_{26} - C_{20} + 6C_{40} &= -0,25\beta, \\
6C_{44} - 15C_{66} + 7C_{42} - 15C_{62} + 15C_{60} - 6C_{40} &= 0, \\
-15C_{66} - 16C_{62} + 15C_{60} &= 0, \\
8C_{22} + 16C_{42} + 24C_{62} - C_{02} + 6C_{04} &= 0,5\beta, \\
32C_{44} + 16C_{24} - 6C_{04} + 15C_{06} &= -0,25\beta, \\
24C_{66} + 8C_{26} - 5C_{06} &= 0, \\
8C_{22} + 16C_{24} + 24C_{26} - C_{20} + 6C_{40} &= 0,5\alpha, \\
32C_{44} + 16C_{42} - 6C_{40} + 15C_{60} &= -0,25\alpha, \\
24C_{66} + 8C_{62} - 5C_{60} &= 0, \\
-2,5C_{22} - 7,9375C_{44} - 5,466797 C_{66} - 5,1875(C_{24} + C_{42}) - 4,6875 \\
(C_{26} + C_{62}) + 3(C_{20} + C_{02}) + 4,5(C_{40} + C_{04}) + 2,8125(C_{60} + C_{06}) &= \\
= -\gamma + 0,15(\alpha + \beta).
\end{aligned} \tag{15}$$

It can be demonstrated that among Eqs (15), the fourth and seventh give identity, hence one of them may be left out. The remaining 13 equations are sufficient to determine the 13 unknowns. Results have been tabulated in Table I.

Table I

Multi-plier	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$
$C_{22}$	-0,185064	-0,217554	-0,217554
$C_{44}$	-0,017226	-0,031100	-0,031100
$C_{66}$	+0,003341	+0,005384	+0,005384
$C_{24}$	+0,083867	+0,144799	+0,117021
$C_{26}$	-0,023803	-0,038356	-0,038356
$C_{42}$	+0,083867	+0,117021	+0,144799
$C_{62}$	-0,023803	-0,038356	-0,038356
$C_{02}$	-0,250000	0	-0,250000
$C_{04}$	+0,076652	+0,131439	+0,099032
$C_{06}$	-0,022049	-0,035529	-0,035529
$C_{20}$	-0,250000	-0,250000	0
$C_{40}$	+0,076652	+0,099032	+0,131439
$C_{60}$	-0,022049	-0,035529	-0,035529

Substituting the constants figuring in Table I into expressions (8, 9, 10), internal forces can be determined by means of relationships (2).

## 6. Degree of accuracy

Examining exact and balanced load values, maximum differences will be found at  $\xi = \eta = 0,7 \sim 0,8$ .

At  $\xi = \eta = 1/\sqrt{2}$ , exact load value determined according to Eqs (13) is:

$$-P_{(\xi=\eta=1/\sqrt{2})}^{\text{exact}} = p_0 + 0,122(p_a + p_b),$$

and the balanced load:

$$-P_{(\xi=\eta=1/\sqrt{2})}^{\text{balanced}} = 0,969620 p_0 + 0,220442 (p_a + p_b).$$

Deviation of the balanced load at  $\xi = \eta = 1/\sqrt{2}$  from the actual load value, as well as numerical mean errors of the balanced load as a function of the shell size are compiled in Table II. Error of snow load  $p_0$  corresponds to the column  $2h/(a + b) = 0$  of the tabulated dead load.

Table II

$2h/(a + b)$	0	0,25	0,50
Deviation of the balanced load at $\xi = \eta = 1/\sqrt{2}$	-3,0 %	-1,0 %	+4,5 %
Standard deviation of the balanced load, about	1,00%	0,33%	1,5 %

From Table II the accuracy appears to meet rather well practical requirements.

## REFERENCES

1. CSONKA, P.: Results on Shells of Translation. *Acta Techn. Hung.* **10** (1955), 59—71.
2. BALLESTEROS, P.: Parabolic Velaroidal Shell. IASS Symposium. Budapest, 1965.

**Segelschale über Rechteckgrundriss.** Es wird ein Berechnungsverfahren für Schalen mit parabolischem Querschnitt, in Form ähnlich einem über einen ebenen Rand gespannten Segel, beschrieben. Die Spannungsfunktion der Schale wird durch ein Mehrgliedpolynom angenähert. Die Schnittkräfte werden bei einer gleichverteilten Schneelast und einem annähernden Eigengewicht ermittelt.

**Voile mince vélaroïde sur base rectangulaire.** Une méthode de calcul est donnée pour des voiles minces à section parabolique, en forme de voiles tendues sur un bord plan. La fonction des contraintes du voile est approchée par un polynôme à plusieurs membres. Les forces internes sont déterminées pour une charge de neige uniformément répartie et une charge propre approximative.

**Парусная оболочка четырехугольного плана.** Работа посвящена расчету оболочки параболического сечения, схожей по форме с парусом, натянутым на плоский периметр. Функция напряжения оболочки приближенно выражена многочленом. Усилия сечения определяются под воздействием равномерной снеговой нагрузки и приближенной собственной нагрузки.





## ASYMPTOTIC AND ITERATION METHODS FOR THE MATRIX-ANALYSIS OF STRUCTURES WITH LINEAR OR NONLINEAR CHARACTER

J. SZABÓ

DOCTOR OF TECHN. SC.

AND

B. ROLLER

CAND. OF TECHN. SC.

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received: May 27, 1966]

The paper deals with the analysis of some structural problems, which are rather involved from the point of view of direct computation. After outlining the fundamental ideas of the special methods applied, the following structures are treated: 1. a shaft provided with wheels having different moments of rotation inertia; 2. a tunnel ring embedded in an elastic solid; 3. a hanging roof containing cables stiffened by orthogonally arranged beams. The task of the analysis is the computation of the critical torsional frequencies in the first case, the investigation of the stress resultants in the second, and the evaluation of the stresses and displacements in the third. The first problem is homogeneous, the others are inhomogeneous. The first two structures are linear, while the third one possesses a geometrically nonlinear character. The linear problems are solved asymptotically, while the nonlinear one by a purely iterative method.

### 1. Fundamental principles

It is generally known [1] that the solution of the differential equation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

departs from the solution  $x = a \cos \psi$  belonging to the particular case  $\varepsilon = 0$  and fulfilling the relations

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (\psi = \omega t + \vartheta).$$

The difference depends on the small positive parameter  $\varepsilon$ , and the correct solution may be sought for in the form

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \psi) + \dots$$

where

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a) + \dots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a) + \dots$$

On the basis of this principle and making use of numerical algorithms suitable for machine analysis, some linear or nonlinear, homogeneous or inhomogeneous structural problems are investigated.

In addition to the application of the asymptotic method, the possibilities of the application of the iteration calculus are dealt with, too.

It is assumed in every problem treated in detail that the question differs from one other problem already solved merely in a slight way. The latter problems are called basic-problems, their solutions being the basic-solutions. The usefulness of the method mainly depends on the suitable choice and solution of the basic system.

Using the principle of the asymptotic method, the difference is altered depending on the small parameter  $\varepsilon$  and the value of  $\varepsilon$  which is always looked for corresponding to a computation running on the machine which can still be thrifty.

The solution sought for is developed from the basic solution in a way which is determined by the character of the differential- or matrix-equation of the problem. If this equation is inhomogeneous, the left side of it is reduced to a form corresponding to the basic solution. The difference related to  $\varepsilon$  is written to the left side and taken into account as a perturbation surplus. Starting from  $\varepsilon = 0$ , the value is increased successively, and the solution is always sought for by iteration.

The principle of the solution may be outlined as follows:

The linear system to be solved is

$$L[y] = L_0[y] + \varepsilon L_1[y] = f(x),$$

coupled with the following boundary conditions regarding  $y$ :

$$U_\mu[y] = f_\mu.$$

The solution is approximated by making use of the iteration formula

$$L[y_v] = f(x) - \varepsilon L_1[y_{v-1}]$$

where the members of the sequence of the approximate solutions satisfy the boundary conditions by itself.\*\*

The solution relating to a prescribed value of  $\varepsilon$  is found, if the accuracy requirements

$$|y_v - y_{v-1}| \leq \delta_1$$

and

$$|L[y_v] - f(x)| \leq \delta_2$$

are fulfilled.

\*\* In the following the operators  $L$  and  $L_0$  are assumed to be symmetrical ones.

The procedure is accepted to be useful in the case of  $\nu \leq N$ , i.e. if the number of the iteration rounds does not exceed a margin, admissible from the point of view of the computer which is at disposal.

The principle outlined above is suitable for homogeneous problems, too, but sometimes it is better to use another idea [2].

According to this, the eigenvalue problem

$$L[y] - \lambda y = 0$$

is to be solved by the transformation of the known eigenfunctions (eigenvectors) and eigenvalues of the operator  $L_0$  as follows:

$$Y_0 L_0 Y_0^{-1} = \sigma(L_0),$$

$$L = L_0 + \varepsilon L_1,$$

$$Y_0 L Y_0^{-1} = \sigma(L_0) + \varepsilon K; \text{ where } K = Y_0 L_1 Y_0^{-1}$$

$$T \{ \sigma(L_0) + \varepsilon K \} T^{-1} = \sigma(L)$$

$$T Y_0 = Y,$$

$$Y L Y^{-1} = \sigma(L).$$

$Y$  and  $Y^{-1}$  denote the system of biorthogonal eigenfunctions of the operator  $L$ . The spectrum of  $L$  is notated by  $\sigma(L)$ , finally  $T$  is an operator of suitable choice.

The principles explained above are to be found in the referred literature in detail.

In the following three questions the appropriate choice of a linear system with a relatively simple solution due to the given problem will be treated. Starting from a suitable chosen fundamental system the transformation of its easily obtained spectrum into the spectrum of a system in regard to the actual problem, will be shown, too.

Within the scope of this question a procedure will be given which may be considered as the generalization of Jacobi's method.

Among the structural problems, detailed in the following section, the linear problems are treated asymptotically, but the nonlinear by a purely iterative process. Nevertheless, it is to be mentioned that this also possesses a hidden asymptotic character.

## 2. Structural applications

### 2.1. Asymptotic solution of linear problems

#### 2.1.1 Homogeneous problem: Computation of torsional frequencies

In accordance with the general ideas stated above, it is suitable to start the computation with the complete spectral analysis of the linear operator of the equation concerning the basic system.

If the difference between the operator of the alternated system and that of the basic system converges to zero, the eigenvalues and eigenfunctions of the first one are reduced asymptotically to the corresponding quantities of the second one.

The spectral analysis of the alternated system's operator may be performed by a sequence of orthogonal transformations starting from the basic system.

As an example of the procedure, the investigation of the torsional vibrations of a shaft provided with wheels is presented. Let us assume that the

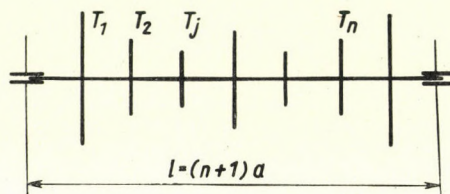


Fig. 1

torsional stiffness  $GI_t$  of the shaft shown on Fig. 1 is constant, and the rotating wheels fixed to it equidistantly have the moments of inertia  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . The rotation inertia of the shaft itself may be neglected.

Denoting by  $x_j$  the rotation angles of the wheels, related to a common reference-plane and searching for the state in which they suffer torsional vibrations of identic  $\omega$  frequencies, we have to solve the eigenvalue problem:

$$-\omega^2 \mathbf{T} \mathbf{x} + \frac{GI_t}{a} \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

In order to evaluate the least critical frequencies in the most accurate manner, we transform the problem to the form

$$\mathbf{A} + \varepsilon \Delta \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{I} + \varepsilon \frac{1}{T} \Delta \mathbf{T} \right) \mathbf{x} = \mu \mathbf{x},$$

whence the critical  $\omega$  values are to be computed by the formula

$$\omega = \sqrt{\frac{GI_t}{\mu a T}}$$

in possession of the eigenvalues  $\mu$ .

$\mathbf{T}$  denotes the diagonal matrix of the moments of inertia

$$\mathbf{T} = \langle T_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

and  $T$  is the average value of  $T_1, \dots, T_n$

$$T = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_j.$$

$\mathbf{I}$  refers to the unit matrix.

In the particular case of  $\varepsilon = 0$ , the solution of the problem consists of the eigenvalues and eigenvectors of the common continuant matrix  $\mathbf{C}$  [3]:

$$\mathbf{C} = [c_{jk}]; \quad c_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } |j-k| > 1 \\ 1 & \text{if } |j-k| = 1 \\ -2 & \text{if } j = k \end{cases}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \langle \lambda_k \rangle; \quad \lambda_k = \frac{1}{\mu_k} = \frac{GI_t}{aT} \frac{1}{\omega_k^2} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)};$$

$$\mathbf{U} = [u_{jk}]; \quad u_{jk} = u_{kj} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1},$$

$$j, k = 1, 2, \dots, n.$$

The canonic form of  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$  is

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{-1}$$

and on this base we perform the solution of the original problem by successive transformations of the right side of the formula

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A})\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}^{-1} + \varepsilon\mathbf{K}.$$

$\mathbf{A}$  pre- and a postmultiplication by  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{Q}^{-1}$ , respectively, yields

$$\mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}^{-1} + \varepsilon\mathbf{K})\mathbf{Q}^{-1}.$$

Writing  $\mathbf{Q}$  in the form

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{q}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

every element of the first row of  $\mathbf{K}$ , but the only one placed in the main diagonal of the matrix, disappears by a suitable choice of  $\mathbf{q}^*$ .

$\mathbf{q}^*$  is to be computed by way of the solution of a second order equation system containing  $(n-1)$  unknown quantities. (The system may be for instance solved iteratively.)

In order to clear away every element of  $\mathbf{K}$ , except those placed in the main diagonal, we have to carry out  $n$ -times the transformation mentioned

above. Finally the spectrum of  $\mathbf{A} + \varepsilon \Delta \mathbf{A}$  is obtained, meanwhile the modal matrix  $\mathbf{U}$  is transformed, too [6].

The procedure is programmed to a National Elliot 803/B computer.

In the following example the input data of

$$\frac{1}{T} \Delta \mathbf{T}$$

were chosen as

$$\frac{1}{T} \Delta \mathbf{T} = \langle 0,28 \quad 0,07 \quad -0,08 \quad -0,17 \quad -0,20 \quad -0,17 \quad -0,08 \quad 0,07 \quad 0,28 \rangle.$$

The transformed values started out from  $\mathbf{C}$  and the total number of iteration steps were obtained (with a prescribed accuracy of  $10^{-5}$ ) as per Table I.

Table I

$\varepsilon$	0	0,5	1,0
Number of the iteration steps	9	49	105
Eigenvalues ( $\mu$ )	10,21586 2,61803 1,21296 0,72361 0,50000 0,38197 0,31490 0,27639 0,25627	9,69923 2,63779 1,23188 0,73703 0,50987 0,38931 0,31909 0,27388 0,23992	9,19350 2,66670 1,24813 0,74906 0,51902 0,39542 0,31951 0,26481 0,21984
First left side eigenvector $\mathbf{x}_1$	0,13820 0,26286 0,36180 0,42532 0,44721	0,16984 0,29028 0,36673 0,40786 0,42069	0,20649 0,32120 0,37178 0,38810 0,39109

### 2.1.2 Inhomogeneous problem: The stress resultants of a tunnel ring embedded in elastic solid.

The structural model of the elastic ring embedded in the solid is a beam of closed polygonal middle line, supported by linearly elastic compressed bars, directed radially [8]. The load is represented by a symmetrical system of forces acting on the corners of the polygon in Fig. 2.

According to Fig. 3 the ring itself has two indeterminacies, while the indeterminacy-number of the released system is  $(\sigma - \varrho)$ . Applying the flexibility method, two successive equations are to be solved.

The first one concerning the released system:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_j]; & j &= (\varrho + 1), (\varrho + 2); \dots \sigma; \\ \mathbf{L}_x \mathbf{x} + \mathbf{l}_x &= \mathbf{0}; & \mathbf{x} &= -\mathbf{L}_x^{-1} \mathbf{l}_x. \end{aligned}$$

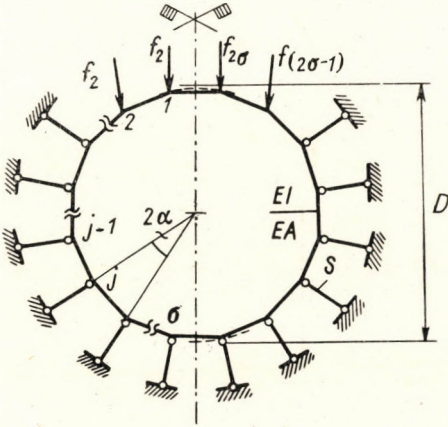


Fig. 2

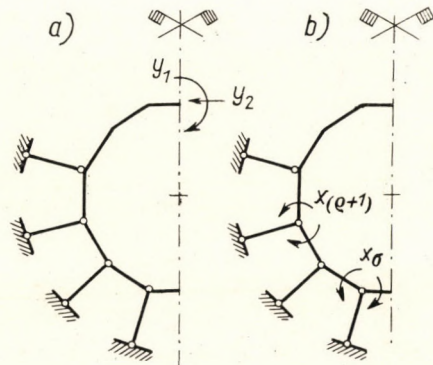


Fig. 3

The second one concerning the ring itself:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y_j]; & j &= 1, 2; \\ \mathbf{L}_y \mathbf{y} + \mathbf{l}_y &= \mathbf{0}; & \mathbf{y} &= -\mathbf{L}_y^{-1} \mathbf{l}_y; \end{aligned}$$

The general formulae of the influence matrices are [4]:

$$\mathbf{L} = \sum_{\mu=1}^{\tau} \mathbf{S}_\mu^* \mathbf{F}_\mu \mathbf{S}_\mu; \quad \mathbf{l} = \sum_{\mu=1}^{\tau} \mathbf{S}_\mu^* \mathbf{F}_\mu \mathbf{s}_\mu.$$

Neglecting the strain energy due to shear,  $\mu = 1$ ;  $\mu = 2$  and  $\mu = 3 = \tau$  refers to the bending moments, the direct forces acting in the polygon and the compressions acting in the bars, respectively.

$\mathbf{S}_\mu$  denotes the matrix of the  $\mu$ -th stress resultant, containing the stress ordinates of the releases due to different unit stress resultants. Symbol  $\mathbf{s}_\mu$  denotes the column vector of the  $\mu$ -th stress resultant, containing the stress ordinates due to the load, and  $\mathbf{F}_\mu$  denotes the flexibility matrix corresponding to the  $\mu$ -th stress resultant.

The vector  $s_\mu$  relating to the actual load of the released system is to be computed by using the stress influence matrices:

$$s_\mu = \sum_{\omega=1}^2 J_{\mu\omega} f_\omega.$$

$\omega = 1, 2$  refers to the radial and the tangential direction, respectively.  $f$  denotes the column vector of the load,  $J_{\mu\omega}$  denotes the  $\mu$ -th stress influence matrix of the statically determinate released system, concerning a symmetrical couple of unit loads acting in  $\omega$  direction.

In order to compute the stresses of the ring, the stress resultants of the released system corresponding to the unit values of stress resultants shown on Fig. 3a, are to be evaluated, too.

Finally the stresses of the indeterminate released system, resp. the ring are

$$\hat{s}_\mu = s_\mu + \begin{bmatrix} 0 \\ S_\mu x \end{bmatrix}; \quad \hat{\hat{s}}_\mu = \hat{s}_\mu + \hat{S}_\mu y,$$

the sign  $\hat{\hat{\phantom{x}}}$  referring to the stresses of the first one, while the sign  $\hat{\phantom{x}}$  referring to those of the second one.

The key of the problem is the computation of  $L_x^{-1}$ . When applying the asymptotic method, the influence matrix is to be composed in the form

$$L_x = L_{0x} + \varepsilon L_{1x} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1,$$

and the solution must be found to be set out of the inverse matrix of  $L_{0x}$ .

The further parts of the procedure correspond to the general ideas explained above, therefore it is unnecessary to detail them. On the other hand, it deserves to be outlined in the basic system.

$L_{0x}$  means the influence matrix of the ring with constant stiffness and supported by bars having uniform spring constants. Independently of its order,  $L_{0x}^{-1}$  may be computed in a comparatively simple way, because

$$L_{0x} = \gamma C_s^2 + (1 + \beta) C_s + (6 + 4\beta) I + \gamma(i_1 i_1^* + D)$$

where

$$\gamma = \frac{6 EI_s}{D^3 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha}, \quad \beta = \frac{6 I}{D^2 A \cos^2 \alpha}.$$

The meaning of the symbols  $E$ ,  $I$ ,  $A$ ,  $D$ ,  $\alpha$  and the spring constants are shown in Fig. 2, furthermore

$$i_1 = [i_j]; \quad i_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{if } \begin{cases} j = 1 \\ j \neq 1 \end{cases}$$



$$\mathbf{C}_s = [c_{jk}^{(s)}]; \quad c_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 0 & \text{if } |j-k| > 1 \\ 1 & \text{if } |j-k| = 1 \\ -2 & \text{if } j=k \neq \sigma - \varrho \\ -1 & \text{if } j=k = \sigma - \varrho \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = [d_{jk}]; \quad d_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } |j-k| > 1 \\ 1 - \cos 2\alpha & \text{if } |j-k| = 1 \\ \cos^2 2\alpha - 1 & \text{if } j=k \neq \sigma - \varrho \\ \cos 2\alpha (\cos 2\alpha - 1) & \text{if } j=k = \sigma - \varrho \end{cases}$$

$$j, k = 1, 2, \dots, (\sigma - \varrho).$$

The eigenvalues and eigenvectors of  $\mathbf{C}_s$  being known, the inverse matrix of the second degree polynomial part of  $\mathbf{L}_{0x}$  may be directly computed, making use of its canonic form. The results must be corrected by the method of Shermann & Morrison and afterwards by applying a geometrical series.

## 2.2. Iterative solution of a nonlinear problem

*Geometrically nonlinear problem: Cables stiffened by orthogonally arranged beams.* — When analysing this special kind of hanging roofs, we assume that the uniform dead load is merely carried by the cables. The beams are simply

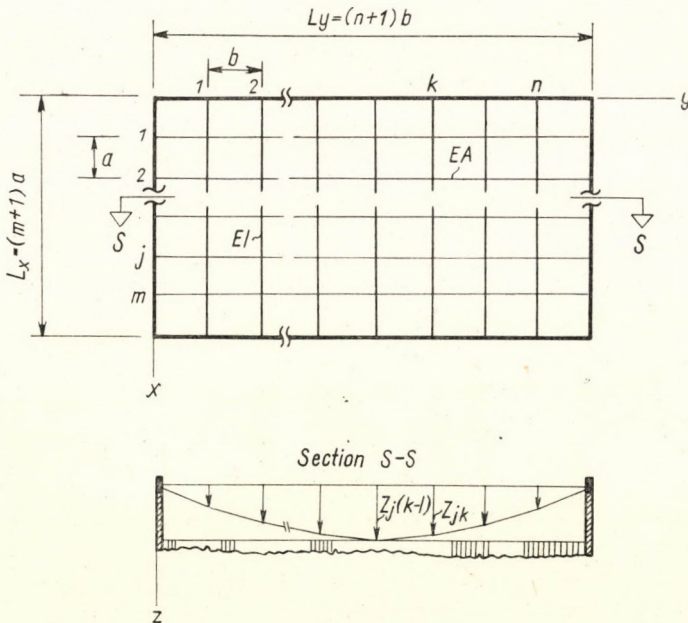


Fig. 4

supported on both ends, undertaking only vertical displacements, while the cables may freely slip under the beams, remaining in the vertical plane. The load consists of concentrated forces, and the boundary girders are absolutely rigid.

In addition to the notations of Fig. 4 we introduce some symbols.

$$\mathbf{G} = [g_{jk}]; \quad g_{jk} = g; \quad \mathbf{P} = [p_{jk}]; \\ j = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, n$$

are the matrices of the dead load and the live load, respectively.

$$\mathbf{H}_g = H^{(g)} \mathbf{I} \quad \mathbf{H}_p = \langle H_j^{(p)} \rangle \\ j = 1, 2, \dots, m$$

are the matrices of the cable stresses due to the dead load and the matrices of their alternations due to the live load, respectively.

$$\mathbf{Z} = [z_{jk}]; \quad \mathbf{W} = [w_{jk}] \\ j = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, n$$

are the matrices of the ordinates characterizing the shape of the structure due to the dead load and the matrices of the deflections, respectively.

$$\mathbf{C}_x = [c_{\mu\nu}^{(x)}]; \quad c_{\mu\nu}^{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{if } \begin{cases} |\mu - \nu| > 1 \\ |\mu - \nu| = 1 \\ \mu = \nu \end{cases} \\ 1 & \\ -2 & \end{cases} \\ \mu, \nu = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathbf{C}_y = [c_{\sigma\tau}^{(y)}]; \quad c_{\sigma\tau}^{(y)} = \begin{cases} 0 & \text{if } \begin{cases} |\sigma - \tau| > 1 \\ |\sigma - \tau| = 1 \\ \sigma = \tau \end{cases} \\ 1 & \\ -2 & \end{cases} \\ \sigma, \tau = 1, 2, \dots, n$$

are continuant matrices corresponding to the difference operators of the second order, finally

$$\mathbf{K}_x = 6\mathbf{I} - \mathbf{C}_x.$$

The matrix equation of the structure expresses the equilibrium condition of both the cables and the beams, and the compatibility condition of the beams as well [5, 6], having the following form:

$$\frac{6EI}{a^3} \mathbf{C}_x \mathbf{K}_x^{-1} \mathbf{C}_x \mathbf{W} + \frac{H^{(g)}}{b} \mathbf{W} \mathbf{C}_y = \mathbf{P} - \frac{1}{b} \mathbf{H}_p (\mathbf{Z} + \mathbf{W}) \mathbf{C}_y.$$

Both  $\mathbf{W}$  and  $\mathbf{H}_p$  are unknown, thus we have to apply the compatibility conditions regarding the strains of the cables, too.

$$t_j = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \{w_{jk} - w_{j,(k-1)}\} \tan \varphi_k - H_j^{(p)} \frac{b}{EA} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\cos^3 \varphi_k}}{b \alpha_t \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\cos^2 \varphi_k}},$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

here

$$\tan \varphi_k = \frac{z_{jk} - z_{j,(k-1)}}{b};$$

$\alpha_t$  is the temperature coefficient of expansion and  $t_j$  denotes the temperature gradient.

$\mathbf{W}$  and  $\mathbf{H}_p$  are computed in cyclic rounds, each one containing three steps.

In the first step of the  $\nu$ -th round the right side of the main equation will be treated as a known matrix, evaluated on the basis of the results of the previous round:

$$\begin{aligned} \frac{6EI}{a^3} \mathbf{C}_x \mathbf{K}_x^{-1} \mathbf{C}_x \mathbf{W}_{p,\nu} + \frac{H^{(g)}}{b} \mathbf{W}_{p,\nu} \mathbf{C}_y = \\ = \mathbf{P} - \frac{1}{b} \mathbf{H}_{p,(v-1)} (\mathbf{Z} + \mathbf{W}_{v-1}) \mathbf{C}_y = \mathbf{Q}_{v-1}. \end{aligned}$$

This equation may be solved directly by making use of a special algorithm, based on the canonic form of the coefficients of  $\mathbf{W}_{p,\nu}$  and some further transformations [6].

The second step is common in every round and forms an inner round of the procedure. Now we assume  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$  and resolve  $m$ -times the equation:

$$\frac{6EI}{a^3} \mathbf{C}_x \mathbf{K}_x^{-1} \mathbf{C}_x \mathbf{W}_{H,\varrho} + \frac{H^{(g)}}{b} \mathbf{W}_{H,\varrho} \mathbf{C}_y = - \frac{1}{b} \mathbf{H}_\varrho (\mathbf{Z} + \mathbf{W}_{H,\varrho}) \mathbf{C}_y$$

by the replacing of

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\varrho = \langle H_j^{(\varrho)} \rangle \quad \varrho = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} \quad H_j^{(\varrho)} = \delta_{j\varrho}$$

If the right side is a known matrix, the algorithm mentioned above is suitable for the solution of this equation, too, therefore in every case we

apply an iterative method, in the first section of which holds

$$\mathbf{W}_{H,2,1} = \mathbf{0},$$

while in the  $\omega$ -th section  $\mathbf{W}_{H,\varrho} \equiv \mathbf{W}_{H,\varrho(\omega-1)}$  is a known matrix on the right side and  $\mathbf{W}_{H,\varrho} = \mathbf{W}_{H,\varrho,\omega}$  an unknown matrix on the left one.

In the third step a column vector of temperature gradients and a matrix of temperature gradients are to be composed, respectively, by substituting the elements of  $\mathbf{W}_{p,v}$  and  $\mathbf{W}_{H,\varrho}$  respectively, into the compatibility conditions of the cables:

$$\mathbf{t}_{p,v} = [t_j^{(p,v)}]; \quad \mathbf{T}_H = [t_{j\varrho}^{(H)}]$$

$$j, \varrho = 1, 2, \dots, m.$$

Denoting the vector of the prescribed temperature gradients by  $\mathbf{t} = [t_j]$  and approximating its relation to the vector

$$\mathbf{h}_p = [H_\varrho^{(p)} - H_\varrho^{\{p,(v-1)\}}] = [h_\varrho^{(p)}]$$

which contains the elements of  $\mathbf{H}_p - \mathbf{H}_{p,(v-1)}$  by a linear form, we obtain

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{p,v} + \mathbf{T}_H \mathbf{h}_{p,v}.$$

Hence

$$\mathbf{h}_{p,v} = \mathbf{T}_H^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_{p,v}); \quad H_\varrho^{(p,v)} = H_\varrho^{\{p,(v-1)\}} + h_\varrho^{(p,v)}$$

and by a linear combination of the deflections we obtain

$$\mathbf{W}_v = \mathbf{W}_{p,v} + \sum_{\varrho=1}^m H_\varrho^{(p,v)} \mathbf{W}_{H,\varrho}.$$

Assuming  $\mathbf{H}_{p,0} = \mathbf{0}$  in the first round, the matrix  $\mathbf{W}_0$  is irrelevant.

The end of the procedure is indicated by the fact that the differences between the corresponding elements of the matrix sums appearing on the left and the right side of the equilibrium equation are prescribed small.

Then

$$\mathbf{h}_{p,v} \cong \mathbf{h}_p \quad \text{and} \quad \mathbf{W}_v \cong \mathbf{W}.$$

The computation program of the above problem and a numerical example are treated in [7].

#### REFERENCES

1. BOGOLYUBOV, N.—MITROPOLSKY, J. (1955) *Asymptotic Methods in the theory of nonlinear Vibrations*, in Russian. Publ. Comp. of Techn. Theor. Lit. Moscow, pp. 47—49.
2. COLLATZ, L. (1964) *Funktionalanalyse und numerische Mathematik* (pp. 149—154), Springer, Berlin.

3. EGERVÁRY, E. (1956) *Bases of a general theory of suspension bridges using a matricial method of calculation* (p. 176). Publ. IABSE, 16, (149—184).
4. MORICE, P. B. (1962) *Linear Structural Analysis* (pp. 103—107). Thames and Hudson, London.
5. SZABÓ, J. (1958) Die Berechnung von Brückenträgerrosten. *Der Stahlba* 27 (141—147).
6. SZABÓ, J. (1964) *The Spatial Gird Equation A térbeli tartórács egyenlete* (pp. 18—22, 92—104, 143—151) in Hungarian. Publ. of the Institute for Building Research, Budapest.
7. SZABÓ, J. — BÉRES, E. (1966) Beitrag zur Abhandlung über die „Berechnung von Seilträgernetzen“ von B. ROLLER *Acta Techn. Hung.* 55 (1—2), 109—116
8. SZÉCHY, K. (1961) Alagútépítéstan (Tunneling) (pp. 269—283). Textbook Publ. Comp., Budapest.
9. TIMOSHENKO, S. (1928) *Vibration Problems in Engineering* (pp. 253—257). Constable and Co., London.

**Die mit der Matrizen-Analyse der linearen und nichtlinearen Tragkonstruktionen verbundenen asymptotischen und iterativen Methoden.** Die Verfasser befassen sich mit einigen Problemen der Tragkonstruktionen, deren direkte Berechnung zu verwickelt ist. Nach der Auseinandersetzung der Grundprinzipien der zur Anwendung kommenden speziellen Methoden, werden diese durch die Analyse der folgenden drei Konstruktionen dargestellt: 1. eine mit Scheiben von verschiedenen Momenten montierte Achse; 2. ein elastisch gelagerter Tunnelring; 3. ein mit Balken gestiftetes Hängedach. Das Ziel der Analyse ist im ersten Falle die Ermittlung der kritischen Torsionsschwingungszahlen; im zweiten die der Beanspruchungen; und im dritten Falle die Bestimmung der Beanspruchungen und der Formänderungen. Das erste Problem ist homogen, die anderen sind inhomogen; die beiden ersten Konstruktionen sind linear, die dritte ist aber geometrisch nichtlinear. Die Aufgaben vom linearen Charakter wurden nach der asymptotischen, die vom nichtlinearen Charakter nach der einfachen iterativen Methode gelöst.

**Méthodes asymptotiques et itératives relatives à l'analyse matricielle des structures linéaires et non-linéaires.** Les auteurs présentent quelques problèmes relatifs à des structures dont le calcul direct est extrêmement complexe. Après l'exposé des principes fondamentaux des méthodes particulières adoptées, celles-ci sont appliquées aux trois structures ci-après: 1° arbre muni de disques ayant des moments différents; 2° tube de tunnel à appui élastique; 3° toiture suspendue raidie par des poutrelles. Dans le premier cas, l'analyse se propose la détermination des nombres d'oscillations de torsion critiques; dans le deuxième cas celle des sollicitations et dans le troisième celle des sollicitations et déformations. Le premier problème est homogène, les autres sont inhomogènes; les deux premières structures sont linéaires, la troisième est géométriquement non-linéaire. Les problèmes de caractère linéaire sont résolus par une méthode asymptotique et ceux d'un caractère non-linéaire par une méthode itérative imple.

**Асимптотические и итеративные методы по матричному анализу линейных и нелинейных несущих конструкций.** Работа занимается несколькими такими вопросами несущих конструкций, прямой метод расчета которых является слишком сложным. После изложения принципов специальных методов, предлагаемых для применения, эти методы иллюстрируются на примере анализа нижеследующих трех конструкций: 1. Ось, оснащенная дисками с неравным инерционным моментом. 2. Тоннельное кольцо с упругой постелью. 3. Висячая крыша, укрепленная балками. Целью анализа в первом случае является определение критического числа крутящих колебаний, во втором — нагрузок, а в третьем — нагрузок и деформаций. Первая задача является однородной, остальные же неоднородны; первые две конструкции являются линейными, а третья геометрически нелинейной. Задачи линейного характера решены асимптотическим, а нелинейные — простым итеративным методом.



# ADOPTION OF THE THEORY OF PLASTICITY TO STEEL STRUCTURES

O. HALÁSZ

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES  
TECHN. UNIV. FOR BUILDING AND TRANSPORT ENGINEERING, BUDAPEST

[Manuscript received July 13, 1966]

It is examined, how design methods ("limit design") developed on the basis of the theory of plasticity could be applied to steel structures. The basic assumptions of the limit design methods as well as their agreement with the test results are analysed. It is pointed out that, while a certain part of the assumptions is well satisfied in the case of steel structures, other can in general be considered as rough approximations. Among these latter is counted the fact that the influence of deformation upon the condition of equilibrium is neglected by the limit design methods. This approach cannot be adopted but for the cases of special problems. Author calls the attention to the effect of strain-hardening which, in general, is not considered by the simplified procedures, and points out the importance of this phenomenon in connection with the solution of stability problems and of those of the second order.

## 1. General remarks

This paper has the purpose to expose the part of the methods of the theory of plasticity in the design of steel structures.

It is commonly known that steel, up to a certain value of stress — which is called "Elastic Limit" — behaves as an elastic material and obeys Hooke's law; at higher values of stress nonlinear relation exists between stress and strain; permanent strains develop, and the development of strain might also be affected by the time factor. These phenomena — which might be designated as inelastic phenomena — can be investigated by appropriate theories, among others by the theory of plasticity.

In case of steel structures, in general, it is desirable to attain that under service loads occurring regularly, so only elastic deformations should arise. Consequently, the values of the stresses due to these loadings should be maintained in the important cross-sections and members below the elastic limit. The local stress peaks above the elastic limit which, however, have little effect on the deflection of the whole structure, cannot be eliminated, but, in general, the required plastic properties of structural steel impose restrictions on these peak stresses, thus, their detailed analysis is not necessary.

Contrary these, first of all with the view to the analysis of the marginal safety against different critical stages, the investigation of the non-elastic behaviour of structures cannot be avoided either because certain critical

stages already occur outside the region of elasticity. A classical example for this is the buckling of a centrally compressed relatively short steel member. The average stress at the buckling may surpass the elastic limit, consequently, the critical force and the safety against buckling might be determined with the aid of procedures of the theory of plasticity. In accordance with this, the problem of buckling has been studied in connection with the theory of plasticity for several decades, and these studies play an important part in the design of steel structures.

In general, it might be ascertained that the investigation of the inelastic behaviour of steel structures is much more complicated than that of the elastic phenomena, so much the more as in certain parts of the structure zones of elastic and in other zones inelastic behaviour develop simultaneously. In practical design work analyses of such a nature can take place only in a limited way. Owing to this — apart from some exceptional problems — only a special chapter of the theory of plasticity had become general which is called *limit design method* (limit analysis, simple plastic theory). The aim of this is limited: it wants to analyse the structure only in the stage of failure, and wishes only to determine the numerical value of the ultimate load. In the following the questions of the limit analysis will be dealt with.

To form a judgement on the importance of limit analysis in case of steel structures, it is advisable to consider the following viewpoints.

In general, in designing a structure, several critical stages should be defined (for inst. critical stage of the appearance of the first yield; that of the excessive deformations; of failure, etc.). In accomplishing a full valued design all critical stages which might occur during the loading process of the structure, should be analysed with the aid of an appropriate theory and the loads giving rise to these critical stages should be computed. However, in this line the critical stage of failure and together with this the limit design might obtain a prerogative part.

It sometimes occurs, namely, that the computation of certain critical stages mainly demanding analyses based on the theory of elasticity, is extraordinarily complicated and in addition the manifold uncertainties might make the value of the computation carried out with full force doubtful; particularly in cases where the comparison of the results of computation and those of the tests could be realized only in an indirect way. As examples in this respect the connections of the steel structures — riveted or welded — might be mentioned. In case of riveted connections the analysis based on the theory of elasticity is cumbersome; friction, incidental faulty position of the rivets, forces applied during mounting involve a number of uncertainties. Similar complications are caused by the internal stresses in welds, the values of which can in many instances be scarcely estimated. In such case, on the one hand, the conclusion of the theory of limit analysis that the load carrying capacity is



largely independent of certain initial disturbances, the numerical values of which might scarcely be foreseen; on the other, the fact that failure-tests constitute a base of direct comparison for the computations, might render us a good service. It is to be ascribed to this that in the case of connections of steel structures — in contrast to the cases of other kinds of structural members — design methods — assumption of uniform distribution, etc. — based on the principles of the limit analysis had been traditionally developed and generally adopted, and investigations of other nature appear rather in the form of limiting or correcting rules.

As a second point of view it has to be mentioned that in the process of design usually prominence is given to one of the critical stages, and to the corresponding computational method as being the most important, and in the general layout of the structure the viewpoints resulting from these should be regarded first. The safety against other critical stages is usually checked in the second step, without taking much care of their possibly excessive value. Thus, the analysis chosen to be prior exerts an influence on the viewpoints of the layout of the structure and at the same time on those of economy. At certain structural solutions, first of all in case of continuous beams built up of rolled sections — where a change in the cross-sectional area can be carried out only in a rather cumbersome way — the design based on the limit analysis, as a primary analysis, results in favourable solutions.

## 2. Restrictions on the use of the limit design. Role of strain-hardening

The limit analysis — owing to its basic assumptions — is suitable to describe the type of failure phenomena during which the deflections of the structure are increasing continuously under constant load in consequence of previously developed large plastic regions (plastic hinges) (Fig. 1). Failure of such a nature and at the same time the application of the limit analysis is bound to several conditions.

First of all it is required that the internal force distribution should not be affected by the deformations of the structure, i.e. practically up to the failure, the validity of the so-called *theory of first order* neglecting the influence of the deformations on statical relations should be maintained. Namely, otherwise the failure — for inst. that of simultaneously compressed and bent structures — might take place in a different way, accompanied by instability (Fig. 2), and its description would need the application of the *theory of second order*. Therefore, in case of steel structures the field of application of the limit analysis is restricted practically in the case of continuous beams, and to special cases of frameworks with no sway having stocky stanchions. Otherwise, instead of the limit analysis, a more complicated elastic-plastic analysis is needed based on the *theory of second order*.

The possibilities of application will be further narrowed down by restrictions concerning the loads and the function of the structure. To structures loaded with frequently repeated live load, very sensitive to major deformations, this is not applicable at all, or only after considerable completions and restrictions which, in addition, are not cleared up sufficiently yet. Consequently, the limit analysis may obtain an application in the first rate practically in design of buildings loaded with static loads which are not frequently repeated.

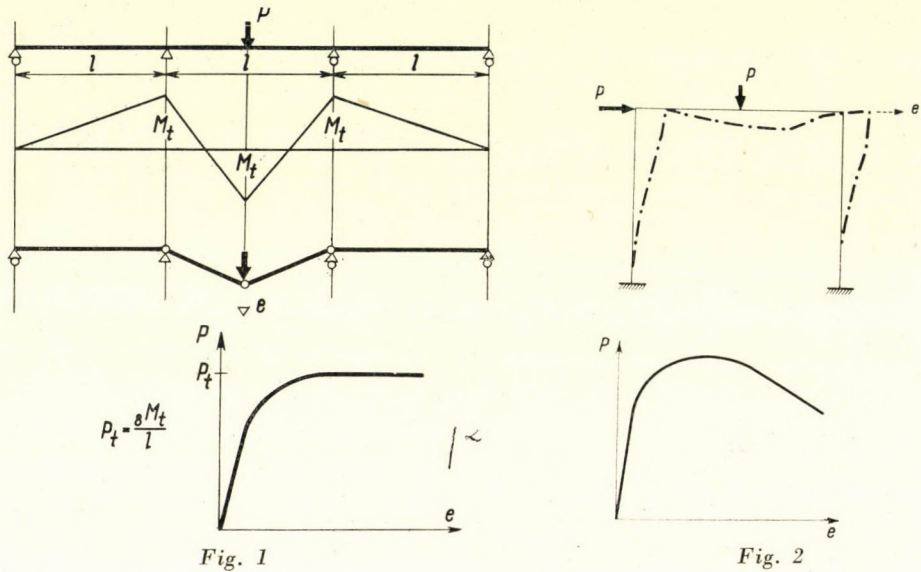


Fig. 1

Fig. 2

As the most important condition of the applicability of the limit analysis it should be mentioned, as a matter of course, the agreement of the properties of steel with those assumed; in particular the question, to what extent the most profitable fiction of the limit analysis, i.e. the plastic hinge, may be applied, the adoption of which is the very criterion of the simplicity of the theory. The decision in this respect is only possible, in all probability, by way of experiments. A sufficient number of results are at our disposal, but only for rolled sections, therefore, for the present, the results of the limit analysis cannot be applied but to steel structures which are composed of rolled sections.

The limit analysis starts from an idealistic elastic-plastic stress-strain diagram (Fig. 3a). From this, between bending moment  $M$  acting on an element of the beam, and the rotation  $\alpha$  due to this latter, on the basis of the hypothesis of Bernoulli-Navier, the relation to be seen in Fig. 3b can be obtained; at the moment  $M_f$  yielding starts in the extreme fiber extending more and more in the cross section, while at the ultimate moment  $M_t$  the whole cross section reaches the plastic stage, and the rotation increases infinitely.

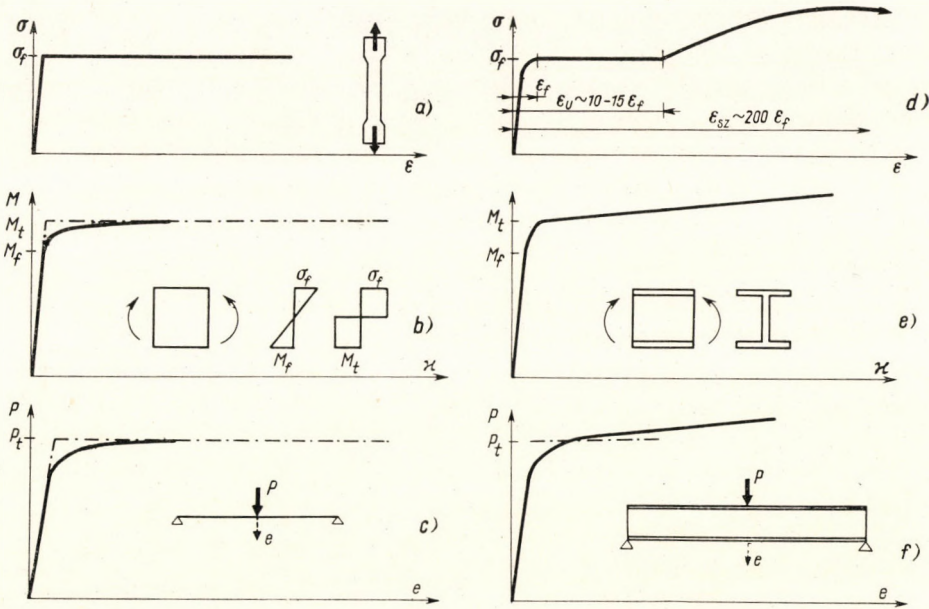


Fig. 3

By further simplifying this relation in the manner represented by the dash-and-dot line one arrives to the idea of the plastic hinge: the cross section behaves elastically until the moment reaches its ultimate value  $M_t$ , and then — the moment being constant — unlimited rotations may develop.

On the basis of these assumed features the theoretically predicted result of a bending test, especially the relation between load and deflection is illustrated in Fig. 3c; to be more precise, according to the more exact (curvilinear diagram  $M-\phi$  the curvilinear relation; and in conformity with the simplified polygonal diagram, knowing the concept of the plastic hinge, the relation represented by the dash-and-dot line. Both of them reflect the fundamental assumption of the limit analysis: failure takes place under constant load in form of unlimitedly increasing plastic deformations.

The stress-strain diagram of the steel — at least that of the mild structural steel — comes indeed very near to that assumed (Fig. 3d) and differs from it only in three points, i.e. permanent strains occur before the yield level, at a strain exceeding that due to the yield point 10 to 15 times strain-hardening begins, and the stress increases again considerably, finally at a strain exceeding the strain at the yield point about two-hundreded times fracture takes place.

Now then, if in connection with a bending test one measures the diagram  $M-\phi$  (Fig. 3d) [1] in the test diagram the bending moment  $M_f$  causing the first yield in the extreme fiber, can be well recognized, and the ultimate moment also appears pronouncedly; the essential difference is that the carrying

capacity has not been reached at this value apparently, due to the phenomenon of strain hardening, and the physical content of the ultimate moment is given by the fact only that from this on the deformations begin to increase rapidly. Thus, the plastic hinge, taken in the strict sense of the word does not develop, and the computed and measured value of the ultimate moments also show larger or smaller differences sometimes difficultly explicable because of the uncertainties of yield and strain-hardening. The deviations may be corrected in possession of test results.

Further, analysing the beam as a whole, the theoretical relation between load and deflection assumes the form as is shown in Fig. 3f. The form of failure assumed by the theory (case of continuously increasing deformations under constant load) does not strictly speaking take place, the computed ultimate load only gives information on the value of load at which the increase of the deflections become very considerable. The failure itself takes place in an other form, first of all in consequence of the buckling of the compression flange; this question will be treated later on.

The above statements concerne simply supported beams. However, the limit analysis is of little importance here. It is known that the economic importance lies in making use of plastic reserves: the theory points out the fact, that the ultimate load is greater than that causing the first yield and being computed on the basis of the theory of elasticity. In case of statically determined structures having sections generally used in steel structures this reserve is little (commonly 10 to 15 per cent), and practically it can be attributed to the redistribution (equalization) of the bending stresses in the cross sections being linearly distributed in the elastic stage as is shown in Fig. 3b. The limit analysis is of considerably greater importance in connection with redundant structures; the plastic reserve is much greater here, because beside the redistribution of the stresses a redistribution of moments takes place too: the bending moment diagram changes its shape under the influence of plastic deformation advantageously in comparison with that computed by the theory of elasticity; the moments become "equalized".

If, for instance, analysing the structure shown in Fig. 4, its behaviour according to the limit analysis is as follows; the structure behaves elastically in the case of a small load, the maximum of the bending moment occurs at the fixed end, the bending moment in the midspan being much smaller than that. The first yield occurs under the load  $P_f$  at which the fixed end moments reach the value  $M_f$ . Then the cross sections at the fixed ends become transformed into a plastic hinge, the beam behaves in the following as a simply supported structure loaded with constant end moments. Failure occurs under the ultimate load  $P_l$ , when moment in the midspan increasing further also reaches the value  $M_l$ , and due to the development of a third hinge the beam will be transformed into an unstable formation, i.e. a so-called yield mechanism. The

difference between the values  $P_f$  and  $P_t$ , due to the redistribution of the bending moments, can be significant. The bending moment diagram in the stage of failure may be determined in a very simple way: the fixed end moments become equal to the midspan moments, they are "equalized".

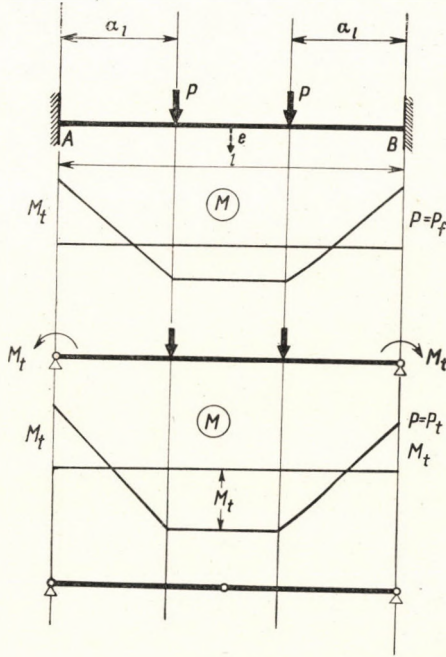


Fig. 4

But it has to be verified that the phenomenon takes a course also in reality at least similar to that described above. In respect to this, already initially serious doubts have emerged. The idea was vulnerable also from a purely theoretical point of view [2]. The plastic hinge counts from the very first as an approximation, and results from the substitution of the curvilinear diagram

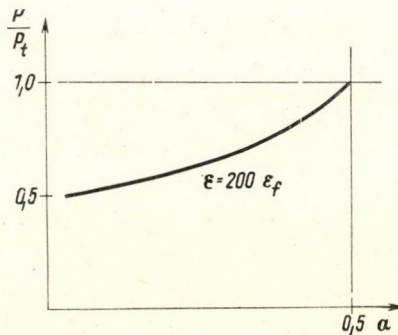


Fig. 5

$M-\alpha$  by a polygonal one. If the original curvilinear relation is applied, the strain of the extreme fiber of the cross section at the fixed end can be computed at every stage of the loading process. The theoretical computations show that this strain reaches its ultimate value sooner than the entire redistribution of moments could have been finished, thus, the computed ultimate load cannot be attained owing to the earlier local fracture. Fig. 5 shows the results of calculations at the different positions of the forces. According to this, disregarding

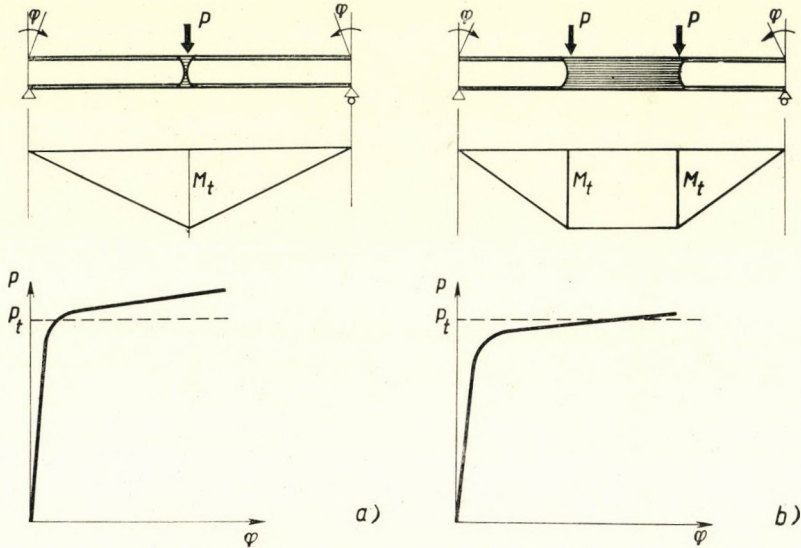


Fig. 6

exceptional cases ( $\alpha = 0,5$ ) failure should occur much below the computed ultimate load.

However, such phenomena cannot be observed by tests, the reason of which, as a matter of course, is that the strain-hardening takes place before local fracture, and this changes the course of redistribution of the bending moments. This is the very fact which gave rise to an animated discussion in respect to the applicability of the limit analysis, and the effect of strain-hardening should be cleared up by a great number of experiments. First of all it should be investigated whether in the analysis of redundant structures the concept of the plastic hinge may be used or not. The plastic hinge concentrates plastic deformations occurring in longer or shorter regions practically into a single cross section, and substitutes the curvature of this region by the concentrated rotation in a single cross section. Due to this, it is advisable to analyse two cases in the way shown in fig. 6; in the first case the plastic zone extends over a shorter, and in the second, over a longer region [3]. Considering the analysis of a continuous beam the change of the scope at the end of the

beam with increasing load or bending moment should be measured. The results are illustrated in Figs 6a and 6b, which verify that until the development of the plastic hinge the slope shows sufficiently linear increase; in the first case the plastic hinge seems to develop somewhat above, and in the second, somewhat below the calculated value; but in both cases the role of the strain-hardening is apparent, and the moment continues to increase after the development of the assumed plastic hinge approximately linearly.

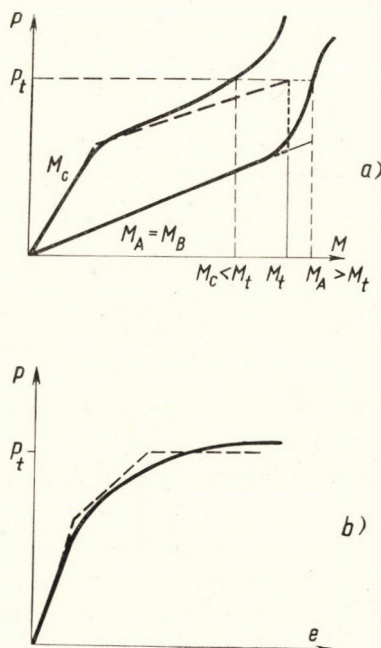


Fig. 7

In possession of these test results the course of the redistribution may be analysed precisely. Fig. 7 shows the equalization of moments assumed by the theory (dash line). According to this the end moment increases linearly until reaching the ultimate moment, thereafter it remains constant. The moment in the midspan increases more rapidly from the first yield, because meanwhile the fixed end beam becomes a simply supported beam. At the ultimate force  $P_t$ , the midspan moment also reaches the value  $M_t$ . It is the full line which represents the more precise situation, taking the effect of the strain-hardening into consideration. The support moment does not cease to increase with the appearance of the plastic hinge, neither does the full equalization of the moments take place.

Now then, if we want to analyse the behaviour of the whole structure (Fig. 7b), the increase of the deflection in the loading process might be plotted,

on the one hand, according to the theory (assumption of the plastic hinges), and on the other, on the basis of test results containing the effect of strain-hardening, too. The former results in polygonal diagrams, and the latter in curves fitting closely enough to the polygonal diagrams.

Accordingly, it can be stated that the limit analysis and the assumption of the plastic hinges give sufficient information about the decrease of the stiffness of the beam, and the computed ultimate load defines well — if not the theoretically imagined state of failure — at least the significant decrease of stiffness, i.e. the inadmissible acceleration of the deformations. Besides, the theoretical ultimate load, except for extreme cases for instance extreme ratios of spans, furnishes numerical values which are on the safe side. Contrarily, it should be registered as a shortcoming that the theoretical moment diagram at failure based on the full equalization of the moments, being rather simply computable according to the theory, does not develop in reality, and thus the theory does not give any information on the real value of the moment. This is not so important from the point of view of the carrying capacity of the beam analysed, than rather in connection with the internal forces being transferred to the adjoining members performing the clamping effect; these might be underestimated by the theoretical values, consequently, they need correctin.

### 3. Problems of instability

There is still an important problem to be cleared up for the sake of the evaluation. It has been mentioned that the final failure is caused by the loss of stability of the compressed flange. Thus, if one returns to the fundamental tests concerning the plastic hinges (Fig. 8), the rotation has to be marked, at which instability occurs. Namely, the early appearance of this might limit the rotation capacity of the plastic hinge assumed to be unlimited, and might prevent the process of redistribution of the moments. At the first glance, this phenomenon seems to be dangerous since it could be assumed that in the moment when the cross section arrives to the full plastic state, i.e. the plastic hinge develops, the lateral stability of the beam immediately comes to an end, accordingly, the redistribution of the moments cannot begin at all. The tests, however, showed something else [3].

Two phenomena could be meant on the instability of the compressed flange, namely the lateral buckling and local buckling of the flange.

The two phenomena can be analysed separately by tests. On a relatively short beam bent by a concentrated load no lateral buckling occurs if lateral support is applied at the point of application of the load. According to these tests, the final failure is, as a matter of fact, the consequence of the local buckling of the flanges (Fig. 8a). It appears from the force lateral buckling diagram



that after local buckling occurs the beam cannot bear the ultimate moment. Accordingly, if the local buckling occurs early, the redistribution of moments cannot develop and the carrying capacity of the beam is overestimated by the limit analysis.

Lateral buckling can be analysed in the most simple manner on a beam bent by two point loads, applying lateral supports at the points of application of the forces. According to the tests, if the lateral supports are close enough

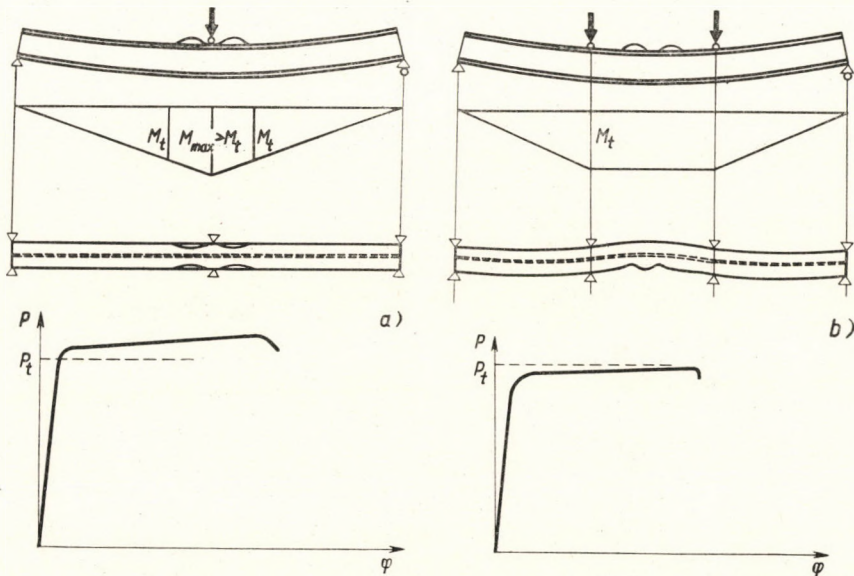


Fig. 8

to each other, although the lateral buckling starts when the bending moment reaches its ultimate value, by suitable setup it might be achieved that in spite of the increase of the lateral displacements the carrying capacity should not be diminished. Accordingly in such circumstances the lateral buckling does not disturb the assumed properties of the plastic hinge and permits the redistribution of the moments. The final failure occurs, here, too, in the form of the local buckling of the flange: on the compressed side in consequence of both vertical and horizontal bending — this latter being caused by lateral buckling — the flange suffers local buckling and the section loses its load-carrying capacity.

A number of authors tried to describe theoretically these phenomena, but none of them could produce an entirely perfect explanation.

Besides, the greatest part of the tests had been carried out by wide flange sections not in use in Hungary, consequently, before an extensive application of the theory of rupture in our country, further tests should be carried out with rolled sections commonly used here.

Among the theoretical analysis concerning later buckling, the results of British authors [4] should be mentioned, who, by introducing more or less simplifications solved the lateral buckling problem as is to be seen in Fig. 9a for both the partly and entirely plastic state of the cross section, neglecting strain-hardening (Fig. 9b). Two conclusions might be reached from these. The

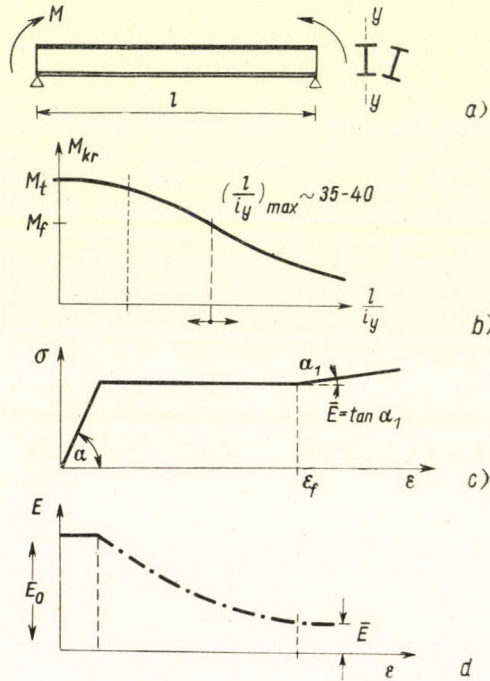


Fig. 9

first of them might be summarized as follows: Although at the ultimate value of the bending moment the lateral buckling already occurs, when the lateral supports are in infinite closeness to each another, the moment causing the lateral buckling will decrease very slowly by the increase of the distance between the lateral supports. Thus, in case of a reasonably chosen distance of the lateral supports, the reduction of the ultimate moment may be of an order of about, for inst. the reduction due to the uncertainty of yield, having consequently little influence on the load-carrying capacity. The second statement concerns the geometry of the lateral buckling in the plastic range. While in case of the lateral buckling in the elastic range the lateral displacement and rotation of the cross section under the critical moment takes place without producing any curvature in the vertical plane, in the plastic region, during the lateral buckling the curvature in the vertical plane increases considerably even under constant moment. The result of this is that the section suffering lateral

buckling due to the critical moment, behaves like a plastic hinge and, therefore, the lateral buckling does not prevent the redistribution of the moments.

In addition to this, American authors [5] have taken the effect of the strain-hardening into account, too. According to their idea, the compressed flanges might be analysed as if being separated from the tension flange. Now then, if the stress in a compressed member is below the yield point (Fig. 9c), according to the assumed diagram one can calculate with the original value of Young's modulus  $E_0$ . If yield occurs, the modulus decreases seemingly to zero according to the diagram and only after a considerable strain increases again to a finite value  $E$  (Fig. 9d) in the region of the strain-hardening. According to the opinion of the authors above-named, the real situation is better characterized by such an assumption that the slab, in the state of yield, is not homogeneous, but is partly composed of zones still elastic, partly of those in the stage of strain-hardening. The proportion of the two zones might be established from the mean value of strain; with the increase of the strain, the proportion of the former decreases, that of the latter increases. Accordingly, the modulus of elasticity of the slab which is in the state of yield, is some mean value of the Young's modulus  $E_0$  of the elastic parts, and the modulus of elasticity of the strain-hardening part  $\bar{E}$ , and in the course of yield decreases gradually from the value  $E_0$  to the value  $\bar{E}$ . By such an assumption, the bending moment causing lateral buckling can reach its ultimate value even in the case of a finite distance between the lateral supports, and the required spacing of those will depend on the degree of the deformation — and in the flange that of the strain — which is needed for the development of the redistribution of the moments. Thus, on the basis of the above theories a required spacing of the lateral supports — given commonly as a multiple of the radius of gyration around the vertical axis — may be defined in case of which the assumptions of the limit analysis remain valid.

The description of the local buckling of the flange and the establishment of design rules is theoretically more complicated, because in general, theories dealing with the problem of local buckling in the plastic region, has given rise to much controversy. The question has been recently dealt with profoundly by American authors [6] both by tests and in theory, and according to their opinion, just as in the case of lateral buckling, also the local buckling takes place in the region of the strain-hardening, in case of the commonly used rolled sections. The theoretical analysis thus becomes particularly complicated, the characteristics of the materials (modulus of elasticity  $E$  and the shear modulus  $G$ ) should be known, the anisotropic behaviour of the slab and the restricting effect of the parts remaining in elastic state should be taken into account. Besides, it should be considered that in the neighbourhood of the assumed plastic hinge, stresses higher than the yield point might occur. As to the experimental and theoretic investigations, it might be summed up that by applying

design rules relatively easily observable (with limitation of the width to thickness ratio of the flange) it can be achieved that local buckling should occur only after considerable plastic deformation, and should not affect the redistribution of the moments too early, thus, the theoretically predicted ultimate force should also be reached.

The instability is the very phenomenon which, for the present, restricts the application of the limit analysis for the case of rolled sections; in case of riveted or welded plate girders with thin webs the effect of instability of the web or flange on the redistribution of the moments is not yet cleared up in a sufficient way theoretically neither, nor particularly by tests, therefore, in such cases the limit analysis should be applied with precaution.

#### 4. Second order effects

Finally the so-called second order effects should be mentioned; for inst. the case of the beam column represented in Fig. 10. As it has already been mentioned, the failure takes place here in a manner differing from those de-

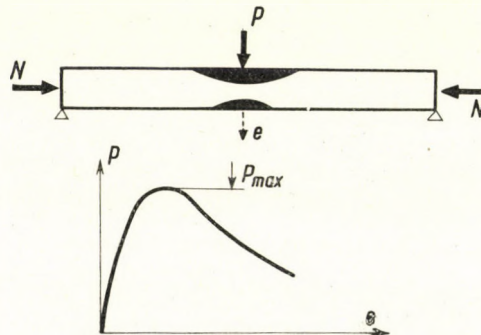


Fig. 10

scribed above, i.e. in consequence of instability; after having reached the peak value of the force, the carrying capacity of the beam — in contrast to the assumption of the limit analysis — does not remain constant, but owing to the modified geometry of the beam because of the previous deformations, decreases with increasing deformations. The phenomenon of this kind of failure can be described by the so-called theory of plasticity of second-order, counting with finite displacements. These theories are complicated and for the practice have been elaborated only for simple fundamental cases; the results can be utilized for the practice in form of diagrams or approximate formulae [7].

However, in case of frameworks being built up of beam-columns the application of the theory of plasticity of second order, and the computation of the ultimate load surpass the practical possibilities of the designer and commonly one should be satisfied with rough approximation or procedures of the theory

of elasticity which — for the safe side — disregard the plastic reserve of the structures. Investigations concerning these problems are being carried out in a number of countries, however, here can be referred only in a short way (Fig. 11).

Theoretical investigations show that in case of steel structures the effects of second order are in general considerable, and they might be neglected only in the case shown in Fig. 11, namely with frames with no sway, with relatively

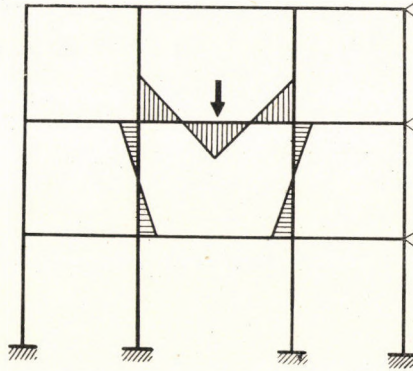


Fig. 11

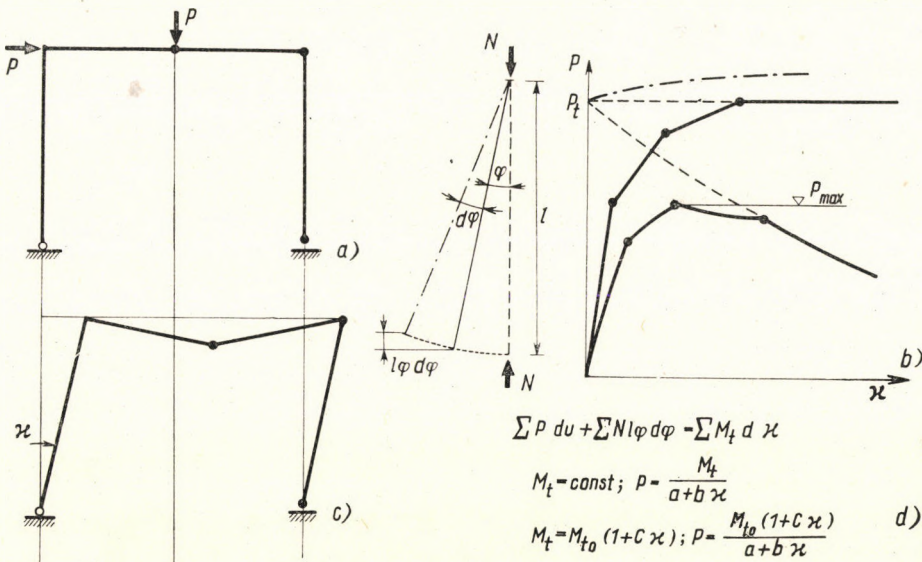


Fig. 12

short columns, and here also only in that case if the moment diagram corresponds to the figure, and the columns are bent in a “double curvature” [3]. In such cases the limit analysis might be applied in its original form; in general, the yield mechanism takes place in consequence of development of plastic hinges in the beams.

Otherwise, the effects of second order might (Fig. 12) considerably alter the results obtained by the limit analysis. In Fig. 12b, for inst., the force-displacement diagram of a frame with sway is illustrated according to the theories of first and second order. The diagram of first order is composed of straight lines, and each of the break points marks the development of a new plastic hinge. In case of the presence of three plastic hinges the structure will be transformed into an unstable formation, i.e. into a yield mechanism, and the ultimate force  $P_t$  will be reached. According to the theory of second order, the diagram consists of curves, and an important difference is that the ultimate value  $P_{\max}$  might be reached less plastic hinges than in the former case, thus, the structure when failing, does not turn necessarily into a yield mechanism, consequently for the computation of the value  $P_{\max}$  the simple plastic theory cannot be applied. The value of  $P_{\max}$  may be considerably less than that of  $P_t$  obtained by the application of the limit analysis.

On the other hand, the tests showed that strain-hardening has an important and favourable effect in this respect, too. This is conceivable if we examine the behaviour of the yield mechanism illustrated in Fig. 12d [8]. The relation between the force and displacement may be established on the basis of virtual work theorem written in the Fig. 12d; the effect of second order are included considering the work performed by the axial forces due to the change of length of the members, too. If a constant ultimate moment is assumed at the plastic hinges the force-displacement diagram of the yield mechanism will become a hyperbolic curve dash line, which starts at the value  $P_t$ , and gets a physical meaning only after the appearance of the third plastic hinge. Now, if strain-hardening is assumed, by this for instance, it is taken into account that the moment  $M_t$  acting on the plastic hinge increases linearly with the rotation, as the tests described above showed, then the diagram of force-displacement takes another hyperbolic form and at a certain value of the coefficient  $c$  (Fig. 12d) characterizing the rate of strain-hardening the hyperbolic curve is not tending downwards from the value  $P_t$ , but upwards from it (dash-and-dot line in Fig. 12d). In such cases the strain-hardening quasi compensates the effects of second order, and the limit analysis again becomes applicable. However, this possibility should be supported by extended theoretical and experimental analyses.

## 5. Conclusions

It can be established from the above said that the application of the limit analysis in design of steel structures is for the present possible only in a limited way. The reason for this is that — although the behaviour of the steel sufficiently satisfies the assumptions — the stability problems playing an important role in steel structures and the effects of second order not being negligible in case of

slender members cannot be incorporated everywhere into the system of the limit analysis, or they could be considered only with the development of this theory, by a theory of second order necessarily more complicated. The effect of strain-hardening also needs a more profound analysis.

Therefore, in the present circumstances, it is advisable to limit the application of the limit analysis to continuous beams composed of rolled sections and applied in building constructions as well as to some problems of frames outlined in the foregoing, by observing the design rules given above.

#### REFERENCES

1. MAIER-LEIBNITZ: Versuche, Ausdeutung und Anwendung der Ergebnisse (Tests, appraisal and application of the results). Zweiter Kongress IVBH. Vorbericht. Berlin 1936, 103—106.
2. LAY, M. G.—SMITH, P. D.: The Role of Strain-Hardening in Plastic Design. Manuscript.
3. Plastic Design of Multi-Story Frames. Leigh University Department of Civil Engineering, Fritz Engineering Laboratory, 1956.
4. BAKER, J. F.—HORNE, M. R.—HEYMAN, J.: The Steel Skeleton, Vol. II, Cambridge 1956.
5. LAY, M. G.: Some Studies of Flange Local Buckling in Wide Flange Shapes. Fritz Laboratory Report No. 297. 10. 1964.
6. LAY, M. G.—GALAMBOS, T. V.: The Inelastic Behaviour of Closely Braced Steel Frames under Uniform Moment. Fritz Laboratory Report No. 297. 9. 1964.
7. JEZEK, K.: Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Wien 1937.
8. HORNE, M. R.: Instability and the Plastic Theorie of Structures. *Transactions of the Eng. Inst. of Canada* 4 (1960), 31—43.

**Anwendung der Plastizitätslehre auf die Stahlkonstruktionen.** Es wird untersucht, auf welche Art die auf Grund der theoretischen Plastizitätslehre ausgearbeiteten Bemessungsverfahren (Traglastverfahren) auf Stahlstabkonstruktionen angewendet werden können. Die grundlegenden Voraussetzungen der Traglastverfahren wurden einer Analyse unterzogen und deren Übereinstimmung wurde mit den Versuchsergebnissen untersucht. Es wurde darauf hingewiesen, daß ein gewisser Teil der grundlegenden Voraussetzungen im Falle der Stahlkonstruktionen gut erfüllt wird; der übrige Teil aber im allgemeinen nur als eine grobe Annäherung betrachtet werden kann. Zu den letzteren wird die Tatsache gezählt, daß die Rückwirkung der Formänderung auf den Gleichgewichtszustand durch die Traglastverfahren vernachlässigt wird. Diese Annäherung ist aber nur im Falle von speziellen Problemen zulässig. Der Verfasser lenkt die Aufmerksamkeit auch auf die Rolle der Verfestigung, die die vereinfachten Verfahren im allgemeinen nicht in Betracht ziehen und weist auf die Wichtigkeit dieser Erscheinung in Zusammenhang mit der Lösung der Stabilitätsprobleme und Aufgaben von zweiter Ordnung.

**Application de la théorie de la plasticité aux constructions en barres métalliques.** L'auteur examine comment les procédés de dimensionnement (hypothèses de la résistance des matériaux) élaborés sur la base de la théorie de la plasticité, peuvent être appliqués aux constructions en barres métalliques. Il analyse les hypothèses fondamentales de la résistance des matériaux et examine leur concordance avec les résultats d'essais. Il constate aussi qu'une partie des conditions fondamentales est satisfaite dans le cas des constructions en barres métalliques, mais que le reste peut être considéré en général comme des approximations grossières, les hypothèses en question négligeant, par exemple, la réaction de la déformation sur l'état d'équilibre. Cette approximation ne peut être admise que pour des problèmes spéciaux. L'auteur attire enfin l'attention sur le rôle de la solidification, dont les procédés simplifiés ne tiennent pas compte en général, et indique l'importance de ce phénomène dans la solution des problèmes de stabilité et de deuxième ordre.

**Применение теории пластичности к стальным стержневым конструкциям.** В работе исследуется, насколько можно применить для стальных стержневых конструкций методики расчета («теории разрушения»), разработанные на основе теории пластичности. Дается анализ основных условий теории разрушения и исследуется их совпадение с опытными результатами. В работе указывается на то, что часть основных условий в случае стальных конструкций удовлетворяется полностью, однако другую их часть можно принять в качестве грубого приближения. К последним можно отнести тот факт, что теории разрушения пренебрегают воздействием деформации на равновесное состояние. Эти приближения можно принять только в случае специальных задач. Работа обращает внимание также на роль повторного упрочения, которое упрощенные методы обычно не учитывают и, кроме того, указывается на важность данного явления при решении задач стабильности и второстепенных задач.



## THEORETICAL FOUNDATIONS OF THE INVESTIGATION OF THE LOADS OF VEHICLES

M. MATOLCSY

LABORATORY OF THE IKARUS COACH-BUILDING AND VEHICLE WORKS

[Manuscript received February 14, 1966]

Traditional methods are not sufficient to describe unsteady service load, characteristic of vehicles. For proper planning and evaluation of the measurement, establishment of the conceptual and mathematical foundations of this sphere of problems is required which, corresponding to the character of the studied phenomenon, can only be achieved by the methods of the theory of probability. In the present paper, analysis of the total service load of vehicles and relations between different evaluation methods are treated, followed by the discussion of the problem of rare, but very high loads and their description by means of the theory of extreme values. Author demonstrates the fundamental importance of the return period, for determining the safety of vehicles with respect to rupture.

### 1. Introduction

Dimensioning of the vehicles is made rather difficult by the irregularity of the loads in time. Static examination of the bads end forces does not entail prevention of rupture. Rather it becomes necessary to pay more attention to the development in time of the charges, to frequency of particular load levels, i.e. to analysis of the entire load history.

Studying of the loads necessitates thorough grounding in two directions. Primarily, the skill to measure with a high degree of dependability and to record stresses produced in any load-bearing vehicle structure is required. The most extensively applied procedure for this task is the tensometric measurement of stresses which completed by adequate amplifying and storage (measuring tape recorder, oscillogram) or evaluating (direct printer, level counter) devices, is furnishing dependable data as to the course of the vehicle loads in time or during the traveling. On the other hand, thorough theoretical training is necessary to achieve optimal evaluation of the data, and to secure a maximum of information to be obtained out of a set of data. Study of the random variables and of irregular statistical sets can be carried out satisfactorily only by methods and rules of the theory of probability.

Failure of load-bearing vehicle elements can be attributed to two causes [1]. A vehicle can become unserviceable because of the action of extremely high service loads or as a consequence of fatigue brought about by prolonged average service loads. Accordingly, it is convenient to distinguish between two kinds of load: on one hand, the total service load spectrum constituting

danger with respect to fatigue, and on the other hand, extremely high loads producing dynamic rupture.

## 2. Analysis of the service-load history

Evaluation of the loads charging irregularly during the travel (or in time) is greatly influenced by the desired form which is intended for utilizing the results.

The two following aims can be set: *a)* establishment of the load distribution with a view to program fatigue test; *b)* determination of the load spectrum with a view of strength calculations.

The method of evaluation is defined in the first case, by the type and the operating principle of the fatigue-testing machine, in the second case, by the basic idea of dimensioning.

### 2.1. Characteristics of the load curve

Evaluation is fundamentally dependent on the characteristic or characteristics of the irregularly changing load chosen as random variables and the base of statistical analysis. Prior to surveying the possible random variables, an essential problem has to be referred to. It can be seen from the load history represented in Fig. 1/a that in addition to the stress changes of large amplitude,

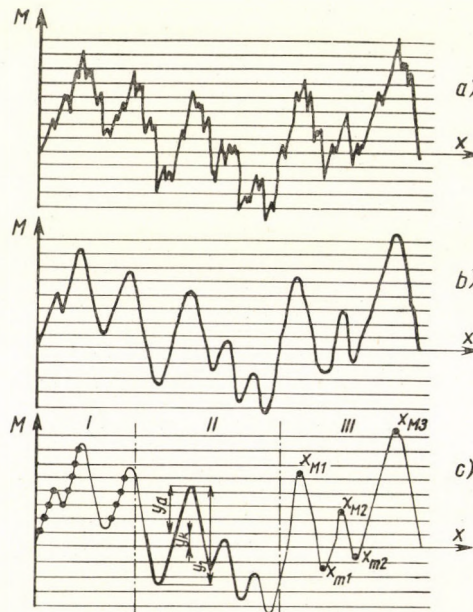


Fig. 1. Load histories. *a)* the load to be measured actually on the vehicle. *b)* Load "filtered" for evaluation. *c)* Characteristics of the load as random variables

oscillating load changes of extremely small amplitudes and of very high frequencies are turning up as well. Now, the question arises whether all load fluctuations — even the smallest ones — should be considered, i.e. which load fluctuations can be neglected. Literature contains indication to the effect that load fluctuations whose amplitude does not exceed  $5 \div 10$  per cent of the maximum amplitude can be neglected when evaluation is carried out as to which procedure becomes essentially simplified in this way [2]. On evaluating the load history the maximum stress is split into ten levels at least, load changes smaller than one level step can be neglected since they do not attain 10 per cent of the maximum. This selection can be performed partly by the choice of an evaluating instrument, partly by the application of a high-stop filter of suitable frequency. In Fig. 1/b the “filtered” diagram of the previous load history can be seen, lending itself readily to further evaluation. Filtering was based on the omission of load fluctuations smaller than one stress step.

More simply definable load characteristics are — using designations of Fig. 1/c — as follows:

I. Number of unidirectional level crossings, i.e. frequency of attaining a predesignated load level,  $M$ ; denoting with  $n(M)$ .

II. Entire region of the load fluctuation,  $Y_l$  or its amplitude,  $Y_a$ . With unsteady load, not only the height of the individual loads is varying but their  $Y_k$  mean value as well.

III. Load peaks: local maxima and minima of the load history  $X_M$  and  $X_m$ , respectively.

The following relations between particular characteristics exist (Fig. 1/c):

$$\begin{aligned} Y_l &= 2 Y_a, \\ X_M &= Y_k + Y_a, \\ X_m &= Y_k - Y_a. \end{aligned} \quad (1)$$

Depending on the number of the load characteristics whose random changes are examined simultaneously, two fundamental methods were developed, namely, data processing of one variable and of two. In the first case, of one variable only, e.g. distribution of the level crossings, of load maxima etc., is examined, while in the second case, joint frequencies, i.e. a two-dimensional distribution function of two random variables — e.g. maxima and minima preceding the former ones — are determined. Table I gives a survey of the simplest way of load examination for which different instruments have been designed to facilitate registration of frequency curves [3].

It has been shown by TEICHMANN [15] that the maximum of information about a load history can be obtained by the evaluation of two parameters. Data processing of this kind is still a relatively simple task.

## 2.2. Relations between different evaluating methods

Let us take

$$F(X_M, X_m) = \int_{-\infty}^{X_M} \int_{-\infty}^{X_m} f(X_M, X_m) dX_M dX_m \quad (2)$$

indicating the probability of the maximum charge being below  $X_M$  and at the same time, the preceding minimum which is below  $X_m$ , as joint probability distribution of the maxima and of the preceding minima of a known density function and of the load history. In one of the limit cases, when  $r = 1$ , only the mean value of the load varies at random, its amplitude being constant, thus with known minimum, the succeeding maximum is defined unequivocally (Fig. 2/b). In the other limit case, when  $r = +1$ , the mean load is constant,

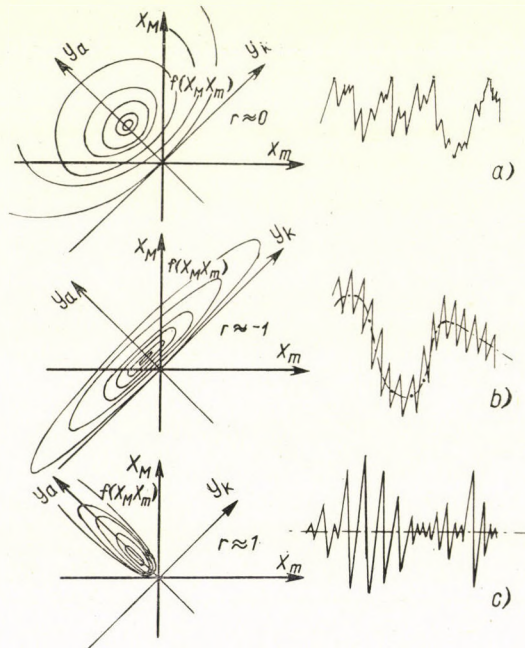


Fig. 2. Three characteristic density functions of two-parameter evaluation with the corresponding load histories

whereas amplitude varies at random symmetrically to the former. In this case, relation of maxima and minima is unequivocally defined as well (Fig. 2/c). Within the internal between the two limit cases, any interdependence may be encountered. Measurements of SCHIJVE carried out on aeroplanes [4] proved the two variables to be independent of each other, thus  $r = 0$ , and with respect to the identical character of the loads, it can be assumed that this is valid for

motor vehicles as well. This independence hypothesis can be finally settled by means of a number of measurement data.

The one-variable distribution of the maxima to be derived as a boundary distribution [5] from the distribution (2):

$$F_1(X_M) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{X_M} f(X_M, X_m) dX_M dX_m, \tag{4}$$

$$f_1(X_M) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X_M, X_m) dX_m.$$

As the relations (1) and Fig. 2 show, unequivocal relation exists between the distribution of the peaks and amplitudes, resp. Let us take the joint distribution of the amplitudes and the pertaining mean values as

$$H(Y_a, Y_k) = \int_{-\infty}^{Y_a} \int_{-\infty}^{Y_k} h(Y_a, Y_k) \cdot dY_a \cdot dY_k \tag{5}$$

where  $h(Y_a, Y_k)$  is the joint density function of the two variables. Assuming mutual independence of  $X_M$  and  $X_m$ , their density function can be written as

$$f(X_M, X_m) = f_1(X_M) \cdot f_2(X_m). \tag{6}$$

Substituting the expressions (1) and (6) into Eq. (2), the value of the Jacoby-function-determinant being 2, the joint distribution of the amplitudes and their mean values to be derived from the density function of the peaks becomes:

$$H(Y_a, Y_k) = 2 \int_{-\infty}^{Y_a} \int_{-\infty}^{Y_k} f_1(Y_k + Y_a) \cdot f_2(Y_k - Y_a) \cdot dY_k \cdot dY_a. \tag{7}$$

Expressing the equality of the right sides of Eqs (5) and (7), we obtain

$$h(Y_a, Y_k) = 2 f_1(Y_k + Y_a) \cdot f_2(Y_k - Y_a). \tag{8}$$

When the variables  $X_M$  and  $X_m$  are not mutually independent, analytical relation of the  $h(Y_a, Y_k)$  and load history,  $f(X_M, X_m)$  representing joint frequency function of maxima and minima. These two-variable distributions can be characterized by a surface which in turn can be represented in a plain by lines of levels corresponding to equal densities (frequencies). Representing the density function on the surface  $X_M X_m$ , lines of levels are located to the left and upwards of the 45° bisector, maximum always being above the preceding minimum. The character of the density function is defined by mutual dependence of maxima and minima. It is convenient to define this mutual dependence by their correlation coefficient:

$$r = \frac{\overline{(X_M X_m)} - \bar{X}_M \bar{X}_m}{S_M S_m} \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned} \bar{X}_M &= \text{expected mean value of the maxima,} \\ \bar{X}_m &= \text{expected mean value of the minima,} \\ (\overline{X_M X_m}) &= \text{expected mean value of the product of the peaks} \\ S_M &= \text{standard deviation of the maxima,} \\ S_m &= \text{standard deviation of the minima.} \end{aligned}$$

The value of the correlation coefficient may vary between  $-1$  and  $+1$ . When  $r = 0$ , the two variables are independent of each other both may vary irregularly. Fig. 2/a shows the form of the  $f(X_M, X_m)$  density functions described above becomes much more complicated.

One-variable distribution and density function of amplitude can be determined as boundary distribution of relation (5):

$$\begin{aligned} H_1(Y_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{Y_a} h(Y_a, Y_k) dY_k dY_a, \\ h_1(Y_a) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(Y_a, Y_k) dY_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Let us now examine how the  $n(M)$  number of surpassings of an optional  $M$  load-level can be derived e.g. from the joint distribution of the maxima and

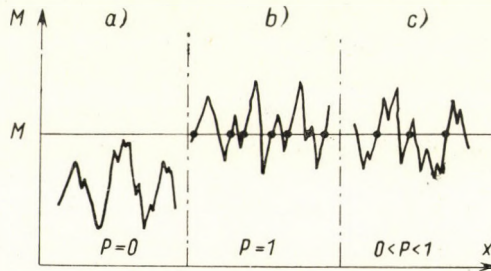


Fig. 3. Effect of the location of peaks on probability of level crossings

minima. Length of the examined load history — i.e. of the measuring period — be characterized by the number of all load peaks. The number of maxima being equal to that of the minima, let us designate the number of unidirectional peaks by  $n_0$ . When the probability during a load cycle,

$$P = \int_{X_M=M}^{\infty} \int_{X_m=-\infty}^M f(X_M, X_m) \cdot dX_M \cdot dX_m \quad (10)$$

of the maximum being above the  $M$  load level in question while the minimum is below the latter is looked for, then — according to Fig. 3 — probability of the level crossing during one load-cycle is obtained. This multiplied by the number of load peaks gives the number of expected level crossings:

$$n(M) = n_0 \int_M^{\infty} \int_{-\infty}^M f(X_M, X_m) \cdot dX_M \cdot dX_m. \quad (11)$$

The meaning of  $P = 0$  with respect to Eq. (11) is that the maximum does not exceed level  $M$  at all, while all minima are below it, thus level-crossing does not occur (Fig. 3/c).

The number of level crossings can be expressed by the distribution of amplitudes as well, by substituting Eqs (6) and (8) into Eq. (11):

$$n(M) = n_0 \int_M^\infty \int_{-\infty}^\infty h(Y_a, Y_k) \cdot dY_a \cdot dY_k. \quad (12)$$

When the fluctuation of the mean load in comparison to the variation of the amplitude can be neglected, thus when the mean load can be regarded as constant, the expression (12) becomes — with respect to Eq. (9) — simplifie;

$$n(M) = n_0 \int_M^\infty h(Y_a) \cdot dY_a. \quad (13)$$

$n(M)/n_0$  being the probability of the events when the amplitude exceeds the  $M$  level, it can be likewise written according to relation (9):

$$H_1(Y_a) = 1 - \frac{n(M)}{n_0}. \quad (14)$$

Assuming that the fluctuation of the mean value can be neglected, thus the number of unidirectional peaks equal the number  $M_k$  of unidirectional crossings of the mean value:

$$n_0 = n(M_k), \quad (15)$$

hence, relation (14) can be transformed:

$$H_1(Y_a) = 1 - \frac{n(M)}{n(M_k)}. \quad (16)$$

This relation furnishes an approximating formula for the amplitude distribution, provided that fluctuation of the mean value can be neglected. KOWALEWSKI has shown that this estimation can be applied even with considerable variations of the mean value if the results are used for fatigue tests, owing to the fact that this tends to cause deviation in the direction of safety [6]. KOWALEWSKI regarded the quotient  $n(M_k)/n_0$  to be derived from the assumption (15) as the index number of the deviation from the "simplest case". Definition of this quotient can be obtained from relation (11):

$$\frac{n(M_k)}{n_0} = \int_{M_k}^\infty \int_{-\infty}^{M_k} f(X_M, X_m) \cdot dX_M \cdot dX_m. \quad (17)$$

SJÖSTRÖM [7] indicated that the above quotient can be equal to 1 not only when meeting condition (15) but that the definition of KOWALEWSKI can be accepted for Gauss' random processes as well. It is interesting to take into account of the other limit case in which — as illustrated by Fig. 3/b — condition (15) is also complied with when the amplitude remains constant or varies only a little. Hence, the  $n(M_k)/n_0$  quotient cannot be regarded unequivocally as the index number of the deviation from the simplest case, or in other words, the definition "simplest case" has no meaning.

It is obvious from the above-said that unequivocal conceptual relation which can be derived mathematically exists between the three basic types listed in Table I and that ultimately, each one can be derived from any other one.

Table I

Basic type of the load characteristic	Examined characteristics in the case of	
	one characteristic	two characteristics
I Level crossing	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Unidirectional transpassing of level</li> <li>2. Load levels measured at a given moment</li> <li>3. Load levels measured at random instances</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Stress level and velocity of transpassing</li> </ol>
II Load peak	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Maxima or minima</li> <li>2. Maximum between section of two mean levels</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Maximum and the preceding minimum</li> </ol>
III Load range	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Range of fluctuation</li> <li>2. Amplitude</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Amplitude and the pertaining mean value</li> <li>2. Amplitude and the pertaining maximum</li> <li>3. Former possibilities with range</li> </ol>

### 2.3. Relation between load distribution and load history varying in dependence on travel

Let the density function of the load history varying along the travel be  $u(M)$  according to Fig. 4. where  $M = M(x)$  is a function of travel. By introducing the first derivative with respect to travel, variation of the load becomes:

$$dM = M' dx. \quad (18)$$

Accordingly, probability of occurrence of the  $M(x)$  load within a pre-designated interval  $|M, M + dM|$  is

$$dP (M < M(x) < M + dM) = u(M)M' \cdot dx. \quad (19)$$



With respect to Fig. 4/b, the probability of  $M'(x)$  occurring within the interval  $|M', M' + dM'|$  when  $M(x) = M$  can be described by the conditional distribution function of the load variation as

$$dP(M' < M'(x) < M' + dM' | M(x) = M) = v(M'|M)dM'. \quad (20)$$

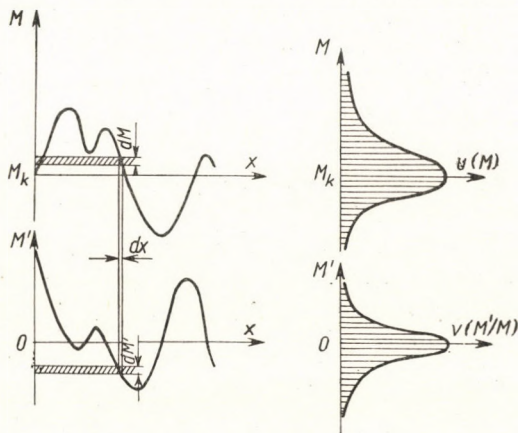


Fig. 4. Load history and density function of its variations along the travel

According to the multiplication rule of conditional probabilities [5], probability of the fulfilment of  $M(x) = M$  independently of the load changes  $M'(x)$ , along the travel section  $x_1$ :

$$P = \int_{x=0}^{x_1} \int_{M=-\infty}^{\infty} u(M) M' v(M'|M) \cdot dx \cdot dM'. \quad (21)$$

In order to obtain the number  $n(M)$  of unidirectional level crossings from this expression, the integral in relation (21) has to be split into two parts, as can be seen in Figs 4/a and 4/b, and in order to obtain e.g. the number of level crossings of rising tendency, only the boundaries 0 and  $\infty$  have to be considered. Thus, the average number of the level crossings within an  $|x_0, x_1|$  interval of travel amounts — according to the expression (21) — to

$$n(M) = u(M) \int_{x=x_0}^{x_1} \int_{M'=0}^{\infty} M'(x) v(M'|M) \cdot dM' \cdot dx. \quad (22)$$

By collating this expression with expressions (11) and (13) obtained earlier for the number of the level crossings, evaluation of the load history indicating only the magnitude becomes completed with the variations in time and during the travel.

By way of analogue considerations, a relation can be derived not only for the level crossings but also for the load maxima if the conditional density function of the second derivative is known [7].

### 3. Analysis of rare, very great loads

Up to now, based on the assumption that the infrequent great loads are also included in the operational load history, their study has been unjustifiably neglected. The load spectrum, however, should be related to deterioration by fatigue, whereas extreme loads imply a problem with respect to dynamic rupture. Two kinds of dynamic rupture, dependent and independent of the travel, resp. [9] are discerned, therefore, it is very essential to pay attention to the distribution of very great loads, to their magnitude, to the probability of their occurrence, etc.

Based on some kind of definition, such values which may become dangerous with respect to dynamic rupture during the life time of the vehicle, have to be picked out. This could be done, in principle, by setting a limit: those loads may be examined which exceed a certain critical level selected in such way that the number of loads exceeding the same are not sufficient to cause deterioration by fatigue. Practically, it is more simple to examine the greatest loads occurring within a certain unit travel section (say 1 km. or 100 km.), regarding these as observations. Subsequently this method will be adopted as basis for the definition of extreme loads.

#### 3.1. Exact distribution of extreme values

As a matter of fact, the above definition of the rare, very great loads implies that the distribution of extreme loads is attained by examining the extreme values of the load maxima distribution. Let — according to relation (4) — the distribution function of maxima be designated by  $F(M)$ ,  $f(M)$  being its density function. We then have

$$F(M_t) = \int_0^{M_t} f(M) \cdot dM \quad (23)$$

as the probability of the load not exceeding the  $M_t$  level. Probability of the load that is not to attain the  $M_t$  level at all in the course of  $t$  observations is equal to  $F^t(M_t)$ . This in turn, with respect to the examined  $M_t$  level, implies that from among  $t$  observations this one is the highest. Thus probability that not even the observed highest value of  $t$  observations does actually attain the  $M_t$  level, expressed by the initial distribution becomes

$$\Phi_t(M_t) = F^t(M_t) \quad (24)$$

which in analogy to the expression (23) supplies the exact distribution of the extreme values [10]. Its density function is:

$$\varphi_t(M_t) = t \cdot F^{t-1}(M_t) \cdot f(M_t). \quad (25)$$

Thus, with the known distribution of a load history, distribution of the extreme loads can be determined, in principle, by means of expressions (24) and (25). It becomes a problem, however, that, due to the exponent  $t$ , the application of this kind of expression is rather difficult practically not even feasible. For this reason, distribution functions have been developed with asymptotical validity for extreme values of large samples [10], [11].

### 3.2. Two parameters of asymptotical approximations

Asymptotic distributions have two characteristics of basic importance. One of these is the "expected highest load" which can be expressed by the number of observations according to the distribution (23) as

$$F(m_t) = 1 - \frac{1}{t}, \quad (26)$$

$t$  being the number of observations,  $m_t$  the "expected highest load value" in the course of  $t$  observations which is not identical with the expected mean value of the highest observed values ( $m_t \neq \bar{M}_t$ ). The relation (26) expresses the rule that the probability of the occurrence of greater loads increases with the number  $t$  of observations, or in other words, the more observations are being carried out the greater loads can be expected to be encountered. The other characteristic consists of the intensity of the highest load value:

$$\alpha_t = \frac{f(m_t)}{1 - F(m_t)}, \quad (27)$$

$f(m_t)$  being the density function of the expected greatest load. The term of intensity becomes more descriptive by the expression ( $\alpha_t \cdot dm_t$ ) giving the probability of the event that a load exceeding the  $m_t$  level will occur within the interval  $|m_t, m_t + dm_t|$ .

Based on Eqs (26) and (27), the relation between the two extreme value parameters can be written directly as

$$\alpha_t = t \cdot f(m_t). \quad (28)$$

In behalf of subsequent discussions, it is convenient to mention that the density function of the expected highest value can also be expressed from Eq.

(25) using Eqs (26) and (27):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(m_t) = \alpha_t/e, \quad (29)$$

i.e. with samples of a high number of elements — in the case of very numerous observations — the density function of the expected highest value is proportional to the intensity function.

Relations of the values of the two asymptotic parameters together with the mean value,  $\bar{M}_t$  of the greatest loads and their  $S_{M_t}$  standard deviation was determined by KIMBALL [13] by means of maximum likelihood, while by GUMBEL [11] with the aid of the momentum-generating function. These relations are:

$$\begin{aligned} m_t &= \bar{M}_t - \frac{\gamma}{\alpha_t}, \\ \alpha_t &= \frac{\pi}{S_{M_t} \sqrt{6}}. \end{aligned} \quad (30)$$

wherein  $\gamma$  approaches 0,5772 when  $t \rightarrow \infty$ . For smaller  $t$  values tabulated data are available [11].

### 3.3. The three basic types of distributions

The distribution functions — depending on the manner in which the  $m_t$  expected highest value increases with the size of the sample (number of observations) — can be divided in three large groups. The basis of this classification is given by the law of the logarithmic increase of extreme values. By differentiating the relation (26) with respect to  $t$ :

$$f(m_t) \frac{dm_t}{dt} = \frac{1}{t^2}. \quad (31)$$

Considering Eq. (28) and the identity

$$\frac{dt}{t} = d(\ln t) \quad (32)$$

the law of logarithmic increase of extreme values is obtained:

$$dm_t = \frac{1}{\alpha_t} d(\ln t). \quad (33)$$

Three cases and accordingly, three types of distribution are possible:

I —  $\alpha_t$  is independent of the size of the sample, the expected highest value growing with the logarithm of the size of sample. According to relation (29), density of the expected highest value is, in this case, independent of the sample size  $t$ . Distributions satisfying these asymptotic conditions are called distributions of exponential type. Some of the distributions belonging to this type are: the exponential, the normal, the logarithmic-normal, the  $\chi^2$  distributions, etc.

II —  $\alpha_t$  depends on  $t$ , being its increasing function. In this case, the expected highest value will increase more degressively than in case I. Density of the highest value will increase with the sample size or more exactly with  $\alpha_t$  proportionally. Distributions belonging to this group are called Cauchy-type distributions.

III —  $\alpha_t$  decreases with increasing  $t$ , hence the expected highest value increases more progressively than in case I. Density of the highest value decreases proportionally to  $\alpha t$ . To this group belongs a certain group of distributions limited in one or two directions.

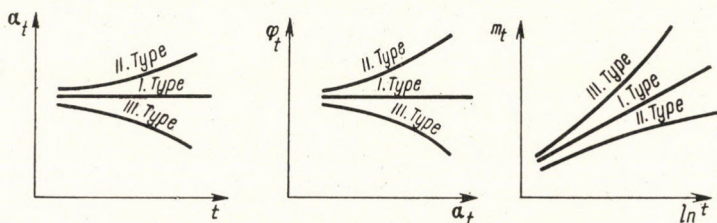


Fig. 5. Course of the three basic distribution types in dependence on parameters of the extreme values

Fig. 5 illustrates the increase of the highest value as a function of the logarithm of the number of elements for all the three basic types, and in addition, the  $\alpha_t = \alpha_t(t)$  and  $\varphi_t = \varphi_t(\alpha_t)$  functions are plotted as well.

### 3.4. Asymptotic distribution function of the extreme values of the distributions of type I

It has been proved by a number of stress measurements carried out during service that the service load history of vehicles (stress maxima) belongs to the family of distributions of the exponential type [2], [12]. Accordingly, extreme values of this type have to be examined in order to be able to study the rules of rare, very great loads of motor vehicles.

Let us now examine the density function of the highest load level,  $M_t$ . According to Fig. 6, its mode is the  $\tilde{M}_t$  value satisfying the equation

$$\frac{d\varphi_t(M_t)}{dM_t} = 0. \tag{34}$$

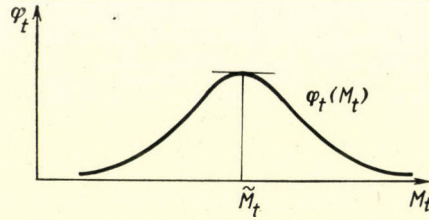


Fig. 6. Density function of the highest load level

From this, according to Eq. (25), the following relation can be obtained:

$$\frac{t-1}{F(\tilde{M}_t)} f(\tilde{M}_t) = - \frac{f'(\tilde{M}_t)}{f(\tilde{M}_t)}. \quad (35)$$

Considering the fact that with exponential distributions the expected highest value converges with the mode of the extreme values when the sample size increases [11], thus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = \tilde{M}_t, \quad (36)$$

and likewise the relation to be obtained from Eq. (26),

$$t-1 = \frac{F(\tilde{M}_t)}{1 - F(\tilde{M}_t)}, \quad (37)$$

the expression (35) can be transformed:

$$\frac{f(\tilde{M}_t)}{1 - F(\tilde{M}_t)} = - \frac{f'(\tilde{M}_t)}{f(\tilde{M}_t)} \quad (38)$$

which, as a matter of fact, amounts to the transformation of the left side according to the rule of L'Hospital, becoming indefinite when  $t \rightarrow \infty$ .

Let us expand the  $F(M)$  function into Taylor-series in the neighbourhood of the  $m_t$  level:

$$F(M) = F(m_t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F^{(i)}(m_t)}{i!} (M - m_t)^i, \quad (39)$$

wherein — considering the relations (28) and (38) — (26) has to be substituted when  $t \rightarrow \infty$ , i.e.

$$F(m_t) = 1 - \frac{1}{t},$$

$$\begin{aligned}
 F'(m_t) &= f(m_t) = \frac{\alpha_t}{t}, \\
 F''(m_t) &= -\frac{f^2(m_t)}{1 - F(m_t)} = -\frac{\alpha_t^2}{t}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 F^{(i)}(m_t) &= -\frac{f(m_t) F^{(i-1)}(m_t)}{1 - F(m_t)} = (-1)^{i-1} \frac{\alpha_t^i}{t},
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

wherein  $F^{(i)}$  and  $F^{(i-1)}$  symbolize the differential quotients of pertinent order. Thus,

$$F(M) = 1 - \frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\alpha_t^i}{t \cdot i!} (M - m_t)^i.
 \tag{41}$$

From this, with respect to the power series of  $e^x$ , the following expression is obtained:

$$F(M) = 1 - \frac{1}{t} \exp | -\alpha_t (M - m_t) |,
 \tag{42}$$

and according to Eq. (24):

$$\Phi(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{t} \exp | -\alpha_t (M - m_t) | \right]^t.
 \tag{43}$$

Omitting now the  $t$  index, the following distribution function is obtained as boundary value:

$$\Phi(M) = \exp | -\exp | -\alpha (M - m) | |
 \tag{44}$$

these being called asymptotic distribution of the extreme values.

The extreme values of this distribution also have a distribution function of a similar type, thus the Fisher-Tippet stability postulate is satisfied. Let us denote the reduced random variable by

$$y = \alpha (M - m),
 \tag{45}$$

then according to expression (24), the distribution of the  $t$ -th extreme value of the distribution  $\Phi(y)$  becomes:

$$\Phi^t(y) = [\exp | -\exp | -y | |]^t = \exp | -\exp | -y - \ln t | |
 \tag{46}$$

thus, the character of the distribution does not change, shifting only by the logarithm of the number of the sample elements towards the region of higher load levels.

Table II

Compared characteristics		First asymptotic distribution of extreme values	Normal distribution
denomination	symbol		
Reduced variable	$y$	$\alpha(x-m)$	$\frac{1}{\sigma}(x-\mu)$
Distribution function	$F(y)$	$\exp -e^{-y} $	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left -\frac{1}{2}y^2\right  dy$
Density function	$f(y)$	$\exp -e^{-y}-y $	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left -\frac{1}{2}y^2\right $
Momentum generating function	$G(t)$	$\Gamma(1-t)$	$e^{t^2/2}$
Characteristics related to the reduced variable			
mode	$\tilde{y}$	0	0
mean value	$\bar{y}$	$0,57722 = \gamma$	0
median	$\tilde{y}$	$-\ln \ln 2 = 0,3665$	0
standard deviation	$S(y)$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}} = 1,2825$	1
asymmetry coef.	$\beta_1$	1,2985	0
Characteristics related to the original variable			
mode	$\tilde{x}$	$m$	$\mu$
median	$\tilde{x}$	$m + \frac{0,3665}{\alpha}$	$\mu$
mean value	$\bar{x}$	$m + \frac{0,5772}{\alpha}$	$\mu$
standard deviation	$S(x)$	$\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$	$\sigma$
Area covered by			
$\pm S$		0,7306	0,6827
$\pm 2 S$		0,9259	0,9545
$\pm 3 S$		0,9789	0,9973
Reduced variable pertaining to given probability	0,95	$y = 2,9702$	1,6448
	0,99	$y = 4,6001$	2,3263

In Table II a comparison is given of the normal distribution with the first asymptotic distribution of extreme values. Characters of the two distributions are demonstrated in Fig. 7: at low values of the random variable, the extreme value converges more rapidly to zero, while at high values, convergence of the normal distribution to 1 becomes more rapid.

Extreme values of a sample of normal distribution — with increasing sample size — converge towards the distribution of asymptotic extreme values.

In order to examine whether the extreme loads of vehicles can be derived from the service load history, and whether — by acknowledging the assump-



tion, supported by measurements, that the distribution of the load peaks of vehicles belongs to the exponential type — they can be described by the first asymptotic distribution of extreme values, measurements have been performed by the author. In Fig. 8 distribution of the greatest loads per kilometre of auto-

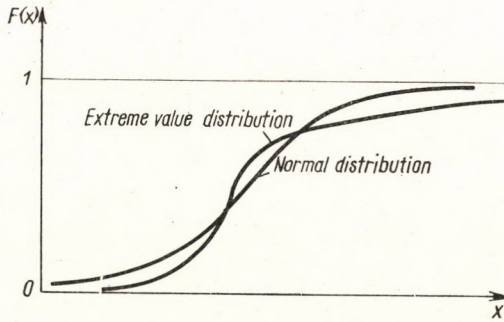


Fig. 7. Comparison of the normal and extreme value distribution

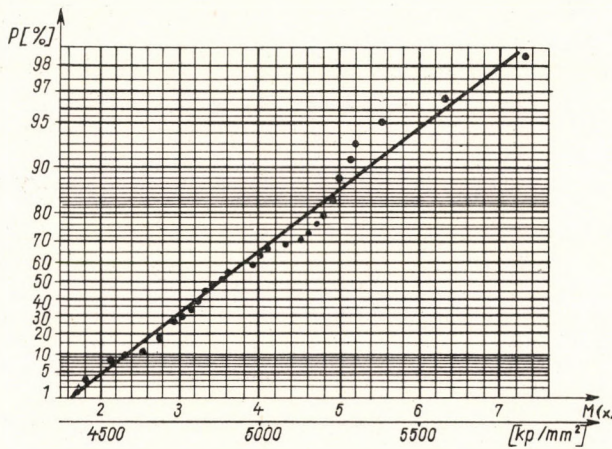


Fig. 8. Distribution of the highest values of a front spring of bus type Ikarus 55

bus springs can be seen [8], while Fig. 9 shows the highest vertical acceleration values of a railway motor coach [14]. The ordinate is provided with a probability scale transformed according to distribution (44). These measuring results support author's assumption, the experimentally plotted values lying with fairly good approximation on a straight line, which proves that the greatest loads follow the rules of the first asymptotic extreme value distribution. In Fig. 9, in addition to the distribution of the highest values per kilometre, the distribution per five kilometres is plotted as well which amounts, as a matter of fact, to the selection of the extreme values of the previous sample. Relation

of the two distributions proves relation (46), distribution of the less frequent values being shifted by the logarithm of the sample size towards higher accelerations.

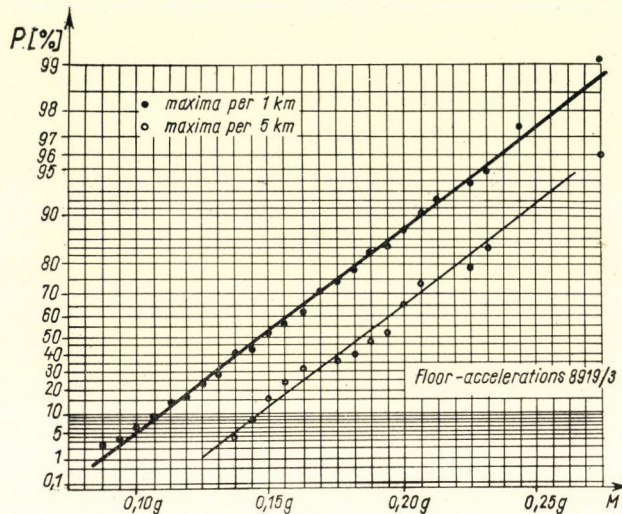


Fig. 9. Distribution of the highest floor accelerations of an electric locomotive of the series V 43

### 3.5. Application of the return period for the study of rare, very great loads

By recurrent periods the average number of observations (measurements) is meant in the course of which the examined  $M$  stress-level of  $1 - F(M)$  probability of being exceeded occurs but once.

The return period, being a probability function, can be determined unequivocally by the distribution function:

$$T(M) = \frac{1}{1 - F(M)} \quad (47)$$

Acknowledging relation (44) for the distribution of extreme loads, the return period of great loads can be written in the form:

$$T(M) = [1 - \exp \{- \exp \{- \alpha(M - m) \} \}]^{-1} \quad (48)$$

From this relation, for  $T(M) \gg 10$ , the following equation can be obtained with fairly good approximation [14]:

$$M = m + \alpha' \lg [T(M)] \quad (49)$$

$\alpha'$  denoting  $(\alpha \cdot \lg e)^{-1}$ . By introducing the concept of the greatest load or peak load observed up to a certain moment, Eq. (49) enables the estimation of the highest charge which is expected to be encountered in the individual structural elements of the vehicle. By plotting the "top loads" in a semi-logarithmic coordinate system along the ordinate of linear scale against the distance covered up to the occurrence of the top load — i.e. the return period of the unfrequent event — along the abscissa of logarithmic scale, a straight line is obtained. Such a straight line experimentally established by means of the

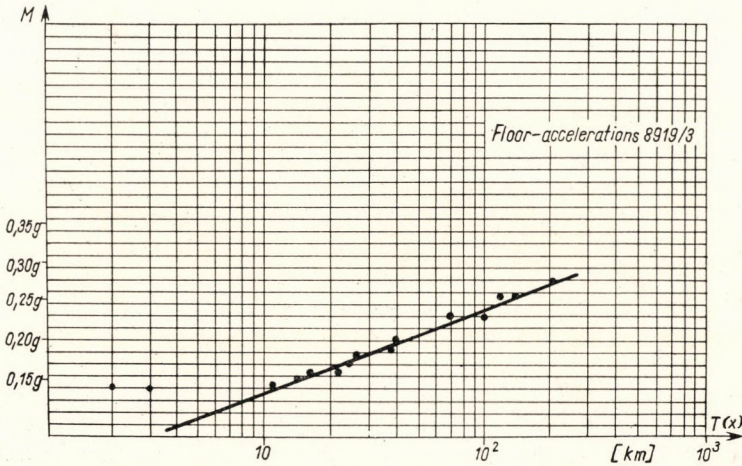


Fig. 10. Straight line of the top loads of an electric locomotive of series V 43

measuring results of the earlier mentioned railway motor coach is shown in Fig. 10, and these measuring results, lying with fairly good approximation on a straight line, support the finding that the rare very great loads of the vehicles can be described fairly well by the theory of extreme values, i.e. by the first asymptotic distribution of the extreme values.

Diagrams of this kind — established under proper conditions and in sufficient number — would be of great help to vehicle designers because they would be able to give indication as to the highest load of the vehicle expected during the life-period envisaged by the designer [9, 14]. By means of this method, uncertainty with respect to the dynamic factor could be eliminated and dimensioning could be laid on new foundations.

#### 4. Conclusions

The fundamental load frequency counting methods are in unequivocal mathematical relations to each other. One-parameter distribution can be obtained from two-parameter load distribution as boundary distributions.

The quotient  $n(M_k)/n_0$  derived by KOWALEWSKI cannot be considered unequivocally as the index number of the deviation from the "simplest case" — i.e. from the steady load variation — because its value may become 1. besides Gauss-processes proved by SJÖSTRÖM, in the case of the correlation coefficient being  $r = \pm 1$  as well.

Prevention of dynamic ruptures of motor vehicles necessitates statistical examination of rare very high service loads.

The distribution of the extreme loads of motor vehicles can be described by the first asymptotic distribution of extreme values. This is proved besides several measurements carried out by author as well, by the fact that the distribution of the extreme values of distributions of exponential type converges asymptotically to the above-mentioned distribution. Measuring data to be found in the literature prove unequivocally that service loads of widely differing vehicles can be described by distributions of the exponential type (e.g. normal, logarithmic-normal, exponential, etc. distributions), consequently, their extreme values, i.e. the very great loads, need must follow the first asymptotic distribution of extreme values.

The dependence of the distribution of extreme values on the number of observations, according to Eq. (46), is fairly well supported by author's measurements, as can be seen in Fig. 9.

Introduction of the return period simplifies the examination of extreme loads considerably. The diagram of the "top loads" provides for a plain, dependable method for determining the highest charge to be expected during the service of a vehicle.

#### REFERENCES

1. MATOLCSY, M.: General Problems of Life of Road Vehicles Related to the Theory of Probability. *Proceedings of the Second Conference on Dimensioning*, Budapest, 1965.
2. SERENSEN: Prochnosty pri nestatsionarnükh rezhimakh nagruzki. Kiev, 1961.
3. RUDNAI, G.: Recording the Load Spectra of Vehicles. *Acta Techn. Hung.* **35**—**36**.
4. SCHIJVE, J.: The Analysis of Random Load — Time Histories with Relation to Fatigue Tests and Life Calculations. Nat: Luchtvaartlab. Report Mp 201. 1960.
5. PRÉKOPA, A.: Valószínűségelmélet (Theory of Probability). Műszaki Könyvkiadó, 1962.
6. KOWALEWSKI: On the Relation between Fatigue Lives under Random Loading and under Corresponding Program Loading. *Symposium on Full-Scale Fatigue Test of Aircraft Structures*. Amsterdam, 1959.
7. SJÖSTRÖM, S.: On Random Load Analysis. *Transact. of the Royal Inst. of Techn.* Nr. 181. Stockholm, 1961.
8. MATOLCSY, M.: Instacionér terhelésű gépjárművek élettartamanalízise (Lifetime-Analysis of Motor Vehicles under Unsteady Loads). *Járművek és Mezőgazd. Gépek.* (1965).
9. FREUDENTHAL, A. M.: Reliability Analysis of Fatigue Sensitivity of Structures. *I. Korszerű Méretezési Konf.* (Up-to-Date Dimensioning Conf.) Budapest 1961.
10. FISHER-TIPPET: Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest and Smallest Member of Sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **24**, Pl. 2. 1928.
11. GUMBEL, E.: Statistics of Extremes. Columbia Univ. Press 1958.
12. GASSNER, E.: Effect of Variable Load and Cumulative Damage on Fatigue of Vehicle and Airplane Structures. ASME 1956 New York.
13. KIMBALL, B.: Sufficient Statistical Estimation Function for the Parameters of the Distribution of Maximum Values. *Ann. Mat. Stat.* **17** (1946.)

14. MATOLCSY—VARGA: A visszatérési periódus alkalmazása járműszerkezeti elemek terhelésének kiértékelésénél (Application of the Return Period for Evaluation of Loads of Motor Vehicle Structure Elements). Manuscript.
15. TEICHMANN, A.: Grundsätzliches zum Betriebsfestigkeitsversuch. Vortrag der Tagung der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforschung. Jan. 1939.

**Theoretische Grundlagen der Untersuchung von Fahrzeugbelastungen.** Die unstetige Betriebsbelastung, kennzeichnend für Fahrzeuge, kann nicht durch traditionelle Methoden beschrieben werden. Eine richtige Planung und Auswertung der Messungen erfordert die Klärung der prinzipiellen und mathematischen Grundlagen des Problemkreises, was — entsprechend dem Charakter der untersuchten Erscheinung — lediglich mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie durchgeführt werden kann. Der Aufsatz behandelt die Analyse der Vollbelastung der Fahrzeuge, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Auswertungsmethoden, sodann wird das Problem der selten auftretenden, äußerst hohen Belastungen, sowie deren Beschreibung mittels der Theorie der Extremwerte erörtert. Verfasser weist auf die grundsätzliche Bedeutung der Rückkehrperiode, in Hinsicht auf die Sicherheit der Fahrzeuge, gegenüber dem Bruche hin.

**Bases théoriques de l'examen des charges de véhicules.** Les méthodes traditionnelles ne suffisent pas pour décrire les charges de service instables caractérisant les véhicules. Les projets et l'évaluation corrects des mesures exigent l'éclaircissement des fondements virtuels et mathématiques de l'ensemble de problèmes. Conformément au caractère du phénomène étudié, cet éclaircissement ne saurait se concevoir que par les méthodes de la théorie des probabilités. L'étude traite de l'analyse de la charge pleine de service et des relations entre les différentes méthodes d'évaluation, puis expose le problème des charges extrêmement grandes et leur description par l'emploi de la théorie des valeurs extrêmes. L'auteur présente aussi l'importance fondamentale de la période de retour pour la détermination de la sécurité aux casses des véhicules.

**Теоретические основы исследования нагрузок транспортных средств.** Нестационарная рабочая нагрузка, характерная для транспортных средств, не может быть описана с помощью традиционных методов. Правильное планирование и оценка измерений требует выяснения теоретических и математических основ данной проблемы, что в соответствии с характером исследования возможно осуществить только методом теории вероятности. В работе рассматривается анализ полной рабочей нагрузки транспортных средств, взаимосвязь между отдельными способами оценки, затем излагается проблема редких, но очень больших нагрузок, их описание с помощью теории предельного значения. Показано важное значение периода возвращения при определении запаса транспортных средств на излом.



## A SIMPLIFIED METHOD FOR SOLVING SMALLER SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

K. SZMODITS

DR. OF TECHN. SC.

BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received July 18, 1966]

The described method concerns the solution of systems consisting of three, four or five linear equations. The problem is reduced to the solution of systems of equations of two unknowns obtainable by successive closed formulae. In proceeding in this way, the computation will be dissolved into parts, independent of one another, which makes it extraordinarily easier to find and correct the incidental calculation mistakes, for one mistake affects only a small part of the calculation. Up to five unknowns, the calculation is more simple than according to the Gaussian algorithm.

The solving of linear systems containing a small number of equations can easily be carried out by desk-top calculators, but it is not reasonable to treat them by electronic computers.

The method must frequently used in these simple computations is the Gaussian algorithm which in the form of tabulation, by means of appropriate checks, leads comparatively quickly to a correct result. However, if one drops the intermediate controls in order to reduce the calculation labour, it is often unavoidable of repeating the whole or the least a considerable part of the calculation for finding and correcting the possible errors.

The procedure presented below reduces the solution of systems of 3, 4, 5 equations to the successive solving of systems with two unknowns in closed form, where the sought for errors consist of the control of the solution of these systems. So the finding and correction of possible errors is very easy as the computation is divided into independent parts and the error has influence only on a small part of the whole calculation.

The basic idea of the solution is very simple. Let us solve the following linear system of three unknowns

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_1 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_2 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Writing  $x_1$  and  $x_2$  in the form  $x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)}$  and  $x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)}$ , respectively, in such a way that the first two equations when substituting  $x_1$  and  $x_2$

into them will be solved into four equations

$$\begin{aligned} a_{11} x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)} + a_1 &= 0, \\ a_{21} x_1^{(1)} + a_{22} x_2^{(1)} + a_2 &= 0, \\ a_{11} x_1^{(2)} + a_{12} x_2^{(2)} + a_{13} x_3 &= 0, \\ a_{21} x_1^{(2)} + a_{22} x_2^{(2)} + a_{23} x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

The solution for  $x_1^{(1)}$  and  $x_2^{(1)}$  from the first two equations of (2) is the following:

$$x_1^{(1)} = \frac{a_{12} a_2 - a_{22} a_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad x_2^{(1)} = -\frac{a_{11} a_2 - a_{21} a_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Similarly solving the third and the fourth equations one obtains expressions proportional to the unknown  $x_3$ :

$$x_1^{(2)} = c_1^{(2)} x_3; \quad x_2^{(2)} = c_2^{(2)} x_3,$$

where

$$c_1^{(2)} = \frac{a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}; \quad c_2^{(2)} = -\frac{a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Substituting the obtained values

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$$

into the third equation of (1) we obtain

$$(a_{31} c_1^{(2)} + a_{32} c_2^{(2)} + a_{33}) x_3 + a_{31} x_1^{(1)} + a_{32} x_2^{(1)} + a_3 = 0$$

from which the unknown  $x_3$  can be determined and substituting it into the preceding formulae we get for the first two unknowns

$$x_1 = x_1^{(1)} + c_1^{(2)} x_3, \quad x_2 = x_2^{(1)} + c_2^{(2)} x_3.$$

In order to justify this method we add the first and third or the second and fourth equations of (2) and obtain the first two equations satisfied by the determined unknowns  $x_1, x_2, x_3$  of the equations.

In case of the system with four unknowns:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + a_1 &= 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + a_2 &= 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + a_3 &= 0, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 + a_4 &= 0, \end{aligned}$$



we proceed similarly solving the first two unknowns in the form

$$x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}, \quad x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} \quad (3)$$

with the view that substituting them into the first two equations of the original system they should be solved into the following six equations:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + a_1 &= 0, \\ a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + a_2 &= 0, \\ a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{11}x_1^{(3)} + a_{12}x_2^{(3)} + a_{14}x_4 &= 0, \\ a_{21}x_1^{(3)} + a_{22}x_2^{(3)} + a_{24}x_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

From the first and the second equations we determine  $x_1^{(1)}$ , and  $x_2^{(1)}$ . The third and the fourth equations give:

$$x_1^{(2)} = c_1^{(2)}x_3, \quad x_2^{(2)} = c_2^{(2)}x_3,$$

and finally the fifth and the sixth equations give

$$x_1^{(3)} = c_1^{(3)}x_4, \quad x_2^{(3)} = c_2^{(3)}x_4.$$

Substituting the values obtained in this way into (3) and this into the third and fourth equations of the original system, we get equations containing only  $x_3$  and  $x_4$ :

$$\begin{aligned} (a_{31}c_1^{(2)} + a_{32}c_2^{(2)} + a_{33})x_3 + (a_{31}c_1^{(3)} + a_{32}c_2^{(3)} + a_{34})x_4 + \\ + a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_3 &= 0, \\ (a_{41}c_1^{(2)} + a_{42}c_2^{(2)} + a_{43})x_3 + (a_{41}c_1^{(3)} + a_{42}c_2^{(3)} + a_{44})x_4 + \\ + a_{41}x_1^{(1)} + a_{42}x_2^{(1)} + a_4 &= 0. \end{aligned}$$

Solving these for  $x_3$  and  $x_4$  we obtain for the first two unknowns

$$x_1 = x_1^{(1)} + c_1^{(2)}x_3 + c_1^{(3)}x_4, \quad x_2 = x_2^{(1)} + c_2^{(2)}x_3 + c_2^{(3)}x_4.$$

In case of five equations we write the first two unknowns in the form:

$$x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + x_1^{(4)}; \quad x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + x_2^{(4)}. \quad (5)$$

Substituting them into the original first two equations we get the six equations of (4) and the two equations

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(4)} + a_{12}x_2^{(4)} + a_{15}x_5 &= 0, \\ a_{21}x_1^{(4)} + a_{22}x_2^{(4)} + a_{25}x_5 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

that is, we gain a solution of altogether eight equations. Now  $x_1^{(1)}$  and  $x_2^{(1)}$  should be determined from the first and the second equations,

$$x_1^{(2)} = c_1^{(2)}x_3; \quad x_2^{(2)} = c_2^{(2)}x_3$$

from the third and the fourth;

$$x_1^{(3)} = c_1^{(3)}x_4; \quad x_2^{(3)} = c_2^{(3)}x_4$$

from the fifth and the sixth and  $x_1^{(4)} = c_1^{(4)}x_5; x_2^{(4)} = c_2^{(4)}x_5$  from the seventh and the eighth equations. Substituting these values into the third, fourth and fifth equations of the original system, we get a new system containing  $x_3, x_4, x_5$  only. This system can be solved by means of the method used for solving the systems of three equations.

Systems containing more than five unknowns should be solved rather by making use of the Gaussian method, as the procedure discussed above becomes very much involved in these cases. Nevertheless, it might be applied profitably to systems of four unknowns. For instance the computation of a vault shell with edge beams results in such equations, where along the joint of the edge of the vault and the beam, the requirement of the identical displacements is expressed by the system of equations containing the four joining edge forces as unknowns.

### Examples

1. Let us solve the following system of three equations using the method presented above:

$$\begin{aligned} -9700,76910x_1 + 746,95892x_2 - 838,28976x_3 - 793,14624 &= 0, \\ +187,20678x_1 - 1911,14735x_2 + 80,47499x_3 - 18,75306 &= 0, \\ -23,79844x_1 + 18,61599x_2 - 3926,2335x_3 - 8,871402 &= 0. \end{aligned}$$

The first system of two unknowns:

$$\begin{aligned} -9700,76910x_1^{(1)} + 746,95892x_2^{(1)} - 793,14624 &= 0, \\ +187,20678x_1^{(1)} - 1911,14735x_2^{(1)} - 18,75306 &= 0, \end{aligned}$$

from which

$$x_1^{(1)} = -0,0831439, \quad x_2^{(1)} = -0,0179607.$$

The second system of two unknowns

$$\begin{aligned} -9700,76910x_1^{(2)} + 746,95892x_2^{(2)} - 838,28976x_3 &= 0, \\ +187,20678x_1^{(2)} - 1911,14735x_2^{(2)} - 80,47499x_3 &= 0, \end{aligned}$$

which gives with the substitution:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= c_1^{(2)}x_3, \quad x_2^{(2)} = c_2^{(2)}x_3, \\c_1^{(2)} &= -0,0838046 \quad c_2^{(2)} = +0,0338988.\end{aligned}$$

Substituting the values

$$x_1 = x_1^{(1)} + c_1^{(2)}x_3, \quad x_2 = x_2^{(1)} + c_2^{(2)}x_3$$

into the third equation we get:

$$\begin{aligned}(&+ 23,79844 \cdot 0,0831439 - 18,61599 \cdot 0,0179607 - 8,871402) + (23,79844 \cdot 0,0838046 + \\&+ 18,61599 \cdot 0,0338988 - 3926,2335)x_3 = 0,\end{aligned}$$

giving

$$x_3 = -0,00184194$$

and

$$x_1 = -0,0831439 + 0,0838046 \cdot 0,0018419 = -0,0829896,$$

$$x_2 = -0,0179607 - 0,0338988 \cdot 0,0018419 = -0,0180231.$$

2. Let us solve the following system of equations using the same method.

$$\begin{aligned}- &178,6393x_1 + 13,4415x_2 - 14,908x_3 - 8,8890x_4 + 69,3130 = 0. \\+ &1140,5475x_1 - 29,2952x_2 - 130,024x_3 - 91,147x_4 - 25,5278 = 0, \\+ &130,000x_1 + 1,9434x_2 - 66194x_3 - 48,174x_4 + 60,3290 = 0, \\+ &68,088x_1 + 0,86163x_2 - 36,057x_3 - 35,946x_4 + 29,270 = 0.\end{aligned}$$

Solving  $x_1$  and  $x_2$  according to (3) the first two equations give six equations:

$$\begin{aligned}- &178,6393x_1^{(1)} + 13,4414x_2^{(1)} + 69,3130 = 0, \\+ &1140,5475x_1^{(1)} - 29,2953x_2^{(1)} - 25,5779 = 0.\end{aligned}$$

Giving

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -0,167049, \quad x_2^{(1)} = -7,37680 - 178,6393x_1^{(2)} + 13,4414x_2^{(2)} - 14,908x_3 = 0, \\+ &1140,5475x_1^{(2)} - 29,2953x_2^{(2)} - 130,024x_3 = 0,\end{aligned}$$

Giving

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= +0,216339x_3, \quad x_2^{(2)} = +3,98431x_3 - 178,6393x_1^{(3)} + 13,4414x_2^{(3)} - 8,8890x_4 = 0, \\+ &1140,5475x_1^{(3)} - 29,2953x_2^{(3)} - 91,147x_4 = 0.\end{aligned}$$

Giving

$$x_1^{(3)} = +0,147123x_4, \quad x_2^{(3)} = +2,61662x_4.$$

Substituting the results into the third and fourth equations

$$\begin{aligned}+ &130,0(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}) + 1,9434(x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)}) - 66,194x_3 - 48,174x_4 + \\&+ 60,3290 = 0, \\+ &68,088(x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}) + 0,86163(x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)}) - 35,057x_3 - 35,946x_4 + \\&+ 29,270 = 0.\end{aligned}$$

Carrying out the operations indicated one obtains

$$\begin{aligned}- &30,3269x_3 - 23,9629x_4 + 24,2766 = 0, \\- &17,8939x_3 - 23,6742x_4 + 11,5400 = 0,\end{aligned}$$

which gives

$$x_3 = +1,03119, \quad x_4 = -0,29197.$$

And by substitution

$$x_1 = -0,167049 + 0,22308 - 0,042955 = +0,013076,$$

$$x_2 = -7,3768 + 4,10858 - 0,76397 = -4,03219.$$

**Vereinfachte Lösung von kleineren linearen Gleichungssystemen.** Das beschriebene Verfahren bezieht sich auf die Lösung der aus 3, 4 und 5 Gleichungen bestehenden linearen Gleichungssysteme. Die Auflösung derselben wird auf die, aus sukzessiven geschlossenen Formeln erhältliche Lösung von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten zurückgeführt. Infolgedessen zerfällt die Berechnung in voneinander unabhängige Teile, was die Auffindung und Ausbesserung der etwaigen Rechnungsfehler wesentlich erleichtert, denn ein Fehler kann nur auf einen kleinen Teil der Berechnung auswirken. Dieses Rechenverfahren ist höchstens bis zu 5 Unbekannten einfacher als der Gaußsche Algorithmus.

**Une méthode simplifiée pour la solution de systèmes mineurs d'équations linéaires.** La méthode exposée se rapporte à la solution des systèmes comportant trois, quatre ou cinq équations linéaires. Le problème est ramené à la solution de systèmes d'équations à deux inconnues, solution réalisable à partir de formules closes successives. En procédant de la sorte, le calcul sera décomposé en parties indépendantes les unes des autres, ce qui facilite notablement la découverte et la correction des erreurs éventuelles, une erreur n'entachant qu'une partie limitée du calcul. Jusqu'à cinq inconnues au maximum, cette méthode est plus simple que l'algorithme de Gauss.

**Упрощенное решение небольших систем линейных уравнений.** Описанный метод касается решения систем линейных уравнений, состоящих из 3, 4 и 5 уравнений. Предлагаемый метод сводит все к решению, которое можно получить из серии закрытых формул систем уравнений с двумя неизвестными. Поступив таким образом, вычисление распадается на независимые друг от друга части, что очень облегчает нахождение и исправление возможных ошибок при вычислениях, так как одна ошибка влияет только на одну небольшую часть расчета. Максимально до пяти неизвестных расчет является проще алгоритма Гаусса.

## PLASTIZITÄTSLEHRE VON KÖRNIGEN MATERIALIEN\*

Á. KÉZDI

DR. DER TECHN. WISSENSCHAFTEN  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 4. August, 1966]

Die Plastizitätslehre wird in der Mechanik der körnigen Materialien einerseits schon seit sehr langem, andererseits in weitem Kreise angewendet. Der Ingenieur untersucht die Stabilität der Erdbauten, die Größe des Erddruckes, die Tragfähigkeit des Baugrundes usw. mit den Methoden der Plastizitätslehre; zahlreiche Verfahren der Plastizitätslehre sind im Laufe der Untersuchungen der körnigen Materialien entstanden. Was die Anwendung dieser Theorie in der Bodenmechanik anbelangt, ist auch hier die erste Frage, die Bedingung des Bruches und des Fließens zu bestimmen. Es wurden zwar in letzterer Zeit mehrere, die wirklichen Verhältnisse mehr annähernde Bruchbedingungen vorgeschlagen, jedoch wird auch heute noch in den meisten Fällen die von COULOMB und MOHR ausgearbeitete Bedingung gebraucht. Der Aufsatz legt ein neues Verfahren für die Darstellung der Bruchbedingungen bei räumlichem Spannungszustande dar, mit dessen Hilfe die Auswirkung der Spannungsvektorlinie auf die Bruchbedingung übersichtlich geprüft werden kann.

### I. Einleitung

Das älteste Gebiet der Anwendung der Plastizitätslehre ist die Bodenmechanik, die Mechanik der körnigen Materialien. Die Bodenmechanik löst fast alle ihre Probleme, alltäglichen, praktischen Aufgaben mit Hilfe der Plastizitätslehre. Standfestigkeit der Böschungen, Grundbruch unter Gründungskörpern, die verschiedensten Erddruckprobleme, Tragfähigkeitsfragen usw. gehören alle zu diesem Aufgabenkreis. Dem kann es zugeschrieben werden, daß zahlreiche Methoden der Plastizitätslehre bei der Prüfung der körnigen Materialien entstanden, weiterentwickelt und dann auch auf anderen Gebieten zur Anwendung gebracht wurden. Hierher gehört in erster Linie die Lehre der Gleitflächen und der Gleitlinien, deren Grundsätze noch im XVIII. Jahrhundert von COULOMB (1773) gelegt und im XIX. Jahrhundert von RANKINE (1856) und LÉVY (1873) weiter entwickelt wurden. Viel später entdeckte LÜDERS (1854) die Fließlinien im Weicheisen, und dem Kenntnis des Verfassers nach war HARTMANN (1896) der erste, der die in den Metallen beim Eintritt des Bruches entstehenden Gleitlinien eingehend untersuchte; danach hat MOHR (1914) die Gleitungstheorie der Festigkeit ausgearbeitet.

\* Auf Grund eines Berichtes, vorgetragen auf der unter dem Titel »Die Anwendung der Plastizitätslehre in der Bauingenieurpraxis« den 25. Mai 1966 vom Ausschuß für Bauwesen der Abteilung Technischer Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften abgehaltenen Konferenz.

## 2. Bruchbedingungen

Die erste Frage ist auch vom Gesichtspunkte der bodenmechanischen Anwendung die Festsetzung einer Bruch- bzw. Fließbedingung. Es soll hier nicht auf die Einzelheiten des verwickelten Problems der Schubfestigkeit der Böden eingegangen werden, es sei nur bemerkt, daß die bodenmechanische Deutung der in den übrigen Zweigen der angewandten Mechanik benützten, ziemlich genau definierten Begriffe oft auf Schwierigkeiten stößt. Im Gegensatz zu den zahlreichen, in vielen Gebieten der Plastizitätslehre angewandten

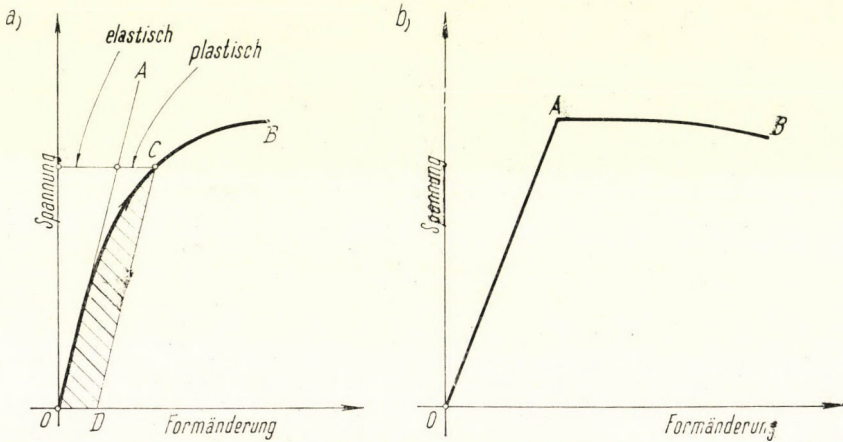


Bild 1. a — typische Spannungs-Formänderungs-Kennlinien der Böden; b — idealisierte Formänderungskennlinie

Modellen, leidet ein typischer Boden in allen Spannungszuständen bleibende Formänderungen, die durch die Anhäufung der Kornbewegungen, hervorgerufen durch die zwischen den Körnern auftretenden Kräfte entstehen. Bild 1.a zeigt die typischen Spannungs-Formänderungs-Kennlinien und die elastischen und bleibenden Formänderungen der Böden. Wird der Boden dem Punkte C entsprechend belastet, und danach entlastet, dann wird der Zustand durch den Punkt D gekennzeichnet. Die, während dieses Belastungszyklus geleistete Arbeit wird durch die Fläche OCD angegeben, und da wir die zur Erzeugung der elastischen Formänderung aufgewandte Arbeit zurückgewinnen, stellt diese Fläche die verlorene Arbeit dar. Diese Erscheinung ist die sog. Verfestigung. Die mathematische Formulierung derselben führt zu äußerst verwickelten Beziehungen; daher wurden auf Grund eines sich dem Bild 1.a entsprechend verhaltenden Modells nur einige ganz einfache Strukturen theoretisch untersucht. Die heutige Praxis nimmt fast ausschließlich die in Bild 1.b angegebene, vereinfachte, idealisierte Deformationslinie an. Was die Bruchbedingung angeht, wird die *Coulomb—Mohrsche Bruchtheorie* allgemein verwendet, aller-

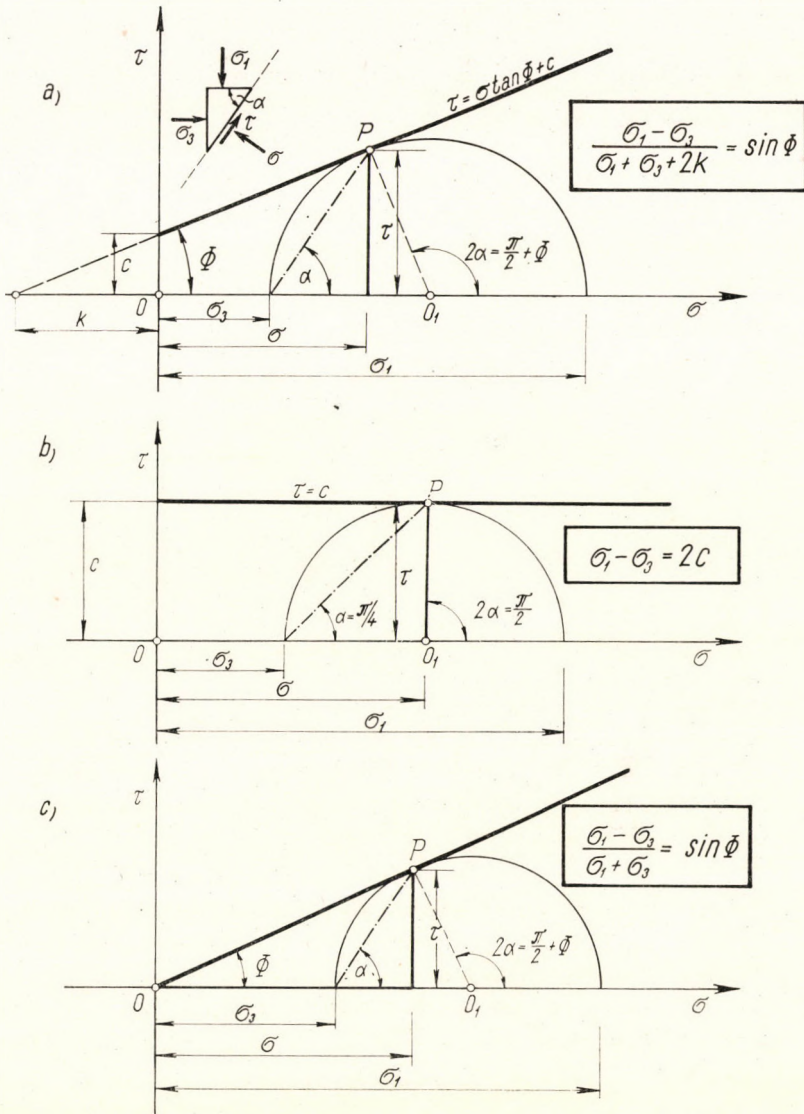


Bild 2. Die Coulombsche Bruchbedingung. a — allgemeiner Fall; b — vollkommen plastischer Stoff; c — körniger, kohäsionsloser Stoff

dings mit der Beschränkung, daß die in der Bruchbedingung (Bild 2) vorkommenden Schubfestigkeitsparameter nicht als bodenphysikalische Festwerte betrachtet werden können, sondern als Größen, die im gegebenen Falle durch die maßgebenden Werte zu ersetzen sind. Das Bild zeigt auch die analytische Form der Bruchbedingungen. Mit Hilfe einer krummlinigen Beziehung hat SOKOLOWSKI (1965) einige Fragen gelöst, von seinen verschiedenen Vorschlägen

kann die allgemeine Potenzfunktion

$$\tau = c \left( \frac{\sigma + k}{c} \right)^{1/n} \quad (1)$$

erwähnt werden, worin  $1 < n \leq 2$ ;  $c$  und  $k$  charakteristische Festwerte für den Boden sind. Die Beziehung für einige Werte von  $n$  ist in Bild 3 dargestellt.

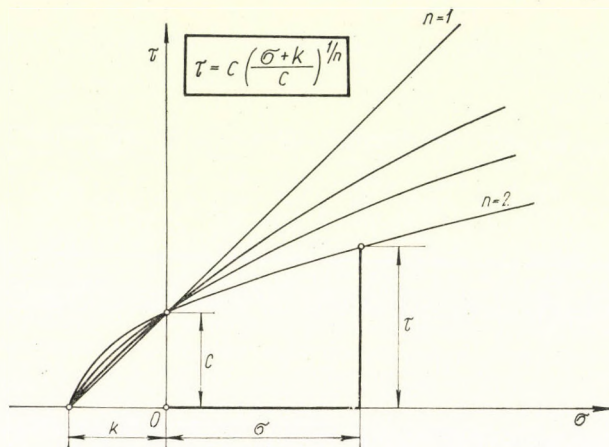


Bild 3. Die Sokolowskische allgemeine Potenzfunktion als Bruchbedingung

Von den Vorschlägen SOBOTKAS (1958) sei die Form einer unendlichen Fourierreihe

$$\tau = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{(2k+1)\pi\sigma}{\sigma_0} \quad (2)$$

erwähnt.

Für den Ausdruck der Bruchbedingung ist neben der Form  $\tau = f(\sigma)$  auch der Ausdruck

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (3)$$

üblich. Statt des üblichen Koordinatensystems  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  kann der Spannungszustand auch mit Hilfe des im Bild 4 vorgeführten Dreiecknetzes gut gekennzeichnet werden, falls alle drei Hauptspannungen gleiche Vorzeichen haben, z. B. Drücke sind. Auf den Seiten des Dreiecks werden die  $\sigma_i/\sigma_0$  Verhältniszahlen dargestellt, wo  $\sigma_i$  eine der Hauptspannungen und  $\sigma_0$  die sogenannte oktaedrale Normalspannung ist:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (4)$$



Die Bruchbedingung kann auch bei dieser Darstellung durch die im Dreieck gezeichneten Linien veranschaulicht werden, es läßt sich auch jener Bereich des Dreiecknetzes abgrenzen, worin die Punkte keinen Bruchzustand darstellen. Die Coulomb—Mohrsche Bedingung kann im Inneren des Dreiecks durch ein Sechseck dargestellt werden (KÉZDI, 1966), auf dessen Umfang also  $\Phi = \text{konst.}$  ist.

Mit Hilfe dieser Darstellung kann die vom Gesichtspunkt der bodenmechanischen Anwendungen sehr wichtige Frage untersucht werden, welche Wirkung

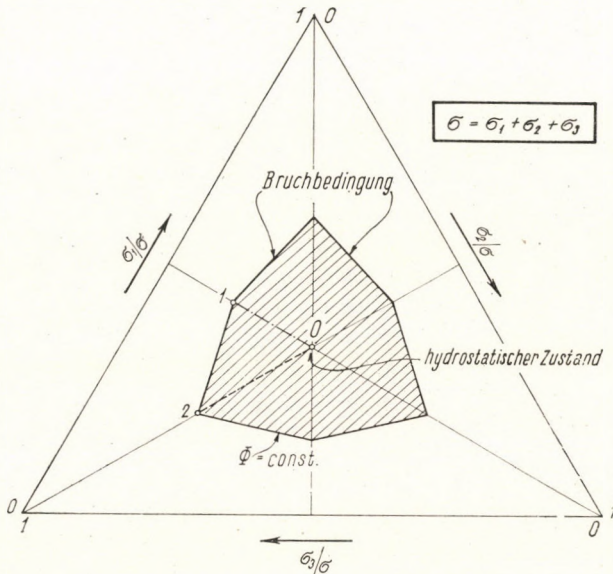


Bild 4. Die Darstellung der Bruchbedingung im den Spannungszustand kennzeichnenden Dreiecknetz

auf den Eintritt des Bruchzustandes der Verlauf der Spannungszustände ausübt, durch welche dieser Bruchzustand erreicht wird; kurzgefaßt: entlang welcher Linie kommt man vom Inneren des Dreiecks auf den Umfang des Sechsecks. Wenn die verschiedenen Spannungspfade zu verschiedenen Bruchparametern führen, dann darf man z. B. den angreifenden Erddruck und den Erdwiderstand nicht mit dem gleichen Reibungswinkel behandeln, man muß verschiedene Werte anwenden z. B. in den Fällen ebener und achsensymmetrischer Formänderungen. Der Pfad 01 im Bild 4 bedeutet im Fall eines dreiachsigen Versuches, daß die Bodenprobe zuerst unter der Einwirkung des hydrostatischen Spannungszustandes  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  war, nachher mit zunehmender Spannung  $\sigma_1$ , durch eine achsiale Zusammendrückung bei Punkt 1 zum Bruche gebracht wurde. Der zu einigen Punkten des Abschnittes 01 gehörigen Mohrschen Kreise sind im Teil a des Bildes 5 dargestellt. Suchen wir in jedem Spannungskreis den Punkt, wozu diejenige Ebene gehört, in welcher der von

der Spannungsergebnenden und der Normalen eingeschlossene Winkel der größte ist, und verbinden wir diese Punkte, so erhalten wir die Spannungsvektorlinie des Versuches oder anders genannt die Pfadlinie der Spannung (»stress-path«). Diese Kurve bildet eine kennzeichnende, wichtige Angabe für die verschiedenen Versuchsmethoden; sie ist in erster Linie bei den Untersuchungen der Schubfestigkeit der bindigen Böden von Bedeutung. Bei den im Bild 5 veranschaulichten Fällen, wenn auch die Vektorlinie stark verschieden ist, hat der Schubfestigkeits-Parameter annähernd gleiche Werte. Man gelangt auf

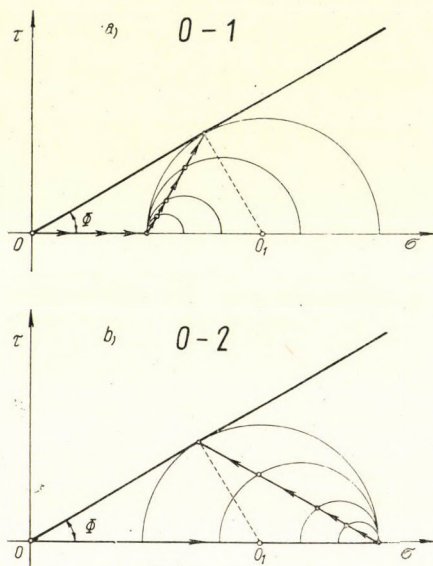


Bild 5. Die Herbeiführung des Bruchzustandes über die verschiedenen Spannungskurven

dem Abschnitt  $\overline{02}$  zum Bruchzustand im Falle, wenn man nach der Anwendung der hydrostatischen Spannung die seitlichen Spannungen ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) vermindert.

Die praktische Anwendbarkeit der nach Bild 4 verallgemeinerten räumlichen Coulombschen Bruchbedingung kann durch Versuchsergebnisse beurteilt werden. Nur wenige Berichte über Bruchversuche bei allgemeinen Spannungszuständen sind in der Literatur zu finden. Es können die Versuche von KJELLMAN (1936), KIRKPATRICK (1957), BISHOP und ELDIN (1953), HABIB (1953) und MALISHEV (1954) erwähnt werden. Einige von diesen sind im Bild 6 in einem Sektor des nach Bild 4 konstruierten Sechsecks dargestellt. Die Angaben von KJELLMAN und KIRKPATRICK führten zu den den Seiten des Sechsecks anpassenden, höchstens etwas außerhalb der Linie  $\overline{12}$  liegenden Punkten, unabhängig davon, auf welche Art der Bruch herbeigeführt wurde. Dagegen bei HABIB'S Verdichtungs- und Ausdehnungsversuchen die  $\overline{01}$  und  $\overline{02}$

Linien entlang, ergab sich eine bedeutsame Differenz; der auf Grund des  $\overline{02}$  Versuches ermittelbare Reibungswinkel war etwa um  $7^\circ$  kleiner als der aus dem  $\overline{01}$  Versuche berechnete. Es mag sein, daß dies die Folge der angewandten Versuchstechnik war. Auf Grund der Mehrheit der Versuchsergebnisse kann anscheinend für die Praxis die Folgerung gezogen werden, daß die Bruchbedingung bei Sand als unabhängig von der mittleren Hauptspannung betrachtet werden kann. Handelt es sich um den Fall  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , so ergibt sich der berechnete Reibungswinkel etwas größer als im Falle ( $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$ ), die Abwei-

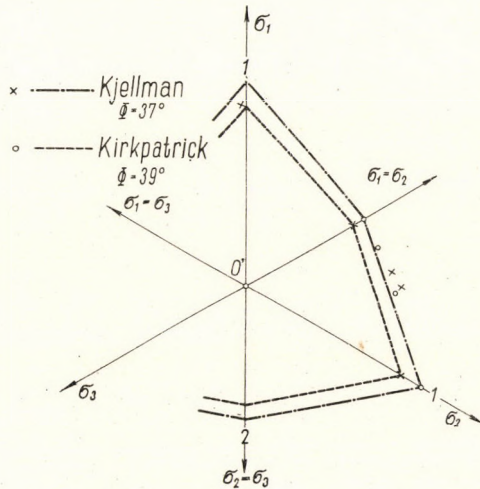


Bild 6. Darstellung der Versuchsergebnisse

chung ist um so bedeutender, je dichter der Boden ist. Diese Abweichung kann aber im Interesse einer größeren Sicherheit vernachlässigt werden. Das ist wahrscheinlich der Tatsache zuzuschreiben, daß die körnigen Böden im allgemeinen keine solche Struktur haben, die zur Anisotropie des Bodens und zu einer bedeutenden Wirkung der Ausbildung des Bruchspannungszustandes führen würde. Führt man künstlich solche Anisotropie im Laufe der Herstellung eines Probekörpers — z. B. durch Stampfung — herbei, so werden die Unterschiede größer. Bei Sand ist vom Gesichtspunkt der Schubfestigkeit die im Augenblick des Bruches zur Geltung kommende Porenziffer ausschlaggebend; die dem Bruch vorangehenden Spannungszustände spielen nur soweit eine Rolle, daß sie die Porenziffer abändern.

### 3. Die allgemeine Lehre der Gleitflächen

Von den Methoden der Plastizitätslehre gelangte in der Bodenmechanik die Theorie der Gleitlinien und Gleitflächen zur wichtigsten Anwendung. Befassen wir uns also mit dieser Frage, und nehmen wir die Gültigkeit des steif-

plastischen Modells an. Die kleinen elastischen Formänderungen werden vernachlässigt.

Beziehen sich die Randbedingungen auf die Spannungen, so ist der ebene Spannungszustand des Kontinuums, mit Annahme des Koordinatensystems nach Bild 7 durch die Differentialgleichungen des Gleichgewichts

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= X, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= Y \end{aligned} \quad (5)$$

und durch die Plastizitätsbedingung bestimmt. Letztere kann in Beziehung mit der max. Schubspannung und der durchschnittlichen Normalspannung in der Form

$$\tau_0 = F \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \quad (6)$$

angeschrieben werden.

Das Problem ist statisch bestimmt: zur Bestimmung der Funktionen der drei unbekanntenen Spannungen stehen drei Differentialgleichungen zur Ver-

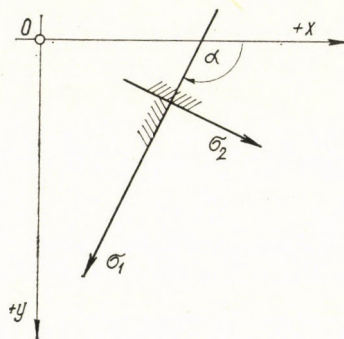


Bild 7. Das Koordinatensystem

fügung. Die Plastizitätsbedingung ist bei vollkommen plastischen Stoffen in der Form

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4 c^2, \quad (7)$$

und bei Stoffen, die Kohäsion und auch Reibung besitzen, in der Form

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2k)^2 \sin^2 \Phi \quad (7a)$$

anzugeben.

Drücken wir die Spannungskomponenten mit Hilfe der Grenzbedingung aus, und führen das Formelzeichen

$$\sigma \equiv \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + k$$

ein, dann wird

$$\begin{aligned}\sigma_{x,y} &= \sigma(1 \pm \sin \Phi \cos 2\alpha) - k, \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \Phi \sin 2\alpha,\end{aligned}\tag{8}$$

wo  $\alpha$  der Winkel zwischen der ersten Hauptspannung und der positiven Richtung der  $x$  Achse ist. Nach Einsetzen dieser Beziehungen in die Gleichgewichtsgleichungen sind die quasi-linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \tan(\alpha + \nu) + 2\sigma \tan \Phi \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan(\alpha + \nu) \right] &= A, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \tan(\alpha - \nu) - 2\sigma \tan \Phi \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan(\alpha - \nu) \right] &= B\end{aligned}\tag{9}$$

zu erhalten, wo

$$\nu = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2};$$

$A, B$  Funktionen von  $x, y, \Phi$  und  $\alpha$  sind. Im Falle des Grenzüberganges  $\Phi = 0$ , nehmen die Gleichungen die folgenden Formen an:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 2c \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right] &= C, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 2c \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \right] &= D.\end{aligned}\tag{10}$$

Die oben angegebenen Gleichungen sind *hyperbolisch* und so können zwei Charakteristikenscharen ermittelt werden; diese sind die Gleitlinien. Ihre Gleichungen sind so zu erhalten, daß wir aus den Gleichungen (9) bzw. (10) die partiellen Differentialquotienten ausdrücken und in den erhaltenen Bruchausdrücken den Zähler und den Nenner gleichzeitig gleich Null setzen. Die Gleichungen der Charakteristiken — Gleitlinien — lauten also

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\alpha \pm \nu),\tag{11}$$

und denen entlang sind die Spannungen mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} + 2\sigma \tan \Phi \frac{d\alpha}{dx} &= A \\ \frac{d\sigma}{dx} - 2\sigma \tan \Phi \frac{d\alpha}{dx} &= B \end{aligned} \quad (12)$$

zu berechnen.

Nähern wir nur den Nenner Null, dann erhalten wir die Unstetigkeitsstellen.

Die Differentialgleichungen des Grenzgleichgewichts können auch im allgemeinen Falle am einfachsten mit der Methode der Charakteristiken und der endlichen Differenzen gelöst werden. Das Wesentliche dieser Methode ist, daß wir die Schnittpunkte der Gleitflächen bestimmen und in diesen Punkten die Spannungen mit Rekursivformeln berechnen, nachdem wir die in den Formeln der Charakteristiken und der Spannungen vorkommenden Differentiale mit Hilfe endlicher Differenzen bestimmt haben. Die Prüfung der geometrischen Eigenschaften der Gleitlinien hat einige nützliche Lösungen geliefert. Solche sind z. B. die Verfahren von GOLUSCHKEWITSCH (1952) und SOBOTKA (1958).

#### 4. Die Köttersche Gleichung

In bodenmechanischer Beziehung gelangte eine andere Methode zur Untersuchung von körnigen Materialien in weiterem Kreise zur Anwendung. Diese besteht darin, daß wir bei einem ebenen Problem aus den beiden Gleichgewichtsgleichungen und aus der Bruchbedingung eine neue Differentialgleichung ableiten, die mit Hilfe eines krummlinigen Koordinatensystems einen Zusammenhang zwischen der Krümmung der Gleitfläche und den auf der Gleitfläche wirkenden Spannungen bietet. Dieser Zusammenhang ist als *Köttersche Gleichung* bekannt; die Gültigkeit derselben ist sowohl für eine einzige Gleitlinie wie auch für eine Gleitlinienschar bewiesen. Im ersten Falle ergibt sich die Ableitung folgendermaßen.

Nehmen wir an, daß die resultierende Spannung auf einem Bogenelement  $\Delta s$  der Gleitfläche (Bild 8) bekannt ist. In diesem Punkte ist der Neigungswinkel der Tangente der Gleitfläche  $\alpha$ ; dieser ist positiv, wenn die Tangente mit der positiven Richtung der  $x$  Achse durch positive Drehung in Koinzidenz gebracht werden kann. Wir wollen den Fall eines körnigen Materials untersuchen; die Kohäsion des Bodens ist Null. Die Bruchbedingung hat also die Form:  $\tau = \sigma \tan \Phi$ . Daher schließt die resultierende Spannung mit der Normalen der Gleitfläche im Punkte  $P$  den Winkel  $\Phi$  ein.

Wenn wir nun an der Gleitfläche um das Bogenelement  $ds$  weiter entlanggehen, ändert sich  $p$  um den Betrag  $dp$ . Diese Zunahme besteht aus zwei

Teilen. Die Spannung verändert sich einerseits infolge der Änderung von  $\alpha$ , andererseits, weil der Punkt  $P'$  tiefer liegt und die Spannung aus dem Eigengewicht im schweren Medium größer ist. Es gilt also die Beziehung:

$$dp = dp_1 + dp_2.$$

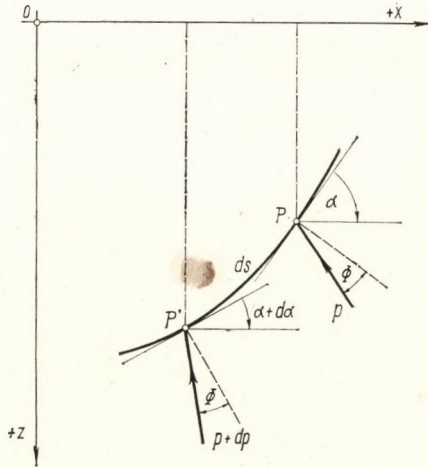


Bild 8. Bogenelement einer gekrümmten Gleitfläche

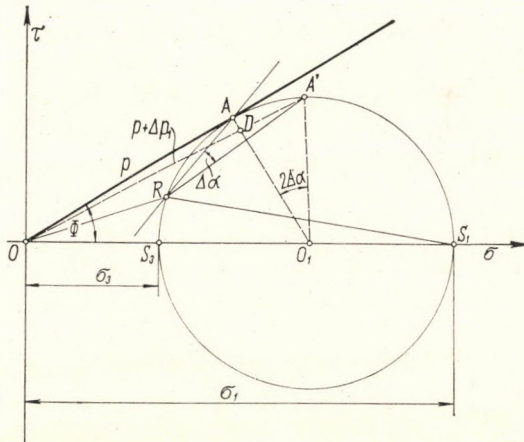


Bild 9. Der Spannungszustand der Punkte P und P'

Um  $dp_1$  zu bestimmen, kann das Medium als gewichtslos betrachtet werden. Betrachten wir nun den Spannungszustand in der Umgebung des Punktes  $P$ . In der Mohrschen Darstellung (Bild 9) ist die Strecke  $\overline{OA} = P$  die resultierende Spannung, mit der  $\sigma$ -Achse schließt sie den Winkel  $\Phi$  ein. Die Richtungen der Hauptspannungen seien gegeben. Der Pol  $R$  wird erhalten, indem wir durch

die Punkte  $S_1$  und  $S_3$  Parallelen zu diesen Richtungen ziehen; der Schnittpunkt mit dem Spannungskreis ergibt den Pol  $R$ . Ändert sich die Richtung des untersuchten Flächenelements um einen Betrag  $\Delta\alpha$ , dann beträgt die Spannung  $p + \Delta p_1$ ; dies wird durch die Strecke  $\overline{OA'}$  dargestellt. Punkt  $A'$  wird erhalten, wenn wir durch den Pol eine Gerade ziehen, die mit  $\overline{RA}$  den Winkel  $\Delta\alpha$  einschließt. Verbinden wir nun den Punkt  $A$  mit dem Mittelpunkt  $O_1$  des Kreises, dann schneidet diese Gerade  $\overline{O_1A}$  die Gerade  $\overline{OA'}$  im Punkt  $D$ . Der Winkel  $\angle AO_1A'$  beträgt  $2\Delta\alpha$ . Aus dem Bild liest man

$$p + \Delta p_1 = \overline{OA'} = \overline{OD} + \overline{DA'} = p + \overline{O_1A'} \sin 2\Delta\alpha$$

und

$$\overline{O_1A'} = \overline{O_1A} = p \tan \Phi$$

ab. Vollzieht man den Grenzübergang  $\Delta\alpha \rightarrow dz$ , dann folgt

$$dp_1 = 2 p \tan \Phi \cdot dz. \quad (13)$$

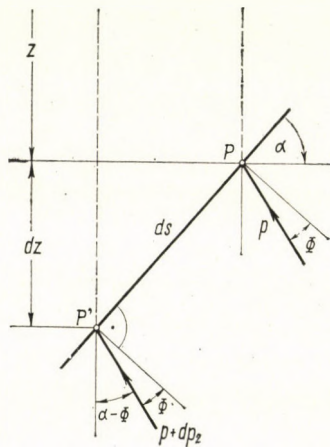


Bild 10. Bogenelement einer ebenen Gleitfläche

Der Wert von  $dp_2$  läßt sich durch die Untersuchung eines Elementes einer ebenen Gleitfläche bestimmen; dabei müssen wir die Schwere berücksichtigen.

Im Punkte  $P$  ist die resultierende Spannung  $p$ . Es wirken keine äußeren Kräfte und die resultierende Spannung ändert sich an der Gleitfläche nur infolge des Eigengewichtes. Die Zunahme der lotrechten Spannung zwischen  $P$  und  $P'$  beträgt  $\gamma \cdot dz$  (Bild 10); der Mohrsche Kreis verschiebt sich nach rechts, bleibt aber mit der Coulombschen Geraden auch weiter in Berührung (Bild 11). Durch die Geometrie des Bildes 11 können wir die Zunahme  $dp_2$  der



resultierenden Spannung ausdrücken durch

$$dp_2 = \gamma \cdot dz \frac{\sin(\alpha - \Phi)}{\sin \Phi} .$$

Da

$$ds = dz / \sin \alpha$$

ist, folgt somit

$$dp_2 = \gamma \cdot ds \cdot \sin(\alpha - \Phi). \tag{14}$$

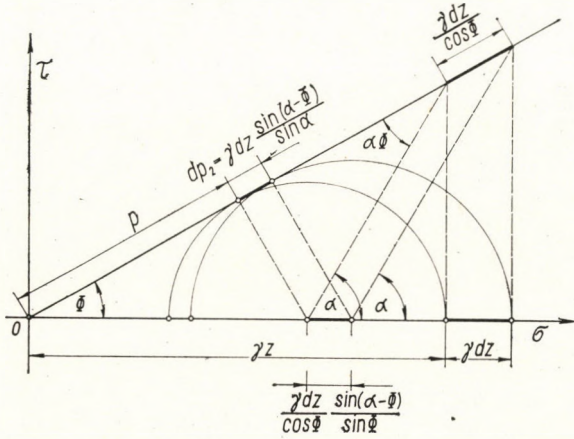


Bild 11. Zunahme der resultierenden Spannung infolge des Eigengewichtes

Die totale Zunahme der resultierenden Spannung aus (13) und (14) beträgt daher

$$dp = dp_1 + dp_2 = 2p \tan \Phi \cdot dx + \gamma \cdot ds \cdot \sin(\alpha - \Phi),$$

oder

$$\frac{dp}{ds} = 2\gamma \tan \Phi \frac{dx}{ds} + \gamma \sin(\alpha - \Phi). \tag{15}$$

Diese Gleichung ist in der Erddruckliteratur als die *Köttersche Gleichung* (KÖTTER, 1888) bekannt. In den Fragen des Erddrucks hat sie sowohl in theoretischer wie auch in praktischer Hinsicht sehr große Bedeutung. Was die Lösungen und die Anwendung dieser Gleichung anbelangt, sei hier auf die Literatur hingewiesen (KÉZDI, 1962).

### 5. Die Berücksichtigung der Formänderungen

Im folgenden soll darauf hingewiesen werden, wie die Formänderungen in den bodenmechanischen Lösungen berücksichtigt werden können.

Eine der grundlegenden Voraussetzungen der Theorien der Plastizitätslehre ist die Inkompressibilität des Materials, das sich in plastischem Fließen

befindet. Die Geschwindigkeit der Bewegung kann auf Grund dieser Eigenschaft geprüft werden. Die Annahme der Raumbeständigkeit ist bei gesättigten Stoffen gültig, wenn der Bruch ohne Entwässerung, das heißt ohne Eintritt einer Konsolidierung vor sich geht; diese Materialien können also nach der Terminologie der Plastizitätslehre als *Trescasche* Materialien genannt werden; die kohäsionslosen Stoffe sind dagegen zu den *Prandtl—Reusschen* Materialien einzureihen. Die Raumbeständigkeit hingegen, welche bei den bindigen Böden, wie es oben erwähnt wurde, fast streng gültig ist, kann doch bei Materialien mit

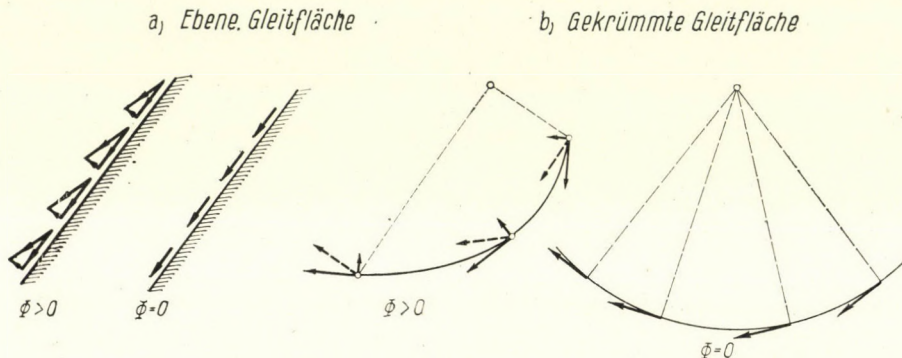


Bild 12. Die Verschiebungskomponenten in den Fällen ebener und gekrümmter Gleitflächen bei Materialien mit den Eigenschaften  $\phi > 0$  bzw.  $\phi = 0$

Reibung nicht angenommen werden. Ein Material mit innerer Reibung muß sich im Falle des Bruches auflockern, wie das durch die Anwendung des *Miseschen* Fließpotentials einfach bewiesen werden kann. Diese Forderung zieht dagegen die Tatsache nach sich, daß die Gleitlinie entweder eine *Gerade* oder eine *logarithmische Spirale*, aber kein Kreis sein kann, der Verschiebungsvektor muß ja im Falle einer Ausdehnung — und diese tritt bei  $\Phi > 0$  immer auf — eine zur Gleitlinie parallele und ebenso eine senkrechte Komponente haben (Bild 12). In bindigen Böden kann die Gleitlinie ebenfalls eine Gerade sein; da aber während des Bruches eine Volumenänderung stattfindet, ist es möglich, daß die Gleitlinie auch ein *Kreis* wird.

Untersuchen wir im Falle  $\Phi = 0$  die im Laufe der Bewegung auftretenden Geschwindigkeiten und das ganze Geschwindigkeitsfeld auf Grund des neulich erschienenen Werkes von BENT HANSEN (1965). Die plastischen Formänderungen werden durch die Spannungen nicht eindeutig bestimmt; man muß die Forderung der Raumbeständigkeit und auch die Bedingung berücksichtigen, daß die Richtungen der Hauptspannungen und der Hauptdehnungen zusammenfallen müssen.

Die Spannungs- und Formänderungskomponenten können nach Bild 13 ermittelt werden.  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$ , die spezifischen Verschiebungen der Linien der Richtung  $x$  und  $y$ , sind bei einer Verkürzung positiv.  $\varepsilon_{xy}$ , die Hälfte der Winkel-

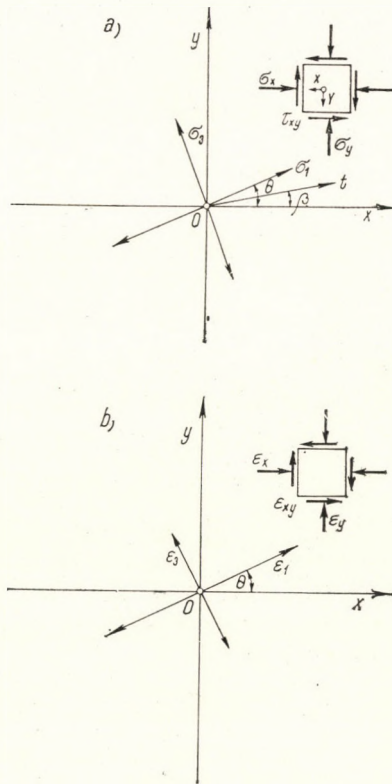


Bild 13. Die Annahme der Koordinatensysteme. a — Spannungen; b — Ermittlung der Formänderungen

verzerrung des von den positiven  $x$ - und  $y$ -Achsen gebildeten rechten Winkels wird positiv, wenn der Winkel sich vergrößert.

Werden die Formänderungen im Mohrschen Kreis dargestellt (Bild 14), so zeigt sich, daß die Forderung der Raumbeständigkeit bedeutet, daß der durchschnittliche Wert der plastischen Verlängerung gleich Null ist, dabei ist noch der Mittelpunkt des Kreises bekannt. Es bleiben also nur zwei unbekannte Größen: der Halbmesser  $\varepsilon$  des Kreises, dieser wird durch die größte Schubformänderung gegeben, und der Winkel  $\theta$ . Letzterer kann auf Grund des Spannungszustandes ermittelt werden, es ist also nur  $\varepsilon$  unbekannt. Aus dem Bild kann folgendes abgelesen werden:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon \cdot \cos 2\theta, \\
 \varepsilon_y &= -\varepsilon \cdot \cos 2\theta, \\
 \varepsilon_{xy} &= \varepsilon \cdot \sin 2\theta.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Wollen wir diese Beziehungen zur Bestimmung des Formänderungszustandes anwenden, so muß  $\varepsilon$  auf Grund der Kompatibilitätsgleichung ermittelt

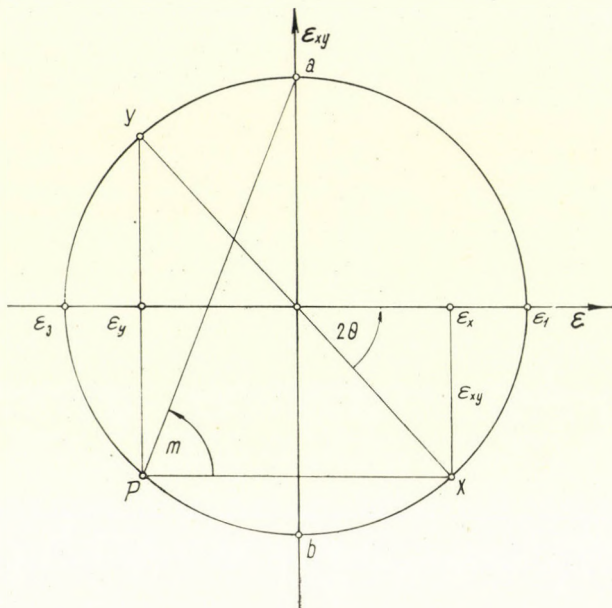


Bild 14. Der Mohrsche Kreis der Formänderungen

werden:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

Diese Methode ist aber zur Berechnung wenig geeignet; statt dieser können die Berechnungen unmittelbar auf Grund des Geschwindigkeitsfeldes durchgeführt werden, dann wird die vorstehende Gleichung identisch befriedigt.

Das Geschwindigkeitsfeld ist nach Bild 15 durch die Geschwindigkeitskomponenten  $u_x$  und  $u_y$  bestimmt; mit Hilfe dieser ergeben sich die Formänderungen aus den nachfolgenden Abhängigkeiten folgendermaßen

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Nehmen wir  $u_x$  und  $u_y$  in der Ebene  $xy$  einer gegebenen Kurve entlang als bekannt an. Die partiellen Ableitungen  $\partial u_x / \partial y$  und  $\partial u_y / \partial x$  sind in der Nähe dieser Kurve auf Grund der Bedingung der Raumbeständigkeit zu bestimmen.

Demnach ist:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

und aus der Koinzidenz der Hauptrichtungen folgt, daß

$$\sin 2\theta \frac{\partial u_x}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial u_x}{\partial y} - \cos 2\theta \frac{\partial u_y}{\partial x} - \sin 2\theta \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (20)$$

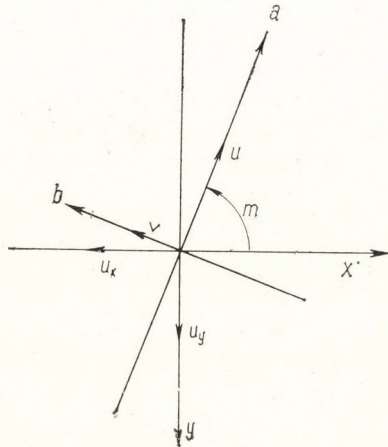


Bild 15. Die Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten

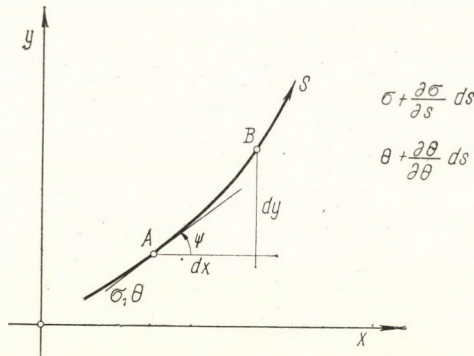


Bild 16. Die Formänderungskennlinie

und auf Grund der Änderung von  $u_x$  und  $u_y$  der Kurve entlang (Bild 16):

$$\begin{aligned} \cos \psi \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sin \psi \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\partial u_x}{\partial s}, \\ \cos \psi \frac{\partial u_y}{\partial x} + \sin \psi \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial s}. \end{aligned} \quad (21)$$

Die charakteristischen Richtungen können erhalten werden, wenn wir die Koeffizientendeterminante gleich Null setzen; diese Bedingung ergibt die folgende Gleichung:

$$\sin^2 \psi \cdot \cos 2 \Theta - 2 \sin \psi \cdot \cos \psi \cdot \sin 2 \Theta - \cos^2 \psi \cdot \cos 2 \Theta = 0 . \quad (22)$$

Daraus kann  $\tan \psi$  berechnet werden:

$$\tan \psi = \begin{cases} \tan \left( \Theta + \frac{\pi}{4} \right) = \tan m , \\ \tan \left( \Theta + \frac{3}{4} \pi \right) = \tan \left( m + \frac{\pi}{4} \right) . \end{cases} \quad (23)$$

Die so erhaltenen Richtungen sind die Formänderungskennlinien (Bild 16). Die Werte von  $u_x$  und  $u_y$  erhalten wir aus der folgenden Gleichung:

$$\cos \psi \frac{\partial u_x}{\partial s} + \sin \psi \frac{\partial u_y}{\partial s} = 0 . \quad (24)$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die Dehnung entlang der Gleitlinien gleich Null ist. Dies kann übrigens auch auf Grund des Mohrschen Kreises der Formänderungen festgestellt werden. Setzen wir in die obige Gleichung den früher abgeleiteten Wert, dann erhalten wir für das Geschwindigkeitsfeld:

$$\begin{aligned} \cos m \frac{\partial u_x}{\partial s_a} + \sin m \frac{\partial u_y}{\partial s_a} &= 0 , \\ - \sin m \frac{\partial u_x}{\partial s_b} + \cos m \frac{\partial u_y}{\partial s_b} &= 0 . \end{aligned} \quad (25)$$

Dagegen ist es zweckmäßiger, statt  $u_x$  und  $u_y$  mit den in der Richtung der Gleitlinien  $a$  und  $b$  geltenden Werten  $u$  und  $v$  zu rechnen. Diese können aus  $u_x$  und  $u_y$  mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} u &= -u_x \cdot \cos m - u_y \cdot \sin m , \\ v &= u_x \cdot \sin m - u_y \cdot \cos m , \end{aligned} \quad (26)$$

oder

$$\begin{aligned} u_x &= -u \cdot \cos m + v \cdot \sin m , \\ u_y &= -u \cdot \sin m - v \cdot \cos m \end{aligned} \quad (26a)$$

errechnet werden. Nach Einsetzung dieser Beziehungen in die obige Formel des Geschwindigkeitsfeldes erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s_a} - v \frac{\partial m}{\partial s_b} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial s_a} + u \frac{\partial m}{\partial s_b} &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

oder nach Umformung

$$\begin{aligned} du - v dx &= 0, \\ dv - u dx &= 0, \end{aligned} \quad (27a)$$

wo  $\alpha$ , wie früher, den Winkel zwischen der größeren Hauptspannung und der  $x$  Achse bedeutet. So erhielten wir die Beziehungen zwischen den Gleitlinien und den Verschiebungsgeschwindigkeiten. Aus der Gleichung geht hervor, daß nicht nur die Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten, sondern auch die Werte der Geschwindigkeitskomponenten selbst eine Unstetigkeit haben können.

#### SCHRIFTTUM

- BENT HANSEN, J.: A Theory of Plasticity for Ideal Frictionless Materials. Teknisk Forlag, Copenhagen (1965).
- BISHOP, A. W.—ELDIR, A. K. G.: The Effect of Stress History on the Relation between  $\Phi$  and Porosity in Sand. *Proc. 3rd. Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.* (1953), 100.
- COULOMB, CH. R.: Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mém. Acad. Royal prés. p. div. sav. T. VII.* Paris (1773).
- GOLUSCHKEWITSCH, S. S.: Statik der Grenzzustände von Erdmassen (russisch). Gostechteoristdat, Moskau (1957).
- HABIB, P.: Influence de la variation de la contrainte principale moyenne sur la résistance au cisaillement des sols. *Proc. 3rd. Int. Conf. Soil. Mech. and Found. Eng.* 1 (1953) 131.
- HARTMANN, L.: Distributions des déformations dans les métaux soumis à des efforts. Berger-Levrault, Paris, 1896.
- KÉZDI, Á.: Erddrucktheorien. Springer Verlag; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962.
- KÉZDI, Á.: Szemcsés anyagok nyírószilárdsága (Schubfestigkeit der körnigen Stoffe). *Mélyépitéstudományi Szemle*, 16 (1966).
- KIRKPATRICK, W. M.: The Condition of Failure for Sands. *Proc. 4th. Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.* 1 (1957) 172.
- KJELLMAN, W.: Report on an Apparatus for Consummate Investigation of the Mechanical Properties of Soils. *Proc. Int. Soc. Conf. Soil. Mech. and Found. Engg.* 2 (1936) 16.
- KÖTTER, F.: Über das Problem der Erddruckbestimmung. *Verhandl. Phys. Ges. Berlin* (1888) 7.
- LÉVY, M.: Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement. *J. Mathém. de Liouville* (1873).
- LÜDERS: Dinglers Polytechn. Journal (1854).
- MOHR, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. 2. Aufl. W. Ernst & Sohn, Berlin 1914.
- RANKINE, J. W. M.: On the Stability of Loose Earth. *Transactions, Roy. Soc. London* (1857), 147.
- SOBOTKA, Z. (1961): The Slip Lines and Slip Surfaces in the Theory of Plasticity and Soil Mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. 14 (1961).

- СОВОТКА, Z.: The Limiting Equilibrium of Nonhomogeneous Soils. *Proc. IUTAM Symp. Warsaw, 1958*, Pergamon Press, Oxford, London.
- СОКОЛОВСКИ, V. V.: Statics of Granular Media. Pergamon Press, Oxford—London 1965.

**Theory of Plasticity of Granular Substances.** The theory of plasticity has been applied for a long time extensively to the investigation of granular materials. The civil engineer examines the stability of earthworks, the value of earth pressure, the bearing capacity of soils, etc., with the methods of the theory of plasticity; a number of procedures of this theory originated in the course of investigation of granular materials. For the application in soil mechanics the first problem was also the fixation of the rupture-flow condition. Though recently several rupture conditions have been suggested with a more precise approach of its real behaviour, it is, however, the condition of Coulomb-Mohr which is mostly applied even in our days. The paper shows a new procedure for the representation of the rupture condition in case of a three-dimensional stress state; with the aid of this the effect of the stress-vector curve upon the rupture condition can be suggestively investigated.

**Théorie de la plasticité des substances granulaires.** L'application de la théorie de la plasticité dans la mécanique des matériaux granulaires est aussi vieille que générale. Pour examiner la stabilité des constructions en terre, la valeur de la poussée et la capacité portante des sols, etc., l'ingénieur utilise les méthodes de la théorie de la plasticité — bon nombre de procédés utilisés par cette dernière ont été justement mis au point au cours de l'examen des matériaux granulaires. Du point de vue de l'application à la mécanique des sols, le premier problème consiste, de même, dans l'établissement de la condition de rupture-fluage. Bien qu'on ait proposé récemment plusieurs conditions de rupture approchant de plus près le comportement réel, c'est la condition de Coulomb-Mohr dont l'application reste la plus générale. L'étude présente un nouveau procédé pour la représentation de la condition de rupture en cas d'état de tension spatial. A l'aide de ce procédé, l'influence de la courbe vectorielle de contrainte sur la condition de rupture peut être examinée d'une manière suggestive.

**Теория пластичности сред зернистой структуры.** В механике сред зернистой структуры теория пластичности, с одной стороны, применяется давно, а с другой стороны, применяется очень широко. Устойчивость земляных сооружений, величина земляного давления, допустимая нагрузка на грунты и т. д. определяются методами теории пластичности; ряд методов теории пластичности был разработан в связи с исследованием материалов зернистой структуры.

С точки зрения применения теории пластичности в механике грунтов первым вопросом является фиксация условия излома — течения. Несмотря на то, что в последнее время предложено ряд условий излома, которые лучше приближаются к действительности, все же и сегодня еще наиболее общепринятым условием является условие Coulomb—Mohr. Для изображения условия излома в случае пространственного состояния нагрузки в работе демонстрируется новый метод; при помощи этого метода можно наглядно анализировать воздействие векторной кривой напряжения на условие излома.



## STABILITY OF ANISOTROPIC HYPERBOLIC PARABOLOIDAL SHELLS

E. DULÁCSKA

TOWN PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received September 2, 1966]

Author deals with the determination of the critical load of anisotropic hyperbolic paraboloidal shells with the aid of the theory of first order. He determines the critical load of the shell constructed of torsioned corrugated board, and points out that this load is identical with that of an isotropic shell of the same plate thickness.

### 1. Introduction

The stability of the isotropic hyper shell stiffened on its perimeter and loaded with uniformly distributed surface load, is a problem already solved [1, 2, 3]. It has been proved by tests [4] that the buckling of the hyperbolic paraboloidal shell occurs when the critical load determined with the aid of the theory of first order [1, 2, 3] is reached and the major deformations do not decrease the critical load.

Anisotropic hyper shells may be applied very advantageously in practice. These are constructed by mounting on ribs lying along straight generatrices or of distorted corrugated plates [5]. Figure 1 shows such a shell structure constructed of corrugated polyester plates designed by the author. In this paper the critical load of these shells will be determined with the aid of the theory of first order.

### 2. Assumptions

It is assumed that the material of the studied shell is orthotropic and its coefficient of transversal contraction is equal to zero. It is also assumed that the principal axes of the orthotropy are lying in the planes  $x, z$  and  $y, z$ .

Let us assume:

- a) that the shell is shallow enough to permit the analysis with the aid of the theory of shallow shells;
- b) that deformations of the shell are small, accordingly, the theory of first order describing small deformations, may be applied;
- c) that the orthotropic shell is, up to the moment of buckling, in membrane state; the values of the membrane forces are constant, and the equilib-

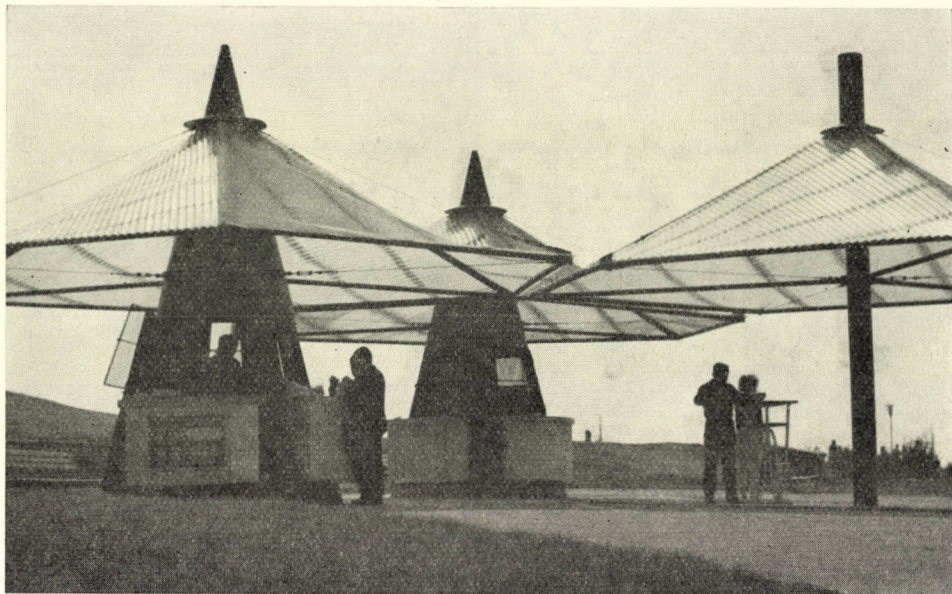


Fig. 1

rium on the edge of the shell is assured by external forces compensating the internal forces.

d) It is assumed that the shell is subjected only to uniformly distributed load,  $p$ , parallel with the  $z$  axis.

The equation of the midsurface of the shell is:

$$z_0 = \gamma xy, \quad (1)$$

consequently the partial derivatives of second order of the middle surface of the shell have constant values.

The projections of the internal forces may be expressed by the derivatives of second order of the stress function. Thus:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

By critical load, is meant that load permitting the static condition and an adjacent static condition only differs by very little from the former.

### 3. Notations

$x, y, z$  axes of the applied orthogonal co-ordinate system;

$w$  displacement of the middle surface of the shell in direction  $z$

- ' sign of differentiation with respect to  $x$ ;  
 • sign of differentiation with respect to  $y$ ;  
 for instance  $\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} = w^{IV}$ ;  
 $K_x, K_y$  flexural stiffness of the shell wall in the directions  $x$  and  $y$ ;  
 $K_{xy}$  torsional stiffness of the shell wall;  
 $D_x, D_y$  elongation stiffness of the shell wall;  
 $D_{xy}$  shear stiffness of the shell wall;  
 On isotropic and homogeneous shell  
 $K_x = K_y = K_{xy} = K = E \delta^3 / 12$  and  
 $D_x = D_y = D_{xy} = D = E \delta$ , where  $E$  is the Young-modulus and  $\delta$  is the thickness of the shell;  
 $F$  stress function;  
 $F_0$  stress function of the constant membrane forces caused by the uniformly distributed load;  
 $\Phi$  stress function of the membrane forces occurring at the buckling.

#### 4. Differential equation of buckling

The equilibrium and compatibility equations of the anisotropic shallow shell are [7]:

$$K_x w^{IV} + 2 K_{xy} w'''' + K_y w'' - z'' F'' + 2 z' F'' - z'' F'' - p = 0, \quad (2)$$

$$\frac{F^{IV}}{D_y} + \frac{2 F''''}{D_{xy}} + \frac{F''}{D_x} + z'' w'' - 2 z' w'' + z'' w'' = 0. \quad (3)$$

On the basis of the assumption concerning the internal forces we obtain the expression:

$$F_0 = c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 xy. \quad (4)$$

Besides the membrane deformation will be neglected i.e. it is assumed that

$$w_0 = 0. \quad (5)$$

By the way, it is to be noted that  $w_0$  drops out in any case in the course of the deduction.

Accordingly, the equations of the membrane state, after substituting the values (4) and (1), (5) into (2) and (3) will be as follows:

$$2 \gamma F_0'' - p = 0, \quad (6)$$

$$\frac{F_0^{IV}}{D_y} + \frac{2 F_0''''}{D_{xy}} + \frac{F_0''}{D_x} = 0, \quad (7)$$

that is, the requirements of compatibility are satisfied.

Owing to the deformations caused by buckling, the geometry of the shell

changes. The changed values are the following:

$$z = z_0 + w,$$

and from this:

$$z'' = w''; \quad z''' = w'''; \quad z'''' = \gamma + w'''' . \quad (8, 9, 10)$$

The new form of the stress function is:

$$F = F_0 + \Phi. \quad (11)$$

Introducing the values (8), (9), (10), (11) into the equations (2), (3) of the shallow shell and neglecting the values

$$w'' \Phi''; w'' \Phi''', w' \Phi''', w'^2, w'' w'',$$

being small values of higher order, the following equations are obtained:

$$K_x w^{IV} + 2 K_{xy} w'''' + K_y w'' + 2 \gamma F_0'''' + 2 w' F_0'' + 2 \gamma \Phi'' - p = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\Phi^{IV}}{D_y} + \frac{2 \Phi''''}{D_{xy}} + \frac{\Phi''}{D_x} + \frac{F_0^{IV}}{D_y} + \frac{2 F_0''''}{D_{xy}} + \frac{F''}{D_x} - 2 \gamma w'' = 0. \quad (13)$$

Detaching the equations (6) and (7) of the membrane state, and considering that  $F_0'' = -n_{xy}$ , the equilibrium and compatibility differential equations of buckling are the following:

$$K_x w^{IV} + 2 K_{xy} w'''' + K_y w'' - 2 n_{xy} w'' = -2 \gamma \Phi'', \quad (14)$$

$$\frac{\Phi^{IV}}{D_y} + \frac{2 \Phi''''}{D_{xy}} + \frac{\Phi''}{D_x} = 2 \gamma w''. \quad (15)$$

Differentiating equation (15) with respect to  $x$  and  $y$ , and substituting the necessary derivatives of  $\Phi$  from (14) into (15), we obtain the differential equation of eighth order of the buckling of the studied shell. This is the following:

$$\begin{aligned} w^{VIII} \left( \frac{K_x}{D_y} \right) + w^{VI} \left( \frac{2 K_{xy}}{D_y} + \frac{2 K_x}{D_{xy}} \right) + \\ + w^{IV} \left( \frac{K_x}{D_x} + \frac{4 K_{xy}}{D_{xy}} + \frac{K_y}{D_y} \right) + w'' \left( \frac{2 K_{xy}}{D_x} + \frac{2 K_y}{D_{xy}} \right) + \\ + w'''' \left( \frac{K_y}{D_x} \right) - 2 n_{xy} \left( \frac{w^V}{D_y} + \frac{2 w''''}{D_{xy}} + \frac{w''''}{D_x} \right) + 4 \gamma^2 w'''' = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

The solution — ensuing out of the tests and from the condition  $n_x = -n_y$  — is such that the wavelength of buckling extends the whole breadth of the shell and in the other direction a number of half waves occur. Instead of this, in this paper it is assumed that in the second direction many half waves arise, but in the first direction deformation takes place without curvature. It is evident that the error caused by this assumption, is negligible, and this neglect is to the advantage of safety. Since the shell is orthotropically parallel with the generatrices and not with the principal curvature directions, therefore, we turn the direction of the waves away from the direction of the principal curvature.

Accordingly, the solution of the differential equation (16) may be obtained as follows:

$$w = w_0 \sin A(y \tan \alpha - x). \quad (17)$$

Substituting the solution (17) into equation (16), we get the characteristic equation:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{K_x}{D_y} \right) A^8 + \left( \frac{2 K_{xy}}{D_y} + \frac{2 K_x}{D_{xy}} \right) A^8 \tan^2 \alpha + \\ & + \left( \frac{K_x}{D_x} + \frac{4 K_{xy}}{D_{xy}} + \frac{K_y}{D_y} \right) A^8 \tan^4 \alpha + \left( \frac{2 K_{xy}}{D_x} + \frac{2 K_y}{D_{xy}} \right) A^8 \tan^6 \alpha + \quad (18) \\ & + \left( \frac{K_y}{D_x} \right) A^8 \tan^8 \alpha - 2 n_{xy} \left( \frac{A^6 \tan \alpha}{D_y} + \frac{2 A^6 \tan^3 \alpha}{D_{xy}} + \frac{A^6 \tan^5 \alpha}{D_x} \right) + \\ & + 4 \gamma^2 A^4 \tan^2 \alpha = 0. \end{aligned}$$

From equation (18)  $n_{xy}$  can be expressed. The critical shear force  $n_{xy \text{ crit}}$  may be obtained by substituting the values  $A^2$  and  $\tan \alpha$ , determined by the minimum conditions into the expression of  $n_{xy}$ :

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial A^2} = 0; \quad \frac{\partial n_{xy}}{\partial \tan \alpha} = 0.$$

With the aid of the critical shear force  $n_{xy \text{ crit}}$  the critical load  $p_{\text{crit}}$  may be calculated from relation (6).

The determination of the critical load should be presented as an example by the case of an unstiffened corrugated plate shell.

### 5. Critical load of a corrugated plate shell

Let us assume that the waves of the corrugated plate are shallow, consequently the wavelength  $s$  may be replaced by its projection. On the basis of this assumption the following values of stiffness can be obtained:

$$K_x = \frac{E\delta^3}{12}; \quad K_{xy} = \frac{E\delta^3}{12}; \quad (19a)$$

$$K_y = \frac{E\delta^3}{12} + \frac{E\delta}{s} \int_0^s \eta^2 d\xi = \frac{E\delta^3}{12} \left( 1 + \frac{12}{\delta^2} \int_0^1 \eta^2 d\xi \right) = \frac{E\delta^3}{12} (1 + \Theta).$$

From the relations of the straightening arch:

$$\frac{1}{D_x} = \frac{1}{E\delta} + \frac{12s}{E\delta^3} \int_0^s \eta^2 d\xi = \frac{1}{E\delta} \left( 1 + \frac{12}{\delta^2} \int_0^1 \eta^2 d\xi \right) =$$

$$= \frac{1}{E\delta} (1 + \Theta), \quad \text{and} \quad \frac{1}{D_y} = \frac{1}{D_{xy}} = \frac{1}{E\delta}. \quad (19b)$$

The stiffness values with the notations  $K = E\delta^3/12$  and  $D = E\delta$  are:

$$K_x = K_{xy} = K; \quad K_y = K(1 + \Theta); \quad (20)$$

$$D_x = \frac{D}{1 + \Theta}; \quad D_{xy} = D_y = D.$$

By introducing the values (20) into the characteristic equation (18), by simplifying and ordering, the value of  $n_{xy}$  is:

$$n_{xy} = A^2 K \frac{0,5 + 2\tan^2 \alpha + (3 + \Theta)\tan^4 \alpha + 2(1 + \Theta)\tan^6 \alpha + 1/2(1 + \Theta)^2 \tan^8 \alpha}{\tan \alpha + 2 \tan^3 \alpha + (1 + \Theta)\tan^5 \alpha} +$$

$$+ \frac{2\gamma^2 D}{A^2} \cdot \frac{\tan \alpha}{1 + 2 \tan^2 \alpha + (1 + \Theta)\tan^4 \alpha}. \quad (21)$$

This may be written by replacing the fractions containing  $\tan \alpha$  by the notations  $B$  and  $H$ , as follows:

$$n_{xy} = A^2 KB + 2\gamma^2 D \frac{H}{A^2}. \quad (22)$$

From the condition of extreme value

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial (A^2)} = KB - 2\gamma^2 D \frac{H}{(A^2)^2} = 0$$

it follows that

$$A^2 = \sqrt{\frac{2\gamma^2 DH}{KB}}.$$

Substituting the value of  $A^2$  into (22) we obtain:

$$n_{xy \text{ crit}} = 2 \gamma \sqrt{2KD} \sqrt{BH}. \quad (23)$$

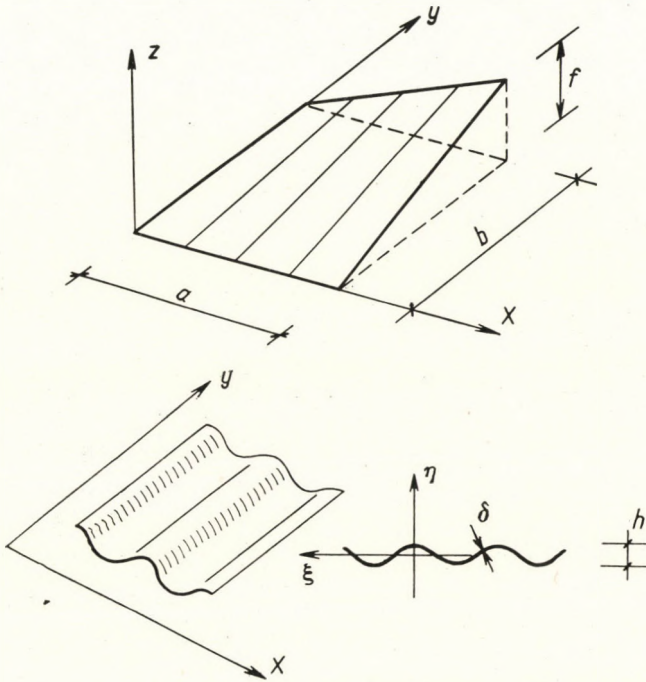


Fig. 2

By substituting the values of  $B$  and  $H$  into the expression  $\sqrt{BH}$  and by simplifying one obtains:

$$\sqrt{BH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (24)$$

and thus  $\tan \alpha$  drops out of the deduction. This means that the critical load does not depend on the value of  $\alpha$ .

On substituting (24) into (23) we obtain

$$n_{xy \text{ crit}} = 2 \gamma \sqrt{DK} = \frac{\gamma E \delta^2}{\sqrt{3}}. \quad (25)$$

By using the notations of Figure 2,

$$\gamma = \frac{f}{ab},$$

and by substituting that into equation (6), the critical load is:

$$P_{\text{crit}} = \frac{E \delta^2 f^2}{\sqrt{3} a^2 b^2} \quad (26)$$

As the formula (26) shows, the critical load of the corrugated plate is the same as that of an uncorrugated shell [1, 2, 3]. The reason for this is that, owing to the corrugation, flexural stiffness increases in one direction, but the elongation stiffness decreases proportionally in the other direction.

#### REFERENCES

1. RALSTON, A.: On the Problem of Buckling of a Hyperbolic Paraboloidal Shell Loaded by its Own Weight. *J. Math. Phys* (1956), 35.
2. REISSNER, E.: On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells. *Jour. of Boston Soc. C. E.* (1955), 100—133.
3. DULÁCSKA, E.: Héjszerkezetek kritikus terhének meghatározása (Determination of Critical Loads of Shell Structures). *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* (1966).
4. KENNETH, M. L.: Study of Stability in the Hyperbolic Paraboloid. *Journal of the Mechanics Division. ASCE* (92) No EM 1, 169—181
5. NILSON, H. A.: Light Cage Steel Sheel Roofs. World Conference on Shell Structures. Proceedings. San Francisco, Cal. 1962.
6. WLASOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 386
7. WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten u. Schalen Afl. VEB. Verlag für Bauwesen. Berlin 1962, 249.

**Stabilität der anisotropischen Hyperbolisch-Paraboloidschale.** Der Verfasser befaßt sich mit der Bestimmung der kritischen Last der Hypar-Schale mit Hilfe der Theorie erster Ordnung. Er ermittelt die kritische Belastung der Schale aus Wellplatte und beweist, daß diese mit der kritischen Belastung der isotropischen Schale von derselben Plattendicke identisch ist.

**Stabilité du voile mince hyperbolique parabolöide anisotrope.** La détermination de la charge totale critique du voile mince hyperbolique parabolöide anisotrope est traitée à l'aide de la théorie du premier ordre. La charge critique du voile mince construit de tôle ondulée distordue est déterminée et l'identité de cette charge et de celle d'un voile mince isotrope d'une même épaisseur de tôle est démontrée.

**Устойчивость анизотропной гиперболической параболоидной оболочки.** Работа занимается определением критической нагрузки анизотропной гиперболической параболоидной оболочки при помощи теории первого порядка. Определяется критическая нагрузка оболочки, изготовленной из искаженного гофрированного листа, в отношении которой показано, что таковая соответствует критической нагрузке изотропной оболочки, имеющей толщину, идентичную толщине листа.



## PHYSICO-CHEMICAL INTERPRETATION OF THE SHEARING PROCESS IN MONTMORILLONITIC CLAYS

EWA STEPKOWSKA-PASZYC, GDANSK

[Manuscript received: September 15, 1966]

Discussing the shearing process it was found that on making certain assumptions it is possible to describe shear strength of clay as is measured in triaxial test as a sum of forces that may be calculated from physico-chemical theories. The coincidence was striking between calculated and measured values in certain range of water content around the plastic limit of Żrecze Małe bentonite with various exchangeable cations.

The assumptions made it possible to calculate theoretical values are as follows:

1. A part of the shear strength of clay is due to intrinsic pressure (TAYLOR, 1948) and this pressure is a double layer repulsion  $p_R$ . Its magnitude may be calculated from Gouy-Chapman double layer theory as:

$$p_R = 2nkT(\cosh Y_d - 1), \quad (1)$$

where

$n$  — number of ions in cubic centimeter in the pore fluid far from particle surface  
 $k$  —  $1.38 \cdot 10^{-16}$  erg/molec  $^{\circ}K$  — Boltzmann constant  
 $T$  — temperature in Kelvin degrees  
 $Y_d$  — dimensionless function of the electric potential in the middle between parallel clay particles.

This part of the shear strength corresponds to Hvorslev's cohesion component  $\kappa\sigma_e$  in the formula:

$$\tau_f = \kappa\bar{\sigma}_e + \bar{\sigma}_n \tan \bar{\Phi} \quad (2)$$

where

$\kappa$  — coefficient (in further considerations  $\kappa$  would have another meaning)  
 $\bar{\sigma}_e$  — effective consolidation pressure  
 $\bar{\sigma}_n$  — effective normal pressure  
 $\bar{\Phi}$  — effective angle of internal friction

2. Independently of double layer repulsion there is acting between clay particles van der Waals attraction  $p_A$  that may be calculated from:

$$p_A = \frac{A}{48\pi} \left( \frac{1}{d^3} + \frac{1}{(d+\delta)^3} - \frac{2}{(d+\delta/2)^3} \right) \quad (3)$$

where

- $A$  — is a constant, which may be assumed as  $10^{-12}$  erg  
 $d$  — half the distance between parallel clay particles  
 $\delta$  — clay particle thickness.

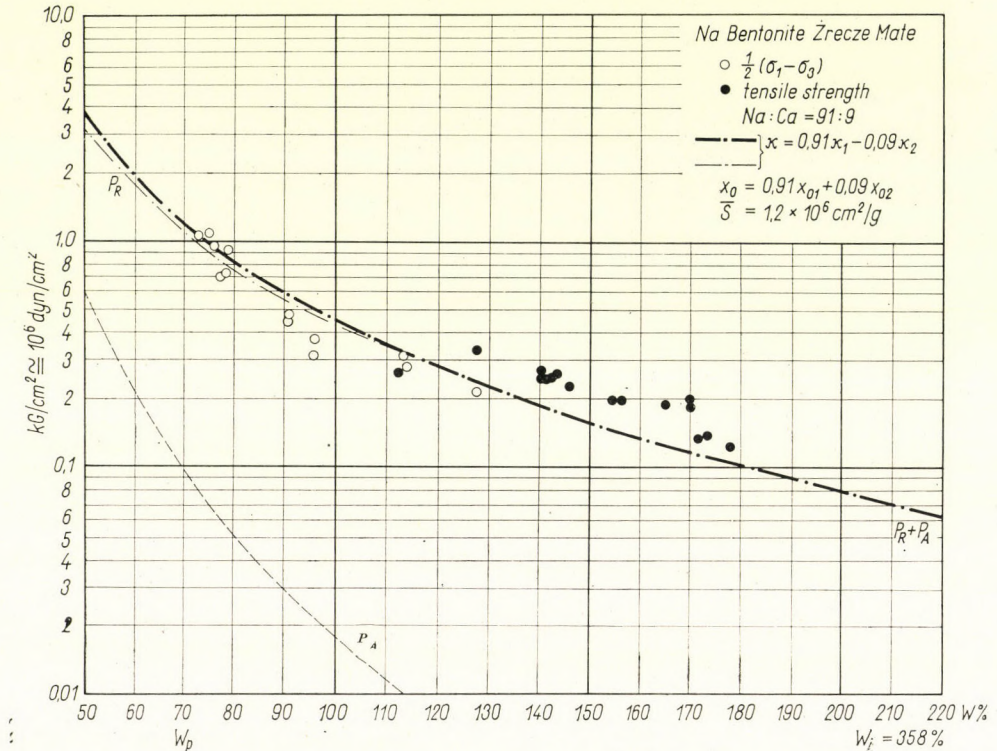


Fig. 1

The van der Waals attraction is of importance in the shear strength only for very small interparticle distances.

3. In the shear plane clay particles are parallel to each other (the increase in particle in preferred orientation in the shear plane has been proved by different methods and by different investigators). The distance between clay particles in the shear plane is a function of the water content and may be calculated from:

$$d = \frac{W - W_a}{\bar{S}} \quad (4)$$

where

- $W$  — water content of the sample in the sheared region  
 $W_a$  — monomolecular layer of water adsorbed on the particle surface  
 $\bar{S}$  — specific surface of clay effective in the shearing process.

4. There is no particle-to-particle contact in the shear plane of montmorillonitic clays except at very small interparticle distances (low water content) and thus, the  $\Phi = 0$  condition may be assumed as being correct. In the  $1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$  failure criterion there is no frictional component for water contents exceeding a certain value and

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)$$

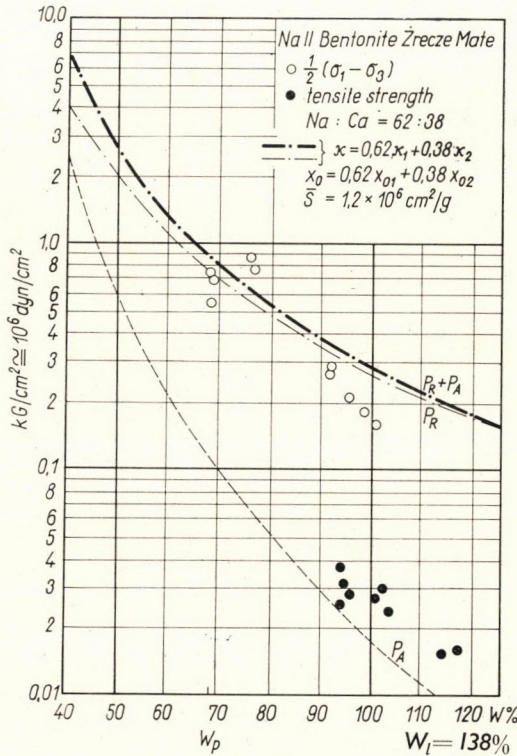


Fig. 2

where  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  are total principal stresses and  $\bar{\sigma}_1$  and  $\bar{\sigma}_3$  are effective principal stresses in the triaxial cell.

5. As the double layer repulsion and the van der Waals attraction are acting independently of one another, the sum of their absolute values (they are acting in opposite directions) may be assumed as responsible for the shear strength. The shear stress must overcome both the intrinsic pressure (double layer repulsion) and interparticle attraction before causing shear.

The calculations were performed for Zrecze Mate bentonite with various exchangeable cations; its properties were measured and published in a previous

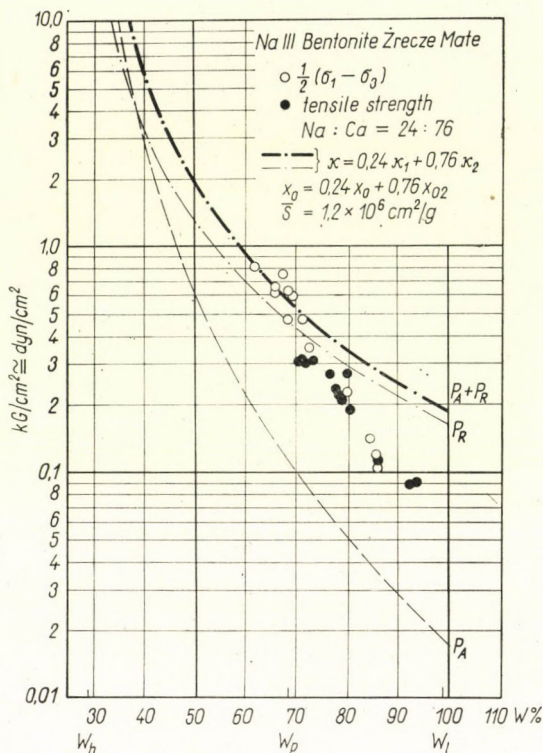


Fig. 3

work (STEPKOWSKA-PASZYC, 1960). The values used for calculations are given in Table I.

X-ray analysis proved the presence of montmorillonite but there may be an interstratification with a vermiculitic type mineral.

Double-layer repulsion and van der Waals attraction were calculated using formula (1) and (3), respectively. Forces acting on permanent dipole and induced dipole in the electric field of neighbouring particles were also calculated, but they were of such a small order that they could be neglected and therefore the calculations are not quoted here.

As  $Y_d$  was greater than one in calculations performed, the Langmuir formula was used:

$$Y_d = 2 \ln \frac{\pi}{\Delta} \quad (5)$$

where

$$\Delta = K(d + K_0) \quad (\text{BOLT, 1955}) \quad (6)$$

$$K \equiv \sqrt{\frac{8 \pi n e^2 z^2}{\epsilon k T}} \quad (7)$$

- $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$  e.s.u. — elementary charge
- $z =$  exchangeable ion valency
- $\epsilon = 80,5$  — dielectric constant of water at 20° C
- $T = 293^\circ K$

$$x_0 = \frac{4 z c_0}{\kappa^2 \Gamma} \tag{8}$$

that is the distance (measured from particle surface inside the particle) of a theoretical plane, where the electric potential  $\psi = \infty$  (BOLT, 1955).

- $c_0$  — concentration in pore fluid far from particle surface in mol/cm<sup>3</sup>.
- $\Gamma$  — surface charge density in equivalents per square centimeter (cation exchange capacity divided by specific surface)
- $S$  — total specific surface was assumed to be equal to the theoretical value for montmorillonite  $7,8 \cdot 10^6$  cm<sup>2</sup>/g. Cation exchange capacity was assumed as being equal to the average sum of exchangeable cations, i.e. 1,07 meq/g except Ca-bentonite, where it was 1,21 meq/g.

**Table I**

*Properties of Zrecze Male bentonite with various exchangeable cations*

Exchangeable ion	Ion content — meq/g				Ion content — fraction			Properties				
	Principal Ca <sup>2+</sup>	H <sub>3</sub> O <sup>+</sup>	Fe or Al	Total	mono-val.	bival.	trival.	W <sub>h</sub>	W <sub>p</sub>	W <sub>1</sub>	W <sub>max</sub>	
Na	96,8	9,7		106,5	0,91	0,09	—	28,6	70	358	1450	
Na I	85,9	21,7		107,7	0,798	0,202	—	27,8	68	177	410	
Na II	65,3	40,0		105,3	0,62	0,38	—	26,5	68	138	310	
Na III	25,5	81,7		107,2	0,24	0,76	—	27,0	69	99	196	
Ca		121,3		121,3	—	1,00	—	26,0	66	94	155	
Mg	107,6			107,6	—	1,00	—	24,8	67	92	160	
K	98,4	9,2		107,6	0,915	0,085	—	15,1	54	71	117	
H <sub>3</sub> O		29,0	78,5	21,4	107,5	0,61	0,225	0,165	31,1	72	97	120
					0,61	0,39						
Fe			109	105,8	105,8	0,507	0,493		28,8	72	96	128
					0,507		0,493					
Al		38,2	61,6	68,0	106,2	0,39	0,22	0,39	28,6	71	99	121
					0,39	0,61						

The exchangeable cations were nearly in all the samples heterogenous (both one- and two-valent cations or even one-, two- and three-valent cations). As  $\kappa$  is proportional and  $x_0$  inversely proportional to the ion valency, their values for particular samples were calculated in the following way:

$$\kappa = a_1 \kappa_1 + a_2 \kappa_2 + a_3 \kappa_3, \tag{9}$$

$$x_0 = a_1 x_{01} + a_2 x_{02} + a_3 x_{03} \tag{10}$$

where  $a_1, a_2$  and  $a_3$  — the ratio of mono-, two- and threevalent cations, respectively which are present in the sample, and  $\kappa_1, \kappa_2$  and  $\kappa_3$  as well as  $x_{01}, x_{02}$  and

$x_{03}$  — are values calculated for mono- two- and three-valent cations, respectively.

In H-, Fe- and Al- bentonite the values  $\kappa$  and  $x_0$  were calculated on the assumption of Fe and Al being three- and two-valent (the possibility of hydrolysis to  $\text{Fe}(\text{OH})^{2+}$  and  $\text{Al}(\text{OH})^{2+}$ ) as the second assumption, gave

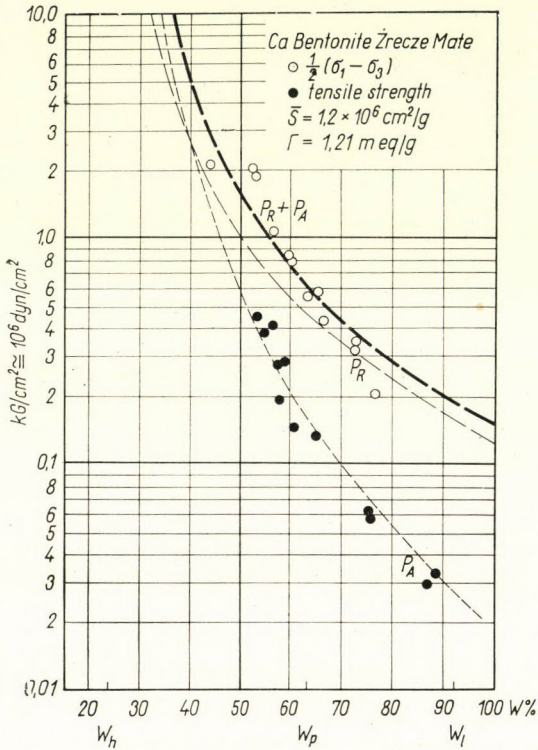


Fig. 4

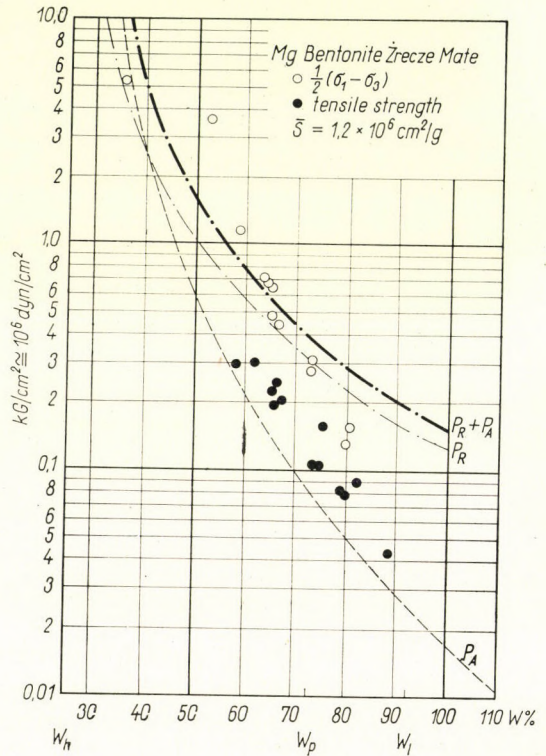


Fig. 5

better consistency with experimental results within a certain water content region.

Half the interparticle distance  $d$  in both formulae (1) and (2) were calculated on the following assumptions:

1. The total specific surface  $S$  of the clay is covered by monomolecular layer of water of the thickness  $3 \text{ \AA}$  and specific gravity  $1 \text{ G/cm}^3$  (the errors performed in too high water molecule diameter assumption, and too low adsorbed water specific gravity assumption, should exclude each other). The calculated water content  $W_a$  was 23,4%. This was some per cents lower than the water content of the sample that adsorbed water at the relative humidity 90%. Thus, the assumed value was not unreasonable.

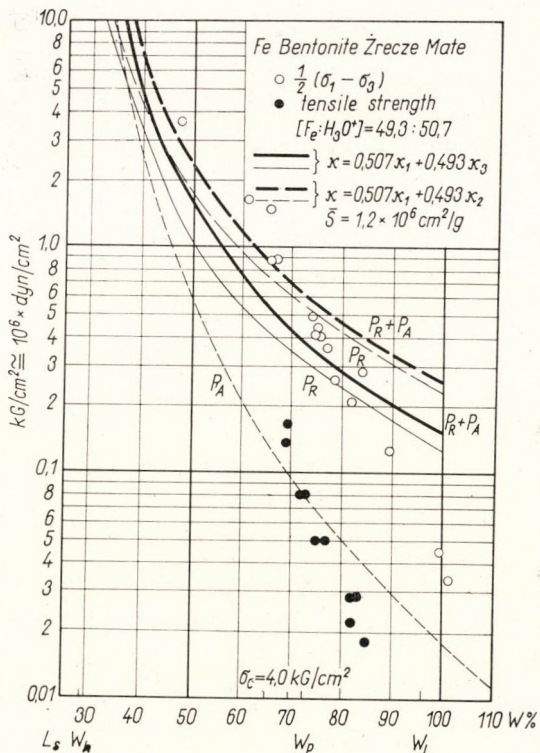


Fig. 6

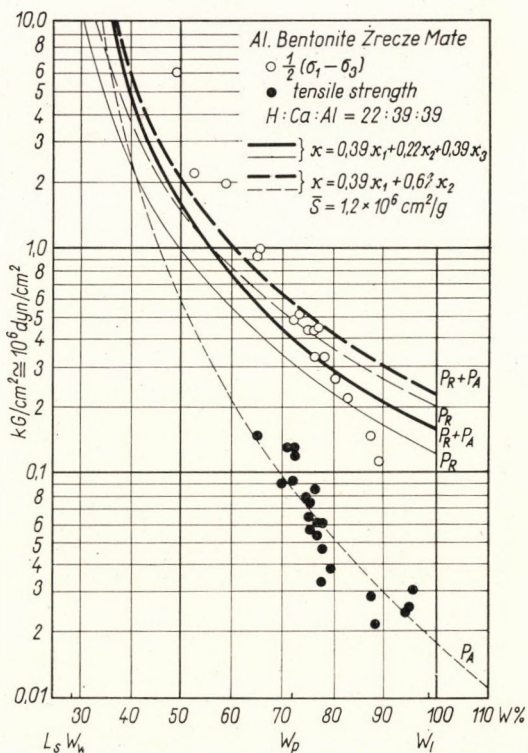


Fig. 7

2. The specific surface  $\bar{S}$  as effective in the shearing process was calculated for Na-bentonite at a water content of 130% assuming  $p_R$  (formula (1)) as equal to the measured shear strength  $1/2(\sigma_1 - \sigma_3)$ . The obtained value was  $1,2 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{g}$  and it was used for all other calculations (except K-bentonite). The assumption that the average bentonite particle is composed of 6 to 7 sheets seems to be reasonable.

The above-mentioned assumptions hold for all bentonite samples except K-bentonite, whose properties were abnormal in many respects. For K-bentonite it was assumed that half the theoretical surface is covered by monomolecular layer of adsorbed water (based on the fact, that  $d_{001}$  distance in air dry sample as measured by X-ray diffraction, was  $12,3 \text{ \AA}$ , whereas that of Ca-bentonite was  $15 \text{ \AA}$ ).  $\bar{S}$  was calculated as  $0,953 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{g}$  on the assumption that at plastic limit  $p_R = 1/2(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)$ . The coincidence between calculated and measured values for K-bentonite is poor.

Shear strength of remolded bentonite samples was measured in quick triaxial test without pore pressure measurement. The  $1/2(\sigma_1 - \sigma_3)$  failure criterion was used and no interparticle contact was assumed, thus the measure-

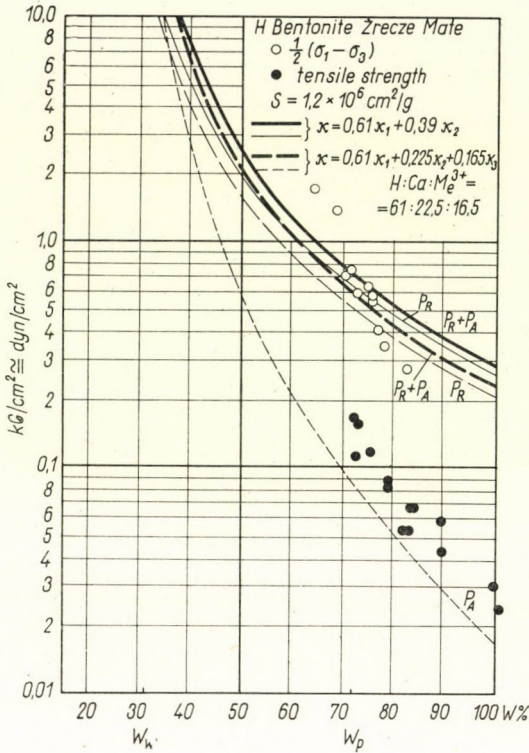


Fig. 8

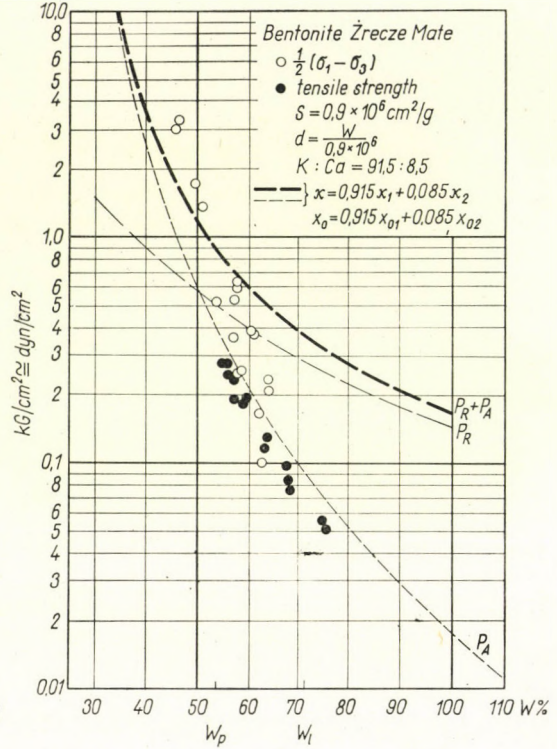


Fig. 9

ment result may be assumed as a correct measure of the shear strength. The average value of  $1/2(\sigma_1 - \sigma_3)$  determined for  $\sigma_3 = 1,0 - 1,5 - 2,0 - 2,5 -$  and  $3,0 \text{ kG/cm}^2$  is given in the graphs, which corresponds to the value determined for  $\sigma_3 = 2,0 \text{ kG/cm}^2$ . The  $\phi$  angle based on total stress analysis varied between 0 and  $1,5^\circ$  for water content greater than 50%.

### Discussion of the results

In all the bentonite samples considered the coincidence between calculated  $p_A + p_R$  and measurement results for water contents around the plastic limit is striking and this coincidence extends over a certain region. Thus, the assumptions given at the beginning of this presentation was highly verified, though it would be careless to state that they are definitely correct. Further checking experiments are needed.

The extension of the *region of coincidence* between experiment and theory varies with the exchangeable cation. Very few measurements were performed at small water contents, but it can be seen that in this water content region



higher shear strength is measured than calculated  $p_R + p_A$ . It may be due to the frictional component that becomes important at low water content.

Excluding Na-bentonite both the *tensile strength* measurement results and *shear strength measurement* results at high water content fall between  $p_A$  and  $p_R$ . In some samples they fall surprisingly close to calculated van der Waals attraction. In Na-bentonite the measured tensile strength is close to (slightly higher than) the calculated double layer repulsion. It coincides with the observation that the macroscopic rupture mechanism in tensile strength measurements on Na-bentonite samples was very similar to the shear and was different than that in other samples.

Thus, it may be assumed that the tensile strength in montmorillonitic clays, excluding Na-montmorillonite, is mainly due to van der Waals attractive forces.

The *shear strength* of bentonite samples measured at high water content (greater than plastic limit) is lower than the calculated  $p_A + p_R$ . This observation may coincide with the fact observed by NORRISH and RAUSELL-COLOM (1961), that the swelling in vermiculite proceeds until the calculated repulsion dropped to a value of about  $2,5 \cdot 10^4$  dyn/cm<sup>2</sup>. The above-mentioned authors ascribed this phenomenon to the edge-to-face attraction. It may be assumed that at high water contents this edge-to-face attraction competes with double layer repulsion decreasing the value of intrinsic pressure from calculated value to the observed one. The other possible mechanism is that  $p_R$  at high water contents gradually stops to be effective in causing shear strength.

The final conclusion from the above-mentioned considerations is that the assumption of the sum of double layer repulsion  $p_R$  and van der Waals attraction  $p_A$  as being responsible for the shear strength of montmorillonitic clays obtained a strong support.

#### REFERENCES

1. BOLT, G. H.: Analysis of the Validity of Gouy—Chapman Theory of the Electric Double Layer: *Journal of the Colloid Science*, (1955), 206—218.
2. NORRISH, K.—RAUSELL-COLOM, J. A.: Low-angle X-ray Diffraction Studies of the Swelling of Montmorillonite and Vermiculite. Proceedings of the 10th National Conference on Clays and Clay Minerals, University of Texas, Pergamon Press, 1963.
3. PASZYC-STEPKOWSKA E.: Wpływ rodzaju jonu wymiennego na własności fizyko-mechaniczne bentonitu. *Archiwum Hydrotechniki*, (1960), 143—213.
4. TAYLOR, D. W.: Fundamentals of Soil Mechanics. J. Wiley and Sons, New York, 1960.

**Physiko-chemische Erklärung des Schubprozesses des Montmorillonit-Tons.** Die Untersuchung des Schubprozesses führte zur Feststellung, daß unter gewissen Bedingungen die Schubfestigkeit der Montmorillonit-Tone als die Summe von solchen Kräften, die auf Grund von physiko-chemischen Theorien berechenbar sind, mit den dreiachsigen Proben übereinstimmend bestimmt werden kann. Die Übereinstimmung der berechneten und der gemessenen Werte erwies sich als überraschend im Bereich von gewissen Wassergehalt an der plastischen Grenze der verschiedenen Bentonite von Zrecze-Male, mit austauschbaren Kationen.

**Interprétation physico-chimique du processus du cisaillement de l'argile de montmorillonite.** L'analyse du processus du cisaillement a abouti à la constatation que, dans certaines conditions, la résistance de cisaillement de l'argile de montmorillonite peut être déterminée, d'accord avec les essais triaxiaux, comme la somme de forces pouvant être calculées à l'aide des méthodes physico-chimiques. La concordance des valeurs calculées et mesurées s'avérait tout à fait frappante dans le domaine d'une certaine teneur en eau et au bord plastique des différentes bentonites de Żrecze-Małe à cations interchangeables.

**Физико-химическое объяснение процессов сдвига монтмориллонитной глины.** Исследование процесса сдвига привело к тому определению, что в рамках определенных условий можно определить прочность на сдвиг монтмориллонитной глины в совпадении с трехосевыми испытаниями в качестве суммы таких сил, которые можно вычислить на основе физико-химических теорий. Совпадение расчетных и замеренных значений в определенном диапазоне влажности оказалось совершенно неожиданным на границе пластичности различных обменных катионовых бентонитов м. р. Żrecze—Małe.

## ON EQUILIBRIUM EQUATIONS OF SOLID CONTINUA

I. KOZÁK

CANDIDATE OF TECHN. SC.

TECHNICAL UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRY, MISKOLC

[Manuscript received 16 September, 1966]

The analysis of three-dimensional continua (bodies) of special forms will become mathematically simplified in the case they will be reduced to two-dimensional continua (for instance, in case of shells), or to one-dimensional continua (for instance, in case of bars). The reduction of the system of external and internal forces of the three-dimensional, into the system of external and internal forces of two-dimensional and one-dimensional continua is presented. The system of co-ordinates used is entirely optional. The analysis of the mechanical equilibrium is effectuated, too, and as a result of this analysis, the equilibrium of continua of one, two and three dimensions can be expressed by equilibrium equations having mathematically identical forms.

### 1. Introduction

In the mechanics of solid bodies, or as is sometimes called, in the mechanics of solid spatial (three-dimensional) continua, to characterize the external forces it is customary to introduce (Fig. 1):

— a pair of vectors  $[\mathbf{f}_S, \mathbf{m}_S]$  which are distributed on the boundary surface  $S$  of the body and are connected to point  $Q$  of this surface (these are the intensities of force and couple),

— and a pair of vectors  $[\mathbf{f}_V, \mathbf{m}_V]$  which are distributed in the volume  $V$  of the body and connected to its point  $P$ , (these are also intensity vectors of force and couple).

For characterizing the internal forces we introduce a pair of vectors  $[\rho, \mu]$  which are distributed on a surface  $H$  inside the body and connected to the points of  $H$  for fixed  $H$ ; (these are the vectors of stress and couple-stress);

— and a pair of tensors  $[\mathbf{F}_V, \mathbf{M}_V]$  which are distributed in volume  $V$  of the body and connected to its points (these are the stress tensor and couple stress tensor).

At the same time it is customary to substitute bodies of characteristic shape e.g. shells, bars by two-dimensional (surface) or onedimensional (curvilinear) continua, with the view of simplifying the investigations.

The first aim of this paper is to present the reduction of the system of external and internal forces defined on a three dimensional continuum to systems of external and internal forces defined on two- and one-dimensional continua. The reduction is based on the equivalence of a system of connected

vectors. Two systems of connected vectors are called equivalent if their moments related to an arbitrary point of the space are equal.

The second aim of the paper is to put down the equation of equilibrium of one-, two- and three-dimensional continua in mathematical formulae having identical form:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k \cdot \nabla_k + \mathbf{f}_k &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_k \cdot \nabla_k - \mathbf{F}_{kx} + \mathbf{m}_k &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (k = V, H, L)$$

(Quantities of index  $V$  are defined on three-dimensional, those of index  $H$  are defined on two-dimensional, those of index  $L$  are defined on one-dimensional continuum.)

In the investigation of the two-dimensional continuum (see e.g. [1] and [2]) the system of co-ordinates applied is often such that one of the axis is

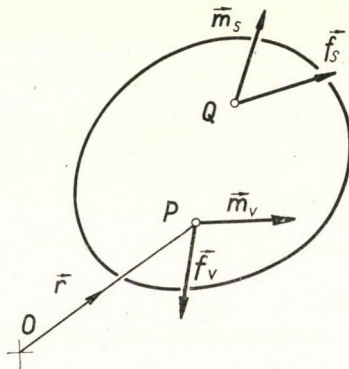


Fig. 1

orthogonal to the other two. The present paper does not put such a limitation on the system of co-ordinates used.

In this paper the following rule is used in order to shorten the writing. The indices  $i$  and  $j$  take on the values 1, 2 and 3; the index  $\lambda$  takes on the values 1 and 2 in every case. If in an expression two factors have the index  $i$  or  $j$  (or  $\lambda$ ), then this means the sum of three (or two) terms, according to the usual summation rule. The other letters in the indices do not have such a favoured role, they are only used to distinguish between quantities of the same nature.

The paper makes use of the symbolical notations of vector and tensor arithmetics and analysis. The scalar product of two vectors is denoted by a period ( $\cdot$ ), the vectorial product by a cross ( $\times$ ), the dyadic product by a circle ( $\circ$ ). We use the symbols ( $\cdot$ ) and ( $\times$ ) for denoting the scalar and vectorial product of a tensor and a vector, too.

The complementary geometrical and mathematical concepts and relations of the sequence of ideas of the paper are summarized in the Appendix.

## 2. Three-dimensional continua (bodies)

a) In the investigation of the three-dimensional continuum it is customary to use a completely arbitrary curvilinear system of co-ordinates  $\alpha^i$ . Accordingly, the position vector of an arbitrary point  $P$  is  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ . In the point  $P$  the vectors

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^i}$$

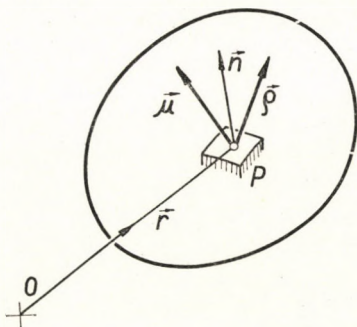


Fig. 2

are the three basic vectors of the local system of co-ordinates and  $\mathbf{b}^i$  are their inverse system.

b) Let us use an agreement according to which the vectors of the stress and the couple-stress at point  $P$  (Fig. 2) is given by

$$\rho = \mathbf{F}_V \cdot \mathbf{n}$$

and

$$\mu = \mathbf{M}_V \cdot \mathbf{n}$$

where  $\mathbf{n}$  is the normal unit vector of the surface element going through point  $P$ .

c) Let the surface  $H$  consisting of smooth sections be the boundary of the volume  $V_H$  inside the body (Fig. 3). The system of surface forces

$$\rho = \mathbf{F}_V \cdot \mathbf{n} \quad \text{and} \quad \mu = \mathbf{M}_V \cdot \mathbf{n}$$

and the system of volume forces

$$[\mathbf{f}_V, \mathbf{m}_V]$$

are acting upon the part in question, thus, their equilibrium is expressed by the equations

$$\int_{(H)} \rho dH + \int_{(V_H)} \mathbf{f}_V dV = \mathbf{0} \quad (1)$$

and

$$\int_{(H)} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu}) dH + \int_{(V_H)} (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_V + \mathbf{m}_V) dV = 0. \quad (2)$$

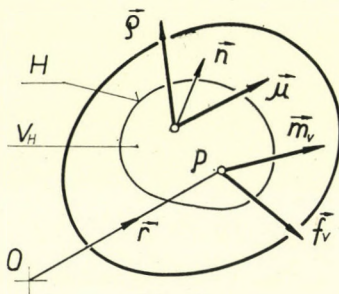


Fig. 3

From equations (1) and (2) we get, by making use of the Gauss-Ostrogradsky theorem, the well known equations of equilibrium

$$\mathbf{F}_V \cdot \nabla + \mathbf{f}_V = \mathbf{0} \quad (3)$$

and

$$\mathbf{M}_V \cdot \nabla - \mathbf{F}_{Vx} + \mathbf{m}_V = \mathbf{0} \quad (4)$$

which are satisfied at every point of the body. Symbol  $\nabla$  stands for the spatial Hamiltonian differential operator,  $\mathbf{F}_{Vx}$  is the vector invariant of the stress tensor  $\mathbf{F}_V$ .

The detailed form of  $\mathbf{F}_V$  and  $\mathbf{M}_V$  are Eqs (3) and (4) given in the first section of the Appendix.

### 3. Equilibrium equations of two-dimensional (surface) continua

a) The system of external and internal forces of a spatial continuum may be reduced to the system of external and internal forces of a surface continuum on the basis of equivalence of vector systems. The necessary and enough condition of the equivalence of two systems of vectors is that their sum and their moments related to the same point must be equal.

The reduction may be imagined in several ways, in the following the co-ordinate lines  $\alpha^3$  will play a dominant role from the point of view of the reduction.

b) Let us call one of the co-ordinate surfaces  $\alpha^3 = \text{const}$  (e.g.  $\alpha^3 = 0$ ) of the spatial continuum of the basic surface. Let us limit the basic surface by a curve  $\vartheta$  consisting of smooth sections and denote this domain by  $H_0$ . On  $H_0$  only the co-ordinates  $\alpha^1$  and  $\alpha^2$  are varying.

According to Fig. 4 the spatial continuum is limited by

- a surface  $H_\vartheta$  which is constituted by the  $\alpha^3$  co-ordinate lines and which fits on the curve  $\vartheta$  consisting of smooth sections and
  - the surfaces denoted by  $S_1$  and  $S_2$  of the original continuum in space.
- Let us denote by  $\mathbf{n}_{S_1}$ ,  $\mathbf{n}_{S_2}$  and  $\mathbf{n}_\vartheta$  the normal unit vectors of the surfaces

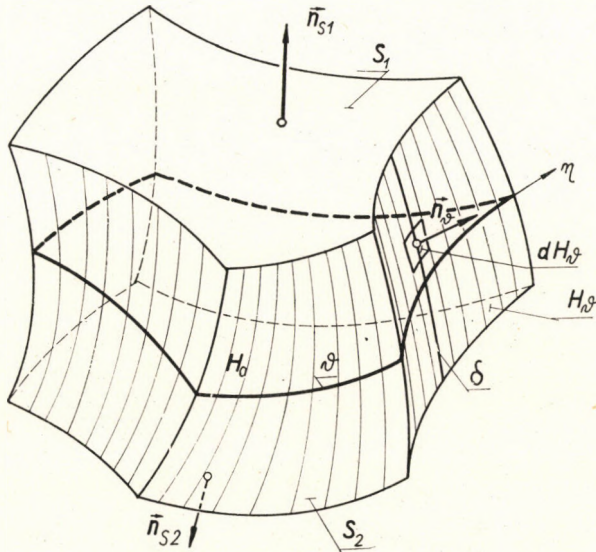


Fig. 4

$S_1$ ,  $S_2$  and  $H_\vartheta$ , respectively. These vectors are directed outwards of the continuum.

Let us assume that every co-ordinate line  $\alpha^3$  intersects the surfaces  $S_1$  and  $S_2$  and that at the point common to the surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  and  $H_\vartheta$

$$\mathbf{n}_{S_1} \cdot \mathbf{n}_\vartheta \neq 1 \quad \text{and} \quad \mathbf{n}_{S_2} \cdot \mathbf{n}_\vartheta \neq 1.$$

That part of the co-ordinate lines  $\alpha^3$  between  $S_1$  and  $S_2$  is denoted by  $\delta$ . The solid body is called a shell shaped three-dimensional continuum (body) or simply a shell, sometimes a plate if the distances measurable along  $\delta$  are small compared to the distances measurable on the basic surface  $H_0$  (Fig. 5).

The position vector of the point  $P_0$  of the basic surface is  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha^1, \alpha^2)$ . Thus the position vector of an arbitrary point  $P$  is

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3); \quad [\mathbf{l}(\alpha^1, \alpha^2, 0) = \mathbf{0}].$$

At the point  $P_0$  — as it can be seen in Fig. 6 — the basic system of vectors of the surface co-ordinate system is the following:

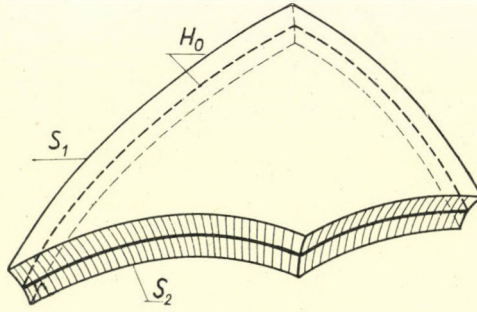


Fig. 5

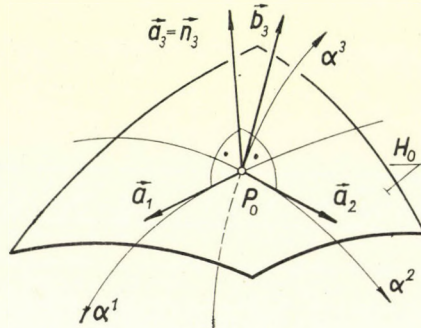


Fig. 6

$$\mathbf{a}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha^\lambda} = \mathbf{b}_\lambda(\mathbf{R}); \quad |\mathbf{a}_\lambda| = A_\lambda;$$

and

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{A_{12}}; \quad A_{12} = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$$

( $\mathbf{a}_3$  is generally not equal to  $\mathbf{b}_3$  taken at the basic surface).

The inverse system of the basic vectors is

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{A_{12}}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{A_{12}} \quad \text{and} \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3.$$

Along the smooth sections of the curve  $\vartheta \alpha^\lambda = \alpha^\lambda(\eta)$ , and

$$\mathbf{a}_\eta = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}; \quad A_\eta = |\mathbf{a}_\eta|$$

( $\eta$  is the variable measured along the curve  $\vartheta$ ).

The vector

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{a}_\eta}{A_\eta}$$



is tangential to the curve  $\vartheta$ , and the vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}_3 \quad (5)$$

is tangential to the basic surface and orthogonal (5) to  $\vartheta$ .

$$dH_\vartheta = B\eta_3 dx^3 d\eta$$

is the surface element of the surface  $H_\vartheta$ , where

$$B_{\eta_3} = |\mathbf{b}_\eta \times \mathbf{b}_3| \quad \text{and} \quad \mathbf{b}_\eta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}.$$

c) The system of internal forces characterized by the pair of vectors

$$\rho_\nu = F_\nu \cdot \mathbf{n}_\vartheta \quad \text{and} \quad \mu_\nu = M_\nu \cdot \mathbf{n}_\vartheta$$

which is distributed along the surface  $H_\vartheta$  consisting of smooth sections, is equivalent to the linear system of forces which is characterized by the pair of vectors

$$\mathbf{N}_\nu = \frac{1}{A_\eta} \int_{(\vartheta)} \rho_\nu B_{\eta_3} dx^3 \quad (6)$$

and

$$\mathbf{L}_\nu = \frac{1}{A_\eta} \int_{(\vartheta)} (\mathbf{1} \times \rho_\nu + \mu_\nu) B_{\eta_3} dx^3 \quad (7)$$

and which is distributed along the curve  $\vartheta$  consisting of smooth sections. Indeed as it can be seen by substitution, the sums of the vectors of the two systems are equal:

$$\int_{(H_\vartheta)} \rho_\nu dH_\vartheta = \int_{(\vartheta)} \mathbf{N}_\nu ds_\vartheta,$$

for their moments related to the point 0 we obtain

$$\int_{(H_\vartheta)} (\mathbf{r} \times \rho_\nu + \mu_\nu) dH_\vartheta = \int_{(\vartheta)} (\mathbf{R} \times \mathbf{N}_\nu + L_\nu) ds_\vartheta,$$

( $ds_\vartheta = A_\eta d\eta$  is the element of the arc measured along the curve).

At the same time the systems of external forces  $[\mathbf{f}_S, \mathbf{m}_S]$  and  $[\mathbf{f}_V, \mathbf{m}_V]$  distributed on the surfaces  $S_\gamma (\gamma = 1, 2)$  and in the volume  $V$  of the continuum are equivalent to the single system of external forces characterized by the pair of vectors:

$$\mathbf{f}_H = \frac{1}{A_{12}} \int_{(\vartheta)} \mathbf{f}_V B dx^3 + \sum_1^2 \mathbf{f}_{S_\gamma} h_\gamma,$$

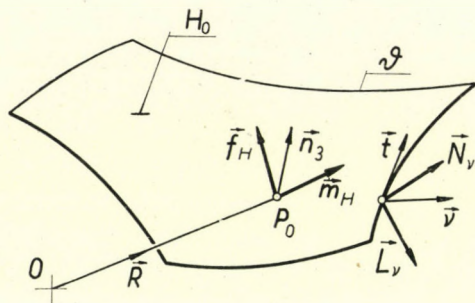


Fig. 7

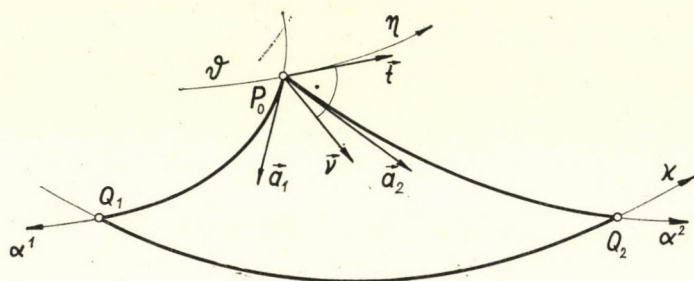


Fig. 8

and

$$\mathbf{m}_H = \frac{1}{A_{12}} \int_{(\partial)} (\mathbf{l} \times \mathbf{f}_V + \mathbf{m}_V) B d\alpha^3 + \sum_1^2 (\mathbf{l}_{S_\gamma} \times \mathbf{f}_{S_\gamma} + \mathbf{m}_{S_\gamma}) h_\gamma$$

which are distributed along the basic surface  $H_0$ .  $B = (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3)$  is the triple product of the basic vectors  $\mathbf{b}_i$ . The quantities  $h_\gamma$  are defined relatively to the elements of the surfaces  $S_\gamma$  by the equations

$$dS_\gamma = \Gamma_\gamma d\alpha^1 d\alpha^2; \quad h_\gamma = \frac{\Gamma_\gamma}{A_{12}}; \quad (\gamma = 1, 2).$$

d) The system of external forces of the spatial continuum discussed in section 3b is equivalent after the reductions of 3c to

- the system of linear forces  $[\mathbf{N}_v, \mathbf{L}_v]$  distributed along the curve  $\vartheta$ ,
- and to the surface system of forces  $[\mathbf{f}_H, \mathbf{m}_H]$  distributed on the two-dimensional surface  $H_0$  (Fig. 7).

The equilibrium of the surface continuum  $H_0$  is thus expressed by the equations:

$$\int_{(\partial)} \mathbf{N}_v ds_\vartheta + \int_{(H)} \mathbf{f}_H dH_0 = \mathbf{0}, \quad (8)$$

and

$$\int_{(\partial)} (\mathbf{R} \times \mathbf{N}_v + \mathbf{L}_v) ds_\partial + \int_{(H_0)} (\mathbf{R} \times \mathbf{f}_H + \mathbf{m}_H) dH_0 = \mathbf{0}. \quad (9)$$

e) Let  $H_0$  have the shape of an arc triangle as is shown in Fig. 8. Let this triangle be limited by the co-ordinate lines  $\alpha^1$  and  $\alpha^2$  going through point  $P_0$  and the curve  $\varkappa$  going through the points  $Q_1, Q_2$  ( $\varkappa$  is the common curve of  $H_0$  and the plane  $K$  parallel to the vectors  $\mathbf{t}$  and  $\mathbf{n}_3$  and going through  $P_0$ ). The co-ordinates of the point  $P_0$  are  $\alpha_0^1$  and  $\alpha_0^2$ .

The influence of the part  $\alpha^2 > \alpha_0^2$  of  $H_0$  on the part  $\alpha^2 < \alpha_0^2$  is expressed by the pair of vectors

$$\mathbf{N}_2 = \frac{1}{A_1} \int_{(\partial)} \rho_2 B_{31} dx^3,$$

and

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{A_1} \int_{(\partial)} (\mathbf{1} \times \rho_2 + \mu_2) B_{31} dx^3$$

defined similarly to (6) and (7) and distributed along the co-ordinate line  $\alpha^1$ , while the influence of the part  $\alpha^1 > \alpha_0^1$  on the part  $\alpha^1 < \alpha_0^1$  is expressed by the pair of vectors

$$\mathbf{N}_1 = \frac{1}{A_2} \int_{(\partial)} \rho_1 B_{23} dx^3$$

and

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{A_2} \int_{(\partial)} (\mathbf{1} \times \rho_1 + \mu_1) B_{23} dx^3$$

which are also the analogs of (6) and (7).

$$(B_{31} = |\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1| \quad \text{and} \quad B_{23} = |\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3|).$$

Putting down the equilibrium equations (8) and (9) of the arc triangle  $P_0 Q_1 Q_2$  and taking the limit  $Q_1 \rightarrow P_0, Q_2 \rightarrow P_0$  so that the plane  $K$  is displaced parallel to itself, that is  $\varkappa \rightarrow \vartheta$ , (the details of the equations and the limiting process may be found in section 2b of the Appendix), we come to the result that the system of stress resultants and couple resultants acting in the point  $P_0$  of curve  $\vartheta$  is the following

$$\mathbf{N}_v = \mathbf{F}_H \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}_H \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}_3) = -(\mathbf{F}_H \times \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{t} \quad (10)$$

$$\mathbf{L}_v = \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{v} = -(\mathbf{M}_H \times \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{t}. \quad (11)$$

This resultants in a point might be calculated from the surface tensors

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{N}_1 A_2 \circ \frac{\mathbf{a}_1}{A_{12}} + \mathbf{N}_2 A_1 \circ \frac{\mathbf{a}_2}{A_{12}} \quad (12)$$

and

$$\mathbf{M}_H = \mathbf{L}_1 A_2 \circ \frac{\mathbf{a}_1}{A_{12}} + \mathbf{L}_2 A_1 \circ \frac{\mathbf{a}_2}{A_{12}} \quad (13)$$

defined at the same point. In (10) we made use of relation (5).

The tensors  $\mathbf{F}_H$  and  $\mathbf{M}_H$  can be constructed by means of two dyadic products i.e. they are degenerated, planar tensors. The scalar product of a vector and these two tensors only have a physical meaning according to (10) and (11) if the vector lies in the tangential plane of  $H_0$ .

The basic surface  $H_0$ , according to the preceding discussion, is such a two-dimensional continuum that to each of its points

$$\begin{aligned} & \text{the pair of vectors } [\mathbf{f}_H, \mathbf{m}_H] \text{ and} \\ & \text{the pair of tensors } [\mathbf{F}_H, \mathbf{M}_H] \end{aligned}$$

are connected.

f) Let us apply the equations of equilibriums (8) and (9) to a two-dimensional continuum  $H_0$  limited by a curve  $\vartheta$  of an arbitrary shape and consisting of smooth sections.

The curvilinear integral of equation (8) can be transformed into a surface integral by means of the Stokes theorem and relation (10):

$$\int_{(\vartheta)} \mathbf{N}_\nu ds_\nu = - \int_{(H_0)} (\mathbf{F}_H \times \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{t} ds_\nu = \int_{(H_0)} \overbrace{(\mathbf{F}_H \times \mathbf{n}_3)}^\downarrow \cdot (\nabla \times \mathbf{n}_3) dH_0.$$

The integrand may be decomposed into the sum of two terms in the following manner:

$$\mathbf{F}_H \cdot [\mathbf{n}_3 \times (\nabla \times \mathbf{n}_3)] + \mathbf{F}_H \cdot [\overset{\downarrow}{\mathbf{n}}_3 \times (\nabla \times \mathbf{n}_3)].$$

The first term can be written in the simple form  $\mathbf{F}_H \cdot \nabla_H$ , making use of the definition of the surface differential operator

$$\mathbf{n}_3 \times (\nabla \times \mathbf{n}_3) = \nabla_H = \frac{\partial}{\partial \alpha^1} \mathbf{a}^1 + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \mathbf{a}^2 \quad (14)$$

(for the details of  $\nabla_H$  see section 2.c of the Appendix). The second term can be further decomposed into the sum of two terms expanding the double vectorial product

$$\mathbf{F}_H \cdot [(\overset{\downarrow}{\mathbf{n}}_3 \cdot \mathbf{n}_3) \nabla] - (\mathbf{F}_H \cdot \mathbf{n}_3) (\overset{\downarrow}{\mathbf{n}}_3 \cdot \nabla)$$

where the first term vanishes because of

$$\frac{\partial \mathbf{n}_3}{\partial \alpha^i} \cdot \mathbf{n}_3 = 0$$

as  $\mathbf{n}_3$  is a unit vector, the second vanishes because of (10) according to which  $\mathbf{F}_H \cdot \mathbf{n}_3 = 0$ .

Finally (8) can be transformed into the surface integral

$$\int_{(H_0)} (\mathbf{F}_H \cdot \nabla_H + \mathbf{f}_H) dH_0 = \mathbf{0}.$$

As the shape and extension of the  $H_0$  is arbitrary, it follows that the equation

$$\mathbf{F}_H \cdot \nabla_H + \mathbf{f}_H = \mathbf{0} \quad (15)$$

is fulfilled at every point of the surface continuum.

Similar transformations lead from (9) to the equilibrium equation

$$\mathbf{M}_H \cdot \nabla_H - \mathbf{F}_{Hx} + \mathbf{m}_H = \mathbf{0} \quad (16)$$

where (15) is also used.  $\mathbf{F}_{Hx}$  is the vector invariant of the tensor  $\mathbf{F}_H$ .

Details of (15) and (16) are to be found in section 2 of the Appendix.

#### 4. Equilibrium equations of one-dimensional (curvilinear) continua

a) The system of external and internal forces of a spatial continuum may be reduced to the system of external and internal forces of a curvilinear continuum, too. The reduction, similarly to that of the surface continuum in the preceding section, may be carried out in several ways. In the following the coordinate line  $\alpha^1$  will have a favoured role from the point of view of reduction.

b) Let us call one of the co-ordinate lines  $\alpha^1$  the basic line (e.g. the one characterized by  $\alpha^2 = \alpha^3 = 0$ ).  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha_1)$  is the position vector of a point  $P_0$  of the basic line. For an arbitrary point  $P$  the position vector is

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3); \quad [\mathbf{l}(\alpha^1, 0, 0) = \mathbf{0}].$$

Let

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i(\mathbf{R})$$

be the system of basic vectors of the local co-ordinate system in point  $P_0$ .

Let us limit the basic line by  $P_{00}$  and  $P_{01}$  (i.e. by co-ordinates  $\alpha_0^1$  and  $\alpha_1^1$  the one-dimensional continuum) and let us denote it by  $L$ .

The spatial continuum chosen according to Fig. 9 is limited

— by the surface going through point  $P_{00}$ , characterized by  $\alpha_0^1 = 0$  and denoted by  $E_0$ ,

— by the surface going through point  $P_{01}$ , characterized by  $\alpha_1^1 = 0$  and denoted by  $E_1$

— by the surface  $S$  of the original continuum.

All these surfaces consist of smooth sections.

Let us denote by  $E$  the further co-ordinate surface  $\alpha^1 = \text{const.}$  the normal unit vector pointing outwards from the surface  $S$  by  $\mathbf{n}_S$ . Let us assume

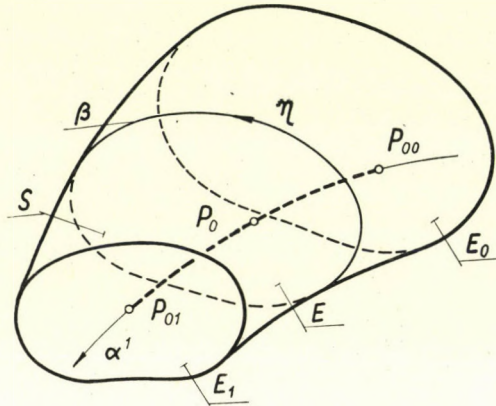


Fig. 9

that the surface  $S$  is always intersected by the co-ordinate surface  $E$  and  $(\mathbf{n}_S \cdot \mathbf{b}^1) \neq 0$  everywhere on  $S$ .

Let  $\beta$  denote the curve of intersection of the surfaces  $E$  and  $S$ , and let  $\eta$  be the variable measured along the curve  $\beta$ . Using these notations the surface element measured on  $S$  is,

$$dS = \Gamma d\eta dx^1; \quad \Gamma = \Gamma(\eta, \alpha^1).$$

We shall call the solid body a bar shaped three-dimensional continuum (body) or simply a bar if the distances measurable on the surface  $\alpha^1 = \text{const.}$  are small compared to the distances measurable along  $L$ .

c) A system of internal forces  $[\rho_1, \mu_1]$  distributed along an arbitrary ordinate surface  $E$  with  $\alpha^1 = \text{const.}$  is equivalent to a pair of vectors

$$\mathbf{F}_1 = \int_{(E)} \rho_1 B_{23} dx^2 dx^3$$

and

$$\mathbf{M}_1 = \int_{(E)} (\mathbf{l} \times \rho_1 + \mu_1) B_{23} dx^2 dx^3$$

connected to point  $P_0$ .

At the same time the system of forces  $[\mathbf{f}_S, \mathbf{m}_S]$ , and  $[\mathbf{f}_V, \mathbf{m}_V]$  distributed on the surface  $S$  and in the volume  $V$  of the spatial continuum, respectively, are equivalent to the pair of vectors

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{A_1} \int_{(E)} \mathbf{f}_V B dx^2 dx^3 + \frac{1}{A_1} \oint_{(\beta)} \mathbf{f}_S \Gamma d\eta,$$

and

$$\mathbf{m}_L = \frac{1}{A_1} \int_{(E)} (\mathbf{1} \times \mathbf{f}_V + \mathbf{m}_V) B dx^2 dx^3 + \frac{1}{A_1} \oint_{(\beta)} (\mathbf{1} \times \mathbf{f}_S + \mathbf{m}_S) \Gamma d\eta$$

distributed along the basic line  $L$ .

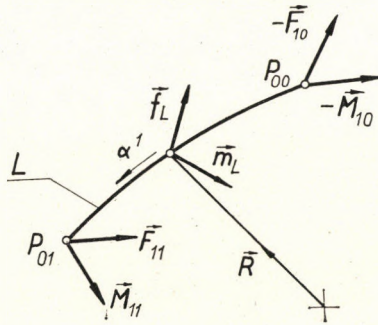


Fig. 10

d) After the reductions we get that the system of external forces of the body shown in Fig. 9 is equivalent to the systems of forces

- $[\mathbf{f}_L, \mathbf{m}_L]$  distributed along the one-dimensional basic line  $L$ ,
- $[\mathbf{F}_{10}, \mathbf{M}_{10}]$  connected to the point  $P_{00}$  and
- $[\mathbf{F}_{11}, \mathbf{M}_{11}]$  connected to the point  $P_{01}$  (Fig. 10).

Thus the equilibrium of the one-dimensional continuum is expressed by the equations

$$-\mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{11} + \int_{(L)} \mathbf{f}_L A_1 dx^1 = 0 \quad (17)$$

and

$$-\mathbf{R}_0 \times \mathbf{F}_{10} - \mathbf{M}_{10} + \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_{11} + \mathbf{M}_{11} + \int_{(L)} (\mathbf{R} \times \mathbf{f}_L + \mathbf{m}_L) A_1 dx^1 = 0 \quad (18)$$

( $\mathbf{R}_0$  is the position vector of the point  $P_{00}$  and  $\mathbf{R}_1$  is that of  $P_{01}$ ).

Equation (17) might be restated into the equation

$$\int_{(L)} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x^1} + \mathbf{f}_L A_1 \right) dx^1 = 0$$

containing a single integral only. From this follows the equation of equilibrium

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x^1} + \mathbf{f}_L A_1 = 0 \quad (19)$$

as the length of  $L$  is arbitrary. Similarly (18) gives, taking (19) also into account,

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \alpha^1} + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{m}_L A_1 = 0. \quad (20)$$

By means of the relations

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_L \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_L \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} \quad (21a, b)$$

we may define the degenerated tensors

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_1 \circ \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_L = \mathbf{M}_1 \circ \frac{\mathbf{a}_1}{A_1}$$

represented by single dyadic products. The scalar product of a vector and these two tensors according to (21a, b) has a physical meaning only if the vector is parallel to the tangent of  $L$ . The

$$\nabla_L = \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} \right) \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha^1} \frac{\mathbf{a}_1}{A_1^2}$$

curvilinear differentiate operator can also be defined.

The basic line  $L$  is such an one-dimensional continuum to the points of which the

pair of vectors  $[\mathbf{f}_L, \mathbf{m}_L]$   
 and the pair of tensors  $[\mathbf{F}_L, \mathbf{M}_L]$   
 as mechanical (physical) quantities are connected.  
 Since

$$\left( \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} \right) \cdot \nabla_L = 0,$$

introducing  $\mathbf{F}_L$ ,  $\mathbf{M}_L$  and  $\nabla_L$ , the equilibrium equations (19) and (20) of the one-dimensional continuum may be written in the form

$$\mathbf{F}_L \cdot \nabla_L + \mathbf{f}_L = 0$$

and

$$\mathbf{M}_L \cdot \nabla_L - \mathbf{F}_{Lx} + \mathbf{m}_L = 0,$$

similarly to those of the two- and three-dimensional continua ( $\mathbf{F}_{Lx}$  is the vector invariant of the tensor  $\mathbf{F}_L$ ).



### 5. Summary

Defining the stress tensor  $F_V$  and the couple-stress tensor  $M_V$  for the three-dimensional continuum;

the stress resultant tensor  $F_H$  and the couple resultant tensor  $M_H$  for the two-dimensional continuum;

the internal force tensor  $F_L$  and the tensor of the couple of internal forces  $M_L$  for the onedimensional continuum,

further defining the systems of external forces

$[f_V, m_V]$  distributed on the three-dimensional continuum

$[f_H, m_H]$  distributed on the two-dimensional continuum

$[f_L, m_L]$  distributed on the one-dimensional continuum

and the differential operators

$$\text{for three dimensions } \nabla_V = \nabla = \frac{\partial}{\partial x^1} \mathbf{b}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \mathbf{b}^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} \mathbf{b}^3$$

$$\text{for two dimensions } \nabla_H = \mathbf{n}_3 \times (\nabla \times \mathbf{n}_3) = \frac{\partial}{\partial x^1} \mathbf{a}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \mathbf{a}^2$$

$$\text{for one dimension } \nabla_L = \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} \right) \frac{\mathbf{a}_1}{A_1} = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\mathbf{a}_1}{A_1^2};$$

the equilibrium equations of the three-dimensional (spatial), two-dimensional (surface) and one-dimensional (curvilinear) continua might be written formally in identical forms:

$$\begin{aligned} F_k \cdot \nabla_k + f_k &= \mathbf{0} \\ M_k \cdot \nabla_k - F_{kx} + m_k &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (k = V, H, L).$$

### APPENDIX

#### 1. The three-dimensional continuum

a) Fig. A 1 shows the co-ordinate lines and surfaces going through the arbitrary point  $P$ . The directions of the axes of the local co-ordinate system at point  $P$  are given by the vectors

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad (\text{A.1})$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3) \neq 0. \quad (\text{A.2})$$

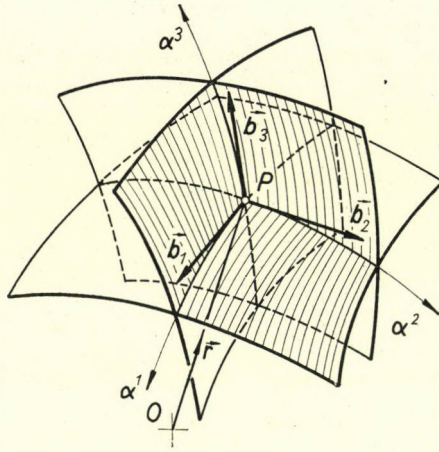


Fig. A1

The inverse system of these is

$$\mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{B}, \quad \mathbf{b}^2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{B}, \quad \mathbf{b}^3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{B}. \quad (\text{A.3})$$

By means of the notations

$$B_i = |\mathbf{b}_i|, \quad B_{ij} = |\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j|,$$

and

$$|\mathbf{b}^1| = \frac{1}{B} B_{23}; \quad |\mathbf{b}^2| = \frac{1}{B} B_{31}; \quad |\mathbf{b}^3| = \frac{1}{B} B_{12}$$

we can obtain the normal unit vectors of the co-ordinate surfaces going through the point  $P$  and the corresponding inverse system

$$\mathbf{n}_1 = \frac{B}{B_{23}} \mathbf{b}^1; \quad \mathbf{n}_2 = \frac{B}{B_{31}} \mathbf{b}^2; \quad \mathbf{n}_3 = \frac{B}{B_{12}} \mathbf{b}^3$$

and

$$\mathbf{e}^1 = \frac{B_{23}}{B} \mathbf{b}_1; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{B_{31}}{B} \mathbf{b}_2; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{B_{12}}{B} \mathbf{b}_3. \quad (\text{A.4})$$

b) The Hamiltonian differential operator has the form:

$$\nabla = \mathbf{b}^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i} = \mathbf{b}^1 \frac{\partial}{\partial \alpha^1} + \mathbf{b}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha^2} + \mathbf{b}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha^3}. \quad (\text{A.5})$$

According to the definition of the operation  $C \otimes \nabla$

$$C \otimes \nabla = \frac{\partial C}{\partial x^1} \otimes \mathbf{b}^1 + \frac{\partial C}{\partial x^2} \otimes \mathbf{b}^2 + \frac{\partial C}{\partial x^3} \otimes \mathbf{b}^3$$

where  $C$  is any differentiable function of the position vector (e.g. scalar, vector, tensor) and  $\otimes$  is a multiplication defined between a vector and the quantity  $C$ .

c) It can be shown that

$$\left( \frac{\mathbf{b}_i}{B} \right) \cdot \nabla = 0. \quad (\text{A.6})$$

Let us start e.g. from the equation for the case  $i = 2$ :

$$\left( \frac{\mathbf{b}_2}{B} \right) \cdot \nabla = (\mathbf{b}_2 \cdot \nabla) \frac{1}{B} - \left[ (B \nabla) \frac{1}{B^2} \right] \cdot \mathbf{b}_2.$$

(Small arrows indicate the factors of the products for which the differentiations of  $\nabla$  must be carried out.) According to the definition (A.2) of  $B$

$$(\nabla B) \cdot \mathbf{b}_2 = \frac{\partial B}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial x^2} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) + \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial x^2} \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) + \frac{\partial \mathbf{b}_3}{\partial x^2} \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2).$$

Taking into account the definitions (A.1), (A.3) and (A.5) of the vectors  $\mathbf{b}_i$ , the inverse vectors, and the  $\nabla$  operator, respectively, we obtain

$$(\nabla B) \cdot \mathbf{b}_2 = \left( \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial x^1} \cdot \mathbf{b}^1 + \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial x^2} \cdot \mathbf{b}^2 + \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial x^3} \cdot \mathbf{b}^3 \right) B = (\mathbf{b}_2 \cdot \nabla) B$$

which proves the identity (A.6) for  $i = 2$ .

(A.6) can be similarly proved for the cases  $i = 1, 3$ , too.

d) Making use of the vectors of stress and couple-stress

$$\rho_j = \rho_{ij} \mathbf{e}^i \quad \text{and} \quad \mu_j = \mu_{ij} \mathbf{e}^i,$$

taking (A.4) into consideration, the tensor of stress may be presented in the form

$$F_V = \rho_j \circ \mathbf{e}^j = \rho_1 B_{23} \circ \frac{\mathbf{b}_1}{B} + \rho_2 B_{31} \circ \frac{\mathbf{b}_2}{B} + \rho_3 B_{12} \circ \frac{\mathbf{b}_3}{B} \quad (\text{A.7})$$

and the tensor of couple-stress has the form

$$\mathbf{M}_V = \mu_j \circ \mathbf{e}^j = \mu_1 B_{23} \circ \frac{\mathbf{b}_1}{B} + \mu_2 B_{31} \circ \frac{\mathbf{b}_2}{B} + \mu_3 B_{12} \circ \frac{\mathbf{b}_3}{B}. \quad (\text{A.8})$$

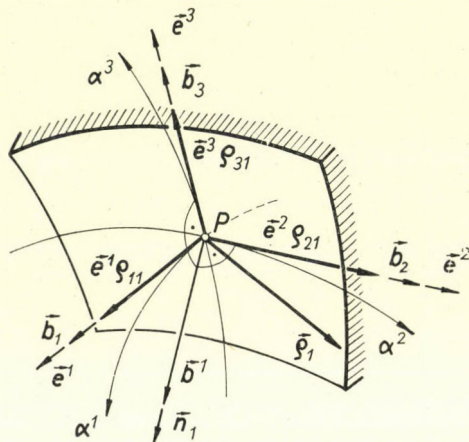


Fig. A2

The situation for the co-ordinate surface  $\alpha^1 = \text{const.}$  is shown in Fig. A2

The vector invariant of the stress tensor is the following:

$$\mathbf{F}_{Vx} = \rho_j \times \mathbf{e}^j = (\rho_1 B_{23} \times \mathbf{b}_1 + \rho_2 B_{31} \times \mathbf{b}_2 + \rho_3 B_{12} \times \mathbf{b}_3) \frac{1}{B}.$$

e) The equilibrium equations of a three-dimensional continuum

$$\mathbf{F}_V \cdot \nabla + \mathbf{f}_V = \mathbf{0}$$

and

$$\mathbf{M}_V \cdot \nabla - \mathbf{F}_{Vx} + \mathbf{m}_V = \mathbf{0}$$

may be put down in detail if we take into account (A.5), (A.6), (A.7) and (A.8):

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha^1} (\rho_1 B_{23}) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} (\rho_2 B_{31}) + \frac{\partial}{\partial \alpha^3} (\rho_3 B_{12}) \right] \frac{1}{B} + \mathbf{f}_V = \mathbf{0}; \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha^1} (\mu_1 B_{23}) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} (\mu_2 B_{31}) + \frac{\partial}{\partial \alpha^3} (\mu_3 B_{12}) \right] \frac{1}{B} + \\ & + \left[ -(\rho_1 B_{23} \times \mathbf{b}_1 + \rho_2 B_{31} \times \mathbf{b}_2 + \rho_3 B_{12} \times \mathbf{b}_3) \right] \frac{1}{B} + \mathbf{m}_V = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

## 2. Surface continuum

a) On the surface continuum  $H_0$  the co-ordinates  $\alpha^1, \alpha^2$  vary. The inverse system of the local system

$$\mathbf{a}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha^\lambda}; \quad |\mathbf{a}_\lambda| = A_\lambda;$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{n}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{A_{12}}; \quad A_{12} = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$$

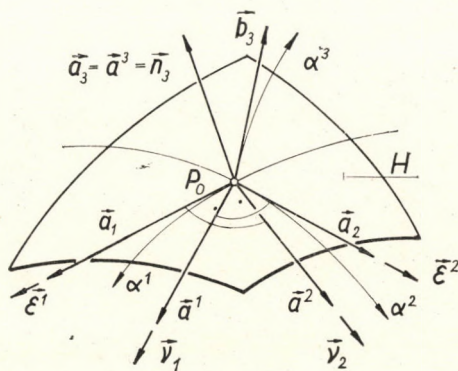


Fig. A3

taken at the arbitrary point  $P_0$  is:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{A}; \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{A}; \quad \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{A} = \mathbf{a}_3 = \mathbf{n}_3; \quad (\text{A.9})$$

$$A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3) = A_{12}$$

(Figs 6 and A3)

The vectors

$$\mathbf{v}_1 = \frac{A_{12}}{A_2} \mathbf{a}^1 \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{A_{12}}{A_1} \mathbf{a}^2$$

are orthogonal to the co-ordinate lines  $\alpha^1$  and  $\alpha^2$  going through  $P_0$  and are tangential to  $H_0$ . The inverse system of the vectors  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}_3$  is

$$\mathbf{e}^1 = \frac{A_2}{A_{12}} \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{A_1}{A_{12}} \mathbf{a}_2 \quad \text{and} \quad \mathbf{n}_3.$$

The vectors at the point  $P_0$  are shown in Fig. A3.

b) The arc-triangle shown in Figs 8 and A4 is limited by the co-ordinate lines  $\alpha^1$  and  $\alpha^2$  going through the point  $P_0$  and by curve  $\alpha$  which is common

to  $H_0$  and to the plane  $K$  which is parallel to the vectors  $\mathbf{t}$  and  $\mathbf{n}_3$ . The equilibrium of the arc-triangle is expressed by the equations

$$-\int_{P_0}^{Q_1} \mathbf{N}_2 ds_1 - \int_{P_0}^{Q_2} \mathbf{N}_1 ds_2 + \int_{Q_1}^{Q_2} \mathbf{N}_v ds_x + \int_{(H_0)} \mathbf{f}_H dH_0 = \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

and

$$\begin{aligned} & -\int_{P_0}^{Q_1} (\mathbf{R} \times \mathbf{N}_2 + \mathbf{L}_2) ds_1 - \int_{P_0}^{Q_2} (\mathbf{R} \times \mathbf{N}_1 + \mathbf{L}_1) ds_2 + \\ & + \int_{Q_1}^{Q_2} (\mathbf{R} \times \mathbf{N}_v + \mathbf{L}_v) ds + \int_{(H_0)} (\mathbf{R} \times \mathbf{f}_H + \mathbf{m}_H) dH_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

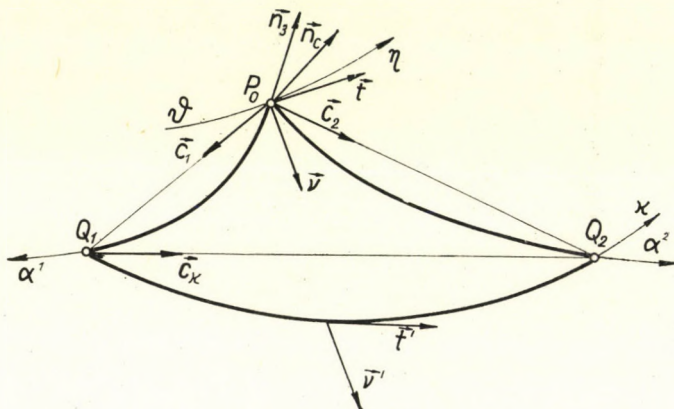


Fig. A4

where we have made use of equations (8), (9) and the system of forces defined in section 3d. The position vector  $\mathbf{R}$  referred to point  $P_0$ .

Let

$$d_1 = \overline{P_0 Q_1}, \quad d_2 = \overline{P_0 Q_2}, \quad d_x = \overline{Q_1 Q_2}$$

denote the length of the sides of the triangle  $P_0 Q_1 Q_2$  and let  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{c}_x$  denote the unit vectors directed along the sides in the sense of Fig. A4, and  $\mathbf{n}_c$  the unit vector orthogonal to the plane of the triangle. For the triangle the relation

$$d_1 \mathbf{c}_1 - d_2 \mathbf{c}_2 + d_x \mathbf{c}_x = \mathbf{0},$$

is valid which gives

$$d_1 = -d_x \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_x = d_x \frac{\mathbf{c}_2}{C} \cdot (\mathbf{c}_x \times \mathbf{n}_c), \quad (\text{A.12})$$

and

$$d_2 = d_x \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_x = d_x \frac{\mathbf{c}_1}{C} \cdot (\mathbf{c}_x \times \mathbf{n}_c) \quad (\text{A.13})$$

where  $C = (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{n}_c)$  and  $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2$  are the inverse vectors of the vectors  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{n}_c$  constructed similarly to (A.9).

The equation of equilibrium (A.10) can be written in the following manner, too:

$$- \mathbf{N}_{2c} d_1 - \mathbf{N}_{1c} d_2 + \mathbf{N}_{\nu c} d_\nu + \mathbf{f}_{Hc} \frac{1}{2} C d_1 d_2 = \mathbf{0}. \quad (\text{A.14})$$

(The index  $c$  denotes the integral mean values (A.14) taken for the sides and surface of the triangle.)

Now we substitute the relation (A.12) and (A.13) into (A.14) and divide by  $d_\nu$  and then take the limit  $Q_1 \rightarrow P_0, Q_2 \rightarrow P_0$  in such a way that the plane  $K$  is displaced parallel to itself, i.e.  $\nu \rightarrow \vartheta$ . Proceeding in this manner we get that

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_\lambda &\rightarrow \frac{\mathbf{a}_\lambda}{A_\lambda}, & \mathbf{n}_c &\rightarrow \mathbf{n}_3, \\ C &\rightarrow \frac{A_{12}}{A_1 A_2}, & \mathbf{c}_\nu &\rightarrow \mathbf{t}, & \mathbf{c}_\nu \times \mathbf{n}_c &\rightarrow \mathbf{v}, \end{aligned}$$

and

$$\mathbf{N}_{\lambda c} \rightarrow \mathbf{N}_\lambda, \quad \mathbf{N}_{\nu c} \rightarrow \mathbf{N}_\nu,$$

while the last term of (A.14) tends to zero. Taking into account the definition of dyadic products we finally obtain from (A.14)

$$\mathbf{N}_\nu = \left( \mathbf{N}_1 A_2 \circ \frac{\mathbf{a}_1}{A_{12}} + \mathbf{N}_2 A_1 \circ \frac{\mathbf{a}_2}{A_{12}} \right) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{N}_\lambda \circ \epsilon^\lambda) \cdot \mathbf{v}.$$

We should get a similar result by analysing the equation (A.11). In this case the integrals containing the position vector  $\mathbf{R}$  disappear when taking the limit and thus the expression

$$\mathbf{L}_\nu = \left( \mathbf{L}_1 A_2 \circ \frac{\mathbf{a}_1}{A_{12}} + \mathbf{L}_2 A_1 \circ \frac{\mathbf{a}_2}{A_{12}} \right) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{L}_\lambda \circ \epsilon^\lambda) \cdot \mathbf{v}$$

can be obtained.

c) From the Hamiltonian differential operator we may construct a two-dimensional (surface) differential operator

$$\nabla_H = \mathbf{n}_3 \times (\nabla \times \mathbf{n}_3). \quad (\text{A.15})$$

At point  $P_0$  of the surface  $H_0$  we have

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2; \quad \text{and} \quad \mathbf{b}_3 = \varphi \mathbf{n}_3 + \mathbf{k}$$

( $\varphi$  is a scalar, while  $\mathbf{k}$ , is the component of  $\mathbf{b}_3$  orthogonal to  $\mathbf{n}_3$ ). Correspondingly, if we take (A.3) and (A.9) into consideration, we have

$$B = (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{b}_3 = \varphi (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{n}_3 = \varphi A_{12},$$

$$\mathbf{b}^1 = \mathbf{a}^1 + \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{k}}{\varphi A_{12}},$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 + \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{a}_1}{\varphi A_{12}}.$$

After substituting (A.4) into (A.15) the final result is

$$\nabla_H = \mathbf{n}_3 \times (\nabla \times \mathbf{n}_3) = \frac{\partial}{\partial x^1} \mathbf{a}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \mathbf{a}^2$$

since  $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{a}_1$  and  $\mathbf{b}^3$  are parallel to  $\mathbf{n}_3$ .

d) We can show, following the method discussed in section 1c of the Appendix, that the condition

$$\frac{\mathbf{a}_\lambda}{A_{12}} \cdot \nabla_H = 0$$

is also fulfilled; therefore using the definitions (12), (13) and (14) of  $\mathbf{F}_H$ ,  $\mathbf{M}_H$  and  $\nabla_H$  the equilibrium equations

$$\mathbf{F}_H \cdot \nabla_H + \mathbf{f}_H = \mathbf{0}$$

and

$$\mathbf{M}_H \cdot \nabla_H - \mathbf{F}_{Hx} + \mathbf{m}_H = 0$$

of a two-dimensional continuum may be put down in detail in the following manner:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathbf{N}_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\mathbf{N}_2 A_1) \right] \frac{1}{A_{12}} + \mathbf{f}_H = \mathbf{0}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^1} (\mathbf{L}_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\mathbf{L}_2 A_1) - \mathbf{N}_1 A_2 \times \mathbf{a}_1 - \mathbf{N}_2 A_1 \times \mathbf{a}_2 \right] \frac{1}{A_{12}} + \mathbf{m}_H = \mathbf{0}.$$

#### REFERENCES

1. FLÜGGE: Handbuch der Physik. Vol. III-1. 213. (560-564)
2. P. M. NAGHDI: Foundations of Elastic Shell Theory. Progress in Solid Mechanics. Vol. IV. (1-90)



**Über die Gleichgewichtsgleichungen der festen Kontinua.** Die Analysis der dreidimensionalen Kontinua (Körper) spezieller Form wird mathematisch einfacher, wenn wir dieselben auf zweidimensionale (z. B. bei Schalen) oder auf eindimensionale (z. B. bei Stäben) Kontinua reduzieren. In der Abhandlung ist die Reduktion des äußeren und inneren Kräftesystems eines dreidimensionalen Kontinuums zu dem äußeren und inneren Kräftesystem eines zweidimensionalen bzw. eindimensionalen Kontinuums vorgeführt. Das angewandte Koordinatensystem ist auch im Falle von Schalen und Stäben vollkommen beliebig. In der Abhandlung wird die Analysis des mechanischen Gleichgewichts durchgeführt. Laut des Ergebnisses der Analysis kann das Gleichgewicht der drei-, zwei- und eindimensionalen Kontinua mathematisch mit vollkommen gleichförmigen Gleichgewichtsgleichungen ausgedrückt werden.

**Équations d'équilibre des continus solides.** L'analyse mathématique des continus (corps) tridimensionnels de formes spéciales devient plus simple si ceux-ci sont réduits à des continus bidimensionnels (par ex. dans le cas des barres). La réduction du système des forces extérieures et intérieures d'un continu tridimensionnel au système de forces extérieures et intérieures d'un continu bi-, resp. unidimensionnel est exposée. Le système de coordonnées utilisé est entièrement arbitraire aussi dans le cas des voiles minces et des barres. L'auteur effectue l'analyse de l'équilibre mécanique, d'après laquelle l'équilibre des continus uni-, bi- et tridimensionnels peut être exprimé mathématiquement par des équations d'équilibre de forme entièrement identique.

**Об уравнениях равновесия твердых континуумов.** Исследование трехмерных континуумов (тел) специальной формы математически упрощается, если их свести к двумерным (напр. в случае оболочек) или одномерным (напр. стержни) континуумам. В работе показано сведение наружной и внутренней силовой системы трехмерного континуума к наружной и внутренней силовой системе двумерного и, соответственно, одномерного континуума. Используемая система координат является совершенно произвольной как в случае оболочек, так и в случае стержней. В работе выполняется анализ механического равновесия. В результате этого анализа равновесие трехмерных, двумерных и одномерных континуумов математически может быть выражено при помощи уравнений равновесия, имеющих совершенно идентичную форму.



# SÄTZE ÜBER DIE STABILITÄT DER RUHESTELLUNG EINES ELASTISCHEN GEBILDES

J. BARTA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 4. November, 1966]

Der Aufsatz beweist einige Sätze auf Grund der Eigenschaften der Knickdeterminante, wobei einige neue Begriffe (die gebundene Last, die raumfeste Last, die körperfeste Last, die konjugierte Last, die affine Last) eingeführt werden. Mehrere Beispiele werden ausgearbeitet, um zu zeigen, wie man mit Hilfe der erwähnten Sätze von der Lösung einer Stabilitätsaufgabe auf die Lösung weiterer Stabilitätsaufgaben schließen kann.

## 1. Beispiele mit raumfester bzw. körperfester Last

Die Last des beiderseitig gelenkig gelagerten homogenen geraden elastischen Stabes sei gleichmäßig verteilt und *raumfest* (Bild 1).  $p$  ist die Intensität der Last,  $\alpha$  die Biegesteifigkeit,  $\mu$  die Masse pro Längeneinheit. (Das Beiwort »raumfest« soll bedeuten, daß die Wirkungslinie des elementaren Vektors  $p dx$  im Raume fest ist.) Das Eigengewicht sei außer acht gelassen. In einer unveröffentlichten Arbeit hat SZIDAROVSKY, J. die Frage aufgeworfen: Wie groß ist in diesem Falle die Intensität  $p_k$  der Knicklast?

Der Zweck des vorliegenden Abschnittes ist, diese Frage zu beantworten. Dazu sei die kinetische Methode verwendet, denn die Last ist nichtkonservativ, daher darf die kinetische Methode ohne weiteres verwendet werden. Es wird also der Bewegungsvorgang betrachtet, der durch eine hinreichend kleine Störung (Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit) hervorgerufen wird. Die Auslenkung aus der Ruhestellung ist durch die Verschiebung  $v(x,t)$  charakterisiert (Bild 1). Für  $v(x,t)$  gilt die aus der Elastostatik bekannte Differentialgleichung

$$\alpha v_{xx} = M \quad (1)$$

der elastischen Linie, wenn im Biegemoment  $M$  nicht nur die wirklichen Kräfte, sondern gemäß dem d'Alembertschen Prinzip auch die Trägheitskräfte berücksichtigt werden. Damit hat die Differentialgleichung (1) die Gestalt

$$\alpha v_{xx}(x,t) = (l-x)H(t) - (l-x)pv(x,t) - \int_x^l (\xi-x)v_{tt}(\xi,t)\mu d\xi, \quad (2)$$

wobei  $H(t)$  die Stützkraft an der Stelle  $x = l$  ist. Aus (2) folgt durch zweimalige Differentiation nach  $x$

$$\alpha v_{xxxx}(x, t) + (l - x) p v_{xx}(x, t) - 2 p v_x(x, t) = -\mu v_{tt}(x, t). \quad (3)$$

$v(x, t)$  soll der Differentialgleichung (3) genügen und zugleich die Randbedingungen

$$v(0, t) = v(l, t) = v_{xx}(0, t) = v_{xx}(l, t) = 0 \quad (4)$$

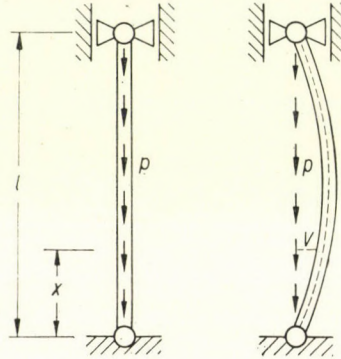


Bild 1. Die Last ist raumfest

erfüllen. Eine Funktion  $W(x, t)$  sei mittels der Funktion  $v(x, t)$  wie folgt definiert:

$$W(x, t) = \alpha v_{xxt}(x, t) + (l - x) p v_{tt}(x, t). \quad (5)$$

Aus (3) und (5) erhält man durch Differentiation die weiteren Gleichungen:

$$\alpha v_{xxxxxtt} + (l - x) p v_{xxxxtt} - 4 p v_{xxxxt} = -\mu v_{xxtt}, \quad (6)$$

$$W_{xx} = \alpha v_{xxxxtt} + (l - x) p v_{xxtt} - 2 p v_{xxt}, \quad (7)$$

$$W_{xxxx} = \alpha v_{xxxxxtt} + (l - x) p v_{xxxxtt} - 4 p v_{xxxxt}. \quad (8)$$

Aus (3), (6), (7), (8) folgen die zwei Gleichungen:

$$W_{xx} = -\mu v_{tt}, \quad (9)$$

$$W_{xxxx} = -\mu v_{xxtt}. \quad (10)$$

Werden die Gleichungen (5), (9), (10) mit  $\mu$  bzw.  $(l - x) p$  bzw.  $\alpha$  multipliziert und dann addiert, so entsteht die Differentialgleichung:

$$\alpha W_{xxxx} + (l - x) p W_{xx} + \mu W_{tt} = 0. \quad (11)$$

Aus (4), (5), (9) folgen die Randbedingungen:

$$W(0, t) = W(l, t) = W_{xx}(0, t) = W_{xx}(l, t) = 0. \quad (12)$$

Damit ist die Knicklastermittlung in dem im Bild 1 skizzierten Falle auf die Eigenwertaufgabe (11), (12) zurückgeführt.

Nun sei der im Bild 2 skizzierte Fall betrachtet. Hier ist die Last gleichmäßig verteilt und *körperfest*. (Das Beiwort »körperfest« soll bedeuten, daß

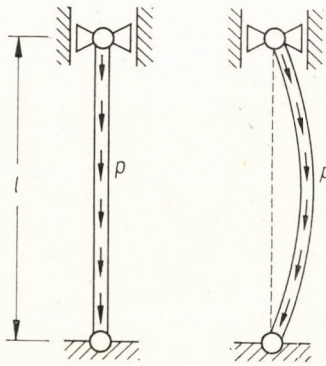


Bild 2. Die Last ist körperfest

der elementare Vektor  $p \, dx$  bei der Verbiegung der Stabachse mit ihr »mitgehend« ist.) Auch in diesem Falle ist die Last nichtkonservativ. Unter der Verwendung der kinetischen Methode hat LEIPHOLZ [1, 3] gefunden, daß in diesem Falle

$$p_k = 18,96 \alpha / l^3 \quad (13)$$

ist. Es ist bemerkenswert, daß die Eigenwertaufgabe, die zur Herleitung des Resultates (13) diente [2], identisch mit der Eigenwertaufgabe (11), (12) ist.

Man kann also aussagen, daß  $p_k$  auch in dem im Bild 1 skizzierten Falle durch die Formel (13) ausgedrückt ist. Damit ist die von SZIDAROVSKY aufgeworfene Frage beantwortet.

## 2. Weitere Beispiele mit raumfester bzw. körperfester Last

Der Stab ist an seinem unteren Ende eingespannt. Auf sein oberes Ende wirkt die *raumfeste* Last  $P$  (Bild 3). Der Verfasser hat nachgewiesen [4], daß  $P_k$  in diesem Falle ebenso groß ist wie in dem Falle, wo die Last *körperfest* ist (Bild 4); also nach Berechnung von BECK [5] ist  $P_k = 20,05 \alpha / l^2$ .

### 3. Definitionen

Die Ergebnisse des ersten und zweiten Abschnittes gaben dem Verfasser den Anlaß zur Aufstellung der Sätze, welche in dieser Abhandlung formuliert und mit I, II, III, IV, V numeriert werden. Die hierzu nötigen Definitionen sollen jetzt vorausgeschickt werden.

Eine Ruhestellung heißt *stabil*, wenn die Auslenkungen dauernd klein bleiben, falls man die Störung (Anfangsauslenkungen und Anfangsgeschwindigkeiten) hinreichend klein wählt. In jedem anderen Falle heißt die Ruhestellung *instabil*.

Das elastische Gebilde (Stab, Fachwerk, Bogen, Rahmen usw.) sei elastisch oder unbeweglich oder reibungslos beweglich an den festen Untergrund

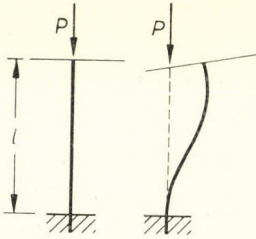


Bild 3. Die Last ist raumfest

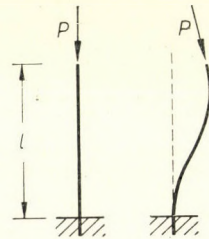


Bild 4. Die Last ist körperfest

geknüpft, so daß es eine innerlich oder äußerlich statisch bestimmte oder statisch unbestimmte Struktur bildet.

Die *Last* des elastischen Gebildes bestehe aus äußeren Kräften  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \dots$  und äußeren Momenten (Kräftepaaren)  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$ . Zur Charakterisierung von

$$\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \dots, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots \quad (14)$$

dienen ihre Komponenten

$$X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

Die Last des elastischen Gebildes heiße *gebunden*, wenn die Vektoren (14) in bestimmten Punkten des elastischen Gebildes (z. B. in bestimmten Punkten der elastischen Linie eines Stabes) angreifen. Diese Punkte führen Verrückungen (Verschiebungen und Drehungen) aus, wenn das elastische Gebilde Auslenkungen aus der Ruhestellung erfährt. Diese Verrückungen seien mit den Verrückungskomponenten

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

charakterisiert. (15) und (16) seien auf ein ruhendes (d. h. raumfestes) rechtwinkliges Achsenkreuz  $x y z$  bezogen.

Aus diesen Definitionen ist ersichtlich, daß die *körperfeste Last* (z. B. Bild 2 und 4) ein Spezialfall der gebundenen Last ist, denn bei der letzteren sind nur die Angriffspunkte, bei der ersteren sind auch die Vektoren (14) »mitgehend«. Ja noch mehr, auch die *raumfeste Last* kann als eine gebundene Last aufgefaßt werden, denn z. B. die im Bild 3 dargestellte Last ist sowohl statisch als auch kinetisch mit der im Bild 5 dargestellten Last gleichwertig.

Die skalaren Größen

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots \quad (17)$$

bzw.

$$q_1, q_2, q_3, \dots \quad (18)$$

seien sog. *generalisierte Kräfte* bzw. *generalisierte Koordinaten* [6]. Die  $q_1, q_2, q_3, \dots$  seien so gewählt, daß für die Ruhestellung, deren Stabilität unter-

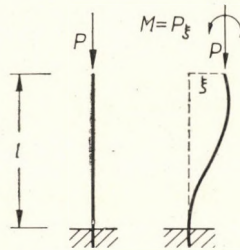


Bild 5. Eine gebundene Last

sucht wird,  $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = 0$  ist. (17) sind Funktionen von (18), d. h.

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(q_1, q_2, q_3, \dots), \\ Q_2 &= Q_2(q_1, q_2, q_3, \dots), \\ Q_3 &= Q_3(q_1, q_2, q_3, \dots), \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Diese Funktionen seien im Falle einer Last

$$\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3, \dots, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, \dots \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= \bar{Q}_1(q_1, q_2, q_3, \dots), \\ \bar{Q}_2 &= \bar{Q}_2(q_1, q_2, q_3, \dots), \\ \bar{Q}_3 &= \bar{Q}_3(q_1, q_2, q_3, \dots), \dots \end{aligned} \quad (21)$$

bezeichnet. Die Lasten (14) und (20) heißen zueinander *konjugiert*, wenn sowohl die Last (14) als auch die Last (20) gebunden ist und die Bedingungen

$$\frac{\partial Q_h}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial q_h}, \quad (h = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

erfüllt sind.

Bei der Stabilitätsuntersuchung sind hinreichend kleine Auslenkungen zu betrachten. Werden dann die Formeln (19) und (21) in der linearisierten Form

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1 + A_{11} q_1 + A_{12} q_2 + \dots + A_{1n} q_n, \\ Q_2 &= A_2 + A_{21} q_1 + A_{22} q_2 + \dots + A_{2n} q_n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (23)$$

und

$$\begin{aligned} Q_n &= A_n + A_{n1} q_1 + A_{n2} q_2 + \dots + A_{nn} q_n \\ \bar{Q}_1 &= \bar{A}_1 + \bar{A}_{11} q_1 + \bar{A}_{12} q_2 + \dots + \bar{A}_{1n} q_n, \\ \bar{Q}_2 &= \bar{A}_2 + \bar{A}_{21} q_1 + \bar{A}_{22} q_2 + \dots + \bar{A}_{2n} q_n, \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{Q}_n &= \bar{A}_n + \bar{A}_{n1} q_1 + \bar{A}_{n2} q_2 + \dots + \bar{A}_{nn} q_n \end{aligned} \quad (24)$$

angeschrieben, worin  $A_1, A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}, \bar{A}_1, \bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \dots, \bar{A}_{nn}$  Konstanten sind, so nehmen die Bedingungen (22) die Gestalt

$$A_{hk} = \bar{A}_{kh}, \quad (h = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

an. In diesen Bedingungen spielen die Glieder  $A_1, A_2, \dots, A_n, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  keine Rolle.

Die Lasten (14) und (20) heißen zueinander *affin*, wenn sowohl die Last (14) als auch die Last (20) gebunden ist und die Bedingungen

$$\frac{\partial Q_h}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{Q}_h}{\partial q_k}, \quad (h = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

erfüllt sind. Wenn die linearisierten Formen (23) und (24) benützt werden, so nehmen die Bedingungen (26) die Form

$$A_{hk} = \bar{A}_{hk}, \quad (h = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

an. Auch in diesen Bedingungen spielen die Glieder  $A_1, A_2, \dots, A_n, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  keine Rolle.

#### 4. Zwei Sätze

**Satz I:** »Ist die Ruhestellung des elastischen Gebildes unter der Einwirkung einer konservativen oder nichtkonservativen gebundenen Last stabil/instabil, so bleibt sie auch dann stabil/instabil, wenn die Last durch eine zu ihr konjugierte Last ersetzt wird.«



**Satz II:** »Ist die Ruhestellung des elastischen Gebildes unter der Einwirkung einer konservativen oder nichtkonservativen gebundenen Last stabil/instabil, so bleibt sie auch dann stabil/instabil, wenn die Last durch eine zu ihr affine Last ersetzt wird.«

### 5. Beweis der zwei Sätze

In dieser Abhandlung wird es immer angenommen, daß die folgende Finitisierung erlaubt ist: Anstatt des gegebenen elastischen Gebildes wird ein elastisches Gebilde betrachtet, das aus starren Teilen besteht, welche elastisch oder unbeweglich oder reibungslos beweglich aneinander oder an den festen Untergrund geknüpft sind, so daß sie eine statisch bestimmte oder statisch unbestimmte Struktur bilden, und alle ihre möglichen Lagen d. h. Verschiebungen (Verschiebungen und Drehungen) durch die Angabe von  $n$  voneinander unabhängigen skalaren Koordinaten (sog. generalisierten Koordinaten)

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (28)$$

festgelegt sind [6].

Die Erörterungen dieser Abhandlung beziehen sich also in erster Reihe auf ein elastisches Gebilde mit endlichem Freiheitsgrad  $n$ . Auf ein elastisches Kontinuum beziehen sie sich insofern, als dies als Grenzfall für  $n \rightarrow \infty$  betrachtet werden darf. Ob eine solche Betrachtung erlaubt ist, soll von Fall zu Fall nachgewiesen werden, denn es wird nicht behauptet, daß man die Sätze der Mechanik, die für Gebilde mit endlichem Freiheitsgrad gelten, ohne weiteres auf Kontinua übertragen darf.

Beim Beweis schreibt man also (28) statt (18) und nimmt an, daß die Konvergenz für  $n \rightarrow \infty$  besteht.

Jetzt soll der Beweis des Satzes I durchgeführt werden. Zuerst sei der Fall betrachtet, wo die Ruhestellung des elastischen Gebildes unter der Einwirkung der Last (14) besteht. Die hinreichend kleine Störung ruft einen Bewegungsvorgang hervor. Da das elastische Gebilde und seine Last ein holonomes System mit endlich vielen Freiheitsgraden bilden, gelten für den Bewegungsvorgang die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} + \frac{\partial U}{\partial q_h} - Q_h = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (29)$$

wobei  $T$  die kinetische Energie,  $U$  die in den elastischen Verbindungen aufgespeicherte potentielle Energie ist [6]. Ferner gelten die Gleichungen

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n m_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n B_{hk} (a_h + q_h)(a_k + q_k), \quad (30)$$

wobei  $m_{hk}$  und  $B_{hk}$  Konstanten sind und den Gleichungen

$$m_{hk} = m_{kh}, \quad B_{hk} = B_{kh} \quad (31)$$

genügen [7]. Die Konstanten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  in (30) erklären sich dadurch, daß  $U$  für  $q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_n = 0$  einen von Null verschiedenen Wert annehmen kann. Werden (30) und (23) in (29) eingeführt, so entstehen die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^n [m_{hk} \ddot{q}_k + (B_{hk} - A_{hk}) q_k] = A_h - \sum_{k=1}^n B_{hk} a_k, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind gleich Null, denn  $A_1, A_2, \dots, A_n, a_1, a_2, \dots, a_n$  beziehen sich auf die Ruhestellung. Die Bewegungsgleichungen haben also die Form

$$\sum_{k=1}^n [m_{hk} \ddot{q}_k + (B_{hk} - A_{hk}) q_k] = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (32)$$

Dies ist ein System von linearen Differentialgleichungen. Unter einer Lösung des Systems (32) versteht man eine Gruppe von  $n$  Funktionen  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ , die dem System (32) genügen. Es gibt selbstverständlich mehrere Lösungen des Systems (32) und jede charakterisiert einen Bewegungsvorgang des elastischen Gebildes. Zuzufolge der Definition der Stabilität der Ruhestellung soll also das Verhalten der Lösungen des Systems (32) untersucht werden. Dies geschieht wie folgt.

Gemäß der Literatur [8] bleiben alle Lösungen dann und nur dann dauernd klein, wenn in jeder Lösung von der Form

$$q_1 = C_1 e^{\omega t}, \quad q_2 = C_2 e^{\omega t}, \quad \dots, \quad q_n = C_n e^{\omega t} \quad (33)$$

die Konstante  $\omega$  gewisse Eigenschaften, deren Aufzählung jetzt überflüssig ist, besitzt. Aus (33) folgt

$$\ddot{q}_1 = C_1 \omega^2 e^{\omega t}, \quad \ddot{q}_2 = C_2 \omega^2 e^{\omega t}, \quad \dots, \quad \ddot{q}_n = C_n \omega^2 e^{\omega t}.$$

Werden diese Ausdrücke und die Ausdrücke (33) in (32) eingesetzt, so entstehen die Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^n (m_{hk} \omega^2 + B_{hk} - A_{hk}) C_k = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Diese Gleichungen sind homogen linear in bezug auf  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie nicht nur die triviale Lösung  $C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_n = 0$  besitzen, ist

$$\begin{vmatrix} m_{11}\omega^2 + B_{11} - A_{11} & \dots & m_{1n}\omega^2 + B_{1n} - A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}\omega^2 + B_{n1} - A_{n1} & \dots & m_{nn}\omega^2 + B_{nn} - A_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Entwickelt man hier die Determinante, so sieht man, daß die Gleichung (34) eine algebraische Gleichung ist, die aus den gegebenen Konstanten, aus den Lastwerten und aus den geraden Potenzen von  $\omega$  aufgebaut ist. Dadurch ist die Untersuchung der Stabilität der Ruhestellung auf die Untersuchung der Wurzeln  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$  der algebraischen Gleichung (34) zurückgeführt.

Nun sei der Fall betrachtet, wo die Ruhestellung des elastischen Gebildes unter der Einwirkung der konjugierten Last (20) besteht. Dieser Fall läßt sich ebenso wie der vorige Fall behandeln und führt zur algebraischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} m_{11}\omega^2 + B_{11} - \bar{A}_{11} & \dots & m_{1n}\omega^2 + B_{1n} - \bar{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}\omega^2 + B_{n2} - \bar{A}_{n1} & \dots & m_{nn}\omega^2 + B_{nn} - \bar{A}_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

Vertauscht man hier die Kolonnen mit den Zeilen und beachtet man die Gleichungen (31), so sieht man, daß die algebraische Gleichung (35) mit der algebraischen Gleichung (34) identisch ist. (35) liefert also dieselben Wurzeln  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$  wie (34). Damit ist der Satz I bewiesen.

Die Richtigkeit des Satzes II geht schon aus dem Beweis des Satzes I hervor, deshalb ist ein extra Beweis für ihn überflüssig.

## 6. Die Berechnung der generalisierten Kräfte

Die generalisierten Kräfte  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  sind dadurch gekennzeichnet, daß die Gesamtarbeit von  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_r, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_r$  sich für jede virtuelle Verrückung durch die Formel

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n \quad (36)$$

anschreiben läßt. Zwischen den Verrückungskomponenten und generalisierten Koordinaten besteht eine Beziehung

$$\xi_i = \xi_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \eta_i = \eta_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \dots, \quad \gamma_i = \gamma_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ (i = 1, 2, \dots, r).$$

Somit können die generalisierten Kräfte  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  gemäß den Formeln

$$Q_h = \sum_{i=1}^r \left( X_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_h} + Y_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_h} + \dots + M_{zi} \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_h} \right), \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (37)$$

berechnet werden, [6]. Aus (36) erhellt die Regel:  $Q_h$  ist eine Kraft in der Richtung der Verschiebung, falls  $q_h$  eine Verschiebung ist, und ein Moment in der Richtung der Drehung, falls  $q_h$  eine Drehung ist.

## 7. Ein Beispiel für die Anwendung des Satzes I

Die Wahl der generalisierten Koordinaten ist ziemlich willkürlich. Dementsprechend liefert die Formel (37) verschiedene generalisierte Kräfte. Zu einer Last gehören also mehrere konjugierte Lasten. Diese Tatsache wird anhand des folgenden Beispiels illustriert:

Das ebene elastische Gebilde (Bild 6a) besteht aus zwei gleichen homogenen starren Stäben und zwei gleichen elastischen Gelenken. Das eine Gelenk

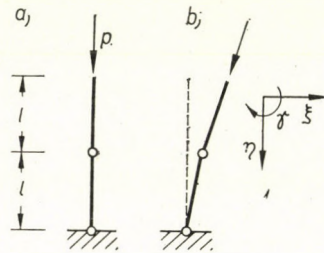


Bild 6. Ruhestellung und Auslenkung

verbindet die zwei Stäbe, das andere Gelenk knüpft den unteren Stab an den festen Untergrund. Jeder Stab hat die Masse  $m$ . Jedes Gelenk ist durch die Federkonstante  $T$  charakterisiert. Die Last besteht aus einer einzigen äußeren Kraft  $P$ , die am freien Ende des oberen Stabes stets in der Richtung des oberen Stabes angreift. Man soll die Knicklast  $P_k$  berechnen.

In dieser Aufgabe ist die Last *nichtkonservativ*. Die Verrückungskomponenten des Angriffspunktes von  $P$  sind  $\xi, \eta, \gamma$ , (Bild 6b). Die Lastkomponenten sind  $X = -P\gamma + \dots$ ,  $Y = P + \dots$ ,  $M_z = 0$ . Die Punkte bedeuten Glieder von höheren Potenzen.

Eine Wahl der generalisierten Koordinaten ist im Bild 7 gezeigt.  $q_1$  ist eine Verschiebung,  $q_2$  eine Drehung. Eine einfache geometrische Überlegung führt zur Beziehung:

$$\xi = q_1 + lq_2 + \dots, \quad \eta = \frac{q_1^2}{2l} + \frac{l}{2} q_2^2 + \dots, \quad \gamma = q_2.$$

Nach (37) ergeben sich die generalisierten Kräfte:

$$Q_1 = X \frac{\partial \xi}{\partial q_1} + Y \frac{\partial \eta}{\partial q_1} = -Pq_2 \cdot l + P \cdot \frac{q_1}{l},$$

$$Q_2 = X \frac{\partial \xi}{\partial q_2} + Y \frac{\partial \eta}{\partial q_2} = -Pq_2 \cdot l + lq_2$$

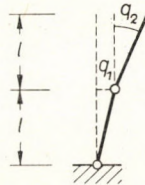


Bild 7. Eine Wahl der generalisierten Koordinaten

oder, was dasselbe ist,

$$Q_1 = \frac{P}{l} q_1 - Pq_2,$$

$$Q_2 = 0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2.$$

Daraus folgt auf Grund der Formeln (23), (24), (25) durch »Spiegelung«

$$\bar{Q}_1 = \frac{P}{l} q_1 + 0 \cdot q_2,$$

$$\bar{Q}_2 = -P q_1 + 0 \cdot q_2,$$

d. h.  $\bar{Q}_1 = (P/l) q_1$  und  $\bar{Q}_2 = -Pq_1$ . Diese Last ist in das Bild 8 eingezeichnet und ist eine zur gegebenen Last (Bild 6) konjugierte Last. Ihr Wert ist, wie

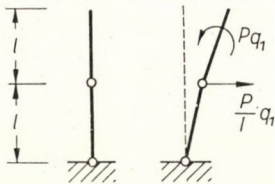


Bild 8. Eine konjugierte Last

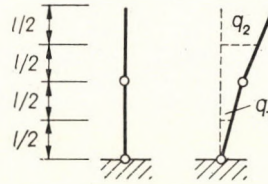


Bild 9. Eine andere Wahl der generalisierten Koordinaten

das Bild 8 veranschaulicht, in der Ruhelage gleich Null. Infolge des Satzes I kann man aussagen: Die Ruhelage nach Bild 6 ist dann und nur dann stabil, wenn die Ruhelage nach Bild 8 stabil ist.

Eine ähnliche Aussage kann man auch im Falle der in das Bild 10 eingezeichneten Last machen. Zu dieser konjugierten Last gelangt man durch die Wahl der generalisierten Koordinaten, die in das Bild 9 eingezeichnet

sind. Auch weitere konjugierte Lasten lassen sich in dieser Weise herstellen. Zur Entscheidung der Stabilitätsfrage kann man — vermöge des Satzes I — sowohl die gegebene als auch die konjugierten Lasten benutzen. Sei nun die in das Bild 8 eingezeichnete Last benutzt (das Kräftespiel ist im Bild 11 veranschaulicht). So lauten die Bewegungsgleichungen für den oberen Stab

$$m \left( q_1 + \frac{l}{2} q_2 \right)'' = H, \quad 0 = V,$$

$$\frac{ml^2}{12} \ddot{q}_1 = -\frac{l}{2} H - \frac{l}{2} V q_2 - P q_1 - \Gamma \left( q_2 - \frac{q_1}{l} \right),$$

für den unteren Stab:

$$\frac{ml^2}{3} \cdot \frac{\ddot{q}_1}{l} = -lH - V q_1 + l \cdot \frac{P}{l} q_1 + \Gamma \left( q_2 - \frac{q_1}{l} \right) - \Gamma \frac{q_1}{l}.$$

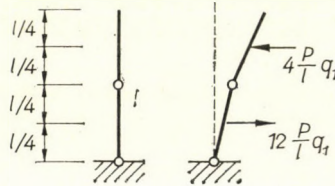


Bild 10. Eine andere konjugierte Last

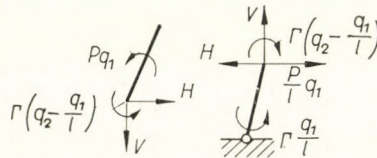


Bild 11. Kräftespiel während der Auslenkung

Aus diesen Gleichungen eliminiert man  $H$  und  $V$ . So erhält man die Gleichungen

$$ml\ddot{q}_1 + \frac{2}{3} ml^2\ddot{q}_2 = \left( -2P + 2\frac{\Gamma}{l} \right) q_1 - 2\Gamma q_2,$$

$$\frac{4}{3} ml\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} ml^2\ddot{q}_2 = \left( P - 2\frac{\Gamma}{l} \right) q_1 + \Gamma q_2,$$

woraus unter Verwendung des Ansatzes  $q_1 = C_1 e^{\omega t}$ ,  $q_2 = C_2 e^{\omega t}$  die Gleichungen

$$ml\omega^2 C_1 + \frac{2}{3} ml^2 \omega^2 C_2 = \left( -2P + 2\frac{\Gamma}{l} \right) C_1 - 2\Gamma C_2,$$

$$\frac{4}{3} ml \omega^2 C_1 + \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 C_2 = \left( P - 2\frac{\Gamma}{l} \right) C_1 + \Gamma C_2$$

folgen. Diese sind homogen linear in bezug auf  $C_1$  und  $C_2$ . Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie nicht nur die Lösung  $C_1 = C_2 = 0$  besitzen, ist

$$\begin{vmatrix} ml\omega^2 + 2P - 2\frac{\Gamma}{l} & \frac{2}{3}m^2\omega^2 + 2\Gamma \\ \frac{4}{3}ml\omega^2 - P + 2\frac{\Gamma}{l} & \frac{1}{2}ml^2\omega^2 - \Gamma \end{vmatrix} = 0,$$

das heißt

$$(ml\omega^2)^2 + \left[ -\frac{30}{7}P + \frac{108}{7}\frac{\Gamma}{l} \right] ml\omega^2 + \frac{36}{7}\frac{\Gamma^2}{l^2} = 0. \quad (38)$$

Dies ist eine algebraische Gleichung vierten Grades in  $\omega$  (zweiten Grades in  $\omega^2$ ). Die Ruhestellung ist zufolge ihrer Definition dann und nur dann stabil, wenn  $q_1 = C_1 e^{\omega t}$  und  $q_2 = C_2 e^{\omega t}$  hinreichend klein bleiben, falls  $t$  unbeschränkt wächst, also wenn keine von den Wurzeln  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  der Gleichung (38) einen positiven reellen Teil besitzt. Diese Forderung wird erfüllt sein, wie es durch eine einfache Überlegung folgt (siehe z. B. [9]), wenn

$$-\frac{30}{7}P + \frac{108}{7}\frac{\Gamma}{l} > 0, \quad \left( -\frac{30}{7}P + \frac{108}{7}\frac{\Gamma}{l} \right)^2 - 4\frac{36}{7}\frac{\Gamma^2}{l^2} > 0$$

ist, woraus  $-\infty \leq P < 2,54 \Gamma/l$  sich ergibt. Diese Ungleichung drückt die Bedingung für die Stabilität der Ruhestellung aus. Daher ist

$$P_k = 2,54 \frac{\Gamma}{l}. \quad (39)$$

### 8. Weitere Sätze

Aus den Erörterungen der Abschnitte 3, 4 und 5 folgen, wie man leicht einsehen kann, die folgenden Sätze.

**Satz III:** »Sind die Lasten  $L_1$  und  $\bar{L}_1$  zueinander konjugiert, und sind die Lasten  $L_2$  und  $\bar{L}_2$  zueinander konjugiert, und sind  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  konstante reelle Zahlen, so sind auch die Lasten  $\varrho_1 L_1 + \varrho_2 L_2$  und  $\varrho_1 \bar{L}_1 + \varrho_2 \bar{L}_2$  zueinander konjugiert; das + Zeichen bedeutet hier eine Superposition im Sinne der Kraftlehre.«

**Satz IV:** »Eine konservative Last ist zu sich selbst konjugiert.«

**Satz V:** »Bestehen die Lasten  $L$  und  $\bar{L}$  aus Kräften, und unterscheiden sie sich voneinander nur darin, daß  $L$  körperfest und  $\bar{L}$  raumfest ist, so sind die Lasten  $L$  und  $\bar{L}$  zueinander konjugiert.«

Aus den Sätzen I bis V kann man verschiedene Schlüsse ziehen, z. B. auf Grund des Satzes III und V läßt sich der Satz I auf den Fall ausdehnen, wo die Last gemischt aus raumfesten und körperfesten Kräften besteht.

### 9. Ein Anwendungsbeispiel

Das Bild 12 zeigt eine konstante Kraft  $P$ . Diese Last ist *konservativ*. Gemäß dem Satz IV ist sie zu sich selbst konjugiert.

Ein ähnlicher Fall ist im Bild 13 veranschaulicht, wo die konstante Kraft mit  $R$  bezeichnet ist. Eine von den zur Last  $R$  konjugierten Lasten sei

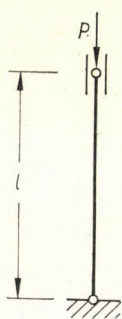


Bild 12. Eine Last, welche aus einer konstanten Kraft  $P$  besteht

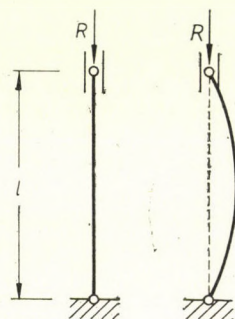


Bild 13. Eine Last, welche aus einer konstanten Kraft  $R$  besteht und eine gedachte Verformung der Stabachse

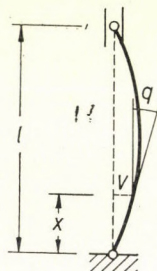
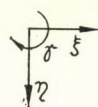


Bild 14. Die gedachte Verformung der Stabachse wird durch die Drehung  $q(x)$  charakterisiert

wie folgt hergestellt.  $q(x)$  ist die Drehung (Bild 14). Um die Formel (37) verwenden zu können, teilt man die Strecke  $l$  in  $n$  gleiche Teilstrecken  $\Delta l = l/n$  ein und ordnet diesen Teilstrecken die Drehungen  $q_1, q_2, \dots, q_n$  als generalisierten Koordinaten zu. Die Funktion  $q(x)$  wird vorübergehend durch diese  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ersetzt. Somit ist

$$\eta = \frac{\Delta l}{2} \sum_{h=1}^n q_h^2.$$

Die Formel (37) liefert

$$Q_h = Y \frac{\partial \eta}{\partial q_h} = R \Delta l q_h, \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

wobei  $Q_h$  ein Moment bedeutet, da  $q_h$  eine Drehung ist. Nach (23), (24), (25) erhält man

$$\bar{Q}_h = \Delta l q_h, \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

d. h.

$$\frac{\bar{Q}_h}{\Delta l} = R q_h, \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (40)$$



Um wieder zu  $q(x)$  zurückzukehren, macht man  $n \rightarrow \infty$ . Dann lautet (40)

$$m = Rq, \left( q = \frac{dv}{dx} \right),$$

wo  $m$  die Intensität eines verteilten Momentes bedeutet. Diese Last ist in das Bild 15 eingezeichnet (in der Ruhestellung hat sie den Wert Null). Diese Last und die in das Bild 13 eingezeichnete Last sind zueinander konjugiert.

Jetzt sei der Satz III verwendet. Dabei seien  $\varrho_1 = 1$ ,  $\varrho_2 = -1$ ,  $L_1$  die Last nach Bild 12,  $L_2$  die Last nach Bild 13,  $\bar{L}_1$  die Last nach Bild 12,  $\bar{L}_2$  die

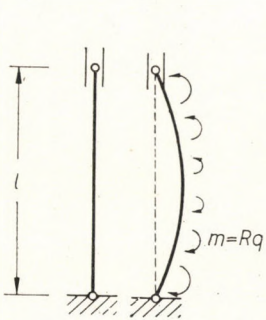


Bild 15. Die zur Last  $R$  konjugierte Last

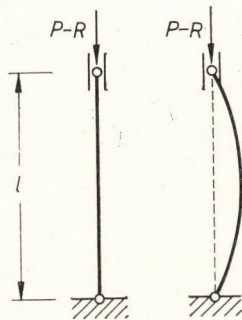


Bild 16. Der Knickfall, auf den die Eulersche Formel angewendet wird

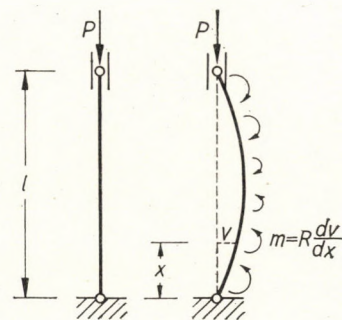


Bild 17. Das elastische Gebilde und seine Last. Für die gerade Ruhestellung dieses Systems ist die Stabilitätsbedingung zu ermitteln

Last nach Bild 15. So führt der Satz I zur Feststellung: Die Ruhestellung nach Bild 17 ist dann und nur dann stabil, wenn die Ruhestellung nach Bild 16 stabil ist (Eulerscher Fall), wenn also

$$P - R < \frac{\pi^2 \alpha}{l^2} \quad (41)$$

ist, wobei  $\alpha$  die Biegesteifigkeit bedeutet. Mit anderen Worten: Die Ruhestellung nach Bild 17 ist dann und nur dann stabil, wenn die Konstanten  $P$  und  $R$  der Ungleichung (41) genügen. Dieses Ergebnis wurde auf einem anderen Weg schon von CSONKA, P. hergeleitet [10].

Nebenbei sei bemerkt, daß das verteilte Moment, das mit seiner Intensität  $m = Rq$  charakterisiert wurde (Bezeichnungen nach Bildern 14 und 17), nichts anderes als eine verteilte Kraft ist, die seitlich auf den Stab wirkt und mit ihrer Intensität  $k = dm/dx$ , d. h.  $k = RG$  charakterisiert ist, wobei  $G$  die Krümmung des Stabes ist.

10. Ein weiteres Anwendungsbeispiel

In dem im Bild 18 veranschaulichten Fall ist die Last durch die Konstanten  $P$  und  $R$  charakterisiert. Bei welchen Werten der Konstanten  $P$  und  $R$  ist die im Bild 18 veranschaulichte Ruhestellung stabil?

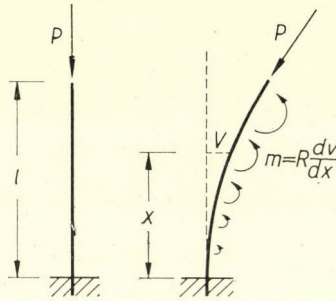


Bild 18. Die gegebene Last

In dieser Aufgabe ist die Last *nichtkonservativ*. Um die Aufgabe zu lösen, beweise man vor allem, daß die in das Bild 18 eingezeichnete Last und die in das Bild 19 eingezeichnete Last zueinander affin sind. Zu diesem Zweck benütze man die generalisierten Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , die (ebenso wie im neunten Abschnitt) die Funktion  $q(x) = dv/dx$  vorübergehend ersetzen sollen. Die Formel (37) liefert dann sowohl für die im Bild 18 dargestellte Last als auch für die im Bild 19 dargestellte Last die generalisierten Kräfte:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= (P - R) \Delta l q_1 - P \Delta l q_n, \\
 Q_2 &= (P - R) \Delta l q_2 - P \Delta l q_n, \\
 &\dots \dots \dots \\
 Q_{n-1} &= (P - R) \Delta l q_{n-1} - P \Delta l q_n, \\
 Q_n &= -R \Delta l q_n.
 \end{aligned}$$

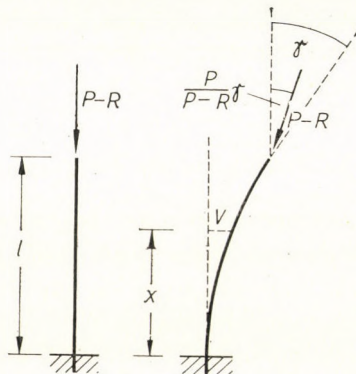


Bild 19. Die zur gegebenen Last affine Last

Somit führt der Satz II zur Feststellung: Die im Bild 18 veranschaulichte Ruhestellung ist dann und nur dann stabil, wenn die im Bild 19 veranschaulichte Ruhestellung stabil ist.

Nun ist die Stabilität der im Bild 19 veranschaulichten Ruhestellung schon von PETERSSON, O. behandelt worden [11]. Demnach ist die Ruhestellung dann und nur dann stabil, wenn die Bedingung

$$P - R < \frac{c\alpha}{l^2} \quad (42)$$

erfüllt ist.  $\alpha$  ist die Biegesteifigkeit. Der Wert  $c$  ist dem Bild 20 zu entnehmen. Die im Bild 18 dargestellte Ruhestellung ist also dann und nur dann

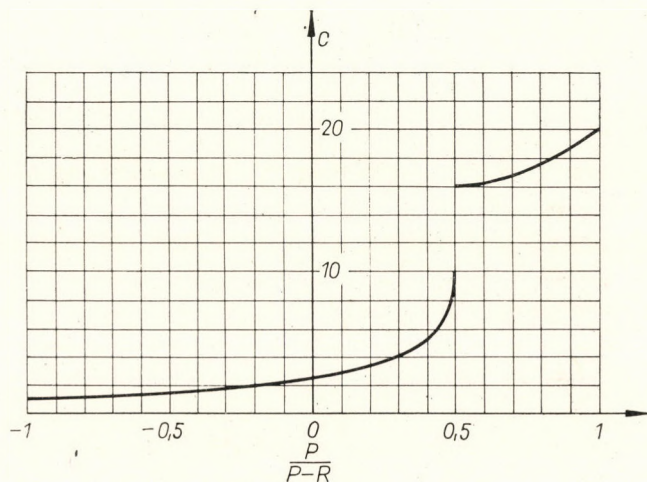


Bild 20. Diagramm für den Wert  $c$

stabil, wenn die Konstanten  $P$  und  $R$  der Ungleichung (42) genügen, wobei der Wert  $c$  dem Bild 20 zu entnehmen ist.

Aus den Bildern 18 und 20 ist es ersichtlich, daß z. B. zu  $P/(P-R) = 0$  der Wert  $c = \pi^2/4$  (der Eulersche Fall), zu  $P/(P-R) = 1$  der Wert  $c = 20,05$  (der Becksche Fall) gehört.

## 11. Rückblick auf die Erörterungen des ersten und zweiten Abschnittes

Die in das Bild 1 eingezeichnete Last ist raumfest. Die in das Bild 2 eingezeichnete Last ist körperfest. Diese Lasten sind infolge des Satzes V zueinander konjugiert. Mithin folgt das Ergebnis, das im ersten Abschnitt hergeleitet wurde, unmittelbar aus dem Satz I.

Eine ähnliche Bemerkung betrifft auch das Ergebnis des zweiten Abschnittes.

## 12. Schlußwort

Die in dieser Abhandlung formulierten Sätze I bis V beziehen sich auf elastische Gebilde von beliebiger Form. Die ausgearbeiteten Beispiele beziehen sich nur auf gerade Stäbe. Der Verfasser beabsichtigt, in einer künftigen Arbeit Beispiele auch aus dem Gebiete anderer elastischer Gebilde zu bringen.

### SCHRIFTTUM

1. LEIPHOLZ, H.: Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsprobleme des elastischen Stabes. *ZAMP*, **13** (1962), 370.
2. Ibidem, p. 365, Formeln (25) und (26).
3. LEIPHOLZ, H.: Über die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens bei nichtselbstadjungierten und nichtkonservativen Eigenwertproblemen. *ZAMP*, **14** (1963), 70.
4. BARTA, J.: Das Bechsche Stabilitätsproblem und verwandte Probleme. *Acta Techn. Hung.*, **31**, (1960), 255.
5. BECK, M.: Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes. *ZAMP*, **3** (1952), 258.
6. Siehe z. B.: KÁRMÁN, TH. v. and BIOT, M. A.: *Mathematical Methods in Engineering*. First ed., chap. III, sec. 11.
7. Ibidem, chap. V, sec. 1.
8. Ibidem, chap. I, sec. 12 and chap. VI, sec. 6.
9. Ibidem, chap. V, sec. 2.
10. CSONKA, P.: Buckling of Bars Elastically Built-in along their Entire Length. *Acta Techn. Hung.*, **32** (1961), 423.
11. PETTERSSON, O.: Ett icke-konservativt knäckningsproblem. Festschrift till professor Carl Forssell, p. 104, Stockholm 1956.

**Theorems Concerning the Stability of Equilibrium of an Elastic Body.** The proof of the theorems is based on the properties of buckling determinant, while several new notions (load bound to a point, load bound to space, load bound to body, conjugate load, affine load) are introduced. Elaborated examples show that from the solution of a stability problem, by means of the theorems, the solution of further stability problems could follow.

**Théorèmes concernant la stabilité de l'équilibre d'un corps élastique.** La démonstration des théorèmes est basée sur les propriétés du déterminant de flambage. Quelques notions nouvelles (charges liées à un point, à l'espace, à un corps, charge conjuguée et charge affine) sont introduites par l'auteur. Plusieurs exemples élaborés servent à démontrer, comment la solution d'un problème de stabilité permet de résoudre d'autres problèmes de stabilité en utilisant les théorèmes.

**Теоремы стабильности состояния покоя упругих форм.** В работе, используя свойства определителя прогиба, доказываются теоремы. В процессе разбора в качестве нового понятия вводится понятие конъюгированной аффинной нагрузки, привязанной к точке, пространству и телу. Разработка нескольких примеров служит для демонстрации того, каким образом можно по результатам решенных задач стабильности, применяя теоремы, сделать выводы относительно результатов дальнейших задач стабильности.

# DIE SCHUBSICHERUNG DES STAHLBETONTRÄGERS AUF GRUND DER BRUCHTHEORIE

L. PALOTÁS

DR. DER TECHN. WISSENSCHAFTEN  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 29. Dezember 1966],

Das vorgeschlagene Verfahren bildet eine wirtschaftlich und durch Versuche anscheinend begründete Ergänzung der klassischen Methode. Demnach kann für die Schubsicherung der Stahlbetonträger die vorläufige Anwendung des klassischen Verfahrens vorgeschlagen werden, doch mit dem Vorbehalt, daß die Wirksamkeit der Bügelung und die der Schrägeinlagen gleich angenommen und die gedrückten bzw. rißfreien Betonzonen in der Schubsicherung als mitwirkend in Betracht gezogen werden müssen. Es ist zu betonen, daß die richtige, konstruktive Ausbildung der Bewehrung aus dem Gesichtspunkt der Schubsicherheit von grundlegender Bedeutung ist.

## 1. Einleitung

Der durch MÖRSCH aufgestellte Grundgedanke: die Lösung der Schubsicherheit mit Hilfe der berechneten Schubspannung

$$\tau = \frac{T}{bz} \quad (1)$$

erfuhr in den letzten Jahren viel Kritik. (In der Formel ist  $T$  die Schubkraft,  $b$  die ausschlaggebende Breite des Querschnittes,  $z$  der Hebelarm.)

Allgemeiner Meinung nach müssen zwei Fragen der Schubsicherheit des Stahlbetonbalkens geprüft, entsprechend beantwortet und gelöst werden. Diese Fragen sind die folgenden:

1. die Eignung des Betons des Stahlbetonbalkens.
2. die Ermittlung der geeigneten Schubbewehrung.

Zur Lösung der ersten Frage sind durch einige Bestimmungen die untere Grenze der Schubspannung bzw. der schrägen Zugspannung ( $\sigma_u$ ) und eine obere Grenze der schrägen Zugspannung ( $\sigma_0$ ) vorgeschrieben. Die zwischen den erwähnten zwei Spannungsgrenzen nötige *Schubbewehrung* wird im allgemeinen entweder auf Grund der Schubspannungen oder der Schubkräfte definiert. Aber für die Ausbildung der erforderlichen Schubbewehrung, für die Auswahl der wirksameren von den in Frage kommenden Bewehrungsarten und hinsichtlich der Frage, welcher Teil der Schubspannungen bzw. Schubkräfte als ausschlaggebend betrachtet werden soll usw., geben die Forscher verschiedene Vorschläge und die einzelnen Normen verschiedene Anordnungen.

Der Verfasser versucht vor allem, die erwähnten Probleme durch die Wertung der von ihm bekannten (eigenen und fremden) Experimente zu beleuchten und mit der Wertung parallel auch eine kritische Anschauung und für die in Betracht kommende Methode einen Vorschlag zu geben. Dann befaßt er sich besonders mit den Fragen, die während der Wertung der Experimente aufgeworfen wurden (die Rolle der Betondruckzone, die Schubaufnahmefähigkeit der Hauptbeläge, der Einfluß der Änderung des Zug- und Druckkräftehebelarmes), zuletzt teilt er eine von ihm vorgeschlagene Schubberechnungsmethode mit. Seiner Meinung nach kann eine verlässliche Lösung nur durch die Synthese des klassischen Verfahrens und der Bruchtheorie, d. h. durch einen zwischen diesen letzteren abzuschließenden richtigen Kompromiß gegeben werden.

### 2. Die Auswertung der Versuchsergebnisse

Bevor man sich in die Einzelheiten vertieft, sollen einige, im folgenden benützte wichtigere Begriffe und Beziehungen um einer leichteren Orientierung willen geklärt werden (Bild 1).

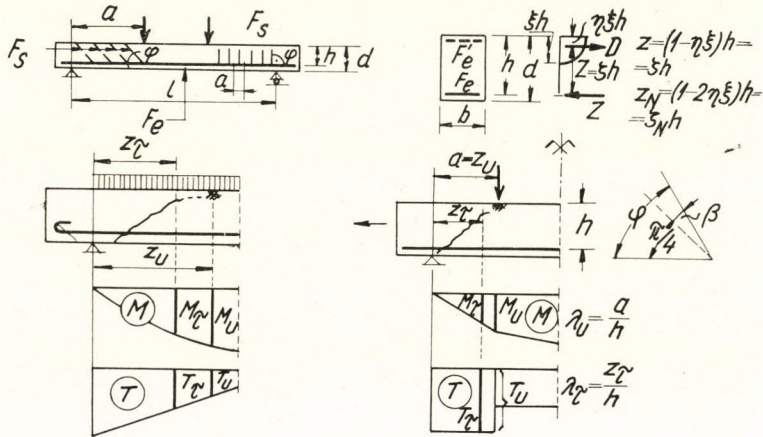


Bild 1

#### a) Versuchsergebnisse und ihre Auswertung

Die Zerstörung des nur mit Hauptbewehrung versehenen Stahlbetonträgers und auch des mit Schubbewehrung versehenen Stahlbetonbalkens kann, von den Dimensionen des Querschnittes und von der Stahlbewehrung abhängig, durch drei Gründe hervorgerufen werden: durch *Biegebruch*, *Schubbruch* und *Scherbruch*. Die verschiedenen Typen und deren Varianten sind im Bild 2 veranschaulicht.

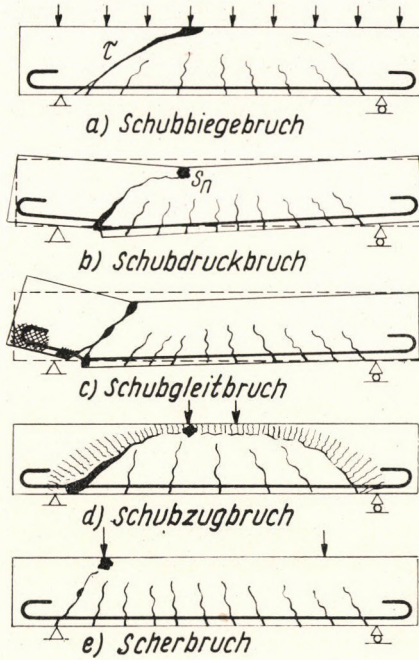


Bild. 2

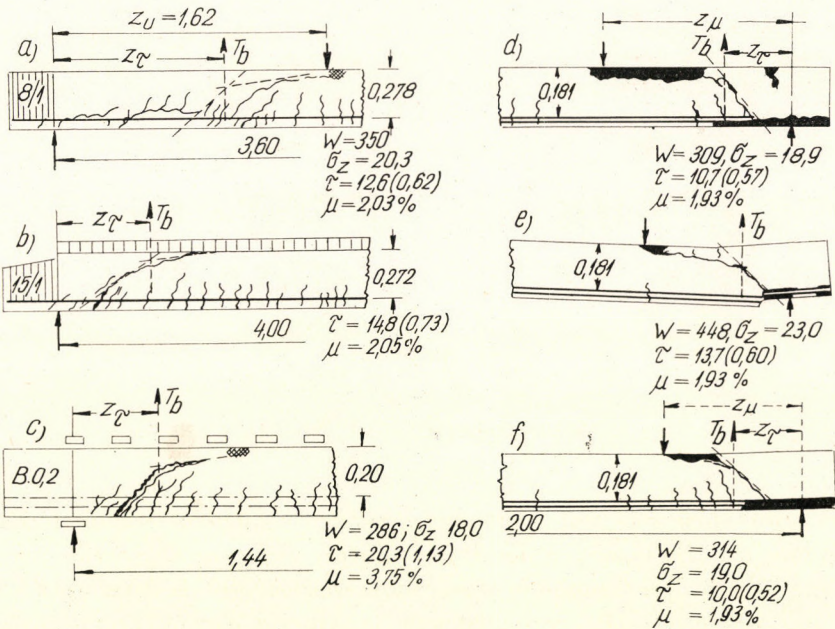


Bild 3

Vom Gesichtspunkt der Berechnung aus und aus bruchtheoretischem Standpunkt ist die wichtigste Frage die Entwicklung und die Stelle der Bruchschubrisse.

Um die Entwicklung und die Stelle der Bruchschubrisse schätzen zu können, hat der Verfasser einige ausgewählte Versuchsergebnisse im Bild 3 dargestellt. Wie aus diesem ersichtlich, ist der untere Ausgangsteil des Bruchquerschnittes — abgesehen von der annähernd horizontalen Strecke, die möglicherweise infolge des Gleitens der Längsbewehrung entsteht — eine steile Strecke von ungefähr 45° Neigung, der obere Abschnitt des Schubrisse ist aber flach ausgedehnt. Am Ende des oberen Abschnittes, in der verdünnten Druckzone wird der Beton durch Druck zerstört. Der annähernd horizontal

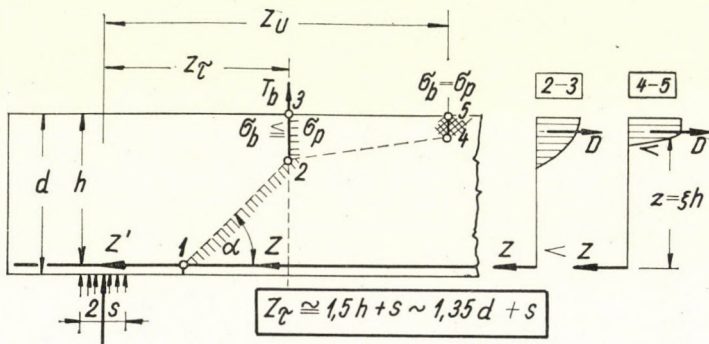


Bild 4

verlaufende obere Riß scheint auf eine Spaltkraft ( $T_b$ ) hinzuweisen, deren Stelle in den Schnittpunkt des schrägen und des annähernd horizontalen oberen Risses zu setzen ist.

Entspricht die Hauptbewehrung den Momentenänderungen, z. B. wenn diese gegen die Stützen stufenweise abnimmt, so verschiebt sich  $z_r$  gegen die Stützen. Im Falle einer gleichmäßigen Belastung — bei der gegebenen Versuchsanordnung — geht der Schubriß nicht von der Stütze — d. h. nicht von der Stelle der größten Spannung —, sondern von der Zone der Trägermitte aus. Für die Entfernung  $z_r$  hat man unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Bruchbilder rund

$$z_r = 1,50h + s \sim 1,35d + s \sim 1,6h - 1,7h \quad (2)$$

gefunden (Bild 4).

Der Grund hierfür liegt darin, daß die Stützkräfte bei solcher Versuchsanordnung (mit abgestufter Längsbewehrung) — wie BAY beweist — in den Balken vertikale  $\sigma_y$ -Spannungen verursachen (Bild 5).

Was die Spaltkraft  $T_b$  anbelangt, ist deren Größe von den im Schnitt 2—3 wirkenden Druckspannungen abhängig. Das ist nach einigen Forschern



— BRESLER, PISTER, BORISCHANSKIJ, GYENGŐ, MENYHÁRD, PALOTÁS — mit der von der Druckzone aufzunehmenden Schubkraft zu erklären. Einige Forscher (BERNAERT, SIESS, PALOTÁS, JUHÁSZ) nehmen auch an, daß ein bedeutender Teil der Schubkraft auch durch die Hauptbewehrungen als Scherdübel aufgenommen wird.

Bei Balken — mit und ohne Schubbewehrung — scheint es zweckmäßig, den Bruchzustand mit einem gebrochenen schrägvertikalen Schnitt zu charakterisieren, dessen vertikale Strecke — als Vereinfachung, und der Sicherheit

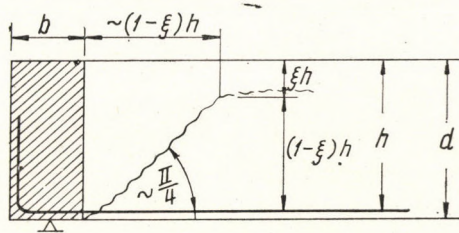


Bild 5

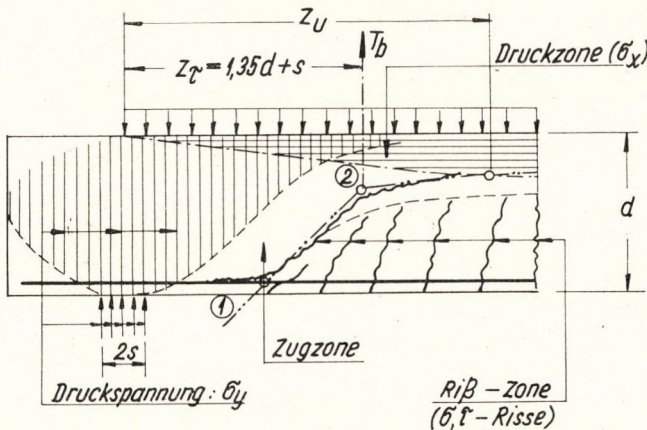


Bild 6

halber — nur die Länge 4—5 besitzt, d. h., daß von der möglichen weiteren Tragfähigkeitszunahme abgesehen wird.

Ist aber der Balken gehängt, so liegt der Schubbruchriß offenbar näher zur Stütze — da die Stützkraft positive (Zug-) Spannungen  $\sigma_y$  in den Trägern verursacht. Wenn die Last gleichmäßig an einem anschließenden Balken übergeben wird, so geht der Schubriß wahrscheinlich aus der unmittelbaren Nähe der Stütze aus (Bild 6). Bei einem kontinuierlichen Träger gehen die Risse, übrigens ähnlichen Charakters, direkt aus den mittleren Stützen aus.

Um weitere Folgerungen ziehen zu können, sollen einige charakteristische Bilder und Versuchsergebnisse aus den eigenen, neulich durchgeführten Versuchen des Verfassers vorgeführt werden.

Bild 7 gibt die wichtigsten Angaben der Versuchsserien I, II, III an. Bild 8 und Tafel I veranschaulichen einige Bruchbilder und Resultate der Serie I. Diese diente als Vorversuchsserie.

Das Hauptziel der Versuchsserie II war die Untersuchung der Wirkung verschiedener Schubbewehrungsarten (senkrechte Bugel, Bugel mit einer Neigung von 75°, 60°, 45°, 30° und waagerechte Stahleinlagen) und der Schub-

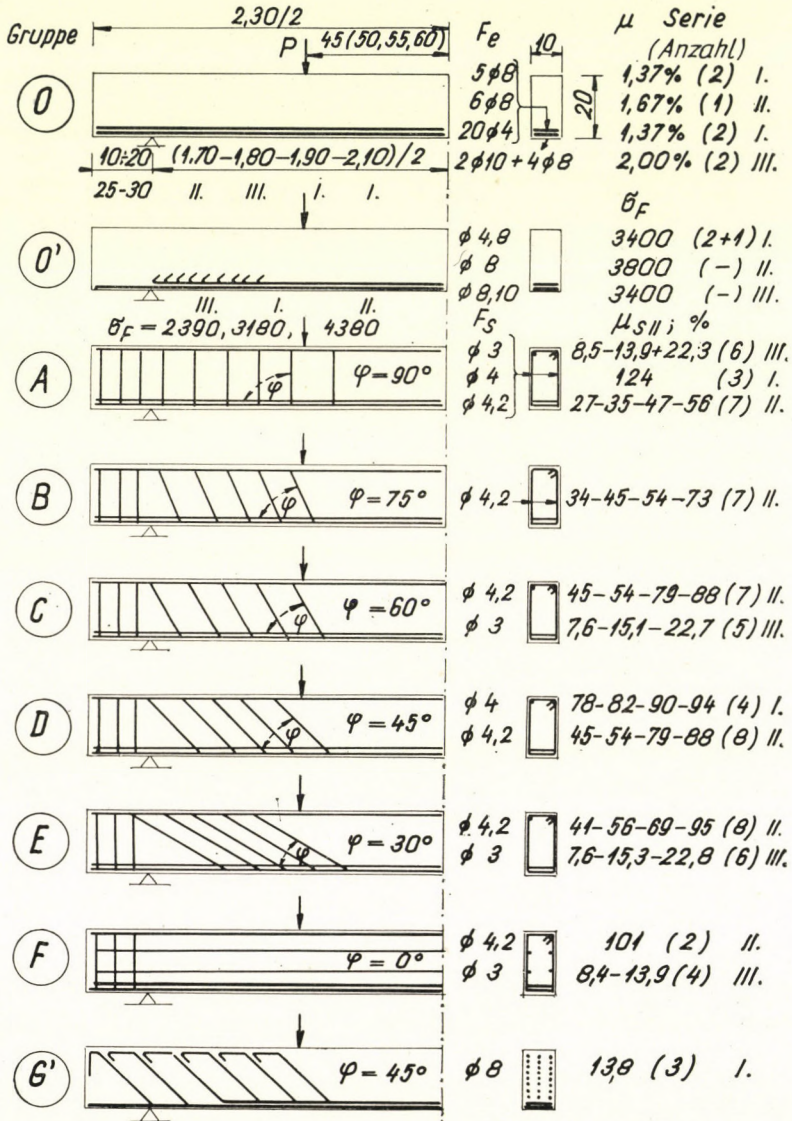


Bild 7

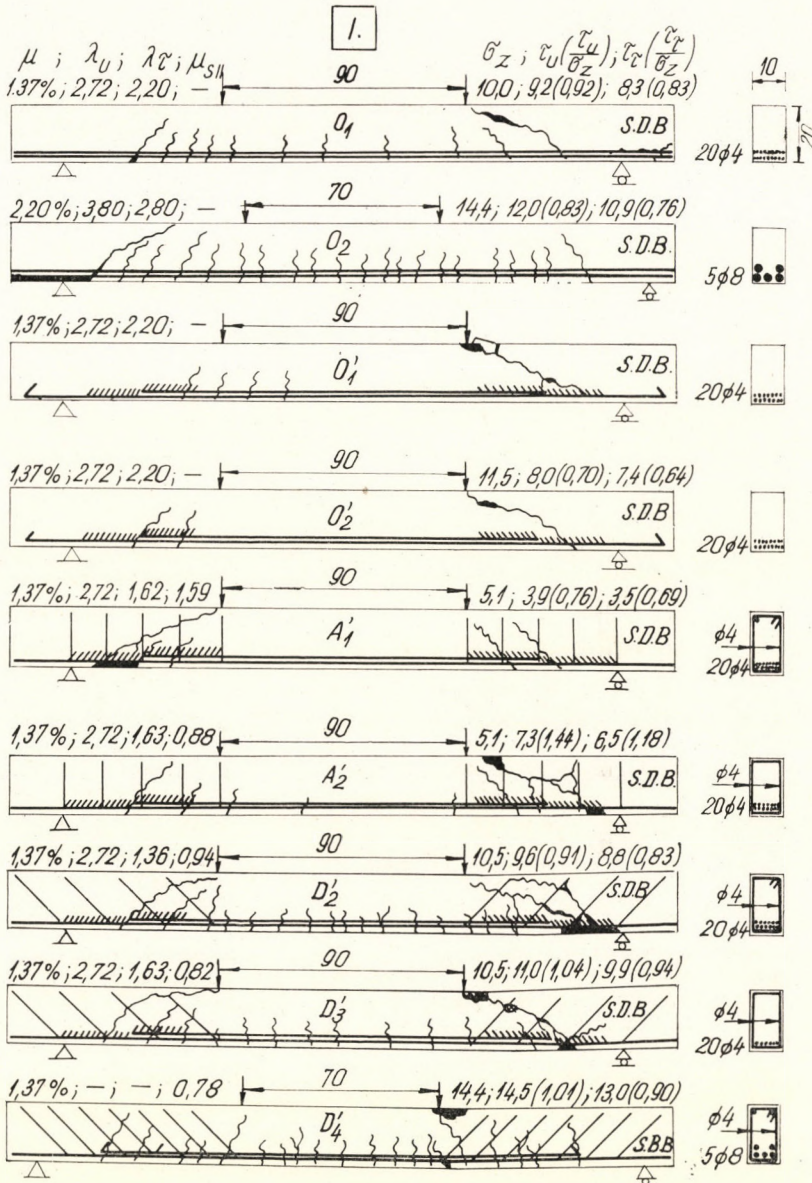


Bild 8

bewehrungsstärke. Die Bilder 9–14 stellen etliche kennzeichnende Bruchbilder, die Bilder 15–18 die berechneten relativen »T«- und »M«-Werte in der Funktion des Schubdeckungsgrades ( $\mu_s$ ) dar. Die Werte  $\mu_{s||}$  (in %) wurden nach der Mörsch'schen Methode berechnet. Bei der Berechnung der Werte  $\mu_{s||}$  hat der

Tafel I  
Serie I

Gruppe (Anzahl)	$W$	$\sigma_p$	$\sigma_z$	$\tau$	$\tau_N$	$\mu_{S''}$	$\mu_{S'''}'$	$\tau$	$\frac{M_B}{M_{Bt}}$	$\frac{M\tau}{M_B}$
	kp/cm <sup>2</sup>					%		$\sigma_z$		
O (4)	186	163	13,4	10,9	9,9	—	—	0,81	0,86	0,61
O' (3)	182	158	13,2	7,8	7,2	—	—	0,59	0,58	0,35
A' (3)	136	115	10,3	8,3	7,5	124	175	0,81	0,67	0,58
D' (4)	175	152	12,7	12,8	11,5	86	86	1,01	0,98	0,83
G' (3)	171	149	12,3	11,2	10,0	138	138	0,91	0,77	0,58
A'G' (1)	237	206	16,0	11,1	9,8	173	173	0,70*	0,65	—

\* Biege-bruch

Verfasser keinen Unterschied in der Schubaufnahmefähigkeit der verschiedenen Schubbewehrungsorten gemacht (nach Stadium III gerechnet). Teilergebnisse sind in der Tafel II angegeben.

Die Probekörper der Serie III waren auch mit verschiedenen Schubbewehrungstypen versehen, aber die Schubdeckungsgradwerte wurden hier verhältnismäßig zu klein gewählt ( $\mu_{S''} = 7,6 \div 22,8\%$ , im Durchschnitt  $14,8\%$ )

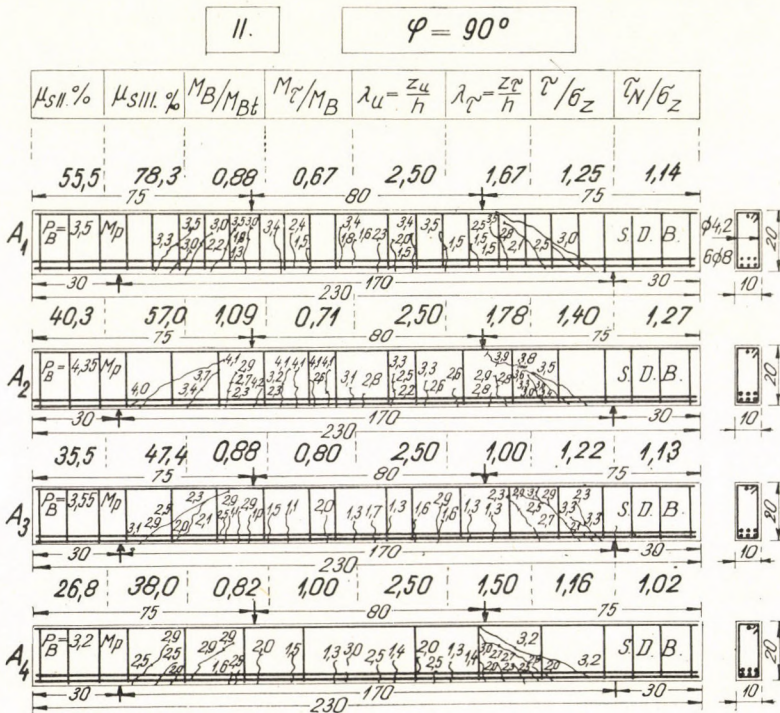


Bild 9

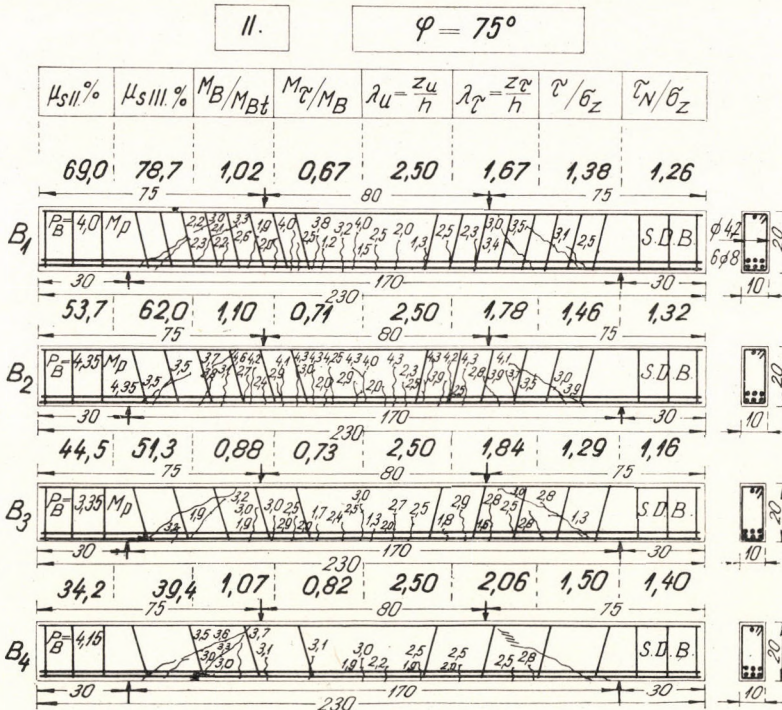


Bild 10

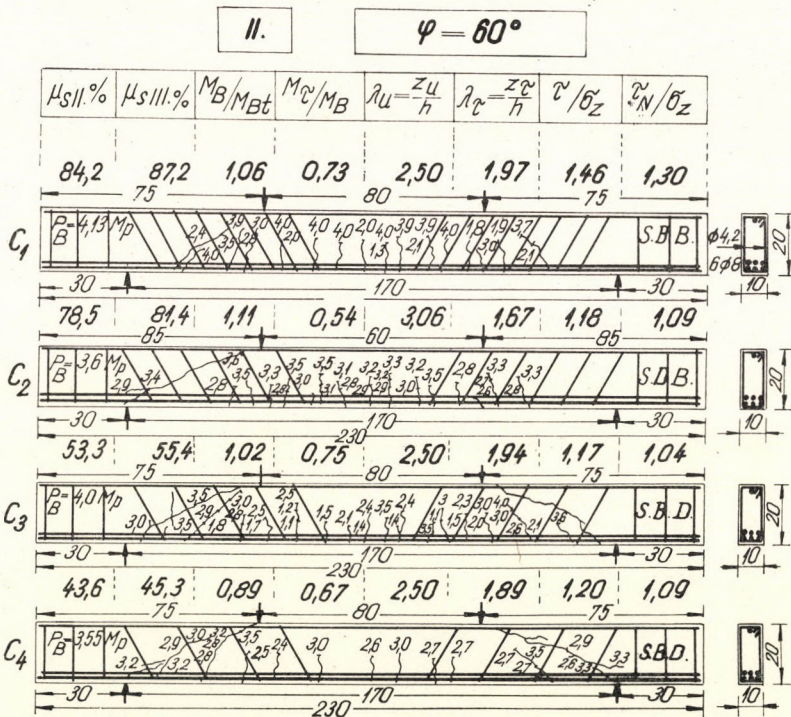
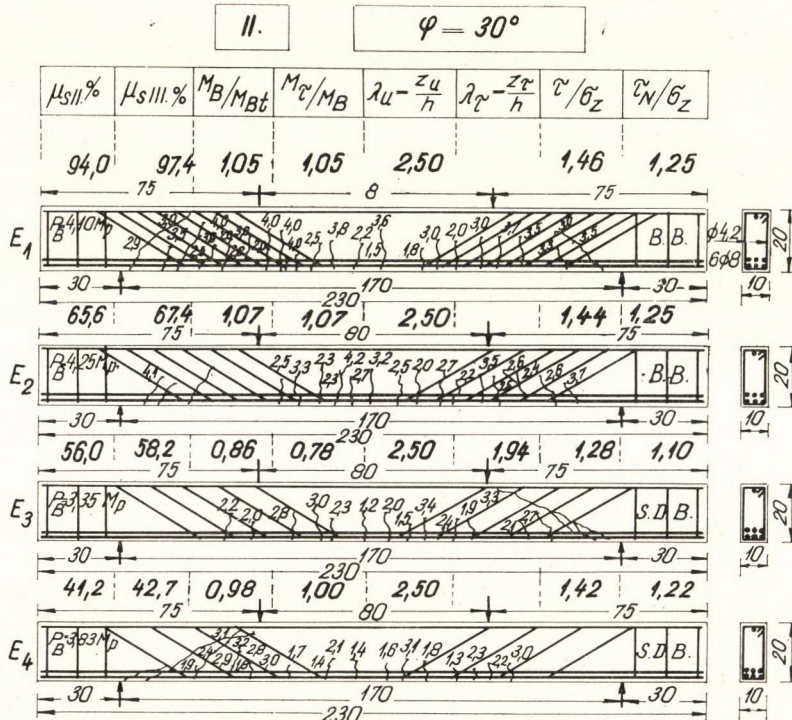
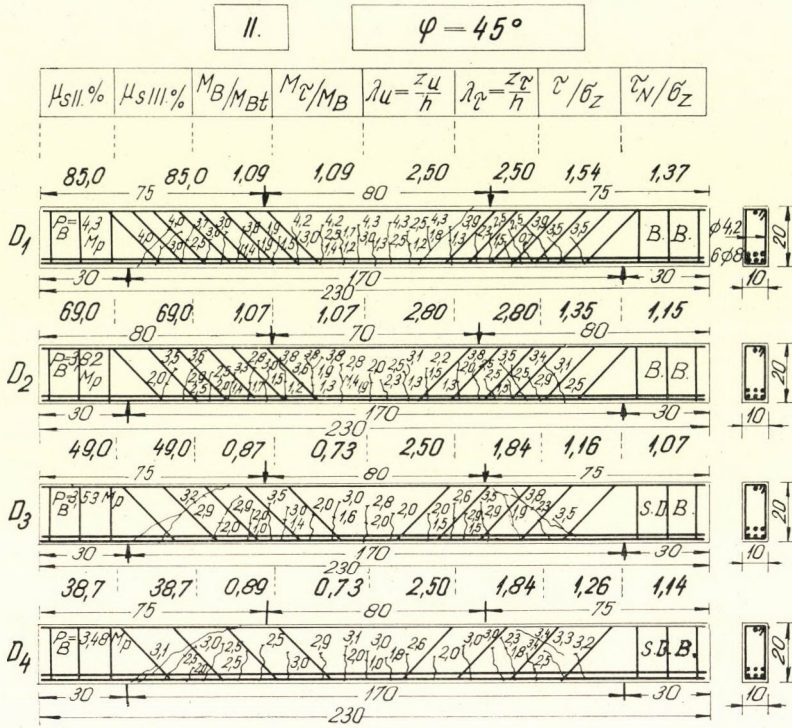


Bild 11



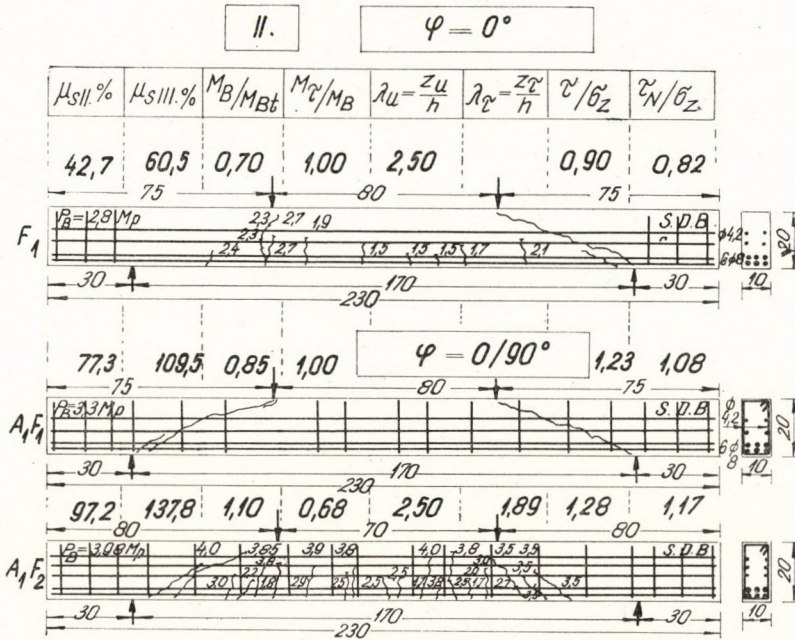


Bild 14

gegenüber der Serie II ( $\mu_{s^*} = 26,8 \div 173,5\%$ , im Durchschnitt 61,6%). Die erhaltenen Versuchsergebnisse und die wichtigsten technischen Angaben sind in der Tafel III zusammengestellt.

Es sei erwähnt, daß in den Bildern 15—18 auch die relativen *T*- und *M*-Werte der Serie I und III aufgetragen wurden.

Bei seinen Auswertungen ging der Verfasser von der Würfel Festigkeit (*W*), von der Biegedruckfestigkeit ( $\sigma_p$ ), von der Zug- oder Spaltfestigkeit ( $\sigma_z$ ) und der Schubfestigkeit ( $\tau_B$ ) des Betons aus. Diese Festigkeitswerte wurden auf Grund der Formeln:

$$\sigma_p = 700 \varrho^2, \tag{3}$$

$$\sigma_z = \sigma_{sp} = 40 \varrho^{3/2}, \tag{4}$$

$$\tau_B = 100 \varrho^{3/2} \tag{5}$$

berechnet, wo der Wert  $\varrho$  mit der Formel

$$\varrho = \frac{W}{200 + W} \tag{6}$$

gegeben ist.

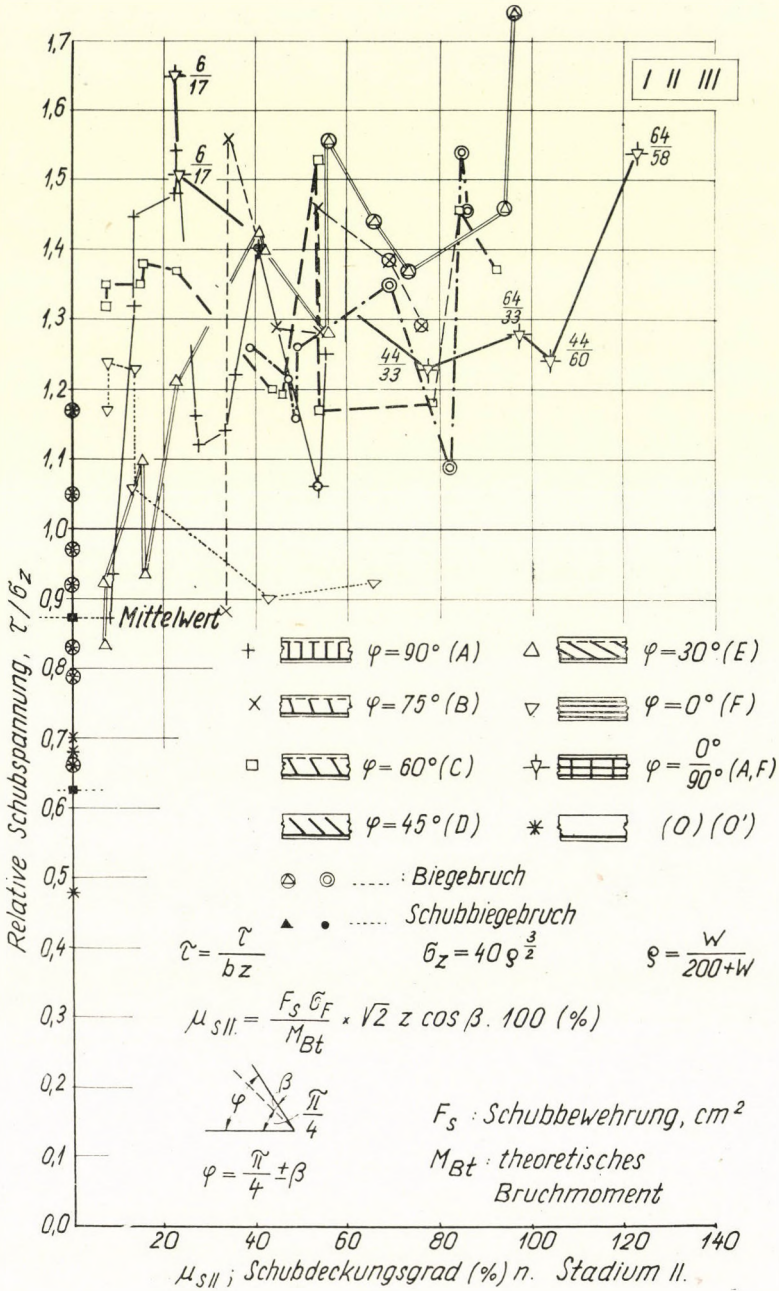


Bild 15



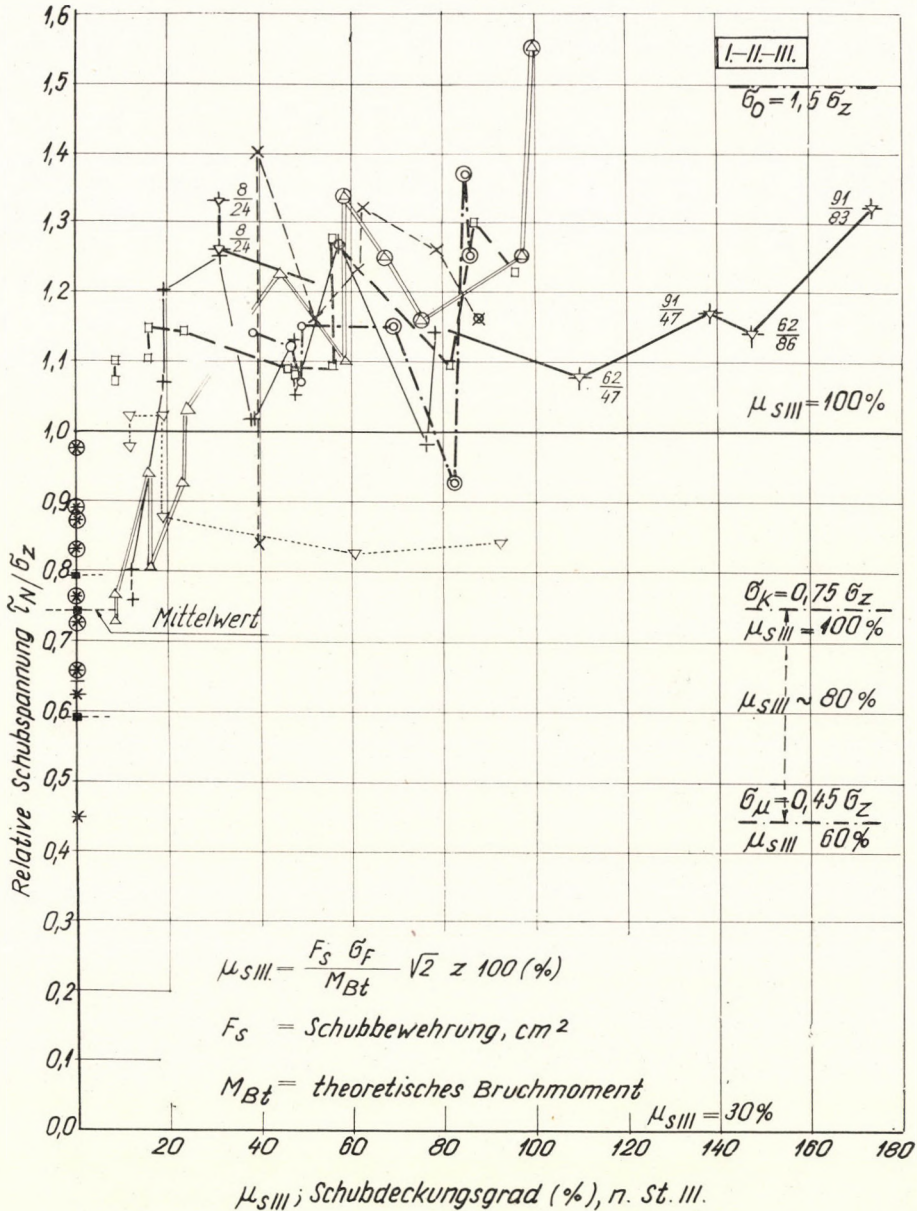
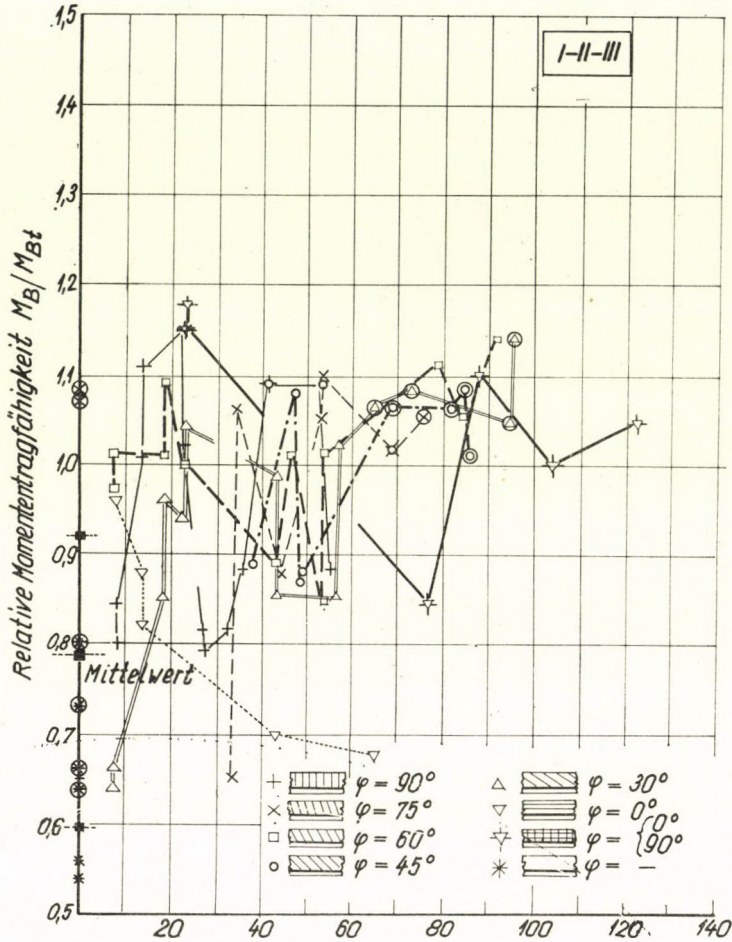


Bild 16

Auf Grund der dargestellten Versuche und der anderen neuen Versuche (durchgeführt von MOODY, MORROW und VIEST, LAUPA und JONES, LEONHARDT und WALTER, BRYANT, BIANCHINI, RODRIGUEZ, KESLER, BRESLER, PISTER, BERNAERT, SIESS, BORISCHANSKIJ, GYENGÓ, FORSELL, RÜSCH, HANGLI,



$M_B$ : effektives Bruchmoment;  $M_B = P_B a$   
 $M_{Bt}$ : theoretisches Bruchmoment;  $M_{Bt} = x b z \sigma_p = F_e \sigma_F z$   
 $\mu_{s \parallel}$ ; Schubdeckungsgrad, (%)

Bild 17

MAYER, WITHNEY, CLARK usw.) können die folgenden, wichtigsten Schlußfolgerungen auf die Schubtragsfähigkeit des Stahlbetonbalkens gezogen werden.

1. Die Schubtragsfähigkeit der Versuchsbalken, die gegen Schub nicht bewehrt waren, blieb im allgemeinen unter der Biegetragsfähigkeit, die erstere betrug nämlich nur das 0,6 bis 0,8fache der letzteren.

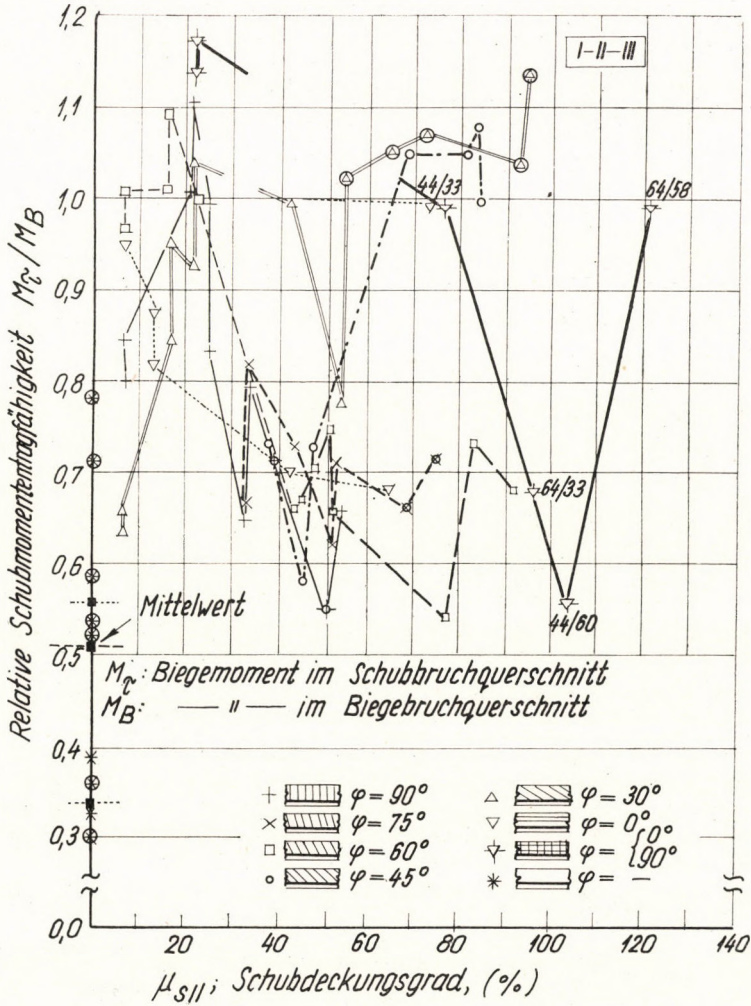


Bild 18

2. Die Schubtragfähigkeit ist verhältnismäßig größer, wenn die *Stahleinlagen* bis zum Ende des Balkens reichen, als wenn sie der Momentenabnahme entsprechend weggelassen werden.

3. Die Schubtragfähigkeit der mit konzentrierten Kräften belasteten Träger ergab sich kleiner (auf Grund der berechneten höchsten Schubspannung nach MÖRSCH) als die Schubtragfähigkeit der mit verteilten Kräften belasteten Träger. Wenn aber die Spannungen im Schnittpunkt des annähernd horizontalen Risses und des Schrägrisses (von der Stütze in Entfernung  $z_r$ ) berechnet werden, wird der Unterschied gering, sogar ganz unbedeutend im Falle, wo die — den ersten  $\tau$ -Riß verursachende — Belastung ( $P_r$ ) als Basis genommen wird.

Tafel II  
Serie II

$W$	$\sigma_p$	$\sigma_z$	$\tau$	$\tau_N$
kp/cm <sup>2</sup>				
Gruppe A (7); ( $\varphi = 90^\circ$ )				
276 (257—313)	234 (223—262)	17,7 (16,9—19,0)	20,7 (19,1—26,7)	19,0 (17,8—24,2)
Gruppe B (7); ( $\varphi = 75^\circ$ )				
281 (257—313)	237 (223—262)	17,9 (16,9—19,0)	23,2 (15,4—26,8)	21,2 (14,5—24,2)
Gruppe C (7); ( $\varphi = 60^\circ$ )				
278 (260—293)	236 (223—246)	17,8 (16,9—18,4)	22,9 (19,8—25,7)	20,7 (18,4—22,9)
Gruppe D (8); ( $\varphi = 45^\circ$ )				
280 (257—313)	236 (223—262)	17,9 (16,9—19,0)	23,5 (20,6—28,3)	20,8 (17,7—25,2)
Gruppe E (8); ( $\varphi = 30^\circ$ )				
274 (257—313)	233 (223—262)	17,6 (16,9—19,0)	25,7 (21,7—29,8)	22,3 (18,6—26,9)
Gruppe F (2); ( $\varphi = 0^\circ$ )				
295 (277—313)	248 (234—262)	18,3 (17,6—19,0)	16,6 (16,2—17,0)	15,1 (14,7—15,6)
Gruppe AF (4); ( $\varphi = 0^\circ/90^\circ$ )				
278 (257—313)	236 (223—262)	17,8 (16,9—19,0)	23,5 (20,8—27,0)	19,2 (18,4—23,2)
Mittelwerte				
280	236	17,9	23,2	20,7

4. Im wahrscheinlichen Bruchquerschnitt (charakterisiert durch  $z_\tau$ ) berechnete Spannung  $\tau$  ist eine Kennzahl, die zur Beurteilung der Schubsicherheit viel mehr geeignet ist als die spezifische Momententragfähigkeit ( $m_\tau$ ), bezogen auf den Schubquerschnitt. Bei verteilter Last ist aber die berechnete größte Spannung  $\tau$  in dem durch  $z = 0$  charakterisierten Querschnitt *nicht maßgebend*.

$\mu_s''$	$\mu_s'''$	$\tau/\sigma_z$	$M_B/M_{B1}$	$M_\tau/M_B$
%				
38,3 (27-35-47-56)	54,5 (38-47-66-78)	1,17 (1,14-1,18-1,23-1,25)	0,91 (0,79-1,09)	0,74 (0,55-1,00)
52,5 (34-45-54-73)	60,3 (39-51-62-83)	1,30 (1,22-1,28-1,37-1,35)	0,98 (0,66-1,10)	0,71 (0,67-0,82)
65,5 (45-54-79-88)	67,0 (47-56-87-91)	1,29 (1,20-1,35-1,18-1,41)	1,01 (0,85-1,14)	0,67 (0,54-0,75)
64,5 (43-49-76-86)	64,5 (43-49-76-86)	1,32 (1,24-1,21-1,22-1,25)	1,00 (0,87-1,09)	0,88 (0,58-1,09)
65,6 (41-56-69-95)	68,8 (43-58-72-98)	1,46 (1,41-1,42-1,41-1,61)	1,01 (0,86-1,14)	1,02 (0,78-1,14)
54,2 (43-65)	76,5 (61-92)	0,91 (0,90-0,92)	0,69 (0,68-0,70)	1,00 (1,00)
101,0 (77-123)	143,0 (119-174)	1,32 (1,23-1,54)	1,00 (0,85-1,10)	0,81 (0,56-1,00)
61,6	71,0	1,23	0,97	0,82

5. Die berechnete Spannung  $\tau$  ist das 0,4 bis 0,8fache der Spalt- oder Zugfestigkeit ( $\sigma_z$ ,  $\sigma_{sp}$ ) des Betons, wenn der Bruch des Balkens reiner *Schubdruckbruch* und kein *Scherbruch* ist.

6. Über die Wirkung der *Schub schlankheit* ist die Wertung der Forscher stark abweichend. Der Hauptgrund liegt darin, daß die Feststellung des Schubquerschnittes nicht einheitlich ist.

Tafel II  
Serie III

$W$	$\sigma_p$	$\sigma_z$	$\tau$	$\tau_N$
kp/cm <sup>2</sup>				
Gruppe A (6); ( $\varphi = 90^\circ$ )				
248 (218–293)	213 (190–246)	16,4 (15,2–18,4)	20,4 (15,9–23,8)	17,0 (13,8–20,1)
Gruppe C (5); ( $\varphi = 60^\circ$ )				
224 (218–248)	195 (190–213)	15,3 (15,2–16,4)	20,8 (20,0–22,1)	18,2 (16,2–18,3)
Gruppe E (6); ( $\varphi = 30^\circ$ )				
293	246	18,4	18,5 (15,3–22,3)	15,9 (13,4–19,0)
Gruppe F (4); ( $\varphi = 0^\circ$ )				
229	199	15,6	18,4 (16,6–19,4)	15,2 (13,7–16,2)
Gruppe AF (2); ( $\varphi = 0^\circ/90^\circ$ )				
229	199	15,6	24,6	20,2
Mittelwerte				
249	215	16,2	19,8	16,6

Nach der Meinung des Verfassers kann — abgesehen von den Fällen der Scherbrüche — nach der Wertung der Mehrzahl der Experimente festgestellt werden, daß im Falle von konzentrierten Lasten die Schubtragfähigkeit ( $t_\tau$ ,  $m_\tau$ ,  $\tau$ ) von der Schubschlankheit unabhängig ist, bei verteilter Belastung gehört aber zum Schubdruckquerschnitt eine annähernd konstante Schubschlankheit ( $\lambda_\tau \sim 2$ ), und in beiden Fällen ist die Schubtragfähigkeit mit der berechneten Spannung in befriedigender Weise zu kennzeichnen.

7. Im Falle von Einzellasten, bei geringer Schubschlankheit ( $\lambda_\tau < 1,5$ ) entsteht ein *Scherbruch*, bei einer Schubschlankheit von  $\lambda_\tau > 5$  ein *Biegebruch*, und bei  $6 > \lambda_\tau > 1,5$  ist ein *Schubdruckbruch* zu erwarten. *Biegeschubbruch* ist möglich nur im Falle, wo die Biege- und Schubsicherheit nahe gleich sind.

8. Bei schubbewehrten Trägern ist im Bruchgrenzzustand *der primäre Schubriß* in Betracht zu ziehen, und im Laufe des Bruches keinesfalls *der*

$\mu_{s''}$	$\mu_{\tau''}$	$\tau/\sigma_z$	$M_B/M_{Bt}$
%	%		
14,9 (8,5—13,9—22,3)	21,1 (12,1—19,6—31,6)	1,26 (0,90—1,38—1,51)	0,97 (0,82—1,06—1,08)
13,6 (7,6—15,1—22,7)	14,9 (7,9—15,7—23,5)	1,35 (1,34—1,35—1,38)	1,01 (0,99—1,05—1,00)
15,2 (7,6—18,3—22,8)	15,8 (7,9—15,9—23,7)	1,01 (0,88—1,02—1,14)	0,85 (0,65—0,91—0,99)
11,1 (8,4—13,8)	15,7 (11,9—19,6)	1,17 (1,20—1,15)	0,90 (0,96—0,85)
22,5 (8,4/14,1)	31,8 (11,9/19,9)	1,58	1,17
14,8	18,3	1,23	0,94

*sekundäre Schubriß*, der zweiseitig verflachend, am unteren Rand der Druckzone nahe horizontal verläuft. Die Neigung des schrägen Risses ist im Falle für Schub schwach bewehrter Träger flacher als  $45^\circ$ , bei stärker bewehrten Trägern ungefähr  $45^\circ$ . Die Spaltkraft ist also auch bei bewehrten Trägern anzunehmen. Bei nicht genügend dicht gebügeltem Träger kann die annähernd horizontale Rißstrecke ohne Zweifel nachgewiesen werden, sogar bei den Plattenrippen, am Anschluß der Platte und der Rippe. Die Höhe der Druckzone ist hier größer, und die eingerissene Strecke liegt niedriger.

9. Auf die den ersten  $\tau$ -Riß verursachende Last hatte die Schubbewehrung keinen bedeutenden Einfluß, die Rißspannung ergab sich doch um 10 bis 20% größer als bei einem nicht bewehrten Träger. Die von der Rißlast hervorgerufene, berechnete Spannung  $\tau$  bleibt unter der Betonzugfestigkeit ( $(0,6 - 0,9)\sigma_z$ ). Daraus kann man die Schlußfolgerung ziehen, daß auf Grund der Schubtragfähigkeit der Träger ohne Schubbewehrung die untere Grenze

der Betoneignung für den Stahlbetonträger mit genügender Sicherheit angenommen werden kann.

10. Schon die Versuche von BACH-MÖRSCH wiesen darauf hin, daß die Stahlbeläge durch die schrägen Risse — im Falle, wo sich die Risse genügend eröffnen — die Fließgrenze überschreiten und zum Riß eine nahe senkrechte Lage annehmen können.

11. Die Tragfähigkeit des Stahlbetonträgers wird von der nicht vollen Schubbewehrung auch nicht sehr bedeutend beeinflusst. Im allgemeinen stellen auch die neueren Versuche fest, daß die mit dem klassischen Verfahren ermittelte Schubbewehrung gewöhnlich übertrieben ist. Fernerhin, daß die Bruchlast von der ungenügenden Verankerung und der dem Moment entsprechend verringerten Längsbewehrung ungünstig beeinflusst wird.

12. Auf Grund der Versuche soll festgesetzt werden, daß die Zerstörung des Stahlbetonträgers durch Schub in einer solchen Weise eintreffen wird, daß sich schräge Risse von ungefähr  $45^\circ$  oder noch flacherer Neigung bilden, infolgedessen *der Träger als entzweigetreunnt zu betrachten ist*. Die entzweigetreunnten Teile werden durch den Druckbeton (bzw. Stahlbelag), Längsstahlbeläge, durch die durch Schrägrisse laufenden Stahlbeläge verbunden.

13. Was die Frage der Wirksamkeit der heute benützten Schubbewehrungen betrifft, sind da die Wertungen der Forscher stark abweichend.

Auf Grund der Bruchergebnisse eines Teils der Versuche und aus den theoretischen Überlegungen zogen einige Forscher die Folgerung, daß das Aufbiegen wirksamer sei als die Bügelung, einige wollen aber auf Grund von Versuchsergebnissen und theoretischen Überlegungen feststellen, daß sich die Bügel mindestens so günstig, wenn nicht noch günstiger, verhalten als die Aufbiegungen. Nach Meinung des Verfassers scheinen bei den für die gerade Biegung entsprechend bewehrten Stahlbetonträger die Versuchsergebnisse, wie auch die Wertung der theoretischen Folgerungen, die größere Wirksamkeit der schrägen Stahlbewehrungen (Bügel, oder zweckmäßig angeordnete Aufbiegungen) zu rechtfertigen; es zeigte sich aber doch kein wesentlicher Unterschied in der Schubtragfähigkeit der verschiedenen Schubbewehrungsarten, höchstens ergab sich die Schubtragfähigkeit der waagerechten Schubbewehrung im Vergleich zu den anderen kleiner. Die Schubtragfähigkeit der waagerechten Stahleinlagen konnte auch mit senkrechten Bügeln günstig gesteigert werden.

In der Polemie der Wirksamkeitsfragen der Aufbiegung, des Bügels und der Netzbewehrung (Längsbewehrungen und Bügel) kann zur Verteidigung der Bügel vorläufig die Versuchsbeobachtung angeführt werden, daß auch die bis  $50 \div 60\%$  weggelassene Schubbewehrung keine Schubtragfähigkeitsabnahme herbeiführte, andernteils die Tatsache, daß die *nicht allzustarken Stahlbeläge* — die durch den Schrägriß verlaufen — im Bruchzustand annähernd senkrecht zum Riß liegen werden. Nach Meinung des Verfassers sind die Aufbiegung und



der vertikale gleichwie der schräge Bügel vom Gesichtspunkt der Schubsicherheit aus als gleich wirksam zu betrachten — mit dem Vorbehalt, daß die Schubbewehrung aus Konstruktionsgesichtspunkten richtig gestaltet ist.

Über den Vorschlag von RAUSCH — die Frage des Horizontalbewehrungs-Bedürfnisses betreffend — kann man vorläufig im Besitz nicht maßgebender Versuchsergebnisse noch nicht entscheiden. Im Falle von Trägern kleiner Höhe sichern die bis zum Trägerende geführten Hauptbewehrungen die von der horizontalen Schubbewehrung gegebene Schubsicherheit, bei höheren Trägern sind zur Entscheidung dieser Frage noch weitere Versuche durchzuführen.

Den praktischen Erfahrungen nach ist es aber zweckmäßig, wenn nur vertikale Bügel als Schubbewehrung angewendet werden, die Hauptbewehrungen — größten Teils — bis zu den Trägerenden durchzuführen.

14. Die obere Spannungsgrenze der Eignung des Betons betreffend kann man feststellen, daß die berechneten Schubspannungen im Falle völliger Schubsicherheit den Wert der Biegezugfestigkeit des Betons übertrafen. Bei enger, starker, schräger Bügelung war es zu erreichen, daß der Beton in den Rippen zwischen den Bügeln durch Druck zerstört wurde.

#### b) Zusammenfassung, Vorschläge

Als Zusammenfassung der Versuchsergebnisse kann folgendes festgestellt und die Annahme der Vorbereitung der in den folgenden skizzierten Bemessungsverfahren vorgeschlagen werden.

1. Es kann angenommen werden, daß im Schubbruchquerschnitt eine Spaltkraft ( $T_b$ ) auftritt, die die auf den Querschnitt wirkende Schubkraft  $T$  vermindert.

2. Die Feststellung der maßgebenden Schubspannungen scheint vorläufig zu der ziffernmäßigen Wertung der Schubtragfähigkeit geeignet zu sein.

3. Um die untere Grenze der Eignung des Betons ( $\sigma_u$ ) zu erhalten, muß man von 60% des wahrscheinlichen Wertes der Zug- (Spalt-) Festigkeit ausgehen, die obere Grenze ( $\sigma_0$ ) kann dagegen von 80% der wahrscheinlichen Schubfestigkeit ausgehend ermittelt werden. Den wahrscheinlichen Wert — der mathematisch-statistischen Wertung nach — kann man mit einem Reduktionsfaktor 0,75 bestimmen. Folglich ist der untere Wert der Schubspannung (bzw. Schrägzugspannung), unter welcher prinzipiell keine Bewehrung benötigt wird, bzw. die durch die Konstruktionsregeln vorgeschriebene Bügelung genügend ist:

$$\sigma_u = 0,6 \cdot 0,75 \sigma_z = 0,45 \sigma_z = 18 q^{3/2}. \quad (7)$$

Der größte Spannungswert, dessen Überschreitung die Änderung der Betonmassen oder der Betonqualität zur Folge hat, ist:

$$\sigma_0 = 0,8 \cdot 0,75 \tau_B = 0,6 \tau_B = 60 q^{3/2} (1,5 \sigma_z).$$

Es scheint notwendig — im Einverständnis mit der Auffassung von LEONHARDT —, einen Zwischenwert der berechneten schrägen Zugspannungen einzuführen, von welcher an die volle Aufnahme der Schubkräfte, die volle Schubsicherung erwünscht ist. Der Verfasser schlägt vor, für diesen Zwischenwert

$$\sigma_k = 0,75 \sigma_z = 30 \rho^{3/2}$$

anzunehmen und die Schubbewehrung zwischen  $\sigma_u$  und  $\sigma_k$  stufenweise bis zur Erreichung der vollen Schubsicherheit zu erhöhen.

Im Falle von besonders günstigen Schubbewehrungen (dichte schräge Bügelung, dichte senkrechte Bügelung und Aufbiegungen) hält er einen höheren Spannungswert:

$$\sigma'_0 = 0,75 \tau_B = 1,875 \sigma_z = 75 \rho^{3/2}$$

für zulässig.

Die Kleinstschubbewehrung sei in 30% — unter der Spannung  $\sigma_u$  — angegeben.

4. Der maßgebende schräge Schnitt des *Schubbruches* kann bei verteilter Belastung — einen Schubdruckbruch vorausgesetzt — nach dem Bild 19 auf-

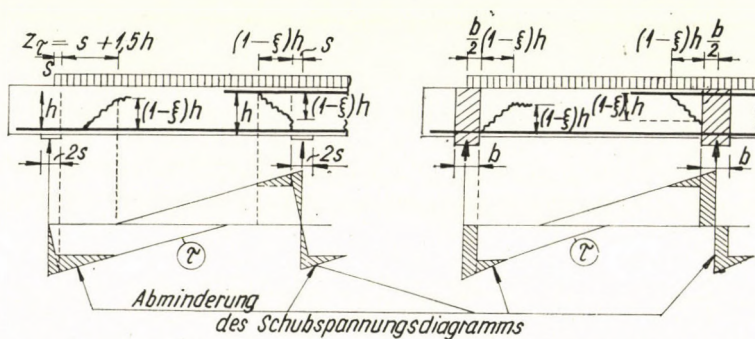


Bild 19

genommen werden. Hier ist es auch ratsam, die aus der Rechnung ausfallende Spannungsfigur ( $\tau$ ) im Falle von Einzellasten der vertikalen Stützen in der Höhe  $h-x$  aufzunehmen.

5. Die richtig gebildeten verschiedenen Schubbewehrungsarten sind als gleich wirksam anzunehmen.

### 3. Die Berechnung der Schubsicherheit des Stahlbetonträgers auf Grund der Bruchtheorie

Zur Lösung dieser Frage ist vor allem — auch wegen des Nachweises der Betoneignung und wegen der Feststellung der Schubbewehrung — die Kenntnis der am Anfang des Bruches auftretenden Spaltkraft ( $T_b$ ) nötig. Die unmittel-

telbar vom Grenzzustand des Bruches auftretende Spaltkraft ( $T_b$ ) ist mit der durch die Betondruckzone repräsentierbaren Schubkraft — die durch die Längsbewehrung aufzunehmende Schubkraft vorläufig außer acht gelassen — zu kennzeichnen.

a) Die Rolle der Druckzone im Falle des Biegeschubes

In dem — im allgemeinen — vertikalen Bruchquerschnitt wird der dem Bruch unmittelbar vorangehende Grenzzustand angenommen.

Die schubtragende Rolle der Druckzone wird theoretisch damit begründet, daß man die tatsächliche Spannungsverteilung untersucht, die z. B. durch ein Spannungsdiagramm in Parabelform dargestellt wird.

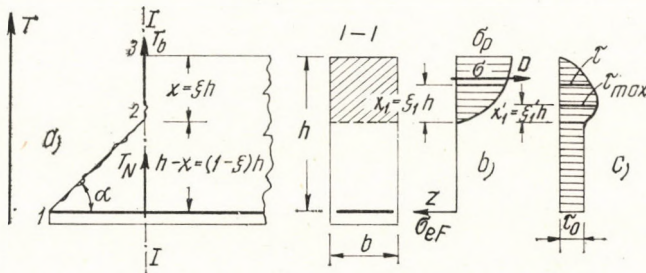


Bild 20

Im Bild 20 werden die  $\sigma$ - und  $\tau$ -Spannungsverteilungsdigramme eines sich an einen schiefen Riß anschließenden gerissenen Viereck-Querschnitts (I—I Querschnitt) im Grenzzustand dargestellt.

Wenn man nach den Bezeichnungen des Bildes 20 ein parabolähnliches Druckspannungsdiagramm des Betons und eine parabolähnliche Veränderung der Spannungen annimmt, erhält man auf Grund der Mohrschen Formel die folgenden Beziehungen:

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = 1/2 [\sigma(1 - k) + (1 + k) \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}], \quad (1)$$

wo

$$\sigma = \sigma_x \quad \text{und} \quad \sigma_y = 0,$$

$$k = \frac{\sigma_z}{\sigma_p}, \quad (2)$$

$$\sigma = (2\xi_1 - \xi_1^2) \sigma_p, \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{red}} = [-(1 - k)\xi_1^2 + 2(1 + k)\xi_1 + k] \sigma_p, \quad (4)$$

$$\tau = \frac{\sigma_{\text{red}}}{1 + k} \left[ 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{\text{red}}} (1 - k) - \left( \frac{\sigma}{\sigma_{\text{red}}} \right)^2 k \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Nach entsprechender Umformung der Gleichung und nach den durchgeführten Berechnungen erhält man für  $T_b$  die Formel:

$$T'_b = \int_0^1 \tau d\xi_1 b \xi h = 1/3 \sqrt{k(1+k)} \xi bh \sigma_p \left[ 1 - \sqrt{\left( \frac{k}{1+k} \right)^3} \right] \sim$$

$$\sim 1/3 \sqrt{k(1+k)} \xi bh \sigma_p. \quad (6)$$

Die volle Fläche des Schubspannungsdiagramms laut des Bildes 20c stellt die volle Schubkraft  $T$  dar, d. h.

$$T = 1/3 \sqrt{k(1+k)} \xi bh \sigma_p + (1 - \xi) \frac{k}{1+k} bh \sigma_p. \quad (7)$$

Und  $T_b$  in der Funktion der vollen Schubkraft  $T$ :

$$T''_b = \frac{\xi}{\xi(1-\omega) + \omega} T, \quad (8)$$

wo

$$\omega = \frac{3}{1+k} \sqrt{\frac{k}{1+k}} \quad (9)$$

ist. Mit dem üblichen Wert  $k = 0,1$  sind

$$T'_b = 0,11 \xi bh \sigma_p, \quad (6b)$$

$$T''_b = \frac{\xi}{0,82 + 0,18 \xi} T. \quad (8b)$$

Die Formeln (6) und (8) liefern — im gegebenen Fall — natürlicherweise für  $T_b$  den gleichen Wert.

Da man im allgemeinen im Bruchstadium ein gleichmäßig verteiltes Druckspannungsdiagramm annimmt und auf Grund dessen berechnet, scheint es zweckmäßig, für  $T'_b$  und  $T''_b$  — der Einfachheit und der Sicherheit halber — die folgenden Formeln zu betrachten

$$T_b = \begin{cases} T'_b = 0,1 D & \text{a)} \\ T''_b = \xi T & \text{b)} \end{cases} \quad (10)$$

wo

$$D = \xi bh \sigma_p \quad (11)$$

ist.

Nimmt die gedrückte Querschnittszone zu, so vergrößert sich die durch dieselbe aufgenommene Schubkraft, selbstverständlich nur in Begleitung einer gleichzeitig mitwirkenden Biegeschubkraft.

Gegebenenfalls nimmt man den kleineren von den beiden oben angegebenen Werten. Soll z. B. das Biegemoment in einem Querschnitt gleich Null sein und gleichzeitig eine Schubkraft wirken (Momenten-Nullpunkte eingespannter oder Durchlaufträger), so ergibt sich unbedingt Null für  $\xi$ , folglich wird die Kraft  $T_b$  auch gleich Null. Wird nun die Schubkraft gleich Null, und ist gleichzeitig ein Biegemoment vorhanden (welches gerade einen Grenzwert besitzt), kann man ebenfalls nicht annehmen, daß der gedrückte Teil Schubkräfte übernimmt, da  $T = 0$ .

Demnach muß man die hinsichtlich der Schubbewehrung maßgebende Schubkraft

$$T_N = T - T_b \quad (12)$$

von Punkt zu Punkt ermitteln, d. h., man muß das Graphikon der maßgebenden Schubkraft ( $T_N$ ) bilden.

#### b) Berechnung der Schubspannungen auf Grund der Bruchtheorie

Die Spannung  $\tau$  wird — im allgemeinen — nach der bekannten Formel

$$\tau = \frac{V_N}{z \cdot b} \quad (13)$$

ermittelt. Hier ist  $V_N$  die *verminderte*, maßgebende *Schubkraft* bei veränderlicher Trägerhöhe, d. h.

$$V_N = V - V_b. \quad (14)$$

In der Formel (14) tritt die veränderliche, reduzierte Schubkraft  $V$  anstatt der gewöhnlichen Schubkraft  $T$  ein. Für  $V$  hat man, wie bekannt, den Zusammenhang:

$$V = T - \frac{M}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = T \pm T'. \quad (15)$$

Im Falle einer veränderlichen Trägerhöhe  $h$ , aber mit relativ ähnlich veränderlichem Hebelarm  $z$ , ist die allgemein angewendete Formel im Spannungszustand III weiterhin gültig:

$$V = T \pm \frac{M}{z} \tan \beta = T \pm T'. \quad (16)$$

Betrachten wir nun zunächst die Bestimmung der Schubspannung nach der Bruchtheorie in einem Träger mit einem Querschnitt von gleichbleibender Höhe, aber veränderlichem Hebelarm.

Im allgemeinen ist  $z = \zeta h$  und  $\zeta = 1 - \eta \xi$ , wo  $\xi$  und  $\eta$  von der Querschnittsform und der Stahlmenge abhängig sind. Nach Verallgemeinerung der Formel (15) erhält man

$$V = T + \eta \frac{M}{1 - \eta \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \tag{17}$$

Mit den Bezeichnungen des Bildes 21 bekommt man die folgenden allgemein gültigen Beziehungen:

$$M = Dz = \delta bh^2 \sigma_p (1 - \eta \xi) = mbh^2 \sigma_p, \tag{18}$$

$$m = \delta (1 - \eta \xi) \xi, \tag{19}$$

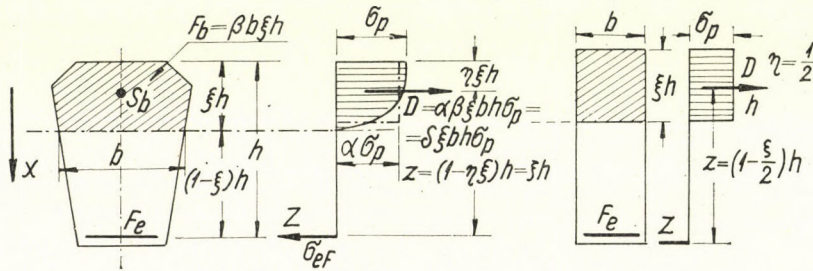


Bild 21

wo  $\delta$  ein von den Querschnittsabmessungen und der Betonqualität abhängender Wert und

$$\xi = \frac{1}{2\eta} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\eta}{\delta} m} \right) \tag{20}$$

ist. Ferner hat man:

$$T' = \frac{\eta \xi}{1 - 2 \eta \xi} T, \tag{21}$$

$$V = T + T' = \frac{1 - \eta \xi}{1 - 2 \eta \xi} T \tag{22}$$

und schließlich

$$\tau = \frac{V}{zb} = \frac{T}{(1 - 2 \eta \xi) bh} \tag{23}$$

Z. B. für ein Rechteck, wenn  $\eta = 1/2$  ist, erhält man die Formeln

$$V = T \frac{2 - \xi}{2(1 - \xi)} = T \frac{1 - (\xi/2)}{1 - \xi}, \tag{24}$$

$$\tau = \frac{T}{bh(1 - \xi)} \tag{25}$$

Da der Hebelarm der Zug-Druckkräfte in einem für das Moment maßgebend bewehrten Balken veränderlich ist, prüft man die Spannung  $\tau$  im Laufe der bruchtheoretischen Berechnungen auf Grund der Formel (23), aber im allgemeinen mit dem Wert  $T_N$  anstatt  $T$ .

Aus dieser Festlegung ist es sichtbar, daß die Schubspannungen nach der Bruchtheorie bei abgestufter Längsbewehrung in der Trägermitte, d. h. an der Stelle der Größtmomente, den nach der gewöhnlichen Berechnungsart erhaltenen Wert übertreffen können.

c) *Berechnung auf Schub auf Grund der Bruchtheorie. Träger mit gleichbleibender Höhe, aber mit veränderlichem Hebelarm*

Vor allem sollen die Bedingungen kurz aufgestellt werden, auf deren Grund die Berechnungen und Erwägungen laut der Bruchtheorie durchzuführen sind.

I. Der Bruch hat den Charakter des *Schubdruckbruches*, d. h. im gedrückten Beton wird eine *Bruchspannung*  $\sigma_p$  hervorgerufen, welche gleichmäßig verteilt ist (Bild 22).

$$T_S = T_A + T_B = F_{SA} \sigma_{eA} + F_{SB} \sigma_{eB}$$

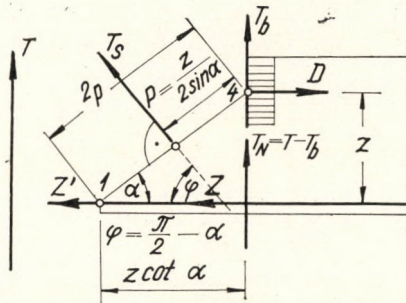


Bild 22

II. Die gedrückte Betonzone kann auch senkrechte Schubspannungen nebst Druckspannungen übernehmen. Die auf den gedrückten Betonteil übertragene Schubkraft — (Spaltkraft):  $T_b$  und die verminderte Schubkraft ist

$$T_N = T - T_b.$$

III. Der Beton nimmt keinen Zug auf.

IV. Beim Bruch tritt die Fließgrenze  $\sigma_F$  in der Bewehrung für Schub und in den auf Zug beanspruchten Hauptstahleinlagen auf.

V. Aus berechnungstechnischen Gründen scheint es zweckmäßig, den Endpunkt des schiefen Risses im Schwerpunkt des gedrückten Betongurtes

anzunehmen. Die Schubstäbe sind senkrecht zu den Reißlinien (Bild 22) anzunehmen.

Der Einfachheit halber nehmen wir ferner an, daß die Schubbewehrung entlang des schiefen Risses von gleichmäßiger Intensität ist, d. h., die schiefe Zugkraft  $T_s$  — die Summe der Aufbiegungskraft  $T_A$  und der Bügelkraft  $T_B$  — den oben definierten schiefen RiB mittig schneidet.

Die drei statischen Ausdrücke gestalten sich mit den Bezeichnungen des Bildes 22:

$$\begin{aligned} T &= T_s \cos \alpha + T_b, & \text{a)} \\ M &= T_s \frac{z}{2 \sin \alpha} + Z' z, & \text{b)} \\ D &= T_s \sin \alpha + Z'. & \text{c)} \end{aligned} \quad (26)$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Gleichungen (26) nur bei einem Winkel  $\alpha = 45^\circ$  erfüllt werden können.

In diesem Falle ist aber die Beziehung c) nicht unabhängig und ist demnach wegzulassen.

Hieraus folgt die Bedingung VI.

VI. Unter der Annahme des  $45^\circ$ igen Risses ist die Beziehung  $M = Nq$  auch unabhängig gültig, man kann daher *Biegung und Schub gesondert behandeln*. Somit haben wir die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} M &= D z = Z z, & 1) \\ T_N &= T - T_b, & 2) \\ T_s &= \sqrt{2} T_N, & 3) \\ Z' &= D - T_N. & 4) \end{aligned} \quad (27)$$

Wie wir bereits gesehen haben, spielt das Moment/Schubkraft Verhältnis auch bei der Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens eine besondere Rolle.

Das behandelte Verfahren besitzt einen wichtigen Vorteil, und zwar: Unter Berücksichtigung der Bedingungen I — VI sind im Prinzip dieselben Beziehungen für die Bestimmung der Schubbewehrung gültig wie im Falle der klassischen Berechnung auf Schub, jedoch mit der Abweichung, daß die bekannten Formeln anstatt der Schubkraft ( $T$ ) den reduzierten Wert derselben ( $T_N$ ) enthalten, und daß kein Unterschied in der Bestimmung des Querschnittes der Aufbiegung oder des Bügels besteht, eine richtig ausgebildete Schubbewehrung angenommen.

Das Bild 23 stellt die Diagramme der Werte von  $M_M$ ,  $T_M$ ,  $T_N$ ,  $\tau$  und  $\tau_N$  eines Stahlbeton-Balkens auf zwei Stützen bei gleichbleibender Höhe dar.



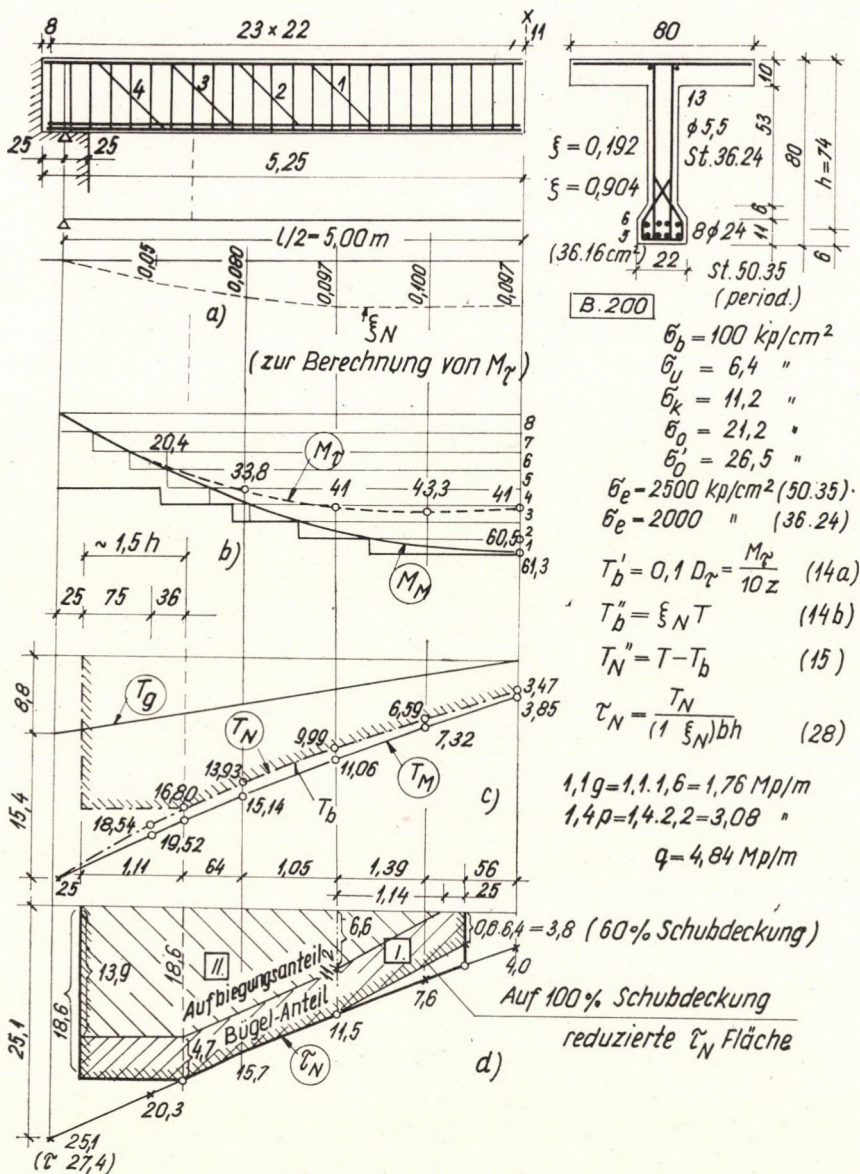


Bild 23

d) Balken mit veränderlicher Höhe

Bei Änderung der Trägerhöhe ändert sich auch die Größe der Schubkraft (V). Ist diese Änderung gering, so sind die allgemein angewendeten Formeln (13) und (16) im Bruchzustand weiterhin gültig.

Die Formel für  $V_N$  ändert sich je nach Art der Belastung und Voute.

Die aus den statischen Voraussetzungen folgenden Beziehungen für  $T_N$  werden in den betreffenden Bildern für die Voutenfälle laut Bildern 24, 25 und 26 angeführt.  $V_b$  wird sinngemäß nach den Formeln (14) berechnet, d. h.

$$V'_b = 0,1 \frac{M}{z},$$

$$V'_b = \xi V. \tag{28}$$

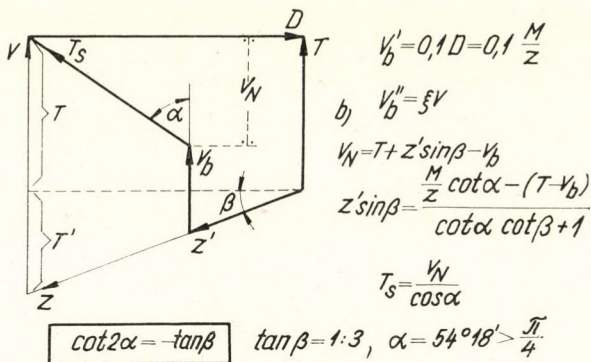
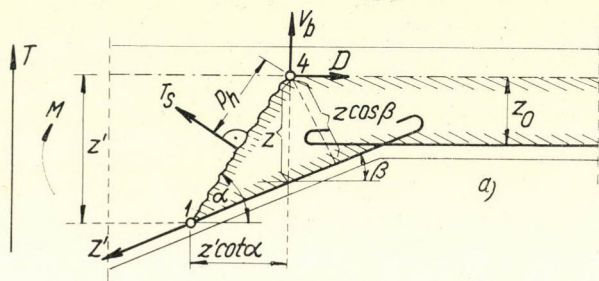


Bild 24

Die Neigung des Risses liegt im Voutenfall laut des Bildes 24 über  $45^\circ$ , wogegen im Voutenfall laut Bild 26 unter  $45^\circ$ . (Z. B. bei  $\tan \beta = 1:3$ , ist  $\alpha = 54^\circ$  bzw.  $\alpha = 35^\circ$ ). Im Berechnungsfall laut des Bildes 25 ist die Richtung der Neigung genau  $45^\circ$ .

Ist die Voute nicht geradlinig, so wird die Prüfung abschnittsweise gesondert durchgeführt, wobei die einzelnen Abschnitte mit einer Geraden (Schnittlinie) miteinander verbunden werden.

Nach den durchgeführten theoretischen Überlegungen und Untersuchungen kann festgelegt werden, daß die Formeln (10) für die auf den Druckgurt übertragbare Schubkraft (Spaltkraft)  $T_b$  auch im Falle von Plattenbalkenquerschnitten eine zuverlässige Schranke liefern.

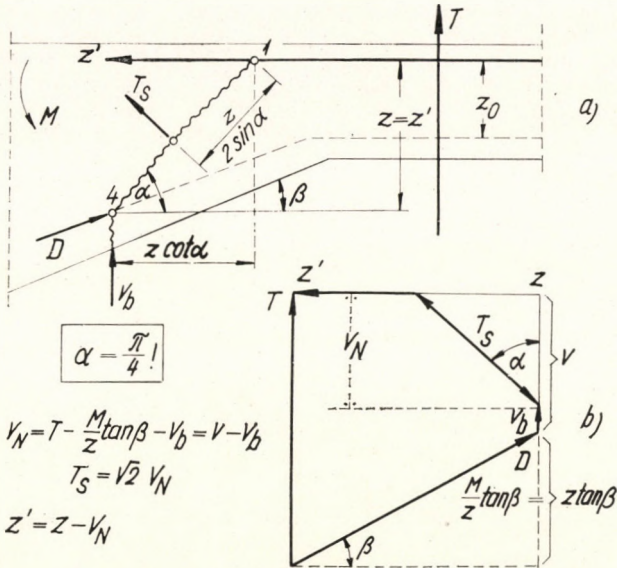


Bild 25

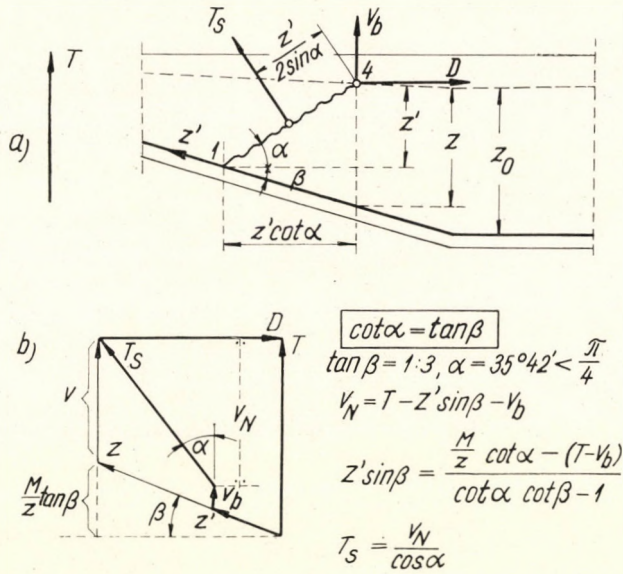


Bild 26

## LITERATUR

1. RAUSCH, E.: *Drillung (Torsion), Schub und Scheren im Stahlbetonbau*. Betrieb BDI-Verlag, Düsseldorf 1953.
2. MOODY, K.—WIEST, I.—ELSTNER, R.—HOGNESTAD, E.: Shear Strength of Reinforced Concrete Beams, Part 1. Tests of Simple Beams. *A.C.I. Journal* 26 (1954)
3. BAY, H.: Die Schubkraftfläche und ihre Verminderung durch die lotrechten Balkenpressungen. *Beton und Stahlbetonbau* (1955), 79.
4. BERNAERT, S.—SIESS, O.: Strength in Shear of Reinforced Concrete Beams under Uniform Load. University of Illinois (1956) Juni.
5. LEONHARDT—WALTNER: Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. *Beton und Stahlbeton* (1962), Heft 2,3,6,7,8.
6. RÜSCH—HAUGLI—MAYER.: Schubversuche an Stahlbeton-Rechteckbalken mit gleichmässig verteilter Belastung; Stahlbetonbalken bei gleichzeitiger Einwirkung von Querkraft und Moment. Heft 145 des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin 1962.
7. BAY, H.: Schubspannung und Schrägbewehrung bei kurzen Trägern. *Bauingenieur* 38 (1963), 7.
8. FANZ—NIEDERHOFF: Die Bewehrung von Konsolen und gedrungenen Balken. *Beton und Stahlbeton* 58 (1963), 112—120.
9. LEONHARDT—WALTER: Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. *Beton und Stahlbetonbau* 80 (1964), 105.
10. PALOTÁS, L.: Vasbetonszerkezetek nyírásvizsgálatáról (Über die Schubberechnung der Stahlbetonkonstruktionen), *ÉMKE Wiss. Mitteil.* (1965), 227—252.

**Shear Analysis of Reinforced Concrete Structures on the Basis of the Theory of Rupture.**

Author deals with shear reinforcement by utilizing the published results of foreign tests and the results of the experiments carried out in Hungary recently, and establishes a new computation method on the basis of the limit analysis. The procedure proposed is a completion of the classic method seemingly justified both by experiments and from the economic viewpoints. Accordingly, as to the shear reinforcement of the reinforced concrete beams, it can be proposed to apply the classic method, for the present but with the reservation that the effects of the stirrups and bent bars should be taken as identic and the compressed concrete, i.e. the zones of concrete free of cracks should be taken into account in dimensioning for shear stresses.

**Essai de cisaillement de constructions en béton armé sur la base de la théorie de la rupture.**

L'auteur traite du problème de l'armature de cisaillement sur la base des résultats d'essais bien connus d'auteurs étrangers ou exécutés récemment en Hongrie, et présente une méthode de calcul basée sur la théorie de la rupture. Le procédé proposé est un complément de la méthode classique, qui semble être justifié tant par les essais que du point de vue économique. Pour l'armature de cisaillement d'une poutre en béton armé, l'emploi de la méthode classique pourrait être proposé pour le moment, sous réserve que les effets des armatures transversales et des plisages des barres soient considérés comme identiques et que la zone de béton comprimé, c.-à-d. les parties non fissurées du béton soient prises en considération lors du calcul pour le cisaillement.

**Испытание на срез железобетонных конструкций на основе теории разрушения.**

В данной работе проблема армирования среза рассматривается на основе известных заграничных и новых венгерских опытных результатов. На основе теории разрушения в работе разрабатывается расчетная методика. Предлагаемый метод является дополнением классического метода, которое кажется обоснованным как экспериментально, так и с экономической точки зрения. Согласно этому, в отношении армирования среза железобетонной балки можно предложить, чтобы временно еще применялся классический метод, однако с тем дополнением, что действие применения хомутов и загиба следует принимать идентичным, и при расчете на срез сжатого бетона и не треснувших участков бетона это следует принимать во внимание.

# TORSION VON DICKWANDIGEN, PRISMATISCHEN STÄBEN MIT AXIALER KREISHÖHLUNG

P. CSONKA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
BAUWISSENSCHAFTLICHE ARBEITSGEMEINSCHAFT DER UNGARISCHEN AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN  
BUDAPEST

[Eingegangen am 15. Februar 1967]

Der Aufsatz behandelt das Torsionsproblem der mit einer axialen Kreishöhlung versehenen, dickwandigen prismatischen Stäbe aus elastischem Material. Er schlägt zur Herstellung der Spannungsfunktion des Torsionsproblems eine Annäherungsmethode vor und untersucht die speziellen Fälle, wo die innere Randlinie des Querschnittes durch eine der Spannungslinien überschritten wird.

## 1. Einleitung

Die in Richtung der Schubspannungen laufenden Linien des Querschnittes eines auf reine Torsion beanspruchten Stabes werden *Schubspannungslinien* genannt. Im allgemeinen überschneiden diese weder einander noch die Randlinie des Querschnittes. In einigen Fällen — z. B. bei konkaven bzw. Hohlquerschnitten — kann es jedoch vorkommen, daß einzelne Schubspannungslinien verzweigen oder einige sogar die Randlinie des Querschnittes überschneiden. Die die innere Randlinie des Hohlquerschnittes überschneidenden Schubspannungslinien werden hier *Trennungslinien* genannt.

Verfasser hat bereits in einem früheren Aufsatz [1], wo er das Torsionsproblem von Hohlstäben behandelte, auf die Möglichkeit des Zustandekommens von Trennlinien hingewiesen. Gleichzeitig setzte er eine Methode auseinander, mit Hilfe derer die Spannungsfunktion von dickwandigen, mit einer Kreishöhlung versehenen Querschnitten annähernd herstellbar ist. Zweck gegenwärtigen Aufsatzes ist die Steigerung der Genauigkeit des erwähnten Verfahrens, ferner das Studium der Form- und Entstehungsbedingungen der eventuellen Trennlinien.

## 2. Grundsätzliches

Die Untersuchungen werden in einem Polar-Koordinatensystem  $0(r, \varphi)$  durchgeführt. Der Anfangspunkt dieses Koordinatensystems fällt mit dem Mittelpunkt der Kreishöhlung zusammen. Der Halbmesser der Kreishöhlung wird mit  $r_0$  bezeichnet.

Die Auseinandersetzungen beruhen auf der aus der Elastizitätslehre bekannten Theorie der reinen Torsion. Laut dieser Theorie kann die Lösung des

Torsionsproblems auf die Bestimmung der *Spannungsfunktion*, d. h. einer Funktion  $\Psi = \Psi(r, \varphi)$  zurückgeführt werden, die in jedem Punkt des Querschnittes der Differentialgleichung

$$\Delta \Psi = -2, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1)$$

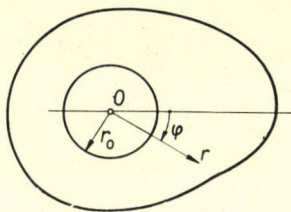


Bild 1

genügt [2]. Funktion  $\Psi$  muß am Rand der Kreishöhlung auch den Bedingungen

$$\Psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} d\varphi = -2\pi r_0 \quad (2)$$

genügen und außerdem an der äußeren Randlinie des Querschnittes einen konstanten Wert besitzen. Längs der einzelnen Schubspannungslinien ist  $\Psi$  je eine Konstante.

### 3. Die Spannungsfunktion

Die Spannungsfunktion des Torsionsproblems kann nur in einzelnen einfachen Fällen in endlicher, geschlossener Form dargestellt werden, weshalb man im allgemeinen statt einer exakten Lösung auf verschiedene Näherungsverfahren angewiesen ist. Im Falle von Hohlquerschnitten werden die auch sonst vorhandenen Schwierigkeiten um ein Vielfaches gesteigert. Eine endliche, geschlossene Lösung ist bloß für den Kreisringquerschnitt, für den von zwei ähnlichen koaxialen Ellipsen und für den von zwei konfokalen Ellipsen umgrenzten Ringquerschnitt bekannt (Bild 2).

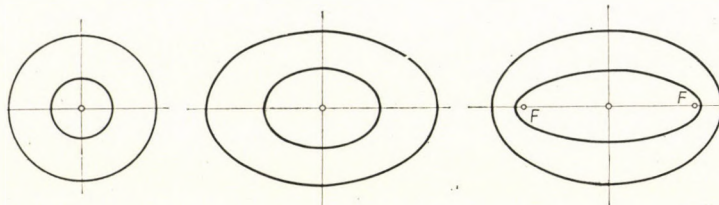


Bild 2

In Ermangelung geschlossener Lösungen hat Verfasser [1] zur Herstellung der Spannungsfunktion von dickwandigen Querschnitten mit Kreishöhlung ein Näherungsverfahren entwickelt. Sein Verfahren setzt die Spannungsfunktion des dem Hohlquerschnitt entsprechenden, mit identischer äußerer Randlinie versehenen Vollquerschnittes als bekannt voraus. Wird diese Spannungsfunktion auf die Form

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} + \sum_n \frac{r^n}{2nr_0^{n-2}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (3)$$

gebracht, so ist die annähernde Spannungsfunktion des mit einer Kreishöhlung versehenen, ansonsten mit dem Vollquerschnitt identisch gestalteten Hohlquerschnittes

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \\ & + \sum_n \frac{r^n}{2nr_0^{n-2}} \left(1 - \frac{r_0^{2n}}{r^{2n}}\right) (A_n \cos n\varphi + A_n \sin n\varphi). \quad (4) \end{aligned}$$

Im folgenden wird zur annähernden Herstellung der Spannungsfunktion von dickwandigen, mit einer Kreishöhlung versehenen Querschnitten statt der Reihe (4) die ähnlich gestaltete Reihe

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \\ & + \sum_n \frac{r^n}{2nr_0^{n-2}} \left(1 - \frac{r_0^{2n}}{r^{2n}}\right) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \quad (5) \end{aligned}$$

verwendet, welche offenbar Gleichungen (1) und (2) befriedigt. In dieser Reihe sind die Koeffizienten  $C_n$  und  $D_n$  frei zu wählen, sind also unabhängig von den Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  der Formel (3). Werden die Koeffizienten  $C_n$  und  $D_n$  zweckentsprechend aufgenommen, so liefert der Ausdruck (5) bereits mit wenigen Gliedern im allgemeinen eine gute Annäherung. Diese kann auch dann zufriedenstellend sein, wenn — wie z. B. im Falle eines mit einem zentrischen Loch versehenen regelmäßigen Dreieckquerschnittes [3] — die Konvergenz der Reihe (4) nicht gesichert ist.

#### 4. Die Trennungslinie

Um feststellen zu können, ob an einem mit Kreisloch versehenen Querschnitte eine *Trennungslinie*, d. h. eine Schubspannungslinie, die den Kreis  $r = r_0$  überschneidet, entsteht, muß untersucht werden, ob die Bedingung

$\Psi = 0$  bloß den Kreis  $r = r_0$  entlang, oder auch anderswo erfüllt ist. Zu diesem Zweck ist das erste Glied aus Ausdruck (5) auszuklammern:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) & \left[ -1 + \frac{r_0}{r} (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) (C_2 \cos 2\varphi + D_2 \sin 2\varphi) + \\ & + \frac{r}{3r_0} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) (C_3 \cos 3\varphi + D_3 \sin 3\varphi) + \\ & \left. + \frac{r^2}{4r_0^2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} + \frac{r_0^6}{r^6} \right) (C_4 \cos 4\varphi + D_4 \sin 4\varphi) + \dots \right] \quad (6) \end{aligned}$$

Zur Erfüllung der Bedingung  $\Psi = 0$  nicht nur an der Kreislinie  $r = r_0$ , sondern auch an anderen Stellen, ist es daher notwendig, daß die Gleichung

$$\begin{aligned} -1 + \frac{r_0}{r} (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) + \\ + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) (C_2 \cos 2\varphi + D_2 \sin 2\varphi) + \\ + \frac{r}{3r_0} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) (C_3 \cos 3\varphi + D_3 \sin 3\varphi) + \\ + \frac{r^2}{4r_0^2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} + \frac{r_0^6}{r^6} \right) (C_4 \cos 4\varphi + D_4 \sin 4\varphi) + \dots = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

befriedigt sei. Wenn die durch Gleichung (7) charakterisierte Kurve den Kreis  $r = r_0$  überschneidet, so bildet sie eine Trennungslinie.

## 5. Einfach-symmetrische Gebilde

Im Rahmen dieses Abschnittes werden als Spezialfälle der Gleichung (6) die der Gleichung

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left( -1 + \frac{C_1 r_0}{r} \cos \varphi \right) \quad (8)$$

entsprechenden *einfach-symmetrischen Querschnitte* und die bei diesen eventuell entstehenden Trennungslinien behandelt.



### 5.1. Gestalt der Trennungslinie

Im gegenwärtigen Fall kann die Gleichung (7) der Trennungslinie in der Gestalt

$$-1 + \frac{C_1 r_0}{r} \cos \varphi = 0$$

oder in der Form

$$r = C_1 r_0 \cos \varphi \quad (9)$$

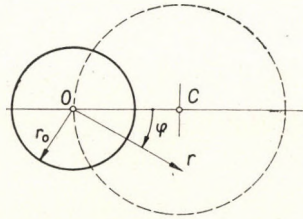


Bild 3

angeschrieben werden. Wie ersichtlich, bezeichnet obige Gleichung einen Kreis mit Halbmesser  $C_1 r_0/2$ , dessen Mittelpunkt  $C$  auf der Geraden  $\varphi = 0$  liegt. Der in Rede stehende Kreis überschneidet den Kreis  $r = r_0$  nur in dem Falle (bildet also nur dann eine tatsächliche Trennungslinie), wenn  $|C_1| > 1$  ist.

Die auf die Richtung  $\varphi = 0$  bezogene Lage der Trennungslinie hängt vom Vorzeichen von  $C_1$  ab. Ist  $C_1$  positiv, so befindet sich die Trennungslinie in der im Bild 3 angegebenen Lage. Ist  $C_1$  negativ, so nimmt die Trennungslinie eine um  $180^\circ$  verdrehte Lage ein.

### 5.2. Querschnittsformen

Im nachfolgenden werden dreierlei Typen der durch Spannungsfunktion(8) charakterisierten Querschnitte behandelt.

*Erster Typ.* In diese Gruppe gehören die *sichelförmigen Querschnitte* durch zwei Kreisbogen umgrenzt (Bild 4). Der Mittelpunkt eines der beiden Kreisbogen liegt am Umfang des anderen. Die Gleichung der Randlinie und

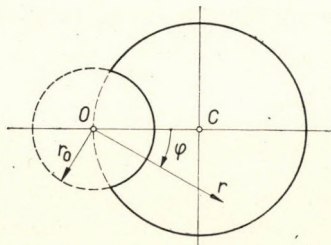


Bild 4

der Spannungslinien derartiger Querschnitte kann unter Beachtung von (8) in der Form

$$(r^2 - r_0^2) \left( -1 + \frac{C_1 r_0}{r} \cos \varphi \right) = K r_0^2 \quad (10)$$

bzw.

$$\cos \varphi = \frac{r}{C r_0} \left( 1 + \frac{K r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right) \quad (11)$$

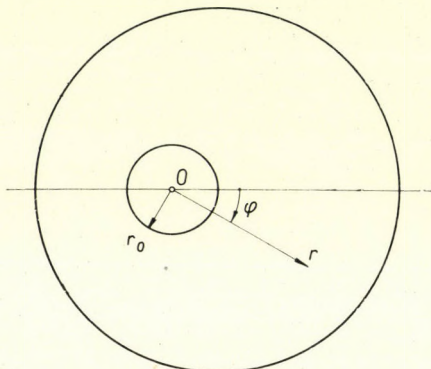


Bild 5

dargestellt werden, wobei  $K$  entlang je einer der genannten Linien je eine Konstante ist. Zur inneren Randlinie des Querschnittes gehört der Wert  $K = 0$ , bei den Spannungslinien ist  $K > 0$ .

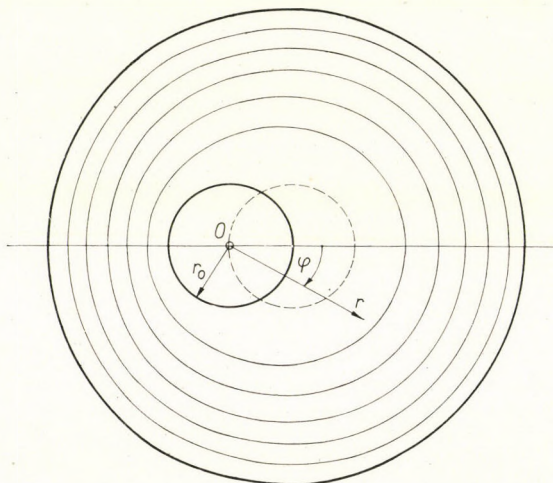


Bild 6

*Zweiter Typ.* In diese Gruppe gehören die *kreisartigen Querschnitte mit exzentrischer Kreishöhlung* (Bild 5). Die Gleichung der Rand- bzw. Spannungslinien

linien dieser Querschnitte ist von der gleichen Gestalt wie beim ersten Typ. Der einzige Unterschied ist, daß bei den außerhalb der Trennungslinie liegenden Spannungslinien (Bild 6)  $K > 0$  ist.

Gleichung (11) kann zweckmäßig zur angenäherten Herstellung der Spannungsfunktion dickwandiger, mit exzentrischer Kreishöhlung versehener Kreis-

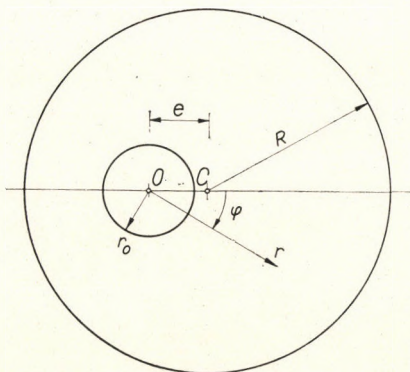


Bild 7

querschnitte (Bild 7) benutzt werden. In solchen Fällen kann der Wert  $e$  in der Gleichung (11) vorkommenden Parameter  $C_1$  und  $K$  durch zwei Anpassungsbedingungen dadurch bestimmt werden, daß vorgeschrieben wird, daß die

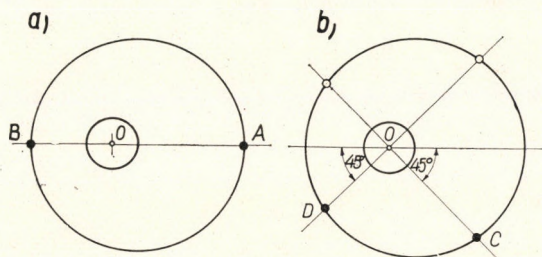


Bild 8

durch Gleichung (11) angegebene Kurve durch zwei entsprechend gewählte Randpunkte des Querschnittes verlaufe. Als Punkte der Anpassung (Kollokation) ist es zweckmäßig, entweder die auf den Symmetrieachsen liegenden Punkte  $A$  und  $B$  (Bild 8a) oder die auf den Radien  $\varphi = \pi/4$  und  $\varphi = 3\pi/4$  sich befindlichen Punkte  $C$  und  $D$  (Bild 8b) zu wählen. In beiden Fällen ist der Wert des Parameters  $C_1$  identisch, und zwar ist er

$$C_1 = \frac{2e(R^2 - e^2)}{r_0(R^2 - r_0^2 - e^2)}$$

Der Parameter  $K$  besitzt im ersten Fall den Wert

$$K = - \frac{(R^2 - e^2)^2 - r_0^2 (2R^2 - r_0^2 - 2e^2)}{r_0^2 (R^2 - r_0^2 - e^2)}, \quad (12)$$

im zweiten Fall den Wert

$$K = - \frac{(R^2 - e^2)^2 - r_0^2 (2R^2 - r_0^2)}{r_0^2 (R^2 - r_0^2 - e^2)}. \quad (13)$$

Von den beiden Kollokationsverfahren ergibt das zweite höhere Genauigkeit.

Um den Genauigkeitsgrad des vorgeschlagenen Verfahrens zu demonstrieren, wurde für Fall  $R = 4r_0$ ,  $e = r_0$  die genaue und die angenäherte Länge der winkelhalbierenden Radien bestimmt, da die größte Abweichung in dieser Umgebung zu erwarten ist. Im ersten Fall ergab sich für den zum Zentralwinkel  $\varphi = \pi/2$  gehörenden Radius, anstatt des genauen Wertes  $r = 3,873 r_0$ , der angenäherte Wert  $r = 3,836 r_0$ , also war der relative Fehler  $\Delta r/r = -0,0096$ . Im zweiten Fall war der genaue Wert der zu den Zentralwinkeln  $\varphi = 0$ ,  $\pi/2$  bzw.  $\pi$  gehörenden Radien  $r = 5r_0$ ,  $3,8730 r_0$  bzw.  $3r_0$ , während der angenäherte Wert  $r = 5,0183 r_0$ ,  $3,8545 r_0$  bzw.  $3,0170 r_0$  betrug. Die relativen Fehler waren also bloß  $\Delta r/r = +0,0037$ ,  $-0,0048$ ,  $+0,0057$ .

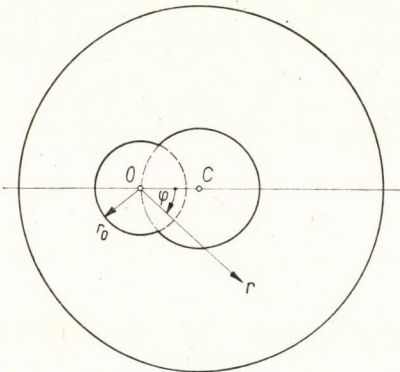


Bild 9

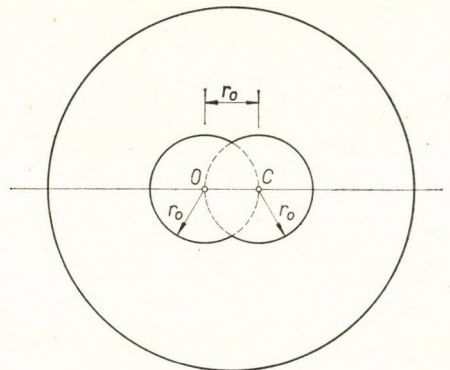


Bild 10

*Dritter Typ.* Die in diese Gruppe gehörenden Querschnitte unterscheiden sich von denen der zweiten Gruppe bloß in der Gestalt ihrer Höhlung (Bild 9). In diesem Fall wird nämlich die Randlinie der Höhlung von einem Abschnitte des Kreisbogens  $r = r_0$  und einem Abschnitte der Trennungslinie mit Halbmesser  $C_1/2$  gebildet. Die Spannungslinien dieser Querschnitte besitzen dieselbe Gestalt wie jene der ihnen entsprechenden Querschnitte vom zweiten Typ.

Als ein *Sonderfall* sei der im Bild 10 dargestellte, zum dritten Typ gehörende Querschnitt erwähnt, wo Gestalt und Lage der Trennungslinie mit denen der Kreishöhlung identisch und daher miteinander vertauschbar sind. Dieser

Querschnitt hat, obwohl er unter den einfach-symmetrischen erwähnt wird, eine zweifach-symmetrische Anordnung. Wird im vorliegenden Sonderfall von den beiden vorhin besprochenen Verfahren das erste angewendet, so ergeben sich mit der Substitution  $e = r_0$  für die Parameter  $C_1$  bzw.  $K$  die folgenden Werte:

$$C_1 = \frac{2(R^2 - r_0^2)}{R^2 - 2r_0^2}, \quad K = \frac{R^2 - 2r_0^2}{r_0^2}.$$

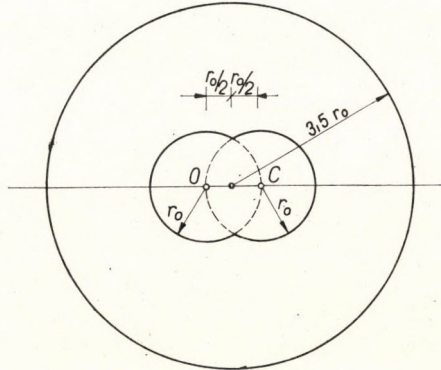


Bild 11

Wendet man dieses Verfahren auf den in Bild 11 gezeigten Querschnitt an, so stellt sich heraus, daß die äußere Randlinie des Querschnittes nur unbedeutend vom Kreis mit Halbmesser  $r = 3,5 r_0$  abweicht. Der in die lotrechte Symmetrieachse fallende Punkt der äußeren Randlinie befindet sich nämlich in einem Abstand von  $y = 3,487 r_0$  anstatt von  $y = 3,5 r_0$  von der waagrechten Symmetrieachse, also ist die relative Maßabweichung  $\Delta y/y = -0,0037$ .

### 6. Zweifach symmetrische Gebilde

In diesem Abschnitt werden von den durch Gleichung (6) charakterisierten Gebilden die der Spannungsfunktion

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[ -1 + \frac{C_2}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right] \quad (14)$$

entsprechenden *zweifach symmetrischen Querschnitte* und die auf ihnen eventuell entstehenden Trennungslinien untersucht.

#### 6.1. Gestalt der Trennungslinie

Im vorliegenden Sonderfall kann die Gleichung (7) der Trennungslinie in der Form

$$-1 + \frac{C_2}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi = 0$$

bzw. in der Gestalt

$$\cos 2\varphi = \frac{2}{C_2 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)} \quad (15)$$

angeschrieben werden. Dieser Gleichung entspricht im allgemeinen eine zwei-blättrige Rosette. Wenn  $|C_2| < 1$  ist, so liegt diese Kurve vollständig innerhalb des Kreises  $r = r_0$ . Wenn  $1 < |C_2| < 2$  ist, so überschneidet die Rosette den Kreis  $r = r_0$ , bildet also eine tatsächliche Trennungslinie. Ist  $|C_2| = 2$ , so

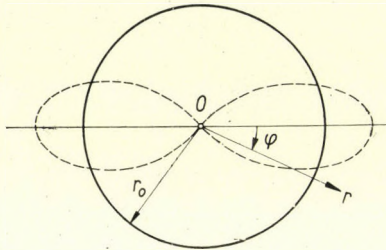


Bild 12

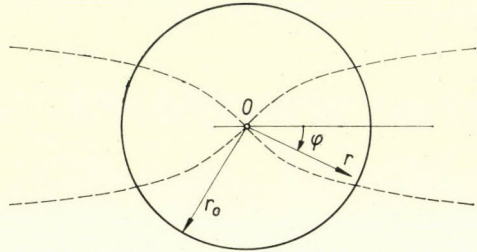


Bild 13

entartet die Trennungslinie in eine Kurve, die sich ins Unendliche erstreckt. Die Lage der Trennungslinie in bezug auf Radius  $\varphi = 0$  hängt vom Vorzeichen von  $C_2$  ab. Ist  $C_2$  positiv, so befindet sich die rosettenförmige bzw. entartete Trennungslinie in der Lage, wie sie im Bild 12 bzw. im Bild 13 angegeben ist. Wenn  $C_2$  ein negatives Vorzeichen besitzt, so verdreht sich die Trennungslinie im Vergleich zum Radius  $\varphi = 0$  um  $90^\circ$ .

## 6.2 Querschnittsformen

Im folgenden werden dreierlei Typen der durch Gleichung (14) charakterisierten Querschnitte vorgeführt.

*Erster Typ.* In diese Gruppe gehören die *sichelförmigen Vollquerschnitte* (Bild 14). Diese werden einerseits von einem Kreisbogenabschnitt  $r = r_0$ ,

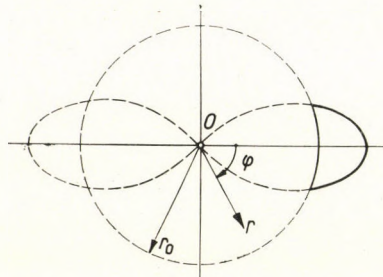


Bild 14

andererseits von einem Abschnitt eines Blattes der Trennungsrosette umrandet. Die Gleichung der Spannungslinien der in Rede stehenden Querschnitte ist

$$(r^2 - r_0^2) \left[ -1 + \frac{C_2}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right] = Kr_0^2, \quad (16)$$

bzw.

$$\cos 2\varphi = \frac{2r^2}{C_2(r^2 + r_0^2)} \left( 1 + \frac{Kr_0^2}{r^2 - r_0^2} \right), \quad (17)$$

wobei  $K = \text{konst} \geq 0$  ist.

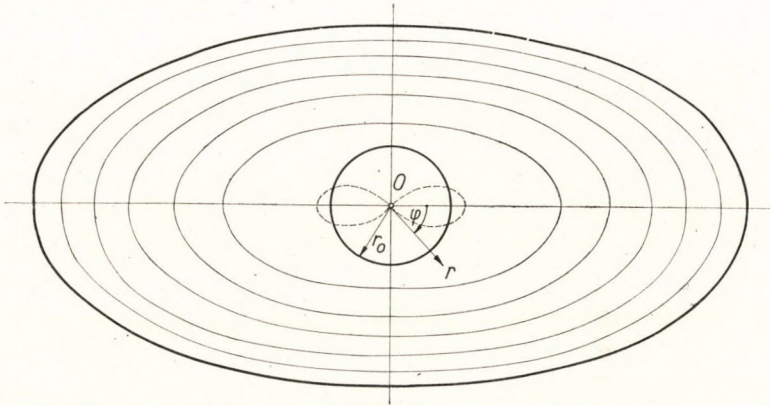


Bild 15

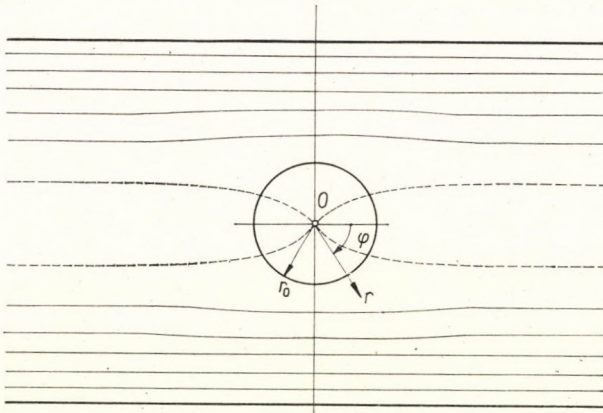


Bild 16

*Zweiter Typ.* In diese Gruppe gehören die *ellipsenähnlichen Querschnitte* mit einer zentralen Kreishöhle (Bild 15). Die Gleichung der Rand- bzw. Spannungslinien dieser Querschnitte ist gleicher Gestalt wie beim ersten Typ.

In Fällen, wo die Trennungslinie zu einer ins Unendliche verlaufenden Kurve entartet, nähern sich die Spannungslinien um so mehr Geraden, je weiter sie von der Kreishöhlung entfernt sind. Somit gestaltet sich der ellipsenähnliche Querschnitt zu einem *streifenähnlichen* um (Bild 16).

Formel (14) bietet die Möglichkeit zur annähernden Herstellung der Spannungsfunktion von *dickwandigen Ellipsenquerschnitten* (Bild 17) mit zentrischer

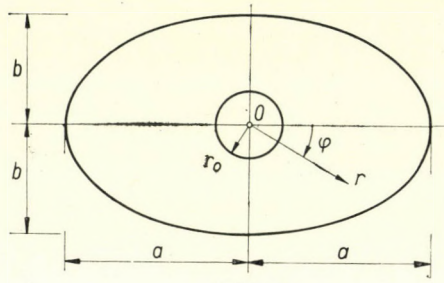


Bild 17

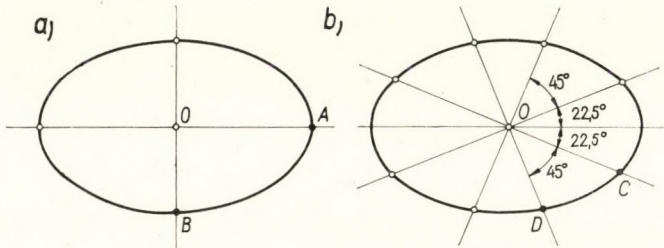


Bild 18

Kreishöhlung. In diesem Fall ist es ratsam, die in Formel (14) vorkommenden Parameter  $C_2$  und  $K$  derart aufzunehmen, daß die von ihnen bestimmte Randkurve über gewisse vorgeschriebene Punkte der Ellipse hindurchgehe. Als Vorbedingung zur Erfüllung dieser Forderung sind auch hier zwei Anpassungsgleichungen aufzuschreiben.

Wählt man zur Kollokation die Punkte  $A$  und  $B$  (Bild 18a) so gestalten sich die erwähnten zwei Parameter, wie folgt:

$$C_2 = \frac{2 a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{(a^2 b^2 - r_0^4) (a^2 + b^2)},$$

$$K = 2 \frac{a^4 b^4 - r_0^4 (a^4 + b^4)}{r_0^2 (a_0^2 b^2 - r_0^4) (a^2 + b^2)} - 1.$$

Werden hingegen die auf den Radien  $\varphi = \pi/8$  und  $\varphi = 3\pi/8$  liegenden Ellipsenpunkte  $C$  und  $D$  (Bild 18b) als Kollokationspunkte gewählt, dann erge-



ben sich für die Parameter die Werte

$$C_2 = \frac{16 a^4 b^4}{8 a^4 b^4 - r_0^4 (a^4 + 6 a^2 b^2 + b^4)} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$K = \frac{C_2}{2 \sqrt{2}} (\lambda^2 - 1) - 1,$$

wobei

$$\lambda = \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{4 a^2 b^2}{a^2 (2 - \sqrt{2}) + b^2 (2 + \sqrt{2})}$$

ist.

*Dritter Typ.* Dieser Querschnittstyp unterscheidet sich vom zweiten nur durch die Gestalt seiner Höhlung (Bild 19). Jetzt wird nämlich die Höhlung

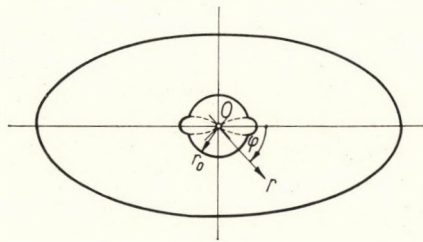


Bild 19

durch zwei Bogenabschnitte des Kreises  $r = r_0$ , ferner durch zwei Abschnitte der Trennungsrosette umgrenzt. Die Spannungslinien der in Rede stehenden Querschnitte sind mit denen der entsprechenden Querschnitte des zweiten Typs identisch.

## 7. Dreifach symmetrische Gebilde

In diesem Abschnitt werden aus den durch Formel (6) charakterisierten Querschnitten die der Spannungsfunktion

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[ -1 + \frac{C_3 r}{3 r_0} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3 \varphi \right] \quad (18)$$

entsprechenden dreifach symmetrischen Querschnitte und deren eventuellen Trennungslinien behandelt.

### 7.1. Gestalt der Trennungslinie

In diesem Fall nimmt die Gleichung (7) der Trennungslinie die Form

$$-1 + \frac{C_3 r}{3 r_0} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3 \varphi = 0,$$

bzw. die Gestalt

$$\cos 3\varphi = \frac{3r_0}{C_3 r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4}\right)} \quad (19)$$

an. Im allgemeinen charakterisiert diese Gleichung eine Kurve, die aus einem von einer dreiblättrigen Rosette gebildeten Mittelteil und aus drei hyperbelähnlichen Ästen besteht. Diese letzteren verlaufen außerhalb der Kreishöhlung. Die dreiblättrige Rosette liegt im Falle  $|C_3| < 1$  gänzlich innerhalb der Kreishöhlung, im Falle  $|C_3| > 1$  hingegen überschneidet sie den Rand der Kreishöhlung, d. h., sie bildet eine Trennungslinie (Bild 20). Je höher der Wert von

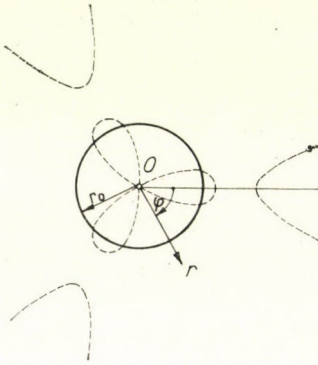


Bild 20

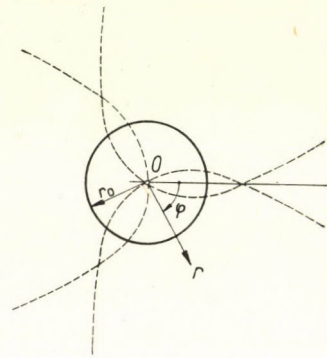


Bild 21

$C_3$  ist, um so näher geraten der rosettenförmige Mittelteil und die hyperbelähnlichen Äste zueinander und vereinen sich im Grenzfall

$$|C_3| = \frac{(-2 + \sqrt{13}) \sqrt{1 + \sqrt{13}}}{\sqrt{8}} \cong 1,2182 \dots$$

zu einer gemeinsamen Kurve (Bild 21). Wenn

$$|C_3| > \frac{(-2 + \sqrt{13}) \sqrt{1 + \sqrt{13}}}{\sqrt{8}} \cong 1,2182 \dots$$

ist, so entsteht keine reelle Trennungslinie. Ist  $C_3$  negativ, so verdreht sich die Trennungslinie im Verhältnis zur in Bildern 20 und 21 dargestellten Lage um einen Winkel von  $\pi/3$ .

## 7.2. Querschnittsformen

Im folgenden werden drei charakteristische Typen der durch Formel (18) bestimmten Querschnitte studiert.

*Erster Typ.* Hierher gehören die durch einen Bogenabschnitt des Kreises  $r = r_0$  und einen Abschnitt der Trennungslinie umgrenzten Querschnitte. Im allgemeinen (nicht entarteten) Fall ist der Querschnitt *sichelförmig* (Bild 22), im besonderen (entarteten) Fall nimmt er die Form einer *Bischofsmütze* an (Bild 23). Die Gleichung der Rand- und Spannungslinien beider Querschnitte ist von der Form

$$(r^2 - r_0^2) \left[ -1 + \frac{C_3 r}{3 r_0} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3 \varphi \right] = K r_0^2, \quad (20)$$

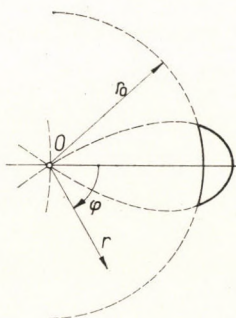


Bild 22

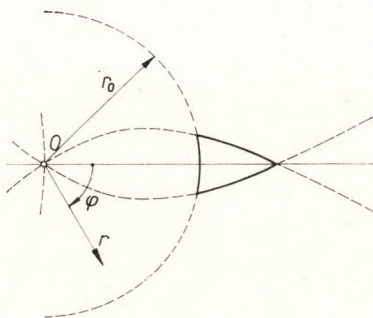


Bild 23

bzw. von der Gestalt

$$\cos 3 \varphi = \frac{3 r_0 r^3}{C_3 (r^4 + r_0^2 r^2 + r_0^4)} \left( 1 + \frac{K r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right), \quad (21)$$

wobei  $K = \text{konst} \geq 0$  ist.

*Zweiter Typ.* Dieser Typ wird von *regelmäßigen dreieckähnlichen Querschnitten* mit zentrischer Kreishöhlung gebildet (Bild 24). Die Gleichung der

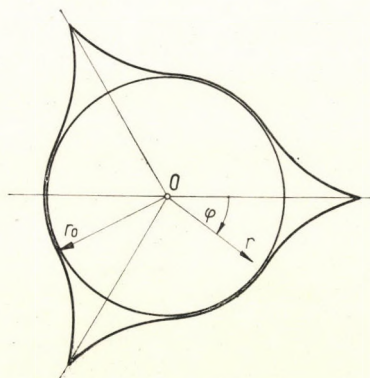


Bild. 24

Rand- bzw. Spannungslinien dieser Querschnitte besitzt die gleiche Gestalt wie beim ersten Typ, doch ist in diesem Fall

$$K = \text{konst} < 0.$$

Unter den verschiedenen Spannungslinien erhebt diejenige Anspruch auf ein besonderes Interesse, die aus drei einander kreuzenden Ästen besteht (Bild 25). Die Kreuzungspunkte der drei Äste liegen im Falle  $C_3 > 0$  auf den Radien

$$\varphi = 0, 2\pi/3, 4\pi/3.$$

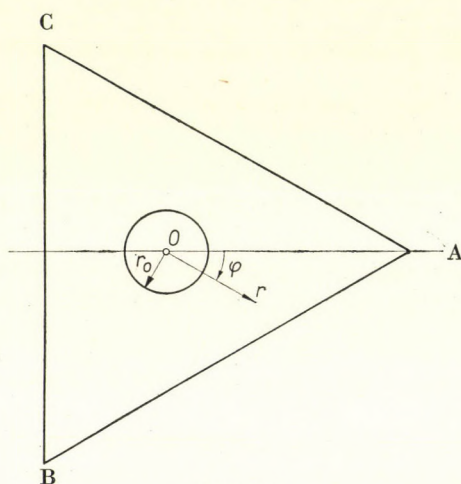


Bild 25

Längs dieser Radien ist laut Gleichung (21)

$$\frac{3 r_0 r^3}{C_3 (r^4 + r_0^2 r^2 + r_0^4)} \left( 1 + \frac{K r_0^2}{r^2 - r_0^2} \right) = 1. \quad (22)$$

Hieraus ergibt sich mit der Bezeichnung

$$\varrho \equiv \frac{r}{r_0} \quad (23)$$

die Gleichung

$$\varrho^6 - \frac{3}{C_3} \varrho^5 + \frac{3}{C_3} (1 - K) \varrho^3 - 1 = 0. \quad (24)$$

Gleichung (24) kann zweckmäßig zur Bestimmung der Werte  $C_3$  und  $K$  benützt werden, die zu den vom Anfangspunkt  $O$  um eine vorgeschriebene Entfernung  $r_1$  liegenden Kreuzungspunkten gehören. Es ist nämlich der zu den Kreuzungspunkten gehörende Wert  $\varrho = \varrho_1$  Doppelwurzel der Gleichung (24).

Betrachtet man also die linke Seite dieser Gleichung als Funktion  $f(\varrho)$ , so muß der Wert von  $\varrho_1$  als Doppelwurzel der Gleichung  $f(\varrho) = 0$  auch der Bedingung  $f'(\varrho) = 0$  Genüge leisten. Wird die Ableitung ausgeführt, so erhält man die Gleichung

$$6\varrho^5 - \frac{15}{C_3}\varrho^4 + \frac{9}{C_3}(1-K)\varrho^2 = 0, \quad (25)$$

die gemeinsam mit Gleichung (24) für die Parameter  $C_3$  und  $K$  die Werte

$$C_3 = \frac{2\varrho_1^5}{1 + \varrho_1^6}, \quad (26)$$

$$K = 1 - \frac{\varrho_1^2}{3} \cdot \frac{5 + \varrho_1^6}{1 + \varrho_1^6}$$

liefert.

Die durch die sich kreuzenden Äste der Spannungslinie begrenzte Figur wird um so weniger vom regelmäßigen Dreieck abweichen, je größer die geringste Wanddicke des Hohlquerschnittes im Verhältnis zum Halbmesser der Kreishöhlung ist. Wenn  $\varrho_1 = 6$  ist, so weichen die beiden Figuren nur ganz unbedeutend voneinander ab.

Im Falle  $\varrho_1 = 6$  nehmen die Parameter  $C_3$  und  $K$  die Werte

$$C_3 = \frac{2 \cdot 6^5}{1 + 6^6} = 0,333 \ 3262,$$

$$K = 1 - \frac{6^2}{3} \cdot \frac{5 + 6^6}{1 + 6^6} = -11,001 \ 0288$$

an. Mit obigen Werten gerechnet, ist die Gleichung der annähernden Spannungsfunktion laut Formel (18)

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[ -1 + \frac{0,333 \ 3262 r}{3 r_0} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 3\varphi \right],$$

und die Gleichung der äußeren Randlinie des in Rede stehenden Querschnittes nach Formel (21)

$$\cos 3\varphi = \frac{3 r_0 r^3}{0,333 \ 3262 (r^4 + r_0^2 r^2 + r_0^4)} \left( 1 - \frac{11,001 \ 0288}{r^2 - r_0^2} \right).$$

Ist die Entfernung  $r$  des Punktes  $P$  der äußeren Randlinie vom Anfangspunkt  $0$  gegeben, so lassen sich sowohl der dazugehörige Zentralwinkel  $\varphi$  wie auch die Koordinaten  $x$  und  $y$  desselben Punktes mit Hilfe obiger Formel einfach bestimmen, da (Bild 26)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

sind. Die durchgeführte Berechnung lieferte für verschiedene Punkte  $P$  der Seite  $BC$  der untersuchten Figur die in Tafel I enthaltenen Werte. In dieser Tafel bedeutet  $x_0$  die Abszisse der Seite  $BC$  des Dreiecks  $ABC$ , also ist

$$x_0 = -3r_0.$$

Dasselbst hat  $\Delta x$  die Bedeutung

$$\Delta x = x - 3r_0.$$

Tafel I

Wert der relativen Fehler

$r/r_0$	$\cos 3\varphi$	$\cos \varphi$	$x/r_0$	$ y /r_0$	$\Delta x r_0$	$\Delta x / (6\sqrt{3}r_0)$
3,000 578	-1	-1	-3,000 578	0	-0,000 578	-0,000 055
3,10	-0,723 171 264	-0,967 880	-3,000 429	0,779 374	-0,000 429	-0,000 041
3,25	-0,377 475 690	-0,923 160	-3,000 269	1,249 354	-0,000 269	-0,000 026
3,5	+0,052 291 746	-0,857 175	-3,000 112	1,793 257	-0,000 112	-0,000 011
4,0	+0,562 504 711	-0,749 999	-2,999 995	2,646 754	+0,000 005	+0,000 000
4,5	+0,814 828 796	-0,666 661	-2,999 973	3,354 235	+0,000 027	+0,000 003
5,0	+0,936 005 892	-0,599 996	-2,999 978	4,000 017	+0,000 022	+0,000 002
5,5	+0,987 228 820	-0,545 452	-2,999 989	4,771 013	+0,000 011	+0,000 001
6,0	+1	-0,5	-3,0	5,196 152	0	0

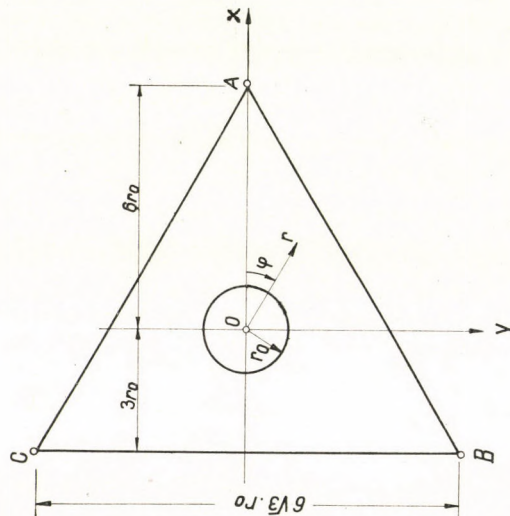


Bild 26

Wie ersichtlich, weicht in diesem Falle die durch die Gleichung (21) bestimmte äußere Randlinie des Querschnittes nur ganz unbedeutend vom regelmäßigen Dreieck ab. Die größte Abweichung  $\Delta x$  ergibt sich in den Seitenmitten

des Querschnittes und übertrifft kaum den 1/20 000-sten Teil (!) der Dreieckseitenlänge. (Diese Abweichung bedeutet bei im Bild 25 dargestellten Fall nicht mehr als den 1/50-sten Teil der Dicke der Umgrenzungslinie.)

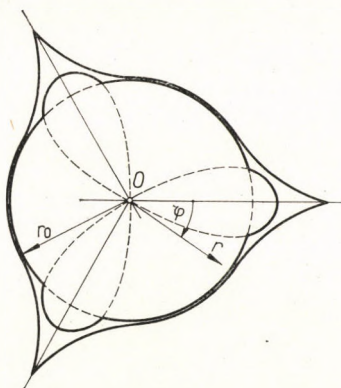


Bild 27

**Dritter Typ.** Die innere Randlinie der in dieser Gruppe gehörenden Hohlquerschnitte wird durch einzelne Abschnitte des Kreises  $r = r_0$  und der Trennungslinie gebildet (Bild 27). Diese Querschnitte können nicht mehr als dickwandige betrachtet werden und wurden hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

## LITERATUR

1. CSONKA, P.: Die Verdrehung dickwandiger prismatischer Hohlstäbe. *Ingenieur Archiv* 6 (1935), S. 373—382.
2. GRAMMEL, R.: *Mechanik elastischer Körper* (Handbuch der Physik, Bd. VI), Verlag Julius Springer, Berlin 1928, 1. Aufl., 145—146.
3. WEBER, C.—GÜNTHER, W.: *Torsionstheorie*. Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig. Akademie Verlag, Berlin 1958, S. 38.

**Torsion of Thick-walled Prismatic Bars with a Circular Axial Hollow.** Author deals with the problem of torsion of thick-walled prismatic bars made of elastic material having a circular axial hollow. He presents an approximate method which is appropriate for establishing the stress function, and analyses the cases where one of the stress lines cuts the internal border line of the cross section.

**Torsion des barres prismatiques à paroi épaisse, ayant un creux axial circulaire.** L'auteur traite du problème de torsion des barres prismatiques en matière élastique, à paroi épaisse et à creux axial circulaire. Il expose une méthode d'approximation permettant d'établir la fonction des contraintes et analyse les cas où la limite intérieure de la section transversale est coupée par la ligne des contraintes.

**Кручение толстостенных призматических стержней с аксиальной круговой полостью.** Работа занимается проблемой кручения толстостенных призматических стержней с аксиальной круговой полостью, изготовленных из упругого материала. Излагается приближенный метод, пригодный для вывода функции напряжения, и изучаются те случаи, при которых внутреннюю граничную линию сечения сечет линия напряжений.





# EQUILIBRIUM OF A COMPOSITE CONE UNDER A FORCE ACTING AT THE VERTEX PERPENDICULAR TO THE AXIS LINE

S. K. CHAKRABARTI

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, CHANDERMAGORE COLLEGE, WEST BENGAL, INDIA

[Manuscript received: February 20, 1967]

This paper determines stresses and displacements within a composite cone loaded by a force acting at the common vertex perpendicular to the axis line.

## 1. Introduction

Investigations have been previously made on the problems of solid cones and conical shells loaded by forces at the vertex by MICHELL, DAS GUPTA and KNOPS [1, 3, 4]. The author solved the problem of a composite cone loaded by a force along the axis. In the present paper, following the direct method of MICHELL the title problem has been solved.

## 2. Notations

$$r, \theta, \varphi$$

$$u_r, u_\theta, u_\varphi$$

spherical polar co-ordinates (Fig. 1), displacements in polar co-ordinates,

$$\widehat{rr}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\varphi\varphi}, \widehat{\theta\varphi}, \widehat{\varphi r}, \widehat{r\theta}$$

stress components.

## 3. Solution of the problem

Let us denote by  $\theta = \alpha$  and  $\theta = \beta$  ( $\beta > \alpha$ ) two conical surfaces with a common vertex at the origin.

Let  $(\lambda_1, \mu_1)$  be the elastic constants within the solid cone  $R_1$  bounded by  $\theta = \alpha$  and  $(\lambda_2, \mu_2)$  those in the shell  $R_2$  bounded by  $\theta = \beta$  and  $\theta = \alpha$ .

For the present problem, we choose the expressions for displacements satisfying the equilibrium equations when no body forces are acting, as in [2], that is

within  $R_1$  ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ ):

$$u_r = \frac{F_1 \sin \theta \cdot \cos \Phi}{4 \pi \mu_1 r} + \frac{D_1}{r} \frac{\sin \theta \cdot \cos \Phi}{1 + \cos \theta},$$

$$u_\theta = \frac{\lambda_1 + 3 \mu_1}{2(\lambda_1 + 2 \mu_1)} \frac{F_1}{4 \pi \mu_1} \frac{\cos \theta \cdot \cos \Phi}{r} + \frac{D_1}{r} \cos \Phi - \frac{C_1}{r} \frac{\cos \Phi}{1 + \cos \theta},$$

$$u_\Phi = -\frac{\lambda_1 + 3}{2(\lambda_1 + 2 \mu_1)} \frac{F_1 \sin \Phi}{4 \pi \mu_1 r} - \frac{D_1}{r} \sin \Phi + \frac{C_1}{r} \frac{\sin \Phi}{1 + \cos \theta};$$

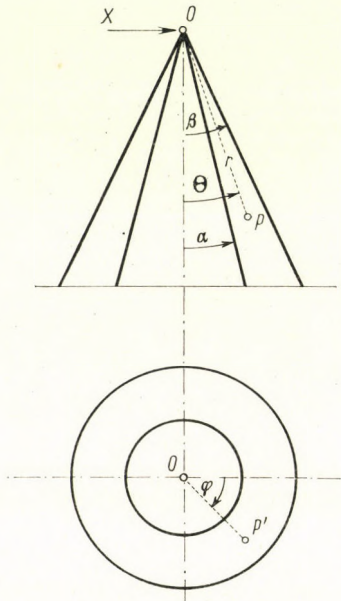


Fig. 1

and within  $R_2$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ):

$$u_r = \frac{F_2 \sin \theta \cdot \cos \Phi}{4 \pi \mu_2 r} + \frac{D_2}{r} \frac{\sin \theta \cdot \cos \Phi}{1 + \cos \theta} + \frac{D_3}{r} \frac{\sin \theta \cdot \cos \Phi}{1 - \cos \theta},$$

$$u_\theta = \frac{\lambda_2 + 3 \mu_2}{2(\lambda_2 + 2 \mu_2)} \frac{F_2 \cos \theta \cdot \cos \Phi}{4 \pi \mu_2 r} + \frac{D_2}{r} \cos \Phi - \frac{D_3}{r} \cos \Phi -$$

$$- \frac{C_2}{r} \frac{\cos \Phi}{1 + \cos \theta} + \frac{C_3}{r} \frac{\cos \Phi}{1 - \cos \theta},$$

$$u_\Phi = -\frac{\lambda_2 + 3}{2(\lambda_2 + 2 \mu_2)} \frac{F_2 \sin \Phi}{4 \pi \mu_2 r} - \frac{D_2}{r} \sin \Phi +$$

$$+ \frac{C_2}{r} \frac{\sin \Phi}{1 + \cos \theta} - \frac{D_3}{r} \sin \Phi + \frac{C_3}{r} \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \theta}.$$

In this case the stress components are the following within  $R_1$ :

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= -\frac{3\lambda_1 + 4\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{F_1}{4\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} - \frac{2\mu_1 D_1}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{1 + \cos\theta}, \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \frac{F_1}{4\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} - \frac{2\mu_1 C_1}{r^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(1 - \cos\theta) \cos\Phi}{(1 + \cos\theta) \sin\theta} + \frac{2\mu_1 D_1}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{1 + \cos\theta}, \\ \widehat{\phi\phi} &= \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{F_1}{4\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} + \frac{2\mu_1 C_1}{r^2} \frac{(1 - \cos\theta) \cos\Phi}{(1 + \cos\theta) \sin\theta}, \\ \widehat{\theta\phi} &= \frac{2\mu_1 C_1}{r^2} \frac{(1 - \cos\theta) \sin\Phi}{(1 + \cos\theta) \sin\theta} - \frac{\mu_1 D_1}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \sin\Phi}{1 + \cos\theta}, \\ \widehat{\phi r} &= \frac{\mu_1}{\lambda + 2\mu_1} \frac{F_1}{4\pi} \frac{\sin\Phi}{r^2} - \frac{2\mu_1 C_1}{r^2} \frac{\sin\Phi}{1 + \cos\theta} + \\ &\quad + \frac{\mu_1 D_1}{r^2} \left( 2 - \frac{1}{1 + \cos\theta} \right) \sin\Phi, \\ \widehat{r\theta} &= -\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{F_1}{4\pi} \frac{\cos\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} + \frac{2\mu_1 C_1}{r^2} \frac{\cos\Phi}{1 + \cos\theta} - \\ &\quad - \frac{\mu_1 D_1}{r^2} \left( 2 - \frac{1}{1 + \cos\theta} \right) \cos\Phi; \end{aligned}$$

and within  $R_2$

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= -\frac{3\lambda_2 + 4\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} - \\ &\quad - \frac{2\mu_2 D_2}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{1 + \cos\theta} - \frac{2\mu_2 D_3}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{1 - \cos\theta}, \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} - \\ &\quad - \frac{2\mu_2 C_2}{r^2} \frac{(1 - \cos\theta) \cos\Phi}{(1 + \cos\theta) \sin\theta} - \frac{2\mu_2 C_3}{r^2} \frac{(1 + \cos\theta) \cos\Phi}{(1 - \cos\theta) \sin\theta} + \\ &\quad + \frac{2\mu_2 D_2}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{1 + \cos\theta} + \frac{2\mu_2 D_3}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{1 - \cos\theta}, \\ \widehat{\phi\phi} &= \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} + \frac{2\mu_2 C_2}{r^2} \frac{(1 - \cos\theta) \cos\Phi}{(1 + \cos\theta) \sin\theta} + \\ &\quad + \frac{2\mu_2 C_3}{r^2} \frac{(1 + \cos\theta) \cos\Phi}{(1 - \cos\theta) \sin\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta\Phi} &= \frac{2\mu_2 C_2}{r^2} \frac{(1 - \cos\theta) \sin\Phi}{(1 + \cos\theta) \sin\theta} - \frac{2\mu_2 C_3}{r^2} \frac{(1 + \cos\theta) \sin\Phi}{(1 - \cos\theta) \sin\theta} - \\ &\quad - \frac{\mu_2 D_2}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \sin\Phi}{1 + \cos\theta} + \frac{\mu_2 D_3}{r^2} \frac{\sin\theta \cdot \sin\Phi}{1 - \cos\theta}, \\ \widehat{\Phi}_r &= \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \frac{\sin\Phi}{r^2} - \frac{2\mu_2 C_2}{r^2} \frac{\sin\Phi}{1 + \cos\theta} - \\ &\quad - \frac{2\mu_2 C_3}{r^2} \frac{\sin\Phi}{1 - \cos\theta} + \frac{\mu_2 D_2}{r^2} \left(2 - \frac{1}{1 + \cos\theta}\right) \sin\Phi + \\ &\quad + \frac{\mu_2 D_3}{r^2} \left(2 - \frac{1}{1 - \cos\theta}\right) \sin\Phi, \\ \widehat{r\theta} &= - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \frac{\cos\theta \cdot \cos\Phi}{r^2} + \frac{2\mu_2 C_2}{r^2} \frac{\cos\Phi}{1 + \cos\theta} - \\ &\quad - \frac{2\mu_2 C_3}{r^2} \frac{\cos\Phi}{1 - \cos\theta} - \frac{\mu_2 D_2}{r^2} \left(2 - \frac{1}{1 + \cos\theta}\right) \cos\Phi + \\ &\quad + \frac{\mu_2 D_3}{r^2} \left(2 - \frac{1}{1 - \cos\theta}\right) \cos\Phi, \end{aligned}$$

where  $F_1, F_2, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$  are constants to be determined from the boundary conditions.

In our problem the boundary conditions are the following:

$$u_r, u_\theta, u_\phi$$

should be continuous on the common boundary  $\theta = \alpha$ ,

$$\widehat{r\theta}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\theta\Phi}$$

should be continuous on the common boundary  $\theta = \alpha$ ,

$$\widehat{r\theta}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\theta\Phi}$$

should vanish on the free surface  $\theta = \beta$ .

The boundary conditions give nine equations of which only seven are independent. Solving these equations, we obtain

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} F_2; & C_3 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} F_2; & D_2 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} F_2; & D_3 &= \frac{\Delta_4}{\Delta} F_2; \\ C_1 &= \frac{P_1}{\Delta} F_2; & D_1 &= \frac{P_2}{\Delta} F_2; & F_1 &= \frac{P_3}{\Delta} F_2. \end{aligned}$$

In the above formulae

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = e_1 A'_1 + e_2 A'_2 + e_3 A'_3 + e_4 A'_4,$$

$$\Delta_2 = e_1 B'_1 + e_2 B'_2 + e_3 B'_3 + e_4 B'_4,$$

$$\Delta_3 = e_1 C'_1 + e_2 C'_2 + e_3 C'_3 + e_4 C'_4,$$

$$\Delta_4 = e_1 D'_1 + e_2 D'_2 + e_3 D'_3 + e_4 D'_4,$$

where  $A'_1, A'_2, \dots, B'_1, B'_2, \dots$  etc. are the co-factors of  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  etc. in  $\Delta$ , and

$$P_1 = \left[ \left\{ -\frac{\lambda_2 + 3}{8\pi(\lambda_2 + 2\mu_2)\mu_2} + \frac{(\lambda_1 + 3)\kappa_2}{8\pi(\lambda_2 + 2\mu_2)\mu_1\kappa_1} + \frac{1 + \cos\alpha}{4\pi\mu_2} - \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)\kappa_1(1 + \cos\alpha)}{4\pi(\lambda_2 + 2\mu_2)\mu_1\kappa_1} \right\} \Delta + \frac{\Delta_1}{1 + \cos\alpha} + \left\{ \frac{1}{1 - \cos\alpha} + \frac{2(\lambda_1 + 3)}{\mu_1\kappa_1(1 - \cos\alpha)} - \frac{4(\lambda_1 + 2\mu_1)(1 + \cos\alpha)}{\mu_1\kappa_1(1 - \cos\alpha)} \right\} \Delta_2 + \left\{ -1 - \frac{2(\lambda_1 + 3)}{\mu_1\kappa_1} + \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} + \frac{4(\lambda_1 + 2\mu_1)(1 + \cos\alpha)}{\mu_1\kappa_1} \right\} \Delta_4 \right] (1 + \cos\alpha),$$

$$P_2 = \left[ \left\{ \frac{1}{4\pi\mu_2} - \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)\kappa_2}{4\pi(\lambda_2 + 2\mu_2)\mu_1\kappa_1} \right\} \Delta - \frac{4(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\mu_1\kappa_1(1 - \cos\alpha)} \Delta_2 + \frac{\Delta_3}{1 + \cos\alpha} + \left\{ \frac{1}{1 - \cos\alpha} + \frac{4(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\mu_1\kappa_1} \right\} \Delta_4 \right] (1 + \cos\alpha),$$

$$P_3 = \frac{8\pi(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\kappa_1} \left\{ \frac{\kappa_2}{8\pi(\lambda_2 + 2\mu_2)} \Delta + \frac{2\Delta_1}{1 - \cos\alpha} - 2\Delta_4 \right\},$$

$$a_1 = \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{1 + \cos\alpha}; \quad b_1 = -\frac{2(\mu_1 + \mu_2)}{1 - \cos\alpha} + \frac{4(\mu_1 \cos\alpha + 2\mu_1 - 3)}{\kappa_1(1 - \cos\alpha)};$$

$$c_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(1 + 2\cos\alpha)}{1 + \cos\alpha}; \quad d_1 = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - 2\cos\alpha)}{1 - \cos\alpha} + \frac{4(3 - \mu_1 \cos\alpha - 2\mu_1)}{\kappa_1};$$

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{(\mu_2 \kappa_1 - \mu_1 \kappa_2) \cos \alpha}{4 \pi (\lambda_2 + 2 \mu_2) \kappa_1} + \frac{(\lambda_1 + 3) \mu_2 \kappa_2 - (\lambda_2 + 3) \mu_1 \kappa_1}{4 \pi (\lambda_2 + 2 \mu_2) \mu_2 \kappa_1} + \\
 &\quad + \frac{\mu_1}{4 \pi \mu_2} - \frac{(\lambda_1 + 2 \mu_1) \kappa_2}{4 \pi (\lambda_2 + 2 \mu_2) \kappa_1}; \\
 a_2 &= \frac{2(\mu_2 - \mu_1)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha}; \quad b_2 = -\frac{2 \mu_2 (1 + \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} \\
 &\quad - \frac{2 \mu_1}{\sin \alpha} - \frac{4(\lambda_1 + 3)}{\kappa_1 \sin \alpha} - \frac{4(\lambda_1 + 2 \mu_1)(1 + \cos \alpha)}{\kappa_1 \sin \alpha}; \\
 c_2 &= \frac{(\mu_1 - \mu_2) \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad d_2 = \frac{(\mu_2 - \mu_1) \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \\
 &\quad + \frac{(2 \mu_1 \kappa_1 + 4 \lambda_1 + 12)(1 - \cos \alpha)}{\kappa_1 \sin \alpha} - \frac{4(\lambda_1 + 2 \mu_1) \sin \alpha}{\kappa_1}; \\
 e_2 &= \frac{\{(\lambda_1 + 3) \mu_2 \kappa_2 - (\lambda_2 + 3) \mu_1 \kappa_1\} (1 - \cos \alpha)}{4 \pi (\lambda_2 + 2 \mu_2) \mu_2 \kappa_1 \sin \alpha} + \\
 &\quad + \frac{\mu_1 \sin \alpha}{4 \pi \mu_2} - \frac{(\lambda_1 + 2 \mu_1) \kappa_2 \sin \alpha}{4 \pi (\lambda_2 + 2 \mu_2) \kappa_1}; \\
 a_3 &= \frac{2 \mu_2}{1 + \cos \beta}; \quad b_3 = -\frac{2 \mu_2}{1 - \cos \beta}; \quad c_3 = -\frac{\mu_2 (1 + 2 \cos \beta)}{1 + \cos \beta}; \\
 d_3 &= \frac{\mu_2 (1 - 2 \cos \beta)}{1 - \cos \beta}; \quad e_3 = \frac{\mu_2 \cos \beta}{4 \pi (\lambda_2 + 2 \mu_2)}; \\
 a_4 &= \frac{2 \mu_2 (1 - \cos \beta)}{(1 + \cos \beta) \sin \beta}; \quad b_4 = -\frac{2 \mu_2 (1 + \cos \beta)}{(1 - \cos \beta) \sin \beta}; \\
 c_4 &= -\frac{\mu_2 \sin \beta}{1 + \cos \beta}; \quad d_4 = \frac{\mu_2 \sin \beta}{1 - \cos \beta}; \quad e_4 = 0; \\
 \kappa_1 &= \frac{1}{\mu_1} \{(\lambda_1 + 3 \mu_1) \cos \alpha - \lambda_1 - 3\}; \quad \kappa_2 = \frac{1}{\mu_2} \{(\lambda_2 + 3 \mu_2) \cos \alpha - \lambda_2 - 3\}.
 \end{aligned}$$

It can be seen that, if  $X, Z, Y, L, M, N$  are the components of the resultant traction on the portion of a small sphere of radius  $r$ , bounded by the cone, the centre of the sphere being at the vertex of the cone, then

$$Y = Z = L = M = N = 0,$$

and

$$X = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \left[ -\frac{3 \lambda_1 + 4 \mu_1}{\lambda_1 + 2 \mu_1} \frac{F_1}{4 \pi} \sin^3 \Theta - 2 \mu_1 D_1 \frac{\sin^3 \Theta}{1 + \cos \Theta} - \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{F_1}{4\pi} \sin\theta \cdot \cos^2\theta + 2\mu_1 C_1 \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{1 + \cos\theta} - \\
& - \mu_1 D_1 \left. \frac{(1 + 2\cos\theta)}{1 + \cos\theta} \sin\theta \cdot \cos\theta \right\} \cos^2\Phi + \\
& + \left\{ - \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{F_1}{4\pi} \sin\theta + 2\mu_1 C_1 \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} - \right. \\
& - \left. \mu_1 D_1 \frac{(1 + 2\cos\theta)}{1 + \cos\theta} \sin\theta \right\} \sin^2\Phi \Big] d\theta d\Phi + \\
& + \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta \left[ \left\{ - \frac{3\lambda_2 + 4\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \sin^3\theta - 2\mu_2 D_2 \frac{\sin^3\theta}{1 + \cos\theta} - \right. \right. \\
& - 2\mu_2 D_3 \frac{\sin^3\theta}{1 - \cos\theta} - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \sin\theta \cdot \cos^2\theta + \\
& + 2\mu_2 C_2 \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{1 + \cos\theta} - 2\mu_2 C_3 \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{1 - \cos\theta} - \\
& - \mu_2 D_2 \frac{(1 + 2\cos\theta)}{1 + \cos\theta} \sin\theta \cdot \cos\theta + \\
& + \left. \mu_2 D_3 \frac{(1 - 2\cos\theta)}{1 - \cos\theta} \sin\theta \cdot \cos\theta \right\} \cos^2\Phi + \\
& + \left\{ - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{F_2}{4\pi} \sin\theta + 2\mu_2 C_2 \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \right. \\
& + 2\mu_2 C_3 \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} - \mu_2 D_2 \frac{(1 + 2\cos\theta)}{1 + \cos\theta} \sin\theta - \\
& - \left. \mu_2 D_3 \frac{(1 - 2\cos\theta)}{1 - \cos\theta} \sin\theta \right\} \sin^2\Phi \Big] d\theta d\Phi = \\
& = \frac{\pi F_2 (1 - \cos\alpha)}{\Delta} \left[ 2\mu_1 P_1 - 3\mu_1 P_2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\lambda_1 (\cos\alpha - 1) (\cos\alpha + 2) + \mu_1 (\cos^2\alpha + \cos\alpha - 4)}{4\pi (\lambda_1 + 2\mu_1)} P_3 \right] + \\
& + \frac{\pi F_2 (\cos\alpha - \cos\beta)}{\Delta} \left[ \frac{\{\lambda_2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta - 3) + \right. \\
& \quad \left. + \mu_2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta - 5)\}}{4\pi (\lambda_2 + 2\mu_2)} \Delta + \right. \\
& \quad \left. + 2\mu_2 \Delta_1 + 2\mu_2 \Delta_2 - 2\mu_2 \Delta_3 - 3\mu_2 \Delta_4 \right].
\end{aligned}$$

*Particular case : case of solid cone*

In this case let us say  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  and  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

Substituting these values into the afore-given equations, the relations

$$C_1 = C_2 = - \frac{(1 + \cos \beta)^2}{8 \pi (\lambda + 2 \mu)} F_2,$$

$$D_1 = D_2 = - \frac{(1 + \cos \beta)}{4 \pi (\lambda + 2 \mu)} F_2,$$

$$C_3 = D_3 = 0,$$

$$F_1 = F_2$$

are obtained and the force at the vertex at right angle to the axis is found to be

$$X = - \frac{F_1}{4} \frac{\{(2 + \cos \beta) \lambda + 2 \mu\}}{\lambda + 2 \mu} (1 - \cos \beta)^2$$

which is the result which agrees to MICHELL.

#### Acknowledgement

Author expresses his grateful thanks to Dr. A. CHAKRABARTI of Jadavpur University for his kind help in the preparation of this paper.

#### REFERENCES

1. MICHELL, J. H.: Some Elementary Distributions of Stress in Three Dimensions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **32** (1900), 23.
2. LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. *Dover Publications*, (1944), 201—203.
3. DAS GUPTA, S. C.: Problems of Thick Conical Shells *Bull. Cal. Math. Soc.*, **43** (1951), 119.
4. KNOPS, R. J.: On Variation of Poisson's Ratio in the Solution of Elastic Problems, *Quart. Jour. Mech. and App. Math.*, **II** (1958), 329.
5. CHAKRABARTI, S. K.: Equilibrium of a Composite Cone loaded by an axial force. Accepted for Publication in *Journal of Technology* (1966)

**Das Gleichgewicht eines zusammengesetzten Kegels belastet mit einer auf die Achsenlinie senkrechten, im Scheitelpunkt wirkenden Kraft.** Die Spannungs- und Verschiebungskomponenten von einem aus zwei Kegeln zusammengesetzten Kegel werden bestimmt, welche mit einer auf die gemeinsame Achsenlinie der zwei Kegel senkrechten, im gemeinsamen Scheitelpunkt der zwei Kegel wirkenden Kraft belastet ist.

**L'équilibre d'un cône composé, chargé d'une force perpendiculaire à l'axe appliquée au sommet du cône.** L'auteur détermine les composantes de contrainte et de déplacement d'un cône composé de deux cônes, et chargé d'une force perpendiculaire à l'axe commun de deux cônes, appliquée à leur sommet commun.

**Равновесие сложного конуса, нагруженного в вершине силой, действующей перпендикулярно к осевой линии.** Работа определяет слагающие напряжения и смещения такого конуса, сложенного из двух конусов, который в общей вершине двух конусов нагружен силой, перпендикулярной к общей осевой линии.



## KIPPEN VON SCHALENBOGEN UNTER ANTIMETRISCHER BELASTUNG

L. KOLLÁR

DOKTOR DER TECHN. WISS  
ENTWURFSBÜRO BUVÁTI

Z. GÁRDONYI

ENTWURFSBÜRO  
UVATERV

Eingegangen am 2. Februar, 1967

Die Verfasser untersuchen die unter der Wirkung einer antimetrischen Last entstehende Kippung von gekrümmten dünnwandigen Bogenträgern (Schalenbogen) mit Hilfe der Energiemethode. Sie behandeln die Lösung ausführlich für zwei verschiedene Auflagerungsarten, und führen auch die Berücksichtigung der gleichzeitigen Wirkung der antimetrischen und symmetrischen Belastungen vor. Es werden Angaben in bezug auf die erreichbare Genauigkeit mitgeteilt. Ein numerisches Beispiel illustriert die praktische Anwendbarkeit der Methode.

### 1. Aufgabenstellung

Die Stabilität der zur Abdeckung der Hallen sehr vorteilhaft brauchbaren Schalenbogen (dünnwandige, gekrümmte Stäbe mit Schalenquerschnitt, Bild 1) muß nicht nur in der Bogenebene, sondern auch seitlich geprüft werden. In unseren früheren Abhandlungen haben wir das Problem der seitlichen Stabilität für zwei Belastungs-Grundfälle gelöst: für mittigen Druck (Bild. 2a) sowie für reine Biegung (Bild 2b). Beide Fälle verursachen längs der Bogenachse eine gleichbleibende Beanspruchung. Für den seitlich gelenkig gestützten Bogen benutzten wir die Gleichgewichtsmethode [1-3], und für anders gestützte Bogen verwendeten wir die Energiemethode [4].

In der Praxis kommt aber von diesen zwei Belastungs-Grundfällen nur der mittige Druck (im Falle vom vollbelasteten Bogen) vor, dagegen gibt es keine reine Biegung. Statt dieser wird der Bogen durch halbseitige Schneebelastung oder durch antimetrische Windlast gebogen. Um die Ansprüche der Praxis zufriedenzustellen, muß man also die seitliche Stabilität der Schalenbogen sowohl für antimetrische Belastung als auch für die gleichzeitige Wirkung der antimetrischen und symmetrischen Belastungen überprüfen können.

### 2. Voraussetzungen

Zur Anwendung der Energiemethode [4] ist es allerdings nötig, daß das Material des Schalenbogens vollständig elastisch sei; im übrigen ist aber diese Methode auch zur seitlichen Stabilitätsprüfung von Schalenbogen belie-

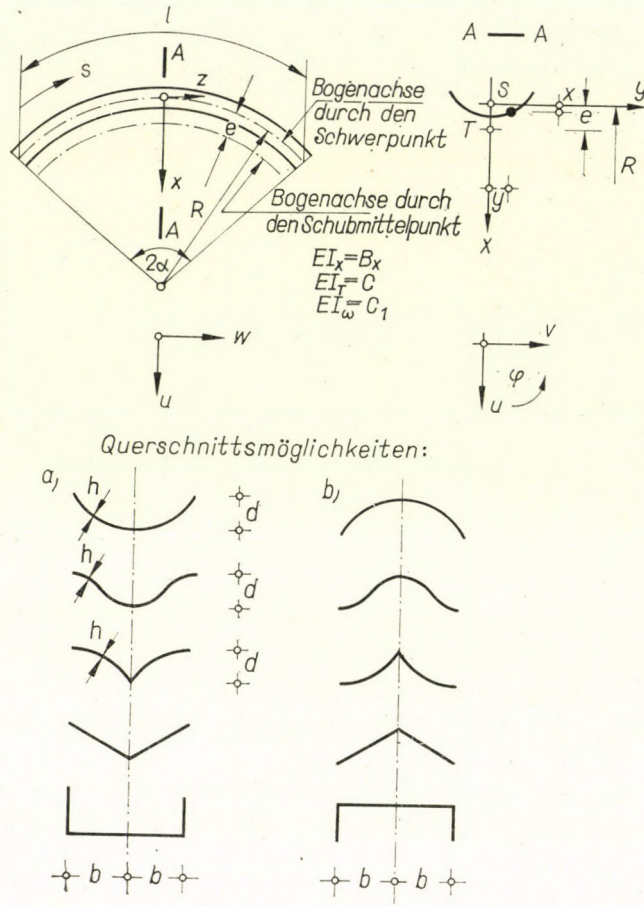


Bild 1

biger Form, Belastung und Stützungsart brauchbar. Der Einfachheit halber sollen die folgenden Annahmen getroffen werden:

a) Die *Längsachse* des Bogens ist ein Kreisbogen und der *Querschnitt* ist gleichbleibend. Die Höhe des Querschnitts,  $d$ , ist im Vergleich zum Krümmungshalbmesser  $R$  der Bogenachse klein ( $d \ll R$ ).

b) Die Belastung des Bogens, wie im Bild 3a dargestellt, ist eine *antisymmetrische, radiale* Belastung, die sich entlang der Längsachse des Bogens nach der Gesetzmäßigkeit

$$p = p_2 \sin \frac{2 \pi}{l} s$$

ändert.

Außerdem setzen wir voraus, daß der Bogen in seiner eigenen Ebene zweigelenkig ist, demnach haben seine Druckkräften- und Momentendiagramme die Formen wie in den Bildern 3b und 3c.

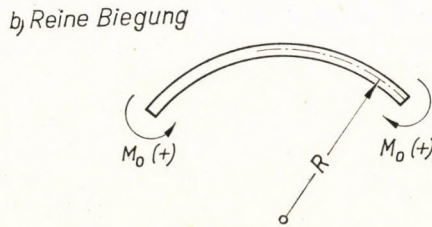
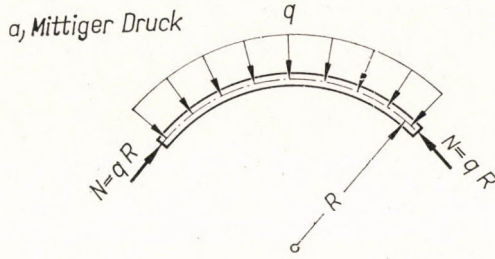
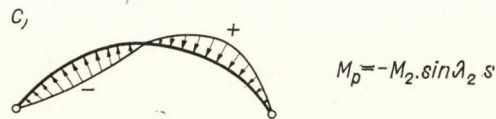
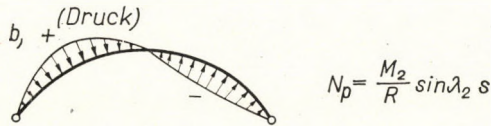
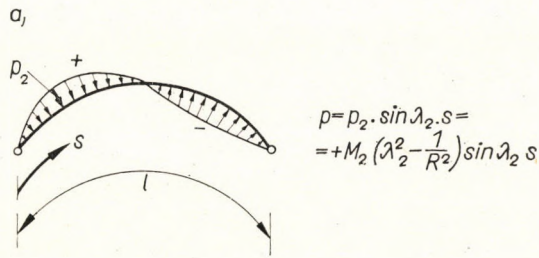


Bild 2



$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{l}$$

$$M_2 = \frac{p_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2}$$

Bild 3

Im Zusammenhang mit der gleichzeitig wirkenden *Vollast* wird vorausgesetzt, daß diese gleichmäßig verteilt ist und in radialer Richtung wirkt (Bild 2a). Die Belastungen behalten ihre ursprünglichen Richtungen auch während des Kippens bei.

c) Die seitliche *Stützung* des Bogens kann von beliebiger Art sein. Die Lösung wird jedoch nur für zwei Fälle ausführlich vorgeführt: für den seitlich gelenkigen Bogen mit sich frei verwölbenden Endquerschnitten, und für den seitlich eingespannten Bogen, dessen Endverwölbungen auch vollkommen verhindert sind.

d) Endlich setzen wir für die ausführliche Ableitung voraus, daß die seitliche Biegesteifigkeit des Bogens im Vergleich mit der Drillsteifigkeit als unendlich groß angenommen werden kann. Nach unseren Untersuchungen wird diese Voraussetzung bezüglich der Schalenbogen mit den im Bild 1 dargestellten Querschnitten praktisch immer erfüllt, siehe [1–4].

### 3. Gleichungen der Energiemethode für totale und antimetrische Belastungen

Die zur Energiemethode erforderlichen Ausdrücke der inneren und äußeren Arbeiten schreiben wir zunächst der Allgemeinheit halber mit einer endlichen seitlichen Biegefestigkeit auf, und nur vom Abschnitt 4 angefangen nehmen wir diese als unendlich groß an. Die zur Ableitung erforderlichen geometrischen Größen und Verschiebungskomponenten sind im Bild 1 angegeben. Die Richtung der Achse  $z(w)$  berührt immer die Bogenachse. Die Verdrehung der einzelnen Querschnitte wird mit  $\varphi(s)$  und die seitliche Verschiebung der Schubmittelpunkte  $T$  mit  $v_T(s)$  bezeichnet.

Für *Vollast* ( $q$ ) wird die *innere Arbeit* gemäß [4] mit dem folgenden Ausdruck angegeben:

$$L_i = \frac{C}{2} \int_0^l \vartheta_T^2 ds + \frac{C_1}{2} \int_0^l \left( \frac{d\vartheta_T}{ds} \right)^2 ds + \frac{B_x}{2} \int_0^l \kappa_{Tx}^2 ds. \quad (1)$$

Hier bedeutet

$$\vartheta_T = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv_T}{ds} \quad (2)$$

die spezifische Verdrehung und

$$\kappa_{Tx} = \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v_T}{ds^2} \quad (3)$$

die seitliche Krümmung.

Die *äußere Arbeit* setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der eine ist die

## Arbeit der Druckkraft

$$L_a^{(N_q)} = qR \int_0^l \left\{ \left( -\frac{e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \varphi^2 + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_T}{ds} \right)^2 - e \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} \right\} \cdot ds \quad (4a)$$

und der andere die aus der radialen Verschiebung der Last entstehende Arbeit:

$$L_a^{(q)} = q \int_0^l \frac{t}{2} \varphi^2 ds. \quad (4b)$$

Für eine antimetrische Last  $p$  stimmt der Ausdruck der *inneren* Arbeit genau mit (1) überein. Zur Aufschreibung der *äußeren* Arbeit müssen wir jedoch berücksichtigen, daß aus der veränderlichen Belastung nicht nur eine Druckkraft, sondern auch ein Biegemoment entsteht, das entlang der Bogenachse veränderlich ist. Demnach können wir die für die konstanten Beanspruchungen in [4] abgeleiteten Arbeitsformeln derart benutzen, daß wir die Ausdrücke der Last, der Druckkraft und des Biegemoments unter das Integralzeichen setzen.

Dies kann leicht eingesehen werden, wenn man erwägt, daß die Ausdrücke der äußeren Arbeit die Form von

$$\int \sigma \frac{\partial w}{\partial s} ds$$

haben, wo  $w$  die Verschiebung in der Richtung der Bogenachse ist, siehe z. B. [4] oder den Abschn. 8.4 in [6]. Wenn  $\sigma$  (d. h. die Beanspruchung) entlang der Bogenachse konstant ist, kann man diese vor das Integralzeichen setzen, wenn sich aber dieselbe ändert, muß sie wieder unter das Integralzeichen gesetzt werden.

Demnach können wir die äußeren Arbeiten folgenderweise anschreiben (indem wir außer (4a) und (4b) auch den für das gleichbleibende Biegemoment in [4] abgeleiteten Ausdruck verwenden):

$$L_a^{(N_p)} = \int_0^l N_p \left\{ \left( -\frac{e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \varphi^2 + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_T}{ds} \right)^2 - e \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} \right\} ds, \quad (5a)$$

$$L_a^{(P)} = \int_0^l P \frac{t}{2} \varphi^2 ds, \quad (5b)$$

$$L_a^{(M_p)} = \int_0^l M_p \left\{ \frac{1}{2R} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \varphi^2 - \frac{1}{2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left( \frac{dv_T}{ds} \right)^2 + \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} \right\} ds. \quad (5c)$$

Hier sind  $j_x$  und  $j_y$  von den geometrischen Angaben des Bogens abhängige Größen (siehe [3] oder [4]).

Im folgenden werden wir die im Punkte 2 beschriebene Annäherung  $d$ ) benutzen: wir betrachten die seitliche Biegesteifigkeit  $B_x$  als unendlich groß. Folglich wird  $\varkappa_{Tx} = 0$ , d. h., der Gleichung (3) gemäß kann  $v_T$  durch  $\varphi$  ausgedrückt werden:

$$v_T = \frac{1}{R} \iint \varphi ds ds + k_1 s + k_2. \quad (6)$$

Die Integralkonstanten  $k_1$  und  $k_2$  werden durch die Stützenbedingungen bestimmt. Folglich wird der Ausdruck (1) der inneren Arbeit sich folgendermaßen vereinfachen:

$$L_i = \frac{C}{2} \int_0^l \vartheta_T^2 ds + \frac{C_1}{2} \int \left( \frac{d\vartheta_T}{ds} \right)^2 ds. \quad (7)$$

Der Bedingung  $b$ ) des Punktes 2 entsprechend nehmen wir die antimerische Belastung gemäß Bild 3 an. Aus der Theorie der krummen Stäbe (s. z. B. [5], S. 397) kann es leicht abgeleitet werden, daß die Beanspruchungen (wenn man jede Größe durch den maximalen Wert  $M_2$  des Biegemoments ausdrückt) die folgende Form annehmen:

$$p = p_2 \sin \lambda_2 s = + M_2 \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right) \sin \lambda_2 s, \quad (8a)$$

$$N_p = + \frac{M_2}{R} \sin \lambda_2 s, \quad (8b)$$

$$M_p = - M_2 \sin \lambda_2 s, \quad (8c)$$

wo

$$M_2 = \frac{P_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2} \quad (8d)$$

ist.

Wir setzen die Ausdrücke (8a–c) in (5a–c) ein und ziehen die Teilarbeiten (4) und (5) zusammen. Dabei ist die Summe von zwei Gliedern gleich Null, und einige Glieder sind infolge der Bedingung  $a$ ) des Punktes 2 ( $d \ll R$ ) im Vergleich mit anderen Gliedern vernachlässigbar klein.

So bekommt man für die äußere Arbeit den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 L_a = qR & \left\{ \left( \frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \int_0^l \varphi^2 ds + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \int_0^l \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dv_T}{ds} \right)^2 ds - e \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} ds \left. \right\} + \\
 & + \frac{M_2}{R} \cdot \left\{ \left[ \frac{tR}{2} \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \varphi^2 ds + \right. \\
 & + \frac{R}{2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds - \\
 & - R \int_0^l \sin \lambda_2 s \frac{d\varphi}{ds} \frac{dv_T}{ds} ds \quad . \quad (9)
 \end{aligned}$$

Nun müssen wir die Verdrehungsfunktion  $\varphi(s)$  entsprechend den Stützenbedingungen annehmen, und nach Einsetzen derselben in den Ausdruck der inneren und äußeren Arbeit können wir die kritische Belastungsintensität bestimmen.

#### 4. Kippen des seitlich gelenkig gelagerten Schalenbogens mit sich frei verwölbenden Endquerschnitten

##### 4.1 Ableitung der Gleichungen für den allgemeinen Belastungsfall

Wenn der Bogen seitlich gelenkig gelagert ist und die Verwölbung der Endquerschnitte weder durch Diaphragmen, noch auf eine andere Art verhindert wird, sind nach [6] oder [4] die folgenden Randbedingungen gültig:

$$v_T = 0, \quad (10a)$$

$$\kappa_{Tx} = \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0,$$

$$\text{d. h. infolge (10c): } \frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0, \quad (10b)$$

$$\varphi = 0, \quad (10c)$$

$$\frac{d\vartheta_T}{ds} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2 v_T}{ds^2} = 0,$$

$$\text{d. h. infolge (10b): } \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0. \quad (10d)$$

Diese Randbedingungen werden durch die folgende Verdrehungsfunktion erfüllt:

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \sin \lambda_n s, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

wo

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{l} \quad (12)$$

ist.

Wir können uns ohne weiteres davon überzeugen, daß eine auf Grund der Gleichung (6) bestimmte  $v_T$  auch diese Randbedingungen befriedigt, wenn  $k_1 = k_2 = 0$  ist.

Somit wird der Ausdruck (7) der inneren Arbeit die folgende Form annehmen:

$$L_i = \frac{l}{2} \left\{ \frac{C}{2} \sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} \left( \lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 + \frac{C_1}{2} \sum_n \varphi_n^2 \left( \lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \right\}. \quad (13)$$

Für die Formel (9) der äußeren Arbeit erhalten wir:

$$\begin{aligned} L_a = qR \frac{l}{2} & \left\{ \left( \frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \sum_n \varphi_n^2 + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \sum_n \varphi_n^2 \lambda_n^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2R^2} \sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} + \frac{e}{R} \sum_n \varphi_n^2 \right\} + \\ & + \frac{M_2}{R} \frac{l}{2} \left\{ + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_2^2 \right) \sum_{n < k} (J_{n,k}^I \cdot \varphi_n \varphi_k) + \right. \\ & \left. + \frac{R}{2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \sum_{n < k} (J_{n,k}^{II} \cdot \varphi_n \lambda_n \varphi_k \lambda_k) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n < k} \left[ J_{n,k}^{II} \cdot \varphi_n \varphi_k \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k}{\lambda_n} \right) \right] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Hier sind mit  $J_{n,k}^I$  und  $J_{n,k}^{II}$  die folgenden Integrale bezeichnet:

$$\begin{aligned} J_{n,k}^I &= \frac{4}{l} \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \sin \lambda_n s \cdot \sin \lambda_k s \cdot ds = \\ &= \frac{2}{l} \left[ \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n - \lambda_k} + \frac{1}{-\lambda_2 + \lambda_n + \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_n + \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n + \lambda_k} \right], \quad (14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{n,k}^{II} &= \frac{4}{l} \int_0^l \sin \lambda_2 s \cdot \cos \lambda_n s \cdot \cos \lambda_k s \cdot ds = \\ &= \frac{2}{l} \left[ \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_n - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_n + \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n + \lambda_k} \right]. \quad (14b) \end{aligned}$$



In diesen Formeln ist  $n = 1, 2, 3, \dots$  und  $k = 1, 2, 3, \dots$ , die Werte von  $J_{n,k}^I$  und  $J_{n,k}^{II}$  werden aber beide gleich Null, wenn  $n + k$  eine gerade Zahl ist; die die  $J$ -Werte enthaltenden Summationen sind also nur auf die ungeraden Werte von  $n + k$  zu erstrecken.

Man geht also im weiteren in der Weise vor, daß man eine entsprechende Anzahl der Glieder der Reihe  $\varphi$  (11) entnimmt und dieselben in (13) und (14) einsetzt. Da das Verhältnis  $M_2/qR^2$  in der Wirklichkeit gegeben ist, kann es im folgenden als eine bekannte Konstante angesehen werden, folglich erhält man durch Differenzieren der gleichgesetzten inneren und äußeren Arbeiten laut der Regeln der Energie-Methode [4] nach den einzelnen  $\varphi_n$ -Gliedern ein homogenes, lineares Gleichungssystem für die  $\varphi_n$ -Werte. Indem man dessen Determinante gleich Null setzt, ergibt sich für  $(qR)_{kr} = N_{qkr}$  eine Gleichung gleichen Grades, wie viel Glieder der Reihe  $\varphi$  entnommen worden sind.

Diese Methode fordert aber im allgemeinen eine langwierige Berechnung. Das Minimum der Anzahl der Glieder, die für  $\varphi$  zu berücksichtigen ist, ist mindestens zwei. Infolge des antimetrischen Momentendiagramms muß nämlich wenigstens ein antimetrisches Glied vorhanden sein, es wird aber auch ein symmetrisches Glied benötigt, denn mit einer rein antimetrischen Verdrehungsfunktion liefert sowohl die antimetrische als auch die symmetrische (totale) Belastung eine äußere Arbeit gleich Null. Anschaulich kann das auch so ausgedrückt werden, daß der Bogen am leichtesten in einer Halbwelle ausknickt.

Zwei  $\varphi$ -Glieder liefern aber im allgemeinen noch ein sehr ungenaues Resultat. Mit zwei symmetrischen und zwei antimetrischen  $\varphi$ -Gliedern ist dagegen die Annäherung schon praktisch annehmbar, und mit sechs Gliedern kann diese als genau betrachtet werden. Dies fordert aber die Lösung einer Gleichung vierten bzw. sechsten Grades, und abgesehen davon ist die Berechnung auch sehr umfangreich.

Die Rechenarbeit kann aber auf Grund des folgenden Gedankenganges wesentlich vereinfacht werden.

Die zu den verschiedenen Verhältnissen  $q/p$  zugehörigen Beanspruchungspaare  $(N_q^*, M_2^*)$ , welche die Kippung hervorrufen, ergeben die im Koordinatensystem  $(N_q, M_2)$  des Bildes 4 dargestellte Kurve. Falls diese aufgezeichnet werden kann, so ist das zur Belastungskombination  $(q, p)$  gehörige kritische Beanspruchungspaar  $(N_q^*, M_2^*)$  folgenderweise zu ermitteln.

Aus den tatsächlichen Belastungen  $q$  und  $p$  berechnet man die auf den Bogen wirkenden Beanspruchungen

$$N_q = qR \quad \text{und} \quad M_2 = \frac{P_2}{\lambda_2^2 - 1/R^2}.$$

Vorausgesetzt, daß während des Anwachsens der Lastintensitäten das Verhältnis  $q/p$  unverändert bleibt, wird das den wirklichen Belastungen von

zunehmender Intensität entsprechende Beanspruchungspaar durch eine Gerade, welche den Koordinatenanfangspunkt des Bildes 4 und den Punkt  $(N_q, M_2)$  verbindet, dargestellt. Wo diese Gerade die Kurve der kritischen Beanspruchungspaare  $(N_q^*, M_2^*)$  schneidet, findet sich der Punkt, dessen Koordinaten die dem gegebenen Verhältnis  $q/p$  entsprechenden, kritischen Beanspruchungen ergeben.

Die Kurve der kritischen Beanspruchungspaare  $(N_q^*, M_2^*)$  kann, wie gesagt, nur mit Hilfe ziemlich langwieriger Berechnungen ermittelt werden. Es kann aber ohne jede Berechnung festgestellt werden, daß diese Kurve

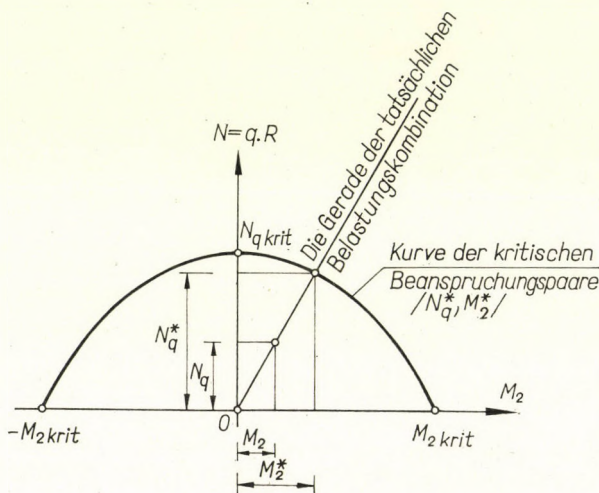


Bild 4

symmetrisch zur Achse  $N_q$  ist, denn es ist ja vom Gesichtspunkt der Stabilität des Bogens aus gleichgültig, ob die positiven bzw. negativen Momente auf der einen oder auf der anderen Bogenhälfte auftreten. Die Kurve schneidet also die Achse  $N_q$  mit einer waagerechten Tangente. Sie kann aber die Achse  $M_2$  nicht mit einer lotrechten Tangente schneiden, denn das kritische Moment wird offenbar durch die auf den Bogen wirkende Druckkraft verringert, durch die Zugkraft dagegen vergrößert. Die Tangente muß also gegen den den Druck repräsentierenden Zweig der  $N_q$ -Achse neigen. Es folgt von alledem, daß die Form der Kurve einer quadratischen Parabel nahesteht (Bild 4).

In den folgenden werden wir also die Annäherung anwenden, daß wir die Schnittpunkte der genauen Kurve  $(N_q^*, M_2^*)$  mit den Achsen  $N_q$  und  $M_2$  ermitteln und durch diese Schnittpunkte eine quadratische Parabel verlegen. Als Kontrolle berechnen wir im Abschnitt 4.3 das kritische Beanspruchungspaar  $(N_q^*, M_2^*)$  auch mit Hilfe der genauen Methode und vergleichen es mit den durch die quadratische Parabel ermittelten Werten.

Den Schnittpunkt  $N_{qkr}$  der Kurve mit der Achse  $N_q$  haben wir schon in unseren früheren Arbeiten [1], [4] ermittelt. Wir werden uns also in den weiteren mit der Bestimmung des zur reinen antisymmetrischen Belastung gehörigen  $M_{2kr}$ -Wertes befassen.

#### 4.2. Die Ermittlung des von der reinen antisymmetrischen Belastung $p$ stammenden $M_{2kr}$

Das von der reinen antisymmetrischen Belastung stammende kritische Biegemoment  $M_{2kr}$  wird erhalten, wenn aus den Ausdrücken (13) und (14) die  $q$  enthaltenden Glieder weggelassen werden. So wird die Berechnung wesent-

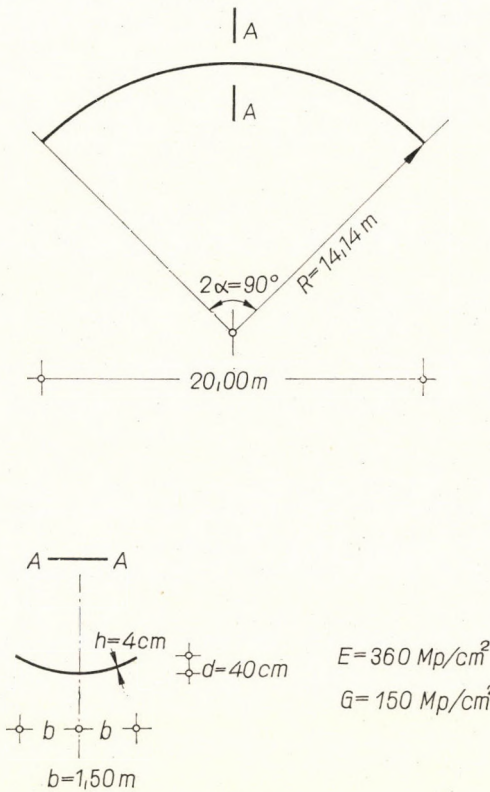


Bild 5

lich einfacher, denn die zur Lösung nötige Gleichung reduziert sich im Falle von vier oder fünf Gliedern auf eine quadratische und bei sechs Gliedern auf eine kubische Gleichung.

Für das im Bild 5 dargestellte Berechnungsbeispiel wurden die  $M_{2kr}$ -Werte für den Fall  $q=0$  mit Hilfe von verschiedenen  $\varphi$ -Gliederzahlen ermittelt, zur Klärung der Frage, wie viele Glieder der Reihe  $\varphi$  zu beachten sind, um

ein entsprechend genaues Resultat zu erzielen. Die Ergebnisse sind in der vierten Spalte der Tafel I zusammengefaßt.

Die Tafel zeigt, daß man schon mit vier Gliedern eine praktisch genügende Übereinstimmung erhält, und mehr als sechs Glieder in Betracht zu ziehen überflüssig ist.

Für dasselbe Berechnungsbeispiel wurden auch die kritischen Biegemomente  $M_2$  für den Fall einer geraden Stabachse (d. h.  $\alpha = 0$ ), mit 2 bis 5  $\varphi$ -Gliedern ermittelt. Die Ergebnisse weisen darauf hin, daß die Konvergenz dem Fall  $\alpha = 45^\circ$  gegenüber sich nicht viel gebessert hat.

Tafel I

Durch eine antimetrische Belastung  $p$  hervorgerufene kritische Biegemomente  $M_2$

Zahl der $\varphi$ -Glieder insgesamt	Zahl der symmetrischen Glieder	Zahl der antimetrischen Glieder	$M_{2kr}$ (Mpm)	Die zur Lösung erforderliche Gleichung
2	1	1	198,53	rein quadratisch
3	2	1	54,00	rein quadratisch
4	2	2	33,55	quadratisch
5	3	2	32,08	quadratisch
6	3	3	31,71	kubisch

Zu den praktischen Berechnungen geben wir für den Fall von vier berücksichtigten  $\varphi$ -Gliedern die Koeffizienten der zur Bestimmung des Wertes  $M_{2kr}$  nötigen, in  $M^2$  quadratischen Gleichung an:

$$A \cdot M_{2krit}^4 + B \cdot M_{2krit}^2 + C = 0, \quad (15)$$

$$A = (c_1 c_3 - c_2 c_4)^2, \quad (16a)$$

$$B = -(c_1^2 a_3 a_4 + c_2^2 a_1 a_4 + c_3^2 a_1 a_2 + c_4^2 a_2 a_3), \quad (16b)$$

$$C = a_1 a_2 a_3 a_4, \quad (16c)$$

wo

$$a_n = \frac{l}{2} \left( \lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_n^2} + C_1 \right), \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (16d)$$

$$c_1 = 0,3395 \frac{l}{R} \left( \frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_2^2 \right) + 1,6755 \frac{1}{l} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) - 0,1273 \frac{l}{R}, \quad (16e)$$

$$c_2 = 0,2425 \frac{l}{R} \left( \frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_2^2 \right) +$$

$$+ 10,7712 \frac{1}{l} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 0,1516 \frac{l}{R}, \quad (16f)$$

$$c_3 = 0,2263 \frac{l}{R} \left( \frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_2^2 \right) + \\ + 23,4571 \frac{1}{l} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 0,1862 \frac{l}{R}, \quad (16g)$$

$$c_4 = - 0,09701 \frac{l}{R} \left( \frac{b^2 j_y}{dR} + tR \lambda_2^2 \right) - \\ - 6,2233 \frac{1}{l} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) - 0,5729 \frac{l}{R}. \quad (16h)$$

Zwecks Überslagsberechnungen sind auch noch die 1 + 1 und 2 + 1 freie Parameter enthaltenden Lösungen angegeben. Dieselben sind zwar viel leichter zu ermitteln, die dabei erhaltenen Werte sind aber nach dem Ausweis der Tafel I beträchtlich größer als die genauen:

$$M_{2kr}^{1+1} = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{c_1}, \quad (17a)$$

$$M_{2kr}^{2+1} = \sqrt{\frac{a_1 a_2 a_3}{c_1^2 a_3 + c_2^2 a_1}}. \quad (17b)$$

Die Konstanten  $a$  und  $c$  sind auch jetzt aus den Formeln (16d—g) zu berechnen.

#### 4.3. Die Kurve der kritischen Beanspruchungspaare ( $N_q^*$ , $M_2^*$ )

Ein anderer charakteristischer Punkt dieser Kurve, die zum mittigen Druck gehörige kritische Druckkraft  $N_{qkr}$  wurde schon in der Abhandlung [1] bestimmt und ist aus der folgenden Formel zu berechnen:

$$N_{qkr} = \frac{\left( \lambda_1^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \cdot (C + C_1 \lambda_1^2)}{\frac{1}{R^2} + \lambda_1^2 \left( 2 \frac{e}{R} - \frac{i_x^2}{R^2} \right) + (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \lambda_1^4}. \quad (18)$$

Die Kurve selbst wird nach der im Abschnitt 4.1 geschilderten Methode näherungsweise durch eine quadratische Parabel ersetzt.

Zur Kontrolle der Richtigkeit dieser Annäherung wurde aus den genauen Formeln (13) und (14) mit Hilfe der Angaben des Bildes 5 die kritische Be-

lastung ermittelt, und zwar für den Fall der dem Verhältnis

$$\frac{M_2}{N_q} = \frac{32,1}{3,98} \approx \frac{M_{2kr}}{N_{qkr}}$$

entsprechenden Belastungskombination. In der Tafel II sind die Ergebnisse dieser Berechnung angegeben, und zwar für verschiedene berücksichtigte  $\varphi$ -Glieder. Nachher wurde die kritische Belastung auch in der Weise ermittelt, daß die über die Punkte  $M_{2kr} = 32,1$  Mpm und  $N_{qkr} = 3,98$  Mp verlegte quadratische Parabel mit der Geraden der obigen Belastungskombination geschnitten wurde. Als Resultat ergab sich folgendes:

$$N_{qkr}^* = 2,46 \text{ Mp}, \quad M_{2kr}^* = 19,83 \text{ Mpm}.$$

Wie ersichtlich, ergab sich in diesem Falle mit Hilfe der Annäherungsmethode dem genauen Werte gegenüber ein um 4,3% kleineres Resultat, welches als eine sehr gute Übereinstimmung betrachtet werden kann. Die Abweichung liegt auf der Seite der Sicherheit.

Verlangt man eine größere Genauigkeit, oder sollte ein vom dargestellten Berechnungsbeispiel stark abweichender Bogen berechnet werden, so kann man natürlich auch die genauere Methode, d. h. Gleichungen (13)–(14) anwenden.

**Tafel II**

*Aus einer Vollast  $q$  und aus einer antimetrischen Last  $p$  entstammendes kritisches Beanspruchungs-paar  $N_q^* = qR$  und  $M^*$*

Die Anzahl der $\varphi$ -Glieder insgesamt	Anzahl der symmetrischen Glieder	Anzahl der antimetrischen Glieder	$N_q^*$ Mp	Mpm	Grad der zur Lösung erforderlichen Gleichung
2	1	1	3,90	31,45	2
3	2	1	3,85	31,05	3
4	2	2	2,64	21,27	4
5	3	2	2,60	20,93	5
6	3	3	2,57	20,70	6

### 5. Kippen des seitlich eingespannten Schalenbogens, dessen Endquerschnitte an der Verwölbung verhindert sind

Die Randbedingungen können für diesen Fall folgenderweise aufgeschrieben werden [4], [6]:

$$v_T = 0, \tag{19a}$$

$$\frac{dv_T}{ds} = 0, \quad (19b)$$

$$\varphi = 0, \quad (19c)$$

$$\vartheta_T = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv_T}{ds} = 0,$$

$$\text{d. h. nach (19b)} \quad \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (19d)$$

Man schreibt jetzt die Verdrehungsfunktion in zwei Teilen auf. Für den *symmetrischen* Teil ist es zweckmäßig, die Form

$$\varphi_{\text{symmetr}} = \sum_n \varphi_n (1 - \cos \lambda_n s), \quad (n = 2, 4, 6, \dots) \quad (20)$$

zu wählen. Zur Erfüllung von (19a–b) muß  $v_T$  nach (6) ermittelt werden. Man bestimmt die Integralkonstanten  $k_1$  und  $k_2$ , um die Bedingung (19a) für den Fall  $s = 0$  und  $s = l$  zu erfüllen:

$$v_T = - \sum_n \frac{\varphi_n}{R} \left[ \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n s) + \frac{s}{2} (l - s) \right].$$

Die Randbedingung (19b) wird erfüllt, wenn die Gleichung

$$\sum_n \varphi_n = 0 \quad (21)$$

besteht. Infolgedessen vereinfacht sich die Gleichung (20) auf die folgende Form:

$$\varphi_{\text{symmetr}} = \sum_n \varphi_n \cdot \cos \lambda_n s, \quad (n = 2, 4, 6, \dots). \quad (22)$$

Der *antimetrische* Verdrehungsteil kann hingegen in der Form:

$$\varphi_{\text{antimetr}} = \sum_m \Phi_m \sin \lambda_m s, \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad (23)$$

angenommen werden. Dies entspricht nur den Bedingungen (19a) und (19c). Zwecks Erfüllung der beiden anderen Bedingungen müssen mit Benützung der Gleichung (6) noch die folgenden Gleichungen angeschrieben werden:

$$\sum_m \Phi_m \lambda_m = 0 \quad (24)$$

und

$$\sum_m \frac{\Phi_m}{\lambda_m} = 0. \quad (25)$$

Es folgt aus alledem, daß im symmetrischen wie auch im antimetrischen Teil je ein freier Parameter vorhanden sein wird, wenn aus der Funktion  $\varphi_{\text{symmetr}}$  zwei, und aus  $\varphi_{\text{antimetr}}$  drei Glieder entnommen werden. Jedes weitere Glied deutet einen weiteren freien Parameter an.

Die zwei Teile der Verdrehungsfunktion können jetzt in die Formeln der inneren und äußeren Arbeiten (7) und (9) eingesetzt werden. Auf Grund der Bedingungen (21), (24) und (25) drückt man jetzt irgendeinen  $\varphi_n$ -Koeffizienten und zwei  $\Phi_n$ -Koeffizienten mit den übrigen aus, und man führt die Differentiationen nach  $\varphi_n$  und  $\Phi_n$  durch. So stehen so viele Gleichungen zur Verfügung, wie viele unbekannte  $\varphi_n$ - und  $\Phi_n$ -Parameter insgesamt vorhanden sind.

Der Ausdruck (7) der *inneren Arbeit* nimmt folgende Form an:

$$L_i = \frac{l}{2} \left\{ \frac{C}{2} \left[ \sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} \left( \lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 + \sum_m \frac{\Phi_m^2}{\lambda_m^2} \left( \lambda_m^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{C_1}{2} \left[ \sum_n \varphi_n^2 \left( \lambda_n^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 + \sum_m \Phi_m^2 \left( \lambda_m^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (26)$$

Die Formel (9) der *äußeren Arbeit* dagegen gestaltet sich folgendermaßen:

$$L_a = qR \frac{l}{2} \left\{ \left( \frac{t-e}{2R} - \frac{i_x^2}{2R^2} \right) \left( \sum_n \varphi_n + \sum_n \Phi_m^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (i_x^2 + i_y^2 + e^2) \left( \sum_n \varphi_n^2 \lambda_n^2 + \sum_m \Phi_m^2 \lambda_m^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2R^2} \left( \sum_n \frac{\varphi_n^2}{\lambda_n^2} + \sum_m \frac{\Phi_m^2}{\lambda_m^2} \right) + \frac{e}{R} \left( \sum_n \varphi_n^2 + \sum_m \Phi_m^2 \right) \right\} + \\ + \frac{M_2}{R} \frac{l}{2} \left\{ \left[ \frac{tR}{2} \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] \sum_{n=2,4,6,\dots} (\varphi_n \Phi_{n+2} - \varphi_{n+2} \Phi_n) + \right. \\ \left. + \frac{R}{2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) \sum_{n=2,4,6,\dots} \lambda_n \lambda_{n+2} (\varphi_n \Phi_{n+2} - \varphi_{n+2} \Phi_n) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=2,4,6,\dots} \left( \frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+2}} \right) (\varphi_n \Phi_{n+2} - \varphi_{n+2} \Phi_n) \right\}. \quad (27)$$



Im weiteren geht man wie im Abschnitt 4 vor: für den Fall  $q = 0$  ermittelt man bei rein antisymmetrischer Belastung den Wert von  $M_{2 \text{ krit}}$ . Zur Prüfung der Konvergenz wurde der Wert von  $M_{2 \text{ krit}}$  für den Schalenbogen des Bildes 5 mit Hilfe der Verdrehungsfunktion von verschiedener Gliederzahl berechnet. Die Ergebnisse sind in der Tafel III zusammengestellt.

Tafel III

Die berücksichtigte Anzahl der		Die Anzahl der unabhängigen		$M_{2 \text{ krit}}$ Mpm	Zur Lösung erforderliche Gleichung
symmetr.	antisymmetr.	symmetr.	antisymmetr.		
Glieder		Glieder			
2	3	1	1	89,39	} rein
3	3	2	1	68,85	
3	4	2	2	62,10	} quadratisch
4	4	3	2	61,67	
4	5	3	3	61,51	kubisch

Wie man sieht, ist die Konvergenz etwas besser, als sie beim seitlich gelenkigen Bogen mit freien Enden war. So kann man sich in der Praxis auch jetzt mit einem in  $\varphi$  und  $\Phi$  je zwei unabhängige Parameter enthaltenden Ansatz befriedigen. Die Koeffizienten der in  $M^2$  quadratischen Gleichung der Form (15) sind jetzt die folgenden:

$$A = (c_1 c_2 - c_3 c_4)^2, \quad (28a)$$

$$B = 2 a_{12} a_3 c_2 c_4 - 2 a_{12} a_{34} c_1 c_2 - 2 a_{12} a_{34} c_3 c_4 + 2 a_{12} a_4 c_1 c_3 + 2 a_1 a_{34} c_2 c_3 + \\ + 2 a_2 a_{34} c_1 c_4 - a_1 a_3 c_2^2 - a_1 a_4 c_3^2 - a_2 a_3 c_4^2 - a_2 a_4 c_1^2, \quad (28b)$$

$$C = (a_1 a_2 - a_{12}^2) \cdot (a_3 a_4 - a_{34}^2), \quad (28c)$$

wo

$$a_1 = \frac{l}{2} \left\{ \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + \left( \lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) \right\},$$

$$a_2 = \frac{l}{2} \left\{ \left( \lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) + \left( \lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) \right\},$$

$$a_{12} = \frac{l}{2} \left( \lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right),$$

$$a_3 = \frac{l}{2} \left\{ \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + 41,3265 \left( \lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) + \right. \\ \left. + 20,8980 \left( \lambda_8^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_8^2} + C_1 \right) \right\},$$

$$a_4 = \frac{l}{2} \left\{ \left( \lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) + 6,6122 \left( \lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) + \right. \\ \left. + 2,0408 \left( \lambda_8^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_8^2} + C_1 \right) \right\},$$

$$a_{34} = \frac{l}{2} \left\{ 16,5306 \left( \lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 6,5306 \left( \lambda_8^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_8^2} + C_1 \right) \Bigg\}, \\
c_1 &= \frac{l}{4} \left\{ 4,5714 \left[ t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 219,4286 \frac{\pi^2}{l^2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 9,5238 \frac{1}{R} \right\}, \\
c_2 &= \frac{l}{4} \left\{ 3,0 \left[ t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 106,2857 \frac{\pi^2}{l^2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 6,3809 \frac{1}{R} \right\}, \\
c_3 &= \frac{l}{4} \left\{ 12,0 \left[ t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 381,7143 \frac{\pi^2}{l^2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 25,9524 \frac{1}{R} \right\}, \\
c_4 &= \frac{l}{4} \left\{ -0,5714 \left[ t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 36,5714 \frac{\pi^2}{l^2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) - 1,6905 \frac{1}{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Auch jetzt wird die die 1 + 1 Parameter enthaltende einfach berechenbare Lösung angegeben, nochmals mit der Bemerkung, daß sie ein mit dem genauen Wert verglichen wesentlich größeres kritisches Moment liefert, das jedoch für orientierende Vorberechnungen zweckmäßig angewendet werden kann:

$$M_{2kr} = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{c_1}, \quad (29)$$

wo

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{l}{2} \left\{ \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + \left( \lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) \right\}, \\
a_2 &= \frac{l}{2} \left\{ \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_2^2} + C_1 \right) + 10,24 \left( \lambda_4^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_4^2} + C_1 \right) + \right. \\
& \quad \left. + 3,24 \left( \lambda_6^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \left( \frac{C}{\lambda_6^2} + C_1 \right) \right\}, \\
c_1 &= \frac{l}{4} \left\{ 4,0 \left[ t \lambda_2^2 - \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{b^2 j_y}{dR} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 60,8 \frac{\pi^2}{l^2} \left( 2e - dj_x - \frac{b^2 j_y}{d} \right) + 9,4 \frac{1}{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Ist  $p = 0$ , dann wird die mittige Druckkraft, auf Grund von [4], durch die folgende Formel (aus einer  $\varphi$ -Reihe mit einem freien Parameter) bestimmt:

$$(qR)_{kr} = N_{qkr} = \frac{A}{B}$$

wobei

$$A = C \left[ \lambda_2^2 + \lambda_4^2 - \frac{4}{R^2} + \frac{1}{R^4} \left( \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_4^2} \right) \right] + C_1 \left[ \lambda_2^4 + \lambda_4^4 - \frac{2}{R^2} (\lambda_2^2 + \lambda_4^2) + \frac{2}{R^4} \right] \quad (30)$$

$$B = 2 \left( \frac{t - e}{R} - \frac{i_x^2}{R^2} \right) + (i_x^2 + i_y^2 + e^2) (\lambda_2^2 + \lambda_4^2) + \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_4^2} \right) + 4 \frac{e}{R}$$

ist.

(Mit Hilfe von zwei freien Parametern kann ein etwas genaueres Resultat erhalten werden, siehe Abhandlung [4].)

Da die im Abschnitt 4.1 erörterten Gesichtspunkte auch für diesen Lagerungsfall gültig sind, kann die genaue Kurve der kritischen Belastungskombinationen auch jetzt durch eine durch die Punkte  $M_{2kr}$  und  $N_{qkr}$  gelegte Parabel ersetzt werden.

## 6. Berechnungsbeispiel

Es soll die Kippstabilität des im Bild 5 dargestellten Schalenbogens geprüft werden für die gleichzeitige Wirkung einer Vollast von 200 kp/m<sup>2</sup>, einer antimetrischen Windlast von 32 kp/m<sup>2</sup> sowie einer halbseitigen Schneebelastung von 80 kp/m<sup>2</sup>.

Der Bogen ist in seitlicher Richtung eingespannt, auch die Verwölbung der Endquerschnitte ist verhindert, bei der Berechnung der Beanspruchungen kann aber derselbe in der Bogenebene als gelenkig betrachtet werden. Die geometrischen und Festigkeits-Hilfsgrößen sind in der Abhandlung [3] bzw. [4] angegeben.

Einfachheitshalber wird davon abgesehen, daß die Lasten nicht radial wirken, und die antimetrische Belastung sich nicht nach einer Sinuskurve verteilt. Es werden die aus den gegebenen Belastungen entstehenden Druckkräfte und in den Bogenvierteln auftretenden Momente berechnet, und indem man diese als  $N_q$  und  $M_2$  betrachtet, wird die der elastischen Kippung gegenüber bestehende Sicherheit festgestellt.

Die Beanspruchungen sind annähernd die folgenden:

Mittiger Druck:

$$N^{\text{konst.}} \approx q \cdot R = 3 \text{ m} \cdot 200 \text{ kp/m}^2 \cdot 14,14 \text{ m} = 8,49 \text{ Mp}$$

$$N^{\text{Schnee}} \approx \frac{1}{2} pR = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 80 \cdot 14,14 = 1,69 \text{ Mp}$$

$$N_q = 10,18 \text{ Mp}$$

Biegung:

$$M_2^{\text{Wind}} \approx \frac{pL^2}{32} = \frac{3 \cdot 32 \cdot 20^2}{32} = 1,2 \text{ Mpm}$$

$$M_2^{\text{Schnee}} \approx \frac{pL^2}{64} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 20^2}{64} = 1,5 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = 2,7 \text{ Mpm}$$

Das kritische Moment  $M_{2kr}$  des Schalenbogens wurde schon im Abschnitt 5 ermittelt. Es wird hier aus den Angaben der Tafel II der mit Hilfe von 2 + 2 freien Parametern berechnete Wert  $M_{2kr} = 62,10 \text{ Mpm}$  herangezogen.

Der kritische Wert der mittigen Druckkraft ergibt sich aus der Formel (30), berechnet für 171 Mp [4].

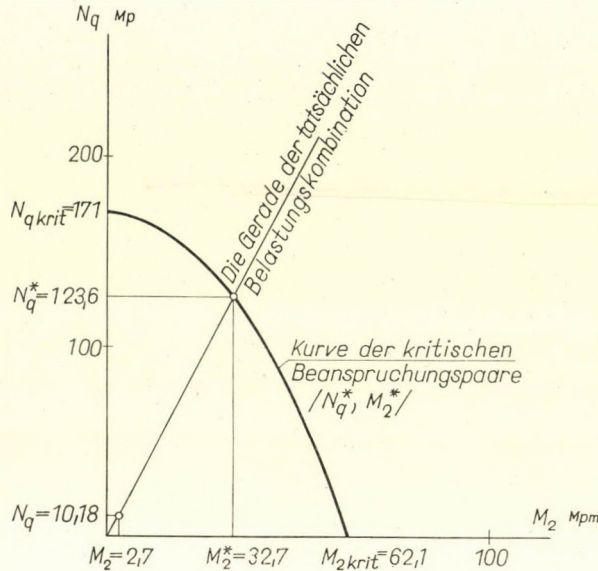


Bild 6

Die mit Hilfe der quadratischen Parabel durchgeführte Stabilitätsuntersuchung ist im Bild 6 dargestellt. Für das kritische Beanspruchungspaar ergaben sich folgende Werte:

$$N_q^* = 123,6 \text{ MP}$$

$$M_2^* = 32,7 \text{ Mpm}$$

Die der elastischen Kippung gegenüber bestehende Sicherheit wird also:

$$n = \frac{N_q^*}{N_q} = \frac{M_2^*}{M_2} = 12,1\text{-fach.}$$

#### SCHRIFTTUM

1. KOLLÁR, L.: Torsional Buckling of Thin-Walled Curved Bars (Shell-arches). *Acta Techn. Hung.* **40** (1962), 337—353.
2. KOLLÁR, L.: Lateral Buckling of Thin-Walled Curved Bars (Shell-arches). *Acta Techn. Hung.* **45** (1964), 297—314.
3. KOLLÁR, L.: Lateral Buckling of Bent Shell-Arches Taking into Account Non-Linear Stress Distribution. *Bulletin of the IASS*, Nr. 19 (1964).
4. KOLLÁR, L.—IVÁNYI, Gy.: Kippen und Biegedrillknicken von Schalenbogen mit Hilfe der Energiemethode. *Bautechnik-Archiv* H.19 (1966).
5. LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover Publ., New York 1944.
6. TIMOSHENKO, S.—GERE, J.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York 1961.

**Lateral Stability of Shell-Arches under the Action of Antimetric Loads.** The analysis of lateral buckling of thin-walled, elastic curved bars (shell-arches) caused by antimetric load, is presented by using the energy method. The solution is dealt with in a detailed manner for two kinds of support, and the simultaneous consideration of antimetric and symmetric loads is exposed, too. Information is given about the obtainable exactness. A numerical example illustrates the practical applicability of the method.

**Stabilité latérale des voiles en arc sous l'action de charges antimétriques.** L'analyse du flambage latéral des poutres en arc élastiques à axe curviligne et à paroi mince (voiles en arc) se produisant sous l'action de charges antimétriques, est exposée à l'aide de la méthode d'énergie. La solution est traitée pour deux cas de support et la considération simultanée des charges antimétriques et symétriques est aussi présentée. Des informations sont données sur l'exactitude réalisable. Un exemple numérique illustre l'applicabilité de la méthode traitée.

**Боковая устойчивость оболочковых арок при антиметрической нагрузке.** В работе при помощи энергетического метода анализируется боковой прогиб тонкостенных кривоосных упругих арочных ферм (оболочковых арок), возникающий под действием антиметрического груза. Для двух случаев опирания детально анализируется решение, и показан случай учета одновременного действия антиметрических и симметрических нагрузок. Приведены данные также относительно достижимой точности. На числовом примере демонстрируется практическое применение метода.



BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG —  
COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

*Gy. Rudnai:*

LEICHTBETON-BAUKONSTRUKTIONEN

Akadémiai Kiadó (Akademie Verlag), 272 Seiten, 172 Bilder, 43 Tafeln

Die Erörterung der mit dem Leichtbeton-Baumaterial und den Konstruktionen verbundenen Fragen wird in vier Abschnitten zusammengefaßt.

Im ersten Abschnitt werden die Leichtbetonarten, deren Herstellungsmethoden, Entwurfsrichtlinien, physikalische und mechanische Kennwerte beschrieben. Es werden auch wertvolle Angaben für die Festigkeits- und Elastizitätswerte der Leichtbeton-Baumaterialien und auch für die wärmetechnischen Kennwerte derselben geliefert. Die Systematisierung der Güteanforderungen bietet für die Qualitätsbeurteilung, für die Kontrolle und für die Abnahme nützliche Festpunkte.

Im zweiten Abschnitt sind die mannigfaltigen Anwendungsmöglichkeiten der leichten, porösen Betone zusammengefaßt.

Im dritten Abschnitt werden die Leichtbeton-Blocksteine, Mauerwerk- und Deckenelemente sowie die einheimischen und ausländischen Varianten der Verbindungen dieser Elemente (Siporex, Ytong, Hebel) im Rahmen einer ausführlichen Beschreibung und eines reichen Bildmaterials vorgeführt. Hier ist auch die Besprechung der Fertigungstechnologie der aus natürlichen und künstlichen Zuschlagmaterialien erzeugten Leichtbetonarten sowie der auf diese Weise hergestellten Träger-, Raumabgrenz- und Isolationselemente vorzufinden. Die Entwurfsrichtlinien der Leichtbeton-Monolitkonstruktionen sowie die Methoden und Mittel der Bauausführung, u. zw. die Rutschschalung, das Streckmetall und die Tafelschalung werden ebenfalls in diesem Abschnitt erörtert.

Im vierten Abschnitt sind die Grundsätze für die Entwurfsarbeiten der zeitgemäßen Wärmeisolierung und die Zusammenfassung der wärmetechnischen Forderungen enthalten. Die Anwendung der zu den Berechnungen notwendigen Formeln wird an Beispielen vorgeführt.

Das mit der Anführung der wichtigeren DIN-Vorschriften endende Werk, in welchem die Beschaffenheiten und die Anwendungsmöglichkeiten der Leichtbetonkonstruktionen umfassend behandelt sind, ist ein wertvolles Hilfsmittel für den Konstrukteur und den Architekten sowie für den ausführenden Ingenieur und den Baukontrolleur.

*B. Goschy*

*O. Knapp:*

GLASFASERN

Akadémiai Kiadó (Akademie Verlag), Budapest 1966. 233 Seiten, 200 Bilder, 27 Tafeln

Das Buch behandelt sämtliche Probleme der Herstellung von Glasfasern, ferner alle Gebiete, die für sie eine Anwendungsmöglichkeit bieten. Mit Rücksicht auf das behandelte Thema füllt das Buch eine fühlbare Lücke der Fachliteratur aus.

Nach einer kurzen Einleitung erläutert der Verfasser, ebenfalls gedrängt, das Entstehen der Glasfaserindustrie und im Zusammenhang damit die Geschichte der dabei verwendeten Kunststoffe. Danach werden die Fragen des strukturellen Aufbaues, anschließend die chemischen und physikalischen Eigenschaften der Glasfaser behandelt.

Das nächste Kapitel bringt die Darstellung von Verfahren der industriellen Herstellung der Glasfaser und der Möglichkeiten ihrer kommerziellen Anwendung. Es muß besonders hervorgehoben werden, daß ein sehr reiches Bildmaterial die Ausführungen leicht verständlich

und farbig gestaltet. Das folgende Kapitel ist der Beschreibung der Eigenschaften von Kunststoffen und Klebmitteln gewidmet, die in der Glasfaserindustrie Anwendung finden.

Relativ kurz gefaßt ist im Buch die Erläuterung der durch Glasfasern verstärkten Kunststoffe; dagegen wird eine sehr bemerkenswerte Zusammenfassung über die kombinierte Verwendung von Glasfasern und Kunststoffen gegeben.

Im Anschluß hieran folgt ein Kapitel, in dem sehr eingehend und mit einem beachtenswerten reichen Bildmaterial die Herstellungsverfahren der mit Glasfasern verstärkten Kunststoffe und die in der Industrie hergestellten Artikel behandelt werden.

Durchaus beachtenswert ist der kurze Abschnitt, der die Zusammenfassung von Anweisungen enthält, die zweckmäßigerweise beim Entwurf von Glasfaserprodukten eingehalten werden.

Das Kapitel des Buches, in dem die Anwendungsmöglichkeiten der Glasfasererzeugnisse behandelt werden, bedeutet den wichtigsten, interessantesten und wertvollsten Teil des Buches. Die Darstellung stützt sich auf ein reichhaltiges Bild-, Diagramm- und Nomogramm-Material, und verweist überall mit scharfer Kritik auf die Grenzen, die die Anwendung einschränken.

Die drucktechnische Ausführung, die Bilder und Nomogramme des Buches sind geeignet, den guten Ruf des Akademie Verlags (*Akadémiai Kiadó*) zu bestätigen.

Für die Fachleute aus den Gebieten der Herstellung und Anwendung der Glasfaser bedeutet dieses Buch eine wertvolle Unterstützung, aber auch die Hörer des höheren Gewerbeteknikums und Studierende der Universität werden es mit Erfolg verwenden können.

M. Déri

Riko Rosman:

#### ZAHLENTAFELN FÜR DIE SCHNITTKRÄFTE VON WINDSCHEIBEN MIT ÖFFNUNGSREIHEN

TABLES FOR THE INTERNAL FORCES OF PIERCED SHEAR-WALLS SUBJECTED TO LATERAL LOADS  
Bauingenieur-Praxis, Heft 66. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München 1966,  
93 Seiten, 22 Bilder

Die Versteifung von Hochhäusern gegen horizontale Krafteinwirkungen (Wind und Erdstöße) geschieht im allgemeinen mit Hilfe von sog. Windscheiben. Die Berechnung dieser, gewöhnlich durch Öffnungsreihen durchbrochenen Mauern ist auch bei Anwendung verschiedener vereinfachender Annahmen sehr kompliziert. Somit ist die Ausarbeitung und Veröffentlichung eines Tabellenwerkes zur Vereinfachung der Berechnungen äußerst angezeigt. Diesem Zweck dient das Buch von Professor ROSMAN.

Das Buch ist zweisprachig, es erstreckt sich auf je 28 Seiten mit deutschem und englischem Text und behandelt die anzuwendenden Berechnungsprinzipien. Es betrachtet die Windscheiben in Höhe des Terrains als steif eingespannt und beschreibt deren zwei Typen: Windscheiben mit einer asymmetrisch angeordneten Öffnungsreihe und solche mit symmetrisch angeordneten zwei Öffnungsreihen. Die vier angeführten Belastungsfälle sind: a) gleichmäßig verteilte Belastung in der ganzen Höhe des Gebäudes; b) nach Trapezdiagramm verteilte Belastung; c) nach Dreieckdiagramm verteilte Belastung; d) konzentrierte Last im Höhepunkt des Gebäudes. Nach Bekanntmachung des auf diese vier Fälle bezüglichen Formelmateriale beschreibt Verfasser den Gang der vorgeschlagenen Berechnungsmethode. Er erklärt die Benützung der am Ende des Buches befindlichen Zahlentafeln und führt dann vier, den vorher erwähnten Belastungsfällen entsprechende Zahlenbeispiele an. Diese sind mit denen identisch die der Verfasser ohne Zahlentafeln, durch unmittelbare Berechnung in seinem, in der Heftreihe »Bauingenieurpraxis« erschienenen Werke unter dem Titel »Die statische Berechnung von Hochhauswänden mit Öffnungsreihen« ausgearbeitet hatte. Die Zahlentafeln selbst sind leicht zu benützen und so dicht eingeteilt, daß sich eine Einschaltung durch Interpolation zwischen die Zahlenwerte der Tafeln erübrigt.

Das Büchlein ist ausgesprochen für die Zwecke der Praxis geschrieben. Durch seine Hilfe wird die Berechnung der mit Öffnungsreihen versehenen Windscheiben von Hochhäusern äußerst einfach.

P. Csonka



*E. Hampe:*

VORGESPANNTE KONSTRUKTIONEN. THEORIE, TECHNOLOGIE, KONSTRUKTION

VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964 (Band I), 1965 (Band II)

Die Einführung des Prinzips der Vorspannung hat im Entwerfen von Konstruktionen revolutionäre Änderungen gebracht: es wurde die künstliche Beeinflussung des Kräftespiels und der Formänderung von Konstruktionen ermöglicht und damit die Lösung von Aufgaben, die früher überhaupt nicht oder nur um den Preis großer Schwierigkeiten zweckmäßig zu lösen waren.

Selbstverständlich wurden durch Einführung der neuen Baumethode auf dem Gebiete der Planung ebenso, wie in der Ausführung zahlreiche durchaus neue Probleme aufgeworfen. Die vernunftgemäße Lösung dieser Probleme beschäftigt Tausende theoretischer und praktischer Fachleute und ein heutiger Ingenieur muß mit den in dieser Hinsicht auftauchenden Möglichkeiten bereits im Laufe seiner Hochschulausbildung Bekanntschaft schließen. Demzufolge benötigt die technische Praxis ebenso wie der Unterricht ein Handbuch, welches im gegebenen Fall hinsichtlich des zu befolgenden Vorgehens einen sicheren Weg weist.

Das Buch Professor HAMPES in zwei Bänden bemüht sich, diesem Ziel zu dienen.

Der erste Band des Werkes erstreckt sich auf 415 Seiten und enthält 307 Bilder und 93 Zahlentafeln. Das Literaturverzeichnis begreift 548 Werke in sich. Der in Rede stehende Band befaßt sich ausführlich mit dem Zweck der Vorspannung und deren Verwendung im Beton- bzw. Stahlbetonbau, sowie mit Fragen der Sicherheit, den Eigenschaften des Betonmaterials von vorgespannten Konstruktionen, den diesem gegenüberstellbaren Anforderungen, mit dem Einfluß des Zeitfaktors, den Eigenschaften der Spanndrähte und deren Rostschutz. Es wird auch die Berechnung und der Spannungsnachweis der gespannten Querschnitte eingehend behandelt, sowie die Berücksichtigung der Folgen des Schwindens und Kriechens, und auch die Riß- und Bruchbedingungen. Die Ausführungen werden durch das Problem der Sicherung der berechnungsmäßigen Spannkraft und durch verschiedene Fragen ihrer Einführung ergänzt.

Der zweite Band des Buches umfaßt 444 Seiten und enthält 476 Bilder bzw. 96 Zahlentafeln. Sein Literaturverzeichnis besteht aus 369 Werken. Dieser Band erklärt eingehend die Berechnung von vorgespannten Trägern mit zwei oder mehr Stützen, sowie die der verschiedenen Rahmenkonstruktionen nach den Methoden der Elastizitäts- bzw. Plastizitätslehre. Nachher folgt die Behandlung von vorgespannten Scheiben, Platten, Rohren, zylindrischen Behältern und Kegelschalen, weiters die Beschreibung der technologischen Probleme die Verfertigung vorgespannter Konstruktionen betreffend. Die Behandlung wird durch eine tafelmäßige Sammlung zahlreicher ausgeführter Beispiele von vorgespanntem Beton bzw. Stahlkonstruktionen und durch ihre kurze aber übersichtliche Beschreibung abgeschlossen.

Charakteristisch für beide Bände sind die zweckmäßige Auswahl des zu behandelnden Stoffes, seine übersichtliche Gliederung, sowie die exakte erschöpfende Behandlung der sich auf theoretischem und praktischem Gebiet ergebenden Probleme. Die Linienführung der Erörterungen, die Bewertung und kritische Erfassung der Probleme sind ausgezeichnet, wodurch das Buch — über Studenten der Universitäten und Hochschulen hinaus — für praktische Ingenieure sowie auch für Fachleute, die sich mit Entwerfen und Ausführung vorgespannter Konstruktionen befassen, von großem Nutzen sein wird. Auch das prächtig ausgeführte reiche Bildmaterial des Buches bedeutet einen großen Wert, da es durch seine demonstrative Kraft das volle Verständnis des Vorgetragenen in hohem Grade erleichtert.

Alles ins Auge fassend kann festgestellt werden, daß das Buch Professor HAMPES einen grundlegenden Gewinn für die Wissenschaft vorgespannter Konstruktionen bedeutet.

*P. Csonka*

*A. M. Haas:*

DESIGN OF THIN CONCRETE SHELLS

John Wiley and Sons, Inc., New York—London—Sidney; Vol. 1 (1962): 130 pages, 108 figures; Vol. 2 (1967): 242 pages, 141 figures, 7 tables

Different kinds of shell structures occupy a place of ever increasing importance in modern architecture and a great number of theoretical and practical experts are busy with their designing concept, structural analysis and actual construction. Consequently, it is only natural that books dealing with shell structures are published in ever increasing numbers all over the world.

Unfortunately, the theory of shell structures is extremely intricate and numerous basic problems are unresolved to this day. Thus, it is not an easy task for an author to attempt to make his book an introduction to the problems in connection with designing and analysis of shell structures, and guide the reader to a stage where he can take an active part in the practical solution of these problems. Professor HAAS, President of the International Association for Shell Structures (IASS) undertook this very difficult task when writing his book and accomplished it with outstanding success.

The *first volume* of the work, after a brief surface-theoretical introduction, makes known the membrane theory of axial symmetrically loaded shells of revolution. From here it goes on to expound the problem of periodically loaded, respectively, discontinuously supported shells of revolution. This is followed by the investigation of the edge disturbances of cylindrical shells and of shells of revolution, further by design and structural considerations, as well as the explanation of different questions connected with construction technics.

The *second volume* of the work returns to the theory of axially loaded shells of revolution already dealt with in the first volume and presents in detail, as an example, the case of cooling, respectively, water towers of one-sheeted hyperboloid shape. Next is the expounding of Pucher's theory of membrane shells, after this the statical investigation of membrane shells of hyperbolic paraboloid shape, or of those consisting of elements of this type. Intense attention is devoted to shells of elliptical paraboloid shape as well as to those with a conoid surface. There follows a comprehensive analysis of simpler cases of the bending theory of shells, the possibility of inextensional deformation and the problems of buckling.

Both volumes are written with eminent pedagogical sense. Starting from simpler cases they always lead to more complicated questions, their argumentation is clear and convincing. It is not only the mathematical aspect of shell structures that the book deals with, but also comprises the points of view of design concept, structural rules and actual construction. The mathematical explanations are simple and easy to follow, kept within moderate limits and extending only so far as to provide the absolutely necessary understanding of the statical behaviour of the treated shells. In order to be understandable the book avoids complicated mathematical operations and only uses such mathematical apparatus as every well-skilled engineer is bound to possess.

Numerical examples, drawn from practice and elaborated with all particulars as well as carefully constructed and extremely instructive figures give a favourable supplementation to the text. It was a fruitful idea to show in the book the views of some outstanding objects of shell architecture, mainly constructed by Dutch architects. The description and insertion of these pictures in the text not only makes this latter more colourful, but also gives inspiration and may promote new ideas.

As a conclusion, it can be stated that Professor HAAS' book, thanks to its well-selected subject and its clear and matter-of-fact argumentation, occupies an outstanding place among technical and textbooks of similar trend and will certainly have a very favourable reception on the part of students, practical engineers and experts alike in every part of the world.

P. Csonka

## I N D E X

- Szmodits, K.*: Examination of Rectangular Panels — Statische Untersuchung der quadratischen Scheiben — Examen de parois portantes rectangulaires — Исследование пластин имеющих форму параллелепипеда ..... 3
- Füzy, J.*: Analysis of Homogeneous Orthotropic Quadrangular Panels — Untersuchung homogener orthotroper wandartiger Träger — Examen de parois portantes homogènes orthotropes — Исследование однородных ортотропных стеновых балок 11
- Rózsa, M.*: Stability Analysis of Parabolic Arches Subjected to a Vertical Load Acting at the Apex — Stabilitätsuntersuchung der im Scheitel mit einer vertikalen Kraft belasteten Parabelbögen mit gleichbleibendem Querschnitt — Analyse de stabilité des arcs paraboliques à section transversale constante, chargés d'une force verticale à leur sommet — Анализ устойчивости параболических дуг неизменного сечения, нагруженных перпендикулярно действующей силой в вершине ..... 21
- Dulácska, E.*: Velaroidal Shell over Rectangular Plan — Segelschale über Rechteckgrundriss — Voile mince vélaroïde sur base rectangulaire — Парусная оболочка четырехугольного плана ..... 35
- Szabó, J.*—*Roller, B.*: Asymptotic and Iteration Methods for the Matrix-Analysis of Structures with Linear or Nonlinear Character — Die mit der Matrizen-Analyse der linearen und nichtlinearen Tragkonstruktionen verbundenen asymptotischen und iterativen Methoden — Méthodes asymptotiques et itératives relatives à l'analyse matricielle des structures linéaires et non-linéaires — Асимптотические и итеративные методы по матричному анализу линейных и нелинейных несущих конструкций ..... 43
- Halász, O.*: Adoption of the Theory of Plasticity to Steel Structures — Anwendung der Plastizitätslehre auf die Stahlkonstruktionen — Application de la théorie de la plasticité aux constructions en barres métalliques — Применение теории пластичности к стальным стержневым конструкциям ..... 57
- Matolcsy, M.*: Theoretical Foundations of the Investigation of the Loads of Vehicles — Theoretische Grundlagen der Untersuchung von Fahrzeugbelastungen — Bases théoriques de l'examen des charges de véhicules — Теоретические основы исследования нагрузок транспортных средств ..... 75
- Szmodits, K.*: A Simplified Method for Solving Smaller Systems of Linear Equations — Vereinfachte Lösung von kleineren linearen Gleichungssystemen — Une méthode simplifiée pour la solution de systèmes mineurs d'équations linéaires — Упрощенное решение небольших систем линейных уравнений ..... 97
- Kézdi, Á.*: Plastizitätslehre von körnigen Materialien — Theory of Plasticity of Granular Substances — Théorie de la plasticité des substances granulaires — Теория пластичности сред зернистой структуры ..... 103
- Dulácska, E.*: Stability of Anisotropic Hyperbolic Paraboloidal Shells — Stabilität der anisotropischen Hyperbolisch-Paraboloidschale — Stabilité du voile mince hyperbolique paraboloidé anisotrope — Устойчивость анизотропной гиперболической параболоидной оболочки ..... 123

<i>Stepkowska-Paszycz, E.</i> : Physico-Chemical Interpretation of the Shearing Process in Montmorillonitic Clays — Physiko-chemische Erklärung des Schubprozesses des Montmorillonit-Tons — Interprétation physico-chimique du processus du cisaillement de l'argile de montmorillonite — Физико-химическое объяснение процессов сдвига монтмориллонитной глины .....	131
<i>Kozák, I.</i> : On Equilibrium Equations of Solid Continua — Über die Gleichgewichtsgleichungen der festen Continua — Équations d'équilibre des continus solides — Об уравнениях равновесия твердых континуумов.....	141
<i>Barta, J.</i> : Sätze über die Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes — Theorems Concerning the Stability of Equilibrium of an Elastic Body — Théorèmes concernant la stabilité de l'équilibre d'un corps élastique — Теоремы стабильности состояния покоя упругих форм .....	165
<i>Palotás, L.</i> : Die Schubsicherung des Stahlbetonträgers auf Grund der Bruchtheorie — Shear Analysis of Reinforced Concrete Structures on the Basis of the Theory of Rupture — Essai de cisaillement de constructions en béton armé sur la base de la théorie de la rupture — Испытание на срез железобетонных конструкций на основе теории разрушения .....	183
<i>Csonka, P.</i> : Torsion von dickwandigen, prismatischen Stäben mit axialer Kreishöhhlung — Torsion of Thick-walled Prismatic Bars with a Circular Axial Hollow — Torsion des barres prismatiques à paroi épaisse, ayant un creux axial circulaire — Кручение толстостенных призматических стержней с аксиальной круговой полостью .....	215
<i>Chakrabarti, S. K.</i> : Equilibrium of a Composite Cone under a Force Acting at the Vertex Perpendicular to the Axis Line — Das Gleichgewicht eines zusammengesetzten Kegels belastet mit einer auf die Achsenlinie senkrechten, im Scheitelpunkt wirkenden Kraft — L'équilibre d'un cône composé, chargé d'une force perpendiculaire à l'axe, appliquée au sommet du cône — Равновесие сложного конуса, нагруженного в вершине силой, действующей перпендикулярно к осевой линии..	235
<i>Kollár, L.—Gárdonyi, Z.</i> : Kippen von Schalenbogen unter antimetrischer Belastung — Lateral Stability of Shell-Arches under the Action of Antimetric Loads — Stabilité latérale des voiles, en arc sous l'action de charges antimétriques — Боковая устойчивость оболочковых арок при антисимметрической нагрузке.....	243
BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ	
<i>Rudnai, Gy.</i> : Leichtbeton-Baukonstruktionen ( <i>Goschy, B.</i> ) .....	265
<i>Knapp, O.</i> : Glasfasern ( <i>Déri, M.</i> ) .....	265
<i>Rosman, R.</i> : Zahlentafeln für die Schnittkräfte von Windscheiben mit Öffnungsreihen ( <i>Csonka, P.</i> ) .....	266
<i>Hampe, E.</i> : Vorgespannte Konstruktionen ( <i>Csonka, P.</i> ) .....	267
<i>Haas, A. M.</i> : Design of Thin Concrete Shells ( <i>Csonka, P.</i> ) .....	267

*Printed in Hungary*

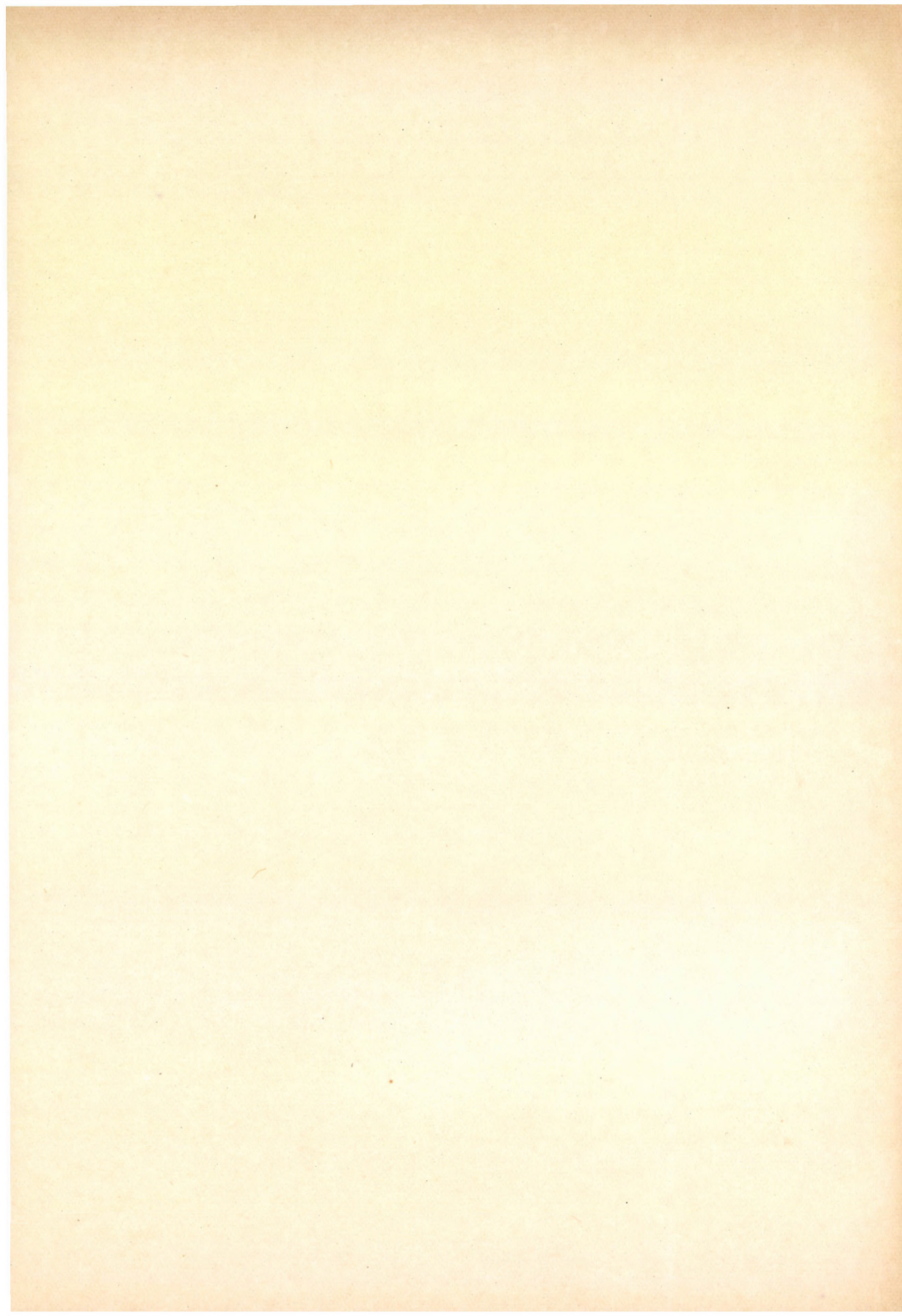
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1967. IV. 25. — Terjedelem: 23,75 (A/5) ív, 166 ábra, 6 melléklet

---

67.63794 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György



*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 243—264

KOLLÁR, L.—GÁRDONYI, Z.: *Lateral Stability of Shell-Arches under the Action of Antimetric Loads*

The analysis of lateral buckling of thin-walled, elastic curved bars (shell-arches) caused by antimetric load, is presented by using the energy method. The solution is dealt with in a detailed manner for two kinds of support, and the simultaneous consideration of antimetric and symmetric loads is exposed, too. Information is given about the obtainable exactness. A numerical example illustrates the practical applicability of the method.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 11—20

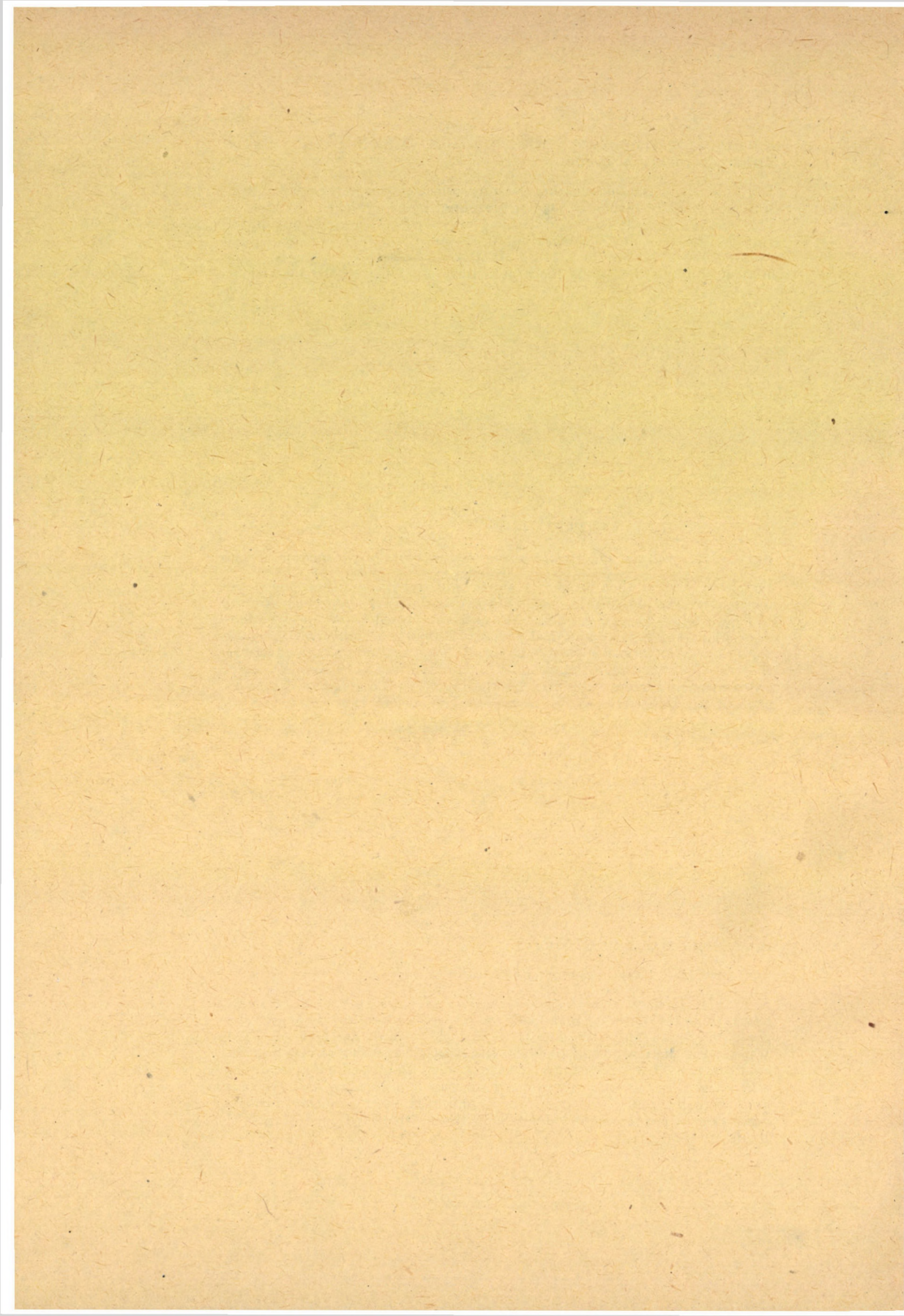
FÜZY, J.: *Analysis of Homogeneous Orthotropic Quadrangular Panels*

The presented method describes stress and strain conditions using two parameter functions. In the course of the calculation, half of the unknowns can be produced in an explicit form and eliminated from the equations. Thereby, assuming an identically dense network, number of unknowns would be the same as for the Airy function. This method has the advantage that the boundary conditions can be formulated in a very simple manner. Calculation is further simplified by the fact that inner forces can be expressed by derivatives of the first order, instead of those of the second order.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 3—10

SZMODITS, K.: *Examination of Rectangular Panels*

Author deals here with the determination of the stress state of oblong panels charged with normal load on its opposite sides. The procedure presented is an improved alternative of the known method of Fadle. While with the method of Fadle on the side, charged with varying load, equilibrated shear stresses are remaining, with the procedure here presented, on the loaded side only normal stresses approaching the given load are acting. Therefore, the stress state computed by this method furnishes more precise approximate values than those calculated according to the Fadle method.





*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 21—34

RÓZSA, M.: *Stability Analysis of Parabolic Arches Subjected to a Vertical Load Acting at the Apex*

An approximative method is presented for the stability analysis of two-hinged and fixed-end parabolic arches with constant cross section, subjected to a vertical load applied at the apex. The parabolic arch is replaced by a chain of hinged bars. The numerical values obtained for the critical force of the substituting chain consisting of five bars, are shown in tables.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 35—42

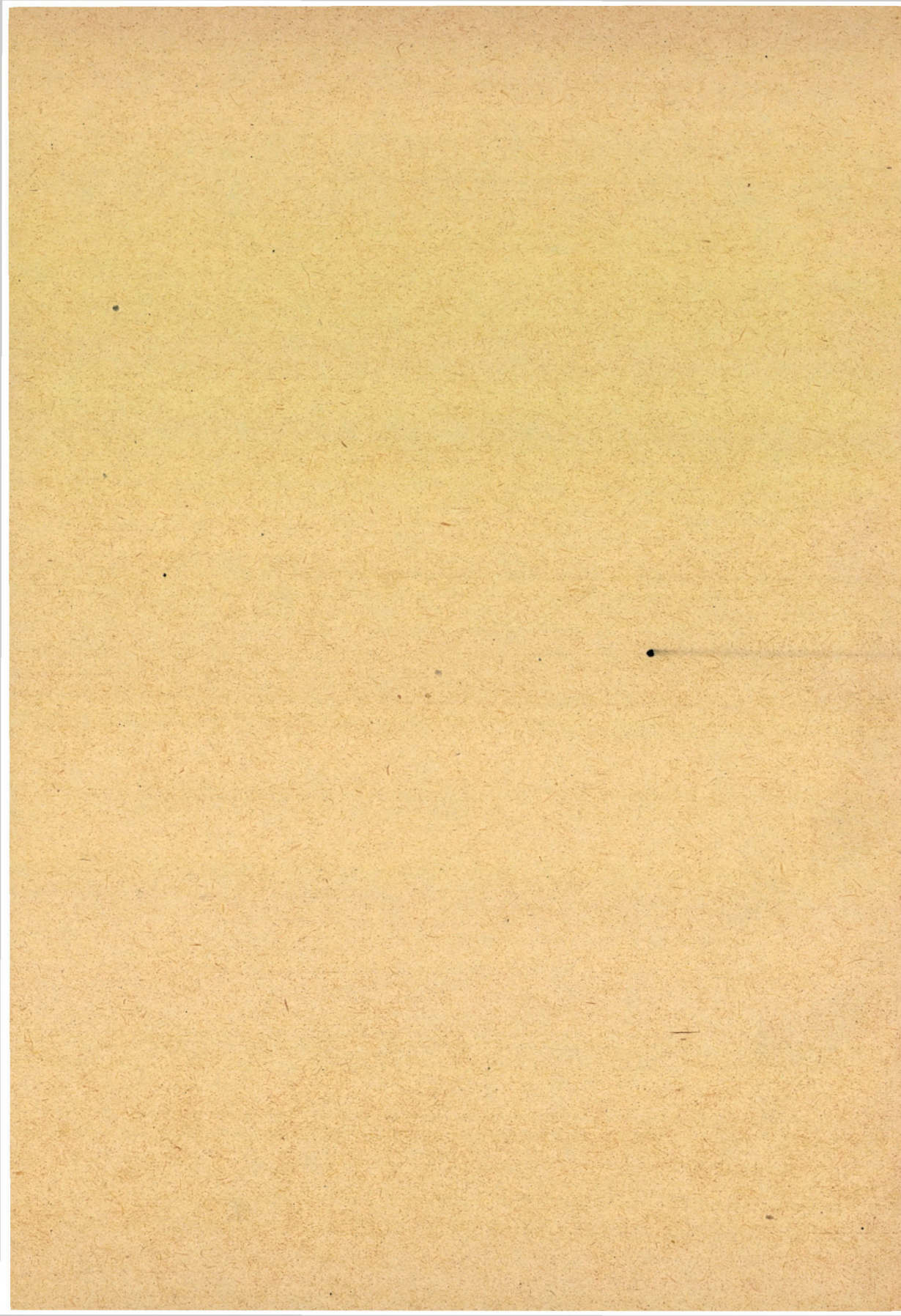
DULÁCSKA, E.: *Velaroidal Shell over Rectangular Plan*

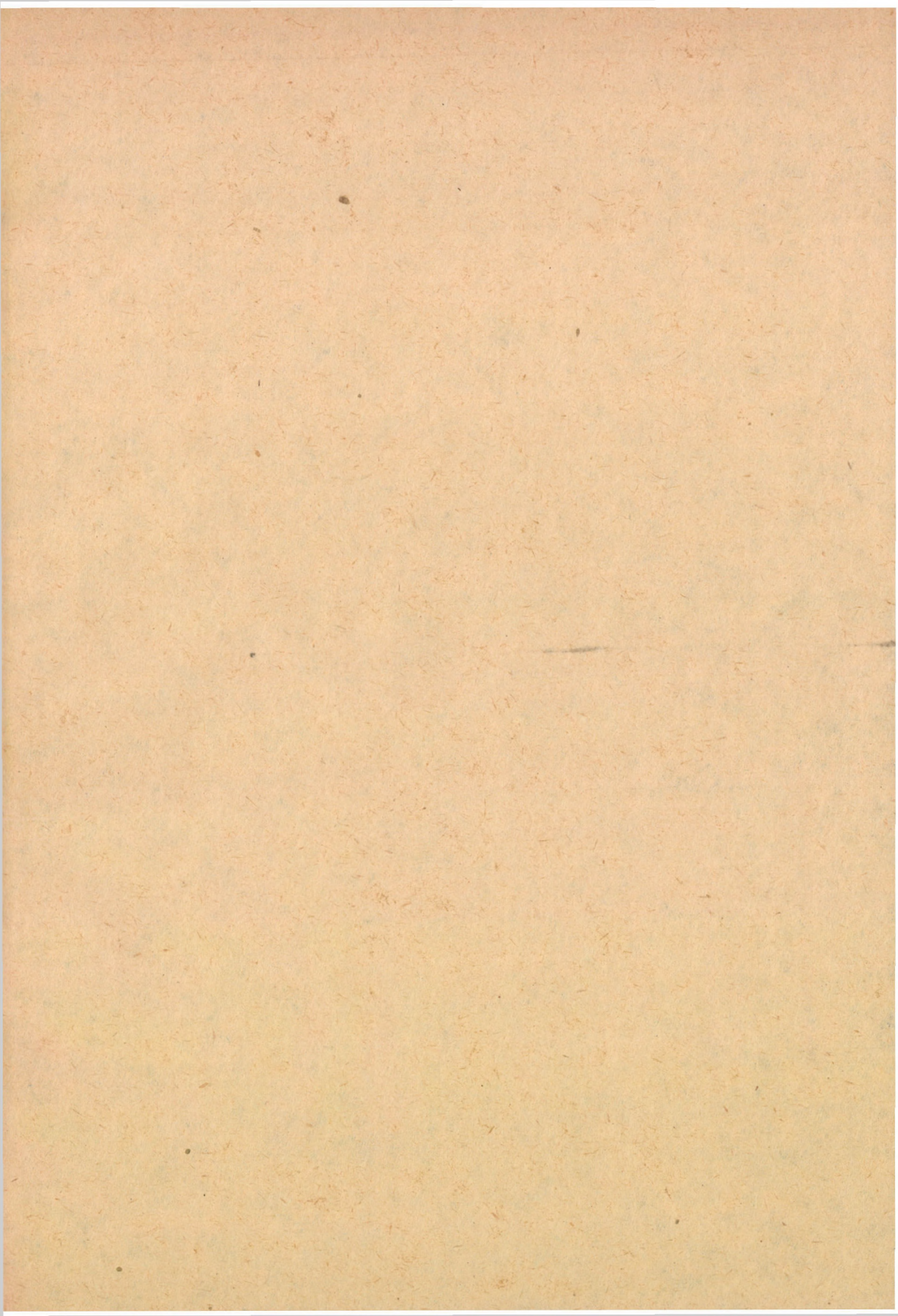
A design method is given for a parabolic shell similar in form to a sail stretched over a plane edge. Stress function of the shell is approached by a polynome of several members. Internal forces are determined for uniformly distributed snow load and approximate dead load.

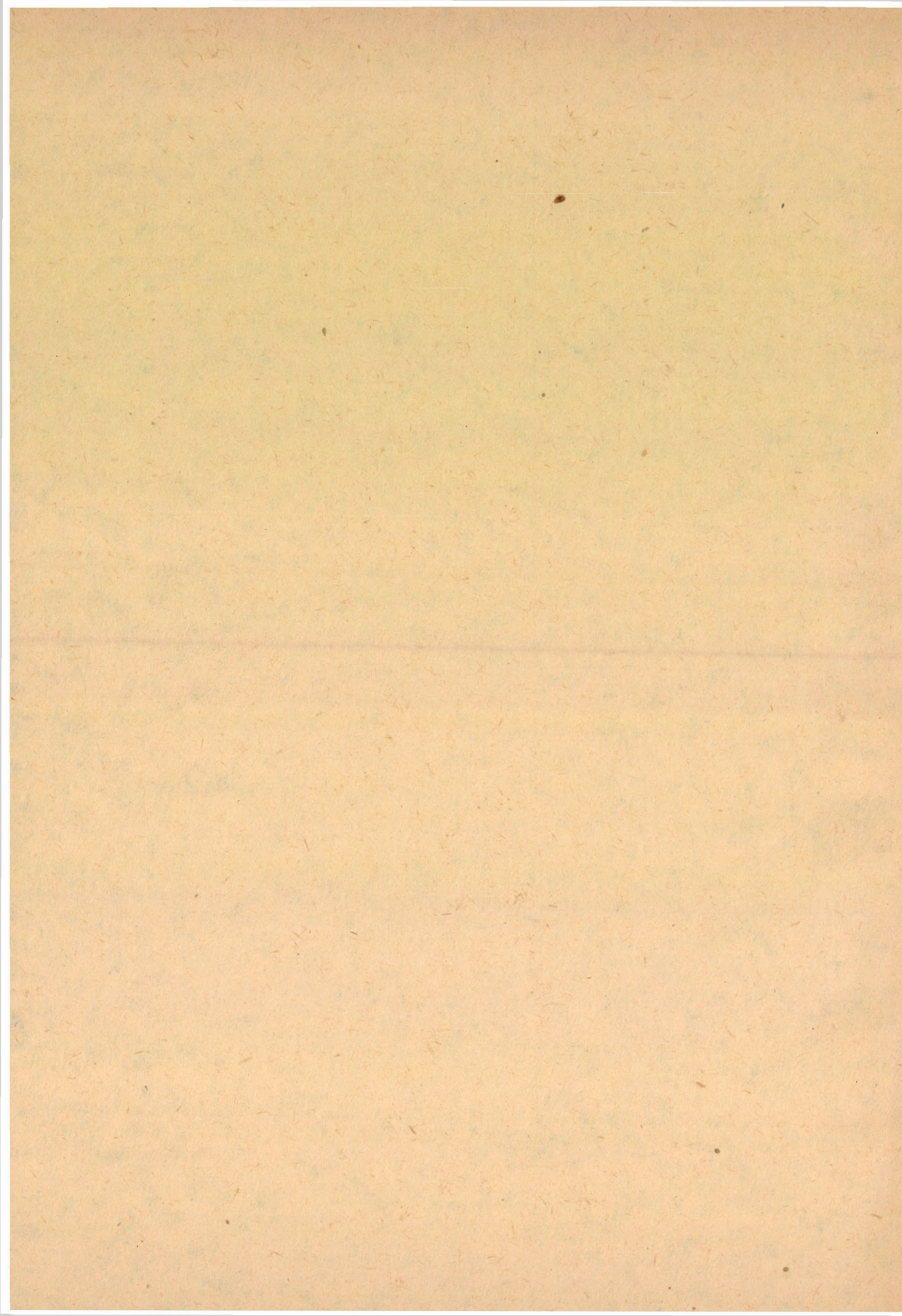
*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 43—56

SZABÓ, J.—ROLLER, B.: *Asymptotic and Iteration Methods for the Matrix-Analysis of Structures with Linear or Nonlinear Character*

The paper deals with the analysis of some structural problems, which are rather involved from the point of view of direct computation. After outlining the fundamental ideas of the special methods applied, the following structures are treated. 1. a shaft provided with wheels having different moments of rotation inertia; 2. a tunnel ring embedded in an elastic solid; 3. a hanging roof containing cables stiffened by orthogonally arranged beams. The task of the analysis is the computation of the critical torsional frequencies in the first case, the investigation of the stress resultants in the second, and the evaluation of the stresses and displacements in the third. The first problem is homogeneous, the others are inhomogeneous. The first two structures are linear, while the third one possesses a geometrically nonlinear character. The linear problems are solved asymptotically, while the nonlinear one by a purely iterative method.







*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 103—122

KÉZDI, A.: *Theory of Plasticity of Granular Substances*

The theory of plasticity has been applied for a long time extensively to the investigation of granular materials. The civil engineer examines the stability of earthworks, the value of earth pressure, the bearing capacity of soils, etc., with the methods of the theory of plasticity; a number of procedures of this theory originated in the course of investigation of granular materials. For the application in soil mechanics the first problem was also the fixation of the rupture-flow condition. Though recently several rupture conditions have been suggested with a more precise approach of its real behaviour, it is, however, the condition of Coulomb-Mohr which is mostly applied even in our days. The paper shows a new procedure for the representation of the rupture condition in case of a three-dimensional stress state; with the aid of this the effect of the stress-vector curve upon the rupture condition can be suggestively investigated.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 123—130

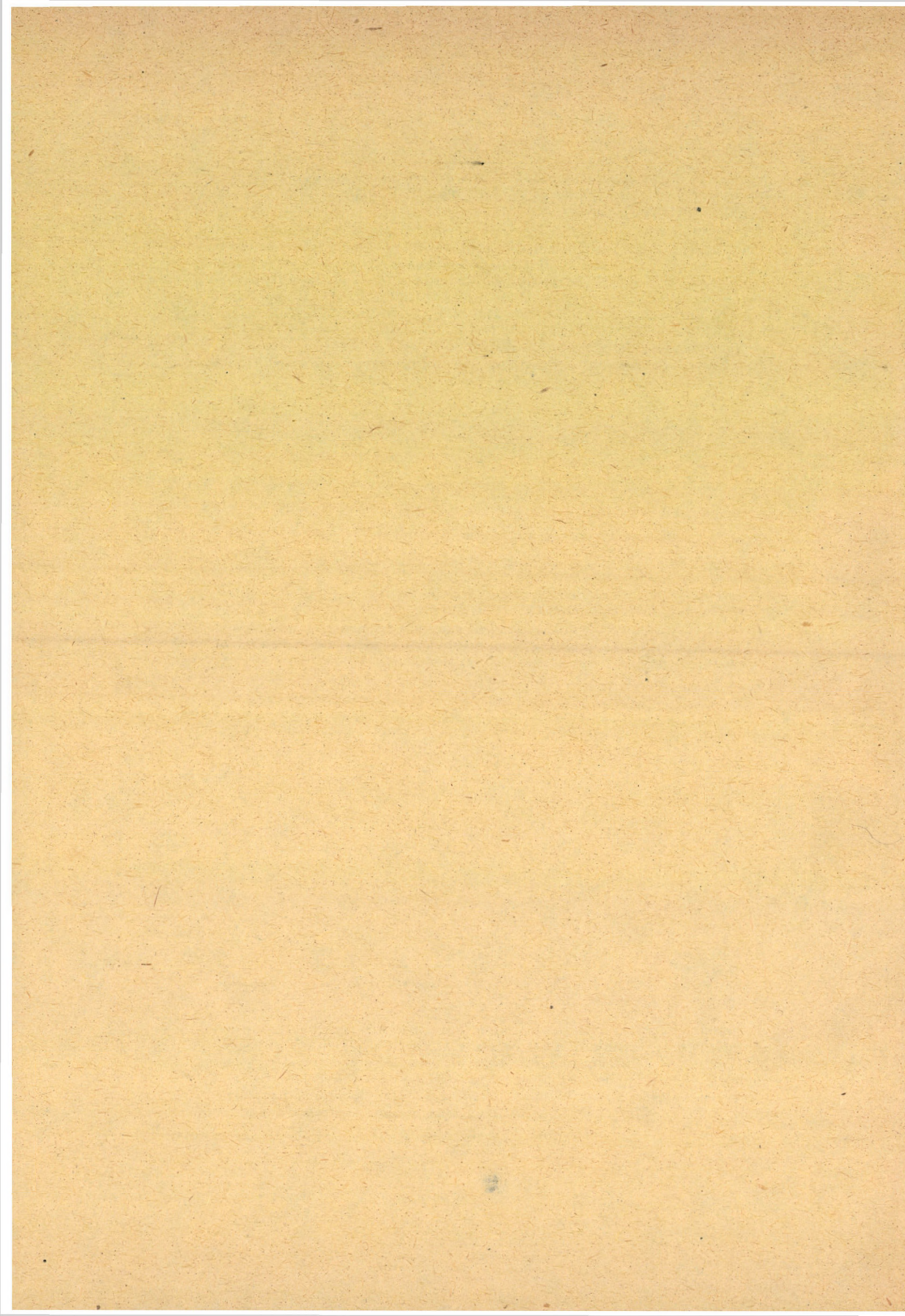
DULÁCSKA, E.: *Stability of Anisotropic Hyperbolic Paraboloidal Shells*

Author deals with the determination of the critical load of the anisotropic hyperbolic paraboloidal shells with the aid of the theory of first order. He determines the critical load of the shell constructed of torsioned corrugated board, and points out that this load is identical with that of an isotropic shell of the same plate thickness.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 131—140

STEPKOWSKA-PASZYC, E.: *Physico-chemical Interpretation of the Shearing Process in Montmorillonitic Clays*

Discussing the shearing process it was found that on making certain assumptions it is possible to describe shear strength of clay as is measured in triaxial test as a sum of forces that may be calculated from physico-chemical theories. The coincidence was striking between calculated and measured values in certain range of water content around the plastic limit of Żrecze Małe bentonite with various exchangeable cations.



*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 141—164

KOZÁK, I.: *On Equilibrium Equations of Solid Continua*

The analysis of three-dimensional continua (bodies) of special forms will become mathematically simplified in the case they will be reduced to two-dimensional continua (for instance, in case of shells), or to one-dimensional continua (for instance, in case of bars). The reduction of the system of external and internal forces of the three-dimensional, into the system of external and internal forces of two-dimensional and one-dimensional continua is presented. The system of co-ordinates used is entirely optional. The analysis of the mechanical equilibrium is effectuated, too, and as a result of this analysis, the equilibrium of continua of one, two and three dimensions can be expressed by equilibrium equations having mathematically identical forms.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 165—182

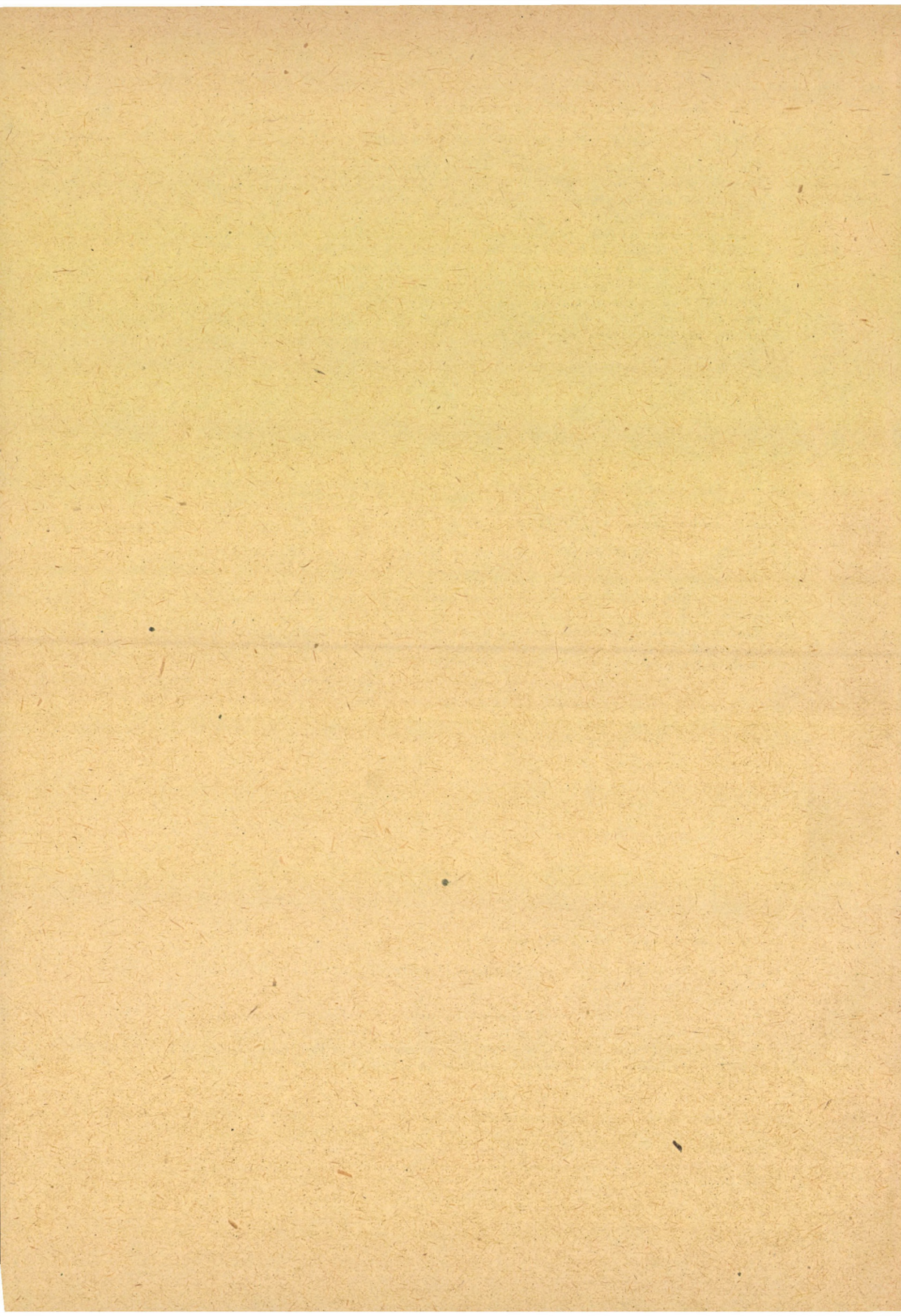
BARTA, J.: *Theorems Concerning the Stability of Equilibrium of an Elastic Body*

The proof of the theorems is based on the properties of buckling determinant while several new notions (load bound to a point, load bound to space, load bound to body, conjugate load, affine load) are introduced. Elaborated examples show that from the solution of a stability problem, by means of the theorems, the solution of further stability problems could follow.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 183—214

PALOTÁS, L.: *Shear Analysis of Reinforced Concrete Structures on the Basis of the Theory of Rupture*

Author deals with shear reinforcement by utilizing the published results of foreign tests and the results of the experiments carried out in Hungary recently, and established a new computation method on the basis of the theory of rupture. The procedure proposed is a completion of the classic method seemingly justified both by experiments and from the economic viewpoints. Accordingly, as to the shear reinforcement of the reinforced concrete beams, it can be proposed to apply the classic method for the present, but with the reservation that the effects of the stirrups and bent bars should be taken as identical and the compressed concrete, i.e. the zones of concrete free of cracks should be taken into account in dimensioning for shear stresses.





*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 215—234

CSONKA, P.: *Torsion of Thick-walled Prismatic Bars with a Circular Axial Hollow*

Author deals with the problem of torsion of thick-walled prismatic bars made of elastic material having a circular axial hollow. He presents an approximate method which is appropriate for establishing the stress function, and analyses the cases where one of the stress lines cuts the internal border line of the cross section.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967) 235—242

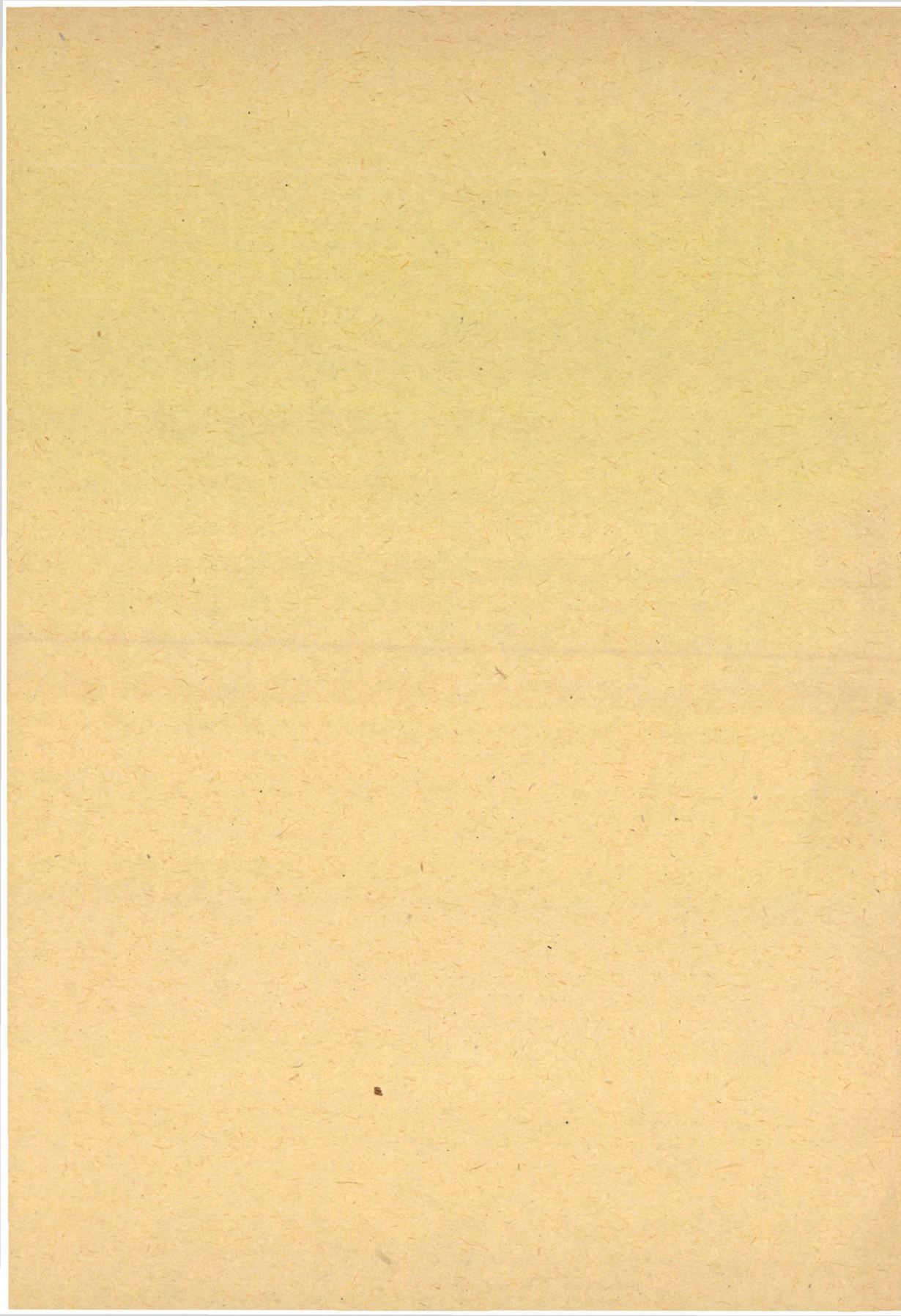
CHAKRABARTI, S. K.: *Equilibrium of a Composite Cone under a Force Acting at the Vertex Perpendicular to the Axis Line*

This paper determines stresses and displacements within a composite cone loaded by a force acting at the common vertex perpendicular to the axis line.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967)

SITKEI, Gy.: *Some Problems of Computing the Heat Transfer and Heat Load in Antechamber Diesel-Engines*

Heat transfer is always computed on a basis of uniform heat conduction in a combustion space. The intensive fuel injection causes in antechamber-engines marked assymetry of heat transfer and heat load alike. In present days, a corresponding consideration of this unsymmetric distributon of heat is possible only on basis of experiments. In this connection the author shows a computing method by making use of the results obtained from experiments carried out on Diesel-engines type "CSEPEL". Also a calculating method of heat transfer caused by flame radiation is given.



The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Hungary*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 165 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Hongrie*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Венгрия*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable  
at the following addresses:

## ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve  
Tirana

## AUSTRALIA

A. Keesing  
Box 4886, GPO  
Sydney

## AUSTRIA

Globus Buchvertrieb  
Salzgries 16  
Wien I

## BELGIUM

Office International de Librairie  
30, Avenue Marnix  
Bruxelles 5  
Du Monde Entier  
5, Place St. Jean  
Bruxelles

## BULGARIA

Raznoiznos  
1, Tzar Assen  
Sofia

## CANADA

Pannonia Books  
2, Spadina Road  
Toronto 4, Ont.

## CHINA

Waiwen Shudian  
Peking  
P.O.B. 88

## CZECHOSLOVAKIA

Artia  
Ve Smečkách 30  
Praha 2  
Poštova Novinova Služba  
Dovoz Tisku  
Vinohradská 46  
Praha 2  
Madarská Kultura  
Václavské nám. 2  
Praha I  
Poštova Novinova Služba  
Dovoz Tlacc  
Leningradska 14  
Bratislava

## DENMARK

Ejnar Munksgaard  
Nørregade 6  
Copenhagen

## FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa  
Keskuskatu 2  
Helsinki

## FRANCE

Office International de Documentation  
et Librairie  
48, rue Gay Lussac  
Paris 5

## GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import  
Leninstraße 16  
Leipzig 701  
Zeitungsvertriebsamt  
Clara Zetkin Straße 62  
Berlin N. W.

## GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen  
Erich Bieber  
Postfach 46  
7 Stuttgart S.

## GREAT BRITAIN

Collet's Holdings Ltd.  
Dennington Estate  
London Rd.  
Wellingborough, Northants.  
Robert Maxwell and Co. Ltd.  
Waynflete Bldg. The Plain  
Oxford

## HOLLAND

Swetz and Zeitlinger  
Keizersgracht 471—487  
Amsterdam C  
Martinus Nijhof  
Lange Voorhout 9  
The Hague

## INDIA

Current Technical Literature  
Co. Private Ltd.  
India House OPP  
GPO Post Box 1374  
Bombay I

## ITALY

Santo Vansia  
Via M. Macchi 71  
Milano  
Libreria Commissionaria Sansoni  
Via La Marmora 45  
Firenze

## JAPAN

Nauka Ltd.  
92, Ikebukuro O-Higashi 1-chome  
Toshima-ku  
Tokyo  
Maruzen and Co. Ltd.  
P. O. Box 605  
Tokyo-Central  
Far Eastern Booksellers  
Kanda P. O. Box 72  
Tokyo

## KOREA

Chulpanmul  
Phenjan

## NORWAY

Johan Grundt Tanum  
Karl Johansgatan 43  
Oslo

## POLAND

RUCH  
ul. Wronia 23  
Warszawa

## ROUMANIA

Cartimex  
Str. Aristide Briand 14—18  
București

## SOVIET UNION

Mezhdunarodnaia Kniga  
Moscow G—200

## SWEDEN

Almqvist and Wiksell  
Gamla Brogatan 26  
Stockholm

## USA

Stechert Hafner Inc.  
31, East 10th Street  
New York, N. Y. 10003  
Walter J. Johnson  
111, Fifth Avenue  
New York, N. Y. 10003

## VIETNAM

Xunhasaba  
19, Tran Quoc Toan  
Hanoi

## YUGOSLAVIA

Forum  
Vojvode Mišića broj 1  
Novi Sad  
Jugoslovenska Knjiga  
Terazije 27  
Beograd

# ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 59

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1967

ACTA TECHN. HUNG.

# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 120 forint, külföldre 165 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

*Acta Technica*  
Nádor u. 7.  
Budapest V.  
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 165 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

## ПЕРСПЕКТИВЫ КИБЕРНЕТИКИ

А. Я. ЛЕРНЕР

ДОКТОР ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК  
ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, МОСКВА

[Поступило 26. сентября 1967 г.]

Кибернетика в области управления производством, использования природных ресурсов, сельского хозяйства, медицины и социологии подняла такие новые вопросы, которые при помощи других средств до сих пор решить не удалось. Автор, исходя из этих задач, на философской основе рассматривает общественное значение автоматизации, уделяя при этом особое внимание ликвидации противоречий между умственным и физическим трудом. После этого детально анализируются те фактические или фиктивные опасности, которые падают на человечество вследствие широкого применения кибернетических машин, и в качестве окончательного заключения устанавливает, что эти опасности можно избежать, если прогрессивное человечество доверит себя активным, свободным и независимым стремлениям мыслящего человека и кибернетические машины человечество удет считать в качестве средства в борьбе с природой.

### 1. Введение

За весьма короткий период своего существования — всего лишь два десятилетия — кибернетика прошла большой путь. Она оказала существенное влияние на мировоззрение ученых и инженеров, врачей и администраторов, военных и государственных деятелей. Из экстравагантной точки зрения, вызывавшей у одних энтузиазм, а у других ироническое отношение, кибернетика превратилась в серьезное научное направление со своим, только ей одной присущим взглядом на мир, своим предметом и методами исследования, своими законами и принципами. Являясь теоретической дисциплиной, она, тем не менее, уже успела принести и практические результаты, значение которых трудно переоценить.

Каковы же перспективы этой науки? Чем обогатит она наши знания и нашу жизнь? В чем состоят ее задачи в ближайшем и далеком будущем? Не представляют ли кибернетические машины опасности для человечества, как его потенциальные соперники? Эти и многие другие вопросы, связанные с перспективами кибернетики, волнуют сейчас многих людей во всем мире. Разумеется, никто сейчас не возьмет на себя смелость дать вполне определенные ответы на все эти вопросы, но некоторые мнения о путях дальнейшего развития этой науки могут быть высказаны.

На протяжении почти всей истории человечества технический, культурный и социальный прогресс представлял собой стихийные процессы,

которые хотя и подчинялись определенным закономерностям, вытекающим из законов развития общества, но не направлялись в определенное русло, не управлялись сознательно и целеустремленно. Сейчас положение существенно меняется. Мы вступили в эпоху, когда общество может и должно формулировать также цели развития техники, науки, искусства, определять наиболее выгодные пути достижения этих целей и сознательно направлять свои усилия на их осуществление.

Многие проблемы развития, возникающие в различных сферах жизни общества, требуют для своего решения использования методов и средств кибернетики.

Современное общество для поддержания своего существования и для дальнейшего развития нуждается в решении сложнейших задач управления. Для совершенствования технологии производств нужно решать замысловатые задачи автоматизации производственных процессов. Все усложняющиеся транспортные системы нуждаются в новых способах управления потоками грузов и пассажиров. Удовлетворение возрастающих потребностей населения в товарах и услугах вызывает необходимость в создании систем оперативного управления торговлей, предприятиями бытового обслуживания, лечебными и спортивными организациями и т. п.

Еще более трудные задачи возникают в области управления экономикой, управления разработкой и реализацией больших проектов, управления крупными научными исследованиями. Есть все основания считать, что масштабы задач управления в дальнейшем будут становиться все более крупными а их актуальность будет неуклонно возрастать. По мере усложнения задач управления роль традиционных методов будет уменьшаться и на первый план будут повидимому выдвигаться кибернетические методы их решения.

Для этих целей должны быть развиты новые идеи, на основе которых окажется возможным совершенствовать управление в ряде областей, которых до сих пор еще не касались ученые и инженеры, и создавать новые средства, при помощи которых эти идеи окажется возможным реализовать на практике.

## 2. Нерешенные задачи

В кибернетике, как и во всякой науке, по мере ее развития возникают все новые задачи, стимулируемые как запросами практики, так и внутренними потребностями самой науки. Хотя излагаемые ниже некоторые прикладные задачи кибернетики, представляются наиболее актуальными для ближайшего будущего, может, однако, оказаться, как это часто случается, что наиболее важное значение приобретут научные результаты, получаемые в неожиданных направлениях.



В области *управления производством* пока достигнуты существенные успехи лишь в автоматизации технологических процессов. Что же касается таких важных этапов производства, как проектирование изделий, сооружений и систем, подготовка и организация производства, а также организация доставки товаров потребителям, то и сами эти процессы и управление ими все еще находятся в основном во власти интуитивных приемов. В использовании кибернетических, научно обоснованных методов управления этими процессами делаются лишь первые шаги. Однако уже сейчас ясно, что такие задачи, как поиск оптимальных решений, в процессе разработки проекта, могут быть формализованы и выполнены вычислительной машиной эффективнее, чем вручную. Принципиальная возможность формализации существует и в сфере организационных задач, возникающих на всех этапах производства и на всех рангах иерархии управления производством, начиная от производственной бригады и кончая крупным производственным объединением.

Можно представить себе в будущем систему управления отраслью производства, построенную на основе информации, получаемой от рациональной и высоко автоматизированной системы сбора и передачи информации о состоянии всех звеньев управляемой системы и о внешней конъюнктуре, состоящую из управляющих центров иерархической структуры, оснащенных системой взаимосвязанных машин для переработки информации и выдачи рекомендаций руководителям, ответственным за определенные подразделения и за отрасль в целом.

Несмотря на то, что возможность и целесообразность систем такого типа достаточно ясна и даже доказана экспериментально на отдельных примерах, не следует недоучитывать огромных трудностей научного и технического характера, которые предстоит преодолеть для того, чтобы достигнуть эффективного и повсеместного их распространения. Так еще нет удобных критериев для отбора необходимой и достаточной информации о состоянии систем и среды; недостаточно разработаны методы оптимизации режима работы столь сложных комплексов; разработка научных методов формирования критериев оптимизации еще только начинается, недостаточно исследована проблема надежности работы сложных комплексов; много неясного в вопросе о языках, на которых должен осуществляться обмен информацией между отдельными машинами, входящими в систему, а также между машинами и людьми и т. п.

Создание автоматической системы оптимального управления сложными комплексами практически неосуществимо на основе существующих методов также и потому, что число нужных связей для системы типа промышленного предприятия измеряется астрономическими цифрами. Один лишь перечень этих связей по объему превосходил бы Большую советскую энциклопедию. Ясно, что ни запроектировать, ни тем более осуществить

такую систему невозможно. Однако, эту задачу нельзя считать принципиально неразрешимой, ибо в природе такие и еще гораздо более сложные управляющие органы существуют. Мозг человека и даже животного выполняет намного более сложные функции, чем это требуется для управления любым производственным предприятием. Транспортной или энергетической системой и т. д. Но, процессы самоорганизации и обучения, обусловившие высокое совершенство живых управляющих систем, могут быть реализованы и уже реализуются в искусственных системах. Это обстоятельство позволяет надеяться, что дальнейшее развитие работ по проникновению в сущность процессов самоорганизации и успехи в создании обучаемых машин, откроют пути «выращивания из эмбрионов» искусственных управляющих систем невиданных мощностей, способных после соответствующего обучения и тренировки решать грандиозные задачи управления системами большого масштаба.

Важные и трудные задачи возникают в области *управления ресурсами*. Всякая экономическая система требует маневрирования ресурсами, используемыми в процессе ее функционирования: сырьем, энергией, топливом, материалами, оборудованием, финансовыми и людскими ресурсами. Поскольку эффективность системы существенно зависит от того, каким образом распределяются ресурсы, которыми располагает система, возникает задача: для каждого заданного состояния системы и среды найти и реализовать такое распределение ограниченных ресурсов, при котором критерий эффективности функционирования системы приобретал бы наивыгоднейшее значение. Трудности решения этой задачи связаны с высокой размерностью пространства состояний системы, наличием большого числа локальных экстремумов, а также тем, что ограничения, определяемые количеством ресурсов, которыми располагает система, изменяются во времени.

Огромное значение для *сельского хозяйства* и для *медицины* имеет дальнейшее продвижение в раскрытии механизмов действия процессов управления, протекающих в живых организмах. Овладев тайнами этих процессов, мы приобрели бы новые возможности управления развитием растений и животных, управления наследственностью, обеспечивающего быстрое выведение продуктивных сортов растений и пород животных. Еще большее значение будут иметь, видимо, эти исследования для таких проблем, как лечение наследственных болезней, рака и других заболеваний, связанных с нарушением управляющих механизмов живой клетки и, в особенности, для работ, связанных с борьбой со старением и с решением проблемы prolongation жизни.

В медицинской диагностике кибернетические методы должны приобрести доминирующее значение. Постановка диагноза требует, во многих случаях, учета десятков факторов, взвесить каждый из которых с нужной точностью человек принципиально не способен. В то же время методы,

используемые при обучении машин распознаванию образов, могут оказать врачам огромную помощь и поставить диагностику болезней на прочный математический фундамент.

Лечение многих заболеваний может рассматриваться как управление процессами, протекающими в организме больного, а лечебные мероприятия — как управляющие воздействия, прилагаемые к некоторой сложной динамической системе. При этом многие важные факты, установленные в теории управления динамическими системами, могут быть использованы при выработке тактики и стратегии лечения. Разумеется, при этом нужно будет учесть чрезвычайную сложность, недостаточную изученность и специфические особенности системы, которую представляет собой живой организм, однако многие фундаментальные закономерности движения управляемых динамических систем могут оказаться весьма полезными для выработки такого нового подхода к теории и практике медицины.

Очень важную, но совсем еще не разработанную область кибернетики, составляет область *социологических* задач. Выявление законов управления поведением людей, составляющих человеческие коллективы, должно явиться одной из целей науки, претендующей на роль общей теории управления. При этом может оказаться, что арсенал управляющих воздействий, включающих воспитание, поощрение и наказание, может быть обогащен, а их использование — более эффективным и гуманным. При помощи точного анализа можно будет выявить некоторые лишние (а следовательно — вредные) ограничения поведения людей, накладываемые законами и обычаями, упразднение которых сделает жизнь людей более свободной и счастливой.

### 3. Социальное значение автоматизации

Сколь ни велико значение кибернетики для отдельных отраслей человеческой деятельности, наиболее глубокое влияние на развитие общества кибернетика оказывает через автоматизацию производства. Бурно расширяясь количественно и переходя на все более высокий качественный уровень, автоматизация приведет к глубочайшим, беспрецедентным в истории социальным сдвигам, аналогичным в какой-то степени первой промышленной революции, связанной с переходом к машинному производству. Однако эта вторая промышленная революция несравненно грандиознее по своим последствиям. Связанные с этим проблемы столь сложны и многообразны, что мы вынуждены ограничиться лишь краткими замечаниями по поводу одной, пожалуй, важнейшей из них — именно, разрешения противоречия между *творческим* и *механическим* трудом и ликвидации разделения труда вообще.

С момента выделения человека из животного мира труд был условием существования человеческого общества.

Человек побуждался к труду, прежде всего, необходимостью удовлетворения своих материальных потребностей. Но развиваются производительные силы, сменяются производственные отношения и, в соответствии с ними, изменяется сам человек. На определенной ступени социального и индивидуального развития труд становится потребностью здорового человека. Но отнюдь не всякий труд может быть потребностью достаточно развитого человека. Здесь существенно, является ли труд — творческим или механическим.

Творческий и механический труд резко разнятся между собой, прежде всего, по своему процессу. Процесс творческого труда отличается неповторимым своеобразием на каждом своем этапе. Эта неповторимость, эта индивидуализация не является чем-то внешним, случайным, не обязательным, — напротив, именно в них весь смысл творческого труда, именно эти качества обуславливают результат творческого труда и создают содержание этого результата. Они являются внешним выражением творчества, т. е. деятельности, создающей *новые по существу*, оригинальные ценности. Истинно творческий труд немислим без непрерывного развития самой личности, без ясного осознания всего процесса и конечных целей труда. Творческим трудом могут быть (но отнюдь не всегда являются) занятия наукой, искусством, воспитательной и общественной деятельностью.

В противоположность этому, процесс механического труда отличается монотонностью и однообразием. Результат механического труда достигается посредством повторения известной последовательности операций. Имеющиеся элементы своеобразия, носят, как правило, внешний, случайный, в лучшем случае — вспомогательный характер, они не определяют результат труда и не являются необходимым средством для его достижения. Механический труд ввиду своего нужного однообразия является для человека тем более обременительным, чем более развит этот человек. Уничтожение механического труда — вот задача, стоящая перед современным человечеством.

Очевидно — механический труд — неизбежное следствие непосредственного участия человека в производительном труде, в массовом воспроизводстве материальных благ, требующем именно однообразной, точно определенной последовательности операций. Изобретение первого каменного топора было актом творчества, но все последующие такие топоры (мы не говорим о дальнейших усовершенствованиях) были созданы механическим трудом. Со вступлением общества в классовый период правящий класс — рабовладельческий — сосредоточил в своих руках монополию на творческий труд, предоставив рабам заниматься механическим — в то время тяжелым физическим — трудом. Напротив, творческим трудом считался чисто умственный (за исключением спорта), так что греческие философы избегали ставить эксперименты, «чтобы не делать чего-либо руками». Пока человеческий

труд был еще так мало производителен, что давал только ничтожный излишек над необходимыми жизненными средствами, до тех пор рост производительных сил, расширение сношений, развитие государства и права, создание искусств и наук — все это было возможно лишь при помощи усиленного разделения труда, имевшего своей основой крупное разделение труда между массой, занятой простым физическим трудом, и немногими привилегированными, которые руководят работами, занимаются торговлей, государственными делами, а позднее наукой и искусством (Ф. Энгельс: «Анти-Дюринг»). Таким образом, противоположность творческого и механического труда, как следствие классового разделения общества, выступает вначале в форме противоположности между умственным и физическим трудом. Однако в нашу эпоху эта форма в значительной степени потеряла — и чем дальше тем все больше теряет — свое значение благодаря 2-м факторам. Во-первых, развитие производительных сил все более превращает физический труд в умственный, заменяя затрату мускульной энергии нервно-психическим процессом. Рабочий у конвейера, надевающий 45 шайб в минуту, затрачивает не столько мускульную, сколько «нервную» энергию, точно так же, как, например, телефонистка или машинистка. Во-вторых, современное разделение труда породило многочисленный слой людей (гл. образом так называемых служащих), занятых умственным, но механическим трудом. Труд счетовода — умственный, но механический, труд балерины — физический, но творческий.

Грядущее развитие производительных сил позволит радикально решить проблему уничтожения механического труда путем освобождения человека от необходимости *непосредственного* участия в производительном труде. Эту величайшую революцию призвана свершить автоматизация производства на основе достижений кибернетики. От управления отдельным станком человек переходит к наблюдению за автоматической линией, затем к наблюдению с диспетчерского пульта за работой целого завода-автомата. Наступит время, когда участие человека в производственном труде будет ограничено непродолжительной диспетчерской службой, например, наблюдением в течение одного месяца в году за работой громадного комплексного комбината, обслуживающего большую область земного шара. Но, наконец, и это станет ненужным: самонастраивающиеся, самопрограммируемые кибернетические устройства сделают излишним всякое *непосредственное* вмешательство человека в процесс производства и с успехом заменят его функции контроля и управления.

Тем самым будет открыт путь для решения еще более общей проблемы — ликвидации современного разделения труда, которое порабощает и уродует людей, делит человечество на «различным образом искалеченные» «экономические разновидности» (Ф. Энгельс: «Анти-Дюринг»). Задача будущего коммунистического строя — по словам Маркса — «частичного рабочего,

простого носителя известной частичной общественной функции, заменить всесторонне развитым индивидом, для которого различные общественные функции представляют сменяющие друг друга способы жизнедеятельности» (К. Маркс: «Капитал»). Уже в настоящее время наблюдается ряд ведущих к этому тенденций. Управление процессами производства все более унифицируется на основе автоматизации. В противовес дифференциации научных областей происходит и обратный процесс — их взаимопроникновение и интеграция в единую научную картину мира, а главное — выработка единых научных методов, в частности, опирающихся на круг идей кибернетики. Естественные науки теряют свою «автономию» и перестраиваются — пусть медленно, но верно — на основе точных, физико-математических наук. В ряде областей точные науки приступают, наконец, к осаде последних оставшихся «крепостей» описательных наук. В искусстве также отмечаются тенденции к синтезу художественного и научного. Наконец, в дело вступает новый фактор — познание человеком своей биологической природы, которое позволит сломать рамки его биологической ограниченности и необычайно расширит возможности человеческой личности. Человечество, раскрепостившее свой труд, избавленное от библейского проклятья «работать, чтобы есть», с небывалой мощью устремится по пути творческого созидания.

А работы благородной, творческой перед человечеством — непочатый край. Сколько еще неиспользованных материальных и энергетических ресурсов, сколько неразгаданных тайн живой и неживой природы, сколько нерешенных задач совершенствования социальных структур? Все это нужно изучить, освоить, покорить, приспособить к различным географическим условиям и к изменяющейся обстановке. Разве без огромного творческого труда можно будет решить такие проблемы как обеспечение пищей, водой, одеждой и жилищами быстро возрастающее население земного шара, коренным образом изменить климат на огромных территориях, не пригодных сейчас для жизни людей, освоить богатства океанов, научиться управлять погодой, проникнуть в глубины Земли, изучить и использовать территории планет Солнечной системы?

Ясно, что высвобождение человека от «механического» труда принесет ему не разлагающее личность «райское блаженство безделья», быть может еще более страшное, чем изнурительный труд, а огромный стимул к творческой активности, к вдохновенному и радостному напряженному творческому труду.

#### 4. Опасности реальные и мнимые

Оценивая отдаленные перспективы развития кибернетики ее основатель — *Норберт Винер* — высказывал серьезные опасения по поводу возможности захвата власти группой диктаторов при помощи кибернетических

машин, которые могут оказаться способными осуществлять управление отдельной страной или всей нашей планетой. Страх перед зловещими последствиями «машинизации» управления звучит в пророчествах доминиканского монарха *Дюбарля*, писавшего в связи с появлением «Кибернетики» *Винера*: «Сегодня мы подвергаемся риску создать огромное «мировое государство», где осмотрительная и сознательная примитивная несправедливость может быть единственно возможным условием для статистического счастья масс; создания мира, который для каждого ясного ума хуже, чем ад» (газета *Монд*, 28. декабря 1948 г.).

Было бы неверным просто отмахнуться от этих высказываний. Действительная ситуация заслуживает тщательного анализа без поверхностного оптимизма. Можно понять озабоченность передовых ученых всего мира, задумывавшихся над социальными последствиями бурного развития науки и техники. В наше время, как никогда, велика опасность того, что могущественные силы природы — этот «джин из бутылки», выпущенный человеком на волю — могут в результате действия реакционных социальных сил обратиться против него.

В истории XX. столетия величайшие примеры человеческой солидарности, гуманизма, борьбы за свободу и социальную справедливость, за мир и демократию соседствуют с бесчеловечными диктатурами; антибиотики и борьба со старостью — с душегубками и концлагерями; триумфы разума — с «охотой за ведьмами», преследованием всякой свободной мысли; проникновение в тайны вселенной и борьба за повышение жизненного уровня — с разорительной гонкой вооружений.

Что же несет людям совершенствование кибернетических машин? На этот вопрос вряд ли можно дать сегодня однозначный ответ. Многое, в конечном счете, будет зависеть от самих людей: их социальной зрелости, дальновидности, меры ответственности, интеллекта и воли. «Мы стоим перед лицом новой социальной силы, несущей неслыханные возможности и для добра и для зла (*В. Винер*: «Кибернетика»).

Сравнительно просто ответить на вопрос об опасности вытеснения или порабощения человечества «расой» машин, превосходящих человека по интеллекту. Прежде всего, возможности людей, отнюдь не останутся неизменными. В частности, использование «усилителей мыслительных способностей» — как бы продолжения человеческого мозга — подымет мышление человека на качественно новую ступень. Главное же в том, что те, кто фантазирует о неизбежной якобы, жестокой борьбе между людьми и «мыслящими» машинами, переносят на отношения между разумными существами, гораздо более высокоразвитыми, чем современные люди, опыт отношений, почерпнутый ими из классового периода истории человечества. Это — те отношения борьбы за существование, конкуренции, господства и угнетения, против которых уже в настоящее время выступают все прогрессивно мыслящие

люди. Объявляя эти отношения извечными, присущими человеческой природе, авторы подобных фантазий лишь обнаруживают свою собственную ограниченность. Нет оснований сомневаться в том, что будущие обитатели Земли — как люди, так их создания — мыслящие машины установят мудрые и благородные способы отношений, достойные столь разумных существ. Впрочем, эта проблема, если и встанет когда-либо, то отнюдь не в ближайшем будущем.

Гораздо более реальной является угроза захвата власти в классовом обществе олигархией, использующей кибернетические машины в качестве орудия своего господства. «Машинная опасность для общества исходит не от самой машины, а от ее применения человеком» — говорит *Винер*. «Машина-правитель» отца *Дюбарля* страшна не потому, что она может достичь автоматического управления человечеством... Реальная опасность, которую она может вызвать... заключается в том, что подобные машины, хотя и безвредны сами по себе, могут быть использованы человеком или группой людей для усиления своего господства над остальной человеческой расой, или в том, что политические лидеры могут попытаться управлять своим народом посредством не самих машин, а посредством политической техники, столь узкой и индифферентной к человеческим возможностям, как если бы эта техника действительно вырабатывалась механически» (*Н. Винер: «Кибернетика и общество»*). Последние слова *Винера* дают ключ к пониманию проблемы. Дело не столько в машинах, сколько в «машиноподобной» политике правящей бюрократии, в «растущей военной и политической механизации мира» в виде «огромного сверхчеловеческого аппарата, работающего на кибернетических принципах», где «человеческие атомы скреплены в организацию, в которой они используются не в соответствии со своим назначением, как разумные человеческие существа, а как зубцы, рычаги и стержни» (*Н. Винер: «Кибернетика и общество»*). Подобные тенденции к крайней бюрократизации общества были свойственны и власти, основанной на владении обычными средствами производства и оружием, и, как мы знаем из истории, в ряде случаев привели к застою и гибели целые цивилизации. Верно, однако, что использование кибернетических машин для управления обществом резко усугубляет эту опасность. Собирая и перерабатывая громадное количество информации, управляющие машины дают возможность эксплуататорскому государству установить абсолютный контроль над личностью и находить оптимальную стратегию для принуждения людей к повиновению. Это означало бы создание общества, поистине худшего, чем общество рабов или даже общества муравьев. Вместо общества мыслящих, обладающих свободой принятия решений со знанием дела возник бы огромный механизм, состоящий из безотказных, механически исполнительных «живых роботов». При этом, поскольку правящая человеко-машинная верхушка могла бы прямо и косвенно формировать психику людей, осуществлялось бы и «статистическое



счастье масс». Люди просто не желали бы ничего иного. Они удовлетворяли бы свои (достаточно примитивные) потребности, весь секрет был бы в том, что не они бы их *определяли*.

Надо четко понимать, что указанная опасность порождена не самими кибернетическими машинами, а *социальными* условиями, делающими возможным такое применение машин. Не случайно, например, в американской прессе появилось сообщение об успешных экспериментах по управлению поведением обезьян с помощью подсаживаемого в череп радиоуправляемого прибора, размером с горошину. Уже раздаются предложения о применении таких устройств для управления поведением психических больных, наркоманов и даже космонавтов. Легко понять, какую опасность таит в себе использование этих приборов по отношению к людям.

Необходимое поступательное развитие науки и техники ставит серьезные проблемы перед всеми людьми, в особенности — перед самими учеными. «Мы можем передать наши знания только в окружающий нас мир, а это — мир Бельзена и Хиросимы. Мы даже не имеем возможности задержать эти новые технические достижения. Они носятся в воздухе, и самое большое, чего мог бы достичь кто-либо из нас своим отказом от исследований по кибернетике — это отдать развитие всего дела в руки самых безответственных и самых корыстных из наших инженеров» (*Н. Винер: «Кибернетика»*).

Вряд ли вообще возможно избежать «опасных поворотов» в развитии науки и техники.

Если бы существовали дальновидные скептики на заре развития человечества, они, пожалуй, сказали бы изобретателю каменного топора, что он создал опасную игрушку, которая приведет в будущем к изобретению управляемых снарядов с атомными боеголовками. Но ведь ясно, что возможность злоупотребления произведениями человеческого гения отнюдь не означает целесообразности отказа от них, а лишь свидетельствуют о необходимости борьбы за использование этих достижений для блага, а не во вред человечеству. Ход истории показывает, что несмотря на опасность огня, пороха электричества, атомной энергии и многих других «острых» изобретений, прогрессивным силам общества удалось установить контроль над этими стихиями. Новой опасности — опасности захвата власти при помощи управляющих машин можно также избежать, если мы будем отдавать себе отчет в том, что за эпохой власти классов, владеющих средствами производства, может наступить эпоха власти класса, бюрократической олигархии, владеющего управляющими машинами, и примем своевременные меры против этой новой грозной, но преодолимой опасности.

Правильный вывод из всего сказанного выше состоит в том, что в наше время никто — а научно-техническая интеллигенция в особенности — не может устраниваться от осознания и научного анализа процесса развития общества, от активного и целеустремленного влияния на этот процесс, не мо-

жет переложить на кого-либо ответственность за социальные последствия своей деятельности и за весь современный ход общественного развития.

Совершенно неверным, реакционным, был бы вывод о том, что общество не должно использовать вычислительные машины для выработки и реализации программы управления своим развитием. Подлинная свобода заключается в познании и использовании объективных закономерностей, что невозможно без машин ввиду громадного количества информации, подлежащей сложной и быстрой переработке с целью выделения важнейших тенденций нахождения оптимальных решений и т. д. Управление *при помощи* машин наверняка окажется гораздо более совершенным, чем управление *без машин*, ибо никогда еще незнание или неумение не давало каких-либо преимуществ в каком бы то ни было деле. Нужно только помнить, что решения, подсказанные нам машиной, могут таить в себе неожиданные и роковые для нас последствия, подобно волшебному талисману из рассказа *Джэкобса* «Обезьянья лапа», выполняющему желания своего хозяина, но пагубным для него образом. Поэтому ничто не избавит нас от ответственности за выбор наших решений. Например, пусть от машины потребовалось бы «сконструировать» общество с максимальной безопасностью для каждого из членов. Весьма вероятно, что она нашла бы выход, изображенный *Станиславом Лемом* в романе «Возвращение с звезд». Посредством особой операции «бетризации» людям прививают отвращение к конфликтам, убийствам и т. д. Интеллект и художественные способности при этом не затрагиваются. Но оказывается, люди одновременно теряют такие трудно формализуемые качества, как стремление к подвигу, к борьбе с природой, дерзание, возможность свободного выбора между благородным и недостойным, глубокую эмоциональную сторону любви, умение идти на риск в критических ситуациях. Удалось ли бы «объяснить» машине необходимость сохранения этой, столь неуловимой и столь драгоценной для нас «романтики»?

По-видимому, нет. А это означает, что мы не можем всецело и слепо доверять решениям, принятым на основании какого-либо критерия, отличного от нас самих, от наших идеалов, наших представлений о желаемой организации общества, о человеческих отношениях и самом человеке, кем бы эти решения ни принимались — электронной или бюрократической машиной. Залог прогресса человеческого общества — в активных, свободных и независимых усилиях всех мыслящих людей, всего передового человечества.

Грозное оружие кибернетики должно, в конечном итоге, быть направлено на борьбу с Природой в истинно счастливом обществе наших прекрасных, свободных и благородных потомков.

**The Perspectives of Cybernetics** (*A. Ja. Lerner*). Cybernetics have raised such new questions in the fields of production control, economic management of natural power resources, agriculture, medical science and sociology, which hitherto were impossible to solve by other means. Starting from these problems, the author deals on philosophical bases with the social importance of automation, specially considering the elimination of the contrast between mental and physical work. After this, he examines in detail those real or imaginary dangers to which the wide-spread use of the cybernetic machines might expose mankind. The author comes to the final conclusion that these dangers can be avoided if progressive humanity trusts itself on the active, free, independent endeavours of thinking man and if the cybernetic machines are exclusively considered as a mean of struggle against nature.

**Die Perspektive der Kibernetik** (*A. Ja. Lerner*). Die Kibernetik hat auf den Gebieten der Produktionsleitung, der Bewirtschaftung der natürlichen Energiequellen, der Landwirtschaft, der medizinischen Wissenschaften und der Soziologie solche neue Fragen aufgeworfen, welche bisher mit anderen Methoden nicht gelöst werden konnten. Ausgehend von diesen Aufgaben diskutiert der Verfasser auf philosophischer Grundlage die gesellschaftliche Bedeutung der Automatisierung, unter besonderer Berücksichtigung der Beseitigung des Gegensatzes zwischen geistiger und körperlicher Arbeit. Hiernach untersucht er eingehend diejenigen wirklichen, bzw. vorgestellten Gefahren, welche die ausgedehnte Verwendung der kibernetischen Maschinen der Menschheit aufbürden könnte. Der Verfasser kommt zu der Schlußfolgerung, daß diese Gefahren vermieden werden können, wenn die fortschrittliche Menschheit sich den aktiven, freien, unabhängigen Bestrebungen des denkenden Menschen anvertraut und die kibernetischen Maschinen ausschließlich als Mittel zum Kampf mit der Natur betrachtet.

**Les perspectives de la cibernetique** (*A. Ja. Lerner*). La cibernetique a soulevé certains nouveaux problèmes dans les domaines de la gestion de la production, de l'économie des ressources naturelles, de l'agriculture, de la médecine et de la sociologie, qui n'ont pas pu être résolus par d'autres moyens. L'auteur partant de ces problèmes, émet des considérations philosophiques sur l'importance sociale de l'automatisation, en ce qui concerne surtout la suppression de l'antagonisme existant entre le travail intellectuel et le travail physique. Il examine ensuite dans le détail les menaces réelles et imaginaires que l'usage généralisé de machines cibernetiques ferait planer sur l'humanité et est amené à la conclusion que ces dangers peuvent être évités si l'humanité progressiste se fie aux efforts actifs, libres et indépendants de l'homme pensant et ne voit dans les machines cibernetiques qu'un moyen de la lutte contre la nature.



## SOME PROBLEMS OF VACUUM-TIGHT SOLDERING OF METAL TO CERAMIC

I. HANGOS

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received September 23, 1966]

The effect of layer thickness and soldering time upon the properties of the metal-to-ceramic bond made by the so-called premetallizing technology has been studied. It was stated that for the well-controllable technology of metallizing the thickness of the Mo-Mn subcoat layer must be between 30 and 60 microns but in this range no defined layer thickness can be found which can give optimum properties of the bond. The necessary thickness of the coat promoting wetting must be, depending on soldering time and technology of application, at least  $0,5 \div 5$  microns. In case of longer soldering time it is expedient to use a thickness of  $5 \div 10$  microns because of the dissolution of the nickel layer in the solder.

### I. Introduction

The use of the metal-ceramic bonds in communication equipments is very widespread today, and can be considered as an ever more widely introduced technological step [1-10].

One of the known ways of forming metal-ceramic bonds [11, 12] is to coat the ceramic surface with a high melting point, to sinter it to the ceramic surface, then coat it with a metal (e.g. zinc, copper etc.) layer promoting the wetting of the solder which will also be sintered to it. The metal layer so formed at the ceramic surface is soldered to the metal partner or to another metallized ceramic body by the technology usual in soldering metals.

In this paper the effect of the thickness of both metal layers as well as the conditions of soldering upon some properties of the metal-ceramic bond, under otherwise identical conditions (composition of the metallizing layer, grain size, ceramic material, temperature and atmosphere of heating, solder etc.) will be dealt with more detailed.

### II. Preparation and test of samples

To the experiments ceramic bodies containing 85 per cent of  $Al_2O_3$  were used. The surface of the ceramic to be metallized was lapped to smooth by means of a diamond wheel, then polished with 600 mesh fine grinding wheel. The metal layers of required thickness were formed by sedimentation method [13]. The thickness of the metallizing layer could be varied in the range of

2 ÷ 70 microns by varying the metal-powder mixture falling to 1 cm<sup>2</sup> of the surface as shown in Fig. 1. The dried layers were heated at  $1450 \pm 10$  °C for 30 minutes in hydrogen atmosphere saturated with water at 60 °C. The rate of heating and cooling of the specimens was in accordance with the norm *ASTM 19—61 T*.

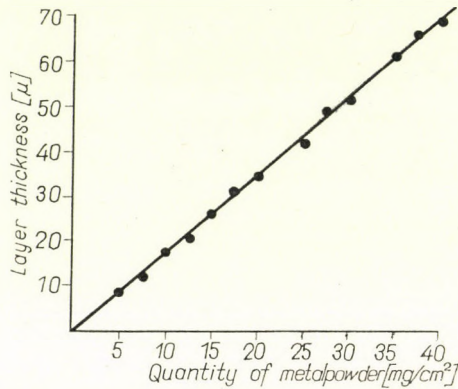


Fig. 1. Layer thickness vs quantity of metal-powder falling to 1 cm<sup>2</sup> of the surface

After heating of the Mo—Mn metal layer the subcoat was coated with a nickel layer by electroplating and was sintered to the ground metal in purified H<sub>2</sub> at  $900 \pm 20$  °C for 10 minutes. Most of the test pieces were then soldered in a way to be described later on for carrying out the tensile strength and vacuum-tightness tests.

The thickness of the layer was tested before heating by means of a measuring microscope. The samples measured with microscope could not be used for further experiments as the carrying out of the measurement required the damaging of the layer. However, the processes used for the preparation of the layer (sedimentation, resp. electroplating) in principle ensured the uniformity of layer thickness of the samples treated simultaneously in an identical way with that of the samples already measured. The layer thicknesses were investigated after sintering of the metal layer and soldering, while the structure of the transition layer was studied by means of a metal microscope "Zeiss Neophot" after lapping and polishing of the samples.

For the tensile strength and vacuum-tightness tests a modified variant of the method according to the norm *ASTM 19—61 T* was used. For this purpose two ceramic specimens were soldered as shown in Fig. 2.

The soldering was carried out in a suitable gauge under a pressure of 16 kg/cm<sup>2</sup>. The temperature of the soldering was controlled by means of a thermoelement placed in the middle of the ceramic body [17]. On the microsections the thickness of the solder-layer fluctuated very reproducibly between 5 and

10 microns. The soldering was carried out in nitrogen gas containing 30 per cent of hydrogen. The holding at this temperature was in average half a minute.

The tests of vacuum-tightness were performed on the specimens thus soldered. They were first submitted to a pressure of 4 att under alcohol with hydrogen, then the suitable pieces were tested after pumping with ion getter pump Vacion of the firm Varian (*Mod. Nr. 921*), using the radiofrequency

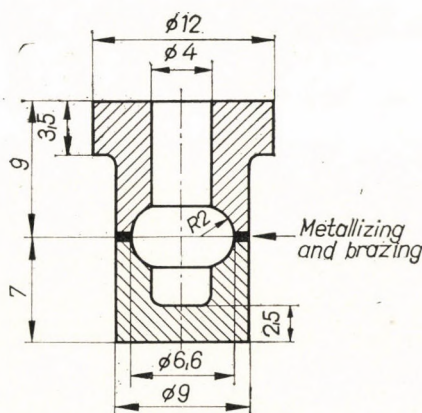


Fig. 2. Form of the specimen for the tests of vacuum-tightness and tensile strength

mass spectrometer leak detector operating on Bennet's principle, developed at the *Telecommunication Research Institute, Budapest*. The carrying out of the measurements was ensured by the suitably sealed extension joined to the flange of the ceramic. The sensitivity of the device was of an order of  $10^{-9}$  torr l/sec.

To test the joint strength the specimens were placed by their flange in a gimbal-suspended nest and a push bar placed in their inner hole was loaded until the specimen broke. The measurement of the microhardness was carried out by means of a microindentation adapter applicable to the metal microscope, in the usual way.

### III. Experimental results

#### 1. Formation of the Mo—Mn layer

In the experiments first the thickness of the Mo—Mn layer and the manner of its application were varied, while the nickel layer was applied by electroplating for 15 minutes. The soldering time was half a minute.

First, Mo—Mn layers settled with an initial thickness of 25 microns and the layer thickness as a function of temperature and time of heating were investigated. In addition, painted layer of ca. 25 microns were also studied by sort-

ing. The thickness of these layers was determined by a non-destructive method described earlier [14]. The results are given in Fig. 3.

From the figure it can be seen that the thickness of the metallizing layer can be determined only for the starting conditions. The actual layer thickness

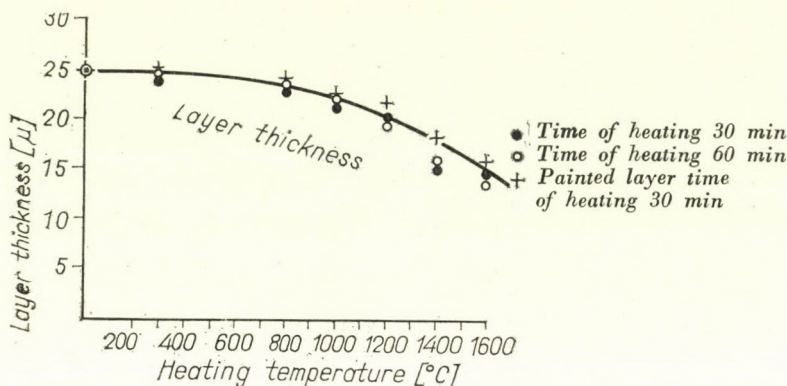


Fig. 3. Layer thickness as a function of the conditions of heating

decreases with the heating temperature. Therefore, in the following on layer thickness the initial thickness of the layer (without sintering) will always be understood if it is not particularly signed otherwise. Varying the method of the layer painting, it was found that the thickness is practically independent of the baking conditions within the error of the thickness measurement.

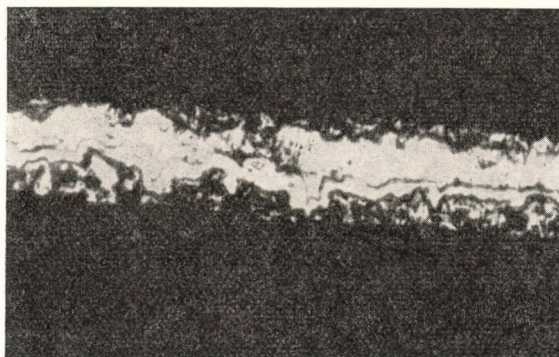


Fig. 4. Micrograph of metal-ceramic transition layer

For the metal-ceramic bond, as in the case of the metal-to-glass bond, a so-called transition layer must be formed [15]. This layer is placed between the two boundary layers in a more or less well defined thickness and its properties can be studied on microsections made from the metal-ceramic soldering. Such a micrograph is shown in Fig. 4.

The above considerations on layer thickness were also completed by measurements made on sections similar to those shown in Fig. 4. (By simple



microscope measurement without microsection, the transition layer cannot be detected.) For this purpose microsections were made on 15 samples not settled simultaneously with initial layer thickness of  $20 \text{ mg/cm}^2$  and the thickness of the metallizing layer was measured. The obtained average value of layer thickness was  $27 \pm 3$  microns. Within this value, the measured thickness of the transition layer amounted to  $5 \pm 2$  microns. If, according to Fig. 3, ca. 60 per cent of the initial layer thickness of 35 microns corresponding to the  $20 \text{ mg/cm}^2$  from the data of Fig. 1 are taken after sintering (40 per cent shrinkage) and to the value obtained the thickness of the transition layer is added, the agreement of the results is satisfactory.

The effect of the metallizing layer thickness on the tensile strength is shown in Fig. 5.

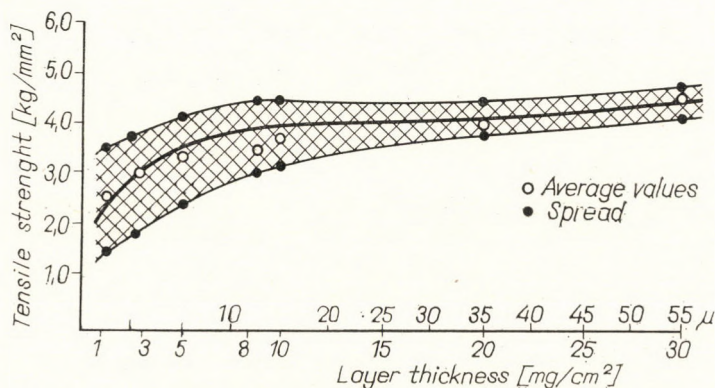


Fig. 5. The influence of the metallizing layer thickness on the tensile strength of the metal-to-ceramic bond

On the horizontal axis along with the layer thickness expressed in  $\text{mg/cm}^2$  for information, the initial layer thicknesses in microns are also shown. The points of measurement on the traced curve designate the average of ten measurements.

In Fig. 5 the wide scatter of the results of measurement is unexpected. Also the fact is rather strange that the scatter converges with the increase of the initial layer thickness to a certain limit ( $\pm 10$  per cent) and after having attained this remains constant. Our method for the measurement of tensile strength is, as has already been described [17], in principle better than  $\pm 2$  per cent. Thus the scatter is due rather to the uncertainty of some steps of the technology necessary for the formation of the metal-to-ceramic bond than to the method of measurement. The experiment runs started by controlling on 100 samples with smearing technology which resulted also in a scatter value of  $\pm 20$  per cent and also confirms this. Besides, this is also indicated by data of the literature [6, 18].

According to Fig. 5 the reproducibility is  $\pm 35 \div 40$  per cent for layer thickness of  $1 \div 5$  mg/cm<sup>2</sup> ( $< 5$  microns) while it is  $\pm 20 \div 30$  per cent for  $5 \div 20$  mg/cm<sup>2</sup> (of 5 to 30 microns). Above a layer thickness of 20 mg/cm<sup>2</sup> ( $> 35$  microns) the reproducibility is  $\pm 10-20$  per cent and remains constant. This also means that the majority of the greater scatter of measurement data occurring at smaller layer thicknesses is due to the phenomena connected with the thickness of the metallizing layer, while the rest ( $10 \div 20$  per cent) is caused by factors independent of the layer thickness.

Parallel to the experiments described above the vacuum-tightness tests showed at the values  $1 \div 10$  mg/cm<sup>2</sup> ( $< 10$  microns) a considerable per cent of waste, while above the value of 20 mg/cm<sup>2</sup> ( $> 35$  microns) they showed less than  $1 \div 2$  per cent of leakage. It may be noted that the sparse literary data on optimum layer thickness for this value indicate an initial thickness of  $20 \div 40$  microns [18, 11, 12].

## 2. *The effect of thickness and method of application of the coating promoting wetting*

The coating applied in four ways: by painting of a paste containing nickel oxides and subsequent reduction heating [20], electroplating [11, 18], vacuum evaporation and precipitation from contact bath. To the experiments settled Mo—Mn layers with initial thickness of 20 mg/cm<sup>2</sup> were used. Their original thickness was 35 microns and the actual thickness after sintering amounted to  $27 \pm 3$  microns. According to our results the contact separation does not ensure a satisfactory wetting, however, neither do the three other processes show substantial difference in wetting.

If it is needed to vary the thickness of the Ni layer, it is most expedient to change the time of electroplating leaving the other conditions (temperature, current density, voltage etc.) unchanged. An example thereof is shown in Fig. 6.

For the purpose of a more thorough study of the phenomena taking place about 50 microsections were made and submitted to measurements. On the basis of the measurements the following statements can be made.

The "thickness" of the nickel layer can unambiguously be determined exclusively immediately after electroplating. Then the average layer thickness is determined by the duration of electroplating although sometimes the half or the double of the average value can occur owing to the local difference of conductivity or to that of current density due to the arrangement of the electrodes.

The thermal cycle of heating, resp. soldering process following electroplating realizes the diffusion of the nickel layer into the ground layer. Thus, for the layer made by electroplating of a duration of 1 and 3 minutes, on the microsections no nickel "layer" can be detected after sintering, despite the fact that

the solder wets the Mo—Mn layer. In case of thicker layers the boundary surface between the Mo—Mn and Ni layers is confused but the joint thickness of both layers can still be well defined together with the transition layer. Even in the layers in which no effective nickel layer can further be measured the nickel diffused into the ground layer can be followed up and detected at some places of the metal layer by microhardness measurement.

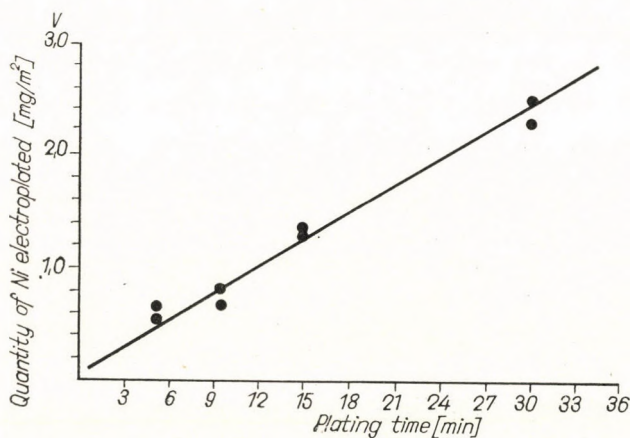


Fig. 6. The variation of nickel quantity separated by electroplating with the duration of plating

After soldering the nickel layer can be solved in the solder without a trace or can partly be recrystallized on cooling. Thus, the original thickness of the Ni layer changes. Consequently, the boundary layer between the “nickel layer” and ground layer is much sharper after soldering.

Some measured data are shown in Table I.

Table I

Thickness data of nickel layer measured on microsections (average values)

Time of electroplating, minute	Thickness after sintering, micron	Thickness after soldering, micron
1	No measurable	0 ÷ 5
3	5	10 ÷ 15
5	10 ÷ 15	10 ÷ 17
15	15 ÷ 20	17 ÷ 23
30	15 ÷ 25	25 ÷ 30

According to literary data the optimum thickness of the nickel layer is between 5 and 10 microns [11, 12, 19]. However, according to our results of

measurement the quantity of the nickel layer applied to the ground metal influences the properties of the metal-to-ceramic bond only within certain limits as is shown in Fig. 7.

According to the tests of vacuum-tightness the time of electroplating must exceed a minimum value ( $5 \div 10$  minutes) so that the tensile waste does not surpass the usual value. A thick nickel layer is detrimental only inasmuch as in case of sintering process carried out incorrectly the probability of shell separation of the galvanic layer increases, i.e. the strength of the bond decreases.

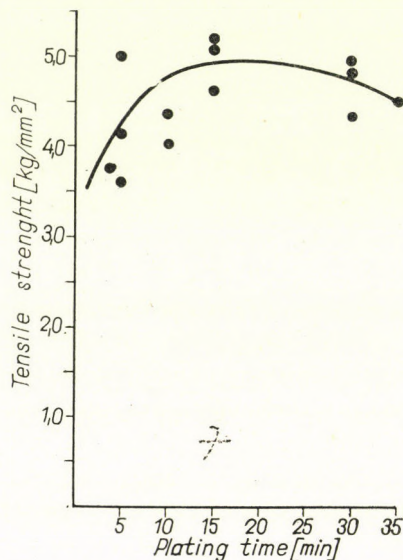


Fig. 7. Effect of the time of electroplating on the strength of the metal-to-ceramic bond; Mo-Mn coating  $20 \text{ mg/cm}^2$

### 3. The effect of the method of soldering the specimens

It was studied whether the single phases of the soldering technology and particularly the time during which in the soldering the components to be soldered are held at the soldering temperature have any substantial effect. The soldering was carried out by soldering the identically treated specimens one by one in such a way that in the central hole of the specimen a thermoelement was placed and the specimens were held for different times at the melting temperature of the solder ( $778^\circ\text{C}$ ). These times were 1, 3, 5, 15 and 30 minutes. We came to the conclusion that 0,5 minutes are sufficient for the soldering. With the increase of the heating time the nickel layer partly dissolves in the solder, partly diffuses towards the Mo—Mn layer. E.g., after 15 minutes soldering the boundary line between Ni and Mo—Mn could no longer be defined but only the joint thickness of both layers. In case of very long soldering times an

appreciable amount of nickel will also be dissolved by the solder but this effect becomes important only after 15 minutes. In the time interval studied ( $3 \div 30$  minutes) no decrease of strength of the bond was observed.

#### IV. Discussion of the results

According to the results of our experiments in studying the properties of the metal-to-ceramic bond with a given technology of sintering in case of otherwise identical technological steps in the function of the initial thickness of the ground (Mo—Mn) layer no such defined lower boundary of layer thickness could be found at which no metal-to-ceramic bond is formed at all. The technologically necessary minimum of layer thickness is determined by the fact that the ground layer formed of the grains must be continuous, i.e. it must cover the ceramic surface entirely. According to computations relating to this subject [23—25], this layer thickness is about 4—5 microns in case of metal grains of  $2 \div 3$  microns. Some kind of metal-to-ceramic bond can be imagined even in the case of a layer thickness smaller than this but then the metal layer covering the ceramic surface is only like a net. Consequently, the strength of the bond is considerably lower and the probability of the diffusion of gases along the bond will essentially be greater. The metal-to-ceramic bonds made by such a technology are weak and inclined to ductility.

In the experimental conditions used by us the layer shrinks  $30 \div 40$  per cent after sintering. This is due partly to the formation of the transition layer, partly to chemical reaction in the wet atmosphere as well as to sintering of metal particles to each other [26]. Our microsections testify that the decisive role is played by this latter process. In case of identical ceramic material and atmosphere of shrinking the extent of shrinkage depends only on the temperature and does not depend substantially on the way in which the layer was applied and the duration of sintering in the sintering time interval of  $0,5 \div 2$  hours.

According to our experimental results no optimum layer thickness can be found in that case in which the properties of the metal-to-ceramic bond could be regarded as optimum. The only condition of the well controllable technology is that the thickness of the metallizing layer must exceed a certain limit (about 30 microns). The upper limit of the layer thickness is  $50 \div 60$  microns owing rather to technological reasons than to those of principle. Indeed, the application of a uniform layer thicker than this in a large mass meets with considerable technological difficulties.

The same can be said on the role of the thickness of the galvanic layer promoting wetting. Theoretically it is important only that the layer should uniformly cover the Mo—Mn ground layer. This layer thickness depends on the technology of application, e.g. that the evaporated layer should be about

0,5 ÷ 1 micron. If the layer applied does not contain foreign materials which influence the wetting (see contact nickel coating) the manual of its application does not play any important role. The increase of layer thickness in otherwise identical conditions (temperature, duration of soldering etc.) does not essentially influence the properties of the metal-to-ceramic bond. The upper limit of layer thickness depends on to what thickness the layer can be sintered on the ground layer without any technological difficulty.

On the effects occurring in soldering together, the duration of the exposition to the soldering temperature was studied only. Since in our samples only soldering of ceramic to ceramic was achieved the tensions occurring on heating, resp. cooling, due to various heat expansions as well as the effect of heat treatment processes aiming at their removal [19] could be left out of account. By the particularly high pressure used in the soldering between the surface to be soldered only a thin solder layer remained the dilatation and plastic properties of which can be neglected from the point of view of the bond.

In the above conditions the time of soldering does not substantially influence the properties of the metal-to-ceramic bond in the soldering time interval of 0,5 ÷ 15 minutes if the thickness of the layer promoting wetting exceeds 10 microns. In case of thinner nickel layer the longer duration of soldering can result in the entire solution of the nickel layer which can lead to the decrease of wetting or eventually to its ceasing.

According to our microsections the duration of soldering bears particularly on the metallographic processes taking place in the immediate neighbourhood of the soldering spot, on the composition of the soldering layer as well as on the dissolution of the nickel layer, respectively, on its recrystallization from the fusion. However, our experimental conditions and test methods were not yet suitable for a more detailed study of these phenomena.

#### ACKNOWLEDGEMENT

Author expresses his thanks to Mr. Ö. KENZLER for the numerous useful discussions and to his collaborators, Mrs. PÓKA, Mrs. FEKETE and Mrs. PINTÉR, for their very valuable assistance rendered in the experimental work.

#### REFERENCES

1. NOLTE, H. J.—SPURK, R. F.: *Television Eng.* (1950); Nov., 15—39.
2. BURNSIDE, D. G.: *RCA Rev.* (1954); March, 46—61.
3. VAN HOUTEN, G. R.: *Bull. Am. Ceram. Soc.* **38** (1959), 301—307.
4. PALMOUR, H.: *J. El. Chem. Soc.* **102** (1955); 7, 160.
5. DENTON, E. P.—RAWSON, H.: *Trans. Brit. Ceram. Soc.* **59** (1960); 2, 25—37.
6. KOTOWSKI, I.—MUSCHAWEK, I.: *Vakuumtechnik* **10** (1961); 5, 141.
7. TE GUDE, H.: *NTZ* **15** (1962); 11, 552.
8. WIDMANN, H.: *Glas-Email-Keramotechnik* **14** (1963); 6, 205.
9. REED, L.—MC RAE, R. C.: *J. Am. Ceram. Soc. Bull.* **14** (1965); 1, 12.
10. HANGOS, I.—GERESDI, L.: *Tungstam Techn. Mitteilungen* (at the printer's).
11. KOHL, W. H.: *Vacuum* **14** (1964); 9, 333.

12. KOHL, W. H.: *Materials and Technics for Electron Tubes*. Reinhold Publ. Co., New York 1960; 488—518.
13. HANGOS, I.: *Acta Techn. Hung.* **19** (1957), 67.
14. HANGOS, I.—SIKORA, V.—STARK, P.: *Tungsram Techn. Mitteilungen* (at the printer's).
15. COLE, S. S.—SOMMER, G.: *J. Am. Ceram. Soc.* **44** (1961); 6, 255.
16. WILLIAMS, I. C.—NIELSEN, I.: *J. Am. Ceram. Soc.* **42** (1959), 229.
17. KENZLER, Ö.—NAGY, O.: *Proceedings of TKI* (at the printer's).
18. FLOYD, I. R.: *Bull. Am. Ceram. Soc.* **42** (1963); 2, 65.
19. ESPE, W.—HIX, P.—KEJHAR, J.: *Silikattechnik* **15** (1964); 205, 248.
20. BENDER, H.: *Ceramic Age* (1954); 15—47.
21. KINGERY, W. D.: *Ceram. Bull.* **35** (1956); 3, 108.
22. PINCUS, A. G.: *J. A. Ceram. Soc.* **36** (1953); 5, 152.
23. BODÓ, Z.—HANGOS, I.: *Acta Techn. Hung.* **3** (1954), 155.
24. WEISZBURG, J.—HANGOS, I.: *Acta Techn. Hung.* **10** (1959), 4.
25. BODÓ, Z.—HANGOS, I.: *Acta Techn. Hung.* **5** (1955), 295.
26. KOTHARI, N. C.: *J. of the Less Common Metals* **5** (1963), 140.

**Einige Fragen der vakuumdichten metallkeramischen Lötung.** Der Einfluß der Schichtdicke und der Lötzeit auf die Eigenschaften der mittels der sogenannten Vormetallisierttechnologie hergestellten Metall-Keramik-Bindung wurde untersucht. Es wurde festgestellt, daß für eine gut beherrschbare Metallisierttechnologie die Stärke der Mo-Mn-Grundsicht zwischen 30 und 60  $\mu$  sein muß, aber innerhalb dieser Spanne kann keine Schichtdicke angegeben werden, für welche die Eigenschaften der Bindung optimal wären. Die nötige Stärke des die Benetzung fördernden Überzugs ist, abhängig von der Lötzeit und der Technologie der Auftragung, minimal 0,5 ÷ 5  $\mu$ ; bei längerer Lötzeit ist wegen der Auflösung der Nickelschicht im Lötmaterial die Anwendung einer Schichtdicke von 5 ÷ 10  $\mu$  zweckmäßig.

**Quelques questions du soudage métal-céramique étanche au vide.** L'auteur a examiné l'influence de l'épaisseur de couche et du temps de soudage sur les soudures métal-céramique réalisées par la méthode dite de métallisation préalable. Il a été constaté que pour avoir une méthode de métallisation facilement contrôlable, l'épaisseur de la couche de base Mo-Mn doit être entre 30 et 60  $\mu$ , mais qu'à l'intérieur de ces limites on ne trouve pas d'épaisseur de couche bien définie pour laquelle les qualités de la liaison seraient optimales. L'épaisseur du revêtement favorisant le mouillage doit être, suivant le temps de soudage et la méthode de l'apport, de 0,5 à 5  $\mu$  au minimum; pour les temps de soudage plus longs, il est recommandé d'utiliser une épaisseur de 5 à 10  $\mu$  à cause de la dissolution de la couche de nickel dans la matière à souder.

**Некоторые вопросы металлокерамической вакуумостойкой пайки.** (И. Хангос). Исследовано действие толщины слоя и времени пайки на свойства металлокерамического соединения при оформлении металлокерамического соединения, изготовленного при помощи т. н. технологии предварительной металлизации. Установлено, что для хорошо управляемой технологии металлизации толщина основного слоя Мо—Мп должна быть в пределах 30—60 мк, но в указанных пределах нельзя найти такую именно толщину слоя, при которой свойства соединения являются оптимальными. Необходимая толщина покрытия, способствующая увлажнению, в зависимости от времени пайки и технологии нанесения, должна быть равна минимально 0,5—5 мк; при более продолжительном времени пайки целесообразно применять толщину в 5—10 мк из-за растворения в припое никелевого слоя.





## THE SPECIAL ROLE OF PEROXIDES IN GAS IONIZATION

D. HALÁSZ, K. SZENDY and L. RÉDEY

[Manuscript received October 25, 1966]

Barium peroxide ( $\text{BaO}_2$ ) and peroxides in general tend to give off an atom of oxygen even at a moderate temperature. In the presence of a combustible substance, this oxygen atom *in statu nascendi* will combine with it as the liberated thermal energy, before being dissipated, will heat the molecules taking part in the chemical reaction to a high temperature, which, however, is maintained only for a few hundredths of a second. In a MHD channel this phenomenon can be used to increase the degree of ionization.

### List of symbols

$\sigma$	conductivity of the working fluid, mho/m;
$r$	particle radius, m;
$2R$	distance between two adjacent particles, m;
$T$	fluid temperature, °K;
$n_0$	density of free electrons in a peroxid surface at radius $r$ of 1 m <sup>3</sup> ;
$\varrho_0$	charge density at radius $r$ , coulomb/m <sup>3</sup> ;
$\varrho_a$	charge density at $R$ , coulomb/m;
$\omega$	velocity, m/sec or cm/sec;
$k$	Boltzmann constant, joule/°K;
$q$	elementary charge, coulomb;
$E$	electric field strength, volt/m;
$b$	electron mobility, m <sup>2</sup> /voltsec;
$V_i$	work function, eV;
$V$	voltage, volt;
$m$	electron mass;
$c_p$	specific heat at constant pressure, kcal/kg °K;
$c_v$	specific heat at constant volume, kcal/kg °K.

### I

A few years ago it was proposed [1, 2] to inject fine particles of a solid material that can readily be ionized, such as  $\text{BaO}$ , in order to attain a high degree of ionization in a working fluid — especially in MHD generators — at a fluid temperature much lower than 2500–3000 °K used with thermal ionization, this latter being the only practical solution known at present.

The theoretical and experimental research work, which was started all over the world, showed great promises at first. Up to the present, however, no useful results have been achieved. Even the important MHD symposium held in Salzburg this year (in 1966) could not produce such result, so that for the

moment here is little likelihood of obtaining any appreciable advantage by this method in MHD.

## II

On the basis of our present knowledge we shall now examine the outcome that could be expected from the barium oxide procedure and look for an artifice to overcome the difficulties if these should exist.

Equation in paper [2] is a second-order differential equation describing the ionization conditions around a BaO particle of radius  $r$ ,

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr^2(dV/dr)}{dr} = -\varrho_0 \exp \frac{q(V_0 - V)}{kT}.$$

Since this equation can be solved only by the use of a digital computer, an approximate solution is shown for simplicity's sake. It is assumed that the charge density is

$$\varrho = \text{constant} = \varrho_R \quad (1)$$

along a radius  $(R - r_0)$  and it jumps to the value of  $\varrho_0$  at  $r_0$ .

In accordance with reference [2]:

$$\varrho_R = \varrho_0 \exp \frac{q(V_0 - V)}{kT}. \quad (2)$$

Therefore, as a final result,

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr^2(dV/dr)}{dr} = -\varrho_R = \text{constant} \quad (3)$$

is obtained.

From this differential equation it follows that

$$\varrho_0 = \varrho_R \exp \left[ \frac{e}{kT} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \varrho_R \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right) \right]. \quad (4)$$

According to [2]

$$\frac{\varrho_0}{q} = n_0 = \frac{2 \sqrt{(2\pi \cdot m \cdot kT)^3}}{h^3} \exp \left( -\frac{qV_i}{kT} \right) 1/\text{cm}^3. \quad (5)$$

For comparison, the Table I based on equations (4) and (5) shows the values of  $b$  and  $\varrho_R$  as well as the corresponding conductivities according to Langevin's formula for four different temperatures, disregarding the possibility

of sublimation. Let the particle material be BaO with a work function of 1 eV and of a diameter  $2r = 10^{-8}$  m, this corresponding to the minimum diameter attainable in practice.

Table I

$T$ [°K]	$b$ [m <sup>2</sup> /volt]	$\frac{\sigma_R}{C}$ [C/m <sup>2</sup> ]	$\sigma$ [mho/m]
2000	2,77	2,69	7,41
3000	3,46	6,20	21,50
4000	4,0	9,1	36,50
5000	4,46	12,0	53,50

In the region above 3000 °K a change in emission mechanism may occur, which has not been taken into account in the last two rows of the table (see Section V).

As can be seen from Table I, the conductivity of the fluid is approximately proportional to the absolute temperature and, as a consequence, it increases very slowly. It is known, on the other hand, that the mobility is proportional to the pressure (the temperature being constant). Referring to Sections X and XVI of [3], it is very useful to apply lower pressures — if MHD compressor is available — because in this way:

The conductivity can be ensured even at a low temperature;

an expansion to the full velocity is possible before entering the magnetized section of the generator channel, so that the voltage is increased for two reasons, namely, by the use of larger dimensions and as a consequence of the higher mean velocity, which means that the same power is obtained with a smaller current;

the additional conventional power plant generator can be omitted and the maximum temperature may be chosen only from a thermodynamic point of view instead of taking ionization requirements into account.

Table I shows that at a high operating pressure a high temperature is needed to obtain the conductivity necessary in MHD converters. This temperature is so high that

difficulties are experienced in heating;

the walls must be intensively cooled resulting in a decrease in efficiency;

special refractory materials are to be applied or developed;

it excludes the possibility of some important applications (nuclear power plant, MHD compressor etc.).

A good solution is obtained by satisfying two contradictory conditions:

a) The temperature of the electron-generating elements should be very high;

*b)* and at the same time the temperature of the working fluid must be just at the level justified by thermodynamic considerations.

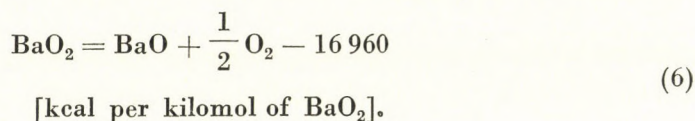
Points *a)* and *b)* are dealt with in [3]; here, a recapitulation of this paper is omitted.

It is desirable, however, to keep the electron-generating materials (e.g. BaO) at a temperature *higher than that attained in any form in the generator.*

### III

Let us investigate the consequences involved in the case when in order to have an efficient material for electron emission (that is a material with low work function) the usual barium oxide (BaO) is used as a dissociation product of barium peroxide (BaO<sub>2</sub>).

As is known, barium peroxide dissociates at about 1000 °K to form barium oxide with the liberation of oxygen,



The liberated oxygen atoms *in statu nascendi* are extremely reactive, to such an extent that an explosion may occur when barium peroxide is mixed with a combustible substance. This explosion means that the reaction is taking place faster than the generated heat could be dissipated either by conduction or by expansion. The following thermodynamic calculation takes into account this fact (approximately) *by using  $c_v$  instead of  $c_p$ .*

The procedure is as follows. First of all, the barium peroxide is heated in one way or another to a temperature at which the decomposition described by equation (6) is still at an initial stage (e.g. 800 °K) and then it is introduced in the form of a fine powder into a (reducing) working fluid containing some combustible substance, for example C, CO, H<sub>2</sub> etc., at least in a quantity that is necessary to bind the oxygen released from the barium peroxide (while heat is generated).

It is also possible to have a working fluid without any combustible substance (e.g. in MHD compressors); in these cases a surface treatment with a combustible substance on the barium peroxide is necessary before it is introduced into the working channel. Then, if necessary, the barium peroxide is heated instantaneously to the ignition temperature (for example in the way described in [3], that is by using a high temperature radiating surface).

The peroxide which has been heated up either by the above technique or by some other means decomposes according to equation (6) and the released oxygen *in statu nascendi* will burn the combustible substance, while a tempera-

ture rise corresponding to the produced heat occurs. If this heat were uniformly distributed over the whole working fuel flowing in the channel, the temperature rise would be unimportant. However, it is exactly the high speed of reaction which will, for a short interval of time, prevent the heat from being transferred to materials other than the BaO molecules and the combustion products of the reaction. The expected temperature rise will be calculated in the next section.

#### IV

According to equation (6), 16 kg oxygen is liberated from 169,36 kg BaO<sub>2</sub>. Reacted with different combustibles, 1 kg of oxygen will produce the following amounts of heat. On calculating the obtained temperature, a dissociation heat of  $16\,960/16 = 1060$  kcal per 1 kg of oxygen according to equation (6), but not necessarily the whole of it, must be subtracted from the amounts of heat listed in Table II because the decomposing of BaO<sub>2</sub> is an endothermic reaction, lowered by the dissociation heat.

Table II

Combustible	Produced amount of heat, kcal	Produced amount of heat lowered by the dissociation heat, kcal
C	3030	1970
H <sub>2</sub>	3600	2540
CO	4360	3300
CH <sub>4</sub>	3000	1940

The remaining heat must be used to heat up the produced 44/16 kg of CO<sub>2</sub>, the specific heat of which is 0,255 kcal/kg °C between 800 and 3000 °C at constant volume, and also the 153,36/16 kg of BaO itself, the specific heat of which is 0,09 kcal/kg °C.

The thermal equation for CO is

$$0,33 \cdot 10^4 = \Delta T \left( \frac{44}{16} 0,255 + 153,36 \cdot 0,09 \right),$$

whence

$$\Delta T = 2110 \text{ } ^\circ\text{K}.$$

With a starting temperature of 773 °K the temperature of the particles attains 2883 °K.

With other combustibles a correspondingly lower temperature will be obtained.

Previously it was mentioned that on subtracting the dissociation heat a lower value may be taken into account depending on the thermodynamic and constructional conditions. As a matter of fact, at about 1000 °K already an important dissociation of BaO<sub>2</sub> takes place, and if preheating is realized in an appropriate time sequence, dissociation heat is supplied partly by the preheater so that a greater part of the total heating effect of the released oxygen can serve to attain the desired temperature rise. This should be arrived at by constructional means, that are not simple, though possible.

If the dissociation heat is not subtracted, the temperature rise attained in the above example would be

$$\Delta T \approx 2800 \text{ }^\circ\text{K}$$

that is 3573 °K would be obtained with a starting temperature of 773 °C.

## V

The foregoing sections only showed the possibilities afforded by the use of barium peroxide, and we have not yet made any proposal as to the way of an actual application of peroxides. In practice it should be taken into account that above 2200 °K a considerable sublimation of BaO is already taking place, so that at higher temperatures the solid BaO gradually disappears yielding its place to BaO vapour. In connection with ionization this is important because instead of the work function ionization potential is to be taken into account, this being 2 ÷ 2,5 times greater than the work function. Therefore it may occur that with increasing temperature the degree of ionization becomes doubtful and, on the other hand, the space charge will decrease due to a more uniform distribution of the electrons and positive ions. This problem should still be investigated both theoretically and experimentally and optimum conditions must be found. This investigation includes the reduction of the gas pressure, a problem giving rise to no difficulties in the case of an MHD compressor, but having a significant effect on ionization.

## VI

The use of barium peroxide also offers some additional advantages.

The reduction of the dimensions of the barium oxide particles to some extent favours the electron emission. In the calculation presented at the beginning of this paper a particle diameter of 10<sup>-8</sup> m has been assumed. Obtaining such a dimension is, however, a very difficult and costly operation. When BaO<sub>2</sub> is applied, the BaO particles of the required diameter are produced

automatically. It is very likely, of course, that even the relatively large particles of  $BaO_2$  will be split into a fine powder by the oxygen liberated explosively when an appropriate rate of heating is applied.

It is known that in operating an MHD generator the seeding material — in our example the barium oxide — must be recovered to a great percentage. In the present case this problem is even more complicated by the fact that  $BaO_2$  must be introduced into the generator channel, and since  $BaO_2$  is reduced to  $BaO$  there it is the  $BaO$  that can be recovered and this should be continuously retransformed into  $BaO_2$ . This problem was solved long ago on an industrial scale. As a matter of fact, it was used in an early process for obtaining oxygen from air, in the Brin method of oxygen production.

#### REFERENCES

1. MC. GRATH, T. A.—SIDDAL, R. G.—THRING, M. W.: *Advances in Magnetohydrodynamics*. Pergamon Press, 1963.
2. HALÁSZ, D.—SZENDY, K.—KOVÁCS, K. P.: *Electron Emission in MHD Generators*. International Symposium on Magnetohydrodynamics, Paris 1964; Paper 19a.
3. HALÁSZ, D.—SZENDY, K.: High degree Ionization in a Cold Gas. *Acta Techn. Hung.* 58 (1967).

**Die besondere Rolle der Peroxyde bei der Ionisation von Gasen.** Bariumperoxyd ( $BaO_2$ ) und die Peroxyde im allgemeinen neigen dazu, schon bei mäßigen Temperaturen ein Sauerstoffatom abzugeben. Wenn sich in seiner unmittelbaren Nähe irgendein Brennstoff befindet, vereint sich dieses Sauerstoffatom mit diesem *in statu nascendi*, und die freiwerdende Wärme erhitzt, solange sie sich nicht ausbreitet, die an der chemischen Vereinigung unmittelbar beteiligten Moleküle auf eine hohe Temperatur, die nur einige Hundertstel-Sekunden lang andauert. Diese Erscheinung kann in dem MHD Kanal zur Steigerung des Ionisierungsgrades angewandt werden.

**Le rôle spécial des peroxydes dans l'ionisation des gaz.** Le peroxyde de barium ( $BaO_2$ ) et les peroxydes en général libèrent facilement un atome d'oxygène à une température même modérée. Si cet atome d'oxygène se trouve en proximité immédiate d'un combustible, il se réunit *in statu nascendi* avec ce dernier. Avant sa diffusion, la chaleur ainsi libérée porte les molécules participant directement à l'union à une température élevée, qui ne subsiste que quelques centièmes de seconde. Ce phénomène peut être utilisé dans le canal MHD, pour élever le degré de l'ionisation.

**Особая роль перекисей при ионизации газов** (Д. Халас, К. Сенди и Редעי). Перекись бария ( $BaO_2$ ) и преобладающая часть перекисей склонны к тому, чтобы уже при умеренной температуре терять один атом кислорода. Эти атомы кислорода, если в непосредственной близости находится какое-либо горючее вещество, непосредственно соединяются с ним и освобождающееся тепло, пока оно не распространится, нагревает молекулы, принимающие непосредственно участие в химической реакции соединения, до высокой температуры, которая поддерживается в течение лишь нескольких сотых долей секунды. В магнитогидродинамическом канале это явление можно использовать для повышения степени ионизации.





## К РАСЧЕТУ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБЪЕКТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ХИМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Ж. Б. ЛИНКОВСКИЙ  
МОСКВА

[Поступило 9. декабря 1966 г.]

Рассматриваются линейные системы автоматического регулирования с одним входом и одним выходом, движение которых описывается дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (параметрами системы). Анализируется общий случай предварительной возбужденности системы, встречающийся при нормальной эксплуатации промышленных установок, предполагаются известными параметры системы. Для этого случая выходной сигнал связан с входным сигналом, предполагаемыми детерминированными функциями времени, обобщенным интегралом Дюамеля с вхождением импульсной переходной функции предварительно невозбужденной системы. Для определения ее используется метод рядов, именно, при решении линейного интегрального уравнения второго рода с переменным верхним пределом. Решение может быть получено с любой степенью точности. Соответственно этому определяется приближенно передаточная функция системы; выражения получаются в обычных функциях.

*М. Шаламон* (ЧССР) [1] указал, что при анализе динамических свойств линейных объектов автоматического регулирования в химической промышленности очень большое значение имеют методы их анализа по данным изменения во времени входной и выходной величин. Последние регистрируются при нормальной работе системы автоматического регулирования, и на основании, например, опытных работ в Чехословакии не требуют сложного и громоздкого оборудования. *В. Стрейцом* и *М. Шаламон* была разработана группа таких методов. Актуальность таких задач возрастает в связи с комплексной автоматизацией химических производств [2].

В настоящей работе предлагается пополнить группу этих методов значительно более простым методом, учитывая также предварительную возбужденность объектов регулирования. Многие системы автоматического регулирования в химической промышленности являются системами с одним входом и выходом, и если они не соединены параллельно, то описываются обыкновенным дифференциальным уравнением  $m$ -ного порядка с постоянными коэффициентами (параметрами системы) [1]:

$$a_m \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t), \quad (1)$$

где через  $y(t)$  и  $x(t)$  обозначены выход и вход системы соответственно. Рассматривается случай детерминированных (неслучайных)  $x(t)$  и  $y(t)$ . Так как практически последние всегда несколько недетерминированы вследствие случайных помех, то в качестве  $x(t)$  и  $y(t)$  можно взять средние временные зависимости, предполагая, что стационарные помехи имеют среднее, равное нулю. Согласно [1] возникают две задачи:

а) определение параметров  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$  системы;  
 б) определение передаточной функции (или импульсной переходной функции).

Мы здесь коснемся второй задачи. В химической промышленности часто системы управления предварительно возбуждены, т. е. имеют место ненулевые начальные условия для уравнения (1):

$$\left. \frac{d^v \mathbf{y}}{dt^v} \right|_{t=0} = \mathbf{y}_0^{(v)}; \quad v = 0, 1, 2, \dots, (m-1). \quad (2)$$

Пусть входное воздействие  $\mathbf{x}(t)$  является непрерывной функцией времени  $t$ .

Применим преобразование выходного сигнала, введя новую функцию  $\mathbf{z}(t)$ :

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(v)}}{v!} t^v. \quad (3)$$

Тогда относительно  $\mathbf{z}(t)$  из (1) получим следующее уравнение:

$$a_m \frac{d^m \mathbf{z}}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} \mathbf{z}}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d\mathbf{z}}{dt} + a_0 \mathbf{z} = \mathbf{F}(t), \quad (4)$$

где обозначено:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{x}(t) - a_0 \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(v)}}{v!} t^v - a_1 \sum_{v=1}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(v)}}{(v-1)!} t^{v-1} - \dots - a_{m-1} \mathbf{y}_0^{(m-1)}. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что для уравнения (4) справедливы нулевые начальные условия:

$$\left. \frac{d^v \mathbf{z}}{dt^v} \right|_{t=0} = 0; \quad v = 0, 1, 2, \dots, (m-1), \quad (6)$$

т. е. новая линейная система (4) является предварительно невозбужденной системой. Для такой системы с постоянными параметрами, как известно [3], выходной сигнал  $\mathbf{z}(t)$  (отклик системы) выражается через входное воздействие  $\mathbf{F}(t)$  интегралом Дюамеля:

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t \mathbf{w}(t-\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau \equiv \int_0^t \mathbf{w}(\xi) \mathbf{F}(t-\xi) d\xi, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{w}(t)$  импульсная функция линейной системы (4). Если учесть (3), то соотношение (7) можно записать в виде:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(v)}}{v!} t^v + \int_0^t \mathbf{w}(t-\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Обозначим через  $\mathbf{K}(t)$  импульсную переходную функцию линейной системы (1). Покажем, что

$$\mathbf{K}(t) \equiv \mathbf{w}(t). \quad (9)$$

В самом деле, пусть реализуется случай предварительно невозбужденной системы (1), т. е. для нее имеют место нулевые начальные условия:

$$\left. \frac{d^v \mathbf{y}}{dt^v} \right|_{t=0} = 0; \quad v = 0, 1, 2, \dots, (m-1). \quad (10)$$

Тогда из (8) и (5) следует, что:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{w}(t-\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

С другой стороны, по определению импульсной переходной функции  $\mathbf{K}(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t-\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

т. е. в самом деле, имеет место (9). Требуемое доказано. Итак, для предварительно возбужденной линейной системы с постоянными параметрами (это легко также перенести на системы с непрерывными переменными параметрами) имеет место следующее основное соотношение:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(v)}}{v!} t^v + \int_0^t \mathbf{K}(t-\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau; \quad t \geq 0 \quad (13)$$

или

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(v)}}{v!} t^v + \int_0^t \mathbf{K}(\xi) \mathbf{F}(t-\xi) d\xi; \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где  $\mathbf{F}(t)$  задано в виде (5), т. е. является преобразованным входным сигналом. Так как  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  являются заданными функциями времени  $t$  (обычно они задаются в интервале времени  $[0, \mathbf{T}]$ ), то задача определения импульсной переходной функции  $\mathbf{K}(t)$  — важной характеристики динамики объекта — сводится к решению линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода с заданным разностным ядром  $\mathbf{F}(t-\xi)$ . Это уравнение (14) можно приближенно решить с высокой степенью точности при помощи одного метода, удобного и простого для инженерной практики. Предположим, что  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  непрерывно дифференцируемые функции аргумента  $t$ . Продифференцируем соотношение (14)  $n+1$  раз ( $n > m$ ), предполагая, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(0) \neq 0, \quad \text{т. е. } \mathbf{x}(0) \neq 0 \quad \text{при } \mathbf{y}_0^{(m-1)} = 0; \\ \mathbf{y}'(t) &= \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(v)}}{(v-1)!} t^{v-1} + \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{F}(0) + \int_0^t \mathbf{K}(\xi) \frac{\partial \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)} d\xi, \quad (15) \\ & \frac{\partial \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}''(t) = & \sum_{\nu=2}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(\nu)}}{(\nu-2)!} t^{\nu-2} + \mathbf{K}'(t) \cdot \mathbf{F}(0) + \mathbf{K}(t) \mathbf{F}'(0) + \\
 & + \int_0^t \mathbf{K}(\xi) \frac{\partial^2 \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)^2} d\xi, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\left[ \text{обозначено } \mathbf{F}'(0) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)} \right|_{\xi=t} \right];$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}''''(t) = & \sum_{\nu=3}^{m-1} \frac{\mathbf{y}_0^{(\nu)}}{(\nu-3)!} t^{\nu-3} + \mathbf{K}''(t) \cdot \mathbf{F}(0) + \mathbf{K}'(t) \mathbf{F}'(0) + \\
 & + \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{F}''(0) + \int_0^t \mathbf{K}(\xi) \frac{\partial^3 \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)^3} d\xi, \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\left[ \text{обозначено } \mathbf{F}''(0) = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)^2} \right|_{\xi=t} \right];$$

...

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathbf{K}^{(i)}(t) \cdot \mathbf{F}^{(m-1-i)}(0) + \int_0^t \mathbf{K}(\xi) \frac{\partial^m \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)^m} d\xi,$$

$$\left[ \text{обозначено } \mathbf{F}^{(j)}(0) = \left. \frac{\partial^j \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)^j} \right|_{\xi=t} \right];$$

...

$$\mathbf{y}^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{K}^{(i)}(t) \cdot \mathbf{F}^{(n-1-i)}(0) + \int_0^t \mathbf{K}(\xi) \frac{\partial^n \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)^n} d\xi, \quad (18)$$

$$\mathbf{y}^{(n+1)}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{K}^{(i)}(t) \cdot \mathbf{F}^{(n-i)}(0) + \int_0^t \mathbf{K}(\xi) \frac{\partial^{n+1} \mathbf{F}(t-\xi)}{\partial(t-\xi)^{n+1}} d\xi.$$

Полагая в соотношениях (15)–(18)  $t = 0$ , найдем  $\mathbf{K}(0)$  и все производные  $\mathbf{K}^{(\tau)}(0)$  в точке  $t = 0$ , причем нетрудно видеть, что каждая производная выражается через младшие производные

$$\mathbf{K}^{(0)}(0) \equiv \mathbf{K}(0), \mathbf{K}'(0), \mathbf{K}''(0), \dots, \mathbf{K}^{(\tau-1)}.$$

Например:

$$\mathbf{K}(0) = \frac{\mathbf{y}'(0) - \mathbf{y}'(0)}{\mathbf{F}(0)} = 0, \quad \mathbf{K}'(0) = 0, \quad \mathbf{K}''(0) = 0, \dots, \quad (19)$$

$$\mathbf{K}^{(m-3)}(0) = 0, \quad \mathbf{K}^{(m-2)}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{(m-1)}(0) &= \frac{\mathbf{y}^{(m)}(0) - \mathbf{F}'(0) \mathbf{K}^{(m-2)}(0) - \dots - \mathbf{F}^{(m)}(0) \cdot \mathbf{K}(0)}{\mathbf{F}(0)} = \\
 &= \frac{\mathbf{y}^{(m)}(0)}{\mathbf{F}(0)}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^{(m)}(0) = \frac{\mathbf{y}^{(m+1)}(0) - \mathbf{K}^{(m-1)}(0) \cdot \mathbf{F}'(0)}{\mathbf{F}(0)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{K}^{(n)}(0) = \frac{\mathbf{y}^{(n+1)}(0) - \sum_{i=m-1}^{n-1} \mathbf{K}^{(i)}(0) \cdot \mathbf{F}^{(n-i)}(0)}{\mathbf{F}(0)}. \quad (22)$$

Таким образом, находим  $\mathbf{K}(0)$  и производные  $\mathbf{K}'(0), \mathbf{K}''(0), \dots, \mathbf{K}^{(n)}(0)$ .

В большинстве практических задач можно считать, что искомая импульсная переходная функция  $\mathbf{K}(t)$  представима рядом Маклорена:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(0) + \frac{\mathbf{K}'(0)}{1!} t + \frac{\mathbf{K}''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\mathbf{K}^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{\mathbf{K}^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1} \quad (23)$$

$(0 < \theta < t)$ .

Примем за приближенное значение  $\tilde{\mathbf{K}}(t)$  изучаемой функции  $\mathbf{K}(t)$   $n$ -ю частную сумму этого ряда:

$$\tilde{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{K}(0) + \frac{\mathbf{K}'(0)}{1!} t + \frac{\mathbf{K}''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\mathbf{K}^{(n)}(0)}{n!} t^n. \quad (24)$$

Допускаемая при этом погрешность  $\varepsilon(t)$  равна:

$$\varepsilon(t) = \mathbf{K}(t) - \tilde{\mathbf{K}}(t) = \frac{\mathbf{K}^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad 0 < \theta < t, \quad (25)$$

и ее можно довести до пренебрежимо малого значения за счет выбора больших  $n$ , так как уже  $8! = 40320$ , предполагая ограниченность производных. Следовательно, этот метод обеспечивает требуемую точность.

Передаточную функцию  $\mathbf{K}(p)$  найдем (приближенно) преобразованием Лапласа от импульсной переходной функции  $\tilde{\mathbf{K}}(t)$  [4]:

$$\tilde{\mathbf{K}}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot \tilde{\mathbf{K}}(t) dt = \sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{K}^{(i)}(0)}{i!} \int_0^\infty t^i \cdot e^{-pt} dt; \quad (26)$$

т. е. получим

$$\tilde{\mathbf{K}}(p) = \sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{K}^{(i)}(0)}{p^{i+1}}, \quad (27)$$

так как известно [10], что

$$\int_0^\infty e^{-pt} \cdot t^i dt = \frac{i!}{p^{i+1}}. \quad (28)$$

В заключение кратко коснемся частного случая предварительно невозбужденных линейных систем (1). В этом случае при  $x(0) \neq 0$ , как нетрудно видеть, также имеем:

$$K(0) = K'(0) = \dots = K^{(m-2)}(0) = 0,$$

и поэтому

$$K(t) = \sum_{i=m-1}^n \frac{K^{(i)}(0)}{i!} t^i + \frac{K^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad 0 < \theta < t. \quad (29)$$

Из приведенных формул видно, что данный метод при той же точности требует меньшего объема вычислительных работ, чем другие методы, и удобен для снятия исходной информации в процессе нормальной эксплуатации, т. е. без останова промышленных установок, и также вполне удобен для проведения расчетов по определению импульсной переходной и передаточной функций на полуавтоматических табуляторах и вычислительных машинах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шаламон, М.: Простой метод расчета динамических свойств объектов регулирования. Сборник «Автоматизация химических производств», Москва 1960; Вып. 1—2, 134—141.
2. Феста, Н. Я.—Герулайтис, Ю. Н.: Научно-технические проблемы в области автоматизации химических производств. Сборник «Автоматизация химических производств», Москва 1960; вып. 1—2, 8—13.
3. Солодов, А. В.: Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, Москва 1962; 244.
4. Барнет, Дж.: Преобразование Лапласа и передаточные функции (Справочник по технике автоматического регулирования под общей редакции Дж. Траскела). Госэнергоиздат, Москва—Ленинград 1962; 22—23.

**Contribution to the Calculation of the Dynamic Characteristics of Control Systems in the Chemical Industry (J. B. Linkowski).** The paper deals with linear automatic control systems having one input and one output, the motion of which is characterized by a differential equation with constant coefficients (the parameters of the system). The general case of the previous excitation of the system, arising under normal service conditions of the industrial plant, is analysed, assuming that the parameters of the system are known. In that case the output signal depends on the input signal, which is assumed to be a deterministic time function. This relation is determined by a general Duhamel integral, to which is connected the weight function of the previously non excited system. For determining the relation a series expansion method is used at the solution of the linear integral equation of the second order with a variable upper limit. The accuracy of the solution is optional. In this manner the transfer function of the system can approximately be determined. The expression is obtained in the form of simple functions.

**Zur Berechnung der dynamischen Eigenschaften von Regelstrecken in der chemischen Industrie (J. B. Linkowski).** Die Arbeit behandelt lineare automatische Regelsysteme mit einem Eingang und einem Ausgang, deren Bewegung durch eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (den Parametern des Systems) gekennzeichnet ist. Der allgemeine Fall der vorhergehenden Erregung des Systems unter normalen Betriebsbedingungen wird behandelt, vorausgesetzt daß die Parameter des Systems bekannt sind. In diesem Fall hängt das Ausgangssignal vom Eingangssignal ab, welches als deterministische Funktion der Zeit vorausgesetzt wird. Dieser Zusammenhang wird von einem allgemeinen Duhamel-Integral bestimmt, an welches sich die Gewichtsfunktion des vorhergehend nicht erregten Systems anschließt. Zur Bestimmung dieses Zusammenhangs wird bei der Lösung der linearen Integralgleichung zweiter Ordnung mit veränderlicher oberer Grenze eine Methode der Reihenentwicklung angewendet. Die Lösung

ist von beliebiger Genauigkeit. Auf diese Weise kann die Übergangsfunktion des Systems näherungsweise bestimmt werden. Der Ausdruck wird in Form von einfachen Funktionen erhalten.

**Contribution au calcul des caractéristiques dynamiques des installations réglées dans l'industrie chimique (J. B. Linkovski).** L'étude traite des systèmes de régulation linéaires à une sortie et une entrée, dont le mouvement est caractérisé par des équations différentielles à coefficients constants (paramètres du système). L'auteur examine le cas général de l'excitation préalable du système en condition de service normale de l'installation industrielle, en supposant que les paramètres du système sont connus. Dans ce cas, le signal de sortie dépend du signal d'entrée, dont on suppose qu'il est une fonction déterministique du temps. Cette relation est déterminée par une intégrale de Duhamel générale, à laquelle est liée la fonction poids du système préalablement non excité. Pour déterminer la relation, un développement en série est utilisé à la solution de l'équation intégrale linéaire du deuxième ordre à limite supérieure variable. La précision peut être poussée à volonté. De cette façon, on peut approcher la fonction de transfert du système. L'expression est obtenue sous forme de fonctions simples.





## THE WORK FUNCTIONS OF TUNGSTEN WIRES MADE WITH VARIOUS INGREDIENTS

I. VÁCZ

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH INSTITUTE FOR TECHNICAL PHYSICS OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received December 29, 1966]

In order to realize the necessary characteristics of electron tubes it appeared to be necessary to determine the work function of various materials, incandescent cathodes etc. The work functions of four tungsten wires made with additives of various composition were measured as a function of the heating time of the wires. The measurements have shown that the determinability of the true work function of the tungsten wires depends on the dispartition (evaporation) of the foreign impurities present from the beginning in the basic tungsten material and of those added purposely in order to obtain certain characteristics of the tungsten. The difference as compared to the values of the work function as given by literature thus depends not only on the apparition of the gas layer adsorbed from the vacuum on the surface of the wire, but also on the foreign materials diffusing from inside the tungsten wire and appearing on the surface of the tungsten wire. The measurements have shown that the final values of the work function are attained after the evaporation of the different impurities, after different times.

### I. Precedents and aims

Precedents of this work are the researches of E. WINTER performed in the years of 1938 to 1942 with the purpose of stopping or diminishing the arc burn-off of gas-filled filament lamps [1]. The arc burn-off of gas-filled filament lamps became especially considerable with the transition in manufacture of incandescent lamps from the simple spirals to the use of double (spiralized) spirals and with the substitution of the argon filling gas by krypton. For this reason in one of the current lead-in circuits of the double spiral lamp a fuse wire is introduced which melts on the effect of overcurrent arising in the eventual arcing, thus preventing the fusion of base and socket of the lamp.

It could be assumed that the arcing was due to electron emission of the filament. Thus, for the purpose of eliminating this phenomenon or diminishing its degree, the emissivity of the filament ought to be decreased, i.e. its work function must be increased. It ought also to be considered whether the arcing was raised by the electron emission of materials with a small work function (e.g. calcium oxide or pure tungsten) getting at the tungsten incandescent body unintentionally, or not.

At first thought the first assumption seemed to be more probable otherwise the arcing should have appeared much more generally and to a higher degree than could actually be observed.

Proceeding from these considerations, first we strove to increase the work function of foreign materials getting at the incandescent body. This was made possible by those experiments carried out earlier which resulted in stating that the basic metal oxides have the smallest work function and this latter increases on adding acid oxides, e.g. silicic acid. The work function is the greatest when in the emissive layer the ratio of basic and acid oxides coincides with the composition of the normal salt. Hence, it was suggested that the arc burn-off could be prevented by adding, with respect to the quantity of phosphor, 10 per cent of heated anhydrous silicic acid evenly distributed on the red phosphor getter material of the gas-filled filament lamp. The effect was surprising. At the first switching on, there was no arc burn-off at all, even when the lamp was switched on immediately at nominal voltage. However, in lamps made with getters containing no silicic acid the nominal voltage could only slowly and gradually be attained. Further details concerning the procedure can be found in [1].

Thus the first results were very promising but unfortunately they were not lasting. Arc burn-off did not occur in the first hours but after burning for about 1 hour at nominal voltage or at small overvoltage, they occurred again sporadically. From the statistics of large lamp quantities manufactured in a strictly parallel way it could be stated that the use of the getter containing silicic acid cuts the number of arc burn-off by half but it does not stop them.

At any rate, from the experiments it could be stated that the silicic acid getter stops the arc burn-off for about two hours, presumably owing to the decrease of the filament electron emission and it could be assumed that the layer which diminished the electron emission in the first two hours, during the first two hours of burning, evaporated from the tungsten surface. This was proved later in such way that the bulb of the incandescent lamp was thrust into melted tin bath, the filament was heated and d.c. voltage was inserted between the tin bath and the filament. The tin bath was the positive pole. The electrons emitted from the tungsten joined the melted tin across the gas space and the hot glass. The measurements gave the same result as the arc burn-off. The lamps with phosphor getter containing no silicic acid showed emission immediately after being turned on whereas in the lamps with phosphor and silicic acid getters after switching on up to about 20 minutes no emission current could be measured, then the emission slowly increased to the emission level of the lamps made without silicic acid and reached this level after burning for about two hours.

In the references quoted it has also been assumed that the tungsten reduces the silicic acid and on its surface silicon metal remains adsorbed which increases the work function. On heating this layer longer it evaporates and then the electron emission of pure tungsten is at work in consequence of which the arc burn-off appear again.

The use of silicic acid or silicides to diminish the electron emission was described to be also in another patent [2]. The radars operated at that time on decimetric wavelengths. On account of the short wavelength in the lamps the dimensions of the electrodes had to be decreased considerably which increased risk of thermionic grid emission. One of the types of radar tubes developed by us in the years of the Second World War was the pulse tube *Q 150*. It operated with thorium cathode at an anode voltage of 8000–10 000 V and its pulse power was about 10 kW. Because of the small electrode dimensions the grid of the tube became so warm that a disturbing thermionic grid emission appeared, although the cathode was of thorium. This was mended by coating the tube grid with zircon metal powder and sintering it to the grid in high vacuum. However, even this did not bring about complete improvement. According to earlier experience a cataphoretic coating of silicic acid was applied to the grid coated with zircon and annealed, and the so treated grid was heated again in high vacuum.

After heating the zircon layer which had a metal shimmer before it became dark grey and the thermionic emission of the so treated grid was already negligibly small.

As described in the patent cited above, it has been assumed that the zircon metal reduces the silicic acid while zircon oxide and silicon metal are generated and this latter forms zircon silicide with the excess of zircon. Experience has shown that the zircon silicide increases the work function of the thorium evaporating efficiently onto it from the cathode and diminishes the risk of grid emission.

According to what has been said in the introduction it is to be expected that the formation of tungsten or molybdenum silicides on the surface is advantageous in respect to the decrease of thermionic grid emission.

The same fact seems to be proved also by the fact that on transforming the surface of tungsten and molybdenum into silicides these became passive against chemical action what is, in general, the property of surfaces with a high work function [3].

In the progress of electron tubes the aim is that they be suitable for shorter waves and to this corresponds the wish that the volume necessary for the unity of power be as small as possible. The diminution of dimension is accompanied inevitably by the increase of the risk of thermionic grid emission. Researches in this sense are pursued throughout the world and therefore an exact quantitative proof of the qualitative results observed in the second half of the thirties seemed to be necessary. At first, suitable methods of measuring the work function ought to be elaborated and their use must be learnt on materials of known work function. These studies are the subject of this work. Later on methods of silicizing the surface of metals used in grid manufacture must be elaborated and the work function of the materials so treated must also be

measured. Finally, the emittivity, respectively, the work function of the silicon-coated grids must be studied for the case when emission-active materials (barium, thorium, barium oxide etc.) are evaporated from the (oxide or thorium) cathode to such grid. The results of these measurements will be published in later papers.

Our further aim is to obtain, in order to diminish the thermionic grid emission, a surface emitting as few electrons as possible at the temperature arising thereon. The grid emission which is, of course, the smallest in materials of high work function, may be explained by thermoelectron emission. In pure metals, however, owing to their high work function, the grid emission at the operating temperature arising in the electron tube has still a negligibly small value.

This emission is, however, of very considerable degree and has a harmful effect in that case when in operation barium oxides and alkaline earth oxides evaporate from the oxide cathode to the grid and owing to this the work function of the grid decreases while the electron emission, i.e. the grid emission increases considerably.

In this regard, according to the literature, certain primary materials have an advantageous effect. It is known, e.g., that the BaO film evaporating onto the zircon surface diminishes the work function to a lesser degree than if BaO were evaporated to tungsten, molybdenum or tantalum surface [6]. A decrease of work function less by about 0,5 V can be measured when BaO settles on zircon. The practical use of this fact is pointed out e.g. by TSARJEV [4].

In the manufacturing of up-to-date radio tubes several kinds of materials are used and propagated for the purpose of diminishing thermionic grid emission. This the golding of the grid 5, the carbon black, graphite, metal carbides and various other coatings are used. Generally, the surface properties of the grid material i.e. the roughness of its surface is not indifferent in this respect [6]. Recently palladium (the work function of which is 4,99 eV) has also been used as grid coating diminishing emission (announcement of the RCA).

It can be seen from above said that the technical solution of the problem is far-flung enough and various properties of materials must be taken into account. According to experiments made as far among the elements in column 4 of the periodic system the study of the properties of silicon and silicides seemed to be especially promising.

The work function of the silicides which are, by the way, semiconductors of interesting properties is not yet determined. Nor has the work function of Si been determined in a way, satisfying in every respect. As to this latter, three data are known, namely 3,50 eV [9] for silicized tungsten surface 3,94 eV and for silicized molybdenum surface 3,9 eV [10]. Assuming that the work function of Si is near to that of C and Ge or may be interpolated between them, the

greater value seems to be more probable (the work functions of carbon and germanium are 4,39 and 4,78, respectively) [8, 9].

The work function of pure Si and that of the silicides will certainly be modified when the oxidation of the surfaces is not excluded. Concerning the work function of the  $\text{SiO}_2$  electron only an earlier information of measurement with the value of 5 eV is available [11].

In terms of the above the work function of various types of tungsten wires manufactured by the *United Incandescent Lamp and Electrical Company* was determined as the first phase of the problem. Although in the foreign literature reliable exact data are available for tungsten, the repetition of the measurement with home products seemed to be necessary. Indeed, in the manufacture of tungsten, metals of different quality and crystal structure are used and the question is whether their work functions are also different.

## II. The method of measurement and the discussion of the results

The measurements of work function performed by the method of Richardson's straight have the definite disadvantage that they are necessarily made at higher temperature and, besides, for carrying out of the measurement a temperature range of a certain magnitude as well as a time of measurement pertaining to this range are also necessary. For the sake of accuracy of measurement, this range extends to at least 100 °K. If we work in a smaller range the error limit of the value of work function will be higher than is permissible. In all cases where in the studied material, changes due to the influence of temperature occur, the method of Richardson's straight is not entirely satisfactory. This applies particularly to the thin surface layer whose properties change under the influence of heat treatment on account of compound formation, diffusion, desorption or other phenomena. Just for this reason such method is required for the measurement of the work function which allows the measurement of the material to be tested without heating it. For this purpose the curve displacement method is suitable to which allusion is made in many places in the literature in connection with problems of a similar kind. Such measurements have already been carried out and they agree satisfactorily with the measured values obtained by the method of Richardson's straight. The treatment in detail will be set forth in a later publication.

In the process of experiments the method of Richardson's straight had also been used in a modified form, partly with the purpose of shortening the time of measurement and thus decreasing to the minimum the surface changes during the measurement. The method of fixed  $A_0$  of JANSEN and LOOSJES [12] was used, the conception of which is as follows. Of the three constants occurring in Richardson's equation

$$j_s = A_0 e^{-\frac{\varepsilon}{k} \cdot \frac{d\varphi}{dT}} \cdot T^2 e^{-\frac{\varepsilon\varphi_0}{kT}}, \quad (1)$$

namely of  $A_0$ ,  $d\varphi/dT$  and  $\varphi_0$  only two can be determined by the straight method. Physical considerations mainly justify that of the three constants  $A_0$  is assumed to be a universal natural constant which is therefore identical for all materials. The value  $\varphi_0$  is the extrapolation of along the straight to the point  $T = A_0$ .  $A_0$  and  $\varphi_0$  are rather uncertain and fluctuating. Besides, they concern such extreme temperature which could never occur in reality. It seems expedient to give the magnitude of the work function for a certain temperature  $T > 0$  which is possible when the value of  $A_0$  is fixed. This can be made the more so as the  $A_0$  value of metals does not substantially differ in order of magnitude from the theoretical value of  $120 \text{ A/cm}^2 \text{ degree}^2$  [13]. The fixation of the value of  $A_0$  for the surface of each emitting material is equivalent in regarding the diversity of the so-called mass constant  $A$  of the emission equation as due exclusively to the variety of  $d\varphi/dT$ . Although thus the influence of the surface on  $A$  is not taken into account, no fewer information will be obtained than by the method of straight, since the data of both methods can be converted into one another.

### III. The determination of the work function of electrons in various kinds of tungsten

The measurement of work function of the various kinds of tungsten used for technical purposes is the same problem as the study of the evaporation of ingredients. Of the various sorts of tungsten (*T*, *GK*, *UC*, and *K*) wires of 200 microns in diameter and 200 mm in length were studied in the usual way, mounted as diodes in a vacuum tube.

Concerning the tungsten wire samples the following remarks may be made.

The material of the *T*-wire is a tungsten of very high purity. Its contaminations amount to 0,001 per cent, i.e. they are by an order of magnitude less than those of the other sorts of wire. Generally, the size of the crystal grains depends on temperature and the duration of heating but it does not attain the wire diameter of 200 microns.

The mean size of the crystal grains of the *UC* wire made with ingredients *K*, *Na* and *Si* [14] is a few millimeters longitudinally. The *GK* wire was made with ingredients *K*, *Na*, *Si*, *Fe*, *Al* [15] and the mean size of its crystal grains extends to a length of 0–4 cm.

The size of the crystal grains of the *K* wire made with ingredients *K* and *Al* is smaller than 200 microns [15].

The experimental tube was assembled with a getter mount containing zircon and tantal spiral as well as with a normal ionization manometer.

The structure of the experimental tube is as follows.

The wire with a diameter of 200 microns and length of 200 mm was placed in the axis of the anode cylinder to be measured and at the same time in that of the bulb. The stretching of the wire was ensured by a tungsten spring and the conduction by a soft nickel tape. The wires before assembling were submitted to electrolytic cleaning and to heating in  $H_2$  at  $1700^\circ C$ .

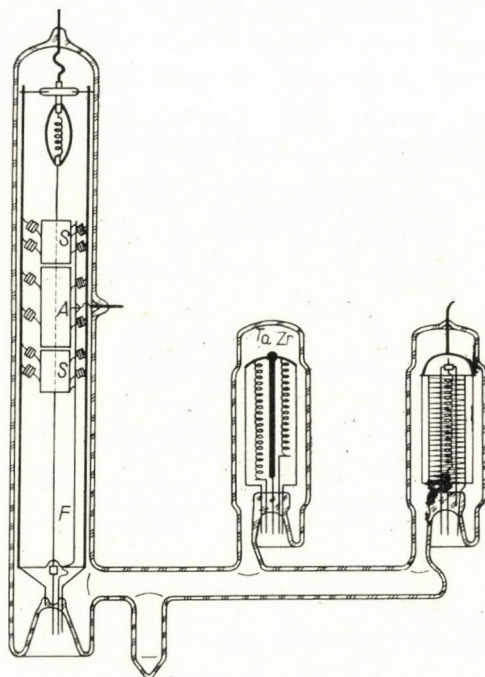


Fig. 1

Much care was given to the exact determination of the wire diameter as in the measurements the wire temperature was regulated by the exact setting of the filament current. The diameter was established partly in terms of the relation between weight and diameter of the wire, used in the workshop (the mean of 10 measurements), partly by optical methods (enlarging by 500) and finally by means of a very sensible gear micrometer with an accuracy of about  $\pm 0,5$  microns.

The scheme and the picture of the measuring set are shown in Fig. 1. The three anodes were placed at the centre in the direction of the wire length. The length of the anode to be measured was 40 mm, that of the protecting anodes 20 mm. To prevent the increase of temperature due to heat reflection, the anode plates were provided with holes.

The anodes were made of molybdenum plates. Before assembling they were submitted to chemical cleaning, heating in  $H_2$  at  $1200^\circ C$  and also in vacuum at  $1200^\circ C$ . Concerning the getter action of tantal and zircon it may be mentioned that with them anode heating was possible with closed pump if the anodes were previously annealed so that at  $800^\circ C$  a pressure of about  $10^{-6}$  torr was achieved. The released gases were then entirely bound by the tantal and zircon getters. The experimental tube with the pertaining units were annealed on the pump in an annealing furnace for 4–8 hours at about  $450^\circ C$ .

The magnitude of the vacuum produced was measured by means of an ionization manometer provided with an amplifier and available in commerce. The manometer was calibrated with a McLeod-manometer of suitable sensitivity ( $5 \cdot 10^{-6}$  torr). The comparison gave a result agreeing in order of magnitude. In the last phase of the measurements manometers of the Alpert system were used for the measurement of vacuum. This will be reported in a later publication. Concerning the absolute value of vacuum it may be assumed that this was in reality better than the measured value of  $10^{-7}$  torr. This could be concluded from the fact that in certain tubes the work function remained unchanged even after a standstill of 8–40 hours without the necessity of new flashing of the filament, which is a sign of extraordinarily good vacuum according to hitherto publications and experiences [16].

The tantal and zircon getter had to be used because the final setting of the work function had to be performed in a tube based to cut off, otherwise a vacuum better than that of the pump could not have been achieved in the tube and this should have led to the instability of the work function value. The glowing zircon metal and tantal metal could ensure the achievement of very good vacuum owing to the very small dissociation pressure of their compounds.

The value of the emission current was between  $10^{-9}$  and  $10^{-3} A$ . The maximum value of the applied anode voltage amounted to 400 V.

#### IV. Measurement and control of the wire temperature

In the measurements of emission the wire temperature was taken from the tables of JONES and LANGMUIR [17]. Thus by maintaining the filament current at an exact value in the measurement of current the temperature was held at a constant value. The temperature was controlled by means of a micro-pyrometer manufactured by the firm *Ribaud*, which was calibrated with Osram tungsten tape lamp.

#### V. Results of measurement

In the process of the experiment it was considered to be important that the degassing treatment on the pump be only of such degree as it was necessary for the achievement of high vacuum ( $10^{-7}$  torr) but the impurities in the wire



be removed possibly during the measurement. It was even shown by the measurements how the impurities in the single wires had influenced the work function. In principle the test had to be divided into two different groups. In the first group the impurities were removed only from the surface of the wire with the short flashes, in the other the wire was purified in its entire diameter by long heating. That this latter circumstance had already set in really in the wire was evidenced by the fact that the flash foregoing the measurement only quite slightly affected the work function. The results of the investigation of work functions due to long heating at 2400 °K are summarized in Fig. 2.

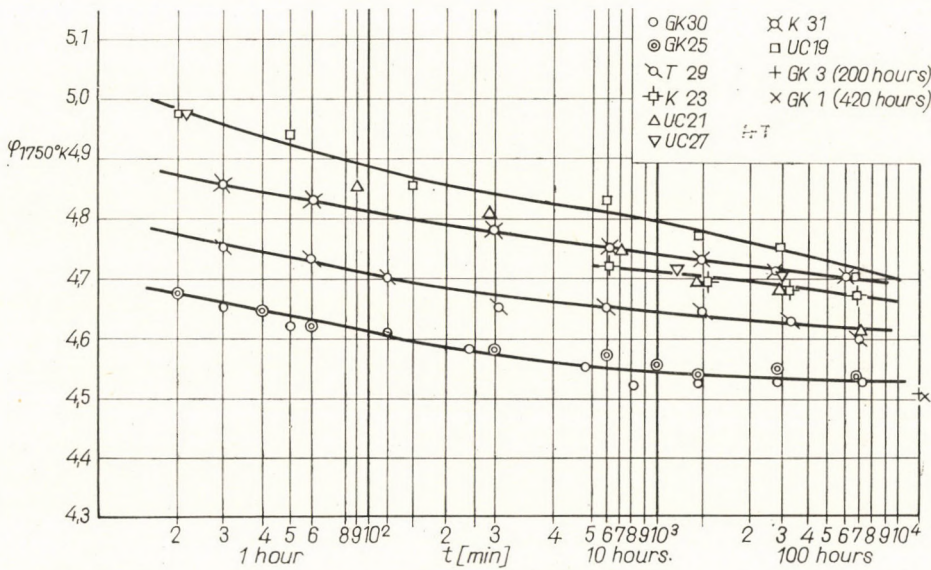


Fig. 2

The single points of the figure were established in such a way that the wire was flashed before each measurement at 2800 °K for about two seconds and then the value  $\varphi_{1700}^{\circ K}$  was computed exactly from the saturation current at the annealing temperature of 1700 °K by the method of fixed  $A$ , using Richardson's formula. At the single flashes, i.e. at each measurement the values of the emission current were noted as a function of time (mostly at every 10 seconds). The logarithm of the current values was extrapolated to the zero point of the timing. When the wire was contaminated, the extrapolation gave considerably higher saturation current value than measured 20 ÷ 30 seconds after the flash. With the progress of the wire purification the extrapolation following the flash had less and less importance, as has already been mentioned.

As can be seen from Fig. 2 for each type of wire without exception the value of the work function decreases in function of the annealing time. Sometimes this decrease of the work function sets in only after a longer period. For

filaments treated during the pumping at the relatively low temperature of 1800 °K, the first measurement gave small work function. The reason for this can be sought for probably in the alkali metal ingredients added intentionally in the manufacture of tungsten. This decrease of the work function could be observed only for some minutes during the heating at 2400 °C and on further heating the work function increased. The detailed study of this phenomenon requires further investigation.

In connection with the interpretation of the results of measurement the following question arises supposed that the flash purifies the surface why the work function of the mean surface of pure tungsten does not set in on the influence of the flash, independently of the duration of heating at 2400 °K. The reason for this is probably that no entirely pure tungsten surface can be developed by flash, at least while the level of impurities in the wire is high. If this were possible the process of long heating would become unnecessary and it would be enough to determine the characteristic saturation current of pure tungsten by means of logarithmic extrapolation after the flash.

The temperature of long heating was established at 2400 °K for the reason that the processes should not proceed too fast and could be studied well, further that the evaporation of tungsten should remain below the error limit of the measurements. It can clearly be seen from the diagram that the work function of the *GK* type tungsten wire with large crystal grain size in the first 100 hours of the process of purifying is less than that of each microcrystal variant. In the diagram the overall variation of two tubes made of the same *GK* wire is shown (tubes No. 25 and 30). This is completed by the data of two other tubes also made of the same wire, shown on the right side of the diagram. These latter two tubes were heated not at uniform temperature with the others but for some hours also at a temperature exceeding 2400 °K. If we convert the heating at higher temperature in terms of identical evaporation of tungsten, e.g. so that it be 2600 °K where the evaporation of tungsten is twenty times higher than at 2400 °K, then a heating at 2400 °K for 20 hours corresponds to that at 2600 °K for an hour. Thus the heating time of the tube No. 1 is 420 hours and that of No. 30 is 200 hours. The measurement data obtained thus well confirm the measured data of the former two *GK* tubes.

The largest work function is that of the *UC* type, then follows in decreasing order the tungstens of *K* and *T* type. The diagram also shows the relative accuracy of the single measurements and this agrees, after a heating time of about 10 hours, rather well with the uncertainty due to the establishment of temperature amounting to  $\pm 0,005$  V.

The single work functions are given in the diagram, as it has been mentioned, at 1700 °K, corrected to zero field strength with regard to the Schottky effect. The literature, however, generally contains values extrapolated to absolute zero grade. For comparison's sake our values computed exactly

were also extrapolated for  $T = 0$ . The extrapolation was carried out by means of values  $d\varphi/dT$  obtained from the work functions  $\varphi_T$  measured at several temperatures. (The values of  $d\varphi/dT$  ought to be understood with the assumption of  $A_0 = 120$ ). For the determination of an interval of relatively not very high temperature, that of 1600 to 1850 °K was available. Owing to the relatively high emission, at a temperature higher than this a charge influencing the measurement appeared on the glass wall of the bulb.

The uncertainty of  $\pm 0,005$  V of the work function at a temperature difference of 250 °K means an error of  $\pm 5,6 \cdot 10^{-5}$  V/degree in the determination

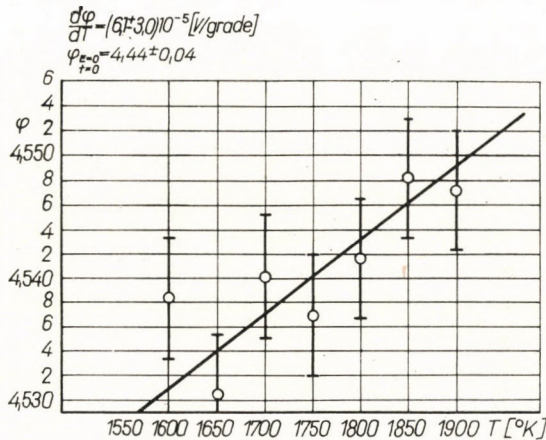


Fig. 3

of  $d\varphi/dT$ . According to data available the temperature coefficient of the work function of pure tungsten is  $6 \cdot 10^{-6}$  V/degree, i.e. approximately the half of the measuring error which must be taken into account during two measurements. In order to obtain an acceptable result many values of work functions must be determined at various temperatures. As a result for the  $d\varphi/dT$  value of GK wires  $(6 \pm 3) \cdot 10^{-5}$  V/degree was obtained (Fig. 3).

For the other types of tungsten the measurements gave results of the same order of magnitude.

Applying the above value of  $d\varphi/dT$  for all sorts of tungsten to the extrapolation of  $\varphi_T$  for  $T = 0$ , according to the relation

$$\varphi_{T=0} = \varphi_{1750^\circ K} - 0,105 \pm 0,052 \quad (2)$$

after heating at 2400 °K for 100 hours the results shown in Table I are obtained.

The work function of the  $T$  wire agrees well with the value given in the literature for pure tungsten as the  $T$  wire is contaminated least of all. The work function of the GK wire is, however, by about 0,1 V smaller than this value. It

agrees, in turn, with the value of the work function given for the tungsten monocrystal known from the literature [18].

As to the absolute accuracy of the measurement of work function, two error sources must particularly be taken into consideration. The first of them is the information obtained by means of the disappearing-filament optical

Table I

Types of wire	$\varphi_{T=0}$ [eV]
GK	$4,42 \pm 0,04$
T	$4,52 \pm 0,04$
K	$4,57 \pm 0,04$
UC	$4,62 \pm 0,04$

micropyrometer, allowing to establish to what extent the relation between current density flowing across the wire and wire temperature given in the table of Langmuir can be applied to the tungsten types studied. The second error source is in the measurement of diameter of the wire under test which is necessary for the determination of current density. Of the two error sources the error in the determination of the wire diameter is more essential. In case of the wires with a diameter of 200 microns used by us, this means that an error of 1 micron in diameter corresponds to a difference of about  $8^\circ$  in temperature. The conversion of these 8 grades to the value of  $\varphi_T$  gives 0,022 V in the measurement range used by us. Consequently, with the balance of the diameter error the data of Table I are real.

With the more exact determination of the possible errors the future task is to interpret the relatively small work function of the GK tungsten wire. It is not excluded that the work function of the wire made of monocrystal differs from that of the polycrystalline one. Owing to the drawing of the wire other crystal faces come to the surface or these crystal faces are at the surface in other proportions to each other in the monocrystal and polycrystal wires. The wires used in our studies were submitted to electrolytic etching as usual in the industry and subsequently to heating at  $1700^\circ\text{C}$ . Hereby the smoothness of the surface became uniform to a certain extent, however, the different etching behaviour, of the surface of polycrystals and monocrystals must be taken into consideration.

Since the investigations described above are forming an integral whole, it would break up the unity of this paper and make it too lengthy, if we would present the results of our further investigations, the summary of which we give hereunder.

In the course of improving our investigations, another method for the measurement of the work function was developed as well: i.e. the method of

the displacement of the characteristics, in order to avoid the change of the investigated surface during the measurements. The work function of pure and silicized tungsten surfaces and surfaces coated by evaporation with barium plus barium oxide was measured by this method.

These measurements confirmed our conception inasmuch as it could be stated that the work function of the tungsten with silicized surface is greater than that of the pure tungsten surface, further that the work function of the silicized tungsten surface coated by evaporation with barium oxide is greater than that of the pure tungsten surface coated by evaporation with barium and barium oxide.

The description of these studies will be made in two subsequent publications.

## REFERENCES

1. WINTER, E.: Hungarian Patent No. 131.262 (1941).
2. WINTER, E.: Hungarian Patent No. 138.108 (1944).
3. FITZER, E.: Austrian Patent No. 178.779 (1952).
4. TSARJEV: Design of Electron Tubes (in Hungarian). Műszaki Kiadó, Budapest; 95.
5. Grid Gilding (Invention of WINTER E.). United Lamps and Electric Company (Egyesült Izzólámpa és Villamossági Rt.) Laboratory of Electron Tubes 1931.
6. DORCELO: Gitterprobleme. *Funktechnik* **15** (1957), 528.
7. BRAUN—BUSCH: *Helv. Phys. Acta* **20** (1947), 33.
8. MEYERHOF: *Phys. Rev.* **71** (1947), 727.
9. ESAKI: *J. Phys. Soc. Japan* **8** (1953), 347.
10. VÁCZ, I.: The Work Function of Tungsten-Molybdenum-Disilicide in Pure State and after Coating with Evaporated Barium Oxide (in Hungarian). *MTA VI. Oszt. Közleményei* **23** (1960).
11. SPANNER: *Ann. Phys.* **75** (1924), 609.
12. JANSEN—LOOSJES: *Philips Research Reports* **8** (1953), 81.
13. REIMANN: Thermionic Emission. Chapman and Hall, London 1934; 99.
14. MILLNER, T.: *MTA VI. Oszt. Közleményei.* **21** (1957), 243.
15. Private communication of J. NEUGEBAUER to whom the author will express his acknowledgement here.
16. ALPERT, D.: *J. Appl. Physics* **24** (1953), 860.
17. JONES—LANGMUIR: *General El. Review* **30** (1927), 310.
18. DOBRETSOV: Electron and Ion Emission (in Hungarian). Akadémiai Kiadó, Budapest 1956; 64.

#### Die Austrittsarbeit von mit verschiedenen Zusätzen hergestellten Wolframdrähten.

Um die zweckentsprechenden Eigenschaften der Elektronenröhren sicherzustellen, erwies es sich als notwendig, die Austrittsarbeit von verschiedenen Werkstoffen, Glühkathoden usw. zu bestimmen. Die Austrittsarbeit von vier, mit verschiedenen Zusätzen hergestellten Wolframdrähten wurde in Abhängigkeit von der Glühzeit der Drähte gemessen. Auf Grund der Messungen wurde festgestellt, daß die Möglichkeit der Bestimmung der wahren Austrittsarbeit vom Verschwinden (Verdampfen) der im Wolframgrundstoff ursprünglich vorhandenen und der für Erzielung der Wolframeigenschaften absichtlich zugesetzten fremden Verunreinigungen abhängt. Die Abweichung der Austrittsarbeit von den im Schrifttum mitgeteilten Angaben hängt daher nicht nur vom Erscheinen der aus dem Vakuum adsorbierten Gasschicht auf der Wolframoberfläche ab, sondern darüber hinaus noch von den aus dem Innern des Wolframdrahts herausdiffundierenden, auf der Oberfläche des Wolframdrahts erscheinenden fremden Stoffen. Während der Messungen konnte festgestellt werden, daß die endgültigen Werte der Austrittsarbeit nach verschieden langer Zeit der Verdampfung der verschiedenen Verunreinigungen sich einstellen.

**Le travail de sortie des fils de tungstène fabriqués avec différents additifs.** Pour assurer certaines caractéristiques des tubes électroniques, il a été nécessaire de déterminer le travail de sortie de différentes matières, de cathodes incandescentes, etc. L'auteur a mesuré, en fonction du temps d'incandescence des fils, le travail de sortie de quatre fils de tungstène fabriqués avec des additifs de composition différente. Les mesures ont montré que la déterminabilité du travail de sortie correct dépend de la disparition (évaporation) des matières étrangères présentes dès le début dans la matière de base, et des impuretés qui y ont été introduites en vue d'obtenir certaines qualités du fil de tungstène. L'écart entre le travail de sortie et les valeurs publiées ne dépend donc pas seulement de l'apparition, à la surface du tungstène, de couches gazeuses adsorbées de l'enceinte à vide, mais aussi des matières étrangères se diffusant de l'intérieur du tungstène et apparaissant à la surface du fil. Les mesures ont permis de constater que les valeurs définitives du travail de sortie sont atteintes après évaporation des différentes impuretés à des temps divers.

**Работы выхода вольфрамовых проволок, изготовленных с использованием различных добавок (И. Вац).** В интересах получения соответствующих свойств электронных деталей стало необходимым определить работу выхода различных материалов, нагревательных катодов и т. д. Измерена работа выхода вольфрамовых проволок, изготовленных при использовании добавок четырех различных составов, в функции нагрева проволок. На основе измерений можно было установить, что определимость коррективных значений выхода вольфрамовых проволок зависит от исчезновения (испарения) посторонних примесей, внесенных намеренно для достижения вольфрамовых свойств и первоначально присутствовавших в исходном материале вольфрама. Следовательно, отклонение значения работы выхода, от указанного в технической литературе, зависит не только от появления на поверхности вольфрама слоев газа, адсорбировавшихся из вакуумного пространства, но, кроме того, также от посторонних веществ, появляющихся на поверхности вольфрамовой проволоки и диффундирующих из внутренних частей самой вольфрамовой проволоки. Во время измерений было установлено, что окончательные значения работы выхода устанавливаются только после испарения различных примесей после различных промежутков времени.

## DIREKTE ZERLEGUNG VON POLYNOMEN IN HURWITZSCHE UND ANTIHURWITZSCHE KOMPONENTEN

T. FREY

RECHENZENTRUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 11. Januar, 1966]

Bei der Dimensionierung von Filtern ist die mühevollste Teilaufgabe die sehr genaue Zerlegung des aus dem Quadrat der unabhängigen Veränderlichen gebildeten Polynoms mit reellen Koeffizienten in die sogenannte Hurwitz-Komponente, welche das Produkt der zu den Wurzeln mit negativem reellen Teil gehörigen Wurzelfaktoren enthält und in die sogenannte Anti-Hurwitz-Komponente, welche das Produkt der übrigen Wurzelfaktoren enthält. Die Bestimmung des ganzen Systems der Wurzeln sammelt viel überflüssige Information und benötigt daher zuviel Arbeit. Der Aufsatz gibt eine viel wirkungsvollere Perturbationsmethode für die Lösung der Aufgabe an, die ohne Bestimmung der Wurzeln direkt die Zerlegung durchführt und deren Genauigkeit dem Zweck entsprechend geändert werden kann.

### I

Die Informationsübertragung durch mehrere Kanäle benötigt sehr viele Filter. Alle Versionen der schweren Arbeit der Planung bzw. Berechnung von Filtern benützen das Polynom

$$R_{2n}(p) = (-1)^n p^{2n} + r_{2n-2} p^{2n-2} + r_{2n-4} p^{2n-4} + \dots + r_2 p^2 + r_0 \quad (1)$$

mit reellen Koeffizienten und nichtnegativem  $r_0$  soll in das Produkt eines sog. »Hurwitzschen« und eines sog. »Antihurwitzschen« Faktors faktorisiert werden. Die Gleichung  $R_{2n}(p) = 0$  besitzt nämlich mit der Wurzel  $p = \alpha + j\beta$  auch die Nullstelle  $-p = -\alpha - j\beta$  (da  $R_{2n}$  nur von  $p^2$  abhängt), ferner die Nullstellen  $p = \alpha - j\beta$  und  $-p = -\alpha + j\beta$  (da  $R_{2n}$  mit reellen Koeffizienten aufgebaut ist). Besitzt also  $R_{2n}$  keine rein imaginären Nullstellen, so nennt man das Polynom ( $s + 2s^2 = n$ ):

$$H_n(p) = \prod_{k=1}^s (p + \alpha_k) \cdot \prod_{l=1}^{s'} (p + \alpha_l - j\beta_l)(p + \alpha_l + j\beta_l) = \\ = \prod_{k=1}^s (p + \alpha_k) \cdot \prod_{l=1}^{s'} (p^2 + 2\alpha_l p + \alpha_l^2 + \beta_l^2)$$

mit

$$\alpha_k > 0; k = 1, 2, \dots, s; \alpha_l > 0, l = 1, 2, \dots, s'; \quad (2)$$

$$A_n(p) = (-1)^n \cdot \prod_{k=1}^s (p - \alpha_k) \cdot \prod_{l=1}^{s'} (p^2 - 2\alpha_l p + \alpha_l^2 + \beta_l^2)$$

die Antihurwitzsche Komponente von  $R_{2n}(p)$ . Besitzt nun  $R_{2n}(p)$  auch rein imaginäre Nullstellen, so bilden diese doppelte Wurzelpaare. In diesem Falle kann man diese Wurzeln mit Hilfe eines Euklidischen Algorithmus eliminieren. Wir setzen also im folgenden voraus, daß  $R_{2n}$  keine rein imaginären Nullstellen besitzt.

Früher faktorisierte man (1) in ein Produkt  $H \cdot A$  so, daß man numerisch alle Wurzeln von (1) berechnete. Neuere Verfahren haben Iterationsfolgen für unendliche Matrizen angewendet (s. z. B. [1], [4], [2]). Eine solche Rechnung ist jedoch schon sehr zeitraubend, falls  $n$  groß ist, und noch mehr, wenn die Wurzelgruppen von (1) einander nahe liegen, und man  $H$  und  $A$  mit einer großen Genauigkeit benötigt. Praktisch ist dies immer der Fall bei der Planung von komplizierten Filtern.

Jedoch sammelt man viel mehr Information als es notwendig wäre, falls man alle Wurzeln von (1) aufsucht, um die Faktorisierung  $R_{2n} = H_n \cdot A_n$  anzugeben. Ebendeswegen liegt es nahe, einen direkten Weg für diese Aufgabe zu geben, um mit dem Rechenaufwand zu sparen. M. UZSOKI hat ein solches, direktes Verfahren aufgebaut, welches die Tatsache benützt, daß diese Faktorisierung eben den inversen Algorithmus des bekannten Graeffeschen Verfahrens bedeutet. Diese Ergebnisse werden in der Dissertation von UZSOKI publiziert. Wir geben hier unten einen anderen Algorithmus für diese Aufgabe an, der sich für Rechenautomaten eignet und der den Grundgedanken eines Newtonschen Verfahrens (s. z. B. [3]) verallgemeinert und benützt.

## II

Die Relation (2) zeigt, daß das Hurwitzsche Polynom

$$H_n(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_2p^2 + a_1p + a_0 \quad (4)$$

nur reelle, nichtnegative Koeffizienten besitzt. Da weiter die Wurzeln von  $A_n(p)$  sogar die Nullstellen von  $H_n(p)$  — multipliziert mit  $(-1)$  — sind, so folgt, daß  $A$  die Form

$$A_n(p) = (-1)^n p^n \pm \dots + a_2p^2 - a_1p + a_0$$

besitzt.

Man kann somit ein Newton-Raphson'sches Verfahren bzw. die Verallgemeinerung dieses Verfahrens (s. [5]) benützen, um diese Faktorisierung anzugeben. Es bezeichne also  $P_{2n}(p)$  ein solches Polynom, für welches man die gesuchte Faktorisierung  $H^{(1)} \cdot A^{(1)}$  schon kennt, und welches nicht weit von  $R_{2n}$  steht. ( $R_{2n}$  ist oft in einer gestörten Form

$$R_{2n} = H^{(1)} \cdot A^{(1)} + \varepsilon^2 Q(p^2) \quad (6)$$



angegeben; wenn es nicht so ist, kann man  $H^{(1)}$  beliebig, z. B. in der Form

$$H^{(1)} = p^n + p^{n-1} + \dots + p^2 + p + 1 \quad (7)$$

annehmen, um  $P_{2n}(p)$  anzugeben). Betrachten wir nun die Faktorisierung eines parameterabhängigen Polynoms

$$S_{2n}(p; t) = P_{2n}(p) + 2t [R_{2n}(p) - P_{2n}(p)] \quad (8)$$

in das Produkt  $H_n(p; t) \cdot A_n(p; t)$ . Es sei denn

$$H_n(p; t) = p^n + a_{n-1}(t)p^{n-1} + a_{n-2}(t)p^{n-2} + \dots + a_2(t)p^2 + a_1(t)p + a_0(t) \quad (9)$$

bzw.

$$A_n(p; t) = (-1)^n p^n - (-1)^n a_{n-1}(t)p^{n-1} \pm \dots + a_2(t)p^2 - a_1(t)p + a_0(t).$$

Es gilt nun hier  $S_{2n}(p; 0) \equiv P_{2n}(p)$ , folglich

$$H_n(p; 0) \equiv H^{(1)}(p); \quad A_n(p; 0) \equiv A^{(1)}(p),$$

ferner

$$S_{2n}\left(p; \frac{1}{2}\right) \equiv R_{2n}(p),$$

d. h.

$$H_n\left(p; \frac{1}{2}\right) \text{ bzw. } A_n\left(p; \frac{1}{2}\right)$$

ist die gesuchte Zerlegung von  $R_{2n}$ . Da nun

$$S_{2n}(p; t) \equiv H_n(p; t) \cdot A_n(p; t),$$

so gilt auch

$$\frac{\partial S_{2n}(p; t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial H_n(p; t)}{\partial t} \cdot A_n(p; t) + H_n(p; t) \cdot \frac{\partial A_n(p; t)}{\partial t}. \quad (10)$$

Bildet man hier die Ableitungen, bezeichnet ferner den Spaltenvektor, gebildet mit den Koeffizienten von  $H_n(p; t)$  durch  $\mathbf{h}(t)$ , denjenigen aber, gebildet mit den Koeffizienten von  $R_{2n}(p) - P_{2n}(p)$  — den wir als ein Polynom von  $p^2$  betrachten — durch  $\Delta$ , so ergibt sich aus (10) das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{H}(\mathbf{h}) \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \Delta, \quad (11)$$

da (10) eine Kongruenz in  $p$  ist, d. h. die Koeffizienten von  $p^k$  in  $\partial S/\partial t$  bzw. in

$$\frac{\partial H}{\partial t} A + H \frac{\partial A}{\partial t}$$

für  $k = 2n - 2, 2n - 4, \dots, 4, 2, 0$  einander gleich sind.  $H(\mathbf{h})$  ist in (11) die bekannte Hurwitzsche Matrix (woraus gleich folgt, daß  $H$  nicht singulär ist, wenn  $R$  bzw.  $P$  keine rein imaginären Nullstellen besitzt bzw. diese wir schon eliminiert haben, da die Hurwitzsche Matrix eines Hurwitzschen Polynoms eine streng positive Determinante hat):

$$H(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} -a_{n-1}(t) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n-3}(t) & a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -a_1(t) & a_2(t) & -a_3(t) & a_4(t) & \dots & -a_{n-1}(t) & 1 \\ 0 & a_0(t) & -a_1(t) & a_2(t) & \dots & -a_{n-3} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_0(t) & \dots & -a_{n-5} & a_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Um also  $H_n(p)$  anzugeben, soll man die Differentialgleichung (11) von  $t = 0$  ( $\mathbf{h}(0)$  ist hier durch  $H^{(1)}$  definiert) bis  $t = 1/2$  numerisch integrieren.

Die praktische Durchführung der numerischen Integration von (11) ist nicht leicht, da man (11) in der Form

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = H^{-1}(\mathbf{h}) \cdot \Delta \quad (13)$$

betrachtet, und  $H$  im allgemeinen schlecht konditioniert ist, ferner da man  $\mathbf{h}(1/2)$  mit vielen pünktlichen Dezimalstellen benötigt. Eben deswegen benützt man den folgenden numerischen Algorithmus: Die numerische Integration von (13) führen wir mit Hilfe des Runge-Kuttaschen Algorithmus mit automatisch gewählter Schrittweite aus; wir haben jedoch in [6] eine verbesserte Variante dieses Algorithmus angegeben, der in dem betrachteten Fall sehr günstig und auch dann brauchbar ist, wenn  $H(\mathbf{h})$  für eine Zwischenstelle  $t_1 \in (0; 1/2)$  singulär wäre. Die Fehlergrenze ist durch die Genauigkeit von  $H^{-1}$  angegeben.  $H$  ist nämlich in den praktischen Fällen so schlecht konditioniert, daß man mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsalgorithmus — durchgeführt mit 12 Dezimal-

stellen — die Elemente von  $\mathbf{H}^{-1}$  nur mit 1–2 genauen Dezimalstellen bekommt. Die so gewonnene Näherung von  $\mathbf{H}^{-1}$  sei durch  $\hat{\mathbf{H}}^{-1}$  bezeichnet.  $\hat{\mathbf{H}}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{K}$  liegt also genug weit von der Einheitsmatrix, ist jedoch bereits gut konditioniert. Wendet man also den Gaußschen Algorithmus für  $\mathbf{K}$  an, so bekommt man  $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{H}}$  mit 8–10 genauen Dezimalstellen. Somit ergibt endlich das Produkt  $\mathbf{K}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{H}}^{-1}$  die gesuchte Inverse  $\mathbf{H}^{-1}$  mit 5–6 genauen Dezimalstellen. Dadurch ist auch die Genauigkeit des Runge-Kutta-Algorithmus charakterisiert. (Man braucht dazu 2–5 Schritte.) Somit ergibt sich  $\mathbf{h}(1/2)$ , d. h.  $H_n(p)$  auch nur mit 5–6 Dezimalstellen.

Mit Hilfe des so gewonnenen Näherungspolynoms  $H_n(p; 1/2)$  bzw.  $A_n(p; 1/2)$  bauen wir ein  $P_{2n}^{(1)} = H_n(p; 1/2) \cdot A_n(p; 1/2)$  auf. Da aber  $H_n(p; 1/2)$  bereits sehr nahe  $H_n(p)$  liegt, benützen wir hier eine doppelt-genaue Arithmetik, ferner zur Verfeinerung von  $H_n(p; 1/2)$  die sog. modifizierte Newton-Raphson-Methode; wir arbeiten nämlich in den weiteren Schritten mit der fixierten Inversen  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{h}(1/2))$ , welche wir bei dem letzteren Runge-Kutta-Schritt berechnet haben. Es bezeichnet also  $\Delta^{(1)}$  den Koeffizienten-Vektor der Differenz  $R_{2n}(p) - P_{2n}^{(1)}(p)$ . So ergibt sich

$$d\mathbf{h}^{(1)} = \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{h} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \Delta^{(1)} \cdot \frac{1}{2} \quad (14)$$

und

$$\mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{h}(1/2) + d\mathbf{h}^{(1)}.$$

Das Polynom  $H_n^{(2)}$ , gebildet mit Hilfe von  $\mathbf{h}^{(2)}$  wird ebenso viele neue genaue Dezimalstellen haben, wie genau  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{h}(1/2))$  ist. Genügt diese Genauigkeit uns noch nicht, so können wir

$$P_{2n}^{(2)} = H_n^{(2)} \cdot A_n^{(2)}, \Delta^{(2)}$$

und

$$d\mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{h} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \Delta^{(2)} \cdot \frac{1}{2} \quad (15)$$

bzw.  $\mathbf{h}^{(3)} = \mathbf{h}^{(2)} + d\mathbf{h}^{(2)}$  berechnen, wodurch wir wieder neue genaue Dezimalstellen in  $H_n^{(3)}$  bekommen, usf.

#### SCHRIFTTUM

1. BAYARD, M.: Théorie des réseaux de Kirchhoff: régime sinusoïdal et synthèse. *La Revue d'Optique* (1954).
2. BAUER, F. L.: Ein direktes Iterationsverfahren zur Hurwitz-Zerlegung eines Polynoms. *Arch. Elektr. Übertr.* **9** (1955), 285–290.
3. TUTTLE, D. F. jr.: *Network Synthesis*. Wiley, New-York 1958; Vol. 1, 1130–1135.
4. BINGHAM, I. A. C.: A New Method of Solving the Accuracy Problem in Filter Design. *IEE-TCT* (1964), Sept.
5. FREY, T.: Lösung von Gleichungen durch schrittweise Störung. *Studia Math.* (1957), T. 2. (in Druck).
6. FREY, T.: Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval (Lösung von Gleichungen durch schrittweise Störung), II. *MTA Számítástechnikai Közpointi Közleményei* **2** (1957), in Druck.

**Direct Decomposition of Polynomials into Hurwitz and Anti-Hurwitz Components.**

In the dimensioning of filters, the most tedious task is the very accurate decomposition of the polynomial with real coefficients into the so-called Hurwitz component, which contains the product of the root factors belonging to the roots with negative real parts and into the so-called anti-Hurwitz component, containing the product of the other root factors. The determination of the complete system of roots accumulates much superfluous information and therefore it is too cumbersome. The paper presents a far more efficient perturbation method for the solution of the problem, by which the decomposition is carried out without determination of the roots, and the accuracy of which can be varied according to requirements.

**Décomposition directe des polynomes en composantes Hurwitz et anti-Hurwitz.**

Au dimensionnement des filtres, le problème exigeant le plus de travail est la décomposition de grande exactitude du polynome à coefficients réels formé par le carré de la variable indépendante, d'une part en composantes de Hurwitz contenant le produit des facteurs radicaux appartenant aux racines à parties réelles négatives et d'autre part en composantes anti-Hurwitz contenant le produit du reste des facteurs radicaux. La détermination du système complet des racines réunit beaucoup d'informations superflues et pour cette raison, elle est trop laborieuse. L'étude présente une méthode de perturbation beaucoup plus efficace pour la solution du problème, méthode qui effectue la décomposition directement, sans détermination des racines, et dont la précision peut être modifiée selon les besoins.

**Непосредственное разложение полиномов на компоненты и антикомпоненты Гурвица (Т. Фрей).** При расчете фильтров наиболее трудоемкой частной задачей является очень точное разложение полинома с действительными коэффициентами, образованного из квадрата независимой переменной, на т. н. компоненты Гурвица, содержащие произведение коэффициентов корней, действительных для корней с отрицательной действительной частью, и антикомпоненты Гурвица, содержащие произведение остальных коэффициентов корней. Определение полной системы корней дает много лишней информации и поэтому является очень трудоемким. В работе излагается более эффективный пертурбационный метод решения задачи, при котором без определения корней разложение производится непосредственно, и точность этого метода можно выбирать в зависимости от требуемой точности.

## FURNACE SLAG CRUST HEAT CONDUCTIVITY MEASUREMENTS

G. BASSA

and

K. REMÉNYI

CAND. OF TECHN. SC.

HUNGARIAN ELECTRIC POWER PLANT

RESEARCH INSTITUTE FOR ELECTRICAL ENERGY

[Manuscript received February 8, 1967]

Slag crust phenomena observed in the course of pulverized coal firing cause diverse heat conductivity (heat insulation) characteristics, whereby in order to improve furnace chamber calculations, determination of the slag heat conductivity coefficient by measurements immediately at the location of origin appeared to be indispensable. As a measuring instrument the heat flow meter used by the Ijmuiden International Flame Research Association experimental station was employed, calculations involved the Soviet "calorimeter" principle, and the first experiments made use of a 5 kg/h output small-size pulverized coal firing installation. This method can be directly applied for determining the heating surface load figures of operational pulverized coal firing under either clean or slagged conditions, and to facilitate the understanding of cinder sheet characteristics.

Of the calculation methods used to determine the temperature of flue gas at the exit of the furnace chamber, the one according to the Soviet standard specifications, based mainly on the results achieved by Gurvich, pays particular attention to the influence exerted by furnace chamber contaminations. The relevant Soviet standard has introduced a  $\xi$  factor to express the extent of the contamination of heating surfaces. This  $\xi$  means, under the given conditions, the ratio of heat quantity transferred by radiation from the flue gas side to the water or steam side as compared to the theoretically maximum radiation-transmissible heat quantity or expressed in a formula:

$$\xi = \frac{T_L^4 - T_F^4}{T_L^4 - T_G^4} \quad (1)$$

where

$T_L$  flame temperature,

$T_F$  wall temperature,

$T_G$  steam temperature;

$\xi = \xi_{\max} = 1$ , if  $T_F = T_G$  could be encountered only in case of an infinitely high heat conductivity coefficient value.

The Soviet standard recommends the following informative  $\xi$  value figures:

Gas firing	1,00;
oil firing or coal of a high volatile matter content	0,75;
firing with coal types of low volatile matter content	0,60.

These data, however, did not prove acceptable. A 1964 publication by GURVICH [1] reports that powder type deposits on the boiler tubes may be observed in the case of gas firing without solid contaminations as well, which are capable of reducing the  $\xi$  value down to 0,6 or so. The  $\xi = 0,75$  value assumed for oil firing and high volatile matter content coal types, due to soot formation, is similarly uncertain, as the soot deposit formation depends — in addition to the composition of the fuel — on the firing technique and adjustment as well. Coal firing flue deposits, on the other hand, exhibit such diverse heat conductivity or heat insulation characteristics that it appeared necessary to determine the material properties of the deposit by direct measurements.

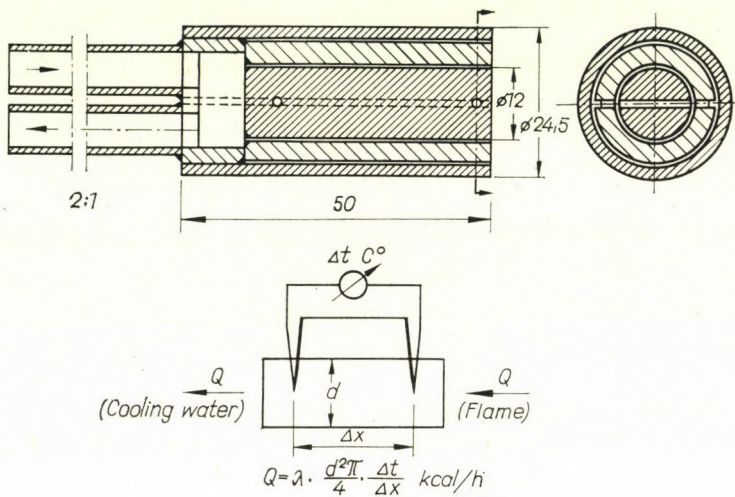


Fig. 1. Heat flow meter for slagging measurement purposes

In case of coal slags, the objective is to determine the heat conductivity coefficient of the slag proper.

Measurements should preferably be made at the very location of slag formation. This method is dealt with by the Soviet literature in detail: report are available on both operational [2] and semi-operational [3] experiments.

To measure the heat conductivity coefficient of the slag, the heat flow meter type used by the experimental station of the *Ijmuiden International Flame Research Association* [4] was employed (Fig. 1).

A probe introduced up to the chamber wall is suitable to determine the specific heating surface load, that is, the heat quantity radiated by the flame to the unit wall surface. The inside part of the heat flow meter consists of a 12 mm diameter manganese and molybdenum alloy steel plug having poor heat conductivity, containing a thermocouple at each end of the two locations. The steel plug is covered with two concentric cylinders serving radiation protective purposes. The probe face is flame radiated, whereas its bottom part

is water-cooled. The heat quantity passing through the steel plug is, in stationary condition, identical to the radiated heat quantity.

The probes were calibrated at the *Research Laboratory of the Fire Protection Agency Headquarters* by using an equipment of  $6 \text{ W/cm}^2$  (appr.  $5 \cdot 10^4 \text{ kcal/m}^2\text{h}$ ) capacity. Calibration points are covered by the band presented in Fig. 2.

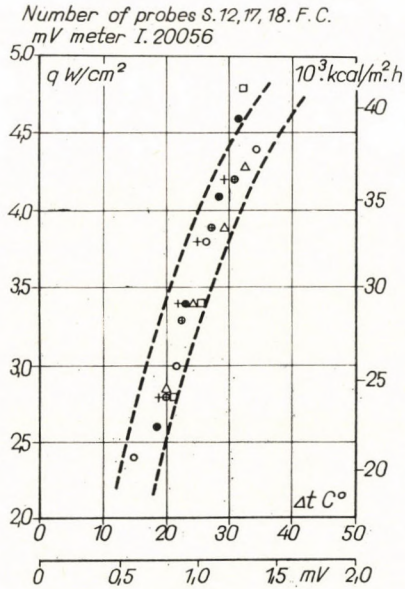


Fig. 2. Slag probe calibration

On grounds of the measurement data obtained, the heat conductivity coefficient of the internal steel plug of the probe ( $\lambda_d$ ) was calculated as follows:

The heat quantity flowing between two measurement points, according to MIKHEYEV [5] is:

$$Q = \lambda_d \frac{d_d^2 \pi}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{ kcal/h} \quad (2)$$

where

- $\lambda_d$  is the heat conductivity coefficient of the steel plug [kcal/m.h. °C];
- $d_d$  is the diameter of the steel plug [m];
- $\Delta t$  is the temperature difference between the two thermocouples; and
- $\Delta x$  is the distance between the same thermocouples.

Radiation was measured in  $\text{W/cm}^2$  thus equation (2) had to be transformed to:

$$q = \frac{Q}{\frac{d_d^2 \pi}{4}} = \lambda_d \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{ kcal/m}^2 \text{ h.} \quad (3)$$

Selecting a point in Fig. 2:

$$q = 3 \text{ W/cm}^2 = 3 \times 8,6 \cdot 10^3 = 25,8 \cdot 10^3 \text{ kcal/m}^2\text{h;}$$

$$\Delta t = 20 \text{ }^\circ\text{C;}$$

$$\Delta x = 0,035 \text{ m (see Fig. 1).}$$

It follows that

$$\lambda_d = q \frac{\Delta x}{\Delta t} = 25,8 \times 10^3 \frac{35}{10^3} \frac{1}{20} = 45,3 \text{ kcal/m.h. }^\circ\text{C.}$$

In case of higher load values the equation  $q = f(\Delta t)$  differs somewhat from the linear character owing to the fact that the radiation protective concentric tubes might warm up to a lesser degree and, therefore, a certain heat loss should be reckoned with to the wall of the steel plug.

The probe surface which may be considered as a noncooled heating surface will start to become slagged above a certain specific heat release. The heat quantities measured in either entirely clean or slagged condition, respectively, lead to the heat conductivity or heat insulation capacity of a slag layer having

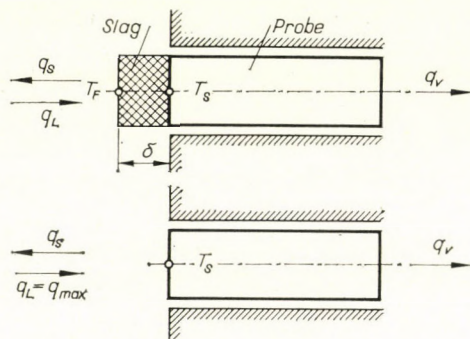


Fig. 3. Measurements with radiation meter probe

a known  $\delta$  thickness. Determination of the heat conductivity coefficient is by making use of the method introduced by PRASOLOV [6] with the symbols of Fig. 3 taken into consideration, where

$T_S$  is the wall temperature of the probe before contamination [ $^\circ\text{K}$ ];

$T_F$  is the temperature of the external surface of the slag deposited over the probe [ $^\circ\text{K}$ ];

$q_S$  is the heat quantity radiated from the slag deposited over the probe to its environment [ $\text{kcal/m}^2\text{h}$ ];

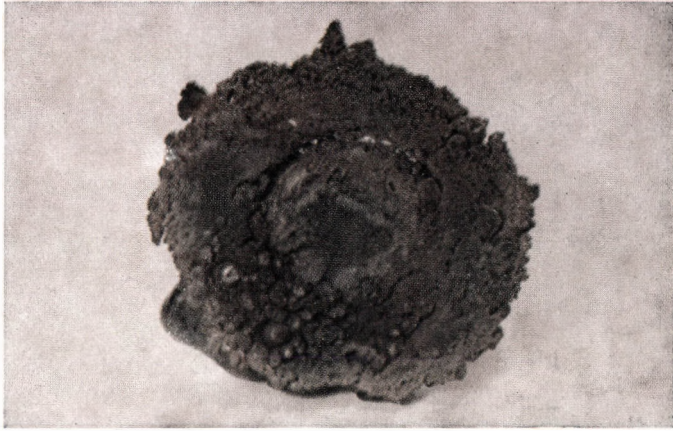
$q_L$  is the heat quantity radiated from the flame [ $\text{kcal/m}^2\text{h}$ ]; and

$q_V$  is the heat quantity transferred by the cooling water [ $\text{kcal/m}^2\text{h}$ ].

There is no other heat transfer but by radiation assumed between the flame and the probe, as the convective heat transfer is neglected. If a slag layer of  $\delta$  thickness is assumed to have been deposited onto the probe, then the heat quantity absorbed by the probe through the slag cover is

$$q_s = q_L - q_v \quad (4)$$





*Fig. 4.* Probe deposit sample, Oroszlánycoal



that is, the difference between the heat quantities radiated by the flame and transferred by the cooling water, respectively. This represents, at the same time, the heat quantity radiated by the probe to its environment (Kirchhoff's law). This heat quantity consists of two parts:

$$q_s = q'_s + q''_s \quad (5)$$

where

$q'_s$  is the self-radiation, and  
 $q''_s$  is the reflected radiation.

The self-radiation is

$$q'_s = \varepsilon_s C_0 T_F^4 \text{ kcal/m}^2\text{h}$$

where

$\varepsilon_s$  is the emission coefficient of the slag cover 0,95; and  
 $C_0$  is the radiation coefficient,  $4,9 \times 10^{-8} \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{°K}$ .

Reflected radiation is

$$q''_s = q_{\max} (1 - \varepsilon_s)$$

where

$q_L = q_{\max}$ , the maximum value of the heat quantity radiated from the flame, obtained by measurements with a clean probe surface.

Reducing equations (4) and (5) gives

$$\begin{aligned} q_{\max} - q_V &= q'_s + q''_s, \\ q_{\max} - q_V &= \varepsilon_s C_0 T_F^4 + q_{\max} (1 - \varepsilon_s) \end{aligned}$$

which leads to the formula

$$T_F = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_s \cdot q_{\max} - q_V}{\varepsilon_s \cdot C_0}} \quad (6)$$

and, in accordance with equation (3), to the heat conductivity of a slag layer of  $\delta$  thickness:

$$\lambda_S = \frac{q_V \cdot \delta}{T_F - T_S} \text{ kcal/m.h. °C.} \quad (7)$$

According to equation (7), direct determination of the heat conductivity coefficient of the slag deposited onto the probe requires the determination of  $q_V$ , that is, the heat quantity removed by the cooling water which is best calculated by means of equation (3), that is, by making use of the temperature drop measured at the steel plug, using the calibration diagram presented in Fig. 2.

$T_S$ , that is, the probe surface temperature which is obtained by adding the temperature difference measured at the probe ( $\Delta t$ ) to the temperature of the cooling water. In this case the temperature drop between the probe surface and the thermocouple at a distance of 2,5 mm, and between the water side thermocouple and the bottom plane, respectively, are neglected. Determination of the probe surface temperature, however, will be more accurate if, in addition to the  $\Delta t$  temperature difference between the two thermocouples, temperature is measured also by means of the flame-side thermocouple.

$\delta$ , that is, the thickness of the deposit; determination of the thickness which might be taken into account is rather difficult due to the irregularities of the

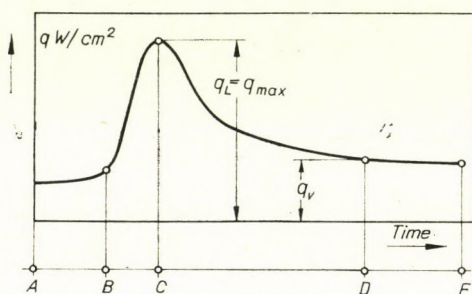


Fig. 5. Slagging scheme of the radiation probe

Denominations: AB no slag formation; BC load increasing; C beginning of the slag formation; CD slagging; DE state of equilibrium.

deposit proper. Usually, this must be decided on by estimation. Fig. 4 presents a deposit of a thickness relatively easy to deal with and measure.

$T_F$ , that is, the temperature of the external surface of the slag layer which, however, need not be measured directly as it can directly be calculated from the heat quantities measured in the clean, deposit-free condition.

The several heat quantities and symbols are illustrated by Fig. 5. The initial phase displays a load condition without slagging; if such a condition cannot be provided for, then the first moments of the probe introduction may be considered as the "clean" stage required for  $q_{max}$  measurements.

To test the measuring method a low output pulverized coal firing system was designed where the actual temperature conditions usually encountered in a furnace chamber were to be realized. Although the small size of the equipment and the extremely low quality of the fuel types to be tested brought about quite a number of difficulties, the firing installation itself appeared excellent for the purpose in question, and quite suitable for investigations on the various slag samples depending on composition as well as on the given operational conditions. This low-output pulverized coal firing system is illustrated by Figs 6 and 7, whereas its circuit diagram is presented by Fig. 8.

The pulverized coal used for test purposes, ground previously in an operational or laboratory mill is forwarded by a cell type coal dust feeder. The cylinder shaft is driven by a D. C. motor through an appropriate transmission. The pulverized coal quantity may be varied by means of resistors inserted into the exciter circuit.

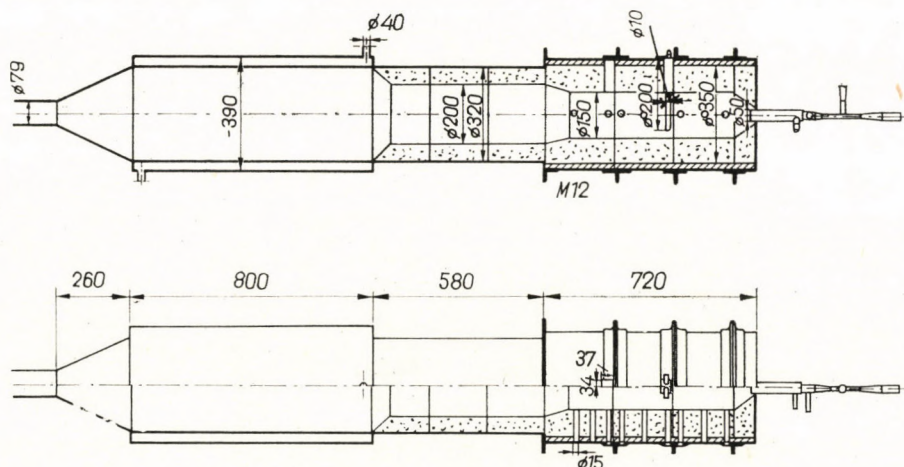


Fig. 6. Section of laboratory pulverized coal firing equipment

The 5 kg/h output coal dust burner consists of three concentric tubes. The coal dust was blown in through the middle tube by the primary air supply, the distribution of the primary and secondary air adjusted to 50 per cent each. The blast velocity of the primary air was 15 m/sec.

The concentric tubes surrounding the internal one may be used optionally to blow in either air or LPG. The blow-in area can be varied by the application

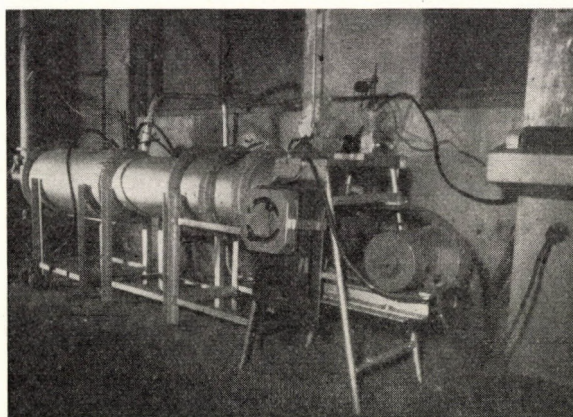


Fig. 7. Laboratory coal dust firing

of reducing sleeves. When dimensioning, the axial velocity of the secondary air was assumed to amount to 25 m/sec, and a vortex flow was employed.

The LPG introduction is similarly tangential, thus its exit is of the vortex type. The cross section can also be varied with reducing sleeves.

In the furnace chamber the stable ignition of the pulverized coal, a temperature sufficiently high for slag formation, and the accurate observation of burning had to be provided for. The furnace chamber has an "Alfogen" lining. At an 80 per cent firing efficiency, the average specific heat release amounts to 300 000 kcal/m<sup>3</sup>.h. The temperature of the flue gas at the firing-chamber's

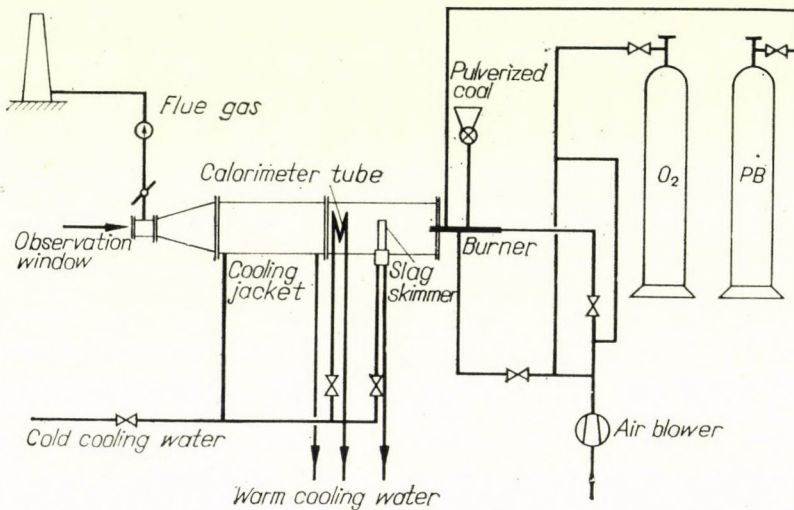


Fig. 8. Schematic diagram of laboratory pulverized coal firing equipment

exit is, at about 14 per cent CO<sub>2</sub> content, 1200 °C and, to provide for their cooling, the noncooled section has a water-cooled part attached.

The slag probe was introduced along the axis of the chamber through the observation window. In addition, the slag used for laboratory test purposes is collected by means of the watercooled U-type slag skimmer tube protruding into the combustion chamber (Fig. 9).

The equipment exhibited the following operational data:

*Coal quantity* was calibrated according to the various control resistor positions.

*The coal dust delivery air and secondary air tubes* have an ID of 25 mm. According to the relevant standards, such tubes usually have no measuring orifices installed and, therefore, quarter dials were dimensioned for a 10 Nm<sup>3</sup>/h, 400 mm W. G. overpressure air supply, with a 100 mm W. G. effective pressure. The associated characteristic curves were plotted in the laboratory.

Due to its small quantity, LPG was measured by a capometer. Its characteristic curve was also laboratory plotted up to a value of 700 lit/h.

The  $CO_2$  and  $CO$  content, respectively, of the flue gas at the exit of the combustion chamber was measured by a MONO-equipment. Several flue gas sampling facilities were provided for along the flame path.

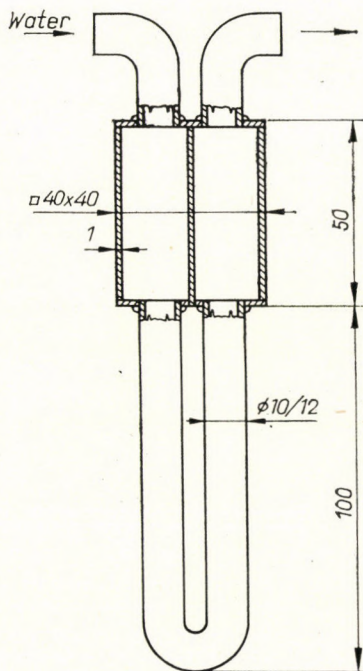


Fig. 9. Slag trap tube

Flue ash testing is made possible by sampling slots along the path of the gas fume.

Air heating was replaced by oxygen enrichment. The extent of oxygen enrichment of the primary or secondary air supply was calculated from the weight and pressure values of the oxygen containers employed.

The cooling water quantity of the jacket was measured by means of a water meter. With respect to the free discharge, small quantity, and the required accurate measurement of the calorimeter cooling water, the volume type measurement was selected.

In this small-size firing equipment the low quality coal types could be fired only if supported at the high temperature required for slag formation. Increased air heating is also advantageous, and an equivalent effect is ensured by oxygen enrichment [7]. According to the literature, pulverized anthracite requires a 400 °C air heating for stable ignition while an oxygen enrichment of

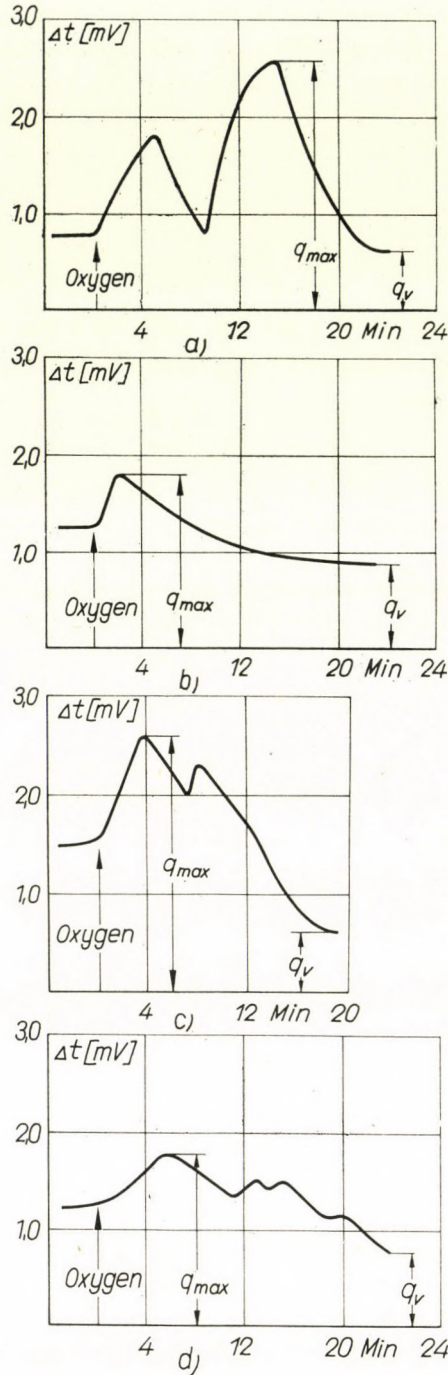


Fig. 10. Slag formation curve of Borsod coal (a), of Oroszlány coal (b), of Pécs intermediate product (c), and of Komló coal (d)



about 34 per cent would stabilize to the same degree without any preheating of the air. In our experiments the same method was selected and, according to the results of the experiments conducted, the appropriate air/gas/oxygen ratio has led in the low-output firing equipment to a slag formation identical to that obtained under operational conditions. This is verified by the macroscopic and microscopic sample studies reported on in a separate publication.

On grounds of the measurements, the calculation required for the determination of the heat conductivity coefficient of the deposit is as follows:

Figures 10a, 10b, 10c and 10d illustrate the slag formation curve of a Borsod, Oroszlány, Pécs and Komló coal type, respectively. With the symbols of Fig. 5, and the calibration curve of Fig. 2 taken into consideration, the results in case of, for example, Oroszlány coal, are as follows:

$$\begin{aligned} q_{\max} &= (\text{in case of } 1,8 \text{ mV}) = 44 \times 10^3 \text{ kcal/m}^2 \text{ h,} \\ q_v &= (\text{in case of } 0,75 \text{ mV}) = 24 \times 10^3 \text{ kcal/m}^2 \text{ h.} \end{aligned}$$

According to equation (6):

$$\begin{aligned} T_F &= \sqrt{\frac{(0,95 \times 44 \times 10^3 - 24 \times 10^3) 10^8}{0,95 \times 4,9}} = 780 \text{ }^\circ\text{K,} \\ t_F &= 780 - 273 = 507 \text{ }^\circ\text{C.} \end{aligned}$$

Making use of this in equation (7), the heat conductivity coefficient of the slag is obtained:

$$\lambda_s = \frac{24 \times 10^3 \times 1,5}{481 \times 10^2} = 0,75 \text{ kcal/m.h. }^\circ\text{C.}$$

Here the thickness of the slag layer,  $\delta$ , was substituted by  $1,5 \times 10^{-2}$  m, and if the measured temperature of the cooling water was  $t_v = 8$  °C and the temperature drop  $\Delta t = 18$  °C (see  $\Delta t$  at  $q_v$  in Table I), then the temperature of the probe surface can be assumed to be in clean condition as  $t_s = 8 + 18 = 26$  °C, and

$$T_F - T_S = t_f - t_s = 507 - 26 = 481 \text{ }^\circ\text{C.}$$

In this example it is obvious that the temperature drop of a 15 mm slag layer amounts to 481 °C which means that the slag cover actually represents an excellent heat insulation. Similar conditions exist in case of a 200 to 300 °C tube wall temperature except that the temperature of the outer surface of the slag cover would increase accordingly.

In Table I the measurement and calculation results on three further coal types are summarized. The order of magnitude of the heat conductivity coefficients obtained is in good agreement with the Soviet research results.

With the heat conductivity coefficient of the slag known, an objective measurement figure is obtained for the furnace chamber heat flow restrictive characteristics of the various slag covers. So far only subjective observation results have been available on the quality and quantity of slag formation as well as on the deposit formation rate with different firing systems and coal types. Slag formation quality is particularly easy to characterize by means of the objective measurement method, but deposit quantities are similarly easy to

**Table I**  
*Heat conductivity coefficient of different coal slags*

Quantities	Coal type			
	Borsod	Oroszlány	Pécs	Komló
Moisture content [%]	11,7	11,0	2,5	2,9
Ashes [%]	47,0	35,4	50,8	44,7
Volatile matter [%]	22,4	33,1	13,5	18,5
Fix C [%]	18,9	20,5	33,2	33,9
Calorimetric value [kcal/kg]	2508	3318	3342	3831
Leitz softening point [°C]	1210	1280	1260	1180
$\Delta t$ at $q_{\max}$ [mV/C°]	2,60/65	1,80/45	2,60/65	1,75/44
$\Delta t$ , at $q_v$ [mV/C°]	0,60/15	0,75/18	0,65/16	0,78/19
$q_{\max}$ [ $10^3$ kcal/m <sup>2</sup> h]	49	44	49	42
$q_v$ [ $10^3$ kcal/m <sup>2</sup> h]	18	24	20	25
$T_F/t_F$ [K°/C°]	880/607	780/507	885/612	740/467
$\delta$ [ $10^{-2}$ m]	3	1,5	4	2,5
$t_v$ (Cooling water) [°C]	16	8	16	18
$\lambda_s$ [kcal/m.h.C°]	0,94	0,75	1,38	1,45

estimate from the slag quantity adhered to the probe and, with the slagging curves (Fig. 10) known, conclusions may be arrived at on the slagging rate.

By the operational method suitable for the determination of the heat conductivity coefficient of the slag crust, significant progress was made towards the better understanding of the heat development and heat transfer conditions of pulverized coal firing processes. For the majority of our coal types the heat conductivity coefficient of the slag deposited cannot be determined under laboratory conditions since part of these deposits is of a loose, disintegrating sandy structure, and their removal from the furnace chamber is very difficult either under operational or standstill conditions as they would break away or detach as soon as stirred. Thus the sample submitted for a laboratory test would not be identical, any longer, to the actual furnace chamber slag deposit. In addition, some other difficulties can also be experienced with certain brown coal slags: they reveal such strong melting and adherence properties that their nondestructive sampling either under operational or standstill conditions present serious problems.

The measurement method described above makes possible the reliable collection of data on the heat conductivity coefficient of slag deposits observed in different firing systems using various Hungarian coal types. Knowing many

of these data, conclusions can be drawn when designing a new equipment or changing the coal quality on the expected combustion and heat transfer conditions which are affected, as is a well-known fact, to a great extent by the heat insulation and slagging of the cooled surfaces.

Literature presents the following suggestion on the correlation between heat conductivity properties and contamination [2]:

$$Sko = \varepsilon_L \cdot C_0 \cdot T_L^3 \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \quad (8)$$

where

$\varepsilon_L$  is the emissivity of the flame; and  
 $T_L$  is the flame temperature [°K].

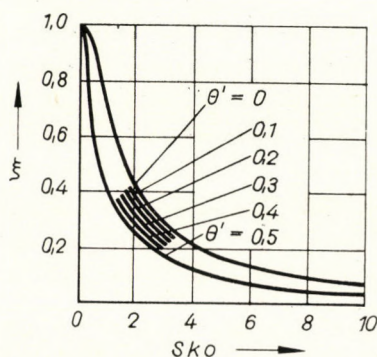


Fig. 11. Contamination coefficient ( $\xi$ ) and wall temperature in function of the  $Sko$ -number characteristic for the radiation conditions [2]

$$\theta' = \frac{T_G}{T_L}$$

As can be seen, the  $Sko$ -number depends on the heat conductivity characteristics of the layers in the path of the heat flow. The function  $\xi = f(Sko)$  were determined empirically (Fig. 11), and this is to a slight degree affected by the relation.

Determination of the heat conductivity coefficient leads to a contamination coefficient figure ( $\xi$ ) approximating the actual conditions better. This is important as in the case of newly designed furnaces the dimensions of the radiated heating surface to be provided for depend on the expected contamination, according to the formula

$$F_{\text{necessary}} = \xi \cdot F_{\text{built-in}}$$

whereas in case of existing furnaces this is on which the heat flow from the flame

to the wall and, consequently, the development of thermal equilibrium in the chamber would depend.

*Conclusions.* In the chamber of pulverized coal fired furnaces of the radiated chamber type, the heat quantity radiated from the flame surface and taken up by the heating surface depends on the quantity as well as quality of the slag crust developed. The "heat insulating" slag layer thus deposited critically effects the development of temperature distribution in the furnace chamber.

For measurement of the heat flux to the receiving surface, determination of the heat conductivity coefficient of the slag crust, that is, of one of the typical slagging characteristics, as performed by IFRA in Ijmuiden proved to be the most suitable.

Measurements with different coal types were carried out in a 5 kg/h output small-size laboratory furnace of pulverized coal firing. For the evaluation of measurements, the method described by the Soviet literature appeared to be very successful. The measurement method, instrument calibration and the scheme of the slagging process have been explained. The results obtained with four different coal types were tabulated.

With the heat conductivity conditions understood, the contamination coefficient may be expressed by numerical results instead of mere estimations which can be made good use of in furnace dimensioning or operational inspection, and will make furnace chamber temperature calculations much better founded.

The advantage of the method described above is the possibility rendered thereby to characterize the slag deposited onto the cooled surfaces with objective measurement data, in addition to the subjective experiences hitherto collected and, by collecting a great number of measurement data depending on coal type and firing equipment, to safely pre-estimate the expected heat development and heat transfer conditions for the given furnace and the coal type reckoned with. The heat conductivity coefficient as an objective measurement figure makes chamber temperature calculations more reliable.

#### REFERENCES

1. Гурвич, А. М.: Теория и практика сжигания газа; Москва 1964.
2. Невский, А. С.: О влиянии загрязнения экранных поверхностей на эффективность работы экранов. *Теплоэнергетика* (1959); № 4, 56/61.
3. Гурвич, А. М.—Прасолов, Р. С.: Некоторые свойства золых отложений на экранных трубах топок паровых котлов. *Теплоэнергетика* (1960); № 7, 80—86.
4. *Plug-tipe heat-flow-meter*; International Flame Research Foundation, Ijmuiden. Doc. Nr. Tb. F. 72/a/4. M 2774; 1958.
5. МІКНЕУЕВ, М. А.: A hőátadás gyakorlati számításának alapjai; III. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest 1963.
6. Прасолов, Р. С.: Масло- и теплоперенос в топочных устройствах. Изд. Энергия, Москва 1964.
7. Миронов, С. Н.: Экспериментальное исследование процесса сжигания антрацитовый пыли. *Теплоэнергетика* (1965); № 1, 73—78.
8. Кнорре, М.: Топочные процессы. Госэнергоиздат, Москва 1959.

**Messen der Wärmeleitfähigkeit der Schlackenablagerung im Feuerraum.** Bei Kohlenstaubfeuerung weisen die Schlackenablagerungen so verschiedene Wärmeleit- (Wärmeisoler) eigenschaften auf, daß es im Interesse der Vervollkommnung der Feuerraumtemperaturberechnungen zweckmäßig erschien, die Wärmeleitfähigkeit der Schlacke unmittelbar am Ort der Entstehung mittels Messungen zu bestimmen. Als Meßinstrument wurde der an der I. F. R. A. Versuchsanlage in Ijmuiden verwendete Wärmeströmungsmesser angewendet, bei Berechnung des  $\lambda$  wurde das Prinzip des sowjetischen »Kalorimeters« in Betracht gezogen, und die ersten Versuche wurden an einer kleinen Kohlenstaubfeuerung mit Leistung von einer 5 kg/h durchgeführt. Die Methode kann unmittelbar zur Bestimmung der Heizflächenbelastung von Betriebs-Kohlenstaubfeuerungen sowohl in reinem als auch in verschlackten Zustand, werden angewandt ferner auch zur Erforschung der stofflichen Eigenschaften der Schlackenschicht

**Mesure de la conductivité thermique des incrustations de scorie dans les foyers à charbon.**

Les incrustations de scorie observées dans les foyers au poussier de charbon montrent des qualités de conductivité (isolation) tellement variées que, pour perfectionner les calculs de température des ces foyers, il semblait intéressant de déterminer la conductivité thermique de la scorie par des mesures effectuées au lieu même de sa formation. Pour mesurer l'écoulement calorifique, on a utilisé l'instrument employé à la station expérimentale de l'I. F. R. A. à Ijmuiden, tandis que le calcul de  $\lambda$  reposait sur le principe du «calorimètre» soviétique. Les premiers essais furent exécutés sur un petit foyer au poussier de charbon d'une capacité de 5 kg/h. La méthode peut être appliquée directement pour déterminer la charge calorifique superficielle des foyers au poussier de charbon à l'état pur ou scorifié, ainsi que pour étudier les caractéristiques matérielles de la couche de scorie.

**Измерение теплопроводности отложений шлака в топке (Г. Башиш и К. Ремени).**

Отложения шлака, наблюдаемые в случае пылеугольных топков, обладают такими изменчивыми свойствами теплопроводности (термоизоляции), что в интересах усовершенствования расчетов температуры топки показалось целесообразным определение коэффициента теплопроводности шлака путем измерения, а именно непосредственно в точке образования. В качестве измерительного прибора был использован измеритель теплового потока, примененный на опытной станции I. F. R. A. в Иймуйдене; при вычислении  $\lambda$  мы исходили из советского «калориметрического» принципа и первые опыты были проведены на маломощной пылеугольной топке 5 кг/час. Метод может быть непосредственно использован для определения нагрузки площади нагрева пылеугольных промышленных топков в случае чистого и ошлаковавшегося состояний, а также для ознакомления с материальными свойствами шлаковых отложений.



## A PATTERN RECOGNITION ALGORITHM WITH SEARCHING METHOD<sup>1</sup>

J. BARÁT and GY. MUSZÉLY

RESEARCH INSTITUTE FOR AUTOMATION OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received March 15, 1967]

The paper deals with a new algorithm for pattern recognition and investigates the arising theoretical problems. The published method is a development of the Bledsoe-Browning algorithm, as far as the groups formed by the elements of the field of vision and playing an important role during the recognition, are not selected at random but by a searching method. In this way the class of solvable problems is widened; during the search the algorithm becomes suitable for the problem in hand.

### I. Introduction

Each of the methods used today in pattern recognition is applicable only on a certain class of problems, and is ineffective for those which are more difficult than a certain degree of complication. To be able to recognize more complicated situations, or if there is a demand to use pattern recognition in control system identification problems, it is necessary to increase the degree of their adaptivity. Such a simple method is e.g. when the parameters of the decision function depend not only directly on the learning patterns, but also on the success or failure of the decision. A more effective method for developing the inner adaptivity is to create the possibility that in the course of the learning process not only the parameters of the decision-function should change but also the structure of the function.

The purpose of this paper is to develop the inner adaptivity mentioned above of the well-known *Bledsoe-Browning Pattern Recognition Scheme* [1, 2]. Using K. STEINBUCH's terminology: We proposed to introduce a "feedback" which originates from the decision mechanism and depending on the effectiveness of learning changes the structure of the "generator of features".

### II. The basic model of pattern recognition and the Bledsoe-Browning scheme

Let us assume that we dispose of objects of defined character which can be sorted into previously determined categories on the basis of their quite different features. The essence of pattern recognition is the design of an automaton which after examining certain numbers of representants taken from all cate-

<sup>1</sup>Original has been included into the IFAC Symposium on "Identification in Control Systems", Prague June 1967.

gories recognizes the type of new objects. The shape of the objects to be distinguished can change within rather large limits. Under pattern recognition can be understood not only the recognition of planar diagrams (e.g. letters and figures), but patterns of more general, not graphical type.

It will be assumed that each pattern to be recognized is represented by an  $N$  dimensional vector  $\mathbf{x}$ . Let us assume that there are  $n$  categories which the patterns must be sorted into. Any devices for sorting patterns into categories will be called pattern classifiers. The vector  $\mathbf{x}$  and the decision classifying the presented pattern into some category form the input and output of the pattern classifier. The device operates in two phases. During the process of *learning phase* patterns are presented to the classifier, the classification of which is known. We shall call them learning patterns. By means of the learning patterns the classifier will be capable of performing the second i.e. the *recognition phase* in which it can classify new patterns, the categories of which are unknown.

Specially, let us assume that the coordinates of the vector  $\mathbf{x}$  may assume only the values 0 and 1. For instance, if a plane image of a geometric pattern is divided into  $N$  rectangular cells then those cells which are covered by the pattern assume the value 1, and the others 0, respectively.

Let us choose  $p$ -tuples from the  $N$  components of  $\mathbf{x}$ . Let  $K$  be the number of such groups. Each situation appearing in a given group can be regarded as a  $p$ -figure binary number between 0 and  $2^p - 1$ . Transform  $\mathbf{x}$  by the function

$$f(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} = f_{1,0}(\mathbf{x}), f_{1,1}(\mathbf{x}), \dots, f_{1,2^p-1}(\mathbf{x}), \dots \\ \dots, f_{K,2^p-1}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

into the  $K2^p$  dimensional space where

$$f_{i,j}(\mathbf{x}) = 1$$

if the binary number  $j$  is contained in the  $i^{\text{th}}$  group, and

$$f_{i,j}(\mathbf{x}) = 0$$

otherwise.

### 1. The process of learning

Let us assume that  $s$  learning patterns of each class are presented to the input of the device. Let  $\mathbf{x}_{i,j}$  be the  $j^{\text{th}}$  pattern of the  $i^{\text{th}}$  class. During the process of learning a matrix of  $n \times 2^p K$  is formed:



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{1,j}) \\ \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{2,j}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{n,j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1,0}, c_{1,1,1}, \dots, c_{1,K,2^p-1} \\ c_{2,1,0}, c_{2,1,1}, \dots, c_{2,K,2^p-1} \\ \vdots \\ c_{n,1,0}, c_{n,1,1}, \dots, c_{n,K,2^p-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

where

$$c_{k,g,m} = \sum_{j=1}^s f_{g,m}(\mathbf{x}_{k,j}).$$

## 2. Classification

It was suggested to perform the recognition in the following manner. Denote the pattern to be recognized by  $\mathbf{x}$ . Let us form the scalar product of  $f(\mathbf{x})$  and each row of  $A$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{1,j}) f(\mathbf{x}), \\ & \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{2,j}) f(\mathbf{x}), \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{n,j}) f(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3)$$

The pattern will be placed into that category, in the row of which the greatest scalar product is found.

Essentially, this is the Bledsoe—Browning algorithm in the form developed by G. P. STECK [2].

## III. Class of the tasks solvable by the B-B method

BLED SOE and BROWNING chose the elements of the  $p$ -tuples randomly by uniform distribution. We shall prove that in this case the method have a drawback similarly to the Rosenblatt's perceptron, namely the decision depends merely on the quantity of the common section covered by various patterns in the field of vision, and the method can not "notice" other features. The statement for the perceptron was proved by A. P. PETROV [3]. Our investigations are derived from his ideas.

*Definition:* The set of coordinates having the same value for both of the two patterns  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ , we shall call the common parts of  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ . We shall denote their number by  $m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

*Theorem:* If the groups are chosen by equal probability densities then the expected values of the quantities in (3) depend merely on the quantity of the common parts of the pattern to be recognized and the patterns of the learning sample sets:

$$E \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{i,j}) f(\mathbf{x}) = K \sum_{j=1}^s \frac{\binom{m(\mathbf{x}_{i,j}, \mathbf{x})}{p}}{\binom{N}{p}} .$$

The theorem is equivalent to the following statement: The class of problems which can be solved under the above-mentioned conditions is closed under permutations of the  $N$  components of the patterns. The method can not "notice" features not invariant to the permutation of the components.

*Proof:*

$$f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{y}) = 1$$

if and only if the  $i^{\text{th}}$  group assumes the same value in both  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ . The case in point occurs if and only if the group is contained in the common part of  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ . Since the quantity of such choices out of the  $\binom{N}{p}$  possible events is  $\binom{m(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p}$  we obtain

$$E(f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{y})) = \frac{\binom{m(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p}}{\binom{N}{p}}, \quad i = 1, 3, \dots, K$$

from which our assertion follows.

#### IV. Development of the algorithm

In order to eliminate the bounds discussed in the preceding chapter, namely to enlarge the class of the solvable problems, it is necessary to choose the groups according to other properties. We must find the groups which are effective for the given task. Let us introduce quantity  $D$  for the group which is

characteristic of the efficiency of the group. Let  $D$  be greater or smaller according to whether the group plays more or less role in the recognition. We shall determine  $D$  by means of the decision mechanism as a function of the learning patterns.

In the paper there are two possibilities suggested for choosing  $D$ .

### 1.

Provisionally let us assume that we have only two categories of patterns. From [3] it follows that the decision depends on the sign of the following difference:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{1,j})f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{2,j})f(\mathbf{x}) = \\ = s \left( \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{1,j}) - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{2,j}) \right) f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Here

$$\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{1,j}) = \left\{ \frac{c_{1,1,0}}{s}, \frac{c_{1,1,1}}{s}, \dots, \frac{c_{1,K,2^p-1}}{s} \right\}$$

and

$$\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s f(\mathbf{x}_{2,j}) = \left\{ \frac{c_{2,1,0}}{s}, \frac{c_{2,1,1}}{s}, \dots, \frac{c_{2,K,2^p-1}}{s} \right\}$$

are the centers of the mass of learning patterns. The decision separates the  $K2^p$  dimensional space by a hyperplane containing the origin and perpendicular to the line connecting the centers of mass. Therefore, it is recommended to choose the groups in such a manner that the centers of mass should be far from each other. The distance between the centers of mass

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^K d_i^2}$$

where  $d_i$  is the distance between the projections of the centers of mass on the subspace determined by the  $i^{\text{th}}$  group:

$$d_i = \frac{1}{s} \sqrt{\sum_{j=0}^{2^p-1} (c_{1,i,j} - c_{2,i,j})^2}.$$

If  $d_i$  is large enough the group plays an effective role in the recognition. Therefore, it is useful to introduce  $d_i$  as a characteristic value of group efficiency:

$$D = d_i = \frac{1}{s} \sqrt{\sum_{j=0}^{2^p-1} c_{1,i,j} - c_{2,i,j}}^2. \quad (4)$$

In case of more categories first we form  $D$  for each pair of categories. Denote it by  $D_{i,j}$  for the pair of the  $i^{\text{th}}$  and  $j^{\text{th}}$  categories. Their quadratic mean is a useful measure of group-efficiency

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j}^2}.$$

## 2.

Another quantity characteristic of group-efficiency is connected with the probability of correct decision. Let us assume that we make a decision taking only the  $i^{\text{th}}$  group into account. Let  $X$  be the space of the possible vectors  $x$ .

$$X = \bigcup_{j=1}^n A_j$$

where  $A_j$  is the set of the patterns from the  $j^{\text{th}}$  category. Let  $d(x)$  be the decision function, i.e. let  $d(x)$  be equal to one of the sets  $A_j$  according to the decision. On the other hand,  $X$  can be written in the form of

$$X = \bigcup_{m=0}^{2^p-1} X_m$$

where  $X_i \cap X_j = 0$  for  $i \neq j$  and  $X_m$  is the set of those  $x$  at which the binary number in the group is just  $m$ .

The probability of correct decision, i.e. the event  $x \in d(x)$  is

$$P(x \in d(x)) = \sum_{m=0}^{2^p-1} P[x \in d(x) | x \in X_m] P(x \in X_m). \quad (5)$$

Let  $p_{j,m} = P(x \in A_j | x \in X_m)$  and let  $i(m)$  the index of  $d(x)$  in the case of  $x \in X_m$ . That is,  $i(m) = k$  if  $d(x) = A_k$ . By means of the new notations in (4)

$$P[x \in d(x) | x \in X_m] = \frac{p_{i(m),m}}{\sum_{j=1}^n p_{j,m}}. \quad (6)$$

Assuming

$$P(A_j) = \frac{1}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

we obtain

$$P(x \in X_m) = \sum_{j=1}^n P(x \in X_m | A_j) P(A_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{j,m}. \tag{7}$$

Substituting (6) and (7) into (5) we have

$$P(x \in d(x)) = \sum_{m=0}^{2^p-1} \left( \frac{P_{i(m),m}}{\sum_{j=1}^n p_{j,m}} \right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{j,m} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{2^p-1} P_{i(m),m}.$$

$P[x \in d(x)]$  can be estimated by means of the learning patterns. Namely,  $c_{j,i,m}/s$  is the conditional relative frequency of the event  $x \in X_m$  under the condition  $x \in A_j$ . By means of the strong law of large numbers

$$P \left( \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{c_{j,i,m}}{s} = p_{j,m} \right) = 1 \tag{8}$$

i.e. the relative frequency converges to  $p_{j,m}$  with probability unity.

Considering that we make a decision taking only the  $i^{\text{th}}$  group into account. In case of  $x \in X_m$  the scalar products in (3) are the following:

$$\begin{aligned} &c_{1,i,m} \\ &c_{2,i,m} \\ &\vdots \\ &c_{n,i,m} \end{aligned}$$

Therefore, we can write

$$c_{i(m),i,m} = \max_k c_{k,i,m}$$

and

$$P \left( \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{2^p-1} \max_k c_{k,i,m} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{2^p-1} P_{i(m),m} \right) = 1$$

i.e.

$$P \left( \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{2^p-1} \max_k c_{k,i,m} = P[x \in d(x)] \right) = 1.$$

We can see that the quantity

$$D = \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{2^p-1} \max_k c_{k,i,m}$$

converges to the probability of correct decision with probability unity. Therefore,  $D$  can be introduced as another useful measure of group efficiency.

*Note a.* In the case when the set of the learning patterns is presented to recognize,  $D$  gives exactly the rate of correct decisions.

*Note b.* In case of two categories

$$D = \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{2^p-1} \max(c_{1,i,m}, c_{2,i,m}) =$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{2^p-1} \left( \frac{1}{2} |c_{1,i,m} + c_{2,i,m}| + |c_{1,i,m} - c_{2,i,m}| \right) = \frac{1}{2s} \sum_{m=0}^{2^p-1} |c_{1,i,m} - c_{2,i,m}| + 1.$$

On the one hand the quantity

$$D' = \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{2^p-1} |c_{1,i,m} - c_{2,i,m}|$$

characterises the group efficiency equivalent to  $D$ , since

$$D = \frac{1}{2} D' + 1.$$

On the other hand  $D'$ , similarly to  $D$  in the preceding paragraph, can be regarded as a distance, though not Euclidean, between the centers of mass.

### 3. The modified learning process

During the learning process effective groups will be chosen by means of one of the above-mentioned quantities.

By means of a random generator we choose  $p$  components from the  $N$  input of the classifier. With the aid of the learning patterns we form  $D$  in a manner mentioned before. Depending on whether  $D$  is greater or smaller than a fixed level we keep or reject the chosen group. The process is repeated until a certain number of effective groups will be collected.

The *recognition phase* proceeds similarly to the original Bledsoe-Brown-ing method.

## V. Stochastic approximation, the basic method of pattern recognition

A paper by YA. Z. TSYPKIN [4] put the theory of pattern recognition in a new light. By the method of stochastic approximation the author gives a general process which comprises most of the known pattern recognition algorithms. The method can be generally defined in the following form: We seek a discriminant function  $\varphi_j(x)$  for the  $j^{\text{th}}$  category which gives a measure of belonging of  $x$  to the category. We shall place  $x$  into that category whose discriminant function has that largest value. Assume that  $\varphi_j(x)$  can be written in the form of

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m a_{j,i} f_i(\mathbf{x}) = a_j f(\mathbf{x}) \quad (9)$$

where  $[f_i(\mathbf{x})]$  is a system of linearly independent functions. The vector  $\mathbf{a}_j$  will be approximated by  $\mathbf{a}_{j,s}$  where  $\mathbf{a}_{j,s}$  is obtained after the presentation of the  $s$ th learning pattern  $\mathbf{x}_{j,s}$  belonging to the  $j^{\text{th}}$  category:

$$\mathbf{a}_{j,s} = \mathbf{a}_{j,s-1} + \gamma_s \cdot f(\mathbf{x}_{j,s}) \quad (10)$$

where  $\gamma_s$  is determined by information about  $f(\mathbf{x}_{j,s})$  and sometimes by the value of

$$\varphi_{j,s-1}(\mathbf{x}_{j,s}) = \mathbf{a}_{j,s-1} f(\mathbf{x}_{j,s}).$$

In the case of the B—B method  $[f_i(x)]$  is the system defined by (1), and  $m = K \cdot 2^p$ , and the vector

$$\mathbf{a}_{j,s} = \left\{ \frac{c_{j,1,0}}{s}, \dots, \frac{c_{j,K,2^p-1}}{s} \right\}$$

where  $c_{j,i,k}$  is a function of  $s$  defined in (2). The vector  $\mathbf{a}_{j,s}$  similarly to (10) satisfies the stochastic approximation:

$$\mathbf{a}_{j,s} = \frac{s-1}{s} \left( \mathbf{a}_{j,s-1} + f(\mathbf{x}_{j,s}) \right).$$

According to (8)  $\mathbf{a}_{j,s} f(\mathbf{x})$  converges to the function

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = a_j f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K P[\mathbf{x} \in E_i(\mathbf{x}) | A_j]$$

with probability unity where  $E_i(\mathbf{x})$  is that subset of the  $X$ , the elements of which have the same binary number on the  $i^{\text{th}}$  group as  $\mathbf{x}$ .

*Note.* We should obtain the optimal decision by the estimation of the functions

$$P[\mathbf{x} \in E_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in E_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{x} \in E_K(\mathbf{x}) | A_j]$$

because the probability of incorrect decision would be minimized in this way. However, in this case the number of the patterns necessary for the learning process is increased by an exponential function of  $K$ .

Assuming the independence of the groups the optimal decision can be replaced by the function

$$\prod_{j=1}^K P[\mathbf{x} \in E_j(\mathbf{x}) | A_j].$$

But in this case it is either necessary to present a large set of learning patterns or the length of the groups has to be limited. If neither of these is done and if the estimating value of some factor is 0 an incorrect decision can be obtained. An advantage of the presented method is that this mistake can be eliminated.

## VI. Conclusions

The discussed algorithm intended to improve the efficiency of the Bledsoe-Browning method by means of introducing "structure adaptation". The applied principle can be extended also to other methods. It is based on the fact that during the process of learning the automaton is choosing — by means of some searching method — from a certain function-system those  $f_i(x)$  functions figuring on the right side of (9), which efficiently separate the categories in the given task. Naturally, by such an increase of the inner adaptivity the learning process will be longer and the necessary memory-capacity increases. In the course of the learning, namely the whole learning sample set will be necessary. The recognition-phase is not more complicated than it was previously and therefore the principle can be applied in such cases where after learning once the application of the recognition process is needed many times, eventually continuously.

## REFERENCES

1. BLEDSOE, W. W.—BROWNING, I.: Pattern Recognition and Reading by Machine. *Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference* (1959), December.
2. STECK, G. P.: Stochastic Model for the Browning-Bledsoe Pattern Recognition Scheme. *IRE Transaction on Electronic Computers* (1962), April.
3. PETROV, A. P.: Possibilities of the Perceptron (in Russian). *Technical Cybernetics* (1964), No. 6.
4. TSYPKIN, YA. Z.: Adaptation, Learning and Selflearning in Automatic Systems (in Russian). *Automation and Remote Control* 27 (1966), No. 1.

**Algorithmus für die Erkennung von Formen mittels einer adaptierenden Suchmethode.**  
In der Arbeit wird ein neuer Algorithmus für die Erkennung von Formen beschrieben und die hierbei auftretenden theoretischen Probleme werden untersucht. Die Methode ist eine Weiterentwicklung der von BLEDSOE und BROWNING, indem die während des Erkennens eine wichtige Rolle spielenden, aus den Elementen des Gesichtsfeldes gebildeten Gruppen nicht zufallsweise, sondern mittels eines Suchverfahrens ausgewählt werden. Auf diese Weise wird die Klasse der lösbaren Probleme erweitert, während des Suchens wird der Algorithmus für die Lösung der jeweils gegebenen Aufgabe geeignet.

**Un algorithme pour la reconnaissance de formes par le procédé de recherche adaptatif.**  
L'étude traite d'un nouvel algorithme pour la reconnaissance des formes et examine ses problèmes théoriques. La méthode présentée est un développement de l'algorithme de Bledsoe et Browning, en tant que les groupes jouant un rôle important dans la reconnaissance, formés par les éléments du champ de vision, ne sont pas choisis au hasard mais par un processus de recherche. De cette façon la classe des problèmes résolubles est élargie, l'algorithme s'adaptant pendant le procédé de recherche à la solution du problème donné.

**Алгоритм распознавания образов, поисковым методом (Я. Барат и Д. Мусель).**  
В работе описывается один новый алгоритм распознавания образов и исследуются возникающие теоретические проблемы. Излагаемый метод является дальнейшим усовершенствованием алгоритма BLEDSOE—BROWNING, поскольку группы, образованные из элементов поля зрения и играющие важную роль в процессе распознавания, выбираются не случайно, а поисковым методом. Таким образом, класс решимых задач расширяется, в ходе процесса поиска алгоритм становится пригодным для решения данной задачи.



## STATIC OPTIMIZATION BY ADAPTIVE "FORGETTING" METHOD

G. ALMÁSY,

CAND. OF CHEM. SC.

DESIGN CENTER FOR CHEMICAL INDUSTRY, BUDAPEST

M. ROMHÁNYI

and

I. PALLAI

CAND. OF CHEM. SC.

AUTOMATION RESEARCH INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received March 24, 1967]

The objective function is considered as a second order polynomial of the disturbing and manipulated variables in the static optimization method disclosed in this paper. The optimum system of the manipulated variables is determined by the quadratic optimization method. The coefficients of the approximating function are determined by regression from the data of the unit to be optimized, the last data being considered as having larger weights than the earlier ones. The instability due to measurement errors at the optimum locus calculated is strongly diminished by the evaluation method of the process.

### List of symbols

- a* element of the matrix belonging to the coefficients of the quadratic system;
- A** the matrix of the quadratic form coefficients;
- b* element of the equality-inequality system of linear constraints;
- B** the matrix of the linear constraints;
- c* running suffix of the manipulated variable;
- d* running suffix of the disturbing variable;
- D* square sum of the deviations;
- f* the economic objective function;
- F* transformed objective function;
- g* right side vector of the linear constraints;
- h* transformed right side vector of the linear constraints;
- i* running suffix of independent variable;
- j* running suffix of independent variable;
- k* running suffix of measurements;
- m* number of measurements;
- n* number of independent variables;
- p* running suffix of independent variable (covering serial number of equation also);
- q* forgetting factor;
- r* running index of independent variable (covering serial number of equation also);
- s* product sum;
- S* weighted product sum;
- t* time;
- u* running suffix of measurement series;
- v* running suffix of measurement series;
- x* independent variable;
- x** independent variable vector;
- z* number of measurement series;
- $\Delta$  deviation of calculated and measured function values;
- \* calculated value;
- ( ) suffix of measurement series;
- ' row vector.

## I. Introduction

Quite a number of optimization processes may be found in the literature, which are suitable to determine the extremum of a given objective function. Part of these processes represents practically the optimization of mathematical models for various reasons, e.g. if the partial derivatives of the objective function are used as functions of various independent variables, e.g. in the case of the well-known gradient method, or consequences are drawn regarding the expected locus of the optimum from the values of the independent variables resulting in various systems of values, or whether the direction is regarded where the optimum locus can be approximated the most quickly, such as in the method of conjugated diameters [1].

However, in the case of real models, i.e. of objective function values obtained from operating units these methods are quite unsuitable, since the direction to be followed becomes very uncertain especially near the optimum, due to the scattering of measured values. Owing to this very reason, the regardless and indiscriminating application of the method results in a very unstable operation, because of the apparently subsequent change of the optimum locus, brought about by scattering of the measured data. Moreover, the optimization of a real model with the gradient method is unfavourable, because for the approximative determination of the gradient the partial derivatives are required. These determinations would involve frequent alterations of performance parameters in a sense, which does not necessarily mean an improvement of the objective function values. The same applies to all the optimization processes in which the optimum is determined by progressing along grid points in the space of variables [2].

The aim and principle of the optimization process disclosed by the authors is to eliminate the two disadvantages mentioned in the introduction, occurring during optimization with real models viz. the steps with the sole purpose of data collecting and the uncertainty resulting from measurement scattering. This elimination will make the gradual optimization of the unit without "pulling" possible.

Among the methods disclosed up to now, the present process is most similar to the optimum searching method developed by ORBÁN. The latter method will be given here briefly [3]. It is assumed in the process that at the starting point such an assembly of operational data is at disposal, which represents the previous states not yet optimized. Single steps of the optimization are carried out by selecting the data nearest the momentary state in the space of disturbing variables, and on the basis of this the objective function is determined as a linear function of the manipulating variables. Thereupon, a step is made in the obtained gradient direction. The data system is supplemented by the data of the new stationary operation state developed. Thus the method in-

volves rejection of the oldest data after a given time or a given number of steps. Several aims are thus reached at the same time viz. the number of the data is kept limited, the data assemble more and more around the state corresponding to the optimum regime, and finally the possible slow changes of the operation are followed up by the data system. A drawback to the process is the necessity of storing large data quantities, and if the quantity of stored data is big enough, the search for the nearest points becomes cumbersome and lengthy. The uncertainty in the selection of steps due to the measurement scatterings also remains.

The process developed by the authors of this paper is an improvement to the Orbán-method by eliminating to a great extent the above-mentioned disadvantages. The main feature of the new method is not to store the information obtained from measurement data in a rough state, but the dependence of the objective function on the disturbing and the manipulated variables is approximated by a second order polynomial and the necessary information is stored as coefficients of this second order polynomial. The polynomial, coefficients are recalculated on the basis of recent measurement data from time to time. Thus, the fluctuations due to measurement scattering are eliminated, the number of the data to be stored is reduced, and the time consuming work involed in the previous method viz. selecting, at each step, the nearest data systems to the momentary value system of the disturbance variables is avoided. Instead of rejecting data, the following up of slow changes is carried out by weighting the data in this process. The earlier data will be weighted by a factor smaller than unity besides the most recent data in the case of every treatment. Thus the weight of the earlier data decreases according to a geometrical sequence. The ordinary notion of forgetting is thus modelled and the process is therefore called the "forgetting method". The weighting of data can easily be done with a second order polynomial, only the product sums involved in calculating the coefficients are to be retained and used suitably weighted during the treatment of new data.

The coefficients of the linear functions describing constraints can be determined similarly. For the purpose of relatively quick determination of limited extremum values it is advisable to consider these as linear functions of the independent variables.

The method as outlined above assumes the quick fluctuations of the real model not to be so great as to result in too large errors in the approximation by a second order polynomial, and the rate of the change of slowly changing disturbance variables not considered explicitly to be small enough to collect sufficient data quantities in the meantime for the calculation of the polynomial coefficients. Once the approximating quadratic polynomial is obtained, the determination of the optimum point does not represent any problem of principle, and methods are at disposal for cases with constraints, and without them.

The authors do not want to take up their algorithms within the frame of this paper and it is taken for granted that the task can be solved either by a linear equation system (without constraints), or by means of quadratic programming (in the case of constraints given by linear equalities of inequalities).

## II. Mathematical formulation of the process

According to the above, the objective function is considered as the second order polynomial of the disturbance and manipulated variables. Therefore, in matrix formalism

$$f^* = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (1)$$

or in scalar writing

$$f^* = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (2)$$

(According to this interpretation, the matrix  $\mathbf{A}$  is a lower triangular matrix.) To the 0-th element of  $\mathbf{x}$  vector the value 1 will be ordered identically, so the quadratic form will contain a constant term and linear terms, too. The coefficients  $a_{ij}$  are determined on the basis of the least squares principle. The deviation between the obtained and the calculated objective function values, i.e. the approximation error for the data system with suffix  $k$  is

$$\Delta_k = f_k^* - f_k = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_{ik} x_{jk} - f_k. \quad (3)$$

Considering all measurements, the square sum of deviations will be

$$D = \sum_{k=1}^m \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_{ik} x_{jk} - f_k \right)^2. \quad (4)$$

The minimum of  $D$  is obtained by the known method of determining the zero locus of the partial derivatives as a function of all  $a_{ij}$  coefficients. Thus for the coefficients the following equation system is obtained:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \left( \sum_{k=1}^m x_{ik} \cdot x_{jk} \cdot x_{pk} \cdot x_{rk} \right) \cdot a_{ij} = \sum_{k=1}^m f_k \cdot x_{pk} \cdot x_{rk} \\ (p = 0, 1, 2, \dots, n; \\ r = p, p + 1, \dots, n). \quad (5)$$

Introducing the notations

$$s_{i,j,p,r} = \sum_{k=1}^m x_{ik} \cdot x_{jk} \cdot x_{pk} \cdot x_{rk} \tag{6}$$

and

$$s_{p,r} = \sum_{k=1}^m f_k \cdot x_{pk} \cdot x_{rk} \tag{7}$$

the equation system becomes

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n s_{i,j,p,r} \cdot a_{i,j} = s_{p,r} \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n; \tag{8}$$

$$r = p, p + 1, \dots, n).$$

Up till now the weighting of the subsequent measurement data assemblies has not been taken up. Let us introduce for weighting purposes the “forgetting” factor  $q$ , and interpret weighting and “forgetting”, respectively, as follows.

The up-to-date  $a_{ij}$  coefficients of the approximation expression are to be calculated using the equation system

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n S_{i,j,p,r} \cdot a_{i,j} = S_{p,r} \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n; \tag{9}$$

$$r = p, p + 1, \dots, n)$$

where the newly introduced  $S$  factors will be formed as follows. If the subsequent measurement data groups are marked by an upper suffix in a bracket, for every  $S$  we get

$$S^{(1)} = s^{(1)}, \tag{10}$$

respectively

$$S^{(2)} = q^{(1)} \cdot S^{(1)} + s^{(2)}. \tag{11}$$

The rule of formation is generally in a recursive way

$$S^{(v+1)} = q^{(v)} \cdot S^{(v)} + s^{(v+1)} \tag{12}$$

or

$$S^{(v)} = \sum_{z=1}^v \left( s^{(z)} \cdot \prod_{u=z}^{v-1} q^{(u)} \right) \tag{13}$$

if the product consisting of zero factors is defined as 1. The rationality of the formation definition of  $S^{(v)}$  is supported by two examples referring to two limiting cases.

On the one hand, we have

$$q^{(1)} = q^{(2)} = \dots = q^{(v-1)} = 0. \tag{14}$$

According to the above mentioned

$$S^{(v)} = s^{(v)}. \quad (15)$$

All the information obtained from earlier measurements is then forgotten by the model, and only the most recent data assembly is used for the calculation of coefficients.

Let us take, on the other hand,

$$q^{(1)} = q^{(2)} = \dots = q^{(v-1)} = 1. \quad (16)$$

Corresponding to the above

$$S^{(v)} = \sum_{z=1}^v s^{(z)}. \quad (17)$$

Therefore, all measurement data are considered by the model having the same weight independent of their age, i.e. no forgetting occurs. Both the limiting cases correspond to the regression taken in a conventional sense.

The case

$$0 < q^{(z)} < 1 \quad (18)$$

corresponds to the mentioned "forgetting", whereas the case

$$1 < q \quad (19)$$

is to the contrary, the model considering the earlier data with greater weight than the recent data. No practical importance can be given to the latter case. The case

$$q < 0 \quad (20)$$

makes no sense. The value of  $q$  has to be chosen by practical experience.

In the case of possible linear constraints, their coefficients may be calculated by linear regression in full analogy to the above.

### III. The accuracy of the solution

It must be taken into account in connection with the determination of the approximation polynomial coefficients that the error of the polynomial will contain not only the error of principle of approximating a nonquadratic surface in reality by a quadratic surface, but also the rounding error while solving the equation system. According to experience, however, the polynomial gives a very good approximation in the case of a task containing 9 variables, i.e. 55 coefficients, where the variables change in 3 levels generally. The

scattering amounted to approx. 1 per cent of the variation interval and it can be assumed that a considerable part of even this error is the result of approximation error of principle. This result is surprising because the determinant of the matrix of  $55 \times 55$  is found to be of  $10^{-50}$  order. Attention must, however, be drawn to the fact that for the sake of accuracy of the solution it is advisable to normalize the various variables in such a way that they should be approximately of the same order.

#### IV. The formation of the quadratic optimization

Up till now only the development of the second order polynomial describing the objective function as a function of the complete set of independent variables, i.e. of the disturbance as well as of the manipulated variables were treated. The optimization task may easily be formulated then. For the sake of simplicity and clarity, this sophistication will be described by matrix formulae.

If the value system of disturbance variables is marked  $x_d$ , that of the manipulated variables by  $x_c$ , the objective function  $f$  can be resolved as follows:

$$f^* = x'_d \cdot A_{dd} \cdot x_d + x'_c \cdot A_{cd} \cdot x_d + x'_c \cdot A_{cc} \cdot x_c. \quad (21)$$

The member containing the matrix  $A_{dc}$  is not contained in  $f$ , since the total matrix  $A$  is a lower triangle matrix, viz.  $A_{dc} = 0$ . Let us consider the value system  $x_d$  of disturbing variables fixed. Then the objective function to be optimized is the following mixed quadratic function of  $x_c$

$$F = x'_c \cdot (A_{cd} \cdot x_d + A_{cc} \cdot x_c). \quad (22)$$

The valid set of constraints can be similarly obtained by substituting the disturbing variables in the case of linear constraints.

The linear constraints obtained by linear regression as functions of all the independent variables are

$$g \geq B \cdot x. \quad (23)$$

Classifying the independent variables again into disturbing and manipulated variables, the constraints are

$$g \geq B_d \cdot x_d + B_c \cdot x_c. \quad (24)$$

According to quadratic programming upon substitution of existing disturbing variables and introducing the notation

$$h = g - B_d \cdot x_d \quad (25)$$

the constraints can be expressed as

$$\mathbf{h} \geq \mathbf{B}_c \cdot \mathbf{x}_c. \quad (26)$$

Thereupon the optimum system of manipulating variables can be determined by the quadratic optimization method.

#### REFERENCES

1. POWELL, M. I. D.: *Computer Journal* 7 (1964); No. 2, 155.
2. LOWE, C. W.: *Trans. Inst. Chem. Engrs.* 42 (1964), T 334.
3. ORBÁN, M.: *Learning Adaptive Control System Based on the Analogies with the Living Organisms* (In Hungarian). Dissertation, Budapest 1966.

**Statische Optimierung mit einer adaptiven «vergessenden» Methode.** Das in der Arbeit beschriebene statische Optimierungsverfahren betrachtet die Zielfunktion als Polynom zweiten Grades der Stör- und Stellgrößen und bestimmt das optimale System der Stellgrößen mit Hilfe der Methode der quadratischen Optimierung. Die Koeffizienten der Näherungsfunktion werden aus den Daten des zu optimierenden Betriebs durch Regression derart bestimmt, daß die neueren Meßwerte gegenüber den älteren größere Gewichte erhalten. Das Auswertungsverfahren der Methode vermindert weitgehend die aus den Meßfehlern resultierende Instabilität der Stelle des berechneten Optimums.

**Optimisation statique par la méthode «d'oubli» adaptative.** La méthode d'optimisation publiée dans l'étude considère la fonction cherchée comme le polynôme du deuxième degré des grandeurs d'action et des perturbations et détermine le système optimum des grandeurs d'action par la méthode d'optimisation quadratique. Les coefficients de la fonction d'approximation sont déterminés par régression à partir des données du processus à optimiser, en attribuant aux données mesurées plus récentes des poids supérieurs à ceux des données antérieures. La méthode d'évaluation du processus réduit notablement l'instabilité due aux erreurs de mesure du point optimum calculé.

**Статическая оптимализация адаптивным «забывающим» методом** (Г. Альмаши, М. Ромхани и И. Паллаи). В работе излагается статический метод оптимализации, при котором целевая функция принимается в качестве полинома второй степени мешающих и вмешивающихся переменных, и оптимальная система вмешивающихся переменных определяется методом квадратичной оптимализации. Коэффициенты приближенной функции определяются по данным оптимизируемого предприятия путем регрессии так, чтобы новейшие данные измерений фигурировали с большим весом чем старые. Методика оценки предлагаемого метода сильно снижает вытекающую из ошибок измерения нестабильность вычисленного места оптимума.



# UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE TEMPERATURVERHÄLTNISSE DES SINTERBANDES UND DER DYNAMIK SEINER AUTOMATISCHEN REGELUNG

D. SINGER und CS. DEMJÉN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR AUTOMATION DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,  
BUDAPEST

Es wird zunächst ein vereinfachtes Modell beschrieben, welches die Übergangsverhältnisse des Sinterbandes abschätzen lässt. Dann werden auf Grund eines Modells die Temperaturprofile des Sinterbandes für normale Betriebsverhältnisse berechnet und daraus gewisse Schlußfolgerungen über Lösung der automatischen Regelung gezogen. Die Untersuchungen wurden teilweise durch eine Analogrechenmaschine, teilweise an einem Digitalrechner durchgeführt.

## I. Einleitung

Der Sinterprozeß, welcher ursprünglich bei der Verarbeitung von feinkörnigen Erzen eingeführt wurde, gewann in den letzten Jahren eine immer steigende Bedeutung, da man dazu übergegangen ist, auch grobstückiges Material vor dem Hochofenprozeß zu sintern. Durch die Sinterung gewinnt das Material an Homogenität und Mahlfestigkeit, was hinsichtlich der Verarbeitung im Hochofen sehr wesentlich ist. Da ein einziges Sinterband um eine Million Tonne pro Jahr Material verarbeitet, kommt eine wesentliche Bedeutung ihrer automatischen Regelung und Optimierung zu.

Die folgende Studie befaßt sich mit der Dynamik der Regelung der Bandsinteranlage bzw. mit der des Sinterbandes. Die Kenntnis der hier ablaufenden Vorgänge ist der Schlüssel zur besseren Lösung der Regelung der ganzen Anlage. Die Untersuchungen wurden in zwei Stufen ausgeführt, in der ersten wurde das Temperaturprofil des Sinterbandes außer der Zeit nur noch von einer Raumkoordinate abhängig gedacht. In der zweiten wurden die Betrachtungen wesentlich verschärft, und auch dem Umstand Rechnung getragen, daß das Material am Sinterband eine endliche Dicke hat, so daß die einzelnen Schichten nur allmählich durchzünden.

## II. Die Sinteranlage und ihre automatische Regelung

Beim Sinterprozeß werden die Erze mit Koks, Kalkstein und eventuell anderen Material gemischt, durch Wasserzusatz gekörnt und am Sinterband ausgebrannt. Der erhaltene Klinker wird gemahlen und sortiert. Der Anteil

über 8 Millimeter ist das Fertigprodukt, jene mit kleineren Korndurchmessern werden den Ausgangsmaterialien zugemischt und wieder verarbeitet.

Eine Sinteranlage von Typus Dwight-Lloyd ist schematisch im Bild 1 dargestellt [1]. Die Anlage arbeitet kontinuierlich und die Einhaltung der Optimalwerte der Betriebsparameter ist eine wesentliche Forderung für die Erreichung einer Produktqualität. Die Konstanz der Betriebsgrößen

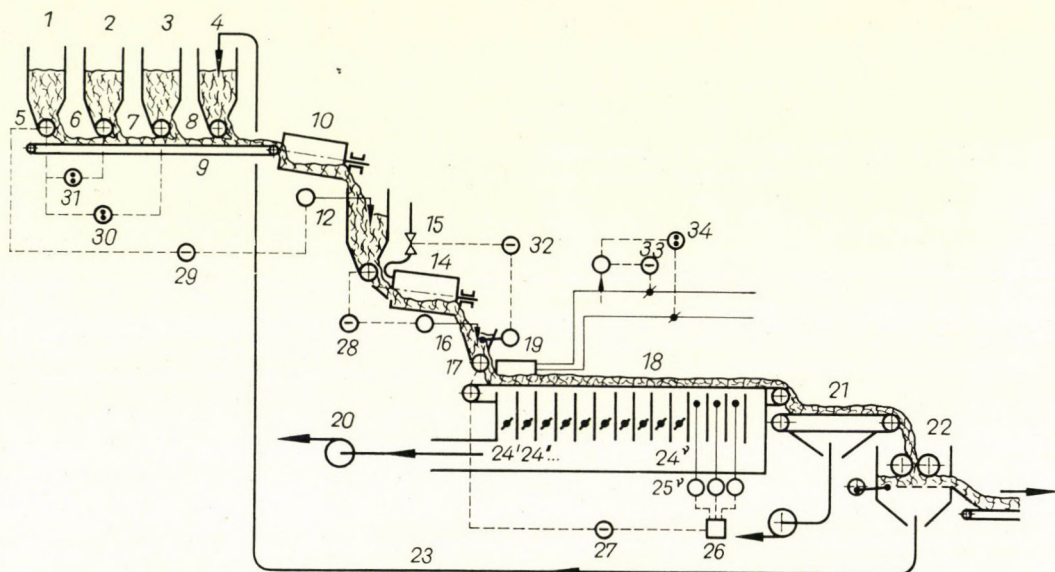


Bild 1. Betriebsschema der Bandsinteranlage

Bezeichnungen: 1, 2, 3 Bunker für Erz, Koks und Kalkstein; 4 Bunker für Feinsinter; 5, 6, 7, 8, 17 Dosiereinrichtungen; 9, 23 Förderbänder; 10, 14 Mischtrommel; 12 Zwischenbunker; 15 Wasserhahn; 16 Aufgabehälter; 18 Sinterband; 19 Zündkammer; 20 Saugglase; 21 Kühlband; 22 Mahl- und Sortiereinrichtungen; 24', 24'', ... Rauchgaskammer; 25 Thermoelemente; 26 Interpolator; 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 Regler.

ist auch deswegen wesentlich, da die physikalischen Eigenschaften des erhaltenen Sinters ganz wesentlich auf die Betriebsverhältnisse zurückwirken. Da das beim Mahlen des Produktes erhaltene Feingut wieder zu den Ausgangsstoffen zugemischt wird, existiert bei der Betriebsführung eine Art Rückführung. Dies kommt dadurch zustande, daß die Mahlfestigkeit des Fertigproduktes von dem Feinsinteranteil des Rohstoffgemisches abhängt. Andererseits erhöht ein Produkt mit kleiner Mahlfestigkeit den Anteil des Feingutes und umgekehrt. Jedenfalls muß die Anlage so gesteuert werden, daß der Anteil des erhaltenen Feingutes einen möglichst kleinen und konstanten Wert hat. Zu einer ökonomischen Betriebsführung und zu der Produktqualität trägt die automatische Regelung ganz wesentlich bei. Automatische Regler dienen für die Erhaltung des Erz-Koks- bzw. Erz-Kalkstein-Mischungsverhältnisses und der zugegebenen Wassermenge (Regler

30, 31 und 32 im Bild 1). Weitere Regler sind vorgesehen zu der Nachfüllung des Zwischen- bzw. Aufgabebunkers (Regler 28 und 29).

Eine ganz wesentliche Bedeutung kommt der automatischen Regelung beim Sinterband zu. Zunächst wird die in der Zündkammer eingeleitete Gasmenge bzw. das Gasluftgemisch geregelt (Regler 33, 34). Die Temperaturverhältnisse des Sinterbandes werden durch die in der Rauchgaskammer 24', 24'', ... untergebrachten Thermoelemente 25', 25'', ... kontrolliert. Da die Luft bzw. die Rauchgase durch die Gebläse von oben nach unten abgesaugt werden, zeigen diese Thermoelemente die örtlichen Mitteltemperaturen des wandernden Gutes an. Die Bandgeschwindigkeit wird durch den Regler 27 so geregelt, daß das örtliche Maximum dieser Mitteltemperaturen zeitlich konstant bleibt und in der Nähe des Bandendes liegt. Diese Lösung der automatischen Regelung des Sinterbandes zielt eine maximale Bandbelastung bei minimalen Koksverlusten an.

Zur Auswertung des örtlichen Maximums der durch die Thermoelemente 25', 25'', ... gemessenen Temperaturen dient der Rechner 26. Dieser wertet den Ausdruck

$$x_M = x_k + 0,5 h \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{(u_k - u_{k-1}) - (u_{k+1} - u_k)} \quad (1)$$

aus.  $x_{k-1}$ ,  $x_k$ ,  $x_{k+1}$  und  $x_M$  sind die Ortskoordinaten des  $(k - 1)$ -ten,  $k$ -ten und  $(k + 1)$ -ten Thermoelementes bzw. die des Maximums;  $u_{k-1}$ ,  $u_k$  und  $u_{k+1}$  sind die entsprechenden Temperaturen;  $h = x_k - x_{k-1}$  ist der örtliche Abstand zweier Thermoelemente. Den Ausdruck (1) gewinnt man durch Interpolation, wenn man annimmt, daß die Funktion  $u = f(x)$  zwischen den Punkten  $x_{k-1}$ ,  $x_k$  und  $x_{k+1}$  mit einer Parabel zweiten Grades angenähert werden kann. Über die Ableitung von (1) siehe [2].

### III. Die Temperaturverhältnisse des Sinterbandes

Das Sinterband soll als ein strömendes Medium betrachtet werden, in, welchem gemäß einer Dichtefunktion Temperaturquellen vorhanden sind. Es soll zunächst angenommen werden, daß die Verhältnisse durch eine einzige Raumkoordinate, durch die Achse  $X$ , welche mit der Fortschrittsrichtung des Bandes zusammenfällt, bestimmt sind. Unter diesen Voraussetzungen können die Wärmeverhältnisse durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + wa \frac{\partial u}{\partial x} + R(x) = a \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

dargestellt werden [2]. Dabei ist  $u$  die Temperatur,  $a$  die Temperaturleitfähig-

keit des Sintergemisches und  $w$  die Bandgeschwindigkeit. Die Temperaturleitfähigkeit  $a$  ist wie üblich definiert,  $a = c \gamma / \lambda$ , wo  $c$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  die Wärmekapazität, das spezifische Gewicht bzw. die Wärmeleitfähigkeit bedeutet.

Die Funktion  $R(x)$  ist folgendermaßen definiert

$$R(x) = Q(x) - q_1 - q_2. \quad (3)$$

$Q(x)$  ist die Dichtefunktion, welche die in der Raumeinheit entwickelte Wärme angibt;  $q_1$  und  $q_2$  sind die Strahlungs- bzw. Rauchgasverluste.

Bei der Ableitung von (2) wurden folgende Annahmen benutzt:

a) Die Temperatur des Sintergutes ist beim Austritt aus der Zündkammer — was übrigens als Nullpunkt des Koordinatensystems dient — zeitlich konstant;

b) der Luftüberschuß entlang des Bandes bleibt konstant, also die Verbrennung des Kokes ist allein von der Zeit abhängig;

c) die Strahlungs- und Rauchgasverluste sind räumlich und zeitlich konstant.

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung (2) wurde mit Hilfe einer Analogrechenmaschine durchgeführt. Zur Lösung der Aufgabe wurde der räumliche Integrationsbereich in  $n$  gleiche Intervalle von der Länge  $h$  aufgeteilt. Die Differentialquotienten wurden mit den entsprechenden Differenzenquotienten ersetzt, welche man aus den in den Teilpunkten gültigen Funktionswerten durch entsprechende Interpolationsformeln erhalten kann. Anstatt der partiellen Differentialgleichung (2) erhält man so folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\Delta^2 u_k}{h^2} + wa \frac{\Delta u_k}{h} + R(x_k) = apu_k; \quad k = 1, \dots, n, \quad (4)$$

wobei mit  $p$  der Differentialoperator  $\partial/\partial t$  bezeichnet wurde.

Die Interpolationsformeln für  $\Delta u_k$  bzw.  $\Delta^2 u$  lauten

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= u_k - u_{k-1}, \\ \Delta^2 u_k &= u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Durch einsetzen in (4) erhält man

$$\begin{aligned} u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1} + hwa(u_k - u_{k-1}) + h^2 R(x_k) &= h^2 ap; \\ k &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Das Gleichungssystem (6) kann mit dem Analogrechner modelliert und gelöst werden. Das entsprechende Schaltschema ist im Bild 2 zu sehen. Die

einzelnen Integratoren liefern unmittelbar die Temperaturen  $u_1, \dots, u_6$  für die Teilungsintervalle  $k = 1, \dots, 6$ .

Zur numerischen Auswertung werden die in den einzelnen Intervallen gültigen Werte der Funktion  $R(x_k)$  verwendet. Die Ableitung der Funktion  $R(x)$  kann auf Grund chemisch-kinetischer Überlegungen erfolgen. Es kann angenommen werden, daß die Verbrennungsgeschwindigkeit des Kokes im wesentlichen durch die Transportgeschwindigkeit des in die Reaktionszone des Koksteilchens beförderten Sauerstoffs abhängt.

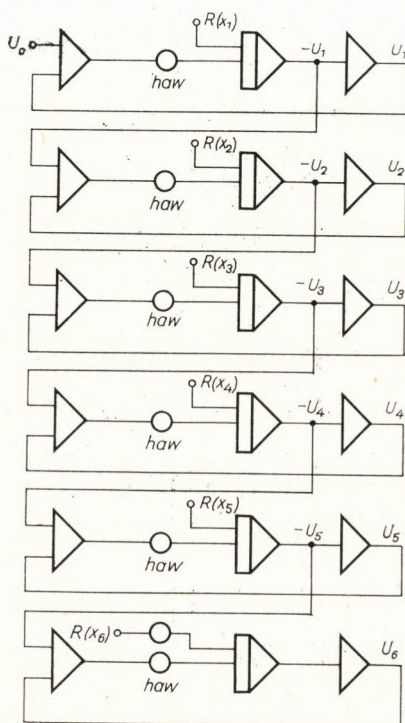


Bild 2. Schaltung des Analogrechners zur Berechnung der Gleichung (2)

Die Massenbilanz zwischen dem kugelförmig gedachten Koksteilchen und dem Sauerstoff kann durch die Gleichung

$$\gamma_s dr = K \gamma_g y dt \quad (7)$$

ausgedrückt werden, wo  $\gamma_s$  und  $\gamma_g$  das spezifische Gewicht des Kokes bzw. des Sauerstoffs ist; „ $y$ “ ist die Sauerstoffkonzentration,  $dr$  ist die Verminderung des Teilchenradius im Zeitaugenblick  $dt$ . Bei der Bestimmung der Konstanten  $K$  kann man nach GUMZ aus der Analogie zwischen Wärme und Massentransport Gebrauch machen [3].

In dieser Weise ist es möglich, die Verbrennungsgeschwindigkeit des Kokes als Funktion des effektiven Durchmessers des Koksteilchens und des Luftüberschusses auszudrücken. Auf die Volumeneinheit des Sintergemisches umgerechnet kann so die pro Volumeneinheit verbrannte Koksmenge bzw. die entwickelte Wärmemenge berechnet werden. Da diese eine Funktion der Zeit ist, erhält man gemäß der Beziehung  $t = x/w$  unmittelbar die Ortsabhängigkeit der entwickelten Wärme, also  $Q(x)$ . Für  $R(x)$  gewinnt man so den Ausdruck [2]:

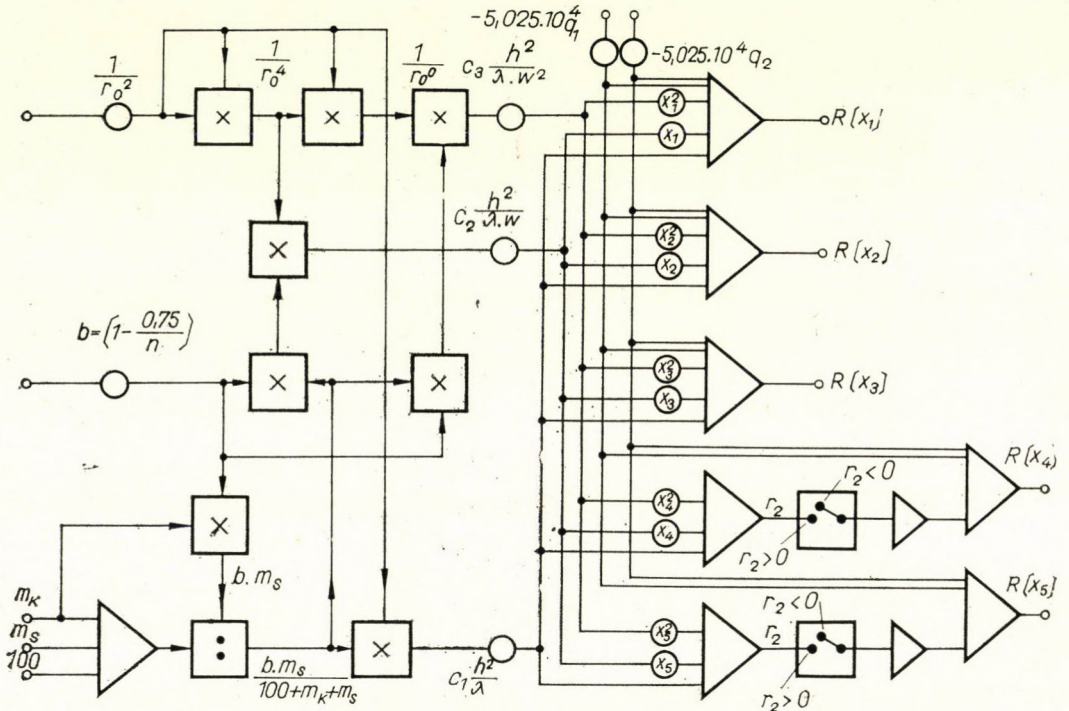


Bild 3. Schaltung des Analogrechners zur Berechnung der Funktion  $R(x_k)$

$$\begin{aligned}
 R(x_k) = 5,025 \cdot 10^4 \left\{ \frac{m_k}{100 + m_k + m_s} \left[ \frac{1,55 \cdot 10^5}{r_0^2} \left( 1 - \frac{0,75}{n_k} \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{8,75 \cdot 10^4}{r_0^2} \left( 1 - \frac{0,75}{n_k} \right) \cdot \frac{x_k}{w} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1,27 \cdot 10^4}{r_0^6} \left( 1 - \frac{0,75}{n_k} \right)^3 \left( \frac{x_k}{w} \right)^2 \right] - q_1 - q_2 \right\}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $r_0$  der effektive Kornradius des Kokes;  $n_k$  der Luftüberschußzahl;  $m_k$  und  $m_s$  sind die Gewichtsverhältnisse von Koks zu Erz bzw. Feinsinter zu Erz.

Die Funktion (8) kann ebenfalls durch die Analogrechenmaschine ausgewertet werden. Das entsprechende Schema ist aus Bild 3 ersichtlich. Für vorgegebene Werte von  $w$ ,  $r_0$ ,  $n_k$ ,  $m_k$  und  $m_s$  wurden so die Temperaturen für 6 diskrete Punkte des Sinterbandes berechnet. Die Analogrechenmaschine ermöglicht auch eine automatische Bestimmung des örtlichen Temperaturmaximums am Sinterband, wenn man dazu die der Gl. (1) entsprechende Rechenschaltung schafft, was ohne Mühe realisiert werden kann.

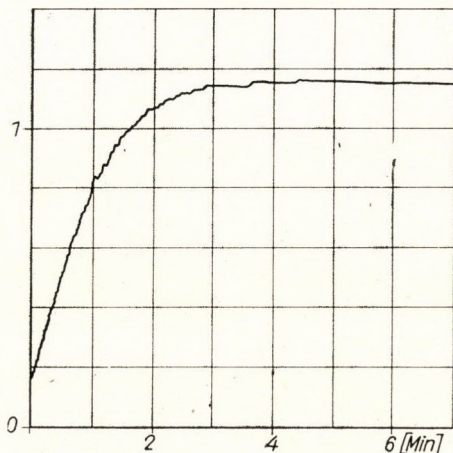


Bild 4. Übergangsfunktion des Sinterbandes

Das beschriebene Modell ist in erster Linie für die Untersuchung der Übergangsverhältnisse des Sinterbandes vom Nutzen. Eine auf diese Weise bestimmte Übergangsfunktion des örtlichen Temperaturmaximums bei der sprunghaften Änderung der Bandgeschwindigkeit ist im Bild 4 zu sehen.

#### IV. Die Temperaturverhältnisse des Sinterbandes unter Berücksichtigung einer endlichen Schichthöhe

Die Grundgleichung (2) berücksichtigt nicht die Schichthöhe des Sintergutes, bzw. setzt voraus, daß die Schicht so niedrig ist, daß diese praktisch auf einmal in ganzer Tiefe sich entzündet. Bei größeren Schütthöhen ist dies nicht der Fall, und es zeigt sich, daß gerade das Durchzünden der Koksschichten verschiedener Höhe die Temperaturverhältnisse des Bandes bestimmt.

Die Verhältnisse des Sinterbandes bei endlicher Schichthöhe sollten also durch eine zweidimensionale partielle Differentialgleichung beschrieben werden. Die Lösung einer Gleichung dieser Art stößt, wie bekannt, im allgemeinen auf Schwierigkeiten und kann — wenn die Lösung überhaupt möglich ist — nur durch entsprechende Vereinfachungen gelöst werden. In unserem Fall soll deswegen folgendes vorausgesetzt werden:

Das Durchbrennen der Sintermischung ist allein durch die Höhenkoordinate  $z$  der Schicht bestimmt.

Der Einfluß der Ortskoordinate  $x$  ist nur insofern vorhanden, daß die Zeit  $t = x/w$  ist, also dem Wege proportional, den das Band zurücklegt. Es handelt sich also um eine Separierung der Veränderlichen, was dadurch gerechtfertigt ist, daß das Wärmeleitvermögen der Sintermischung gegenüber der Bandgeschwindigkeit  $w$  sehr klein ist.

Die Vorgänge des Sinterbandes in der  $z$ -Richtung zeigen eine bedeutende Ähnlichkeit mit den Temperaturverhältnissen bei der Regenerierung (Entkohlung) von Katalisatoren, deren Theorie schon anderswo behandelt wurde [4]. Die Voraussetzungen, welche hier zugrundegelegt wurden, gelten in erster Annäherung auch in unserem Falle, und zwar daß

a) die Strahlungsverluste klein sind, die Reaktion zwischen Koks und Luft verläuft also adiabatisch;

b) die Reaktion ist von nullter Ordnung;

c) die Wärmeübertragung zwischen den Koksteilchen und dem umspülenden Gas verläuft so schnell, daß die Temperatur des Gases der des Sintergutes gleichgesetzt werden kann;

d) die Wärmeübertragung in der  $z$ -Richtung erfolgt nur durch die Gas-konvektion, in der  $x$ -Richtung wird überhaupt keine Wärme übertragen.

Über die Geschwindigkeit der Verbrennungsreaktion soll angenommen werden, daß diese proportional der Sauerstoffkonzentration  $y$  und der Diffusionslänge ist. Die letztere wird dem Verhältnis  $m_K/m_{K_0}$  proportional angenommen.  $m_K$  und  $m_{K_0}$  sind die Gewichtsanteile des Kokes im Sintergemisch im Zeitpunkt  $t$  bzw. vor dem Beginn der Verbrennung. Die Reaktionsgeschwindigkeit  $v$  kann damit folgendermaßen geschrieben werden

$$v = Ky \frac{m_K}{m_{K_0}}, \quad (9)$$

wo  $K$  eine Konstante bedeutet. Diese Annahme über die Reaktionsgeschwindigkeit ist etwas einfacher als die in dem vorigen Kapitel benutzte. Übrigens gilt auch hier, daß die Geschwindigkeit der Reaktion zwischen Koks und Luft nur durch den Massentransport des Sauerstoffs in die Reaktionszone bestimmt ist.

Die gemachten Annahmen ermöglichen die Darstellung des Temperaturprofils des Sinterbandes in geschlossener mathematischer Form im Gegensatz zu dem Modell des vorigen Kapitels, wo die numerische Lösung nur durch einen Analogrechner erfolgen konnte.

Unter Geltung aller übrigen Annahmen, welche auch bei der Lösung des Problems im vorigen Kapitel gemacht wurden, kann für das Sauerstoffgleichgewicht geschrieben werden:



$$\frac{\varepsilon \varrho_g}{M_g} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{G}{M_g} \frac{\partial y}{\partial z} = -b \frac{K \varrho_s}{M_c} y \frac{m_K}{m_{K0}}, \quad (10)$$

wobei für  $z = 0, y = y_0$  wird;  $M_g$  und  $M_c$  sind Molekulargewichte des Rauchgases bzw. die der Kohle;  $\varrho_g$  und  $\varrho_s$  die Dichten des Gases bzw. der Sintermischung;  $G$  ist der Massendurchfluß des Rauchgases;  $\varepsilon$  ist das Freivolumen des Schüttgutes in Relativmaß.

Dasselbe gilt für das Kohlenstoffgleichgewicht:

$$\frac{\partial m_k}{\partial t} = -Ky \frac{m_k}{m_{K0}}, \quad (11)$$

wobei für  $t - zw_g \leq 0$   $m_k = m_{k0}$  wird.  $w_g = \varrho_g/\varepsilon$   $G$  ist die lineare Gasgeschwindigkeit durch das Schüttgut. Außer (10) und (11) gilt noch eine Gleichung für das Wärmeleichgewicht:

$$\varrho_s C_s \frac{\partial u}{\partial t} + C_g G \frac{\partial u}{\partial z} = \varrho_s W Ky \frac{m_K}{m_{K0}}; \quad (12)$$

$C_s$  und  $C_g$  ist die Wärmekapazität des Feststoffes bzw. die des Gases;  $W$  ist die Reaktionswärme.

Da voraussetzungsgemäß die Wärmevorgänge von der Bandgeschwindigkeit unabhängig sind, kann in den Gleichungen (10), (11) und (12) anstatt der Zeit  $t$  gemäß der Beziehung

$$t = \frac{x}{w} \quad (13)$$

die Längenkoordinate  $x$  geschrieben werden. Gl. (10) bis (13) bestimmen das Temperaturprofil des Sinterbandes als Funktion der Zeit  $t$  und der Schichthöhe  $z$ . Durch Einführung der neuen Veränderlichen:

$$\tau = \left( K \frac{y_0}{m_K} \right) \left( t - \frac{\varepsilon \varrho_g}{G} z \right), \quad (14)$$

$$\zeta = \left( \frac{\varrho_s}{G} \frac{M_g}{M_k} K \right) z, \quad (15)$$

$$\Theta = \frac{C_s}{W m_K} u \quad (16)$$

lassen sich die Gleichungen (10) bis (12) folgendermaßen schreiben

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = K \frac{m_K}{m_{K0}} y, \quad (17)$$

$$\frac{y_0}{m_{K0}} \frac{\partial m_K}{\partial \tau} = \frac{m_K}{m_{K0}} y, \quad (18)$$

$$M \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + H \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{m_K}{m_{K0} y_0} y; \quad (19)$$

$$M = \left[ 1 - \frac{C_s}{C_s} \frac{\varepsilon \varrho_g}{\varrho_s} \right], \quad (20)$$

$$H = \left[ \frac{M_g}{M_c} \frac{C_g}{C_s} \frac{m_K}{m_{K0}} \right].$$

Dabei gelten die Randbedingungen für Gleichung (17):

$$y = y_0, \text{ bei } \zeta = 0 \text{ für alle } \tau;$$

für Gleichung (18):

$$m_K = m_{K0}, \text{ bei } \tau = 0 \text{ für alle } \zeta;$$

für Gleichung (19):

$$\Theta = 0, \text{ bei } \zeta = 0.$$

Das Gleichungssystem kann in geschlossener Form gelöst werden [4]. Die Lösung lautet:

$$\Theta = \frac{1}{2bH - M} \left[ \tanh \frac{b\zeta - \tau}{2} - \tanh \frac{\zeta - (H/M)\tau}{2H/M} \right]. \quad (21)$$

Man kann nun die Betriebskonstanten zusammenziehen und anstatt der reduzierten Größen  $\zeta$  und  $\Theta$  gemäß (15) und (16) wieder die Schichthöhe und die Temperatur  $u$  schreiben. Ebenso kann anstatt  $\tau$  gemäß (14) und (13) der Bandweg  $x$  geschrieben werden. Also

$$\zeta = Az, \quad \tau = B \left[ \frac{x}{w} - Cz \right], \quad \Theta = D^K u. \quad (22)$$

Durch Einsetzen in (21) erhält man:

$$u = \frac{1}{DL} \left[ \tanh \frac{1}{2} \left( Pz - B \frac{x}{w} \right) - \tanh \frac{1}{2E} \left( Nz - R \frac{x}{w} \right) \right]. \quad (23)$$

$A, B, C, D$  haben folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned}
 A &= \left[ K \frac{\rho_s}{G} \frac{M_g}{M_k} \right]; & B &= \left[ K \frac{y_0}{m_{K0}} \right]; \\
 C &= \left[ \frac{\varepsilon \rho_g}{G} \right]; & D &= \left[ \frac{C_s}{Q m_{K0}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Die Gleichung (23) drückt die Temperaturen in den verschiedenen Schichthöhen des Sintergutes als Funktion des Bandweges und der Bandgeschwindigkeit aus. Dabei wurden folgende weitere Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}
 E &= H/M; & L &= 2(bH - M); & N &= A + BC(H/M); \\
 P &= bA + BC; & R &= B(H/M).
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

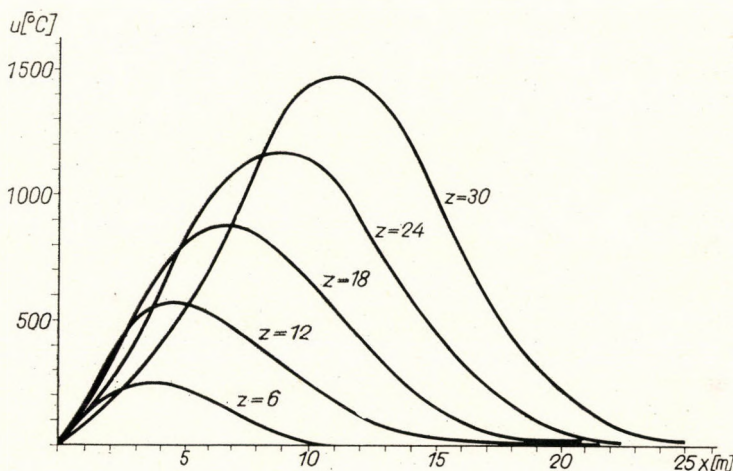


Bild 5. Temperaturverhältnisse des Sinterbandes als Funktion der Schichthöhe

Die Funktion (23) wurde für Parameterwerte, welche den normalen Betriebsverhältnissen des Sinterbandes nahekommen, mit einer Digitalrechenmaschine ausgewertet. Die Höhe des Sintergutes betrug 30 cm, die Bandgeschwindigkeit 2,5 m/min. Die Ergebnisse der Berechnung, die Temperaturprofile in verschiedenen Schichthöhen sind im Bild 5 dargestellt. Die Kurven entsprechen  $z$ -Werten von 6, 12, 18, 24, und 30 cm (die untere Schicht entspricht  $z = 30$  cm).

Die Maximaltemperaturen in den einzelnen Schichten verschieben sich, wie ersichtlich, nach immer höheren  $x$ -Werten, wobei die Absolutwerte ebenfalls zunehmen. Bei einer effektiven Bandlänge  $l$  gleich 25 m wird die Maximaltemperatur in der untersten Schicht ungefähr in der Mitte des Bandes liegen. Die Verbrennung des Kokes kann praktisch als beendet betrachtet werden, wenn die Temperatur in der untersten Schicht unter 5% der Maximaltemperatur gesunken ist. Wie aus Bild 5 ersichtlich, gewährleistet bei der gewählten Bandgeschwindigkeit die Bandlänge noch gerade eine vollständige Verbrennung des Kokes.

Das beschriebene Modell der Temperaturverhältnisse ermöglicht die Überprüfung der Richtigkeit der Lösung der Regelung des Sinterbandes. Gemäß des vorher Gesagten wird die Bandgeschwindigkeit so geregelt, daß die Stelle der Maximaltemperatur in der Nähe des Bandendes liegt. Nach einer Faustformel sollte

$$x_M \simeq (0,8 \text{ bis } 0,9) l [\text{m}] \quad (26)$$

sein wo  $l$  die effektive Bandlänge bedeutet und  $x_M$  die durch die Thermoelemente der Rauchgaskammer gemessene Ortskoordinate der Maximaltemperatur ist. Auf Grund von (23) konnte bewiesen werden, daß die Stellen der Maximaltemperaturen in allen Schichten der Bandgeschwindigkeit direkt proportional sind. Bei der Veränderung der Bandgeschwindigkeit wandert das Temperaturprofil unverändert über das Band.

Wie erwähnt, bezieht sich Gleichung (26) auf gewisse Mitteltemperaturen, welche durch die Thermoelemente in der Rauchgaskammer gemessen werden. Andererseits sind die Temperaturen in der *untersten* Schicht mit dem Ausbrennen des Sintergutes verknüpft. Bei der Messung der Rauchgastemperaturen handelt es sich um die *indirekte* Messung der Maximaltemperaturen in der *untersten* Schicht, da ihre Messung auf direktem Wege auf gerätetechnische Schwierigkeiten stößt. Gemäß Bild 5 sollte zum vollständigen Ausbrennen des Kokes in der untersten Schicht die Stelle des Temperaturmaximums ungefähr in die Mitte des Bandes gelegt werden, gemäß der Beziehung:

$$x_{M,z_0} \simeq 0,5 l, \quad (27)$$

wo  $x_{M,z_0}$  die Ortskoordinate des Temperaturmaximums in der untersten Schicht bezeichnet.

Untersuchen wir jetzt, in welchem Einklang diese Beziehung mit (26) steht. Da es vorausgesetzt wird, daß der Wärmeaustausch zwischen Gas und Feststoff so schnell verläuft, daß ihre Temperaturen praktisch gleich sind, kann angenommen werden, daß die Rauchgastemperatur dem Mittelwert der in den einzelnen Schichten vorhandenen Temperaturen gleich ist.

Durch Integrieren von (23) zwischen den Grenzen  $z = 0$  und  $z = z_0$  erhält man

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} u(x, z) dz = \\ &= \frac{1}{DL z_0} \left\{ \left[ \frac{2}{P} \ln \cosh \frac{1}{2} \left( Pz - B \frac{x}{w} \right) \right]_0^{z_0} - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{2}{*N} \ln \cosh \frac{2}{2E} \left( Nz - R \frac{x}{w} \right) \right]_0^{z_0} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Die Auswertung ergab die Kurve 1 im Bild 6. Zum Vergleich wurde aus dem Bilde 6 der Temperaturverlauf in der untersten Schicht auch eingezeichnet.

net (Kurve 2). Das Temperaturprofil, welches die Thermoelemente in der Rauchgaskammer anzeigen, ist also gegenüber dem in der untersten Schicht nach links verschoben und liegt wesentlich niedriger als das erste. Das Maximum liegt ungefähr im Viertel der Bandlänge. Daraus kann die Folgerung gezogen werden, daß bei der Regelung auf Grund der Rauchgastemperaturen

$$x_M \simeq 0,25 l \quad (29)$$

gewählt werden sollte, also ein wesentlich kleinerer Wert, als auf Grund vom (26) angenommen werden könnte.

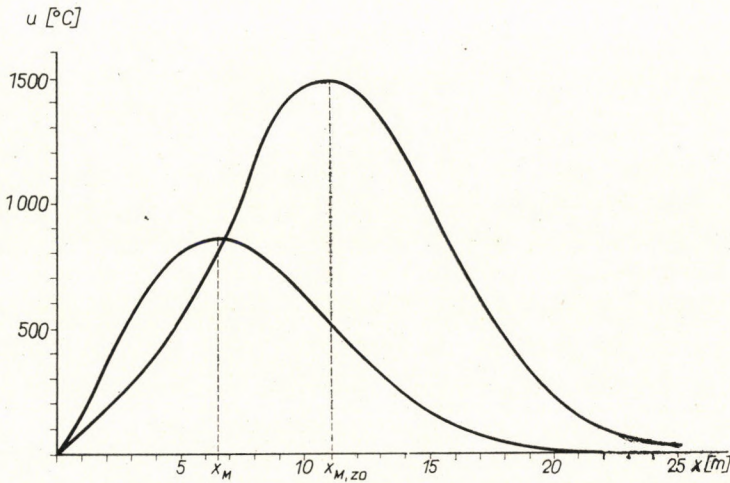


Bild 6. Rauchgastemperaturen des Sinterbandes

### V. Schlußfolgerungen

Die hier durchgeführte Analyse gibt einen guten Einblick in die Temperaturverhältnisse des Sinterbandes und ermöglicht gewisse Schlußfolgerungen über seine automatische Regelung. Wenn auch der Vorgang in der Wirklichkeit nicht unter exakt adiabatischen Verhältnissen verläuft, kann angenommen werden, daß die Gleichung (23) die Temperaturverhältnisse im stationären Zustand richtig widerspiegelt. Dies gilt in erster Linie für die Stelle des Maximalwertes der Rauchgastemperaturen. Gewisse Unterschiede sind zwischen den berechneten und tatsächlichen Temperaturen zu verzeichnen: wegen Vernachlässigung der Strahlungsverluste liegen die theoretischen Temperaturen etwas höher als die wirklichen.

Jedenfalls kann festgestellt werden, daß die Regelung der Bandgeschwindigkeit auf Grund der Stelle des Maximums der Rauchgastemperaturen richtig ist, da die zur vollständigen Verbrennung des Kokes nötige Bandgeschwindigkeit durch diese eindeutig bestimmt ist. Andererseits müssen die in der Praxis gewählten Sollwerte des Ortes der Maximaltemperatur als *zu hoch* bezeichnet

werden. Es ist bei dem üblich gewählten  $x_M$ -Wert mit einem Koksverlust zu rechnen (eventuell verläuft die weitere Verbrennung des Kokses auf dem dem Sinterband folgenden Kühlband). Außer der Koksverluste kann eine unvollständige Verbrennung die Sinterqualität in der untersten Schicht nachteilig beeinflussen, infolgedessen kann eine Vergrößerung der wieder zu verarbeitenden Feinkiesmenge entstehen. Jedenfalls liegt es in den Händen der Betriebsführung zwischen der gewählten Bandleistung und dem Koks bzw. Feinsinterverlusten ein Kompromiß zu schließen. Die theoretischen Unterlagen sind dazu teilweise durch die hier geschilderte Theorie gegeben.

Gemäß Gleichung (23) werde Ort des Temperaturmaximums hinsichtlich der Änderung der Bandgeschwindigkeit ein Regelungsobjekt nullten Grades, da die erste diesem ohne Zeitverzögerung folgt. Dies ist in erster Näherung richtig. Jedenfalls ist eine Zeitverzögerung doch vorhanden, welche dadurch zustande kommt, daß die Wärmeleitfähigkeit des Sintergutes nicht ganz vernachlässigt werden kann, wie das bei der Ableitung von (23) angenommen wurde. Bei dem vereinfachten Modell im zweiten Kapitel — welches übrigens die stationären Verhältnisse nur roh widerspiegelt — wurde mit einer endlichen Wärmeleitfähigkeit gerechnet, was eine Übergangsfunktion ersten Grades mit einer Anlaufzeit von einigen Minuten ergab (Bild 4). Bei der Einstellung der Regelung der Bandgeschwindigkeit muß dieser Umstand berücksichtigt werden.

#### SCHRIFTTUM

1. CAPPEL, F.—NIKE S.: Optimierungsversuche an einer Bandsinteranlage. *Regelungstechnik* **13** (1965), 185.
2. SINGER, D.—DEMJÉN, CS.—KOVÁCS, M.: Szalagrendszerű ércdarabosító mű dinamikájáról és optimális irányításáról (Über die Dynamik und optimale Steuerung von Bandsinteranlagen). *Mitteilungen des Forschungsinstituts für Automatisierung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften*, Budapest 1966; H. 15.
3. GUMZ, W.: Kohlenstaubfeuerungen; Berlin 1938.
4. JOHNSON, B. M.—FROMENT, G. F.—WATSON, C. C.: Temperature Profiles in Packed Beds of Catalyst during Regeneration. *Chem. Eng. Sci.* **17** (1962), 835.

**Examinations of the Temperature Conditions and the Dynamics of Control of an Ore Sintering Belt.** The authors investigate on a simplified model the transfer characteristics of an ore sintering belt conveyor. Further ideas on modelling are the base for dealing with static conditions of the conveyor and from these conclusions are drawn for the automatic control of the conveyor. The examinations were carried out partly on an analogue, partly on a digital computer.

**Examen des conditions de température et de la dynamique de la régulation d'une bande transporteuse pour l'agglomération des minerais.** Les auteurs étudient, sur un modèle simplifié, les conditions de transfert d'une bande pour l'agglomération du minerai. En se basant sur d'autres modèles, ils traitent des conditions stationnaires de la bande et en tirent des conclusions relatives à la régulation automatique de la bande. Les examens ont été faits sur des calculatrices en partie analogues et en partie digitales.

**Исследования в области температурных условий агломерационной ленты и динамики ее регулирования** (Д. Сингер, и Ч. Демен). В работе на упрощенной модели изучаются передаточные условия рудничной агломерационной ленты. На основе дальнейших модельных представлений рассматриваются стационарные условия аглоленты и на основе их делаются выводы относительно вопроса автоматического регулирования аглоленты. Исследования проведены частично на аналоговой, а частично на цифровой вычислительной машине.

# STROMVERTEILUNG AUF PARALLELGESCHALTETE HALBLEITERZELLEN MIT AUSGLEICHTRANSFORMATOREN

I. RÁCZ

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR AUTOMATION DER UNGARISCHEN  
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 3. März, 1967]

Zur Verbesserung der Stromverteilung parallel geschalteter Dioden oder Thyristoren eignet sich die geschlossene Vieleckschaltung oder die zyklische Paarschaltung der Sekundärwicklungen von Teilerdrosseln. Zur Bestimmung der größten Stromabweichungen und der größten Inanspruchnahme der Transformatoren enthält der Aufsatz Formeln, die sich auf den Fall beziehen, wenn in den Spannungen in leitender Richtung Abweichungen auftreten, oder wenn die Sicherung eines Zweiges schmilzt. Die Methode kann unter Berücksichtigung der Dämpfungselemente  $R$ ,  $C$  auch zur Untersuchung transientser Kommutationsvorgänge angewandt werden.

## I. Einleitung

Um hohe Ströme gleichzurichten, muß man bekanntlich für jede Phase eine Anzahl von parallelgeschalteten Dioden oder Thyristoren verwenden. Die gleichmäßige Stromverteilung könnte durch die Anwendung von ausgewählten Zellen und eine entsprechende Zündeinrichtung erreicht werden, doch ist dazu eine Überdimensionierung notwendig. Dieser Weg ist kostspielig. Die Stromverteilung kann auch mit verhältnismäßig kleinen Ausgleichstransformatoren verbessert werden. Von den vielen bekannten Schaltungen zeigt Bild 1 die zwei am häufigsten angewendeten Lösungen. Bild 1a zeigt die geschlossene Polygonschaltung der Sekundärwicklungen [z. B. 1], nach Bild 1b [z. B. 1-5] wird der Strom jedes Parallelzweiges mit dem Strom von zwei anderen Zweigen verglichen (zyklische Paarschaltung).

Im idealen Fall sind alle Zweigströme  $I_k$  gleich dem Mittelwert  $I_0 = I_k/n = I/n$ . Die Abweichungen der Durchlaß- und Durchschaltkennlinien verursachen Stromabweichungen  $I_k - I_0 = I'_k$ . Bei der Berechnung der Verteilung werden die nachstehenden vorausgesetzt:

a) Alle Transformatoren haben gleiche Parameter, die Übersetzungsverhältnisse sind 1 : 1, ihre Gleichungen sind linear. Die Impedanz einer Wicklung in Operatorenform ist  $Z = R + pL$ , die gegenseitige Impedanz zwischen der primären und sekundären Wicklung ist  $Z_m = pL_m$ , wobei  $L$  die Selbstinduktivität,  $L_m$  die gegenseitige (Hauptfluß-) und  $L - L_m = L_\sigma$  die Streuinduktivität ist. Die Ersatzschaltung von Bild 2 ist für jeden einzelnen Transformator gültig. Trotz der Nichtlinearität des Eisens können die meisten Ergebnisse als Näherungslösungen angenommen werden.

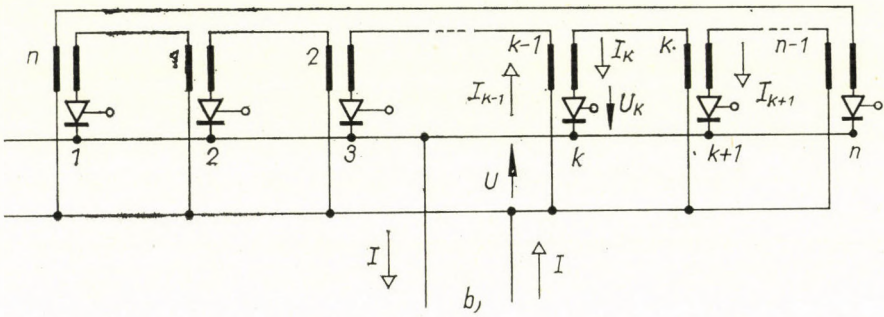
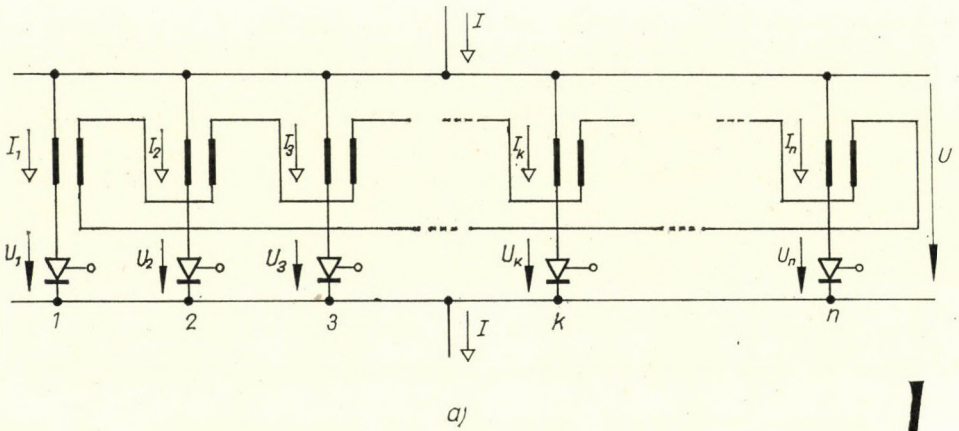


Bild 1

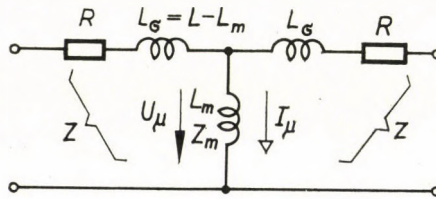


Bild 2

b) Bei der Bestimmung der größten Stromabweichungen und der größten Beanspruchungen der Transformatoren wird vorausgesetzt, daß die Durchlaßspannungen  $U_k$  beliebige Werte zwischen  $U_{max}$  und  $U_{min}$  annehmen können mit

$$U_{max} - U_{min} = 2A. \tag{1}$$

Sind die Spannungs-Zeitflächen maßgebend, dann wird angenommen, daß



$$\max \left| \int_0^\tau u_k dt - \int_0^\tau u_j dt \right| = 2 A \cdot \tau \quad (2)$$

ist.

c) Die allgemeinen Formeln der Stromverteilung werden für den Fall abgeleitet, wenn die Thyristorspannungen  $U_k(t)$  und die Sammelschienenspannung  $U(t)$  oder der totale Strom  $I(t)$  beliebige gegebene Zeitfunktionen sind. In der Praxis ist meistens  $I(t)$  gegeben, daraus kann man unter Annahme der gleichmäßigen Verteilung die Spannungen  $U_k(t)$  bestimmen und eine genauere Stromverteilung berechnen. Eine nachfolgende Korrektur der Spannungen ist zumeist nicht notwendig.

Aufgrund der allgemeinen Zusammenhänge kann man die Stromverteilung auch für den Fall berechnen, wenn eine Sicherung ausschmilzt. Wir werden die Eigenschaften der verschiedenen Schaltungen zusammenfassend vergleichen.

## II. Berechnungsmethode

Die zwischen den Zweigen bestehende zyklische Symmetrie (Bild 3) ermöglicht es, die Formeln einfach abzuleiten [6]. Es seien zwei veränderliche Größen des  $k$ -ten Zweigs oder Transformators  $y_k$  und  $x_k$ , z. B. Spannungen,

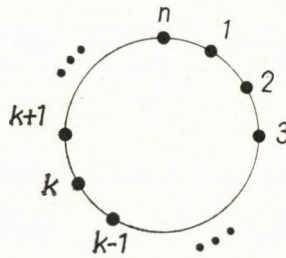


Bild 3

Ströme, Flüsse, Wicklungsflüsse usw., dann haben die Zusammenhänge in Matrizen-Schreibweise die folgende Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Wegen der zyklischen Symmetrie wird die Matrix schon durch  $n$  Elemente  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  statt  $n^2$  Elemente determiniert, es genügt also die Elemente einer Reihe oder Säule zu bestimmen. Die Elemente  $c_i$  können Differentialoperatoren enthalten. Jede zyklische Matrix hat mindestens  $n$  Eigenvektoren.

Die Koordinaten  $s_{kr}$  des  $r$ -ten Eigenvektors können mit der  $r$ -ten Wurzel  $g_r$  der Einheit ausgedrückt werden

$$g_r = \left(\sqrt[n]{1}\right)_r = e^{j\alpha r}; \alpha = 2\pi/n; r = 0, 1, \dots, n-1; \quad (4)$$

$$s_{kr} = g_r^{k-1}. \quad (5)$$

Für  $n = 8$  sind die Werte von  $g_r$  im Bild 4 aufgezeichnet.

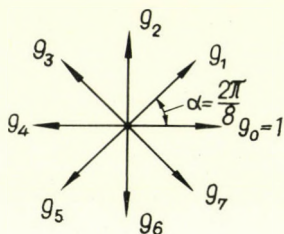


Bild 4

Hat ein Vektor die Richtung des  $r$ -ten Eigenvektors, so stehen seine Koordinaten im Verhältnis

$$\begin{aligned} x_{1r} : x_{2r} : \dots : x_{k-1,r} : x_{kr} : x_{k+1,r} : \dots : x_{nr} &= \\ &= 1 : g_r : \dots : g_r^{k-2} : g_r^{k-1} : g_r^k : \dots : g_r^{n-1} = \\ &= \dots : \frac{1}{g_r} : 1 : g_r : \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Für solche Vektoren ist die Multiplikation mit der Matrix  $C$  gleichwertig mit der Multiplikation mit dem skalaren Eigenwert  $\lambda_r$ ,

$$C\mathbf{x}_r = \lambda_r \mathbf{x}_r; \lambda_r = c_0 + c_1 g_r + \dots + c_{n-1} g_r^{n-1}, \quad (7)$$

was durch Substitution von (6) in (3) einfach bewiesen werden kann.

Es ist zweckmäßig, alle Vektoren in Richtung der Eigenvektoren liegende Komponenten zu zerlegen. Z. B. kann ein beliebiger Zeitvektor  $\mathbf{x}(t)$  [oder nach Laplace-Transformation  $\mathbf{x}(p)$ ], in folgender Form zusammengesetzt werden:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \dots + x_{1r} + \dots + x_{1,n-1}, \\ x_2 &= x_{20} + \dots + x_{2r} + \dots + x_{2,n-1}, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n4} + \dots + x_{nr} + \dots + x_{3,n-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Man nennt die auf der rechten Seite in der  $(r+1)$ -ten Säule stehenden Komponenten »symmetrische Komponenten  $r$ -ter Reihenfolge« oder  $r$ -tes

Komponenten-System. Ist  $r = 0$ , so bekommt man ein Null-Komponenten-System. Da  $g_0 = 1$ , so ist

$$x_{10} : x_{20} : \dots : x_{n0} = 1 : 1 : \dots : 1 \text{ oder } x_{k0} = x_0. \quad (9)$$

Dieser Fall entspricht der gleichmäßigen Verteilung der Ströme und Spannungen in den Schaltungen nach Bild 1.

Für alle anderen Komponenten ( $r \neq 0$ ) ist die Summe der Koordinaten gleich 0:

$$\sum_{k=1}^n x_{kr} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n-1. \quad (10)$$

Das Gleichungssystem (8) kann auch in der Form

$$x_k = \sum_{r=0}^{n-1} x_{1r} g_r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

aufgeschrieben werden, was der Satz der Zusammensetzung der symmetrischen Komponenten ist. Die Inversion des Gleichungssystems (11) gibt den Satz der Zerlegung in symmetrische Komponenten:

$$x_{1r} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \hat{g}_r^{k-1}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad (12)$$

wo die konjugiert-komplexe Zahl mit einem Zirkumflex bezeichnet ist.

Mit der Methode der symmetrischen Komponenten der Momentanwerte können die Schaltungen nach Bild 1 (oder andere zyklisch-symmetrische Schaltungen) einfach betrachtet werden.

### III. Geschlossene Polygonschaltung der Sekundärwicklungen (Bild 1a)

Vom Schaltungsschema 1a können die folgenden Gleichungen abgeleitet werden:

Für den  $k$ -ten Zweig:

$$U = U_k + I_k Z - I_s Z_m, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (13)$$

für den *Sekundärkreis*:

$$0 = I_s n Z - Z_m \sum I_k; \quad (14)$$

und für den *gesamten Strom*

$$I = \Sigma I_k = nI_0. \quad (15)$$

Da  $U$  und  $I_s$  für alle Werte von  $k$  den gleichen Wert haben, bilden diese Größen ein Nullkomponenten-System, d. h., alle andere Komponente sind gleich Null.

Für die Nullkomponenten ( $r = 0$ ) erhält man aus den Gleichungen (13)–(15):

$$U = U_0 + I_c Z - I_s Z_m, \quad 0 = I_s Z - I_0 Z_m;$$

woraus folgt:

$$I_s = I_0 \frac{Z_m}{Z}, \quad I_{\mu 0} = I_0 - I_s = I_0 \frac{Z - Z_m}{Z}; \quad (16)$$

$$U = U_0 + I_0 (Z - Z_m^2/Z) = U_0 + I_0 Z_K. \quad (17)$$

Hier sind

$U_0$  die Nullkomponente der Durchlaßspannungen  $U_k$ ;  
 $I_0 = I/n$  der gleichmäßig verteilte Summenstrom,

$$Z_K = Z - Z_m^2/Z \approx 2(Z - Z_m)$$

die Kurzschlußimpedanz des Transformators;  
 $I_{\mu}$  der Magnetisierungsstrom;  $I_{\mu 0}$  dessen Nullkomponente.

In praktischen Fällen sind der Summenstrom  $I$  und die Nullkomponente  $I_0$  durch die äußeren Teile der Stromkreise bestimmt. Dann kann man die Schienenspannung  $U$  aus (17) berechnen, was aber in den meisten Fällen überflüssig ist.

Für die anderen Komponenten ( $r \neq 0$ ) sind die Gleichungen (13)–(14) sehr einfach, weil  $\Sigma I_k = 0$ ,  $I_s = 0$  und auch die Komponenten von  $U$  für  $r \neq 0$  gleich Null sind. In diesem einfachen Fall können die Komponenten  $r \neq 0$  zusammengezogen werden, nur die Nullkomponenten sind abzulösen:

$$I'_k = \sum_{r \neq 0} I_{kr} = I_k - I_0; \quad U'_k = \sum_{r \neq 0} U_{kr} = U_k - U_0 \quad (18)$$

die den Abweichungen von den Mittelwerten entsprechen. Für diese Komponenten nimmt die Gleichung (13) die folgende Form an:

$$0 = U'_k + I'_k Z; \quad I'_k = -U'_k/Z. \quad (19)$$

Auf Grund von (17) und (19) können die Ersatzschaltungen für die Komponenten  $r = 0$  und  $r \neq 0$  aufgezeichnet werden (Bild 5). Da in Fällen für  $r \neq 0$  kein Sekundärstrom fließt, ist für die Ausbildung der Stromabweichungen die Leerlaufimpedanz  $Z$  der Transformatoren maßgebend. Die entsprechende Komponente des Magnetisierungsstromes ist:

$$I'_\mu = I'_k - I'_s = I'_k. \quad (20)$$

Die maximale Stromabweichung ergibt sich nach (19) für den Fall, daß die Abweichung  $U'_k$  der Durchlaßspannungen ein Extremwert ist. Nach Bedingung (1) für die Zelle  $k = 1$  ergibt sich ein Maximum, wenn

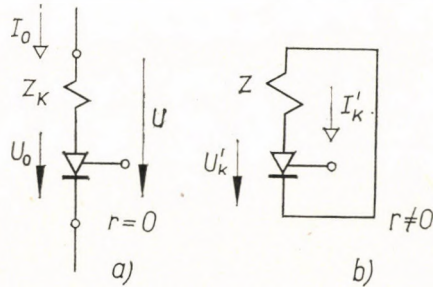


Bild 5

$$U_1 = U_{\min}, U_2 = U_2 = \dots = U_n = U_{\max} = U_{\min} + 2 \Delta$$

ist, also

$$U'_1 = -2 \Delta \frac{n-1}{n} \quad \text{und} \quad I'_1 = I'_{\max} = \frac{2 \Delta}{Z} \frac{n-1}{n}. \quad (21)$$

Die Transformatoren müssen ihre ausgleichende Wirkung im allgemeinen nur für kurze Stromführungszeiten  $\tau$  (z. B. 6,67 ms) ausüben. In solchen Fällen können die Wirkwiderstände in  $Z$  vernachlässigt werden,  $Z = pL$ , also kann die Stromabweichung von (19) in Form

$$I'_{k(t)} = \frac{1}{L} \int_0^\tau U'_k dt$$

angeschrieben werden. Die höchste Abweichung ergibt sich nach (21) zu

$$I'_{\max} = \frac{2 \Delta \tau}{L} \frac{n-1}{n}. \quad (22)$$

Der größte Magnetisierungsstrom ist:

$$I_{\mu \max} = I_{\mu 0} + I'_{\max} = I_0 \frac{Z - Z_m}{Z} + \frac{2 \Delta}{Z} \frac{n-1}{n}, \quad (23)$$

oder die durch den Hauptfluß induzierte Spannung:

$$I_{\mu \max} Z_m = U_{\mu \max} = I_0 \frac{Z_m}{Z} (Z - Z_m) + 2 \Delta \frac{Z_m}{Z} \frac{n-1}{n}. \quad (24)$$

Der Eisenquerschnitt der Transformatoren ist so zu dimensionieren, daß die Spannungs-Zeitfläche von  $U_{\mu\max}$  keine starke Sättigung verursachen. Ist die Sättigungsinduktion  $B_s$ , so muß die nachstehende Ungleichung erfüllt sein:

$$NAB_s \geq \int_0^\tau U_{\mu\max} dt \approx I_0 R\tau + I_0 L_s + 2 A\tau, \quad (25)$$

wo  $L_s = L - L_m$  die Streuinduktivität,  $A$  der Eisenquerschnitt,  $N$  die Windungszahl ist.

Schmilzt eine Sicherungspatrone z.B. im ersten Zweig aus, so bildet sich an der Stelle der Unterbrechung eine so große Spannung  $U_1$  aus, daß der Strom  $I_1$  gleich Null ist. In diesem Fall dürfen die anderen Spannungen  $U_k$  vernachlässigt werden, also  $U_0 = U_1/n$ ,  $U'_1 = U_1 - U_0 = U_1(n-1)/n$  und für  $k \neq 1$   $U'_k = -U_1/n$ . Die Stromverteilung in den gesunden Zweigen bleibt gleichmäßig:

$$I_k = \frac{nI_0}{n-1}, \quad I_k - I_0 = I'_k = \frac{I_0}{n-1} = I'_{\mu k}, \quad k \neq 1. \quad (26)$$

$U_1$  kann aus der Bedingung  $I_1 = I'_1 + I_0 = 0$  berechnet werden:

$$I'_1 = -I_0 = -\frac{U_1}{Z} \frac{n-1}{n}.$$

Die resultierende Impedanz zwischen den Sammelschienen ergibt sich nach (17) zu

$$\frac{U}{I} = \frac{I_0 Z_K + U_0}{nI_0} = \frac{Z_K}{n} + \frac{Z}{n(n-1)}. \quad (26a)$$

Das letzte Glied tritt infolge der Störung in einem Zweig hinein.

Der zusätzliche Magnetisierungsstrom (26) kann bei nicht zu großer Zahl  $n$  der parallelen Zweige bedeutend sein, was eine unerwünschte Sättigung verbunden mit der Aufhebung der ausgleichenden Wirkung verursacht. Doch wäre zu kostspielig, die Transformatoren für diesen Fall zu bemessen.

#### IV. Zyklische Paarschaltung (Bild 1b)

Nach Bild 1b ist die Spannungsgleichung des  $k$ -ten Zweiges:

$$U = U_k + 2ZI_k - Z_m(I_{k+1} + I_{k-1}). \quad (27)$$

Für die Nullkomponenten kann man schreiben:

$$U = U_0 + I_0 2(Z - Z_m). \quad (28)$$

Beim Vergleich mit Formel (17) kann festgestellt werden, daß in Bezug auf die Nullkomponenten praktisch kein Unterschied besteht, da die Kurzschlußimpedanz der Transformatoren ungefähr  $2(Z - Z_m)$  ist.

Für die anderen Komponenten ( $r \neq 0$ ) wird  $U$  durch 0 ersetzt. Unter Berücksichtigung, daß nach Formel (6)

$$I_{k+1} = I_k g_r \text{ und } I_{k-1} = I_k / g_r$$

sind, ergibt sich:

$$0 = U_{kr} + I_{kr} 2 \left( Z - Z_m \frac{g_r + 1/g_r}{2} \right); \quad r = 1, 2, \dots, n-1;$$

oder

$$I_{kr} = - \frac{U_{kr}}{2(Z - Z_m \cos \alpha r)}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{n}. \quad (29)$$

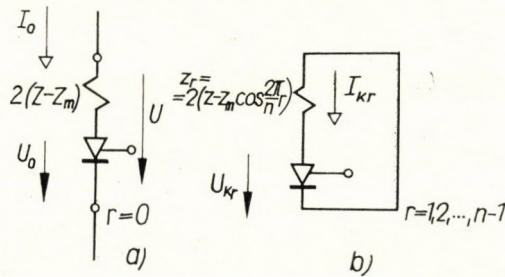


Bild 6

Die Impedanzen der  $r$ -ten Komponenten

$$Z_r = 2(Z - Z_m \cos \alpha r)$$

entsprechen den Eigenwerten der zyklischen Impedanzmatrix. Die Schaltung gibt die kleinste Impedanz für die  $r = 1$  Komponenten:

$$Z_1 = 2 \left( Z - Z_m \cos \frac{2\pi}{n} \right) = 2R + 2pL_s + 2pL_m \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right), \quad (30)$$

da die Ströme der benachbarten Zweige in diesem Fall die kleinsten Unterschiede aufweisen. Ist  $n \leq 6$ , so wird die zyklische Paarschaltung der geschlossenen sekundären Polygonschaltung auch noch für die  $r = 1$  Komponenten der Stromabweichungen vorgezogen, da die letztere Schaltung für alle Komponenten eine kleinere Impedanz  $Z$  aufweist.

Die Ersatzschaltungen der zyklischen Paarschaltung für die einzelnen symmetrischen Komponenten sind in Bild 6a und 6b dargestellt.

Zur Bestimmung der resultierenden Stromabweichungen werden die Spannungen  $U_k$  in symmetrische Komponenten zerlegt, die einzelnen symmetrischen Stromkomponenten nach (29) berechnet und nach (8) summiert. Statt der so erhaltbaren Summenformel soll hier eine einfachere Methode empfohlen werden. Man nützt die zyklische Symmetrie so aus, daß nur die Elemente der ersten Säule in der Matrix bestimmt werden, d. h., man nimmt an, daß nur  $U_1$  von Null verschieden ist. Auch  $U = 0$  kann aufgenommen werden, da  $U$  nur die Nullkomponenten beeinflußt. Die Spannungsgleichung (27) erhält so die Form:

$$0 = U_1 + 2ZI_1 - Z_m(I_2 + I_n); \quad (31a)$$

$$0 = 0 + 2ZI_k - Z_m(I_{k+1} + I_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (31b)$$

mit  $I_{n+1} = I_1$ . Zur Bestimmung des Zusammenhanges  $I_k = f(k)$  kann man die homogene Differenzgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (31b) mit dem Ansatz

$$I_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k = C_1 e^{\lambda_1 k} + C_2 e^{\lambda_2 k}$$

lösen. Nach Substitution erhält man, daß  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$  und

$$\cosh \lambda = \frac{Z}{Z_m} \quad (32)$$

ist.

Die Lösung soll wegen der Symmetrie gleiche Werte für jene  $k$  Indizes liefern, die den gleichen Abstand von 1 und  $n + 1$ , also von  $n/2 + 1$  haben. Es ergibt sich für  $I_k$ :

$$I_k = C \cosh \lambda \left( \frac{n}{2} + 1 - k \right).$$

Der Koeffizient  $C$  kann so bestimmt werden, daß auch die Gleichung (31a) erfüllt ist. Man erhält dann:

$$I_k = - \frac{U_1}{2Z_m} \frac{\cosh \lambda \left( \frac{n}{2} + 1 - k \right)}{\sinh \lambda \sinh \lambda \frac{n}{2}}. \quad (33)$$

Da die Nullkomponente der Spannungen jetzt  $U_0 = U_1/n$  ist, erhält man aus (28)

$$I_0 = - \frac{U_1}{2n(Z - Z_m)} = - \frac{U_1}{2nZ_m(\cosh \lambda - 1)}, \quad (34)$$

womit  $I'_k = I_k - I_0$  berechnet werden kann.



Es sei bemerkt, daß die Gleichung (33) nur formell transzendent ist; sie könnte auch als rationale Bruchfunktion  $n$ -ter Ordnung in  $Z$  und  $Z_m$  aufgeschrieben werden. Das ist auch aus der Ersatzschaltung von Bild 7 ersichtlich, die im Fall  $U = 0$  gültig ist.

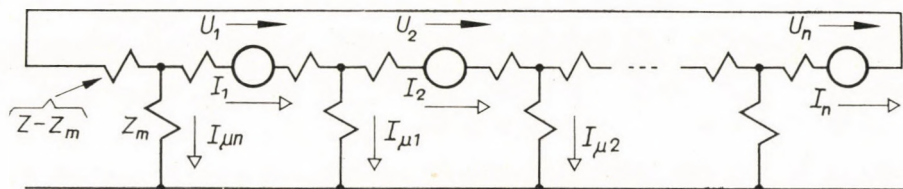


Bild 7

Eine gute und einfache Näherungsformel der Stromabweichungen wird bei Vernachlässigung der Wirkwiderstände und der Streuinduktivitäten erhalten. Der Grenzübergang  $Z \rightarrow Z_m$ , d. h.,  $\lambda \rightarrow 0$  liefert nach wiederholter Anwendung des L'Hospital-Satzes das folgende Ergebnis:

$$I'_k = I_k - I_0 = -\frac{U_1}{2nZ_m} \left[ \left( \frac{n}{2} + 1 - k \right)^2 - \frac{n^2 + 2}{12} \right]. \quad (35)$$

Die Stromabweichungen können in der Form

$$I'_k = -a_k U_1 / Z_m$$

aufgeschrieben werden, die Koeffizienten  $a_k$  sind in Tafel I und II bis  $n = 10$

Tafel I

$$Z = 1,05 Z_m$$

$n$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
2	0,122	-0,122								
3	0,216	-0,108	-0,108							
4	0,299	-0,061	-0,177	-0,061						
5	0,378	-0,004	-0,185	-0,185	-0,004					
6	0,451	0,057	-0,165	-0,236	-0,165	0,057				
7	0,52	0,118	-0,13	-0,248	-0,248	-0,13	0,118			
8	0,585	0,177	-0,088	-0,238	-0,286	-0,238	-0,088	0,177		
9	0,646	0,233	-0,044	-0,215	-0,297	-0,297	-0,215	-0,044	0,233	
10	0,702	0,287	0,001	-0,186	-0,29	-0,324	-0,29	-0,186	0,001	0,287

zusammengestellt. Tafel I ist aus den genaueren Gleichungen (33) und (34) unter Vernachlässigung der Wirkwiderstände, aber mit Berücksichtigung der Streuinduktivität mit einem Wert  $Z/Z_m = \cosh \lambda = 1,05$  berechnet; Tafel II bezieht sich auf den Fall ohne Streuinduktivität [ $Z/Z_m = \cosh \lambda = 1$ , Formel (35)]. Die Werte  $a_k$  für andere Streufaktoren können durch Inter- oder Extrapolation bestimmt werden.

Tafel II

$$Z = Z_m$$

$n$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
2	0,125	-0,125								
3	0,222	-0,111	-0,111							
4	0,312	-0,062	-0,188	-0,062						
5	0,4	—	-0,2	-0,2	—					
6	0,486	0,069	-0,18	-0,264	-0,18	0,069				
7	0,571	0,143	-0,143	-0,286	-0,286	-0,143	0,143			
8	0,656	0,219	-0,094	-0,281	-0,344	-0,281	-0,094	0,219		
9	0,741	0,296	-0,037	-0,259	-0,37	-0,37	-0,259	-0,037	0,296	
10	0,825	0,375	0,025	-0,225	-0,375	-0,475	-0,375	-0,225	0,025	0,375

Ist  $n = 2$ , dann enthält die Schaltung zwei parallel geschaltete Transformatoren, was natürlich überflüssig ist. Nach Weglassen des einen Transformators können die Koeffizienten  $a_k$  verwendet werden, indem man  $2 Z_m$  statt  $Z_m$  schreibt.

Zeichnet man die  $I'_k$ -Werte über  $k$ , so erhält man unter Berücksichtigung der Streuung eine Kettenlinie, ohne Berücksichtigung der Streuung eine Parabel (Bild 8).

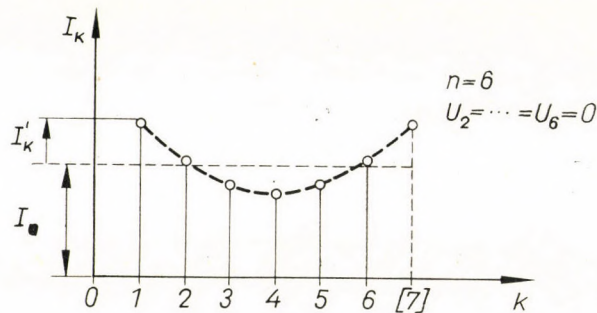


Bild 8

Aus den Tafeln geht hervor, daß die Streuung um so größere Wirkung hat, je größer  $n$  ist. Beim Wert des größten Stromes  $I'_1$  ist die Abweichung 17,5%

im Fall  $n = 10$ . Die Vernachlässigung der Streuung verursacht einen Fehler in Richtung der Sicherheit bei der Abschätzung der Stromabweichungen.

Bei der Bestimmung der größten Stromabweichungen muß beachtet werden, daß die Summe der Koeffizienten  $a_k$  gleich Null ist. So kann in der Formel

$$I'_1 = - \frac{1}{Z_m} \sum_{k=1}^n a_k U_k \quad (36)$$

zu allen  $U_k$  ein konstanter Wert addiert werden, also kann man statt (1) annehmen, daß sich die  $U_k$ -Werte zwischen den Grenzen  $\pm \Delta$  verändern können. Dann ergibt sich  $I'_1$  als Maximum, wenn die den positiven  $a_k$ -Koeffizienten entsprechenden  $U_k$ -Werte  $-\Delta$  und die anderen gleich  $+\Delta$  sind. Die zwei Gruppen liefern die gleichen Summen, so daß es genügt, die Summierung nur für die positiven Koeffizienten  $a_p$  durchzuführen:

$$I'_{\max} = \frac{2\Delta}{Z_m} \sum a_p, \quad a_p > 0. \quad (37)$$

Aus den Tafeln I und II sieht man, daß bis  $n \leq 5$  nur  $a_1$  und bis  $6 \leq n \leq 9$   $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_n$  positiv sind; für  $n \geq 10$  ergeben sich schon mehrere Glieder. Ist z. B.  $n \leq 5$  und erlaubt man die Näherung  $Z = Z_m$ , dann ergibt sich nach (35) und (37)

$$I'_{\max} \approx \frac{\Delta}{Z_m} \frac{n^2 - 1}{6n}, \quad n \leq 5. \quad (38)$$

Aus den Tabellen und Formel (22) kann abgeleitet werden, daß die zyklische Paarschaltung für  $n \leq 7$  vom Gesichtspunkt der maximalen Stromabweichung aus günstiger als die sekundäre Polygonschaltung ist.

Zur Bemessung der Transformatoren sind die Magnetisierungsströme

$$I_{\mu k} = I_k - I_{k+1},$$

oder die Hauptflußspannungen

$$U_{\mu k} = Z_m I_{\mu k}$$

notwendig. Ist nur die Spannung  $U_1$  von Null verschieden, so erhält man aus (33)

$$U'_{\mu k} = \frac{U_1}{2} \cdot \frac{\sinh \lambda \left( \frac{n}{2} + 1 - k \right)}{\cosh \frac{\lambda}{2} \sinh \lambda \frac{n}{2}}, \quad k = 2, 3, \dots, n+1; \quad (39)$$

oder mit der Näherung  $Z = Z_m$  aus (35)

$$U'_{\mu k} = \frac{U_1}{2} \cdot \frac{n - 2k + 1}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (40)$$

Die Verteilung der Spannungen  $U'_{\mu k}$  ist in Bild 9 dargestellt. Auch jetzt ist die

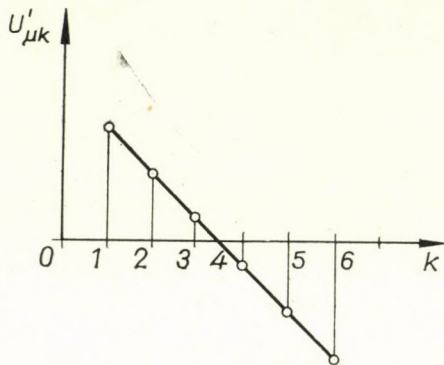


Bild 9

Summe der Koeffizienten in den Gleichungen (39) und (40) gleich Null, und die eine Hälfte der Koeffizienten ist positiv; darum erhält man den maximalen Wert von  $U'_{\mu k}$ , wenn die eine Hälfte der Spannungen  $U_k = \Delta$ , die andere  $U_k = -\Delta$  ist. So ergibt sich die möglichst größte Hauptflußspannung für eine gerade Zahl von  $n$ :

$$U'_{\mu \max} = \Delta \frac{n}{4}; \quad (41a)$$

und für eine ungerade Zahl von  $n$ :

$$U'_{\mu \max} = \Delta \frac{n^2 - 1}{4n}. \quad (41b)$$

Bei nicht ganz kleinen  $n$ -Werten darf man die einfachere Formel (41a) benutzen. Man erhält die Grundgleichung der Dimensionierung:

$$NAB_s \geq \Delta \tau \frac{n}{4}. \quad (42)$$

Beim Vergleich mit der entsprechenden Formel (25) der sekundären Polygonschaltung kann festgestellt werden, daß die zyklische Paarschaltung auch vom Gesichtspunkt des notwendigen Eisenquerschnittes aus bis  $n = 8$  günstiger ist.

Ein Nachteil der zyklischen Paarschaltung besteht darin, daß die Ströme sich nach Ausschmelzen einer Sicherungspatrone ungleichmäßig verteilen. Die auftretende Spannung  $U_1$  verursacht eine kettenlinienförmige bzw. parabolische Stromverteilung (Bild 10), demzufolge die maximalen Ströme ungefähr 1,5-mal größer werden als  $I_0$ , oder die nicht gleichzeitig auftretende Sättigung der Transformatoren noch weitere Stromabweichungen verursachen kann.

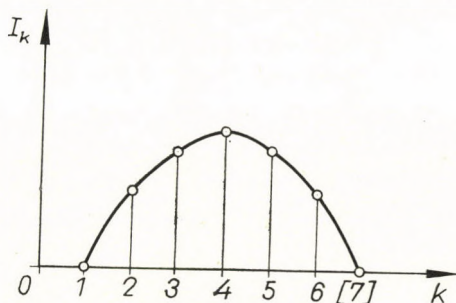


Bild 10

## SCHRIFTTUM

1. Забродский, Р. О. — Быков, Ю. М.: Параллельная работа тиристоров. *Электротехника* **37** (1966); No. 12, 32—34.
2. Westinghouse Silicon Controlled Rectifier Designers' Handbook (R. MURRAY jr. Editor). Westinghouse 1963.
3. Silicon Controlled Rectifier Manual (F. W. GUTZWILLER Editor), 3. ed. General Electric Co., New York 1964.
4. *Le Matériel Électrique S. W.*, Paris: Vorrichtung zur gleichmäßigen Stromverteilung auf parallelgeschaltete Halbleiter-Gleichrichterzellen. Patentschrift DBR, Nr. 1 199 873 (Frankreich 2. Juni 1960, 828 878).
5. IRMINGER G.: Beschaltung von Thyristoren. *BBC Mitt.* **53** (1966), 657—671.
6. RÁCZ, I.: Szimmetrikusan kapcsolt szabályozási rendszerek vizsgálata (Betrachtung symmetrisch gekoppelter Regelungssysteme). *Elektrotechnika* **55** (1962); 392—399, 437—440.

**Calculation of Current Distribution of Parallel Semi-Conductors with Current Sharing Transformers.** For the improvement of current distribution of parallel diodes or thyristors, closed polygonal connection or cyclic twin connection of the secondary coils of the sharing transformers are appropriate. The article gives formulae for the determination of the greatest current deviations and the maximum load of transformers relating to the case when there are deviations in the conducting direction tensions, or when the fuse of a branch melts. The method can be applied — taking the  $R, C$  damping elements into account — also for the examination of transient commutation phenomena.

**Calcul de la distribution du courant des semi-conducteurs parallèles avec transformateurs de division.** L'amélioration de la distribution du courant de diodes ou thyristors parallèles peut être réalisée par montage en polygone fermé, ou par montage cyclique par paires des bobines secondaires des transformateurs de division. L'article donne des formules pour la détermination des plus grandes déviations du courant ou des plus grandes charges des transformateurs, pour les cas de différences de tensions en direction conductrice ou de fonte du fusible dans une branche. Compte tenu des éléments amortisseurs  $R, C$ , la méthode peut être appliquée aussi pour l'examen des phénomènes de commutation transitoires.

**Расчет распределения тока на параллельно соединенных полупроводниковых приборах при помощи делительных дросселей (И. Рац).** Для улучшения токоснабжения соединенных параллельно полупроводниковых диодов и тиристорov подходит замкнутое многоугольное соединение вторичных обмоток делительных дросселей или же цикличное попарное соединение. В статье приводятся формулы для определения максимальных отклонений по току и максимальных нагрузок трансформаторов, которые касаются случая, когда имеются отклонения по напряжениям направления пропускания, или же при перегорании предохранителя одной ветви. Метод, с учетом гасящих звеньев  $R, C$  может быть применен и для исследования коммутационных переходных явлений.

## ПРОГРАММА БОКС ДЛЯ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Р. КАЛЬМАН и П. БАКОНИ

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ПО АВТОМАТИЗАЦИИ ВЕНГЕРСКОЙ  
АКАДЕМИИ НАУК, ВУДАПЕШТ

[Поступило 10. апреля 1967 г.]

Автор работы после краткого обзора методов цифрового моделирования непрерывных систем излагает разработанную систему цифрового моделирования, называемую системой Бокс. Приведен перечень блоков, которые могут быть использованы в программе, описывается способ программирования. Для иллюстрации сказанного выше показано решение классической задачи Лежандра при помощи цифрового моделирования. Работа дополняется детальным списком литературы.

### 1. Введение

Для моделирования непрерывных систем автоматического регулирования широко распространены аналоговые вычислительные машины. Это обстоятельство объясняется тем, что при моделировании таких задач мы имеем дело с линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями, которые, как известно, легко решать с помощью аналоговых вычислительных машин. С другой стороны, при моделировании дискретных и гибридных систем автоматического регулирования на аналоговых вычислительных машинах возникают довольно большие трудности, поэтому в таких случаях намного удобнее использовать универсальные цифровые или гибридные вычислительные машины, так как на них легче выполняются всякого рода логические соотношения, транспортное запаздывание и запоминание некоторых величин. В этих случаях аналоговая часть осуществляет интегрирование, а цифровая часть — остальные операции.

Гибридный комплекс содержит одну аналоговую и одну цифровую вычислительную машину и ряд преобразователей, вследствие чего его цена довольно высокая, поэтому желательнее гибридный комплекс заменить универсальной цифровой вычислительной машиной. Моделирование на универсальных цифровых вычислительных машинах называется цифровым моделированием.

При цифровом моделировании возникают следующие основные проблемы:

- а) Как выбрать комплект элементов, которые могут быть использованы при моделировании?
- б) Каким образом обозначить блоки и описать соединения между ними?
- в) Какой метод цифрового интегрирования целесообразно использовать и как лучше разбить оси времени при интегрировании?

Различные авторы решают эти проблемы по-разному. В некоторых программах [29, 13] комплект элементов полностью соответствует элементам аналоговых вычислительных машин. Они содержат только потенциометры, интеграторы, сумматоры, умножители, функциональные преобразователи, синусоидальные элементы. В других программах практически можно использовать любые компоненты, из которых составляются гибридные вычислительные машины. Кроме указанных выше, эти компоненты выполняют следующие операции: деление, вычисление модуля, возведение в степень, вычисление натурального логарифма, извлечение квадратного корня, вычисление синуса, косинуса, тангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса. Помимо этого, они могут выполнять и логические операции: запоминание и выборка из памяти, операции И, ИЛИ, НЕ И, НЕ ИЛИ, ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, сравнение аналоговых сигналов с логическим выходом [25, 39]. Некоторые программы имеют в распоряжении набор блоков, моделирующих работу таких элементов как блок транспортного запаздывания, усилитель, блок зоны нечувствительности, ПИ регуляторы, схемы с насыщением, вентили, релейные, гистерезные и разрывные характеристики и т. д. [3, 20].

Блоки обозначаются номерами [3, 53] или специальными символами [43, 27]. При использовании первого типа обозначения описание структуры схемы близко к описанию ее с помощью стандартных условных обозначений аналоговых вычислительных машин [5, 43], а при использовании специальных символов метод характеризования структуры схем скорее ближе к стандартным алгоритмическим языкам [23, 56].

Наиболее важной проблемой цифрового моделирования является правильный выбор метода числового интегрирования. Для этого могут быть использованы простейшие способы, как, например, методы прямоугольников и трапеций [13, 27, 51], а также более сложные одношаговые методы, как методы Рунге—Кутта, Кутта—Мерсона, Адамса—Мильтона, Мильна [29, 16, 23] и разные многошаговые методы, основанные на процессе предсказания и исправления [25, 56].

Как известно, точность решения исходных задач зависит не только от самой задачи и метода цифрового интегрирования, но и от выбора размера шага интегрирования. При использовании простых методов интегрирования необходимо выбирать малые шаги. При использовании же более сложных методов они могут быть большими, хотя при этом расчет каждого шага требует больше времени. Некоторые из перечисленных методов обеспечивают автоматический выбор соответствующего размера шага.

## 2. Описание программы БОКС-а

Программа БОКС-а (Block Oriented Control Simulator) предназначена для моделирования на цифровых вычислительных машинах аналоговых и гибридных систем автоматического регулирования. Эта программа составлена на символическом языке MIRA и в машинном коде для цифровой вычислительной машины МИНСК-22, и имеет блоковую структуру.

Наиболее важные характеристики цифровой вычислительной машины МИНСК-22 следующие: быстроедействие 5—6 тыс. операций в секунду; емкость МОЗУ 8192 слова; двухадресный код команды. Машина оборудована следу-



ющими входными и выходными устройствами РЦ 2000; РТА—КСУ; ФАЦИТ-150; ТБПМ; АЦПУ-128—2; УК.

Исходные данные в вычислительную машину задаются на перфоленте. Результаты расчетов получаются в виде ряда соответствующих абсцисс и ординат точек, или в виде кривых, полученных с помощью графопостроителя, причем имеется возможность построить несколько кривых на одном листе, и автоматически наносить масштабные преобразования по осям абсцисс и ординат.

Блок интегрирования осуществляет интегрирование функций при помощи метода Рунге—Кутты четвертого порядка.

Чтобы работа программы БОКС полностью соответствовала работе аналоговых вычислительных машин, интеграторы и сумматоры изменяют знак входных сигналов.

Блоки, обозначенные номерами, могут иметь один или несколько входов и только один выход. В случае нескольких входов, эти последние обозначают добавочными номерами, которые приписывают к номеру блока. Так, например, первый вход сумматора 41 обозначается номером 411, второй вход этого элемента номером 412 и т. д.

В программе БОКС имеются следующие блоки, осуществляющие математические операции (Таблица 1).

Интеграторы имеют один вход. Начальное условие задается таким образом:

$$3 : 12.$$

Это значит, что начальное условие третьего интегратора 12. (Отметим, что обозначение выходной величины интегратора должно соответствовать обозначению интегратора.) Количество: 30.

Сумматоры имеют пять входов. Каждая входная величина может быть задана заранее. Количество: 10.

Множители имеют два входа. Выходная величина умножается на постоянную  $K$ , значение которой задается заранее. Количество: 6.

Делители имеют два входа. Выходная величина умножается на постоянную  $K$ , значение которой задается заранее. Количество: 4.

Блоки вычисления синуса имеют один вход. Аргумент блока задается в радианах. Количество: 3.

Блоки вычисления косинуса имеют один выход. Аргумент блока задается в радианах. Количество: 3.

Блоки вычисления тангенса имеют один вход. Аргумент блока задается в радианах. Количество: 3.

Блоки вычисления натурального логарифма имеют один вход. Аргумент входной величины блока может быть только положительным. Количество: 3.

Блоки вычисления модуля имеют один вход. Количество: 3.

Блоки извлечения квадратного корня имеют один вход. Аргумент входной величины блока может быть только положительным. Количество: 3.

Блоки возведения в степень имеют один вход. Количество: 3.

Блоки запаздывания имеют один вход. Время запаздывания  $K$  задается в секундах. Количество: 2.

Функциональные преобразователи имеют один вход. Функции задаются в виде таблиц. Каждая функция может быть описана парами координат точек (задается до 50 таких пар). Количество: 2.

Блоки образования функции квантования имеют один вход. Задается шаг абсциссы ( $K_1$ ) и шаг ординаты ( $K_2$ ). Количество: 2.

Генератор случайных чисел не имеет входа. Выход изменяется между 0 и 1. Количество: 1.

Генератор единичной ступенчатой функции не имеет входа. Выходная величина всегда 1. Количество: 1.

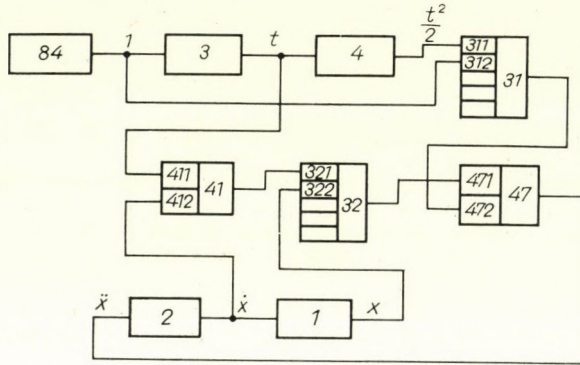


Рис. 1

Блоки, перечисленные ниже, осуществляют логические операции.

Блоки насыщения имеют один вход. Выходная величина этого блока не может быть больше, чем  $K_1$  и меньше, чем  $K_2$ ;  $K_1, K_2$  — постоянные, значения которых задаются заранее. Количество: 2.

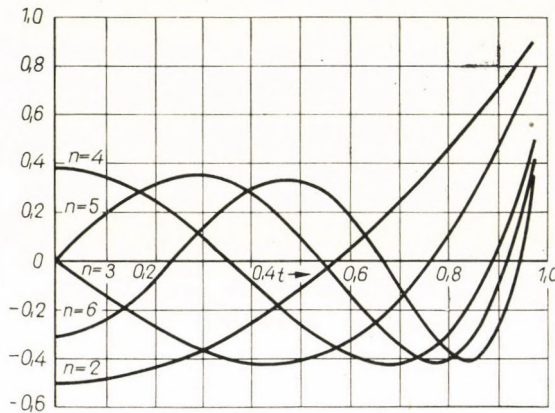


Рис. 2

Двухпозиционные переключатели имеют три входа. В зависимости от того, что величина третьего входа ( $X_3$ ) больше или меньше, чем величина  $X_0$ , выход соответственно включается на первый ( $X_1$ ) или второй вход ( $X_2$ ).  $X_0$  постоянная, которая задается заранее. Количество: 2.

Трехпозиционные переключатели имеют четыре входа. В зависимости от того, что величина четвертого входа ( $X_4$ ) больше, равна или меньше, чем

величина  $X_0$ , на первый ( $X_1$ ), второй ( $X_2$ ) или третий вход ( $X_3$ ) выход соответственно включается.  $X_0$  — постоянная, которая задается заранее. Количество: 2.

Блоки — зоны нечувствительности имеют один вход.  $K_1, K_2$  — постоянные, соответствующие границам нечувствительности. Величины  $K_1, K_2$  задаются заранее. Количество: 2.

Блоки — реле имеют один выход. Если входная величина положительная, то выходная величина равна  $K$ , если отрицательная, то она равна  $(-K)$ . Величина  $K$  задается заранее. Количество: 2.

### 3. Работа программы БОКС

Решение задач с помощью программы БОКС происходит таким же образом, как на аналоговых вычислительных машинах:

а) Прежде всего составляется блок-схема разрешаемой задачи.

б) Потом блоки и входы блоков обозначаются соответствующими номерами.

в; После этого обозначаются переменные, имеющие начальные условия.

г) На основе блок-схемы составляется лист соединений, который показывает, какие входы и какие выходы соединены друг с другом. Если, например, выход 53-го элемента подключается к первому входу 5-го элемента, то на листе соединений пишется следующее:

53—451.

Порядок составления листа соединений произвольный, потому что программа автоматически обеспечивает правильный порядок соединений.

д) Лист параметров состоит из пар чисел. Первое число номер параметра, второе — его значение. Если, например, значение веса первого входа 43-го сумматора является величиной  $(-214)$ , на листе параметров пишется следующее:

432— $(-214)$ .

з) Как было помечено, начальные условия задаются также двумя числами, первым из которых является индекс переменного, вторым — значение соответствующего начального условия.

ж) Результаты расчетов получаются в виде соответствующего ряда точек абсцисс и ординат или в виде кривых на графопостроителе. В обоих случаях необходимо задавать выходные величины, которые нужно регистрировать.

Кроме этих данных, программа автоматически обеспечивает максимальные или минимальные значения соответствующих переменных.

е) Последней группой данных является дополнительная информация. Здесь нужно задавать число интеграторов, число элементов в листе соединения и в листе параметров, число регистрируемых параметров. Таким образом возможно контролировать, правильно ли составлена программа оператором. Дальнейшие необходимые дополнительные данные: шаг интегрирования, интервал работы и число, которое показывает, через которое число результатов из ряда полученных результатов следует брать результат для печатания.

#### 4. Пример

В качестве примера покажем, каким образом решается с помощью программы БОКС хорошо известная классическая задача Лежандра. Дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид:

$$(1 - t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + n(n + 1)x = 0,$$

где  $n$ -постоянное, целое число. Решение этого дифференциального уравнения полиномом Лежандра:

$$x = P_n(t).$$

Начальное условие в этом случае:

Если  $n$  четное,  $x(0) = P(0) = \text{пост.}$ ,  $\dot{x}(0) = P_n'(0) = 0$ ;

если  $n$  нечетное,  $x(0) = P(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = P_n'(0) = \text{пост.}$

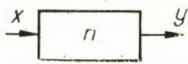
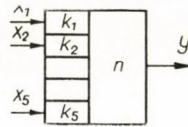
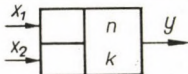
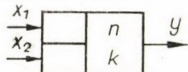
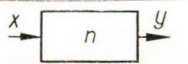
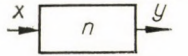
Нас интересует результат в интервале  $0 \leq t \leq 1$ .

Преобразуя исходное уравнение, получим

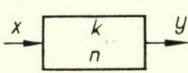
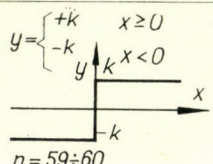
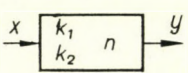
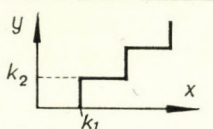
$$\ddot{x} = \frac{2t\dot{x} - n(n+1)x}{1-t^2}.$$

На основе этой формы дифференциального уравнения Лежандра была составлена блок-схема (Рис. 1).

Таблица 1

Название	Обозначение	Описание
Математические операции		
Интегратор		$y = \int_0^x x dt + IG$
Сумматор		$y = \sum_{i=1}^5 k_i x_i$ $n = 31 \div 40$
Множитель		$y = k \cdot x_1 \cdot x_2$ $n = 41 \div 46$
Делитель		$y = k \frac{x_1}{x_2}$ $n = 47 \div 50$
Блок вычисления синуса		$y = \ln x$ $n = 81 \div 83$
Блок вычисления косинуса		$y = \sin x$ $n = 63 \div 65$

Название	Обозначение	Описание
<b>Логические операции</b>		
Блок вычисления тангенса		$q = \cos x$ $n = 66 \div 68$
Блок вычисления натурального логарифма		$y = \arctan x$ где $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ $n = 69 \div 71$
Блок вычисления модуля		$y =  x $ $n = 72 \div 74$
Блок извлечения квадратного корня		$y = \sqrt{x}$ $n = 75 \div 77$
Блок запаздывания		$y = x(t - k)$ $n = 85 \div 86$
Блок возведения в степень		$y = e^x$ $n = 78 \div 80$
Функциональный преобразователь		$y = F(x)$ $n = 87 \div 88$
Генератор случайных чисел		$0 \leq y \leq 1$ $n = 89$
Генератор единичной ступенчатой функции		$y = 1$ $n = 84$
Блок насыщения		$y = \begin{cases} k_1 & x > k_1 \\ x & k_2 \leq x \leq k_1 \\ k_2 & x < k_2 \end{cases}$  $n = 51 \div 52$
Двухпозиционный переключатель		$y = \begin{cases} x_1 & x_3 \geq x_0 \\ x_2 & x_3 < x_0 \end{cases}$ $n = 58 \div 58$
Трехпозиционный переключатель		$y = \begin{cases} x_1 & x_4 > x_0 \\ x_2 & x_4 = x_0 \\ x_3 & x_4 < x_0 \end{cases}$ $n = 53 \div 54$
Блок зоны нечувствительности		$y = \begin{cases} x - k_1 & x > k_1 \\ 0 & k \leq x \leq k_1 \\ x - k_2 & x < k_2 \end{cases}$  $n = 55 \div 56$

Название	Обозначение	Описание
<b>Математические операции</b>		
Блок реле		$y = \begin{cases} +k & x \geq 0 \\ -k & x < 0 \end{cases}$  $n = 59 \div 60$
Блок образования функции		 $n = 61 \div 62$

Лист соединения:

84—3	32—471
84—312	3—411
3—4	2—1
4—311	2—412
31—472	1—322
41—321	47—322

Лист параметров:

311	(—2)
312	1
41	1
47	1
321	2
322	—

Начальные условия:

№	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
1	—0,5	0	0,38	0	—0,3
2	0	—1,5	0	2	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0

Дополнительные данные:

Рабочий диапазон	0,95 сек
Шаг интеграла	0,05 сек
Число интеграторов	4
Число пар в листе соединений	12
Число пар в листе параметров	6
Число регистрируемых переменных	1
Регистрируемый выход	1

Результаты расчетов показаны на Рис. 2 и Табл. 2.

Таблица 2

$t$	$n$		
	2	4	6
0	-0,5	0,38	-0,3
0,05	-0,4962	0,3705	-0,28436
0,1	-0,485	0,34244	-0,23888
0,15	-0,46625	0,29674	-0,16767
0,2	-0,44	0,23509	-0,07738
0,25	-0,40625	0,15982	0,023261
0,3	-0,365	0,073919	0,12395
0,35	-0,31625	-0,018959	0,21354
0,4	-0,2600	-0,11449	0,28086
0,45	-0,19625	-0,20768	0,31576
0,5	-0,125	-0,29289	0,31028
0,55	-0,04625	-0,36379	0,25994
0,6	0,03999	-0,41341	0,16528
0,65	0,13374	-0,43410	0,033427
0,7	0,23499	-0,41753	-0,12
0,75	0,34374	-0,35475	-0,2692
0,8	0,45999	-0,2361	-0,37575
0,85	0,58374	-0,051279	-0,38647
0,9	0,71499	0,21069	-0,23111
0,95	0,85374	0,56148	0,1805

## ЛИТЕРАТУРА

1. BAYLISS SHANKS, E.: Formulas for Obtaining Solutions of Differential Equations by Evaluation of Functions. *Am. Math. Soc. Notices* **10** (1963); No. 5, Issue 69.
2. BLECHMANN, G. E.: An Enlarged Version of MIDAS. *Simulation* **3** (1964); No. 4, Oct.
3. BRENNAN, R. D.—SANO, H.: PACTOLUS-A Digital Analog Simulator Program for the IBM 1620. *Afips Conference Proceedings* **26** (1964), 1.
4. BRENNAN, R. D.—LINEBARGER, R. N.: A Survey of Digital Simulation: Digital Analog Simulator Programs. *Simulation* **3** (1964), Dec.
5. BRENNAN, R. D.: PACTOLUS-A Simulation Language which Makes a Digital Computer Feel Like an Analog Computer. *Simulation* **3** (1964); No. 2, Aug.
6. BRENNAN, R. D.—FAHIDY, T.: Digital Simulation. *Instr. and Control Systems* **39** (1966), March.
7. BYRNE, E. R.: JANIS a Program for a General-Purpose Digital Computer to Perform Analog Type Simulations. ACM Nat. Conf. Denver, Colorado (1963), August.
8. McCracken, D. D.—DORN, W. S.: Numerical Methods and Fortran Programming. Wiley, New York 1965.
9. DAHLIN, E. B.—LINEBARGER, R. N.: Digital Simulation Applied to Paper Machine Boyer Studies. 6th ISA Internal Pulp and Paper Instrumentation Symposium, Green Bay (Wisc.) 1965.
10. FARRIS, G. J.—BURKHARD, L. E.: Process Simulation on a Digital Computer Using Analog Methods (Contribution 1360). Institute of Atomic Research and Dept. of Chem. Energ.: Iowa State University, Ames (Iowa).
11. FOWLER, M. E.: A New Numerical Method for Simulation. *Simulation* (1965), May.

12. TRANBOTH, H.: Programmsystem zu Simulierung allgemeiner Regelsysteme auf einem Digitalrechner. *Regelungstechnik*, 14 (1966), H. 1.
13. GASKILL, R. A.—HARRIS, J. W.—McKNIGHT, A. L.: DAS-A Digital Analog Simulator. *Proc. 1963 Spring Joint Computer Conference*.
14. GASKILL, R. A.: A Versatile Problem-Oriented Language for Engineers. *IEEE. Trans. on Electronic Computers* EC—13 (1964), Aug.
15. HAMMING, R. W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. Mc. Graw-Hill, New York 1962.
16. HARNETT, R. T.—SANSOM, R. T.—WARSHAWSKY, F. J.: MIDAS Programming Guide. *Tech. Doc. Rept. SEG—TDR—64—1* (1964), January.
17. HENRICI, P.: Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. Wiley, New York 1962.
18. HENRY, W. J.: R65—62 some Numerical and Programming Techniques to Allow the Use of a Digital Computer in an Analogue Fashion. *IEEE Transactions on Electronic Computers* Oct. 1965. EC—14 (1965); No. 5, Oct.
19. HENRY, W. J.: Some Numerical and Programming Techniques to Allow the Use of a Digital Computer in an Analogue Fashion. *Proceeding-Actes Fourth International Analogue Computation Meetings* (1966).
20. HUGHES, F. M.—BRAMELLER, A.: Digital Simulation of Analogue Methods. *The Computer Journal* 9 (1966); No. 1, May.
21. HURLEY, J. R.: DEPI 4 (Differential Equation Pseudo-Code Interpreter) — an Analog Computer Simulator for the IBM 704. Internal Memorandum, Allis Chalmers Mfg. Co., 1960. Jan. 6.
22. HURLEY, J. R.: Digital Simulation I: DYSAC, a Digitally Simulated Analog Computer. AIEE Summer General Meeting, Denver (Colorado) 1962.
23. HURLEY, J. R.—SKILES, J. J.: DYSAC a Digitally Simulated Analog Computer. *AFIPS Proceedings*, 1963 Spring Joint Computer Conference.
24. HURLEY, J. R.—JANISKI, R. M.—RIDEOUT, V. C.—SKILES, J. J.—VEBBER, W. O.: Simulation of a Hybrid Computer on a Digital Computer. *Proceedings-Actes Fourth International Analogue Computation Meetings*, 1966.
25. JANOSKI, R. M.—SCHAEFFER, R. L.—SKILES, J. J.: COBLOC — A Program for All-Digital Simulation of a Hybrid Computer. *IEEE Transaction on E. C.* EC—15 (1966); No. 1, Febr.
26. KÁLMÁN, R.—BAKONYI, P.: (BOCS — Block-Oriented Language for, MINSZK 22) BOCS — blokkorientációs programnyelv a MINSZK—22 digitális számítógépre. *Mérés és Automatika* (1967), 3.
27. KNUDTSON, H. A.—STOVER, R. F.: PARTNER — Proof of Analog Results through a Numerically Equivalent Routine. Aeronautical Division, Minneapolis-Honeywell Regulator Co.; MH Aero Document V—ED 15 001, 1961.
28. LAVI, A.—REILLEY, G.: ANALOG—ALGOL — A Programming Language for Hybrid Computation. JACC, Troy (N. Y.) 1965.
29. LESH, F. H.—CURI, F. G.: DEPI an Interpretive Digital Computer Routine Simulating Differential Analyzer Operations. Jet Propulsion Laboratory California, Institute of Technology, Pasadena (California) 1957.
30. LESH, F.: Methods of Simulating a Differential Analyzer on a Digital Computer. *J. of the Acm.* 5 (1958), No. 3.
31. LINEBARGER, R. N.: Digital Simulation Techniques for Direct Digital Control Studies. *Proc. 19th Annual Conf. of ISA*, New York 1964.
32. LINEBARGER, R. N.—BRENNAN, R. D.: Digital Simulation for Control System Design. *Instruments and Control Systems* 38 (1965), Oct.
33. LINEBARGER, R. N.—BRENNAN, R. D.: An Evaluation of Digital Analog Simulation Languages Oral Presentation. IFIP Congress, New York 1965.
34. MARVIN, I. E.—DURAND, H. P.: Jet Engine Control Representation Study. Jet Engine Division, General Electric Company Cincinnati (Ohio). *Air Force Technical Documentary Report ASD—TDR—63—650* (1963), July.
35. MATLOCK, D. L.: Pulsed Predication Filters Applied to Digital and Hybrid Simulation. *Simulation* 6 (1966), No. 3.
36. MILNE, W. E.—REYNOLDS, R. R.: *Journal of the ACM* (1962), Jan.
37. MIURA, T.—IWATA, J.: Hybrid Computation Technique for Differential Equations. *Proceedings — Actes Fourth International Analogue Computation Meetings* (1966).
38. MIURA, T.—IWATA, J.: Effects of Digital Execution Time in Hybrid Computer. *Proceeding — Fall Joint Computer Conference* (1963).



39. OCKER, W.—TEGER, S.: HYTRAN — a Software System to Aid the Analog Programmer. *Proceedings — Fall Joint Computer Conf.* (1964).
40. OCKER, W.—TEGER, S.: HYTRAN — a Software System to Aid the Analog Programmer. *AFIPS Conference Proceedings* 26 (1964), 1.
41. OHLINGES, L.: ANATRAN — First Step in Breeding the DIGANALOG. *Proc. WICC* 17 (1966), May.
42. PALEOŠKY, M.—HOWELL, J. V.: The DES—1 — A Real Time Digital Simulation Computer. *Proceedings Fall Joint Computer Conference* (1963).
43. PETERSEN, H. E.—SANSOM, F.—HARTNETT, R. T.—WARSHAWSKY, L. M.: MIDAS — How it Works and How it's Worked. *AFIPS Conference Proceedings* 26 (1964), 1.
44. PETERSEN, H. E.—SANSOM, F. J.: MIMIC — a Digital Simulation Program. *SESCA Internal Memo 65—12* (Wright-Patterson AFB, Ohio).
45. RALSTONE, A.: Runge Kutta Methods with Minimum Error Bounds. *Mathematics of Computation* (1962), 16.
46. RIDEOUT, V. C.—TAVERNINI, L.: MADBLOC, a Program for Digital Simulation of a Hybrid Computer. *Simulation* 4 (1965); No. 1, Jan.
47. SHAEFER, R. L.: The Optimum Order of Processing of Components in Digital Simulation Programs (M. S. Thesis). Electrical Engineering Dept., University of Wisconsin (Madison) 1965.
48. LEVINE, A. C.: SDS DES—1 Differential Equation Solves Scientific Data Systems, Inc. 1965.
49. SELFRIEDGE, R. G.: Coding a General-Purpose Digital Computer to Operate as a Differential Analyzer. *Proc. 1955 Western Joint Computer Conf.* (IRE).
50. SHANON, P. T.: Digital Computer Simulation of Contact Sulphuric Acid Plant. 58th Annual Meeting of the AIChE, Philadelphia (Pa) 1965.
51. SLAYTON, G. R.: DIDAS — A Digital Differential Analyzer Simulator. 12th National Meeting of the Association for Computing Machinery, 1958.
52. SMITH, C. L.: A Digital Simulation for Process Industries. *ISA Journal* (1966), July.
53. STEIN, M. L.—ROSE, J.—PARKER, D. B.: A Compiler with an Analog-Oriented input Language. *Proc. 1959 Western Joint Computer Conference*.
54. STEIN, M. L.—ROSE, J.: Changing from Analog to Digital Programming by Digital Techniques. *J. ACM* 7 (1960), January.
55. STRAUSS, J. C.—GILBERT, W. L.: SCADS A Programming System for the Simulation of Combined Analog Digital Systems. Carnegie Institute of Technology, 1964.
56. SUMNER, H. M.: FIFI 3 A Digital Computer Code for the Solution of Sets of First Order Differential Equations and the Analysis of Process Plant Dynamics. *AEEW — R 453* (H. M. S. O.), 1965.
57. SUMNER, H. M.: A Digital Technique for the Study of Process Dynamics. *IFAC* (1966), Inne.
58. TAVERNINI, L.: The Automatic Sequencing of Block Operators in the Digital Simulation of Analog and Analog-Hybrid Computers. *IEEE Transactions on Electronic Computers* 14 (1965), Dec.
59. WOODLEY, G. V.: Modelling and Programming for DDC. *ISA Journal* (1966), March.

**The BOCS Digital Modelling System** (R. Kálmán and P. Bakonyi). Author of the paper presents, after a short review of the digital modelling methods for the continuous systems, the so-called BOCS modelling system. He gives a list of the blocs to be employed in the program and the method of programming. As an illustration of the aforementioned he presents the solution of the classical Legendre problem by digital modelling. The paper is completed by a detailed list of literature.

**Das Digitale Modellersystem BOCS** (R. Kálmán und P. Bakonyi). Der Verfasser beschreibt nach einer kurzen Übersicht der Modellierverfahren der kontinuierlichen Systeme das sogenannte BOCS digitale Modellersystem. Er gibt das Verzeichnis der in dem Programm anwendbaren Blocks und die Art und Weise des Programmierens an. Zur Veranschaulichung des Gesagten führt er die Lösung der klassischen Legendre-Aufgabe mittels digitaler Modellierung vor. Ein detailliertes Verzeichnis der Literatur ergänzt den Artikel.

**Le système digital de simulation BOCS** (R. Kálmán et P. Bakonyi). Après un court aperçu des procédés digitaux de simulation des systèmes continus, l'auteur décrit le système digital de simulation nommé BOCS. Il donne la liste des blocs utilisables dans le programme et le mode de la programmation. En guise d'illustration, il présente la solution par simulation digitale du problème classique de Legendre. L'article est complété par un rappel détaillé de la littérature.



# BERECHNUNG DES KRÄFTESPIELS VON KOMMUTATOREN MIT DOPPELTEM SCHRUMPFRING

I. HUSZÁR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
GANZ ELEKTROTECHNISCHE WERKE, BUDAPEST

[Eingegangen am 20. Juni, 1966]

Allgemein verwendet man an elektrischen Maschinen in Fällen einer stärkeren Beanspruchung Kommutatoren mit doppeltem Schrumpfring. Eine Festigkeitsberechnung ist nur annäherungsweise möglich, u.zw. wird diesmal das ganze System als eine aus federnden Elementen aufgebaute Einheit aufgefaßt. Zur Bestimmung der Kräfteverhältnisse gilt nun ein eindimensionales Federsystem als Modell. Das hier abgeleitete Verfahren kann die Grundlage zur Berechnung der Konstruktion dienen. Hierzu werden alle vorkommenden Betriebszustände in Betracht gezogen.

## I. Einleitung

Im Bild 1 sieht man den konstruktiven Aufbau eines Kommutators mit doppeltem Schrumpfring. Zwischen den Segmenten (*s*) sind Mikanit-Isolierplatten eingebaut (*l*). An den Rändern des Lamellen-Körpers liegen Isolierringe (*m*) auf, über welche je ein Hilfsschrumpfring (*b*) den Körper umfaßt, wobei die zum Zusammenhalt des ganzen Systems benötigte Preßkraft von dem Hauptschrumpfring (*g*) ausgeübt wird [1].

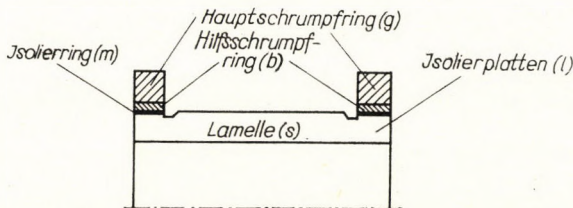


Bild 1. Aufbau eines Kommutators mit doppeltem Schrumpfring

Der Kommutator wird in zwei Phasen fertigmontiert. Vorerst wird der Hilfsring warm aufgezogen; durch die Abkühlung entsteht eine gewisse Vorspannung. Nun wird die äußere Fläche dieses ersten Schrumpfringes glatt bearbeitet und der Hauptschrumpfring in erwärmtem Zustand aufgesetzt. Nach erfolgter Abkühlung haben wir vor uns ein Kommutatorsystem als eine durch Schrumpfbinding hergestellte feste Einheit.

Hinsichtlich der Festigkeitsberechnung kann der Kommutator im Längsschnitt wie auch im Querschnitt symmetrisch betrachtet werden. Ferner kann

man von einer Auswirkung der Nabe absehen, indem man voraussetzt, daß das Kräftepiel des Körpers von der Art der Unterstüztung weder in axialer noch in radialer Richtung beeinflußt werden kann.

### II. Kräfteverhältnisse an einem idealen Kommutator

Der Aufbau soll auch mit Rücksicht auf die Kräfteverteilung als symmetrisch angenommen werden. Wir setzen voraus, daß die Schrumpfringe auf dem Lamellenkörper gleichmäßig aufliegen. Die Gewölbedruckverteilung zwischen den Segmenten soll als homogen angenommen werden. Im Sinne des vorangehenden ist das Kräftesystem im Bild 2 dargestellt.

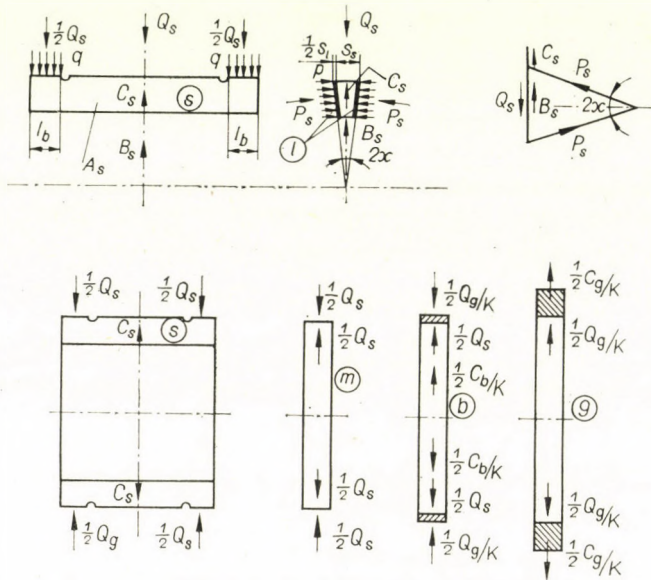


Bild 2. Kräfteverhältnisse der Kommutatorteile

In radialer Richtung wirkt auf ein einzelnes Segment — beiderseits die Hälfte der seitlichen Isolierung zugerechnet — usw. auf den durch den Isolier-ring berührten Umfang ein gleichmäßig verteilter Druck  $q$ , dessen Resultierende  $Q_s$  bezeichnet werden soll:

$$Q_s = 2 l_b (s_s + s_l) q. \tag{1}$$

Die Längsseitenflächen  $A_s$  des Segmentes sind dem ebenfalls als gleichmäßig verteilt angenommenen Gewölbedrucke  $p$  ausgesetzt, dessen Resultierende mit  $P_s$  bezeichnet werden soll:

$$P_s = A_s p. \tag{2}$$

Ferner muß man mit einer ebenfalls gleichmäßig gedachter Zentrifugalkraft rechnen, mit der auf das einzelne Segment wirkenden Resultierenden  $C_s$ . So ergibt sich im Sinne des Vektordiagramms die Gleichgewichtsgleichung für ein einzelnes Segment:

$$Q_s - C_s = 2 P_s \sin \chi = B_s, \quad (3)$$

wobei die Kraft aus dem Gewölbedruck  $p$  resultierend als die Gewölbekraft genannt werden soll.

Auf den Bildern ist zugleich das Kräftespiel des gesamten Lamellenkörpers dargestellt. Die äußere Belastung aus den Einzelkräften  $Q_s$  bildet ein Gleichgewichtssystem. Es ist zweckmäßig, mit  $K$  als Anzahl der Segmente, die numerische Summe zu errechnen:

$$Q = K Q_s. \quad (4)$$

Ein ähnlicher Gleichgewichtszustand charakterisiert die Gesamtheit der Zentrifugalkräfte, deren numerische Summe als

$$C = K C_s \quad (5)$$

angeschrieben werden kann.

Gleichfalls läßt sich die numerische Summe der Gewölbekräfte anschreiben:

$$B = K B_s, \quad (6)$$

und so haben wir aus den Formeln (3), (4), (5) und (6) die einfache Gleichgewichtsgleichung:

$$B = Q - C. \quad (7)$$

Im Bild 2 ist auch die Belastung des Isoliertringes veranschaulicht. Mit Rücksicht auf die Kleinheit der Masse kann die eigene Zentrifugalkraft vernachlässigt werden. Dies ist nun auch ein Fall des einfachen Gleichgewichtssystems.

Der Hilfsring ist einerseits einer durch den Isolierring je Segment wirkenden Radialkraft  $1/2 \cdot Q_s$ , andererseits einem gleichmäßigen, an der Berührungsfläche mit dem Hauptring wirkenden Druck  $q_g$  mit der numerischen Summe  $1/2 \cdot Q_g$  ausgesetzt. Letztere läßt sich aus (1) und (4) errechnen:

$$Q_g = K 2 l_b (s_s + s_i) q_g. \quad (8)$$

Ferner wirkt noch das verteilte System der Zentrifugalkräfte, deren numerische Summe für den ganzen Ring  $1/2 \cdot C_b$  beträgt. Nun ist jedes der drei Kräftesysteme im Gleichgewicht. In der Abbildung sind die Kräfte je Segment mit den Werten  $1/K \cdot Q_g/2$  und  $1/K \cdot C_b/2$  dargestellt.

Für den Hauptschrumpfing haben wir die gleichmäßige Belastung  $q_g$  mit der numerischen Summe  $1/2 \cdot Q_g$  und die Zentrifugalkräfte mit der numerischen Summe von  $1/2 \cdot C_g$  gleichfalls als Gleichgewichtssysteme.

### III. Das substituierende Federsystem

Der Kommutator als Baueinheit kann als statisch unbestimmtes System aufgefaßt werden, dessen Lösung mit Hilfe der Deformationen gefunden werden kann. Deshalb und auch zur leichteren Übersicht ist es zweckmäßig, ein äquivalentes Federsystem einzuführen, dessen Äquivalenz hinsichtlich des Kräfte- und der auftretenden Deformationen feststeht.

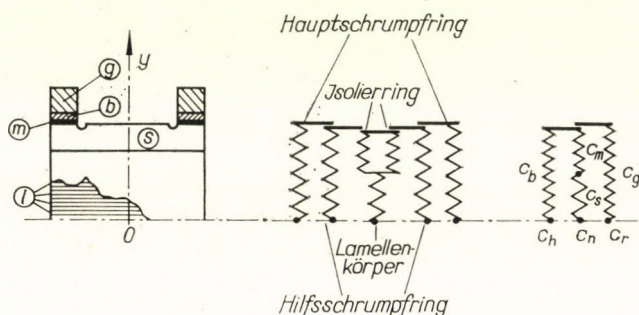


Bild 3. Das substituierende Federsystem

Da die Deformationen radial und in voller Kreissymmetrie auftreten, ist es richtig, das substituierende eindimensionale Federsystem derart aufzustellen, daß der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Konstruktion zu liegen kommt. Die Äquivalenz besteht weiter, wenn unter gleichen Bedingungen die radiale Deformation jedes einzelnen Bestandteiles — also in der  $y$  Richtung — im Originalsystem und im substituierenden System identisch ist; wir wollen als Bezugsgrundlage die Belastung  $Q$ , also die zwischen den Hilfsringen und dem Lamellenkörper auftretende Kraft wählen. So brauchen wir nur die Forderung aufstellen, daß in dem Ausdruck der Deformation

$$y = cQ \quad (9)$$

die Federkonstante  $c$ , einen der ursprünglichen Belastung entsprechenden, konstanten, positiven Wert annehmen soll. Dies wird dadurch erreicht, daß wir die von der ursprünglichen Belastung verursachte Deformation berechnen und in der der Formel (9) analogen Form ausdrücken, woraus die Federkonstante bestimmt werden kann.

Das den kompletten Kommutator substituierende Federsystem ist im Bild 3 dargestellt. Zu Ende des ersten Phase des Zusammenbaus gilt der Lamel-

lenkörper ( $c_s$ ) und der Isoliering als Druckfeder, der Hilfsring als Zugfeder. Der mittlere Teil im Mittelbild des schematischen Bildes 3 des Federsystems entspricht dieser Phase. Der Hauptring, aufgezogen in der zweiten Phase der Montage, ist ein auf Zug beanspruchtes Element; er soll als Zugfeder vor den zwei äußeren Zweigen dargestellt werden.

Im rechten Teil des Bildes 3 sehen wir eine vereinfachte Darstellung des Systems, in dem die einzelnen Federn miteinander verkoppelt bzw. als 3 parallelwirkende Organe, nämlich je eine Feder für die Isolierschicht ( $c_m$ ), für die Hilfsringe ( $c_b$ ) und für die Hauptringe ( $c_g$ ), figurieren.

#### IV. Berechnung des Kräftespieles

Bezüglich der betrieblichen Umstände des Kommutators sollen folgende Begleitmomente genau beobachtet werden. Durch die Montage entsteht aus den Segmenten und den Schrumpfringen ein einheitliches festes System, wobei die notwendige Preßkraft durch den Gewölbedruck gegeben ist. Im Betrieb wird durch die Strombelastung, die Bürstenreibung und die Erwärmung der Maschine selbst eine bedeutende Erwärmung des Kommutators hervorgerufen. Die Segmente aus Kupfer, die von der Nabe und von den Schrumpfringen gleichsam wärmeisoliert sind, erfahren eine besonders intensive Erwärmung. Also müssen sich die Kräfteverhältnisse stark ändern, insbesondere muß der Gewölbedruck ansteigen. Es soll im Lauf auch die Zentrifugalkraft in Rechnung gezogen werden, da in diesem Falle der Gewölbedruck verringert und der Lamellenkörper gelockert wird. Alles in allem haben wir zur Durchführung einer lückenlosen Analyse folgende, voneinander abweichende Betriebszustände vor Augen zu halten: den kalten Zustand nach erfolgter Montage; den warmen Stillstand nach Abstellen der Maschine; den rotierenden kalten Zustand eben beim kalten Anfahren der Maschine; und den normalen Betriebszustand bei Dauerbetrieb.

##### 1. Kalter Stillstand (Index 0)

Indem wir voraussetzen, daß die zum Einfassen zusammenfassender Segmente notwendigen, als technologische Hilfselemente funktionierenden Hilfsringe maßgerecht bearbeitet zur Verfügung stehen, können wir die erste Phase der Montage als abgeschlossen auffassen. Durch diese Vereinfachung umgehen wir eine Schwierigkeit, die sich ergeben würde, falls wir genötigt wären, in allen Montagephasen die Änderung des Kräftespieles einzeln zu untersuchen. Eben mit Rücksicht auf die ziemlich untergeordnete Rolle des Hilfsringes können wir uns diese Vereinfachung erlauben, auch wenn wir die relativ schwachen Kraftwirkungen im Vergleich mit denen, die in anderen Betriebszuständen obwalten, in Betracht ziehen.

a) *Montage des Hilfsringes (Index\*0)*. Nun sei jedes Bauelement des Kommutators voraussetzungsgemäß im elastischen Belastungsbereich: also kann die Endlage der ersten Phase der Montage prinzipiell als Ausgangspunkt gemäß Bild 4 aufgefaßt und nach dem einfachen Schema laut Bild 3 abgeleitet werden.

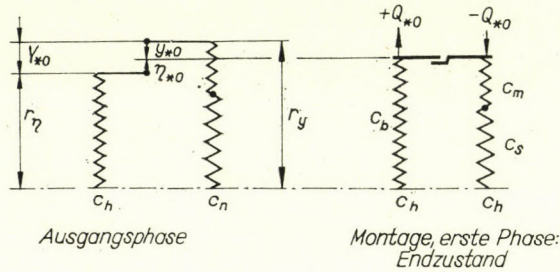


Bild 4. Lamellenkörper mit montiertem Hilfschrumpfing

In der Ausgangsstellung konstatiert man zwischen den beiden Seiten des Federsystems die Maßdifferenz

$$Y_{*0} = r_\gamma - r_\eta. \quad (10)$$

Zu Ende der ersten Phase der Montage entsteht durch die Wirkung der zwischen dem Ring und dem Körper auftretenden Kraft  $Q_{*0}$  der skizzierte Gleichgewichtszustand, in welchem die Deformationen der einzelnen Federzweige ausgedrückt werden können als *Zugverschiebung* bzw. als *Druckverschiebung*

$$\eta_{*0} = c_h Q_{*0}, \quad y_{*0} = c_n (-Q_{*0}). \quad (11)$$

Im Sinne des Bildes gilt, daß

$$Y_{*0} = \eta_{*0} - y_{*0} = c Q_{*0}. \quad (12)$$

Mit Hilfe der Bezeichnung

$$c = c_h + c_n \quad (13)$$

haben wir

$$Q_{*0} = \frac{1}{c} Y_{*0}. \quad (14)$$

Nun läßt sich auf Grund von (7) die Gewölbekraft als



$$B_{*0} = Q_{*0} \quad (15)$$

anschreiben.

Eine graphische Darstellung der Kräfte und der Verschiebungen ist im Bild 5 gegeben. Die Vertikale  $Y_{*0}$  — laut Gleichung (10) — eignet sich zu der folgenden graphischen Analyse: an den Endpunkten tragen wir die Federkonstanten, d. h. die durch die Einheitskraft verursachte Verschiebung (oben  $c_n$ , unten  $c_h$ ) auf. In horizontaler Richtung wird zum Endpunkt dieser Verschiebungen die Einheitskraft aufgetragen und die entsprechenden schiefen Geraden eingezeichnet. Der Schnittpunkt dieser schiefen Geraden bestimmt den Gleichgewichtszustand des Federsystems und zugleich die Größe der resultierenden Kraft  $Q_{*0}$ .

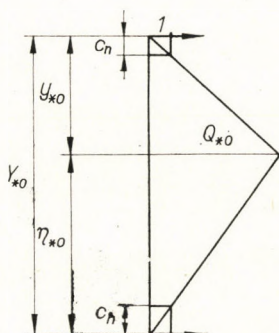


Bild 5. Bild des Kräftespiels an einem Kommutator mit montiertem Hilfsring

Auf Grund der Proportionalität ist es klar, daß

$$\eta_{*0} = Q_{*0} c_h \quad \text{und} \quad y_{*0} = -Q_{*0} c_n,$$

wie auch

$$Y_{*0} = \eta_{*0} - y_{*0} = cQ_{*0}$$

mit den Rechenformeln übereinstimmen.

Am Ende der ersten Phase der Montage können die von der Deformation des Hilfringes hervorgerufenen Kraftwirkungen folgenderweise bestimmt werden. Wir nehmen an, daß der Hilfsschrumpfring sich eben im Zustand der Fließgrenze befindet. Man kann ja keinesfalls eine Beanspruchung, die darüber hinaus reichen sollte, in Rechnung ziehen. Mit einem Material, das unseren Voraussetzungen gemäß sich als ideal-plastischer Stoff verhält, tritt an der Fließgrenze der plastische Zustand ein, d. h. durch die eintretende plastische Deformation hört die Zunahme der Beanspruchung auf. Mit den Bezeichnungen des Bildes 12 und auf Grund der Formel für dünne Ringe ist die Spannung an der Fließgrenze

$$\sigma_F = \frac{d_b q_{*0}}{2 h_b}, \quad (16)$$

und die verteilte Radial-Belastung

$$q_{*0} = \frac{2 h_b}{d_b} \sigma_F. \quad (17)$$

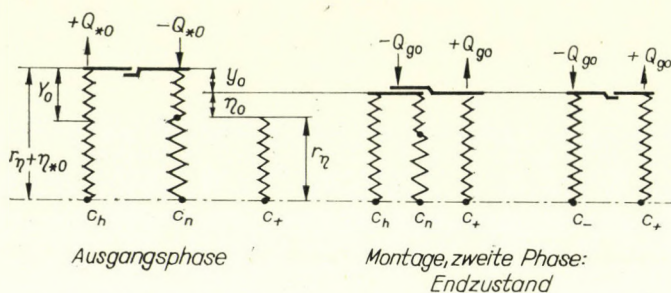


Bild 6. Kommutator mit montiertem Hauptschrumpftring

Hieraus ergibt sich auf Grund (1) die Resultierende für ein einziges Segment:

$$Q_{s*0} = 4 \frac{l_b h_b}{d_b} (s_s + s_l) \sigma_F \quad (18)$$

und laut (4) für den ganzen Lamellenkörper

$$Q_{*0} = 4 \pi \frac{l_b h_b}{d_b} d_l \sigma_F, \quad (19)$$

da nämlich

$$K(s_s + s_l) = \pi d_l \quad (20)$$

ist.

Also können in Kenntnis des Wertes  $Q_{*0}$  auch die Größen  $B_{*0}$  und  $Y_{*0}$ , somit auch die entsprechende Montage-Temperatur bestimmt werden.

b) *Montage des Hauptschrumpftringes (Index 0)*. Der Gedankengang ist übersichtlich, falls wir aus dem Endzustand der ersten Phase der Montage gemäß Bild 6 ausgehen und hierbei den Hauptschrumpftring vor dem Aufziehen betrachten. In diesem Augenblick besteht zwischen den zwei Federn ein Maßunterschied von  $Y_0$ . Der Gleichgewichtszustand zwischen den zwei Systemen tritt am Ende der zweiten Montage-Phase unter der Wirkung der Kraft  $Q_{g0}$  ein, wobei an den Federn die Verschiebungen

$$\eta_0 = c_+ Q_{g0} \quad \text{bzw.} \quad y_0 = c_- (-Q_{g0}) \quad (21)$$

entstehen, woraus sich folgende Zusammenhänge ergeben:

$$Y_0 = \eta_0 - y_0 = c_{\Sigma} Q_{g0}, \quad (22)$$

wo

$$c_{\Sigma} = c_{+} + c_{-} \quad (23)$$

und daher

$$Q_{g0} = \frac{1}{c_{\Sigma}} Y_0 \quad (24)$$

ist.

Eine besondere Aufgabe bedeutet die Bestimmung der Federkonstante  $c_{-}$ . Hierfür gilt die Definition (21) und zwar gemäß den Bildern 4 und 5 unter Berücksichtigung eines vorgespannten Systems, bestehend aus dem Lamellen-

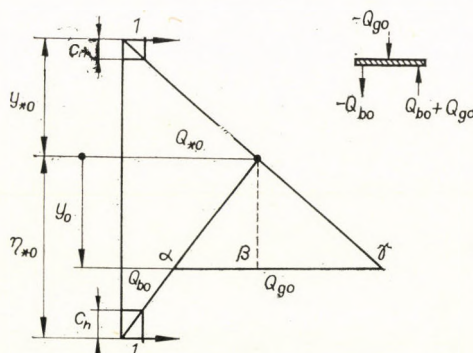


Bild 7. Bild des Kräftespiels an einem Kommutator mit montiertem Hauptkörper

und dem Hilfsring. Unter Einwirkung einer äußeren Kraft gleich der Belastung  $-Q_{g0}$  muß sich die Spannung der durch  $Q_{*0}$  belasteten Federzweige ändern. Die Zugfeder erfährt eine Minderung der Belastung bis auf  $Q_{b0}$ , und die Druckfeder erfährt eine Erhöhung der Beanspruchung auf  $Q_{b0} + Q_{g0}$ . Im Sinne des Bildes 7 sind diese Kräfte in Gleichgewicht.

Mit Hilfe der Maßänderung  $y_0$  ergibt sich im Federdiagramm die Kraft  $Q_{b0}$ , also auch die Druckbelastung  $Q_{b0} + Q_{g0}$ . Man kann auf Grund der grafostatischen Figur auch aus dem Wert  $Q_{g0}$  ausgehen. Hierbei wurde angenommen, daß der Hilfsring weiterhin unter Zugbeanspruchung bleibt.

Die Proportionalität der grafostatischen Figur (Bild 7) liefert uns die Größe:

$$Q_{b0} = Q_{*0} \frac{\eta_{*0} - |y_0|}{\eta_{*0}} \quad (25)$$

Die aus der Belastung  $Q_{g0}$  entstehende Deformation ist der gegebenen Figur zu entnehmen. Die einfachen Proportionalitäten lauten:

$$|y_0| : \overline{\alpha\beta} = c_h \quad \text{und} \quad |y_0| : \overline{\beta\gamma} = c_n,$$

woher also

$$\overline{\alpha\gamma} = Q_{g0} = |y_0| \left( \frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_h} \right) = \frac{|y_0|}{c_{-}}; \quad (26)$$

und auf Grund der Beziehung (21) erhalten wir:

$$c_- = \frac{c_h c_n}{c_h + c_n} \quad (27)$$

In Kenntnis der Federkonstante  $c_-$ , kann das Federdiagramm des ganzen Systems konstruiert werden (Bild 8). Hier erhält man den Wert  $Q_{g0}$  auf direktem Wege.

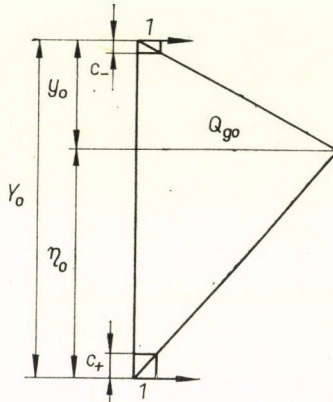


Bild 8. Bild des Kräftespiels an einem Kommutator mit montiertem Hauptring

Also ist der Montage-Endzustand durch die auf die einzelnen Bauelemente wirkenden Kräfte folgenderweise bestimmt:

$$\begin{aligned} \text{Hauptschrumpfringe : } S_{g0} &= Q_{g0}; \\ \text{Hilfsschrumpfringe : } S_{b0} &= Q_{b0} < Q_{*0}; \\ \text{Lamellenkörper : } Q_0 &= Q_{g0} + Q_{b0} < Q_{*0}. \end{aligned} \quad (27)$$

## 2. Betriebszustand (Index $\omega \vartheta$ )

Es folgt aus der Natur der Bauart, diesen Zustand zweckmäßigerweise in zwei Stufen zu behandeln. Fürs erste nehmen wir die Verhältnisse des Hilfsringes zum Gegenstand unserer Besprechung, und nachher behandeln wir die Verhältnisse des Hauptringes.

a) *Lamellenkörper mit dem Hilfsring montiert (Index  $* \omega \vartheta$ ).* Wenn der Körper und der Hilfsring zwar im Betrieb doch vorerst von einander getrennt betrachtet werden, so kann man nicht davon sprechen, daß die Montage-Maßdifferenz  $Y_{*0}$  zu recht bestände, da im Betrieb die Bestandteile erwärmt und auch durch die Rotation deformiert werden. Wir wollen für den Hilfsring die

freie Wärmeausdehnung mit  $\eta'_*$ , und die durch Rotation hervorgerufene freie Verschiebung mit  $\eta''_*$  bezeichnen. Für den Lamellenkörper seien die entsprechenden Bezeichnungen  $y'$  und  $y''$  (siehe Bild 9). Also läßt sich die derart aufgefaßte Differenz in freiem Zustand folgenderweise ausdrücken:

$$Y_* = (r_y + y' + y'') - (r_\eta + \eta'_* + \eta''_*) \quad (28)$$

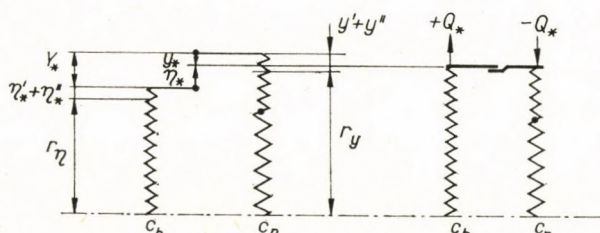


Bild 9. Lamellenkörper mit montiertem Hilfsring in Betriebszustand

oder die einzelnen Komponenten der Maßdifferenz auch formell getrennt:

$$Y_* = (r_y - r_\eta) + (y' - \eta'_*) + (y'' + \eta''_*) = Y_{*0} + Y_{*\Delta t} + Y_{*c}, \quad (29)$$

wobei der Index  $\Delta t$  auf die Erwärmung, Index  $c$  auf die Rotation hinweist.

Wenn wir nun vom vorstellungsgemäß losen Zustand auf den effektiv montierten Zustand übergehen, so entsteht (siehe Bild 9) die Kraft  $Q_*$ , wobei die Federenden die Verschiebungen  $\eta_*$  bzw  $y_*$  erfahren, u.zw.

$$\eta_* = c_h Q_* \quad \text{und} \quad y_* = c_n (-Q_*). \quad (30)$$

Im Sinne des Bildes ist:

$$Y_* = \eta_* - y_* = c Q_* \quad (31)$$

d. h.

$$Q_* = \frac{1}{c} Y_*. \quad (32)$$

Wenn wir die Kraftwirkungen gesondert annehmen, d. h., wenn wir anschreiben, daß

$$Q_* = Q_{*0} + Q_{*\Delta t} + Q_{*c}, \quad (33)$$

wo die einzelnen Glieder der Reihe nach als Auswirkungen der Montage, der Erwärmung und der Rotation zu gelten haben, ergibt sich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } y' = 0 = \eta'_* \quad \text{und} \quad y'' = 0 = \eta''_* \quad \text{der Wert } Y_{*0} = c Q_{*0}; \\ \text{für } r_y - r_\eta = 0 \quad \text{und} \quad y'' = 0 = \eta''_* \quad \text{der Wert } Y_{*\Delta t} = c Q_{*\Delta t}; \\ \text{für } r_y - r_\eta = 0 \quad \text{und} \quad y' = 0 = \eta'_* \quad \text{der Wert } Y_{*c} = c Q_{*c}. \end{array} \right\} \quad (34)$$

Selbststredend ist nun die Gewölbekraft im Sinne von (7)

$$B_* = Q_* - C. \quad (35)$$

Diese Zusammenhänge können auch graphisch dargestellt werden. Die Konstruktion ist jener im Bild 5 ähnlich, nur bleibt der Index 0 fort. Man verwendet sinngemäß die gleichen Formeln, wie sie bei der Montage aufgestellt worden sind.

b) *Lamellenkörper mit dem Hauptring (Index  $\omega \vartheta$ ).* Als Ausgangspunkt gilt der Hilfsring im Betrieb, also in betriebswarmem Zustand und der separierte Hauptring, gleichfalls im betriebswarmen Zustand. Nun beträgt das Maß des Ringes nicht  $r$ , sondern  $r + \eta' + \eta''$ . Im Sinne des Bildes 10 beträgt

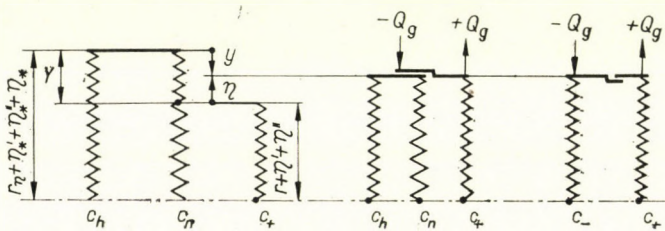


Bild 10. Lamellenkörper mit montiertem Hauptring in Betriebszustand

die Maßdifferenz  $Y$ , die aber in dem festmontierten System auf die Wirkung der Kraft  $Q_g$  verschwindet, wobei die einzelnen Federzweige sich verschieben, usw. in dem Maße:

$$\eta = c_+ Q_g \quad \text{und} \quad y = c_- (-Q_g). \quad (36)$$

Es besteht die Analogie mit (21) und (22), d. h.

$$Y = \eta - y = C_\Sigma Q_g \quad (37)$$

und

$$Q_g = \frac{1}{c_\Sigma} Y. \quad (38)$$

Im Sinne des Bildes 7 wirkt auf die Hilfsringe die radiale Kraft  $Q_b$ , und — bei gleichzeitiger Fortlassung des Indexes 0 — ergibt sich

$$Q_b = Q_* \frac{\eta_* - |y|}{\mu_*}, \quad (39)$$

ferner als Körperbelastung:

$$Q = Q_g + Q_b. \quad (40)$$

Die einzelnen Wirkungen lassen sich nach (34) gruppieren. Die Gewölbekraft ist also im Sinne von (7)

$$B = Q - C, \quad (41)$$

die Resultierende der Belastungskräfte für die Hilfsringe:

$$S_b = Q_b + C_b, \quad (42)$$

und jene für die Hauptringe:

$$S_g = Q_g + C_g. \quad (43)$$

### 3. Stillstand, warmer Zustand (Index $\vartheta$ )

Das oben Angeführte kann angewendet werden mit dem Unterschied, daß die Glieder, die die rotationsbedingte Deformation betreffen, fortbleiben ( $\eta''$ ,  $y''$ ,  $\eta''_*$  sind alle gleich Null).

Die durch Erwärmung verursachten freien Deformationen der einzelnen Teile ergeben sich mit Hilfe der Temperaturerhöhung  $\Delta t_i$ . So haben wir für die radiale Wärmedehnung des Lamellenkörpers, in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen im Bild 11, ausgehend aus der Änderung des Umfanges  $\Delta k$

$$y' = \frac{1}{2\pi} \Delta k = \frac{1}{2\pi} K (\alpha_s s_s \Delta t_s + \alpha_l s_l \Delta t_l). \quad (44)$$

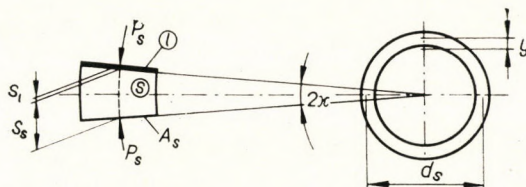


Bild 11. Kommutator-Segment

Die Radiale Wärmedehnung des Hilfsringes ist

$$\eta'_* = \frac{1}{2} (\alpha_b d_h \Delta t_b), \quad (45)$$

und die radiale Wärmedehnung des Hauptringes ist

$$\eta' = \frac{1}{2} (\alpha_g d_g \Delta t_g). \quad (46)$$

NB. In den Gleichungen (44), (45) und (46) bedeuten die Bezeichnungen  $\alpha_s$ ,  $\alpha_l$ ,  $\alpha_b$  und  $\alpha_g$  der Reihe nach den Wärmeausdehnungskoeffizienten für die Segmente, die Isolierlamellen, die Hilfsringe und die Schrupfringe.

#### 4. Rotation, kalter Zustand (Index $\omega$ )

Alles bleibt wie einleitend ausgearbeitet, mit dem Unterschied, daß die Glieder der Wärmedehnungsdeformation fortbleiben, d. h., daß die Werte  $\eta'_*$ ,  $y'$ ,  $\eta'$  als Null eingesetzt sind.

Die Zentrifugalkräfte bei der Rotation sind für den *Lamellenkörper*:

$$\begin{aligned} C &= K \left( \frac{\gamma_s}{g} A_s s_s \right) \frac{d_s}{2} \omega^2 + K \left( \frac{\gamma_l}{g} A_s s_s \right) \frac{d_s}{2} \omega^2 = \\ &= K \frac{A_s}{2g} (\gamma_s s_s + \gamma_l s_l) d_s \omega^2, \end{aligned} \quad (47)$$

wo  $\gamma_s$  und  $\gamma_l$  das spezifische Gewicht des Segmentes bzw. der Isolierung bedeuten;

für den *Hilfsring*:

$$C_b = 2 \left( \frac{\gamma_b}{g} A_b d_b \pi \right) \frac{d_b}{2} \omega^2 = \frac{G_b}{2g} d_b \omega^2, \quad (48)$$

für den *Hauptring*:

$$C_g = \frac{G_g}{2g} d_g \omega^2, \quad (49)$$

wo  $G_b$  bzw.  $G_g$  die Gewichte immer eines Paares der Ringe bedeuten.

Freie radiale Verschiebungen bei Rotation:

$$\left. \begin{aligned} \text{für den Lamellenkörper: } y'' &= c_s C, \\ \text{für die Hilfsringe: } \eta''_* &= c_b C_b, \\ \text{für die Hauptringe: } \eta'' &= c_g C_g. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

#### V. Federkonstanten

Als Annäherung sei angenommen, daß der Druck  $p$  zwischen den Segmenten eine gleichmäßige Belastung bedeutet, in Analogie zu dem Kräftesystem  $q$ , das die Ringfläche des Lamellenkörpers belastet [2].

a) Berechnung der Konstanten  $c_s$  des Lamellenkörpers, gemäß Bild 11:

$$c_s = \frac{K}{4\pi^2 A_s} \left( \frac{s_s}{E_s} + \frac{s_l}{E_l} \right). \quad (51)$$

b) Berechnung der gemeinsamen Konstanten  $c_m$  beider Isolierringe, gemäß Bild 12:

$$c_m = \frac{h_m}{2\pi E_m l_g d_m}. \quad (52)$$



c) Berechnung der gemeinsamen Konstanten  $c_g$  beider Hauptschrumpfringe, gemäß Bild 12:

$$c_g = \frac{d_g^2}{8\pi E_g d_m A_g}, \quad (53)$$

wo mit  $A_g$  die Querschnittsfläche eines Ringes bezeichnet wird.

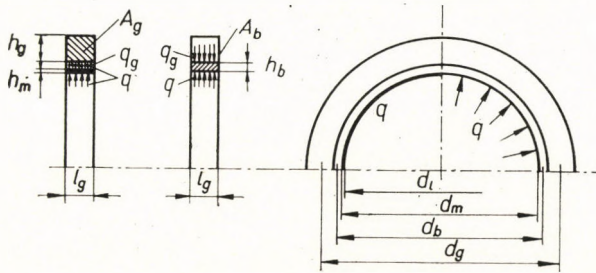


Bild 12. Schrumpfringe

d) Berechnung der gemeinsamen Konstanten  $c_b$  beider Hilfschrumpfringe, die sinngemäß als dünne Ringe betrachtet werden:

$$c_b = \frac{d_b^2}{8\pi E_b d_m A_b}, \quad (54)$$

wo mit  $A_b$  die Querschnittsfläche eines Ringes bezeichnet wird.

#### SCHRIFTTUM

1. HÜTTE: Band IV. A (Elektrotechnik A). Ernst & Sohn, Berlin 1957.
2. HUSZÁR, I.: Berechnung des Kräftespiels von Kommutatoren mit einfachem Schrumpfring. *Acta Techn. Hung.* 55 (1966), 271–289.

**The Calculation of the System of Forces in Double Shrink-Ring Commutators.** In electrical machines, commutators exposed to a high mechanical stress, often are built as double shrink-ring type. Calculation of mechanical strength can be carried out as a fairly good approximation by considering the whole system as a unity built of elastic elements. Forces can be calculated on the principle that they are substituted by a uni-dimensional system of springs. The method explained is suitable for the thorough calculation of dimensions, by taking all the possible service conditions into consideration

**Calcul du jeu de forces d'un collecteur à double bague de serrage.** En cas de collecteurs fortement sollicités, l'usage d'un système à double bague de serrage est adopté généralement dans les machines électriques. Le calcul de la résistance mécanique n'est pourtant possible qu'avec une certaine approximation, en considérant tout le système comme étant composé d'éléments élastiques. Les rapports de forces peuvent être définis comme un système de ressorts unidimensionnel. La méthode élaborée permet d'étudier le dispositif par le calcul; elle prend en considération tous les états pouvant se présenter en cours de service du collecteur.

**Расчеты работы коллектора с двойным бандажным кольцом (И. Хусар).** В случае коллекторов с большой нагрузкой на электрических машинах применяют оформление с двойным бандажным кольцом. Расчет механической прочности возможен только с определенным приближением, принимая всю систему построенной из упругих элементов. Соотношения сил можно определить в качестве одномерной пружинной системы. Разработанный метод позволяет осуществить конструкционный расчет механизма. Метод учитывает все состояния, встречающиеся при работе коллектора.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES —  
ОБЗОР КНИГ

*F. Piwinger:*

REGELUNGSTECHNIK FÜR PRAKTIKER. ELEMENTARE EINFÜHRUNG IN DIE  
PROZESSREGELUNG

VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1966. 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage. 168 Seiten,  
133 Bilder, 7 Tabellen.

Zahlreiche Bücher erscheinen heutzutage, die sich mit der Regelungstechnik beschäftigen. Die Mehrzahl der Bücher ist aber für Leser mit mathematischen Grundkenntnissen oder auch mit gewissem Interesse für theoretische Fragen geschrieben. Das vorliegende Buch ist dagegen für Leser auch ohne mathematische Bildung geeignet und legt das Gewicht auf die Erörterung der physikalischen Erscheinungen in Prozeßregelungen. Eben das ist der Hauptwert dieses Werkes.

Außer Inhalt, Schrifttum, Sachverzeichnis ist das Material in dreizehn Kapitel eingeordnet. Sie enthalten Einleitung, Begriffe und Bezeichnungen, statisches und dynamisches Verhalten von Regelkreisgliedern, Grundformen, d. h. P-, I-, D-Verhalten von Regelkreisglieder, statisches und dynamisches Verhalten von Regelstrecken, Regeleinrichtungen mit stetigen, quasistetigen und unstetigen Reglern, geschlossene Regelkreise, Auswahl von Regelgeräten nach den betrieblichen Erfordernissen, die Anpassung der Regeleinrichtung an die Regelstrecke, das Anfahren von Regelkreisen, regeltechnische Auslegung komplexer Anlagen, Modellregelkreise, Prozeßrechner in Verbindung mit Regelkreisen.

Das Buch ist in erster Linie als einführendes Werk für den »Nebenbei-Regelungstechniker« gedacht, außerdem gibt es aber auch dem bereits mit der Regelungstechnik tiefer vertrauten Ingenieur und Techniker ergänzendes Wissen und anschauliche Darstellungen.

*Fr. Csáki*

*Printed in Hungary*

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1967. VII. 24. — Terjedelem: 14,25 (A/5) ív, 51 ábra (2 színes), 5 melléklet

---

67.64128 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

## INDEX

- Лернер, А. Я.* : Перспективы кибернетики — *Lerner, A. J.*: The Perspectives of Cybernetics — Die Perspektive der Kibernetik — Les perspectives de la cibernetique 269
- Hangos, I.*: Some Problems of Vacuum-Tight Soldering of Metal to Ceramic — Einige Fragen der vakuumdichten metallkeramischen Lötung — Quelques questions du soudage métal-céramique étanche au vide — *Хангош, И.*: Некоторые вопросы металлокерамической вакуумостойкой пайки ..... 283
- Halász, D.—Szendy, K.—Rédey, L.*: The Special Role of Peroxides in Gas Ionization — Die besondere Rolle der Peroxyde bei der Ionisation von Gasen — Le rôle spécial des peroxydes dans l'ionisation des gaz — *Халас, Д.—Сенди, К.—Редеи, И.*: Особая роль перекисей при ионизации газов ..... 295
- Линковский, Ж. Б.* : К расчету динамических свойств объектов регулирования в химической промышленности — *Linkovski, J. B.*: Contribution to the Calculation of the Dynamic Characteristics of Control Systems in the Chemical Industry — Zur Berechnung der dynamischen Eigenschaften von Regelstrecken in der chemischen Industrie — Contribution au calcul des caractéristiques dynamiques des installations réglées dans l'industrie chimique ..... 303
- Vác, I.*: The Work Functions of Tungsten Wires Made with Various Ingredients — Die Austrittsarbeit von mit verschiedenen Zusätzen hergestellten Wolframdrähten — Le travail de sortie des fils de tungstène fabriqués avec différents additifs — *Вац, И.*: Работы выхода вольфрамовых проволок, изготовленных с использованием различных добавок ..... 311
- Frey, T.*: Direkte Zerlegung von Polynomen in Hurwitzsche und Antihurwitzsche Komponenten — Direct Decomposition of Polynomials into Hurwitz and Anti-Hurwitz Components — Décomposition directe des polynomes en composantes Hurwitz et anti-Hurwitz — *Фрей, Т.*: Непосредственное разложение полиномов на компоненты и антикомпоненты Гурвица ..... 325
- Bassa, G.—Reményi, K.*: Furnace Slag Crust Heat Conductivity Measurements — Messen der Wärmeleitfähigkeit der Schlackenablagerung im Feuerraum — Mesure de la conductivité thermique des incrustations de scorie dans les foyers à charbon — *Башша, Г.,—Ремени, К.*: Измерение теплопроводности отложений шлака в топке ..... 331
- Barát, J.—Muszély, Gy.*: A Pattern Recognition Algorithm with Searching Method — Algorithm für die Erkennung von Formen mittels einer adaptierenden Suchmethode — Un algorithme pour la reconnaissance de formes par le procédé de recherche adaptatif — *Барат, Я.—Мусель, Дь.*: Алгоритм распознавания образов, поисковым методом ..... 347
- Almásy, G.—Romhányi, M.—Pallai, I.*: Static Optimization by Adaptive "Forgetting" Method — Statische Optimierung mit einer adaptiven »vergessenden« Methode — Optimisation statique par la méthode «d'oubli» adaptative — *Алмáши, Г.—Ром-*

хани, М.—Паллаи, И.: Статическая оптимализация адаптивным «забывающим» методом .....	357
<i>Singer, D.—Demjén, Cs.:</i> Untersuchungen über die Temperaturverhältnisse des Sinterbandes und der Dynamik seiner automatischen Regelung — Examinations of the Temperature Conditions and the Dynamics of Control of an Ore Sintering Belt — Examen des conditions de température et de la dynamique de la régulation d'une bande transporteuse pour l'agglomération des minerais — Сингер, Д.,—Демен, Ч.: Исследования в области температурных условий агломерационной ленты и динамики ее регулирования .....	365
<i>Rácz, I.:</i> Stromverteilung auf parallelgeschaltete Halbleiterzellen mit Ausgleichtransformatoren — Calculation of Current Distribution of Parallel Semi-Conductors with Current Sharing Transformers — Calcul de la distribution du courant des semi-conducteurs parallèles avec transformateurs de division — Рау, И.: Расчет распределения тока на параллельно соединенных полупроводниковых приборах при помощи делительных дросселей .....	379
Кальман, Р.—Бакони, П.: Программа БОКС для цифрового моделирования — Kálmán, R.—Bakonyi, P.: The vocs Digital Modelling System — Das digitale Modellersystem vocs — Le système digital de simulation vocs .....	395
<i>Huszár, I.:</i> Berechnung des Kräftespiels von Kommutatoren mit doppeltem Schrumpfring — The Calculation of the System of Forces in Double Shrink-Ring Commutators — Calcul du jeu de forces d'un collecteur à double bague de serrage — Хусар, И.: Расчет работы коллектора с двойным бандажным кольцом .....	407
BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ	
<i>Piwinger, F.:</i> Regelungstechnik für Praktiker. Elementare Einführung in die Prozeßregelung (Csáki, F.) .....	423



## “KULTURA”, Budapest, offers

### MATHEMATICAL SETS:

#### TRUDY SEMINARA PO VEKTORNOMU I TENZORNOMU ANALIZU

Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis.

Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle

*Reprint*

Vols. 1—13, Moscow—Leningrad 1933—1966 clothbound US \$ 240.—

Vols. 1—4 are published chiefly in Western languages. Vol. 4 contains the proceedings of the 1st International Conference for Tensor Differential Geometry, held in Moscow, 1934. Editors: Professor V. F. Kagan and P. K. Razhevskij

#### A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III., MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

Vols. 1—17, Budapest, 1950—1967 clothbound US \$ 170.—  
in original issues US \$ 136.—

Hungarian language publication of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences.

#### MATEMATIKAI LAPOK

*Partly reprinted*

Vols. 1—18, Budapest, 1949/50—1967 clothbound US \$ 196.—  
paperbound, resp. in original issues US \$ 160.—

Mathematical quarterly, published by the Bolyai Mathematical Society in Hungarian, with summaries in congress languages, bringing regularly the bibliography of Hungarian mathematical literature. Editor: Professor P. Turán.

In preparation, the complete series available about the end of 1968:

#### MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

*Mostly reprinted*

Vols. 1—50, Budapest, 1892—1943, all published with General Index  
clothbound US \$ 850.—  
paperbound, resp. in original issues US \$ 750.—  
Prepublication price, valid until June 30, 1968: clothbound US \$ 800.—  
paperbound, resp. in original issues US \$ 700.—

Fundamental periodical of Hungarian mathematical and physical researches.

Published by the L. Eötvös Mathematical and Physical Association in Hungarian, since 1920 contains also ample summaries in German language. Most of the authors may be ranked amongst the best scientists of that period.

Mathematical editors: G. Rados (1892—1913)  
L. Fejér (1914—1932)  
B. König (1933—1943)

#### INTERNATIONAL MATHEMATICAL JOURNALS FROM HUNGARY:

The Hungarian ACTA — periodicals publish original scientific treatises in English, German, French or Russian, written by outstanding authors from Hungary and other countries.

#### ACTA MATHEMATICA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

*Mostly reprinted*

Vols. 1—18, Budapest, 1950—1967, with HUNGARICA ACTA MATHEMATICA

Vol. 1, 1949, and Supplement to vol 5. clothbound	US \$ 323.—
paperbound, resp. in original issues	US \$ 285.—
<b>ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM</b> (Institutum Bolyaianum Universitatis Szegediensis)	
<i>Mostly reprinted</i>	
Vols. 1—28, Szeged, 1922—1967 clouthbound	US \$ 464.—
paperbound, resp. in original issues	US \$ 406.—
<b>PUBLICATIONES MATHEMATICAE</b> (Institutum Mathematicum Universi- tatis Debreceniensis)	
<i>Partly reprinted</i>	
Vols. 1—14, Debrecen, 1949—1967 clothbound	US \$ 210.—
paperbound, resp. in original issues	US \$ 182.—
<b>ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTIENSIS DE R. EÖTVÖS NOMINATAE. Sectio Mathematica</b>	
<i>Partly reprinted</i>	
Vols. 1—9, Budapest, 1958—1966, including memorial vol. 3/4, devoted to L. Fejér — Clothbound	US \$ 90.—
Paperbound	US \$ 72.—
<b>STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA</b> auxilio consilii Instituti Mathematici Academiae Scientiarum Hungaricae	
Vols. 1—2, Budapest, 1966—1967 clothbound	US \$ 28.—
in original issues	US \$ 24.—
<b>PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES</b> (A Magyar Tudományos Aka- démia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei.)	
<i>Partly reprinted, published mostly in congress languages.</i>	
Old Series: Vol. 1—3, Budapest, 1952—1954 all published	
New Series: Vols. 1—9, Budapest, 1956—1965 all published	
clothbound	US \$ 134.—
paperbound, resp. in original issues	US \$ 110.—
Single volumes of all above periodicals may be quoted at request	
Subscription price of forthcoming volumes	US \$ 12.—each

“KULTURA” Hungarian Trading Company for Books and Newspapers

Back Issues Department

BUDAPEST, 62. P. O. B. 149, Hungary

Sets, runs and back volumes of periodicals published in Hungary

REPRINTS

Searching Service for out of stock Journals

Xerox copies or microfilms of out of print issues

*Please ask for our catalogues “PERIODICA HUNGARICA”!*

Orders and inquiries should be sent to above adress directly, or through any inter-  
national scientific bookseller.



# BILDSAME FORMGEBUNG DER METALLE

Theorie, Experiment und Anwendung

Von Prof. Dr. ALEXANDER GELEJI

*Erscheint im III. Quartal 1967 · Etwa 880 Seiten · 968 Abbildungen · 58 Tabellen  
Gr. 8° · In Leder etwa MDN 140,—*

Die Vielfalt der bei der bildsamen Formgebung der Metalle zu berücksichtigenden physikalischen Probleme zwingt auch heute noch meist dazu, einfache Vorstellungen zu verwenden, wenn man mit vertretbarem Aufwand durch Rechnung praktisch brauchbare Resultate erhalten will, die mit der Erfahrung übereinstimmen. Der Autor dieses Buches, der seit Jahrzehnten auf diesem Gebiet arbeitet, versteht es, dem Praktiker im Konstruktionsbüro anhand einer breiten Skala von Problemen darzulegen, wie die auftretenden Kräfte, der Arbeitsbedarf und der Werkstofffluß bei der bildsamen Formgebung der Metalle durch Versuch und Rechnung erfaßt werden können. Neben der auf die Praxis zugeschnittenen vereinfachten Behandlung wird dabei, wenn möglich, auch die exakte Lösung abgeleitet.

Im ersten Teil werden die allgemeinen Grundlagen besprochen, auf denen die theoretische und experimentelle Forschung auf dem Gebiet der bildsamen Formgebung aufgebaut wird. In diesem Teil werden neben den mechanischen Grundprinzipien die physikalischen Erscheinungen behandelt, die für das Verständnis des Problemkreises notwendig sind. Der zweite bis vierte Teil befaßt sich mit den einfachen Umformungsvorgängen, der fünfte bis sechzehnte Teil mit den verschiedenen Formgebungsverfahren vom Standpunkt o. g. Zielsetzung.

*Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten*



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

DDR 108 Berlin, Leipziger Str. 3-4

# Novelties from AKADÉMIAI KIADÓ, Budapest

**T. Bercei**

## **REFLEX KLYSTRON CIRCUITS**

In English · Approx. 130 pages · 41 figures · 17×24 cm · Cloth

**I. Biczók**

## **CONCRETE CORROSION — CONCRETE PROTECTION**

In English · Fourth (second English) edition · Approx. 550 pages · 128 figures · 70 tables · 17×24 cm · Cloth

**I. Biczók**

## **BETONKORROSION — BETONSCHUTZ**

In German · Sixth (second German) edition · Approx. 550 pages · 128 figures · 70 tables · 17×24 cm · Cloth

**B. E. F. Karsa**

## **ELECTRICAL MEASURING INSTRUMENTS AND MEASUREMENTS**

In English · Approx. 930 pages · 840 figures · 17×24 cm · Cloth

## **PROCEEDINGS OF THE THIRD COLLOQUIUM ON MICROWAVE COMMUNICATION**

Chairman of the editorial board G. BOGNÁR

In English · Approx. 960 pages · 500 figures · 17×24 cm · Cloth

**K. Széchy**

## **THE ART OF TUNNELLING**

In English · Second English edition · 891 pages · 547 figures · 39 tables · 17×24 cm · Cloth



# AKADÉMIAI KIADÓ

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences  
Budapest 502. P.O.B. 24

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 269—282

A. LERNER: *The Perspectives of Cybernetics*

Cybernetics have raised such new questions in the fields of production control, economic management of natural power resources, agriculture, medical science and sociology, which hitherto were impossible to solve by other means. Starting from these problems, the author deals on philosophical bases with the social importance of automation, specially considering the elimination of the contrast between mental and physical work. After this, he examines in detail those real or imaginary dangers to which the wide-spread use of the cybernetic machines might expose mankind. The author comes to the final conclusion that these dangers can be avoided if progressive humanity trusts itself on the active, free, independent endeavours of thinking man and if the cybernetic machines are exclusively considered as a mean of struggle against nature.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 283—294

HANGOS, I.: *Some Problems of Vacuum-Tight Soldering of Metal to Ceramic*

The effect of layer thickness and soldering time upon the properties of the metal-to-ceramic bond made by the so-called premetallizing technology has been studied. It was stated that for the well-controllable technology of metallizing the thickness of the Mo-Mn subcoat layer must be between 30 and 60 microns but in this range no defined layer thickness can be found which can give optimum properties of the bond. The necessary thickness of the coat promoting wetting must be, depending on soldering time and technology of application, at least  $0,5 \div 5$  microns. In case of longer soldering time it is expedient to use a thickness of  $5 \div 10$  microns because of the dissolution of the nickel layer in the solder.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 281—288

HALÁSZ, D.—SZENDY, K. — RÉDEY, L.: *The Special Role of Peroxides in Gas Ionization*

Barium peroxide ( $BaO_2$ ) and peroxides in general tend to give off an atom of oxygen even at a moderate temperature. In the presence of a combustible substance, this oxygen atom *in statu nascendi* will combine with it as the liberated thermal energy, before being dissipated, will heat the molecules taking part in the chemical reaction to a high temperature, which, however, is maintained only for a few hundredth of a second. In an MHD channel this phenomenon can be used to increase the degree of ionization.



LINKOVSKI, J. B.: Contribution to the Calculation of the Dynamic Characteristics of Control Systems in the Chemical Industry

The paper deals with linear automatic control systems having one input and one output, the motion of which is characterized by a differential equation with constant coefficients (the parameters of the system). The general case of the previous excitation of the system, arising under normal service conditions of the industrial plant, is analysed, assuming that the parameters of the system are known. In that case the output signal depends on the input signal, which is assumed to be a deterministic time function. This relation is determined by a general Duhamel integral, to which is connected the weight function of the previously non excited system. For determining the relation a series expansion method is used at the solution of the linear integral equation of the second order with a variable upper limit. The accuracy of the solution is optional. In this manner the transfer function of the system can approximately be determined. The expression is obtained in the form of simple functions.

VÁ CZ, I.: The Work Functions of Tungsten Wires Made with Various Ingredients

In order to realize the necessary characteristics of electron tubes it appeared to be necessary to determine the work function of various materials, incandescent cathodes etc. The work functions of four tungsten wires made with additives of various composition were measured as a function of the heating time of the wires. The measurements have shown that the determinability of the true work function of the tungsten wires depends on the disparition (evaporation) of the foreign impurities present from the beginning in the basic tungsten material and of those added purposely in order to obtain certain characteristics of the tungsten. The difference as compared to the values of the work function as given by literature thus depends not only on the apparition of the gas layer adsorbed from the vacuum on the surface of the wire, but also on the foreign materials diffusing from inside the tungsten wire and appearing on the surface of the tungsten wire. The measurements have shown that the final values of the work function are attained after the evaporation of the different impurities, after different times.

FREY, T.: Direct Decomposition of Polynomials Into Hurwitz and Anti-Hurwitz Components

In the dimensioning of filters, the most tedious task is the very accurate decomposition of the polynomial with real coefficients into the so-called Hurwitz component, which contains the product of the root factors belonging to the roots with negative real parts and into the so-called anti-Hurwitz component, containing the product of the other root factors. The determination of the complete system of roots accumulates much superfluous information and therefore it is too cumbersome. The paper presents a far more efficient perturbation method for the solution of the problem, by which the decomposition is carried out without determination of the roots, and the accuracy of which can be varied according to requirements.



*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 331—346

BASSA, G.—REMÉNYI, K.: *Furnace Slag Crust Heat Conductivity Measurements*

Slag crust phenomena observed in the course of pulverized coal firing cause diverse heat conductivity (heat insulation) characteristics, whereby in order to improve furnace chamber calculations, determination of the slag heat conductivity coefficient by measurements immediately at the location of origin appeared to be indispensable. As a measuring instrument the heat flow meter used by the Ijmuiden International Flame Research Association experimental station was employed, calculations involved the Soviet "calorimeter" principle, and the first experiments made use of a 5 kg/h output small-size pulverized coal firing installation. This method can be directly applied for determining the heating surface load figures of operational pulverized coal firing under either clean or slagged conditions, and to facilitate the understanding of cinder sheet characteristics.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 347—356

BARÁT, J.—MUSZÉLY, GY.: *A Pattern Recognition Algorithm Adapted with Searching Method*

The paper deals with a new algorithm for pattern recognition and investigates the arising theoretical problems. The published method is a development of the Bledsoe-Browning algorithm, as far as the groups formed by the elements of the field of vision and playing an important role during the recognition, are not selected at random but by a searching method. In this way the class of solvable problems is widened; during the search the algorithm becomes suitable for the problem in hand.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 357—364

ALMÁSY, G.—ROMHÁNYI, M.—PALLAI, I.: *Static Optimization by Adaptive "Forgetting" Method*

The objective function is considered as a second order polynomial of the disturbing and manipulated variables in the static optimization method disclosed in this paper. The optimum system of the manipulated variables is determined by the quadratic optimization method. The coefficients of the approximating function are determined by regression from the data of the unit to be optimized, the last data being considered as having larger weights than the earlier ones. The instability due to measurement errors at the optimum locus calculated is strongly diminished by the evaluation method of the process.





*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 379—380

**RÁCZ, I.:** *Calculation of Current Distribution of Parallel Semi-Conductors with Current Sharing Transformers*

For the improvement of current distribution of parallel diodes or thyristors, closed polygonal connection or cyclic twin connection of the secondary coils of the sharing transformers are appropriate. The article gives formulae for the definition of the greatest current deviations and the maximum load of transformers relating to the case when there are deviations in the conducting direction tensions, or when the fuse of a branch melts. The method can be applied — taking the *R, C* damping elements into account — also for the examination of transient commutation phenomena.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 381—392

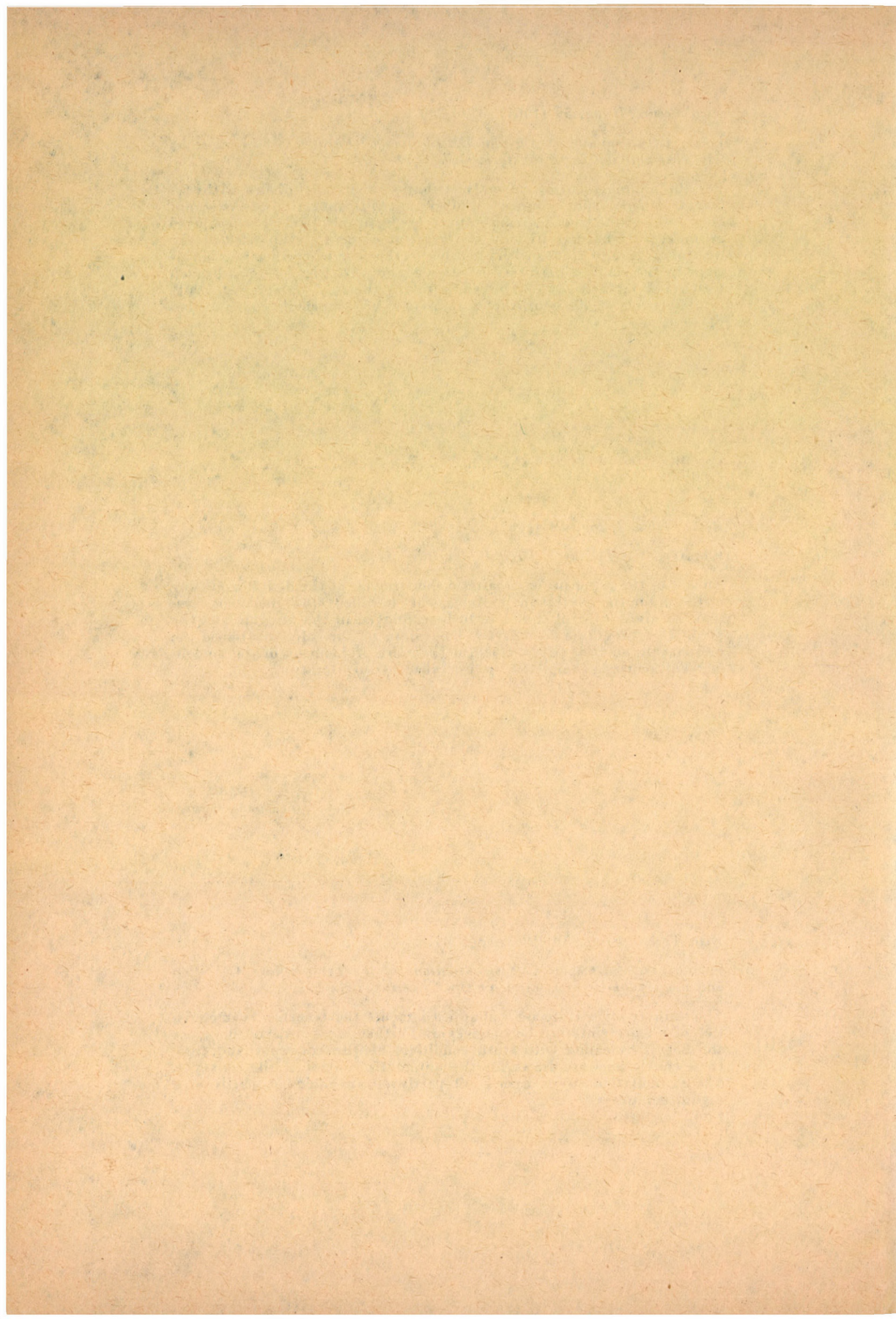
**KÁLMÁN, R.:** *The BOCS Digital Modelling System*

Author of the paper presents, after a short review of the digital modelling methods for the continuous systems, the so-called BOCS modelling system. He gives a list of the blocs to be employed in the program and the method of programming. As an illustration of the aforementioned he presents the solution of the classical Legendre problem by digital modelling. The paper is completed by a detailed list of literature.

*Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 365—378

**SINGER, D. — DEMJÉN, Cs.:** *Examinations of the Temperature Condition and the Dynamics of Control an Ore Sintering Belt.*

The authors investigate on a simplified model the transfer characteristics of an ore sintering belt conveyor. Further ideas on modelling are the base for dealing with static conditions of the conveyor and from these conclusions are drawn for the automatis control of the conveyor. The examinations were carried out partly on an analogue, partly on a digital computer



The Acta Technica publish papers on subjects of technical sciences in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Hungary*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 165 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Hongrie*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 165 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Венгрия*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 165 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable  
at the following addresses:

## ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve  
Tirana

## AUSTRALIA

A. Keesing  
Box 4886, GPO  
Sydney

## AUSTRIA

Globus Buchvertrieb  
Salzgries 16  
Wien I

## BELGIUM

Office International de Librairie  
30, Avenue Marnix  
Bruxelles 5  
Du Monde Entier  
5, Place St. Jean  
Bruxelles

## BULGARIA

Raznoiznos  
1, Tzar Assen  
Sofia

## CANADA

Pannonia Books  
2, Spadina Road  
Toronto 4, Ont.

## CHINA

Waiwen Shudian  
Peking  
P. O. B. 88

## CZECHOSLOVAKIA

Artia  
Ve Smečkách 30  
Praha 2  
Poštova Novinova Služba  
Dovoz Tisku  
Vinohradska 46  
Praha 2  
Maďarská Kultura  
Václavské nám. 2  
Praha I  
Poštova Novinova Služba  
Dovoz Tlacc  
Leningradska 14  
Bratislava

## DENMARK

Ejnar Munksgaard  
Nørregade 6  
Copenhagen

## FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa  
Keskuskatu 2  
Helsinki

## FRANCE

Office International de Documentation  
et Librairie  
48, rue Gay Lussac  
Paris 5

## GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch Export und Import  
Leninstraße 16  
Leipzig 701  
Zeitungsvertriebsamt  
Clara Zetkin Straße 62  
Berlin N. W.

## GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen  
Erich Bieber  
Postfach 46  
7 Stuttgart 5

## GREAT BRITAIN

Collet's Holdings Ltd.  
Dennington Estate  
London Rd.  
Wellingborough, Northants.  
Robert Maxwell and Co. Ltd.  
Waynflete Bldg. The Plain  
Oxford

## HOLLAND

Swetz and Zeitlinger  
Keizersgracht 471—487  
Amsterdam C  
Martinus Nijhof  
Lange Voorhout 9  
The Hague

## INDIA

Current Technical Literature  
Co. Private Ltd.  
India House OPP  
GPO Post Box 1374  
Bombay I

## ITALY

Santo Vanasia  
Via M. Macchi 71  
Milano  
Libreria Commissionaria Sansoni  
Via La Marmora 45  
Firenze

## JAPAN

Nauka Ltd.  
92, Ikebukuro O-Higashi 1-chome  
Toshima-ku  
Tokyo  
Maruzen and Co. Ltd.  
P. O. Box 605  
Tokyo-Central  
Far Eastern Booksellers  
Kanda P. O. Box 72  
Tokyo

## KOREA

Chulpanmul  
Phenjan

## NORWAY

Johan Grundt Tanum  
Karl Johansgatan 43  
Oslo

## POLAND

RUCH  
ul. Wronia 23  
Warszawa

## ROUMANIA

Carlimes  
Str. Aristide Briand 14—18  
București

## SOVIET UNION

Mezhdunarodnaja Kniga  
Moscow G—200

## SWEDEN

Almqvist and Wiksell  
Gamla Brogatan 26  
Stockholm

## USA

Stechert Hafner Inc.  
31, East 10th Street  
New York, N. Y. 10003  
Walter J. Johnson  
111, Fifth Avenue  
New York, N. Y. 10003

## VIETNAM

Xunhasaba  
19, Tran Quoc Toan  
Hanoi

## YUGOSLAVIA

Forum  
Vojvode Mišića broj 1  
Novi Sad  
Jugoslovenska Knjiga  
Terazije 27  
Beograd