

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS 56

FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1966

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

- Bach, I.*: Die statistische Bewertung des Verbrauches in Radialnetzen — Statistical Evaluation of Consumers in Radial Networks — Evaluation statistique des consommateurs dans les réseaux radiaux — *Бах, И.*: Статистическая оценка потребителей радиальных сетей 345
- Batta, I.*: Calculation of Water Hammer Phenomena by Automatic Sequence Controlled Digital Computers, II — Wasserstoßberechnung mit Hilfe einer programmgesteuerten digitalen Rechenmaschine, II — Calcul du coup de bélier par calculatrice électronique digitale à programme, II — *Батта, И.*: Расчет водяного удара при помощи цифровой электронной вычислительной машины программного управления, II 43
- Beke, B.—Kiss, I.*: Theoretical Study of the Grinding Process — Theoretische Untersuchung des Mahlvorgangs — Examen théorique du processus de broyage — *Беке, Б. — Киш, И.*: Теоретическое исследование процесса помола 199
- Benyó, P.*: Anwendung der Wellengleichungen auf kurze Rohre, I — Application of Wave Equations to Short Pipes, I — Application des équations d'ondes aux tubes courts, I — *Беньо, П.*: Применение волновых уравнений к коротким трубами, I 139
- Biró, V.*: Analysis of a Varactor Frequency Doubler — Analyse eines Varaktor-Frequenzverdopplers — Analyse d'un doubleur de fréquences à diode de capacité variable — *Биро, В.*: Анализ удвоителя частоты на варакторном диоде 285
- Чабалик, Д.*: Снижение термических потерь в прибыльных головках — *Csabalik, Gy.*: Reduction of Heat Loss of the Ingot Head — Verringerung des Wärmeverlustes am Gußkopf — Réduction des pertes de chaleur de la masselotte 91
- Csáki, F.*: Optimum Cascade Controllers for Multivariable Continuous-Data and Pulsed-Data Control Systems, with Constraints — Optimale Kaskadregler für kontinuierlich- und diskretwirkende Mehrfachregelsysteme mit Begrenzungen — Dimensionnement des régulateurs optimum pour systèmes à variables multiples et à restrictions, de fonctionnement continu ou impulsionnel — *Чаки, Ф.*: Оптимальные каскадные регуляторы для непрерывных в импульсных многомерных систем управления с ограничениями 363
- Fono, A.*: Increasing the Efficiency of Gas Transmission Pipe Lines — Steigerung der Leistungsfähigkeit von Gasfernleitungen — L'augmentation de l'efficacité des lignes de transport de gaz — *Фано, А.*: Повышение пропускной способности магистрального газопровода 333
- Házman, I.*: Saturation Current in Diffusion-Action Transistors — Reststrom von Diffusionstransistoren — Le courant résiduel des transistors à diffusion — *Хазман, И.*: Остаточный ток диффузионно действующих транзисторов 211
- Heller, G.—Rosta, L.*: Wahl der Betriebscharakteristiken des Luftverdichters und des Hauptluftbehälters an Eisenbahntriebfahrzeugen auf Grund der Betriebsanforderungen, I — Dimensioning Principles of the Air-Compressor and the Main Air-

- Receiver for the Brake-Equipment in Railway-Trains, I — Choix, du point de vue de l'exploitation, des caractéristiques des compresseurs et réservoirs d'air comprimé des engins de traction ferroviaires, I — Хеллер, Д.—Рошта, Л.: Выбор характеристик оборудования по выработке и хранению сжатого воздуха на основе производственных соображений, для случая железнодорожной тяги, I 65
- Horváth, Z.—Wéber, J.*: Activity of Zinc-Sulfate in a Sulfuric Acid Solution of Zinc-Sulfate — Aktivität des Zinksulfats in einer schwefelsäuren Zinksulfatlösung — Activité du sulfate de zinc dans ses solutions sulfatées — Хорват, З.—Вебер, Й.: Активность сернистого цинка в сернокислых растворах сернистого цинка 57
- Huszár, I.—Kovács, I.*: Strength Calculation of the Cage-System in Squirrel Cage Induction Motors — Festigkeitsrechnung des Kurzschluß-Käfigsystems von Asynchronmotoren — Calcul de la résistance mécanique des cages d'écureuil des moteurs asynchrones — Хусар, И.—Ковач, И.: Расчет механической прочности беличьей клетки короткозамкнутых асинхронных двигателей 233
- Karsai, K.*: Calculation of the Pseudo-Final Voltage Distribution in Impulsed Windings with a Matrix Method — Berechnung der induktiven Spannungsverteilung in gestossenen Windungen mit Hilfe einer Matrizenmethode — Méthode matricielle pour le calcul de la distribution inductive des tensions dans les enroulements soumis à des tensions de choc — Каршай, К.: Матричный расчет распределения индуктивного напряжения, возникающего при импульсе на обмотках 309
- Kisfaludy, A.—Tardy, P.*: Mikroskopische Untersuchung der Ferromagnetischen Phasen von Legierungen — The Microscopic Examination of Ferromagnetic Phases of Alloys — Examen microscopique des phases ferromagnétiques des alliages — Кишфалуди, А.—Тарди, П.: Микроскопический анализ ферромагнитных фаз сплавов 131
- Kolonits, F.*: Calculation of Gear Correction by Iteration — Berechnung der Zahnkorrektion mit Iteration — Calcul de la correction des dents par itération — Колонич, Ф.: Итерационный расчет коррекции зубьев 3
- Kovács, K. P.—Halász, D.—Szendy, K.*: Enhancement of Working Gas Conductivity by Condensing Metal Vapour — Steigerung der Leitfähigkeit des Arbeitsgases durch Kondensation von Metaldampf — Accroissement de la conductibilité du gaz de travail par la condensation de la vapeur de métal — Ковач, К. П.—Халас, Д.—Сенди, К.: Повышение магнетогидродинамической эмиссии газов конденсацией паров металлов и их солей 383
- Lőcsei, B.*: The Effect of Small Quantities of Aluminium Fluoride Additives on the Strength of Refractory Materials — Die Wirkung des Zusatzes geringer Aluminiumfluoridmengen auf die Festigkeit von feuerbeständigen Materialien — L'influence de l'addition de faibles quantités de fluorure d'aluminium sur la résistance mécanique des matières réfractaires — Лечеи, Б.: Воздействие небольшой добавки фтористого алюминия на изменение прочности огнеупорных материалов 267
- Lukács, J.*: Si—SiC *p*—*n*-heterojunctions — Si—SiC *p*—*n*-Heteroübergänge — Yonctions hétérogènes *p*—*n* Si—SiC — Лукач, Й.: *p*-*n* гетеросвязи Si—SiC 267
- Nath, G.*: Three-Dimensional Flow in Axial Fans with Prescribed Blade Loading — Räumliche Strömung in einem Axialventilator bei gegebener Schaufelbelastung — Écoulement spatial dans un ventilateur axial à aubes soumises à une charge donnée — Нат, Г.: Пространственные потоки в аксиальном вентиляторе с заданной нагрузкой на лопасти 161
- Nath, G.*: The Compressible Laminar Spanwise Boundary Layer on a Yawed Infinite Cylinder with Distributed Suction — Kompressible, laminare, longitudinale Grenzschicht um einen unendlichen, schräg angeblasenen Zylinder mit verteilter Absaugung — Couche limite compressible laminaire dirigée suivant les génératrices autour d'un cylindre infini à soufflage oblique, en présence d'aspiration distribuée — Нат, Г.: Сжимаемый ламинарный граничный слой с рассеянным отсосом, направленный по образующей бесконечно длинного косо обдуваемого цилиндра 187

<i>Reményi, K.:</i> Investigation on Grindability of Limestone and Rock-Salt Mixture in a Hardgrove Mill — Prüfung der Mahlbarkeit von Gemischen aus Kalkstein und Steinsalz in Hardgrove-Labormühle — Etude de la broyabilité des mélanges de calcaire et de sel gemme dans l'appareil de Hardgrove — Ремень, К.: Раз- молимость смесей извсетняка и каменной соли на оборудовании системы Гардгрова	75
<i>Schwane, K.:</i> Über den Einfluß der modifizierten Kresolharzsysteme auf die elektrischen Eigenschaften und Wasserbeständigkeit der Hartpapiere — The Influence of Modi- fied Cresol-Resin Systems on the Electric Properties and the Resistance to Water of Paper-Base Laminated Plastics — L'influence des systèmes de résine à base de crésol modifiés, sur les qualités électriques et la résistance à l'eau des plastiques stratifiées à base papier — Шванер, К.: Воздействие модифицированных систем крезольной смолы на электрические свойства и водонепроницаемость слоистых пластмасс с бумажным каркасом	247
<i>Szöke, B.:</i> Design Transfer Device for Drawing Axonometric Images — Zeichenvorrichtung zum Umzeichnen von axonometrischen Bildern — Appareil transcripteur pour la production d'images axonométriques — Секе, Б.: Копирующий прибор для создания аксонометрических изображений	21
<i>Tóth, L.:</i> Theoretische und experimentelle Untersuchung der Fließerscheinungen des Werkstoffes beim Gesenkschmieden — Theoretical and Experimental Investi- gation of Material Flow in Die-Forging — Examen théorique et expérimental de l'écoulement de la matière à l'étampage — Тот, Л.: Теоретическое и экспе- риментальное исследование явлений истечения материала при ковке в штапках	107
<i>Vajda, Gy.:</i> Some Remarks on the Interpretation of Discharge Investigations — Bemerk- ungen zur Interpretation der Untersuchungen über Entladungen — Remarques sur l'interprétation des décharges — Вајда, Д.: Замечания к трактовке ис- следований разряда	305
<i>Vajda, Gy.:</i> An Approximate Method for the Determination of the Maximum Dielectric Stress in Electric Fields — Näherungsweise Bestimmung der größten Beanspru- chung in elektrischen Feldern — Détermination approchée de la contrainte diélectrique maximum dans les champs électriques — Вајда, Д.: Приближен- ное определение максимальной нагрузки электрических силовых полей ...	319
BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRE — ОБЗОР КНИГ	
<i>Fackelmayer, A.:</i> Materialfluß, Planung u. Gestaltung. (E. LECHNER)	209
<i>Fodor, Gy.:</i> Laplace Transforms in Engineering (K. P. Kovács)	385

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 56



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

ACTA TECHN. HUNG.

CALCULATION OF GEAR CORRECTION BY ITERATION

F. KOLONITS

[Manuscript received October 7, 1963]

A general analysis of the iteration method is followed by a study of problems concerning convergence and estimation of errors. The results obtained are used to closely approximate the characteristics of Ganz-Botka toothing (r_{f1} , r_{f2} , q_2 , etc.) and to assay possibly apparent errors. A method has been elaborated for various cases depending on the site at which the Ganz-Botka toothing requires correction: at the ends of the path of contact, at the change points, at the end points of the possible tip relief.

List of symbols

(At the geometrical measurements of the gear suffix 1 refers to the pinion, suffix 2 refers to the wheel.)

- r_f tip radius;
 - r_g reference radius;
 - r_a base radius;
 - ρ_f radius of curvature of the involute profil at the tip;
 - z number of teeth;
 - α_0 pressure angle of the tool;
 - α_g working transverse pressure angle;
 - ε contact ratio;
 - m module;
 - a center distance;
 - u quotient of numbers of teeth z_2/z_1 ;
 - h_k theoretical depth of tooth;
 - $L_{1,2}$ initial and end point of tip relief on the path of contact;
 - A, E initial and end point of contact;
 - B, D change points;
 - t_a base pitch;
 - \varkappa the relation of the intact section to the base pitch in case of tip relief $= \overline{L_1 L_2} / t_a$;
 - C constant, depending on the tip relief conditions; t_a is multiplied by it;
 - M convergence index;
 - $n = r_{a1}^2 - r_{f1}^2$
 - $p = r_{a2}^2 - r_{f2}^2$
 - $x = \sqrt{r_{f1}^2 - r_{a1}^2} - (C) t_a$
 - $y = \sqrt{r_{f2}^2 - r_{a2}^2} - (C) t_a$
- }

variables of iteration;
- q_2 the quotient of the working addendum on the wheel and h_k ;
 - f_a^g working addendum;
 - δ^g length of the interval of iteration;
 - η specific sliding.

I. Introduction

A variety of principles has been suggested in the theory of gear design for correcting the conditions of wear, sliding and temperature. As it underlies the Ganz—Botka (G—B) toothing system, probably the most up to date system, the present paper deals with the “principle of equalized contact temperatures” [1].

The immediate object is the determination of one of the geometrical gear characteristics that will ensure the required equalization, whether this be tool displacement (q_2), or something else. Within certain limits Botka's triple equalization principle may be applied [2]. Accordingly, in some cases it will suffice to achieve equality of specific slidings at certain points of the path of contact.

For the most general cases not even the G—B system is perfect. The following cases will certainly be important:

- a) Equalization of specific slidings at the ends of the path of contact;
- b) equalization of specific slidings at the change points;
- c) equalization of specific slidings at the beginning and end point of tip relief on the path of contact.

The present work will deal with these cases.

II. Mathematical apparatus

The problem of equalization of specific slidings is known to be a system of equations of 8th degree with little hope for the possibility of reducing it. This means that in the sense of the Ruffini—Abel theorem no method of solution can be envisaged that would consist of algebraic operations of finite number. For successive approximation iteration offers itself as the most promising method, first because it is simple, secondly because it will probably prove to be applicable for mechanization in a given case, owing to its continuous character.

In each of the three cases (a, b, c) we shall have two equations with two variables. If one variable of each of two Equs is expressed the system

$$\begin{aligned} x &= f(y), \\ y &= g(x) \end{aligned} \tag{1}$$

will be obtained, and if the functions are substituted one by the other we arrive at

$$x = f[g(x)] = \Phi(x). \tag{2}$$

This expression will be suitable for applying the common formulas of iteration to it [3, 4]. The results of major importance to us can be summarized as follows.

Let us introduce the notation $M = |d\Phi/dx| = |f' g'|$, in which the upper dash indicates differentiation with respect to its own argument. The condition of convergence is $M_{\max} < 1$; and for the measure of the error $|x - x_n| < |x - x_{n-1}| M$, where M_{\max} is the maximum value of M in the entire interval of iteration; but M in the succeeding formula is the maximum value for M in the interval including x_{n-1} , x_n and x .

For the sake of simplicity let new variables replace tip radii. Still it cannot be maintained that convergence will be the most favourable when these formulas and variables are used. For this reason the question must be thoroughly examined how the introduction of new variables and transformation of formulas will influence convergence.

If we introduce the new variables u , v by the transformation $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$, we arrive (at least formally) at

$$\begin{aligned} u &= F(v), \\ v &= G(u). \end{aligned} \quad (3)$$

The convergence index will then be: $(\partial F/\partial v) \cdot (\partial G/\partial u)$. After formal substitution in (1) we may proceed to derivation by the chain rule with respect to v and u , whereupon the derivatives will appear and become expressible. The condition of improving convergence will be a reduction in the convergence index in relation to that in (1):

$$\left| \frac{\left(f' \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left(g' \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial u} - f' \frac{\partial y}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial v} - g' \frac{\partial x}{\partial v} \right)} \right| < |f' g'|. \quad (4)$$

If the new variables introduced each depend on a former variable, e.g.: $x = \varphi(u)$ and $y = \psi(v)$, then $\partial x/\partial v = 0$ and $\partial y/\partial u = 0$, and these new variables we will call "adjuncted" variables. In this case there is equality, indicating that convergence remains unchanged in speed.

Another way of transformation would be to construct another system, this being equivalent to the original, by some combination of the equations in (1). One element of such a transformation would be to apply to both members of (1) the same function of two variables and to attach to the equation so obtained one of the original equations:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F[f(y); g(x)], \\ y &= g(x). \end{aligned} \quad (5)$$

The first of these equations may, of course, be written as $x = \Psi(y)$. In the course of differentiation by the chain rule the derivatives necessary for the convergence index will appear as well, and become expressible. The condition of improved convergence is:

$$\left| \frac{f' g' - k g'}{1 - k g'} \right| < |f' g'|, \quad (6)$$

where $k = F_y/F_x$. From this specially it may be adduced that if our equations are not taken in combination, but arbitrarive operations are applied separately to each of their members the convergence will be unchanged in speed; for in this case $F_y = k = 0$, and (6) is an equality.

III. Application

a) *Equalization of specific slidings at the two end points of the path of contact (A, E)*

The system of Equs to be solved [2, p. 103]:

$$\frac{\sqrt{r_{f_2}^2 - r_{a_2}^2}}{a \sin \alpha_g - \sqrt{r_{f_2}^2 - r_{a_2}^2}} = \frac{u^2 \sqrt{r_{f_1}^2 - r_{a_1}^2}}{a \sin \alpha_g - \sqrt{r_{f_1}^2 - r_{a_1}^2}}, \quad (7a)$$

$$r_{f_1} + r_{f_2} = a + h_k. \quad (7b)$$

Let us introduce the substitutions: $n = r_{f_2}^2 - r_{a_1}^2$; $p = r_{f_2}^2 - r_{a_2}^2$. This will be advantageous because if (n, p) is calculated with a small error, the error of r_f , which can be calculated by extracting roots will still be smaller. Let us write the equations according to (II) in the form

$$p = \frac{u^4}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{u^2 - 1}{a \sin \alpha_g} \right)^2}, \quad (8a)$$

$$n = p - 2(a + h_k) \sqrt{p + r_{a_2}^2} + (a + h_k)^2 + (r_{a_2}^2 - r_{a_1}^2). \quad (8b)$$

After determination of the appropriate derivatives the convergence index will be:

$$\begin{aligned} M &= \left| \left(-\frac{r_{f_1}}{r_{f_2}} \right) \frac{u^2}{\left[1 + (u^2 - 1) \frac{\sqrt{n}}{a \sin \alpha_g} \right]^3} \right| = \\ &= \left(\frac{r_{f_1}}{r_{f_2}} \right) \frac{u^2}{\left[1 + (u^2 - 1) \frac{\sqrt{n}}{a \sin \alpha_g} \right]^3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Let us examine the relation between the ratio of tip radii and the ratio of the numbers of teeth:

$$\frac{r_{f1}}{r_{f2}} = \frac{r_{g1} + f_{g1}}{r_{g2} + f_{g2}} = \frac{1 + \frac{f_{g1}}{r_{g1}}}{u + \frac{f_{g2}}{r_{g1}}}$$

As in the equalized state $q_2 \leq 0,5$ [5, 6], and therefore $f_{g2} \leq f_{g1}$; further, $u \geq 1$; $1/u$ must be a proper fraction or equal to unity, it can be stated that

$$\frac{r_{f1}}{r_{f2}} \geq \frac{1}{u} \quad (10)$$

Since however, $f_{g1}/r_1 \ll$ the difference is not excessive.

According to the geometric conditions $\sqrt{n} = \varrho_{f1}$. It can easily be seen that

$$\frac{a \sin \alpha_g}{u + 1} < \varrho_{f1} < a \sin \alpha_g \quad (11)$$

M is the highest when \sqrt{n} is as small as possible. In Equ. (11) ϱ_{f1} can never attain the lower limit; substituting this we get $M = u(r_{f1}/r_{f2})$, and this is but slightly greater than 1 [Equ.(10)]. Yet, a case as unfavourable as this does not exist.

After writing the formulas (8) in inverse form it can be shown that the M of the new formulas will be just a little lower than 1, in the best case, which, however, can never actually arise. This means that (8) is the correct system of formulas. At the upper limit of (11) M is barely greater than $1/u^3$.

The value for M can also be expressed by the gear characteristics in the following form:

$$M = \frac{r_{f1}}{r_{f2}} \left(\frac{\varrho_{f2}}{\varrho_{f1}} \right)^3 \frac{1}{u^2} \quad (12)$$

Combining this with the above limitation of M it can be shown that

$$u > \frac{\varrho_{f2}}{\varrho_{f1}} > 1 \quad (13)$$

As the signs of the derivatives of the functions (8) differ from each other in the iteration interval (9) it can be stated that the iterated values tend to approach the root from both sides. For configuration cf. Fig. 1.

Mathematically (8) is a system of Equs in which neither (a) nor (b) is identity. However, considering from the point of view of gear theory (b) is a

condition of existence, whereas (a) is merely a particular case which is desirable to be attained. This is why, for instance r_{f_2} cannot be regarded as a variable "adjuncted" to r_{f_1} , because an adjunction can only be brought about by mathematical identity. In the course of stepwise iteration the pairs of values satisfying (b) represent gears gradually approaching the equalized state. The M -s calculable for these gears will of course be variable. The second derivatives in (8) will always be positive at (b) and negative at (a); accordingly, the change is strictly monotonous.

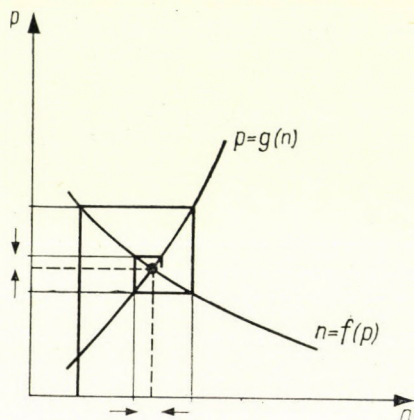


Fig. 1

It is advisable to begin iteration with $q_2 = 0,5$; $f_{g_1} = f_{g_2} = h_k/2$, as in the equalized state $q_2 \leq 0,5$, in all subsequent iterations r_{f_1} is greater and r_{f_2} is smaller than at the starting iteration. After rewriting (12) we get

$$M = \left(\frac{1}{u^2} \right) \frac{\frac{(\sqrt{r_{f_2}^2} - r_{a_2}^2)^3}{r_{f_2}}}{\frac{(\sqrt{r_{f_1}^2} - r_{a_1}^2)^3}{r_{f_1}}}. \quad (14)$$

It can be seen that $(\sqrt{r_f^2} - r_a^2)^3/r_f$ increases or decreases in the sense of r_f wherefore M_{\max} presents itself at the first iteration.

b) Equalization of specific slidings at the change points (B, D)

The condition of equalized specific slidings in these points (and in the case of c) is [6]:

$$\varrho_2'' \varrho_2' = u^2 \varrho_1'' \varrho_1', \quad (15)$$

$$[\varrho_1' + \varrho_2' = \varrho_1'' + \varrho_2'' = a \sin \alpha_2].$$

Departing from this it will be possible to write the equation corresponding to (7a), the other one remains. The system to be solved is:

$$\frac{a \sin \alpha_g + t_a - \sqrt{r_{f_1}^2 - r_{a_1}^2}}{\sqrt{r_{f_1}^2 - r_{a_1}^2} - t_a} = u^2 \frac{a \sin \alpha_g + t_a - \sqrt{r_{f_2}^2 - r_{a_2}^2}}{\sqrt{r_{f_2}^2 - r_{a_2}^2} - t_a}, \quad (16a)$$

$$r_{f_1} + r_{f_2} = a + h_k. \quad (16b)$$

The formulas of calculation will be the simplest by inclusion of the variables:

$$x = \sqrt{r_{f_1}^2 - r_{a_1}^2} - t_a; \quad y = \sqrt{r_{f_2}^2 - r_{a_2}^2} - t_a.$$

In ordinate form:

$$x = \frac{1}{\frac{u^2}{y} - \frac{u^2 - 1}{a \sin \alpha_g}}, \quad (17a)$$

$$y = \sqrt{[a + h_k - \sqrt{(x + t_a)^2 + r_{a_1}^2}]^2 - r_{a_2}^2} - t_a. \quad (17b)$$

After derivation:

$$M = \left| \left(-\frac{r_{f_2}}{r_{f_1}} \frac{\varrho_{f_1}}{\varrho_{f_2}} \right) u^2 \left(\frac{\varrho_{f_1} - t_a}{\varrho_{f_2} - t_a} \right)^2 \right|. \quad (18)$$

Similarly to the foregoing procedure, it can be seen that the value for M is more suitable (i.e. less than the unity) than is the inverse, considering that $\varrho_{f_1}/\varrho_{f_2}$ is nearer to $1/u$ than to 1. However, here the values for M are generally higher than in the case of a). Further, it can be shown that the M calculated with the initial value $q_2 = 0,5$ will be the lowest of all M -s. The highest M is obtained after the first step of iteration because here, too, approximation is bilateral and the change in M monotonous and the error is the most pronounced at the first step. (Similarly in the case of a) the minimum M will be obtained after the first step of iteration.)

c) Equalization of specific slidings at the points of tip relief (L_1, L_2)

The condition in (15) holds here as well, but

$$\varrho_1'' = a \sin \alpha_g + Ct_a - \sqrt{r_{f_2}^2 - r_{a_2}^2}, \quad (19)$$

$$\varrho_2' = a \sin \alpha_g + Ct_a - \sqrt{r_{f_1}^2 - r_{a_1}^2}$$

where $C = \text{const.}$; and its value is determined by the contact ratio and the tip relief conditions [7, 8]. For if $\overline{L_1 L_2} = \varkappa t_a$ then it can be shown that

$$C = \frac{\varepsilon + \varkappa}{2}. \quad (20)$$

All the formulas related to iteration are analogues of those in section *b*) but instead every t_a must be written Ct_a .

Since ε cannot be known in advance, it must be estimated. The estimated values will generally differ from the value for ε calculated for the eventually resulting toothed characteristics. Repeating the calculation with the latter ε and continuing secondary iteration we may attain the accurate result. This, however, is a cumbersome procedure.

If tables elaborated for cases *a*) and *b*) including values for ε are available, this fact will greatly facilitate estimation of ε . In case *a*) $\kappa = \varepsilon > 1$ and $C = \varepsilon$, whereas in case *b*) $C = 1$, $\kappa = 2 - \varepsilon < 1$.

The connection between ε and κ is determined by the following equations: (17) rewritten with Ct_a ; (20), and by the obvious equation:

$$\varepsilon = \frac{x + y - a \sin \alpha_g}{t_a} + 2C. \quad (21)$$

Here x, y are values referring to the equalized state, as they are determined by the rewritten Equ. (17) as functions of the C -parameter. From these relations we can write for the equalized states:

$$\frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{2}{R} - 1, \quad (22a)$$

where

$$R = \left(\frac{r_{f_2}}{r_{f_1}} \frac{q_{f_1}}{q_{f_2}} + 1 \right) \frac{1 + u^2 \left(\frac{q_{f_1} - Ct_a}{q_{f_2} - Ct_a} \right)^2}{1 + \frac{r_{f_2}}{r_{f_1}} \frac{q_{f_1}}{q_{f_2}} u^2 \left(\frac{q_{f_1} - Ct_a}{q_{f_2} - Ct_a} \right)^2}. \quad (22b)$$

To realize some fixed κ we depart from the ε in sections *a*) or *b*) depending on whichever of κ in this or that equation is nearer to the intended one. Presuming departure from section *b*) and taking $d\varepsilon/d\kappa$ from (22) we may write:

$$\varepsilon \approx \varepsilon_b + \left[\frac{d\varepsilon}{d\kappa} \right]_b (\kappa - \kappa_b). \quad (23)$$

IV. Speeding up convergence

a) In the case of bilateral approximation convergence can be speeded up by continuing the calculation with the arithmetical mean of two consecutive values of iteration [9]. In our case the formulas had not been reduced to the form $x = F(x)$, but we passed from one equation in the other according to (1).

It can be shown that halving one or the other variable is advantageous. If the variable which is not halved, and therefore playing an intermediary roll only, is eliminated our system of equations can be theoretically rewritten as $x = F(x)$. This will duly be taken into account in all subsequent considerations.

The inequality expressing the error of each individual step of iteration may be rewritten as follows:

$$x_n - x < (x_n - x_{n-1}) \frac{M}{1 + M}. \quad (24)$$

From this it appears that if $M < 1/3$ the iterated value x_n represents a more favourable approximation than the halved value. On the other hand on the basis of the Lagrange theorem one may write:

$$|F(x_n) - F(x_{n-1})| = |x_{n+1} - x_n| < M |x_n - x_{n-1}|. \quad (25)$$

Since halving under all circumstances narrows the interval by half, if $M > 1/2$ halving itself appears to be justified. Since halving involves less work than iteration to obtain narrowing it down may be practicable even when $M < 1/2$.

It can be shown that halving when in divergent iteration $M < 3$, will yield a convergent series of values.

b) Two consecutive values of iteration are known, which "flank" the result. We are looking for the Δ correction to be added to one of these. This will lead to Equ.:

$$F(x_{n-1} + \Delta) = x_{n-1} + \Delta. \quad (26)$$

Applying the "theorem of finite increments" approximately:

$$\Delta = \frac{x_n - x_{n-1}}{1 - F'(x_{n-1})} = \frac{\Delta_{n,n-1}}{1 + M}. \quad (27)$$

The local value for M will be $F'(x_{n-1})$ with a sign; M will always represent the absolute value of a negative number.

This in fact gives Newton's tangent formula (see e.g. [10]), but interpreted in (27) it is readily applicable to what has been stated in III. *b)* and III. *c)*, whereas Lipka's method is specially elaborated for the case in *a)*.

V. Accuracy

The study of inequality (4) revealed that whatever variables "adjuncted" to the original ones are introduced M will always remain unchanged. When iteration is carried out in any arbitrary adjuncted variable, the values for the

original variable resulting from those of the iterated values of the adjunct variable, will approach the value corresponding to the equalized state according to the same M .

For the equalized state it follows from $q_2 \leq 0,5$ that

$$\begin{aligned} r_{g_1} + \frac{h_k}{2} &\leq r_{f_1} < r_{g_1} + h_k, \\ r_{g_2} < r_{f_2} &\leq r_{g_2} + \frac{h_k}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

This means that the error of the first approximation ($q_2 = 0,5$) is less than $h_k/2$, and so from the known formula referring to errors in iteration it becomes possible to approximately calculate the number of steps required to keep error below the threshold H :

$$k < \frac{\log H - \log \frac{h_k}{2}}{\log M_{\max}}. \quad (29)$$

In the course of the auxiliary calculations the value for the tip radii will be obtained automatically [$\sqrt{p + r_{a_2}^2} = r_{f_2}$ in (8b) or (17b). etc.]. This enables the determination, without special effort, of the difference between two consecutive r_f values; i.e. $\Delta_{k, k+1}$. Let additional v steps be necessary to attain the error threshold H . It follows from (24) that

$$v < \frac{\log \frac{H}{\Delta_{k, k+1}} (1 + M)}{\log M} \quad (30)$$

where M is the maximum within the interval $k, k + 1$.

Assuming a very little δ difference of r_f is reached, then M_{\max} has no longer any significance since the M values within the interval cannot diverge considerably. By rewriting (24) we get:

$$H < \delta \frac{M}{1 + M}. \quad (31)$$

All these considerations are valid only for pure iteration; and so if, for instance, halving is done (31) will be applicable solely for pairs of values resulting from iteration.

It remains to be decided what a Δ error must be attained in reference to the effective iterated variable, in order to achieve the difference in specific

slidings as $\Delta\eta$. If in the given interval a median value for specific sliding is known and the interval is sufficiently narrow, $\Delta\eta$ for the various variables will fairly approximate according to the Lagrange-theorem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\eta + 1) \left[\frac{1}{u}(\eta + 1) + 1 \right] \frac{\Delta n}{n}, \\ \frac{1}{2}(\eta + 1) [u(\eta + 1) + 1] \frac{\Delta p}{p}, \\ \left[\frac{1}{u} + (\eta + 1) \right] \frac{\Delta x}{x}, \\ [u + (\eta + 1)] \frac{\Delta y}{y}. \end{aligned} \quad (32)$$

Here n, p, x, y are median values for the iterated variables in the given interval.

All these considerations are applicable "mutatis mutandis" for helical gears, bevel gears, etc. (similarly to [11]).

VI. Examples

1.

Helical gears are to be computed [for case a)]. From preliminary calculations [12]:

$$\begin{aligned} h_k &= 1,998581; & \alpha_g &= 20^\circ 57' 51,89''; \\ a &= 93,333333; & \beta &= 6^\circ 39' 50'' \text{ (helix angle);} \\ r_{g1} &= 31,279279; & r_{g2} &= 62,054054; & (m &= 6 \text{ mm}); \\ r_{f10} &= 32,278570; & r_{f20} &= 63,053345; & z_1 &= 62; & z_2 &= 123; \\ r_{a1} &= 29,305566; & r_{a2} &= 58,137833; & u &= 1,984. \end{aligned}$$

(The first iterated value that belongs to $q_2 = 0,5$ is designed by suffix 0.)

All data are specific for the module. This is primarily important in the construction of tables, nevertheless it is recommendable in carrying out individual calculations, because it enables the use to a greater advantage of the extent to which the common tools of computation (sliding rule, computer, table of logarithms, etc.) are accurate (the module-specific values are lower than the non-specific values). As the (standard) modules are simple numbers, multiplication is easily done.

The constants in the iteration-formulas must be determined with the highest possible accuracy. In the present case [according to (8)]:

$$n = p - 190,6638 \sqrt{p + 3380,0078} + 11609,388, \quad (33)$$

$$p = \frac{15,49783}{[(1/\sqrt{n}) + 0,089966]^2}. \quad (34)$$

Initial values: $n_0 = 183,11$,
 $p_0 = 595,72$.

If both unknowns are calculated to a great accuracy they may be used to control the first formula, since the latter reflects geometrical correspondence; and n_0, p_0 are geometrically related values.

Let us calculate the approximate value for M (with a sliding rule) in respect to the starting point. The formula will be (9):

$$M = \frac{r_{f_1}}{r_{f_2}} \left(\frac{\varrho_{f_2}}{\varrho_{f_1}} \right)^3 \frac{1}{u^2}.$$

As the defining formulas reveal the quotient of the radii of curvature it is $(\varrho_{f_2}/\varrho_{f_1})^3 = (p_0/n_0)^{3/2}$. Therefore $M = 0,764$, which means that halving should be done.

Steps. The value corresponding to $p_0 = 595,72$ is $n_0 = 183,11$ according to (33). This yields in (34) $p_1 = 576,87$. The halved value $p_1^* = (p_0 + p_1)/2 \approx 586,3$ etc. Having summed up the individual steps and denoted the values related to each other by virtue of the equations we obtain:

$$\begin{array}{r} r_{f_1} + r_{f_2} = a + h_k \\ 595,72 - 183,11 - 576,87, \\ 586,3 - 187,928 - 583,711 \approx 583,7, \\ 585 \quad \underbrace{-188,604 - 584,57852}_{\eta_1 = \eta_2} \end{array}$$

It is now obvious that in this manner (calculating both initial values) we not only have a means of control but have also completed part of the first step of iteration (595,72—183,11) and are in a position to halve after the next step (183,11—576,87).

The disadvantage this leaves Equ. (34) as the last step, wherefore the corresponding second tip circle must be calculated from the geometrical Equ. (this is a subtraction). It was not possible for us to stop at 186,604, because in that case there would not be two successive iterated values. This of course is obtained only in case of halving.

Another possible procedure is to calculate n_0 only, but this would mean that halving cannot be done except after two part-steps (for only then can iterated n value be again obtained) and we will have no means of control. On the other hand the last Equ. will be the (33).

The first steps can be calculated with a sliding rule, but as soon as its accuracy is found to be less than is required for iteration we must look for a more exact method. Thus, for instance, when calculation with the rule yields a new value that falls between the two preceding values, or when two successive values happen to coincide "precisely".

The last step should in all cases be calculated to a great accuracy since the data it yields afford at the same time geometrical dimensioning.

In the course of calculations carried out in this manner the values for the tip radii are obtained, as it were, automatically. In the present case only the value for r_{f_2} because, since the final value has been derived from the equation for sliding, the geometrically corresponding tip radius must be calculated separately.

$$\begin{array}{l} r_{f_1} = 32,366937 \text{ (higher than the right value),} \\ r_{f_2} = 62,964977 \text{ (smaller than the right value),} \\ \eta_2 = 0,456847. \end{array}$$

The values for specific slidings at the end points of the path of contact are: 0,442 and 0,443. Difference: 0,001, mean value 0,4425. The error is 0,226%.

We are now in the position to determine the error of the tip radii.

In the equalized state $M = 0,712$. For safety's sake let us take 0,72. The value for the tip radius obtained at the penultimate step is $r_{f_2} = 62,968333$ presenting itself as a "by-product" of iteration. $\delta = 0,003356$. It is known that (31)

$$H < \frac{\delta M}{1 + M} = 0,001403.$$

Multiplied by the module: 0,008418 mm (= 8,418 μ m). That should be taken into consideration when specifying tolerance limits in production.

2.

a) Let us calculate spur gears for the case a). The module-specific data are:

$$\begin{aligned} h_k &= 1,781144; & \alpha_g &= 24^\circ 40' 18''; & (m &= 10 \text{ mm}); \\ a &= 45,500000; & \beta &= 0; & z_1 &= 17; \\ r_{g_1} &= 8,7897715; & r_{g_2} &= 36,7102285; & z_2 &= 71; \\ r_{f_{10}} &= 9,680344; & r_{f_{20}} &= 37,600800; & u &= 4,17647; \\ r_{a_1} &= 7,987502; & r_{a_2} &= 33,359492. \end{aligned}$$

Formulas of iteration are:

$$n = p - 94,562288 \sqrt{p + 1112,8557} + 3284,56223 ;$$

$$p = \frac{304,2549}{[(1/\sqrt{n}) + 0,8657578]^2} ;$$

$$n_0 = 29,9088653;$$

$$p_0 = 300,9815;$$

$$M \approx 0,471.$$

Here we calculate without halving. Calculation with sliding rule:

$$\begin{aligned} &301 - 29,9 - \\ &- 277,5 - 35,1 - \\ &- 285 - 35 \text{ (accuracy of the rule} \\ &\quad \text{no longer sufficient)} \\ &\underbrace{r_{f_1} + r_{f_2} = a + h_k}_{\eta_1 = \eta_2} \end{aligned}$$

High accuracy computation:

$$\begin{aligned} &35 - 284,141308 - 34,29948 - \\ &- 283,20113 - 34,55256 - \\ &- 283,54344 \\ &\underbrace{r_{f_1} + r_{f_2} = a + h_k}_{\eta_1 = \eta_2} \end{aligned}$$

Resulting tip radii: $r_{f_1} = 9,812726$ (less than it should be)

$$r_{f_2} = 37,368418 \text{ (more); } q_2 = 0,369.$$

Specific slidings: 0,872 and 0,869. Mean: 0,8705. Difference: 0,003 i.e. 0,344%.

In the equalized state $M = 0,3552 \approx 0,36$. r_{f_2} of the previous step is 37,363825. $\delta = 0,004593$. As it has been shown the error is $< 0,001214$; multiplied by the module 0,01214 mm (12,14 μm).

b) We now proceed to solve the problem under a) for the change points. The basic data are to be the same as before

$$t_a = \pi \cos \alpha_0 = 2,9521312$$

Formulas of iteration:

$$x = \frac{1}{17,442903/y - 0,8657578} ;$$

$$y = \sqrt{(47,281144 - \sqrt{(x + 2,9521312)^2 + 63,80019})^2 - 1112,8557 - 2,9521312} ;$$

$$x_0 = 2,5167686;$$

$$y_0 = 14,393795;$$

$$M = u^2 \frac{r_{f_2}}{r_{f_1}} \frac{\varrho_{f_1}}{\varrho_{f_2}} \left(\frac{\varrho_{f_1} - t_a}{\varrho_{f_2} - t_a} \right)^2 \approx 0,654 \text{ (II).}$$

With a sliding rule: 2,52-14,39-2,89
 2,65-14,26-2,80
 2,73- accuracy of the rule is
 no longer sufficient

$$\underbrace{r_{f_1} + r_{f_2}}_{\eta_1 = \eta_2} = a + h_k$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{r_{f_1} + r_{f_2}}_{\eta_1 = \eta_2} = a + h_k \\ 2,73 \quad -14,128176 \quad -2,690965 \\ 2,7105 \quad -14,156074 \quad -2,7290774 \end{array}$$

Thus, we have here calculated the values for specific slidings to check our iteration, but found that equalization was unsatisfactory. To do the checking we had to calculate the value geometrically corresponding to the last iterative value in order to arrive at the specific slidings. (The unknowns are radii of curvature of the involute!) The geometrically corresponding value is 14,13157. Not to have wasted this step, we must now proceed halving this unknown:

$$\frac{14,156074 + 14,13157}{2} \approx 14,143.$$

The steps:

$$\begin{array}{r} 14,13157 \\ 14,143 - 2,720595 - 14,141980 \\ \underbrace{r_{f_1} + r_{f_2}}_{\eta_1 = \eta_2} = a + h_k \end{array}$$

Resulting tip radii:

$$\begin{array}{l} r_{f_1} = 9,796938, \\ r_{f_2} = 37,484206, \\ q_2 \approx 0,434. \end{array}$$

Specific slidings: 0,4321 and 0,4325; mean 0,4323, difference 0,0004, i.e. 0,0926%.

In the equalized state $M = 0,7947 \approx 0,8$. The penultimate $r_{f_2} = 37,484638$. The difference $\delta = 0,000432$, which multiplied by $M/(1+M)$ is 0,000192. Multiplied by the module is 0,00192 mm = 1,92 μ m:

$$\varepsilon = \frac{x + y - a \sin \alpha g}{t_a} + 2C = 1,27848975$$

(since $C = 1$).

c) Let us now solve the same problem in the case of eased tips, for the end points of tip relief; $\varkappa = 1$.

In b) $\varkappa = 2 - \varepsilon = 0,72151025$. Calculating $d\varepsilon/d\varkappa$ by the formula given above, we obtain 0,0221. $\Delta\varkappa = 1 - 0,72151025 = 0,27848975$. $\Delta\varepsilon = (d\varepsilon/d\varkappa) \Delta\varkappa = -0,00615462$; the new $\varepsilon = 1,27233513$; $C = (\varepsilon + \varkappa)/2 = 1,13616756$; $Ct_a = 3,3541161$.

The formulas of iteration are the same as in b), but Ct_a must be written instead of t_a .

We depart from a state equalized at the change points; here we obtain:

$$M = u^2 \frac{r_{f_2}}{r_{f_1}} \frac{\varrho_{f_1}}{\varrho_{f_2}} \left(\frac{\varrho_{f_1} - Ct_a}{\varrho_{f_2} - Ct_a} \right)^2 = 0,487.$$

This is less than 0,5, but not by much. We now apply halving, since in this case M is always a growing value.

Initial value: $y = 14,14298$. With a sliding rule:

$$\begin{array}{r} 14,14-2,733-13,16 \\ 13,65-2,422-13,60 \\ \hline \eta_1 = \eta_2 \\ r_{f_1} + r_{f_2} = a + h_k \end{array}$$

Beyond this the accuracy of the rule is insufficient.

Let us start the accurate iteration with the halved value which is 13,625:

$$13,625-2,412805-13,619579$$

Resulting tip radii:

$$\begin{array}{l} r_{f_1} = 9,851780; \\ r_{f_2} = 37,429364; \\ q_2 \approx 0,398. \end{array}$$

Specific slidings: 0,647 and 0,645; mean 0,646, difference: 0,002 ($\approx 0,31\%$); $M = 0,7068 \approx 0,71$; the penultimate $r_{f_2} = 37,431888$; $\delta = 0,002524$. The error $< 0,001047$, i.e. $0,01047 \text{ mm} = 10,47 \mu\text{m}$.

For this toothing

$$\varepsilon = \frac{x + y - a \sin \alpha_g}{t_a} + 2C = 1,26962727.$$

The first term of this expression in fact represents the actual \varkappa , which affords the accurate equalization. This is 1,00270785; intended was a $\varkappa = 1$; the difference is 0,27%, which is fairly satisfying.

If $\varkappa = 1,0$ is realized instead of the value obtained for \varkappa this will mean that for the toothing in this example $C = (\varepsilon + \varkappa)/2 = 1,13481363$. If the radii of curvature at the actual end points of tip relief are calculated with this C , the specific slidings obtainable with these radii will be 0,646 and 0,642; mean: 0,644, giving a fairly satisfactory difference of not more than 0,004 ($\approx 0,622\%$). From this it follows that the error obtained from the iteration can be arbitrarily applied to the sliding or the length of the tip relief.

The case of $\varkappa = 1$ is an extreme case. It is at equal distance from the calculation performed for the change points ($\varkappa = 2 - \varepsilon$) and the end points ($\varkappa = \varepsilon$). In practice any other case can only come to fall nearer to these values, which means that approximation is even more satisfactory. This in turn shows that in practice secondary iteration can always be avoided. It may of course happen that \varkappa is near to one of the limit values. But then it may occur that the slidings of the gear manufactured on the basis of the nearer limit be "deteriorate" but slightly, when work of extra iteration may be saved. The advantages of the G-B system will reveal themselves as long as the difference in slidings is less than 5% (2,5% from the mean value) [13].

Convergence is generally less satisfactory in cases *a*) and *b*) than in case *c*). The analysis of the M formulas renders this probable, though we failed to acquire definite proof. M may be approximately 1, or even bigger than 1, a possibility unknown in advance, since what we calculate is M_{\min} . However, in such a case we will always perform halving, which when $M < 3$ will "put right" the iteration. This means that we save the inverse rearrangement of the set of formulas.

REFERENCES

1. PATTANTYUS, G.: Gépész- és villamosmérnökök kézikönyve (Handbook for mechanical and electrical engineers), III. Műszaki Kiadó, Budapest 1961; 575.
2. VÖRÖS IMRE: Gépelemek III, Fogaskerekek (Elements of machines III, Gears) 222.
3. RUNCE—KÖNIG: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Springer, Berlin 1924; 155—157.
4. ROTHE, R.: Matematika gépészmérnökök számára (Mathematics for Mechanical Engineers). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1960.
5. BOTKA, I.: Profilkiválasztási táblázat (Tables for the Choice of Profiles) 2nd edition. Publ. by the author, Budapest 1961. [For the cases *b*) and *c*) according to the information of Imre Botka.]

6. BOTKA, I.: Toothing system Ganz—Botka from the U. S. A. patent specification, No. 2943509/1960. Toothing system Ganz—Botka from the Swiss patent specification, No. 362274/1962.
7. ERNEY, GY.: Egyenesfogú evolvensfogazatú hengeres kerekek foglenyesésének számítása és ellenőrzése (Calculation and Gauging of Tip Relief for Straight Involute Cylindric Gears). *MTA VI. Osztály Közleményei* **30** (1962), 188.
8. VÖRÖS, I.: Berechnung des Eingriffwinkels der Evolventenprofilrücknahme bei gradverzahnten Zahnradern. *Periodica Polytechnica* **7** (1963), 13.
9. LIPKA, I.: Fogaskerékpár profiletolásos korrekciójának kiszámítása iterációval (Calculation by Iteration of the Correction with Profile Displacement of a Pair of Gears). *Gép* (1953), 474.
10. LIPKA, I.: Csúszások kiegyenlítésének problémája általános fogazásnál (The Problem of the Compensation of Sliding in General Toothing). *Gép* (1952), 553.
11. LIPKA, I.: Csúszáskiegyenlítés problémájának analitikus megoldása ferdefogazatú homlok-kerekekre (Analytic Solution of the Problem of Slide Compensation of Helical Front Gears). *Gép* (1954), 137.
12. TERPLÁN—LÉVAI: Gépelemek IV, Fogaskerekek (Elements of Machines IV, Gears). Felsőoktatási jegyzetellátó 1957 (Manuscript).
13. Ganz—Botka Toothing System. Hungarian patent specification, No. 143169/1954.

BERECHNUNG DER ZAHNKORREKTION MIT ITERATION

F. KOLONITS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit untersucht im allgemeinen das Iterationsverfahren und untersucht die Fragen der Konvergenz und der Fehlerabschätzung. Die Ergebnisse werden zur sehr guten näherungsweise Bestimmung der charakteristischen Größen der Ganz—Botka Verzahnung (r_{f_1} , r_{f_2} , q_2 usw.) und zur Fehlerabschätzung verwendet. Das Verfahren hat der Verfasser für verschiedene Fälle ausgearbeitet, in Abhängigkeit davon, wo der Ausgleich entsprechend der Ganz—Botka Verzahnung gewünscht wird: an den Endpunkten des Eingriffs, an den Punkten des Einzeleingriffs oder an den Endpunkten der eventuellen Profilirücknahme.

CALCUL DE LA CORRECTION DES DENTS PAR ITÉRATION

F. KOLONITS

RÉSUMÉ

L'étude analyse la méthode des itérations en général et examine les questions de la convergence et de l'estimation des erreurs. Les résultats sont appliquées à une très bonne approximation des caractéristiques des dentures Ganz—Botka (r_{f_1} , r_{f_2} , q_2 , etc. . .) et à l'évaluation des erreurs. La méthode a été étudiée par l'auteur pour différents cas, suivant l'endroit où l'on désire effectuer la compensation correspondant à la denture Ganz—Botka: aux points d'extrémité de l'engrènement, aux points d'engrènement individuel ou aux extrémités du rognage éventuel.

ИТЕРАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ КОРРЕКЦИИ ЗУБЬЕВ

Ф. КОЛОНИЧ

РЕЗЮМЕ

Проводится анализ итерационного метода для общего случая; рассматриваются вопросы конвергенции и оценки погрешностей. Результаты используются для определения с хорошим приближением характерных данных зубчатого венца Ganz—Botka (r_{f1} , r_{f2} , q_2 и т. д.), а также для оценки возникающих погрешностей. Автор разработал метод применительно к различным случаям в зависимости от того, где желательно выполнить уравнивание, соответствующее зубьям Ganz—Botka; уравнивание может применяться в конечных точках зацепления, в точках отдельного зацепления или в точках возможного среза.

DESIGN TRANSFER DEVICE FOR DRAWING AXONOMETRIC IMAGES

B. SZÓKE

[Manuscript received April 4, 1964]

On the principles of three-dimensional geometry a design transfer is presented, the signalling tip of which is moved along a horizontal section of the plan-view, with the level-rule moving on the respective level height of the side-view, and whereby the drawing tip always moves on the image-points corresponding to the axonometry chosen optionally. The constructive solution is more simple for the case when the projecting line is perpendicular to the line of intersection of the image plane with the horizontal plane. With an axonograph of this sort, that is most suitable to approach the effect of a photo, the number of theoretically probable variations is twice infinite, because the inclination angle to the horizontal of both the image plane and the projecting line is optional.

Devices by means of which axonometric images can be traced from true to scale projections, are mostly suitable but for one single sort of axonometry, e.g. for the isometric orthogonal one. So is the special device the theoretic principles of which are described by the author [1]. This device operates in tracing images with projecting lines perpendicular to the plane of projection, whereby the angle between the axonometric plane of projection and the horizontal plane is optional.

Our further investigation will be extended to a case with projective lines although lying in a vertical plane perpendicular to the plane of projection but the lines themselves being no longer perpendicular to the same plane — and also to the more general case with both the plane of projection and the projecting lines being in a quite general position.

As can be seen in Fig. 1, the point P of the object lies in the level-plane N ; R is the plane of the drawing board (identical with the axonometric image plane); this latter includes the angle φ with the horizontal plane, with which its line of intersection is v . The projecting line e , passing through point P , includes the angle α with the level-plane N ; the vertical plane laid through the straight line e includes the angle β with the vertical plane passing through point P and being perpendicular to the straight line of intersection v .

The drawing plane R is pierced at point T by the vertical line f passing through point P , and by the projecting line e passing through point P , it is pierced at the projection point P' .

The projection of the vertical f is f' , intersecting the line v at point G . The projection f' includes the angle λ with the side-plane PTV ; in this side-

plane, the projection $PP' = \bar{e}$ of the line e includes the angle $\bar{\alpha}$ with the horizontal PV in the side-plane.

From the rectangular triangles in Fig. 1, the angles λ and $\bar{\alpha}$ can be determined. With the assumption that the distance of point P' from the plane N

$$P'F = 1$$

we obtain for the distance of point P' from line v :

$$OP' = \frac{1}{\sin \varphi},$$

$$OF = \cot \varphi,$$

$$OG = OF \tan \beta = \cot \varphi \cdot \tan \beta$$

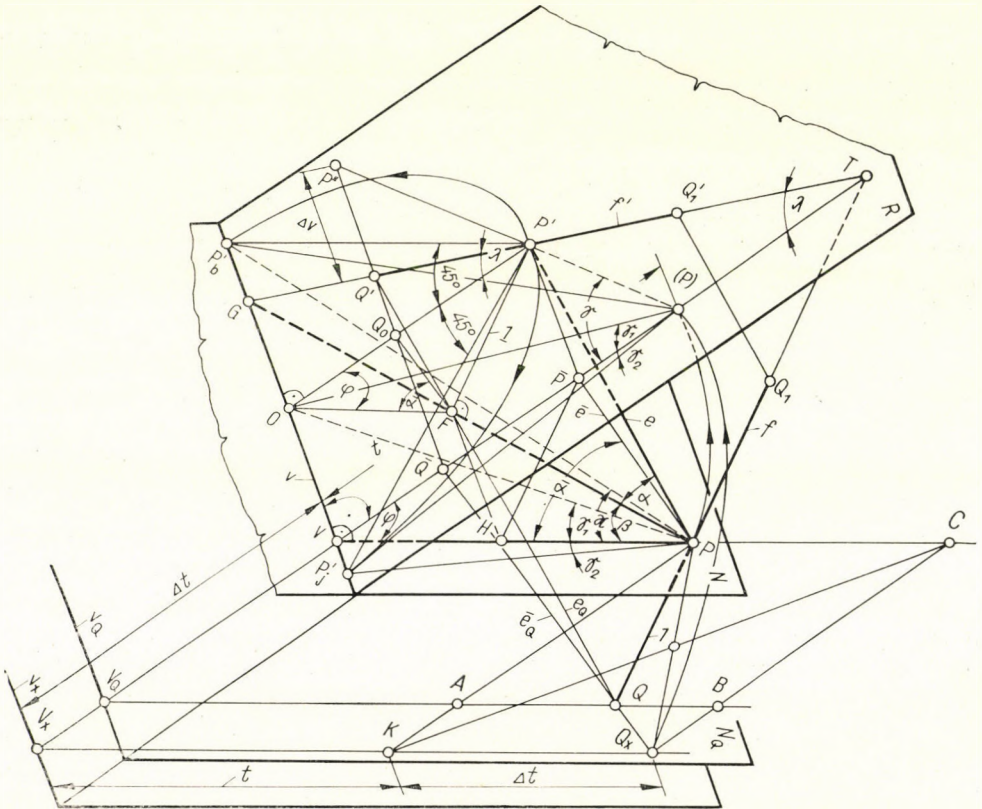


Fig. 1. The forming of an axonometric image in general position

Denotations: N level-plane; R drawing plane; e projecting line; φ drawing plane's inclination to the level-plane; α projecting line's inclination to the horizontal; β angle included by the PTV profile plane and the normal projection of the projecting line onto the level-plane.

$$\tan \lambda = \frac{OG}{OP'} = \cot \varphi \cdot \tan \beta \cdot \sin \varphi,$$

viz.

$$\tan \lambda = \cos \varphi \cdot \tan \beta. \quad (1)$$

For angle $\bar{\alpha}$:

$$PF = \cot \alpha,$$

$$PH = PF \cos \beta = \cot \alpha \cdot \cos \beta$$

and

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{\bar{PH}}{PH} = \frac{1}{\cot \alpha \cdot \cos \beta},$$

viz.

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{\tan \alpha}{\cos \beta}. \quad (2)$$

In the following, we will set up between the object-point P and its projection-point P' , a special relation that can be suitably used for the tracing device. Taking the point O (i.e. the perpendicular projection of the projection-point P' onto line v) as a revolving centre, and revolving the point P' (within the drawing plane R) to the right-hand and left-hand, we obtain on the line v the new points P'_j and P'_b by tracing the connecting straights from P'_j , from P'_b and from O to P , we obtain the angles:

$$\sphericalangle OPV = \gamma_1,$$

$$\sphericalangle VPP'_j = \gamma_2$$

and

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \sphericalangle OPP'_j.$$

Angles γ_1 and γ_2 can be expressed by using the given angles α , β and φ as follows:

$$P'F = 1, OF = \cot \varphi; OP' = OP'_j = 1/\sin \varphi, PF = \cot \alpha;$$

$$OV = FH = PF \sin \beta = \sin \beta \cdot \cot \alpha,$$

$$FG = \frac{OF}{\cos \beta} = \frac{\cot \varphi}{\cos \beta},$$

$$VP = VH + HP = OF + HP = \cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha;$$

and further on

$$\tan \gamma_1 = \frac{OV}{VP} = \frac{\sin \beta \cdot \cot \alpha}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha} = \frac{\sin \beta \cdot \sin \varphi}{\tan \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \sin \varphi}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tan \gamma_2 &= \frac{VP'_j}{VP} = \frac{OP'_j - OV}{VP} = \frac{\frac{1}{\sin \varphi} - \sin \beta \cdot \cot \alpha}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha} = \\ &= \frac{1/\sin \varphi}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha} - \frac{\sin \beta \cdot \cot \alpha}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha} = A - \tan \gamma_1 \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$A = \frac{1/\sin \varphi}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha}$$

and

$$\tan \gamma_1 + \tan \gamma_2 = \frac{OP'_j}{VP} = \frac{1/\sin \varphi}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha}. \quad (5)$$

Denoting $\sphericalangle VPP'_b = \alpha$, we obtain:

$$\tan \alpha = \frac{VP'_b}{VP} = \frac{OV + OP'}{VP} = \frac{\sin \alpha \cdot \cot \alpha + 1/\sin \varphi}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha},$$

and according to (3) and (4):

$$\tan \alpha = 2 \tan \gamma_1 + \tan \gamma_2. \quad (6)$$

Around v as a revolving axis, the level-plane N shall be revolved into the drawing plane R , and thus the point P comes onto the point (P) in the drawing sheet, as a plan-view point of the level line drawn onto the drawing plane R .

As is seen in Fig. 2, with the knowledge of angles γ_1 and γ_2 , from the point (P) revolved-in not only the angle legs $(P)O$ and $(P)P'_j$ but — by omitting $(P)O$ — also the leg $(P)P'_b$ can be traced directly since (according to Fig. 1) the straight portions $OP'_j = OP'_b$.

As is observable in Fig. 2, the projection point P' is the vertex of the right-angle isosceles triangle, the legs of which pass through the points P'_j and P'_b .

When the curve $(P) \dots (P_1)$, in the drawing plane, is the revolved reproduction of an optional curve $P \dots P_1$ of the level-plane N , and the signalling tip is led along this curve in such a way that the pair of signalling legs $j_1 - j_2$ should always move in a parallel position to itself, it is possible

to obtain by means of a drawing tip a curve as the axonometric projection of the original curve touched by the signalling tip that is represented by the points of intersection $P' \dots P'_1$ of the rectangular straight lines i_1 and i_2 which fit onto the points of intersection P'_1 and P'_b of the two signalling angle-legs with the straight line v .

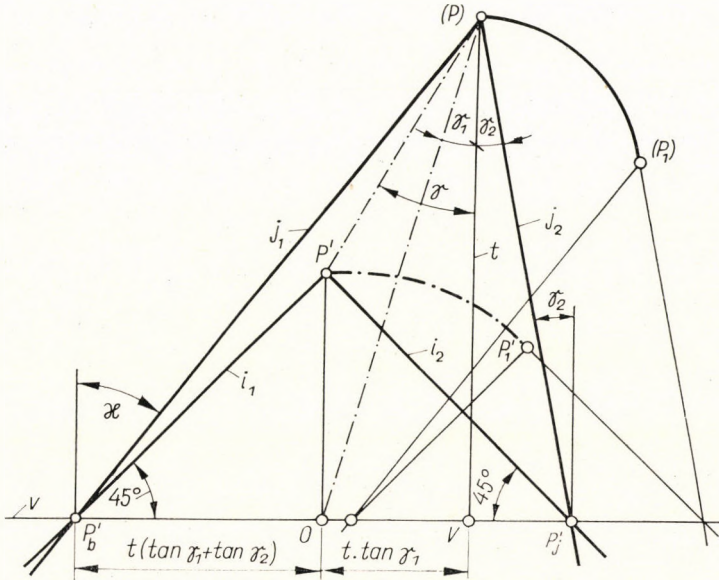


Fig. 2. Level-plane revolved into the drawing plane; plan-view: $(P) \dots (P_1)$, axonometric image: $(P' \dots P'_1)$

Yet on the drawing plane R , the point (P) represents the plan-view revolved into the drawing plane of all the points that are placed along the vertical straight passing through the spatial point P (Fig. 3). According to Fig. 1, the projection \bar{Q} in the side-plane of image Q' of point Q , which latter is at the unit-distance of point P , can be found, when we would start — in analogy to the level-plane N — from the level-plane N_Q , and at the same time, the plan-view of the drawing plane would be shifted at a distance $(P)(Q)$. Yet this shifting can be omitted when bearing in mind, that point \bar{Q} represents not only a projection at angle $\bar{\alpha}$ of the unique spatial point Q , but it is the projection of all the points that range along the projecting line \bar{e}_Q . We have to find, along the projecting line \bar{e}_Q a special point Q_x , the level-plane of which has with the drawing plane a special intersection straight line v_x , around which, as an axis, the revolved point Q_x coincides exactly with point (P) .

This condition is fulfilled when the shifting length of the straight line v :

$$\Delta t = VV_x = PK$$

equals the displacement KQ_x of the point Q_x (located on the line e_Q) from the drawing plane in relation to P as measured in its own level-plane; viz: $PK = KQ_x$.

In other words, the quadrangle PKQ_xC equals a rhombus, in which the angle

$$\sphericalangle KPC = 180^\circ - \varphi$$

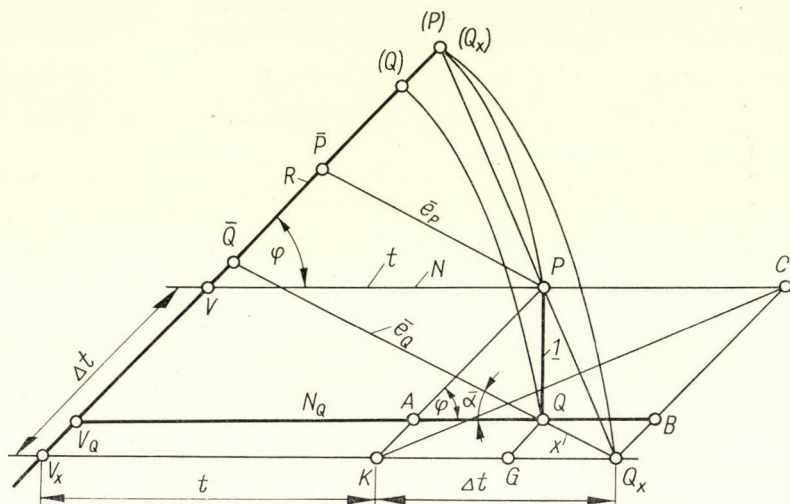


Fig. 3. Geometric relations for the determination of the distance Δt at which the guide-rail is shifted when the level-plane is changed (The image of point Q is also the image of point Q_x that represents the vertex of the rhombus PKQ_xC)

is halved by the diagonal PQ_x , and the intersection point of this diagonal with the line \bar{e}_Q is the point Q_x that has to be found.

Now, with a level difference equalling 1, the straight v shall be shifted as far as Δt ; with the denotations on Fig. 3, Δt can be completed as follows:

In compliance with the above statements, our condition is:

$$V_x(P) = V_x Q_x,$$

or

$$(P)V + PA + BQ_x = V_Q A + AQ + GQ_x.$$

This can be simplified by crossing out

$$(P)V = V_Q A = t,$$

and we obtain the equation

$$PA + BQ_x = AQ + GQ_x$$

as an independent statement.

With a view to the rectangular triangle QPA :

$$PA = \frac{1}{\sin \varphi}$$

and

$$AQ = \frac{1}{\tan \varphi}.$$

Taking $QQ_x = x$, and with a view to the triangle Q_xBQ , we have

$$BQ_x = \frac{x \sin \bar{\alpha}}{\sin \varphi}$$

and

$$QB = GQ_x = \frac{x \sin (\bar{\alpha} + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

By substituting these values into the above obtained equations we have:

$$\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{x \sin \bar{\alpha}}{\sin \varphi} = \frac{1}{\tan \varphi} + \frac{x \sin (\bar{\alpha} + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Multiplied by $\sin \varphi$ and factoring out x , we obtain:

$$1 - \cos \varphi = x [\sin (\bar{\alpha} + \varphi) - \sin \bar{\alpha}],$$

and in explicit form:

$$x = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin (\bar{\alpha} + \varphi) - \sin \bar{\alpha}},$$

and by using this value of x :

$$\begin{aligned} \Delta t = PA + BQ_x &= \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{x \sin \bar{\alpha}}{\sin \varphi} = \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1 - \cos \varphi}{\sin (\bar{\alpha} + \varphi) - \sin \bar{\alpha}} \cdot \frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin \varphi}, \end{aligned}$$

viz.

$$\Delta t = \frac{1}{\sin \varphi} \left[1 + \frac{(1 - \cos \varphi) \sin \bar{\alpha}}{\sin (\bar{\alpha} + \varphi) - \sin \bar{\alpha}} \right].$$

Further on,

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\sin (\bar{\alpha} + \varphi) - \sin \bar{\alpha} + (1 - \cos \varphi) \sin \bar{\alpha}}{\sin (\bar{\alpha} + \varphi) - \sin \bar{\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\sin \bar{\alpha} \cdot \cos \varphi + \cos \bar{\alpha} \cdot \sin \varphi - \sin \bar{\alpha} - \sin \bar{\alpha} \cdot \cos \varphi + \sin \bar{\alpha}}{\sin (\bar{\alpha} + \varphi) - \sin \bar{\alpha}} \end{aligned}$$

and making use of the precedings

$$OV = \sin \beta \cdot \cot \alpha,$$

$$(P)V = PV = \cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha$$

and

$$\bar{P}V = OP' = \frac{1}{\sin \varphi},$$

wherefore

$$\tan \gamma = \frac{\sin \beta \cdot \cot \alpha}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha - (1/\sin \varphi)}$$

viz.

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \frac{\sin \beta \cdot \cot \alpha \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha \cdot \sin \varphi - 1} = \\ &= \frac{\sin \beta \cdot \sin \varphi}{\tan \alpha (\cos \varphi - 1) + \cos \beta \cdot \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (9)$$

As can be seen in Fig. 1 the axonometric projection f' of the straight line f forms the angle λ with the perpendicular to the drawing plane, which can be expressed, according to Equ. (1):

$$\tan \lambda = \cos \varphi \cdot \tan \beta.$$

When the purpose should be achieved that by shifting the guiding rail at the distance Δt the drawing tip should reach the wanted point Q' instead of P'' , so we are compelled to shift, at the same time, the signalling tip (P) at a distance $P''Q'$ according to Fig. 1; this can be performed by shifting the plan-view in a direction parallel to v at the same distance.

The shifting of the signalling tip (P) is

$$\Delta_v = P''Q' = P''Q_0 - Q'Q_0 = P'Q_0 (\tan \gamma - \tan \lambda),$$

when the shifting corresponds to a unit-difference between the two levels, respectively to a shifting Δt of the guide rail.

The distance $P'Q_0$ can be determined from the triangle $P'Q_0F$ in Fig. 1:

$$\sphericalangle Q_0FP' = 90^\circ - \bar{\alpha};$$

this equation holds true because the point F lies on the line e_Q , and $EP' = = QP = 1$, whereby the angle FQ_0P' being the external angle of the adjacent triangle OFQ_0 :

$$\sphericalangle FQ_0P' = \bar{\alpha} + \varphi,$$

wherefrom:

$$P'Q_0 : l = \sin(90^\circ - \bar{\alpha}) : \sin(\bar{\alpha} + \varphi)$$

viz.

$$P'Q_0 = \frac{\cos \bar{\alpha}}{\sin(\bar{\alpha} + \varphi)} = \frac{\cos \bar{\alpha}}{\sin \bar{\alpha} \cdot \cos \varphi + \cos \bar{\alpha} \cdot \sin \varphi}$$

and thus

$$P'Q_0 = \frac{1}{\tan \bar{\alpha} \cdot \cos \varphi + \sin \varphi}.$$

By substituting $\tan \bar{\alpha}$ from equation (2):

$$P'Q_0 = \frac{\cos \beta}{\tan \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \beta}$$

by substituting this value into the above expression of Δv :

$$\Delta v = \frac{(\tan \gamma - \tan \lambda) \cos \beta}{\tan \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \beta}. \quad (10)$$

When in connection with a shifting of the guide rail v at a distance Δt according to equation (8); the plan-view is shifted in the direction parallel to the straight v by means of an inclined guide bar at a distance Δv according to equation (10), then the angle of slope λ_0 of this guide-bar is determined:

$$\tan \lambda_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(\tan \gamma - \tan \lambda)[\tan \alpha (\cos \varphi - 1) + \sin \varphi \cdot \cos \beta]}{\tan \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \beta}. \quad (11)$$

When $\beta = 0$, we can state according to Equ. (9) that $\tan \gamma = 0$; now, according to Equ. (1) $\tan \lambda = 0$, and it follows from Equ. (11) that $\tan \lambda_0 = 0$, viz. the rule that moves the drawing, has no slope, the drawing stays in its place.

From what has been explained above, we are in a position to set up the mechanical scheme of the axonograph-device (Fig. 5).

In order to explain Fig. 5, it is only necessary to show the true relation between the front-view (or side-view) of the drawing to the shifting distance Δt of the guide-rail v , and to the shifting Δv of the plan-view, respectively.

The precondition is to bring the level-rule n into a position forming the angle φ_0 in such a way that while the shifting in height is performed in the side-view at a unit level-distance, at the same time, the rule should be shifted at the distance Δt according to Equ. (8). This condition is expressed by:

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{\Delta}$$

viz.

$$\sin \varphi_0 = \frac{\tan \alpha (\cos \varphi - 1) + \sin \varphi \cdot \cos \beta}{\cos \beta} \quad (12)$$

The mechanism is simplified when $\beta = 0$, and thus also $\lambda_0 = 0$, i.e. the shifting of the plan-view is no longer necessary. In this case according to Equ. (9): $\gamma = 0$, and according to Fig. 2:

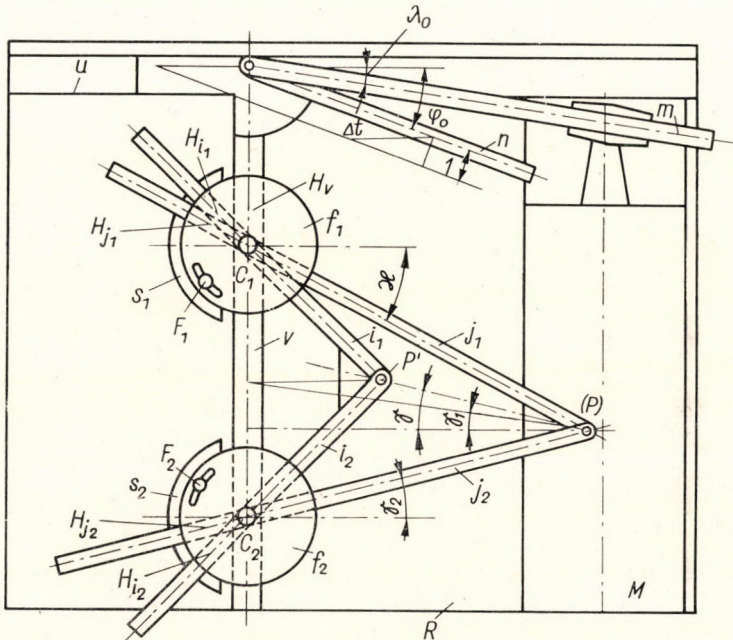


Fig. 5. Geometric principles of working conditions of the device

Denotations: v guide-rail; (P) signalling tip of the pair of signalling legs j_1, j_2 ; P' drawing tip of the drawing legs i_1, i_2 ; n level-rule; m moving brace of the drawing.

$(P)O \perp v$, wherefrom both the signalling legs j_1 and j_2 , and the writing legs i_1, i_2 are symmetric to the centre line. Consequently, under the simultaneous effect either of the pulling or pushing forces acting along the guide v on the writing legs i_1, i_2 that are to be considered as in rigid position to each other, the force-transmission proves to result to the best efficiency as on a slope, since the angle of friction is quite negligible with a roller-type slide guiding mechanism. When $\beta = 0$, then

$$\sin \varphi_0 = \tan \alpha (\cos \varphi - 1) + \sin \varphi \quad (12a)$$

With the additional condition that the projecting line e is perpendicular to the drawing plane R , so it is:

$$\alpha = 90^\circ - \varphi, \quad \tan \alpha = \cot \varphi,$$

or

$$\sin \varphi_0 = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} (\cos \varphi - 1) + \sin \varphi = \frac{\cos^2 \varphi - \cos \varphi + \sin^2 \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Now

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

and

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

viz.

$$\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} = \tan \frac{\varphi}{2}$$

and

$$\sin \varphi_0 = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (12b)$$

The theoretic scheme according to Fig. 5 serves only to prove the correct functioning. For a practical realization it must be borne in mind that the drawing plane can only be well used when the slides s_1, s_2 do not interfere with each other.

Since both, the pair of signalling legs j_1, j_2 and the other one of writing legs i_1, i_2 carry out a translational motion, it is not necessary to place the signalling and the writing tip into the intersection point of the respective legs: they can be placed on any rigid extension of the respective pair of legs.

In order to utilize better the drawing plane and to separate more clearly the original true-to scale projection from its representation to be traced, another modification is advisable as compared with the model as shown in Fig. 5. On the slide s_1 , the leading groove H_{i_1} of the writing leg i_1 , should be shifted parallel to itself at an optional distance h_1 from the point C_1 on the groove H_{j_1} of the signalling leg j_1 , and in the same way, the groove H_{i_2} should be shifted at an optional distance h_2 from C_2 . Doing this, the writing tip P' will only operate at another place of the drawing plane i.e. the correct image will be shifted away. This statement becomes clear, because by a displacement of the signalling tip (P) in the direction of the straight line v , the pair of writing legs is displaced in the same direction; and when the signalling tip is moved in the perpendicular direction to the rule v , the measure of the displacement of the writing legs is determined by the distance C_1C_2 .

This model is shown in Fig. 6. The leading groove of the signalling leg is on the turning element f which is located on the slide s and can be swung

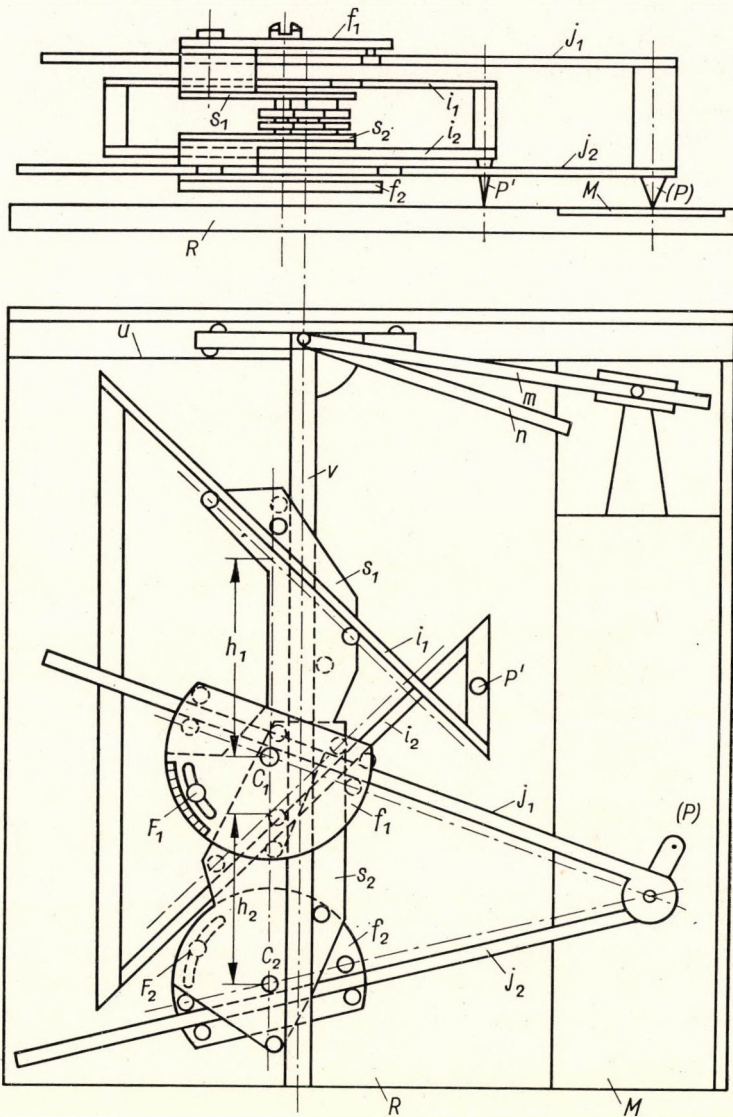


Fig. 6. Construction that fulfils the functional requirements

around the pivot pin C and fixed by the screw F ; it goes without saying that the elements f , s , C , F are to be understood as having identical subscripts. Friction is reduced by using roller-type slides.

From what has been explained above, it follows that the device works correctly in every clinogonal axonometry, when instead of the plan-view any optional drawing sheet, on which the writing tip P' draws, is displaced by means of the bar m in parallel direction to the rule v .

Yet when according to our intention neither the plan-view nor the axonometric projection should be shifted, we may apply a supplemental reckoning to find the correct adjustment of the device, and in this way, the bar m becomes superfluous.

We will assume that a special point P of the level plane N is just lying on the intersection line v of level plane N and drawing plane R . When, in order

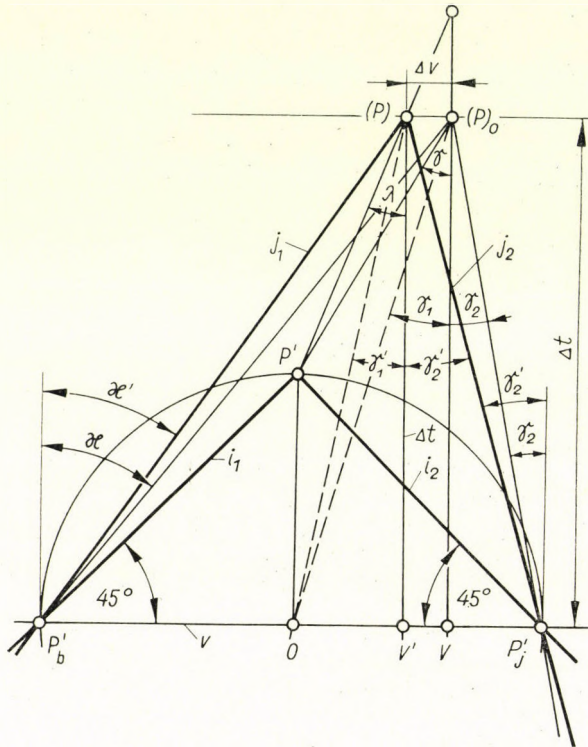


Fig. 7. Supplementary adjustment for clinogonal axonometry

to have a straight line PQ of unit length be drawn that passes through point P , we keep the signalling tip steady at point $P \equiv (P)$ and let the guide rail v be shifted at a distance Δt according to Equ. (8), then the writing tip will delineate a straight line inclined at the angle γ (in Figs 1, 2 and 4) instead of the correct angle λ (Figs 1 and 4).

In this position of the device, the distance $t = (P)V$ of Fig. 2, is now replaced by the distance $\Delta t = VV_x$ of Fig. 3; therefore, taking into account equations (3) and (4), we obtain from Fig. 2:

$$OV = \Delta t \cdot \tan \gamma_1 \tag{13}$$

and

$$VP'_j = \Delta t \cdot \tan \gamma_2. \tag{14}$$

When we want a straight to be traced by the writing tip at the desired angle λ , the adjustment of the signalling legs j_1 and j_2 has to be corrected in such a way, that the tip (P) should be shifted, in parallel direction to the straight v (as shown in Fig. 7) at a distance Δv according to Equ. (10).

Then we have, for the modified angles γ'_1 , and γ'_2 by making use of the values according to equations (13) and (14):

$$\begin{aligned}\tan \gamma'_1 &= \frac{OV'}{\Delta t} = \frac{OV - \Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta t \tan \gamma_1 - \Delta v}{\Delta t} = \tan \gamma_1 - \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ \tan \gamma'_2 &= \frac{V'P'_j}{\Delta t} = \frac{VP'_j + \Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta t \tan \gamma_2 + \Delta v}{\Delta t} = \tan \gamma_2 + \frac{\Delta v}{\Delta t}.\end{aligned}\quad (4a)$$

Applying the values from (3) and (11):

$$\tan \gamma'_1 = \frac{A}{B}$$

where

$$\begin{aligned}A &= \sin \beta \cdot \sin \varphi - (\tan \gamma - \tan \lambda) [\tan \alpha (\cos \varphi - 1) + \cos \beta \cdot \sin \varphi] \\ B &= \tan \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \sin \varphi;\end{aligned}$$

and taking the values from (1) and (9)

$$\tan \gamma'_1 = \frac{C}{B}$$

where

$$\begin{aligned}C &= \sin \beta \cdot \sin \varphi - \left[\frac{\sin \beta \cdot \sin \varphi}{\tan \alpha (\cos \varphi - 1) + \cos \beta \cdot \sin \varphi} - \right. \\ &\quad \left. - \tan \beta \cdot \cos \varphi \right] [\tan \alpha (\cos \varphi - 1) + \cos \beta \cdot \sin \varphi]\end{aligned}$$

after reduction

$$\tan \gamma'_1 = \frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \cos \varphi (\cos \varphi - 1) + \tan \beta \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\tan \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \sin \varphi}.$$

By multiplying both the numerator and the denominator with $\cot \alpha \cdot \cot \beta / \cos \varphi$ we obtain

$$\begin{aligned}\tan \gamma'_1 &= \frac{\cos \varphi - 1 + \cot \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi}{\cot \beta + \cot \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cot \beta \cdot \tan \varphi} = \\ &= \frac{\cos \varphi (1 + \cot \alpha \cdot \cos \beta \cdot \tan \varphi) - 1}{\cot \beta (1 + \cot \alpha \cdot \cos \beta \cdot \tan \varphi)}.\end{aligned}\quad (3b)$$

We have to find the value of (4a):

$$\tan \gamma'_2 = \tan \gamma_2 + \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

From (4):

$$\tan \gamma'_2 = A - \tan \gamma_1,$$

where

$$A = \frac{1/\sin \varphi}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha};$$

i.e.

$$\tan \gamma'_2 = A - \tan \gamma_1 + \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

But, conforming to (3a):

$$-\tan \gamma_1 = -\tan \gamma'_1 - \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

and to (4a)

$$\tan \gamma'_2 = A - \tan \gamma'_1 - \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} = A - \tan \gamma'_1.$$

By using $\tan \gamma'_1$ as per (3b):

$$\begin{aligned}\tan \gamma'_2 &= \frac{1/\sin \varphi}{\cot \varphi + \cos \beta \cdot \cot \alpha} - \\ &- \frac{\cos \varphi (1 + \cot \alpha \cdot \cos \beta \cdot \tan \varphi) - 1}{\cot \beta (1 + \cot \alpha \cdot \cos \beta \cdot \tan \varphi)}.\end{aligned}\quad (4b)$$

This angle γ'_2 is what serves to adjust the signalling leg j_2 . For the inclination angle α' of leg j_1 we can write conforming to (6):

$$\tan \alpha' = 2 \tan \gamma'_1 + \tan \gamma'_2.\quad (6b)$$

On the other hand, in order to have the vertical in space delineated — in a clinogonal axonometry — by the device at an adequate angle λ , the modified inclination angles of the writing legs i_1 and i_2 could be found by reckoning, whereas the former angles γ_1 , and γ_2 could be kept invariant. This alternative method is but of geometrical importance because in our case the functioning of the device is the most favourable when the signalling legs are positioned at a slope of 45° .

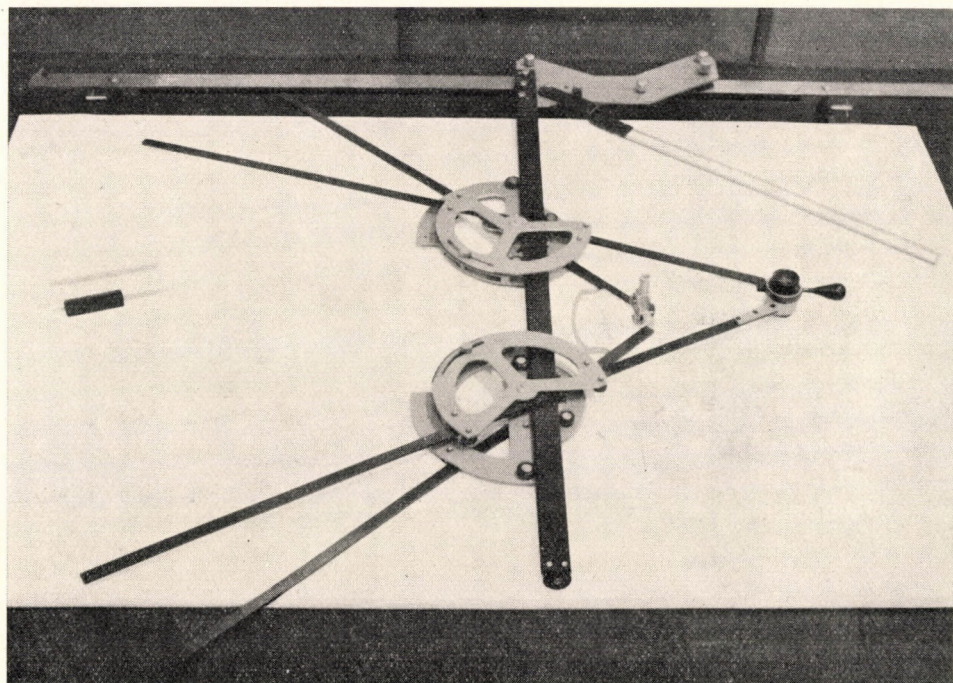


Fig. 8. A simplified model of the device

As a consequence of a modified adjustment of the signalling legs, the position of the whole axonometric projection is shifted to a distance Δv but this shifting is practically quite insignificant.

The axonometric picture, traced by the described device, is correct not only when the initial plan-view — and side-view — are in their position with the points lying on the respective ordinates; but the picture obtained is correct on the basis of a plan-view be it revolved into any optional position, when only the side-view is put into position at an adequate angle.

The adjustment of the device is the most simple for the orthogonal axonometry ($\beta = 0$; $\alpha + \beta = 90$). As compared with the usual photo, having a main optical axis parallel to the level-plan, this axonometric view is the most similar. When a photo should be regarded as a model in which the main optical

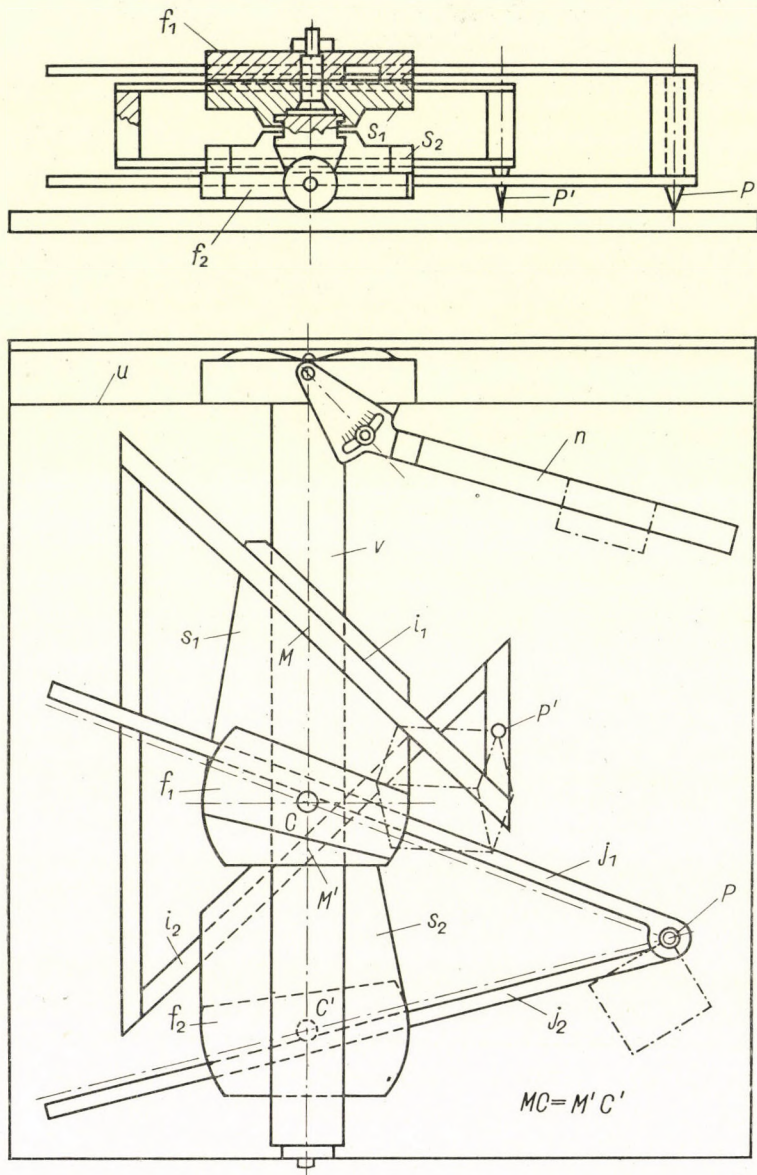


Fig. 9. A practical model of the device

axis is not parallel to the level-plane but lies in the vertical plane perpendicular to the line v , in this case, the adjustment comprises $\beta = 0$, but $\alpha + \beta \neq 90^\circ$.

A simple model of the axonograph is shown in Fig. 8. Yet, a larger part of the drawing sheet can be utilized, when the respective slides are placed in two different planes in order to avoid any interference between them (Fig. 9).

In order to bring the axonometric picture at a certain distance from the plan-view, the distance $MC = M'C'$ is kept equal for both slides. When this distance becomes zero, the point C coincides with point M , and point C' coincides with point M' .

Annex

In his report, the reader I. LIPKA has pointed out that it is worth while to deal with the geometric principles of this device in a more particular way. The reader presented in his report a self-consistent geometric system that clearly shows the theoretic essentials of the device in question; therefore, this part of the reader's report will be quoted:

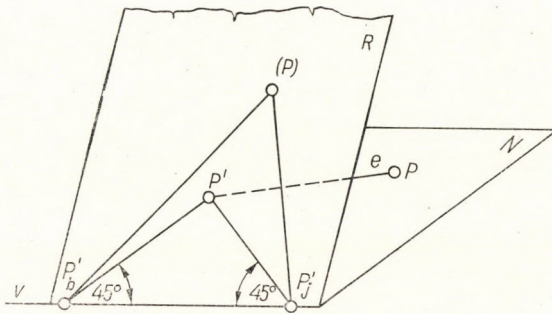


Fig. 10. The basic geometric relations between the image-point and the point revolved into the image plane

“From the Eqs (3) and (4) in this paper, there is, by the author, a spatial theorem deduced that expresses a strong relation between the point revolved and the original image point; this theorem should be introduced as the initial thesis of the paper, in self-consistent conception; it could be set up as follows:

Thesis. The spatial point P should be projected, by the projecting line e of optional direction, on the point P' of the plane R (the image-plane) of optional position (Fig. 10). The horizontal level-plane N , passing through point P has a line of intersection v with the image plane R . Let the level plane N be revolved, around the axis v into the image plane R , whereby the point P arrives to point (P) of the plane R . Starting from the point P' in plane R , two half-rays, each of them forming an angle of 45° with the straight line v , will have with this line v the points of intersection P'_b and P'_j , respectively. In this case, the value of the angle $P'_b(P)P'_j$ viz. the angle that is included by the half-straight lines $(P)P'_b$ and $(P)P'_j$ i.e. by the straight lines connecting the point (P) with the points P'_b and P'_j respectively, depends only upon the direction of the projecting line e and of the angle included by the planes N and R , and is independent of the position of the spatial point P .

The legs of this angle that is independent of the position of the point P correspond just to the two signalling braces of the drawing device.

Within the scope of the three-dimensional geometry, this thesis in question can easily be deduced from some basic theorems of the elementary projective geometry, as follows.

Let the points P, U, \dots of the level-plane N be projected, by parallel projecting lines, into the points P', U', \dots of the plane R .

When the plane N is revolved, around the straight line v as axis into plane R , the two systems of points, namely, the system of the revolved points $(P), (U)$ of N and the other one of the projected points P', U' are in the so-called parallel perspective relation, in other word in perspective affinity. According to a thesis of the projective geometry, the axis of this affinity is the straight line v .

Affinity is always characterized by two rules: first, connecting lines of corresponding points are parallel to each other e.g. $(P)P' \parallel (U)U'$ etc.; and the points of intersection of

corresponding straight lines lie on the same straight line; i.e. the point of intersection C of the corresponding straight lines: $(P)(U)$ and $P'U'$ lies on the straight line v being the axis of affinity (Fig. 11).

Let us consider the triangles $(P)P'_bP'$ and $(U)U'_bU'$. Every straight line connecting the homologous vertices of these two triangles passes through the same point C . Now, according to the Desargues-theorem, the points of intersection of the homologous sides of these triangles lie on the same straight line. Yet, as already mentioned, the two homologous sides $(P)P'$ and $(U)U'$ of the triangles are parallel to each other, i.e. their point of intersection lies on the straight line in the infinite. The same applies to the other homologous pair of sides P'_bP' and U'_bU' , wherefore, according to the Desargues-theorem, the third homologous pair of sides $(P)P'_b$ and $(U)U'_b$ also have the point of intersection in the infinite: viz. they are parallel lines $(P)P'_b \parallel (U)U'_b$; therefore, we can state the equality of the respective angles

$$\sphericalangle P'_b(P)P' = \sphericalangle U'_b(U)U'.$$

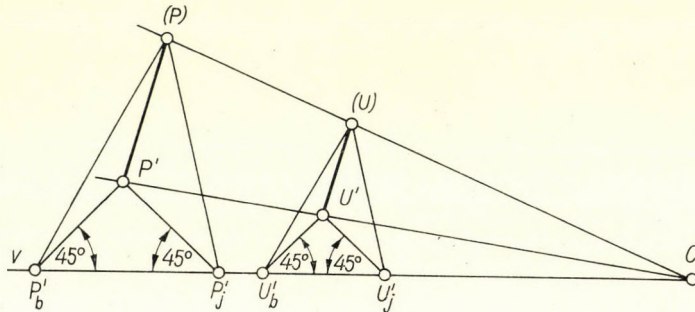


Fig. 11. Projective-geometric proof of the theorem

Of course, as regards the perspective triangles $(P)P'P'_j$ and $(U)U'U'_j$ the same relation holds true, viz. the two sides $(P)P'_j$ and $(U)U'_j$ are parallel to each other, too. Therefore we can write

$$\sphericalangle P'_b(P)P'_j = \sphericalangle U'_b(U)U'_j,$$

and this equation represents the three dimensional geometric thesis in question.

This reasoning on projective-geometric principles brings into relief the essential feature of three-dimensional geometric thesis applied to the construction of this drawing device. The trigonometric deduction leads to express the angles $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ and α by means of parameters; namely, by the angles of α and β which determine the inclination of the projecting line, and by the inclination angle φ of the image plane, the explicit formulae can be established.

The geometric proposition in question holds true also in the case when the system of points $(P), (U), \dots$ are shifted in a parallel direction with the axis of affinity v by keeping all the lines $((P^*)P', (U^*)U'$ (connecting the points P', U', \dots with the shifted ones $(P^*), (U^*), \dots$) parallel, viz.:

$$(P^*)P' \parallel (U^*)U' \parallel \dots$$

In this case, the relation of perspective affinity stands between the two system of points $(P^*), (U^*), \dots$ and P', U', \dots having an affinity angle λ with the normal direction to the straight line v (Fig. 7) by maintaining this line v as the axis of affinity. To understand this statement, the way of reasoning is the following.

Let us consider the triangles $(P)(P^*)P'$ and $(U)(U^*)U'$ in Fig. 12. The respective (homologous) sides of these triangles are parallel to each other

$$(P)P' \parallel (U)U'; \quad (P^*)P' \parallel (U^*)U'; \quad (P)(P^*) \parallel (U)(U^*).$$

In other words, the axis of perspectivity is the straight line in the infinite; by the inversion of the Desargues-theorem we can state that the straight lines connecting the homologous points of the triangle will all pass through the same point of intersection.

Thus, the straight line $(P^*)(U^*)$ also passes through the point C ; in other words, the straight line $(P^*)(U^*)$ and its corresponding *affined* line $P'U'$ intersect each other at a point on the straight line v , i.e. v is the axis of affinity. On this basis, the equality of angles

$$\sphericalangle P'_b(P^*)P'_j = \sphericalangle U'_b(U^*)U'_j$$

can be proved; this means in other words, that the value of the angle

$$\sphericalangle P'_b(P^*)P'_j$$

is independent of the spatial position of point P . The practical application of this statement is realized, when the shifting of the plan-view is omitted."

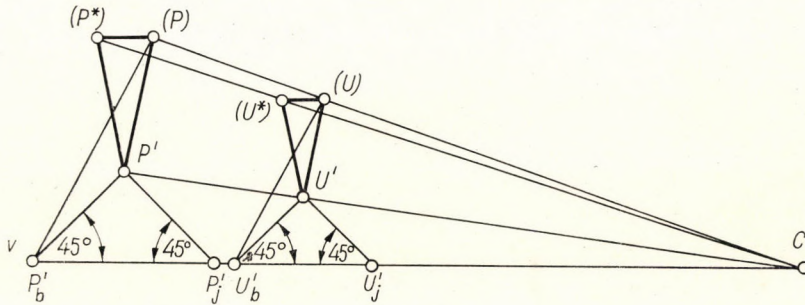


Fig. 12. Proof of a generalized variant of the theorem

REFERENCES

1. SZŐKE, B.: A Method for Designing Axonographs and Perspectographs. *Acta Techn. Hung.* **33** (1961), 231–274.
2. SZŐKE, B.: Methods for Delineation of Axonometric and Perspective Projections (Functional Principles of Existing Transformer Devices). *Acta Techn. Hung.* **34** (1961), 231–258 (including a wide list of references).

ZEICHENVORRICHTUNG ZUM UMZEICHNEN VON AXONOMETRISCHEN BILDERN

B. SZŐKE

ZUSAMMENFASSUNG

Durch diese Vorrichtung, die nach Prinzipien der Raumgeometrie konstruiert ist, wird das Bild in der beliebig bestimmten Axonometrie mit der Schreibspitze dadurch aufgezeichnet, daß die Abtastspitze im Grundriß entlang eines Horizontal-Schnittes geführt und das Niveaulineal in der Seitenansicht in der entsprechenden Höhe bewegt wird. Die konstruktive Lösung ist besonders einfach, falls eine Projektionsrichtung senkrecht zur Schnittlinie der Bildebene mit der Horizontalebene gewählt wird. Mit dieser Vorrichtung kann man den Eindruck eines Photos am besten nachahmen, da die Wahlmöglichkeiten doppelt unendlich sind: man kann den Neigungswinkel zur horizontalen Ebene sowohl für den projizierenden Strahl wie auch für die Bildebene frei wählen.

APPAREIL TRANSCRIPTEUR POUR LA PRODUCTION D'IMAGES
AXONOMÉTRIQUES

B. SZÖKE

RÉSUMÉ

L'étude présente un appareil de transcription construit sur la base de relations de géométrie spatiale. La pointe étant déplacée le long d'une section horizontale du plan, la règle de niveau est portée à la hauteur correspondante de la vue latérale et la plume est amenée sur le point correspondant de l'image axonométrique, basée sur un système d'axes fixé arbitrairement. Une solution particulièrement simple est obtenue au cas où le rayon de projection est normal à l'intersection du plan de l'image avec le plan horizontal. Pour cet axonographe, au moyen duquel on se rapproche le plus de l'image photographique, le nombre des variations possibles reste encore doublement infini, étant donné que l'angle formé par le plan horizontal et le plan de l'image aussi bien que celui formé par le rayon de projection et le plan horizontal peuvent être arbitrairement choisis.

КОПИРУЮЩИЙ ПРИБОР ДЛЯ СОЗДАНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ
ИЗОБРАЖЕНИЙ

Б. СЁКЕ

РЕЗЮМЕ

В статье описан такой копирующий прибор, сконструированный на основе стереометрических зависимостей, пишущая головка которого следует точкам любой избранной аксонометрической проекции, если снимающая головка перемещается по линиям горизонтального разреза, а линейка уровня продвигается по соответствующей высотной отметке бокового вида. Особенно простое решение получается в том случае, если проектирующий луч перпендикулярен линии пересечения плоскости изображения с горизонтальной плоскостью. Для этого аксонографа, который дает изображения, наиболее близкие к фотографии, все еще вдвойне бесконечно число изобразимых вариантов, так как угол наклона, ограниченный горизонтальной плоскостью, может быть произвольно выбран, как для плоскости изображения, так и для проектирующего луча.

CALCULATION OF WATER HAMMER PHENOMENA BY AUTOMATIC SEQUENCE CONTROLLED DIGITAL COMPUTERS

PART II: NUMERIC EXAMPLE CALCULATED FROM EXPERIMENTAL RESULTS OF A PIPELINE

I. BATTA

ENTERPRISE FOR ESTABLISHMENT OF POWER STATIONS, BUDAPEST

[Manuscript received May 10, 1965]

This paper is the continuation of the article presented [in *Acta Techn. Hung.* 51 (1965), 3-29] as Part I: Basic Principles, Equations and Formulae. The calculation is made on the basis of some parts of experiments carried out by the Department of Hydraulic Machines of the Technical University Budapest on a long pipeline. During the research work some main characteristic data of the pipeline were determined and a water hammer process caused by power failure was investigated. In the diagrams both the experimental results and the obtained numerical values — as calculated from the pipeline characteristics and the initial values of the water hammer — are plotted. In the present part the pipeline is described, some details of the experiments are made known, the course of the calculation is explained and the results are analyzed.

VI. Comparison of experimental data and calculated results

The reliability of some formulae and equations — contained in Part I — was tested, by making use of a part of the results obtained from a more extensive series of experiments.

1. Layout of the pipeline and the pump station

After the pumps, there are check valves built in, and after the valves, there are air chambers connected. This boundary condition is described in Chapter V-6 (Fig. 6).

In order to have the water hammer effects diminished, there is a surge tank arranged in the pipeline. It would have been hardly possible to approach the behavior of the section after the surge tank (because of fittings not mentioned) by calculation; moreover the influence of that section is not significant; consequently, the change of the level in the surge tank had been considered as practically well determined by experimental results.

2. Geodetic data and dimensions

The developed length of the pipe line section up to the surge tank $L = 29556,44$ m; internal diameter of the pipe $d = 0,703$ m; diameter of the three

air chambers working parallelly $D = 1,8$ m; the height of the top of the air chamber above the centre line of the pipeline at the beginning (i. e. above the chosen zero-level), as calculated by equalized volume $Y = 7,17$ m. The heights H_g [m] of the centre line of the pipe at distances x are in Table I.

Table I

x	0	$L : 4$	$L : 2$	$3L : 4$	L
H_g	0,00	10,55	51,90	44,00	115,45

3. Experiments and results

The numerical values of the experimental and those of the desk-computed results are given without rounding off. Not that all the digits could be considered as significant. Nevertheless, a rounding off is not advisable, since those numerical values must be compatible among each other mainly because of the wavelike propagation of the errors.

With closed air chambers starting experiments were carried out by measuring the reflexion time periods. The pressure oscillography at the starting point served to determine the velocity of the wave; this proved to be: $a = 1089,086$ m/sec. The half wave period was $T = 27,13875$ sec. In view of the varying wall thickness of the tube, the wave velocity also changes (within narrow limits) along the pipe. For calculation purposes the average value is taken into consideration.

A water hammer caused by power failure was investigated. Due mainly to weather conditions, at the beginning of this power failure experiment the estimated air temperature in the air chamber was $+40$ °C and the water temperature $+20$ °C about. These values are important as regards the expansion in the air chamber that is supposed to be polytropic (see later VII—6). The steady state preceding the power failure is characterized by the following initial values: water discharge $Q = 0,51725$ m³/sec; depth of the level beneath the top of the air chamber: $y_0 = 2,968$ m; total head values H_0 [m] at different distances x measured from the forward end of the pipeline are to find in Table II.

Table II

x	0	$L : 4$	$L : 2$	$3L : 4$	L
H_0	211,6200	190,9275	170,2350	149,5425	125,8500

According to the precedings, the loss factor amounts to $\lambda \cong 0,02175$, in compliance with the observed roughness of the inner surface of the pipe. Due to

previous tests, it is known that λ is not constant (the major value is observed at the forward section); for computing purposes the average value is taken into account.

During the water hammer process caused by power failure the total head at the forward end was observed; the sinking of the water level in the surge tank (δ) was registered by means of a manometer that was read off at regular time intervals. It took 2,5 sec until the check valve closed after the power failure nevertheless, due to the rather large air volume in the air chambers the total head at the forward end of the pipeline did not change much. As can be inferred from the oscillograms it is motivated to neglect the run out of the pump, and to consider the whole system as consisting of the air chamber and the pipeline closed towards the pump; thus, the initial time can be put as 2 sec after the effective power failure. The following Table III contains the values of the total head at the forward end, and the sinking of the water level in the surge tank as functions of time.

Table III

$t : T$	H_0 [m]	δ [m]
0,000	211,62	0,000
0,250	174,00	0,000
0,500	153,50	0,000
0,750	139,50	0,000
1,000	126,50	0,000
1,500	109,75	0,135
2,000	97,50	0,400
2,500	92,25	0,800
3,000	90,90	1,275
3,500	91,60	1,855
4,000	94,00	2,450
4,500	98,75	3,050
5,000	106,10	3,475
5,500	114,00	4,275
6,000	122,60	4,925
6,500	132,00	5,600
7,000	139,60	6,250
7,500	144,80	6,850
8,000	146,20	7,300
8,500	145,30	7,625
9,000	141,10	7,875

The change of the water level in the air chambers could not be registered.

VII. Details of the calculation

1. Programming and some features of computing

The values printed off by the computer correspond to the following scale factors:

0,1 [m]	value of the water level in the air chamber,
1 [m ³ /s]	values of the water discharge,
0,001 [m]	value of the total head

and these always belonging to the time-points:

$$t = T : 8, 2T : 8, 3T : 8, \dots, 72T : 8,$$

and to the longitudinal spacings:

$$x = 0, L : 4, L : 2, 2L : 4, L.$$

The computed values correspond to the following grid points:

$$x_j = hj, \quad \text{where } h = L : 16 \text{ and } j = 0, 1; \dots; 16;$$

$$t_i = (h/a) i, \quad \text{where } i = 0, 1, 2, \dots$$

Taking into consideration that the water level change in the air chamber could not be observed, the values of the polytropic exponent $n = 1; 1,1; 1,2; 1,3$ and $1,4$ were used for finding the probable value of $n = 1,2303515$ as a best quadratic approximation of the pressure experimentally determined at the forward point of the pipe line during the time-interval $9T$.

The programming scheme is the same as shown in the example in V-2. The calculation was carried out at the Computing Centre of the Hungarian Academy of Sciences, by means of a Computer type *M 3* according to the machine code program elaborated by the author.

The computer working with a fixed point is characterized by 31 bits (including the sign), with numbers of absolute values less than the unit. The octonary system is used for putting in the binary numeric values and the orders. Decimal data being put in and being printed off, comprise 7 significant figures.

2. Scale factors, transformed quantities

As the computer works with fixed point, the whole stock of numbers occurring i.e. the quantities put in, the intermediate and final results all have to assume values less than the unit. By denoting with an upper bar the correspond-

ing transformed quantities; $\bar{Q} = Q$; $\bar{H} = H : 250$; $\bar{y} = y : 10$; $\bar{Y} = Y : 250$, these transformations fulfil the above condition.

3. Basic equations

According to the equations (9) and (10) the following equations refer to the inner points of the pipeline, by taking the scale factors into account:

$$\bar{H}_3 = \frac{1}{2}(\bar{H}_2 + \bar{H}_1) + \frac{1}{250} \cdot \frac{a}{2fg}(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) + \frac{1}{250} \cdot \frac{\lambda h}{8df^2g}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1),$$

$$\bar{Q}_3 = \frac{1}{2}(\bar{Q}_2 + \bar{Q}_1) + 250 \frac{fg}{2a}(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) - \frac{\lambda h}{8adf}(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1) - \frac{\lambda h}{4adf}\bar{Z}_3.$$

According to (25), (26) and (8) and taking the scale factors into account the boundary values are determined by the equations:

$$\bar{y}_3 = \bar{y}_1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{h}{2aF_l}(\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2),$$

$$\bar{H}_3 = \frac{1}{250}(Y - A) - \frac{1}{25}\bar{y}_3 + \frac{1}{250}(H_0 + y_0 - Y + A)\bar{y}_0^n : \bar{y}^n,$$

$$\bar{Q}_3 = -\frac{\lambda h}{4adf}\bar{Z}_2 - 250 \frac{fg}{a}\bar{H}_2 + \bar{Q}_2 + 250 \frac{fg}{a}\bar{H}_3 - \frac{\lambda h}{4adf}\bar{Z}_3.$$

The level in the surge tank remains unchanged during the first half wave time then, from the beginning of the reflection the change of the level can be well approximated by a polynomial of 5th degree as a function of time:

$$\bar{H}_3 = (\bar{H}_0)_{16} \quad (i < 17)$$

and

$$\bar{H}_3 = (\bar{H}_0)_{16} - \{[(\bar{D}\vartheta + C)\vartheta + \bar{B}]\vartheta + \bar{A}\vartheta^2\} \quad (i \geq 17),$$

where

$$\vartheta = (i - 16) 2^{-7}$$

and \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , and \bar{D} are experimental constants.

The second boundary condition for the surge tank level is, according to (7) expressed by:

$$\bar{Q}_3 = 250 \frac{fg}{a}(\bar{H}_1 + \bar{H}_3) + \bar{Q}_1 - \frac{\lambda h}{4adf}\bar{Z}_1 + \frac{\lambda h}{4adf}\bar{Z}_3.$$

In analyzing the solution of the basic equations for the quantities denoted by the subscript 3 it is found that the iteration process proved to be convergent when based on the main characteristics of the here given cases.

4. Decimal data

The program has run with the following decimal values:

$$\begin{aligned}
 250 \frac{fg}{a} &= + 0,8740721, \\
 250 \frac{fg}{2a} &= + 0,4370361, \\
 \frac{1}{250} \cdot \frac{a}{2fg} &= + 0,5720352, \\
 - \frac{\lambda h}{4adf} &= - 0,0338034, \\
 - \frac{\lambda h}{8adf} &= - 0,0169017, \\
 \frac{1}{250} \cdot \frac{\lambda h}{8df^2g} &= + 0,0193543, \\
 \frac{1}{10} \cdot \frac{h}{2aF_1} &= + 0,0111092, \\
 \frac{1}{10} y_0 &= + 0,2968000, \\
 n - 1 &= + 0,2303515, \\
 - \frac{1}{25} &= - 0,0400000, \\
 \frac{1}{250} (Y - A) &= - 0,0113200, \\
 \frac{1}{250} (H_0 + y_0 - Y + A) &= + 0,8696720, \\
 \bar{D} &= - 0,1774222, \\
 \bar{C} &= + 0,3848889, \\
 \bar{B} &= - 0,3150444, \\
 \bar{A} &= + 0,1390778,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_0 &= + 0,5172500, \\ (\bar{H}_0)_0 &= + 0,8464800, \\ (\bar{H}_0)_{16} &= + 0,5154000.\end{aligned}$$

5. Calculated and experimental results

The diagrams (Figs 18–22) show the calculated and the necessary experimental results. The five diagrams (Fig. 18, 19, 20, 21 and 22) refer in due order to the points at a distance $x = 0; L : 4; L : 2; 3L : 4; L$. The curves comprise the values Q and H as functions of time (for the period of 9 half-waves) completed with the constant local geodetic heights. In Fig. 18 ($x = 0$), there are additional curves showing the calculated water level in the air chamber and the experimentally obtained total height both as functions of time.

Again, the total head curve in Fig. 22 is at the same time a result of both calculations and experiments

6. Analysis of results

As explained herebelow, the calculated results are in good approximation of the course of the water hammer phenomenon:

a) The wave periods and the domain of influence of the change of boundary values are correct.

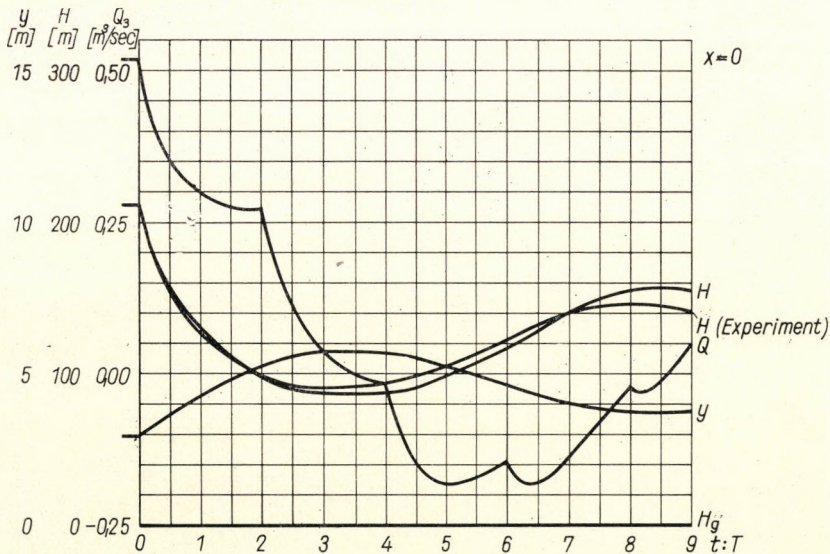


Fig. 18

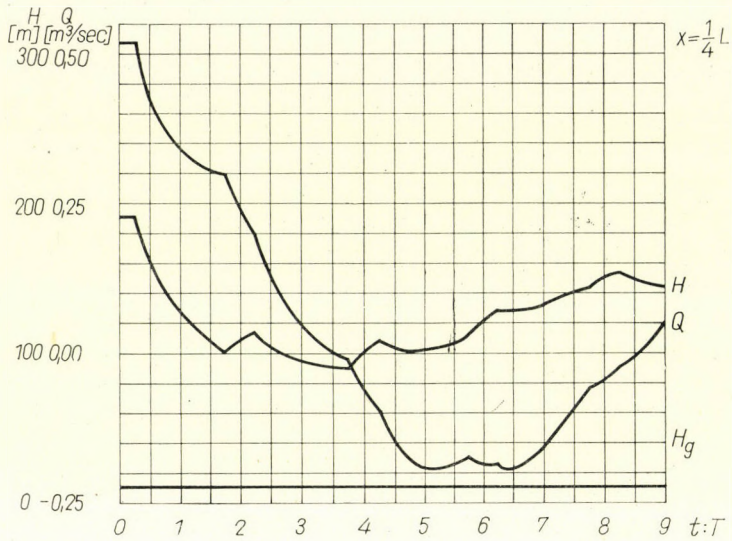


Fig. 19

b) The curves H in Fig. 18—both calculated and experimental values—are during the first period of depression nearly the same; their character during the following compression wave remains identical. The greatest deviation is only twice as much as the estimated error of the measurement about.

c) No breaking of the water column occurs either according to calculus, or during the experiments.



Fig. 20

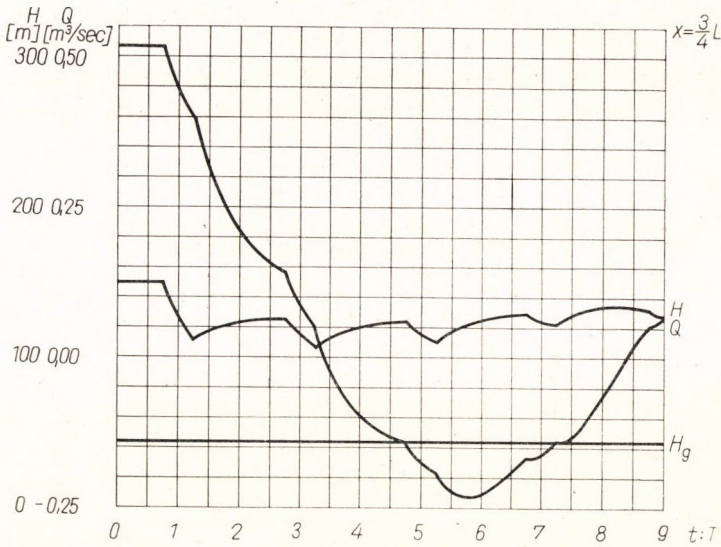


Fig. 21

The small deviation between the measured and the calculated pressure values is mainly explained by the fact that the air in the air chambers starts to cool intensely when the water level begins to change (especially near to the lowest position) and therefore, the real system is more rigid than the calculated one (cf. the above remarks relating to the temperature of the air content in the air chamber; see Chapter VI-3). These deviations are present

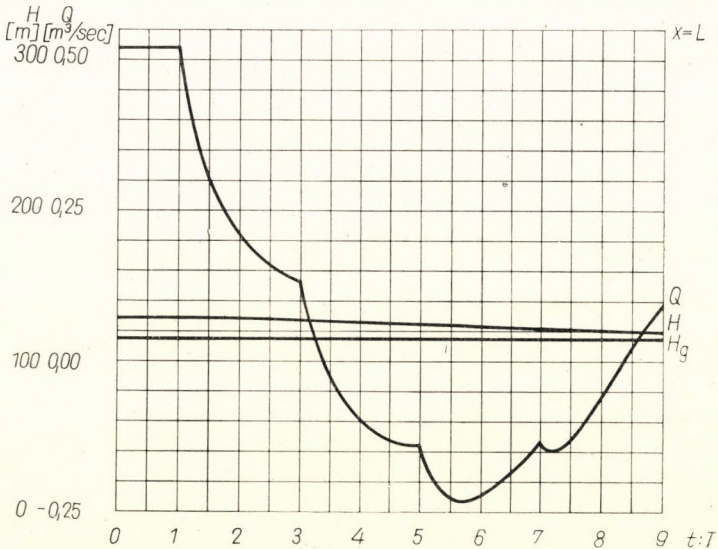


Fig. 22

at any value of the polytropic exponent, as it could be observed at any stage of the calculating process.

Just because this deviation is really not significant, one can state that this calculating method brought about useful results — and even without an exact analysis of the change of state of the air in the air chamber — especially for the first period of the depression-and-compression wave. The estimated polytropic exponent may assume a value between 1,2 and 1,25 when the arrangement and the dimensions are similar.

VIII. Final conclusions

Both, the experiences obtained during the experiments on this typical example, and the results, calculated and measured, are likely to justify the author's preliminary supposition, according to which this calculating method gives reliable results, and that it can be recommended in view of its advantages in opposition to other methods as far as greater efficacy, the possibility to obtain results in a quicker and more economical way, are concerned.

This method is reliable since the accuracy of results depends only on the precision of the knowledge of the physical characteristics of the system and because the influencing effect of any factor occurring can be estimated by means of great variability of the data put into the computer.

The method is efficacious, since the technical and economical optima can easily be chosen or determined by varying the basic data and the program details.

The method is efficacious further since the complexity of the conduit system and of the boundary conditions do not cause any difficulty against the application of the method.

Its economical advantage is more obvious when ready-made typical program details and input programs are at disposal and when the problems to be solved are relatively numerous.

As is known, the programming by means of direct machine codes is not only an awkward labour but it is a source of many kinds of errors. Again, search after mistakes often takes more time than the running down of the whole computing program. A radical solution is given by the use of an automatic code system on a high capacity computer. An auto-coding system is successfully applied for a quicker, more reliable and more economical programming, for which the saving of time is decisive in most cases.

A special advantage of computers is that the informations given by them may thus assume such an enormous number that could practically never be reached either by graphical or by experimental methods.

This method of calculation is first of all a great help for the design engineer for the purpose of diminishing costs of establishment without risking

deterioration of security; it can be useful for checking and maintenance of the safety of operation of pipelines.

Intentionally in general no attention is paid in the present paper to the examination of phenomena connected with free surface phenomena (breaking of the water column) in pipelines though, in chapter V—10 a related problem has been described. Further, this method can serve to determine the conditions which are required for preventing breaking of the water column. In view of computing difficulties, the most careful consideration is recommended in the solution of problems characterized e.g. by incommensurability of pipeline sections, reflecting free water levels, surge tanks having discontinuous distribution of cross sectional area and check valves within pipelines.

This computing method competes only among other numerical or eventually among graphical procedures. To this end experiments are just required; elementary experiments for obtaining basic data, system-experiments mainly for checking some special problems.

*

The author will here express acknowledgement to Prof. J. VARGA, and the Engineers: P. GENCSI, L. KISBOCSKÓI, Á. NÉMET, S. JANI, B. FÓGEL and I. JÓZSA, who gave him not only personal but through a staff of collaborators valuable assistance to elaborate the problem dealt with.

WASSERSTOSSBERECHNUNG MIT HILFE EINER PROGRAMMGESTEUERTEN DIGITALEN RECHENMASCHINE, II. Teil

I. BATTA

ZUSAMMENFASSUNG

Als Fortsetzung des ersten Teiles dieser Abhandlung [*Acta Techn. Hung.* 51 (1965), 3—30] in welchem die Richtlinien niedergelegt sind, folgt hier die Anwendung an einem numerischen Beispiel. Der Ausgangspunkt dieses numerischen Beispiels war eine Versuchsreihe, die von dem Lehrstuhl der Hydraulischen Maschinen der Technischen Universität Budapest an einer Wasserfernleitung durchgeführt wurde. Es wurden mitunter die Grundangaben der Leitung bestimmt und nebstbei der Ablauf eines Wasserstoßprozesses, hervorgerufen durch einen Stromausfall, beobachtet. Die hier veröffentlichten Diagramme stellen die Resultate der Experimente und der Maschinen-Rechnung dar. Es wird eine kurze Beschreibung der Wasserfernleitung, die charakteristischen Teile der Rechnungen und der Experimente und eine Analyse der Ergebnisse mitgeteilt.

CALCUL DU COUP DE BÉLIER PAR CALCULATRICE ÉLECTRONIQUE DIGITALE A PROGRAMME, II^e PARTIE

I. BATTA

RÉSUMÉ

Communication faisant suite à la première partie [parue dans *Acta Techn. Hung.* 51. (1965), 3—30], qui contenait les fondements théoriques du procédé de calcul. L'exemple

numérique a pour base les résultats d'une série d'essais effectués sur une conduite d'eau à distance par la Chaire de Machines Hydrauliques de l'Université Technique de Budapest. Au cours de la série d'essais, on a déterminé certains paramètres du pipe-line et reproduit un coup de bélier par arrêt de la force motrice. Les valeurs numériques obtenues à l'issue du programme mécanique réalisé avec les paramètres du pipe-line et les valeurs initiales du coup de bélier sont représentées dans des diagrammes, en regard du résultat fourni par le présent essai. Cette deuxième partie de l'étude donne une brève description du pipe-line, fait connaître certains détails de l'essai et la partie caractéristique des calculs et se termine par l'analyse des résultats numériques obtenus.

РАСЧЕТ ВОДЯНОГО УДАРА ПРИ ПОМОЩИ ЦИФРОВОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ЧАСТЬ II

И. БАТТА

РЕЗЮМЕ

Данное сообщение является продолжением первой части статьи [опубликованной в *Acta Techn. Hung.* 51 (1965), 3—30], где изложены теоретические основы данного метода расчета. Основой числового примера явились данные некоторой части опытов, проведенных Кафедрой Гидромашин Будапештского Политехнического Университета на одном из действующих магистральных водопроводов. В процессе серии опытов установлены отдельные параметры водопровода и продемонстрирован процесс водяного удара от отключения тока. Числовые значения, полученные на основе прохождения машинной программы с использованием основных данных магистрального водопровода и начальных значений водяного удара, совместно с опытными данными явления зафиксированы на диаграмме. Эта вторая часть кратко описывает магистральный трубопровод, относящиеся сюда части опыта, характерную часть расчетов и анализирует результаты расчетов.

ACTIVITY OF ZINC-SULFATE IN A SULFURIC ACID SOLUTION OF ZINC-SULFATE

THE 38th EDITION OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
METALLURGICAL CO-OPERATIVE

Z. HORVÁTH and J. WÉBER

DOCTOR OF TECHN. SC.

TECHNICAL UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRY, MISKOLC (HUNGARY)

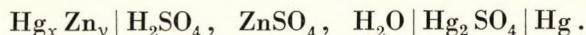
[Manuscript received 21 May, 1965]

Experiments are described that were carried out in order to measure the EMF of galvanic cells of the type $Hg_xZn_y | H_2SO_4, ZnSO_4, H_2O | Hg_2SO_4 | Hg$, so as to observe and to determine the activity of a zinc-sulfate in its sulfuric acid solution, at varying concentrations and varying temperatures. The actual range of the sulfuric acid content varied between 0 — 250 g/l, that of the zinc between 0 — 175 g/l. The measuring temperature was 25, 35, 45 and 55° C. It was stated, that the measured EMF of the cell decreases with the increase of the contents of both the sulfuric acid and the zinc, and also with increasing temperature. At the same time, the calculated activity of the zinc sulphate in the described electrolyte increases conversely with increasing contents of both sulphuric acid and zinc, whereas it specially increases with the decreasing temperature.

I. Theoretical basis

In order to determine the current density by which the minimum specific energy input, the minimum of prime cost and a stable heat-equilibrium is secured [1, 2], it is necessary to know the decomposition voltage. This latter, being a function of temperature, is at the same time a function of the actual activity of the agent in the solution; therefore, accurate calculation is only possible if and when the activity of the single components in the solution especially its variation with concentration and temperature is known.

In order to determine the activity of zinc-sulfate in its sulphuric acid solution, we have measured the electromotive force of the following galvanic cell:



In this cell the logarithms of the activity of the zinc-sulfate in solution can be expressed as follows:

$$\log A_{ZnSO_4} = \frac{(e_{Hg}^0 - e_{Zn}^0) - E}{0,9924 \cdot 10^{-4} \cdot T};$$

in this relation the difference $e_{Hg}^0 - e_{Zn}^0$ is the normal electromotive force of the galvanic cell especially composed for these tests; this can be computed on

the basis of data to be found in the respective literary sources on page 32 [3]; page 439 [4]; page 30–31 [5]; page 403 [6]; and page 2096 [7].

In the above formula E denotes the actual EMF of the cell as measured in V; T denotes the absolute temperature in °K.

Table I contains the computed normal EMF of the applied cell at various temperatures:

Table I
Computed normal EMF

Temperature [°C]	Computed normal EMF ($e_{Hg}^{nig} - e_{Zn}^n$) [V]
25	1,376 55
35	1,356 41
45	1,336 40
55	1,315 91

The actual E should be measured at various degrees of concentration and various temperatures; from these measuring results and the values in Table I the logarithms of the activity can be computed by using the above given formula.

II. Measuring implements

More accurate measurements of the EMF than with the usual instruments have been carried out by means of a high precision Feussner-type compensator (*Messtechnik, Mellenbach*). In order to secure a dependable accuracy of our measurements the normal temperature of 20 °C has been kept constant by means of an ultrathermostat and thermoplastic recipient within a tolerance of 0,05 °C. The supply was provided by two series connected lead accumulator cells type XSLy 285, of a storage capacity of 500 Ah calculated for a discharge period of 5 hours. We used a zero-indicator galvanometer (Model 251 N: *Norma, Wien*), with an adjustable sensitivity between the limits $10^{-4} - 0,9 \cdot 10^{-8}$ A/scale-division in all 6 steps. The regulating range of outer resistance of this instrument varies from 0 — ∞ and 500 — 1500 Ω, respectively, its inner resistance is invariably 100 Ω.

As seen from literary sources page 2096 [7] and page 32 [3] pure zinc is not suitable to be used as an electrolyte in a galvanic cell because it is liable to be dissolved by an acidic agent, or to be oxidized whereby its potential as an electrode varies with the method of physical preparation; therefore, for constructing a measuring electrode, zinc-amalgam is used instead of pure zinc, the electrode potential being the same.

In Fig. 1 the constructional scheme of a galvanic cell, having a 2nd kind mercury electrode and a zinc-amalgam electrode is shown. As can be seen, there is a U-shaped glass tube for the location of the electrodes in the two shanks. At the shank bottom of the mercury/mercury-sulfate electrode there is a filter type G. 4. The first step is to fill a mixture of water and sulfuric acid over the filter and then to pump off the water from the level of the mercury-sulfate by means of a water-air pump. Now, in order to eliminate any diffusions-potential, 15 cm³ of the electrolyte to be tested was pumped in

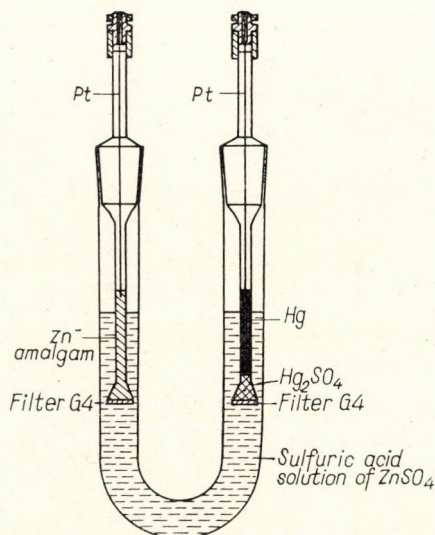


Fig. 1. Schematic diagram of the galvanic cell consisting of a zinc-amalgam and a 2nd species mercury electrode

by forcing it through the mercury sulfate step by step, and then the solution to be tested was mixed to the wanted concentration. After having done this pure mercury is poured into the shank over the mercury sulfate. The electric connection was secured by a plug fitting into the glass tube through which the platinum-wire plunges into the mercury column. According to what has been said above, a special mercury-sulfate electrode had to be made for every single degree of the concentration under test.

In a water-bath, for preparation of the zinc-amalgam electrode, metallic zinc was added to the adequate portion of mercury placed in a solution of zinc sulfate slightly acidified by some additional sulfuric acid. After a warming-up of 24 hours in the water bath when the amalgam reached the monophase state it is poured into the shank, where the warming up in the water-bath was continued for 2 hours; now, the plug with the platinum-electrode is filled in, and the amalgam is cooled down whereby it reaches the diphasic state.

III. Measuring procedure

By means of the instrument as shown in Fig. 1 we have measured at various temperatures the variations of the EMF of the galvanic cell consisting of a second species mercury electrode and a zinc-amalgam electrode in function of the electrolyte composition according to the changing of sulfuric acid and zinc contents.

For this purpose, the whole galvanic cell including the electrolyte to be tested was placed into an ultra-thermostat the temperature of which was adjusted to 25, 35, 45 and 55 °C. The sulfuric acid content of the electrolyte has been varied from 0 to 250 g/l and the zinc content from 0 to 175 g/l. The single measuring solutions were prepared from the stock solution; before testing, the sulfuric acid content was checked by gravimetry and the zinc content was checked by complexometry and gravimetry. The measuring accuracy for the zinc content was $\pm 0,01$ g, for the sulfuric acid content it was $\pm 0,05$ g, for the temperature it was $\pm 0,04$ °C.

The measuring results are gathered together in Tables II, III, IV, V where the measured EMF values of the galvanic cells consisting of a second species mercury electrode and a zinc amalgam electrode as functions of both the sulfuric acid and the zinc content in the electrolyte. Measuring accuracy: $\pm 0,07$ mV.

We did not investigate the influence exerted on the EMF value by the phenomenon occurring on the single boundary surface within the different systems in the cell [8]. This fact is surely present as an actual source of errors in our results.

Table II
Measured EMF of the cell at 25 °C

H ₂ SO ₄ [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	1480,50	1467,58	1459,20	1452,45	1448,32	1443,70	1437,79	1430,70
25	1480,48	1467,44	1458,48	1452,00	1446,60	1441,21	1434,73	1427,10
50	1480,40	1466,47	1457,10	1450,13	1443,92	1438,18	1431,00	1423,03
75	1480,18	1465,14	1455,22	1448,01	1441,16	1434,70	1426,83	1418,89
100	1479,86	1463,66	1453,28	1445,46	1438,17	1430,97	1422,63	1414,72
125	1479,10	1461,80	1451,04	1442,73	1434,90	1427,20	1418,61	1410,34
150	1477,07	1459,64	1448,43	1439,69	1431,44	1423,19	1414,32	1405,87
175	1475,38	1457,04	1445,67	1436,32	1427,73	1418,90	1409,88	1401,30
200	1473,35	1454,25	1442,58	1432,75	1423,68	1414,31	1405,18	1396,50
225	1470,85	1451,46	1439,24	1428,98	1419,13	1409,74	1400,30	1391,33
250	1467,96	1448,51	1435,53	1424,45	1414,04	1404,18	1394,40	1385,05

Table III
Measured EMF of the cell at 35 °C

H ₂ SO ₄ [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	1477,42	1466,36	1457,43	1451,25	1446,15	1440,78	1434,29	1427,30
25	1474,04	1463,51	1454,42	1447,79	1442,12	1436,32	1429,99	1422,52
50	1472,10	1461,45	1452,34	1444,83	1438,31	1432,18	1425,55	1417,75
75	1471,87	1460,04	1450,47	1442,40	1435,10	1428,41	1421,15	1413,46
100	1470,98	1459,06	1448,60	1440,03	1432,16	1424,76	1416,86	1409,28
125	1469,44	1457,52	1446,72	1437,69	1429,20	1421,13	1412,66	1404,72
150	1467,20	1455,10	1444,04	1434,70	1426,04	1417,20	1408,27	1399,97
175	1464,13	1452,11	1440,74	1431,10	1422,24	1412,81	1403,40	1394,78
200	1460,56	1448,47	1436,89	1427,07	1417,74	1407,94	1398,08	1388,97
225	1456,30	1444,12	1432,52	1422,53	1412,83	1402,60	1392,40	1382,54
250	1451,46	1439,34	1427,80	1417,58	1407,50	1396,90	1386,33	1375,62

Let us consider the electrolyte with 200 g of sulfuric acid and 100 g zinc contents corresponding to 2,039 11 mol sulfuric acid and 1,529 49 mol zinc-sulfate the density of which is 1328,3 g/l. According to these figures, the water solution in 1000 g water contains 2,313 5 mol sulfuric acid and 1,935 2 mol zinc sulfate. In the galvanic cell made with this electrolyte the measured EMF was 1,423 68 V. According to the table on page 34 of [3], the EMF of an electrolyte

Table IV
Measured EMF of the cell at 45 °C

H ₂ SO ₄ [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	1475,00	1464,11	1454,87	1448,56	1442,61	1436,26	1430,40	1424,59
25	1470,96	1459,69	1450,25	1443,60	1437,25	1430,86	1424,43	1418,00
50	1468,68	1456,65	1447,29	1439,63	1432,69	1425,98	1418,50	1411,36
75	1467,68	1455,10	1445,68	1437,37	1428,98	1421,18	1412,95	1405,40
100	1466,04	1454,20	1444,30	1435,10	1425,80	1416,83	1407,96	1399,90
125	1463,90	1453,18	1442,30	1432,35	1423,54	1413,40	1403,78	1394,99
150	1461,26	1450,24	1439,16	1429,08	1419,45	1409,84	1399,97	1390,83
175	1458,35	1446,63	1435,42	1425,43	1415,61	1405,84	1395,74	1386,40
200	1454,90	1442,69	1431,19	1421,42	1411,40	1401,30	1391,04	1381,44
225	1450,82	1438,34	1426,58	1416,97	1406,58	1396,26	1385,95	1376,11
250	1446,14	1433,59	1421,60	1411,87	1401,30	1390,82	1380,32	1369,77

Table V
Measured EMF of the cell at 55 °C

H ₂ SO ₄ [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	1472,05	1461,33	1452,05	1445,06	1438,00	1431,20	1424,31	1418,34
25	1466,43	1456,00	1446,52	1439,40	1432,28	1425,22	1418,65	1412,64
50	1462,34	1451,86	1442,22	1434,41	1427,03	1420,05	1413,58	1407,28
75	1460,53	1450,30	1440,04	1431,58	1423,10	1416,42	1409,44	1402,55
100	1460,05	1449,65	1439,20	1429,99	1420,75	1412,56	1405,35	1398,19
125	1459,95	1448,87	1437,97	1427,77	1417,90	1408,80	1400,70	1393,40
150	1457,90	1445,75	1434,58	1424,42	1414,30	1404,47	1395,44	1387,72
175	1453,71	1441,60	1430,26	1419,92	1409,77	1399,60	1389,83	1381,16
200	1449,00	1437,01	1425,54	1414,96	1404,80	1394,34	1383,97	1373,98
225	1444,12	1432,20	1420,57	1409,67	1399,50	1388,60	1377,70	1366,31
250	1438,90	1426,91	1415,18	1404,04	1393,82	1382,43	1370,67	1357,80

having the same parameters calculated by a double interpolation amounts to 1,425 37 V; this shows an error in our measurement that is less than 0,15%.

By means of the Tables II, III, IV, V, the curves in Fig. 2 have been plotted. (As already mentioned, these data refer to a galvanic cell with a 2nd kind mercury electrode and a zinc-amalgam electrode, the measured EMF value of which varies with the temperature between 25 °C and 55 °C according to the contents of sulfuric acid and zinc, respectively.)

Table VI
Calculated activity of the zinc-sulfate at 25 °C

H ₂ SO ₄ [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	0,00031	0,00084	0,00161	0,00272	0,00375	0,00538	0,00852	0,01479
25	0,00031	0,00085	0,00170	0,00282	0,00429	0,00653	0,01081	0,01957
50	0,00031	0,00091	0,00190	0,00326	0,00529	0,00826	0,01445	0,02686
75	0,00031	0,00101	0,00219	0,00384	0,00655	0,01083	0,01999	0,03707
100	0,00032	0,00114	0,00255	0,00469	0,00827	0,01448	0,02771	0,05129
125	0,00034	0,00131	0,00304	0,00580	0,01069	0,01942	0,03789	0,07212
150	0,00040	0,00156	0,00372	0,00735	0,01396	0,02653	0,05291	0,10212
175	0,00046	0,00190	0,00461	0,00978	0,01876	0,03705	0,07474	0,14573
200	0,00053	0,00237	0,00587	0,01261	0,02554	0,05295	0,10775	0,21173
225	0,00065	0,00315	0,00761	0,01691	0,03713	0,07556	0,15752	0,31659
250	0,00081	0,00370	0,01016	0,02405	0,05407	0,11647	0,24931	0,51610

Both, the data in the table and the curves in the diagram lead to the final conclusion, that the EMF of this cell decreases with higher contents of both the sulfuric acid and the zinc, and also with increasing temperature.

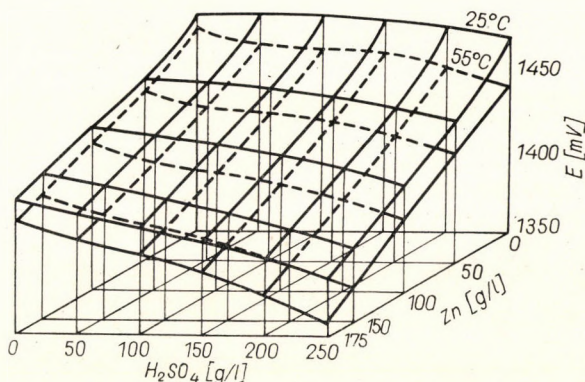


Fig. 2. Change of the EMF of the cell as functions of both the sulfuric acid and the zinc content in the electrolyte at 25 ° and 55 °C

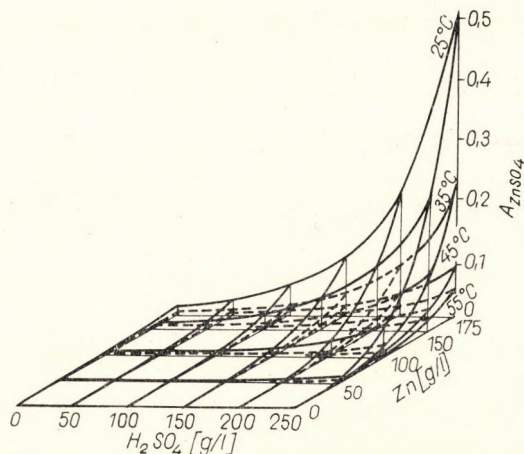


Fig. 3. Change of the activity of zinc sulfate in a sulfuric acid-zinc sulfate solution as function of both the sulfuric acid and the zinc content in the electrolyte at 25, 35, 45 and 55 °C

By relying on the measuring results in the Tables II, III, IV, V, we obtained, by calculating the activity of the zinc-sulfate which was in the solution tested. These calculated results are tabulated in Tables VI, VII, VIII, IX, referring to the temperatures of 25, 35, 45 and 55 °C, as functions of the varying composition of the electrolyte. Similarly, based on the tabulated values, the Fig. 3 contains the corresponding curves.

According to the calculated values (Tables VI, VII, VIII, IX; Fig. 3) the final conclusion can be worded as follows:

Table VII
Calculated activity of the zinc-sulfate at 35 °C

H_2SO_4 [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	0,00011	0,00025	0,00050	0,00079	0,00116	0,00174	0,00284	0,00480
25	0,00014	0,00031	0,00062	0,00103	0,00157	0,00244	0,00393	0,00689
50	0,00016	0,00036	0,00073	0,00128	0,00210	0,00333	0,00549	0,00987
75	0,00017	0,00041	0,00085	0,00154	0,00267	0,00442	0,00764	0,01363
100	0,00018	0,00044	0,00097	0,00184	0,00333	0,00582	0,01055	0,01867
125	0,00020	0,00049	0,00111	0,00220	0,00417	0,00765	0,01448	0,02632
150	0,00024	0,00053	0,00136	0,00275	0,00529	0,01030	0,02015	0,03764
175	0,00030	0,00074	0,00175	0,00361	0,00704	0,01431	0,02907	0,05563
200	0,00039	0,00098	0,00234	0,00489	0,00988	0,02065	0,04339	0,08616
225	0,00054	0,00135	0,00324	0,00688	0,01429	0,03088	0,06655	0,13982
250	0,00078	0,00194	0,00463	0,00999	0,02135	0,04742	0,10511	0,23542

The activity of the zinc sulfate in sulfuric acid—zinc sulfate solution increases with the increases of both the sulfuric acid and the zinc contents, and this increase is more intense with the latter; at the same time, the activity changes inversely with the temperature, whereby the increasing trend is especially conspicuous at the lower temperature values.

Table VIII
Calculated activity of the zinc-sulfate at 45 °C

H_2SO_4 [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	0,000041	0,000090	0,000177	0,000280	0,000433	0,000688	0,001054	0,001610
25	0,000055	0,000125	0,000248	0,000303	0,000640	0,001019	0,001629	0,002604
50	0,000065	0,000155	0,000308	0,000538	0,000892	0,001455	0,002511	0,004226
75	0,000070	0,000174	0,000346	0,000634	0,001169	0,002065	0,003763	0,006526
100	0,000078	0,000186	0,000383	0,000748	0,001474	0,002835	0,005415	0,009747
125	0,000092	0,000200	0,000443	0,000914	0,001738	0,003641	0,006347	0,013944
150	0,000111	0,000248	0,000556	0,001161	0,002342	0,004721	0,009697	0,018885
175	0,000137	0,000323	0,000731	0,001515	0,003099	0,006320	0,013201	0,026087
200	0,000177	0,000430	0,000995	0,002029	0,004213	0,008801	0,018596	0,037455
225	0,000238	0,000591	0,001393	0,002806	0,005988	0,012710	0,026958	0,055249
250	0,000334	0,000835	0,002003	0,004071	0,008801	0,018899	0,040644	0,087724

Table IX

Calculated activity of the zinc-sulfate at 55 °C

H ₂ SO ₄ [g/l]	Zn [g/l]							
	0	25	50	75	100	125	150	175
0	0,000016	0,000034	0,000066	0,000108	0,000178	0,000288	0,000469	0,000716
25	0,000024	0,000050	0,000098	0,000161	0,000263	0,000440	0,000700	0,001071
50	0,000032	0,000067	0,000132	0,000230	0,000487	0,000634	0,001021	0,001564
75	0,000036	0,000075	0,000154	0,000280	0,000511	0,000820	0,001343	0,002186
100	0,000037	0,000078	0,000164	0,000314	0,000604	0,001077	0,001793	0,002975
125	0,000038	0,000083	0,000179	0,000367	0,000738	0,001405	0,002491	0,004174
150	0,000044	0,000103	0,000227	0,000466	0,000952	0,001908	0,003613	0,006237
175	0,000059	0,000138	0,000308	0,000641	0,001312	0,002693	0,005373	0,009918
200	0,000082	0,000191	0,000430	0,000909	0,001864	0,003906	0,008131	0,016478
225	0,000116	0,000269	0,000611	0,001321	0,003598	0,008611	0,012667	0,028340
250	0,000167	0,000390	0,000895	0,001967	0,004052	0,009066	0,020822	0,051727

REFERENCES

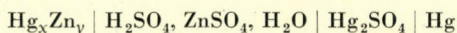
1. HORVÁTH, Z.: Die Ermittlung der energetisch und wirtschaftlich günstigsten Stromdichte in der Zinkelektrolyse. *Freiberger Forschungshefte B.* **34** (1959), 38—79.
2. HORVÁTH, Z.—SZIKLAVÁRI, K.: The Determination of the Economical Current Density in the Electrolysis of Aqueous Solutions. Księga jubileuszowa dla uczczenia zasług naukowych A. Krupkowskiego. Polska Akademia Nauk, Warszawa 1965; 205—210; Publications of the Technical University for Heavy Industry, Miskolc 1964; 187—191.
3. TARTAR, H. V.—NEWSCHWANDER, W. W.—NESS, A. T.: Thermodynamic Study of the System Zinc Sulfate—Sulfuric Acid—Water at 25 °C. *Journ. of the Amer. Chem. Soc.* **63** (1941), 28—36.
4. HARNED, H. S.—OWEN, B. B.: The Physical Chemistry of Electrolytic Solutions. Reinhold Publ. Co., New-York 1950.
5. HARNED, H. S.—HAMER, W. J.: The Thermodynamics of Aqueous Sulfuric Acid Solutions from Electromotive Force Measurements. *Journ. of the Amer. Chem. Soc.* **57** (1935), 27—33.
6. BROUTY, M. L.: Gmelins Handbuch, Zink (32). Ergänzungsband. Verlag Chemie, Weinheim 1956; 403.
7. CLAYTON, W. J.—VOSBURGH, W. C.: Zinc and Zinc-Amalgam Electrodes. *Journ. of the Amer. Chem. Society* **58** (1936), 2093—2096.
8. LENGYEL, S.—GIBER, J.: Theory of the Influence of Silver Halide on the Electromotive Force of Galvanic Concentration Cells with Silver Halide Second Class Electrodes. *Acta Chim. Hung.* **32** (1962), 235—262.

AKTIVITÄT DES ZINKSULFATS IN SCHWEFELSÄUREN ZINKSULFATLÖSUNGEN

Z. HORVÁTH und J. WÉBER

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden Experimente zur Messung der EMK eines



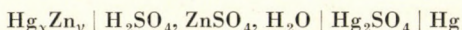
Galvanelementes beschrieben, die durchgeführt wurden, um die Aktivität des Zinksulfates in einer schwefelsäuren Lösung zu bestimmen. Die Konzentration der Lösung änderte sich zwischen 0 — 250 g/l Schwefelsäure, und 0 — 175 g/l Zink, und die Temperatur wurde auf 25, 35, 45 und 55 °C eingestellt. Aus den Experimenten ging hervor, daß die EMK dieses Elementes mit steigender Konzentration an Schwefelsäure und/oder an Zink abnimmt, und sie sinkt auch bei Erhöhung der Temperatur. Hingegen kann von der Aktivität des Zinksulfates ausgesagt werden, daß sie in dem bezeichneten Elektrolyt mit zunehmendem Inhalt sowohl an Schwefelsäure wie auch an Zink und mit sinkender Temperatur zunimmt.

ACTIVITÉ DU SULFATE DE ZINC DANS SES SOLUTIONS SULFATÉES

Z. HORVÁTH et J. WÉBER

RÉSUMÉ

Les auteurs rendent compte de leurs essais, au cours desquels la mesure de la force électromotrice d'une pile de composition



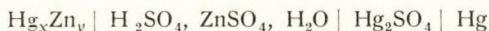
a permis de déterminer l'activité du sulfate de zinc dans sa solution sulfatée contenant 0 à 250 g/l d'acide sulfurique et 0 à 175 g/l de zinc, aux températures de 25, 35, 45 et 55 °C. Il ressort des essais que la force électromotrice de la pile en question est d'autant plus petite que le contenu en acide sulfurique et en zinc de la solution est plus élevé et que la température de travail est plus grande. Par contre, l'activité du sulfate de zinc dans l'électrolyte en question augmente avec le contenu en acide sulfurique et en zinc et avec l'abaissement de la température.

АКТИВНОСТЬ СЕРНИСТОГО ЦИНКА В СЕРНОКИСЛЫХ РАСТВОРАХ СЕРНИСТОГО ЦИНКА

З. ХОРВАТ и Й. ВЕБЕР

РЕЗЮМЕ

Работа является отчетом по экспериментам, целью которых было определение активности сернистого цинка при 25, 35, 45 и 55 °C, в сернокислых растворах, содержащих 0—250 г/л серной кислоты и 0—175 г/л цинка, путем измерения электродвижущей силы гальванических элементов, состоящих из



Исходя из результатов эксперимента, можно установить, что электродвижущая сила упомянутых гальванических элементов тем меньше, чем больше содержание серной кислоты и цинка в растворе, или же чем выше рабочая температура. Активность сернистого цинка, находящегося в электролите, напротив, возрастает с ростом содержания серной кислоты и цинка, а также с понижением температуры.

WAHL DER BETRIEBSCHARAKTERISTIKEN DES LUFTVERDICHTERS UND DES HAUPTLUFTBEHÄLTERS AN EISENBAHNTRIEBFahrZEUGEN AUF GRUND DER BETRIEBSANFORDERUNGEN

TEIL I*

G. HELLER und L. ROSTA

UNGARISCHE STAATSBAHNEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 1. Oktober, 1965]

Die Abhandlung liefert vor allem die Prinzipien zur Dimensionierung des Verdichters und des Hauptluftbehälters mit der Absicht, die bisher übliche empirische Wahl der Parameter mit einer logischen, den betriebstechnischen Überlegungen besser entsprechenden Rechenmethode zu ersetzen. Nach einer Beleuchtung der bremsstechnischen Anforderungen folgt die Analyse des Druckluftbedarfes und des Zusammenhanges zwischen den Kennziffern des Führerbremsventils und jenen des Verdichters und des Hauptluftbehälters. Die durch diese Untersuchungen erhaltenen Kenntnisse ermöglichen die Aufstellung von Gleichungen, die geeignet sind, eine zweckdienliche Dimensionierung durchzuführen. Auf Grund dieser Resultate übernehmen die Verfasser eine kritische Beleuchtung des diesbezüglichen ORE-Merkblattes und schlagen eine Ergänzung der darin enthaltenen Vorschriften vor. Abschließend wird noch auf gewisse Beziehungen hingewiesen, durch welche sowohl in der derzeitigen Lösung wie auch in der zu erwartenden Weiterentwicklung der aktuellen Probleme die Druckluftzerzeugung und Druckluftspeicherung günstig beeinflusst werden können.

I. Einführung

Man benötigt eine ungeheure Druckluftmenge um die Druckluftbremseinrichtung und dazu noch die verschiedenen pneumatischen Hilfsvorrichtungen an Eisenbahnfahrzeugen in Betrieb zu halten. Die an diesen Fahrzeugen eingebauten Einrichtungen zum Erzeugen und Speichern von Druckluft sollen die notwendige Druckluftmenge unter dem gewünschten Druck und zum richtigen Zeitpunkt den Verbrauchsorganen zur Verfügung stellen. Im Laufe der Zeit hat sich in der Konstruktionspraxis der Fahrzeugbauer die Gewohnheit eingebürgert, all die Hauptabmessungen und Grundkennziffern des Verdichters und des Hauptbehälters nach üblich gewordenen Angaben bzw. im Wege einer groben, beiläufig als richtig empfundenen Rechenweise zu bestimmen. Diese Methode hat sich für eine ziemlich lange Zeit bewährt, da die bremsstechnischen Ansprüche an die Druckluftversorgung nicht besonders streng gewesen sind, und die heute fühlbaren Grenzmöglichkeiten der Druckluftversorgung noch nicht feststellbar waren. In unseren Tagen ist es aber als Ergebnis einer allmählichen Entwicklung offenkundig geworden, daß eine Lokomotive oder ein

* Das Schrifttum und die Zusammenfassung in englischer, französischer und russischer Sprache wird am Ende des zweiten Teils bekanntgegeben [*Acta Techn. Hung.* 57 (1967), 3-4].

Motorwagen den heute gestellten technischen Anforderungen nur entsprechen kann, wenn die Hauptcharakteristiken des Luftverdichters und des Hauptbehälters den gesteigerten Betriebsbedingungen vollauf entsprechen. Unsere Abhandlung soll die Prinzipien und das Berechnungsverfahren einer solchen Dimensionierung klarlegen.

II. Grundbedingungen

Wenn wir von einwandfreier Druckluftversorgung eines Eisenbahnzuges sprechen, so lassen sich folgende Grundbedingungen aufstellen:

a) Die Druckluft soll in der benötigten Menge mit dem vorgeschriebenen Druck und rechtzeitig zur Verfügung stehen;

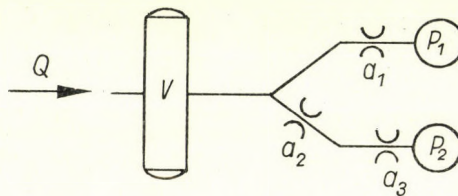


Bild 1

b) diese Druckluftmenge soll an die Verbrauchsstellen nur mit der unter den gegebenen Betriebsumständen höchstzulässigen Verspätung ankommen.

Nun ist es klar, daß sich die Erfüllung der Bedingung unter a) durch ausreichende Erzeugung und richtige Aufspeicherung der Druckluft, die Erfüllung der Bedingung unter b) durch entsprechende Ausführung der Verteilungsorgane sichern läßt.

In Bild 1 sehen wir die schematische Anordnung des pneumatischen Systems eines Eisenbahntriebfahrzeuges.

Im Sinne des in Bild 1 dargestellten Schemas wird die unter a) aufgestellte Bedingung erfüllt, falls die Lieferleistung Q des Verdichters mit dem im Fassungsraum V des Hauptluftbehälters unter entsprechendem Druck aufgespeicherten Luftvorrat zusammen ausreicht, die Ansprüche P_1 und P_2 befriedigen; ferner wird die unter b) aufgestellte Bedingung erfüllt, wenn die engen Querschnitte a_1 , a_3 im Verteilersystem für die rechtzeitige Luftversorgung kein größeres Hindernis als das zugelassene bereiten.

Mit dem Zeichen a_1 wird der Widerstand der pneumatischen Hilfseinrichtungen, mit a_3 der Gesamtwiderstand der Hauptluftleitung und der Druckluftbremsen der einzelnen Fahrzeuge und mit a_2 der enge Querschnitt des Führerbremventils symbolisiert.

Der Widerstand a_1 ist für uns praktisch genommen bedeutungslos, und wir wollen uns damit nicht befassen.

Der Widerstand a_3 ist von der Zusammenstellung, der Länge und dem Betriebszustand des Zuges abhängig. Größtenteils ist dieser Widerstand bei ausreichender Luftversorgung und im Falle mehrlösiger Bremsen der entscheidende Faktor, von welchem — unter gegebenen Betriebsumständen — die möglichst kürzeste Lösezeit der Druckluftbremseinrichtungen des Zuges bestimmt wird.

Der Querschnitt a_2 ist das Hauptmerkmal zum Kennzeichnen der Durchlaßfähigkeit des Führerbremventils. Je weniger sich dieser Querschnitt als enge Stelle bemerkbar macht, um so vollkommener ist das Funktionieren des Führerbremventils.

Die unter $a)$ — $b)$ aufgestellten Bedingungen beziehen sich auf das gesamte pneumatische System des Zuges. Wir verfolgen aber nicht eine allumfassende Analyse der gesamten Einrichtung. Unser Ziel ist, die Methode der richtigen Wahl der Merkmale und Parameter eines Luftverdichters und eines Druckluftbehälters auszuarbeiten. Zu diesem Behufe wollen wir vor allem die technischen Anforderungen feststellen, denen der Verdichter und der Hauptluftbehälter entsprechen sollen.

III. Bestimmung der im Betrieb je Stunde benötigten Druckluftmenge

Die je Stunde benötigte Druckluftmenge ergibt sich als die Summe der Luftverbrauches sämtlicher Bedienungsstellen:

$$\begin{aligned} M_{gh} &= M_{bh} + M_{hh} + M_{vh} = \\ &= n \cdot M_b + (t_{hs} \cdot f_{hs} + t_{hh} \cdot f_{hh} + 60 \cdot f_{hr}) + 60 mv \text{ [l/h] }, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei die obigen Zeichen folgende Bedeutung haben:

M_{gh} [l/h]	stündlicher Gesamtluftbedarf;
M_{bh} [l/h]	stündlicher Luftverbrauch im Falle von vollkommen dichten Bremsvorrichtungen;
M_{hh} [l/h]	stündlicher Luftverbrauch der pneumatischen Hilfseinrichtungen;
M_{vh} [l/h]	stündlicher Mehrverbrauch infolge undichter Stellen;
n [1/h]	Anzahl der Bremsoperationen je Stunde;
M_b [l]	Gesamtrauminhalt, auf den atmosphärischen Druck umgerechnet, der von sämtlichen Bremsvorrichtungen des Zuges während einer Bremsoperation insgesamt verbrauchten Druckluftmenge;
t_{hs} [min/h]	Betriebszeit der Sandstreu-Vorrichtung je Stunde;
f_{hs} [l/min]	Luftverbrauch der Sandstreu-Vorrichtung je Minute;
t_{hs} [min/h]	Betriebszeit des pneumatischen Signalhorns binnen einer Stunde;
f_{hh} [l/min]	Luftverbrauch des Signalhorns je Minute;
f_{hr} [l/min]	Luftverbrauch sonstiger pneumatischer Hilfsvorrichtungen je Minute;
m	Wagenzahl des Zuges;
v [l/min/Wagen]	spezifischer Luftverlust infolge Undichtigkeit.

Die konkreten numerischen Werte dieser Kenngrößen ergeben sich nach entsprechender Erwägung der maßgeblichen Betriebsverhältnisse. In den Tafeln I und II haben wir auf Grund der tatsächlichen Betriebsverhältnisse in Ungarn die Angaben von 10 verschiedenen »maßgebenden Zugtypen« der MÁV (Ung. Staatsbahnen) zusammengestellt.

Tafel I

Für die Druckluftbremsung wichtige Angaben der maßgebenden MÁV-Züge

Typen Zeichen	Zugart	Zahl der Wagen, m	Achsenzahl	Verhältniszahl der mit Bremsen versehenen Wagen, %	Bremsart	Anzahl der Bremsungen pro Stunde, n	Luftbedarf pro Bremsung, M_b [l]	$n \cdot M_b$ [l/h]
I.	Personenzug, 2-achsige Wagen	25	50	100	P	12	1 940	23 280
II.	Personenzug, 4-achsige Wagen	20	80	100	P	12	1 780	21 360
III.	Personenzug, 4-achsige Wagen	20	80	100	R	7	3 080	21 560
IV.	Güterzug (Eilzug)	30	150	100	P	7	1 790	12 530
V.	Güterzug (normal)	75	20	74,6	G	8	3 880	31 040
VI.	Personenzug, 2-achsige Wagen	10	20	100	P	15	860	12 900
VII.	Personenzug, 4-achsige Wagen	6	24	100	P	15	650	9 750
VIII.	Güterzug (normal)	50	100	76	G	7	2 590	18 130
IX.	Güterzug (normal)	30	60	76,5	G	8	1 560	12 480
X.	Motorzug	4	16	100	R	7	560	3 920

Bemerkung: Der Zahlenwert M_b ergibt sich aus der Voraussetzung, daß das Luftvolumen im Bremszylinder der Lokomotive dem Luftvolumen von 2 Wagenbremszylindern gleichgesetzt werden kann. Bei einem Zug aus m Wagen ist die Gesamtzahl für Luftverbrauch $(m+2)$.

Tafel II

Kennwerte des Luftverbrauches von pneumatischen Hilfseinrichtungen an maßgebenden MÁV-Zügen

Art des Triebfahrzeugs	Zugart	Daten des Sandstreuapparates			Daten des pneumatischen Signalhorns			$60 \cdot f_{hr}$ [l/h]	M_{hh} [l/h]
		t_{hs} [min/h]	f_{hs} [l/min]	$t_{hs} \cdot f_{hs}$ [l/h]	t_{hh} [min/h]	f_{hh} [l/min]	$t_{hh} \cdot f_{hh}$ [l/h]		
Dampflokomotive	Personenzug	1	700	700	—	—	—	—	700
	Güterzug	4	700	2 800	—	—	—	—	2 800
Motor- und elektrische Lokomotive	Personenzug	0,5	700	350	2	750	1 500	9 000	10 850
	Güterzug	2	700	1 400	2	750	1 500	9 000	11 900
Motortriebwagen	Motorzug	0,5	700	350	2	750	1 500	9 000	10 850

Gegebenenfalls — z. B. Bahnstrecken mit langen steigenden Abschnitten — sollen andere Verbrauchswerte als die in den Tafeln angeführten in Rechnung gestellt werden.

Der spezifische Verlust v bewegt sich zwischen weiten Grenzen ($v = 5-16$ l/min pro Wagen); allgemein ist der Zustand der Dichtungen in Personenzügen verlässlicher als in Güterzügen. Dieser Kennwert ist zugleich charakteristisch einerseits für das Niveau der Instandhaltung des gegebenen Bahnbetriebes, andererseits für den Gütegrad der Arbeit des Zugvorbereitungspersonals.

In Gleichung (1) haben wir die *erste Anforderung* formuliert, die wir von der Luftversorgung des Triebfahrzeuges verlangen; *der Verdichter soll nämlich stündlich mindestens eine dem Gesamtanspruch M_{gh} entsprechende Druckluftmenge zu liefern fähig sein.*

IV. Verteilung des Druckluftverbrauches in der Zeit

Die Verteilung der durch Gleichung (1) bestimmten, stündlich insgesamt benötigten Druckluftmenge M_{gh} in der Zeit ist bei weitem nicht gleichmäßig, vielmehr läßt sich der Verlauf des Luftverbrauches — in grober Annäherung — gemäß des Diagramms in Bild 2 charakterisieren. Der minutlich insgesamt benötigte Verbrauch $M_{g\ min}$ [l/min] der gelösten Bremseinrichtungen ist verhältnismäßig gering; hingegen ist der Verbrauch in der Periode des Lösens ungeheuer groß.

Dieser Anspruch steigt vorübergehend während eines Lösevorganges derart mächtig an, daß man überhaupt nicht daran denken kann, einen Verdichter zu bauen, welcher zur momentanen Befriedigung dieses Anspruches geeignet wäre. Also ist der Einbau eines Hauptbehälters — der sonst schon für die entsprechende Luftkonditionierung (zum Niederschlagen der Dämpfe und der Verunreinigungen) angezeigt ist — sogar als Speicherorgan unentbehrlich. Die in der Periode des geringen Luftverbrauches aufgespeicherte Druckluftmenge des Hauptbehälters ist die Reserve, die dem Verdichter hilft, das Lösen effektiv zu vollbringen, das allein durch die Verdichterleistung nicht durchführbar wäre.

Hieraus läßt sich die *zweite Anforderung* der Luftversorgung folgenderweise formulieren: Die vereinigte Lieferleistung des Verdichters und des Hauptbehälters soll die zum Lösen der Bremsvorrichtungen des Zuges benötigte Druckluftmenge unter den gegebenen Betriebsverhältnissen in der kürzesten Zeitspanne den Bremsvorrichtungen zuführen, die durch das Funktionieren der Steuerventile der gebremsten Fahrzeuge und des Triebfahrzeug-Führerbremsventils überhaupt möglich ist. Kurz und gut, eine Verlängerung der Löseperiode infolge eines Luftmangels ist unzulässig.

Die genaue quantitative Formulierung dieser Anforderung wäre nur im Wege einer höchst komplizierten mathematischen Analyse durchführbar. Ferner gibt es bei der überall vorherrschenden Vielfältigkeit der Betriebsverhältnisse im Eisenbahndienst nicht einmal zwei Züge, bei denen der Lösevorgang

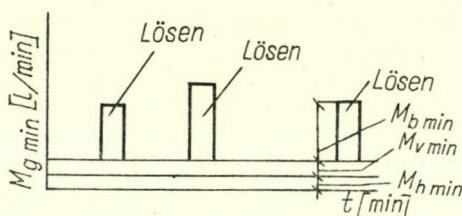


Bild 2

derselbe wäre. Es wird also zweckmäßiger sein, das Problem des Lösevorganges qualitativ zu analysieren, um die Bedeutung der zweiten Anforderung besser kennen zu lernen.

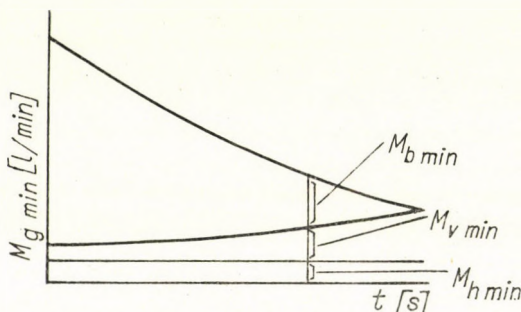


Bild 3

Ein solches Verfahren, ergänzt durch praktische Meßresultate, verhilft uns zu einem brauchbaren Berechnungsvorgang, der sich auch für die Konstrukteure als nützlich erweisen wird.

In Bild 3 sehen wir — schematisch — den zeitlichen Verlauf des Luftverbrauches während eines Lösevorganges. Der momentane Luftanspruch $M_{b, \min}$ [l/min] ist zu Anfang der Löseperiode äußerst groß, er sinkt aber degressiv bis zum Ende dieser Periode.

Selbstredend ist der Luftverbrauch der pneumatischen Hilfsbetriebe $M_{h, \min}$ [l/min] vom Lösevorgang unabhängig; sein Wert kann als konstant angenommen werden. Dagegen ist anzunehmen, daß die Undichtigkeitsverluste $M_{v, \min}$ [l/min] im Laufe des Lösens (d. h. infolge des Auffüllens der Bremsapparate und der Hauptleitung) während dieser Zeitperiode leicht progressiv zunehmen, wobei diese Progressivität infolge des degressiven Charakters des Lösevorganges verlangsamt wird.

In Bild 4 ist der Verlauf der maximalen Durchlaßfähigkeit q [l/min] des Führerbremventils während des Lösevorganges dargestellt. Die Strecke $O - x$ der Kurve entspricht der kurzen Zeitperiode, in welcher das Führerbremventil in Füllstellung arbeitet. Für diese kurze Periode ist die Durchlaßfähigkeit ca. $5 \div 10\,000$ l/min. Die Dauer t_{xy} der anschließenden »Niederdruck-Füllperiode«, und folglich auch der Verlauf der Durchlaßkurve im Abschnitt $x - y$ hängt stark von der konstruktiven Ausbildung des Führerbremventils ab. Es sei bemerkt, daß bei den modernen sogenannten »druckerhaltenden« Ventilen die gesamte Löseperiode t_l womöglich kurz, binnen dieser aber die »Niederdruck-füllperiode« t_{xy} möglichst lang gehalten wird. Während dieser Periode sinkt

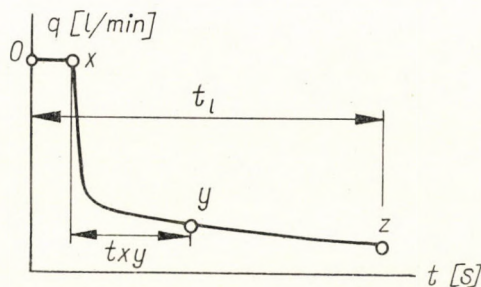


Bild 4

die Durchlaßfähigkeit des Führerbremventils bis zum Wert, der der Fahrtstellung entspricht. Also entspricht der letzte Abschnitt der Kurve $y - z$ schon dieser Fahrtstellung einem Durchlaß von ungefähr 2000 l/min. Im Diagramm bezeichnet nun t_l [s] die Dauer des gesamten Lösevorganges, in dessen Endzeitpunkt der Hebel sich in Fahrtstellung befindet.

Wird die brauchbare Luftreserve des Hauptbehälters gegen Beendigung des Lösevorganges erschöpft, so ist die Kurvenstrecke $y - z$ stark degressiv. Ansonst ist der Kurvenverlauf q vor allem vom jeweiligen Druck im Hauptluftbehälter und noch von manchen Begleitumständen, z. B. von der Zusammensetzung der Zuggarnitur abhängig.

Es liegt auf der Hand anzunehmen, daß eine der Grundbedingungen zur Sicherung eines tadellosen Lösevorganges im richtigen Wert des Verhältnisses zwischen der, durch das Führerbremventil notwendigerweise zum Durchströmen bestimmten Gesamtluftmenge

$$M_{b,\min} + M_{v,\min}$$

und der Durchlaßfähigkeit q des Führerbremventils besteht, wobei die Größe q von vielen Faktoren abhängt. Hierzu verweisen wir auf Bild 5, in dem die 4 typischen Betriebsfälle dargestellt sind.

Das Diagramm 5a bezieht sich auf den Fall, in welchem die Bedingung:

$$q \geq M_{b,\min} + M_{v,\min} \quad [\text{l/min}] \quad (2)$$

auf die gesamte Löseperiode erfüllt ist. In diesem Falle liefern der richtig gewählte Verdichter und Hauptluftbehälter in jedem Augenblick die momentan benötigte Luftmenge, und der Lösevorgang der Bremsvorrichtungen ver-

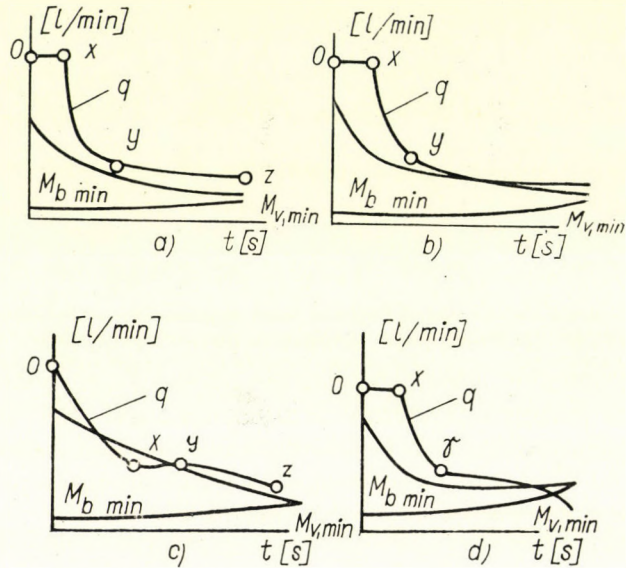


Bild 5

läuft in einer Zeitperiode, die durch die eigenen Parameter des Zuges determiniert ist.*

Unter den Verhältnissen im Bild 5b wird gegen Ende der Löseperiode der Fall

$$q < M_{b,\min} + M_{v,\min} \quad [\text{l/min}] \quad (3)$$

vorkommen, zugleich aber ist

$$q > M_{v,\min} \quad [\text{l/min}]. \quad (4)$$

Also geht der Lösevorgang ohne weiteres vor sich, doch ist die Löseperiode (t_l) länger als das Minimum, welches durch die Eigenparameter der Bremsvorrichtungen determiniert wäre.

* Wir können hier auf die ausführliche Analyse nicht eingehen und stellen nur kurz fest, daß das komplette Lösen — selbst bei mehrlösigen Steuerventilen — bei einem Überdruck von 4,85 atü, also unter 5 atü erfolgt. Wir lassen aber diesen günstigen Umstand außer acht.

In dem Falle, der durch das Diagramm 5c dargestellt ist, steht im Endzeitpunkt der Löseperiode die durch (2) bestimmte Luftmenge zur Verfügung. Doch geht das Lösen nicht ungestört vor sich, da der Luftvorrat im Hauptluftbehälter zu Ende des Abschnittes $\overline{o - \bar{x}}$ übergangsweise erschöpft, also der Druck im Behälter gesunken ist, und die Ungleichung (3) wird so lange gültig, bis der Druck im Hauptluftbehälter im Verlaufe des Abschnittes $\overline{x - y - z}$ irgendwann wieder den benötigten Wert erreicht.

In dem Falle, der durch das Diagramm 5d charakterisiert ist, besteht während eines gewissen Zeitabschnitts die Ungleichung

$$q < M_{v,\min} \quad [l/\min], \quad (5)$$

d. h. es ist ein einwandfreies Lösen unmöglich.

Zusammenfassend: Fall 5a entspricht einem störungsfreien Betrieb; die Fälle 5b und 5c bedeuten beanstandbare Zustände; Fall 5d ist ein unzulässiger Betriebsfall.

Wenn wir also für den Verdichter und den Hauptluftbehälter betriebstechnisch einwandfreie Parameter wählen wollen, so ist diese Wahl an die Erfüllung der Bedingung laut Gleichung (2) gebunden; mit anderen Worten: als maßgebender Faktor soll während des Lösevorganges nicht die momentan verfügbare — also nutzbare — Druckluftmenge, sondern in jedem Moment der Löseperiode die Luftaufnahmefähigkeit der Bremsstellen und eventuell die Durchlaßfähigkeit des Führerbremsventils betrachtet werden.

INVESTIGATION ON GRINDABILITY OF LIMESTONE AND ROCK-SALT MIXTURE IN A HARDGROVE MILL

K. REMÉNYI

HUNGARIAN ELECTRIC POWER PLANTS, BUDAPEST

[Manuscript received September 15, 1965]

Grinding and grindability experiments were carried out in a Hardgrove mill on mixture of limestone and rock-salt with mixture ratios of 1 : 3, 1 : 1, 3 : 1, with the view to examining the crushing mechanism of the mixture. In grinding homogeneous substances, it had been ascertained that, within a certain space of time an exponential correlation with negative exponent exists between the size modulus of the ground product determined in the RRB system and the milling time. By determining the weight per cent of one of the components in the size fractions of the mixed ground product, and by plotting the values found against the grain sizes, a curve with an end value will be obtained. The curves corresponding to the different feed compositions are plotted in comparison to each other in such a manner that the geometrical locuses of the points representing the original feed composition form a straight line. The size distribution curves of the components of the ground product mixture follow a regular distribution characterizing homogeneous substances. In determining the Hardgrove index of the mixtures, the principle of the undisturbed superposition cannot be applied. The investigations carried out show that at the mill in question the size reduction process depends on the particle size of the original feed material.

I. Introduction

The majority of basic materials to be worked up by the production processes, are not homogeneous but are the mixture of different materials. Generally in these cases, the raw mixtures of the materials are charged into the mill, and the size distribution of the ground product will be developed by being ground simultaneously. A question of significance is: what proportions of the components are contained in the different size fractions? Mostly, even the production process is greatly influenced by the composition of the fractions. As a significant example the case of grinding of pulverized coal for boilers fired with this combustible may be mentioned. On grinding of coal, even in the case of a single coal rank, is dealing with simultaneous grinding of components more or less selected, dependent on the coal rank. If, for instance, only the ash-producing ingredients and pure coal are considered as components, i.e. during grinding the gradually growing segregation of the ash-forming constituent (containing also several ingredients) is assumed, we are already confronted by a system of two components. In his detailed analyses, BASSA [6] previously demonstrated that on grinding of coal, the finer fractions of the ground product will be enriched by ashes, and by this, the energy required

by grinding will be unnecessarily increased and the scorfication of the boilers unfavourably influenced. The case is even more complicated if simultaneous grinding of different coal ranks is needed. Examples can also be mentioned from other fields of practics, as, for instance, preparation of additives of several components in the chemical industry and in metallurgy. This investigation was intended primarily to provide information on the grinding conditions of coal mixtures. As, however, the coals of Hungary are of very dissimilar compositions, we did not begin as a first step by investigating the grinding of systems of two or more components using coal mixture but by using limestone and native salt which are more suitable for investigations of such a character.

II. Grinding of a binary mixture of limestone and rock-salt

The most important objective of the investigations was the analysis of the grinding mechanism of binary mixtures. Two substances, i.e. limestone and rock-salt were chosen for test samples these being very different concerning their grindability and easily separable in the ground product. The hardness of limestone according to Mohs' hardness scale is 3—3,5 and that of rock-salt is 2. Accordingly limestone is the harder and rock-salt the softer component in the mixture. The difference in hardness of the two substances is not very considerable, thus the relative hardness, initiated by T. TANAKA may be considered advantageous from the point of view that when grinding the mixture, the required comminution of both components may be ensured. In recent years several papers in a rather detailed manner dealt with the problem of grinding of mixtures. However, only too few conclusions to be generalized may be drawn from these papers and a number of uncleared questions remained which have to be solved.

III. Experimenta I method

Experiments were carried out in Hardgrove mill on grinding of mixtures of limestone and rock-salt. The materials fed into the mill were prepared in compliance with the prescriptions *ASTM D No. 409*. Accordingly, fifty gram samples of a grain size between 1190 and 590 microns were fed into the mill. This latter had been provided with an apparatus for disconnecting and stopping of the grinding plate after a run of 60, 100, 200, 300, 400 and 500 grinding revolutions.

Grinding of the components were carried out at each of the given revolutions, while the exploratory grinding of the mixtures was performed only with 60 and 500 revolutions.

By choosing a longer grinding time we wanted already to obtain the regular size distribution, corresponding to the process condition becoming permanent. The range of the very fine grinding, for which other laws than those at the investigations in question are valid, wished to be avoided.

Investigations were carried out at an approximately constant air humidity of 45 ± 1 per cent, and at an ambient temperature of $20 \pm$ centigrade, mainly on account of the moisture adsorption propriety of salt.

For fractioning of the ground products, in the size range of 8 to 56 microns, a Bahco apparatus, and beyond that range of size a sieving equipment operated by a vibrating mechanism was used.

The salt component was dissolved from the ground product mixed with water. Between the solubility of the limestone and that of the salt there is a difference of several orders of magnitude, accordingly the method of separation of the two components, practically did not cause a perceptible error. The error induced by the occasional sticking together of the fine particles in consequence of humidity, was eliminated by taking as first step the determinations of the size distribution the separation of the ground product into the size fractions to be examined. Salt was dissolved from these fractions and thus, in defining the weight distribution, no error was caused by the incidental sticking together of the grains. The limestone particles which remained after the dissolution, were retained by a filter paper.

In the experiments carried out with 60 revolutions on every mixing ratio, the results of a series of 10 successive grindings and in the experiments carried out with 500 revolutions, the results of a series of 3 successive grindings were evaluated. No significant deviations occurred in the measurements. Mixing proportions were chosen for 3 : 1, 1 : 1, 1 : 3.

IV. Experimental results

The size distribution curves obtained after grinding of pure limestone and rock-salt with different numbers of revolution are shown in Figs 1 and 2.

The distribution curves are plotted in a Rosin—Rammler net. The diagram net corresponding to the logarithmically normal distribution, in spite of its advantages was not applied because in this latter, as a consequence of the upwards bending of each of the size distribution curves it was impossible to judge when the regular size distribution characterizing the steady-state condition of the process was developed. The size distribution curves show that the procedure of the grinding of limestone had become practically permanent after 300 to 400 revolutions, while the procedure of grinding of the salt shows the set-in of the steady-state condition already after 60 revolutions.

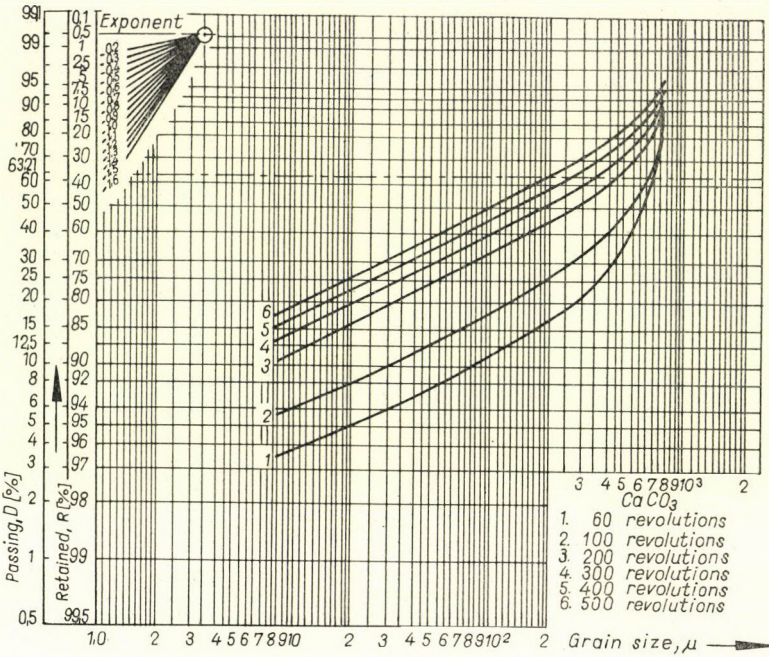


Fig. 1. Size distribution curves of ground products of limestone for different grinding times

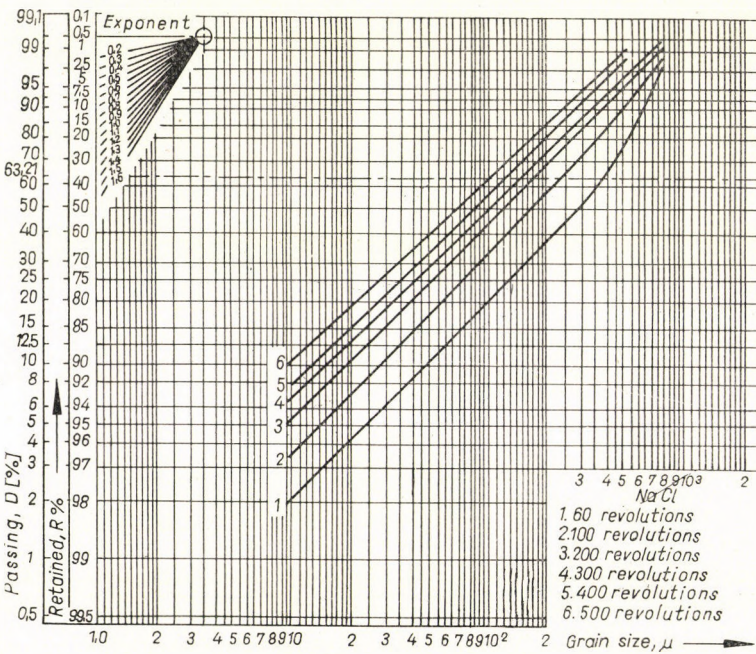


Fig. 2. Size distribution curves of ground products of rock-salt for different grinding times

The values of the size distribution exponent and those belonging to the 36,8 per cent of retained material for the different grinding times are given in Table I.

Table I

Grinding time, number of revolutions	Limestone		Rock-salt	
	d'	n	d'	n
60	—	—	380	1,06
100	—	—	205	1,05
200	500	0,55	147	1,04
300	325	0,55	128	1,03
400	235	0,55	106	1,02
500	175	0,55	88	1,00

Representing the values of the size modulus d' in a log-linear coordinate system the points take place on a straight line at the grinding times between 200 and 500 revolutions. The same phenomenon is to be found in the experiments described in [4]. It follows from this that the size modulus decreases with the grinding time according to an exponential function with negative exponent.

Figs 3 and 4 show size distribution curves of the mixtures of limestone and rock-salt in grindings with 60 and 500 revolutions. The size distribution curves of pure salt and pure limestone intersect at 60 revolutions at about 28 microns, and at 500 revolutions at about 40 microns. On the basis of Figure 3 it can be ascertained that at the beginning of the comminution procedure the size distribution curves of the ground product of the mixtures compared to the more difficultly grindable limestone component in the range beyond about 20 microns will be displaced towards the range of finer ground products, i.e. they will be positioned above the range of 20 microns. In a later phase of the comminution, according to Fig. 4 the size distribution curves of the ground products containing 75 per cent and 50 per cent limestone, are running in the whole range under the size distribution curve pure limestone, while the characteristic curve of the ground product containing 25 per cent of limestone takes place up to about 50 microns above, and in the range of finer sizes under this latter. The size distribution diagrams of the mixed ground products intersect in a point at about 25 microns.

After determining the resulting size distribution curves of the mixed ground products the products were divided into sized fractions, by dissolving the salt content the values of the weight per cent of the limestone and rock-salt compositions of the different fractions were determined.

The values obtained for the compositions of the different fractions of products ground with 60 and 500 revolutions, are shown in Figs 5 and 6.

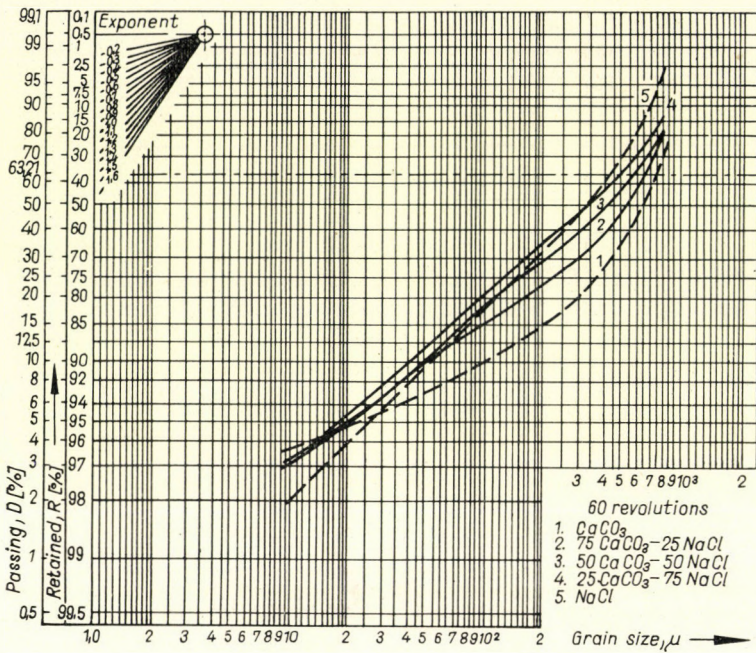


Fig. 3. Size distribution curves of limestone and rock-salt mixtures on grinding at 60 revolutions

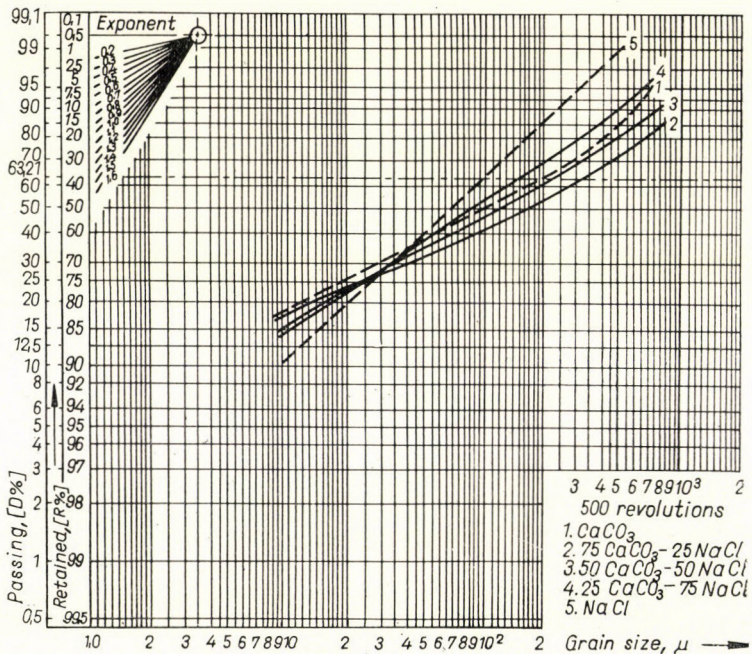


Fig. 4. Size distribution curves of limestone and rock-salt mixtures on grinding at 500 revolutions

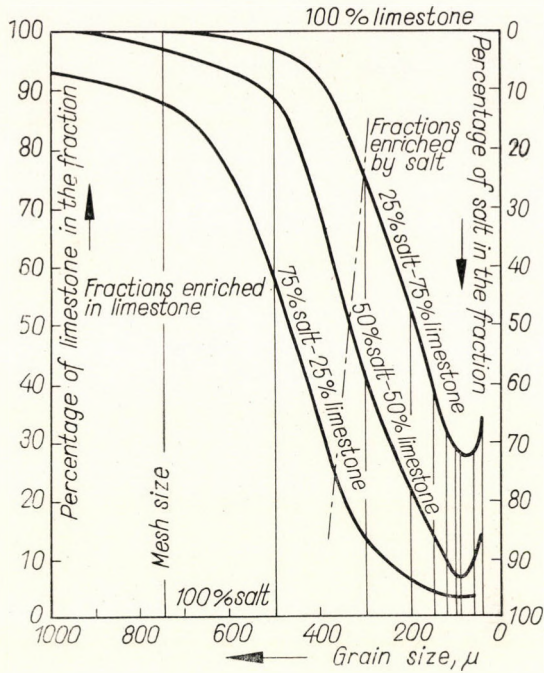


Fig. 5. Composition of size fractions (60 revolutions)

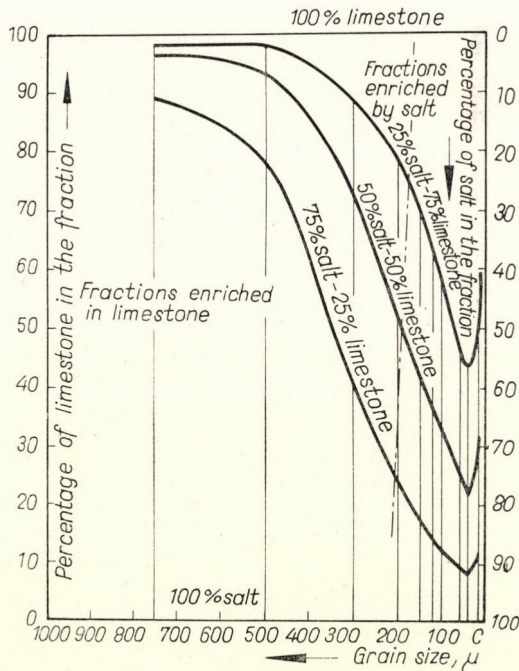


Fig. 6. Composition of size fractions (500 revolutions)

The diagram was plotted in such a way that by treating the fraction examined, the percentage of the limestone determined by dissolution was drawn as an ordinate against the grain size belonging to the lower limit of the fraction and taken as abscissa axis. Thus, for instance, in Fig. 5 the ordinate drawn over the value of 500 microns of the abscissa axis shows on the diagram determined by the parameters of 75% salt and 25% limestone that the size fraction between 500 and 750 microns of the ground product formed by 60 revolutions from the feed materials composed according to the initial parameters, contains about 75 per cent of limestone and about 43 per cent of salt. The abscissa axis gives the diagram of 100 per cent salt, and the straight line drawn at the value of 100 per cent, parallel with the abscissa axis, gives the diagram of pure limestone. With the increase of the initial limestone content, the diagrams are displaced upwards. From the lines of the diagrams some conclusions may be drawn in respect to the kinetics of grinding. As it is to be seen in Fig. 5, in the ground product formed by grinding of the feed material containing 75,50 per cent of limestone, with 60 revolutions, the fractions coarser than certain limit grain size, are practically composed of pure limestone. With the increase of the limestone weight percentage, the limit particle-size decreases.

If the grinding time is lengthened, for instance up to 500 revolutions, the lines of the characteristic curves remain similar, however, on the mixture ratios examined no limit grain-sizes could be found. In the ground product formed of a feed material of the same mixture ratio but during a longer grinding time, the characteristic curve representing the limestone content of the size fractions creeps upwards in the range of finer particle sizes but all of the coarser fractions contain salt too. From this the conclusion may be drawn which, by the way had also been observed by T. TANAKA [3], i.e. that in the course of the grinding time, the rates of the grinding energy consumed by the different components, are variable.

In a mixture of limestone and rock-salt, the coarser fractions of the limestone will be ground, as it may be assumed, initially with more difficulty, and as limestone is the harder component, it promotes the grinding of salt. Besides, in the mixtures ground with 500 revolutions, the grain composition of the components already reached a regular size distribution.

By connecting the points of the curves corresponding to the initial composition of limestone and rock-salt as is to be seen in Figs 5 and 6, the plane of interpretation may be divided into two parts. In the coordinate system drawn as is shown in the figures, on the left-hand side of the straight line connecting the above-mentioned characteristic points of the curves, lie the fractions of the ground product enriched in limestone, and at the right-hand side those enriched by salt. Examining the size distribution curves of the fractions with different limestone contents, ground with both 60 and 500 revolutions, it was

found that the points corresponding to the initial feed composition, take place in a straight line.

On continuing the examination of the characteristic curves of composition of the fractions it can be ascertained that they have end values. In paper [9] it is proved that, in the mixture of the ground having no similar size distribution curves, the product of fractions would be possible according to the characteristic curves shown in Figs 5 and 6. Using the symbols of the mentioned paper, by mixing the ground components *A* (limestone) and *B* (rock-salt) in proportions c_A and c_B , the percentage by weight of the components *A* and *B* of the fraction falling between the limits of the interval $x_1 \leq x \leq x_2$ of the resultant, will be determined by appropriate weighting of the area of the density functions lying in the range examined. In case of functions with tracings according to choice, the fraction examined contains component *A* in a percentage by weight given by the following formula:

$$G_{A\%}(x_1, x_2) = \frac{c_A \cdot s_A(x_1, x_2)}{c_A \cdot s_A(x_1, x_2) + c_B \cdot s_B(x_1, x_2)} \cdot 100\%, \quad (1)$$

where

$G_{A\%}(x_1, x_2)$ is the weight per cent of component *A* falling in the interval $x_1 \leq x \leq x_2$;
 c_A, c_B are the proportions of components *A* and *B*, respectively, in the resulting ground product mixture;
 $s_A(x_1, x_2), s_B(x_1, x_2)$ are the areas of the ground product density functions of components *A* and *B* resp. falling in the range $x_1 \leq x \leq x_2$.

By narrowing the range of fractions beyond all limits, i.e. by forming limit transition $\Delta x \rightarrow 0$, we obtain:

$$G_{A\%}(x) = \frac{c_A \cdot s_A(x)}{c_A \cdot s_A(x) + c_B \cdot s_B(x)}, \quad (2)$$

where $s_A(x), s_B(x)$ are the values of the density functions at locus x .

In paper [9] the equation of the characteristic curve of the content of component *A* of the size fractions was deduced for that case, where the size distribution of the components in the ground product mixture follows a log-normal or RRB distribution. Thus, for instance, if the size distribution curve of the resulting ground product is obtained by summing up the intersecting RRB size distribution curves at weighting the given weight per cent of the components, the function representing the weight per cent of the component *A* (limestone) in the resulting ground product, calculable in size fractions, will have a trace similar to those of the curves shown in Figs 5 and 6. Our fundamental assumption i.e. that in grinding the mixtures, the size distribution curves of the components are those which follow a lognormal or RRB distribution, may be verified by the characteristic curves shown in Figures 7, 8 and 9, given in RRB system.

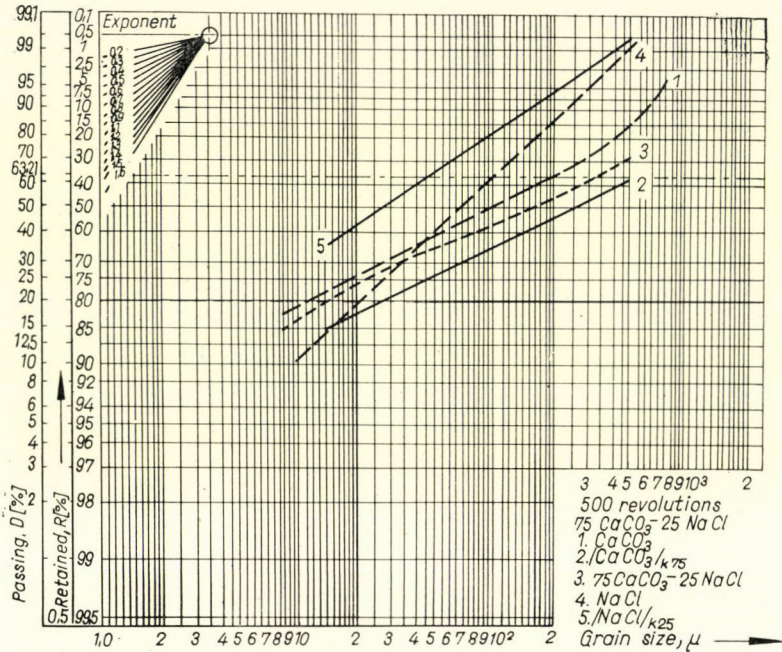


Fig. 7. Size distribution curves of components in the ground product of a mixture of 75% CaCO_3 -25% NaCl on grinding at 500 revolutions

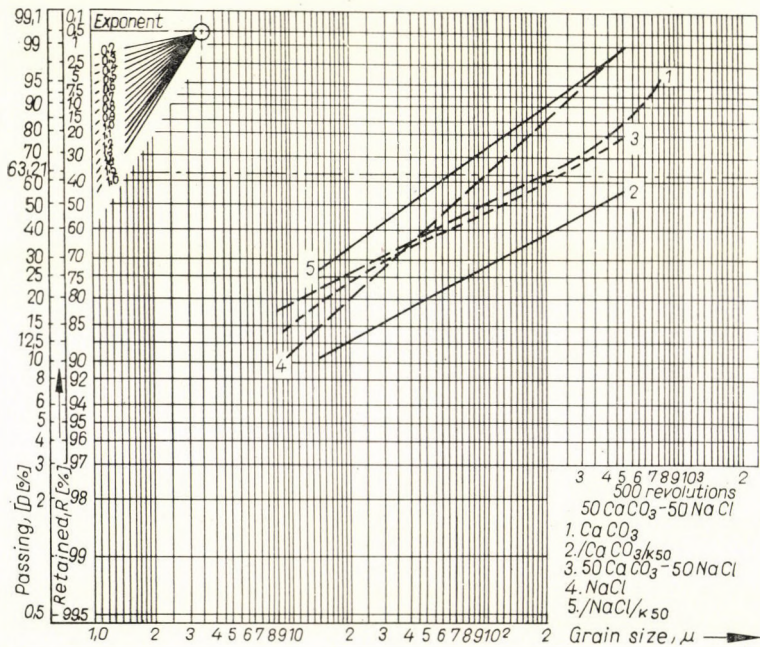


Fig. 8. Size distribution curves of components of the ground product mixture of 50% CaCO_3 -50% NaCl on grinding at 500 revolutions

For the sake of clarity, the results shown in Figs 7, 8 and 9 are summarized in Fig. 10.

Similarly to Fig. 10 — which relates to the case of grinding with 500 revolutions — in figure 11 the summary of the results is given without the presenting of details, also for grinding with 60 revolutions.

Accordingly, Figs 10 and 11 represent the size distribution curves of limestone and rock-salt components in the ground product mixture of limestone and rock-salt. Our proposition cannot entirely be verified by the grinding with 60 revolutions, because a regular RRB distribution can be found only in the salt component. The size reduction which is a phenomenon of stochastic character, the undeveloped size distribution of the grain size of the limestone component may be explained unambiguously by the relatively short grinding time. After grinding with 500 revolutions the size distribution curves of each component, both the limestone and the salt obtain the regular RRB distribution.

The variation of the relative grindability index of the limestone and rock-salt mixtures in function of the mixing ratio may be established on the basis of Fig. 3. Grinding with 60 revolutions was executed according to the Hardgrove investigations, so the Hardgrove index can be determined on the basis of the quantity of the substance passing through the sieve of a mesh of 74 microns, by the known formula:

$$H = 13 + D_{80} \cdot 6,93 ,$$

where D_{80} is the quantity of grains passing through the sieve of a mesh of 74 microns expressed in grams.

The values calculated on the basis of Fig. 3, are shown in Fig. 12.

For comparing the grindability of substances, the Hardgrove index may be considered only as an approximate, informatory value. The fundamental assumption is that the direction tangent of the size distribution in the ground product of the substance examined is identical with that of the characteristic curve of the ground product obtained from the reference substance by investigations executed according to the same prescriptions, as a matter of fact is not realized in practice. The proportionate relationship between the labour expended on size reduction and the increment of the surface of the ground product according to Rittinger's law, is also only of approximate validity. However in our investigations significant conclusions may be drawn from the value of the Hardgrove index. On the basis of Fig. 12 it can be ascertained that in the procedure of the comminution of the mixtures the principle of undisturbed superposition cannot be applied to the size distribution. By this it is to be understood that in general on the grinding of a mixture, the retained material belonging to a certain grain size cannot be determined by weighting of the oversize value against the same mesh, obtained on grinding the compo-

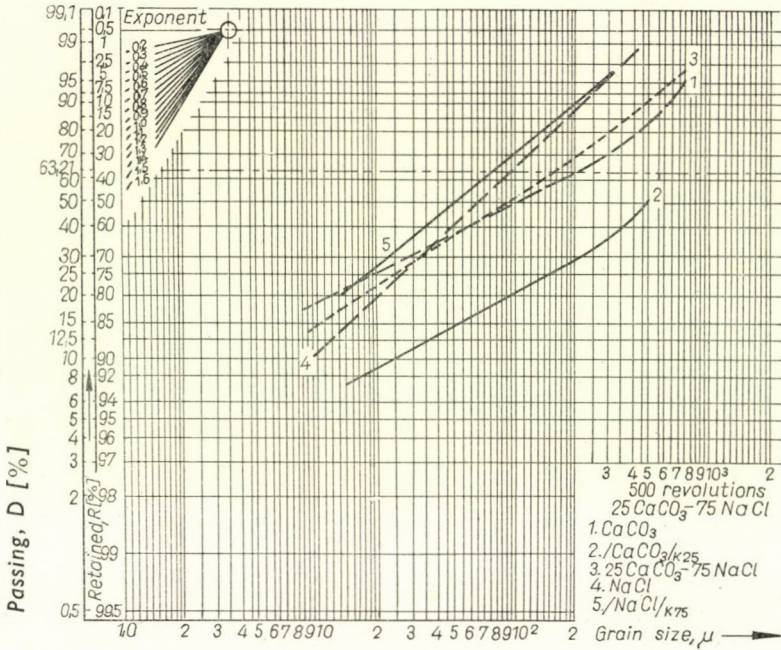


Fig. 9. Size distribution curves of components of the ground product mixture of 25% CaCO_3 -75% NaCl on grinding at 500 revolutions

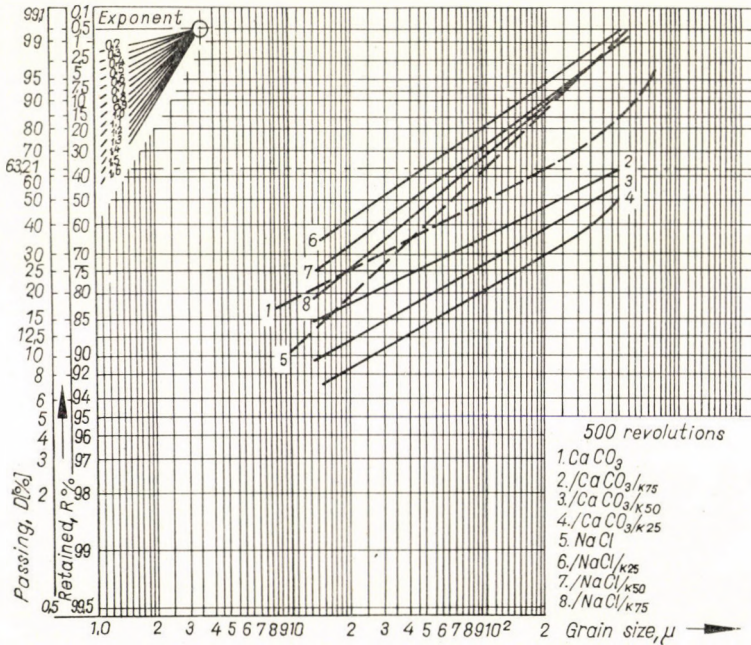


Fig. 10. Size distribution curves of components in the mixtures of limestone and rock-salt on grinding at 500 revolutions

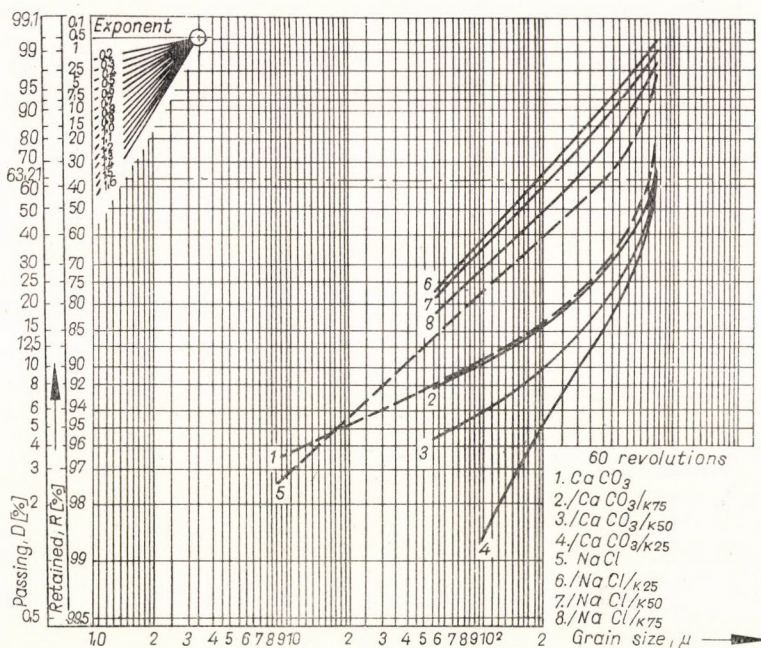


Fig. 11. Size distribution curves of components in the mixtures of limestone and rock-salt on grinding at 60 revolutions

nents separately but under the same conditions, according to the mixture ratio. This, by the way, can be verified at each grain size on the basis of Figs 10 and 11. The size distribution curves of limestone and rock-salt ground simultaneously in the mixture deviate (but not proportionately) depending on the mixture ratio from the characteristic size distribution curve obtained by grinding each component separately. From Figs 10 and 11 it is evident that in the mixtures of limestone and rocksalt, limestone is less grindable and rock-salt is more easily grindable, than in the case of separately grinding these components.

The size distribution curves of limestone ground in mixture are, in comparison to separate grinding, displaced in the direction of the finer ground products. With the decrease of the examined component the size distribution curves deviate from those of the pure substances.

As a matter of course, from the viewpoint of strength, on grinding of mixtures of another character, the behaviour of the size distribution curves of the components may also be varied, as can be seen in the paper of T. TANAKA [3], for instance, in case of grinding of mixtures of dolomite and $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$. In these binary mixtures each component is less grindable than they are separately.

Experiments were carried out for examining the problem: in what manner does the feed size influence the size reduction of the material? The grinding experiments were executed according to the prescriptions relating to the Hardgrove investigation. 50 gram of the material was fed into the mill and it was ground with 60 revolutions. The amount of the formed ground product, finer than 74 microns were determined. The investigations were carried out on

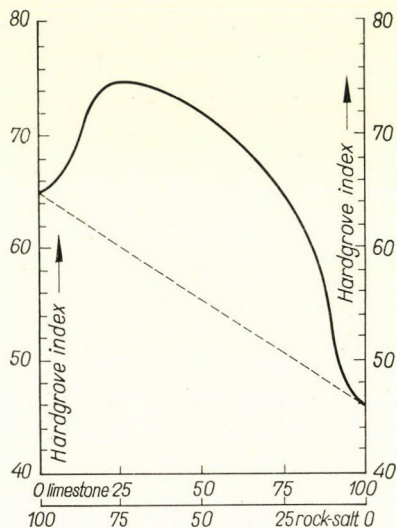


Fig. 12. Variation of the Hardgrove index in function of mixture ratio at mixtures of limestone and rock-salt

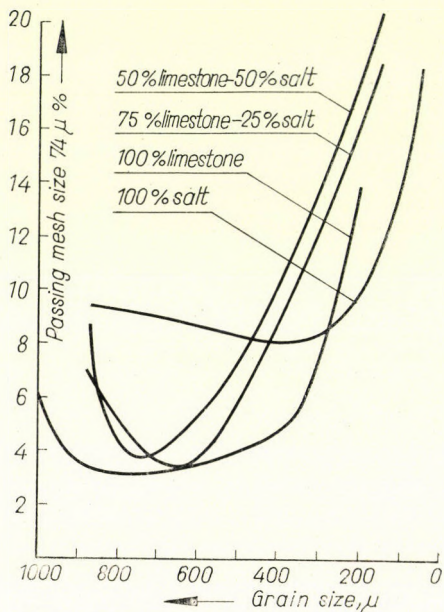


Fig. 13. Dependence of the quantity by weight per cent of limestone and salt mixtures passing mesh size of 74 microns on the mean value of the original fraction

fractions of pure limestone: pure rock-salt; 75 per cent of limestone and 25 per cent of rock-salt; 50 per cent of limestone and 50 per cent of rock-salt ground product mixtures. The real composition of limestone and rock-salt of the fractions could be determined on the basis of Fig. 5. The results of the experiments are shown in Fig. 13.

The curves of Fig. 13 were plotted in such a way that against the grain size corresponding to the arithmetic mean determined from the maximum and minimum grain sizes of the feed material, the quantity in grams of the grains smaller than 74 microns formed by grinding have been traced as an ordinate. It is interesting that the characteristic curves have minimum values. This means that in case of certain ranges of feed size the quantity of finer fractions in the ground product, formed from the coarser feed ground under the same conditions, may be greater. During the investigations the phenomenon was

observed, that the narrowing of the fraction range also influenced the composition of the final product. Accordingly, for instance, from feed material falling into the grain size range from 1190 to 1000 microns, after grinding, the quantity of grains smaller than 74 microns is greater than the passing material produced from a feed of a grain size falling in the range between size limits of 1190 and 590 microns. This means that in case of homogeneous substances the comminution of some materials proceeds under more favourable, and that of others under more unfavourable conditions. This can be explained by the effect of the relation between the diameters of the grinding body, i.e. of the ball and the grains of crushed material, exercised on the size reduction. H. E. ROSE [10] verified by his investigations that an optimum of the diameter of ball with respect to the properties of the feed material can be established. T. TANAKA determined critical size proportions between components of ground compounds, at which the comminution of one of the materials will be accomplished more intensively than that of the other component.

From the investigations by grinding of mixtures, the following conclusions may be drawn:

a) On grinding limestone and rock-salt separately, the size modulus of the characteristic curves plotted in the RRB system can be represented by a straight line in the log-linear co-ordinate system as a function of the grinding time, between 200 and 500 revolutions. This statement can be found in the literature for other materials in [4], too.

b) In case of grinding of mixtures, the rate of the crushing energy consumed by this grinding of the different components varies with the grinding time. In [3] the periodicity of this variation has been demonstrated.

c) In the size fractions of the ground product mixture, the characteristic curves, representing the composition of fractions according to the components, in function of the grain size, have extreme values.

d) By connecting the points of the above-mentioned curves corresponding to the mean weight per cent of the composition of the whole amount of the ground product, a straight line will be obtained.

e) On grinding of mixtures, the size distribution curves of the components follow a regular lognormal or RRB distribution. Consequently, the resulting ground product of the compounds will not have a lognormal or RRB distribution.

f) The value of the relative grindability index determined according to the Hardgrove prescriptions in case of mixtures, is not a factor of superposable character.

g) At a given milling apparatus, the initial feed distribution considerably influences the size distribution of the final product. In case of ball milling, an optimal value of the relation between the diameter of the grinding body and that of the grain size of the crushed material can be established.

REFERENCES

1. FUERSTENAU, W.—SOMANSUNDARAN, P.: Zur Kinetik des Zerkleinerns (On kinetics of the comminution). *Aufbereitungstechnik* (1964), 205—210.
2. GÖTTE, A.: Fragen der Hartzerkleinerung (Problems of size reduction of minerals). *Zement-Kalk-Gips* (1952), 383—394.
3. TANAKA, T.: Preferential Grinding Mechanism of Binary Solid Mixtures whose Components are of Different Grindability. Symposium on Size Reduction, 1962.
4. OČEPEK, D.: Grinding of Binary Mixtures. *Rudařsko-Metallurški Zbornik* (1964), 157—167.
5. BEKE, B.: Aprításelmélet (Theory of size reduction). Akadémiai Kiadó, Budapest 1963.
6. BASSA, G.: A porszénégetés elméletének gyakorlati alkalmazása (Practical application of the theory of pulverized-coal firing). Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1961.
7. FÁY, GY.—ZSELEV, B.: Az aprításelmélet alapjairól (On the theoretical bases of size reduction). *Energia és Atomtechnika* (1960), 12.
8. FÁY, GY.—ZSELEV, B.: A Kolmogorov-féle aprításelmélet kiterjesztése különböző faj-súlyú anyagok keverékének őrlésére (Extending of the size-reduction theory of Kolmogorov to the grinding of mixtures of different density). *Energia és Atomtechnika* (1961), 12.
9. REMÉNYI, K.: Anyagkeverékek őrléményeinek szemmagyság szerinti frakcióiban a komponensek súlyszázalék eloszlásának vizsgálata (Examination of the distribution of components by weight per cent in sized fractions of ground products of mixtures). Candidate dissertation.
10. ROSE, H. E.: A Mathematical Analysis of the Internal Dynamics of the Ball Mill on the Basis of Probability Theory. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers* (1957), 87—97.

PRÜFUNG DER MAHLBARKEIT VON GEMISCHEN
AUS KALKSTEIN UND STEINSALZ IN HARDGROVE-LABORMÜHLE

K. REMÉNYI

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden Mahl- und Mahlbarkeitsversuche mit Gemischen von Kalkstein und Steinsalz von Mischverhältnissen 1 : 3, 1 : 1, 3 : 1 in Hardgrove-Anlage zur Erläuterung des Zerkleinerungsmechanismus von Gemischen ausgeführt. Bei der Zerkleinerung von homogenen Stoffen wurde es festgestellt, daß in einem gewissen Zeitraum zwischen dem im RRB System bestimmten Korngrößenmodul des Mahlgutes und der Mahldauer eine Exponentialbeziehung von negativem Exponent besteht.

ÉTUDE DE LA BROYABILITÉ DES MÉLANGES
DE CALCAIRE ET DE SEL GEMME DANS L'APPAREIL DE HARDGROVE

K. REMÉNYI

RÉSUMÉ

Des essais de broyage et de broyabilité ont été effectués dans un broyeur de Hardgrove avec du calcaire et du sel gemme mélangés dans les proportions de 1 : 3, 1 : 1, 3 : 1, pour étudier le mécanisme du broyage des mélanges. Au broyage des matières homogènes, on a constaté qu'à l'intérieur d'une certaine période existe, entre le module granulométrique du produit broyé, déterminé dans le système RRB et la durée du broyage, une relation exponentielle à exposant négatif.

РАЗМОЛИМОСТЬ СМЕСЕЙ ИЗВЕСТНЯКА И КАМЕННОЙ СОЛИ
НА ОБОРУДОВАНИИ СИСТЕМЫ ГАРДГРОВА

К. РЕМЕНИ

РЕЗЮМЕ

На установке системы Гардгрова произведены опыты помола и размолимости смесей известняка и каменной соли при составе компонентов 1 : 3, 1 : 1 и 3 : 1 с целью исследования механизма помола. При помоле однородных материалов установлено, что в пределах определенного времени в системе RRB помола, между модулем определенного размера зерен и временем помола существует экспоненциальная зависимость с отрицательным показателем.

СНИЖЕНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ПРИБЫЛЬНЫХ ГОЛОВКАХ

Д. ЧАБАЛИК

ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЯЖЕЛОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ, МИШКОЛЬЦ
(ВЕНГРИЯ)

[Поступило 27-го января, 1964 г.]

Одним видом снижения термических потерь в прибыльных головках является изменение формы и размеров прибыльной головки при неизменном объеме прибыльной головки. Так как термические потери прибыльной головки являются наибольшими в боковом направлении, надо стараться, чтобы уменьшить поверхность соприкосновения огнеупоров с жидким металлом, приходящуюся на единицу объема прибыльной головки и объем огнеупорной футеровки прибыльной головки. Это возможно путем снижения конусности прибыльной головки. Большая открытая верхняя поверхность, возникающая таким образом при неизменном объеме прибыльной головки, позволяет нагревание большей поверхности прибыльной головки методами. Возможность более интенсивного нагревания, обеспечиваемая одновременно с термическими потерями, имеет результатом очень выгодную форму прибыльной головки и выгодный объем прибыльной головки.

Результаты, полученные при исследовании прибылей стальных слитков небольших размеров [1], с достоверностью документируют, что наибольшее количество термических потерь представляют тепло, воспринятое или отведенное огнеупорным материалом. Это количество тепла является функцией целого ряда факторов. Эти факторы, в свою очередь, могут быть разбиты на две основные группы. В первую группу входят геометрические размеры изложницы, соотношение H/D , способ разливки стали, температура разливки, скорость разливки, сорт разливаемой стали, то есть те факторы, которые определяют кристаллизацию корпуса слитка, и, таким образом, косвенно влияют на количество тепла, отводимое прибылью. Во вторую группу следует отнести теплоемкость и теплопроводность футеровки прибыльной головки, а также геометрическую конфигурацию и размеры прибыльной головки: эти факторы имеют непосредственное влияние на количество тепла, воспринятого и отведенного огнеупорными материалами. Подробное рассмотрение факторов первой группы зашло бы слишком далеко, и выходит за рамки настоящей работы, причем роль этих факторов является второстепенной.

Непосредственное воздействие имеют факторы, входящие во вторую группу. Из них желательное снижение теплоемкости и теплопроводности огнеупорного материала, при обеспечении соответствующей огнеупорности, требует исследований в рамках огнеупорной промышленности. Таким образом, принимая во внимание имеющиеся возможности, необходимо за-

няться исследованием конфигурации и размеров огнеупорного припаса, в интересах снижения вышеупомянутых тепловых потерь.

Количество тепла, воспринятое или отведенное огнеупорным материалом за единицу времени, тем меньше, чем меньше соприкасающаяся с жидким металлом огнеупорная поверхность, приходящаяся на единицу объема прибыли, и чем меньше объем огнеупорной футеровки прибыльной головки, не учитывая косвенных факторов, влияющих на тепловые потери прибыли, а также принимая за условие постоянство теплоемкости, теплопроводности и толщины стенки футеровочного материала. Задача, таким образом, состоит в разработке таких прибыльных головок, которые лучше всего отвечают изложенным выше требованиям. Снижение внутренней боковой поверхности футеровки, приходящейся на единицу объема прибыли, а также снижение объема самой футеровки прибыльной головки возможно посредством изменения конфигурации или размерных соотношений прибыли. Поэтому необходимо было рассмотреть зависимости, существующие между величиной, конфигурацией и соотношениями размеров прибыли и между упомянутыми факторами. Табл. I содержит данные об изменениях внутренней поверхности футеровки, приходящейся на единицу объема прибыли и объема футеровочного припаса, в зависимости от значения $50(D_1 - D_2)/H_1$, характеризующего диаметр слитка в плоскости соприкосновения с прибылью и коничность прибыли. Данные таблицы относятся к прибылям круглого сечения. Таблица II раскрывает те же зависимости для прибылей квадратного сечения. Смысл буквенных обозначений, примененных в таблицах, следующий:

D_1 диаметр слитка в плоскости соприкосновения с прибылью, дм ;

D_2 верхний диаметр прибыли, дм ;

D_3 нижний диаметр слитка, дм ;

H высота корпуса слитка, дм ;

H_1 высота прибыли, дм ;

K_1 объем прибыли, дм^3 ;

K_2 объем корпуса слитка, дм^3 ;

$K_1 + K_2$ общий объем слитка, дм^3 ;

$50(D_1 - D_2)/H_1$ характеристика коничности прибыли;

P внутренняя поверхность (боковая) футеровки прибыльной головки (боковая поверхность прибыли), дм^2 ;

F открытая поверхность прибыли, дм^2 ;

L объем футеровочного припаса, д^3 ;

$X P/K_1$ — доля внутренней боковой поверхности прибыльной головки, приходящаяся на единицу объема прибыли, $\text{дм}^2/\text{дм}^3$

$Y L/K_1$ доля объема футеровки прибыльной головки, приходящаяся на единицу объема прибыли, $\text{дм}^3/\text{дм}^3$

a_1, a_2, a_3 соответствующие длины сторон слитка с квадратным сечением, дм .

Расчет значений X и Y , помещенных в таблицы, а также возможность оценки полученных результатов потребовали включения в число данных и некоторых соотношений размеров слитка:

Таблица 1

$\frac{N_2 N_1}{n/n}$	D_1	D_2	H	K_1	K_2	$K_1 + K_2$	$\frac{50(D_1 - D_2)}{H_1}$	D_2	H_1	P	F	$P + F$	L	X	Y
1.	3	2,27	6,59	5,90	36,25	42,15	5	2,91	0,86	7,99	6,65	14,64	4,67	1,354	0,791
							10	2,82	0,89	8,14	6,24	14,38	4,75	1,380	0,805
							15	2,73	0,92	8,34	5,85	14,19	4,84	1,413	0,821
							20	2,62	0,95	8,55	5,39	13,94	4,94	1,449	0,837
2.	4	3,03	8,79	13,99	85,92	99,90	5	3,89	1,15	14,21	11,88	26,09	7,99	1,016	0,572
							10	3,76	1,18	14,48	11,10	25,58	8,13	1,035	0,581
							15	3,63	1,22	14,82	10,35	25,17	8,29	1,059	0,593
							20	3,49	1,27	15,20	9,56	24,76	8,45	1,087	0,604
3.	5	3,79	10,99	27,32	167,81	195,13	5	4,86	1,43	22,20	18,54	40,74	12,21	0,813	0,447
							10	4,70	1,48	22,62	17,34	39,96	12,41	0,828	0,454
							15	4,54	1,53	23,15	16,18	39,33	12,65	0,848	0,463
							20	4,37	1,58	23,76	14,99	38,75	12,89	0,870	0,472
4.	6	4,55	13,19	47,21	289,97	337,18	5	5,83	1,72	31,97	26,68	58,65	17,31	0,677	0,367
							10	5,65	1,77	32,57	25,07	57,64	17,60	0,690	0,373
							15	5,45	1,83	33,34	23,31	56,65	17,93	0,706	0,380
							20	5,24	1,90	34,21	21,56	55,77	18,26	0,725	0,387
5.	7	5,31	15,38	74,96	460,47	535,43	5	6,80	2,00	43,51	36,30	79,81	23,30	0,581	0,311
							10	6,59	2,07	44,34	34,09	78,43	23,68	0,592	0,316
							15	6,36	2,14	45,38	31,75	77,13	24,12	0,605	0,322
							20	6,11	2,22	46,56	29,30	75,86	24,57	0,621	0,328
6.	8	6,07	17,58	111,89	687,35	799,23	5	7,77	2,29	56,83	47,39	104,22	30,18	0,508	0,270
							10	7,53	2,36	57,91	44,51	102,42	30,67	0,518	0,274
							15	7,27	2,44	59,27	41,49	100,76	31,23	0,530	0,279
							20	6,99	2,53	60,82	38,36	99,18	31,81	0,547	0,284
7.	9	6,82	19,78	159,32	978,66	1137,98	5	8,74	2,58	71,93	59,57	131,90	37,94	0,452	0,238
							10	8,47	2,66	73,24	56,32	129,56	38,55	0,460	0,242
							15	8,18	2,75	75,02	52,52	127,54	39,25	0,471	0,246
							20	7,86	2,85	76,97	48,50	125,47	39,98	0,483	0,251

Таблица II

$\frac{N_2 N_0}{n/n}$	a_1	a_3	H	K_1	K_2	$K_1 + K_2$	$\frac{50(a_1 - a_2)}{H_1}$	a_2	H_1	P	F	$P + F$	L	X	Y
1.	3	2,27	6,59	7,51	46,15	53,66	5	2,91	0,86	10,13	8,47	18,60	5,94	1,354	0,790
							10	2,82	0,89	10,36	7,95	18,31	6,04	1,380	0,805
							15	2,73	0,92	10,60	7,45	18,05	6,16	1,412	0,821
							20	2,62	0,95	10,88	6,86	17,74	6,29	1,449	0,837
2.	4	3,03	8,79	17,81	109,39	127,20	5	3,89	1,15	18,08	15,13	33,21	10,18	1,015	0,572
							10	3,76	1,18	18,40	14,14	32,54	10,35	1,035	0,581
							15	3,63	1,22	18,84	13,18	32,02	10,55	1,059	0,593
							20	3,49	1,27	19,32	12,18	31,50	10,76	1,087	0,604
3.	5	3,79	10,99	34,78	213,66	248,44	5	4,86	1,43	28,24	23,62	51,86	15,55	0,812	0,447
							10	4,70	1,48	28,80	22,09	50,89	15,80	0,828	0,454
							15	4,54	1,53	29,44	20,61	50,05	16,10	0,847	0,463
							20	4,37	1,58	30,24	19,10	49,34	16,41	0,869	0,472
4.	6	4,55	13,17	60,10	369,21	429,31	5	5,83	1,72	40,68	33,99	74,67	22,04	0,677	0,367
							10	5,65	1,77	41,44	31,92	73,36	22,41	0,690	0,373
							15	5,45	1,83	42,44	29,70	72,13	22,82	0,706	0,380
							20	5,24	1,90	43,52	27,46	70,98	23,25	0,724	0,387
5.	7	5,31	15,38	95,44	586,28	681,73	5	6,80	2,00	55,35	46,24	101,60	29,67	0,580	0,311
							10	6,59	2,07	56,44	43,43	99,87	30,15	0,591	0,316
							15	6,36	2,14	57,76	40,45	98,21	30,71	0,605	0,322
							20	6,11	2,22	59,28	37,33	96,61	31,28	0,621	0,328
6.	8	6,07	17,58	142,47	875,15	1017,62	5	7,77	2,29	72,32	60,37	132,69	38,42	0,507	0,270
							10	7,53	2,36	73,72	56,70	130,42	39,04	0,517	0,274
							15	7,27	2,44	75,44	52,85	128,79	39,76	0,529	0,279
							20	6,99	2,53	77,40	48,80	126,26	40,50	0,543	0,284
7.	9	6,82	19,78	202,85	1246,07	1448,92	5	8,74	2,58	91,56	76,39	167,95	48,31	0,451	0,238
							10	8,47	2,66	93,24	71,74	164,98	49,08	0,460	0,242
							15	8,18	2,75	95,48	66,91	162,39	49,98	0,470	0,246
							20	7,86	2,85	98,00	61,78	159,78	50,90	0,483	0,251

$H/D = 2,5$, где D средний диаметр корпуса слитка, дм ;

$$D = (D_1 + D_3)/2;$$

$$50(D_1 - D_3)/H = 5,5;$$

$$K_1 \cdot 100/(K_1 + K_2) = 14;$$

толщина стенки огнеупора = 50 мм;

$H/a = 2,5$; где a средняя длина ребра корпуса слитка с квадратным сечением, дм ;

$$a = (a_1 + a_3)/2;$$

$$50(a_1 - a_3)/H = 5,5.$$

Используя эти зависимости, можно определить остальные размеры слитков (D_2 , D_3 ; a_2 , a_3 ; H , H_1), их объем (K_1 , K_2), внутреннюю боковую поверхность футеровки прибыльной головки (P) и объем огнеупорной футеровки в функции принятого D_1 , a_1 , а также характеристик коничности прибыли $50(D_1 - D_2)/H_1$ и $50(a_1 - a_2)/H_1$. Если же известны значения K_1 , P и L , могут быть определены и значения X и Y . В таблицах 1 и 2 значение D_1 и a_1 приняты равными 3—9 дм , а характеристика коничности $50(D_1 - D_2)/H_1$ и $50(a_1 - a_2)/H_1$ колеблется между 5-ю и 20-ю.

Рассмотрев данные таблиц, можно заметить, что с увеличением значений D_1 и a_1 значения X и Y уменьшаются. С другой стороны, заметно и то, что значения X и Y равных по объему прибылей возрастают с увеличением значений характеристик коничности $50(D_1 - D_2)/H_1$ и $50(a_1 - a_2)/H_1$, то есть возрастание коничности прибыли приводит к росту значений X и Y . В то же время можно заметить и то, что изменение коничности оказывает большее влияние на прибыли с меньшим диаметром или ребром. Так, например, значения X и Y прибыли № 1 равны $X = 1,354$ — $1,449$, $Y = 0,790$ — $0,837$, прибыли № 7 — $X = 0,451$ — $0,483$, $Y = 0,238$ — $0,250$. То есть, изменение для малых прибылей значения $X = 0,095$ и значения $Y = 0,047$, а для более крупных прибылей — значения $X = 0,032$ и значения $Y = 0,012$. Сравнив значения X и Y в двух таблицах, наконец, можно сделать вывод, что при одинаковой коничности характерные значения X и Y для прибылей слитков с равными диаметром и ребром при соответственно круглом и квадратном сечениях равны между собой, предположив, что процентное отношение объема прибыли к объему всего слитка также одинаково. Ввиду того, что объем прибыли с квадратным сечением больше объема прибыли с круглым сечением, диаметр которого равен стороне вышеупомянутого квадрата, то из изложенного следует, что при равенстве объемов прибылей круглого и квадратного сечений значения X и Y для последнего больше, а следовательно менее выгодны.

Изменение значений X и Y в функции D_1 и a_1 , а также в зависимости от коничности прибыли, приведенное в табл. 1 и 2, наглядно показано на рис. 1 и 2. Как видно и отсюда, наибольшее влияние на изменение значений X и Y оказывает изменение значений D_1 и a_1 . С уменьшением значений $50(D_1 - D_2)/H_1$ и $50(a_1 - a_2)/H_1$ значения X и Y также уменьшаются. Кривые, однако не параллельны друг другу, а сходятся в направлении роста

D_1 и a_1 , что означает уменьшение воздействия на значения X и Y коничности, по мере возрастания размеров слитка, и, таким образом, это воздействие при достаточно большом слитке ($D_1 = a_1 > 10$ дм) практически прекращается.

Рис. 3 и 4, на основании тех же таблиц I и II, демонстрируют изменения значений X и Y в зависимости от объема прибыли. Такой метод изображения

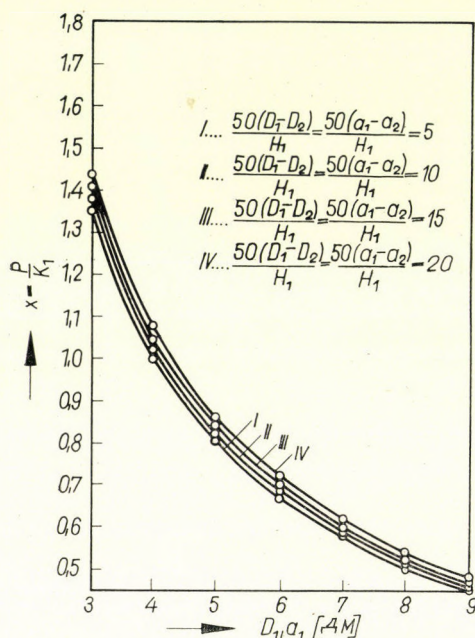


Рис. 1. Изменение значения X прибыли в зависимости от D_1 или a_1 при различной конусности

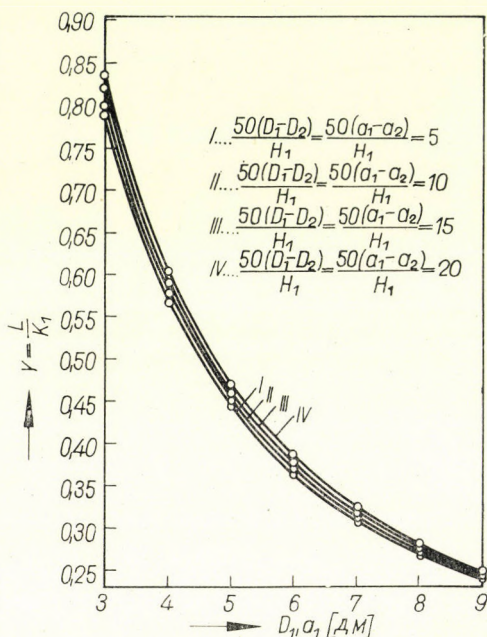


Рис. 2. Изменение значения Y прибыли в зависимости от D_1 или a_1 при различной конусности

показывает выгодные свойства прибылей с круглым сечением, и становится ясным, что при равных объеме и коничности значения X и Y круглых прибылей всегда меньше. Указано также и на то, что, при $50(D_1 - D_2)/H_1 = 20$ и $50(a_1 - a_2)/H_1 = 5$ значения X и Y равных по объему круглых и квадратных прибылей становятся почти равными. Резюмируя, можно утверждать, что при равных соотношениях размеров слитков и толщине футеровки прибыльных головок, внутренняя боковая поверхность прибыльной головки приходящаяся на единицу объема прибыли (X), и объем прибыли (Y) уменьшаются если

- возрастает диаметр прибыли (возрастает размер слитка);
- снижается коничность прибыли;
- вместо прибыльной головки квадратного сечения применить прибыльную головку круглого сечения.

В дальнейшем необходимо рассмотреть, какое практическое исполнение вероятно вследствие возможностей потерь тепла прибылью в направлении боковых поверхностей, причем следует учесть, каким образом меняются одновременно прочие направления тепловых потерь прибыли, а также общие тепловые потери прибыли. Другими словами, одновременно со

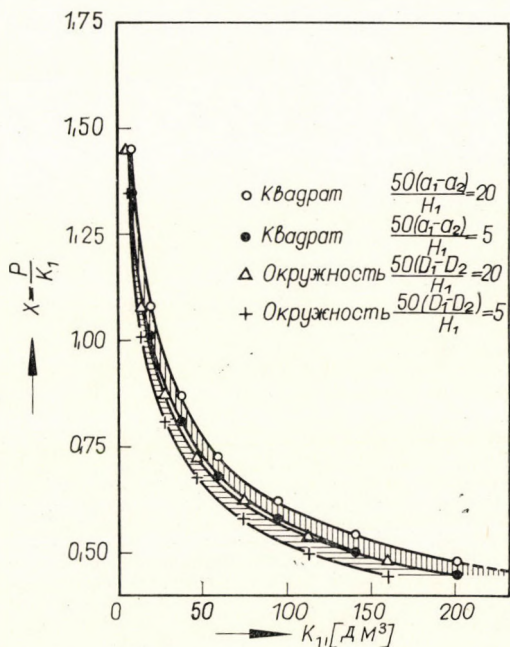


Рис. 3. Изменение значения X прибыли в зависимости от объема прибыли при разной конусности

снижением потерь через боковую поверхность, не угрожает ли увеличение тепловых потерь в остальных направлениях в такой мере, что сумма всех тепловых потерь, возможно, не только не уменьшится, а наоборот, увеличится.

Увеличение диаметра прибыли, при названных выше условиях, означает увеличение всего объема слитка. С ростом веса слитка значения X и Y принимают весьма положительный вид. Это, однако отнюдь не означает того, что тепловые потери прибыли снижаются в такой же мере. Причина этого заключается в том, что тепловые потери прибыли зависят еще и от времени охлаждения корпуса слитка. Чем продолжительнее время застывания, тем больше тепла отводится прибылью через сравнительно меньшую поверхность огнеупорной футеровки или в саму футеровку. Если время застывания слитка в зависимости от диаметра возрастает в такой мере, насколько уменьшаются значения X и Y , то о снижении тепловых потерь речи быть не может. Хотя и не представилось возможным провести исследования тепловых потерь

прибыли на крупных слитках, и получить данные для сравнения того, что именно представляет собой разница между тепловыми потерями, приходящимися на единицу объема прибыли малых и крупных слитков, однако, вероятно, что потери на единицу объема прибыли через боковую поверхность прибыльной головки у больших слитков возрастают. Это происходит от

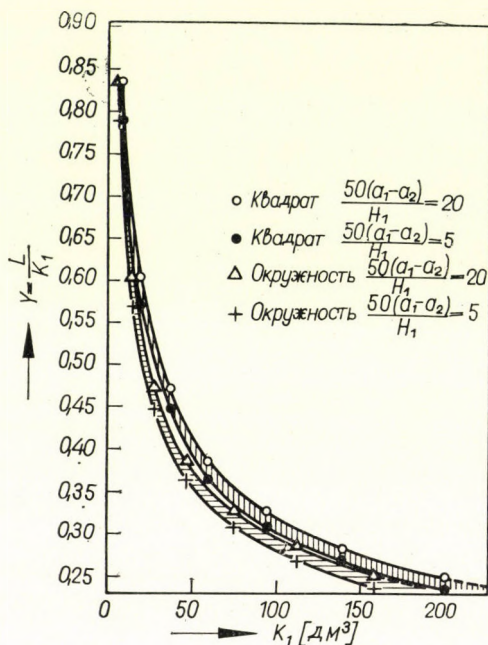


Рис. 4. Изменение значения Y прибыли в зависимости от объема прибыли при разной конусности

того, что скорость кристаллизации слитка находится в зависимости от квадрата диаметра слитка, в то время как изменение значений X и Y почти линейно связано с диаметром. Таким образом, время, необходимое для кристаллизации большого слитка, возрастает быстрее чем происходит уменьшение значений X и Y . Подобное, вероятно, отношение существует между возрастанием времени застывания и уменьшением прочих поверхностей прибыли, приходящихся на единицу объема прибыли (плоскость соприкосновения корпуса слитка с прибылью, верхняя открытая поверхность прибыли).

Рис. 1 и 2 показывают, что с ростом диаметра слитка (размера слитка) значение X и Y уменьшается все в меньшей мере. С другой стороны, известно, что скорость застывания слитка, при слитках большого сечения, все более снижается, так как, с одной стороны, прогретая изложница, а с другой стороны, уже застывшая часть слитка ведут себя как конденсатор тепла, и препятствуют интенсивному отводу тепла в радиальном направлении.

Принимая во внимание эти рассуждения, с полной уверенностью можно утверждать, что сверх некоторого размера слитка, — несмотря на уменьшение значений X и Y , характерных для прибыли, — не снижаются потери тепла, происходящие до полного застывания корпуса слитка, а напротив, при весе слитка сверх некоторого определенного веса, потери тепла через прибыль возрастают. Это крайнее значение является функцией целого ряда факторов, и кроме характеристик прибыльной головки, решающее влияние имеют те факторы, которые направляют и кристаллизацию стального слитка. Так, например, чем толще стенка изложницы, чем больше конусность, чем меньше теплопроводность материала изложницы и разливаемой стали, а также соотношение H/D изложницы, тем меньше и вес слитка, при котором имеет место упомянутое крайнее значение.

Все изложенное до сих пор относится к слиткам такого типа, для которых верхнее основание корпуса равно по величине нижнему основанию прибыли. Если нижнее основание прибыли меньше, то появляется возможность увеличения ее до размеров верхнего основания корпуса слитка, что приведет к значительному снижению значений X и Y без одновременного увеличения времени застывания корпуса слитка. С другой стороны, возрастает поверхность соприкосновения корпуса слитка с прибылью и верхняя открытая поверхность прибыли, приходящиеся на единицу объема прибыли.

В результате уменьшения конусности прибыли, без изменения размеров корпуса слитка и объема прибыли, практически получаются прибыли меньшей высоты и большей верхней открытой поверхности, при неизменной величине поверхности соприкосновения корпуса слитка с прибылью. Ввиду того, что такое изменение воздействует на время кристаллизации корпуса слитка, необходимо рассмотреть лишь, каков будет прирост тепловых потерь через открытую поверхность прибыли, в отличие от снижения тепловых потерь, достигаемого в результате уменьшения значений X и Y , характеризующих прибыль.

При уяснении этого вопроса, прежде всего необходимо исследовать изменение поверхности прибыли в зависимости от коничности (или) постоянных a_1 (D_1 и K_1 от высоты H_1). Так как конфигурация прибыли, обычно имеющей форму усеченного конуса или усеченной пирамиды, в принципе может меняться от призмы или цилиндра до пирамиды или конуса, то изменение элементов поверхности и всей поверхности прибыли подлежит исследованию в этих пределах.

Как уже показано данными таблиц 1 и 2, общая площадь поверхности прибыли ($P + F$) возрастает с уменьшением значений характеристик конусности $50(D_1 - D_2)/H_1$ или $50(a_1 - a_2)/H_1$. Исследование других прибылей, однако, показывает, что одновременно с уменьшением конусности может уменьшаться и общая площадь поверхности. Это обстоятельство позволило предположить, что при определенных пропорциях общая площадь поверх-

ности цилиндра больше, равна или меньше общей площади поверхности конуса, имеющего равный с цилиндром объем и диаметр.

Обозначив высоту цилиндра через h_1 , а высоту конуса через h_2 , на основании предположенной равенности объемов и поверхностей можно записать:

$$\frac{D_1^2 \pi}{4} \cdot h_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4} \cdot \frac{h^2}{3},$$

$$\frac{D_1^2 \pi}{4} + D_1 \pi h_1 = \frac{D_1}{2} \pi \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{D_1}{2}\right)^2}.$$

Откуда $h_1 = 0,4 D_1$, то есть $h_1 = 0,4 D_1$ является условием равенности площади поверхности цилиндра и конуса, при равных объеме и основании. Если $h_1 > 0,4 D_1$, то площадь поверхности конуса больше, а если $h_1 < 0,4 D_1$, то она меньше площади поверхности цилиндра.

Таким образом, предположение было правильным, однако, общая площадь поверхности прибыли может уменьшаться или возрастать одновременно с конусностью независимо от того, какое соотношение существует между площадями поверхности цилиндра и конуса с равными объемами и основаниями, так как площадь поверхности меняется в функции коничности (высоты) не по линейному графику, а по минимальной кривой, что при условии $h_1 = 0,4 D_1$ показано на рис. 5, 6 и 7. По рисункам видно, что во всех случаях при $H_1 = D_2$ может быть достигнут минимум общей площади поверхности. Это значит, что при уменьшении конусности (высоты) усеченного конуса, почти тождественного с конусом, общая площадь поверхности и вначале уменьшается, а затем, после прохождения минимума, возрастает до размера общей площади поверхности цилиндра. Уменьшение значения $P + F$ в интервале от максимума до минимума является наибольшим при $h_1 > 0,4 D_1$, и наименьшим при $h_1 \leq 0,4 D_1$. Разница в размере площади поверхности цилиндра и конуса с наименьшей общей площадью поверхности будет наибольшей при $h_1 < 0,4 D_1$ и наименьшей при $h_1 > 0,4 D_1$. Из изложенного следует, что при уменьшающейся конусности (высоте) можно ожидать снижения общей площади поверхности прибыли в том случае, если подлежащая изменению прибыль имеет $H_1 > D_2$ и уменьшение тем больше, чем больше значение $h_1/0,4 D_1$ по сравнению с единицей. Наконец следует отметить, что минимум кривой $P + F$ прекращается при значении

$$\frac{h_1}{0,4 D_1} = 2,5,$$

когда наименьшую поверхность имеет цилиндр. Такую пропорцию, однако, редко принимают даже для наименее выгодно сконструированных прибы-

лей. В практике, таким образом, в значительной части случаев, уменьшение конусности сопровождается ростом общей площади поверхности прибыли. Рост площади поверхности прибыли вообще следует считать отрицательным явлением, так как большая площадь поверхности приводит к большим тепловым потерям.

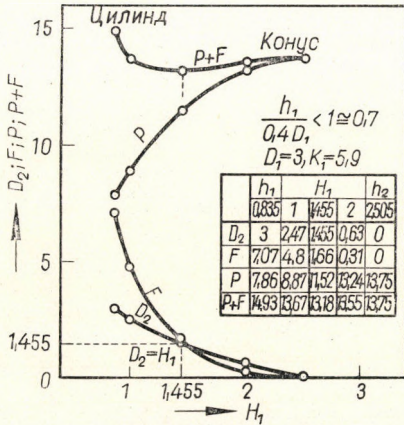


Рис. 5. Изменение элементов поверхности прибыли в зависимости от конусности (высоты) при $h_1/0,4 D_1 < 1$

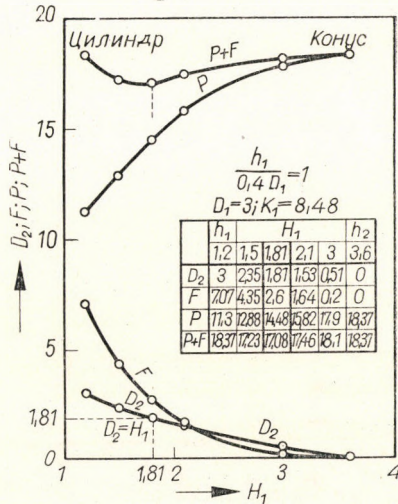


Рис. 6. Изменение элементов поверхности прибыли в зависимости от конусности (высоты) при $h_1/0,4 D_1 = 1$

Возможность приблизительно правильной оценки тепловых потерь прибыли дана теми результатами экспериментов, которые уяснили тепловые потери прибыли в отдельных направлениях [1]. По экспериментальным данным, через открытую верхнюю поверхность прибыли, подвергнутой исследованию $2,54 \text{ дм}^2$, тепловые потери составили 4% , а через боковую поверхность $1,32 \text{ дм}^2$ — $85,6\%$ полных тепловых потерь. Значение тепловых потерь на единицу поверхности, принимая потери по двум направлениям за 100% , получается следующее:

открытая поверхность:

$$\frac{4,100}{(85,6 + 4) \cdot 2,54} = 1,75 \text{ \%}/\text{дм}^2;$$

боковая поверхность:

$$\frac{85,6 \cdot 100}{(85,6 + 4)13,32} = 7,17 \text{ \%}/\text{дм}^2.$$

Эти значения показывают, что через единицу боковой поверхности отводится более чем четырехкратное количество тепла, чем через единицу открытой поверхности. Это, в свою очередь, значит, что тепловые потери прибыли снижаются во всех тех случаях, когда уменьшение конусности не причиняет уменьшения боковой поверхности, сопровождающегося четырех-

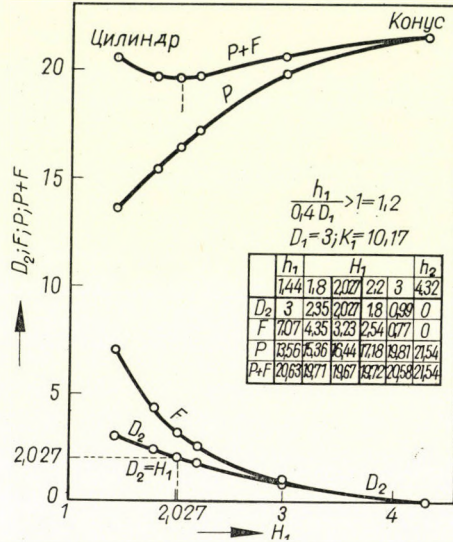


Рис. 7. Изменение элементов поверхности прибыли в зависимости от конусности (высоты) при $h_1/0,4 D_1 > 1$

кратным увеличением открытой поверхности. Рассмотрев рис. 5, 6 и 7, можно заметить, что посредством уменьшения конусности (высоты), открытая поверхность прибыли (F) увеличивается, а в то же время боковая поверхность прибыли уменьшается даже при увеличивающемся значении $P + F$. Это последнее обстоятельство правда указывает на то, что возрастание значения F имеет больший масштаб, чем уменьшение значения P при уменьшении значения H_1 в меньшей мере чем $H_1 = D_2$. В то же время видно и то, что рост значения F нигде не достигает размеров четырехкратного уменьшения значения P в пределах $h_1/0,4 D_1 = 0,7 - 1,2$, в которых и находится большее число прибылей правильно рассчитанных. Из рис. 5, 6 и 7 можно сделать и тот вывод, что при значении $h_1/0,4 D_1 =$ около 0,5 рост значения F достигает четырехкратного значения уменьшения P .

Резюмируя изложенное, можно заявить, что снижение конусности прибыли приводит к уменьшению или увеличению общей площади поверхности прибыли, в зависимости от соотношения h_1 и D_1 , и значения $H_1 = D_2$.

Если уменьшается общая поверхность прибыли, казалось бы естественным, что уменьшаются и потери тепла, однако, снижение тепловых

потерь может наступить и при увеличении площади поверхности прибыли, вплоть до того момента, пока уменьшение боковой поверхности не повлечет за собой четырехкратного прироста открытой поверхности.

Снижение тепловых потерь, сопровождающее уменьшение конусности, будет тем большим, чем большее значение имеет характеристика прибыли, выражаемая дробью

$$\frac{4K_1/D_1^2 \pi}{0,4 D_1}$$

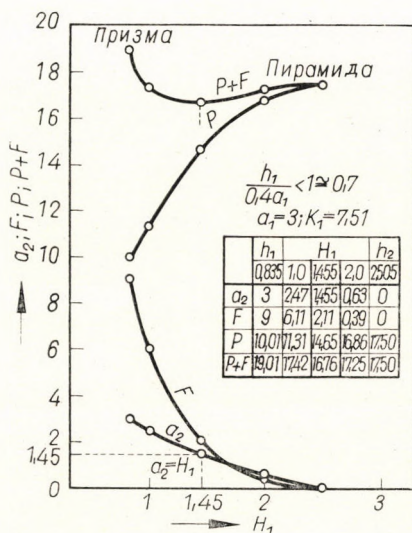


Рис. 8. Изменение элементов поверхности прибыли в зависимости от конусности (высоты) при $h_1/0,4 a_1 < 1$

В дальнейшем необходимо рассмотреть, каковы те факторы, которые влияют на приведенную выше пропорцию, и в каком направлении проявляется их действие. Можно установить, что чем больше K_1 и чем меньше соответствующий ему D_1 , тем больше будет значение дроби по сравнению с единицей.

Увеличение K_1 в %-ах к объему всего слитка нежелательно, однако, увеличение его абсолютного значения, без изменения %-а объема и при неизменном D_1 возможно хотя и исключительно путем изменения размеров корпуса слитка.

Значение K_1 , например, может быть увеличено:

а) Путем увеличения соотношения H/D слитка, при неизменной конусности его:

б) путем уменьшения конусности корпуса слитка одновременно с небольшим уменьшением соотношения H/D .

Из вышеуказанного следует, что для всех стальных слитков, для которых никакие другие факторы (ковка, прокатка, образование рыхлости вдоль оси) не органичивают эти условия, следует стремиться к максимальному соотношению H/D и минимальной конусности, имея ввиду снижение тепловых потерь прибыли.

Выводы, сделанные до сих пор в отношении конусности прибыльных головок, могут быть применены и к прибылям квадратного сечения принадлежащим к слиткам квадратного сечения, необходимо лишь вместо значений

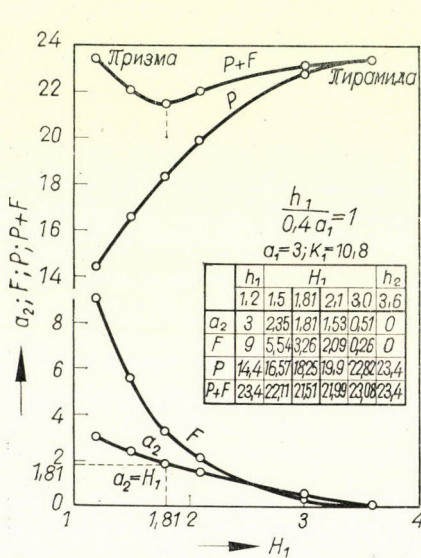


Рис. 9. Изменение элементов поверхности прибыли в зависимости от конусности (высоты) при $h_1/0,4 a_1 = 1$

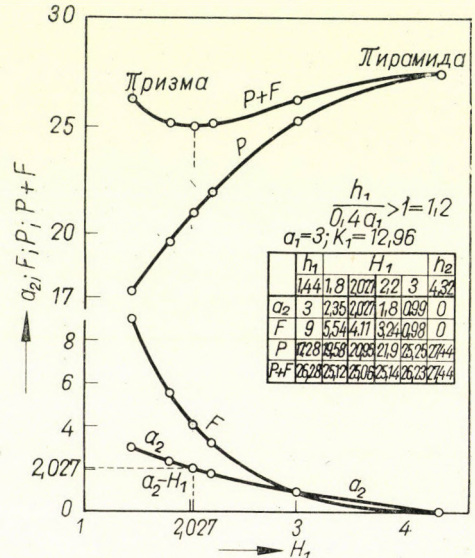


Рис. 10. Изменение элементов поверхности прибыли в зависимости от конусности (высоты) при $h_1/0,4 a_1 > 1$

D подставить соответствующие значения a . Изменение значений $a_2, F, P, P + F$ прибылей квадратного сечения в зависимости от H_1 , наряду со значениями $H_1 = 0,4 D_1$ показано на рис. 8, 9, 10.

Необходимо отметить, что боковая поверхность прибылей квадратного сечения, имеющих равный объем, ту же площадь сечения и равную конусность, что и прибыли круглого сечения, больше, и, таким образом, часть боковой поверхности, приходящаяся на единицу объема (X) и объем огнеупорной футеровки (Y), также больше.

Суммируя можно утверждать, что в интересах снижения тепловых потерь прибыли, при проектировании и расчете изложниц желательнее соблюдать следующие условия:

1. Избегать, по возможности, разливки в изложницы малых размеров;
2. применение прибыльных головок малой конусности;

3. разработка таких соотношений размеров слитка и прибыли, при которых значение

$$\frac{4K_1}{2} = \frac{D_1 \pi}{0,4 D_1} \quad \text{или} \quad \frac{4K_1}{2} = \frac{a_1 \pi}{0,4 a_1}$$

является возможно наибольшим при минимальном K_1 , выраженном в %-ах;

4. увеличение соотношения H/D до тех пор, пока дальнейшее увеличение не сопровождается появлением рыхлости материала вдоль оси;

5. установление минимальной конусности корпуса слитка;

6. замена прибыльных головок квадратного сечения, головками круглого или многоугольного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чабалик, Д.: Az acéltuskó-tárfej termikus vizsgálata (Термический анализ прибылей стальных слитков). Диссертация на соискание ученой степени доктора наук, Будапешт 1964.

REDUCTION OF HEAT LOSS OF THE INGOT HEAD

G.Y. CSABALIK

SUMMARY

One way to reduce the heat loss of the ingot head is to modify the shape and the dimensions of the head, leaving its volume unchanged. The lateral heat loss of the ingot head being the highest it should be endeavoured to diminish the lining volume of the head-cap per unit-volume of the ingot head, as well as to reduce the inner mantle surface of the head-cap. This can be achieved by reducing the conicity of the head. Besides an unchanged head-volume the larger upper open surface thus formed permits the heating of a larger head surface with simpler methods. The better heating possibility achieved together with the reduction of heat loss result in a very favourable ingot head shape and ingot head volume.

VERRINGERUNG DES WÄRMEVERLUSTES AM GUSSKOPF

G.Y. CSABALIK

ZUSAMMENFASSUNG

Eine Möglichkeit zur Verringerung der Wärmeverluste am Gußkopf besteht in der Änderung der Form und der Abmessungen des Gußkopfes bei unveränderten Volumen. Da der seitliche Wärmeverlust des Gußkopfes der größte ist, muß die Verringerung des auf die Rauminhaltseinheit des Gußkopfes bezogenen Gußkopfkappenfutter-Rauminhaltes sowie der inneren Mantelfläche der Gußkopfkappe angestrebt werden. Dies kann durch Verringerung der Konizität des Gußkopfes erreicht werden. Die sich bei unverändertem Gußkopfrauminhalt derart ergebende größere obere offene Fläche ermöglicht das Heizen einer größeren Oberfläche des Gußkopfes durch einfache Methoden. Die gleichzeitig mit der Wärmeverlustverringering erreichbare größere Heizmöglichkeit ergibt günstige Gußkopfform und vorteilhaften Gußkopfrauminhalt.

RÉDUCTION DES PERTES DE CHALEUR DE LA MASSELOTTE

G.Y. CSABALIK

RÉSUMÉ

Un mode de réduction des pertes de chaleur de la masselotte consiste à modifier sa forme et ses dimensions, tout en laissant son volume constant. Les pertes de chaleur de la masselotte atteignant leur maximum en direction latérale, il faut s'efforcer de réduire, d'une part, le volume de revêtement du châssis — par unité de volume de la masselotte — et d'autre part la surface intérieure du châssis. On y arrive en diminuant la conicité de la masselotte. Le volume de la masselotte étant constant, la plus grande surface supérieure ouverte ainsi produite permet le chauffage d'une plus grande surface de la masselotte, moyennant des méthodes simples. La possibilité d'un chauffage plus intense assurée en même temps que la réduction des pertes de chaleur, laisse obtenir une forme et un volume de masselotte très favorables.

THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG DER FLIESSERSCHEINUNGEN DES WERKSTOFFES BEIM GESENKSMIEDEN

41. MITTEILUNG DER METALLURGISCHEN ARBEITSGEMEINSCHAFT

L. TÓTH

AKADEMISCHE METALLURGISCHE ARBEITSGEMEINSCHAFT, MISKOLC (UNGARN)

[Eingegangen am 28. Februar, 1966]

Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den theoretischen und experimentellen Untersuchungen des Materialfließens beim Gesenkschmieden. Es wird für die Bestimmung der Erscheinungen des Materialfließens beim Gesenkschmieden ein leicht übersehbares Näherungsverfahren beschrieben. Der Verfasser untersucht experimentell und theoretisch die Formänderung und die Spannungsverhältnisse eines zylindersymmetrischen Schmiedestückes mit einem H-Querschnitt und einer Zapfenscheibe. Zwischen den experimentell und theoretisch bestimmten Beziehungen besteht eine ausreichende Übereinstimmung, womit die Richtigkeit der beschriebenen theoretischen Näherungsmethode bewiesen ist.

I. Einführung

Im Fall des Gesenkschmiedens und des Pressens befindet sich der Werkstoff in einem dreiachsigen Spannungszustand und dementsprechend erleidet er eine dreiachsige Formänderung. Der dreiachsige Spannungszustand kann lediglich mit Hilfe von sehr komplizierten mathematischen Verfahren untersucht werden. Daher, führt man nicht vereinfachende Bedingungen ein, so können die Kennzeichen der bildsamen Formänderung — die Spannung und die Formänderung — auf rein theoretischem Wege nicht bestimmt werden. Die Vielfalt und Kompliziertheit der Schmiedestücke erschwert auch sehr die Ausarbeitung von vereinfachenden Bedingungen. Daher findet man im Schrifttum sehr wenige theoretische Lösungen für die Bestimmung der Fließerscheinungen des Werkstoffes beim Gesenkschmieden. Vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung des Ausfüllvorgangs vom Gesenkraum. Die Untersuchung der Formänderung, die sich im bereits ausgefüllten Gesenkraum vollzieht, bildete den Gegenstand einer früheren Arbeit [1].

Zur theoretischen Bestimmung der mehrachsigen Formänderung können nach der allgemeinen Theorie der bildsamen Formänderung verschiedene Näherungsverfahren ausgearbeitet werden. Die grundlegende Bedingung der Berechnung besteht darin, daß während des Schmiedens ein ebener Formänderungszustand vorausgesetzt werden kann. Die Spannungen und die Verschiebungsgeschwindigkeiten können z. B. nach dem bekanntesten theoretischen Verfahren — nach dem Gleitliniensystem — festgestellt werden. Der

größte Nachteil dieser Methode besteht darin, daß sie nur bei konkreten Maßverhältnissen verwendet werden kann, ferner darin, daß bei Schmiedestücken mit komplizierten Querschnitten die Bestimmung des Gleitlinienfeldes langwierig ist. Eine andere Methode zur gemeinsamen Untersuchung der Spannungen und der Formänderungen kann mit Hilfe der Anwendung des Prinzips der Mindestarbeit ausgearbeitet werden. Die Beschreibung dieses Verfahrens ist im Buch [2] von TARNOWSKIJ und seiner Mitverfasser zu finden.

Die Anwendung des Prinzips der Mindestarbeit führt zu einer relativ einfacheren Theorie als das Gleitliniensystem. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß diese Theorie sich auch für die Ausarbeitung einer allgemeinen Lösung eignet. Nachteilig ist jedoch, daß die Lösung nicht einfach ist, und das Ergebnis nur als oberer Grenzwert betrachtet werden kann [3], da das vereinfachte Formänderungsschema, das als Rechnungsgrundlage dient, nicht der tatsächlich auftretenden Formänderung entspricht. A. GELEJI [4] entwickelte in seinen Arbeiten eine allgemeine theoretische Methode, die es ermöglicht, unter Anwendung von experimentellen Werten und durch zweckmäßige Vereinfachungen gut übersehbare und leicht zu behandelnde Beziehungen zu entwickeln. Mit Hilfe dieser Methode kann man auch die Spannungsverhältnisse und die Erscheinungen des Werkstofflusses beim Gesenkschmieden bestimmen.

II. »Prinzip der neutralen Linie«

Als Grundlage unseres Näherungsverfahrens dient die Tatsache, daß bei der Formänderung eines bildsamen Körpers von beliebiger Form sich stets ein solches Flächensystem bildet, das den Körper in Teile gliedert, in denen die Richtungen der Formänderungen unterschiedlich sind. Bei dem Gesenkschmieden fließt das Material in die noch nicht ausgefüllten Gesenkräume lediglich aus den sie umgebenden und aus den mit den eben genannten Trennflächen begrenzten Teilen (Bild 1). Die im Bild mit gestrichelten Linien gekennzeichneten Flächen teilen das skizzierte Schmiedestück in drei Teile. Aus dem Raumteil I fließt der Werkstoff lediglich in die Gratrille, aus den mit II und III bezeichneten Raumteilen dagegen nur in den oberen beziehungsweise unteren Gesenkraum. Die Kenntnis der Trennflächen ist daher erforderlich, um den Mechanismus der Ausfüllung des Gesenkraumes bestimmen zu können. Die Ausfüllung der Gesenkräume kann als Funktion der Höhenabnahme, unter Verwendung des Gesetzes von der Raumkonstanz, bestimmt werden.

Damit beschränkt sich die Untersuchung der Fließverhältnisse beim Gesenkschmieden auf die Bestimmung der Trennlinien. Das System der Trennlinien kann man mit Hilfe von einfachen Versuchen bzw. mit theoretischen Überlegungen bestimmen. Die genaue Lage der Trennlinien kann man nach

der Bedingung des im Körper auftretenden Gleichgewichts der Spannungen bzw. durch Anwendung des Prinzips der minimalen Arbeit festlegen.

Im wesentlichen wurde dieses Prinzip auch von KÁRMÁN bei der Theorie des Walzens verwendet [4], daher sei im Interesse der Einfachheit in den weiteren Ausführungen dieses Prinzip als das »Prinzip der neutralen Linie« genannt.

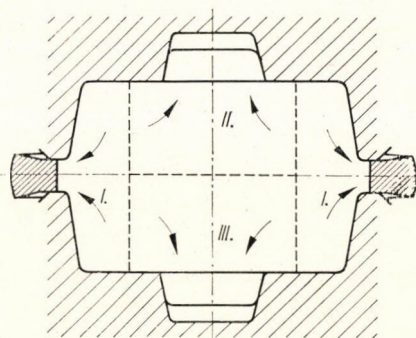


Bild 1

III. Bestimmung des »Systems der neutralen Linie«

Das System der neutralen Linien kann man am einfachsten experimentell bestimmen. Zweck der experimentellen Methode besteht in der Bestimmung der Richtungen der im Innern des Schmiedestückes auftretenden Materialverschiebungen. Die Bestimmung wird in der Weise vorgenommen, daß im Gesenk ein Probestück geformt wird, das die Symmetrieebene entlang eine Teilung und auf der Teilungsebene ein dünnes, gekratztes Netz aufweist. Um ein anschauliches Bild über die während der Verformung ständig wechselnden Fließverhältnisse des Werkstoffes zu erhalten, ist es zweckmäßig, wenn man die bis zu einem verschiedenen Grad im selben Gesenk verformten Probekörper mit einem quadratischen Netz versieht. Die Probekörper, die vorher bis zu einem verschiedenen Grad verformt wurden, erhalten ein regelmäßiges Netz, und werden dann erneut einer geringen Verformung ($\Delta h = 0,5 \text{ mm}$) unterworfen. Dadurch erhält man die auf den Bildern 8 und 16 dargestellten Abbildungen. Aus den zusammenhängenden Abbildungen kann man gut die während des Verformens entstandenen Formänderungsbilder verschiedenen Charakters entnehmen. Anhand der Abbildungen, welche die örtlichen Verschiebungen veranschaulichen, kann die Lage und Form der neutralen Linie gut bestimmt werden. Untersucht man die inneren Verschiebungen, die bei Schmiedestücken verschiedenen Charakters auftreten, so kann man feststellen, daß die neutralen Linien Raunteile begrenzen, in welchen entweder ein Stauchen zwischen schiefen Ebenen oder ein Pressen in einen leeren Raunteil stattfindet.

1. Pressen

Das Prinzip des Pressens in einen leeren Gesenkteil veranschaulicht das Bild 2. In Abhängigkeit von den im Körper entstehenden Spannungsverhältnissen tritt eine Spannung von irgendeiner Größe σ_x auf. In Abhängigkeit von der Größe der Spannung σ_x wird ein Formänderungsfall entweder nach Bild

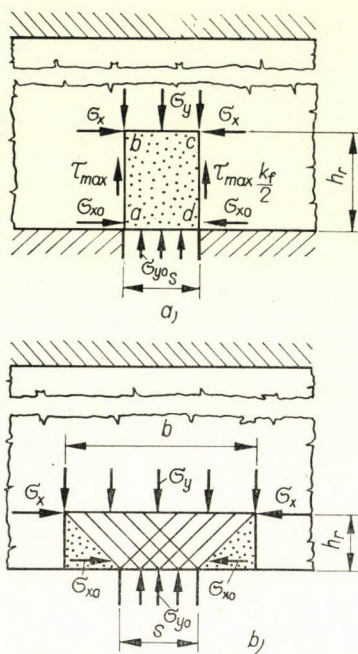


Bild 2

2a oder nach 2b auftreten. Wenn zwischen den Spannungen, dargestellt im Bild 2, die mit der Gleichung (1) ausgedrückte Beziehung besteht, dann tritt die Formänderung nach Bild 2a auf:

$$\begin{aligned} \sigma_{x0} - \sigma_{y0} &< k_f, \\ \sigma_x - \sigma_y &= k_f. \end{aligned} \quad (1)$$

Nach der Gleichung (1) wirkt im Raumteil $abcd$ keine so große Spannung σ_x , welche die Raumelemente $s.dy$ zusammendrücken würde, daher bleibt das Raumelement $abcd$ in einem elastischen bzw. einem starren Zustand. Im Verlauf der Formänderung wird der Raumteil $abcd$ entgegen der Schubspannung τ_{max} , die die Flächen ab und cd entlang auftritt, als starres Material abgeschert, und in dieser Weise in den leeren Raumteil geschoben.

Anhand des Gleichgewichts vom Raumteil $abcd$ und in Kenntnis der Spannungen können die Abmessungen des elastischen Raumteils bestimmt werden. Im Fall einer Zylindersymmetrie lautet das Gleichgewicht in Richtung y der auf den Raumteil wirkenden Spannungen:

$$\frac{s^2 \pi}{4} (\sigma_y - \sigma_{y0}) = s\pi h_r \frac{k_f}{2}. \quad (2)$$

Aus der Gleichung (2) kann die Höhe des elastischen Raumteils (die auch die Lage der neutralen Linie bestimmt) festgestellt werden:

$$h_r = \frac{\sigma_y - \sigma_{y0}}{2k_f} s. \quad (3)$$

Im Körper wird der Formänderungsfall, der im Bild 2b dargestellt ist, entstehen, wenn zwischen den im Bild skizzierten Spannungen die Beziehung nach Gleichung (4) besteht:

$$\begin{aligned} \sigma_{x0} - \sigma_{y0} &> k_f, \\ \sigma_x - \sigma_y &= k_f. \end{aligned} \quad (4)$$

Entsprechend der Gleichung (4) gelangt der über dem Spalt befindliche Werkstoff in einen bildsamen Zustand. Wenn man wie bisher die im Körper auftretenden Spannungen vernachlässigt, d. h. im Fall von $\tau_{xy} \cong 0$, dann sind die Spannungen σ_x und σ_y nach der Bildsamkeitslehre Hauptspannungen. Die Richtung der im bildsamen Werkstoff entstandenen Gleitebenen bildet mit der Richtung der Hauptspannungen einen Winkel von 45° . In dem Fall, der im Bild 2b dargestellt ist, tritt daher eine ähnliche Erscheinung auf wie beim Strangpressen.

Auf Grund der Untersuchung des Strangpressens können die im Werkstoff auftretenden Spannungen mit Hilfe der Gleichung (5) bestimmt werden [1]:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + 2,3 k_f \ln \frac{b}{s}. \quad (5)$$

Nach den Gleichungen (4) und (5) kann man anschreiben:

$$\sigma_x = k_f + \sigma_{y0} + 2,3 k_f \ln \frac{b}{s}. \quad (6)$$

Aus der Gleichung (6) kann in Kenntnis der Spannungen, die auf den in der Umgebung des leeren Gesenkteils befindlichen Werkstoff wirken, das für

die Lage der neutralen Linie kennzeichnende Maß b bestimmt werden:

$$b = s \cdot \exp\left(\frac{\sigma_x - k_f - \sigma_{y0}}{2,3 k_f}\right) \quad (7)$$

und

$$h_r = \frac{b - s}{2}. \quad (8)$$

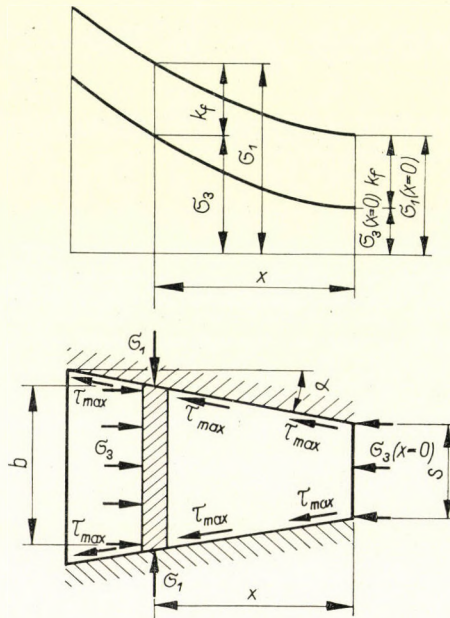


Bild 3

2. Das Stauchen

Die theoretische Untersuchung der im Gesenk auftretenden Staucherscheinungen kann anhand der Kenntnis der bildsamen Spannungsverhältnisse des keilförmigen Raumteils durchgeführt werden. Die im Bild 3 sichtbare Spannungsverteilung kann auf Grund der Gleichgewichts- und Bildsamkeitsbedingungen eines Werkstoffs — der sich zwischen zwei rauhen Druckflächen, die einen Keilwinkel von 2α bilden befindet — bestimmt werden [5]:

$$\sigma_3 = \sigma_{3(x=0)} + 1,15k_f \left(1 + \frac{1 + \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}\right) \ln \frac{b}{s}, \quad (9)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{1(x=0)} + 1,15k_f \left(1 + \frac{1 + \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}\right) \ln \frac{b}{s}. \quad (10)$$

teil entstandenen neutralen Linien bestimmt, mit der Gleichung (15) ermitteln [1]:

$$\delta \left[\int_{x=0}^R \sigma_{3x} dx \right] = 0, \quad (15)$$

$$b = \frac{1}{4} (D + s). \quad (16)$$

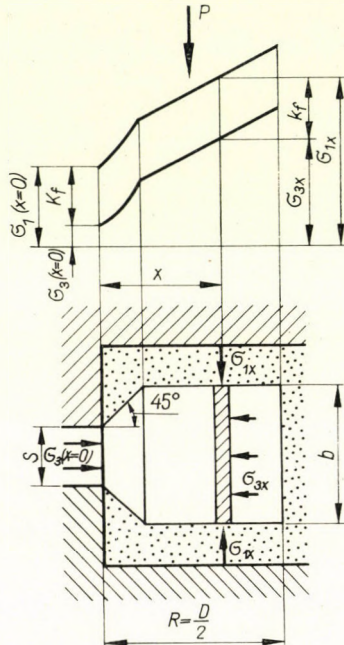


Bild 5

Die Gleichung (15) kann man unter Anwendung der Mohrschen Bedingung — bei einer konstanten Verformungsfestigkeit — in nachfolgender Form anschreiben:

$$\delta \left[\int_{x=0}^R \sigma_{1x} dx \right] = 0. \quad (17)$$

Auf Grund der Gleichung (17) muß die auf den gestauchten Raumteil wirkende Variation der äußeren Kraft gleich Null sein:

$$\delta[P] = 0. \quad (18)$$

Nach der Gleichung (18) wird daher in dem gestauchten Werkstoff eine bildsame Zone — d. h. ein neutrales Liniensystem — entstehen, bei welcher

der Wert der auf den äußeren Raumteil wirkenden Kraft minimal ist. Die Gleichung (18) bedeutet im wesentlichen auch den minimalen Wert der ganzen Schmiedekraft, da die Spannungsverhältnisse, die in dem die Preßzone des Gesenkraumes umgebenden Werkstoff entstanden sind, lediglich von der Gleichgewichts- und Bildsamkeitsbedingung abhängen, daher können sie vom Gesichtspunkt der Minimumgestaltung außer acht gelassen werden. In dieser Weise gilt die Gleichung (18) sowohl für das ganze Schmiedestück als auch für die Teilvolumina des Stauchens.

Im Grunde genommen ist die Gleichung (18) die Bedingung für das Bestimmen der oberen Grenzbelastung, wenn man das Formänderungssystem beliebig annimmt [5], aber sie wird zur Bedingung für das Ermitteln der tatsächlichen Kraft, wenn man die Berechnung auf Grund des tatsächlichen (annähernd tatsächlichen) Formänderungsschemas, bestimmt anhand der Versuche, durchführt.

IV. Anwendung des »Prinzips der neutralen Linien« im Fall von kreissymmetrischen Schmiedestücken

Die Richtigkeit und Anwendungsmethode der im Kapitel III erläuterten theoretischen Grundlagen kann man am besten bei der Untersuchung des Schmiedens von einfachen kreissymmetrischen Stücken veranschaulichen. In den nachfolgenden Ausführungen werden die theoretischen und experimentellen Untersuchungen von zweierlei — in der Schmiedepaxis oft vorkommenden — Fällen beschrieben.

1. Schmieden einer Scheibe mit einem im Mittelpunkt angebrachten Zapfen

Die beim Schmieden eines Probekörpers aus Blei auftretende Schmiedekraft und die Zapfenabmessung Y sind in Abhängigkeit von h im Bild 7 zu sehen. Der Bleikörper hat einen Durchmesser von 25 mm und eine Höhe von 12,5 mm; das Schmiedewerkzeug ist im Bild 6 dargestellt. Im Bild 8 sind drei Abbildungen zu sehen, die kennzeichnend für den Preßvorgang sind, und die innere Formänderung zeigen. Im Bild 9 sind das anhand des Bildes 8 ausgearbeitete neutrale Liniensystem und die auftretenden Spannungen zu finden.

Die Bestimmung der genauen Lage der neutralen Linien kann auf Grund des dritten Kapitels erfolgen:

Im Fall einer Formänderung nach dem Bild 9a tritt der im Bild 2a gezeigte Grundfall und die zwischen zwei parallelen Druckflächen erfolgte Stauchung auf. Das zur Bestimmung des Maßes von h_r des neutralen Liniensystems zur Verfügung stehende Gleichungssystem kann unter Zugrundelegung der

Gleichungen (3), (11), (12), (13) und (14) bestimmt werden:

$$h_r = \frac{\sigma_y - \sigma_{y0}}{k_f} \cdot \frac{s}{2}, \quad (19)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = k_f, \quad (20)$$

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + k_f \cdot f_1 \left(\frac{x}{h}; \mu \right). \quad (21)$$

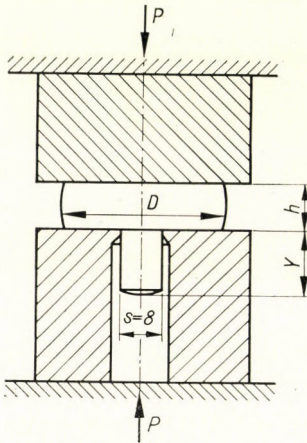


Bild 6

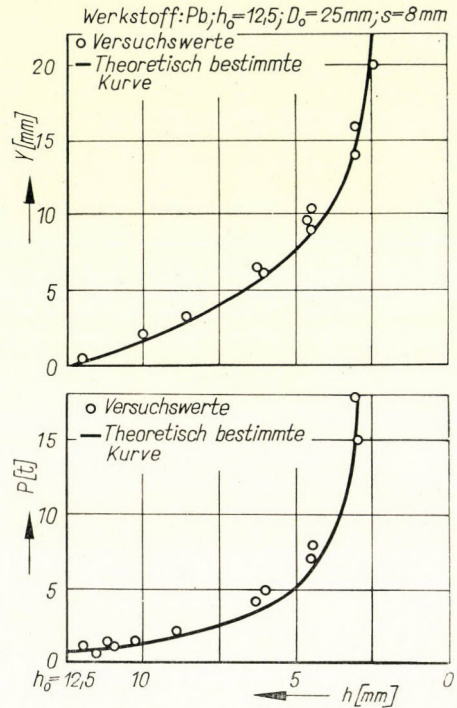


Bild 7

Aus den Gleichungen (19), (20) und (22) kann der Wert von $2 h_r/s$ ausgedrückt werden:

$$\frac{2h_r}{s} = 1 + \frac{\sigma_{x0}}{k_f} - \frac{\sigma_{y0}}{k_f} + f_1 \left(\frac{x}{h}; \mu \right). \quad (22)$$

Für die graphische Lösung der Gleichung (22) steht das Bild 4 zur Verfügung.

Die auftretenden Spannungen können mit Hilfe der Gleichungen (20), (21) und (22) bestimmt werden. Auf Grund der Spannungen und mit den Bezeichnungen des Bildes 9 wird die auftretende Druckkraft:

$$P = \frac{D^2 \pi}{4} (k_f + \sigma_{x0}) + (\sigma_x - \sigma_{y0}) \frac{\pi}{3} \left[\frac{D^2}{4} + \frac{Ds}{4} + \frac{s^2}{4} \right]. \quad (23)$$

Zur Bestimmung der Formänderung muß man annehmen, daß der bildsame Werkstoff in seinem ganzen Querschnitt gleichmäßig eine spezifische Formänderung von der Größe $\Delta h/h$ erleidet, und in diesem Fall besitzt die Gleichung (24) Gültigkeit:

$$\frac{\Delta Y}{h_r} = \frac{\Delta h}{h}. \quad (24)$$

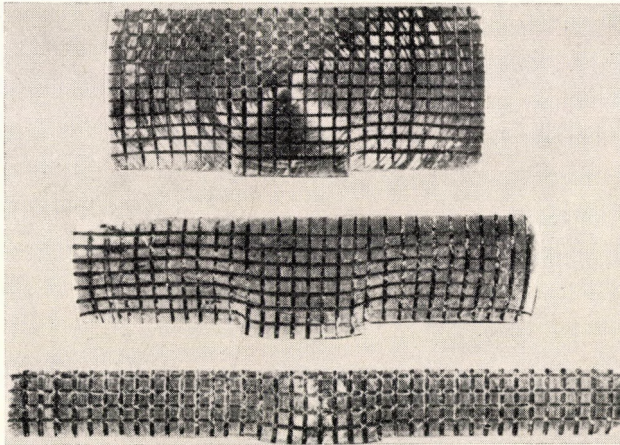


Bild 8

Man erhält aus der Gleichung (24), indem man vom Quotienten der Differenzen zum Differentialquotienten übergeht:

$$\frac{dY}{dh} = \frac{hr}{h}. \quad (25)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (22) und (25) kann man den Differentialquotienten dY/dh , der als Grundlage für die Bestimmung der Abmessung des Zapfens Y (die den kennzeichnendsten Kennwert des Materialflusses bedeutet) dient, in Abhängigkeit von h berechnen:

$$\frac{dY}{dh} = \frac{s}{2h} \left[1 + \frac{\sigma_{x0}}{k_f} - \frac{\sigma_{y0}}{k_f} + f_1 \left(\frac{x}{h}; \mu \right) \right]. \quad (26)$$

Der im Bild 9b dargestellte Fall stellt im wesentlichen den Grenzfall der Formänderung nach dem Bild 9a dar. Er tritt dann auf, wenn die Gleichung (1) noch gültig ist, und die Ungleichung (27) ebenfalls besteht:

$$h \leq \frac{\sigma_y - \sigma_{y0}}{k_f} \cdot \frac{s}{2}. \quad (27)$$

Da h_r nicht größer als h werden kann, muß $h = h_r$ sein.

Ähnlich dem Formänderungsfall, dargestellt im Bild 9c, können die Spannungen auch hier mit den Gleichungen (20) und (21) ausgedrückt, und die auftretende Kraft aus der Gleichung (35) bestimmt werden.

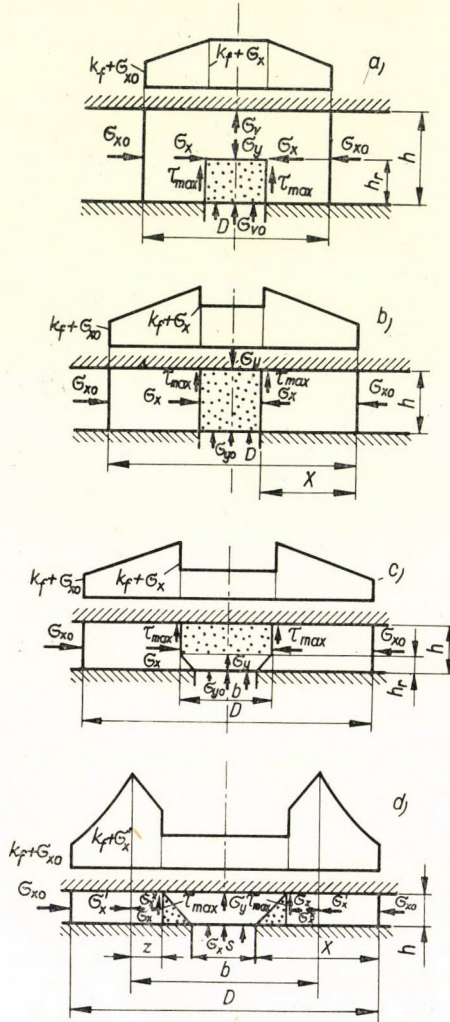


Bild 9

Die zur Grundlage der Bestimmung der Formänderung dienende Gleichung (26) wird im Sinne der Gleichung $h = h_r$:

$$\frac{dY}{dh} = 1. \quad (28)$$

Bei der Formänderung nach Bild 9c tritt der Grundfall nach dem Bild 2b, ferner der Fall eines Stauchens zwischen parallelen ebenen Flächen auf.

Die Größe von h_r , die bestimmend für die Lage der neutralen Linien ist, kann aus den Gleichungen (4)–(8) und (11)–(14) bestimmt werden:

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + k_f \cdot f_1 \left(\frac{X - h_r}{h}; \mu \right), \quad (29)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + 2,3 k_f \cdot \ln \frac{s + 2hr}{s}, \quad (30)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = k_f. \quad (31)$$

Aus dem Gleichgewichtssystem, das aus den Gleichungen (29), (30) und (31) besteht, kann man für die Bestimmung von h_r folgende Gleichung ableiten:

$$2,3 \ln \left(\frac{s + 2h_r}{s} \right) = -1 + \frac{\sigma_{x0} + \sigma_{y0}}{k_f} + f_1 \left(\frac{X - h_r}{h}; \mu \right). \quad (32)$$

Der Wert der Größe $f_1(\alpha/h; \mu)$, die in der Gleichung (32) vorkommt, kann am Bild 4 unmittelbar abgelesen werden, die Gleichung kann also zahlenmäßig oder mit einer graphischen Methode gelöst werden. Zur Vereinfachung der Lösung kann auch die auf der Abbildung dargestellte Kurvenschar f_2 verwendet werden.

$$f_2 \left(\frac{h_r}{h}; \frac{h}{s} \right) = 2,3 \ln \left(\frac{s + 2h_r}{s} \right) = 2,3 \cdot \ln \left(1 + 2 \frac{h_r}{h} \cdot \frac{h}{s} \right). \quad (33)$$

Anhand der Gleichungen (32) und (33) wird:

$$f_2 \left(\frac{h_r}{h}; \frac{h}{s} \right) = -1 + \frac{\sigma_{x0} - \sigma_{y0}}{k_f} + f_1 \left(\frac{X - h_r}{h}; \mu \right). \quad (34)$$

Die graphische Lösung der Gleichung (34) kann man in der Weise vornehmen, daß man die im Bild 4 gezeigte Kurvenschar auf ein Pauspapier zeichnet, und sie dann in der dargestellten Lage auf das Bild 10 legt. Der Schnittpunkt der entsprechenden zwei Kurven, die man aus dem Bild 4 bzw. aus dem Bild 10 entnommen hat, nach der Darstellung im Bild 10, dient als Grundlage für die Bestimmung von h_r/h und von den Spannungswerten.

In Kenntnis von h_r kann man die auftretenden Spannungen anhand der Gleichungen (29) und (30) bestimmen.

In Kenntnis der Spannungen kann auf Grund des Bildes 9c die auftretende Kraft berechnet werden:

$$P = \frac{D^2 \pi}{4} (k_f + \sigma_{x0}) + (\sigma_x - \sigma_{y0}) \frac{\pi}{3} \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 + \frac{D \cdot b}{4} + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] - \frac{b^2 \pi}{4} \cdot 2 k_f + b \cdot \pi \left(h - \frac{b - s}{2} \right) \cdot \frac{k_f}{2}. \quad (35)$$

Die Bestimmung der Formänderung erfolgt nach dem Bild 9c unter Verwendung des Gesetzes von der Raumkonstanz:

$$\frac{b^2 \pi}{4} \cdot dh = \frac{s^2 \pi}{4} \cdot dY. \quad (36)$$

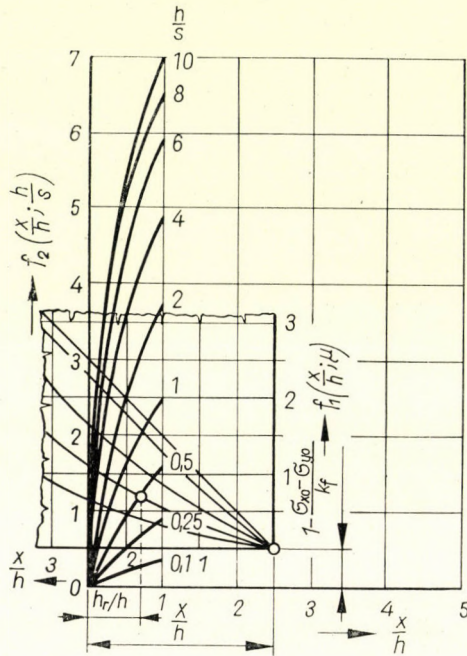


Bild 10

Aus der Gleichung (36) wird:

$$\frac{dY}{dh} = \left(\frac{b}{s} \right)^2. \quad (37)$$

In der Gleichung (37) ist nach dem Bild 9a $b = s + 2h_r$, wobei h_r aus dem Wert der als Lösung der Gleichung (34) errechneten Größe h_r/r ausgedrückt werden kann.

Der Formänderungsfall nach dem Bild 9d ist im Grunde genommen ähnlich dem Formänderungsfall nach 9c. Das Maß von s , das die Lage der neutralen Linien bestimmt, kann als Lösung aus dem folgenden Gleichgewichtssystem gewonnen werden:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + k_f \cdot 2,3 \ln \frac{s + 2h}{s}, \quad (38)$$

$$\sigma'_x = \sigma_{x0} + k_f \cdot f_1 \left(\frac{x}{h}; \mu \right), \quad (39)$$

$$\sigma_x'' = \sigma_x + k_f \cdot f_1' \left(\frac{z}{h}; \mu \right), \tag{40}$$

$$\sigma_x - \sigma_y = k_f. \tag{41}$$

Die Gleichungen (38)–(41) können unter Anwendung der Gleichungen (4)–(8) und (11)–(14), entsprechend den Bezeichnungen im Bild 9d bestimmt werden.

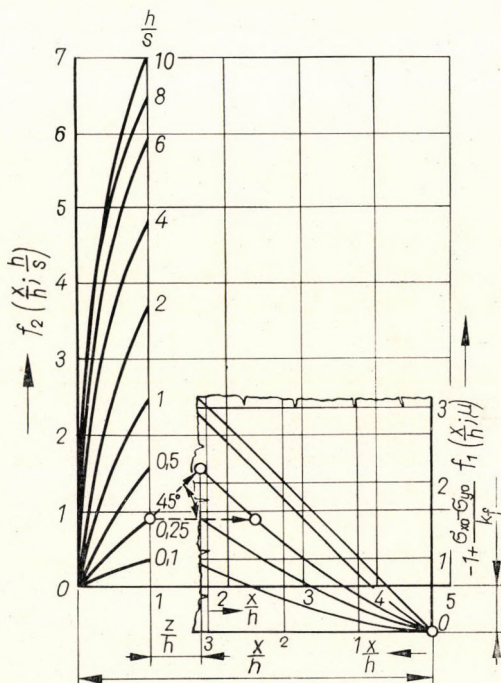


Bild 11

Aus den Gleichungen (38)–(41) kann unter Verwendung der Gleichung (33) folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$f_2 \left(\frac{h_r}{h} = 1; \frac{h}{s} \right) = -1 + \frac{\sigma_{x0} - \sigma_{y0}}{k_f} + f_1 \left(\frac{x}{h}; \mu \right) - f_1' \left(\frac{z}{h}; \mu \right). \tag{42}$$

Die graphische Lösung der Gleichung (42) kann entsprechend dem Bild 11 vorgenommen werden. In Kenntnis des Wertes z/h , der als Lösung aus der Gleichung (42) hervorging, kann man nach dem Bild 9d den Wert von x/h bestimmen:

$$\frac{x}{h} = \frac{X}{h} - \frac{s + 2h}{h} - \frac{z}{h}. \tag{43}$$

In Kenntnis der Größen x/h und z/h kann man die auftretenden Spannungen auf Grund der Gleichungen (38)–(41) bestimmen. Kennt man die Spannungen, so kann man nach dem Bild 9d die auftretende Druckkraft berechnen:

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{D^2 \pi}{4} (k_f + \sigma_{x0}) + (\sigma'_x - \sigma_{x0}) \frac{\pi}{3} \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{D \cdot b}{4} + \left. \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] - (\sigma'_x - \sigma_x) \frac{\pi}{3} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + \frac{b(b-2z)}{4} + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{b-2z}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{b-2z}{2} \right)^2 \pi \cdot 2k_f + (s+2h)h \cdot \pi \frac{k_f}{2}.
 \end{aligned} \quad (44)$$

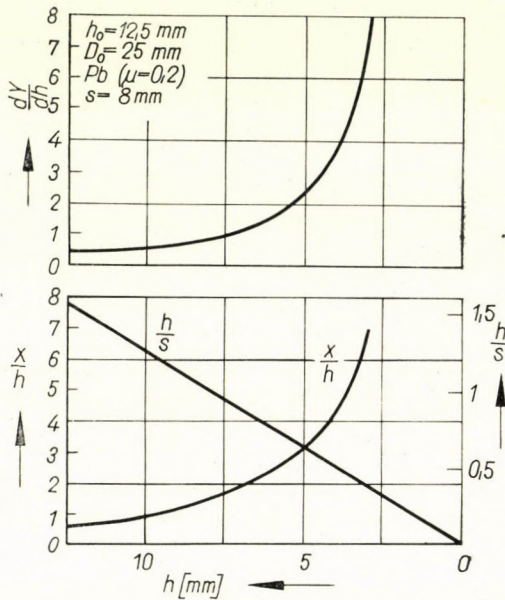


Bild 12

Der Wert der Formänderung kann mit Hilfe der Gleichung (37) ermittelt werden. Der in der Gleichung (37) erscheinende Wert von b ergibt sich nach dem Bild 9d zu

$$b = s + 2h + 2z. \quad (45)$$

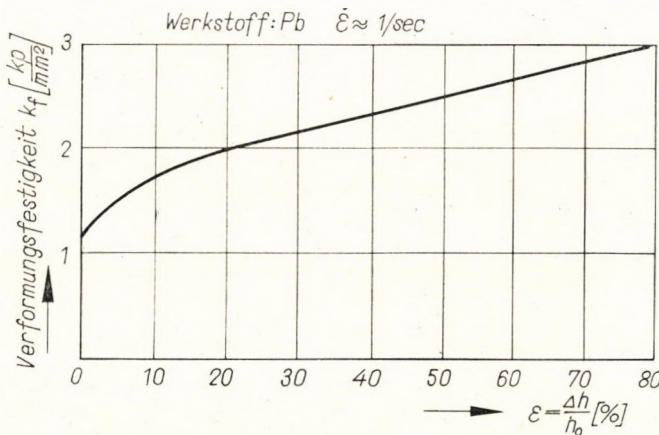
Die Kenntnis des Wertes von dY/dh , der anhand der Theorie der neutralen Linien bestimmt worden ist, bietet eine Möglichkeit dafür, daß man bei konkreten Abmessungsverhältnissen die Formänderung bestimmt.

Im Bild 12 findet man den Wert von dY/dh , der für einen Probekörper von 25 mm Durchmesser und 12,5 mm Höhe errechnet worden ist, und die

Werte der für die Berechnung verwendeten Größen X/h und h/s als Funktion von h :

$$Y = \int_{h=0}^h \left(\frac{dY}{dh} \right) dh. \quad (46)$$

Im Sinne der Gleichung (46) kann durch Integration der Funktion dY/dh der Wert von Y ermittelt werden. Die Integration führt man am einfachsten graphisch durch. Im Bild 7 ist neben den experimentell ermittelten Werten auch der nach dem Bild 12 bestimmte Wert von Y dargestellt.



Nach der oben beschriebenen Methode kann man auch die auftretende Kraft ermitteln. Zur Bestimmung der Kraft kann der Wert der Verformungsfestigkeit dem Bild 13 — das sich auf den Versuchswerkstoff Blei bezieht — entnommen werden.

Im Bild 7 ist auch die durch die erläuterten theoretischen Gleichungen ermittelte Kraft neben den Versuchswerten dargestellt. Nach dem Bild 7 besteht zwischen den theoretischen und experimentellen Kurven eine ausreichende Übereinstimmung.

2. Schmieden eines zylindersymmetrischen Stückes von Querschnitt H (auf jeder Seite mit einer Rippe)

In einem Gesenk, dargestellt im Bild 14, wurden Probestücke (genau in das Gesenk passend) von 31 mm Durchmesser und während der Versuchsreihe mit verschiedenen Ausgangshöhen verformt. Bei der Ausgestaltung des Gesenks

mußte im Interesse der Einfachheit von den Radien der Abrundungen und von der Seitenneigung abgesehen werden. Die Beseitigung des Grateinflusses wurde nach der Methode von A. Geleji [4] durch die Formgebung des Gesenks erreicht.

Die während der Verformung auftretende Kraft und das für die Gesenkausfüllung kennzeichnende Maß von Y wurde im Verlauf der Verformung als Funktion der Gratritze s gemessen. Im Bild 15 sind die Versuchsergebnisse zu sehen.

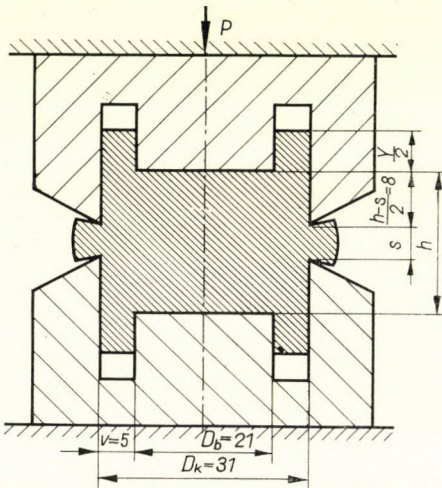


Bild 14

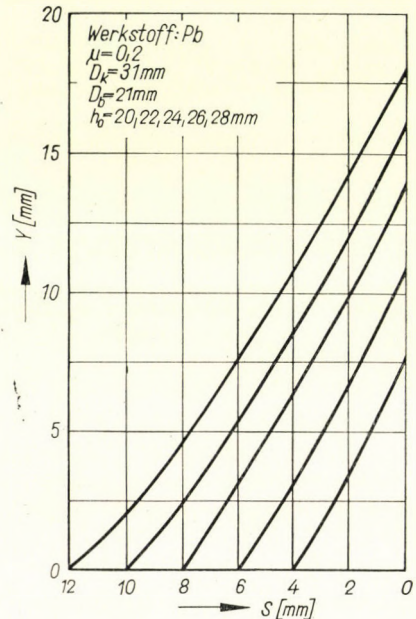


Bild 15

Zur experimentellen Bestimmung des Systems der neutralen Linien dient als Grundlage das Bild der inneren Werkstoffverschiebung (Bild 16). Aus dieser Abbildung kann man eindeutig feststellen, daß bei allen Maßverhältnissen eine Formänderung entsprechend dem Bild 17 auftritt. Nach dem Bild 17 entsteht demnach ein Stauchen zwischen parallelen Flächen und der Verformungsfall, der im Kapitel III. 1 beschrieben worden ist. Nach dem Bild 18 bildet sich in dem über den ebenen Flächen befindlichen Werkstoff zum Teil eine elastische, zum Teil eine bildsame Zone aus. Die Höhe der elastischen Zone kann anhand des Bildes 18 aus der Gleichung des Gleichgewichts, angeschrieben in Richtung y , bestimmt werden:

$$h_r D_b \pi \frac{k_f}{2} = (D_b + v) \pi v k_f. \quad (47)$$

Aus der Gleichung (47) wird der Wert von h_r :

$$h_r = \left(1 + \frac{v}{D_b}\right) 2v. \tag{48}$$

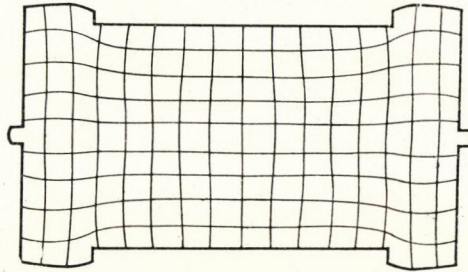


Bild 16

Dem Bild 18 entsprechend kann der Wert von h_r sinngemäß nicht größer werden als $h/2$. Wenn sich ein aus der Gleichung (48) errechneter Wert von h größer ergeben sollte als $h/2$, dann muß man im weiteren Verlauf mit einem Wert von $h_r = h/2$ rechnen.

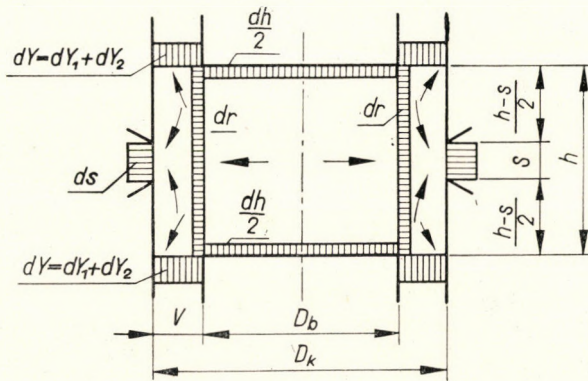


Bild 17

Da die Gleichung $dY/dh = 2 \cdot h_r/h$ auch im vorliegenden Fall als gültig angesehen werden kann, so wird die Formänderung des sich frei breitenen Teiles nach der Gleichung (48):

$$\frac{dY}{dh} = \frac{4v}{h} \left(1 + \frac{v}{D_b}\right). \tag{49}$$

Wenn der aus Gleichung (49) errechnete Wert für dY/dh größer sein sollte als 1, dann muß man die Rechnung mit $dY/dh = 1$ durchführen.

Anhand des Bildes 17 kann man zur Bestimmung der Formänderung, unter Verwendung der Raumkonstanz, folgendes Gleichungssystem anschreiben:

$$dh \cdot \frac{D_b^2 \pi}{4} = ds \cdot D_k \pi s + dY_1 \frac{D_k^2 - D_b^2}{4} \pi, \quad (50)$$

$$dh \cdot \frac{D_b^2 \pi}{4} = dr \cdot D_b \pi h. \quad (51)$$

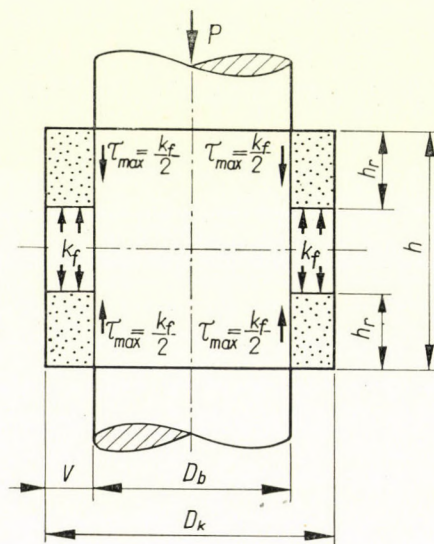


Bild 18

Unter Verwendung der Gleichung (49) kann man folgende Beziehung anschreiben:

$$dY_2 = dh \frac{4v}{h} \left(1 + \frac{v}{D_b} \right). \quad (52)$$

Die Höhenzunahme des in der Rippe eine Formänderung erleidenden Werkstoffes kann man in folgender Weise ausdrücken:

$$dY = dY_1 + dY_2. \quad (53)$$

Anhand der Gleichungen (50), (52) und (53) erhält man für den Differentialquotienten dY/dh :

$$\frac{dY}{dh} = \frac{D_b^2}{D_k^2 - D_b^2} - \frac{ds}{dh} \cdot \frac{4D_k s}{D_k^2 - D_b^2} + \frac{4v}{h} \left(1 + \frac{v}{D_b} \right). \quad (54)$$

Da der Wert von ds/dh nur mittelbar, in Kenntnis von ds/dr bestimmt werden kann, muß man folgende Beziehung anwenden:

$$\frac{ds}{dh} = \frac{ds}{dr} \cdot \frac{dr}{dh} \tag{55}$$

Auf Grund der Gleichung (51) wird:

$$\frac{dr}{dh} = \frac{D_b}{4h} \tag{56}$$

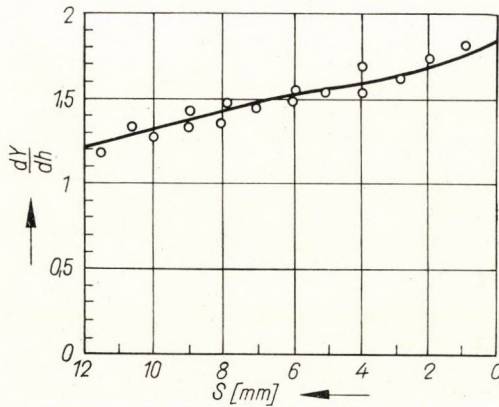


Bild 19

Anhand der Gleichung (54) und unter Anwendung der Gleichungen (55) und (56) erhält man nach entsprechender Ordnung:

$$\frac{dY}{dh} = \frac{1}{\left(\frac{D_k}{D_b}\right)^2 - 1} - \left(\frac{ds}{dr}\right) \frac{s}{h} \frac{1}{\frac{D_k}{D_b} - \frac{D_b}{D_k}} + \frac{4v}{h} \left(1 + \frac{v}{D_b}\right) \tag{57}$$

Den in der Gleichung (57) auftretenden Wert von ds/dr kann man nach den Erläuterungen des Kapitels III. 1 bestimmen; beim letzten Glied der Gleichung muß man darauf achten, daß sofern sein Wert größer als 1 werden sollte, er 1 gleichzusetzen ist.

Die im Bild 19 dargestellte Kurve dY/dh wurde unter Zugrundelegung der Gleichung (57) und der Abmessungen des im Bild 14 gezeigten Gesenks errechnet. Neben der im Bild 19 dargestellten theoretischen Kurve findet man auch die Werte dY/dh , die aus der experimentell bestimmten Beziehung $Y = Y(h_f)$ durch graphische Differentiation ermittelt worden sind. Die Ausgangshöhe beeinflusst — wie ersichtlich — die Beziehung dY/dh nicht. Die experimentellen und theoretischen Ergebnisse zeigen nach dem Bild 19 eine

entsprechende Übereinstimmung, woraus folgt, daß die theoretisch bestimm-
baren Kurven $Y = Y(h_r)$ ebenfalls eine entsprechende Übereinstimmung mit
den versuchsmäßig bestimmten Kurven aufweisen.

Die Bestimmung der auftretenden Kraft kann anhand des Bildes 18
durchgeführt werden:

$$P = \frac{D_b^2 \pi}{4} \left(\sigma_{3\text{mittel}} + \frac{D_b}{2h} k_f \right) \quad (58)$$

$\sigma_{3\text{mittel}}$ stimmt mit dem Verformungswiderstand überein, der aus der Ver-
formungskraft errechnet werden kann; diese tritt bei der Formänderung auf,
die im Kapitel III. 1 erläutert worden ist.

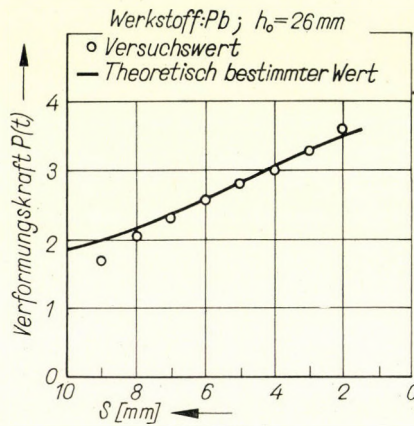


Bild 20

Im Bild 20 wird die experimentell bestimmte Verformungskraft,
unter Zugrundelegung eines Probekörpers mit der Ausgangshöhe von $h_0 =$
 $= 26 \text{ mm}$, mit der anhand der Gleichung (58) theoretisch ermittelten Kraft
verglichen. Zwischen den gerechneten und gemessenen Werten herrscht nach
der Abbildung eine ausreichende Übereinstimmung.

V. Anwendung der theoretischen Beziehungen

Die in den Kapiteln III. 1 und III. 2 erläuterten theoretischen und
experimentellen Zusammenhänge sind, obzwar sie die Lösung konkreter,
praktischer Aufgaben bezwecken, in der Praxis unmittelbar doch nicht zu ver-
wenden. Die Radien der Abrundungen und die Seitenneigung der Gesenke, fer-
ner die Gratwirkung wurden der Einfachheit halber bei den beschriebenen
Berechnungen und Versuchen nicht berücksichtigt. In ähnlicher Weise ließ man
unberücksichtigt die Wirkung der Schmiedegeschwindigkeit, ferner die ver-
schieden große Verfestigung, die infolge der im Gesenk auftretenden inhom-

genen Formänderung und der ungleichmäßigen Temperaturverhältnisse entsteht.

Zur Bestimmung der Verteilung der im Gesenkraum auftretenden Formänderungsfestigkeit, ferner zur Untersuchung der Gratwirkung wurde in einer früheren Arbeit [1] eine theoretische Näherungsmethode entwickelt. Daher soll in den nachfolgenden Ausführungen lediglich die Wirkung der Seitenneigung und der Abrundungsradien des Gesenkraumes untersucht werden.

Im Bild 21 ist die tatsächliche Ausführungsart eines Gesenkes für die im Bild 6 gezeigte Verformung dargestellt. Die theoretische Unter-

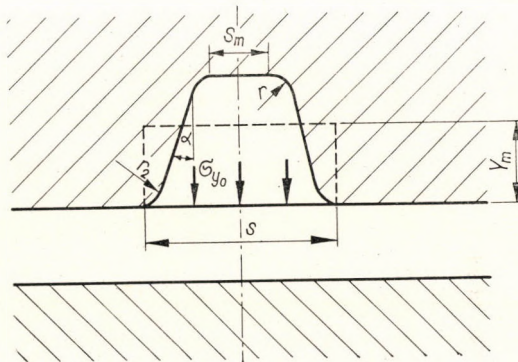


Bild 21

suchung der auftretenden Kraft und der Formänderung ähnelt auch in diesem Fall denen, die im Kapitel III. 1 beschrieben worden sind, der Wert von s muß jedoch unter Berücksichtigung der Seitenneigung und der Abrundungsradien bestimmt werden, außerdem muß man auch die Spannungen σ_{y0} in Betracht ziehen. Der Spannungswert σ_{y0} , der beim ganz ausgefüllten Gesenk auftritt, wird nach der Gleichung (5), mit den Bezeichnungen entsprechend dem Bild 21:

$$\sigma_{y0} = 2,3 k_f \ln \frac{s}{s_m}. \quad (59)$$

Anhand des Kapitels III. 1 kann man die Berechnung für den zylindrischen Gesenkraum unmittelbar durchführen. Zur Bestimmung des Ausfüllens des tatsächlichen Raumes nach dem Bild 21 muß man das Prinzip der Raumkonstanz anwenden. Die Werkstoffmenge, die zum Ausfüllen des im Bild gezeigten Gesenkteils erforderlich ist, muß mit dem Volumen eines Zylinders vom Durchmesser s und der Höhe Y_m übereinstimmen.

Die Anwendung der in der Arbeit beschriebenen theoretischen Näherungsmethode wurde im Hinblick auf zwei — verhältnismäßig einfachere — Grundformen gezeigt. Im Fall von komplizierteren Schmiedestücken kann diese

Untersuchungsmethode gut verwendet werden in der Weise, daß man das kompliziertere Stück in einfachere Grundformen aufteilt. So kann durch entsprechende Variierung der für die erläuterten Grundformen gültigen Ergebnisse die Methode der Berechnung auch auf kompliziertere Gesenkformen ausgedehnt werden.

SCHRIFTTUM

1. TÓTH, L.: Bestimmung der beim Gesenkschmieden auftretenden Höchstkraft. *Acta Techn. Hung.* 54 (1966), 143—174.
2. Гарновский, И. А. — Поздеев, А. А. — Ганаго, О. А. — Кольмогоров, В. Л. — Трубин, В. Н. — Вайсбург, В. И.: — Теория обработки металлов давлением. Москва 1963.
3. JOHNSON, W. — MELLÓR, P. B.: Plasticity for Mechanical Engineers. D. Van Nostrand Company, New—York 1962.
4. GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Berlin 1960.

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF MATERIAL FLOW IN DIE-FORGING

L. TÓTH

SUMMARY

The paper deals with the theoretical and the experimental investigation of material flow phenomena in die-forging, presenting an approximate, easily understandable method. The author investigates the deformation and the stresses in a disc with a pin and in a cylindrically symmetrical forged piece of H section. The experimental and theoretical relations agree fairly well and this proves the correctness of the discussed approximate method.

EXAMEN THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTAL DE L'ÉCOULEMENT DE LA MATIÈRE A L'ÉTAMPAGE

L. TÓTH

RÉSUMÉ

L'étude traite de l'examen théorique et expérimental des phénomènes d'écoulement de la matière à l'étampage et présente une méthode simple de détermination approchée de ces phénomènes. L'auteur examine théoriquement et expérimentalement les déformations et les contraintes d'un disque à tige et d'une pièce forgée à symétrie cylindrique, ayant une section en H. Les relations obtenues par voie théorique et expérimentale montrent un accord satisfaisant, ce qui prouve la justesse de la méthode théorique d'approximation préconisée par l'auteur.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ИСТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ КОВКЕ В ШТАМПАХ

Л. ТОТ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию явлений истечения материала при ковке в штампах. Дается легко обозримый метод приближенного определения явлений истечения материала при ковке в штампах. Автор теоретически и экспериментально исследует изменение формы и условия напряжений поковок вида шайбы с цапфой и симметричного двутавра. Между теоретическими и экспериментально установленными зависимостями наблюдается достаточно хорошее совпадение, что подтверждает правильность предложенного метода приближения.

MIKROSKOPISCHE UNTERSUCHUNG DER FERROMAGNETISCHEN PHASEN VON LEGIERUNGEN

A. KISFALUDY und P. TARDY
EISENFORSCHUNGSINSTITUT, BUDAPEST

[Eingegangen am 15. März, 1966]

Für den Nachweis der ferromagnetischen Phasen von austenitischen Stählen bzw. zur Bestimmung ihrer Lagerung ist eine solche Methode am geeignetsten, welche die Phasen auf Grund ihrer magnetischen Permeabilität trennt. Hierfür wurde folgendes Verfahren ausgearbeitet: der metallographische Schliff des zu untersuchenden Materials wird in ein magnetisches Feld gesetzt und auf seine Oberfläche eine Suspension gebracht, die ferromagnetische Teilchen von sehr feiner Körnung enthält, und die zu Domainuntersuchungen bereits seit langem verwendet wird. Unter dem Einfluß des magnetischen Feldes haften die Teilchen auf den ferromagnetischen Phasen, und daher erscheinen diese Phasen dunkel, wenn man sie mit dem bloßen Auge oder mit dem Mikroskop untersucht. Der Hauptvorteil des Verfahrens besteht in der Schnelligkeit, Zuverlässigkeit und im Fehlen einer chemischen Reaktion, wodurch man die Ergebnisse leicht reproduzieren kann.

I. Einführung

Stark legierte Stahlsorten, zu denen die austenitischen hitze- und säurebeständigen Eisenlegierungen gehören, enthalten oft außer paramagnetischem Austenit eine ferromagnetische Phase, zum Beispiel Ferrit, Martensit. Die Menge dieser letztgenannten Phasen kann man zwar mittels magnetischer Messung bestimmen, über ihre Verteilung kann jedoch nur eine mikroskopische Untersuchung Aufschluß geben. Die hierfür erforderliche Ätzung ist dagegen oft mit störenden Erscheinungen verbunden, vor allem durch stärkeres Ätzen einiger Teile des Schliffes. Eine derartige, zu starke Ätzung verzerrt die Abmessung von Phasenteilchen, und dadurch entsteht eine scheinbare Vergrößerung oder Verminderung der Menge der ferromagnetischen Phase.

In vorliegender Arbeit wird eine Methode beschrieben, die frei von störenden Erscheinungen ist, und die für den genannten Zweck bereits seit einem Jahr ständig mit bestem Erfolg verwendet wird.

II. Beschreibung der Methode

Das Wesentliche des Verfahrens besteht darin, daß der metallographische Schliff des zu untersuchenden Materials in ein magnetisches Feld gestellt wird, und dann bringt man auf die Oberfläche des Schliffes eine Suspension, die

ferromagnetische Körnchen enthält. Unter dem Einfluß der magnetischen Anregung lassen die suspendierten, dunklen Teilchen die nicht ferromagnetischen Phasen frei, und lagern sich auf den ferromagnetischen Phasen ab. In dieser Weise zeichnen sie auf Grund der Permeabilität selektierend das Gefüge ab. Dieses kann mit Hilfe eines Erzmikroskops oder mit einem in zweckmäßigerweise abgeänderten Metallmikroskop beobachtet werden.

Der Erfolg des Verfahrens hängt von zwei Bedingungen ab:

a) Die suspendierten Körnchen müssen wesentlich kleiner sein als die Kristallite der nachzuweisenden Phasen; auch dürfen sich die Körnchen nicht zu größeren Häufchen zusammenballen;

b) den suspendierten Teilchen muß man eine Bewegungsmöglichkeit sichern, damit sie frei in Richtung der ferromagnetischen Phasen wandern können.

Die Erfüllung beider Forderungen konnte in ausreichender Weise in folgender Form gesichert werden: Die Suspension wurde nach einer Vorschrift angefertigt, die zum Nachweis von Domänen empfohlen wird [1]: in 200 cm³ heißem Wasser wurden 1 g FeCl₂ · 4H₂O sowie 2,4 g FeCl₃ · 6H₂O gelöst, und anschließend noch 2,5 g NaOH zugegeben. Der entstehende Niederschlag wurde abfiltriert und in 500 cm³ destilliertem Wasser suspendiert. Zur Verhinderung der Koagulation muß man im Wasser irgendeinen Zusatzstoff lösen, der die Oberflächenspannung erhöht; im vorliegenden Fall wurde ein handelsübliches Waschmittel verwendet.

Die in dieser Weise hergestellte Suspension ist äußerst feinkörnig, und sie kann wegen ihrer großen Oberflächenspannung ohne wesentliche Sedimentation tagelang aufbewahrt werden. Mit Hilfe der Suspension kann die Verteilung der ferromagnetischen Phasen im Gefüge makroskopisch und auch mikroskopisch untersucht werden.

Zur *makroskopischen Untersuchung* genügt es, den Schliff auf einen permanenten Magneten zu legen, und auf die Schlißfläche einige Tropfen der Suspension zu verbreiten. Die Verteilung der ferromagnetischen Phasen wird sofort, mit bloßem Auge oder mit einem Handvergrößerungsglas, sichtbar.

Für die *mikroskopische Untersuchung* muß man die auf den Schliff geträufelte Suspension mit einem Deckglas bedecken. Es ist daher zweckmäßig, ein Mikroskop zu verwenden, bei dem der Gegenstand unter dem Objektiv untergebracht werden kann. Die Anwendung eines Deckglases muß man bei der Auswahl des Objektivs ebenfalls berücksichtigen. Im vorliegenden Fall wurde dementsprechend ein Metallmikroskop Typ Zeiss Epignost abgeändert: die Objektive wurden durch ein Objektiv ersetzt, das auf die Dicke von 0,17 mm des Deckglases korrigiert wurde. Auch war es notwendig, die Tubuslänge von 250 mm, dem neuen Objektiv entsprechend, auf 160 mm zu reduzieren. Mit Hilfe des in dieser Weise abgeänderten Mikroskops wurden gut wahrnehmbare Bilder erhalten.

III. Beispiele zur Anwendung des Verfahrens

Das beschriebene Verfahren wird von den Verfassern bei den metallographischen Untersuchungen allgemein verwendet. Einige charakteristische Anwendungsbeispiele werden in den folgenden Ausführungen erläutert.

Im Bild 1 wird die Verteilung der Phasen eines austenitischen Manganstahls (Hadfield-Stahls), in gegossenem Zustand, durch ferromagnetische Suspension (a) bzw. durch Ätzung (b) veranschaulicht. Die Suspension zeichnet gut die den Kristallgrenzen entlang lagernden ferromagnetischen Phasen, den Zementit und den Perlit ab.

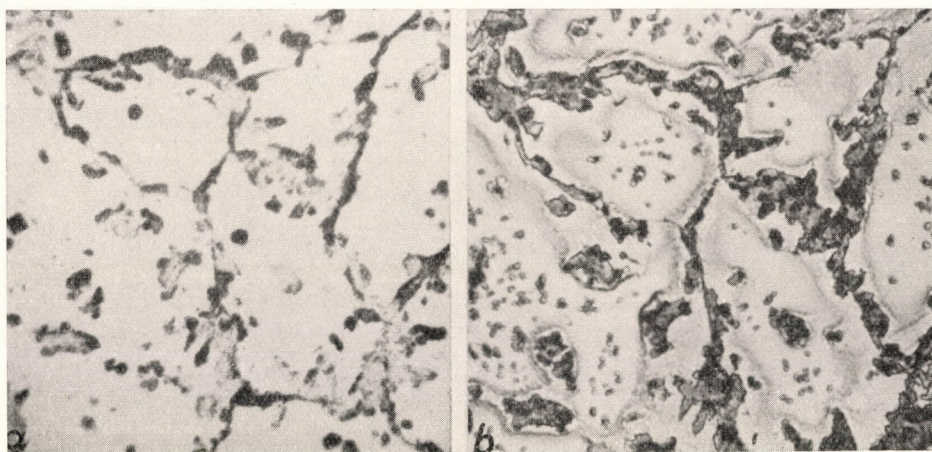


Bild 1. Gefüge eines austenitischen Manganstahls im gegossenen Zustand; (a) Nachweis mittels ferromagnetischer Suspension bzw. (b) nach einer Ätzung mit einer 3%igen alkoholischen Lösung HNO_3 (100fache Vergrößerung)

Im Bild 2 sind Gefüeaufnahmen zu sehen, die gleichfalls mittels Ätzung bzw. mit einer Suspension sichtbar gemacht wurden. Das Gefüge besteht aus Austenit und Delta-Ferrit eines gegossenen Blocks aus einem säurebeständigen Chromnickelstahl Typ 18/8. Die Suspension zeigt eindeutig die Lagerung des Delta-Ferrits.

In den austenitischen Chromnickelstählen ist wegen der guten Schweißbarkeit eine bestimmte Menge Ferrit erforderlich. Die chemische Zusammensetzung der schweißbaren Chromnickelstähle wird deshalb so festgelegt, daß sie selbst im wärmebehandelten austenitischen Zustand noch einige Prozente Ferrit enthalten. Dieser Ferrit richtet sich im allgemeinen unter dem Einfluß der bildsamen Verformung in Zeilen aus. Das Suspensionsverfahren eignet sich besonders gut für den Nachweis derartiger Ferritzeilen.

Im Bild 3 ist eine Mikroaufnahme zu sehen, die mit Hilfe der magnetischen Suspension von der Struktur einer Ferritzeile gemacht wurde; im Bild 4

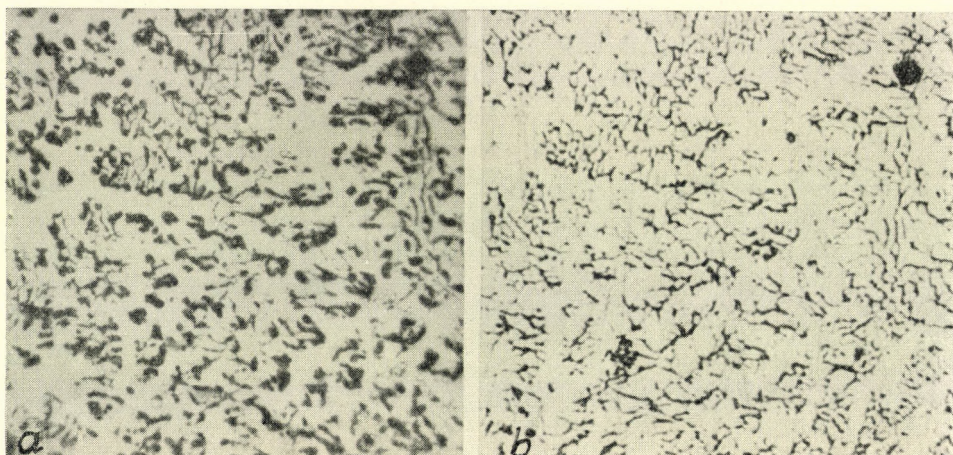


Bild 2. Gefüge eines säurebeständigen Stahles mit 18% Cr- und 8% Ni-Gehalt, im Gußzustand; (a) untersucht mit einer ferromagnetischen Suspension, und (b) geätzt mittels Königswasser (100fache Vergrößerung)

wird dagegen die Delta-Ferritverteilung einer Schweißverbindung von austenitischen Blechen veranschaulicht. Das Gußgefüge der Schmelze und die Verteilung der Ferritzeilen des Grundstoffes sind gut sichtbar.

In säurebeständigen austenitischen CrNi-Stählen aktiviert die Kaltverformung in bekannter Weise die γ - α -Umwandlung. Dieser Umstand wird

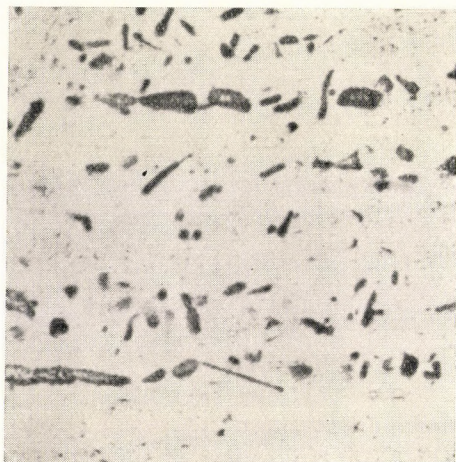


Bild 3. Suspensionsbild einer Ferritzeile in einem säurebeständigen 18/8-Stahlblech (150fache Vergrößerung)

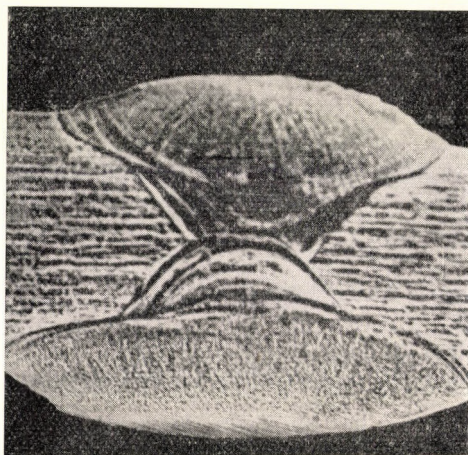


Bild 4. Schweißverbindung von austenitischen Blechen, sichtbar gemacht mit der ferromagnetischen Suspension (2fache Vergrößerung)

im Bild 5 durch eine mit einer Suspension gemachten Aufnahme gut veranschaulicht; die Aufnahme zeigt das Gefüge eines Walzbleches mit einer Reduktion von etwa 20%.



Bild 5. Gefüge eines austenitischen Chromnickelstahles nach einer 20%igen Kaltverformung, untersucht mit der Suspensionsmethode (150fache Vergrößerung)

IV. Die Vorteile der mit der magnetischen Suspension durchgeführten Untersuchungen

Gefügeuntersuchungen, die mit Hilfe von ferromagnetischer Suspension ausgeführt werden, eignen sich besonders zum Nachweis von kleinen Mengen der ferromagnetischen Phasen von *austenitischen Stählen*. Sie ergänzen gut die üblichen magnetischen Messungen dadurch, daß sie außer der Menge der Phasen auch über ihre Lagerung Auskunft geben. Die Untersuchung kann an einem gewöhnlichen mikroskopischen Schliff durchgeführt werden, ein besonderer Probekörper ist daher nicht erforderlich.

Das sind zweifellos große Vorteile der Methode. Die zum Ätzen von säurebeständigen Stählen verwendeten aggressiven Ätzmittel greifen nämlich die Umgebung von Einschlüssen und Seigerungen, ferner die von Spannungen belasteten Kristallite stark an. Die ungleichmäßige Ätzung kann die Auswertung des Gefüges und der Phasenverhältnisse erheblich stören. Die Suspension macht dagegen auf ungeätzten Schliffen die ferromagnetischen Phasen sichtbar. Die Untersuchung kann dadurch — in Abwesenheit einer chemischen Reaktion — ohne eine Zwischenpolierung, auch mehrfach wiederholt werden, wobei die Wertung selbst nicht dadurch gestört wird, daß die Kristallgrenzen des Austenits eventuell vorher angegriffen wurden.

Die Gefügeuntersuchung von *Schweißverbindungen* austenitischer Stähle verursacht oft Sorgen. Infolge der abweichenden Wärmebehandlung des Über-

ganges an der Grenze des Schweißgutes und des Grundstoffes, wegen der bleibenden Formänderungen, die durch die thermischen Spannungen der Schweißung entstanden sind, wegen der abweichenden Zusammensetzung des Grundstoffes und des Schweißgutes usw. greifen die starken Ätzmittel die einzelnen Stellen des Schliffes in sehr verschiedener Weise an. Die Identifizierung des Ferrits, der auch sonst vom Austenit schwer zu unterscheiden ist, und die Bestimmung seiner Verteilung ist daher an den üblichen Schliffen außerordentlich unsicher. Die Ferritverteilung kann jedoch vom Standpunkt der Korrosion aus von ausschlaggebender Bedeutung sein. Die Untersuchung mittels der Suspensionsmethode ist bequem, und das Ergebnis zuverlässig. Der einzige Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß verschiedene ferromagnetische Phasen mit seiner Hilfe kaum voneinander zu unterscheiden sind.

SCHRIFTTUM

1. WILLIAM—BOZORTH—SHOCKLEY: Magnetic Domain Patterns on Single Crystals of Silicon Iron. *Phys. Rev.* 75 (1949), 155.

THE MICROSCOPIC EXAMINATION OF FERROMAGNETIC PHASES OF ALLOYS

A. KISFALUDY and P. TARDY

SUMMARY

For detecting and determining the location of the ferromagnetic phases of austenitic steels the most suitable method is the separation of the phases on the basis of their magnetic permeability. For this reason the authors have developed the following procedure: the ground metallographic specimen is placed in a magnetic field and on its surface a suspension containing very fine ferromagnetic grains is placed, of the kind which has been used for a long time for the examination of domains. Under the influence of the magnetic field the particles stick to the ferromagnetic phases, therefore these phases appear dark when examined with the naked eye or with a microscope. The chief advantages of the method are speed, reliability and absence of any chemical reaction, and consequently the results are easily reproduced.

EXAMEN MICROSCOPIQUE DES PHASES FERROMAGNÉTIQUES DES ALLIAGES

A. KISFALUDY et P. TARDY

RÉSUMÉ

La méthode convenant le mieux pour la mise en évidence et la localisation des phases ferromagnétiques des aciers austénitiques est celle qui sépare les phases d'après leur perméabilité magnétique. En vue de cette méthode, les auteurs ont élaboré le procédé suivant: l'éprouvette métallographique polie de la matière est placée dans un champ magnétique, après quoi leur surface reçoit une suspension contenant des particules ferromagnétiques très fines, du genre couramment utilisé pour l'étude des domaines. Sous l'action du champ magnétique, les grains adhèrent aux phases ferromagnétiques, qui paraissent sombres quand on les examine sous le microscope ou à l'œil libre. Les principaux avantages de la méthode sont sa rapidité, sa sûreté et l'absence de réactions chimiques, grâce à quoi les résultats sont faciles à reproduire.

МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ФАЗ СПЛАВОВ

А. КИШФАЛУДИ и П. ТАРДИ

РЕЗЮМЕ

Для выявления и определения расположения ферромагнитных фаз аустенитных сталей лучше всего подходит такой метод, который разграничивает фазы на основе их магнитной проницаемости. Для этой цели разработан следующий метод: металлографический шлиф исследуемого материала помещается в магнитное поле. На поверхность шлифа наносится содержащая ферромагнитные частицы мелкозернистая суспензия издавна применяющаяся для исследования доменных структур. Под влиянием магнитного поля частицы ориентируются по ферромагнитной фазе, которая таким образом становится видимой невооруженным глазом или под микроскопом в виде темных полей. Наибольшим преимуществом метода является быстрота, достоверность и полное отсутствие химических реакций, вследствие чего результаты легко воспроизводимы.

ANWENDUNG DER WELLENGLEICHUNGEN AUF KURZE ROHRE*

I. TEIL

P. BENYÓ

GANZ-MÁVAG LOKOMOTIV-, WAGGON- U. MASCHINENFABRIK, BUDAPEST

[Eingegangen am 21. Februar, 1966]

Die Wellengleichungen als Lösungen der die in geraden Rohren mit konstantem Querschnitt auftretenden instationären Strömungen beschreibenden Differentialgleichungen wurden auf kurze Rohre angewendet. Durch die Bestimmung der bei den Querschnittsänderungen entstehenden Rückwurfbedingungen wurden die Gleichungen auf die Druckräume der Einspritzpumpen angewendet. So gelang es, den im Druckraum auftretenden Druckverlauf, den tatsächlichen Umständen entsprechend, als Hochfrequenz-Druckschwingungen zu beschreiben. Im I. Teil wurde der Druckverlauf bei drei, durch Nockenwelle bestimmten Kolbengeschwindigkeiten aufgezeichnet, der mit Hilfe einer geometrischen Reihe dargestellt werden konnte. Wenn der Druckverlauf aus der Kontinuitätsgleichung ermittelt würde, ergäbe sich die Lösung aus einer inhomogenen Differentialgleichung I. Ordnung.

I. Einführung

Wie allgemein bekannt, können die in geraden Rohren konstanten Querschnitts entstehenden, nicht stationären Strömungen mit Hilfe der Eulerschen- und den Kontinuitätsgleichungen dargestellt werden [1].

Läßt man die Erdbeschleunigung und die Reibung außer acht, so lautet die Eulersche Gleichung, wie folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Bei Flüssigkeiten kann zur Bestimmung der erforderlichen $p = f(\rho)$ Funktion das Hookesche Gesetz mit guter Annäherung angewendet werden. Bei den Gleichungen (1) und (2) können — mit verhältnismäßig geringem

* Auszug aus der im Jahre 1961 an der Budapester Technischen Hochschule aufgenommenen Promotionschrift des Verfassers. (Bestimmung der vorlaufenden Druckwelle durch ein neues Verfahren in durch Nockenwellen betätigten und gemäß dem System Ganz-Jendrassik gebauten Kolbeneinspritzpumpen.)

Fehler — Vereinfachungen eingeführt werden, wodurch diese sich wie folgt gestalten [2 — 4]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

bzw.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4)$$

wo

v Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit;
 p Flüssigkeitsdruck;
 ρ Dichte der Flüssigkeit;
 a die in der Flüssigkeit meßbare Schallgeschwindigkeit;
 x Länge entlang der Rohrachse;
 t Ablaufdauer

bedeuten.

Die folgenden Wellengleichungen bilden die allgemeinen Lösungen des Systems der Simultan-Differentialgleichungen (3) und (4):

$$p = p_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right), \quad (5)$$

$$v = v_0 + \frac{1}{\rho a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right], \quad (6)$$

wo (F) bzw. (f) die beliebigen Funktionen der Argumente darstellen. Die Argumente bezeugen, daß die Werte (Amplituden) der Funktionen sich in der positiven bzw. negativen Richtung der Leitung mit der Schallgeschwindigkeit von a fortpflanzen. Werden die Bezeichnungen [5]

$$F\left(t - \frac{x}{a}\right) = p_e \text{ vorlaufende Druckwelle;}$$

$$-f\left(t + \frac{x}{a}\right) = p_v \text{ rücklaufende Druckwelle;}$$

$$\frac{1}{\rho a} F\left(t - \frac{x}{a}\right) = v_e \text{ vorlaufende Geschwindigkeitswelle;}$$

$$\frac{1}{\rho a} f\left(t + \frac{x}{a}\right) = v_v \text{ rücklaufende Geschwindigkeitswelle;}$$

verwendet, so erhält man:

$$p = p_0 + p_e + p_v, \quad (7a)$$

$$v = v_0 + v_e + v_v, \quad (7b)$$

woraus folgt, daß

$$p_e = \rho \cdot a v_e \quad (8)$$

und

$$p_v = - \rho a v_v, \quad (9)$$

d. h. die Flüssigkeitgeschwindigkeit und der Flüssigkeitsdruck verhältnisgleich sind (Zusammenhänge nach ALLIEVI). Man erhält aber das gleiche Resultat, wenn in einem geraden Rohrabschnitt von konstantem Querschnitt die mit einer Geschwindigkeit v strömende Flüssigkeit innerhalb einer Zeitdauer von $t = 0$ zum Stillstand gebracht wird. In der Ebene der Abstellung (Arretierung) entsteht ein Druckanstieg von Δp , welcher sich mit einer Geschwindigkeit von a in einer der Geschwindigkeit v entgegengesetzten Richtung fortpflanzt. Wird die Richtung der Geschwindigkeit v als positiv angenommen, so gestaltet sich der Impulssatz des sich gemeinsam mit dem Druckanstieg bewegenden Koordinatensystems wie folgt:

$$\Delta p \cdot f = - \rho f(a + v)^2 + \rho f(a + v)a,$$

woraus — unter Voraussetzung, daß $a \gg v$ ist — in ähnlicher Weise wie bei (8) und (9) folgt, daß:

$$\Delta p = \rho a v.$$

II. Anwendung der Wellengleichungen auf kurze Rohre

Die Gleichungen (7a) und (7b) bzw. (8) und (9) lassen sich offenbar auch auf Rohre beliebiger Länge, so z. B. auf die Flüssigkeitssäule der Länge l und des Durchmessers D (siehe Bild 1) anwenden, in welcher sich ein Kolben befindet, und an welche ein Rohr mit dem Durchmesser d angeschlossen ist.

Dies entspricht eigentlich dem prinzipiellen Aufbau des Druckraumes einer Einspritzpumpe.

Bewegt sich der Kolben mit einer Geschwindigkeit c , so entsteht an dessen Oberfläche gemäß Gleichung (8) eine Druckwelle:

$$p = \rho a c,$$

die sich in Richtung der Ebene der Querschnittsänderung $I-I$ bewegt und diese innerhalb der Zeitdauer von $t = l/a$ erreicht. Hier wird die Welle reflektiert und diese reflektierte Druckwelle gelangt dann ebenfalls innerhalb der Zeitdauer von l/a zum Kolben. An der Kolbenoberfläche entsteht eine totale Reflexion, und somit gelangt die vom Querschnitt $I-I$ eingetroffene Druckwelle mit unveränderter Stärke, jedoch durch die in diesem Zeitabschnitt entstandene Grundwelle vergrößert zurück. Nunmehr bilden diese beiden summier-

ten Größen die sich in Richtung des Querschnittes $I-I$ bewegend Druckwelle, um nach Verlauf der Zeitdauer von l/a am Querschnitt $I-I$ gemeinsam reflektiert zu werden. Dementsprechend gelangen zur Querschnittsveränderung $I-I$ bzw. zur Kolbenoberfläche in Zeitabschnitten von $2l/a$ vorlaufende bzw. rücklaufende Druckwellen, deren Frequenz infolge des geringen Wertes von l ziemlich hoch ist. Diese Flüssigkeitsschwingung dauert bei sich verringern dem Wert von (l) bis zum Stillstand des Kolbens und dann nach Ausklingen der Kolbenbewegung bis zum Eintreten des Ruhezustandes an. Ist aber der Kolbenweg im Verhältnis zu l gering, so wird kein nennenswerter Fehler begangen, wenn man den Wert von l für konstant annimmt (wie z. B. auch bei Einspritzpumpen).

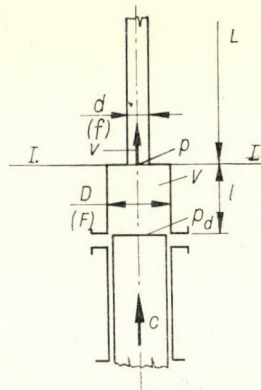


Bild 1. Schematische Darstellung des Pumpendruckraumes

Nachstehend sollen die Gesetzmäßigkeiten untersucht werden, nach denen sich der Druckverlauf am Kolbendeckel bzw. in der Ebene $I-I$ gestaltet.*

Hierzu muß jedoch vorerst bekannt sein, in welchem mengenmäßigen Verhältnis sich die Druckreflexion am Querschnitt $I-I$ abspielt.

Wird die im Bild 1 bezeichnete Strömungsrichtung der Flüssigkeit als positiv angenommen, so ergibt sich für die dem Querschnitt $I-I$ zufließende bzw. von diesem fortfließende Flüssigkeitsmenge folgende Beziehung:

$$\frac{1}{\rho a} F (p_e - p_v) = \frac{1}{\rho a} f (p_e + p_v), \quad (10)$$

da die entstandene und reflektierte Druckwelle (p_v) die vom Kolben eintreffende Druckwelle abbremst und diese Welle gleichzeitig die Flüssigkeitsströ-

* Werden die Verhältnisse in einem Zylinder der Länge l statisch geprüft und dabei angenommen, daß die Druckveränderung im ganzen Raum gleichzeitig vor sich geht, so besteht die Möglichkeit, die Erscheinung auf Grund des Hookeschen Gesetzes unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung zu prüfen. Siehe noch [5].

mung im Rohr mit dem Querschnitt f in positiver Richtung beschleunigt. (Dabei wird angenommen, daß die Länge L so groß zu bemessen ist, daß bis zur Beendigung des Vorganges vom anderen Rohrende keine Störung eintrifft.)

Aus (10) folgt, daß

$$p_v = \frac{F - f}{F + f} p_e$$

oder, nach Einführen der Bezeichnung $\lambda = (F - f)/(F + f)$, ist

$$p_v = \lambda p_e. \quad (11)$$

Hierbei handelt es sich um drei alternative Möglichkeiten

- | | | | |
|------------------|----------|----------------------|---------------------------|
| a) $F = f$, | dann ist | $\lambda = 0$, | $p_v = 0$; |
| b) $f = 0$, | dann ist | $\lambda = 1$, | $p_v = p_e$; |
| c) $F \cong f$, | dann ist | $1 > \lambda > -1$, | $p_v = \pm \lambda p_e$. |

Im Falle c) werden, je nach der Größe von λ und p_e , Druckwellen verschiedener Größe reflektiert, die sich in Richtung des Kolbens bewegen. Da für uns offenbar nur die Fälle $F > f$ bzw. $1 > \lambda > 0$ interessant sind, wollen wir unsere Untersuchungen unter Berücksichtigung dieses Umstandes beginnen.

III. Untersuchung des Druckverlaufes bei durch die Nockenwelle betätigten Pumpen

Hinsichtlich der Kolbenbewegung werden drei verschiedene Geschwindigkeitsgesetze gewählt, die im Bild 2 dargestellt sind. In diesem Falle ist die Kolbengeschwindigkeit unabhängig vom Raumdruck.

1. Bei gleichbleibender Kolbengeschwindigkeit (Bild 2a)

Geht man von der vereinfachenden Voraussetzung aus, wonach die durch den Kolben verdrängte Flüssigkeit so lange zurückströmt und im Raum V keine Drucksteigerung stattfindet, bis die Oberkante des Kolbens die Einstromöffnungen verschließt, so kann, mit einem Kolben konstanter Geschwindigkeit, dem Geschwindigkeitsgesetz (Bild 2a) entsprochen werden (in Wirklichkeit gestalten sich die Verhältnisse insofern hiervon abweichend, daß jeweils eine gewisse Vorförderung stattfindet, aber dieser Umstand kann — wie auch durch unsere Versuche bekräftigt wurde — außer acht gelassen werden.)

a) *Druckverlauf an der Kolbenfläche*

Da der auf den Kolben wirkende Druck (p_d) offenbar in den jeweiligen Zeitabschnitten von $2l/a$ ansteigen wird, wollen auch wir die jeweilige Änderung von (p_d) innerhalb dieser Zeitabschnitte untersuchen.

Zeitabschnitt $0 \sim 2l/a$:

$$p_d = \rho a c_0 \cdot \tag{12}$$

Zeitabschnitt $2l/a \sim 4l/a$: Hier muß man auch den Wert der bei $I-I$ reflektierten und am Kolben eingelangten Druckwelle berücksichtigen. Da es sich um eine vollständige Reflexion handelt, wirkt auf den Kolben ein Wert von $2 p_v$, d. h.

$$p_d = \rho a c_0 + 2 p_v \cdot$$

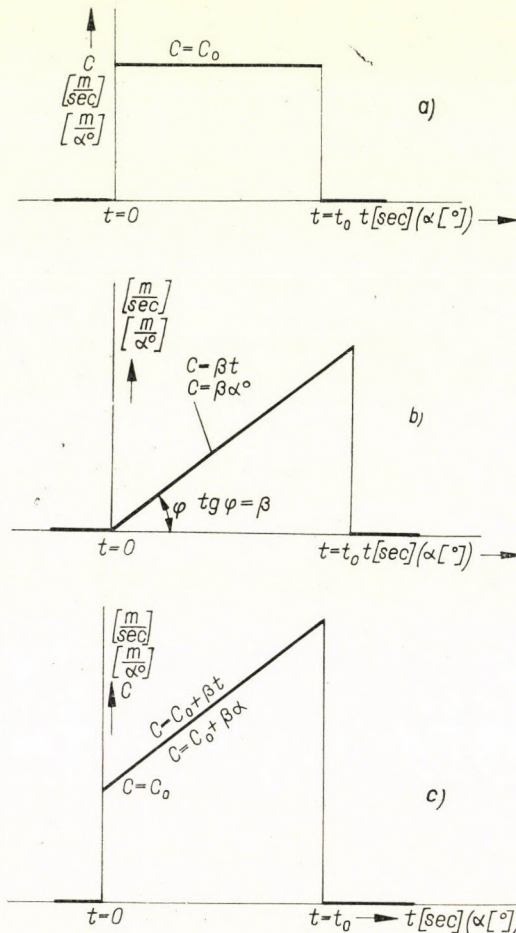


Bild 2. Zur Durchführung theoretischer Untersuchungen aufgenommene drei Kolbengeschwindigkeiten

Jedoch erhält man, unter Berücksichtigung der Gleichung (11)

$$p_d = \rho a c_0 + 2 \lambda \rho a c_0 = \rho a c_0 (1 + 2 \lambda). \quad (13)$$

Zeitabschnitt $4l/a - 6l/a$: Die vorangehenden Ausführungen sind offenbar auch für diesen Fall gültig; hier muß man aber auch die zweite Reflexion berücksichtigen, d. h.:

$$p_d = \rho a c_0 + 2 \lambda \rho a c_0 + 2 \lambda^2 \rho a c_0 = \rho a c_0 (1 + 2 \lambda + 2 \lambda^2). \quad (14)$$

Dementsprechend erhält man für die n -te Reflexion im *Zeitabschnitt* $(2n - 1) l/a \sim 2nl/a$:

$$p_d = \rho a c_0 (1 + 2 \lambda + 2 \lambda^2 + 2 \lambda^3 + \dots + 2 \lambda^{n-1}), \quad (15)$$

d. h., der auf den Kolben wirkende Druck setzt sich aus dem Produkt der Kolbengeschwindigkeit und einer unendlichen geometrischen Reihe zusammen.

Wenn man nun in Gleichung (15) die Reihe summiert, so ist

$$S = 1 + 2 \frac{\lambda - \lambda^n}{1 - \lambda} \quad (16)$$

und wenn $n \rightarrow \infty$, dann erhält man

$$S = 1 + 2 \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \quad (17)$$

Wird der Wert von λ in Gleichung (17) eingesetzt, so ist

$$S = 1 + 2 \frac{(F - f)/(F + f)}{1 - (F - f)/(F + f)} = \frac{F}{f} \quad (18)$$

und damit

$$p_d = \rho a c_0 \frac{F}{f}. \quad (19)$$

Dies bedeutet, daß im Falle einer unendlichen Anzahl von Reflexionen der auf den Kolben wirkende Druck im Verhältnis der Querschnitte ansteigt (dies ist auch der Fall, wenn $l = 0$, d. h., wenn das »elastische« Volumen gleich Null ist). Setzt man (16) und λ in die Gleichung (15) ein und wird diese gleichzeitig geordnet, so erhält man:

$$p_d = \rho a c_0 \left(\frac{F}{f} - \frac{2\lambda^n}{1 - \lambda} \right). \quad (20)$$

Gemäß Bild 2a verringert sich die Kolbengeschwindigkeit im Zeitpunkt $t = t_0$ auf Null, was jedoch in bezug auf den Druck nicht der Fall ist. Der während des Zeitabschnittes n (Stillstand des Kolbens) vorherrschende Druck wird durch die Gleichung (20) bestimmt. Im Zeitabschnitt $n + 1$ ist $c_0 = 0$, aber die im darauffolgenden Zeitabschnitt entstehenden Druckwellen pflanzen sich genau so weiter wie während der Kolbenbewegung. Dies bedeutet jedoch, daß die Anzahl der auf der rechten Seite der Gleichung (15) in Klammern stehenden Glieder sich um das erste Glied verringert, — welches eben die im Zeitabschnitt $(n + 1)$ vom Kolben ausgehende Druckwelle darstellen würde — und dabei hält die Reflexion weiter an, so daß für den Druckverlauf im Zeitabschnitt $(n + 1)$, ähnlich wie bei Gleichung (15), folgende Beziehung geschrieben werden kann:

$$p_d = \varrho a c_0 (2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^3 + \dots + 2\lambda^{n-1} + 2\lambda^n) = \varrho a c_0 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda^i. \quad (21)$$

Der Wert von λ kann ausgeklammert werden, und nach Zerlegung des Gliedes $\varrho a c_0 2\lambda$ kann die Gleichung (21) wie folgt geschrieben werden:

$$p_d = \left[\varrho a c_0 \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda^i \right) + \varrho a c_0 \right] \lambda. \quad (22)$$

Hieraus geht hervor, daß das erste Glied in der Klammer gerade mit der Gleichung (15) bzw. (20) übereinstimmt, wodurch sich ergibt, daß

$$p_d = \left[\varrho a c_0 \left(\frac{F}{f} - \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \right) + \varrho a c_0 \right] \lambda$$

ist.

Offensichtlich ist, daß sich der Wert des sich in Gleichung (21) in Klammern befindenden Exponenten von λ in jedem einzelnen Zeitabschnitt um eine Einheit erhöht, wobei man nach Ausklammern in jedem Fall folgende Beziehung erhält:

$$p_d = \varrho a c_0 \left(\frac{F}{f} - \frac{2\lambda^n}{1-\lambda} + 1 \right) \lambda^m, \quad (23)$$

wo $m = 1, 2, 3 \dots \infty$, und wenn $m \rightarrow \infty$ ist, dann wird $p_d \rightarrow 0$.

Mit Hilfe der Gleichungen (20) bzw. (23) läßt sich daher der Druckverlauf an der Kolbenoberfläche, und zwar in Abhängigkeit von n bzw. m (Anzahl der Reflexionen) darstellen.

b) *Druckverlauf im Querschnitt I—I*

Gemäß der aus dem Bild 1 ersichtlichen Anordnung gelangt zum Querschnitt *I—I* die erste Druckwelle der Größe ϱac_0 nach Verlauf einer Zeitdauer von l/a . Verwendet man die Gleichungen (7) bzw. (11), ähnlich wie im Abschnitt a) dieses Kapitels, so läßt sich der auf die einzelnen Zeitabschnitte $2l/a$ entfallende Druckverlauf wie folgt ermitteln:

$$\text{Im Zeitabschnitt } l/a \div 3l/a: p = p_d + \lambda p_d = \varrho ac_0 (1 + \lambda);$$

$$\text{im Zeitabschnitt } 3l/a \div 5l/a: p = \varrho ac_0 + \lambda \varrho ac_0 + \lambda \varrho ac_0 + \lambda^2 \varrho ac_0 = \\ = \varrho ac_0 (1 + 2\lambda + \lambda^2);$$

$$\text{im Zeitabschnitt } 5l/a \div 7l/a: p = \varrho ac_0 (1 + 2\lambda + 2\lambda^2 + \lambda^3);$$

$$\text{im Zeitabschnitt } (2n - 1)l/a \div (2n + 1)l/a: p = \varrho ac_0 (1 + 2\lambda + 2\lambda^2 + \\ + 2\lambda^3 + \dots + 2\lambda^{n-1} + \lambda^n). \quad (24)$$

Es kann also festgestellt werden, daß soweit $n \rightarrow \infty$ ist, dann — ähnlich wie bei Gleichung (19) — erhält man:

$$p = \varrho ac_0 \frac{F}{f},$$

d. h., der an der Kolbenfläche und im Querschnitt *I—I* wirkende Druck nimmt erst nach einer unendlichen Anzahl von Reflexionen den gleichen Wert an.

Nach einer wie bei Gleichung (16) angewendeten Summierung und Umordnung erhält man dann aus der Gleichung (24)

$$p = \varrho ac_0 \left(1 + 2 \frac{\lambda - \lambda^n}{1 - \lambda} + \lambda^n \right)$$

bzw. unter Berücksichtigung von (18) und nach entsprechender Kürzung:

$$p = \varrho ac_0 \left(\frac{F}{f} - \frac{\lambda^n + \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \right). \quad (25)$$

Nach erfolgtem Stillstand des Kolbens kann der Druckverlauf auf Grund derselben Überlegungen dargestellt werden wie bei der Gleichung (23), d. h., dieser gestaltet sich nach Ablauf der Zeitdauer $t = t_0$ bis zum Zustand gemäß Gleichung (24) während des Zeitabschnittes $(n + 1)$, wie folgt:

$$p = \varrho ac_0 (\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^3 + \dots + 2\lambda^n + \lambda^{n+1}).$$

Da die Anzahl der in Klammern angeführten Glieder nach erfolgtem Stillstand des Kolbens unverändert bleibt, kann λ in jedem Falle ausgeklam-

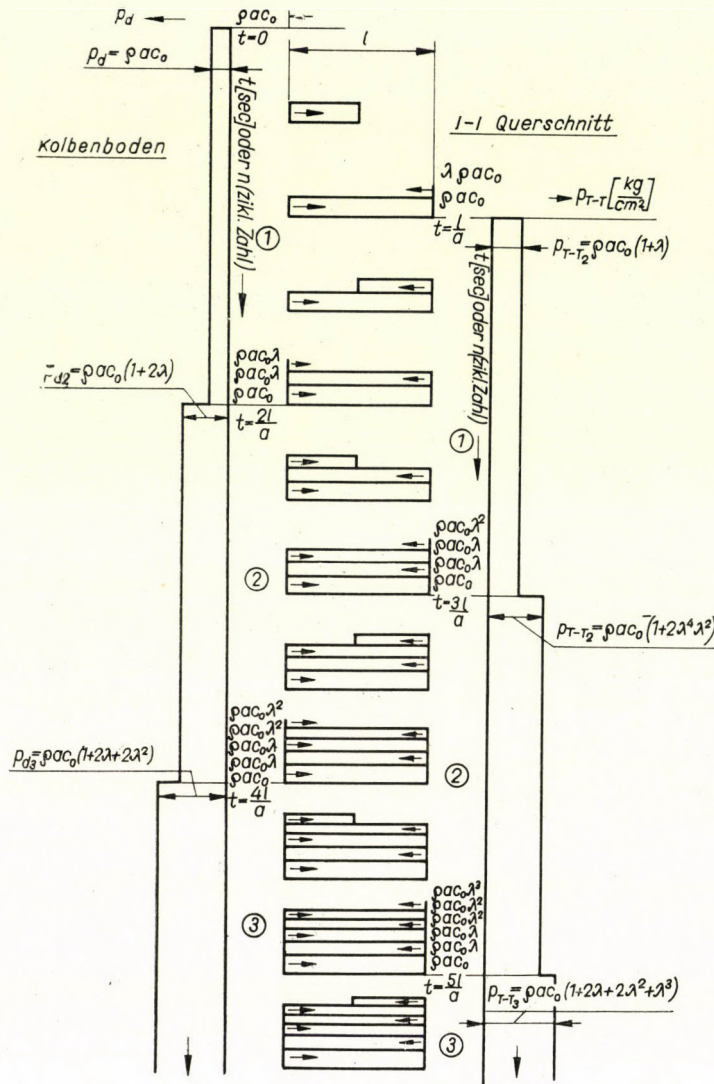


Bild 3. Periodischer Druckverlauf an der Kolbenfläche und im Querschnitt I-I (am Anfang der Druckleitung), wenn $c = c_0$

wert werden, demzufolge, nach entsprechender Kürzung und Substituierung, folgende Beziehung erhalten wird:

$$p = \rho a c_0 \left(\frac{F}{f} - \frac{\lambda^n + \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \right) \lambda^m, \quad (26)$$

wo $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ist.

Die Beziehungen (25) bzw. (26) stellen daher den Druckverlauf in dem am Anfang des Druckrohrabschnittes befindlichen Querschnitt I-I dar. Dabei

handelt es sich eigentlich um nichts anderes als um jene vorlaufende Druckwelle in der Druckleitung mit einem Durchmesser von d , die sich bei einer Einspritzpumpe von derselben ausgehend in Richtung des Zerstäubers fortpflanzt, d. h. um jene Druckwelle, die am Zerstäuber den Einspritzvorgang auslöst.

Bild 3 zeigt uns den vorstehend behandelten Reflexionsvorgang, wo die in den einzelnen Zeitabschnitten sich überlagernden Druckwellen anschaulich dargestellt sind. Im Bild 4 wurde das Ergebnis einer auf die geometrischen Abmessungen einer Einspritzpumpe abgestimmten Berechnung angeführt.

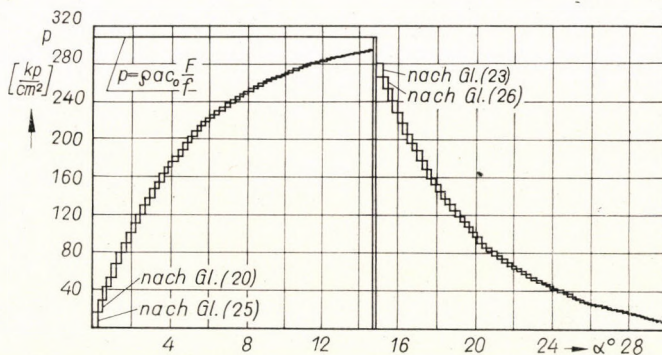


Bild 4. Darstellung des Druckverlaufes an der Kolbenfläche und im Querschnitt I—I in Abhängigkeit vom Verdrehwinkel der Nockenwelle, wenn $c = c_0$ ist; $D = 8$ mm, $d = 1,8$ mm, $c_0 = 1,4$ m/sec, $n = 1000$ U/min, $a = 1300$ m/sec, $q = 86,42$ kp sec²/m⁴

Hier wurde auf die horizontale Achse des Kennbildes anstatt der Anzahl der Reflexionen die Verdrehung der Pumpenwelle aufgetragen.*

Der sich an der Kolbenfläche bzw. an der Trennungslinie des Querschnittes I—I abspielende (sprunghafte) Druckverlauf entsteht mit einer zeitlichen Verschiebung von l/a .

2. Bei einer sich linear ändernden Kolbengeschwindigkeit

Betrachten wir nunmehr den Druckverlauf an den vorstehend bezeichneten zwei Stellen, wenn sich die Kolbengeschwindigkeit gemäß Bild 2b gestaltet, d. h.

$$c = \beta t \quad \text{oder} \quad c = \beta \cdot \alpha,$$

* Zwischen den Faktoren Zeit und Winkelverdrehung besteht folgender Zusammenhang:

$$t = \frac{\alpha}{6n_u}.$$

Da die einem Zyklus entsprechende Zeit $t = 2l/a$ beträgt und bei einer Anzahl von n Zyklen

$$t_n = n \frac{2l}{a}$$

ist, erhält man

$$\alpha = t_n 6n_u,$$

wobei n_u = die Pumpendrehzahl und $t_n = (1, 2, 3 \dots, n) 2l/a$ bedeutet.

wo β die auf eine Zeiteinheit bzw. auf die Winkelverdrehung von 1 Grad entfallende Geschwindigkeitszunahme bedeutet.

a) Druckverlauf an der Kolbenfläche

Im Bild 5 ist — ähnlich dem Bild 3 — der Druckverlauf an der Kolbenfläche bzw. am Querschnitt I—I dargestellt. Da bei Änderung der Kolbengeschwindigkeit von der Kolbenfläche aus eine Druckwelle veränderlicher

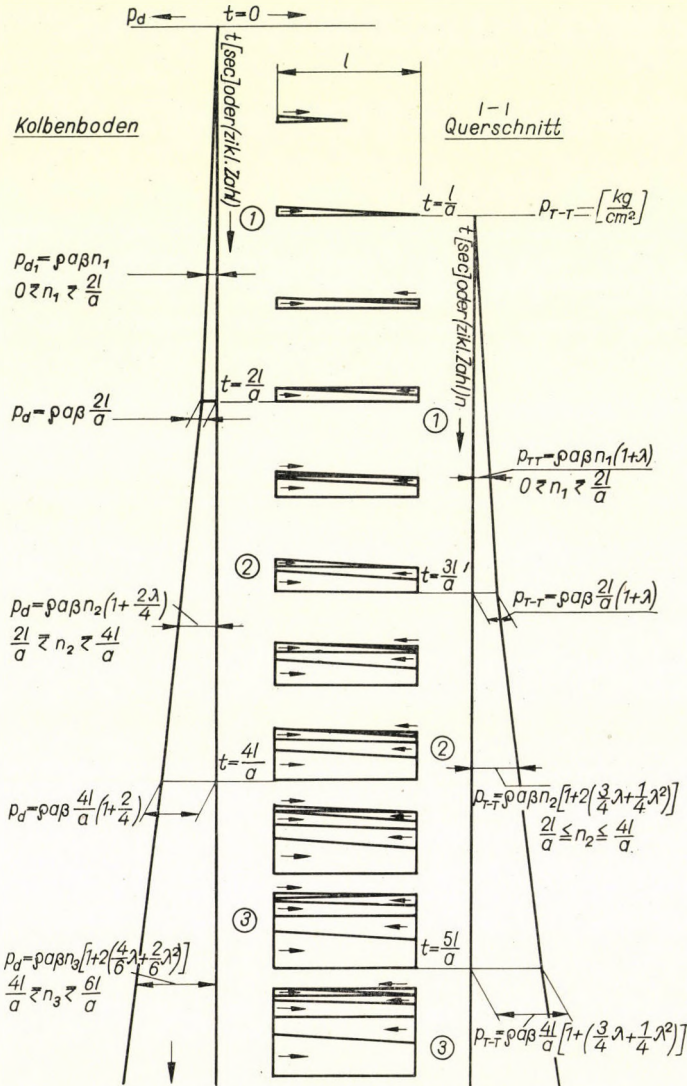


Bild 5. Periodischer Druckverlauf an der Kolbenfläche und im Querschnitt I—I (am Anfang der Druckleitung), wenn $c = \beta \cdot t$ ist

Stärke in Richtung des Druckrohres verläuft, ist offensichtlich, daß z. B. im Zeitabschnitt

$$p_d = \varrho a \beta \cdot t,$$

wo

$$0 \leq t \leq \frac{2l}{a}$$

den beliebigen Zeitpunkt bedeutet. Da jedoch die einzelnen Zeitabschnitte sehr kurz sind, genügt es, den Druck nur am Ende der einzelnen Zeitabschnitte zu untersuchen. Es ist

am Ende des Zeitabschnittes $0 \div 2l/a$:

$$p_d = \varrho a \beta \frac{2l}{a} = \varrho a \beta n_1$$

wenn $2l/a = n_1$;

am Ende des Zeitabschnittes $2l/a \div 4l/a$:

$$p_d = \varrho a \beta \frac{4l}{a} + \varrho a \beta \frac{2l}{a} 2\lambda = \varrho a \beta n_2 \left(1 + 2 \frac{2}{4} \lambda \right),$$

wo $n_2 = 4l/a$;

am Ende des Zeitabschnittes $4l/a \div 6l/a$:

$$p_d = \varrho a \beta \frac{6l}{a} + \varrho a \beta \frac{4l}{a} 2\lambda + \varrho a \beta \frac{2l}{a} 2\lambda^2 = \varrho a \beta n_3 \left[1 + 2 \left(\lambda + \frac{2}{6} \lambda^2 \right) \right];$$

am Ende des Zeitabschnittes $6l/a \div 8l/a$:

$$p_d = \varrho a \beta n_4 \left[1 + 2 \left(\frac{6}{8} \lambda + \frac{4}{8} \lambda^2 + \frac{2}{8} \lambda^3 \right) \right];$$

am Ende des Zeitabschnittes $(2n - 2)l/a \div 2nl/a$:

$$p_d = \varrho a \beta n_n \left[1 + 2 \left(\frac{2n-2}{2n} \lambda + \frac{2n-4}{2n} \lambda^2 + \dots + \frac{4}{2n} \lambda^{n-2} + \frac{2}{2n} \lambda^{n-1} \right) \right],$$

oder gekürzt:

$$p_d = \varrho a \beta n_n \left[1 + 2 \left(\frac{n-1}{n} \lambda + \frac{n-2}{n} \lambda^2 + \dots + \frac{2}{n} \lambda^{n-2} + \frac{1}{n} \lambda^{n-1} \right) \right]. \quad (27)$$

Aus Gleichung (27) geht hervor, daß der auf den Kolben wirkende Druck sich aus dem Produkt der in einzelnen Abschnitten ausgedrückten Zeitdauer sowie einer Reihe und der entsprechenden Konstanten zusammensetzt.

Die in Klammern angeführte Reihe kann auch als die Differenz der beiden Reihen aufgeschrieben werden:

$$S = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda^i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n-1} i\lambda^i, \quad (28)$$

woraus klar hervorgeht, daß

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda^i = \frac{\lambda - \lambda^n}{1 - \lambda}.$$

Die Summe der Reihe

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\lambda^i$$

kann folgendermaßen ermittelt werden [6]:

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} &= \frac{\lambda - \lambda^n}{1 - \lambda}, \\ \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} &= \frac{\lambda^2 - \lambda^n}{1 - \lambda}, \\ \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} &= \frac{\lambda^3 - \lambda^n}{1 - \lambda}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &+ \lambda^{n-1} = \frac{\lambda^{n-1} - \lambda^n}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

Wie ersichtlich, ergibt die Addition der auf der rechten bzw. auf der linken Seite der Gleichungen angeführten Werte folgende Beziehung:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\lambda^i = \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} - (n-1)\lambda^n}{1 - \lambda}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\lambda^i = \frac{\lambda - \lambda^n}{(1 - \lambda)^2} - \frac{(n-1)\lambda^n}{1 - \lambda}.$$

Damit ändert sich die Gleichung (28), wie folgt:

$$S = \frac{\lambda - \lambda^n}{1 - \lambda} - \frac{1}{n} \left[\frac{\lambda - \lambda^n}{(1 - \lambda)^2} - \frac{(n-1)\lambda^n}{1 - \lambda} \right].$$

Nach Einsetzen des Wertes (S) in die Gleichung (27) erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (18) und nach dementsprechend erfolgter Umordnung:

$$p_d = \varrho a \beta n_n \left[\frac{F}{f} - \frac{2\lambda - 2\lambda^{n+1}}{n(1-\lambda)^2} \right], \quad (29)$$

d. h., die Gleichung des auf die Kolbenfläche wirkenden Druckes, wo $n_n = (2l/a)n$ und $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ist, wo die in Klammern angeführten Werte sich natürlich mit dem im Wert n_n befindlichen n gleichzeitig ändern.

Aus Beziehung (19), bei welcher die Kolbengeschwindigkeit c konstant ist, geht hervor, daß der auf die Kolbenfläche wirkende Druck nach einer unendlichen Anzahl von Reflexionen dem Querschnittsverhältnis verhältnismäßig zunimmt. Bei der Gleichung (29) ergibt sich eine andere Lage, denn der auf die Kolbenfläche wirkende Druck nähert sich asymptotisch jener Geraden, die in Abhängigkeit von der Zeit (bzw. vom Wert n) gezogen werden kann, und deren Abstand von dem dem Querschnittsverhältnis entsprechenden Druck der folgende ist:

$$\varrho a \beta \frac{2l}{a} \frac{2\lambda}{(1-\lambda)^2} = \varrho \beta l \frac{F^2 - f^2}{f^2}, \quad (29a)$$

d. h., der Druck würde auch nach einer unendlichen Anzahl von Reflexionen den den Querschnittsverhältnissen entsprechenden Wert nicht erreichen.

Gleichung (29) stellt den Druckverlauf am Kolben nur während der Kolbenbewegung dar (siehe Bild 2b, Zeitpunkt $t = t_0$). Nach erfolgtem Stillstand des Kolbens ergibt sich für den Zeitabschnitt $(n+1)$, da $c = 0$:

$$p_d = \varrho a \beta n_n \left[2 \left(\lambda + \frac{n-1}{n} \lambda^2 + \frac{n-2}{n} \lambda^3 + \dots + \frac{1}{n} \lambda^n \right) \right].$$

Davon kann λ rechts ausgeklammert und das Glied $2\varrho a \beta n_n$ in zwei Teile zerlegt aufgeschrieben werden, wodurch man die Beziehung

$$p_d = \left\{ \varrho a \beta n_n \left[1 + 2 \left(\frac{n-1}{n} \lambda + \frac{n-2}{n} \lambda^2 + \dots + \frac{1}{n} \lambda^n \right) \right] + \varrho a \beta n_n \right\} \lambda$$

erhält. Es ist ersichtlich, daß das erste Glied in der eckigen Klammer mit (27) bzw. (29) übereinstimmt; wenn man dies mit p_{dn} bezeichnet, ferner berücksichtigt, daß der Wert von λ in jedem einzelnen Zeitabschnitt ausgeklammert werden kann, so kann der Druckverlauf nach erfolgtem Stillstand des Kolbens durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$p_d = (p_{dn} + \varrho a \beta n_n) \lambda^m, \quad (30)$$

wo $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ bedeutet.

b) *Druckverlauf im Querschnitt I—I*

Ähnlich wie im Abschnitt b) des vorigen Kapitels unter Anwendung der Lösungen des Abschnittes a) dieses Kapitels ergibt sich

im Zeitabschnitt $l/a \div 3l/a$:

$$p = \varrho a \beta \frac{2l}{a} (1 + \lambda) = \varrho a \beta n_1 (1 + \lambda);$$

im Zeitabschnitt $3l/a \div 5l/a$:

$$p = \varrho a \beta \frac{4l}{a} + \varrho a \beta \frac{4l}{a} \lambda + \varrho a \beta \frac{2l}{a} \lambda + \varrho a \beta \frac{2l}{a} \lambda^2,$$

woraus unter Anwendung der Bezeichnung $n_2 = 4l/a$ folgt, daß

$$p = \varrho a \beta n_2 \left[1 + 2 \left(\frac{3}{4} \lambda + \frac{1}{4} \lambda^2 \right) \right];$$

im Zeitabschnitt $5l/a \div 7l/a$:

$$p = \varrho a \beta n_3 \left[1 + 2 \left(\frac{5}{6} \lambda + \frac{3}{6} \lambda^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 \right) \right];$$

im Zeitabschnitt $(2n - 1) l/a \div (2n + 1) l/a$:

$$p = \varrho a \beta n_n \left[1 + 2 \left(\frac{2n - 1}{2n} \lambda + \frac{2n - 3}{2n} \lambda^2 + \frac{2n - 5}{2n} \lambda^3 + \dots + \frac{2n - (2n - 3)}{2n} \lambda^{n-1} + \frac{2n - (2n - 1)}{2n} \lambda^n \right) \right]. \quad (31)$$

Die Gleichung (31) kann auch als Differenz der beiden Reihen ausgedrückt werden:

$$p = \varrho a \beta n_n \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda^i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (2i - 1) \lambda^i \right]. \quad (32)$$

Daraus geht offensichtlich hervor, daß

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda^i = \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \text{ ist.}$$

Das Glied (n) der zweiten Reihe des in Klammern befindlichen Ausdruckes kann auf Grund der Überlegungen, die bei der Einführung der Gleichung (29) berücksichtigt wurden, berechnet werden:

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} + \lambda^n &= \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}, \\ \left. \begin{aligned} \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} + \lambda^n \end{aligned} \right\} &= 2 \frac{\lambda^2 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}, \\ \left. \begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{n-1} + \lambda^n \end{aligned} \right\} &= 2 \frac{\lambda^3 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}, \\ \left. \begin{aligned} \lambda^4 + \dots + \lambda^{n+1} + \lambda^n \\ \lambda^4 + \dots + \lambda^{n+1} + \lambda^n \end{aligned} \right\} &= 2 \frac{\lambda^4 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}, \\ &\dots\dots\dots \\ \left. \begin{aligned} \lambda^n \\ \lambda^n \end{aligned} \right\} &= 2 \frac{\lambda^n - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Wenn man nun die rechten bzw. linken Seiten der Gleichungen addiert, ergibt sich der gesuchte Wert zu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} (2i - 1) \lambda^i &= \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} + \\ &+ 2 \frac{\lambda - \lambda^{n+1} + \lambda^3 - \lambda^{n+1} + \lambda^4 + \lambda^{n+1} + \dots + \lambda^n - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\sum_{i=1}^{i=n} (2i - 1) \lambda^i = \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} + 2 \left[\frac{\lambda^2 - \lambda^{n+1}}{(1 - \lambda)^2} - \frac{(n - 1) \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \right].$$

Bei Zurücksetzen dieser Werte in die Gleichung (32) erhält man:

$$\begin{aligned} p = \varrho a \beta n_n \left[1 + 2 \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} - \right. \\ \left. - \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} + \frac{2(\lambda^2 - \lambda^{n+1})}{(1 - \lambda)^2} - \frac{(2n - 2) \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \right) \right]. \end{aligned}$$

In Anbetracht dessen, daß $1 + 2\lambda/(1 - \lambda) = F/f$ und nach Durchführung der entsprechenden Verkürzungen ist

$$p = \varrho a \beta n_n \left[\frac{F}{f} - \frac{\lambda + \lambda^2 - (1 + \lambda) \lambda^{n+1}}{n(1 - \lambda)^2} \right], \quad (33)$$

was den Druckverlauf im Anfangsabschnitt des Druckrohres, und zwar in Abhängigkeit von n ergibt. Selbstverständlich kann dies mit Hilfe des Zusam-

menhanges (33) innerhalb von zwei Zeitabschnitten des Druckverlaufes, in einem beliebigen Zeitpunkt, ebenfalls berechnet werden, nur muß statt des Wertes von (n_n) irgendein Zeitpunkt, der in das Intervallum

$$(2n - 1) l/a \div (2n + 1) l/a$$

fällt, eingesetzt werden, wobei der Wert des Ausdruckes innerhalb der Klammern unverändert bleibt. Dies bedeutet, daß die in der Gleichung (33) angeführte Funktion $p = f(n)$ — genau so auch bei der Gleichung (29) — bei jedem n Wert (d. h. in jeder Periode) einen Bruch, ansonsten aber zwischen den beiden Perioden einen linearen Verlauf aufweist, und der Wert der Richtungstangente beträgt

$$\varrho a \beta \left[\frac{F}{f} - \frac{\lambda + \lambda^2 - (1 + \lambda) \lambda^{n+1}}{n(1 - \lambda)^2} \right],$$

und ihre Größe — bei gegebenem System und gegebener Flüssigkeit — nur von n abhängt. Daraus geht hervor, daß wenn $n \rightarrow \infty$, der Wert sich $\varrho a F/f$ nähert, was bedeutet, daß der durch den Zusammenhang (33) bestimmte Druck — ähnlich wie die Überlegungen in bezug auf die Gleichung (29) — sich asymptotisch einer geraden Linie nähert, deren Abstand dem von den Querschnittsverhältnissen abhängenden Druck entspricht (und mit diesem parallel ist), d. h.:

$$\varrho a \beta n_n \frac{\lambda + \lambda^2}{(1 - \lambda)^2} = \varrho \beta l \frac{F^2 - Ff}{f^2}. \quad (33a)$$

Wird dieser Wert mit der Gleichung (29a) verglichen, so ergibt sich, daß am Querschnitt $I-I$ der Druck größer ist als jener an der Kolbenfläche, da

$$F^2 - f^2 > F^2 - Ff$$

ist, d. h., der Druckwert, dem sich der am Querschnitt $I-I$ entstehende Druck asymptotisch nähert, größer ist als jener an der Kolbenfläche.

Nach erfolgtem Stillstand des Kolbens wird im Zeitabschnitt ($t = t_0$ gemäß Bild 2b, $n + 1$), da hier $c = 0$ ist, der Wert des $n + 1$ -ten Gliedes Null sein. Dementsprechend beträgt der Wert des Druckes im Zeitabschnitt $n + 1$

$$p = \varrho a \beta n_n \left[\lambda + 2 \sum_{i=1}^{i=n+1} \lambda^i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n+1} (2i - 1) \lambda^i \right]. \quad (34)$$

Wenn man hiervon λ ausklammert, dann erhält man das Produkt des Zusammenhanges (31) bzw. (32) und von λ . Wird (32) mit p_n bezeichnet und unter

Nach Umordnung und Berücksichtigung des Umstandes, daß $n_n = n \cdot 2l/a$ ist, erhält man, daß

$$p = \varrho a \frac{F}{f} (c_0 + \beta n_n) - \varrho a \left[c_0 \frac{\lambda^n + \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} + \beta \frac{2l}{a} \frac{\lambda + \lambda^2 - (1 + \lambda) \lambda^{n+1}}{(1 - \lambda)^2} \right]. \quad (37)$$

Wenn $n \rightarrow \infty$ ist, dann geht aus Gleichung (37) hervor, daß die Druckkurve

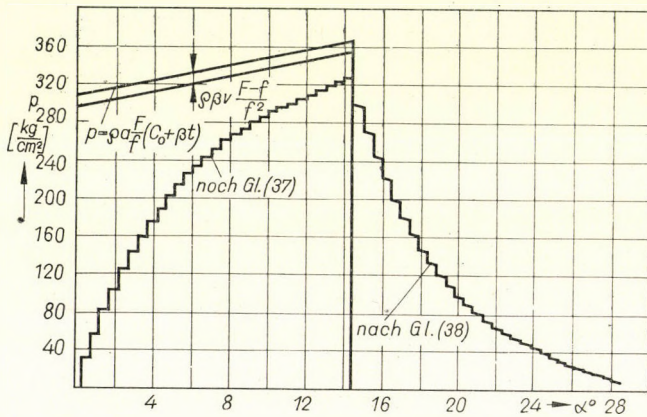


Bild 7. Darstellung des Druckverlaufes im Querschnitt I-I, wenn $c = c_0 + \beta t$. Gleiche Angaben, wie in Bildern 4 bis 6

(Bild 7) sich asymptotisch jener Geraden nähert, die parallel zur Geraden

$$p = \varrho a \frac{F}{f} (c_0 + \beta n_n) \quad (37a)$$

gezogen werden kann, und deren Abstand von der Geraden, die auf Grund der Gleichung (38) — ähnlich wie bei der Gleichung (33a) — berechenbar ist,

$$\varrho \beta l \frac{F^2 - Ff}{f^2}$$

beträgt.

Der Zusammenhang (37a) stellt den Druckverlauf in dem Falle dar, wenn die Flüssigkeit als nicht zusammendrückbar angenommen wird (wenn $a = \infty$ bzw. $l = 0$ ist). Ähnlicherweise wird der abnehmende Zweig der Druckwelle durch die Summe der Gleichungen (26) bzw. (35) dargestellt. Diese Summe unterscheidet sich lediglich durch den Multiplikator λ^m von der Gleichung

(37), demzufolge man schreiben kann:

$$p = p_n \lambda^m, \quad (38)$$

wo mit p_n die Gleichung (37) bezeichnet wurde und $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ist.

Bei unseren bisherigen Überlegungen gingen wir von der vereinfachenden Voraussetzung aus, daß zwischen dem Druckraum der Länge l und dem Druckrohr kein Druckventil eingebaut ist. Dadurch wird der sich abspielende Vorgang selbstverständlich wesentlich einfacher und kann auch mathematisch leichter behandelt werden. Hier wollen wir uns mit dem Druckverlauf für den Fall des Vorhandenseins eines Druckventils schon deshalb nicht befassen, weil diese Anordnung eine Prüfmethode abweichenden Charakters erfordern und den vorliegenden Aufsatz bedeutend verlängern würde. Wir möchten nur auf den Umstand hinweisen, daß unter Verwendung der Druckschwingungen (bzw. der Wellengleichungen) der sich abspielende Druckverlauf mit Hilfe der einfachen Grundrechnungsarten ohne weiteres dargestellt werden kann.

Auf Grund der vorstehenden Ausführungen kann nunmehr festgestellt werden, daß die Kolbengeschwindigkeit vom entstehenden Druck unabhängig war (z. B. der Kolben wurde durch eine Nockenwelle betätigt). Im nachstehenden Abschnitt wollen wir den Fall untersuchen, wo die Kolbengeschwindigkeit vom Druck nicht unabhängig ist, z. B. der Kolben durch eine Federkraft betätigt wird.

SCHRIFTTUM

1. ALLIEVI, L.: Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen. Springer, Berlin 1909.
2. LOJCSJANSZKI, L. G.: Folyadék és gázok mechanikája (Mechanik von Flüssigkeiten und Gasen). Akademie-Verlag, Budapest 1956.
3. JAEGER, CH.: Technische Hydraulik. Birkhäuser, Basel 1949.
4. SASS, F.: Bau und Betrieb von Diesel-Motoren. Springer, Berlin 1948.
5. PISCHINGER, A.: Gemischbildung und Verbrennung im Dieselmotor. Springer, Wien 1957.
6. SZÁSZ, P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei (Elemente der Differential- und Integralrechnung). Közoktatási Kiadó, Budapest 1951; Band I. 564.

APPLICATION OF WAVE EQUATIONS TO SHORT PIPES, PART I

P. BENYÓ

SUMMARY

The wave equations forming the solution of the differential equations describing stationary flow in straight pipes of constant cross section were applied to short pipes. With the determination of the conditions of reflection at the point of change of cross section, the equations were applied to the pressure space of injection pumps. Thus, the pressure phenomena were described as high frequency pressure oscillation, according to reality. In Part I of the paper, the pressure phenomena were analyzed for three piston velocities produced by a damshaft, and could be described by a geometric series. Were the pressure determined on the basis of the continuity equation, the solution would be given by an inhomogeneous differential equation of the first order.

APPLICATION DES ÉQUATIONS D'ONDES AUX TUBES COURTS, I^{re} PARTIE

P. BENYÓ

RÉSUMÉ

Les solutions des équations différentielles décrivant l'écoulement instationnaire dans les tubes droits à section constante ont été appliquées aux tubes courts. En déterminant les conditions de réflexion produites au changement de la section, les équations ont été appliquées au champ de pression des pompes d'injection. Ainsi, la pression à ce point a été établie comme oscillation à haute fréquence de la pression, conformément à la réalité. Dans la première partie de l'étude, la pression a été calculée pour trois vitesses de piston produites par un arbre à cames, et cette pression pouvait être exprimée par une série géométrique. Si la pression est déterminée à partir de l'équation de continuité, la solution résulte d'une équation différentielle inhomogène du premier ordre.

ПРИМЕНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ К КОРОТКИМ ТРУБАМ, ЧАСТЬ I

П. БЕНЬО

РЕЗЮМЕ

К коротким трубам были применены волновые уравнения, являющиеся решением дифференциальных уравнений, описывающих нестационарные потоки в прямых трубах постоянного сечения. Определяя условия рефлекса, возникающие при изменении сечения, уравнения были применены для камеры давления впрыскивающего насоса. Таким образом, протекающий здесь процесс давления был описан в соответствии с действительностью, как высокочастотное колебание давления. В первой части изменения давления были записаны для трех скоростей поршня, создаваемых кулачковым валиком. Запись имела вид геометрического ряда. В том случае, если процесс давления должен был быть определен на основе уравнения непрерывности, решение приняло бы вид неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

THREE-DIMENSIONAL FLOW IN AXIAL FANS WITH PRESCRIBED BLADE LOADING

G. NATH

DEPARTMENT OF FLUID MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received March 4, 1966]

The inverse problem of the three-dimensional non-free-vortex flow through an axial fan without prerotator and straightener, has been solved by using the isolated aerofoil method, when the circulation increases with the radius, R_H/R_T is small and the number of blades is finite. The trailing vortices are considered as spirals extending to infinity. The fluid is considered as incompressible and nonviscous. The radial, tangential and axial components of the induced velocity due to the trailing vortices have been obtained numerically by using Electronic Computer, but the radial component has been neglected as it is small. Analytical expressions for various geometrical and aerodynamic properties have been obtained. One numerical example showing the application of the method is given.

List of symbols

Notations

a, b	constants;
C_a	axial velocity at a point;
C_i	resultant induced velocity due to the trailing vortices at any radial station;
C_{ai}, C_{ri}, C_{Ri}	axial, tangential and radial components of the induced velocity due to the trailing vortices at any radial station;
C_D	drag coefficient with respect to mean relative velocity, W'_∞ ;
C_{DA}	annulus drag coefficient;
C_{DP}	profile drag coefficient;
C_{DS}	secondary drag coefficient;
C_L	lift coefficient with respect to mean relative velocity, W'_∞ ;
C_u	tangential velocity at any radius, when the circulation is constant;
C'_u	tangential velocity at any radius, when the circulation is not constant;
D_l	drag force of aerofoil profile;
F'_a	axial force;
F'_u	tangential force;
h	= $R_T - R_H$ blade height;
H	total head pressure at a point;
i, j, k	unit vectors along radial, tangential and axial directions, respectively;
K	= $\Delta H / \frac{1}{2} \rho C_{a1}^2$ total head coefficient at any radial station;
K_R	loss coefficient of rotor at any radial station;
K_{swirl}	loss coefficient due to swirl at any radial station;
l	chord length at any radius;
l/s	solidity;
L	lift force of aerofoil profile;
L_v	length of a trailing vortex line;
n	unit vector parallel with the tangent of the vortex line;
N	number of blades;
p	static pressure at a point;
p_c	= $\Delta p / \frac{1}{2} \rho C_{a1}^2$ static pressure rise coefficient at any radial station;
$p_{c.t.}$	static head rise coefficient at any radial station;
Q	torque;

Q_c	torque coefficient;
γ	vector along the line joining the points A and B (see Fig. 1);
y	magnitude of γ ;
R, θ, z	cylindrical polar co-ordinates;
R_H	hub radius;
R_H/R_T	hub/tip ratio;
R_T	tip radius;
S	blade spacing;
T	thrust;
T_c	thrust coefficient;
V	volume of fluid flow, cu.ft./min.;
W_1	relative inlet velocity;
W_2	relative outlet velocity;
W_∞	relative mean velocity;
W'_∞	new relative mean velocity;
x	distance of the fixed point on a given blade from the origin;
$(x/R_T)_m$	radius at which the axial velocity on the rotor plane assumes its mean value;
ΔH	$= H_2 - H_1$ local total head change at any radial station;
ΔD	$= p_2 - p_1$ local static pressure rise at any radial station;
ε	$= \tan^{-1} C_D/C_L$ gliding angle;
$\eta_{St.}$	static efficiency at any radius;
$\eta_{Tot.}$	total efficiency at any radius;
A	$= C_{a1}/\omega R_T$ axial velocity far up stream per tangential velocity of blade tip;
ρ	density at any point;
σ	$= 2\pi q/N$ ($q = 0, \dots, N-1$) angle between consecutive blades;
$\Phi_{eff.}$	effective angle of attack;
$\Phi_{geo.}$	geometrical angle of attack;
ψ_1	angle which the relative inlet velocity, W_1 , makes with the plane of rotation;
ψ_2	angle which the relative outlet velocity, W_2 , makes with the plane of rotation;
ψ_∞	angle which the relative mean velocity, W_∞ , makes with the plane of rotation;
ψ'_∞	angle which the new relative mean velocity, W'_∞ , makes with the plane of rotation;
ω	angular velocity of the rotor;
Γ	blade circulation at any radius.

Subscripts

1	conditions far upstream of the rotor;
2	conditions far downstream of the rotor;
H	conditions at the hub;
T	conditions at the tip;
(-)	signifies mean values;
th	signifies theoretical total head rise through rotor (i.e. 100 per cent efficiency);
(')	signifies conditions just before and just after the rotor.

I. Introduction

The fluid motion in axial-flow fans is so complex that for practical purposes some simple mathematical model is required. The radial equilibrium and actuator disc approaches to the three-dimensional design of non-free-vortex axial flow fans have been considered by several authors, when the fluid is steady, non-viscous and incompressible [2, 5-7, 10-13]. But they have not taken into account the effects of the induced velocity due to the trailing vortices which can be assumed to be spirals.

The present author has obtained the solution of the inverse problem of the three-dimensional flow of a steady, non-viscous and incompressible fluid.

through a non-free-vortex axial-flow fan by the isolated aerofoil method. He has considered that the circulation increases with the radius, R_H/R_T is small, the trailing vortices are spirals extending up to infinity and the number of blades is finite. Various geometrical and aerodynamic properties of the fan have been obtained. The fan neither possesses prerotator nor straightener. Such fans can be used in a cooling tower of a power plant.

The novelty of the present method lies in the fact that it takes into account the effect of the induced velocity components due to the trailing vortices. At the same time, it deals with finite number of blades and small R_H/R_T . No solution exists up till now which deals with such a case.

The results obtained by the present method have been compared with the corresponding results obtained by the Wallis method, modified Wallis method and other approximate methods of the present author.

II. Basic assumptions and outline of the present method of solution

1. Basic assumptions

The basic assumptions for the present solution are the following:

a) The circulation is prescribed in such a manner, that it increases with the radius and its derivative vanishes both at the hub and at the tip.

b) Each blade is considered as a lifting line, for purposes of induced velocity calculation.

c) The axial velocity before the rotor, $C_{ar}/\omega R_T$ is taken as constant along the radius.

d) The tip clearance is considered to be zero.

e) The radial component of the induced velocity is neglected as it is very small, although this assumption is contrary to the condition of continuity. Hence the motion of the particles of air or fluid, therefore, should be considered to take place on the surfaces of cylinders coaxial with the rotor of the fan.

f) The angle of spiral is not constant along its whole length, but varies between ψ_∞ and ψ_2 . The results can be obtained with both the angles, but it is assumed that whichever is taken, it remains the same throughout the whole length.

g) Since the efficiencies of the fans are of prime importance, frictional forces are taken into account. For small frictional effects, it can be assumed that the flow through blades does not appreciably deviate from that of inviscid fluids. It is possible to take into account the losses by introducing drag forces which are perpendicular to the blade forces obtained for frictionless flow. At the same time, it has also been assumed that the boundary layer separation and blade stalling do not occur in any part of the rotor.

2. Outline of the present method of solution

For a prescribed circulation, first the three components of the induced velocity due to the trailing vortices are obtained by the application of Biot—Savart law. Then an aerofoil section is chosen and the effective angle of attack, Φ_{eff} , corresponding to the design C_L , is obtained from isolated aerofoil data. Then, various geometrical and aerodynamic properties of the fan are obtained taking into account the effects of the induced velocity components.

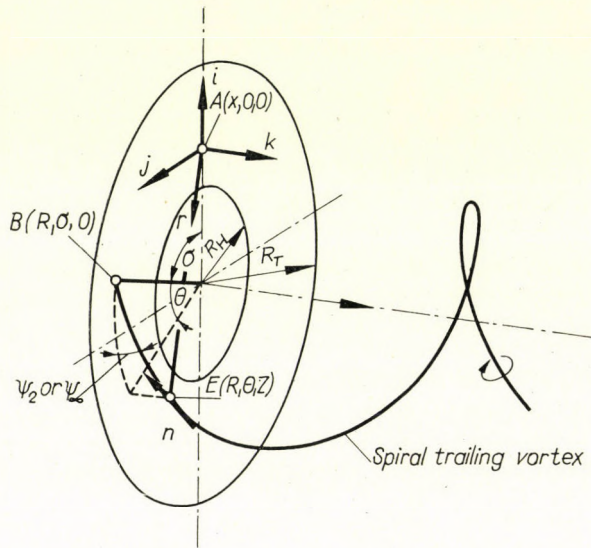


Fig. 1. Vortex system in a rotor of an axial-flow fan with non-uniform circulation

III. Determination of the induced velocity

3. Basic equations for the determination of the induced velocity due to the trailing vortices

Consider the rotor of an axial fan consisting of N blades symmetrically placed whose circulation, Γ , increases with the radius. As the circulation is not constant along the radius, there are infinite number of trailing vortices emanating from each blade which move in the direction of the stream lines. For simplicity sake, the angle of spiral can be taken as either ψ_{∞} or ψ_2 throughout the whole length. The strength of a trailing vortex which originates from the radius, R , is $(d\Gamma/dR)dR$ and the strength remains constant along the whole length. The resultant induced velocity at a given point due to the trailing

vortices of all the blades is given by Biot-Savart law (see Fig. 1):

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{4\pi} \sum \int_{R_H}^{R_T} \int_{(L_i)} \frac{d\Gamma}{dR} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{y}}{y^3} dL_i dR. \quad (1)$$

In the present case:

$$\mathbf{y} = -\mathbf{i}\{x - R \cos(\theta + \sigma)\} + \mathbf{j}\{R \sin(\theta + \sigma)\} + \mathbf{K}z, \quad (2)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin(\theta + \sigma) \cos \psi_2 + \mathbf{j} \cos(\theta + \sigma) \cos \psi_2 - \mathbf{K} \sin \psi_2 \quad (3)$$

where ψ_2 is the angle of spiral and can be obtained from Fig. 2.

The circulation of each blade can be expressed as:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{\omega R_T^2} = \Gamma_1 = & a \left[\frac{1}{5} \left(\frac{R}{R_T} \right)^5 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \left(\frac{R}{R_T} \right)^4 + \right. \\ & + \frac{1}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{R_H}{R_T} \right)^2 + 4 \frac{R_H}{R_T} \right\} \left(\frac{R_T}{R} \right)^3 - \\ & \left. - \frac{R_H}{R_T} \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \left(\frac{R}{R_T} \right)^2 + \left(\frac{R_H}{R_T} \right)^2 \frac{R}{R_T} \right] + b. \quad (4) \end{aligned}$$

As the circulation is prescribed, a and b are assumed as being known. The derivative of the circulation is

$$a \left(\frac{R}{R_T} - 1 \right)^2 \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^2$$

and it vanishes both at the hub and at the tip. If the derivative of the circulation is not of the above form, the magnitude of the induced velocity components becomes infinite both at the hub and at the tip. This is due to the assumption that each blade is replaced by a lifting line.

Fig. 2 represents the velocity diagram of a rotor of an axial fan at a certain radius, x/R_T , in a non-free-vortex flow. When the circulation is constant along the radius, $W_\infty/\omega R_T$ is the relative velocity in the plane of the rotor, but when it is not constant, $W'_\infty/\omega R_T$ is the relative velocity in the plane of the rotor. In the plane of the rotor, the induced velocity components in the tangential and axial directions are $C_{ri}/\omega R_T$ and $C_{ai}/\omega R_T$ respectively, but for down-stream of the rotor, they are $2 C_{ri}$ and $2 C_{ai}$, respectively.

When the circulation is constant along the radius (free-vortex flow), the tangential component of the velocity at the radius, x/R_T , is given by:

$$\frac{C_{u_2}}{\omega R_T} = \frac{N\Gamma_{1H}}{2\pi x/R_T}. \quad (5)$$

From Eqs (1)–(5), the radial, tangential and axial components of the induced velocity at the radius, x/R_T , can be written as:

$$\frac{C_{Ri}}{\omega R_T} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma} \int_{R_H/R_T}^1 \int_0^{\infty} \frac{d\Gamma_1}{\varepsilon^3} A_1 d\theta d\left(\frac{R}{R_T}\right). \quad (6)$$

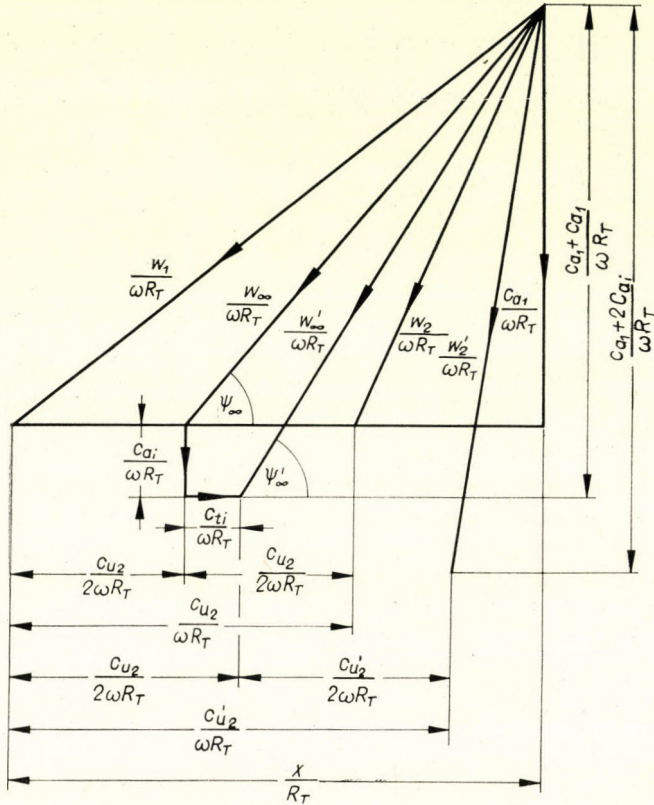


Fig. 2. Dimensionless velocity diagram of a rotor of an axial flow fan

The radial component is calculated to show that it is small and can be neglected.

$$\frac{C_{ri}}{\omega R_T} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma} \int_{R_H/R_T}^1 \int_0^{\infty} \frac{d\Gamma_1}{\varepsilon^3} \lambda_2 d\theta d(R/R_T), \quad (7)$$

$$\frac{C_{ai}}{\omega R_T} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma} \int_{R_H/R_T}^1 \int_0^{\infty} \frac{d\Gamma_1}{\varepsilon^3} \lambda_3 d\theta d(R/R_T) \quad (8)$$

where

$$\frac{d\Gamma_1}{d(R/R_T)} = a \left[\left(\frac{R}{R_T} - 1 \right) \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right) \right]^2;$$

$$\lambda_1 = \frac{R}{R_T} \left\{ \sin(\Theta + \sigma) - \Theta \cos(\Theta + \sigma) \right\} \frac{A}{1 - \frac{N\Gamma_{1H}}{2\pi(R/R_T)^2}},$$

$$\lambda_2 = \left\{ \frac{x}{R_T} - \frac{R}{R_T} \cos(\Theta + \sigma) - \frac{R}{R_T} \Theta \sin(\Theta + \sigma) \right\} \frac{A}{1 - \frac{N\Gamma_{1H}}{2\pi(R/R_T)^2}},$$

$$\lambda_3 = \left\{ \frac{R}{R_T} - \frac{x}{R_T} \cos(\Theta + \sigma) \right\} \frac{R}{R_T};$$

$$\varepsilon^2 = \left[\left(\frac{R}{R_T} \right)^2 + \left(\frac{x}{R_T} \right)^2 - 2 \frac{R}{R_T} \frac{x}{R_T} \cos(\Theta + \sigma) + \left\{ \frac{A}{1 - \frac{N\Gamma_{1H}}{2\pi(R/R_T)^2}} \right\}^2 \Theta^2 \right].$$

When the angle of the spiral is ψ_∞ instead of ψ_2 , the induced velocity components are given as above except that $N\Gamma_{1H}/2\pi(R/R_T)^2$ should be replaced by $N\Gamma_{1H}/4\pi(R/R_T)^2$.

Equs (6)–(8) are the same as those obtained by BETZ [1] with the difference that he has taken the angle of spiral as ψ_1 where $\tan \psi_1 = C_{ar}/\omega R$.

2. Numerical solution of the three components of the induced velocity

Equs (6)–(8) cannot be integrated analytically. Moreover, near the rotor they cannot be approximated by simple expressions which can be integrated analytically. In order to obtain the numerical solution of Equs (6)–(8), Simpson's rule is employed and the solution is obtained with the aid of *Electronic Digital Computer* (Elliot) when $R_H/R_T = 0,35$, $N = 3$, $A = 0,2$, $\Gamma_{1H} = 0,056$ and $\psi = \psi_2$ and ψ_∞ (ψ is the angle of spiral). The time taken was about 10 hours. Equs (6)–(8) are slowly convergent. The maximum difference in the magnitude of the three components of the induced velocity at certain radius is about 8%, when the angle of spiral is taken as ψ_∞ instead of ψ_2 . But this difference has very little effect either on $C_{a2}/\omega R_T$ or $C_{u2}/\omega R_T$, because $C_{a1}/\omega R_T$ and $C_{v1}/\omega R_T$ are very small compared to $C_{a2}/\omega R_T$ and $C'_{u2}/\omega R_T$, respectively.

a) *Radial component of the induced velocity*: The radial component of the induced velocity, $C_{Ri}/\omega R_T$, is given in Table II and Fig. 5a. It is negative at

Table I
Circulation, Γ_1

$\frac{R}{R_T}$	Γ_1
0,35	0,0560
0,40	0,0561
0,50	0,0568
0,60	0,0588
0,70	0,0615
0,80	0,0639
0,90	0,0653
1,00	0,0656

every point of the blade. It is very small compared to the axial velocity, $C_{a2}/\omega R_T$, and hence can be neglected.

b) *Tangential component of the induced velocity*: The tangential component of the induced velocity, $C_{ri}/\omega R_T$, is given in Table II and Fig. 5b. In the present case, it is negative in the vicinity of the hub and increases as x/R_T increases.

The tangential velocity after the rotor when the circulation is not constant, can be expressed as:

$$\frac{C'_{u2}}{\omega R_T} = \frac{C_{u2}}{\omega R_T} + 2 \frac{C_{ri}}{\omega R_T}. \quad (9)$$

$C'_{u2}/\omega R_T$ is given in Table III and Fig. 7. In the present case, it decreases as

Table II
Radial, tangential and axial components of the induced velocity
(Angle of spiral, ψ_2)

$\frac{x}{R_T}$	$\frac{C_{ri}}{\omega R_T}$	$\frac{C_{ri}}{\omega R_T}$	$\frac{C_{ai}}{\omega R_T}$
0,35	-0,0026	-0,0003	0,0112
0,40	-0,0029	0,0004	0,0082
0,50	-0,0034	0,0012	0,0032
0,60	-0,0037	0,0014	0,0006
0,70	-0,0038	0,0015	0,0001
0,80	-0,0036	0,0018	0,0004
0,90	-0,0032	0,0024	0,0004
1,00	-0,0027	0,0026	-0,0004

x/R_T increases. The total head rise, static pressure rise and static head rise coefficients, the thrust and torque coefficients and the static efficiency increase, if $C'_{u_2}/\omega R_T$ increases when other design parameters are constant.

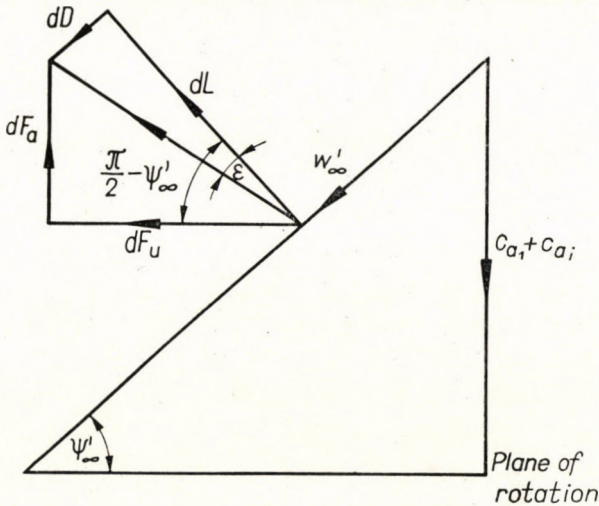


Fig. 3. Force vector diagram for rotor blade element

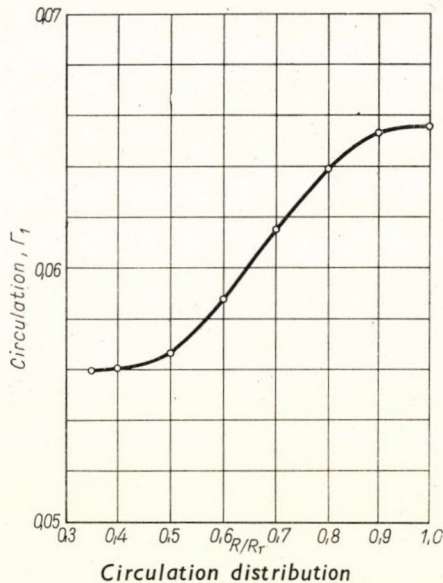


Fig. 4

c) *Axial component of the induced velocity:* The axial component of the induced velocity, $C_{ai}/\omega R_T$ is given in Table II and Fig. 6. In the present case, it decreases with the radius (except in a small region). It affects almost all the

Table III
Tangential component of the velocity, $C'_{u_2}/\omega R_T$

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
				No. 1	No. 2
$\frac{x}{R_T}$	$\frac{C'_{u_2}}{\omega R_T}$	$\frac{C'_{u_2}}{\omega R_T}$	$\frac{C'_{u_2}}{\omega R_T}$	$\frac{C'_{u_2}}{\omega R_T}$	$\frac{C'_{u_2}}{\omega R_T}$
0,35	0,0757	0,0764	0,0764	0,0720	0,0764
0,40	0,0677	0,0719	0,0670	0,0605	0,0670
0,50	0,0558	0,0631	0,0547	0,0488	0,0547
0,60	0,0474	0,0542	0,0471	0,0452	0,0471
0,70	0,0413	0,0454	0,0418	0,0415	0,0418
0,80	0,0370	0,0365	0,0378	0,0407	0,0378
0,90	0,0345	0,0277	0,0345	0,0399	0,0345
1,00	0,0320	0,0188	0,0313	0,0357	0,0313

geometrical and aerodynamic properties of the fan. If $C_{ai}/\omega R_T$ has a large value especially at or in the neighbourhood of the hub, then, large deflection occurs in the angle of attack. By properly choosing the rate of the increase of circulation along the radius, $C_{ai}/\omega R_T$ can be kept as low as possible. The axial velocity after the rotor, $C_{a_2}/\omega R_T$, is given in Table IV and Fig. 8.

d) *Induced velocity due to the bound vortices.* It can be easily shown that the induced velocity due to the bound vortices of all blades at every radius is zero, when the blades are symmetrically placed.

Table IV
Axial component of the velocity, $C_{a_2}/\omega R_T$

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution
$\frac{x}{R_T}$	$\frac{C_{a_2}}{\omega R_T}$	$\frac{C_{a_2}}{\omega R_T}$	$\frac{C_{a_2}}{\omega R_T}$
0,35	0,2224	0,1952	0,2031
0,40	0,2164	0,2035	0,2010
0,50	0,2065	0,2147	0,1988
0,60	0,2013	0,2187	0,1987
0,70	0,2002	0,2154	0,1997
0,80	0,2008	0,2040	0,2008
0,90	0,2008	0,1825	0,2008
1,00	0,1992	0,1464	0,1987

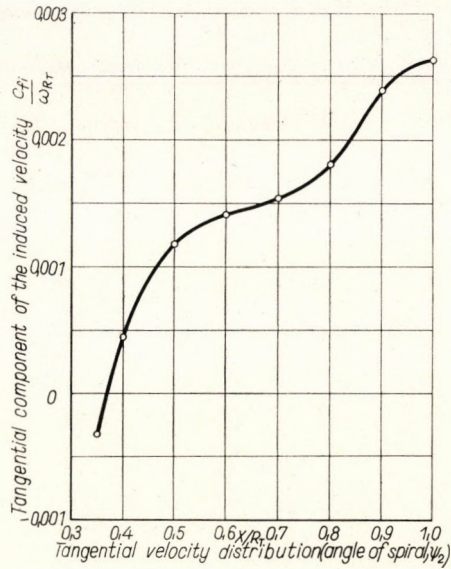
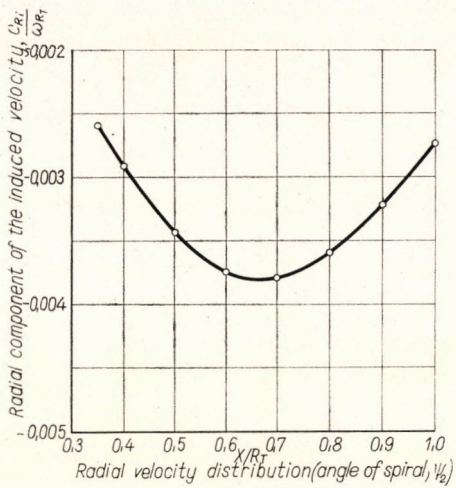


Fig. 5

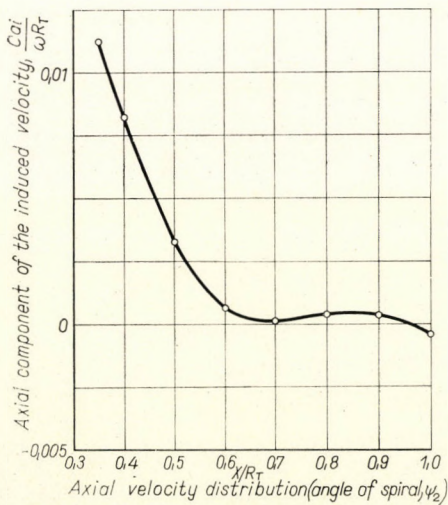


Fig. 6

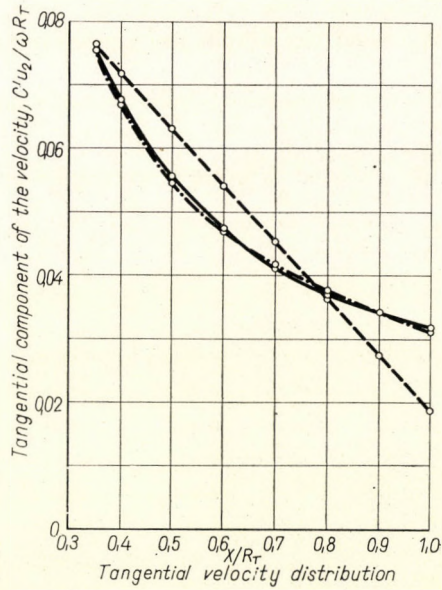


Fig. 7

IV. Some geometrical and aerodynamic properties of the axial fan

1. Geometrical angle of attack and chord length

The induced velocity due to the trailing vortices changes the angle of attack. For a chosen aerofoil section, the effective angle of attack, Φ_{eff} , corresponding to the design lift coefficient, C_L , can be obtained from the experi-

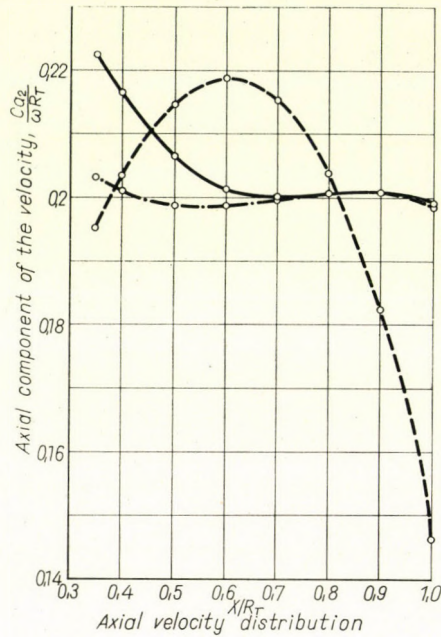


Fig. 8

mental data of an isolated aerofoil [9]. The lift coefficient, C_L , slightly changes with Reynolds number. Reynolds number varies along the span of the blade but the effect of variation of the Reynolds number on C_L is small. Hence C_L can be taken as constant along the whole span. Since Φ_{eff} depends on C_L , it can also be taken as constant along the whole span.

The relation between Φ_{eff} and Φ_{geo} at the radius is given by:

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{geo}} - (\psi'_{\infty} - \psi_{\infty}) \quad (10)$$

where ψ_{∞} and ψ'_{∞} can be obtained from velocity diagram (Fig. 2).

From the aerofoil theory, the chord length at the radius, x/R_T , is given by:

$$l/R_T = \frac{2\Gamma_1}{C_L W'_{\infty}/\omega R_T} \quad (11)$$

where $W'_{\infty}/\omega R_T$ can be obtained from Fig. 2;

Table V
Chord length, l/R_T

Present solutions		Wallis solutions	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
$\frac{x}{R_T}$	$\frac{l}{R_T}$			No. 1	No. 2.
		$\frac{l}{R_T}$	$\frac{l}{R_T}$	$\frac{l}{R_T}$	$\frac{l}{R_T}$
0,35	0,424	0,433	0,431	0,430	0,432
0,40	0,380	0,414	0,384	0,382	0,384
0,50	0,316	0,368	0,319	0,318	0,319
0,60	0,275	0,319	0,277	0,277	0,277
0,70	0,248	0,268	0,248	0,247	0,247
0,80	0,226	0,217	0,225	0,225	0,225
0,90	0,206	0,164	0,205	0,206	0,205
1,00	0,187	0,112	0,186	0,187	0,186

l/R_T is given in Table V and Fig. 9. It decreases as x/R_T increases. l/R_T can be increased by increasing either Γ_1 or N or by decreasing either Λ or R_H/R_T or C_L .

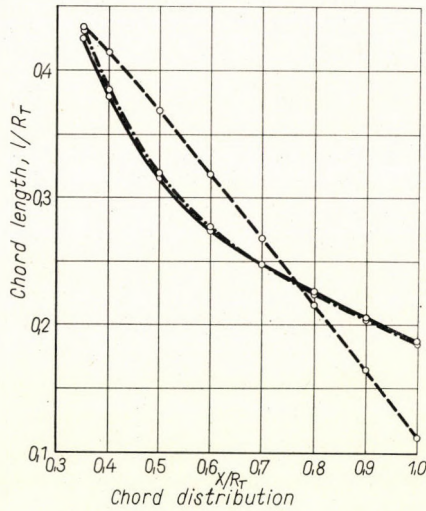


Fig. 9

COLLAR [3] has suggested that when ψ'_∞ is approximately 40° and the solidity less than unity, the interference between adjacent blades is small. Detailed experiments on a fan designed by the isolated aerofoil method showed satisfactory agreement with theory, although the values of the solidity, l/s and ψ'_∞ at the blade root were in excess of those given above. Hence informa-

Table VI

Angle which the mean relative velocity, $W'_\infty/\omega R_T$ makes with the plane of rotation, ψ'_∞

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
				No. 1.	No. 2.
$\frac{x}{R_T}$	ψ'_∞	ψ'_∞	ψ'_∞	ψ'_∞	ψ'_∞
0,35	34° 5,0'	32° 21,9'	32° 52,8'	32° 29,6'	32° 40,6'
0,40	29° 37,6'	28° 59,6'	28° 40,9'	28° 24,6'	28° 37,4'
0,50	23° 17,5'	23° 52,2'	22° 52,5'	22° 48,4'	22° 56,1'
0,60	19° 12,0'	20° 4,7'	19° 4,6'	19° 6,2'	19° 7,4'
0,70	16° 24,7'	17° 3,1'	16° 24,0'	16° 24,5'	16° 24,7'
0,80	14° 22,8'	14° 29,3'	14° 23,3'	14° 23,1'	14° 21,6'
0,90	12° 47,3'	12° 10,7'	12° 47,4'	12° 48,2'	12° 45,8'
1,00	11° 27,9'	9° 55,1'	11° 26,9'	11° 30,1'	11° 29'

Table VII

Geometrical angle of attack, Φ_{geo} .

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
				No. 1.	No. 2.
$\frac{x}{R_T}$	Φ_{geo}	Φ_{geo}	Φ_{geo}	Φ_{geo}	Φ_{geo}
0,35	3° 48,4'	2° 4,3'	2° 36,2'	2° 13'	2° 24'
0,40	3° 24,6'	2° 46,7'	2° 27,9'	2° 11,6'	2° 24,4'
0,50	2° 46,9'	3° 21,7'	2° 22'	2° 17,8'	2° 25,6'
0,60	2° 30,4'	3° 23,1'	2° 23'	2° 24,6'	2° 26,8'
0,70	2° 26,6'	3° 5'	2° 25,8'	2° 26,3'	2° 26,5'
0,80	2° 27,4'	2° 33,9'	2° 27,9'	2° 27,7'	2° 26,3'
0,90	2° 27,4'	1° 50,9'	2° 27,6'	2° 28,3'	2° 26'
1,00	2° 24,4'	0° 51,6'	2° 23,4'	2° 26,6'	2° 25,5'

tion available concerning multiplane interference is not completely satisfactory. But it is better if $\psi'_\infty \leq 40^\circ$ and $l/s \leq 0,7$ at the hub in the case of isolated aerofoil method.

2. Static pressure rise and static headrise coefficients

The static pressure rise coefficient, p_c , at the radius, x/R_T , is given by (see Fig. 3):

$$p_c = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho C_{a1}^2} = \frac{\frac{W'_\infty}{\omega R_T} \frac{l}{R_T} N}{A^2 2\pi \frac{x}{R_T}} \times \left[C_L \left(\frac{x}{R_T} - \frac{1}{2} \frac{C'_{u2}}{\omega R_T} \right) - C_D \left(\frac{C_{a1} + C_{ai}}{\omega R_T} \right) \right]. \tag{12}$$

Table VIII

Static pressure rise coefficient, p_c

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
				No. 1.	No. 2.
$\frac{x}{R_T}$	p_c	p_c	p_c	p_c	p_c
0,35	1,164	1,165	1,164	1,173	1,164
0,40	1,200	1,284	1,205	1,216	1,205
0,50	1,261	1,455	1,274	1,282	1,274
0,60	1,332	1,534	1,341	1,319	1,341
0,70	1,410	1,554	1,406	1,407	1,406
0,80	1,478	1,415	1,465	1,463	1,465
0,90	1,518	1,218	1,510	1,505	1,510
1,00	1,530	0,927	1,531	1,527	1,531

But the static pressure rise coefficient, p'_c , at the radius, x/R_T , just after the rotor can be expressed as:

$$p'_c = \frac{p'_2 - p'_1}{\frac{1}{2} \rho C_{a1}^2} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho C_{a1}^2} + \left\{ \frac{C_{a2}^2 - C_{a1}^2}{C_{a1}^2} \right\} + \frac{3}{4} \left(\frac{C'_{u2}}{C_{a1}} \right)^2. \tag{13}$$

The static head rise coefficient at the tip just after the rotor can be expressed as:

$$(p_{St})_T = \frac{p_a - p_0}{\frac{1}{2} \rho C_{a1}^2} = \frac{p_2 - p_1 - \frac{1}{2} \rho (C_{a1} + C_{ai})^2}{\frac{1}{2} \rho C_{a1}^2} \tag{14}$$

where p_a is the atmospheric pressure and p_0 is the stagnation pressure.

p_c is given in Table VIII and Fig. 10. p'_c is given in Table IX and Fig. 11. Similarly, $(p_{St})_T$ is given in Table XII. p_c , p'_c and $(p_{St})_T$ can be increased by either increasing Γ_1 or N or by decreasing A . In axial-flow fans, the kinetic energy of the axial velocity may be large compared to the static pressure rise.

Table IX
Static pressure rise coefficient, p'_c

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
$\frac{x}{R_T}$	p'_c	p'_c	p'_c	No. 1.	No. 2.
0,35	1,508	1,227	1,305	1,270	1,274
0,40	1,457	1,416	1,300	1,285	1,289
0,50	1,385	1,682	1,318	1,327	1,330
0,60	1,387	1,786	1,370	1,357	1,382
0,70	1,444	1,753	1,437	1,441	1,439
0,80	1,511	1,481	1,500	1,494	1,492
0,90	1,548	1,065	1,540	1,535	1,532
1,00	1,542	0,469	1,537	1,551	1,549

Table X
Total head rise coefficient, K

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
$\frac{x}{R_T}$	K	K	K	No. 1.	No. 2.
0,35	1,544	1,263	1,342	1,302	1,310
0,40	1,486	1,449	1,328	1,307	1,317
0,50	1,404	1,707	1,337	1,342	1,349
0,60	1,401	1,804	1,383	1,370	1,396
0,70	1,455	1,766	1,448	1,450	1,450
0,80	1,520	1,489	1,509	1,504	1,501
0,90	1,555	1,069	1,548	1,545	1,540
1,00	1,548	0,472	1,543	1,559	1,555

In such a case, the static head rise coefficient is negative. For fans which do not possess stators and which deliver the air or fluid directly into the atmosphere, static efficiency at the tip is most important. But the static efficiency at the tip will be negative, if $(p_{St.})_T$ is negative. Similarly, $(p_{St.})_T$ can also be negative if there is a large reduction in the magnitude of the circulation at the hub.

Table XI
Swirl loss, K_{swirl}/K_{th}

Present solution		Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions	
$\frac{x}{R_T}$	$\frac{K_{swirl}}{K_{th}}$			No. 1.	No. 2.
0,35	0,0912	0,1131	0,1066	0,1028	0,1091
0,40	0,0759	0,0878	0,0832	0,0757	0,0838
0,50	0,0548	0,0575	0,0552	0,0488	0,0547
0,60	0,0396	0,0403	0,0396	0,0376	0,0392
0,70	0,0290	0,0294	0,0299	0,0297	0,0300
0,80	0,0224	0,0222	0,0235	0,0254	0,0236
0,90	0,0190	0,0178	0,0191	0,0222	0,0191
1,00	0,0164	0,0189	0,0158	0,0179	0,0156

Table XII
Efficiency, torque and thrust coefficients etc.

Present solution	Wallis solution	Modified Wallis solution	Approximate solutions		
			No. 1.	No. 2.	
Q_c	0,293	0,280	0,291	0,290	0,291
T_c	1,295	1,192	1,237	1,235	1,237
$\eta_{Tot.}$	0,898	0,895	0,880	0,881	0,880
$(\eta_{St})_T$	0,327	—	0,328	0,333	0,331
P_{CT}	1,530	0,927	1,531	1,527	1,531
P'_{CT}	1,542	0,469	1,536	1,551	1,549
K_T	1,548	0,472	1,543	1,559	1,555
$(P_{St.})_T$	0,546	—	0,543	0,551	0,549

3. Thrust and torque coefficients

From Equ. (13), the thrust coefficient can be expressed as:

$$T_c = 2 \int_{R_H/R_T}^1 p'_c \frac{x}{R_T} d\left(\frac{x}{R_T}\right) \quad (15)$$

where

$$T_c = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho C_{a1}^2 \pi R_T^2}$$

Similarly, the torque coefficient can be expressed:

$$Q_c = \frac{N}{\pi A^2} \int_{R_H/R_T}^1 \frac{W'_\infty}{\omega R_T} \frac{l}{R_T} \left[C_D \left(\frac{x}{R_T} - \frac{1}{2} \frac{C'_{u_2}}{\omega R_T} \right) + C_L \left(\frac{C_{a1} + C_{a2}}{\omega R_T} \right) \right] \frac{x}{R_T} d \left(\frac{x}{R_T} \right) \quad (16)$$

where

$$Q_c = \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho C_{a1}^2 \pi R_T^3}$$

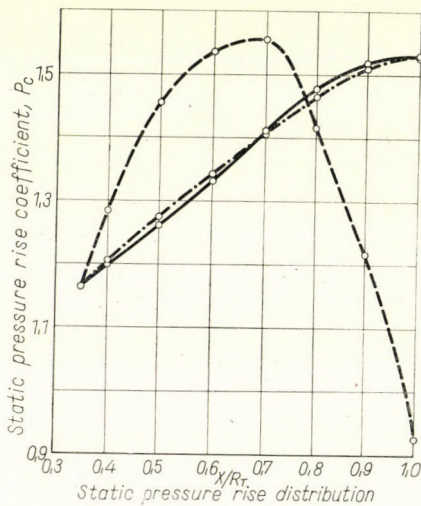


Fig. 10

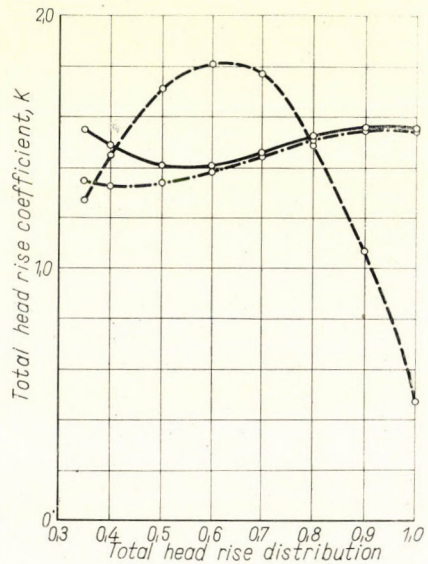


Fig. 11

The above equations can be integrated either numerically or graphically. They are given in Table XII. They increase when Γ_1 or N increase or A decreases. Q_c increases and T_c decreases when C_D/C_L increases.

4. Total head rise coefficient

As in Ref. [12] neglecting all the second order terms in order to limit the number of variables, the theoretical head rise coefficient at the radius, x/R_T , can be expressed as:

$$K_{rh} = \frac{2C'_{u_2}/\omega R_T}{A^2} \frac{x}{R_T} \quad (17)$$

But without ignoring the second order terms, it can be expressed as:

$$K_{rh} = \frac{2\Gamma_1}{A^2 S} \left(\frac{x}{R_T} - \frac{1}{2} \frac{C'_{u_1}}{\omega R_T} \right) + \frac{\left(\frac{C'_{u_2}}{\omega R_T} \right)^2}{A^2} + \left[\left(\frac{C_{a_2}}{C_{a_1}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (18)$$

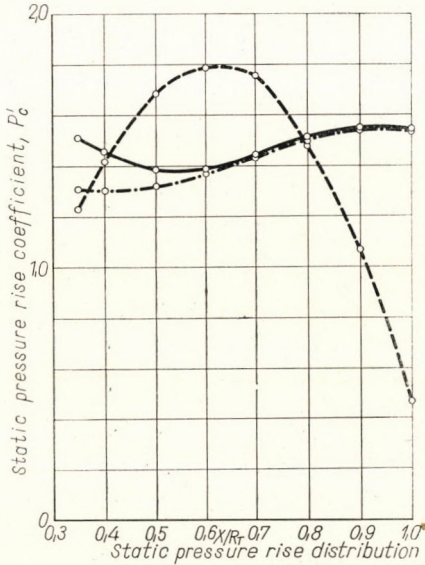


Fig. 12

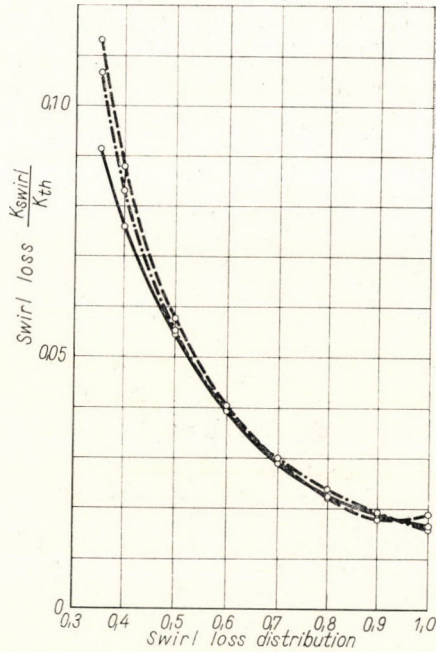


Fig. 13

From the Bernoulli relationships before and after the rotor, the total head rise coefficient, K , can be expressed as:

$$K = \frac{H_2 - H_1}{\frac{1}{2} \rho C_{a_1}^2} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho C_{a_1}^2} + \left\{ \left(\frac{C_{a_2}}{C_{a_1}} \right)^2 - 1 \right\} + \left(\frac{C'_{u_2}}{C_{a_1}} \right)^2. \quad (19)$$

K increases when $C_{u_2}/\omega R_T$ increases or A decreases. This is given in Table X and Fig. 12.

V. Losses and efficiency of a fan

At present, it is rather difficult to predict the losses with accuracy in a non-free-vortex flow due to lack of knowledge regarding secondary and annulus losses. Generally, the rotor losses can be subdivided into three components: profile loss, secondary loss and annulus loss. The tip clearance loss can be neglected.

In a fan without prerotator and straightener, the loss in efficiency is due to rotor loss and kinetic energy loss. The kinetic energy loss is due to the radial, tangential and axial components of the velocity, but the radial component has already been neglected.

a) *Profile drag coefficient*: In the case of the isolated aerofoil method, for a chosen aerofoil section, the profile drag coefficient at a specified radius can be obtained from the experimental aerofoil data. Like the lift coefficient, C_L , the profile drag coefficient, C_{DP} , slightly changes with the Reynolds number and with the effective angle of attack. The effect of the variation of Reynolds number on C_{DP} is small. As mentioned before, Φ_{eff} can be taken as constant along the radius. Hence C_{DP} can also be taken as constant along the radius. C_{DP} is also affected by roughness. But it can be assumed that the roughness is very small and hence can be neglected.

b) *Secondary and annulus drag coefficients*: At present, the secondary and the annulus drag coefficients in a non-free-vortex flow are not properly known either analytically or experimentally. Hence extensive amount of research work is required in order to determine them accurately and this has been left for future research work. But it can be assumed that the secondary drag coefficient, C_{DS} , and the annulus drag coefficient, C_{DA} , in a non-free-vortex flow are about the same in magnitude as in the free-vortex flow. In a free-vortex flow, C_{DS} is, generally, estimated from Howell's empirical formula [4] which can be expressed as

$$C_{DS} = 0,018 C_L^2 \quad (20)$$

where C_L represents the lift coefficient at the radius, $(x/R_T)_m$. Similarly, C_{DA} can be estimated from the expression:

$$C_{DA} = 0,018 \frac{l}{h} \quad (21)$$

where l is the chord length at the radius $(x/R_T)_m$.

It can be assumed that Eqs (20) and (21) represent C_{DS} and C_{DA} , respectively, at every point along the blade span. Although in a non-free-vortex flow these equations will not hold good, still in absence of any other reliable results, they have been used to determine C_{DS} and C_{DA} .

c) *Swirl loss*: In a fan without prerotator and straightener, the loss associated with downstream swirl is quite appreciable specially at the hub when R_H/R_T is very small and $C'_{u_2}/\omega R_T$ is large.

The swirl loss at the radius, x/R_T , can be expressed as:

$$\frac{K_{\text{swirl}}}{K_{rh}} = \frac{\left(\frac{C'_{u_2}}{\omega R_T}\right)^2 / \left(\frac{C_{a1}}{\omega R_T}\right)^2}{K_{rh}} \quad (22)$$

where $C'_{u_2}/\omega R_T$ and K_{rh} can be obtained from Eqs (9) and (18), respectively.

The swirl loss is given in Table XI and Fig. 13. It has a maximum value at the hub and in the neighbourhood of the hub, it rapidly decreases as x/R_T increases, but in the neighbourhood of the tip, it slowly decreases as x/R_T increases.

d) *Kinetic energy loss due to the axial velocity*: The kinetic energy due to the axial velocity, $C_{a1} + C_{ai}$, at the radius, x/R_T , is $1/2\rho(C_{a1} + C_{ai})^2$. This energy is lost, if the rotor discharges fluid into the atmosphere. Hence this loss at the radius, x/R_T , can be expressed as:

$$\frac{K_{axial.}}{K_{rh}} = \frac{\left(\frac{C_{a1} + C_{ai}}{\omega R_T}\right)^2 / \left(\frac{C_{a1}}{\omega R_T}\right)^2}{K_{rh}} \quad (23)$$

where $C_{ai}/\omega R_T$ and K_{rh} can be obtained from Eqs (8) and (18), respectively.

This loss varies along the radius and its value is quite high at every point along the radius. But it can be reduced by taking $C_{a1}/\omega R_T$ as small as possible.

e) *Efficiency*: After the determination of all losses already mentioned above, it is possible to obtain the total efficiency and the static efficiency of the rotor.

The total efficiency can be expressed as:

$$\begin{aligned} \eta_{Tot.} &= \frac{\int_{R_H}^{R_T} 2\pi(C_{a1} + C_{ai}) \Delta H}{\omega Q} dx = \\ &= \frac{2 \int_{R_H/R_T}^1 \left(\frac{C_{a1} + C_{ai}}{\omega R_T}\right) K \frac{x}{R_T}}{Q_c} d\left(\frac{x}{R_T}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

where $C_{ai}/\omega R_T$, Q_c and K can be obtained from Eqs (8), (16) and (19), respectively.

The above equation can be integrated numerically or graphically. The total efficiency, $\eta_{Tot.}$, is given in Table XII. It decreases when either Δ decreases or N increases provided Γ_1 and R_H/R_T are kept constant. The total efficiency is a common definition in axial-flow fans. In the present case, however, this efficiency is misleading because part of the total head rise is also a loss.

In engineering practice, static efficiency is important. The static efficiency at the tip can be expressed as:

$$\begin{aligned} (\eta_{St.})_T &= \frac{V \left[(p'_2 - p'_1) - \frac{1}{2} \rho (C_{a1} + C_{ai})^2 \right]_T}{\omega Q} = \\ &= \frac{\left[1 - \left(\frac{R_H}{R_T}\right)^2 \right] A (p_{St.})_T}{Q_c} \end{aligned} \quad (25)$$

where $(P_{St})_T$ and Q_c can be obtained from Eqs (14) and (16), respectively. $(\eta_{St})_T$ is given in Table XII.

The requisites for high static efficiency are high total efficiency, low kinetic energy loss and large static headrise coefficient. The magnitude of the kinetic energy loss can be reduced and the magnitude of the static head rise coefficient can be increased by reducing the magnitude of the axial velocity. But the magnitude of the rotor losses is also increased if the magnitude of the axial velocity is reduced. Hence designing for highest possible static efficiency is rather difficult, but by properly choosing the design parameters, it is possible to obtain high static efficiency. Fan units of high static efficiency tend to be large owing to the desirability of keeping axial velocity low. Available space, size limitations or capital cost can put a restriction on the maximum static efficiency for which it is possible to design.

VI. Effects of parameters on the aerodynamic properties of the fan

There are four major parameters which affect the aerodynamic properties of the fan. The four parameters are:

axial velocity, $C_{a1}/\omega R_T$;

number of blades, N ;

circulation, Γ_1 ;

hub/tip ratio, R_H/R_T . While considering the effects of one parameter, other parameters are considered as constant:

a) *Effects of axial velocity, Λ* : $C_{ri}/\omega R_T$, $C_{ai}/\omega R_T$, l/R_T , p_c , \bar{K} , \bar{K}_R/K_{rh} , Q_c and T_c decrease as Λ increases.

b) *Effects of number of blades, N* : $C_{ri}/\omega R_T$, $C_{u2}/\omega R_T$, $C_{ai}/\omega R_T$, \bar{K} , p_c , Q_c , T_c and K_{swirl}/K_{rh} increase as N increases, but the change in \bar{K}_R/K_{rh} and l/R_T is small if the change in N is small.

c) *Effects of circulation, Γ_1* : $C_{ri}/\omega R_T$, $C_u/\omega R_T$, $C_{ai}/\omega R_T$, \bar{K} , p_c , l/R_T , Q_c , T_c and K_{swirl}/K_{rh} increase as Γ_1 increases, but \bar{K}_R/K_{rh} decreases as Γ_1 increases.

d) *Effects of hub/tip ratio, R_H/R_T* : $C_{ri}/\omega R_T$, $C_u/\omega R_T$, $C_{ai}/\omega R_T$, l/R_T , p_c , \bar{K} , Q_c , T_c and K_{swirl}/K_{rh} decrease as R_H/R_T increases, but \bar{K}_R/K_{rh} increases as R_H/R_T increases.

VII. Design limitation of some parameters

It is not easy to give a precise lower or upper limit to the four major parameters (Λ , N , Γ_1 , R_H/R_T) as these limits vary according to the nature of the fan and the method of designing the fan. Instead of prescribing lower or upper limits to Λ , N , R_H/R_T and Γ_1 individually, efforts will be made to prescribe the upper and the lower limits to R_H/R_T , Λ and $C'_{u2}/\omega R_T$.

For isolated aerofoil method, generally, R_H/R_T lies between 0,2 and 0,6. Similarly, $C'_{u_2}/\omega R_T$ should be less than 0,19 and Λ should lie between 0,04 and 0,48. If $C'_{u_2}/\omega R_T$ exceeds 0,19 and Λ exceeds 0,48, ψ'_∞ becomes greater than 40° , l/s exceeds 0,7 and swirl loss at the hub becomes high. Similarly, if Λ is taken as less than 0,04, there is a great increase in the rotor losses. At the same time, care should be taken so that C'_{u_2}/C_{a1} should not exceed 0,4.

VIII. Comparison of numerical results

In this section, numerical results obtained by the present method, have been compared with the Wallis method, with modified Wallis method, and with approximate methods of the present author. For numerical calculations, the values of the various parameters are taken as: $\Lambda = 0,2$, $R_H/R_T = 0,35$, $N = 3$, $a = 2,4847$, $c = 0,0263$. The aerofoil section is taken as R. A. F. 6 E (Reynolds No. $0,791 \cdot 10^6$) $C_L = 0,7$, $C_{D_p} = 0,012$, and $\Phi_{eff} = 2^\circ 24'$.

a) *Comparison with Wallis method*: From the Tables III—XII and Figs 7—13, it can be seen that there is a great difference between the results obtained by the present method and the Wallis method [12] except for the total efficiency. According to the present method, K and P'_c at the tip are about three times as great in magnitude as those obtained by Wallis method. Similarly, the ratio of the chord length at the tip and at the hub, l_T/l_H , in the present case is about 1,8 times as great in magnitude as that of Wallis method. According to the Wallis method, the static head rise coefficient at the tip, $(P_{St.})_T$ and the static efficiency at the tip, $(\eta_{St.})_T$, have negative values, but according to the present method, they are 0,546 and 0,327, respectively. The difference between the results of the two methods is due to the fundamental difference in the circulation. Hence it can be concluded that the present method is better than the method of Wallis.

b) *Comparison with modified Wallis method*: In order to compare the results obtained by the present method with those of Wallis method when both have the same circulation, Wallis method is modified so as to include the circulation given by Equ. (4). This modified method is known as the modified Wallis method. From Tables III—XII and Figs 7—13 it can be seen that there is close agreement between the results obtained by the present method and the modified Wallis method except in the case of $C_{a1}/\omega R_T$, $\Phi_{geo.}$, ψ'_∞ , K , p'_c , and K_{swirl}/K_{th} in the neighbourhood of the hub.

If comparison is made between the method of Wallis and the modified method of Wallis, it can easily be seen that there is considerable difference in the results obtained by these two methods and this difference tends to increase towards the tip. This difference in the results is due to the difference in the circulation. Hence it can be concluded that the circulation represented by Equ. (4), gives better results than the circulation taken by Wallis.

c) *Comparison with approximate methods*: In the approximate method No. I, the trailing vortices are considered as straight lines instead of spirals and all other assumptions are the same as in the present method. In the approximate method No. II, the trailing vortices are considered as straight lines and the number of blades is considered as infinite, but the total circulation is the same as in the case of finite number of blades. The results obtained by the approximate methods are given in Tables III—XII.

The results obtained by the present method are in close agreement with those obtained by the approximate methods. But there is some difference in the case of $\Phi_{geo.}$, ψ'_{∞} , K , p'_c and K_{swirl}/K_{rh} in the vicinity of the hub. The results obtained according to the approximate method No. 2, are almost the same as those of modified Wallis method.

Hence it can be concluded that the shape of the trailing vortices has little effect on the geometrical and aerodynamic properties of the fan, provided other assumptions are the same.

IX. Conclusions

The main conclusions of the present investigation are the following:

a) Such circulation should be prescribed whose derivative vanishes both at the hub and at the tip, otherwise the induced velocity components will be infinite both at the hub and at the tip. Moreover, the appropriate form of the circulation depends upon the shape of the trailing vortices, i.e. whether the trailing vortices are taken as straight lines or curves.

b) The radial component of the induced velocity, $C_{Ri}/\omega R_T$ is small compared to the axial velocity, $C_{a2}/\omega R_T$, and hence can be neglected.

c) The difference in the values of the components of the induced velocity due to the change of the angle of spiral (i.e. from ψ_2 to ψ_{∞} or ψ_{∞} to ψ_2) is maximum about 8% at certain radius, but the effect of this difference on the tangential velocity, $C'_{u2}/\omega R_T$, and on the axial velocity, $C_{a2}/\omega R_T$ is very small. Hence it is possible to take either ψ_2 or ψ_{∞} as the angle of spiral without any appreciable error.

d) The induced velocity components at any radius in the plane of the rotor due to the trailing vortices which lie far away from the rotor ($60\pi \leq \theta \leq \infty$) are very small.

e) With the proper choice of the design variables, the static headrise coefficient at the tip and the static efficiency at the tip can be increased and back flow can be avoided.

f) There is very close agreement between the results obtained by the present method, by other approximate methods of the present author and by modified Wallis method except in the neighbourhood of the hub in the case

of certain geometrical and aerodynamic properties. Hence for the same circulation, there is not much difference between different methods.

g) There is appreciable difference in the results obtained by the present method and by Wallis method, especially, in the region of the tip, but the total efficiency is almost the same in both cases. This difference is due to the difference in the circulation.

h) The assumption that the finite number of blades, N , each having the circulation, Γ , can be replaced by infinite number of blades so that the total circulation is $N\Gamma$, is a valid assumption.

i) Properly designed non-free-vortex axial flow fans have values of total efficiency comparable to that of the free-vortex axial flow fans. But the static headrise coefficient at the tip and the static efficiency at the tip etc. are greater than those of the free-vortex flow.

j) The practical advantage of using non-free-vortex flow in the design of axial flow fans is that the size of the fan will be smaller compared to free-vortex flow.

k) With the proper choice of the design variables, it is possible to design non-free-vortex flow pressure rise axial flow fan without prerotator and straightener, in which the drawbacks of the three-dimensional nature of flow could be kept down to a minimum.

l) The present method is more accurate than the other methods, but the modified Wallis method can also be used for engineering purposes.

REFERENCES

1. BETZ, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust; Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen (1927), 68—92.
2. COHEN, H.—WHITE, E. M.: The theoretical determination of the three-dimensional flow in an axial compressor, with special reference to constant reaction blading. *ARC Rep.* (1943), No. 6842.
3. COLLAR, A. R.: Cascade theory and the design of fan straighteners. *R. Rand M. Aero-Res. Council* (1940); 1885.
4. HOWELL, A. R.: The present basis of axial flow compressor design (Part I — Cascade theory and performance). *ARC Rand M.* (1942), No. 2095.
5. KAHANE, A.: Investigation of axial-flow fan and compressor rotors designed for three-dimensional flow. *N. A. C. A. Techn. Note* (1948), No. 1652.
6. MARBLE, F. E.: The flow of a perfect fluid through an axial turbomachine with prescribed blade loading. *J. Aero. Sci.* **15** (1948), 473—485.
7. MIKHAIL, S.: Three-dimensional flow in axial pumps and fans. *Proc. I. Mech. E.* **172** (1958), 973—986.
8. NATH, G.: Three-dimensional non-free-vortex flow in an axial fan. Ph. D. Thesis, Technical University; Budapest 1966.
9. PATTERSON, G. N.: Ducted fans: Design for high efficiency. Australian Council for Aeronautics. Report ACA 7 (1944).
10. RUDEN, P.: Investigation of single stage axial fans'. *N. A. C. A. T. M.* No. 1062 April, 1944.
11. SMITH, L. H.—TRAUGOTT, S. C.—WISLICENUS, G. F.: A practical solution of a three-dimensional flow problems of axial-flow turbomachines. *Trans. A. S. M. E.* **75** 789—803.
12. WALLIS, R. A.: Axial flow fans. George Newnes Limited, London 1961.
13. CHUNG-HUA, WU.—WOLFENSTEIN, L.: Application of radial equilibrium condition to axial-flow compressor and turbine design. *N. A. C. A. Techn. Note* 1795 (1944).

RÄUMLICHE STRÖMUNG IN EINEM AXIALVENTILATOR BEI GEGEBENER SCHAUFELBELASTUNG

G. NATH

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser behandelt die Lösung des sogenannten umgekehrten Problems der räumlichen Strömung in einem Axialventilator ohne Vor- und Nachleitung mit weit auseinanderliegenden Schaufeln, mit radial veränderlichem Drall. Vorausgesetzt wird, daß die Zirkulation an den Schaufeln proportional dem Radius wächst, das Nebenverhältnis klein ist und die Schaufelzahl endlich ist. Die freien Wirbel werden als bis ins Unendliche sich erstreckende Schraubenlinien betrachtet, das Medium wird als inkompressibel und reibungsfrei vorausgesetzt. Die radiale, tangentielle und axiale Komponente der von den freien Wirbeln induzierten Geschwindigkeit wurde mit einer elektronischen Rechenmaschine bestimmt, die radiale Komponente wird jedoch wegen ihrer Kleinheit nicht in Betracht gezogen. Die Ergebnisse: die geometrischen und strömungstechnischen Parameter werden auch in analytischer Form angegeben. Die Anwendung des Verfahrens wird an einem Zahlenbeispiel gezeigt.

ÉCOULEMENT SPATIAL DANS UN VENTILATEUR AXIAL A AUBES SOUMISES A UNE CHARGE DONNÉE

G. NATH

RÉSUMÉ

L'auteur présente la solution du problème dit inverse de l'écoulement spatial à moment cinétique radialement variable, dans un ventilateur axial formée d'ailes isolées, à aubes espacées sans guidage préalable et ultérieur. Il suppose une circulation sur les aubes croissant en proportion du rayon, un petit rapport de moyeu et un nombre d'aubes fini. Les tourbillons libres sont considérés comme des spirales s'étendant à l'infini, le fluide est supposé incompressible et sans frottement. Les composantes radiales, tangentielles et axiales de la vitesse induite par les tourbillons libres ont été déterminées à l'aide d'une calculatrice électronique, mais la composante radiale a été négligée en raison de sa petitesse. Les caractéristiques géométriques et d'écoulement obtenues comme résultats sont présentées aussi sous une forme analytique. Un exemple numérique montre l'application de la méthode, les résultats étant comparés ensuite à ceux de différentes méthodes approchées. L'accord est satisfaisant dans tous les cas, excepté la méthode de Wallis.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОТОКИ В АКЦИАЛЬНОМ ВЕНТИЛЯТОРЕ С ЗАДАННОЙ НАГРУЗКОЙ НА ЛОПАСТИ

Г. НАТ

РЕЗЮМЕ

Автор рассматривает решение т. н. обратной проблемы пространственных потоков, образующихся в аксиальном вентиляторе, не имеющем ни предварительного, ни последующего направления, и сконструированного с отдельными, редко поставленными лопастями. Пространственные потоки в радиальном направлении имеют переменную угловую скорость. Предполагается, что циркуляция на лопастях возрастает пропорционально радиусу, отношение подшипника мало, и число лопастей конечно. Свободные завихрения принимаются за бесконечные спирали, а среда предполагается несжимаемой и не имеющей трения. Радиальные, касательные и аксиальные составляющие скорости индуцированной свободными завихрениями, были определены с помощью электронной вычислительной машины, однако, радиальная составляющая во внимание не принимается, ввиду ее малых размеров. Результаты, как геометрические, так и поточные характеристики даются и в аналитической форме. Приводится числовой пример, демонстрирующий применение метода.

THE COMPRESSIBLE LAMINAR SPANWISE BOUNDARY LAYER ON A YAWED INFINITE CYLINDER WITH DISTRIBUTED SUCTION

G. NATH

DEPARTMENT OF FLUID MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received May 3, 1966]

In the present paper, an approximate method using momentum equation has been presented to calculate the compressible laminar spanwise boundary layer on a yawed infinite cylinder with distributed suction when Prandtl number is unity, viscosity varies directly as the absolute temperature and the body is heat insulated. The characteristics of the chordwise layer is assumed as being known. It has been found that the skin friction coefficient increases with the suction parameter, but it decreases when the Reynolds number or Mach number increases.

List of symbols

Notations

c_p	specific heat at constant pressure;
f, g	chordwise and spanwise flow functions;
H_x	$= \delta_x^*/\Theta_x$ shape factor for the chordwise profile in the boundary layer;
H_y	$= \delta_y^*/\Theta$ shape factor for the spanwise profile in the boundary layer;
H_t	a variable to denote H_{xi} or H_{yi} in Equ. (31);
K_{xi}, K_{yi}	form parameters for the chordwise and spanwise velocity; profiles, respectively;
K_t	a variable to denote K_{xi} or K_{yi} in Equ. (31);
l_{yi}	$= (\partial_{yi}/V_{oi}) (\partial v_i/\partial z_i)_{z_i=0}$ non-dimensional shearing-stress parameter for the spanwise boundary layer;
M	Mach number;
p	static pressure in the boundary layer;
q	$= \Theta_{yi}/\Theta_{xi}$ ratio of the spanwise momentum thickness to the chordwise momentum thickness;
s	$= \Theta_{xyi}/\Theta_{xy}$ ratio of the mixed momentum thickness to the chordwise momentum thickness;
T	absolute temperature;
u	chordwise velocity component inside the boundary layer;
U	chordwise velocity component outside the boundary layer;
v	spanwise velocity component inside the boundary layer;
V	spanwise velocity component outside the boundary layer;
w_0	normal suction velocity at the surface;
x	co-ordinate measured along the surface in the chordwise direction;
y	co-ordinate measured in the spanwise direction;
z	co-ordinate measured normal to the surface;
α	$= \delta_{yi}/\delta_{xi}$ ratio of spanwise boundary layer thickness to the chordwise boundary layer thickness;
β_y	a parameter for the family of spanwise profiles;
γ	ratio of specific heats;
δ_x	chordwise boundary layer thickness;
δ_y	spanwise boundary layer thickness;
δ_x^*	$= \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1} \frac{u}{U}\right) dz$ displacement thickness of the boundary layer in the chordwise direction;

$\delta_y^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1} \frac{v}{V_0}\right) dz$ displacement thickness of the boundary layer in the spanwise direction;

$\Theta_x = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_1} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz$ momentum thickness of the boundary layer in the chordwise direction;

$\Theta_y = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_1} \frac{u}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right) dz$ momentum thickness of the boundary layer in the spanwise direction;

$\Theta_{xy} = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_1} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{v}{V_0}\right) dz$ mixed momentum thickness of the boundary layer;

$\eta_x = z / \delta_x$ a non-dimensional variable in the chordwise profile;

$\eta_y = z / \delta_y$ a non-dimensional variable in the spanwise profile;

$\lambda_x = -w_0 \Theta_x / \gamma_0$ a suction parameter for the chordwise boundary layer;

$\lambda_y = -w_0 \Theta_y / \gamma_0$ a suction parameter for the spanwise boundary layer;

μ coefficient of viscosity;

ν kinematic viscosity;

$\varepsilon_i = z_i / \Theta_{xi}$ a non-dimensional variable;

ρ density;

ζ shearing stress at the wall;

Γ angle of sweep.

Subscripts

- 0 refers to stagnation conditions;
- 1 refers to conditions at the edge of the boundary layer;
- i* refers to a related incompressible flow;
- x* refers to a chordwise component;
- y* refers to a spanwise component.

I. Introduction

For incompressible flow over a yawed infinite cylinder, the chordwise flow, both inside and outside the boundary layer, is independent of the spanwise flow [4, 6, 8]. But for the same cylinder in compressible flow, this "independent principle" does not hold good (except for isothermal fluids). The solution of the compressible, laminar spanwise boundary layer on a yawed infinite cylinder or wing without suction was obtained by CRABTREE [1] under certain assumptions.

In the present paper, however, an approximate method using momentum equation was formulated to calculate the compressible laminar spanwise boundary layer on a yawed infinite cylinder with distributed suction when the Prandtl number is unity, viscosity varies directly as the absolute temperature and the body is heat-insulated. The calculation for the chordwise layer is assumed as being known. Although the complete dependence of the chordwise upon the spanwise is not represented by the present method, at least a part of the dependence is accounted for in the solution. However, the present

solution gives fairly good idea of the effect of compressibility on the various characteristics of the spanwise boundary layer with distributed suction. A method similar to the present one did not exist up till now.

II. Outline of the present method

First, the equations of the steady compressible laminar boundary layer are reduced to those of the incompressible flow. Then, with the aid of the mixed momentum equation in the incompressible flow, curves or numerical tables for the universal functions s and q in terms of H_{xi} and H_{yi} are obtained. Then the various characteristics of the incompressible spanwise boundary layer can be obtained and hence by transformations, the characteristics of the compressible spanwise boundary layer can also be obtained.

III. Basic equations

The boundary layer equations of a yawed infinite cylinder in a steady, laminar compressible fluid are given as in Ref. [5]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3)$$

The equation of continuity is:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (4)$$

The equation of conservation of energy is:

$$\rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + c_p T \right) = \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + c_p T \right), \quad (5)$$

where the Prandtl number is unity and viscosity varies directly as the absolute temperature.

If there is no heat transfer between the gas and the surface of the cylinder, Equ. (5) can be expressed as:

$$c_p T + \frac{u^2 + v^2}{2} = \text{constant}. \quad (6)$$

The boundary conditions are:

$$z = 0, \quad u = v = 0, \quad w = w_0, \quad T = T_w(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$z = \infty, \quad u = U, \quad v = V, \quad T = T_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

The Illingworth—Stewartson transformation is [3, 9]:

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{a_1}{a_0} \int_0^z \frac{\varrho}{\varrho_0} dz, \\ x_i &= \int_0^x \left(\frac{a_1}{a_0} \right) \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1} dx, \\ u_i &= \frac{a_0}{a_1} u, \quad v_i = v, \\ U_i &= \frac{a_0}{a_1} U, \quad V_i = V. \end{aligned} \quad (7)$$

With the aid of the above transformations, it is possible to transform Eqs (1)–(4) to a form closely resembling the incompressible case. The equations can be expressed as:

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial u_i}{\partial z_i} = U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \left[1 + L \left\{ 1 - \left(\frac{v_i}{V_i} \right)^2 \right\} \right] + \nu_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2}, \quad (8)$$

$$u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial v_i}{\partial z_i} = \nu_0 \frac{\partial^2 v_i}{\partial z_i^2}; \quad (9)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z_i}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial z_i} = 0 \quad (11)$$

where

$$L = \frac{\frac{1}{2}(\gamma - 1) M_\infty^2}{1 + \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) M_\infty^2 \right] \cot^2 \Gamma},$$

and M_∞ is Mach number at infinity. In Ref. [5], K instead of L has been used.

The boundary conditions are:

$$\begin{aligned} z_i = 0, \quad u_i = v_i = 0, \quad w_i = w_0, \\ z_i = \infty \quad U_i = u_i, \quad v_i = V_i, \\ \frac{\partial u_i}{\partial z_i} = \frac{\partial v_i}{\partial z_i} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial z_i^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

For an infinite cylinder it is assumed that $V = V_0$, a constant.

L is small for the subsonic flow. When the flow is supersonic ($M_\infty > 1$) the phenomenon of shock wave boundary layer interaction occurs, which is not considered here. Hence M_∞ can be maximum taken as 1. Hence the maximum value of $L = 0,091$, when $\Gamma = 45^\circ$, $\gamma = 1,4$. As a first approximation L can be neglected. Hence Equ. (8) completely reduces to the equation of the incompressible flow. CRABTREE [1] uses successive approximations from the incompressible cases $L = 0$ to yield solutions for small L . In the spanwise solution, the chordwise solution is supposed to be known beforehand.

[1. Momentum equation

The mixed momentum equation in the presence of suction can be written as (1):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (U_i \Theta_{xyi}) = \frac{v_0}{V_{0i}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_i} \right)_{z_i=0} + w_0. \quad (13)$$

The spanwise profile on (z_i/Θ_{yi}) scale can be approximately taken as a function of suction only. The spanwise profile can be expressed as:

$$\frac{v_i}{V_{0i}} = g \left(\frac{z_i}{\Theta_{yi}}, \beta_y \right), \quad (14)$$

where β_y depends upon suction only.

From Equs (13) and (14) introducing s and q , the mixed momentum equation can be expressed as [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (sU_i \Theta_{xi}) = \frac{v_0 (l_{yi} - \lambda_{yi})}{q \Theta_{xi}}. \quad (15)$$

The functional relationship between l_{yi} and λ_{yi} can be obtained from Iglisch's solution [2] for a flat plate with constant suction. The polynomial given by THWAITES [10] for the curves of l_{yi} against λ_{yi} is given by:

$$l_{yi} = 0,225 + 0,36 \lambda_{yi} + 0,38 \lambda_{yi}^2. \quad (16)$$

From (15) and (16)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (s U_i \Theta_{xi}) = \frac{\nu_0 (0,225 - 0,64 \lambda_{yi} + 0,38 \lambda_{yi}^2)}{q \Theta_{xi}}. \quad (17)$$

In the presence of suction, the shape factors H_{xi} and H_{yi} are used to define the chordwise and spanwise profiles, respectively.

The chordwise and the spanwise profiles can be represented as:

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{U_i} &= f\left(\frac{z_i}{\Theta_{xi}}, H_{xi}\right), \\ \frac{v_i}{V_{0i}} &= g\left(\frac{z_i}{\Theta_{yi}}, H_{yi}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Hence s can be expressed as [5]:

$$s = \int_0^\infty f(\varepsilon_i, H_{xi}) \left[1 - g\left(\frac{\varepsilon_i}{q}, H_{yi}\right) \right] d\varepsilon_i = s(q, H_{xi}, H_{yi}). \quad (19)$$

2. Calculation of s and q in terms of H_{xi} and H_{yi}

In order to calculate s and q in terms of H_{xi} and H_{yi} , Schlichting profile [7] with slight modification is used.

The chordwise profile can be expressed as:

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{U_i} &= 1 - e^{-\eta_{xi}} + K_{xi} \left[1 - e^{-\eta_{xi}} - \left(\frac{2}{3} \eta_{xi} - \frac{2}{27} \eta_{xi}^3 + \frac{1}{81} \eta_{xi}^4 \right) \right], \text{ if } 0 \leq \eta_{xi} \leq 3; \\ &= 1 - (1 + K_{xi}) e^{-\eta_{xi}}, \text{ if } \eta_{xi} = 3. \end{aligned} \quad (20)$$

The displacement thickness in the chordwise layer is given by:

$$\frac{\delta_{xi}^*}{\delta_{xi}} = 1 + 0,1 K_{xi}. \quad (21)$$

The momentum thickness in the chordwise layer is given by:

$$\frac{\Theta_{xi}}{\delta_{xi}} = 0,5 + 0,1348 K_{xi} - 0,0113 K_{xi}^2. \quad (22)$$

Hence the form parameter, H_{xi} , is given by:

$$H_{xi} = \frac{\delta_{xi}^*}{\Theta_{xi}} = \frac{1 + 0,1 K_{xi}}{0,5 + 0,1348 K_{xi} - 0,0113 K_{xi}^2}. \quad (23)$$

Similarly, the spanwise velocity profile is given by:

$$\begin{aligned} \frac{v_i}{V_{oi}} &= 1 - e^{-\eta_{yi}} + K_{yi} \left[1 - e^{-\eta_{yi}} - \left(\frac{2}{3} \eta_{yi} - \frac{2}{27} \eta_{yi}^3 + \frac{1}{81} \eta_{yi}^4 \right) \right], \text{ if } 0 \leq \eta_{yi} \leq 3; \\ &= 1 - (1 + K_{yi}) e^{-\eta_{yi}}, \text{ if } \eta_{yi} \geq 3. \end{aligned} \quad (24)$$

Hence

$$\frac{\delta_{yi}^*}{\delta_{yi}} = 1 + 0,1 K_{yi}, \quad (25)$$

$$\frac{\Theta_{yi}}{\delta_{yi}} = 0,5 + 0,1348 K_{yi} - 0,0113 K_{yi}^2, \quad (26)$$

$$H_{yi} = \frac{\delta_{yi}^*}{\Theta_{yi}} = \frac{1 + 0,1 K_{yi}}{0,5 + 0,1348 K_{yi} - 0,0113 K_{yi}^2}. \quad (27)$$

The mixed momentum thickness, Θ_{xyi} , can be expressed as:

$$\frac{\Theta_{xyi}}{\delta_{yi}} = a_0 + a_1 K_{xi} + a_2 K_{yi} + a_3 K_{xi} K_{yi}. \quad (28)$$

When $\alpha = 1$; $a_0 = 0,5012$, $a_1 = 0,0168$, $a_2 = 0,1174$, $a_3 = -0,0113$.
The relation between s and q can be expressed as:

$$q = \frac{\Theta_{yi}/\delta_{yi}}{\Theta_{xyi}/\delta_{yi}} s. \quad (29)$$

If K_{xi} , K_{yi} and α are known, Θ_{yi}/δ_{yi} and Θ_{xyi}/δ_{yi} can be obtained.

Hence the relation between q and s can be obtained. The relation between q and s is given in Fig. 1.

Determination of K_{xi} and K_{yi} : From Equs (23) and (27), the relation between K_t and H_t can be expressed as:

$$0,0113 H_t K_t^2 + (0,1 - 0,1348 H_t) K_t + (1 - 0,5 H_t) = 0, \quad (30)$$

where K_t represents K_{xi} or K_{yi} and H_t represents H_{xi} or H_{yi} . In the present case H_{xi} and H_{yi} are assumed to be known. When $H_t = 2,0$, one value of $K_t = 0$ and the other value is positive. $K_t = 0$ gives the asymptotic suction

profile and the positive root is excluded by SCHLICHTING [7]. If $H_t > 2,0$, the product of the two roots of K_t is negative and only the negative roots are taken. Hence, corresponding to one value of H_t , there is one relevant value of K_t .

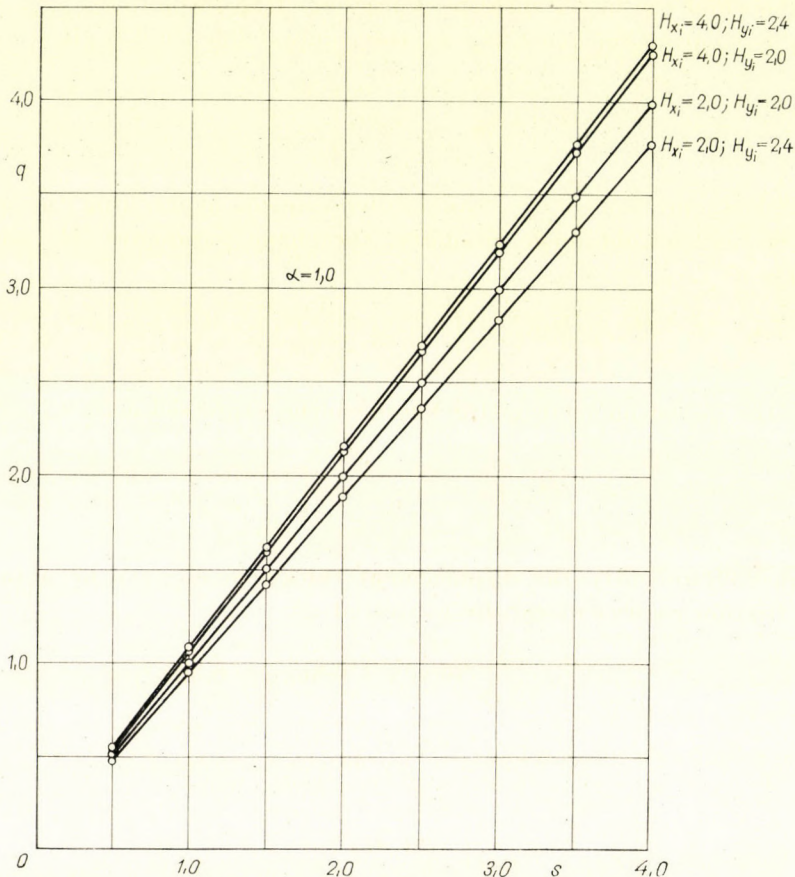


Fig. 1. Curves for calculating q for arbitrary values of H_{x_i} , H_{y_i} and s

Hence the lower and upper limits of H_{y_i} can be taken as 2,0 and 2,59, respectively. The lower limit is fixed by the asymptotic suction profile and the upper limit by the Blasius profile for the flat plate. The lower and upper limits of H_{x_i} can be taken as 2,0 and 4, respectively. But H_{x_i} can be taken for more than 4, if necessary.

The form parameter, H_{y_i} depends on suction only and hence can be taken as the function of λ_{y_i} .

The relation between H_{y_i} and $\lambda_{y_i}^*$ can be obtained by the use of the exact solution given by Iglisch for the flat place with suction.

The values of s and q at different points of the body can be obtained as in Ref. [5].

3. Characteristics of the spanwise boundary layer in compressible flow

After determining the various characteristics of the spanwise boundary layer in the incompressible flow, the corresponding characteristics in the compressible fluid can be obtained from previous transformations.

The momentum thickness, Θ_y , in the compressible fluid is given as (1):

$$\Theta_y = \Theta_{yi} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} m_1^2 \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (31)$$

Since q and Θ_{xi} are known, Θ_{yi} can be determined, hence from the above equation Θ_y can be obtained. Similarly, the shape parameter, H_y , can be expressed as:

$$H_y = (H_{yi} + 1) \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} m_1^2 \right] - 1. \quad (32)$$

Similarly, the mixed momentum thickness can be expressed as:

$$\Theta_{xy} = \Theta_{xyi} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} m_1^2 \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (33)$$

From Eqs (30) and (31), the displacement thickness, δ_y^* , can be obtained. The skin friction coefficient can be expressed as:

$$c_{fy} = \frac{\zeta_y}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2} = \frac{2}{Re \Theta_y} [0,225 + 0,36\lambda_{yi} + 0,38\lambda_{yi}^2] \times \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} m_1^2 \right]^{-1} \quad (34)$$

where

$$Re \Theta_y = \frac{V_0 \Theta_y}{\nu_0}.$$

IV. Conclusions

The momentum method gives a fairly good idea of the effect of compressibility on the various characteristics of the spanwise boundary layer on a yawed infinite cylinder with distributed suction. The accuracy of the present solution depends upon the accuracy of the results of the chordwise boundary layer. The method is valid only up to separation point. It is valid for the solid body also. The skin friction coefficient, c_{fy} increases with the suction parameter, λ_{yi} , but decreases when the Reynolds number, $Re \Theta_y$ or M_1 increases. The form parameter, H_y , increases with Mach number but decreases with the suction parameter, λ_{yi} .

REFERENCES

1. CRABTREE, L. F.: The compressible laminar boundary layer on a yawed infinite wing. *Aero. Quart.* **5** (1954); Part 2, 85—100.
2. IGLISCH, R.: Exact calculation of laminar boundary layer in longitudinal flow over a flat plate with homogeneous suction. *N. A. C. A. T. M.* (1949), 1205.
3. ILLINGWORTH, C. R.: Steady flow in the laminar boundary layer of a gas. *Proc. Roy. Soc.* **199** (1949), 533—558.
4. JONES, R. T.: Effects of sweep-back on boundary layer and separation. *N. A. C. A. T. M.* (1947), 1402; *N. A. C. A. Report* (1949), 884.
5. LACHMANN, G. V.: Boundary layer and flow control. Pergamon Press, London 1961; 856—858.
6. PRANDTL, L.: Ueber Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. British M. A. P. Volkenrode Report and Translation No. 64, 1946.
7. SCHLICHTING, H.: An approximate method for the calculation of the laminar boundary layer with suction for bodies of arbitrary shape. *N. A. C. A. T. M.* (1949), 1216.
8. SEARS, W. R.: The boundary layer of yawed cylinders. *J. Aero. Sci.* **15** (1948), 49—52.
9. STEWARTSON, K.: Correlated incompressible and compressible boundary layers. *Proc. Roy. Soc.* **200** (1949), 84—100.
10. THWAITES, B.: The development of the laminar boundary layer under conditions of continuous suctions; Part II "Approximate methods of solutions". *A. R. C.* 12699, F. M. 1296a, 1949.

KOMPRESSIBLE, LAMINARE, LONGITUDINALE GRENZSCHICHT UM EINEN
UNENDLICHEN, SCHRÄG ANGEBLASENEN ZYLINDER MIT VERTEILTER
ABSAUGUNG

G. NATH

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser teilt eine auf dem Impulssatz beruhende Näherungsmethode mit für die Berechnung der zusammendrückbaren, laminaren, longitudinalen Grenzschicht um einen unendlich langen, schräg angeblasenen Zylinder mit kontinuierlich verteilter Absaugung. Vorausgesetzt werden Prandtl-Zahl gleich Eins, Viskosität proportional der absoluten Temperatur und ein wärmeisolierter Zylinder. Die Parameter der Grenzschicht in Richtung der Leitlinie werden als bekannt vorausgesetzt. Das Ergebnis zeigt, daß die Reibungszahl sich mit zunehmender Absaugung erhöht, mit wachsender Reynolds- bzw. Mach-Zahl jedoch abnimmt.

COUCHE LIMITE COMPRESSIBLE LAMINAIRE DIRIGÉE SUIVANT
LES GÉNÉRATRICES AUTOUR D'UN CYLINDRE INFINI A SOUFFLAGE OBLIQUE,
EN PRÉSENCE D'ASPIRATION DISTRIBUÉE

G. NATH

RÉSUMÉ

L'auteur présente une méthode approchée basée sur le théorème des impulsions pour le calcul de la couche limite compressible, laminaire, dirigée le long des génératrices autour d'un cylindre infini à soufflage oblique, en présence d'aspiration distribuée. L'auteur admet un nombre de Prandtl égal à 1, une viscosité proportionnelle à la température absolue et un cylindre thermiquement isolé. La couche limite est supposée connue en direction de la directrice. Le résultat montre que le coefficient de frottement croît avec l'aspiration, mais diminue avec le nombre de Reynolds et le nombre de Mach.

СЖИМАЕМЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С РАССЕЯННЫМ ОТСОСОМ,
НАПРАВЛЕННЫЙ ПО ОБРАЗУЮЩЕЙ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО КОСО
ОБДУВАЕМОГО ЦИЛИНДРА

Г. НАТ

РЕЗЮМЕ

В статье сообщается приближенный метод, применяющий теорему импульсов для расчета сжимаемого ламинарного граничного слоя, направленного по образующей бесконечно длинного косо обдуваемого цилиндра, в случае постоянного рассеянного отсоса, числа Прандтля, равного единице, вязкости, пропорциональной абсолютной температуре, и термоизолированного цилиндра. Характеристики граничного слоя, направленного по направляющей кривой, предполагаются известными. В результате получается, что коэффициент трения возрастает с ростом отсоса, но уменьшается при возрастающем числе Рейнольдса или Маха.

THEORETICAL STUDY OF THE GRINDING PROCESS

B. BEKE

DOCTOR OF TECHN. SC.

CENTRAL INSTITUTE FOR SILICATE RESEARCH, BUDAPEST

and

I. KISS

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received July 11, 1966]

Authors recommend the application of new-type integro-differential equations for describing the development of the grinding process and changes of the surface area of product, resp. Examination of probability function of fracture hypotheses known from literature with the aid of the latter integro-differential equation — with respect to grinding kinetics — neither Griffith's hypothesis nor the assumption of logarithmic-normal distribution has led to even an approximate characterization of the actual process. On the other hand, a fairly adequate approximation can be attained by assuming proportionality between fracturing probability and particle size.

I. Introduction

In the course of grinding process, a multitude of mixed particle-sizes is turned by the effects of mechanical forces into a multitude consisting, in general, of smaller particles. Once, however, having attained a large surface area, mechanical forces are liable to bring about an opposite process resulting in agglomeration, coalescence, i.e. increase of size. THEIMER's [1] reaction line diagram serves to split this intricate process into partial processes which are easier to survey. In Fig. 1 individual Δx particle-size fractions are represented by small containers and the lines indicate from which ones to which one may the imaginary flow of matter be directed when energy is being imparted. Actual comminution corresponds to flow in the left direction, whereas in the case of agglomeration, flow is directed towards the right-hand side.

Particle-size composition at a given time is expressed by function $R(x)$ and $D(x)$ resp. which represent the amount of particles larger and smaller resp. than x or in other words, the oversize and undersize resp. with reference to the sieve of x aperture-size. It is often convenient to give the derivative of the distribution functions instead, i.e. the frequency or density function

$$H(x) = \frac{dD(x)}{dx} = - \frac{dR(x)}{dx}.$$

A significant characteristic of the particle-size composition is constituted by the free surface area of the size fraction x by 0 contained by the unit mass

of matter, the value of which is readily obtained as

$$F(x) = \xi \int_0^x \frac{H(x)}{x} dx,$$

wherein ξ represents a shape factor, while $6/\gamma$ for spheres.

The development of the comminution process is characterized by the two-variable functions $R(x, t)$ and $D(x, t)$ resp. Owing to complexity of the process, these functions are not established as yet. Nevertheless, split into

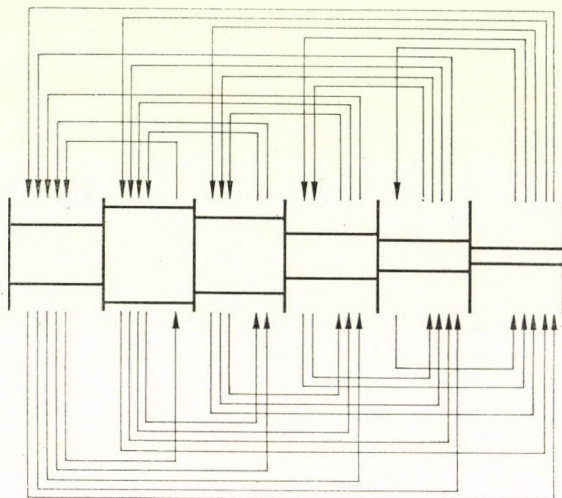


Fig. 1

$R(x)$ and $R(t)$ a number of formulae of empirical origin or obtained by theoretical considerations corrected empirically, are known.

The remarkable suggestion made by HÜTTIG and al. [2] is based on six so-called grinding functions which jointly describe the total process. These functions with repeated derivation partly with respect to size, partly to time of the function $D(x, t)$ being at present unknown, would give a clear and demonstrative picture of the changes of the individual particle-size fractions taking place during the grinding time. Of course, preliminary condition would be the establishment of $D(x, t)$.

It has to be noted that the region of particle-sizes is defined between the limits 0 and ∞ . Thus the surface area of the total grinding product at time t is

$$F(t) = \xi \int_0^{\infty} \frac{H(x, t)}{x} dx.$$

II. Kinetics of changes of size distribution and grinding product surface area

In order to describe the process according to Fig. 1, the introduction of the following integro-differential equation is proposed:

$$\frac{d}{dt} H(x, t) = -p(x, t) H(x, t) + \int_0^{\infty} p(y, t) H(y, t) \varphi(x, y) dy. \quad (1)$$

Adopted symbols and their definitions are as follows:

$H(x, t)$ frequency at time t , probability of occurrence of x sized particles;
 $p(x, t)$ probability function of fracturing, probability of fracturing an x sized particle at time t ;
 $\varphi(x, y)$ probability of fracturing y sized particles to exactly x size.

In order to facilitate closer interpretation of Equ. (1) — for reasons given below — let us at first neglect the second term of the right side, thus

$$\frac{d}{dt} H(x, t) = -p(x, t) H(x, t), \quad (1a)$$

wherefrom

$$p(x, t) = - \frac{\frac{d}{dt} H(x, t)}{H(x, t)}. \quad (2)$$

$p(x, t)$ thus represents the rate of change of $H(x, t)$ relative to its own value at a given instant, indicating probability of fracture or agglomeration resp. of the x sized particles.

This, however, is only part of the change of $H(x, t)$, the second term of Equ. (1) representing the amount of x sized particles being produced by fracturing of y sized particles. Accordingly, $H(y, t) p(y, t)$ is the total amount of y sized particles subjected to reduction, whereas $\varphi(x, y)$ defines how many of these become reduced to x size. $\varphi(x, y)$ is thus a density function representing probability of reduction from y size to exactly x size. It may be called a density function of fracture.

Knowledge of the individual terms of Equ. (1) and following this, even an approximate solution of the equation would enable us to become fully familiar with the comminution process. Knowledge of the $p(x, t)$ probability function of fracture and of the $\varphi(x, y)$ density function of fracture would permit the deduction or check of almost all of the theoretical and empirical formulae concerning size distribution and grinding kinetics.

Unfortunately, this is what one is still too far from. Although there are some known hypotheses about probability of fracturing they are mostly lacking experimental support. As to the density function of fracture, there are only

some less complex theoretical studies treating individual cases of comminution providing some means to go by. For the actual collective process in which the mutual effect of the particles has to be considered as well, no theoretically well established statement is available.

Therefore, hereinafter it is attempted to substitute the density function of fracture by a $q(x, t)$ function of surface area relative increase, the interpretation of which is as follows: When $F(x, t)$ signifies the total surface area of the size fraction x by 0 at time t then

$\partial F(x, t)/\partial x$ is the surface area of the x sized particles at time t (surface area density function);
 $\partial F(x, t)/\partial t$ is the rate of change of the total surface area at time t ; and
 $\partial^2 F(x, t)/\partial x \partial t$ is the rate of change of the surface area of the x sized particles.

Let us now introduce the function

$$q(x, t) = \frac{\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x \partial t}}{\frac{\partial F(x, t)}{\partial x}} \quad (3)$$

meaning the change of the surface area of the x sized particles relative to their actual surface area at a given time t .

According to Equ. (3) we have

$$\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x \partial t} = q(x, t) \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$$

and

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \int_0^x q(x, t) \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx.$$

It has been shown earlier that

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = \xi \frac{H(x, t)}{x},$$

thus

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \xi \int_0^x \frac{H(x, t)}{x} q(x, t) p(x, t) dx, \quad (3a)$$

wherein the insertion of $p(x, t)$ probability of fracture indicates that during the period dt not all of the particles embraced by the $H(x, t)$ density function are reduced but only their fraction $p(x, t)$.

Comparing Equ. (3a) with Equ. (1), it can be seen that the first contains instead of the $\varphi(x, y)$ function the function $q(x, t)$ although this is unknown at

present, however, which is more accessible through experiment. At the same time, no information is supplied by it as to the total size distribution and its change with time; nevertheless, it indicates the change of surface area which is of great help in some instances, e.g. in calculating energy requirements.

III. Known hypotheses of grinding kinetics and their criticism

Concerning *probability of fracture* of particles the following hypotheses are known from literature:

a) Assumption of a constant probability value for the fracture of particles leads to logarithmic-normal distribution. This has been adopted by KOLMOGOROV [3], EPSTEIN [4] and RÉNYI [5].

b) In order to eliminate deviations between the logarithmic-normal distribution and actual particle size composition, BEKE [6] assumes probability of fracture to be proportional to particle size.

c) According to GRIFFITH [7], the particles — with respect to the law of Stokes — may escape impact with a velocity inversely proportional to x^2 which means that the probability of fracture is inversely proportional to x^2 , i.e. $p = k/x^2$. According to his opinion, actual conditions are between this and a constant probability, thus $p = k/x^r$, being $0 \leq r \leq 2$.

Neglecting the effect of t , assumptions a)–c) may be generalized in the following form:

$$p(x, t) = ax^u, \text{ being } a \geq 0 \text{ and } u \geq 0. \quad (4)$$

Hypothesis for the surface area relative increase was found in connection with the deduction of the logarithmic-normal distribution only. Here it was assumed that when particles of different sizes are being fractured similar size distributions are obtained, i.e. $q(x) = \text{constant}$. This plain hypothesis has not been confirmed, it may rather be assumed that fracturing of larger particles yields a higher relative increase of the surface area. Therefore we propose to approximate this one by a function

$$q(x, t) = bx^w \quad (5)$$

similar to Equ. (4), being $b \geq 0$ and $w \geq 0$.

In the case of $u = w = 0$, logarithmic-normal distribution is obtained.

From among the plain rules concerning changes with time having been many times checked by practical experiences, reference is made to the following ones:

d) The well-known law of Rittinger according to which the increase of the surface area is proportional to expended work or in the case of ball-mills, to the grinding period. It is known that this assertion relates to an ideal optimum which, in practice, can often be approached fairly well, thus the increase

of the surface area is at most proportional to time, i.e.

$$F(t) \leq At. \quad (6)$$

e) According to ALJAVDIN [6, p. 110] development of oversize on a given sieve with time is described by the function

$$R(t) = R_0 \exp(-ct^n). \quad (7)$$

Experience has shown that this function-form can be considered a fairly good approximation of facts during the grinding period free of agglomeration.

In order to check hypotheses a)–c), let us substitute the approximate functions (4) and (5) in Equ. (3a) – in calculating the total surface area. We have then

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \xi \int_0^\infty \frac{H(x, t)}{x} ax^u bx^w dx$$

or

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \xi ab \int_0^\infty H(x, t) x^{u+w-1} dx. \quad (8)$$

IV. Analysis of Equ. (8)

a) With $u + w - 1 = 0$, or $u + w = 1$,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \xi ab \int_0^\infty H(x, t) dx.$$

The distribution being normalized, the integral becomes 1, thus

$$\partial F / \partial t = \xi ab$$

and

$$F(t) = F_0 + \xi abt \quad (9)$$

which expresses Rittinger's law.

b) With $u + w - 1 = -1$ or $u + w = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \xi ab \int_0^\infty \frac{H(x, t)}{x} dx,$$

where the right hand side can be recognized as the surface area of the grinding product at time t multiplied by ab . With respect to this,

$$F(t) = F_0 e^{\xi abt}, \quad (10)$$

showing exponential increase of the surface area with time. $u = 0$ and $w = 0$ values being postulated for the logarithmic-normal distribution, their sum

$u + w$ should also be equal to 0. This, in turn, would involve an increase of the surface area according to a positive exponential time function which is far more than the actual increase. Consequently, the logarithmic-normal distribution cannot be regarded as justified by grinding kinetical considerations.

c) With $u + w < 0$, the rate of increase of the surface area would be even higher than exponential, consequently, this has to be rejected. The assumption of $w = 0$ would correspond to Griffith's hypothesis.

d) With $0 < (u + w) < 1$, the rate of increase of the surface area would lie between linear and exponential.

e) With $u + w > 1$, the rate of increase of the surface area would be lower than linear.

As a result of this analysis, it could be concluded that the assumption under head *a* entails the closest approximation to experience. This is the result e.g. with the assumption of $u = 1$, $w = 0$ which is in accordance with case *b*) in section III.

In our estimation, it seems to be convenient to select for u values between 0,8 and 0,9 and for w between 0,15 and 0,25 which means that $u + w$ becomes somewhat higher than unity, the increase of the surface area being somewhat less than linear.

V. Grinding kinetical analysis of the logarithmic-normal distribution

It has been shown in the previous section under head *b* that the preliminary assumptions of the deduction leading to the logarithmic-normal distribution are leading, at the same time, to conclusions contradictory to practical experiences and to Rittinger's law, being in its turn, in fairly approximate agreement with the latter. In our deduction, however, we assumed independence of the probability of fracture and of the relative increase of surface area not only of particle size but of time as well. It will now be attempted to choose $p(x, t)$ as such a time function which entails no contradiction to Rittinger's law, maintaining at the same time, the assumptions $p(x) = \text{constant}$ and $q(x) = \text{constant}$.

Let us put

$$p(x, t) = \frac{h}{t_0 + t} \quad (11)$$

and

$$q(x, t) = g = \text{constant}. \quad (12)$$

By substituting (11) and (12) into (3a), we have

$$\frac{dF(t)}{dt} = \xi \int_0^\infty \frac{H(x, t)}{x} \frac{h}{t_0 + t} g dx.$$

This may also be written as

$$\frac{dF(t)}{dt} = \xi \frac{hg}{t_0 + t} \int_0^\infty \frac{H(x,t)}{x} dx$$

i.e.

$$\frac{dF(t)}{dt} = \xi \frac{hg}{t_0 + t} F(t)$$

which by integration gives

$$\ln F(t) = \xi hg \ln(t_0 + t) + \ln C \quad (13)$$

and eventually

$$F(t) = F_0 \left(\frac{t_0 + t}{t_0} \right)^{\xi hg}$$

Equ. (13) is in no contradiction with Rittinger's law when

$$\xi hg = 1. \quad (14)$$

The shape factor (for spheres $6/\gamma$) will become less than 1 with substances of exceptionally high density only, the relative increase of the surface area g — at least during the initial period of grinding carried out by impact — will be more than the unity (surface becoming more than double by impact), consequently, it can be stated that $\xi g > 1$ and with respect to Equ. (14), $h < 1$.

Furthermore, in the initial period of grinding carried out by impact free of agglomeration, one finds a particle size x^* which represents the largest particle obtained during size reduction, thus the second term on the right hand side of Equ. (1) can be omitted.

By integration of Eq. (1a) we obtain

$$\int_{x^*}^\infty \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} dx = - \int_{x^*}^\infty H(x,t) p(x,t) dx$$

and according to the assumption of $p(x,t)$ is independent of x ,

$$\frac{d}{dt} \int_{x^*}^\infty H(x,t) dx = - p(t) \int_{x^*}^\infty H(x,t) dx$$

thus

$$\frac{d}{dt} R(x^*, t) = - p(t) R(x^*, t). \quad (15)$$

By substituting from Equ. (11)

$$\frac{d}{dt}R(x^*, t) = -\frac{h}{t_0 + t}R(x^*, t)$$

and by integration between 0 and t

$$R(x^*, t) = R(x^*, 0) \left(\frac{t_0}{t_0 + t} \right)^h. \quad (16)$$

Thus according to Equ. (16), change with time of R can be described by a fractional function, its exponent — according to Equ. (14) — being less than 1. Decrease of R is, in comparison to Aljavdin's Equ. [6, p. 110] confirmed by practice, too slow.

Forming thus the premissae of the logarithmic-normal distribution in such a manner as to remain in accordance with Rittinger's law, leads to conflict with Aljavdin's relation.

To sum up, it can be stated that the logarithmic-normal distribution obtained by deductive theoretical method and approximated to practical facts by certain corrections ("renorming") [8], is considered hitherto the best approximation of the grain structure of grinding products, leads to conclusions which are far from real facts with respect to grinding kinetical considerations.

Real facts are fairly well approximated by assuming proportionality between the probability of further particle size reduction and particle size. Attempts to establish an equation expressing particle size distribution taking into account the findings above, in closed form, have not been successful as yet.

REFERENCES

1. THEIMER, O.—MOSER, F.: *Kolloid Zeitschrift* **128** (1952), 68—74.
2. HÜTTIG, G.—EBERSOLD, W.—SALES, H.: *Radex Rundschau* (1953), 489—493.
3. Колмогоров, А. Н.: Доклады А. Н. СССР **21** (1941), 2.
4. EPSTEIN, B.: *Journal of the Franklin Inst.* **244** (1947), 471—477.
5. RÉNYI, A.: *Építőanyag* **2** (1950), 177—183.
6. BEKE, B.: Principles of Comminution. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest 1964; 52.
7. GRIFFITH, L.: *Canadian Journal of Research* **21A** (1943), 57—64.
8. FÁY, G.—ZSELEV, B.: *Acta Techn. Hung.* **44** (1963), 237—260.

THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DES MAHLVORGANGS

B. BEKE und I. KISS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser schlagen vor, sowohl für die Beschreibung des Mahlvorgangs, wie für die Verfolgung der Veränderung der Oberfläche des Mahlguts je eine Integro-Differentialgleichung. Wenn die aus der Literatur bekannten Hypothesen untersucht werden, so kann festgestellt werden, daß von mahlkinetischem Standpunkt weder die Griffithsche Hypothese, noch die Annahme einer logarithmisch-normalen Verteilung zu einem den wahren Vorgang wenigstens annähernd beschreibenden Ergebnis führen. Eine gute Annäherung der Wirklichkeit kann durch die Annahme einer mit der Kornabmessung proportionalen Wahrscheinlichkeit für das Zerschneiden erreicht werden.

EXAMEN THÉORIQUE DU PROCESSUS DE BROUAGE

B. BEKE et I. KISS

RÉSUMÉ

Pour la description du processus de broyage et pour celle du changement de la surface de la matière broyée, les auteurs préconisent l'équation intégral-différentielle. En examinant les hypothèses connues de la littérature, on constate que du point de vue de la cinétique du broyage, ni l'hypothèse de Griffith, ni celle d'une distribution logarithmique normale ne conduisent à un résultat décrivant, même approximativement, la réalité. Une bonne approximation de celle-ci peut être obtenue en supposant une probabilité du broyage proportionnelle à la dimension du grain.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОМОЛА

Б. БЕКЕ и И. КИШ

РЕЗЮМЕ

Авторы предлагают интегро-дифференциальные уравнения для описания процесса помола, а также для описания изменения площади поверхности помола. Исследуя гипотезы, известные по литературе, при помощи уравнения установлено, что с точки зрения кинетики помола ни гипотеза Гриффича, ни предположение нормального логарифмического распределения не приводят к результату, даже приближенно описывающему действительный процесс. Удовлетворительное приближение действительности может быть достигнуто при предположении вероятности дробления, пропорциональной крупности зерен.

**BOOK REVIEW—BUCHBESPRECHUNG—COMPTE RENDU DE
LIVRES—ОБЗОР КНИГ**

Dr.-Ing. Arno Fackelmeyer :

MATERIALFLUß, PLANUNG UND GESTALTUNG

VDI-Verlag, Düsseldorf 1965. 208 Seiten, 2 Faltblätter, 123 Bilder

Das Buch beschäftigt sich mit der systematischen Darstellung der Materialfluß-Problematik. Es umfaßt nur den innerbetrieblichen Teil, doch wird nachdrücklich darauf hingewiesen, daß der Materialfluß beim Einkauf beginnt und bei der Ablieferung endigt. Ebenso wird vieles, weil es auch Gegenstand anderer Spezialfächer bildet, nicht ausführlich erörtert, vielmehr nur fallweise charakterisiert. Folglich wird des öfteren ein Mangel der Schilderung empfunden, die zumindest die Systematik der mit dem Materialfluß eng verbundenen Kapitel fremder Lehren (Hebezeuge, Fördermaschinen usw.) mitteilen sollte.

Der Inhalt ist in drei Teile geteilt. Der erste Teil dient zur Einleitung, schildert die Entwicklung der Idee des Materialflusses, und gibt einen Überblick des Gegenstandes.

Der zweite Teil hat zur Aufgabe, die Vorgänge des Materialflusses in ihren theoretischen Grundlagen zu erörtern. Es werden zunächst die Objekte als Einflußfaktoren besprochen, welche in den Vorgängen des Materialflusses mitspielen (Gebäude, Standort, Verkehrswege, Lager, Förderer). Hiernach wird man durch die Tätigkeiten mit den Objekten zum Zeitbegriff geführt, d. h. zu den Kosten des Material-Transportes. Die Kostenberechnung erfordert genaue Definitionen und etwas Mathematik, die aus anderen Gebieten der Technologie bekannt sein dürften; immerhin würden hier einige Ergänzungen die Brauchbarkeit des Buches erhöhen, denn die im dritten Teil angeführten Begriffsbestimmungen reichen zu den Berechnungen im Materialfluß (z. B. Durchlaufzeit) bei weitem nicht aus.

Im dritten Teil führt uns der Verfasser zu seinem eigentlichen Ziel, zur Planung und Ausgestaltung des Materialflusses. Der Praxis am meisten entgegenkommend wird dies in drei Schritten besprochen. Nach den zehn Geboten der rationalen Materialflußgestaltung wird vorerst die Ermittlung des Ist-Zustandes beschrieben, d. h. die Methoden und Mittel, die zur Kenntnis der Förder-Verhältnisse eines bestehenden Betriebes verhelfen. Der nächste Schritt ist die kritische Beurteilung des Ist-Zustandes, vornehmlich mittels geeigneter Kennzahlen zum Vergleich mit fortschrittlichen Beispielen. Abschließend folgt dann die Umstellungsplanung oder Neuplanung, d. h. die Ermittlung des Soll-Zustandes.

Das Buch ist streng genommen kein Lehrbuch, dazu sollte es bündiger sein, und auch sollte nicht dem Leser überlassen bleiben einige wichtige Teilgebiete aus dem Schrifttum ergänzen zu müssen. Ebenso will es aber auch kein Handbuch sein. Das Hauptaugenmerk ist an das »materialflußbewußte Denken« und die organisatorischen Probleme gerichtet.

Dr. E. Lechner

INDEX

<i>Kolonits, F.</i> : Calculation of Gear Correction by Iteration — Berechnung der Zahnkorrektion mit Iteration — Calcul de la correction des dents par itération — Колонич, Ф.: Итерационный расчет коррекции зубьев	3
<i>Szőke, B.</i> : Design Transfer Device for Drawing Axonometric Images — Zeichenvorrichtung zum Umzeichnen von axonometrischen Bildern — Appareil transcripteur pour la production d'images axonométriques — Сёке, Б.: Копирующий прибор для создания аксонометрических изображений	21
<i>Batta, I.</i> : Calculation of Water Hammer Phenomena by Automatic Sequence Controlled Digital Computers, II — Wasserstoßberechnung mit Hilfe einer programmgesteuerten digitalen Rechenmaschine, II — Calcul du coup de bélier par calculatrice électronique digitale à programme, II — Батта, И.: Расчет водяного удара при помощи цифровой электронной вычислительной машины программного управления, II	43
<i>Horváth, Z.—Weber, J.</i> : Activity of Zinc-Sulfate in a Sulfuric Acid Solution of Zinc-Sulfate — Aktivität des Zinksulfats in schwefelsäuren Zinksulfatlösungen — Activité du sulfate de zinc dans ses solutions sulfatées — Хорват, З. — Вебер, Й.: Активность сернистого цинка в сернокислых растворах сернистого цинка	55
<i>Heller, G.—Rosta, L.</i> : Wahl der Betriebscharakteristiken des Luftverdichters und des Hauptluftbehälters an Eisenbahntriebfahrzeugen auf Grund der Betriebsanforderungen, I — Dimensioning Principles of the Air-Compressor and the Main Air-Receiver for the Brake-Equipment in Railway-Trains, I — Choix, du point de vue de l'exploitation, des caractéristiques des compresseurs et réservoirs d'air comprimé des engins de traction ferroviaires, I — Хеллер, Д. — Рошта, Л.: Выбор характеристик оборудования по выработке и хранению сжатого воздуха на основе производственных соображений, для случая железнодорожной тяги. I	65
<i>Reményi, K.</i> : Investigation on Grindability of Limestone and Rock-Salt Mixture in a Hardgrove Mill — Prüfung der Mahlbarkeit von Gemischen aus Kalkstein und Steinsalz in Hardgrove-Labormühle — Étude de la broyabilité des mélanges de calcaire et de sel gemme dans l'appareil de Hardgrove — Ременьи, К.: Размолимость смесей известняка и каменной соли на оборудовании системы Гардгрова	75
<i>Чабалик, Дь.</i> : Снижение термических потерь в прибыльных головках — Csabalik, Gy.: Reduction of Heat Loss of the Ingot Head — Verringerung des Wärmeverlustes am Gußkopf — Réduction des pertes de chaleur de la masselotte	91
<i>Tóth, L.</i> : Theoretische und experimentelle Untersuchung der Fließerscheinungen des Werkstoffes beim Gesenkschmieden — Theoretical and Experimental Investigation of Material Flow in Die-Forging — Examen théorique et expérimental de l'écoulement de la matière a l'étampage — Том, Л.: Теоретическое и экспериментальное исследование явлений истечения материала при ковке в штамках	107
<i>Kisfaludy, A.—Tardy, P.</i> : Mikroskopische Untersuchung der ferromagnetischen Phasen von Legierungen — The Microscopic Examination of Ferromagnetic Phases of Alloys — Examen microscopique des phases ferromagnétiques des alliages — Кишфалуди, А. — Тарди, П.: Микроскопический анализ ферромагнитных фаз сплавов	131

<i>Benyó, P.</i> : Anwendung der Wellengleichungen auf kurze Rohre, I — Application of Wave Equations to Short Pipes, I — Application des équations d'ondes aux tubes courts, I — <i>Беньо, П.</i> : Применение волновых уравнений к коротким трубам, I	139
<i>Nath, G.</i> : Three-Dimensional Flow in Axial Fans with Prescribed Blade Loading — Räumliche Strömung in einem Axialventilator bei gegebener Schaufelbelastung — Écoulement spatial dans un ventilateur axial à aubes soumises à une charge donnée — <i>Нат, Г.</i> : Пространственные потоки в аксиальном вентиляторе с заданной нагрузкой на лопасти	161
<i>Nath, G.</i> : The Compressible Laminar Spanwise Boundary Layer on a Yawed Infinite Cylinder with Distributed Suction — Kompressible, laminare, longitudinale Grenzschicht um einen unendlichen, schräg angeblasenen Zylinder mit verteilter Absaugung — Couche limite compressible laminaire dirigée suivant les génératrices autour d'un cylindre infini à soufflage oblique, en présence d'aspiration distribuée — <i>Нат, Г.</i> : Сжимаемый ламинарный граничный слой с рассеянным отсосом, направленный по образующей бесконечно длинного косо обдуваемого цилиндра	187
<i>Beke, B.—Kiss, I.</i> : Theoretical Study of the Grinding Process — Theoretische Untersuchung des Mahlvorgangs — Examen théorique du processus de broyage — <i>Беке, Б. — Киш, И.</i> : Теоретическое исследование процесса помола	199
BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRE — ОБЗОР КНИГ	
<i>Fackelmeyer, A.</i> : Materialfluß, Planung u. Gestaltung. Von <i>E. Lechner</i>	209

A. Geleji

Forge Equipments, Rolling Mills and Accessories

In English — Approx. 640 pages — 17 X24 cm — Cloth

In treating problems in connection with machines for the plastic shaping of metals the author was led by the desire to work out calculation methods enabling the machine designers to determine the forces and power requirement in an easy and reliable way. Besides this the book deals also with the working of the machines, the principles according to which they must be designed, the determination of the principal dimensions from empiric data, the material of the individual parts etc.

Besides being meant primarily as a manual for students of high schools and technical universities the aim of this book is also to render good services to engineers in practice and designers of the machine industry.



Akadémiai Kiadó

**Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences
Budapest V. Alkotmány utca 21.**

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1966. X. 18. — Terjedelem: 18,75 (A/5) ív, 100 ábra, 4 melléklet

66.63018 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 3—20

F. KOLONITS:

Calculation of Gear Correction by Iteration

A general analysis of the iteration method is followed by a study of problems concerning convergence and estimation of errors. The results obtained are used to closely approximate the characteristics of Ganz—Botka toothing (r_{f1} , r_{f2} , q_2 , etc.) and to assay possibly apparent errors. A method has been elaborated for various cases depending on the site at which the Ganz—Botka toothing requires correction; at the ends of the path of contact, at the change points, at the end points of the possible tip relief.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 21—42

B. SZÓKE:

Design Transfer Device for Drawing Axonometric Images

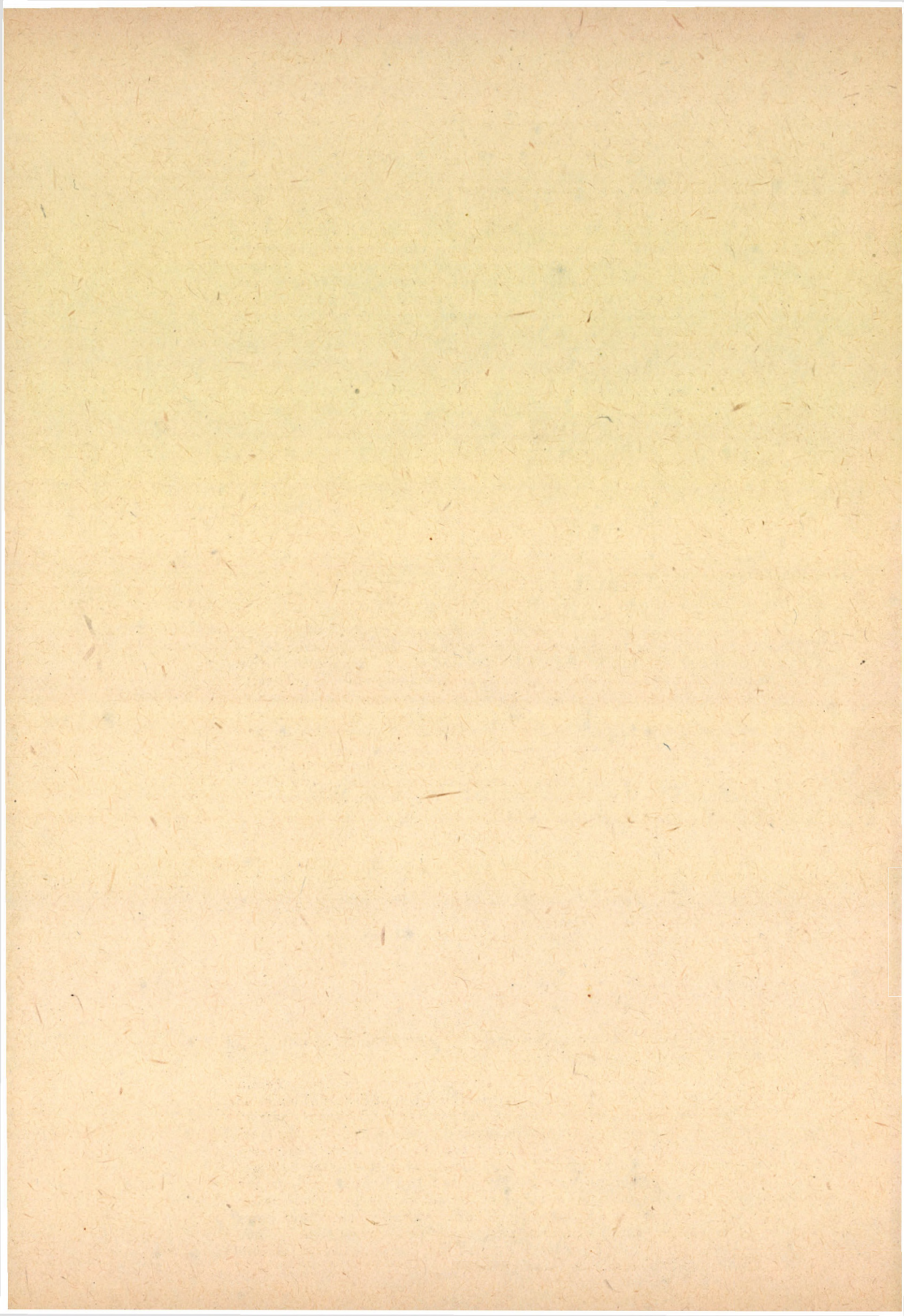
On the principles of three dimensional geometry a design transfer is presented, the signalling tip of which is moved along a horizontal section of the plan-view, with the level-rule moving on the respective level height of the side-view, and whereby the drawing tip always moves on the image-points corresponding to the axonometry chosen optionally. The constructive solution is more simple for the case when the projecting line is perpendicular to the line of intersection of the image plane with the horizontal plane. With an axonograph of this sort, that is most suitable to approach the effect of a photo, the number of theoretically probable variations is twice infinite, because the inclination angle to the horizontal of both the image plane and the projecting line is optional.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 43—54

I. BATTÁ:

Calculation of Water Hammer Phenomena by Automatic Sequence Controlled Digital Computers, Part II

This paper is the continuation of the article presented in *Acta Techn. Hung.* 51 (1965) 3—29 as Part I: Basic Principles, Equations and Formulae. The calculation is made on the basis of some parts of experiments carried out by the Department of Hydraulic Machines of the Technical University Budapest on a long pipeline. During the research work some main characteristic data of the pipeline were determined and a water hammer process caused by power failure was investigated. In the diagrams both the experimental results and the obtained numerical values — as calculated from the pipeline characteristics and the initial values of the water hammer — are plotted. In the present part the pipeline is described, some details of the experiments are made known, the course of the calculation is explained and the results are analyzed.



Activity of Zinc-sulfate in a Sulfuric Acid Solution of Zinc-sulfate

Experiments are described that were carried out in order to measure the EMF of galvanic cells of the type $Hg_xZn_y | H_2SO_4, ZnSO_4, H_2O | Hg_2SO_4 | Hg$, so as to observe and to determine the activity of a zinc-sulfate in its sulfuric acid solution, at varying concentrations and varying temperatures. The actual range of the sulfuric acid content varied between 0 — 250 g/l, that of the zinc between 0 — 175 g/l. The measuring temperature was 25, 35, 45 and 55 °C. It was stated, that the measured EMF of the cell decreases with the increase of the contents of both the sulfuric acid and the zinc, and also with increasing temperature. At the same time, the calculated activity of the zinc sulphate in the described electrolyte increases conversely with increasing contents of both sulfuric acid and zinc, whereas it specially increases with the decreasing temperature.

Investigation on Grindability of Limestone and Rock-salt Mixture in a Hardgrove Mill

Grinding and grindability experiments were carried out in a Hardgrove mill on mixture of limestone and rock-salt with mixture ratios of 1 : 3, 1 : 1, 3 : 1, with the view to examining the crushing mechanism of the mixture. In grinding homogeneous substances, it had been ascertained that, within a certain space of time an exponential correlation with negative exponent exists between the size modulus of the ground product determined in the RRB system and the milling time.

Reduction of Heat Loss of the Ingot Head

One way to reduce the heat loss of the ingot head is to modify the shape and the dimensions of the head, leaving its volume unchanged. The lateral heat loss of the ingot head being the highest it should be endeavoured to diminish the lining volume of the head-cap per unit-volume of the ingot head, as well as to reduce the inner mantle-surface of the head-cap. This can be achieved by reducing the conicity of the head. Besides an unchanged head-volume the larger upper open surface thus formed permits the heating of a larger head surface with simpler methods. The better heating possibility achieved together with the reduction of heat loss result in a very favourable ingot head shape and ingot head volume.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 107—130

L. TÓTH:

Theoretical and Experimental Investigation of Material Flow in Die-forging

The paper deals with the theoretical and the experimental investigation of material flow phenomena in die-forging, presenting an approximate, easily understandable method. The author investigates the deformation and the stresses in a disc with a pin and in a cylindrically symmetrical forged piece of H section. The experimental and theoretical relations agree fairly well and this proves the correctness of the discussed approximate method.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 131—138

A. KISFALUDY—P. TARDY:

The Microscopic Examination of Ferromagnetic Phases of Alloys

For detecting and determining the location of the ferromagnetic phases of austenitic steels the most suitable method is the separation of the phases on the basis of their magnetic permeability. For this reason the authors have developed the following procedure: the ground metallographic specimen is placed in a magnetic field and on its surface a suspension containing very fine ferromagnetic grains is placed, of the kind which has been used for a long time for the examination of domains. Under the influence of the magnetic field the particles stick to the ferromagnetic phases, therefore these phases appear dark when examined with the naked eye or with a microscope. The chief advantages of the method are speed, reliability and absence of any chemical reaction, and consequently the results are easily reproduced.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 139—160

P. BENYÓ:

Application of Wave Equations to Short Pipes, Part I

The wave equations forming the solution of the differential equations describing instationary flow in straight pipes of constant cross-section were applied to short pipes. With the determination of the conditions of reflection at the point of change of cross-section, the equations were applied to the pressure space of injection pumps. Thus, the pressure phenomena were described as high frequency pressure oscillation, according to reality. In Part I of the paper, the pressure phenomena were analyzed for three piston velocities produced by a damshaft, and could be described by a geometric series. Were the pressure determined on the basis of the continuity equation, the solution would be given by an inhomogeneous differential equation of the first order.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 161–186

G. NATH:

Three-dimensional Flow in Axial Fans with Prescribed Blade Loading

The inverse problem of the three-dimensional non-free-vortex flow through an axial fan without prerotator and straightener, has been solved by using the isolated aerofoil method, when the circulation increases with the radius, R_H/R_T is small and the number of blades is finite. The trailing vortices are considered as spirals extending to infinity. The fluid is considered as incompressible and non-viscous. The radial, tangential and axial components of the induced velocity due to the trailing vortices have been obtained numerically by using Electronic Computer, but the radial component has been neglected as it is small. Analytical expressions for various geometrical and aerodynamic properties have been obtained. One numerical example showing the application of the method is given.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 187–198

G. NATH:

The Compressible Laminar Spanwise Boundary Layer on a Yawed Infinite Cylinder with Distributed Suction

In the present paper, an approximate method using momentum equation has been presented to calculate the compressible laminar spanwise boundary layer on a yawed infinite cylinder with distributed suction when Prandtl number is unity, viscosity varies directly as the absolute temperature and the body is heat insulated. The characteristics of the chordwise layer is assumed as being known. It has been found that the skin friction coefficient increases with the suction parameter, but it decreases when the Reynolds number or Mach number increases.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 199–208

B. BEKE—I. KISS:

Theoretical Study of the Grinding Process

Authors recommend the application of new-type integro-differential equations for describing the development of the grinding process and changes of the surface area of product, resp. Examination of probability function of fracture hypotheses known from literature with the aid of the latter integro-differential equation — with respect to grinding kinetics — neither Griffith's hypothesis nor the assumption of logarithmic-normal distribution has led to even an approximate characterization of the actual process. On the other hand, a fairly adequate approximation can be attained by assuming proportionality between fracturing probability and particle size.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable
at the following addresses:

ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I.

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Raznoiznos
1 Tzar Assen
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88.

CZECHOSLOVAKIA

Artia
Ve Smeckách 30
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradska 46
Praha 2
Maderská Kultura
Václavské nám. 2.
Praha I
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tlace
Leningradska 14
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nørregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16.
Leipzig 70I
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zelkin Straße 62.
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough, Northamps.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP.
GPO Post Box 1374
Bombay I.

ITALY

Santo Vansia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmorata 45
Firenze

JAPAN

Nauka Ltd.
92, Ikebukuro O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND

RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18.
Bucuresti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Sto-kholm

USA

Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York, N. Y. 1003
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York, N. Y. 1003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Misica broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27.
Beograd

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 56

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1966

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

SATURATION CURRENT IN DIFFUSION-ACTION TRANSISTORS

I. HÁZMAN

INDUSTRIAL RESEARCH INSTITUTE FOR ELECTRONICS, BUDAPEST

[Manuscript received July 10, 1962]

The currents flowing through the transistor have been divided into the following components: hole current of the volumetric transistor, emitter and collector volumetric electron currents, hole current of the volumetric collector diode and current components resulting from surface recombination. The determination of these saturation currents by measurement has been traced down to the measurement of $I_{E_0}^*$, I_{E_0} and $I_{C_0}^*$. It has been stated that the mentioned three quantities are more characteristic of the processes in transistors than the saturation currents I_{EB_0} and I_{CB_0} , obtained from the simultaneous effect of all the components. The method adopted here gives a better insight into the physical processes and permits an exact quantitative determination of the current amplification factors and of the voltage dependence of the emitter current. The collector saturation current can be given as a function of voltage in good agreement with measurements — taking into consideration the avalanche, base punch-through and surface conductance.

I. Structure and model of the alloyed transistor

Diffusion transistors with a substantially homogeneous base resistivity are mostly prepared by alloying. Fig. 1 shows the characteristic cross-section of a typical alloyed transistor [1].

The two *p*-type electrodes, the emitter and collector, alloyed into the *n*-type base plate, form two *p*-*n* junctions with it. To provide an electric contact for the three crystal sections a three-terminal network is obtained, the electric characterisation of which can be accomplished e.g. by utilizing

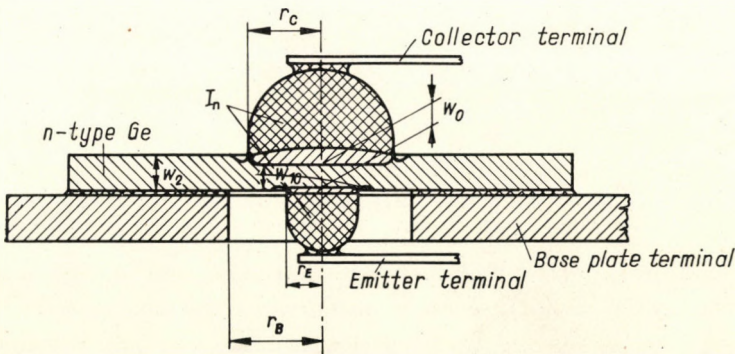


Fig. 1. Cross-section of an alloyed junction transistor

the physical relations of literature [2]. An exact quantitative description is impossible for the two following reasons: a strict consideration of boundary conditions determined by geometry and the exact solution of the differential equations present unsurmountable difficulties. Results obtained by a number of different approximations are suitably accurate to solve certain part prob-

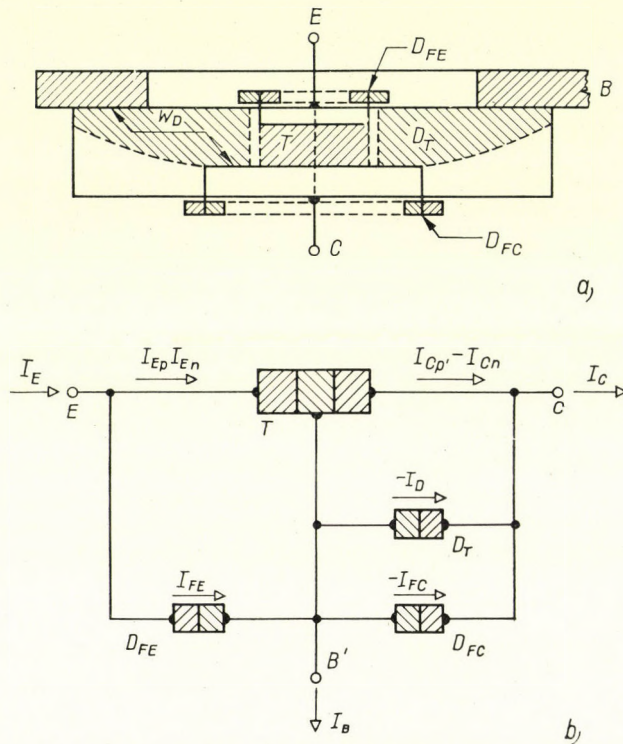


Fig. 2. Disassembling an alloyed transistor (a) and interconnecting the components (b)

lems; utilizing well-chosen models every characteristic of the real transistor can be determined in good agreement with measurements.

The geometrical modelling of the transistor is carried out according to Fig. 2. Emitter and collector junctions are considered parallel planes. The crystal section under the emitter surface is modelled by a one-dimensional transistor (T), the collector surface not covered by the emitter is taken into consideration as a (D_T) volumetric diode (its current appears accordingly in the collector-base circuit); in order to represent the surface recombination, surface diodes are connected between the emitter and base terminal (D_{FE}) and between the collector and base terminal (D_{FC}), respectively.

The same potential is assumed along the whole emitter surface at the edge of the emitter depletion layer nearer to the base; this surface can be considered electrically punctiform and is marked B' in circuits.

The electrical characteristics of the above transistor elements are given in the following in a form suitable for calculating the saturation currents.

II. Current components

To determine the saturation currents it is enough to start from relations valid for low-level carrier injection.

Both the emitter-base voltage $U_{EB'}$ and collector-base voltage $U_{CB'}$ control the hole current of the (T) volumetric transistor [3]:

$$I_{Ep} = I_{Eo}^{**} \left[\left(\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1 \right) \frac{1}{B} - \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) \right], \quad (1)$$

$$I_{Cp} = I_{Eo}^{**} \left[\left(\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1 \right) - \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) \frac{1}{B} \right] \quad (2)$$

where

$$I_{Eo}^{**} = A_E \frac{q D_p n_i^2}{N_d L_p \sinh w/L_p}, \quad (3)$$

$$B = 1/\cosh \frac{w}{L_p}, \quad (4)$$

$$U_T = \frac{kT}{q}.$$

Here are:

- D_p the diffusion constant for holes in the base region;
- L_p the diffusion length for holes in the base region;
- q electronic charge;
- k Boltzmann's constant;
- n_i intrinsic carrier density;
- N_d density for donors in the base;
- T absolute temperature;
- $w = w_0 - d_N$ effective base width approximately equal to the difference between the geometrical base width w_0 and the width of the collector depletion layer d_N ;
- A_E emitter surface.

The electron currents have a diode current nature:

$$I_{En} = I_{Eo}^{**} \frac{1}{\beta_{nE}} \left(\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1 \right), \quad (5)$$

$$-I_{Cn} = I_{Eo}^{**} \frac{1}{\beta_{nC}^*} \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) \quad (6)$$

where

$$\frac{1}{\beta_{nE}} = \frac{\gamma_B}{\gamma_E} \cdot \frac{\sinh w/L_p}{L_{nE}}, \quad (7a)$$

$$\frac{1}{\beta_{nC}^*} = \frac{\gamma_B}{\gamma_C} \cdot \frac{\sinh w/L_p}{L_{nC}} \quad (7b)$$

γ_B , γ_E and γ_C denote the conductivity of the base, emitter and collector layer resp., L_{nE} and L_{nC} stand for the diffusion lengths in the emitter and collector layer for the electrons.

The current through the surface diodes consists of two components [4, 5], namely the one due to the injection current density, proportionate to $\exp U/U_T$, and the other, approximately proportional to $\exp U/2U_T$, resulting from the carrier generation and recombination on the surface of the depletion layer. The recombination-generation current in the volumetric part of the depletion layers is included in the current of the surface diodes.

Accordingly the emitter current across the surface diode (D_{FE}) is given by

$$I_{EF} \cong I_{RGE0} \left(\exp \frac{U_{EB'}}{mU_T} - 1 \right) + \frac{I_{E0}^{**}}{\beta_{fE}} \left(\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1 \right) \quad (8)$$

where

$$I_{RGE0} \cong \frac{qn_i}{\tau_{p0} + \tau_{n0}} d_E A_E^* \quad (9)$$

equals the coefficient of the (surface and volumetric recombination-generation) current proportionate to the emitter depletion layer width d_E and the "surface" $A_E^* > A_E$; β_{fE} is inversely proportional to the recombination rate on the surface of crystal layers in quasi-equilibrium. It should be noted that in the first part of (8) the direct voltage dependence can only be approximately expressed in this simple form and the current component has a direct voltage dependence through I_{RGE0} (especially in the reverse-bias region).

Symbols in (9) still not explained are $1 < m < 2$, τ_{p0} and τ_{n0} are the hole and electron lifetime, resp., in a material with a strong donor or acceptor impurity [4].

The current of the collector surface diode (D_{FC}) can be given similarly to (8); but for simplicity's sake the recombination on the surface above the quasi-equilibrium crystal will be involved in the volumetric diode current [e.g. in w_D , see formula (12)]:

$$-I_{CF} \cong I_{RGC0} \left(\exp \frac{U_{CB'}}{mU_T} - 1 \right) \quad (10)$$

where

$$I_{RGC0} \cong \frac{qn_i}{\tau_{p0} + \tau_{n0}} d_C A_C^* \quad (11)$$

Here

d_C^* denotes the collector depletion layer width,
 $A_C^* > A_C$ a quantity greater than the collector junction surface.

The current through the volumetric collector diode (D_T) consists of the hole and emitter currents:

$$-I_{pD} = \frac{qD_p n_i^2}{N_d w_D} \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) (A_C - A_E), \quad (12)$$

$$-I_{nD} = \frac{qD_n n_i^2}{N_a L_{nC}} \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) (A_C - A_E). \quad (13)$$

The quantity w_D shown in Fig. 2a is the "effective" base width of the volumetric diode D_T , slightly influenced by the collector surface recombination. It is difficult by calculation to determine w_D accurately; it can be considered generally one of the measuring data.

To obtain the whole collector volumetric electron current, the electron current of the volumetric diode and that of the volumetric transistor given in (6) will be added:

$$-I_{nC} = -(I_{Cn} + I_{nD}) = \frac{I_{E0}^{**}}{\beta_{nC}} \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) \quad (14)$$

where

$$\beta_{nC} = \frac{A_E}{A_C} \beta_{nC}^* = \frac{A_E}{A_C} \frac{\gamma_C}{\gamma_B} \frac{L_{nC}}{L_p \sinh w/L_p} \quad (15)$$

III. Currents

The emitter and collector current of the transistor amount to:

$$\begin{cases} I_E = I_{Ep} + I_{En} + I_{EF}, \\ I_C = I_{Cp} - I_{nC} - I_{pD} - I_{CF}, \end{cases}$$

or, substituting relations (1), (2), (5), (8), (10), (12) and (14):

$$I_E = I_{E0}^{**} \left[\left(\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1 \right) \frac{1}{\bar{\alpha}_N} - \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) \right], \quad (16)$$

$$I_C = I_{E0}^{**} \left[\left(\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1 \right) - \left(\exp \frac{U_{CB'}}{U_T} - 1 \right) \frac{1}{\bar{\alpha}_I} \right] \quad (17)$$

where the normal and inverse DC current amplification factors $\bar{\alpha}_N$ and α_I have the following value:

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_N} = \cosh \frac{w}{L_p} + \frac{1}{\beta_{nE}} + \frac{1}{\beta_{fE}} + \frac{I_{RGE0}}{I_{E0}^{**}} \frac{\exp \frac{U_{EB'}}{mU_T} - 1}{\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\alpha}_I} = \cosh \frac{w}{L_p} + \frac{1}{\beta_{nC}} + \frac{A_C - A_E}{A_E} \frac{L_p \sinh w/L_p}{w_D} + \\ + \frac{I_{RGC0}}{I_{E0}^{**}} + \frac{\exp \frac{U_{EB'}}{mU_T} - 1}{\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} - 1}. \end{aligned} \quad (19)$$

(16) and (17) present the so-called symmetrical equations for diffusion transistors at low injection level. They can be considered the most important DC transistor equations in application and design [6], at the same time they define the current amplification factors (18) and (19).

IV. Saturation currents for transistor characterisation

1. Saturation emitter current with short-circuited emitter-base diode

Let us determine the emitter current with some hundred mV reverse voltage applied to the collector junction and short-circuited emitter-base diode (Fig. 3). Substituting $U_{CB} \ll -U_T$, $U_{EB} = 0$ into (16) we obtain:

$$I_E = I_{ER} = I_{E0}^{**}. \quad (20)$$

For an inversely biased transistor ($U_{CB} = 0$, $U_{EB} \ll -U_T$) similarly (17) yields (Fig. 4):

$$-I_C = I_{CR} = I_{E0}^{**}. \quad (21)$$

As it is obvious from relations (20) and (21), the two short-circuit currents are the same. This is in good agreement with measurements; this being ultimately the reason why the emitter surface is involved in expression (2) for the collector hole current of the volumetric transistor.

Considering equations (20) and (21) as well as Figs 3 and 4 it can be stated that the quantity I_{E0}^{**} defined for the volumetric transistor is directly measurable. For a — germanium alloyed AF — transistor having the geometrical data

$$\begin{aligned} w &= 50 \mu\text{m}, \\ A_E &= 4 \cdot 10^{-7} \text{m}^2 \end{aligned}$$

and the crystallographic parameters

$$\begin{aligned} N_d &= 5 \cdot 10^{20}/\text{m}^3; \\ n_i &= 2,4 \cdot 10^{19}/\text{m}^3; \\ D_p &= 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}; \\ w/L_p &\ll 1 \end{aligned}$$

has the numerical value

$$I_{E0}^{**} = \frac{qD_p n_i^2 A_E}{N_d L_p \sinh w/L_p} \cong \frac{qD_p n_i^2 A_E}{N_d w} \cong 6,5 \mu A.$$

2. Currents at reverse-biased junctions

A quantitative consideration of the diodes defined in the transistor is possible by a measurement carried out with both reverse-biased junctions (Fig. 5). Substituting $U_{CB} \ll -U_T$ and $U_{EB} \ll -U_T$ into (16) and (17):

$$-I_E = I_{E0}^* = I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_N} - 1 \right) = I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\beta_t} + \frac{1}{\beta_{nE}} + \frac{1}{\beta_{fE}} + \frac{I_{RGE0}}{I_{E0}^{**}} \right), \quad (22)$$

$$I_C = I_{C0}^* = I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_I} - 1 \right) = I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\beta_t} + \frac{1}{\beta_{nC}} + \frac{A_C - A_E}{A_E} \frac{w}{w_D} + \frac{I_{RGC0}}{I_{E0}^{**}} \right). \quad (23)$$

Contrary to the short-circuit I_{E0}^{**} which depends only through w on the applied reverse voltage, I_{E0}^* and I_{C0}^* flowing at reverse-biased junctions show a stronger voltage dependence: the quantities I_{RGo} are proportional to the depletion layer widths d_E and d_C .

3. Current amplification factors

All the other saturation currents can be expressed as a function of the three saturation currents, marked with asterisk. In practice preference is given to the measurable current amplification factors instead of the quantities marked with one asterisk. From (22) and (23) the current amplification factors are related to the defining quantities with asterisks by

$$\bar{\alpha}_N = \frac{I_{E0}^{**}}{I_{E0}^{**} + I_{E0}^*}, \quad (24)$$

$$\bar{\alpha}_I = \frac{I_{E0}^{**}}{I_{E0}^{**} + I_{C0}^*}. \quad (25)$$

4. Equivocal characterisation

The quantities I_{E0}^{**} , $\bar{\alpha}_N$ and $\bar{\alpha}_I$ in (16) and (17) unambiguously define the transistor at least in the range of current and voltage, for which the above relations are valid. They can be determined by three current measurements,

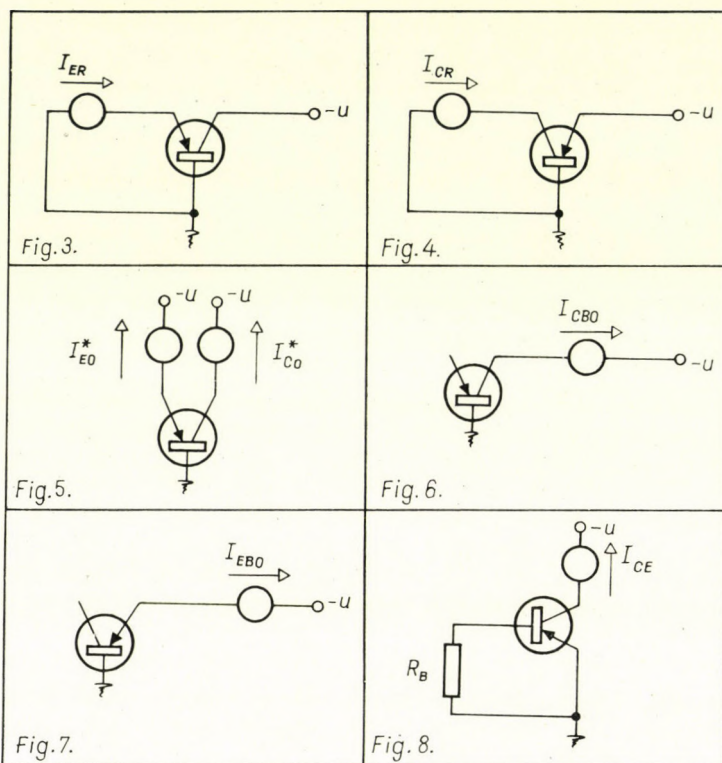


Fig. 3. Definition of emitter short-circuit current

Fig. 4. Definition of collector short-circuit current

Fig. 5. Definition of the saturation currents at reverse-biased junctions

Fig. 6. Definition of saturation current at zero emitter current

Fig. 7. Definition of saturation current at zero collector current

Fig. 8. Definition of saturation current at an external base resistance R_B

the results of which directly give I_{E0}^{**} ; the current amplification factors can be calculated on basis of (24) and (25).

The (characteristic numerical) value of the currents marked with one asterisk is obtainable from the numerical value of the current amplification factors. Substituting

$$\bar{\alpha}_N = 0,97$$

and

$$\bar{\alpha}_I = 0,75$$

into (24) and (25) gives

$$\begin{aligned} I_{E0}^* &= 0,21 \mu A, \\ I_{C0}^* &= 2,15 \mu A. \end{aligned}$$

The volumetric diodes have a great influence on I_{C0}^* and $\bar{\alpha}_I$. The prevalent quantity in (23) is w/w_D , since in first approximation

$$I_{C0}^* \cong I_{E0}^{**} \frac{A_C - A_E}{A_E} \frac{w}{w_D}. \quad (23a)$$

Utilizing (23a) and (25) w_D can be calculated from the measured values:

$$\frac{w_D}{w} \cong \frac{I_{E0}^{**}}{I_{C0}^*} \frac{A_E}{A_C - A_E} = \frac{A_E}{A_C - A_E} \frac{\bar{\alpha}_I}{1 - \bar{\alpha}_I}. \quad (26)$$

If $A_C = 2A_E$, $\bar{\alpha}_I = 0,75$ the following approximative equality can be obtained:

$$w_D \cong 3w.$$

V. Saturation currents

In order to determine the saturation current at zero emitter current U_{EB}^{\prime} is eliminated from (16) and (17):

$$I_C = \bar{\alpha}_N I_E - I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_I} - \bar{\alpha}_N \right) \left(\exp \frac{U_{CB}^{\prime}}{U_T} - 1 \right). \quad (27)$$

Applying a reverse voltage to the collector junction at zero emitter current an open-circuit saturation current

$$I_{CB0} = I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_I} - \bar{\alpha}_N \right) \quad (28)$$

will flow (Fig. 6).

For the accurate evaluation of (28) it is necessary to know U_{EB} , as $\bar{\alpha}_N$ depends on this. In asymmetrical germanium transistors $\bar{\alpha}_N \cong 1$, thus I_{CB0} is but slightly sensitive to its exact numerical value. Accordingly the approximation

$$I_{CB0} \cong I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_I} - 1 \right) = I_{C0}^*$$

is acceptable, though in reality $I_{CB0} > I_{C0}^*$.

In analogy for an inversely biased transistor (Fig. 7)

$$I_{EB0} = I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_N} - \bar{\alpha}_I \right) \cong I_{E0}^{**} (1 - \bar{\alpha}_I) = I_{C0}^* \frac{I_{E0}^{**}}{I_{E0}^{**} + I_{C0}^*}. \quad (29)$$

According to the approximation formula I_{EB0} is smaller than I_{C0}^* . With the exact value of $\bar{\alpha}_N$ a similar relation is obtained if $I_{E0}^* \ll I_{C0}^*$, thus $I_{EB0} < I_{C0}^*$.

1. Saturation current as a function of the external base resistance

To determine the saturation current denoted by I_{CE} (Fig. 8) equations (16) and (17) are used anew with the substitution $U_{CB'} \ll -U_T$; according to Fig. 8

$$U_{EB'} = -R_B (I_E - I_C), \quad (30)$$

where R_B is the resultant of external base resistance, and the base spreading resistance.

To obtain an explicit result the approximation

$$\exp \frac{U_{EB'}}{U_T} \cong 1 + \frac{U_{EB}}{U_T}$$

is utilized; thus

$$I_{CE} = \frac{I_{E0}^{**}}{\bar{\alpha}_I} \frac{1 - \bar{\alpha}_N \cdot \bar{\alpha}_I + \bar{\alpha}_N r_0 / R_B}{1 - \bar{\alpha}_N + \bar{\alpha}_N r_0 / R_B} \quad (31)$$

is obtained [7], where

$$r_0 = U_T / I_{E0}^{**}.$$

$R_B = 0$ gives:

$$I_{CER} = \frac{I_{E0}^{**}}{\bar{\alpha}_I}, \quad (31a)$$

while for infinite base resistance

$$I_{CE0} = I_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_I} - \bar{\alpha}_N \right) \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_N} = I_{CB0} \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_N}. \quad (31b)$$

Between the two limits the current changes monotonously — see e.g. literature [7].

Using (31a) it can be proved directly that the quotient of the normal and inverse DC current amplification factors equals the ratio of the collector current at short-circuited emitter-base diode and emitter current at short-circuited collector-base diode:

$$\frac{\bar{\alpha}_N}{\bar{\alpha}_I} = \frac{I_{CER}}{I_{ECR}}. \quad (32)$$

Similarly e.g. (22) and (23) give

$$\frac{\bar{\beta}_N}{\bar{\beta}_I} = \frac{I_{C0}^*}{I_{E0}^*} \quad (33)$$

for the quotient of the common emitter current amplification factors defined by the relation

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

VI. Voltage dependence of saturation currents

1. Influence of avalanche breakdown

Applying a suitable large reverse voltage to the collector the direct voltage dependence of the currents through the exponential factor is negligible.

Studying the voltage dependence of currents, first the phenomena connected with the avalanche breakdown in the collector junction should be taken into consideration. The aim is not the analysis of physical factors involved in breakdown — a sufficient number of references are available for that — but to consider the influence of the circuit configuration on the avalanche breakdown. The basis of this discussion is the theoretically concludable [8] and measurable [9] expression

$$M = \frac{1}{1 - (U_{CB'}/U_L)^n} \quad (34)$$

describing the avalanche (34) process, resulting in a multiplication M of the current amplification and collector current when the carriers cross the collector depletion layer. In formula (34), which holds for not exceedingly high multiplications, U_L denotes the so-called avalanche breakdown voltage [10]. For germanium transistors with n -type base the approximate value of U_L amounts to [11]

$$U_L \cong 66 \left(\frac{1}{\gamma_B} \right)^{0.65} \quad (35)$$

where γ_B stands for the conductivity of the base layer in mho cm^{-1} units. U_L is obtained in volts; for pnp germanium transistors $n = 3$.

2. The case of a constant emitter current

Taking into account the avalanche breakdown the collector current is given by

$$I_C = M (\bar{\alpha}_N I_E + I_{CB0}). \quad (36)$$

Considering only the voltage dependence appearing through the multiplication factor, i. e. assuming

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_N(U_{CB'}) &= \text{const.}, \\ I_{CB0}(U_{CB'}) &= \text{const.} \end{aligned}$$

it can be stated on basis of (36) that at constant emitter current $I_C \sim M$.

3. The case of a constant base current

Multiplying the collector current according to (17) by M and utilizing (16) the relation between collector and base current is obtained:

$$I_C = M \frac{\bar{\alpha}_N I_B + I_{CB0}}{1 - M \cdot \bar{\alpha}_N}. \quad (37)$$

As the breakdown voltage U_L , resulting in I_C is defined by the equation

$$1 = M(U_L) \bar{\alpha}_N$$

making use of (34), we obtain

$$U_{L'} = U_L \sqrt[n]{1 - \bar{\alpha}_N}. \quad (38)$$

The relationship collector current—collector voltage measurable at constant base current exhibits zero differential resistance for $U_{CB}' = U_L$. The avalanche breakdown occurs at a considerably lower voltage than at constant emitter current. While—according to the previous paragraph—the collector current—collector voltage characteristics are influenced near the avalanche voltage mainly by the multiplication factor (34), the characteristics for constant base current are affected by the current dependence of the current amplification factor $\bar{\alpha}_N$ as well. The characteristics, belonging to $I_B = 0$, determined with the assumption $\bar{\alpha}_N = \text{const.}$ are typically changed if we consider the variation of $\bar{\alpha}_N$ with the collector voltage. For transistors with not negligible I_{RGE0} , $\bar{\alpha}_N$ decreases with a decrease of the emitter current.

As it is easy to calculate from (37) at a constant collector voltage and lower current, the reduced $\bar{\alpha}_N$ results in smaller multiplication. Thus, the presence of the emitter recombination-generation current causes a greater "breakdown" voltage at smaller multiplication and produces the characteristics, shown in Fig. 9, properly as to nature, which is general in transistors with an incorrectly treated surface.

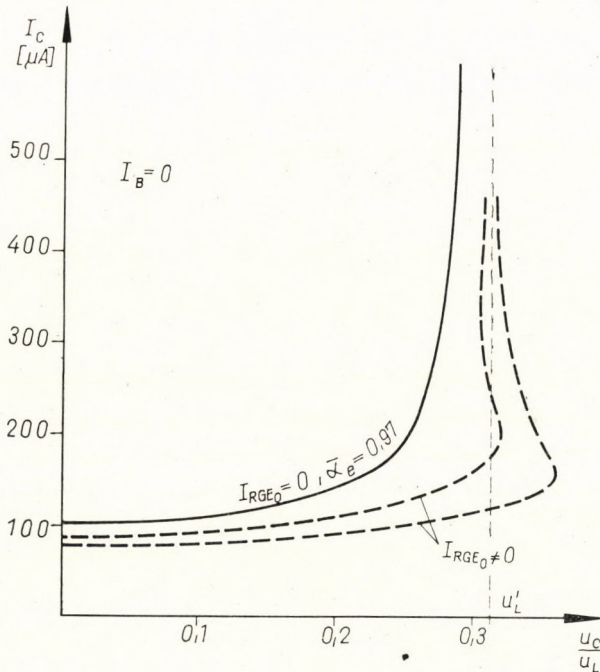


Fig. 9. Voltage dependence of the saturation current at zero base current

4. Breakdown voltage with external base resistance

From the common emitter saturation current characteristics determined at an arbitrary external base resistance taking into consideration the avalanche breakdown, the avalanche breakdown voltage can be stated as being a function of the external base resistance. The circuit is shown in Fig. 8. The equations obtained for saturation current analysis on grounds of this figure are valid, only the right-hand side of the expression for the collector current must be multiplied by M :

$$I_C = MI_{E0}^{**} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_I} - 1 + \exp \frac{U_{EB'}}{U_T} \right). \quad (39)$$

To obtain an accurate result we cannot expand the exponential function neglecting the powers higher than 1, while it is impossible to solve the equation system in question, in an explicit form.

The saturation current characteristics are obtainable in the following way: first M is to be expressed as a function of $U_{EB'}$:

$$M = \frac{U_{EB'}/R_B + I_{E0}^{**} \left(1 - 1/\bar{\alpha}_N + \frac{1}{\bar{\alpha}_N} \exp \frac{U_{EB'}}{U_T} \right)}{I_{E0}^{**} \left(1/\bar{\alpha}_I - 1 + \exp \frac{U_{EB'}}{U_T} \right)}. \quad (40)$$

On the other hand the collector current is given by

$$I_C = \frac{U_{EB'}}{R_B} + I_{E0}^{**} \left(1 - 1/\bar{\alpha}_N + \frac{1}{\bar{\alpha}_N} \exp \frac{U_{EB'}}{U_T} \right). \quad (41)$$

Substituting different emitter voltages, equations (40) and (41) yield correlated M and I_C values, from which $U_{CE} \cong U_{CB'}$ and I_C can be calculated with the aid of (34).

Figure 10 shows the characteristics obtained in the previously explained way for a typical transistor. In Fig. 11 the breakdown voltage can be seen as a function of R_B , i.e. the resultant of the base spreading resistance and the external base resistance. As demonstrated by Fig. 10, the characteristics for finite external base resistance have a section of negative differential resistance, a fact utilized in some circuits.

5. Base width modulation

By increasing the collector voltage the effective base width decreases according to the well-known expression

$$w = w_0 - d_N = w_0 - c \sqrt{U_{CB'}}. \quad (42)$$

The value of w , present in the previous equations, should be considered accordingly as a function of the collector voltage.

The base of real transistors is generally inhomogeneous: the emitter and collector electrodes are a little convex with the result that $(w_0)_{\min}$ is smaller than $(w_0)_{av}$. The punch-through of the base takes place when the effective base width vanishes at a certain cross-section of the base. In this case punch-through occurs when $d_N = (w_0)_{\min}$. At the same time w_{av} which is present in the previous relations does not change considerably till punch-through.

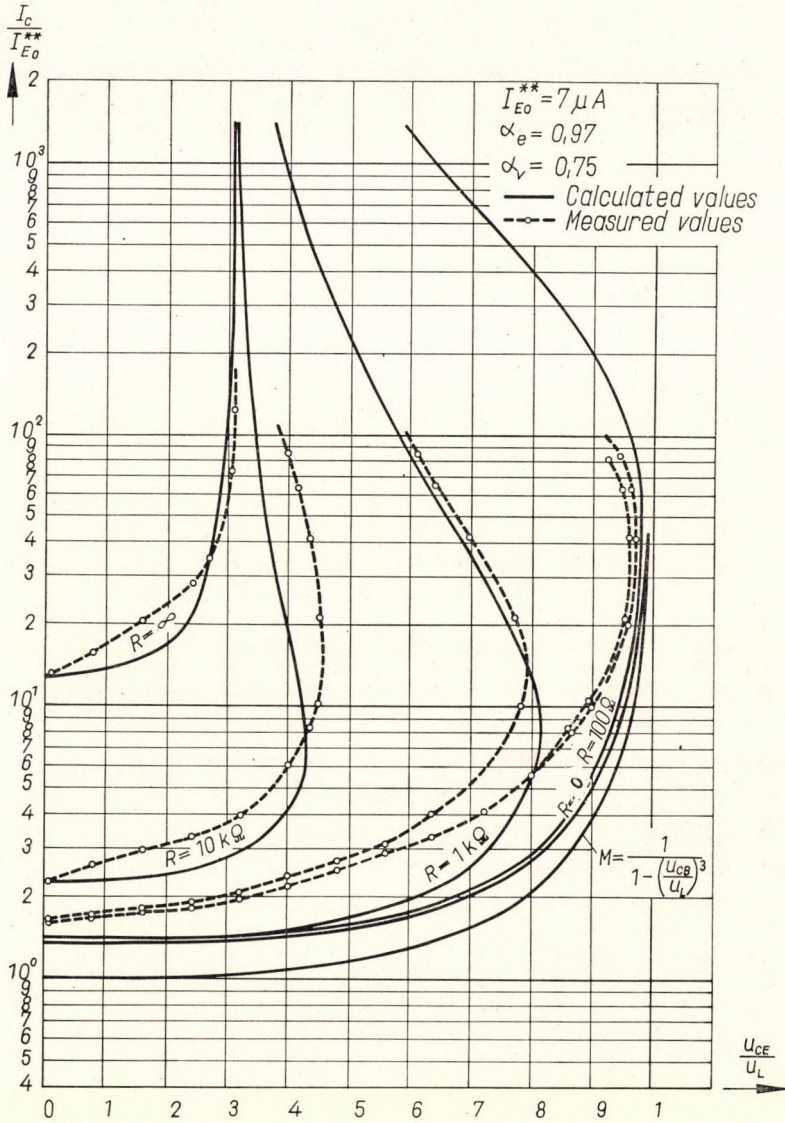


Fig. 10. Voltage dependence of the saturation currents with the base resistance as parameter

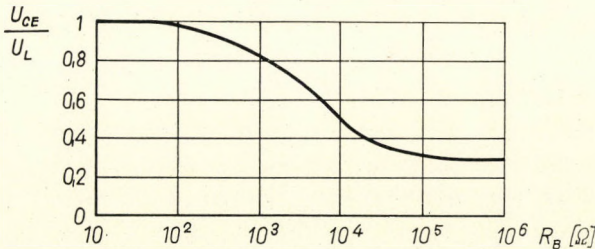


Fig. 11. Maximum collector voltage as a function of the base resistance

As a first approximation it can be assumed that the change in base width does not alter the previous expressions and, thus, they remain formally valid as long as the collector voltage falls short of the punch-through voltage

$$U_{Cpt} = \left(\frac{(w_o)_{\min}}{c} \right)^2$$

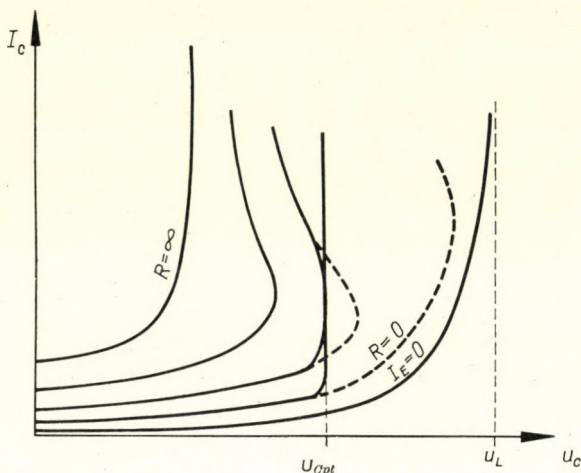


Fig. 12. Voltage dependence of the saturation currents in case of $U_{Cpt} < U_L$

calculated on the basis of (42). The saturation current characteristics of Fig. 10 — with the exception of that for $I_E = 0$ — “become dented” at U_{Cpt} as is shown in Fig. 12. At the same time essentially in all the transistors with a punch-through voltage exceeding the avalanche voltage there is hardly any perceivable change in the residual current characteristics when the base width varies.

6. The effect of surface leakage

Due to base width modulation and the — mainly surface — leakage between collector and base the measured characteristics differ somewhat from those in Fig. 10.

If this leakage is considered, as shown in Fig. 13, as an (AC or DC) conductance σ connected between base and collector, the effective conductivity characterizing the additional voltage dependence of the collector current at nonzero external base resistance is:

$$\sigma_{\text{eff}} = \left| \frac{dI_C}{dU_{CB'}} \right|,$$

which can be given for not too high values of $U_{CB'}$ ($M \cong 1$)

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma \left(1 + \frac{\bar{\alpha}_N}{1 - \bar{\alpha}_N + r_o/R_E} \right). \quad (43)$$

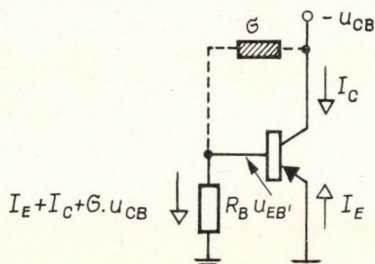


Fig. 13. Effect of the collector-base conductance

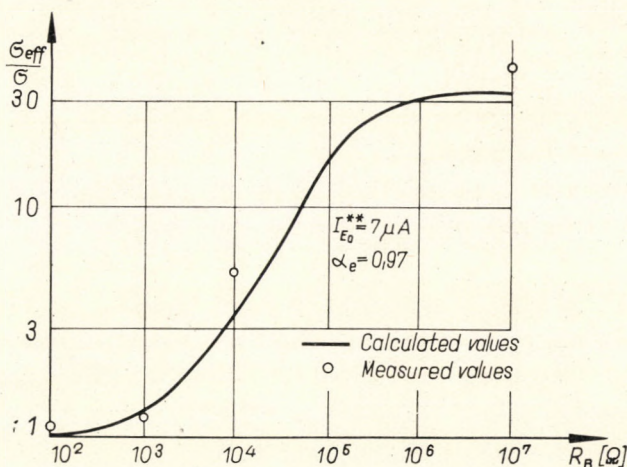


Fig. 14. The effective conductivity involved in the saturation current characteristics as a function of the base resistance

In Fig. 14 relation (43) is plotted against R_B . The value of σ can be obtained — generally by measurement — from the characteristics $I_{CER} - U_{CB}$.

The effect of leakage becomes negligible in the range of the avalanche multiplication.

VII. The results of measurements

Table I shows the results of the measurements performed on two transistors closely approaching the data of the transistor chosen as typical and showing similar behaviour.

Table I

The DC characteristics of two transistors measured at temperature of
27 °C = 300 °K

Characteristic		T 1		T 2	
symbol	unity	calculated	measured	calculated	measured
f_T	MHz	—	0,63	—	0,63
w	10^{-6} m	47,5	—	47,5	—
U_L	V	—	148	—	132
N_d	10^{23} /m ³	4,65	—	5,5	—
I_{E0}^{**}	10^{-6} A	7,1	7,5	6,0	6,8
I_{E0}^*	10^{-6} A	—	0,25	—	0,28
I_{C0}^*	10^{-6} A	—	2,1	—	2,4
$\bar{\alpha}_N$		30	—	24	—
$\bar{\alpha}_I$		3,57	—	2,82	—
I_{ECR}	10^{-6} A	7,75	7,5	7,1	7,1
I_{CER}	10^{-6} A	9,6	9,5	9,2	9,5
I_{EB0}	10^{-6} A	1,87	1,9	2,05	2,0
I_{CB0}	10^{-6} A	2,3	2,4	2,7	2,7
I_{EC0}	10^{-6} A	8,5	8,4	7,8	7,9
I_{CE0}	10^{-6} A	74*	105	67*	120
$\bar{\alpha}_N (I_E = I_{CE0})$		44,5	—	43,5	—

* Values obtained by incorrect calculation.

The determination of the DC characteristics is started by defining I_{E0}^{**}

$$I_{E0}^{**} \cong A_E \frac{qD_p n_i^2}{wN_d}.$$

The values of w and N_d are needed for this.

The base width w is determined from measuring f_T , on grounds of the relation

$$2\pi f_T = \frac{2D_p}{w^2}.$$

The base impurity N_d is obtained by measuring the avalanche breakdown voltage and from the quantitative data in [11].

After determining the above quantities I_{E0}^{**} can be calculated. There is a 6 ÷ 13 per cent difference between the measured and calculated values, which means a good agreement (considering the indetermination of e.g. the emitter surface A_E , etc.).

Table II

Relative values to $27^\circ\text{C} = 300^\circ\text{K}$

	T 1		T 2	
	calculated	measured	calculated	measured
$\frac{I_{E0}^* (75^\circ\text{C})}{I_{E0}^* (27^\circ\text{C})}$	60	58	60	56
$\frac{I_{E0} (75^\circ\text{C})}{I_{E0} (27^\circ\text{C})}$	—	19	—	20
$\frac{I_{C0} (75^\circ\text{C})}{I_{C0} (27^\circ\text{C})}$	—	35	—	37,4
$\frac{I_{EB0} (75^\circ\text{C})}{I_{EB0} (27^\circ\text{C})}$	—	36	—	38
$\frac{I_{CB0} (75^\circ\text{C})}{I_{CB0} (27^\circ\text{C})}$	—	33,5	—	36
$\frac{I_{ECR} (75^\circ\text{C})}{I_{ECR} (27^\circ\text{C})}$	—	56	—	54
$\frac{I_{CER} (75^\circ\text{C})}{I_{CER} (27^\circ\text{C})}$	—	53	—	50
$\frac{I_{CE0} (75^\circ\text{C})}{I_{CE0} (27^\circ\text{C})}$	—	63	—	56
$\frac{I_{EC0} (75^\circ\text{C})}{I_{EC0} (27^\circ\text{C})}$	—	55	—	54

The quantities with one asterisk: the saturation currents I_{E0}^* and I_{C0}^* are obtained by measurement. The AC current amplification factors for $U_{EB'} \ll -U_T$ and $U_{CB'} \ll -U_T$ can be computed from the first equalities of (22) and (23). With these current amplification factors the open-circuit saturation currents I_{CB0} , I_{EB0} and I_{EC0} , as well as the short-circuited saturation currents can be obtained in good agreement with measurements. Calculating I_{CE0} , however, the current dependence of the current amplification factor must be taken into consideration, as a considerable forward bias appears across the emitter diode at this measurement. Table I contains — following the above values — the formally calculated I_{CE0} saturation current, which does not agree with measured values. From the measured value of I_{CE0} we have calculated the DC current amplification factor $\bar{\alpha}_N$ valid for the emitter current $I_E = I_{CE0}$.

Further on the temperature dependence of saturation currents has been studied. To accomplish this the currents in Table I were measured at temperatures of $75\text{ }^{\circ}\text{C} = 348\text{ }^{\circ}\text{K}$. The results, i.e. the values relative to $27\text{ }^{\circ}\text{C} = 300\text{ }^{\circ}\text{K}$ are contained in Table II.

As the measurements proved, the temperature dependence of I_{E0}^{**} can be calculated exactly. The saturation current I_{E0}^* , consisting of the volumetric and surface recombination component of I_{E0}^{**} and I_{RGE0} , shows a remarkably smaller multiplication — an obvious result of the fact that the recombination component decreases with growing temperature and I_{RGE0} changes with n_i , not with n_i^2 . As the saturation current of the volumetric diode is considerable in I_{C0}^* , its increase approaches that of I_{E0}^{**} better, substantially proportional to n_i^2 . The saturation currents I_{EB0} and I_{CB0} are essentially proportional to I_{C0}^* , while the others to I_{E0}^{**} .

ACKNOWLEDGEMENTS

The author is indebted to the leaders of the *Industrial Research Institute for Electronics* for rendering the measurements connected with the present study possible.

REFERENCES

1. Telefunken — A tranzisztor (Telefunken — The Transistor; Hungarian translation). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964.
2. RITTNER, E.: Extension of the theory of the junction transistor. *Phys. Rev.* **94** (1954), 1161—1171.
3. SHOCKLEY, W.: Theory of p—n junction in semiconductors and p—n junction transistors. *Bell STJ.* **23** (1949), 436—489.
4. SAH, C.—NOYCE, R.—SHOCKLEY, W.: Carrier generation and recombination in p—n junctions and p—n junction characteristics. *Proc. IRE* **45** (1957), 1227—1243.
5. SAH, C.: Effect of surface recombination and channel on p—n junction and transistor characteristics. *IRE Trans. on ED.* **9** (1962), 94—108.
6. EBERS, J.—MOLL, J.: Large signal behavior of junction transistors. *Proc. IRE* **42** (1954), 1761—1772.
7. HÁZMAN, I.: Application of Semiconductor Devices I. Lecture note for postgraduate course on semiconductor technology; Technical University, Budapest 1964 (in Hungarian).
8. ARMSTRONG, H.: On the avalanche multiplication in semiconductor devices. *J. of El. and Control* (First Series) **5** (1958), 97—104.
9. MCKAY, K.—MCAFEE, K.: Electron multiplication in silicon and germanium. *Phys. Rev.* **91** (1953), 1079—1084.
10. CHYNOWETH, A.: Ionization rates for electrons and holes in silicon. *Phys. Rev.* **109** (1958), 1537.
11. TOKUYAMA, T.: Zener breakdown in alloyed germanium p⁺—n junctions. *Solid-State El.* **5** (1958), 161—169.

RESTSTROM VON DIFFUSIONSTRANSISTOREN

I. HÁZMAN

ZUSAMMENFASSUNG

Die in den Transistoren fließenden Ströme wurden wie folgt aufgegliedert: der im Volumentransistor fließende Lochstrom, der emitter- und kollektorseitige Raumelektronenstrom, der Lochstrom der kollektorseitigen Volumendiode und die aus der Oberflächenrekombination sich ergebende Stromkomponente. Die Messung dieser Rückwärtsströme wurde auf die Messung von I_{E0}^{**} , sowie von I_{E0}^* und I_{C0}^* zurückgeführt. Wie es sich herausstellte, charakterisieren diese drei Größen besser die Vorgänge in den Transistoren als die Restströme I_{EB0} und I_{CB0} , da sich nämlich die letzteren aus dem Zusammenwirken sämtlicher Faktoren ergeben. Die vom Ver-nasser angewendete Charakterisierung ermöglicht einen weit besseren Einblick in die physikalischen Vorgänge. Die genaue quantitative Bestimmung der Stromverstärkungsfaktoren und der Spannungsabhängigkeit des Emitterstromes wird ermöglicht. Der Verlauf des Reststromes im Kollektorkreis in Abhängigkeit von der Spannung, unter Berücksichtigung des Lawineneffekts, des Durchbruchs der Basisschicht und der Oberflächenüberleitung kann in guter Übereinstimmung mit den Versuchen angegeben werden.

LE COURANT RÉSIDUEL DES TRANSISTORS A DIFFUSION

I. HÁZMAN

RÉSUMÉ

Les courants passant par les transistors ont été décomposés en courant de trou du transistor volumétrique, en courant électronique volumétrique côté émetteur et côté collecteur, en courant de trou de la diode volumétrique du côté collecteur et en composante du courant provenant de la recombinaison à la surface. La mesure de ces courants inverses a été ramenée à la mesure de I_{E0} , et de I_{R0} et I_{C0} . Il s'est avéré que ces trois grandeurs caractérisent mieux les phénomènes se déroulant dans les transistors que les courants résiduels I_{EB0} et I_{CB0} , étant donné que ces derniers résultent de l'action combinée de tous les facteurs. La caractérisation utilisée par l'auteur permet une vue bien plus claire des phénomènes physiques. Il devient possible de déterminer exactement les coefficients d'amplification de courant et le courant de l'émetteur en fonction de la tension. Le courant résiduel dans le circuit du collecteur peut être déterminé en fonction de la tension, en bon accord avec les mesures, compte tenu de l'effet d'avalanche, de la perforation de la base et des fuites de surface.

ОСТАТОЧНЫЙ ТОК ДИФФУЗИОННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ТРАНЗИСТОРОВ

И. ХАЗМАН

РЕЗЮМЕ

Токи, текущие по транзистору, разложены на объемный дырочный ток транзистора, электронный объемный ток эмиттера и коллектора, дырочный объемный ток коллектора и токовую слагающую от поверхностной рекомбинации. Измерение этих обратных токов сведено к измерению I_{E0}^{**} , а также I_{E0}^* и I_{C0}^* . Как это выяснилось, эти три количества лучше характеризуют протекающие в транзисторах процессы, чем остаточные токи I_{EB0} и I_{CB0} , как известно эти последние получаются от воздействия сложения всех факторов. Примененная нами характеристика дает возможность значительно лучше ознакомиться с протекающими физическими процессами. Становится возможным определить коэффициенты усиления по току, количественно точно определить зависимости по напряжению тока эмиттера. При удовлетворительном совпадении с данными измерений можно определить изменение остаточного тока коллектора в функции напряжения, учитывая лавинный эффект, прокол базового слоя и поверхностный ток утечки.

STRENGTH CALCULATION OF THE CAGE-SYSTEM IN SQUIRREL CAGE INDUCTION MOTORS

I. THE SPECIAL DESIGN WITH FREE RUNNING RINGS

I. HUSZÁR and I. KOVÁCS
GANZ ELECTRIC WORKS, BUDAPEST

[Manuscript received May 21, 1964]

The rod-conductors of the cage-system in an induction motor are short-circuited by means of rings on the face-sides. The mechanical stress conditions of the cage system are predetermined by prestress due to assemblage, by centrifugal forces due to rotation, and by thermal dilatation due to heating-up during running. The methods to calculate the forces and the respective stresses at various states are explained.

I. Introduction

For improving start-conditions of short-circuited induction motors, it is usual to apply a current pressing type rotor, or the so-called double-cage system. When choosing the first principle, the rotor in each slot bears only

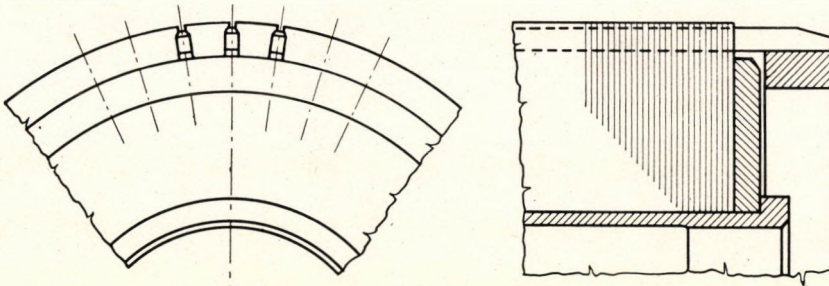


Fig. 1. Single-cage rotor with free-running ring

one conductor, where — at starting — the current is so to say pressed towards the peripheral surface of the thin rods (Fig. 1). This represents the same effect as that of an increasing wire resistance characterized by gradual decreases while the number of rotations increases, and ending at zero when the rated running speed is reached. Whereas in a double-cage rotor, the same effect is clearly divided on (Fig. 2). At the start the outer cage bears the greater part of charge, and with increasing speed the inner rods become gradually more charged.

On small size motors it is usual to build the whole cage (rings and conductors) as a unit of aluminium casting. On larger size motors the cage-material might be copper, brass, bronze, aluminiumbronze, and the rods pushed into the rotor are hard-soldered onto the rings [1]. By soldering an intensive local heating-up is caused, from where high stresses, perhaps inadmissible plastic deformations are involved that could even lead to a break.

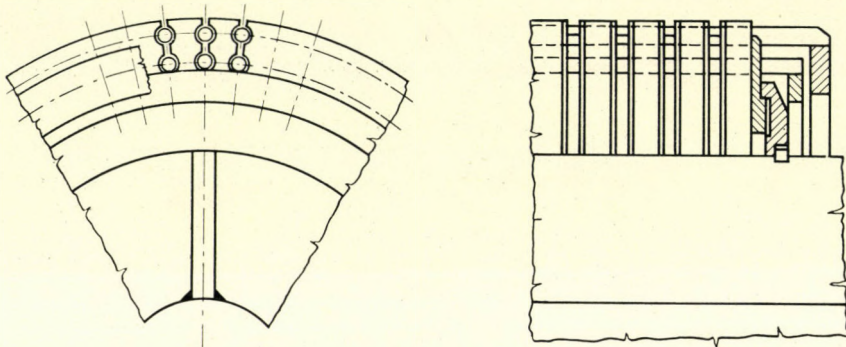


Fig. 2. Double-cage rotor with free running ring

Therefore, and with regard to some service conditions to be treated later on, the shorting rings are located — on larger motors — at a distance of some centimeters from the laminated iron body by which the whole construction becomes more liable to undergo deformations (Fig. 1 and Fig. 2). Additional elasticity can be reached when the rods are bent out of the generating straight line.

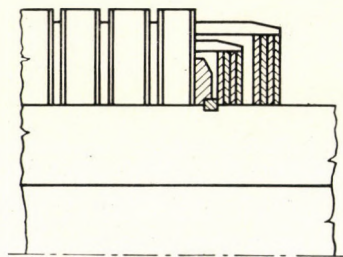


Fig. 3. Double-cage rotor with a ring located on the shaft-ribs

In rotors running at a slow circumferential speed, shorting rings are freely located, fastened only to the rods. For rotors running at a faster circumferential speed, the rings are fitted onto the shaft (in general: onto ribs; Fig. 3), and sometimes the strength is increased by rings separated into parts.

In what follows, the calculation of the mechanical strength of the free-running shorting ring and of the rod-system is presented.

II. The play of forces

The first problem to be solved is the play of forces. In Fig. 4 the connection of rod and ring is shown. The system of rods and ring being statically undetermined, we start from the supposition that the bars and the ring move or turn together in every case. In Fig. 5a, the two elementary parts are shown in separated position, in Fig. 5b, these two elements are not separated.

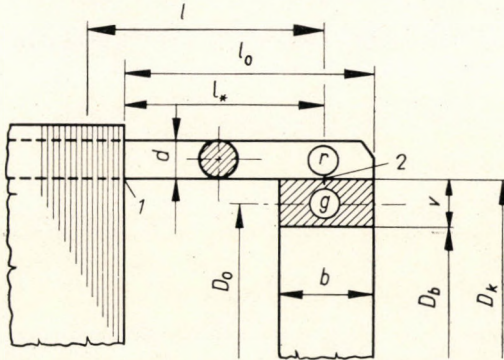


Fig. 4. Cage-system

The force system at the point of contact consists of a moment (M) and a force (Q); these and also their positive direction are indicated on the Figure.

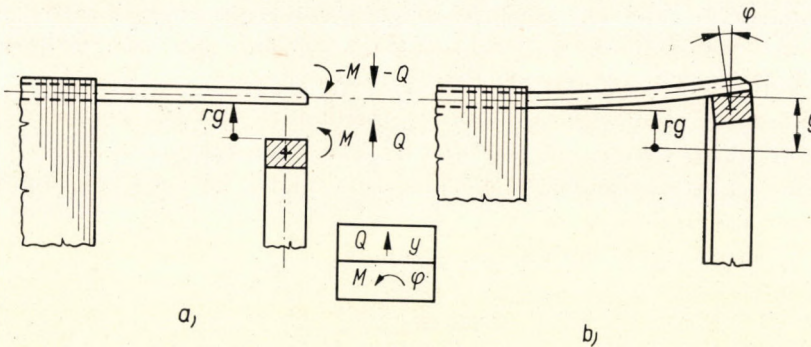


Fig. 5. Play of forces

It is advisable to determine the play of forces separately for the machine in different service conditions. To this end, first the condition of the assembled parts will be explained. As a second step, conditions during rotation will be examined; finally, heat-effects at start will be dealt with. With these results, we shall be able to investigate the more critical conditions during operation.

1. Assemblage (subscript o)

When assembling, i.e. when the shorting ring is soldered onto the rods, a force system of the ranges M_0 and Q_0 is already present, because there is, on the point of contact, either a *play or an overlap* between the outer diameter of the ready ring and the diameter of the cylindrical imaginary surface to which the rods would fit [2]. The position according to Fig. 5a is characterized by the play y_{rg} ; this value is given as the result of manufacture (when $y_{rg} < 0$, it represents an overlap).

The linear displacement of each element is the same (see Fig. 5b)

$$y_{r0} = y_{g0}$$

and in an extended form:

$$y_{rg} - c_{rQ} Q_0 - c_{rM} M_0 = c_{gQ} Q_0 + c_{gM} M_0.$$

In the same way, for angular displacements

$$\varphi_{r0} = \varphi_{g0}$$

and in an extended form:

$$-\gamma_{rQ} Q_0 - \gamma_{rM} M_0 = \gamma_{gQ} Q_0 + \gamma_{gM} M_0.$$

The members of the equation are quantities of deformation caused by the moment M_0 and by the force Q_0 . The subscript r refers to the rod, the subscript g refers to the ring; the constants c and γ denote the spring-rate (c for linear, γ for angular elasticity).

From the above established two equations Q_0 and M_0 can be calculated, when the spring rate values are known. These constants only depend on the geometric data and material characteristics; later on a calculating method for these will be presented.

By introducing the following denotations

$$\begin{aligned} B &= c_{rQ} + c_{gQ}, \\ F &= c_{rM} + c_{gM}, \\ H &= -\gamma_{rQ} - \gamma_{gQ}, \\ J &= -(\gamma_{rM} + \gamma_{gM}), \\ K_0 &= -\gamma_{rg} \end{aligned}$$

the calculation will be simplified.

From the initial equations, after rearrangement, we obtain:

$$\begin{aligned} BQ_0 + FM_0 + K_0 &= 0, \\ HQ_0 + JM_0 &= 0. \end{aligned}$$

In explicit form

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{-JK_0}{BJ - FH}, \\ M_0 &= \frac{HK_0}{BJ - FH} \end{aligned}$$

we get the values of forces at the assembled state.

2. Rotation (characteristic quantity ω)

First we assume that the assembly of the cage-system is carried out by no-force, i.e. $y_{rg} = 0$. The equations of the linear and angular deformations are

$$y_{r\omega} = y_{g\omega}, \quad \varphi_{r\omega} = \varphi_{g\omega}$$

and in a more expanded form:

$$c_{rc} \omega^2 - c_{rQ} Q_{\omega} - c_{rM} M_{\omega} = c_{gc} \omega^2 + c_{gQ} Q_{\omega} + c_{gM} M_{\omega}$$

or

$$\gamma_{rc} \omega^2 - \gamma_{rQ} Q_{\omega} - \gamma_{rM} M_{\omega} = \gamma_{gc} \omega^2 + \gamma_{gQ} Q_{\omega} + \gamma_{gM} M_{\omega}.$$

The first members refer to the free deformations due to rotation. It is advisable to introduce the denotations

$$\begin{aligned} K_{\omega} &= (c_{gc} - c_{rc}) \omega^2, \\ L &= \gamma_{rc} \omega^2 \end{aligned}$$

in which the quantity ω^2 is outstanding.

After rearrangement, we obtain

$$\begin{aligned} BQ_{\omega} + FM_{\omega} + K_{\omega} &= 0, \\ HQ_{\omega} + JM_{\omega} + L &= 0 \end{aligned}$$

and in explicit form:

$$Q_{\omega} = \frac{FL - JK_{\omega}}{BJ - FH},$$

$$M_o = \frac{HK_o - BL}{BJ - FH}.$$

3. Heating-up (characteristic quantity ϑ)

As assumed before:

$$y_{rg} = 0$$

and the equation of deformation

$$y_{r\vartheta} = y_{g\vartheta}, \quad \varphi_{r\vartheta} = \varphi_{g\vartheta}$$

from where

$$\alpha_v \frac{D_0}{2} \vartheta_v - c_{rQ} Q_\vartheta - c_{rM} M_\vartheta = \alpha_g \frac{D_0}{2} \vartheta_g + c_{gQ} Q_\vartheta + c_{gM} M_\vartheta$$

and

$$-\gamma_{rQ} Q_\vartheta - \gamma_{rM} M_\vartheta = \varphi_{gQ} Q_\vartheta + \gamma_{gM} M_\vartheta.$$

The first members of the first equation denote the free radial displacement caused by heating; rise of temperature of the ring is ϑ_g , and ϑ_v is that of the laminated iron body; the thermal coefficients are α_g and α_v ; by using the denotation

$$K_\vartheta = \alpha_g \frac{D_0}{2} \vartheta_g - \alpha_v \frac{D_0}{2} \vartheta_v$$

and after rearrangement

$$\begin{aligned} BQ_\vartheta + FM_\vartheta + K_\vartheta &= 0, \\ HQ_\vartheta + JM_\vartheta &= 0 \end{aligned}$$

and in explicit form:

$$\begin{aligned} Q_\vartheta &= \frac{-JK_\vartheta}{BJ - FH}, \\ M_\vartheta &= \frac{HK_\vartheta}{BJ - FH}. \end{aligned}$$

4. Running states

a) *At standstill (subscript o).* The state is identical with the position after assemblage (Q_o, M_o).

b) *Rotation test (characteristic quantity ω_{\max}).* The finished machines are tested in the test-room. One of these is the rotation test, during which the machine is rotating without load at a speed higher than the rated r.p.m.

For this case, the subscript ω_{\max} will be used. Now, moment and force are calculated for assembly and rotation and summarized, of course, the former quantity of ω is substituted by ω_{\max} . So we shall obtain:

$$Q_0 + Q_{\omega_{\max}}; M_0 + M_{\omega_{\max}}.$$

c) *Stop (characteristic quantity ϑ_{\max})*. During the period from start up to the end-point of the transient stage, the initial assembly state will change, just because of heat-effects [3, 4]. The measure of heating-up depends on the load, on starting conditions, on the number of interruptions with subsequent starts. According to experiences the usual warming temperature is mostly between 100 and 200 °C. One of the critical running stages is characterized by the machine coming to a standstill when heated-up at start. This state shall be represented by the quantity (ϑ_{\max}). So we shall calculate the assembled state (0) and the heated state (ϑ_{\max}), and we summarize:

$$Q_0 + Q_{\vartheta_{\max}}; M_0 + M_{\vartheta_{\max}}.$$

d) *Normal service (ϑ, ω)*. For the elevated temperature we take the value ϑ that corresponds to the stationary stage; the speed is taken as the rated speed. The superpositions are:

$$Q_0 + Q_{\vartheta} + Q_{\omega}; M_0 + M_{\vartheta} + M_{\omega}.$$

e) *Critical state (characteristic quantities ω, ϑ_{\max})*. The second critical stage is characterized by the simultaneous effect of both heating and rotating. In extreme cases, already at start (eventually after reiterated change of direction) the heating-up amounts to ϑ_{\max} (as opposed to the average value ϑ during operation). On the other hand, the speed to be taken into account is only ω . Consequently, this state is denoted by the subscripts ω, ϑ_{\max} . The heating-up effect presents itself in the outer cage, therefore — generally — the latter has to be considered as the most dangerous component part. The resulting force values are obtained (as before) by superposition, calculating with the values ω and ϑ_{\max}

$$Q_0 + Q_{\omega} + Q_{\vartheta_{\max}}, M_0 + M_{\omega} + M_{\vartheta_{\max}}.$$

NB. All the cases enumerated can be dealt with in a summarized way; this form of the deformation-equations runs as follows

$$BQ + FM + K = 0,$$

$$K = K_0 + K_{\omega} + K_{\vartheta},$$

$$HQ + JM + L = 0$$

and in explicit form

$$Q = \frac{FL - JK}{BJ - FH},$$

$$M = \frac{HK - BL}{BJ - FH}$$

where K is expressed in accordance with the state in question, by using the corresponding values of ω and ϑ .

III. Determination of spring-rate values

The scheme in Fig. 4 serves for the determination of the spring-rate values.

1. Ring

Radial displacement y_{gc} of one point of the ring, at an angular speed ω

$$y_{gc} = \frac{D_0}{2} \varepsilon = \frac{D_0}{2} \cdot \frac{\sigma}{E_g} = \frac{D_0}{2 E_g} \mu_g \left(\frac{D_0}{2} \right)^2 \omega^2 = c_{gc} \omega^2,$$

in explicit form

$$c_{ge} = \frac{D_0^3 \mu_g}{8 E_g}$$

where E_g denotes Young's modulus, μ_g denotes the density.

Calculating the displacement of one point of the ring with Z rods, and with a force Q on each rod [5]:

$$y_{ga} = \frac{D_0}{2} \varepsilon = \frac{D_0}{2} \cdot \frac{\sigma}{E_g} = \frac{D_0}{2 E_g} \cdot \frac{D_0 q}{2 v} = \frac{D_0^2}{4 E_g v} \cdot \frac{ZQ}{D_0 \pi b} = c_{gQ} Q.$$

In this equation the forces Q have been made equal to the following system as a uniform specific load q acting on the total ring-surface $D\pi b$

$$q = \frac{ZQ}{D_0 \pi b}$$

wherefrom

$$c_{gQ} = \frac{ZD_0}{4 \pi E_g b v}.$$

In the centre of gravity of the ring, the moment M does not produce any radial displacement:

$$c_{gM} = 0.$$

The centrifugal force does not cause any angular displacement in the ring section:

$$\gamma_{gc} = 0.$$

By following the principle of symmetry, the force system Q neither causes any angular displacement:

$$\gamma_{gQ} = 0.$$

Angular displacement of the ring caused by the moment M [6]

$$\varphi_{gM} = \frac{3 Z D_0 M}{\pi E_g b^3 v} = \gamma_{gM} M$$

viz.

$$\gamma_{gM} = \frac{3 Z D_0}{\pi E_g b^3 v}.$$

2. Rod

NB. The value l represents the so-called reduced length of the rods; this reduction is necessary on considering that the effective clamped cross-section of the rod is not at the edge of the laminated body but somewhat further inwards:

$$l = l_0 - \frac{b}{2} + \psi d$$

for which the value of ψ is obtained from measuring results:

$$\begin{aligned} \text{Rods without insulation } \psi &= 0,2 \div 0,5, \\ \text{insulated rods } \psi &= 0,1 \div 0,3. \end{aligned}$$

The linear displacement of one point of the rod at an angular speed ω can be calculated on the assumption of a uniform load p

$$p = \mu_r \frac{D_k}{2} \omega^2 \frac{d^2 \pi}{4}$$

and the linear displacement [5]

$$y_{rc} = \frac{p l^4}{8 J E_r} = \frac{D_k l^4}{d^2 E_r} \mu_r \omega^2 = c_{rc} \omega^2$$

where E_r is Young's modulus; and μ_r the density. For the spring-rate:

$$c_{rc} = \frac{D_k l^4 \mu_r}{d^2 E_r}.$$

The radial deformation of the laminated body is negligible in comparison with y_{rc} , and therefore we do not take into account any displacement of the clamping place of the rods.

Effected by force Q [5] the linear displacement of the rod-end is

$$y_{rQ} = \frac{Ql^3}{3JE_r} = \frac{64l^3Q}{3d^4\pi E_r} = c_{rQ}Q$$

wherefrom

$$c_{rQ} = \frac{64 \cdot l^3}{3\pi E_r \cdot d^4}.$$

Effected by moment M [5] the linear displacement of the rod-end is

$$y_{rM} = \frac{Ml^2}{2JE_r} = \frac{32l^2 \cdot M}{d^4\pi E_r} = c_{rM}M$$

viz.

$$c_{rM} = \frac{32l^2}{\pi d^4 E_r}$$

and effected by its own centrifugal force at an angular speed ω the angular displacement of the rod-end is [5]

$$\varphi_{rc} = \frac{\rho l^3}{6JE_r} = \frac{4D_k l^3}{3d^2 E_r} \mu_r \omega^2 = \gamma_{rc} \omega^2$$

viz.

$$\gamma_{rc} = \frac{4D_k l^3 \mu_r}{3d^2 E_r}.$$

Effected by the force Q , the angular displacement of the rod-end is [5]:

$$\varphi_{rQ} = \frac{Ql^2}{2JE_r} = \frac{32l^2Q}{d^4\pi E_r} = \gamma_{rQ}Q$$

viz.

$$\gamma_{rQ} = \frac{32l^2}{\pi E_r d^4}.$$

Finally, effected by moment M the angular displacement of the rod-end is [5]

$$\varphi_{rM} = \frac{Ml}{JE} = \frac{64lM}{d^4\pi E} = \gamma_{rM}M$$

viz.

$$\gamma_{rM} = \frac{64 \cdot l}{\pi d^4 E_r} \cdot$$

For rods with any other cross-section but circular, the calculation of the spring-rate is somewhat different.

IV. Determination of the stresses

As could be seen, when assembling, the ring and the rod system might be fitted either with play or with overlap. In other words, the whole system is prestressed. It is advisable to make a prestress in such a way that it should have an opposite sign to that of the stress brought about by the most unfavourable state. For y_{rg} in the critical element, special values should be determined, that the stress in assembling state, and the stress in the extreme service state should be with opposite algebraic signs but of abt. equal absolute values.

The extreme value of y_{rg} is determined by the condition that at assemblage the rod should not suffer plastic deformation. Therefore, the value of y_{rg} should be chosen in such a way that at the clamping place the stress could not transgress the limit:

$$\sigma_m \leq \sigma_F.$$

According to the bending theory of beams, we can write for the stress of the exterior fibre (e.g. for circular section) of the rod:

$$\sigma_h = \frac{Ql_0}{J} \frac{d}{2} \leq \sigma_m.$$

In the same position the deflection of the rod is:

$$y_{rg} = \frac{Ql_0^3}{3JE_r} = \frac{2\sigma_h}{l_0 \cdot d} \cdot \frac{l_0^3}{3E_r} \leq \frac{l_0^2 \sigma_m}{1,5 d E_r}.$$

1. Stresses in the ring

To calculate the radial load distribution q for Z rods the method given in III. 1 can be used. Knowing this, and using the denotations of Fig. 4 we obtain the stress value [5]

$$\sigma'_g = \frac{D_0 \cdot q}{D_k - D_b}$$

the algebraic sign of which is determined by the algebraic sign of q .

Effected by the moment M , the stress caused by deflection of the extreme fibres is [6]:

$$\sigma_g'' = \pm \gamma_{gM} M \frac{b}{D_0} \cdot E_g.$$

Caused by rotation the stress in the entire cross-section of the ring is [5]:

$$\sigma_g''' = \mu_g \left(\frac{D_0}{2} \right)^2 \omega^2.$$

Finally, in the most weak point, (taking the more unfavourable case) depending on the signs, the reduced stress is:

$$\sigma_g = \sigma_g' \pm \sigma_g'' + \sigma_g'''.$$

2. Stresses in the rod (with circular cross-section)

a) At the place denoted "I". In the extreme fibres, the bending stress caused by the force Q , is

$$\sigma_r' = \pm \frac{32 Q l_*}{d^3 \pi}$$

where according to Fig. 4

$$l_* = l_0 - 0,5 b.$$

In the extreme fibres, caused by the moment M , the bending stress is

$$\sigma_r'' = \pm \frac{32 M}{d^3 \pi}.$$

The load caused by the forces of inertia can be calculated with the method explained in III. 2.

Accordingly, the moment at the clamping place is

$$M_p = \mu_r \left(\frac{D_k}{2} \right) \omega^2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{l_*^2}{2}.$$

Bending stress of the extreme fibres:

$$\sigma_r''' = \pm \frac{2 \mu_r D_k l_*^2 \omega^2}{d}.$$

The reduced stress (signs to be observed)

$$\sigma_r = \pm \sigma_r' \pm \sigma_r'' \pm \sigma_r'''.$$

b) At the place denoted "2". Caused by the moment, the bending stress of the extreme fibres is

$$\sigma_{rg} = \pm \frac{32 M}{d^2 \pi}.$$

The effective strength control is obtained when the respective stress is calculated for the most critical running stage.

REFERENCES

1. LISKA: Villamosgépek, V., Szerkezettan (Electric Machines V, Construction). Tankönyvkiadó, Budapest 1954.
2. BÁLINT: Aszinkron motorok kalickáinak szilárdsági méretezése (Strength Calculation of the Cages of Induction Motors). *Elektrotechnika* (1955).
3. LENGYEL: Különleges kalickás forgórészek tervezése (Construction and Design of Special Cage-Type Rotors). Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1955.
4. BRAMBILLA: Alcuni problemi relativi alla costruzione e al dimensionamento delle gabbie rotoriche dei motori asincroni. *L'Elettrotecnica* (1964).
5. MUTNYÁNSZKY: Szilárdságtan (Theory of Mechanical Strength). Tankönyvkiadó, Budapest 1957.
6. КРАСОВСКИЙ: Вопросы прочности электрических машин. Изд. Академии Наук, Москва 1951.

FESTIGKEITSBERECHNUNG DES KURZSCHLUSS-KÄFIGSYSTEMS VON ASYNCHRONMOTOREN

I. HUSZÁR und I. KOVÁCS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Leitstangen im Käfiganker eines Induktionsmotors sind durch Ringe an den Stirnseiten kurzgeschlossen. Die Beanspruchung des Käfigankers wird durch Montage-Vorspannkraften, durch Zentrifugalkraften und Wärmekraften bestimmt. Es wird — für verschiedene Betriebszustände — das Berechnungsverfahren der wirkenden Kräfte und der erzeugten Spannungen dargelegt.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE MÉCANIQUE DES CAGES D'ÉCUREUIL DES MOTEURS ASYNCHRONES

I. HUSZÁR et I. KOVÁCS

RÉSUMÉ

Les barres conductrices des moteurs à induction en court-circuit sont court-circuitées par des cercles d'extrémité. Les contraintes mécaniques de la cage résultent de la précontrainte au montage, de la force centrifuge et de la dilatation thermique due à l'échauffement. L'étude présente une méthode de calcul pour les forces correspondant aux différentes conditions de fonctionnement, ainsi que le calcul des contraintes mécaniques.

РАСЧЕТ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКИ
КОРОТКОЗАМКНУТЫХ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

И. ХУСАР и И. КОВАЧ

РЕЗЮМЕ

Проводящие стержни короткозамкнутых индукционных двигателей с лобовых сторон машины замкнуты накоротко с помощью колец. В качестве механической нагрузки беличьей клетки фигурируют предварительное механическое напряжение при сборке, центробежная сила, возникающая при вращении, и силы, возникающие от теплового расширения вследствие нагрева машины. В статье приводится методика расчета сил, соответствующих различным режимам работы машины, после чего сообщается способ расчета напряжений.

ÜBER DEN EINFLUSS DER MODIFIZIERTEN KRESOLHARZSYSTEME AUF DIE ELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN UND WASSERBESTÄNDIGKEIT DER HARTPAPIERE

K. SCHWANER

FABRIK FÜR ELEKTROISOLIER- UND KUNSTSTOFFE, BUDAPEST

[Eingegangen am 17. Dezember, 1964]

In dem vorliegenden Aufsatz wird die Gestaltung der Wasseraufnahme und der elektrischen Eigenschaften von Hartpapieren in Abhängigkeit von einigen verschiedenen, aus Kresol-Formaldehyd-Harz ausgehenden Kondensations-Harzsystemen untersucht. Es wird dabei festgestellt, daß die Wasseraufnahme der Hartpapiere nur durch solche Harzsysteme in bedeutendem Maße herabgesetzt wird, die sowohl Anilin als auch Melamin enthalten (z. B. das System Anilin-Melamin-Kresol-Formaldehyd). Das Anilin erfüllt dabei die Rolle des die Wasserbeständigkeit des Melamin-Kresol-Formaldehyd-Harzes erhöhenden Aktivators. Das Epoxydharz übt keine Wirkung auf die Gestaltung der Wasseraufnahme aus, aber — insbesondere mit Anilinharz vergesellschaftet (so z. B. in einem System von Anilin-Epoxyd-Kresol-Formaldehyd) — erhöht es in hohem Maße die elektrischen Eigenschaften der Hartpapiere.

I. Einleitung

Wie bekannt, üben die aus den Grundstoffen Kresol und Formaldehyd durch Polykondensation dargestellten »Kresolharze« auf die Eigenschaften der Hartpapiere einen großen Einfluß aus. Die Parameter, die die Eigenschaften der Kresolharze beeinflussen, sind die folgenden: Der Erweichungspunkt, der Gehalt an freien Kresolen, und die Zeitpunkte der Entstehung des Gelzustandes (der Phase *B*) und der vollkommenen Vernetzung (der Phase *C*).

Die Hartpapiere stellen ein heterogenes System dar; ihre Eigenschaften setzen sich aus den zahlreichen — mechanischen, physikalischen und elektrischen — variablen Kennzahlen des Harzes und des Papierträgerstoffes zusammen. Die nach Bedeutung angeordnete Reihenfolge dieser Kennzahlen (Parameter) wird durch den Verwendungszweck des Hartpapiers bestimmt. Bei den modernen Hartpapieren stehen die schon für sich hohen technischen Anforderungen genügenden Parameter miteinander in engem Zusammenhang.

Zur Erfüllung der durch die technische Entwicklung bedingten hohen Anforderungen kann das herkömmliche »Kresolharz« für die Zwecke der Hartpapiere nicht mehr als entsprechender Grundstoff betrachtet werden. Es sind in erster Linie die physikalischen und elektrischen Eigenschaften dieses konventionellen Kresolharzes, die die hohen Anforderungen nicht mehr

erfüllen. Mit Rücksicht jedoch darauf, daß das »Kresolharz« über zahlreiche Eigenschaften (z. B. relativ hohe Wärmebeständigkeit neben guten mechanischen und elektrischen Eigenschaften) verfügt, die bei dem heutigen Stand der Technik bei anderen Kunststoffen noch nicht vorzufinden sind, ferner mit Rücksicht darauf, daß es verhältnismäßig leicht und mit niedrigen Kosten hergestellt werden kann, wurden von den verschiedenen Herstellerfirmen Forschungsarbeiten in Angriff genommen, um die Eigenschaften des »Kresolharzes« durch Modifizierungen zu verbessern, um es auf diese Weise zur Herstellung der zeitgemäßen Hartpapiere als Grundstoff verwenden zu können.

Bei der Wahl der Modifizierung muß über die chemischen Beziehungen hinaus auch der Umstand in Rücksicht gezogen werden, daß zwischen dem »Kresolharz« und dem Zellulose-Trägerstoff Wechselwirkungen chemischen und physikalischen Charakters stattfinden.

Die in dem Lösungsmittel gelösten Moleküle des Harzes umgeben die Zellulosefasern des Papier-Trägerstoffes und füllen die Zwischenräume zwischen den Fasern aus, doch dringen sie in die Kapillaren der Fasern nicht ein [1]. Hierdurch kann die hygroskopische, kapillaraktive Wirkung der Zellulosefasern auch nach der Durchtränkung (Imprägnierung) ungehindert zur Geltung gelangen. Der Vorgang zwischen der Zellulose und dem Polykondensationsharz verläuft in chemischer Hinsicht in dem Bereich der Hydroxylgruppen des Zellulosemoleküls. Die chemische Reaktion findet lediglich auf der Oberfläche der Fasern statt, wobei die chemische Reaktion des Polykondensationsharzes mit den Hydroxylgruppen des Zellulosemoleküls einstweilen unbekannt ist. Der in dem Inneren der Fasern und in den Kapillaren in verschiedener Weise zustandegekommene »gebundene« Feuchtigkeitsgehalt hängt von der Anzahl der OH-Gruppen des Zellulosemoleküls ab, wobei die Größe des Feuchtigkeitsgehaltes auf die Gestaltung der elektrischen Eigenschaften der Hartpapiere in entscheidender Weise auswirkt.

Aus diesem Grunde werden die modifizierenden Agenzien des den Papier-Trägerstoff durchtränkenden Kresolharzes in der Weise gewählt, daß durch das dargestellte Polykondensationsharz die OH-Gruppen des Zellulosemoleküls in maximaler Menge »geblockt« werden. Auf diese Weise wird es ermöglicht, die Wasserempfindlichkeit des Hartpapiers zu verringern und seine elektrischen Eigenschaften zu verbessern.

Bei den aus dem Papier-Trägerstoff und dem Polykondensationskunstharz aufgebauten und als Isolierstoffe verwendeten Hartpapieren spielen außer dem Parameter der Wasserbeständigkeit noch die elektrischen Eigenschaften eine wichtige Rolle. Die elektrischen Eigenschaften und die Wasserbeständigkeit stellen bei den Hartpapieren zwei voneinander nicht trennbare Parameter dar. Im Laufe unserer Arbeit wollen wir in erster Linie die Faktoren studieren, die auf die Ausgestaltung dieser Parameter auswirken.

II. Experimente zur Lösung der Aufgabe

Die Aufgabe meinten wir in der Weise zu lösen, daß zunächst verschiedene Harzsysteme ausgebildet wurden, mit denen dann die Zellulose-Papier-Trägerstoffe durchgetränkt und in der im nachstehenden angegebenen Weise zu Platten verformt wurden. Als Grundstoff für das Harzsystem wurden mehrfunktionale Verbindungen, wie Kresol, Anilin, Melamin usw. verwendet. Der Schichtstoff wurde in zwei Arbeitsphasen hergestellt.

1. Herstellung der Harze

Der mit einem Rührer, Rückflußkühler, Destillationskühler und mit einem Thermometer versehene 4l-Sulfurierkolben wurde mit Kresol und (in Abhängigkeit von dem System) mit einer oder mehreren Funktionalverbindungen versetzt, und nach dem Verrühren wurde dem System noch die nötige Menge Formaldehyd und als Katalysator Ammoniak zugesetzt. Das Reaktionsgemisch wurde dann bis zur Siedehitze erwärmt und 50 Minuten lang bei Siedetemperatur gehalten. Anschließend wurde das Gemisch bei stetem Rühren einer Vakuumdestillation unterzogen, wobei darauf geachtet wurde, daß die Temperatur des Ölbadens 105 °C nicht überschreite. Nach der vollständigen Entwässerung wurde ein geringer Anteil des Harzes zur Feststellung der Kennzahlen abgesondert, während der größere Teil mit Hilfe eines Lösungsmittels (in der Regel mit denaturiertem Alkohol oder einem Gemisch aus denaturiertem Alkohol und Azeton) in Lösung gebracht wurde. Diese Lösung, die etwa 50% Trockensubstanz enthielt, wurde dann zur Imprägnierung des Papier-Trägerstoffes verwendet.

2. Herstellung der Schichtstoffe

Die maßgerechten Papierplatten wurden mit der Lösung des in im vorangehenden beschriebener Weise dargestellten Harzes durchtränkt, bei Raumtemperatur 24 Stunden lang getrocknet und anschließend in einer Kammer bei einer Temperatur von 160 °C bis zum B-Zustand (Resitol) vorkondensiert. Mehrere solche Platten wurden dann aufeinandergeschichtet — es wurden »Pakete« hergestellt — und in einer Etagepresse verpreßt. Bei gleichzeitiger Anwendung von Wärme und Druck (spezifischer Druck: 90 kg/cm², Temperatur: 165 °C) und bei einer Preßdauer von 12 min/mm Dicke verwandeln sich die »Pakete« zu homogenen Platten hoher Festigkeit.

Die fertigen Platten wurden nach den Vorschriften des Normblattes MSZ 1691/60 geprüft. Bei der Ermittlung des Isolationswiderstandes kommen zwei Vorbehandlungen: *a* und *a* + *b* in Betracht. Die Vorbehandlung *a*

bedeutet, daß die Hartpapiere 4 Stunden lang in einem Trockenschrank bei einer Temperatur von $70 \pm 5^\circ\text{C}$ gehalten werden, während die Vorbehandlung $a + b$ bedeutet, daß die Platten nach der Vorbehandlung a und dem anschließenden Wägen der Behandlung b unterzogen werden, d. h., daß die Platten 96 Stunden lang in einem Raum mit 80% relativer Luftfeuchtigkeit und einer Temperatur von $20 \pm 5^\circ\text{C}$ erhalten und nach der Konditionierung binnen 5 Minuten geprüft werden.

3. Grundstoffe

Die zu den Versuchen verwendeten Grundstoffe waren die folgenden: *Kresol* (Qualität nach MSZ 777—50, mit einem m -Kresolgehalt von 40—42%).

Anilin (Qualität nach MSZ 8775—52).

Melamin (Schmp. 300°C ; Erzeugnis von CIBA).

Epoxydharz (Bezeichnung EF—3; nach der Zusammensetzung ein Kresol-Resolharz mit einem Molverhältnis Kresol/Formaldehyd 1 : 1,3; Behandlung des Harzes mit Epichlorhydrin; Epoxyäquivalent des Harzes 350—450; Viskosität bei 20°C 10^4 cSt; Gehalt an Trockensubstanz 96%).

Ammoniak (nach MSZ 20914—55).

Papier (Hadernzellstoff enthaltendes Sulfitzellstoff-Papier mit m^2 -Gewicht 77—83 g; Aschegehalt 0,5%; Dicke 0,145—0,155 mm; Saugfähigkeit nach Klemm in Längsrichtung 35—40 mm, in Querrichtung 33—38 mm; Reißlänge in Längsrichtung min. 4000 m, in Querrichtung min. 2500 m).

4. Untersuchte Harzsysteme

Die untersuchten Harzsysteme waren die folgenden:

- a) Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd;
- b) Anilin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd;
- c) Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd;
- d) Anilin—Melamin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd;
- e) Anilin—Kresol—Formaldehyd;
- f) Kresol—Äthoxysilan—Formaldehyd.

Die *Molverhältnisse* der Komponenten in den angeführten Harzsystemen, der Harzgehalt der mit diesen Harzen bereiteten Platten, ferner die Werte der Wasseraufnahme und einige elektrische Eigenschaften der Platten werden in den Tafeln I—VI angeführt.

Die Wasseraufnahme und die elektrischen Eigenschaften der im Laufe der Versuche hergestellten Hartpapiere wurden mit den entsprechenden

Tafel I

System Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd
(Melamin, Kresol konst.; Anilin nicht konst.)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Formaldehyd, Mol	1,45	1,55	1,60	1,66	1,71	1,76	1,81	1,88	1,20
Melamin, Mol ..	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	—
Kresol, Mol	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74
Anilin, Mol	—	0,054	0,081	0,108	0,131	0,162	0,183	0,216	0,108
Wasserauf- nahme, %* ..	2,75	2,35	1,80	1,60	1,75	1,70	—**	—**	3,52
Harzgehalt im Hartpapier, %	59	62	64	63	63	61	—	—	66
tan $\delta \cdot 10^4$	1920	—	480	352	296	236	—	—	352
Dielektrizitäts- konstante, ϵ ..	6,6	—	4,6	4,3	4,5	4,3	—	—	5

* Gemessen an einem Hartpapier von 1,8 mm Dicke.

** Das Kondensationsprodukt ging im Laufe der Darstellung in den Gelzustand über und wurde zur Herstellung des Hartpapiers ungeeignet.

Tafel II

System Anilin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd
(Epoxyd, Kresol konst.; Anilin nicht konst.)

	a	b	c	d
Formaldehyd, Mol	1,06	1,17	1,30	1,38
Epoxydharz, Mol	0,1	0,1	0,1	0,1
Kresol, Mol	0,74	0,74	0,74	0,74
Anilin, Mol	—	0,054	0,108	0,162
Wasseraufnahme, %*	1,70	1,70	1,50	1,75
Harzgehalt im Hartpapier, %	62	62	64	63
tan $\delta \cdot 10^4$	384	172	38	30
Dielektrizitätskonstante, ϵ . . .	4,9	4,6	3,9	3,7

* Gemessen an einem Hartpapier von 1,8 mm Dicke.

Tafel III

System Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd
(Anilin, Kresol konst.; Melamin nicht konst.)

	a	b	c	d	e	f
Formaldehyd, Mol	1,28	1,49	1,62	1,76	1,92	2,03
Kresol, Mol	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74
Anilin, Mol	0,162	0,162	0,162	0,162	0,162	0,162
Melamin, Mol	—	0,052	0,086	0,120	0,158	0,189
Wasseraufnahme, %*	2,48	2,47	1,60	1,70	—**	—**
Harzgehalt im Hartpapier, %	66	64	63	61	—	—
tan $\delta \cdot 10^4$	176	41	—	74	—	—
Dielektrizitätskonstante, ϵ . . .	4,2	4,0	—	3,6	—	—

* Gemessen an einem Hartpapier von 1,8 mm Dicke.

** Das Kondensationsprodukt ging im Laufe der Darstellung in den Gelzustand über und wurde zur Herstellung des Hartpapiers ungeeignet.

Tafel IV

System Anilin—Melamin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd
(Anilin, Melamin, Kresol konst.; Epoxydharz nicht konst.)

	a	b	c	d
Formaldehyd, Mol	1,66	1,66	1,66	1,66
Melamin, Mol	0,12	0,12	0,12	0,12
Kresol, Mol	0,74	0,74	0,74	0,74
Anilin, Mol	0,108	0,108	0,108	0,108
Epoxydharz, g	—	50	100	150
Wasseraufnahme, %*	1,76	1,80	2,10	2,20
Harzgehalt im Hartpapier, %	62	67	63	64
tan $\delta \cdot 10^4$	—	200	224	232
Dielektrizitätskonstante, ϵ . . .	—	4,2	4,5	4,3

* Gemessen an einem Hartpapier von 1,8 mm Dicke.

Tafel V

System Anilin—Kresol—Formaldehyd
(Kresol konst.; Anilin nicht konst.)

	a	b
Formaldehyd, Mol	1 20	1,28
Kresol, Mol	0,74	0,74
Anilin, Mol	0,108	0,162
Wasseraufnahme, %*	3,32	2,48
Harzgehalt im Hartpapier, %	66	65
$\tan \delta \cdot 10^4$	352	176
Dielektrizitätskonstante, ε	5,0	4,2

* Gemessen an einem Hartpapier von 1,8 mm Dicke.

Tafel VI

System Kresol—Äthoxysilan—Formaldehyd
(Kresol konst.; Äthoxysilan nicht konst.)

	a	b	c	d
Formaldehyd, Mol	1,3	1,3	1,3	1,3
Kresol, Mol	1,0	1,0	1,0	1,0
Phenyltriäthoxysilan, Mol ...	—	0,054	—	0,162
Dimethyldiäthoxysilan, Mol	—	—	—	—
Wasseraufnahme, %*	1,90	3,97	5,60	6,85

* Gemessen an einem Hartpapier von 1,8 mm Dicke.

Eigenschaften der Hartpapiere *RPB IV* und *KRPB* verglichen, die den äußerst strengen Anforderungen bezüglich der Wasseraufnahme und der elektrischen Eigenschaften genügen. Die Eigenschaften der beiden erwähnten Plattentypen wurden in Tafel VII angeführt.

Tafel VII

Anforderungen gegenüber den zeitgemäßen Papierbakelit-Schichtstoffen

	RPB IV*	KRPB**
Spezifischer Oberflächenwiderstand (min.), Ω		
nach Vorbehandlung <i>a</i>	10^{12}	10^{13}
nach Vorbehandlung <i>a</i> + <i>b</i>	$5 \cdot 10^9$	$5 \cdot 10^{10}$
Innerer Isolationswiderstand (min.), Ω		
nach Vorbehandlung <i>a</i>	$5 \cdot 10^{10}$	10^{13}
nach Vorbehandlung <i>a</i> + <i>b</i>	$5 \cdot 10^9$	$25 \cdot 10^9$
$\tan \delta$ (max.) 800 Hz	$800 \cdot 10^{-4}$	$300 \cdot 10^{-4}$
Dielektrizitätskonstante, ϵ , bei 800 Hz	—	4—6
Wasseraufnahme nach 96-stündiger Bewässerung, gemessen an einem Probekörper von 4 mm Dicke (max.), %	1,2	0,2

* MSZ 1691—60 »Papierbakelit-Schichtstoff mit geringer Wasseraufnahme« (Entspricht dem HP. IV nach DIN 7735).

** KGMSZ 624.512 »Papierbakelit-Schichtstoff zur speziellen Verwendung« (Entspricht dem XXXP nach NEMA).

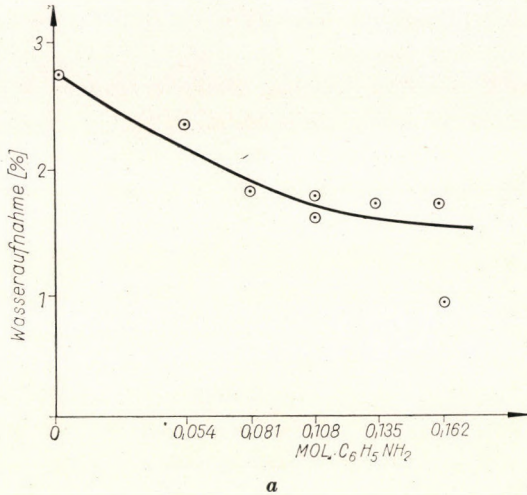
I II. Die Auswertung der Harzsysteme

a) System Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd

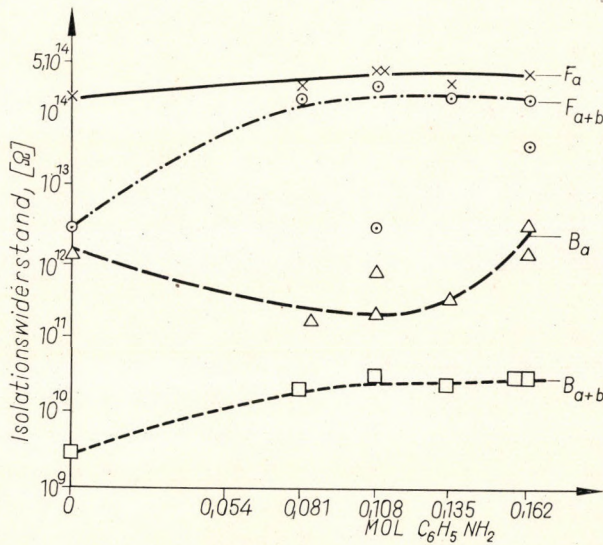
Die Wasseraufnahmewerte der mit diesem Harzsystem hergestellten Hartpapiere wurden im Bild 1a dargestellt.

Aus Tafel I ist es ersichtlich, daß die Wasseraufnahme in Gegenwart der Melamin-Komponente abnimmt. Diese Wirkung des Melamins wird durch Anilin bis zu einem gewissen Grade erhöht. Ohne Melamin kommt jedoch die verringernde Wirkung des Anilins auf die Wasseraufnahme nicht zur Geltung. Im Gegenteil, die Wasserempfindlichkeit wird durch das Anilin — insbesondere bei geringeren Konzentrationen — erhöht (siehe Bild 5). Die optimale Menge des Anilinzusatzes beträgt in diesem System 0,108 Mol. Größere Mengen an Anilin beeinflussen die Gestaltung der Wasseraufnahme praktisch nicht mehr.

Es ist nicht zweckmäßig, die Menge des Anilins über 0,162 Mol zu erhöhen. Obwohl mit 0,183 Mol Anilin noch ein Harz bereitet werden kann, doch dauert die Vernetzung dieses Harzes äußerst lange, und die mit diesem Harz imprägnierten Hartpapiere quellen im Laufe der Verpressung in dem Maße an, daß sie bereits unter dem geringsten Druck zerreißen.



a



b

Bild 1. Wasseraufnahme der mit dem System Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des bei der Darstellung des Harzes verwendeten Anilins (a); und Isolationswiderstand der mit dem Harzsystem Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des bei der Darstellung des Harzes verwendeten Anilins (b)

Im Hinblick auf den Isolationswiderstand bei den Platten, die aus den verschiedenen Gliedern dieses Harzsystems hergestellt worden sind (siehe Bild 1b), erreichen nach der Vorbehandlung a nur die Werte für den Oberflächenwiderstand (F_a) den Wert von 10^{14} Ohm; der innere Widerstand (B_a) bewegt sich dagegen zwischen den Werten von 10^{11} und 10^{13} Ohm. Nach der im zitierten Normblatt vorgeschriebenen Vorbehandlung a + b nehmen die

Werte der Isolationswiderstände sowohl für den Oberflächenwiderstand wie auch für den inneren Widerstand — F_{a+b} und B_{a+b} — mit der Menge an Anilin zu. Dem muß zugefügt werden, daß der innere Widerstand nur bei den Platten den Wert von gut isolierenden Platten erreicht, die aus etwa 0,162 Mol Anilin enthaltenden Harzen hergestellt worden sind. Hieraus folgt aber, daß der für die innere Struktur des Materials charakteristische innere Isolationswiderstand bei diesem System ungenügend ist.

Die Werte von $\tan \delta = 1020 \cdot 10^{-4} \rightarrow 236 \cdot 10^{-4}$ und die von $\varepsilon = 6,6 \rightarrow 4,3$ (siehe Tafel I) sind mit den Daten des Isolationswiderstandes im Einklang.

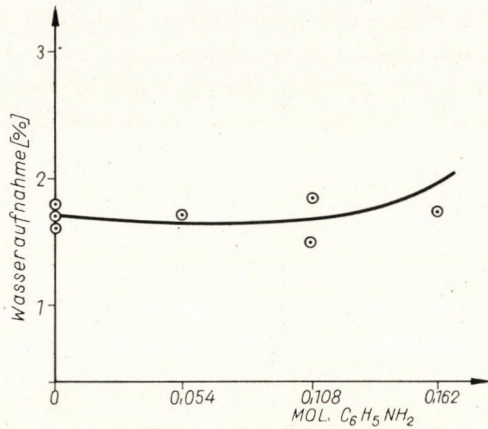
Zusammenfassend kann gesagt werden, daß bei den Platten, die aus zu diesem System gehörenden Harzen hergestellt worden sind, die Wasserbeständigkeit eine geringfügige Verbesserung aufweist, die elektrischen Eigenschaften der Platten sind jedoch schwach, und — mit Ausnahme des spezifischen Oberflächenwiderstandes — die zeitgemäßen Anforderungen (siehe Tafel VII) werden durch dieses System nicht befriedigt.

b) System Anilin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd

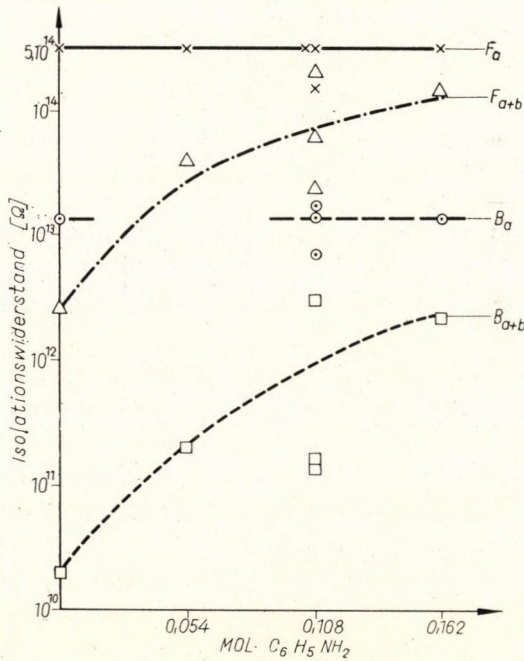
Aus Bild 2a ist es ersichtlich, daß die Wasserbeständigkeit der mit diesem Harzsystem hergestellten Platten durch das Anilin nicht verbessert, in größeren Mengen sogar verschlechtert wird. Die Wasseraufnahme des Systems stimmt nach der Größenordnung mit der des a) Systems überein. Wird die Kurve des Bildes 2a mit der Kurve der Wasseraufnahme im Bild 5 verglichen, so können wir ersehen, daß die Werte der Wasseraufnahme bei den Platten, die ohne epoxydiertes Resolharz ($EF-3$), jedoch aus Anilin—Kresol—Formaldehyd-Harzen mit größeren Mengen Anilin hergestellt worden sind, die betreffenden Werte des vorliegenden Systems gut annähern. Hieraus folgt aber, daß die Wasseraufnahme in diesem System durch die Epoxydgruppen nicht beeinflußt wird.

Obwohl dieses System bezüglich der Wasserempfindlichkeit keine Verbesserung bringt, bleibt das System nichtsdestoweniger vom Interesse, da es die Gestaltung der elektrischen Eigenschaften günstig beeinflußt. Bild 2b stellt anschaulich dar, daß der innere Isolationswiderstand B_a bereits mit einem ganz geringen Anilinzusatz den Wert von 10^{13} Ohm erreicht. Nach der Vorbehandlung a bilden die Werte des Oberflächenwiderstandes (F_a) und die des inneren Isolationswiderstandes (B_a) Geraden; nach der Vorbehandlung $a + b$ verlaufen die Kurven annähernd parallel.

Die Durchschlagfestigkeit nimmt mit der Größe des Anilinzusatzes zu. Bei einem Anilinzusatz von über 0,1 Mol können die für die $KRPB$ -Platten bei 20 und 90 °C vorgeschriebenen Werte (siehe Tafel VII) schon sicher gehalten werden.



a



b

Bild 2. Wasseraufnahme der mit dem Harzsystem Anilin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des bei der Darstellung des Harzes verwendeten Anilins (a); und Isolationswiderstand der mit dem Harzsystem Anilin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des bei der Darstellung des Harzes verwendeten Anilins (b)

Mit diesen Beobachtungen stehen in engem Zusammenhang die Werte von $\tan \delta = 384 \cdot 10^{-4} \rightarrow 30 \cdot 10^{-4}$ und von $\varepsilon = 4,9 \rightarrow 3,7$ (siehe Tafel II), die sich mit der Menge des Anilins stets verbessern.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß obwohl dieses Harzsystem bezüglich der Wasserbeständigkeit der Hartpapiere keine Verbesserung bringt, die elektrischen Eigenschaften und die Isolationswiderstände jedoch in hohem Maße gesteigert werden.

c) System Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd

Bei diesem System bemühten wir uns unter anderen darum, die im ersten System verwendete Menge des Melamins möglichst zu verringern. Für die Zwecke unserer Untersuchungen wählten wir das 0,162 Mol Anilin enthaltende Harz des ersten Systems, das über maximal gute Eigenschaften verfügt. Bei der Bereitung der Harze beobachteten wir, daß die Harze — in Abhängigkeit von der Menge des Melamins — anfänglich eine lange und dann stets abnehmende Gelierungszeit (*B*) aufweisen, wobei die Erweichungspunkte nach Tafel VIII praktisch gleich bleiben.

Tafel VIII

Erweichungspunkt und »B«-Zeit der Harze in Tafel III

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>		<i>e</i>
Erweichungspunkt [°C]	39	43	45	45	41,5	57,5
Gelierungszeit, <i>B</i> bei 160 °C [s]	460	651	190	110	170	330

Bezüglich der Harzbereitung beträgt die optimale Menge des Melamins 0,12 Mol. Über dieser Menge des Melamins nimmt die Viskosität des entstehenden Harzes in hohem Maße zu. Eine geringe Menge Melamin (0,052 Mol) kann aus einem anderen Blickwinkel auch als Weichmacher des Harzsystems Anilin—Kresol aufgefaßt werden, da eine geringe Menge an Melamin die vollständige Entwässerung des entstehenden Harzes ermöglicht, wobei die Ausbildung der Gelstruktur verzögert wird. Die *B*-Zeit eines solchen Harzes ist länger als die der Anilin—Kresol-Harze ohne Melaminzusatz (460 bzw. 651 s).

Die Wasseraufnahme der fertigen Hartpapiere gestaltete sich entsprechend der Erwartung: Mit der Menge des Melamins nimmt die Wasseraufnahme ab, und bei einer Melaminmenge von 0,12 Mol erreicht die Wasseraufnahme den beim System 1 gefundenen optimalen Wert (siehe Bild 3a).

Unter den Kurven des Isolationswiderstandes (siehe Bild 3b) sind die gemessenen Werte des spezifischen Oberflächenwiderstandes nach der Vorbehandlung *a* und *a + b* (F_a und F_{a+b}) den Kurven für den Oberflächenwiderstand des Systems *a*) (F_a und F_{a+b}) ähnlich (siehe Bild 3b und 1b). Hingegen verlaufen die Kurven des inneren Isolationswiderstandes ganz

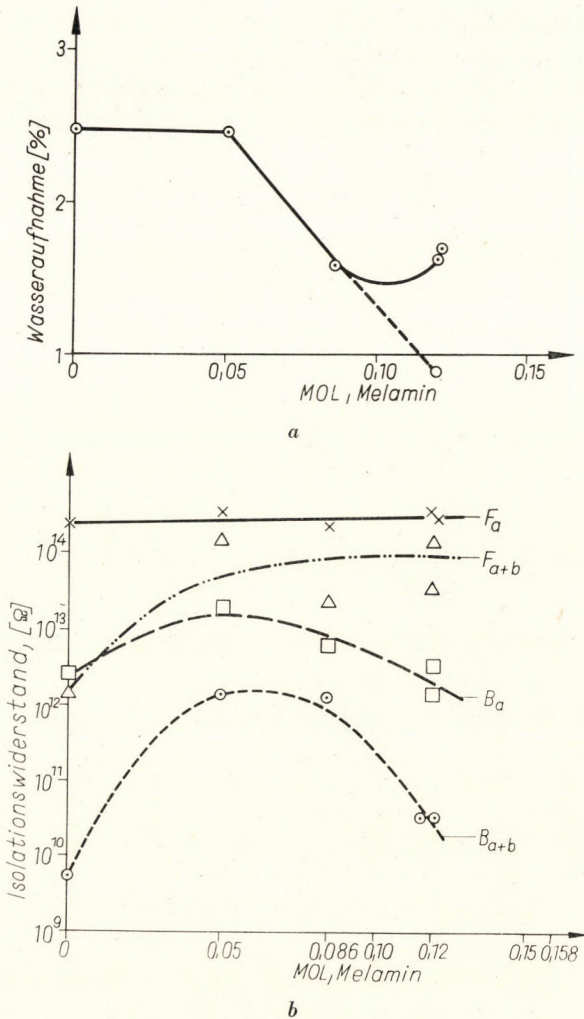
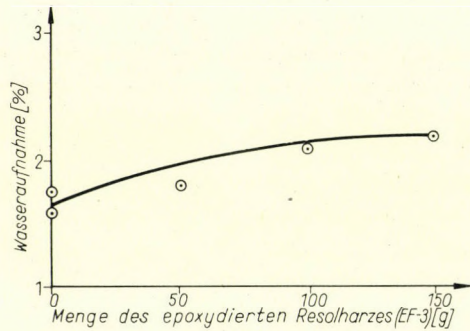
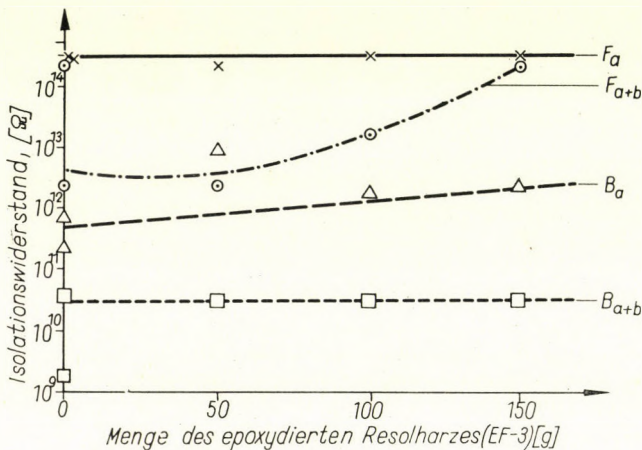


Bild 3. Wasseraufnahme der mit dem Harzsystem Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des bei der Darstellung des Harzes verwendeten Melamins (a); und Isolationswiderstand der mit dem Harzsystem Anilin—Melamin—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des bei der Darstellung des Harzes verwendeten Melamins (b)

anders: Die Kurven weisen bei einer Melaminmenge von 0,05 Mol ein Maximum auf. Mutmaßlich weist dies darauf hin, daß geringe Mengen an Melamin in der Struktur des Harzsystems Anilin—Kresol—Formaldehyd bezüglich der elektrischen Eigenschaften günstige Veränderungen hervorrufen. Größere Mengen an Melamin hingegen steigern mehr die Wirkung des Anilins, und die elektrischen Eigenschaften des Produktes werden immer mehr denen der Platten des Systems a) ähnlich.



a



b

Bild 4. Wasseraufnahme der mit dem Harzsystem Anilin—Melamin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von der Menge des bei der Darstellung des Harzes verwendeten epoxydierten Resolharzes (a); und Isolationswiderstand der mit dem Harzsystem Anilin—Melamin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von der Menge des bei der Darstellung des Harzes verwendeten epoxydierten Resolharzes (b)

Die Werte von $\tan \delta = 176 \cdot 10^{-4} \rightarrow 41 \cdot 10^{-4} \rightarrow 236 \cdot 10^{-4}$ und von $\varepsilon = 4,2 \rightarrow 4,0 \rightarrow 4,3$ (siehe Tafel III) unterstützen die obige Hypothese in positivem Sinne.

d) System Anilin—Melamin—Epoxyd—Kresol—Formaldehyd

Dieses System — eben aus dem Grunde, weil es eine Kombination der vorher behandelten Systeme a), b) und c) darstellt — trägt das Gepräge dieser Systeme an sich (siehe Bild 4a und 4b).

Um den Einfluß des epoxydierten Resols (*EF*—3) zu studieren, wurde die Menge dieses Harzes variiert. Es wurde dabei gefunden, daß mit Erhöhung der Menge des Epoxydharzes die Wasseraufnahme-Kurve des Systems eine steigende Tendenz aufweist. Die die Hydrophilie verringemde gemeinsame Wirkung des Melamins und Anilins gelangt mutmaßlich aus dem Grunde nicht zur Wirkung, weil die Molverhältnisse dieser beiden Komponenten — 0,108 Mol Anilin bzw. 0,12 Mol Melamin — eben die Werte aufweisen, bei denen die

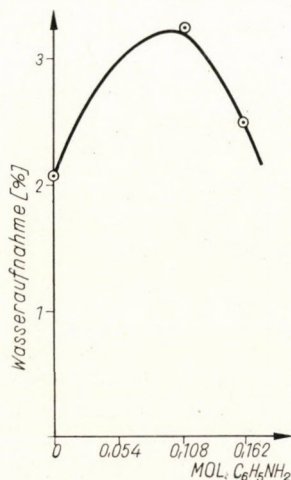


Bild 5. Wasseraufnahme der mit dem Harzsystem Anilin—Kresol—Formaldehyd bereiteten Hartpapiere in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des bei der Darstellung des Harzes verwendeten Anilins

Verflachung der Wasseraufnahme-Kurve des Systems *a*) beginnt (siehe Bild 1a). Auf diese Weise kommt lediglich die kaum merkliche Wirkung des epoxydierten Resolharzes zur Geltung.

Die Isolationswiderstände sind nahe denen gleich, die bei den in Molverhältnis entsprechenden Harzen des Systems Anilin—Melamin—Kresol-Formaldehyd erhalten worden sind. Die Einführung der Epoxydgruppe hat zwar eine praktisch geringe, doch positive Änderung zur Folge. Bei dem inneren Isolationswiderstand zeigen die B_{a+b} -Daten nach der Behandlung $a + b$ — verglichen mit dem Ausgangsharz ohne Epoxydgruppen — mit Erhöhung der Anzahl der Epoxydgruppen keine Änderung. Hieraus folgt, daß in elektrischer Beziehung die Epoxydgruppe in dem Anilin und Melamin enthaltenden System keine Rolle spielt.

Die geringfügige Verbesserung in den Werten von $\tan \delta$ und ε (siehe Tafel IV) kann teilweise auf die Gegenwart von Epoxydgruppen zurückgeführt werden.

e) System Anilin—Kresol—Formaldehyd

Dieses System wurde zur Kontrolle der Wasseraufnahme-Kurven der Systeme *b)* und *d)* herangezogen (siehe Bild 5).

Die Wasseraufnahme der aus diesem System hergestellten Schichtstoffe nimmt mit der Menge an Anilin ab. Aus Gründen, die beim System *a)* angegeben worden waren, wurde Anilin in Mengen über 0,162 Mol nicht verwendet.

Die mit diesem System gewonnenen Erfahrungen unterstützen unsere Auffassung, daß in den Systemen *b)* und *d)* die Wasserempfindlichkeit der Hartpapiere durch die Gegenwart von Anilin beeinflusst wird.

f) System Kresol—Äthoxysilan—Formaldehyd

Bei der Ausbildung dieses Systems sollte nach unseren Vorstellungen zunächst aus einem System Silikon—Kresol—Formaldehyd ausgegangen werden, wobei durch chemische Bindung zwischen *Kresol* und *Äthoxysilan* oder *Kresolalkoholen* und *Äthoxysilan* die derart entstehende Verbindung die im Laufe der Vernetzung entstehende Hydrophobie herbeiführen sollte.

Bei unseren Versuchen wurde zunächst ein Kresol—Resolharz bereitet. Das Molverhältnis Kresol/Formaldehyd betrug 1 : 1,3, der Katalysator war Ammoniak, während zur Verringerung der Reaktionsgeschwindigkeit Methanol verwendet wurde. Die Komponenten des Grundharzes wurden bis zum Auftreten des Trübungspunktes des Gemisches im Sieden erhalten, und nach erfolgter Trübung wurde das Gemisch mit der berechneten Menge des Äthoxysilans (in alkoholischer Lösung) versetzt und das Sieden weitere 45 Minuten hindurch fortgesetzt. Anschließend wurde das erhaltene Produkt durch Vakuumdestillation entwässert.

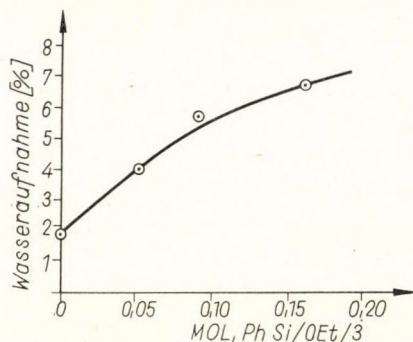


Bild 6. Wasseraufnahme des Systems Kresol—Äthoxysilan in Abhängigkeit von dem Molverhältnis des Phenyläthoxysilans

Die Wasseraufnahme der mit diesem Harz imprägnierten Hartpapiere weist — wie es aus dem Bilde 6 ersichtlich — mit der Zunahme der Menge der Äthoxysilane eine stets steigende Tendenz auf. Das Verhalten des Dimethyldiäthoxysilans ist dem des Phenyltriäthoxysilans gleich.

Es kann festgestellt werden, daß — im Gegensatz zu der Erwartung — die Silikon-Zwischenprodukte die Hydrophilie der Schichtstoffe nicht verringern, vielmehr wird die Hydrophilie erhöht. Eine Erklärung für diese Erscheinung können wir einstweilen nicht geben.

IV. Diskussion der Ergebnisse

Aus den obigen Ausführungen kann die Folgerung gezogen werden, daß die Wasseraufnahme und die elektrischen Eigenschaften Parameter darstellen, die unter anderen auch von der chemischen Zusammensetzung der Harze abhängen, die zur Imprägnierung des Papierträgerstoffes auf Zellulose-Basis dienen. Es kann beobachtet werden, daß unter den Komponenten der von uns gewählten Harzsysteme die wichtigste Rolle das Anilin führt, während den übrigen Komponenten lediglich eine untergeordnete Bedeutung zukommt.

Das Polykondensationsprodukt aus Anilin und Aldehyd ergibt bekannterweise ein gutes Isoliermaterial, doch die mechanischen und physikalischen Eigenschaften können nicht mehr so gut bewertet werden. Eine seiner Schwächen besteht in der verhältnismäßig geringen Wasserbeständigkeit, die im Hinblick auf die Hartpapiere den Wert des elektrischen Isolationswiderstandes gerade in negativer Richtung beeinflusst.

Diese negative Eigenschaft des Anilin-Formaldehydharzes tritt jedoch bei der Vergesellschaftung des Harzes mit anderen Polykondensationsharzen nicht immer in Erscheinung. Es kann nachgewiesen werden, daß — in Abhängigkeit von dem Charakter der anderen Komponenten — dieses Negativum nur in unbedeutendem, kaum merklichem Maße auftritt, vielmehr bedingt die Gegenwart des Partners manchmal die Erhöhung der Wasserbeständigkeit.

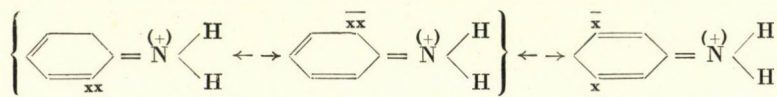
Den ersten Fall beobachteten wir bei dem Epoxydgruppen enthaltenden Kokondensationsprodukt (siehe Bild 2a), den zweiten Fall bei dem Kokondensationsprodukt mit Melamin-Aldehyd-Harz (siehe Bild 1a). In dem Falle hingegen, wo keine von den erwähnten Verbindungsgruppen vorhanden ist, d. h., bei den reinen Kresol-Formaldehyd- oder Anilin-Formaldehyd-Harzen, tritt diese negative Eigenschaft in starkem Maße in den Vordergrund (siehe Bild 5).

Eine umfassende Erklärung für den Grund dieser Erscheinungen konnten wir bisher nicht finden. In der ersten Phase der Entstehung der Melamin-Formaldehyd-Harze bilden sich — wie bekannt — die Methylolderivate des Melamins. Ein geringer Anteil dieser Derivate kann sich — nach einem

unbekannten Mechanismus — mit den OH-Gruppen des Zellulosemoleküls verknüpfen, und auf diese Weise kann die Hydrophilie des Zellulosemoleküls herabgesetzt werden. Das Anilin-Formaldehyd-Harz kann sich nach einem ähnlichen Mechanismus mit dem Zellulosemolekül verknüpfen. Die Kurve in Bild 1a weist jedoch darauf hin, daß sich die beiden Komponenten — das Anilin und das Melamin — in ihrer Wirkung bis zu einem gewissen Grade superponieren.

Bezüglich des Reaktionsmechanismus der Anilin enthaltenden Kondensationsharze kann folgendes angenommen werden:

1. Ein Teil des Anilins tritt mit dem Formaldehyd nicht in Wechselwirkung, sondern ist in freier polarer Form vorhanden:



Das Anilin reagiert dabei über die Gruppe $\overset{+}{\text{N}}$ mit den stark nukleophilen Gruppen der Zellulose, wodurch ein Teil dieser Gruppen blockiert wird. Diese Hypothese wird durch den Verlauf der Kurve im Bild 1 unterstützt. Es ist ersichtlich, daß sich die Wasserbeständigkeit praktisch nicht mehr verbessert, wenn die Menge des Anilins über 0,108 Mol erhöht wird. Dies weist darauf hin, daß die —OH-Gruppen der Zellulose mit weiteren Mengen des Anilins nicht reagieren können.

2. Neben der unter Punkt 1 beschriebenen Reaktion können parallel, zwischen den Verbindungen des Kondensationsharzes und dem Zellulosemolekül, auch Wasserstoffbindungen — insbesondere über die Methylolgruppe der Harze — gebildet werden.

3. Das Melaminharz und das Anilin können miteinander in Reaktion treten. Als Folge dieser Reaktion entsteht ein komplexes Molekül mit elektrophilem Atom. Diese Hypothese wird durch die Form der Wasseraufnahmekurven nicht unterstützt, denn wäre sie wahr, so würden die Kurven monoton fallend verlaufen.

Mit dem Epoxydgruppen enthaltenden Resolharz tritt das Anilin und das Kondensationsprodukt aus Anilin und Formaldehyd in Wechselwirkung [6]. Mit zunehmender Menge des Anilins wird die Wasserbeständigkeit des Produktes schlechter, die negative Eigenschaft des Anilin-Formaldehyd-Harzes erlangt das Übergewicht. Wurde die Epoxydgruppen enthaltende Verbindung durch Melaminharz ersetzt, tritt die superponierende Wirkung des Anilin-Melamin-Formaldehyd-Kondensationsproduktes wieder in Erscheinung (siehe Bild 3a). Hieraus folgt aber, daß die Epoxydgruppe mit dem Zellulosemolekül unmittelbar in keinerlei Form verknüpft wird.

Für die superponierende Wirkung des Anilins und Melamins spricht auch das Ergebnis des auf der Kombination des Kresols und Anilins beruhenden

den Systems, wonach die Wasseraufnahme der Hartpapiere (verglichen mit der des Ausgangsharzes) in hohem Maße zunimmt (siehe Bild 5), denn aus dem System fehlt das Melamin.

Der Mechanismus der Wasserempfindlichkeit der Hartpapiere ist noch nicht geklärt. Auf Grund der Versuche ist es wahrscheinlich, daß wir Oberflächen- und Diffusionserscheinungen gegenüberstehen, wie dies übrigens auch durch die Forschungsarbeiten der Papierindustrie zur Erhöhung der Naßfestigkeit der Papiere nachgewiesen worden ist [2—5]. Es überwiegen die Oberflächenerscheinungen; das Harz diffundiert in die Wand der Zellulosefaser nicht tief ein, und die kapillaraktiven Eigenschaften des Papiers werden trotz der Imprägnierung mit dem Harz nur wenig verändert. Solange die Schichtstoffe Feuchtigkeit aufnehmen, hört die kapillaraktive Wirkung nicht auf.

Die Gestaltung der elektrischen Isolationseigenschaften gibt bis zu einem gewissen Grade über den inneren Aufbau der heterogen strukturierten Schichtstoffe Aufschluß. Die Gegenwart des Kondensationsproduktes aus Anilin und Formaldehyd und die der Epoxydgruppen geht in den behandelten Systemen in jedem Fall mit einer positiven Wirkung einher. Die Menge des Melamin-Formaldehyd-Kondensationsproduktes kann wegen der Gefahr der Gelbildung nur bis zu einer gewissen Grenze erhöht werden (siehe Bild 3).

Eine außerordentlich günstige Wirkung kann erzielt werden durch die Kombination der Anilin-Formaldehyd-Harze und der Epoxydharze, in der Gegenwart des Kondensationsproduktes aus Kresol und Formaldehyd, wobei sich die elektrischen Eigenschaften rapid verbessern (siehe Bild 2b).

Das Melamin-Formaldehyd-Kondensationsprodukt übt auf das Anilin-Formaldehyd-Kondensationsprodukt in jedem Falle eine negative Wirkung aus (siehe Bild 3b). Dies bedeutet, daß es sich — in elektrischer Beziehung — nicht empfiehlt, Melamin und Anilin gleichzeitig anzuwenden. Diese Erscheinung kann darauf zurückgeführt werden, daß der Triazin-Ring des Melamins in der dichten Struktur des Systems Anilin-Epoxyd-Kresol-Formaldehyd einen großen Raum beansprucht. Es entsteht eine Lockerstelle, die das Durchdringen des elektrischen Stromes befördert, mutmaßlich aus dem Grunde, weil die Verknüpfung der Segmente der Moleküle des Grundharzes durch den Triazin-Ring sterisch gehindert wird.

SCHRIFTTUM

1. SCHWANER, K.: *Műanyag* 1 (1964), 241.
2. JURECIC, A.—LINSH, T.—CHURCH, S. E.—STANNET, V.: *TAPPI* 41 (1958), 465.
3. KURATH, S. F.—CHUNG YING CHU—SWANSON, I. W.: *TAPPI* 42 (1959), 575.
4. BECHER, I. I.—HOFFMAN, G. R.—SWANSON, I. W.: *TAPPI* 44 (1961), 296.
5. JURECIC, A.—HOU, C. M.—SÄRKÄNEN, K.—DONOFRI, C. P.—STANNET, V.: *TAPPI* 43 (1960), 861.
6. PAQUIN, A.: Epoxydverbindungen und Epoxydharze. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

THE INFLUENCE OF MODIFIED CRESOL-RESIN SYSTEMS
ON THE ELECTRIC PROPERTIES AND THE RESISTANCE TO WATER
OF PAPER-BASE LAMINATED PLASTICS

K. SCHWANER

SUMMARY

The author investigated the water absorption and the electrical properties of several different condensation resin systems starting from cresol-formaldehyde-resin. He found that the water absorption capacity of laminated plastics is considerably reduced only by those resin systems which contain aniline as well as melamine (e.g. aniline-melamine-cresol-formaldehyde system). The aniline plays the role of the water-resistance increasing activator of the melamine-cresol-formaldehyde-resin. The presence of epoxy resin has no influence on the water absorption, but, especially associated to aniline-resin, (e.g. in an aniline-epoxyd-cresol-formaldehyde system) it greatly improves the electrical properties of the laminated paper-base plastics.

L'INFLUENCE DES SYSTÈMES DE RÉSINE A BASE DE CRÉSOL MODIFIÉS,
SUR LES QUALITÉS ÉLECTRIQUES ET LA RÉSISTANCE A L'EAU
DES PLASTIQUES STRATIFIÉES A BASE DE PAPIER

K. SCHWANER

RÉSUMÉ

L'auteur a étudié les variations de l'absorption d'eau et des propriétés électriques des plastiques stratifiées à base de papier, en fonction de quelques systèmes de résines de condensation, basés sur la résine crésol-formaldéhyde. Il a été constaté que la capacité d'absorption d'eau des plastiques stratifiées n'est réduite considérablement que par des systèmes de résines contenant de l'aniline aussi bien que de la mélamine (par ex. le système aniline-mélamine-crésol-formaldéhyde). L'aniline joue un rôle d'activateur augmentant la résistance à l'eau de la résine mélamine-crésol-formaldéhyde. La présence de la résine époxy n'influence pas l'absorption d'eau, mais combinée surtout avec la résine à aniline (par ex. dans le système aniline-époxy-crésol-formaldéhyde), elle augmente considérablement les qualités électriques des plastiques stratifiées à base de papier.

ВОЗДЕЙСТВИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ СИСТЕМ КРЕЗОЛЬНОЙ СМОЛЫ
НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ВОДОНЕПРОНИЦАЕМОСТЬ
СЛОИСТЫХ ПЛАСТМАСС С БУМАЖНЫМ КАРКАСОМ

K. ШВАНЕР

РЕЗЮМЕ

Автор изучал условия изменения электрических свойств и водопоглощения слоистых пластических масс с бумажным каркасом в функции различных систем конденсационной смолы, исходящей из крезол-формальдегидной смолы. Установлено, что водопоглощаемость слоистых пластических масс снижается в значительной мере только такой системой смол, которые содержат как анилин, так и меламин (напр. система анилин — меламин — крезол — формальдегид). Анилин в смоле меламин — крезол — формальдегид играет роль активатора, повышающего водонепроницаемость. Присутствие эпоксидной смолы не воздействует на изменение водопоглощаемости, в то же время, особенно при ассоциации с анилиновой смолой (напр. в системе анилин — эпоксид — крезол — формальдегид), в очень большой мере повышает электрические свойства слоистых пластических масс с бумажным каркасом.

THE EFFECT OF SMALL QUANTITIES OF ALUMINIUM FLUORIDE ADDITIVES ON THE STRENGTH OF REFRACTORY MATERIALS

B. LÓCSEI

CENTRAL INSTITUTE FOR THE SILICATE INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received December 23, 1964]

The effect of aluminium fluoride on the processes which take place during the calcination of various refractory materials can be satisfactorily followed by differential thermogravimetric and analytical tests. On the addition of small quantities of aluminium fluoride no changes will occur in the mechanism of the reaction process, but the activation energy conditions and the kinetic will be modified. The dehydroxylation process is retarded by the incorporation and partial hydrolysis of aluminium fluoride, while on the other hand the activation energy of mullite formation is reduced by the addition of the fluoride. Beyond a certain limit, which corresponds to about 10÷12% of the clay mineral content, a fundamental change occurs in the nature of the processes which take place during calcination and these processes become more and more complicated. The above mentioned quantity of aluminium fluoride is the limit below which this additive only accelerates the processes taking place during the calcination and improves the quality of the end product. Beyond this limit the porosity of the end product is enhanced, as had been demonstrated in an earlier paper. Two to four per cent of aluminium fluoride not only accelerates the calcination process of refractory materials, but also increases by 80 to 120 per cent the strength of the final product, reduces apparent porosity and has, in addition, also other favourable technological effects.

I. Introduction

From the point of view of the use of refractories in most cases strength is one of the most important properties — beside the primarily important refractory nature — which will determine the life of the material. In built-in structures in addition to the predominant compression stress, flexural and tensile stresses have also to be reckoned with. In certain cases a shear stress may also occur at certain points of the built-in object of the refractory. A resistance to heat impulses is a further important property, this being in close correlation with the tensile strength of the material and influenced by the coefficient of heat expansion and the modulus of elasticity. It should be borne in mind that stress is usually accompanied by high temperatures.

The cold compression strength of fire clays is between 150 and 500 kp/cm² depending on the composition of the product, the particle size distribution of the raw material and on the compression force applied in the production process. The compression strength of the refractory provides information on the cohesion of the textural structure, thus allows conclusions to be drawn on its resistance towards various stresses. According to experimental results

compression strength is proportional to the resistance towards tensile, flexural and abrasion stresses [1-3].

Compression strength depends on a number of material and technological parameters. Of the technological parameters the first to be mentioned are the method of moulding and the force used for caulking, further the particle size distribution of the raw material, while of the material parameters the mineralogical and chemical compositions are the decisive factors. The latter have a decisive influence on the reactivity and quality of the raw material. The ratio between the raw and calcined material used in manufacture is also an important technological factor from the point of view of the strength of the finished product.

This paper deals with some problems of the reaction kinetics of clay minerals and AlF_3 . It demonstrates, on the one hand, by differential thermogravimetry the changes in the reaction mechanism due to the presence of higher quantities of AlF_3 and, on the other hand, contains data on the modifications of the clay minerals and first of the processes which take place during the calcination of kaolinite in the presence of AlF_3 , $\text{Al}(\text{OH})_3$ i.e. Al_2O_3 . Finally we shall discuss the possibility of increasing the strength of the product by improving the reactivity of the basic materials.

The above problems arose in the course of the study of the phase transformation of the Grossalmerod clay when significant mineralization and acceleration of the reaction were observed in the presence of small quantities of aluminium fluoride.

II. Experimental

1. Materials

In the experiments the reaction kinetics of those refractories were studied which because of their known compositions offered possibilities for drawing generally valid conclusions. The chemical compositions of the materials used in the experiments are shown in Table I.

In the experiments aluminium fluoride was added to the fire-proof clays. Changes in reaction kinetics due to the effect of the additives were studied by thermal analysis and the thermogravimetric method. On the basis of kinetical studies of these reactions was investigated in the case of industrial products the ways of achieving the best possible physical properties of the end product by the increase of reactivity.

2. Differential thermogravimetric tests of raw materials

Our earlier experiments have clarified the formation of mullite from aluminium fluoride and kaolinite at low temperatures and have proved that already in the presence of small quantities of aluminium fluoride this process

Table I
Composition of the materials used in the experiments

	SiO ₂	Al ₂ O ₃	TiO ₂	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	Na ₂ O K ₂ O	SO ₂	Loss on calcina- tion	AlF ₃
1. Zettlitz china clay	46,9	38,5	0,6	0,5	0,3	0,2	0,4	tr.	12,8	—
2. Petény clay	61,5	24,7	0,9	1,6	0,7	0,5	0,7	0,6	8,9	—
3. Sárísáp china clay, grade II	58,5	26,7	0,6	1,2	1,1	0,4	0,7	0,1	10,2	—
4. Briessen Bl clay	44,3	35,1	1,7	1,8	0,8	0,4	0,9	0,4	15,4	—
5. Szeg china clay	45,1	35,3	0,2	2,6	0,7	0,4	0,4	tr.	15,1	—
6. Grossalmerod clay	72,0	18,2	1,0	1,2	0,3	0,2	1,0	—	6,2	—
7. Rakó I calcined slate	53,6	39,2	2,1	2,3	0,4	0,3	1,0	0,6	0,7	—
8. PM calcined slate	52,7	39,4	2,0	2,1	0,7	0,3	1,2	0,6	1,3	—
9. Sárísáp sand	97,5	0,8	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	—	0,2	—
10. PFI/a calcined slate	52,1	41,0	1,8	2,0	0,8	0,4	1,1	0,5	0,9	—
11. GII clay	47,1	35,3	0,8	1,5	0,7	0,3	0,6	0,3	14,3	—
12. AlF ₃	—	1,9	—	tr.	—	—	—	—	—	97,9
13. Alumina, Al ₂ O ₃	0,1	99,7	tr.	tr.	tr.	tr.	0,1	—	—	—
14. Aluminiumhy- droxide Al(OH) ₃	0,1	65,8	tr.	tr.	tr.	tr.	0,1	—	34,0	—
15. Hydrate alumi- na, Al ₂ O ₃ · H ₂ O	0,1	84,5	tr.	tr.	tr.	tr.	0,1	—	15,2	—
16. Ondbábavölgy cyclonized clay	72,3	17,3	0,1	1,5	0,9	0,2	1,9	1,0	5,2	—
17. Ondbábavölgy washed clay	70,1	19,4	0,2	1,0	0,7	0,5	1,2	0,7	6,1	—
18. Sárísáp china clay, grade I	55,8	29,6	1,0	1,2	0,3	0,2	0,9	0,1	10,6	—

begins at a lower temperature because of the mineralizing effect of the hydrogen fluoride formed by the reaction of aluminium fluoride [4—8]. On the addition of greater quantities of aluminium fluoride a porous highly refractory product is obtained, while smaller quantities of the additive promote not only kaolinite—mullite transformation at lower temperatures, but the rate of the transformation processes is also raised.

We have already determined by differential thermogravimetric tests the quantity of aluminium fluoride needed for a clay from *Bánkpetény* to

obtain higher reaction rates without increased porosity. The further tests were carried out with Zettlitz china clay which can be practically regarded as a clay mineral. The compositions studied are summed up in Table II. To a previously homogenized china clay from Zettlitz increasing quantities of aluminium fluoride were added. Differential thermogravimetric curves were plotted from the mixture of china clay and aluminium fluoride. From the series of tests it is possible to follow the reaction kinetics of the system aluminium fluoride + Zettlitz china clay as a function of the quantity of aluminium fluoride [9, 10].

Table II

Composition of the materials used in the differential thermogravimetric tests

No. of experiments	Petény clay, %	Grossalmerod clay, %	Zettlitz china clay, %	Al ₂ O ₃	Δ OH) ₃	AlF
1.	—	—	100	—	—	—
2.	—	—	95	—	—	5
3.	—	—	90	—	—	10
4.	—	—	87	—	—	13
5.	—	100	—	—	—	—
6.	—	97	—	—	—	3
7.	—	97	—	—	3	—
8.	—	97	—	3	—	—

Fig. 1 is the DTG pattern of Zettlitz china clay without AlF₃, Fig. 2 the same with 5 per cent, Fig. 3 with 10 per cent and Fig. 4 with 13 per cent AlF₃. These four figures show that in the case of Zettlitz china clay which is practically a clay mineral there is also a limiting value beyond which the reaction mechanism undergoes a fundamental change (Figs 3 and 4). Comparing this result with those of the earlier tests we may state that there will be a change in the nature of reaction mechanism when the quantity of the aluminium fluoride added is greater than 10 ÷ 12 per cent of the clay mineral content, that is to say, the quantity of AlF₃ which causes a change being a function of the clay mineral content [12].

The kinetic processes are best followed on the DTG curves. A maximum rate in the loss of weight corresponding to the dehydroxylation of clay without additive occurs at 570 °C. The peak of the endotherm effect is at about 575 °C, that of the exotherm effect at 970 °C. There is no essential change in the reaction mechanism of Zettlitz china clay up to about 10 per cent aluminium fluoride content. The endotherm effect appears between 585 °C and 590 °C, while the exotherm effect was found at gradually lower temperatures. With ten per cent of aluminium fluoride additive the exotherm effect is at

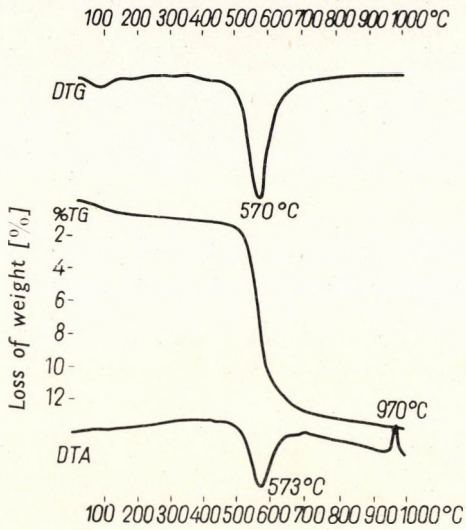


Fig. 1. The DTA and DTG patterns of Zettlitz china clay

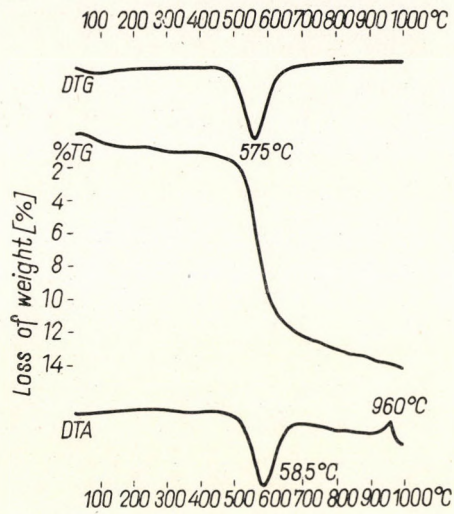


Fig. 2. The DTA and DTG patterns of Zettlitz china clay containing five per cent of aluminium fluoride

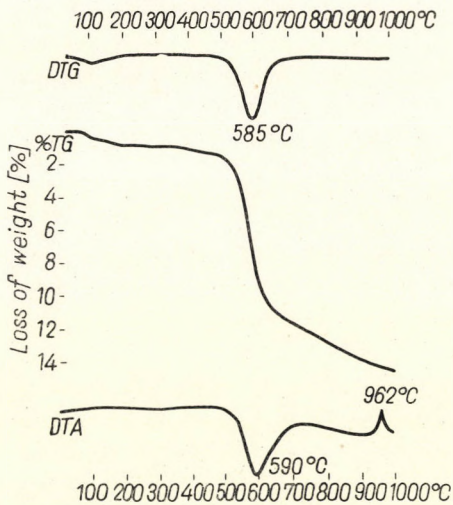


Fig. 3. The DTA and DTG patterns of Zettlitz china clay containing ten per cent of aluminium fluoride

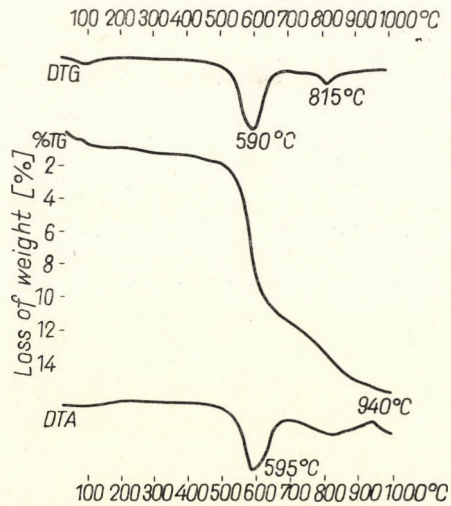


Fig. 4. The DTA and DTG patterns of Zettlitz china clay containing thirteen per cent of aluminium fluoride

962 °C and this drops to 940 °C with 13 per cent additive. The rate maximum of the weight loss is shifted in the direction of higher temperatures. Beyond 10 per cent aluminium fluoride a new rate maximum appears at above 800 °C and this is associated with a mild endotherm effect. The first rate maximum of weight loss corresponding to the dehydroxylation of the clay minerals decreases more and more with the growing quantity of aluminium fluoride. As indicated by earlier experiments this maximum can hardly be detected on the DTG curves when the aluminium fluoride content reaches 45 ÷ 50 per cent [9, 11].

According to earlier static experiments the second rate maximum of the weight loss indicates the formation of aluminium fluorosilicate (topaz). The third maximum above 1000 °C corresponds to the decomposition of the topaz-like phase and the formation of mullite through the aluminium fluorosilicate phase [5]. Mullite formation through the kaolinite phase begins because of the mineralizing action of aluminium fluoride i.e. of hydrogen fluoride at gradually higher temperatures [9]. The decrease in the rate of weight loss and its shifting in the direction of higher temperatures with increasing quantities of AlF_3 indicates that this latter is partly incorporated into the kaolinite i.e. metakaolinite structure. The results of the differential thermogravimetric and analytical tests in Figs 5, 6, 7 and 8 illustrate the reaction kinetical effect of 3 per cent of AlF_3 , $\text{Al}(\text{OH})_3$ and Al_2O_3 compared to Grossalmerod clay without additives.

With 3 per cent $\text{Al}(\text{OH})_3$ or Al_2O_3 no changes were observed, but the same quantity of AlF_3 considerably reduced the temperature of the exotherm effect. This phenomenon is a further evidence in support of the mineralizing action of the fluoride ion. On the other hand, the ineffectiveness of $\text{Al}(\text{OH})_3$ and Al_2O_3 — which is evident even with larger quantities — is in contradiction with the findings of several authors who state that these compounds raise the temperature of the exotherm effect [13]. A lack of effect is more easily understandable as it indicates that no reaction takes place with the additives.

Similar results were obtained when the three compounds were added in larger quantities. These experiments have not been completed yet and will furnish further data on the reaction accelerating effect of AlF_3 .

These tests aim at finding an answer to the question whether 3% AlF_3 might enhance the reactivity of $\text{Al}(\text{OH})_3$ and Al_2O_3 , or in other words, whether the AlF_3 additive will promote the transformation of $\text{Al}(\text{OH})_3$ or Al_2O_3 and the available SiO_2 into mullite. In addition to the DTA tests static tests were also carried out with $\text{Al}(\text{OH})_3$ or Al_2O_3 additives without or with various quantities of AlF_3 . X-ray patterns indicate improved conditions for incorporation i.e. for mullite formation, but the results are still insufficient to allow final qualitative conclusions.

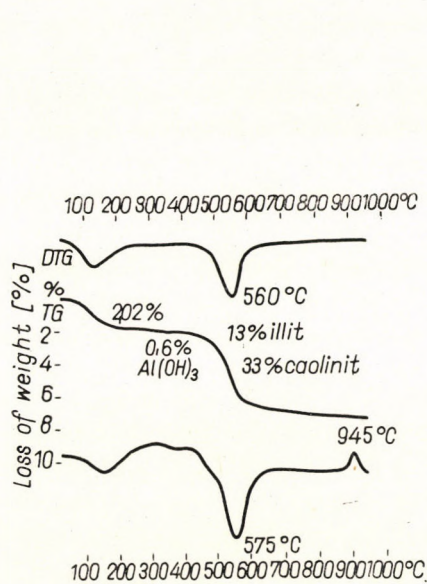


Fig. 5. The DTA and DTG patterns of Grossalmerod clay

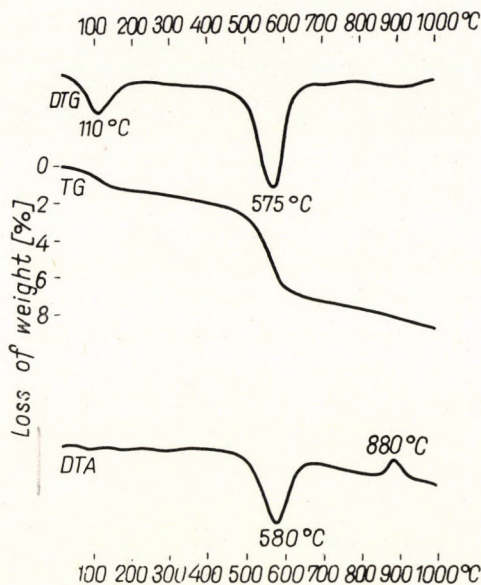


Fig. 6. The DTA and DTG patterns of Grossalmerod clay containing three per cent of aluminium fluoride

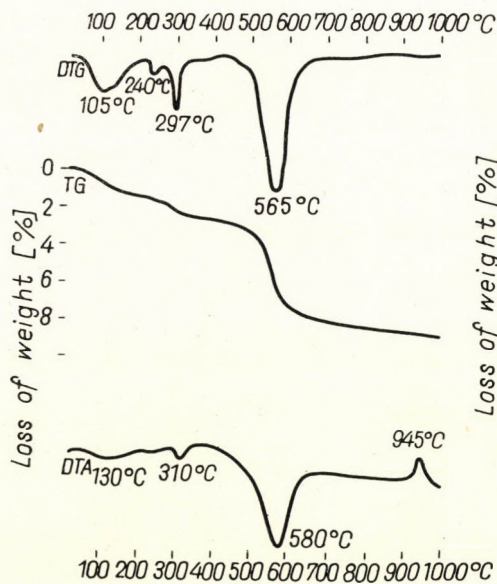


Fig. 7. The DTA and DTG patterns of Grossalmerod clay containing three per cent of aluminium hydroxide

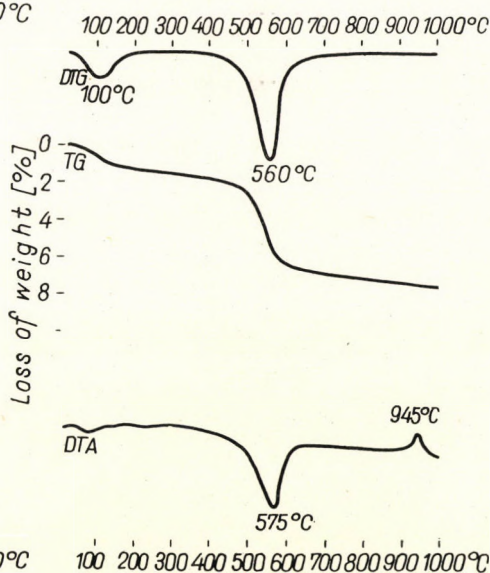


Fig. 8. The DTA and DTG patterns of Grossalmerod clay containing three per cent of aluminium oxide

3. Calcination trials in plant equipment

Experiments under plant conditions were carried out with three different types of materials:

- a) Refractory brick, 35 Seger cone;
- b) furnace brick with higher aluminium oxide content;
- c) acid ladle brick.

Table III shows the composition of the basic materials.

Table III

Composition of the materials used in the plant experiments

	SK 35	Ladle brick	Furnace brick
Briessen clay	30	—	15
Petény clay	10	55	—
Rakó calcined	30	—	—
PM calcined	30	—	—
Corundum	—	—	11
PFI calcined slate	—	—	64
G II clay	—	—	10
Sárisáp sand	—	20	—
Fire clay chippings	—	25	—
AlF ₃	3	3	3

In the first case calcination at 1380–1400 °C was used in the manufacturing process. The basic material of the 35 Seger cone bricks calcined after normal technological preparation without and with 3 per cent aluminium fluoride additive at 1280 °C maximum temperature, thus calcination temperature was 100 °C lower than in the usual works technology. The material was built into that section of the kiln which had a temperature of 1280 °C (checked with the Seger cone).

The experimental results are summed up in Table IV.

The samples received the following symbols:

1. Refractory brick 35 Seger cone, without additive, calcined at 1380 °C;
2. 35 Seger cone brick, without additive, calcined at 1280 °C;
3. refractory brick of 35 Seger cone, with 3% AlF₃ additive, calcined at 1280 °C.

The texture of the 35 Seger cone brick without AlF₃ additive can be observed on the microsection shown in Fig. 9, the texture of the brick calcined

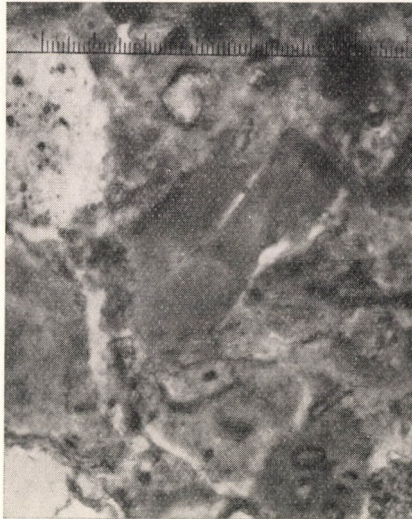


Fig. 9. The microphoto of the texture of 35 Seger cone fire clay brick (magnification 500 ×)

Table IV

*Average results of the experiments aiming to increase the strength
of 35 Seger cone fire clays*

	1.	2.	3.
Al ₂ O ₃ , %	40,1	40,0	41,0
TiO ₂ , %	0,9	0,8	0,9
Fe ₂ O ₃ , %	2,2	2,3	2,0
Bulk density, g/cm ³	1,9	1,9	1,9
Water absorption, %	15,5	15,3	12,1
Apparent porosity, %	29,5	28,3	22,4
Compression strength, kp/cm ²	160	92	365
Coefficient of compression strength increase	1,0	—	2,28

with AlF₃ additive in Fig. 10. There is a significant difference between the two microsections, that of the material with fluoride additive being far more uniform than the other.

In the second case furnace brick both with and without additive was calcined in a continuous furnace at 1500 °C. Experimental data are given in Table V. No. 1 refers to bricks without additive, No. 2 to a material prepared

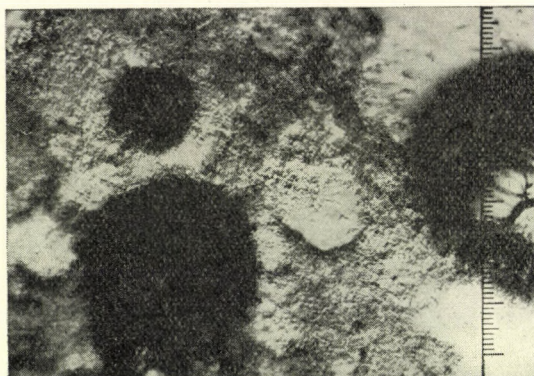


Fig. 10. The microphoto of the texture of 35 Seger cone fire clay brick calcined with three per cent aluminium fluoride addition (magnification 500 ×)

Table V

Results of the experiments aiming at the increase of the strength of commercial furnace bricks

	1.	2.
Al ₂ O ₃ , %	47,9	49,8
SiO ₂ , %	49,4	48,6
Fe ₂ O ₃ , %	1,5	1,3
Bulk density, g/cm ³	2,0	2,0
Water absorption, %	13,0	11,6
Apparent porosity	26,0	23,2
T _o , °C*	1300	1390
T _a , °C*	1490	1520
T _e , °C*	1580	1620
Compression strength, kp/cm ²	346	672
Coefficient of compression strength increase	1,0	1,94

* T_o, T_a, T_e are values pertaining to the evaluation of the texture of the brick without fluoride is shown in Fig. 11, that of the brick with 3% AlF₃ additive in Fig. 12 (the microphotographs were taken by Mr. Z. VERESS).

* T_o, T_a, T_e are values pertaining to the evaluation of the softening point below 2 kp/cm². The data represent the averages of several measurements. T_o is the temperature at which the material begins to soften; T_a the temperature at which the decrease in height due to softening reaches 3 mm; T_e the temperature of complete softening, with the complete loss of the height of the sample (10 mm).

with 3% aluminium fluoride. The texture of the brick without fluoride is shown in Fig. 11, that of the brick with 3% AlF₃ additive in Fig. 12 (the microphotographs were taken by Mr. Z. VERESS).

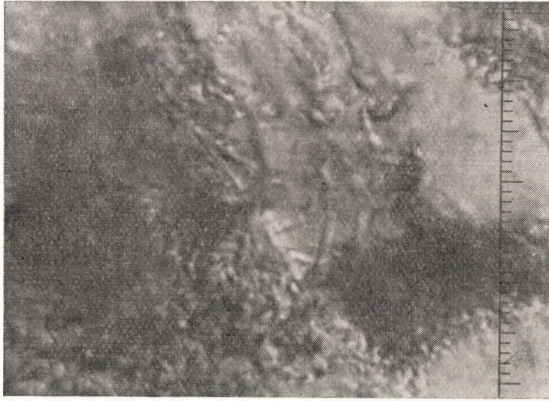


Fig. 11. The microphoto of the texture of furnace brick (magnification 2000 ×)

Table VI

Results of the experiments aiming at the increase of the strength of semi-acid commercial ladle brick

	Ladle brick	
	without additive	with 3% AlF_3
SiO_2	70,0	69,0
Al_2O_3	20	21,2
Segei cone (refractory index)	30	31
W (water absorption) %	12,6	12,8
σ (compression strength) kp/cm^2	137	318
Coefficient of compression strength increase	1,0	2,32



Fig. 12. The microphoto of the texture of furnace brick calcined with three per cent aluminium fluoride addition (magnification 2000 ×)

The data of the semi-acid ladle brick calcined with 3% AlF_3 are given in Table VI and show a two- to threefold increase in strength. Examination of the Al_2O_3 content of the three experimental bricks shows an unequivocally significant increase in strength. The smaller the Al_2O_3 content of the product the greater is this effect. This may be explained by the fact that in products with smaller Al_2O_3 content 3% AlF_3 represents a greater relative increase in Al_2O_3 content and consequently also a greater relative increase in mullite content than in products with higher Al_2O_3 contents. The unequivocally and fundamentally significant increase in strength may, of course, be explained by the mineralizing effect of hydrogen fluoride, as has been demonstrated earlier.

III. Technological importance of the experimental results

The process for improving the quality of refractories by the addition of small quantities of aluminium fluoride has been patented and is considered to ensure a number of technological advantages.

One of the main advantages of the process — which also facilitates its commercial realization — is that it does not alter the nature of the hitherto applied operations, but involves only a single plus weighing in the formulation of the basic materials. Thus the process can be included without difficulty, without new equipments, into the existing manufacturing process.

Small quantities of the aluminium fluoride additive first of all result in a wider calcination range, as they provide more favourable calcination conditions. This is related to the fact that the part processes of calcination proceed more rapidly and also at lower temperatures. Both the reaction kinetical and the plant experiments have proved that the calcination temperature can be lowered with adequate guarantee. As a first step calcination temperature was lowered by 50 °C without any notable risk, and it may be predicted that this can be further lowered later on.

Higher reaction rate offers a possibility of increasing calcination rate. In circular kilns the rate of progress of the fire, in continuous furnaces the rate of progress of the material may also be raised, which would result in an increased capacity of the equipments of the refractory industry.

The advantages represented by higher refractory properties may result in the production of e.g. 35 Seger cone products from poorer quality raw materials. Analysis of the experimental data led to the conclusion that this quality may be produced from 32/33 Seger cone basic material with the addition of 3% of aluminium fluoride. It is, moreover, possible to produce 35 Seger cone or even products of far higher quality from Hungarian raw materials provided the 2 ÷ 3% of aluminium fluoride is supplemented with a few per cent of aluminium hydroxide or hydrated alumina. These results

forecast considerable quality improvements and cost reductions when applied in the industry of refractory materials. As an increase in compression strength is related to an increase in the cohesion forces these results will bring about a significant rise in the period of useful life of the refractories.

On the addition of 3% of aluminium fluoride no damage can occur in the refractories of the calcination furnace. There will be a higher percentage of mullite on the surface of the refractories which, however, cannot be considered as damage. The calcined refractory will contain $0,2 \div 0,6\%$ of residual fluoride. The $1,4 \div 1,7\%$ of fluorine in the effluent gas is diluted to a degree that its detectable quantity is $500 \div 800$ ppm. a concentration in which it has no corrosive effect on metals. As a rule there must be a minimum contact between the flue gas and the metal components the corrosion resistance of which can be increased with a coat of heat resistant lac or phosphate glass.

REFERENCES

1. HARDERS, F.—KIENOW, S.: Feuerfestkunde. Springer Verlag, Berlin 1960.
2. SZABÓ, L.: A vaskohászat építőanyagai; samottok (The structural materials in iron metallurgy; Fire bricks). Akadémiai Kiadó, Budapest 1960.
3. SÖVEGJÁRTÓ, J.: Bázikus kohászati tűzállóanyagok (Alkaline metallurgical refractories). Akadémiai Kiadó, Budapest 1960.
4. LŐCSEI, B. P.: *Tonindustrie Zeitung* **88** (1964), 127—132; *Építőanyag* **16** (1964), 64—74.
5. LŐCSEI, B. P.: *Acta Chim. Hung.* **39** (1964), 271—293.
6. LŐCSEI, B. P.: *Acta Chim. Hung.* **38** (1963), 59—88.
7. LŐCSEI, B. P.: *Nature* (1964); 601, 700.
8. LŐCSEI, B. P.: *Keramische Zeitschrift* **16** (1964), 350—351.
9. LŐCSEI, B. P.: *Acta Chim. Hung.* **33** (1962), 197—210.
10. LŐCSEI, B. P.: *Építőanyag* **15** (1963), 329—336.
11. BOROS, J.: Report on thermogravimetric tests (in Hungarian; manuscript). ÉaKKI, Budapest 1963.
12. LŐCSEI, B. P.: *Építőanyag*, **16** (1964), 363—370.
13. GROFCSIK, J.: The Mullite, its Structure, Formation and Significance. Akadémiai Kiadó, Budapest 1961.

DIE WIRKUNG DES ZUSATZES GERINGER ALUMINIUMFLUORIDMENGEN AUF DIE FESTIGKEIT VON FEUERBESTÄNDIGEN MATERIALIEN

B. LŐCSEI

ZUSAMMENFASSUNG

Die während des Brennens verschiedener feuerbeständiger Materialien auf die Vorgänge ausgeübte Wirkung des Aluminiumfluorids kann mit Hilfe von differential-thermogravimetrischen und analytischen Untersuchungen gut verfolgt werden. Eine geringe Menge Aluminiumfluorid ändert den Charakter des kinetischen Prozesses nicht, die Verhältnisse der Aktivierungsenergie ändern sich jedoch. Der Dehydroxylationvorgang wird durch das Eindringen und die teilweise Hydrolyse des Aluminiumfluorids verzögert, die Aktivierungsenergie der Mullitbildung wird dagegen durch den Fluoridzusatz vermindert. Über einem gewissen Grenzwert, der etwa $10 \div 12\%$ des Tonmineralgehaltes beträgt, ändert sich der Charakter der während des Brennens abspielenden Vorgänge grundsätzlich und wird immer komplizierter. Die genannte Aluminiumfluoridmenge gibt diejenige Grenze an, bis zu welcher das

Aluminiumfluorid die Brennvorgänge nur beschleunigt, bzw. die Qualität des Produktes verbessert. Über dieser Mengengrenze nimmt bereits die Porosität des Endprodukts zu, wie dies schon früher dargelegt worden ist. $2 \div 4\%$ Aluminiumfluorid erhöht bei Beschleunigung des Brennvorgangs der feuerbeständigen Materialien die Festigkeit des Endprodukts um $90 \div 120\%$, verringert die scheinbare Porosität und hat außerdem noch mehrere günstige technologische Wirkungen.

L'INFLUENCE DE L'ADDITION DE FAIBLES QUANTITÉS DE FLUORURE D'ALUMINIUM SUR LA RÉSISTANCE MÉCANIQUE DES MATIÈRES RÉFRACTAIRES

B. LÓCSEI

RÉSUMÉ

L'influence du fluorure d'aluminium sur les phénomènes se déroulant au cours de la cuisson de différentes matières réfractaires est bien mise en évidence par l'examen différentiel thermo-gravimétrique et par l'analyse. Une petite quantité de fluorure d'aluminium ne change pas le caractère du processus cinétique, mais les conditions énergétiques de l'activation sont modifiées. L'insertion et l'hydrolyse partielle du fluorure d'aluminium retarde le processus de déshydroxylation, par contre l'énergie d'activation de la formation de mullite est réduite par addition de fluorure. Au-dessus d'une certaine valeur limite équivalant à $10-12\%$ du contenu en minéraux d'argile, le caractère des phénomènes se déroulant au cours de la cuisson change complètement et devient de plus en plus complexe. La quantité de fluorure d'aluminium mentionnée est la limite jusqu'à laquelle le fluorure d'aluminium accélère la cuisson et améliore la qualité du produit. Au-dessus de cette limite, la porosité du produit fini augmente déjà, comme il a été démontré antérieurement. 2 à 4% de fluorure d'aluminium accélèrent la cuisson des réfractaires, augmentent de 80 à 120% la résistance mécanique du produit fini, réduisent la porosité apparente et agissent favorablement sur la technologie.

ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕБОЛЬШОЙ ДОБАВКИ ФТОРИСТОГО АЛЮМИНИЯ НА ИЗМЕНЕНИЕ ПРОЧНОСТИ ОГНЕУПОРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Б. ЛЕЧЕИ

РЕЗЮМЕ

Действие фтористого алюминия, оказываемое на обжиг различных огнеупорных материалов, можно хорошо проследить при помощи дифференциально-термогравиметрического и аналитического исследования. Небольшое количество фтористого алюминия не изменяет характера кинетического процесса, но изменяются условия энергии активации. Процесс дегидроксилизации замедляется встраиванием фтористого алюминия и неполным гидролизом, в свою же очередь, добавление фторида уменьшает энергию активации образования мullита. Выше определенных пределов, что составляет прилб. $10 \div 12\%$ содержания глинистого минерала, характер процессов, протекающих во время обжига, изменяется существенным образом и становится все более сложным. Указанное количество фтористого алюминия определяет ту границу, до которой фтористый алюминий только ускоряет процессы обжига, или же улучшает качество продукта. Сверх этой количественной границы увеличивается также пористость продукта, как это было показано уже раньше. При добавлении фтористого алюминия в количестве $2 \div 4\%$ фтористый алюминий, наряду с ускорением процессов обжига огнеупорных материалов, увеличивает прочность конечного продукта на $80 \div 120\%$, снижает кажущуюся пористость и, кроме этого, благоприятно воздействует на ряд технологических факторов.

Si—SiC *p*—*n* HETEROJUNCTIONS

J. LUKÁCS

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH INSTITUTE FOR ELECTRICAL INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received August 11, 1965]

The paper examines the possibilities for realizing the Si—SiC *p*—*n* heterojunctions and deals with the experiments made for recording the energy band diagram of the heterojunctions. From the results the conclusion can be drawn that in an Si—SiC heterojunction the most favourable rectifying characteristic can be attained with an *n* — *n*⁺ junction.

I. Introduction

Our earlier studies in this field were related to silicon carbide used in polycrystalline, non-linear resistors. In the course of these studies two essential standpoints were set as a goal. Endeavours were made, first, to improve the non-linearity of resistors and, second, to improve their thermal stability. The latter eventually was reduced to a study of volumetric and doping problems. On the other hand, the first problem, viz. the improvement of the non-linearity of resistors put into prominence the investigation of phenomena taking place on the surface of the SiC grains.

In this field earlier recognitions extended merely to the purification of the raw material and to the introduction of a single sort of doping [3]. A closer consideration of the problem subsequently resulted in the conclusion that an appreciable improvement of non-linearity could be ensured only by the developing of avalanche phenomena amidst well defined circumstances.

For this purpose the most convenient method would have been to study the *p*—*n* layers created in a natural SiC monocrystal. However, the method did not appear realizable because of the large surfaces required for the study.

Under these circumstances, at the beginning of 1964, as a sort of a compromise, the practicability of bringing about Si—SiC *p*—*n* heterojunctions was raised. Our research team was fully aware of the fact that as a consequence of the appreciable difference in the lattice constants (Si 5,42 Å; SiC = 4,35 Å) the SiC produced on the surface of the monocrystalline Si slabs would not be of monocrystalline character.* Nevertheless the heterojunctions were believed to be of a more defined character than the contact conditions of two polycrystalline bodies.

* According to data taken from literature heterojunctions of good quality cannot be produced unless the difference in the lattice constants is kept below 5 to 8 per cent at the most.

II. Technology for the production of Si—SiC heterojunctions

A number of experiments were carried out by varying considerably the experimental parameters and also the materials used. Among the various technological variants the one to be described subsequently was found to be of the best for the purpose, viz. to produce one of the conceivably best $p-n$ or $n-n^+$ junctions.

As starting material monocrystalline p - and n -type Si slabs of diameter 22 mm and of 0,5 mm thickness were used. The departure of the 111 planes from the geometrical plane of the slab was 3 degrees at the most. On the slab first a 2000 to 3000 Å thick layer of silicon dioxide was brought about by a method developed by our research worker T. SALÁNKI of the Semi-Conductor Laboratory. After a partial removal of this layer to ensure a leakage path, the slabs were laid in a tube-furnace where the temperature was maintained at 1350 degrees centigrade.

A mixture of argon appr. 10 litres/h and methane 0,3 litres/h was allowed to stream through the furnace for 4 to 24 hours. In this manner beta-silicon carbide was produced on the surface of the slabs. While heating continued n and p doping was effected by adding nitrogen and triethyl aluminium respectively to the carrying gas. Redundant carbon was removed from the slabs by heating in oxygen, and the redundant silicon carbide on the other side of the slab was scraped off mechanically. Thereafter both the silicon carbide layer and the silicone surface were coated with gold in a vacuum, and the gold layers applied to the slabs were stoved in a medium of hydrogen at a temperature of 800 degrees centigrade.

III. Theoretical and experimental study of the Si—SiC heterojunctions

Since no data could be found in literature on the energy band graphs of the Si—SiC heterojunctions, the research team had to do this work itself. The graphs were drawn up by making use of the most probable forbidden band and escape energy values available in literature. The fixation of uncertainty was valid in particular for the escape energy, for here values varying within wide limits could be established dependent whether the values were determined on hand of measurements of the contact potential, thermic emission, or photoemission.

The energy band graphs were plotted for $p-n$ and $n-n$, or $n-p$ junctions, as the case may be, in conformity with the Si—SiC sequence. On hand of these plots then the probable forward and reverse directions could be determined. In several instances the determined directions were in conflict with the rules valid for $p-n$ junctions formed in the same substance.

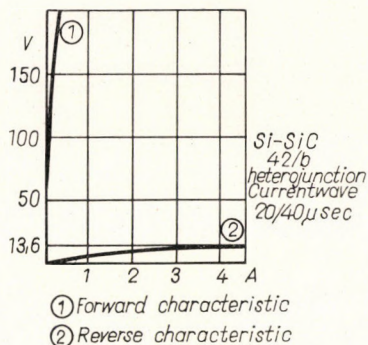


Fig. 1

In Fig. 1 the forward and the reverse characteristics of 200 ohm. cm, type n Si and n^+ SiC junctions plotted by means of an oscillograph are shown. In all likelihood resistivities of an appreciable value have a part in the 10-volt forward voltage drop (Fig. 2). Else the diode may be taken as one

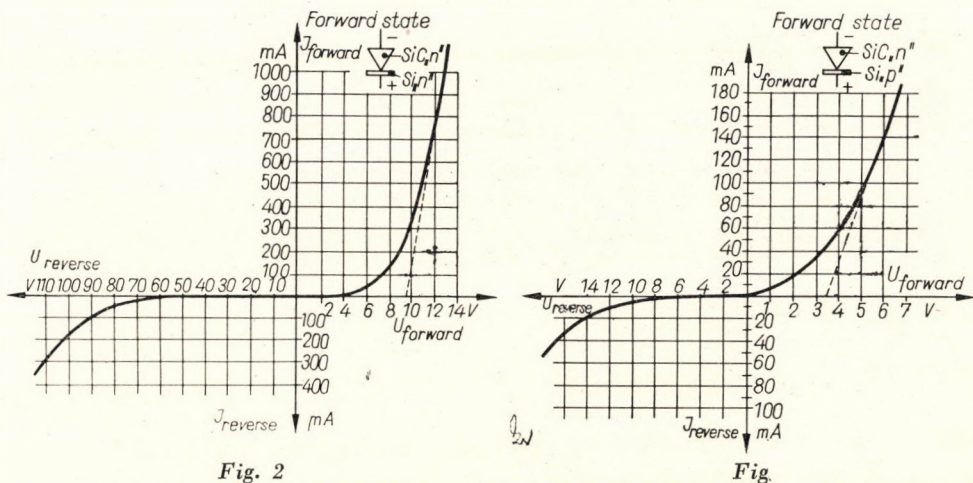


Fig. 2

Fig.

having a reverse voltage of 80 to 100 volts. In Fig. 3 the forward and reverse characteristics of a silicone of low resistivity (1 ohm cm) and of a silicon carbide in like way doped to n^+ are shown. Obviously conditions are more unfavourable by far.

IV. Evaluation of the results of the studies

Experiments so far made are merely tentative. To this date the best possible rectification characteristics in a Si-SiC heterojunction could be achieved by means of an $n-n^+$ junction. So far, owing to the inability to

generate a saturation current free of secondary effects, a study of the avalanche effects was out of the question.

*

The author wishes to give expression to his thanks to specialist Mr. G. BAJOR who has checked on the graphs, and to co-worker Mr. G. MADARASI responsible for the extremely exhausting diffusion experiments.

REFERENCES

1. LUKÁCS, I.: Feszültségfüggő ellenállások túlfeszültségelvezetők számára (Voltage-dependent resistance for lightning arresters). *Elektrotechnika* (1952), December.
2. LUKÁCS, I.—BOGOLY, I.: A SiC jelene és jövője az erősáramú villamosiparban (The present and future of SiC in the heavy current electrical industry). *Elektrotechnika* (1957), February.
3. LUKÁCS, I.: Weitere Verbesserung nichtlinearer Widerstände. *Energietechnik* 10 (1963), 459—460.

Si—SiC $p-n$ HETEROÜBERGÄNGE

J. LUKÁCS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit untersucht die Möglichkeiten für das Zustandekommen von Si—SiC $p-n$ Heteroübergängen und beschreibt die zwecks Aufnahme des Energiespektrums der Heteroübergänge durchgeführten Versuche. Auf Grund der Ergebnisse kann festgestellt werden, daß in dem Si—SiC Heteroübergang mit dem Übergang $n-n^+$ die günstigste Gleichrichtercharakteristik erreicht werden kann.

JONCTIONS HÉTÉROGÈNES $p-n$ Si—SiC

J. LUKÁCS

RÉSUMÉ

L'étude examine les possibilités de réalisation des jonctions hétérogènes $p-n$ Si—SiC et fait connaître les essais faits pour établir le diagramme des bandes d'énergie des jonctions hétérogènes. Les résultats permettent de constater que dans la jonction hétérogène Si—SiC, la caractéristique de redressement la plus favorable peut être atteinte avec une jonction $n-n^+$.

$p-n$ ГЕТЕРОСВЯЗИ Si — SiC

Й. ЛУКАЧ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется возможность создания $p-n$ гетеросвязей Si — SiC и описываются опыты, проведенные с целью снятия диаграммы энергополосы гетеропереходов. На основе полученных результатов можно установить, что в гетеросвязи Si — SiC наиболее выгодная выпрямляющая характеристика может быть достигнута при помощи перехода $n - n^+$.

ANALYSIS OF A VARACTOR FREQUENCY DOUBLER

V. BIRÓ

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received September 28, 1965]

This article deals with the analysis of the operation of parallel coupled varactor frequency doubler circuit for the case when in this circuit a varactor with abrupt junction is used. The analysis takes into account the varactor loss and on this base determines the maximum convertible power, the highest efficiency and the dissipation occurring in these conditions. Further, the impedance relation necessary to attain the above parameters and the required varactor bias are also given. The relations determining the above parameters contain the physical quantities which allow the engineering design of the doubler circuit and the choice of the necessary varactor type by means of these relations.

I. Introduction

During the last years, the parametric frequency multiplication has been widely applied in microwave technics, making use of the varactor diodes for this purpose; namely these varactor diodes are featured by changing their capacitances within wide limits, on the effect of the voltage. MANLEY and ROWE [1] have pointed out the advantage of this method of frequency multiplication enabling, in the ideal case, even a 100 per cent conversion efficiency. Though in case of ideal circuits and varactors, a 100 per cent conversion efficiency can be obtained, independently of the order of magnitude of the multiplication, in practice, however, both the varactor and the linear circuits being lossy, with increasing multiplication considerable practical difficulties are encountered in endeavouring to attain high efficiencies, due to the increasing requirements imposed on the passive circuits and varactors. A number of publications have dealt with this problem [2-6].

The high interest and the general use of the frequency doubler circuits can be accounted for by the above argumentation. The papers dealing with the analysis of the frequency doubler [2, 4, 7-10] expound on most problems of this subject-matter but the methods of the analysis and the extensive scope of the analysis yield quantities which are handled with difficulty by the engineers designing the doubler circuits. In addition to this, the fact that the varactor is a lossy circuit element is not adequately considered in connection with a number of problems (e.g. convertible power). The question of the impedances required for optimum conditions can also be classified

among these problems. The following analysis is carried out with quantities which can be handled easily by the designer and also the lossy nature of the varactor is considered; the analysis also covers the determination of the required impedances, with due consideration of the impedance transforming feature of the varactor.

For easy handling, it is the parallel-connected frequency doubler which is advantageous for practical purposes and therefore in the following we are dealing with the examination of such a circuit.

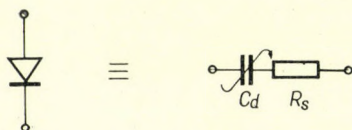


Fig. 1. Series equivalent circuit for varactor

The varactors (parametric diodes) suitable for application in frequency multiplier or divider circuits are featured by the characteristic that the following differential relation exists between their charge and voltage:

$$\frac{dq}{dV} = C_0 \left(1 - \frac{V}{\Phi}\right)^{-\theta} \quad (1)$$

where q the charge of the varactor; V voltage across the varactor; Φ the contact potential; θ factor of nonlinearity. The loss of the varactor is usually considered either by a series resistance or a parallel resistance. In the following, the series substitution is used.

In Fig. 1 $C_d = dq/dV$ means the differential capacitance, R_s the series resistance representing the loss. Let us assume that a current i is flowing through the varactor; now let us establish the relation between the voltage on varying capacitance C_d and current i . As

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dV} \frac{dV}{dt},$$

consequently

$$i = C_0 \left(1 - \frac{V}{\Phi}\right)^{-\theta} \frac{dV}{dt};$$

so let us write

$$u = 1 - \frac{V}{\Phi},$$

and thus

$$i = -\Phi C_0 U^{-\theta} \frac{du}{dt},$$

hence

$$U = \left[-\frac{1-\theta}{\Phi C_0} \left(\int i dt - q_0 \right) \right]^{1/\theta} \quad (2)$$

In Equ. (2), $\int i dt$ is some primitive function of i , q_0 being the integration constant.

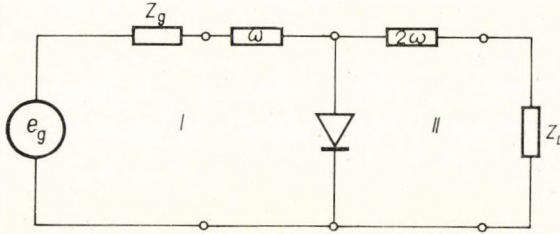


Fig. 2. Equivalent circuit of frequency doubler

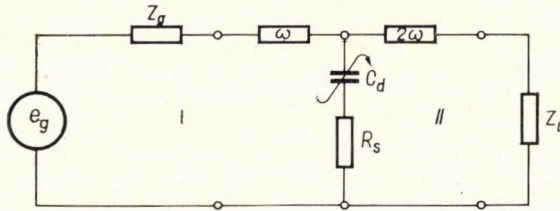


Fig. 3. Equivalent circuit of frequency doubler

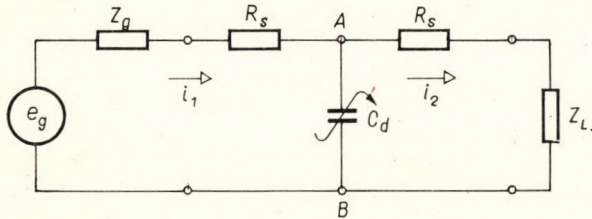


Fig. 4. Equivalent circuit of frequency doubler

Let us now examine the most general form of the so-called parallel connected frequency doubler circuit. Such a circuit is shown in Fig. 2.

In Fig. 2 Z_g is the output impedance of the driving generator at frequency ω and Z_L is the load impedance at frequency 2ω . The two poles noted by ω and 2ω possess the feature that their impedances are, at frequencies ω , resp. 2ω equal to zero, and infinite at any other frequency. Fig. 2 can be transformed by means of Fig. 1 into Fig. 3. As current of frequency ω is flowing only in circuit I and current of frequency 2ω exclusively in circuit II, omitting the filter circuits in the final result, Fig. 4 will be obtained [3].

In Fig. 4 currents i_1 and i_2 indicate that in one of the closed circuits there flows exclusively a current of frequency ω and in the other one only a current of frequency 2ω . The equivalent circuit in Fig. 4 is suitable for carrying out its analysis by means of relation (2). This analysis is carried out as follows. Let us investigate in the circuit shown in Fig. 4 the electrical state of the varying capacitance C_d between points A and B . Let us calculate the voltage drop across C_d caused by the two currents. In the knowledge of the voltages and currents, the equivalent impedances replacing the varying capacitance C_d between points A and B can be estimated. Making use of the voltages and currents of frequencies ω resp. 2ω , let us calculate the power transfer from the circuit of frequency ω into circuit of frequency 2ω , the efficiency, etc. Knowing the voltage occurring across C_d on the effect of the two currents, let us introduce parameters determining the electrical state of the varying capacitance and to express, by means of these parameters, the power transfer from circuit of frequency ω to circuit of frequency 2ω together with the efficiency, etc. Finally, let us establish the relation of the above electrical state of varying capacitance C_d and of the external circuit impedances on purpose to determine which impedances should be produced in the external circuits to obtain the electrical state defining the required power transfer, efficiency, etc.

II. Ideal abrupt junction varactor with two currents flowing through it

1. Equivalent impedances for the varying capacitances

Equ. (2) has an exact solution if $\Theta = 1/2$. The varactor type where $\Theta = 1/2$ is generally called an abrupt junction varactor. Let us assume that

$$i = i_1 + i_2 ;$$

$$i_1 = I_1 \cos \omega t , \quad (3)$$

$$i_2 = I_2 \cos (2 \omega t + \varphi_2) . \quad (4)$$

In this case, Equ. (2) has the following form:

$$u = 1 - \frac{V}{\Phi} = \left(\frac{q_0}{2 C_0 \Phi} \right)^2 \left[1 - \frac{I_1}{q_0 \omega} \sin \omega t - \frac{I_2}{2 q_0 \omega} \sin (2 \omega t + \varphi_2) \right]^2 . \quad (5)$$

Equ. (5) enables us to calculate the components of the voltage of angular frequencies ω , 2ω , 3ω and 4ω . As according to our assumption, only currents of angular frequencies ω and 2ω flow through the varactor, the voltages of angular frequencies 3ω and 4ω do not produce any power and can be left out of consideration. In the knowledge of voltages and currents of angular

frequencies ω and 2ω the impedances representing the varactor at angular frequencies ω , resp. 2ω can be easily determined by establishing the relation of the voltages, resp. currents of the corresponding frequencies. Thus, the following relations (see Appendix I) can be easily obtained:

At angular frequency ω

$$R_1 = -\frac{1}{8} \frac{I_2 \cos \varphi_2}{\Phi (\omega C_0)^2}, \quad (6)$$

$$X_1 = -\frac{1}{8\Phi} \left[\frac{\sin \varphi_2}{(\omega C_0)^2} I_2 + \frac{4q_0}{\omega C_0^2} \right]; \quad (7)$$

where

$$Z_1 = R_1 + jX_1.$$

At angular frequency 2ω

$$R_2 = \frac{1}{8} \frac{\cos \varphi_2}{\Phi (\omega C_0)^2} \frac{I_1^2}{I_2}; \quad (8)$$

$$X_2 = -\frac{1}{8\Phi} \left[\frac{\sin \varphi_2}{(\omega C_0)^2} \frac{I_1^2}{I_2} + \frac{2q_0}{\omega C_0^2} \right]; \quad (9)$$

where

$$Z_2 = R_2 + jX_2.$$

The results thus obtained can be interpreted by the following equivalent circuit:

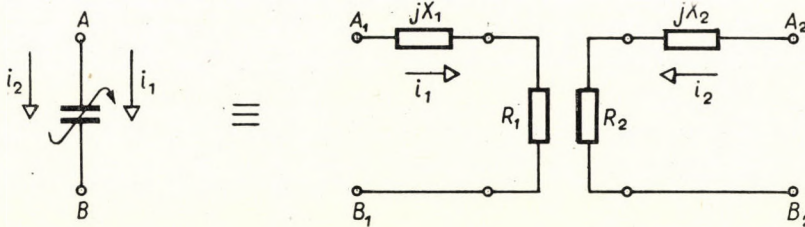


Fig. 5. Equivalent circuit of ideal varactor for the case when only currents of frequency ω and 2ω flow across the varactor

The above circuit diagram expresses the fact that the varactor connected between points A and B — provided that only currents of angular frequencies ω and 2ω will flow through it — can be divided into two circuits in such a way that only current of angular frequency ω will flow in one of the circuits (circuit between A_1 and B_1) and current of angular frequency 2ω in the other one (circuit between A_2 and B_2). The impedances of these equivalent circuits are given by relations (6), (7), (8) and (9).

Relations (6) and (8) indicate that both R_1 and R_2 can be positive or negative, depending on φ_2 . A negative ohmic resistance can be considered, as is well known, as a generator, therefore theoretically two cases may occur:

$$a) \cos \varphi_2 < 0; \quad \frac{3}{2} \pi > \varphi_2 > \frac{\pi}{2}.$$

In this case $R_1 > 0$, $R_2 < 0$; meaning that the varactor absorbs power at angular frequency ω and transmits it at angular frequency 2ω , thus operating in frequency doubler circuit.

$$b) \cos \varphi_2 > 0; \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}.$$

In this case $R_1 < 0$, $R_2 > 0$; meaning that the varactor absorbs power at angular frequency 2ω and transmits it at angular frequency ω thus operating in frequency divider-by-two circuit.

As the value of φ_2 can be influenced, in all probability, by a circuit external to point $A-B$ (Fig. 5), the former two statements mean, in fact, that the varactor can be used not only for frequency doubling but also for frequency dividing.

2. Convertible power

The power absorbed or transmitted at angular frequency ω is yielded by product $1/2 I_1^2 R_1$ which can be obtained by relation (6) and its value is

$$-\frac{1}{16\Phi} \frac{\cos \varphi_2}{(\omega C_0)^2} I_2 I_1^2.$$

The power absorbed or transmitted at angular frequency 2ω is similarly given by product $1/2 I_2^2 R_2$ which can be obtained by relation (8) and its value is

$$\frac{1}{16\Phi} \frac{\cos \varphi_2}{(\omega C_0)^2} I_2 I_1^2.$$

As the absolute values of the powers obtained by these two methods are inherently identical, the notion of a convertible power can be introduced. This is determined by relation

$$P_a = \frac{1}{16\Phi} \frac{|\cos \varphi_2|}{(\omega C_0)^2} I_2 I_1^2, \quad (10)$$

which answers the following question: what is the power which is passed from circuit of frequency ω into circuit of frequency 2ω or inversely.

At a given input power the useful output power and the efficiency are the greater the lower the power dissipation is on the varactor, which increases at the given varactor series resistance R_s with the increase of I_1 resp. I_2 thus, at the given dissipation, the convertible power increases with the increase of the value of $|\cos \varphi_2|$. Therefore it is obvious that in the term for the convertible power, the absolute value of $\cos \varphi_2$ should be kept purposefully at the highest possible value which, in the most advantageous case, can be equal to unity. This would be possible only at $\varphi_2 = \pi$ resp. at $\varphi_2 = 0$. In the following, we are dealing with the relations of the frequency doubler, consequently we may assume that $\varphi_2 = \pi$.

III. The ideal varactor in frequency doubler

1. Voltage drive

It is known that the magnitude of the voltage occurring on the varactor is limited by two values. The first is the so-called breakdown voltage, V_B that reverse voltage which cannot be exceeded without running the risk of a varactor breakdown. The other limiting voltage is the forward voltage at which the varactor current may cause the burning-out of the varactor. The forward voltage has an additional limit, the value of the contact potential Φ . From Equ. (1) of the introduction it can be seen that in case of $V = \Phi$, C_d becomes indefinite and therefore the value of $V = \Phi$ must be excluded from range of values V . V being, however, a periodical function in an operating circuit, the exclusion of condition $V = \Phi$ is assured only by condition $V < \Phi$. Therefore, in principle, the range of the values for voltage V is $V_B < V < \Phi$.

As for the voltage drive of the varactor, by introducing the following reductions:

$$\varphi_2 = \pi; \omega t = x; \frac{q_0}{2 C_0 \Phi} = a; \frac{I_1}{2 \Phi \omega C_0} = b; \frac{I_2}{4 \Phi \omega C_0} = c$$

and by making use of relation (5), the following essential relation is obtained:

$$1 - \frac{V}{\Phi} = (a - b \sin x + c \sin 2x)^2. \quad (11)$$

The voltage V is positive if it is a forward voltage and will be of negative sense if it is the reverse. Let us note the highest, resp. lowest values of voltage V by V_+ resp. V_- which may occur at any given adjustment.

From equation (11) it is obvious that $1 - V_-/\Phi$ occurs where the expression $y = a - b \sin x + c \sin 2x$ assumes its highest maximal value and $1 - V_+/\Phi$ occurs, on the other hand, at the lowest minimum value of y .

By discussing term $y = a - b \sin x + c \sin 2x$ (see clause to Appendix II) the following relations are obtained

$$1 - \frac{V_-}{\Phi} = [a + cF(\eta)]^2, \quad (12)$$

$$1 - \frac{V_+}{\Phi} = [a - cF(\eta)]^2 \quad (13)$$

where relation $\eta = I_1/I_2$ is called, in the following, the current factor and

$$F(\eta) = \frac{1}{8} (3\eta + \sqrt{\eta^2 + 8}) \sqrt{16 - (\sqrt{\eta^2 + 8} - \eta)^2}.$$

Applying the relations (12) and (13) to amplitude I_2 the following relation is obtained:

$$I_2 = \frac{2\Phi\omega C_0}{F(\eta)} \beta. \quad (14)$$

The former relations indicate that three factors unambiguously determine the electrical state of varying capacitance C_d when $\varphi_2 = \pi$. These three factors are V_- , V_+ and η . Relation $C_d = \varphi(V)$ being known, the statement of V_- is equivalent to statement $C_{d-} = C_- = f(V_-)$ and the statement of V_+ is equivalent to that of $C_{d+} = C_+ = f(V_+)$.

Factor β figuring in relation (14) can be called the drive factor and its value is determined by the following term:

$$\beta = C_0 \left(\frac{1}{C_-} - \frac{1}{C_+} \right).$$

2. The highest convertible power

For practical reasons, it would be useful to answer the question, which would be the highest convertible power for a given type of varactor. Knowing the formerly introduced factors, this question can be answered as follows.

Let the power dissipated on the varactor be P_d which is determined by relation

$$P_d = \frac{1}{2} R_s (I_1^2 + I_2^2).$$

Using relations (10) and (14) the following term is obtained:

$$P_a = \frac{1}{4} P_d \frac{\omega_k}{\omega} F_1(\eta). \quad (15)$$

In this relation

$$\omega_k = \frac{1}{R_s} \left(\frac{1}{C^-} - \frac{1}{C^+} \right); \quad F_1(\eta) = \frac{\eta^2}{F(\eta)(1 + \eta^2)}.$$

For a given type of varactor, the max. permissible dissipation is a given value. The highest value of ω_k is $\omega_{k \max} = \omega_c = 1/R_s (1/C_{\min} - 1/C_{\max})$. Examining function $F_1(\eta)$ it is found that $F_{1\max}(\eta) = 0,2$. Thus the following simple relation can be obtained for the highest convertible power

$$P_{a\max} \doteq 0,05 \frac{\omega_c}{\omega} P_d. \quad (16)$$

ω_c complies with the cut-off angular varactor frequency introduced by DIAMOND [2] where C_{\min} is the varactor capacitance at $V = V_B$ and C_{\max} the varactor capacitance at the highest forward voltage $V = V_{\max}$ occurring at the given setting. The unambiguous determination of this voltage generally involves practical difficulties because it is not easy to establish, how far the conduction current occurring at voltages $V > 0$ may decrease the efficiency of the doubler. As $C_{\max} \gg C_{\min}$ holds, however, $1/C_{\max}$ in the term of ω_c slightly influences the value of ω_c and ω_c can be considered, without any essential error, as $1/R_s C_{\min}$ which corresponds to the cut-off angular frequency generally referred to in the literature.

3. The highest output power

In addition to knowing the efficiency of the frequency doubler, it is important, for practical reasons, also to know the maximum output — $P_{\text{out max}}$ which can be obtained by the application of a given type of varactor diode, at the given frequency.

Making use of relation (10) and considering

$$P_{\text{out}} = P_a - \frac{1}{2} I_2^2 R_s,$$

further that

$$P_d = \frac{1}{2} R_s (I_1^2 + I_2^2),$$

we obtain relation

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{8} P_d \frac{I_2}{I_d} - \frac{1}{2} I_2^2 R_s \left(1 + \frac{1}{8} \frac{I_2}{I_d} \right), \quad (17)$$

where $I_d = \Phi (\omega C_0)^2 R_s$ is the characteristic current value for the diode, depending on the data of the varactor and on the applied frequency.

If the value of $P_{\text{out max}}$ is sought for, it is natural to assume that the varactor is subjected to the maximum load and thus values P_d and β are constant. There remains value η as a function of which the maximum P_{out} should be estimated. As there is

$$\frac{dP_{\text{out}}}{d\eta} = \frac{\partial P_{\text{out}}}{\partial I_2} \cdot \frac{dI_2}{d\eta},$$

therefore it is worthwhile to examine the behaviour of functions $dI_2/d\eta$ and $\partial P_{\text{out}}/\partial I_2$ from relation (14), $F(\eta)$ being a positive monotonously increasing function, $dI_2/d\eta < 0$, therefore $dP_{\text{out}}/d\eta$ will be equal to zero where $\partial P_{\text{out}}/\partial I_2$ is also equal to zero. If it is considered that

$$\frac{\partial P_{\text{out}}}{\partial I_2} = \frac{1}{8} \frac{P_d}{I_d} - I_2 R_s - \frac{3}{16} \frac{R_s}{I_d} I_2^2,$$

and that I_2 decreases monotonously in the function of η , it is quite obvious that P_{out} assumes its maximum value where

$$\frac{1}{8} \frac{P_d}{I_d} - I_2 R_s - \frac{3}{16} \frac{R_s}{I_d} I_2^2 = 0.$$

Using the afore stated relations for the determination of P_{out} , the following relations are obtained (see Appendix III):

$$P_{\text{out max}} = \frac{1}{8} P_d \frac{I_{2 \text{ max}}}{I_d} - \frac{1}{2} I_{2 \text{ max}}^2 R_s \left(1 + \frac{1}{8} \frac{I_{2 \text{ max}}}{I_d} \right), \quad (18)$$

$$I_{2 \text{ max}} = \frac{8}{3} I_d \left[\sqrt{\frac{3}{32} \frac{P_d}{I_d^2 R_s} + 1} - 1 \right], \quad (19)$$

$$F_{\text{max}}(\eta) = \frac{3}{4} \frac{\omega_c}{\omega} \left[\sqrt{\frac{3}{32} \frac{P_d}{I_d^2 R_s} + 1} - 1 \right]^{-1}. \quad (20)$$

The above formulae are valid at a drive of

$$\beta = \beta_{\text{max}} = C_0 \left(\frac{1}{C_{\text{min}}} - \frac{1}{C_{\text{max}}} \right)$$

and in the knowledge of function $F(\eta)$ the value of $h = h_{\max}$ can be obtained by means of (20). If the terms (18), (19) and (20) are examined as functions of ω and supposing P_d and β to be constant, it is obvious that if $\omega \rightarrow \infty$ then

$$\eta_{\max} \rightarrow \infty; I_{2 \max} \rightarrow 0; P_{\text{out max}} \rightarrow 0.$$

4. Conversion efficiency

In connection with the conversion efficiency $-\delta_a$, two questions may arise:

- a) Which is the highest efficiency if the maximum dissipation is given?
- b) Which is the highest efficiency to be obtained at given frequency from a given varactor, independently of the dissipation level?

Considering the afore described results, the first question can easily be answered. As $P_{\text{out}} = P_{\text{in}} - P_d$:

$$\delta_a = \frac{1}{1 + \frac{P_d}{P_{\text{out}}}};$$

(P_{in} is the input power).

Consequently, at a given dissipation, the highest efficiency is obtained at $P_{\text{out}} = P_{\text{out max}}$ and the conditions for this are supplied by formulae (18), (19) and (20).

As for answering the second question, let us examine the following relations:

$$P_{\text{in}} = \frac{1}{2} I_1^2 R_s + P_d,$$

$$P_{\text{out}} = -\frac{1}{2} I_2^2 R_s + P_d$$

and taking into consideration relations (10) and (14), the following is obtained:

$$\delta_a = \frac{1 - 4 \frac{\omega C_0 R_s}{\beta} \frac{F(\eta)}{\eta^2}}{1 + 4 \frac{\omega C_0 R_s}{\beta} F(\eta)}. \quad (21)$$

Thus, knowing the data of the varactor, the drive factor, the current factor, the conversion efficiency can easily be calculated.

From term (21) it can be seen that the efficiency increases with the increase of the drive factor β . At given β the dependence of δ_a on current

factor η shows at first an increasing and then a decreasing feature and at a certain value of $\eta = \eta_a$ it assumes a maximum value. Such dependence is shown by Fig. 6.

The magnitude of the maximum value of δ_a increases with the decrease of $\omega C_0 R_s / \beta$. At a given frequency, the smallest $\omega C_0 R_s / \beta$ value is equal to

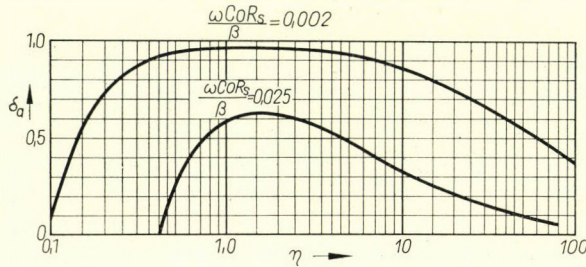


Fig. 6. The conversion efficiency of the frequency doubler vs. current factor for two different values of the parameter $\omega C_0 R_s / \beta$

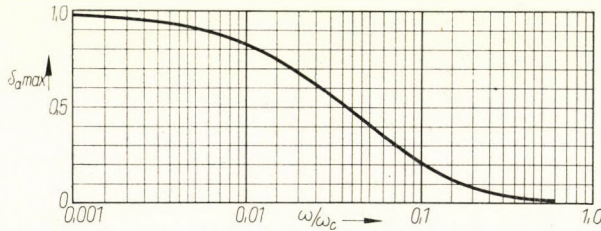


Fig. 7. Maximal conversion efficiency of the frequency doubler vs. ω/ω_c

ω_0/ω_c . Thus, at maximum drive, the conversion efficiency, δ_{am} is as follows:

$$\delta_{am} = \frac{1 - 4 \frac{\omega}{\omega_c} \frac{F(\eta)}{\eta^2}}{1 + 4 \frac{\omega}{\omega_c} F(\eta)} \quad (22)$$

If for a series of values (ω/ω_c) the pertaining $\delta_{a,max}$ values are calculated, where $\delta_{a,max}$ means a maximum δ_{am} value at a given ω/ω_c , relation $\delta_{a,max} = \delta(\omega/\omega_c)$ is obtained which yields, in the knowledge of the varactor characteristics, the maximum conversion efficiency, as a function of frequency. This relation is shown in Fig. 7.

From relation (22) those values of η_a may be determined at which $\delta_{am} = \delta_{a,max}$ at a given ω/ω_c . From this relation, there can similarly be determined the range of η within which the conversion efficiency δ_{am} exceeds $0,9 \delta_{a,max}$. These two latter factors are shown in Fig. 8.

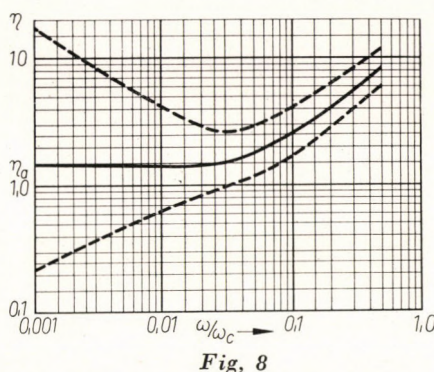


Fig. 8

In Fig. 8 the η limits belonging to $0,9 \delta_{a \max}$ are marked with a dashed curve. The power dissipation pertaining to the optimum conversion efficiency can easily be calculated if relation

$$P_d = \frac{1}{2} R_s (I_1^2 + I_2^2)$$

is considered and relation (14) is made use of. Finally,

$$P_d = 2 \Phi I_d \beta^2 \frac{1 + \eta^2}{F^2(\eta)}. \quad (23)$$

Using the graphs shown in Figs 7 and 8, in the knowledge of the frequency, we may determine for a given varactor the maximum efficiency to be obtained with this varactor and also the current factor η_a at which this maximum efficiency will occur.

IV. Adjustment of the external circuits for the case of $\varphi_2 = \pi$

1. General relations

In the foregoing, the consequences of the various electrical states of varying capacitance C_d have been dealt with. The electrical state of varying capacitance C_d is determined by the impedances of the circuits arranged outside of the capacitance. In the following, let us examine, which impedances should be arranged externally of capacitance C_d to enable the adjustment of state, advantageous for the frequency conversion on varying capacitance C_d .

Considering Figs 4 and 5 given in the Introduction, the full equivalent circuit diagram of the frequency doubler circuit is shown in Fig. 9.

On this figure, e_g is the open-circuit voltage of a generator of frequency ω ; Z_g the internal impedance of the generator at frequency ω ; Z_L the load at frequency 2ω and the other symbols are identical with those formerly used. In case of $i_2 \neq 0$, it is required that

$$R_2 = -(R_s + R_L); \text{ and } X_2 = -X_L \quad (24)$$

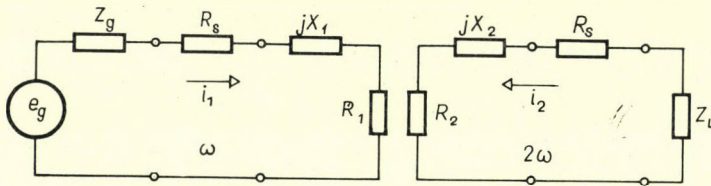


Fig. 9. Complete equivalent circuit of frequency doubler

where $R_L = \text{Re } Z_L$; $X_L = \text{Im } Z_L$. Considering relations (8), (9); further (6) and (7), the following are obtained:

$$\tan \varphi_2 = - \left[\frac{X_L}{R_s + R_L} - \frac{q_0}{4 \Phi C_0} \frac{1}{\omega C_0 (R_s + R_L)} \right], \quad (25)$$

$$R_1 = \frac{R_s + R_L}{\eta^2}, \quad (26)$$

$$X_1 = - \frac{X_L}{\eta_2} + \frac{q_0}{4 \Phi C_0} \frac{1}{\omega C_0} \left[\frac{1}{\eta^2} - 2 \right]. \quad (27)$$

2. Determination of integration constant

The integration constant q_0 occurring in Equ. (2) of the introduction also occurs in further relations. To determine the parameters of the external circuits, it is required to know this constant. Using the notations of clause III. 1, the relation determining q_0 is

$$q_0 = 2 C_0 \Phi a. \quad (28)$$

As $2 C_0 \Phi > 0$, the sign of q_0 is identical to that of a .

To determine the sign of a let us consider relation (11). As $V_B < V < \Phi$ therefore $1 - V/\Phi > 0$ in every moment t , and this means that $a - b \sin x + c \sin 2x$ is either negative or positive in every t moment. This can be possible only if the positive or negative sign of a is determined not by mathematical but by physical factors and in such a way that it should be sufficient

to determine the sign of a in a possible physical state to obtain a sign valid for all other states. This must be accentuated because though the absolute value of q_0 does not depend on time t it is, however, not constant in the meaning of the word as used in connection with the linear circuits and depends on the voltage drive, on the current magnitude, or to put it simple, on the working adjustment of the varactor. This means that it is not sufficient to examine the value of q_0 for a single case to determine its absolute value. Let us carry out the following imaginary experiment for the determination of the sign to q_0 . Let us assume that $X_L = 0$ and increase R_L beyond all limits, by keeping I_1 within a certain range. Using relation (27) and considering that $\eta \rightarrow \infty$ we obtain $X_1 \rightarrow -q_0/2 \Phi \text{Co}(\omega \text{Co})$. Intuitive considerations and calculations will indicate that in case of $i_1 = I_1 \cos \omega t$ X_1 must be of capacitive nature, consequently $X_1 < 0$, and $q_0 > 0$. Therefore $q_0 > 0$ must hold good.

Using relations (28), (12) and (13),

$$q_0 = \Phi C_0 \left(\frac{1}{C_-} + \frac{1}{C_+} \right) \quad (29)$$

is obtained.

3. Impedances of the external circuits for $\varphi_2 = \pi$

As $\tan \pi = 0$ using relations (29) and (25), relation

$$X_{L\pi} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{C} \right)_k \quad (30)$$

is obtained for $X_{L\pi}$ (value of X_L required to obtain $\varphi_2 = \pi$ is $X_{L\pi}$) where

$$\left(\frac{1}{C} \right)_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_-} + \frac{1}{C_+} \right).$$

Using further relation (27)

$$X_{1\pi} = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} \right)_k \quad (31)$$

is obtained.

Thus, if $\varphi_2 = \pi$ the output impedance $Z_{g\pi}$ of the generator required for the matching of the circuit is

$$Z_{g\pi} = R_s + \frac{R_s + R_L}{\eta^2} + j \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} \right)_k. \quad (32)$$

4. Varactor bias

To determine the bias of the varactor, the constant component of $1 - V/\Phi$ should be calculated from relation (5) and relations (14) and (29), further factors $f(\eta)$, η , β should be made use of. Using the aforementioned, relation

$$1 - \frac{V_0}{\Phi} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{F^2(\eta)} \left(\frac{1}{4} + \eta^2 \right) + C_0^2 \left(\frac{1}{C} \right)_k^2 \quad (33)$$

is obtained (see Appendix IV) where V_0 is the required bias of the varactor.

5. Design of the doubler circuit

Thus, to obtain maximum efficiency in a frequency doubler circuit at a given ω it is required that the varactor capacitance should vary within C_{\max} and C_{\min} , and η be a definite value (according to Fig. 8). Knowing these factors, the required values of I_2 and bias V_0 are obtained by means of relations (14) and (33). The conditions for the varactor matching are then given by relations (30) and (32). The output is given by relation $1/2 I^2 R_L$, current I_1 by relation ηI_2 . The generator open-circuit voltage e_g required to produce I_1 can easily be obtained by using relations (26), resp. (27), (29) representing the impedance transformation effect of the varactor. The varactor dissipation occurring under such conditions is given by (23). The situation is similar even if we are endeavouring to attain the maximum possible output with a given varactor dissipation.

V. Conclusion

In the foregoing the operation of a parallel coupled varactor frequency doubler circuit has been investigated. Relations had been obtained, by means of which the design of such a circuit as well as the choice of the required varactor type can be made. The analysis and the obtained results hold strictly in the case of the nonlinearity factor $\Theta = 1/2$; However, since for the real varactor diodes Θ is between $1/2$ and $1/3$ the obtained experimental values (whose discussion would go beyond the scope of this article) agree well with the theoretical values.

APPENDIX I

Determination of the equivalent impedances for the varying capacitance

Using relation (5), component V_1 of the voltage of frequency ω is determined by relation

$$V_1 = -\frac{1}{8} \frac{I_1 I_2}{(\omega C_0)^2 \Phi} \cos \varphi_2 \cos \omega t + \frac{I_1 q_0}{4 \Phi C_0 (\omega C_0)} \left[2 + \frac{I_2}{2 q_0 \omega} \sin \varphi_2 \right] \sin \omega t.$$

The amplitude ratio of the voltage in phase with the current for amplitude I_1 of the current gives value R_1 which complies with (6).

As in case of $U_c = \frac{1}{c} \int_0^t i dt$ and $i = I \cos \omega t$ holds good $U_c = \frac{I}{\omega C} \sin \omega t$ therefore reactance

$$\frac{q_0}{4 \Phi C_0 (\omega C_0)} \left[2 + \frac{I_2}{2 q_0 \omega} \sin \varphi_2 \right]$$

is of capacitive nature. As in the case of capacitive reactance $X_c < 0$, the value of X_1 is determined by relation (7). Relations (8) and (9) can be derived identically.

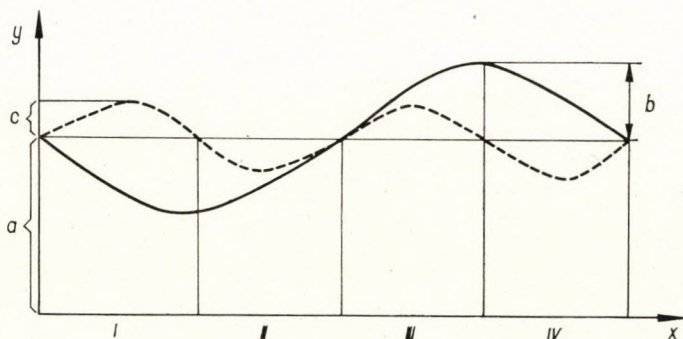


Fig. 10. Plot of function y

APPENDIX II

Discussion of term $y = a - b \sin x + c \sin 2x$

Let us determine the extremes of function y from equation $dy/dx = -b \cos x + 2c \sin 2x = 0$. Relation

$$\cos x_{1,2} = \frac{b}{8c} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{8c}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

is obtained. Using the symbols introduced in clause 2.1. and introducing current factor $\eta = I_1/I_2$ the term

$$\cos x_{\text{ext}} = \frac{1}{4} (\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 8})$$

is obtained. As we are only interested in the highest maximum, resp. in the lowest minimum, let us examine the graph for function y (see Fig. 10).

From the graph it can be seen that the highest maximum occurs in the IIIrd section and from this it follows that

$$\cos x_{\text{max}} = \frac{1}{4} (\eta - \sqrt{\eta^2 + 8}) .$$

The lowest minimum value similarly occurs in the IInd section, therefore,

$$\cos x_{\text{min}} = \frac{1}{4} (\eta + \sqrt{\eta^2 + 8}) .$$

From the above:

$$\cos x_{\text{max}} = \cos x_{\text{min}} ; \text{ and } \sin x_{\text{min}} = -\sin x_{\text{max}} = \sqrt{1 - \frac{1}{16} (\eta - \sqrt{\eta^2 + 8})^2} .$$

The following is obtained for relations $1 - V_-/\Phi_2$ and $1 - V_+/\Phi_2$ that we are interested in: $1 - V_-/\Phi = (a - b \sin x_{\max} + C \sin 2 x_{\max})^2$

$$1 - V_+/\Phi = (a - b \sin x_{\min} + C \sin 2 x_{\min})^2; \text{ further } -b \sin x_{\max} + C \sin 2 x_{\max} = \\ = -2C \sin x_{\max} (\eta - \cos x_{\max}) = 2C \left[\eta - \frac{1}{4} (\eta - \sqrt{\eta^2 + 8}) \right] \sqrt{1 - \frac{1}{16} (\eta - \sqrt{\eta^2 + 8})^2}.$$

Similarly

$$-b \sin x_{\min} + C \sin 2 x_{\min} = -2C \left[\eta - \frac{1}{4} (\eta - \sqrt{\eta^2 + 8}) \right] \sqrt{1 - \frac{1}{16} (\eta - \sqrt{\eta^2 + 8})^2}.$$

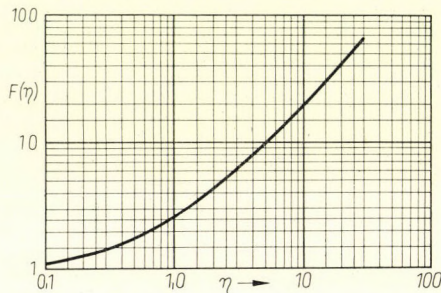


Fig. 11. Function $F(\eta)$

Introducing function

$$F(\eta) = \frac{1}{8} (3\eta + \sqrt{\eta^2 + 8}) \sqrt{16 - (\sqrt{\eta^2 + 8} - \eta)^2}$$

relations (12) and (13) are obtained. The $F(\eta)$ function is shown in Fig. 11.

APPENDIX III

Relations determining the maximum output

In connection with the maximum output, first we have to realize that $I_{2\max}$ defines $P_{\text{out max}} > 0$ and in the second place that $P_{\text{out max}}$ is in fact the maximum value of P_{out} . To understand the first statement let us consider relation (17). The positive root of this relation is

$$4 I_d \left[\sqrt{1 + \frac{P_d}{8 I_d^2 R_s}} - 1 \right] [\text{As}].$$

$$I_{2 \max} < 4 I_d \left[\sqrt{1 + \frac{P_d}{8 I_d^2 R_s}} - 1 \right]$$

therefore $P_{\text{out max}} > 0$.

To understand the second statement, let us consider relation

$$\frac{\partial P_{\text{out}}}{\partial I_2} = \frac{1}{8} \frac{P_d}{I_d} - I_2 R_s - \frac{3}{16} \frac{R_s}{I_d} I_2^2.$$

As a function of η , I_2 which monotonously decreases and $I_{2 \max}$ being the positive root of the above relation, therefore in case of $\eta < \eta_{\max}$ there holds $\partial P_{\text{out}}/\partial I_2 < 0$ and therefore

$$\frac{\partial P_{\text{out}}}{d\eta} = \frac{\partial P_{\text{out}}}{\partial I_2} \frac{dI_2}{d\eta} > 0.$$

If at

$$\eta > \eta_{\text{max}}; \quad \frac{\partial P_{\text{out}}}{\partial I_2} > 0$$

thus $dP_{\text{out}}/d\eta < 0$ and therefore in case of $\eta = \eta_{\text{max}}$ and $I_2 = I_{2\text{max}}$ relation $dP_{\text{out}}/d\eta = 0$ holds, wherefrom we may derive relation (19) for $I_{2\text{max}}$ which in fact defines the maximum value of P_{out} .

APPENDIX IV

Varactor bias

From relation (5)

$$1 - \frac{V_0}{\Phi} = \left(\frac{q_0}{2\Phi C_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{I_1^2}{(2\Phi\omega C_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{(4\Phi\omega C_0)^2};$$

If substituting q_0 from (29) and I_2 from (14) and using relation $I_1 = \eta I_2$ relation (33) is obtained.

REFERENCES

1. MANLEY, J. M.—ROWE, H. E.: Some General Properties of Nonlinear Elements; Part I. General Energy Relations. *Proc. IRE* **44** (1956), 904—913.
2. DIAMOND, B. L.: Idler Circuits in Varactor Frequency Multipliers. *IEEE Transaction on Circuit Theory* (1963); March, 35—44.
3. STRACCA, G. B.: Harmonic Generation by means of Reactance Diodes. *Alta Frequenza* **31** (1962); N 5, 70—83.
4. PENFIELD, P.—RAFUSE, R. P.: Varactor Applications. *The M. I. T. Press* (1962); Chapter 8, 297—435.
5. HYLTI, T. M.—KATZEBUE, K. L.: A Solid State Microwave Source from Reactance Diode Harmonic Generators. *I. R. E. Transaction on Microwave Theory and Techniques* (1961), 73—78.
6. JOHNSON, R. M.: Large Signal Analysis of a Parametric Harmonic Generator. *IRE Transaction on Microwave Theory and Techniques* (1960), 525—532.
7. MORRISON, J. A. Maximization of the Fundamental Power in Nonlinear Capacitive Diodes. *The Bell Syst. Techn. Journ.* (1962), 677—721.
8. JANEFF, W.: Variable Reactance Frequency Multipliers. *Electrical Communication* **38** (1963); N 1, 106—118.
9. LEONARD, T. C.: Prediction of Power and Efficiency of Frequency Doublers Using Varactors Exhibiting a General Nonlinearity. *Proc. of the IEEE* (1963), 1135—1139.
10. CHANG, K. K. N.—CHASE, P. E.: A Rigorous Analysis of Harmonic Generation Using Parametric Diodes. *RCA Review* (1963), 214—225.

ANALYSE EINES VARAKTOR-FREQUENZVERDOPPLERS

V. BIRÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung der Wirkungsweise eines Varaktor-Frequenzverdopplers mit paralleler Kopplung, falls darin ein Varaktor mit scharfem Übergang verwendet wird. Die Analyse zieht den Verlust des Varaktors in Betracht und bestimmt auf Grund desselben die größte umwandelbare Leistung, die größte Ausgangsleistung, den höchsten Wirkungsgrad und die hiebei auftretende Verlustleistung. Darüber hinaus wird auch die Frage

nach den zur Erreichung der genannten Charakteristiken nötigen Impedanzzusammenhängen und der nötigen Vorspannung des Varaktors beantwortet. In den die obigen Parameter bestimmenden Zusammenhängen kommen Größen vor, die es ermöglichen, mit Hilfe dieser Zusammenhänge den Verdopplungsstromkreis zu entwerfen und den benötigten Varaktortyp auszuwählen.

ANALYSE D'UN DOUBLEUR DE FRÉQUENCE A DIODE DE CAPACITÉ VARIABLE

V. BIRÓ

RÉSUMÉ

L'étude traite de l'analyse du doubleur de fréquence à diode de capacité variable, dans le cas où une diode à jonction brusque est utilisée. L'analyse prend en considération les pertes de la diode et en déduit la puissance maximum transformable, la puissance maximum de sortie, le rendement maximum et la dissipation. En plus, les relations d'impédance nécessaires pour obtenir ces paramètres et la tension de polarisation nécessaire pour la diode de capacité variable sont déterminées. Dans les relations déterminant ces paramètres apparaissent des quantités physiques qui permettent d'étudier le circuit doubleur à l'aide de ces mêmes relations et de choisir le type de diode nécessaire.

АНАЛИЗ УДВОИТЕЛЯ ЧАСТОТЫ НА ВАРАКТОРНОМ ДИОДЕ

В. БИРО

РЕЗЮМЕ

Темой этой работы является анализ удвоителя частоты на варакторном диоде с резким переходом в том случае, когда диод включен параллельно. Анализ произведен с учетом потерь в варакторном диоде и дает возможность определить максимальную проходящую мощность, максимальную выходную мощность, максимальный *кпд* удвоителя частоты и мощность, рассеиваемую на диоде. Кроме того, анализ дает возможность определить необходимые импедансы и напряжение смещения. В соотношениях, определяющих вышеуказанные величины, находятся такие физические величины, которые дают возможность с помощью этих соотношений произвести инженерный расчет цепей удвоителя частоты, а также выбор необходимого типа варакторного диода.

SOME REMARKS ON THE INTERPRETATION OF DISCHARGE INVESTIGATIONS

GY. VAJDA

DOCTOR OF TECHN. SC.

[Manuscript received February 1, 1966]

This paper presents, in principle, a possibility of finding some connection between the measured values and the volume of the cavities. The analysis is strictly valid only for conditions between plane electrodes, but the obtained relation can be considered as an approximation for other electrode configurations.

I. Introduction

Cavities in solid dielectric materials constitute the weak points of insulation. A discharge taking place in these cavities may easily lead to an increase in cavity dimensions and an overload of the unimpaired insulating section. Such cavities are often starting points for a breakdown. Therefore, in order to control the state of insulations, an ever growing importance is attached to the investigations of internal discharges.

A basic problem encountered in these widely accepted investigations is the physical interpretation of the measured values. The greatest difficulty is due to the fact that resultant conditions of the entire insulation can only be measured, the instruments being connected to the electrodes that border the insulation. Thus, the measured values do not give any information on dimensions or position of the cavities and it is even quite impossible to conclude from the measurements on the cavity conditions.

II. Equivalent circuit

When in a solid insulating material between two parallel plane electrodes having surface F and spacing d there is a gas-filled cavity with cross-section A and width t (Fig. 1), equivalent circuit in Fig. 2 is regarded as a model of the insulation [1]. In this figure C_c is the capacity of the cavity, C_b is the capacity of the unimpaired section of the insulation in series with the cavity and C_a is the capacity of the remaining unimpaired parts of the insulation. This model gives a true picture of the conditions provided that for the loss angle of the solid insulating material condition $\tan^2 \delta \ll 1$ holds.

With a voltage $u = u_a$ applied between the electrodes, the voltage across the cavity will be u_c until a breakdown of the cavity does not occur. From Fig. 2 it can be seen that the value of this voltage is

$$u_c = \frac{C_c}{C_b + C_c} u_a. \quad (1)$$

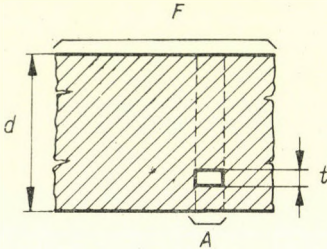


Fig. 1. Insulating material with a cavity

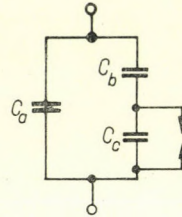


Fig. 2. Equivalent circuit as a model for investigating discharges

When u_c reaches the value of the breakdown voltage of the cavity U_{ci} , a breakdown in the cavity takes place and the spark gap in the equivalent circuit will be short circuited. When this first discharge appears, the voltage on the entire insulation is equal to the threshold value of the ionization voltage U_i . The relation between these two voltages is given by

$$U_{ci} = \frac{C_b}{C_b + C_c} U_i. \quad (2)$$

After breakdown, the voltage across the cavity falls to the extinction value U_{c1} , dielectric strength in the cavity is restored, the voltage on C_c again increases and a second discharge occurs. As a result of this discharge, a voltage jump

$$\Delta U_c = U_{ci} - U_{c1} \quad (3)$$

appears on C_c , causing a voltage jump

$$\Delta U_a = \frac{C_b}{C_a + C_b} \Delta U_c \quad (4)$$

on the capacitor C_a [2].

III. Interpretation of the available results of measurements

A direct determination of U_{ci} and ΔU_c , characterizing size and position of the cavity, is impossible, only U_i and ΔU_a across terminals can be measured. From these values, however, one cannot conclude on cavity conditions, because there are many solutions which satisfy the equations. This difficulty can partly be removed, if two quantities are simultaneously measured and some neglects in accordance with the actual order of magnitudes are made.

By replacing parts of the insulation in Fig. 1 by plane capacitors, the following capacities are obtained:

$$C_a = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{F - A}{d}, \quad (5)$$

$$C_b = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{A}{d - t}, \quad (6)$$

$$C_c = \varepsilon_0 \frac{A}{t}. \quad (7)$$

Since $U_{c1} \ll U_{ci}$, by the use of equations (2) and (3), equation (4) takes the form

$$\Delta U_a \simeq \frac{C_b}{C_a + C_b} U_{ci} = \frac{C_b}{C_a + C_b} \cdot \frac{C_b}{C_b + C_c} U_i. \quad (8)$$

In practice the usual values are $C_b \ll C_a$ and $C_b \ll C_c$, therefore a good approximation is given by

$$\Delta U_a \simeq \frac{C_b}{C_a} \cdot \frac{C_b}{C_c} U_i. \quad (9)$$

Substituting the values from equations (5)–(7), there results

$$\begin{aligned} \Delta U_a &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0 A / (d - t)}{\varepsilon \varepsilon_0 (F - A) / d} \cdot \frac{\varepsilon \varepsilon_0 A / (d - t)}{\varepsilon_0 A / t} U_i = \\ &= \frac{Ad}{(d - t)(F - A)} \cdot \frac{\varepsilon At}{(d - t)A} U_i. \end{aligned} \quad (10)$$

In Fig. 1 $t \ll d$ and $A \ll F$. Hence

$$\Delta U_a \simeq \varepsilon \frac{At}{Fd} U_i \quad (11)$$

where $At = V_1$ is the volume of the cavity and $Fd = V$ is the volume of the entire insulator. Consequently, the ratio of the voltages ΔU_a and U_i is proportional to the relative volume of the cavity

$$\frac{\Delta U_a}{U_i} \simeq \varepsilon \frac{V_1}{V} \quad (12)$$

i.e. from these two parameters a conclusion can be drawn on the size of the cavity. In practice, apparent charge taking part in the discharge $\Delta Q_a = C \Delta U_a$ is usually measured, where C is the capacity of the investigated insulation. In this case, equation (12) is written in the form

$$\frac{\Delta Q_a}{U_i} = \varepsilon C \frac{V_1}{V}. \quad (13)$$

REFERENCES

1. MASON, J. H.: Breakdown of insulation by discharges *IEE* 100/II, A 149 (1953).
2. VAJDA, Gy.: Szigetelések romlása és romlásuk vizsgálata (Degradation of insulations and its investigation). Akadémiai Kiadó, Budapest 1964.

BEMERKUNGEN ZUR INTERPRETATION DER UNTERSUCHUNGEN ÜBER ENTLADUNGEN

GY. VAJDA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz zeigt eine theoretische Möglichkeit auf, einen Zusammenhang zwischen den gemessenen Werten und dem Volumen der Hohlräume zu finden. Die Berechnungsmethode ist streng genommen nur zwischen flachen Elektroden gültig, aber der Charakter des Zusammenhangs kann als eine Näherung für andere Elektrodenanordnungen aufgefaßt werden.

REMARQUES SUR L'INTERPRÉTATION DES DÉCHARGES

GY. VAJDA

RÉSUMÉ

La méthode de calcul présentée par l'auteur offre la possibilité théorique de trouver une liaison entre les valeurs mesurées et le volume des creux. Le calcul n'est valable strictement qu'entre des électrodes planes, mais le caractère de la relation peut être considéré comme approximation pour d'autres dispositions d'électrodes.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТРАКТОВКЕ ИССЛЕДОВАНИЙ РАЗРЯДА

Д. ВАЙДА

РЕЗЮМЕ

Приведенный расчет показывает принципиальные возможности нахождения связи между измеренными величинами и объемом полостей. Расчет действителен только между плоскими электродами, но характер зависимости можно принять в качестве приближения для других вариантов компоновки электродов.

CALCULATION OF PSEUDO-FINAL VOLTAGE DISTRIBUTION IN IMPULSED WINDINGS WITH A MATRIX METHOD

K. KARSAI

CAND. OF TECHN. SC.

GANZ ELECTRIC WORKS, BUDAPEST

[Manuscript received March 4, 1966]

This article reviews a matrix method which applies itself for calculation of the pseudo-final voltage distribution. The model to be used contains n elementary coils of finite length, which are identical among themselves. The pseudo-final voltage distribution is important from the viewpoint of the amplitudes of the harmonic voltage oscillations at surge voltage phenomena. In addition to this method it is also possible by means of this method to define the voltage distribution at industrial frequency of transformer coils i.e. the calculation of the radial flux components. The formulae deduced by the matrix method are very simple and include only algebraic operations.

I. Introduction

P. A. ABETTI shows that in impulsed coils and windings with grounded neutral it is necessary to distinguish between a final and a pseudo-final voltage distribution [1, 2]. The final voltage distribution is determined by the winding resistance and leakage conductance to ground of the elements of the equivalent circuit of windings and is generally linear. Between the initial voltage oscillation and the final distribution is the so-called pseudo-final distribution. The initial i.e. electrostatic- and pseudo-final voltage distributions determine the amplitudes of the harmonic voltage oscillations. The deviation from linearity of the pseudo-final distribution is small and assuming a linear distribution — instead of the pseudo-final one — causes an error less than 10%. ABETTI gave in the above-mentioned paper an efficient analysis of the phenomena and developed a calculating method on base of the infinitesimal equivalent circuit. The results of this method agree with the measured voltages.

In practice the finite model is also frequently applied [3, 4]; the present paper gives partly formulae according to the finite model, which are much simpler than those deduced from the infinitesimal model and partly shows illustrative numerical examples and results of measurements.

In the used model (Fig. 1) the capacitance between two adjacent elements of circuits as well as the capacitances between the elements and the earth are neglected, because they do not play any role after the voltage oscillations; the resistance of the coils and the leakage conductance to ground

are also neglected, because they do not play an important role either. The model consists of n elementary coils. The selfinductance of an elementary coil is L , the mutual inductance between elements i and k is $q_{ik}L$. The impulse voltage at the line end has the form of a unit function with an amplitude v_0 , the end of the winding being grounded.

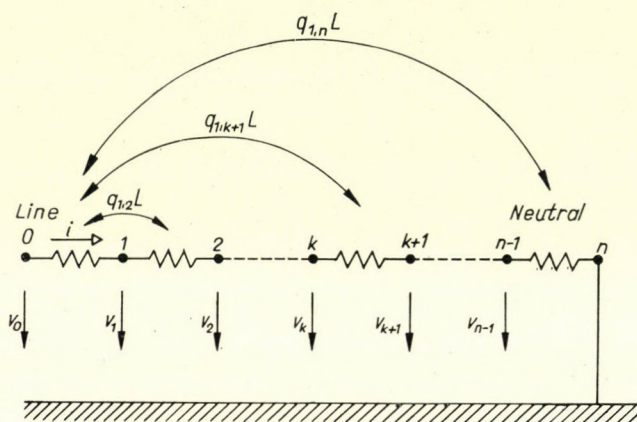


Fig. 1. The finite model of equivalent circuit

II. Discussion

1. List of symbols

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} n-1 \text{ rows;} \\ \\ \\ \\ n \text{ columns} \end{array}$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} n \text{ rows (is the transposed} \\ \text{matrix of } \mathbf{D}); \\ \\ \\ \\ n-1 \text{ columns} \end{array}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} n-1 \text{ elements (is the voltage} \\ \text{column matrix);} \end{array}$$

$$v_k = v_0 \left\{ \frac{n-k}{n} + \frac{1}{Qn} \left[- \sum_{x=1}^k (n-2k) q_x + \sum_{x=k+1}^{n/2} 2k q_x \right] \right\} \quad (11a)$$

and if n is an odd number

$$v_k = v_0 \left\{ \frac{n-k}{n} + \frac{1}{Qn} \left[- \sum_{x=1}^k (n-2k) q_x + \sum_{x=k+1}^{(n-1)/2} 2k q_x + \frac{n+1}{2} \cdot q_{(n+1)/2} \right] \right\}. \quad (11b)$$

III. Conclusions

In case of a winding calculable on base of a finite mathematical model the matrix method gives very simple formulae. The deduced formulae agree well with the measured results.

The governing equations are identical with the governing equations of a voltage distribution by industrial frequency windings, consequently the results are very suitable for calculating the radial flux components.

IV. Illustrative numerical examples

As an example of the application of formula (11) let us divide the examined winding into 8 parts identical among themselves. Assuming that the connection between the self- and mutual inductances is in the form of function [5]

$$M_{i,k} = q^{(i-k)} L,$$

furthermore

$$q = q_{k,k+1} = 0,63,$$

then

$$q_{1,3} = q^2 = 0,3969;$$

$$q_{1,6} = q^5 = 0,09924;$$

$$q_{1,4} = q^3 = 0,25;$$

$$q_{1,7} = q^6 = 0,06252;$$

$$q_{1,5} = q^4 = 0,1575;$$

$$q_{1,8} = q^8 = 0,03938.$$

The elements of the q column matrix, [see (4)] are: $q_1 = 2,635$, $q_2 = 3,226$, $q_3 = 3,560$ and $q_4 = 3,711$; furthermore $q_5 = q_4$, $q_6 = q_3$, $q_7 = q_2$ and $q_8 = q_1$. When the value of v_0 voltage is 100%, then applying (11a)

$$v_k = 100 \left\{ \frac{8-k}{8} + \frac{1}{8} \left[- \sum_{x=1}^k (8-2k) q_x + \sum_{x=k+1}^4 2k q_x \right] \right\}.$$

The calculated values of the voltages are in points $k = 1, 2 \dots 7$ in Table I, this table showing the measured voltages, too.

Figs 2 and 3 show the surge response of the winding in points $k=0, 1, 2, \dots 7$. The applied wave form at the line end is $0,5/130 \mu s$. The measured points of the pseudo-final distribution are taken immediately after the oscillations at $60 \mu s$.

Another example shows the maximal difference between the linear distribution and the pseudo-final distribution in case of 4 parts equal among themselves in the function of q . The voltage on the k -th point is, when $v_0 = 100$

$$v_k = 100 \left\{ \frac{4-k}{4} + \frac{100}{4Q} \left[- \sum_{x=1}^k (4-2k) q_x + \sum_{x=k+1}^{n/2} 2k q_x \right] \right\}.$$

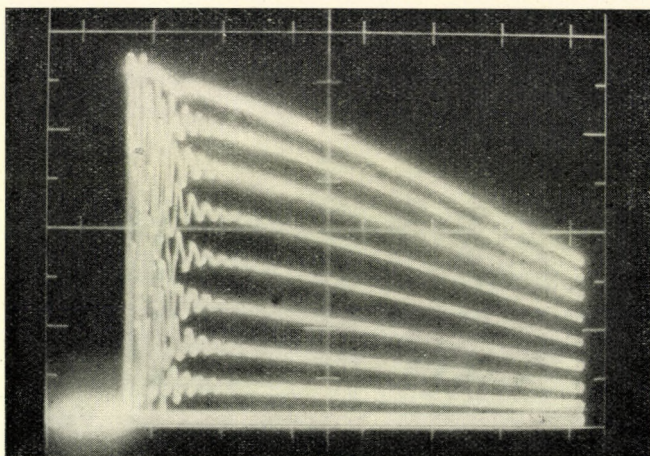


Fig. 2. The surge response of the winding in points $k = 0, 1, \dots, 7$

Table I

The calculated and the measured values of the voltages in points $k = 1, 2, \dots, 7$

k	The calculated values of voltages	The measured values of voltages
0	100	100
1	89,98	89
2	77,68	78,3
3	64,13	64,3
4	50	49,5
5	35,87	36
6	22,32	21,9
7	10,02	9,6

The second part of this expression is the percentage difference between the linear and the pseudo-final voltage distribution. It may be seen that this second part is zero at $k = 2$, at $k = 1$ and at $k = 3$ respectively being different only in sign. This later $k = 1$ or $k = 3$ is the maximal difference: Δv_m . The results of the calculation are listed in Table II and are visible in Fig. 4, too.

Table II

The percentage difference between the linear and the pseudo-final voltage distribution

q	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$q_1 - q_4$	1	1,111	1,248	1,417	1,624	1,875	2,176	2,533	2,952	3,439	4
$q_2 = q_3$	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
Q	4	4,642	5,346	6,214	7,168	8,25	9,472	10,84	12,38	14,09	16
Δv_m [%]	0	1,006	1,785	2,196	2,343	2,272	2,027	1,645	1,162	0,608	0

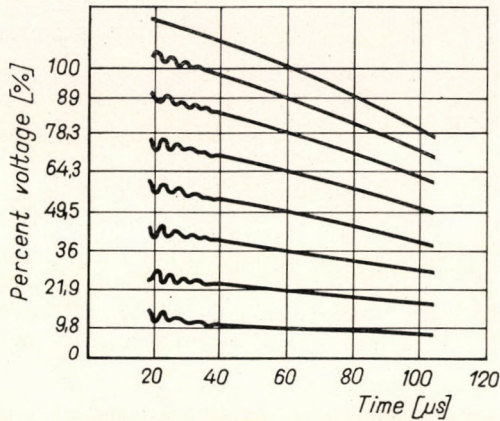


Fig. 3

APPENDIX

The derivation of Formulae (11). It can be shown by simple multiplication that the inverse matrix K^{-1} of order n is :

$$K^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-2 & 2(n-2) & 2(n-3) & \dots & 6 & 4 & 2 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3) & \dots & 9 & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \end{bmatrix}$$

The product of matrices $K^{-1} D$ is

$$n-1 \text{ rows } \left\{ \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-2 & 2(n-2) & 2(n-3) & \dots & 6 & 4 & 2 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3) & \dots & 9 & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \right\} = n-1 \text{ rows}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{n-1 \text{ columns}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{n \text{ columns}}$

$$n-1 \text{ rows } \left\{ = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} -(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -(n-2) & -(n-2) & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ -(n-3) & -(n-3) & -(n-3) & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(n-k) & -(n-k) & -(n-k) & \dots & k & k & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -3 & -3 & -3 & \dots & n-3 & n-3 & n-3 \\ -2 & -2 & -2 & \dots & -2 & n-2 & n-2 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & n-1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{n \text{ columns}}$

One part of product

$$K^{-1} D \left(\frac{1}{Q} \mathbf{q} - \right)$$

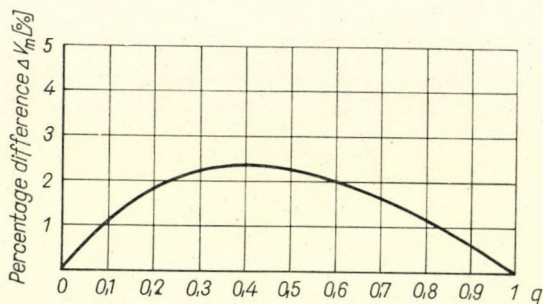


Fig. 4. The percentage difference between the linear and the pseudo-final voltage distribution

s the column matrix $-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{e}$ namely the first column of matrix $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{D}$. The k -th element of this matrix is $(n-k)/n$, that is the voltage of the k -th element in case of linear distribution by $v_0 = 1$. The other part of product

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{D} \left(\frac{1}{Q} \mathbf{q} - \mathbf{e} \right)$$

is also a column matrix:

$$\frac{1}{Q} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{q},$$

the elements of this matrix showing the difference from the linear distribution by $v_0 = 1$. The value of the k -th element by this matrix is when n being an even number

$$\frac{1}{Qn} \left[- \sum_{x=1}^k (n-2k) q_x + \sum_{x=k+1}^{n/2} 2k q_x \right]$$

and if n is an odd number

$$\frac{1}{Qn} \left[- \sum_{x=1}^k (n-2k) q_x + \sum_{x=k+1}^{n-1/2} 2k q_x + \frac{n+1}{2} q_{n+1/2} \right].$$

REFERENCES

1. PIRENNE, J.: General Theory of Oscillating Phenomena in Transformer Windings. *Revue General de l'Électricité* 47 (1940); 19-29, 55-63.
2. ABETTI, P. A.: Pseudo-Final Voltage Distribution in Impulsed Coils and Windings. *AIEE Transactions*, Part III (Power Apparatus and Systems) 79 (1960), 87-91.
3. WALDVOGEL, P.—ROUXEL, R.: Predetermination by Calculation of the Electric Stresses in Winding Subjected to a Surge Voltage. C. I. G. R. É., Paris 1956; Paper No. 125.
4. LOVASS-NAGY, V.: A Matrix Method of Calculating the Distribution of Transient Voltages in Transformer Windings. *The Institution of Electrical Engineers Monograph* No. 517 (1962).
5. HELLER, B.—HLAVKA, J.—VEVERKA, A.: The Selfoscillations of the One Layer Windings by Voltage Stresses 40 (1949), 951.

BERECHNUNG DER INDUKTIVEN SPANNUNGSVERTEILUNG
IN GESTOSSENEN WINDUNGEN MIT HILFE
EINER MATRIZENMETHODE

K. KARSAI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit berichtet über eine Matrizenmethode für die Berechnung der induktiven Spannungsverteilung in gestossenen Windungen. Das verwendete mathematische Modell besteht aus n identischen Elementarwindungen mit endlichen Abmessungen. Die induktive Spannungsverteilung ist vom Standpunkt der bei Stoßspannungserscheinungen auftretenden harmonischen Amplituden von Wichtigkeit. Die Methode kann ferner zur Berechnung der in Transformatorspulen bei Betriebsfrequenz auftretenden Spannungsverteilung verwendet werden, was für die Bestimmung der Radialkomponente des Flusses notwendig ist. Der Vorteil der mittels Matrizenrechnung abgeleiteten Formeln ist ihre Einfachheit, und daß sie ausschließlich algebraische Operationen enthalten.

MÉTHODE MATRICIELLE POUR LE CALCUL DE LA DISTRIBUTION
INDUCTIVE DES TENSIONS DANS LES ENROULEMENTS SOUMIS
A DES TENSIONS DE CHOC

K. KARSAI

RÉSUMÉ

L'étude présente une méthode matricielle pour le calcul de la distribution inductive des tensions dans les enroulements. Le modèle mathématique utilisé contient n enroulements élémentaires identiques de dimensions finies. La distribution inductive des tensions importe du point de vue des amplitudes harmoniques se présentant lors des tensions de choc.

La méthode peut aussi s'appliquer au calcul de la distribution des tensions dans les enroulements des transformateurs, à la fréquence de service, calcul nécessaire pour déterminer la composante de flux radiale.

Les formules déduites par calcul matriciel ont le double avantage d'être simples et de ne contenir que des opérations algébriques.

МАТРИЧНЫЙ РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНДУКТИВНОГО НАПРЯЖЕНИЯ,
ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ИМПУЛЬСЕ НА ОБМОТКАХ

К. КАРШАИ

РЕЗЮМЕ

Описывается матричный метод, который пригоден для расчета распределения индуктивного напряжения, возникающего в обмотках. Примененная математическая модель содержит n идентичных элементарных обмоток с конечным размером. Распределение индуктивного напряжения является важным с точки зрения гармонических амплитуд, возникающих при явлениях ударного напряжения.

Метод может быть использован также для расчета распределения напряжения в обмотках при рабочей частоте, что необходимо для определения компонента магнитного потока по радиусу.

Преимущество формул, выведенных матричным методом, заключается в том, что они являются простыми и содержат только алгебраические операции.

AN APPROXIMATE METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE MAXIMUM DIELECTRIC STRESS IN ELECTRIC FIELDS

GY. VAJDA

DOCTOR OF TECHN. SC.

[Manuscript received March 18, 1966]

The paper presents a method for the approximate calculation of the maximum dielectric stress in static electric fields. By a suitable substitution of electrodes the investigation of the electric field can be reduced to the investigation of some simpler arrangements which are easy to calculate. The calculation work is greatly facilitated by introducing the coefficient of inhomogeneity. The paper also presents a calculation method for numerically separating the fields which are inhomogeneous to the first degree from those which are inhomogeneous to the second degree.

I. Introduction

Electrical dimensioning of an insulation is based on the knowledge of the maximum field strength, the value of which can, in principle, always be determined by using the potential equation. An analytical solution of Laplace's equation can only be derived for a few simple electrode arrangements, and formulae for the maximum field strength for these cases are given in textbooks (for example [1, 2]). More complex arrangements are treated numerically, but the required calculations are, in general, comparatively laborious. Therefore, approximate methods are mainly used to solve such arrangements (for example [3]), but they involve rather a natural turn for engineering than conscious simplifications. This article presents a simple method for the approximate determination of the maximum strength of an electrostatic field in a homogeneous insulation. As a by-product, the separation of the arrangements with first-order and second-order non-uniformities can also be obtained by this method.

II. Non-uniformity of the field

Non-uniformity of an electric field is characterized in various ways. According to the strictest method, the ratio η of the maximum field strength E_{\max} to the minimum field strength E_{\min} along a line of force corresponding to the maximum field strength:

$$\eta = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} \quad (1)$$

is determined. The maximum dielectric stress, that is, the maximum potential gradient generally occurs on the surface of the electrode having the greater curvature, at the point on the shortest line between the two electrodes (that is at the base point of the electrode distance). Since the lines of force in most fields are curved, the determination of the corresponding values of E_{\max} and E_{\min} is not always easy. In practice, the ratio η' of E_{\max} to E'_{\min} along the distance a between the electrodes is preferably used:

$$\eta' = \frac{E_{\max}}{E'_{\min}} \quad (2)$$

because it can be easily determined. In a simple electrode arrangement the line of force to be taken into account coincides with the electrode distance, and in these cases $\eta = \eta'$. In connection with the dimensioning, there is little use in calculating the minimum field strength separately. On the other hand, a clear picture of the degree of non-uniformity is also achieved by using the non-uniformity coefficient

$$\mu = \frac{E_{\max}}{E_{\text{average}}} \quad (3)$$

that relates the maximum dielectric stress to the easily obtainable average field strength

$$E_{\text{average}} = \frac{V}{a} \quad (4)$$

where V is the voltage across the electrodes and a is the distance between them.

A detailed analysis of the formulae for the maximum field strength shows that in the case of electrode arrangements where only one radius of curvature plays a part — except the planes where this radius is infinite — the maximum field strength is a single-valued function of the ratio

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad (5)$$

r being the radius of curvature of the electrode. An additional advantage of introducing the ratio α is that in such arrangements the non-uniformity coefficient depends solely upon α :

$$\mu = f(\alpha) . \quad (6)$$

By using the relationships published in the literature, the function (6) was calculated for a number of typical arrangements, and the obtained results are summed up in Table I. The relationships underlying these calculations can be found in Appendix I.

Table I

No.	Arrangement	μ	Approx. value of μ for $\alpha \gg 1$
1	Concentric spheres	$1 + \alpha$	α
2	Two small-radius spheres*	$\frac{1}{2} \left(1 + \alpha + \frac{1}{1 + \alpha} \right) = \frac{(1 + \alpha)^2 + 1}{2(1 + \alpha)}$	$\frac{\alpha}{2}$
3	Two large-radius spheres	Russel's formula	$\frac{\alpha}{2}$
4	Two asymmetric spheres, one of them at earth potential the earth being at infinity	Kirchhoff's formula	α
5	A small-radius sphere and a plane*	$\frac{1}{2} \left(1 + 2\alpha + \frac{1}{1 + 2\alpha} \right) = \frac{(1 + 2\alpha)^2 + 1}{2(1 + 2\alpha)}$	α
6	A large-radius sphere and a plane	Russel's formula with the substitution of 2α	α
7	Coaxial circular cylinders	$\frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha)}$	$\frac{\alpha}{\ln \alpha}$
8	Two small-radius circular cylinders*	$\left(\frac{1}{2 \ln(1 + \alpha)} \right)^\alpha + \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\alpha(2 + \alpha)}{2(1 + \alpha) \ln(1 + \alpha)}$	$\frac{\alpha}{2 \ln \alpha}$
9	Two large-radius circular cylinders	$\frac{\sqrt{\alpha(4 + \alpha)}}{2 \ln \frac{\sqrt{4 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{4 + \alpha} - \sqrt{\alpha}}} = \frac{\sqrt{\alpha(4 + \alpha)}}{4 \ln \frac{\sqrt{4 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{2}}$	$\frac{\alpha}{2 \ln \alpha}$
10	A small-radius circular cylinder and a plane*	$\frac{1}{\ln(1 + 2\alpha)} \left(\alpha + \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} \right) = \frac{2\alpha(1 + \alpha)}{(1 + 2\alpha) \ln(1 + 2\alpha)}$	$\frac{\alpha}{\ln 2\alpha}$
11	A large-radius circular cylinder and a plane	$\frac{\sqrt{\alpha(2 + \alpha)}}{\ln \frac{\sqrt{2 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2 + \alpha} - \sqrt{\alpha}}} = \frac{\sqrt{\alpha(2 + \alpha)}}{2 \ln \frac{\sqrt{2 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}}$	$\frac{\alpha}{\ln 2\alpha}$
12	Paraboloid-plane*	$\frac{2\alpha}{\ln(1 + 2\alpha)}$	$\frac{2\alpha}{\ln 2\alpha}$
13	Hyperboloid-plane	$\frac{2\sqrt{\alpha(1 + \alpha)}}{\ln \frac{\sqrt{1 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 + \alpha} - \sqrt{\alpha}}} = \frac{\sqrt{\alpha(1 + \alpha)}}{\ln(\sqrt{1 + \alpha} + \sqrt{\alpha})}$	$\frac{2\alpha}{\ln 4\alpha}$
14	Two hyperboloids	$\frac{\sqrt{\alpha(2 + \alpha)}}{\ln \frac{\sqrt{2 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2 + \alpha} - \sqrt{\alpha}}} = \frac{\sqrt{\alpha(2 + \alpha)}}{2 \ln \frac{\sqrt{2 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}}$	$\frac{\alpha}{\ln 2\alpha}$
15	Bushing through a circular hole*	$\frac{\alpha}{\ln[2(1 + \alpha)]}$	$\frac{\alpha}{\ln 2\alpha}$
16	A rounded corner and a plane	According to Dreyfuss' diagram	

*The formula is not valuable for small values of α .

III. The measure of the non-uniformity

The non-uniformity coefficient μ for the investigated arrangements has also been represented graphically as a function of α . The functions for low values of α are shown in Fig. 1 and those for higher values of α are shown in Fig. 2. The numerical values needed to construct the diagrams are given in Appendix II. As to the fields of spheres and cylinders, for low values of α the large-radius arrangement and for high values of α the small-radius arrangement was considered as valid. From the diagrams several interesting conclusions on the field distribution can be drawn.

With $\alpha \ll 1$ a value of $\mu \cong 1$ is obtained for each arrangement, that is, if α is small enough, the field can with a good approximation be considered as being uniform along the distance between the electrodes and the field strength along this line is approximately equal to E_{average} . This statement applies, of course, to the electrode distance only, and for the remaining regions of the arrangement it is not true.

When $\alpha \gg 1$, the characteristics can be arranged in distinct groups. To show this, the non-uniformity coefficients corresponding to $\alpha = 40$ and $\alpha = 100$ have been determined by means of the approximations in the last column of Table I, and the obtained values are given in Table II. These characteristics are put side by side not only for high values of α , but

Table II

Arrangements	μ	
	$\alpha = 40$	$\alpha = 100$
Concentric spheres	40	100
Sphere-plane	40	100
Asymmetrical spheres	40	100
Two spheres	20	50
Paraboloid-plane	19,8	37,8
Hyperboloid-plane	15,7	33,3
Coaxial cylinders	10,8	21,7
Circular cylinder-plane	9,1	18,9
Bushing through a wall	9,1	18,9
Two hyperboloids	9,1	18,9
Two circular cylinders	5,4	10,8
Corner-plane	3,25	4,3

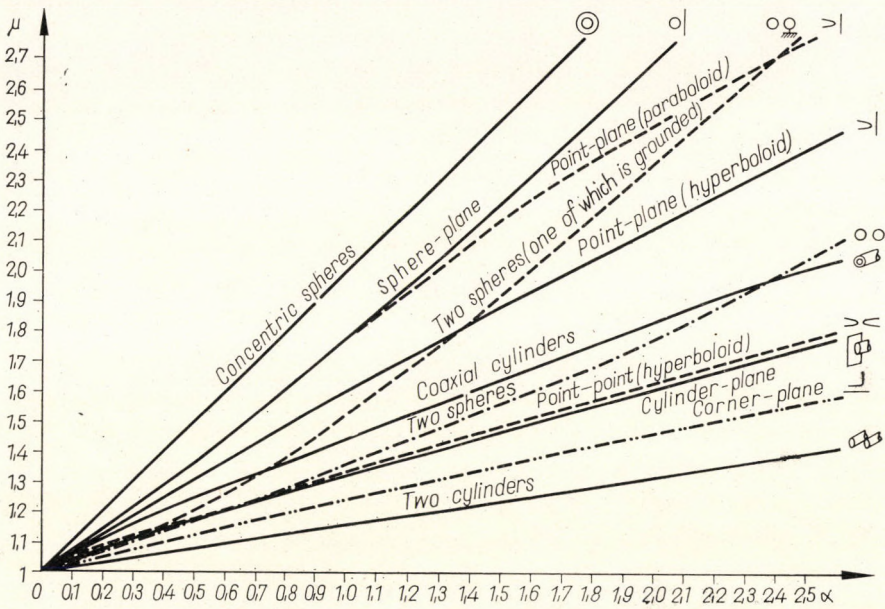


Fig. 1

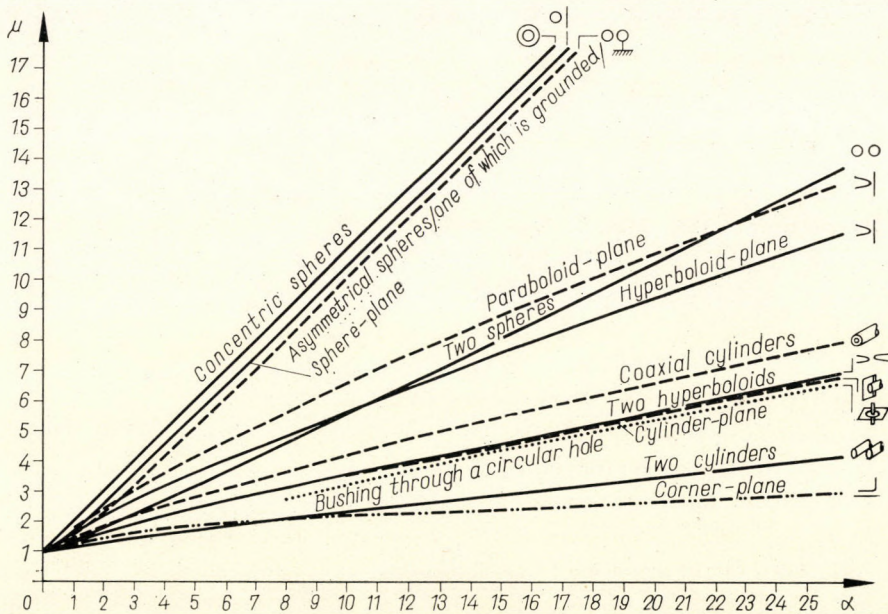


Fig. 2

also for any other values of it. The characteristics can be classified as follows:

a) Very strongly non-uniform fields with $\mu \cong \alpha$. This group includes the fields of concentric spheres and sphere-plane arrangements as well as the field of two asymmetrically disposed spheres if one of them is at earth potential, the ground being placed at infinity.

b) Strongly non-uniform fields with μ approximately between $\alpha/2$ and $\alpha/4$ for high values of α . They embrace the fields of two spheres and of such

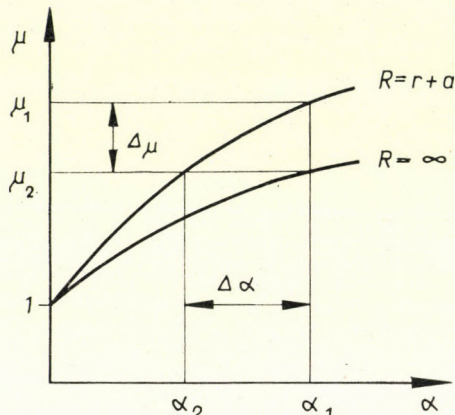


Fig. 3

arrangements as a paraboloid-plane or a hyperboloid-plane approaching the point-plane arrangement. The field of two spheres with high values of α can be considered as a typical representative of this group.

c) Moderately non-uniform fields with μ lying approximately between $\alpha/4$ and $\alpha/8$. These are the fields between two coaxial cylinders, between a circular cylinder and a plane, between two hyperboloids, and the field in a bushing of circular cross-section. The first two of the enumerated arrangements are typical and can easily be calculated.

d) Slightly non-uniform fields with $\mu < \alpha/8$ for high values of α , including the field between two circular cylinders and, strangely enough, that between a rounded corner and a plane.

The curves furnish a quantitative demonstration of what is known about the effect of the factors influencing the variation of the maximum field strength. When at a constant voltage and a constant electrode separation the shape and radius of curvature of one of the electrodes (and consequently the value of α) are kept unchanged while the shape of the other electrode, i.e. that of the counterelectrode, is varied, E_{\max} increases if the capacity of the arrangement also increases. The dielectric stress along an ordinate get up at a given value of α increases in the following sequence of the arrangements, when

for example spherical electrodes are considered: two spheres, sphere and plane, concentric spheres. A similar result is obtained with any other arrangements; as an example for a cylinder the order of succession with increasing dielectric stress is like this: two cylinders, cylinder-plane, coaxial cylinders. Consequently, the larger the surfaces along which the electrodes approach each other are, that is, the more is one of the electrodes surrounded by the other, the higher is the value of E_{\max} .

It can also be seen from this diagram that the radius of curvature R of the counterelectrode has a much smaller effect on the maximum stress than radius r . The radius R of the counterelectrode is $R = r + a$ for concentric spheres or coaxial cylinders and $R = \infty$ for a sphere-plane or cylinder-plane arrangement. An investigation of the effect of the variation in R along the above mentioned vertical coordinate shows that increasing R from $r + a$ to ∞ results in a comparatively small decrease in the non-uniformity coefficient, the same decrease being attained with a relatively small increase in r . These conditions are shown in Fig. 3, where a decrease $\Delta\mu$ is caused by a decrease $\Delta\alpha$ according to the equation

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = a \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = a \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (7)$$

or by an increase Δr

$$r_2 - r_1 = \Delta r = \Delta\alpha \frac{r_1 r_2}{a} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} (r_1 + \Delta r) \quad (8)$$

of the radius r . By rearranging Equ. (8) and substituting $r = r_1$ one obtains

$$\Delta r = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r}{1 - \Delta\alpha/\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha - \Delta\alpha} r. \quad (9)$$

If ΔR or $\Delta\mu$ is small, the equivalent change Δr corresponding to the effect of the change in R can be determined in an analytical form by using the relation

$$\Delta\alpha \cong \frac{\Delta\mu}{\mu'(\alpha)} = \Delta\mu \frac{\partial\alpha}{\partial\mu}. \quad (10)$$

IV. The nature of non-uniformity

From the point of view of an electric breakdown, fields of first-order and second-order non-uniformities are distinguished. If E_{\max} increases when the electrode distance is increased at the expense of the radius of curvature, the field is considered as having a second-order non-uniformity, and a partial breakdown can occur in it. In the opposite case the field has a first-order

non-uniformity, and only total breakdown is possible in the arrangement. Generally, the conditions can be analysed in terms of α ; the fields initially have a first-order non-uniformity, and beyond a critical value α_{cr} they change to a second-order non-uniformity.

Analytically, the conditions can be followed by investigating E_{\max} as a function of the electrode separation, $E_{\max} = f(a)$, if a specified way is prescribed for the electrode distance a to vary with the radii of curvature. The maximum stress plotted against the electrode distance then has a minimum, the position of which will give the value of α_{cr} .

In general, for the discussed cases

$$E_{\max} = \frac{V}{a} \mu \quad (11)$$

so that the derivative of E_{\max} with respect to a is found to be

$$\frac{\partial}{\partial a} E_{\max} = V \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\mu}{a} \right) = V \frac{(\partial \mu / \partial a) a - \mu}{a^2}. \quad (12)$$

Since the factor μ is given as a function of α in Table I, it is convenient to write Equ. (12) in the form

$$\frac{\partial}{\partial a} E_{\max} = \frac{V}{a^2} \left[a \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial a} - \mu \right]. \quad (13)$$

The differential quotient $\partial \mu / \partial \alpha$ in the formulae of Table I can easily be evaluated. When considering the differential coefficient

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a}{r} \right) = \frac{r - a (\partial r / \partial a)}{r^2} \quad (14)$$

the nature of the arrangement must also be taken into consideration. For asymmetrical arrangements (concentric spheres, coaxial cylinders, electrodes against a plane) the condition relative to the change in electrode distance is satisfied if

$$r + a = K_1 = \text{constant}, \quad (15a)$$

whence

$$r = K_1 - a \quad (16a)$$

and the value to be substituted in Equ. (14) is

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -1. \quad (17a)$$

For symmetrical arrangements (two electrodes with identical radii of curvature) the condition

$$2r + a = K_2 = \text{constant} \quad (15b)$$

must be fulfilled, and then

$$r = \frac{K_2}{2} - \frac{a}{2} \quad (16b)$$

and

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{1}{2}. \quad (17b)$$

With these considerations in mind and by using Eqs (13), (14) and (17), the position of the extreme value separating first-order and second-order non-uniformities is furnished by the solution of the equation

$$\frac{V}{a^2} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \cdot a \frac{r+a}{r^2} - \mu \right] = \frac{V}{a^2} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \alpha(1+\alpha) - \mu \right] = 0 \quad (18a)$$

for the asymmetrical arrangements and by the solution of

$$\frac{V}{a^2} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} a \frac{2r+a}{2r^2} - \mu \right] = \frac{V}{a^2} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left(\frac{2+\alpha}{2} \right) - \mu \right] = 0 \quad (18b)$$

for symmetrical arrangements.

The calculation is shown for two simple cases. For concentric spheres Table I gives

$$\mu = 1 + \alpha \quad (19)$$

whence the expression in brackets in Equ. (13) is written as

$$[\alpha(1+\alpha) - (1+\alpha)] = 0 \quad (20)$$

the solution of which gives $\alpha_{cr} = 1$. The ratio of the radii in this case is

$$\frac{R}{r} = \frac{r+a}{r} = 1 + \alpha = 2. \quad (21)$$

Similarly, for coaxial cylinders

$$\mu = \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} \quad (22)$$

so that Equ. (13) can be written as

$$\left[\frac{\ln(1+\alpha) - \alpha/(1+\alpha)}{\ln^2(1+\alpha)} \alpha(1+\alpha) - \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} \right] = 0. \quad (23)$$

The solution of this equation is $\alpha_{cr} = e - 1$, and the ratio of the radii is then given as

$$\frac{R}{r} = \frac{r + a}{r} = 1 + \alpha = e. \quad (24)$$

The results calculated in the same way for a number of arrangements are summed up in Table III.

Table III

Arrangements	α_{cr}	μ at α_{cr}	Remarks
Concentric spheres	1	2	$R/r = 2$
Two spheres	1,97	1,76	$D/r = 3,97$
Two spheres, one of them grounded ..	1,33	1,77	$D/r = 3,33$
A sphere and a plane	1,08	1,84	$D/r = 2,08$
Coaxial circular cylinders	1,72	1,72	$R/r = 2,72$
Two circular cylinders	3,85	1,58	$D/r = 5,85$
A circular cylinder and a plane	1,83	1,56	$D/r = 2,83$
A paraboloid and a plane*	1,29	1,98	—
A hyperboloid and a plane	1,42	1,84	—
Two hyperboloids	2,68	1,82	—
A rounded corner and a plane	2,08	1,48	—

* A rough approximation, because of the small value of α .

When the analytical solution of Equ. (18) ran into difficulties, a graphical construction was applied. In the last column "Remarks" of Table III the quantities appearing in the formulae for the field strength are related to α_{cr} . In these expressions r is the inner radius, R is the outer radius, and D is the distance between the centres for spheres or between the axes for cylinders, and when one of the electrodes is a plane, D denotes the distance of this plane from the centre of the sphere or from the axis of the cylinder.

In the investigated arrangements the values of the non-uniformity coefficient μ corresponding to α_{cr} lie between 1,48 and 2,0, that is, in the fields of first-order non-uniformity μ is smaller than $1,5 \div 2,0$ and in the fields of second-order non-uniformity μ is greater than $1,5 \div 2,0$. On the other hand, an even more interesting conclusion is that the value α_{cr} separating the two cases is in general greater than 1, and only for concentric spheres is it equal to 1. Consequently, the field is always of a first-order non-uniformity for $a/r \leq 1$, and a second-order non-uniformity is only obtained with $a/r \geq 1$.

V. A general method for the approximate calculation of the maximum dielectric stress

On the base of the previous considerations a simple method might be proposed for the approximate determination of the maximum potential gradient of an electrostatic field produced in a homogeneous insulation between two electrodes having smooth surfaces.

The arrangement considered is replaced by the most similar case among those in Figs 1 and 2. In doing this, the distance a between the electrodes must be kept unchanged. The replaced electrodes are preferably chosen in such a way that the radius of curvature r of the electrode with the greater curvature is equal to, or less than, that of the replaced electrode. In the case of two similar electrodes this requirement refers to the investigated point. The same applies to the algebraic value of the radius of curvature of the counterelectrode, which means that the replacing electrode must surround ("envelope") the other electrode to the same extent as, or even better than, that which has been replaced. After the equivalent arrangement has been chosen, the coefficient α can be determined, and from this value the factor μ is obtained according to Fig. 1. By determining the average field strength in Equ. (4), the maximum dielectric stress

$$E_{\max} = \mu E_{\text{average}}$$

is readily obtained.

APPENDIX I

Relationships used to calculate the values of the non-uniformity coefficient

The notations in these formulae are as follows:

- E_{\max} maximum dielectric stress;
- V voltage across the electrodes;
- a electrode distance;
- r radius of curvature of the inner electrode or of the electrode with the greater curvature;
- R radius of curvature of the outer electrode or of the electrode with the smaller curvature.

The serial numbers before the formulae are the same as in Table I.

1. $E_{\max} = \frac{U}{a} \cdot \frac{R}{r}$.
2. $E_{\max} = \frac{V}{2a} \left(\frac{a+r}{r} + \frac{r}{a+r} \right)$.
3. $E_{\max} \frac{V}{a} f$

where the factor f as a function of $\alpha = a/r$ is found to be

$$f = \frac{1}{2}(\alpha + 1) + \frac{1}{\alpha + 2} + \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)^3} + \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)^4} + \frac{\alpha}{2(\alpha + 2)^5} - \frac{\alpha}{(\alpha + 2)^7} - \frac{2\alpha}{(\alpha + 2)^8},$$

according to Russel's approximation.

$$4. E_{\max} = \frac{V}{a} f' .$$

The value of f' is given by Kirchhoff's elliptical integral series, and for $\alpha > 1$ a good approximation is obtained by

$$f' = \alpha + \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)^3} .$$

$$5. E_{\max} = \frac{V}{2a} \left(\frac{2a + r}{r} + \frac{r}{2a + r} \right) .$$

$$6. E_{\max} = \frac{V}{a} f'' ,$$

where $f''(\alpha) = f(2\alpha)$ by using Russel's formula for two spheres.

$$7. E_{\max} = \frac{V}{r \ln \frac{R}{r}} .$$

$$8. E_{\max} = \frac{V}{2 \ln \frac{a+r}{r}} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a+r} \right) .$$

$$9. E_{\max} = \frac{V}{2r \ln \frac{\sqrt{a^2 + 4ar + a}}{\sqrt{a^2 + 4ar - a}}} \sqrt{\frac{a + 4r}{a}} .$$

$$10. E_{\max} = \frac{V}{\ln \frac{2a+r}{r}} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a+r} \right) .$$

$$11. E_{\max} = \frac{V}{r \ln \frac{\sqrt{a^2 + 2ar + a}}{\sqrt{a^2 + 2ar - a}}} \sqrt{\frac{a + 2r}{a}} .$$

$$12. E_{\max} = \frac{2V}{r \ln \frac{r + 2a}{r}} .$$

$$13. E_{\max} = \frac{V}{\ln \frac{\sqrt{a^2 + ar + a}}{\sqrt{a^2 + ar - a}}} \cdot \frac{2\sqrt{a^2 + ar}}{ar} .$$

$$14. E_{\max} = \frac{V}{\ln \frac{\sqrt{a^2 + 2ar + a}}{\sqrt{a^2 + 2ar - a}}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 2ar}}{ar} .$$

$$15. E_{\max} = \frac{V}{r \ln \frac{2R}{r}} .$$

16. Graphically determined by DREYFUSS [2].

The derivation of the formula can be found in the special literature on high voltage engineering of electric fields (for example [1, 2]).

APPENDIX II

Calculated values of the non-uniformity coefficient

The values of μ of the following arrangements:

α	Two spheres				Sphere-plane		Coaxial cylinders	Two cylinders		Cylinder-plane		Point-plane		Point-point (hyperboloid)	Bushing through a circular hole	Corner-plane
	Concentric spheres	Large radius	Small radius	One grounded	Large radius	Small radius		Large radius	Small radius	Large radius	Small radius	Paraboloid	Hyperboloid			
0,2	1,2	1,07		1,07	1,14		1,11	1,03		1,08		1,13	1,1		1,05	
0,5	1,5	1,17		1,20	1,36		1,24	1,08		1,16		1,30	1,17		1,12	
0,8	1,8	1,28		1,38	1,61		1,36	1,14		1,26		1,49	1,27		1,2	
1	2	1,36		1,52	1,77		1,44	1,16		1,32	1,82	1,60	1,34		1,24	
1,5	2,5	1,56		1,91	2,22		1,64	1,24		1,47	2,17	1,88	1,48		1,35	
2	3	1,77		2,34	2,68		1,83	1,32		1,6	2,48	2,14	1,62	1,12	1,47	
2,5	3,5	2,03		2,8	3,15		2,0	1,39		1,75	2,79	2,40	1,77	1,29	1,58	
3	4	2,22		3,25	3,63		2,16	1,47		1,87	3,02	2,64	1,91	1,46	1,65	
5	6	3,15	3,9	5,17	5,59	5,55	2,8	1,73	1,62	2,4	2,28	4,17	3,56	2,38	2,1	1,85
8	9	4,60	4,55	8,11	8,55	8,5	3,67	2,16	2,04	3,12	2,98	5,65	4,84	3,1	2,77	2,08
10	11	5,58	5,55	10,1		10,5	4,18	2,38	2,29	3,53	3,43	6,6	5,6	3,52	3,24	2,22
15	16		8	15,07		15,5	5,42	2,97	2,88		4,5	8,75	7,53	4,61	4,38	2,54
20	21		10,5	20,05		20,5	6,6		3,45		5,55	10,75	9,3	5,65	5,35	2,72
25	26		13	25,04		25,5	7,7		4,0		6,5	12,7	11	6,57	6,3	2,89
30	31		15,5	30,03		30,5	8,75		4,54		7,4	14,6	12,8	7,52	7,1	3,04
40	41		20,5	40,03		40,5	10,75		5,53		9,25	18,3	15,95	9,3	9,15	3,37
50	51		25,5	50,02	50,5	50,5	12,7		6,45		10,9	21,7	19,1	11,1	10,8	3,65
100	101	50,5	50,5	100	100,5	100,5	21,6		10,96		18,9	37,7	33,6	19,2	18,9	4,3

REFERENCES

1. OLLENDORF, F.: Potentialfelder der Elektrotechnik. Springer, Berlin 1932.
2. EISLER, J.: Nagyfeszültségű technika (High-tension Technic). Akadémiai Kiadó, Budapest 1965.
3. BOUWERS, A.: Die maximale elektrische Feldstärke für einige einfache Elektrodenanordnungen. *Philips' Technische Rundschau* 6 (1941), 274.

NÄHERUNGSWEISE BESTIMMUNG DER GRÖSSTEN BEANSPRUCHUNG
IN ELEKTRISCHEN FELDERN

GY. VAJDA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit bringt ein Verfahren für die näherungsweise Berechnung der größten Beanspruchung in statischen elektrischen Feldern. Durch eine zweckmäßige Substitution der Elektroden kann die Untersuchung des Feldes auf die Untersuchung von einigen einfacheren und leicht zu berechnenden Anordnungen zurückgeführt werden. Die Rechenarbeit wird durch die Einführung des Inhomogenitätsfaktors sehr erleichtert. Die Arbeit zeigt auch ein Berechnungsverfahren für die numerische Trennung der inhomogenen Felder ersten Grades von denjenigen zweiten Grades.

DÉTERMINATION APPROCHÉE DE LA CONTRAINTE DIÉLECTRIQUE MAXIMUM
DANS LES CHAMPS ÉLECTRIQUES

GY. VAJDA

RÉSUMÉ

L'étude présente une méthode pour le calcul approché de la contrainte maximum dans les champs électriques statiques. Par une substitution convenable des électrodes, on peut réduire l'étude du champ à l'examen de quelques arrangements plus simples, faciles à calculer. Le travail du calcul est notablement facilité par l'introduction du coefficient d'inhomogénéité. L'étude montre aussi une méthode pour la séparation numérique des champs inhomogènes au premier et au second degré.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

ДЪ. ВАЙДА

РЕЗЮМЕ

В работе демонстрируется метод приближенного расчета максимальной нагрузки электрических силовых полей. Целесообразным замещением электродов исследование силового поля можно свести к нескольким более простым и легко вычисляемым схемам. Расчет значительно облегчается введением коэффициента неравномерности. В работе показана методика расчета также для числового разделения неомогенных силовых полей первого и второго порядка.

INCREASING THE EFFICIENCY OF GAS TRANSMISSION PIPE LINES

A. FONÓ

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received March 21, 1966]

The efficiency of gas transmission pipe lines can be increased by reducing the distances between the compressor stations; in existing systems the method to step up efficiency is to insert intermediary compressor stations. The insertion of compressor stations improves the economy of operation even before it becomes a necessity for higher efficiency. The load at which a compressor station in the halving point between two existing ones contributes to better economy, can be calculated. The paper presents a calculation to establish the annual running time needed to cover the amortisation costs of such an intermediate compressor station for constant load round the year. Its rate provides information on the economy of the investment. The annual operating time above which the establishment of an intermediate compressor station improves economy with variable load can be determined on the basis of the load frequency curve. Cases in which the insertion of two intermediate compressor stations offers better economy than the setting up of one only, can be calculated according to a similar method.

To increase the capacity of gas transmission lines it is customary to insert compressor stations along the line. The insertion of compressor stations may be economically advantageous even before gas production has grown to such an extent that operation would not be possible without them. In fact their insertion is justified in all cases when the annual charges on the invested capital are less than the value of labour saved through the operation of the compressor station.

What follows is the examination of the economy of the insertion of compressor stations in a given gas transmission pipe line.

Known are:

l [m] the length of the line section between two existing compressor stations;
 p_a [kg/sq.cm] the end-pressure of compression admissible by the strength of the given pipe;
 p_b [kg/sq.cm] the pressure at the end of the line section of a length of l ahead of the compressor station.

There are no differences in level along the said line section which would require special consideration.

The pressure drop corresponding to the diameter of the pipe line, over a length l between two compressor stations, in function of the quantity of gas transferred, q [N. cu. m/h], is expressed by the following relationship:

$$p_a^2 - p_b^2 = C_1 \cdot q^2 l. \quad (1)$$

Similarly, with the pressure of p_c at the end of the line section $l/2$:

$$p_a^2 - p_c^2 = C_1 \cdot q^2 \frac{l}{2}. \quad (2)$$

Compression work is determined by the relationship (3)

$$L = C \cdot q \frac{1}{\eta} \log \frac{P_a}{P_b} \text{ [kW]}, \quad (3)$$

where η is the efficiency.

From (1) and (3) follows:

$$L = C \cdot \frac{q}{\eta} \log \frac{P_a}{\sqrt{p_a^2 - C_1 q^2 l}} \text{ [kW]}. \quad (4)$$

Where there is no special reason for a different arrangement, the compressor station is inserted at the halving point of the distance l . Although according to this arrangement two compressor stations will consume power, each will need considerably less due to the smaller pressure drop along the line section of half the length.

The compression work of the two stations will add up to:

$$2L_e = C \cdot \frac{q}{\eta_e} 2 \log \frac{P_a}{P_c} = C \frac{q}{\eta_e} 2 \log \frac{P_a}{\sqrt{p_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{2}}},$$

$$2L_e = C \cdot \frac{q}{\eta_e} \log \frac{p_a^2}{p_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{2}}. \quad (5)$$

Power consumption with an intermediate compressor station will be lower than without it if

$$L > 2L_e$$

consequently, from (4) and (5)

$$\frac{1}{\eta} \log \frac{P_a}{\sqrt{p_a^2 - C_1 q^2 l}} > \frac{1}{\eta_e} \log \frac{p_a^2}{p_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{2}},$$

$$\left[\frac{P_a}{\sqrt{p_a^2 - C_1 q^2 l}} \right]^{1/\eta} > \left[\frac{p_a^2}{p_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{2}} \right]^{1/\eta_e},$$

$$\frac{\left(p_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{2}\right)^{1/\eta_e}}{\left(\sqrt{p_a^2 - C_1 q^2 l}\right)^{1/\eta}} > p_a \left(\frac{2}{\eta_e} - \frac{1}{\eta}\right).$$

Here follows a verification of calculating with the assumption that

$$\eta \cong \eta_e.$$

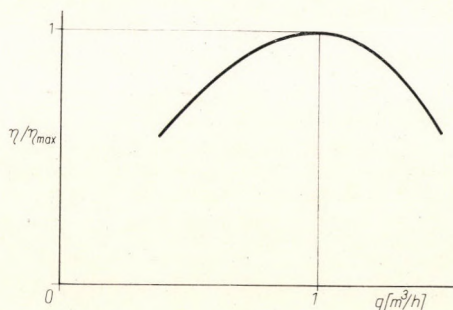


Fig. 1. Variations in gas compressor efficiency

In this case, namely,

$$\frac{p_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{2}}{\sqrt{p_a^2 - C_1 q^2 l}} > p_a,$$

$$p_a^4 - 2 p_a^2 C_1 q^2 \frac{l}{2} + C_1^2 q^4 \frac{l^2}{4} > p_a^4 - C_1 p_a^2 q^2 l \dots C_1^2 q^4 \frac{l^2}{4} > 0$$

i.e. it is always justified economically to keep an intermediate, amortised, compressor station in operation if the change in its efficiency is of negligible magnitude.

The intermediate compressor station be of the same type as the one already existing or selected in such a way that under the given operating conditions, its maximum efficiency should be attained at the given load.

If the latter case is chosen the relative mean efficiency of the two series-connected compressor stations can not be lower than if both are of the same type.

If the new compressor station is of the same type as the existing one, its efficiency — due to the diminished pressure gradient — will change in the same way as the efficiency does with the new volume corresponding to the changed pressure of the gas on arrival. Fig. 1 shows the variations of compressor efficiency in function of the compressed volume. The optimum

relative efficiency is marked 1. Gas pressure, from p_b at the point of arrival is increased to p_c . This change influences the efficiency. It may be assumed that the existing compressor had operated at approximately optimum efficiency.

As per (1) and (2), the volume diminished according to the pressure ratio p_b/p_c

$$q^2 l C_1 = p_a^2 - p_b^2 = 2(p_a^2 - p_c^2),$$

since

$$q^2 \frac{l}{2} C_1 = p_a^2 - p_c^2;$$

$$\frac{p_a^2 + p_b^2}{2} = p_c^2, \quad (6)$$

$$\frac{p_b}{p_c} = \sqrt{\frac{2 p_b^2}{p_a^2 + p_b^2}} = \sqrt{\frac{2}{(p_a/p_b)^2 + 1}}. \quad (7)$$

Assuming, for instance p_a to be 70 kgs per sq.cm, with the efficiency according to Fig. 1 we obtain the values in Table I.

Table I

p_b	p_b/p_c	$\eta_r, \%$
66,5	0,975	99,7
63,5	0,95	99,4
60,0	0,92	99,0
56,0	0,89	96,5
50,0	0,825	94,0

Since in the conventional compressor stations the compression ratio is below $70/50 = 1,4$ the above $\eta_r = 94$ per cent may be regarded to be the extreme value and the assumption $\eta_e \cong \eta$ is acceptable.

In the case of a compressor station yielding constant performance round the year, if the first cost amounts to $L_e \cdot a$ and its annual amortisation rate is $L_e \cdot ab$, then savings accrued by consumption of $2 L_e$ only — instead of L — during h number of hours, must exceed $L_e \cdot a b$. If the cost per kWh, including supplementary costs, is C_2 , amortization is covered provided constant load over h hours per annum when

$$ab L_e < C_2 (L - 2 L_e) h$$

viz. provided that

$$\frac{ab}{C_2 h} < \frac{L}{L_e} - 2.$$

Calculations have been carried out with the cost of kWh of power as unity, independent of any currency.

At constant load, the length of operating period in terms of hours, to cover amortisation is as follows:

$$h \geq \frac{ab}{C_2} \frac{1}{L/L_2 - 2} .$$

Substituting L and L_e from (4) and (5) respectively

$$h \geq \frac{ab}{C_2} \frac{1}{\log(p_a/p_b) - 2}$$

where, as per (6):

$$\frac{p_a}{p_c} = \sqrt{\frac{2}{1 + (p_b/p_a)^2}} , \tag{8}$$

$$h \geq \frac{ab}{C_2} \frac{1}{\log(p_a/p_b) - 2} = \frac{ab}{C_2} \Phi \left(\frac{p_a}{p_b} \right) \tag{9}$$

where ab/C_2 denotes the annual amortisation rate of the capital invested, in terms of unity of labour, for inst. cost in kWh. This unity, for loads in the environments of the order of L_e can be readily established.

According to relationship (1), the pressure of gas at its arrival to the compressor station, prior to the setting up of the new intermediary compression station (p_b), depends on the rate of gas transfer viz. q [N. cu. m/h]:

$$p_b^2 = p_a^2 - q^2 l C_1 .$$

The next example was calculated with p_a at 70 kgs per sq.cm. It has been assumed that $p_b = 50$ kgs per sq.cm corresponds to $q_1 = q_{max}$, consequently

$$\frac{p_a}{p_{b \min}} = 1,4 .$$

So calculated, $\Phi(p_a/p_b)_{max} = 2,55$; furthermore, if in the example

$a = 200$ \$ per kWh,

$b = 12$ per cent,

$C_2 = 0,02$ \$ per kWh

and consequently $ab/C_2 = 1200$, then the operating time $h \geq 1200 \times 2,55 = 3060$ hours per annum.

In this example with the assumption of l to be 121 000 m and d to be 0,5 m and for ρ kg/m²

$$p_a^2 - p_{b \min}^2 = \frac{q^2 l}{1,21 \cdot 10^6 d^{16/3}} = \frac{q^2 121 000 \cdot 2^{16/3}}{1,21 \cdot 10^6} \cong 4 q^2 = (49 - 25) \cdot 10^{10} ,$$

then

$$\begin{aligned} 24 \cdot 10^{10} &= 4 q^2; \quad l_{c_1} = 4; \\ q &= 245\,000 \text{ N. cu.m/h.} \end{aligned} \quad (10)$$

Accordingly, with constant 245 000 N. cu.m per h load round the year, under the conditions given in the example, the equipment can be amortised in 3060 hours per year of operation. This means that the

$$\frac{8760 - 3060}{8760} = 0,65^{\text{th}} \text{ part}$$

of the capital investment represents the profit.

With variable load during the year, on the other hand, in which case the load is determined by chart No. 2, the procedure followed is to compute the potential savings derived with an intermediate compressor station for each rate of load and to sum those up in consideration with the time durations, viz. to derive

$$C_2 \int_0^h (L - 2 L_2) dh.$$

This saving in cost is subsequently compared with the $ab L_{e \max}$ deducible cost, which corresponds to the capital investment. Thus, we derive

$$\begin{aligned} \int_0^h C_2 q c_1 \left[\log \frac{P_a}{P_b} - 2 \log \frac{P_a}{P_c} \right] dh &\geq ab q_{\max} C_1 \log \frac{P_a}{P_{c_{\min}}}, \\ \int_0^h \frac{q}{q_{\max}} \log \frac{P_a/P_b}{(P_a/P_c)^2} dh &\geq \frac{ab}{C_2} \log \frac{P_a}{P_{c_{\min}}}. \end{aligned}$$

From (6)

$$\begin{aligned} \frac{P_a^2}{P_c^2} &= \frac{2}{1 + (P_b^2/P_a^2)} \dots P_c^2 = \frac{P_a^2 + P_b^2}{2}, \\ \frac{P_a/P_b}{P_a^2/P_c^2} &= \frac{P_c^2}{P_a P_b} = \frac{P_a^2 + P_b^2}{2 P_a P_b} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_a}{P_b} + \frac{P_b}{P_a} \right), \\ \int_0^h \frac{q}{q_{\max}} \log \frac{1}{2} \left(\frac{P_a}{P_b} + \frac{P_b}{P_a} \right) dh &\geq \frac{ab}{C_2} \log \sqrt{\frac{2}{1 + (P_b/P_a)_{\min}^2}}. \end{aligned}$$

As per the preceding example:

$$\begin{aligned} l_{c_1} &= 4, \\ \frac{P_a}{P_b} &= \sqrt{\frac{P_c}{P_a^2 - q^2 - q^2 l_{c_1}}} = \sqrt{\frac{1}{(1 - 4 q^2/P_a^2)}}, \\ \frac{P_a}{P_b} &= \sqrt{\frac{1}{1 - 4 (q/q_{\max})^2 q_{\max}^2/P_a^2}}, \end{aligned}$$

ERRATUM

Kindly insert the following corrected text on page 337 of the *Acta Techn. Hung.* 56 (1966), after the 4th line:

$$h \geq \frac{ab}{C_2} \frac{1}{L/L_e - 2};$$

substituting L and L_e from (3) and (5), respectively

$$h \geq \frac{ab}{C_2} \frac{1}{\frac{\log(p_a/p_b)}{\log(p_a/p_c)} - 2}$$

where, as per (6):

$$\frac{p_a}{p_c} = \sqrt{\frac{2}{1 + (p_b/p_a)^2}}, \quad (8)$$

$$h \geq \frac{ab}{C_2} \frac{1}{\frac{\log(p_a/p_b)}{\log \sqrt{\frac{2}{1 + (p_b/p_a)^2}}} - 2} = \frac{ab}{C_2} \Phi \left(\frac{p_a}{p_b} \right). \quad (9)$$

Redaction of the Acta Techn. Hung.



since from (10)

$$p_a^2 - p_{b\min}^2 = 4 q_{\max}^2$$

and

$$p_a^2 \left[1 - \left(\frac{1}{1,4} \right)^2 \right] = 4 q_{\max}^2 = \frac{p_a^2}{2,03}$$

$$q_{\max}^2 = \frac{p_a^2}{8,12}; \quad 4 \frac{q_m^2}{p_a^2} = \frac{1}{2,03};$$

$$\frac{p_a}{p_b} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2,03} \left(\frac{q}{q_{\max}} \right)^2}};$$

$$\int_0^h \Phi \left(\frac{q}{q_{\max}} \right) dh = \int_0^h \frac{q}{q_{\max}} \log \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2,03} \left(\frac{q}{q_{\max}} \right)^2} + \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2,03} \left(\frac{q}{q_{\max}} \right)^2}} \right] dh \geq$$

$$\geq \frac{ab}{C_2} \log \sqrt{\frac{2}{1 + (1/1,4)^2}} = 0,061 \frac{ab}{C_2}.$$

From the example

$$\frac{ab}{C_2} = 1200,$$

$$\int_0^h \Phi \left(\frac{q}{q_{\max}} \right) dh \geq 73.$$

The variations of q_n/q_{\max} over the year in the given example are illustrated in Fig. 2. Dividing the year into ten parts, 376 hours periods will be examined. Accordingly, after summing up the values we derive

$$\varphi \left(\frac{q_n}{q_{\max}} \right) = \frac{3760}{10} \sum_{n=1}^{10} \frac{q_n}{q_{\max}} \log \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2,03} \left(\frac{q_n}{q_{\max}} \right)^2} + \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2,03} \left(\frac{q_n}{q_{\max}} \right)^2}} \right] \geq 73.$$

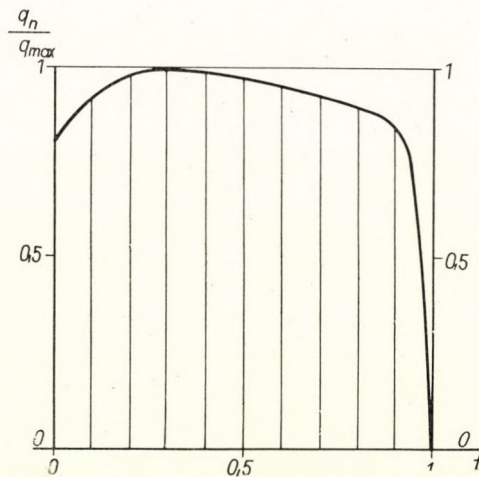


Fig. 2. Load frequency chart

At the given small values of q_n/q_{\max} ; $\varphi(q_n/q_{\max})$ are negligible, this is indicated also in Fig. 3.

In the following Table II the values of $\varphi(q_n/q_{\max})$ are given in conformity to chart Nr. 3.

The time of amortisation was calculated according to the frequency curve of Fig. 2, for 1/10 year periods and summated.

Table II

$\frac{q_n}{q_{\max}}$	$\varphi\left(\frac{q_n}{q_{\max}}\right)$	$t = \frac{1}{8760} \text{ h/y}$	$t \cdot \varphi\left(\frac{q_n}{q_{\max}}\right)$
0,45	0,00058	0,05	0,00008
0,55	0,00083		
0,65	0,0014		
0,75	0,0039		
0,85	0,00915	0,1	0,00092
0,90	0,0116	0,25	0,0029
0,95	0,019	0,40	0,0072
1,00	0,025	0,20	0,005
		<u>1,0</u>	<u>0,016</u>

With the load of the curve of Fig. 2 and under the conditions of the example, the amount available for amortisation is proportional to the cost of

$$0,016 \cdot 8760 = 140 \text{ kWhours,}$$

while the sum required for amortisation is proportional to

$$0,061 \frac{ab}{C} = 0,061 \cdot 1200 = 73 \text{ kWh.}$$

With a $73/140 = 0,52$ th part used towards the amortisation of investment, the net profit is

$$0,48 \text{ part}$$

and the annual operating time required for amortisation

$$\frac{73}{0,016} = 0,52 \cdot 8760 = 4540 \text{ hours.}$$

Along a similar procedure, the case when *the insertion of two compressor stations instead of one* is the more economical solution, can also be calculated.

The setting up of two compressor stations with constant load is economically justified if the amortisation of the additional investment can be covered from the savings in power costs. This means that the running expenses of 3 stations are securing bigger savings than the amortisation of the investment costs of two inserted stations against one.

a) L_e kW is the power demand of one intermediate compressor station, and

$a L_e$ its first cost.

b) $2 L_{e2}$ kW power is consumed by two intermediate stations, while L kW is the power consumption of the line without compressor stations; b denotes the annual amortisation rate.

With C_2 as the unit cost of a kWh, the annual cost of energy during h hours per annum is

in case a)

$$hC_2 (L - 2 L_c);$$

in case b)

$$hC_2 (L - 3 L_{e2}).$$

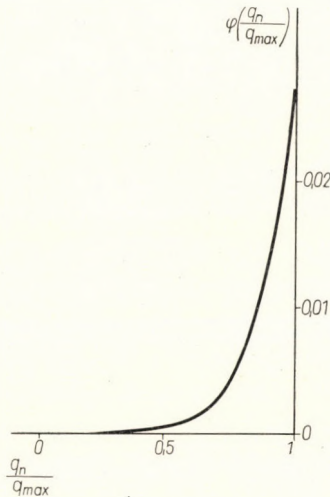


Fig. 3. The effect of load upon running costs

The cost of power with two intermediate compression stations (instead of one) is lower by the difference between the two, viz. by

$$hC_2 (2 L_e - 3 L_2).$$

This means that the larger capital investment is justified if

$$ba_2 2 L_{e2} - ba_1 L_e \leq hC_2 (2 L_e - 3 L_{e2}),$$

$$2 \frac{a_2}{a_1} L_{e2} - L_e \leq \frac{hC_2}{ba_1} (2 L_e - 3 L_{e2}),$$

$$\frac{a_2}{a_1} \frac{L_{e2}}{L_e} - \frac{1}{2} \leq \frac{hC_2}{ba_1} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{L_{e2}}{L_e} \right),$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{L_e}{L_{e2}} \left[\frac{hC_2}{ba_1} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{L_{e2}}{L_e} \right) + \frac{1}{2} \right],$$

$$\frac{L_e}{L_{e2}} = \log \left[\frac{P_a}{\sqrt{P_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{2}}} \right] \cdot \frac{1}{\log \frac{P_a}{\sqrt{P_a^2 - C_1 q^2 \frac{l}{3}}}} = A.$$

Should the investment cost in the environments of an order of L magnitude be written by an expression of the shape of $K_1 + L K_2$, then

$$a_2 = \frac{K_1 + L_{e2} K_2}{L_{e2}}, \quad a_1 = \frac{K_1 + L_e K_2}{L_e};$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{K_1}{L_{e2}} + K_2}{\frac{K_1}{L_e} + K_2} = \frac{\frac{A}{L_e} + \frac{K_2}{K_1}}{\frac{1}{L_e} + \frac{K_2}{K_1}},$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{hC_2}{ba_1} \left(A - \frac{3}{2} \right) + \frac{A}{2};$$

$$\frac{\frac{A}{L_e} + \frac{K_2}{K_1}}{\frac{1}{L_e} + \frac{K_2}{K_1}} \leq \frac{hC_2}{ba_1} \left(A - \frac{3}{2} \right) + \frac{A}{2},$$

$$A + \frac{K_2}{K_1} L_e \leq \left(1 + \frac{K_2}{K_1} L_e \right) \left[\frac{hC_2}{ba_1} \left(A - \frac{3}{2} \right) + \frac{A}{2} \right],$$

$$\frac{K_2}{K_1} L_e \left\{ 1 - \left[\frac{hC_2}{ba_1} \left(A - \frac{3}{2} \right) + \frac{A}{2} \right] \right\} \leq \frac{hC_2}{ba_1} \left(A - \frac{3}{2} \right) + \frac{A}{2} - A;$$

$$L_e \leq \frac{K_1}{K_2} \frac{\frac{hC_2}{ba_1} \left(A - \frac{3}{2} \right) - \frac{A}{2}}{1 - \left[\frac{hC_2}{ba_1} \left(A - \frac{3}{2} \right) + \frac{A}{2} \right]}.$$

A is a function of l and q , the limit value of L_e , in addition to l , is also determined by q . If increasing load attains the q value which corresponds to L_e kW, the insertion of two intermediate compressor stations is an economical proposition.

With variable load, on the basis of the load curve, the calculation can be performed in the same way as in the case of the insertion of one single compressor station.

STEIGERUNG DER LEISTUNGSFÄHIGKEIT VON GASFERNLEITUNGEN

A. FONÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die Leistungsfähigkeit von Fernleitungen kann durch Verringerung der Entfernung zwischen den Kompressorstationen erhöht werden. Bei vorhandenen Fernleitungen ist es üblich, die Leistungsfähigkeit mittels dazwischengeschalteter Kompressorstationen zu steigern. Das Dazwischenschalten von Kompressorstationen kann die Wirtschaftlichkeit steigern, noch bevor es des Dazwischenschaltens zur Erhöhung der Leistung bedürfte. Es ist berechenbar, bei welcher Belastung der Betrieb einer Verdichterstation in halber Entfernung zwischen zwei Verdichterstationen die Wirtschaftlichkeit erhöht. Die zur Amortisierung der Baukosten einer dazwischengeschalteten Kompressorstation nötige Anzahl von jährlichen Betriebsstunden wird für den Fall einer während des Jahres unveränderten Belastung berechnet. Dadurch kann die Wirtschaftlichkeit der Investition beurteilt werden. Im Falle einer sich während des Jahres ändernden Belastung kann diejenige jährliche Betriebsstundenzahl, über welcher die Schaffung einer dazwischengeschalteten Kompressorstation wirtschaftlich ist, auf Grund der Häufigkeitskurve der Belastung festgestellt werden. Mit einem ähnlichen Verfahren kann berechnet werden, wann es wirtschaftlicher ist, zwei Verdichterstationen anstatt einer dazwischen zu schalten.

L'AUGMENTATION DE L'EFFICACITÉ DES LIGNES DE TRANSPORT DE GAZ

A. FONÓ

RÉSUMÉ

L'efficacité d'une ligne de transport peut être augmentée par la diminution de la distance entre les postes de compresseurs. En cas d'une ligne de transport existante, on augmente généralement l'efficacité par un poste de compresseur inséré. L'insertion d'un poste peut augmenter l'économie, avant même que cette insertion ne devienne nécessaire en vue de l'augmentation du rendement. On peut calculer à quelle charge le poste de compresseur établi à mi-distance entre deux postes de compresseurs existants augmente l'économie. Le nombre d'heures de service par an, nécessaire pour l'amortissement des frais de construction d'un poste de compresseur inséré est calculé pour le cas d'une charge constante au cours de l'année. On peut juger par là de l'économie de l'investissement. Au cas de charges variables au cours de l'année, le nombre d'heures de service par an au-dessus duquel la construction d'un poste de compresseur inséré est économique, peut être établi en partant d'un diagramme de fréquence des charges. Par un procédé semblable, on calcule dans quels cas l'insertion de deux postes de compresseurs au lieu d'un seul devient plus économique.

ПОВЫШЕНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ МАГИСТРАЛЬНОГО
ГАЗОПРОВОДА

A. ФОНО

РЕЗЮМЕ

Пропускную способность газопроводов можно повысить уменьшением расстояния между компрессорными станциями. В случае работающего газопровода при повышении пропускной способности обычно прибегают к дополнительному устройству на участках компрессорных станций. Устройство дополнительной компрессорной станции может повысить экономичность еще перед тем, как его устройство потребуется вследствие необходимости повышения пропускной способности газопровода. Можно вычислить, что при эксплуатации компрессорной станции на участке между двумя компрессорными станциями при какой нагрузке повышает экономичность. Подсчитано годовое число рабочих часов, необходимых для покрытия расходов устройства промежуточной компрессорной станции для случая неизменной нагрузки в течение всего года. С этим можно определить экономичность капитальных затрат. В случае изменяющейся в течение года нагрузки на основе кривой частоты нагрузки можно определить то годовое число рабочих часов, сверх которого устройство промежуточной компрессорной станции будет экономически выгодным. Схожим методом можно вычислить, в каких случаях выгоднее устраивать вместо одной промежуточной компрессорной станции две станции.

DIE STATISTISCHE BEWERTUNG DES VERBRAUCHES IN RADIALNETZEN

I. BACH

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR ELEKTRIZITÄTSWIRTSCHAFT, BUDAPEST

[Eingegangen am 10. Juni, 1966]

Im Laufe der Projektierung von Radialnetzen ergeben sich Nachteile einiger gegenwärtigen Berechnungsmethoden, bei denen die Gleichzeitigkeit nicht exakt berücksichtigt werden kann. Diese werden dadurch eliminiert, daß die Belastungen des Netzes als Zufallsvariable betrachtet werden. Dabei wird die resultierende Belastung der individuellen Verbraucher als normalverteilt vorausgesetzt, und so werden sich auch die Belastungen der Knotenpunkte und der Leitungsstrecken ebenfalls als normalverteilt ergeben. Bei der Berechnung des größten Spannungsabfalls wird auch der Umstand berücksichtigt, daß die in den einzelnen Leitungsstrecken auftretenden Spannungsabfälle nicht als unabhängig betrachtet werden können. Bei der Berechnung der Netzverluste wird das Wahrscheinlichkeitsmodell der Belastungen angewendet. Insofern der ursprüngliche Verbrauch als aus einigen charakteristischen Verbrauchstypen zusammengesetzt betrachtet werden kann, lassen sich die in den Routinberechnungen vorkommenden Konstanten auf Grund der Verbrauchskurve der einzelnen Kategorien im voraus berechnen. Es werden auch die Änderungen in der Belastung berücksichtigt, die durch die Zunahme der Belastung im Laufe des Jahres bedingt sind.

I. Einleitung

Bei Planung von Verteilungsnetzen strebt man an, das Netz für die Versorgung gegebener Verbraucher so anzulegen, daß dabei

a) die vorgeschriebenen technischen Bedingungen befriedigt werden; und zugleich

b) die möglichst höchste Wirtschaftlichkeit der Energieversorgung erreicht wird.

Hinsichtlich der Erfüllung der technischen Bedingungen muß beachtet werden, daß die Belastung der Leitungen unter ihrer Belastbarkeit liegen soll und der größte Spannungsabfall den zulässigen Wert nicht überschreiten darf.

Für die Beurteilung der Wirtschaftlichkeit ist den Investitionskosten die Ersparnis an den Betriebskosten gegenüberzustellen. Eine Netzerweiterung kann als wirtschaftlich angesehen werden, wenn der Kapitalaufwand unter dem Kostengleichwert der als Ergebnis der Modifizierung herabgesetzten Netzverluste bleibt.

Für die üblichen einfachen Analysen begnügt man sich in der Regel mit den obigen Untersuchungen. Die in der Berechnung angewandten alle

drei Größen — die höchste Belastbarkeit der Leitungen, der größte Spannungsabfall und der Netzverlust — sind von den Belastungen der Abnehmer, richtiger gesagt, von der Einschätzung des Leistungsbedarfes abhängig.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren beschrieben, mit welchem die Genauigkeit der Einschätzung erhöht und somit die Berechnung exakter gemacht werden kann.

II. Schwierigkeiten der genauen Einschätzung

Unter der realen Voraussetzung, daß die Tageslastspitzen für alle Verbraucher zeitlich zusammenfallen, sind sowohl für die Leitungsbelastbarkeit als auch für den zulässigen Spannungsabfall nur die Spitzenlasten maßgebend. Die Spitzenlasten und die größten Spannungsabfälle der einzelnen Leitungen sind durch die Resultierende der Spitzenlasten der einzelnen Verbraucher bestimmt. Die algebraische Summe der einzelnen Spitzenlasten ist jedoch wegen der Ungleichzeitigkeit im allgemeinen größer als die resultierende Spitzenlast. Aus ähnlichen Gründen liegt die algebraische Summe der in den Leitungsstrecken der Reihen-Strombahn entstehenden größten Spannungsabfälle ebenfalls höher als der beim Verbraucher meßbare größte Spannungsabfall.

Es ist eine problematische Aufgabe, den Wert des Gleichzeitigkeitsfaktors von Fall zu Fall zu ermitteln und in der Berechnung irgendwie zu berücksichtigen.

Während es bei der Kontrolle der zulässigen Leitungsbelastungen und Spannungsabfälle genügt, von den Angaben für einen einzigen Zeitpunkt — die Spitzenlastzeit — auszugehen, muß man für die Berechnung der Leitungsverluste noch den zeitlichen Verlauf der Belastungen kennen.

Das übliche Verfahren ist, die hinsichtlich des Verlustes äquivalente Ausnutzungstundenzahl für die Berechnung zu definieren, die zumeist ein Schätzwert ist. Diese gibt für den betrachteten Zeitabschnitt — in der Regel für ein Jahr — die Stundenzahl an, in welcher in der Leitung durch die Spitzenlast der gleiche Verlust hervorgerufen wird wie durch die tatsächlichen Belastungen.

Die Annahme einer gleichen Ausnutzungstundenzahl für alle Leitungen ermöglicht allerdings nur eine grobe Einschätzung.

Die Berücksichtigung der Gleichzeitigkeit kann gelöst werden, wenn man die Belastungen der Verbraucher als Zufallsgröße ansieht. Zur exakteren Berechnung des Verlustes braucht man mehr Information über den zeitlichen Verlauf der Belastungen anzugeben. In der unten beschriebenen Methode werden beide Verfahren zugleich angewandt.

III. Typische Verbraucherkategorien

Der Verbrauch jedes Knotenpunktes ist die Resultierende der Stromabnahmen zahlreicher Einzelverbraucher. Die Einzelverbraucher lassen sich in einige typische Kategorien einordnen, so daß innerhalb einer Kategorie der zeitliche Verlauf des Verbrauches einen ähnlichen Charakter aufweist. Man kann Kategorien wie Haushalt, Büro, Laden, Einschichtenbetrieb, Dreischichtenbetrieb usw. definieren. Der Verbrauch eines Knotenpunktes kann also statt der bisher angewandten einzigen Meßzahl durch einen Vektor gekennzeichnet werden, der soviel Komponenten hat, wie viele Kategorien aufgenommen wurden, und deren Werte den Verbrauch der einzelnen Kategorien ergeben.

Für eine gegebene Kategorie wird das ähnliche Verhalten der Verbraucher angenommen, und Unterschiede sind nur in der Größe des Verbrauches zulässig. Definieren wir eine Verbrauchseinheit für jede Kategorie und nehmen ihren zeitlichen Verlauf als bekannt an. Wie bereits erwähnt, wird der Verbrauch als Zufallsgröße aufgefaßt, und somit ist die Verbrauchseinheit der i -ten Kategorie in Abhängigkeit von der Zeit als Parameter durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$f_i(x, t)$$

gekennzeichnet. Um in den folgenden Überlegungen überflüssige Komplikationen zu vermeiden, haben wir den Berechnungen die sog. »Gleichstrommethode« zugrunde gelegt, wobei die Stromabnahmen und die Leitungsimpedanzen nicht mit ihren komplexen, sondern als reell angesehenen, auf irgendeiner geeigneten Linie projizierten Werten berücksichtigt werden. Dieses Verfahren liefert in den meisten Fällen ausreichende Genauigkeit. Später geben wir noch die im Interesse der exakten komplexen Behandlung nötigen Änderungen an.

Führen wir nun die Bezeichnungen m_i und d_i^2 für den Mittelwert bzw. für die Dispersion ein. Diese Größen sind ebenfalls Zeitfunktionen.

$$m_i(t) = \int_0^{\infty} x f_i(x, t) dx \quad (1a)$$

$$d_i^2(t) = \int_0^{\infty} [x - m_i(t)]^2 f_i(x, t) dx. \quad (1b)$$

Ist der Verbrauch in der gegebenen Kategorie k_i , so kann er als die Resultierende von k_i Verbrauchseinheiten aufgefaßt werden. Der Mittelwert und die Dispersion der Summenverteilung von k_i gleichverteilten, unabhängigen Zufallsvariablen ergibt sich als die Summe der Mittelwerte bzw. der Dispersionen:

$$m(t) = \sum_i k_i m_i(t) = \mathbf{k}^* \mathbf{m}(t), \quad (2a)$$

$$d^2(t) = \sum_i k_i d_i^2(t) = \mathbf{k}^* \mathbf{d}^2(t) \quad (2b)$$

wobei \mathbf{k} , $\mathbf{m}(t)$, $\mathbf{d}^2(t)$ aus den Komponenten k_i , $m_i(t)$, $d_i^2(t)$ gebildete Vektoren darstellen, und die Funktion der Summenverteilung im Sinne des Satzes der zentralen Grenzverteilung mit den obigen Parametern nach der Normalverteilung strebt.

Das gilt selbstverständlich für jede Kategorie, und somit ergibt sich der resultierende Verbrauch des Knotenpunktes für jeden t Zeitpunkt als die Summe von — der Anzahl der Kategorien entsprechenden — normalverteilten, unabhängigen Zufallsvariablen, welche wieder normalverteilt ist. Somit beträgt der Verbrauch im Knotenpunkt

$$N[m(t), d(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\mathbf{k}^* \mathbf{d}^2(t)}} e^{-\frac{[x - \mathbf{k}^* \mathbf{m}(t)]^2}{2 \mathbf{k}^* \mathbf{d}^2(t)}} \quad (3a)$$

Auf Grund eines analogen Gedankenganges ist die Resultierende der Verbrauchswerte mehrerer Knotenpunkte ebenfalls normalverteilt und weist die gleiche Konstruktion auf.

Es sei bemerkt, daß die Richtigkeit der Annahme der Unabhängigkeit — die als ein Grundpfeiler unseres Gedankenganges dient — problematisch ist. Infolge gewisser äußerer Verhältnisse — wie z.B. außerordentlich früh einbrechende Dunkelheit — ist die Abweichung des Verbrauches vom Mittelwert kein Zufall, und die Annahme der Unabhängigkeit der Variablen trifft nicht mehr zu. Die Standardabweichung (die Quadratwurzel aus der Dispersion) liegt in diesem Fall höher als die pythagoreische Summe. Besteht zwischen den Variablen eine deterministische lineare Abhängigkeit, so sind nicht die Dispersionen, sondern die dem Verbrauch entsprechenden Standardabweichungen zu summieren. Der tatsächliche Wert der Standardabweichung liegt in Wirklichkeit offenbar zwischen den — unter den zwei extremen Voraussetzungen (die Unabhängigkeit und die lineare Abhängigkeit) berechneten — Werten

$$\sqrt{\sum_i k_i d_i^2(t)} \leq d(t) \leq \sum_i k_i d_i(t). \quad (3b)$$

In unseren Untersuchungen benutzen wir auch weiterhin die Annahme der Unabhängigkeit der Variablen. Der obige Gedankengang bereitet jedoch den Weg zur Vervollkommnung des Verfahrens.

IV. Belastbarkeit der Leitungen

Bei Berechnung der Spitzenbelastung kann die Untersuchung auf einen einzigen Zeitpunkt, d. h. die Zeit des Auftretens der Spitzenlast beschränkt werden. Das bedeutet, daß durch Einsetzen der Spitzenlastzeit t_{Sp} in die

Beziehung (3) für jede Leitungsstrecke eine einzige Normalverteilung erhalten wird. Selbstverständlich ist auch die Spitzenlast eine Zufallsvariable.

Für die zulässige Leitungsbelastung ist die Höchstlast, mit deren Auftreten man realiter rechnen kann, maßgebend. Diese Einschränkung ist nicht deshalb nötig, als ob die tatsächliche Verteilung annähernde Normalverteilung keine obere Grenze hätte. In Wirklichkeit stellt der Zustand, in welchem sämtliche Verbrauchseinrichtungen aller Verbraucher eingeschaltet sind, die grundsätzliche obere Grenze der höchstmöglichen Belastung dar. Natürlicherweise wird diese »prinzipielle« Lastspitze unberücksichtigt gelassen, obwohl die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens zwar klein, doch nicht gleich Null ist.

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Höchstlast bedeutet somit die Realität. Wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit V gewährleisten will, daß die Höchstlast die zulässige Belastbarkeit nicht überschreitet, so wird die Lastspitze als maßgebend angesehen, für welche die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer noch höheren Belastung $1 - V$ beträgt.

Neben den für die Wahrscheinlichkeit V in Frage kommenden Werten bietet die Normalverteilung schon eine gute Annäherung. Dieser Wert gibt eindeutig an, um Wievielfaches der Standardabweichung eine Belastung über dem Mittelwert als maßgebend anzusehen ist. Die Sicherheit beträgt bei ein-facher Standardabweichung 84%, bei zweifacher 98% und bei dreifacher bereits 99,8%. Ist die zulässige Belastbarkeit mit T bezeichnet, so ist unsere Bedingung

$$T \geq m(t_{Sp}) + \alpha d(t_{Sp}), \quad (4)$$

wobei α die mit Wahrscheinlichkeit V bestimmte Multiplikationszahl bedeutet.

V. Der größte Spannungsabfall

Bei der Berechnung des größten Spannungsabfalls sind die Verhältnisse etwas komplizierter. Der Spannungsabfall zwischen dem Einspeisepunkt und den einzelnen Knotenpunkten ergibt sich als die Summe der in den Leitungsstrecken der Reihenstrombahn auftretenden Spannungsabfälle. Die Spannungsabfälle der Leitungsstrecken sind den Leitungsbelastungen proportional, und somit stellen sie ebenfalls normalverteilte Zufallsvariablen dar. Während man bei der Berechnung der Leitungsbelastungen unter Voraussetzung der Unabhängigkeit des Einzelverbrauches die Verteilung der Resultierenden in verhältnismäßig einfacher Weise erhalten konnte, kommt hier dieselbe Voraussetzung nicht in Frage, denn die Belastungen der einzelnen Leitungen tragen zur Gestaltung des Spannungsabfalls in den übrigen, dem Einspeisepunkt näher liegenden Leitungsstrecken bei. Dementsprechend soll man prüfen, wie es

möglich ist, in der Kenntnis der Spannungsabfälle von Punkt A und Leitungsstrecke AB (Bezeichnungen laut Bild 1) den Spannungsabfall im Endpunkt der Leitung, also im Knotenpunkt B zu berechnen.

Vor allem ist es festzustellen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen alle Spannungsabfälle normalverteilte Zufallsvariablen sind. Denke man sich nämlich den Spannungsabfall eines Knotenpunktes — z. B. des Punktes A — als die Resultierende der durch den Knotenpunktverbrauch hervorgerufenen Spannungsabfälle. Die gegenseitige Impedanz zweier Knotenpunkte

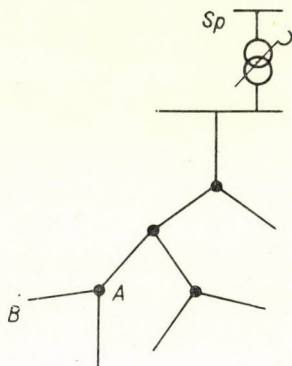


Bild 1

sei, wie üblich, als der in einem der Knotenpunkte durch den Einheitsverbrauch des anderen hervorgerufene Spannungsabfall definiert. Im Falle eines Strahlennetzes ist die gegenseitige Impedanz die Impedanz der vom Speisepunkt gerechneten gemeinsamen Strombahn der zwei Knotenpunkte.

Die Größe des Spannungsabfalls im Punkt A — hervorgerufen durch den Verbrauch des Punktes B — ist also das Produkt aus der gegenseitigen Impedanz der Punkte A und B und dem Verbräuche des Punktes B .

Da die Stromabnahmen normalverteilte unabhängige Zufallsvariablen sind, gilt dasselbe auch für die von ihnen verursachten Spannungsabfälle, und somit weist auch ihre Resultierende eine Normalverteilung auf.

Sei m_A der Mittelwert und d_A^2 die Dispersion des normalverteilten Spannungsabfalls im Punkt A , und sei m_{st} der Mittelwert und d_{st}^2 die Dispersion der Belastung der Leitungsstrecke AB . Bezeichnen wir die (als reell angesehene) Impedanz des Netzes vom Speisepunkt bis Punkt A mit Z , und die der Leitungsstrecke AB mit Z_{AB} . Der Beitrag der Belastung der Leitungsstrecke AB zum Mittelwert und zur Dispersion des Spannungsabfalls im Knotenpunkt A beträgt offenbar Zm_{st} bzw. $Z^2 d_{st}^2$. Trennt man nun den durch die Belastung der Leitungsstrecke AB hervorgerufenen Spannungsabfall von dem durch die übrigen — nicht über die Leitungsstrecke AB

gespeisten — Verbraucher des Knotenpunktes verursachten Spannungsabfall ab, so werden beide normalverteilt und zugleich unabhängig sein, wobei der Mittelwert und die Dispersion für den erstgenannten Wert $Z m_{st}$ und $Z^2 d_{st}^2$, und für den letztgenannten

$$m'_A = m_A - Z m_{st} \quad \text{bzw.} \quad d'^2_A = d^2_A - Z^2 d_{st}^2$$

sind.

Setzen wir den Spannungsabfall des Punktes B ähnlicherweise aus zwei Komponenten zusammen: der eine Wert vertritt den durch die Belastung der Strecke AB und der andere den durch die übrigen, davon unabhängigen Stromabnahmen hervorgerufenen Spannungsabfall. Die Parameter der letztgenannten Komponente sind selbstverständlich m'_A bzw. d'^2_A , während die der erstgenannten

$$(Z + Z_{AB}) m_{st} \quad \text{bzw.} \quad (Z + Z_{AB})^2 d_{st}^2$$

betragen.

Daraus ergeben sich für den resultierenden Spannungsabfall der Mittelwert und die Dispersion zu

$$m_B = m'_A + (Z + Z_{AB}) m_{st} = m_A + m_{AB}, \quad (5)$$

$$d^2_B = d'^2_A + (Z + Z_{AB})^2 d_{st}^2 = d^2_A + d^2_{AB} \left(1 + 2 \frac{Z}{Z_{AB}} \right) \quad (5b)$$

wobei

$$m_{AB} = Z_{AB} m_{st} \quad \text{und} \quad d^2_{AB} = Z^2_{AB} d_{st}^2$$

die Parameter des Spannungsabfalls in der Leitungsstrecke AB sind. Also — wie das auch allgemein zutrifft — summieren sich die Mittelwerte ohne Rücksicht auf die Abhängigkeit der beiden Komponenten, die Dispersion liegt jedoch höher als der unter Voraussetzung der Unabhängigkeit berechnete Wert. Auf die Dispersion des Spannungsabfalls der Leitungsstrecke muß man einen größeren Wert legen; das ist durch das Verhältnis der Leitungsimpedanz zur Impedanz des Speisernetzes bedingt und hängt von den Belastungen nicht ab.

In Kenntnis des Spannungsabfalls des Knotenpunktes kann derselbe Gedankengang verfolgt werden wie im Falle der zulässigen Leitungsbelastung. Ist also E_A der größte zulässige Spannungsabfall im Punkt A , so ist das mit der Bedingung

$$E_A \geq m_A + \alpha d_A \quad (6)$$

äquivalent. Dabei ist α — wie oben — eine durch die Wahrscheinlichkeit der Erfüllung der Bedingung eindeutig bestimmte Multiplikationszahl.

VI. Netzverluste

Der Netzverlust soll für den betrachteten Zeitraum — in der Regel für ein Jahr — berechnet werden. Es genügt, die Untersuchung auf eine einzige Leitungstrecke zu beschränken, da der Netzverlust sich ja als Summe der Netzverluste der einzelnen Leitungen ergibt.

Sei R der Widerstand irgendeiner Leitung und x ihre Belastung. Der Netzverlust ist dann durch den Ausdruck

$$\int_0^T R x^2 dt$$

definiert. Die Belastung x ist aber eine Zufallsvariable, und somit kann man für den Verlust keine gegebene feste, sondern nur eine voraussichtliche Größe in Betracht ziehen. Unseren Voraussetzungen gemäß ist x in jedem Augenblick normalverteilt. Bezeichnen wir den Mittelwert und die Dispersion für den Augenblick t mit $m(t)$ bzw. $d^2(t)$. Damit ergibt sich der zu erwartende Verlust zu

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \frac{R x^2}{\sqrt{2\pi} d(t)} e^{-\frac{[x-m(t)]^2}{2 d^2(t)}} dt dx. \quad (7)$$

Nach der Vertauschung der Reihenfolge der Integration erhalten wir

$$V = \int_0^T R \frac{1}{\sqrt{2\pi} d(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{[x-m(t)]^2}{2 d^2(t)}} dx dt.$$

Das innere Integral ist nichts anderes, als das zweite Moment, welches die Summe des Quadrats des Mittelwertes und der Dispersion ist. Somit beträgt

$$V = \int_0^T R [m^2(t) + d^2(t)] dt, \quad (8)$$

nach (2) gilt

$$m(t) = \sum_i k_i m_i(t); \quad d^2(t) = \sum_i k_i d_i^2(t),$$

wobei $m_i(t)$ und $d_i^2(t)$ den Mittelwert und die Dispersion der i -ten Verbraucherkategorie repräsentieren. Setzen wir diese in Beziehung (8) ein:

$$V = R \int_0^T \left[\sum_i k_i m_i(t) \right]^2 dt + R \int_0^T \sum_i k_i d_i^2(t) dt. \quad (9)$$

Mit Einführung der Bezeichnungen

$$P_{ij} = \int_0^T m_i(t) m_j(t) dt \quad (10a)$$

und

$$q_i = \int_0^T d_i^2(t) dt \quad (10b)$$

ergibt sich der Verlust zu

$$V = R [\mathbf{k}^* \mathbf{P} \mathbf{k} + \mathbf{k}^* \mathbf{q}], \quad (11)$$

wobei die Matrix \mathbf{P} und der Vektor \mathbf{q} aus den Komponenten P_{ij} bzw. q gebildete Größen sind und der Vektor \mathbf{k} den Vektor des früher definierten Verbrauches bedeutet, dessen Komponenten den Anteil der einzelnen Verbraucher-kategorien an der Leitungsbelastung angeben.

Es sei erwähnt, daß die Matrix \mathbf{P} und der Vektor \mathbf{q} mit Aufnahme der Verbraucher-kategorien eindeutig bestimmt sind und hängen vom Vektor \mathbf{k} , d. h. von der Größe des Verbrauches nicht ab. Sie sind somit von dem untersuchten Netz unabhängig und können vorher bestimmt werden.

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß das für den Mittelwert des Verlustes erhaltene Resultat — übrigens richtige Modellparameter vorausgesetzt — unter dem tatsächlichen Wert liegt. In der Berechnung wurde nämlich verborgenerweise die Annahme der Unabhängigkeit der in den einzelnen Zeitpunkten gültigen Belastungen — als Zufallsvariablen — angewandt. Allein auf Grund des physikalischen Bildes ist es jedoch offensichtlich, daß diese Annahme nicht zutrifft. Das Integral für die Mittelwerte oder die Matrix \mathbf{P} werden durch die Abhängigkeit nicht beeinflusst, aber die einfache Summierung (Integration) der Dispersionen bringt kein richtiges Ergebnis mehr. Dementsprechend sind die Komponenten des Vektors \mathbf{q} größer als die nach (10b) berechneten. Diese Bemerkung ist immerhin nur von prinzipieller Bedeutung; der wegen der Anwendung eingeschätzter Angaben entstehende Fehler bleibt ja weit unter der durch die erwähnte Ungenauigkeit verursachten Abweichung.

VII. Die Berücksichtigung des komplexen Charakters des Verbrauches und der Leitungsimpedanzen

Sollen die Stromabnahmen mit ihren komplexen Werten berücksichtigt werden, so ist die Gesamtverteilung des Wirk- und Blindverbrauches anzugeben. Bezeichnen wir die Zufallsvariablen für den Wirkverbrauch mit x und für den Blindverbrauch mit y , so ist jetzt die i -te Verbraucher-kategorie durch die Gesamtverteilung

$$f_i(x, y; t)$$

gekennzeichnet. Da die Verteilung des Wirkverbrauches und des Blindverbrauches — also x und y — voneinander offensichtlich nicht unabhängig sind, kann die Funktion $f_i(x, y; t)$ in der Form von $g_i(x; t) h_i(y; t)$ nicht faktorisiert werden.

Auf Grund des im Abschnitt III beschriebenen Gedankenganges kann man leicht einsehen, daß $f(x, y; t)$ als zweidimensionale Normalverteilung angesehen werden kann. Sie wird also (die Bezeichnung der Abhängigkeit vom Parameter t und der Index i weggelassen) in der Form

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi d_x d_y \sqrt{1-r^2}} \cdot \exp \left[-\frac{d_y^2 (x - m_x)^2 - 2d_x d_y r (x - m_x)(y - m_y) + d_x^2 (y - m_y)^2}{2d_x^2 d_y^2 (1-r^2)} \right] \quad (12)$$

geschrieben, wobei m_x , m_y und d_x^2 , d_y^2 die Mittelwerte bzw. die Dispersionen der Variablen x und y bedeuten und r ihr Korrelationskoeffizient ist:

$$r = \frac{d_{xy}}{d_x d_y}.$$

Hier ist d_{xy} die Kovarianz

$$d_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy.$$

Die Größe des Korrelationskoeffizienten hängt davon ab, welche Phasenwinkelunterschiede für den Kategorienverbrauch angenommen sind. Vorausgesetzt, daß der Phasenwinkel in einem gegebenen Augenblick konstant ist und nur die Größe der Belastung als Zufallsvariable angesehen wird (mit Mittelwert m und Dispersion d^2), sind

$$m_x = m \cos \varphi, \quad m_y = m \sin \varphi; \\ d_x^2 = d^2 \cos^2 \varphi, \quad d_y^2 = d^2 \sin^2 \varphi, \quad d_{xy} = d^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi,$$

wobei $\cos \varphi$ der feste Phasenwinkel ist. Der Korrelationskoeffizient beträgt in diesem Fall 1.

Die Verteilung der Stromabnahmen in den einzelnen Kategorien weist also in jedem Augenblick eine zweidimensionale Normalverteilung auf, die durch den aus den Mittelwerten ermittelten Vektor und durch die aus den Dispersionen und Kovarianzen gebildeten Kovarianzmatrix

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} d_x^2 & d_{xy} \\ d_{xy} & d_y^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

vollkommen bestimmt ist. Die Summe von zweidimensionalen Normalverteilungen liefert wiederum eine zweidimensionale Normalverteilung. Der Mittelwertvektor und die Kovarianzmatrix der Summenverteilung ist die Summe der Mittelwertvektoren bzw. der Kovarianzmatrizen.

In dieser Weise erhalten wir für die Belastung jeder Leitung eine zweidimensionale Normalverteilung mit zeitabhängigen Parametern, die sich in Kenntnis der Parameter des Kategorienverbrauches und der Vektoren des Knotenpunktverbrauches leicht bestimmen läßt.

Prüfen wir nun, wie der Übergang von der Gleichstrommethode zu dem komplexen Verfahren unsere bisherigen Berechnungen beeinflußt.

Bei Untersuchung der Leitungsbelastbarkeit und des größten Spannungsabfalls wird auch hier nur ein Zeitpunkt, derjenige der Spitzenbelastung betrachtet. Somit gibt es für jede Leitung eine fixe zweidimensionale Verteilung mit bekannten Parametern.

Sei die Wirklast wieder mit x und die Blindlast mit y bezeichnet. Dann ist auf Grund der Verteilung

$$w = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (14)$$

zu kontrollieren, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintretens einer höheren Belastung als die Belastbarkeit T höchstens $1 - V$ beträgt. Es gilt also

$$V \leq P\{w < T\}. \quad (15)$$

Die Bedingung mußte hier in einer viel allgemeineren Form als in der Ungleichheit (4) angegeben werden, weil w nicht mehr normalverteilt ist, und obwohl die Parameter die Erfüllung der Bedingung eindeutig bestimmten, die Konstruktion der Beziehung nicht so einfach und die Berufung auf die leicht zugänglichen tabellarischen Werte der Normalverteilung hier nicht möglich sind.

Die Kontrolle kann zwar nach (15) erfolgen, doch die Operation ist in rechentechnischer Hinsicht ziemlich kompliziert, und für solche Routineberechnungen praktisch undurchführbar. Man braucht also eine Näherungslösung zu finden.

Statt die Absolutwerte der zweidimensionalen Verteilung zu analysieren, wählen wir zur Untersuchung die eindimensionale Verteilung einer Projektion, die an einer durch irgendwelchen Anfangspunkt gehenden Gerade entlang aufgetragen wird. Einige Beziehungen, die im folgenden noch zur Anwendung kommen, seien hier erwähnt. Fassen wir die Variablen irgendeiner mehrdimensionalen Zufallsverteilung zum Zufallsvektor \mathbf{u} zusammen. Sein Mittelwert wird mit dem Vektor \mathbf{m}_u , und seine Dispersion mit der Kovarianzmatrix \mathbf{D}_u^2 gekennzeichnet. Bildet man aus dem Vektor \mathbf{u} durch lineare Transformation $\mathbf{A} \mathbf{u}$ eine andere Zufallsvektorvariable (die nicht unbedingt von gleicher Dimension sein soll), so ergeben sich ihr Mittelwert und ihre Dispersion zu

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{A} \mathbf{m}_u \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D}_y^2 = \mathbf{A} \mathbf{D}_u^2 \mathbf{A}^* . \quad (16)$$

Wenn \mathbf{u} normalverteilt war, wird auch \mathbf{y} normalverteilt sein.

Bildet man die Projektion der zweidimensionalen Verteilung $f(x, y)$ auf einer Geraden vom Neigungswinkel ψ , so ergibt sich die neue Zufallsvariable zu

$$w = x \cos \psi + y \sin \psi. \quad (17)$$

Auf Grund des obigen ist w normalverteilt, der Mittelwert und die Dispersion dafür betragen

$$m_w = \cos \psi m_x + \sin \psi m_y \quad (18a)$$

bzw.

$$d_w^2 = \cos^2 \psi d_x^2 + 2 \cos \psi \sin \psi d_{xy} + \sin^2 \psi d_y^2. \quad (18b)$$

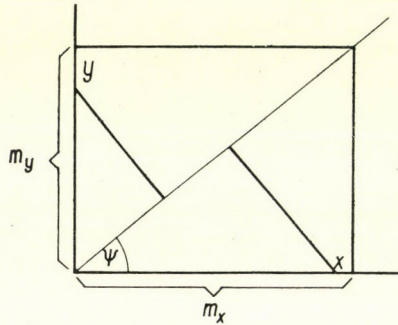


Bild 2

Wenn die Projektion nach Bild 2 auf die durch den Vektor des Mittelwertes bestimmte Gerade erfolgt, sind

$$\cos \psi = \frac{m_x}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}}, \quad \sin \psi = \frac{m_y}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}}$$

und

$$m_w = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \quad (19a)$$

$$d_w^2 = \frac{1}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} [m_x^2 d_x^2 + 2 m_x m_y d_{xy} + m_y^2 d_y^2]. \quad (19b)$$

Mit den somit erhaltenen Parametern kann man jetzt das früher beschriebene Verfahren anwenden und die Erfüllung der Bedingung gemäß (4) kontrollieren:

$$T \leq m_w + \alpha d_w. \quad (20)$$

Bei Bewertung dieses vereinfachten Verfahrens kann man feststellen, daß es dabei ebenfalls um die Untersuchung eindimensionaler Verteilung handelt, also diese Methode gewissermaßen ebenfalls ein »Gleichstromver-

fahren« ist. Zugleich ändert sich jedoch die Projektionsgerade, also wird für jede Einzeluntersuchung eine »enganliegende« Projektionsmethode angewandt. Außerdem ist das Verfahren im Prinzip bis zum letzten Schritt durchaus exakt.

In der Praxis bringt die Vereinfachung jeweils eine Abweichung gegen die Sicherheit mit sich. Mit anderen Worten gesagt: Die Bedingung (20) ist strenger als die exakte (15).

Bei der Berechnung des höchstzulässigen Spannungsabfalls sind auch die Impedanzen mit ihren Komplexwerten zu berücksichtigen. Sei die Leitungsimpedanz

$$Z = R + jX,$$

so ist der Übergang von Belastung zum Spannungsabfall der durch die Matrix

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} R & -X \\ X & R \end{pmatrix} \quad (21)$$

gekennzeichneten linearen Transformation der Variablen äquivalent.

Wiederholen wir die im Abschnitt V beschriebene Berechnung unter Beibehaltung der dort angewandten Bezeichnungen, jedoch mit dem Unterschied, daß der Mittelwert hier durch einen Vektor, die Dispersion durch die Kovarianzmatrix und die Impedanz durch die oben definierte Matrix ersetzt wird.

Überprüfen wir nun den Spannungsabfall des Endpunktes B in der vom Knotenpunkt A ausgehenden Leitungsstrecke AB .

Die Parameter des von der Belastung der Leitungsstrecke AB unabhängigen Spannungsabfalls im Knotenpunkt A sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}'_A &= \mathbf{m}_A - \mathbf{Z}\mathbf{m}_{st}, \\ \mathbf{D}^2_A &= \mathbf{D}^2_A - \mathbf{Z}\mathbf{D}_{st}\mathbf{Z}^*. \end{aligned}$$

Somit betragen die Parameter des Spannungsabfalls im Knotenpunkt B

$$\mathbf{m}_B = \mathbf{m}'_A + (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_{AB}) \mathbf{m}_{st} = \mathbf{m}_A + \mathbf{m}_{AB}, \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2_B &= \mathbf{D}^2_A + (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_{AB}) \mathbf{D}^2_{st} (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_{AB})^* = \\ &= \mathbf{D}^2_A + \mathbf{D}^2_{AB} + \mathbf{Z}\mathbf{D}^2_{st}\mathbf{Z}^*_{AB} + \mathbf{Z}_{AB}\mathbf{D}^2_{st}\mathbf{Z}^*. \end{aligned} \quad (22b)$$

In Kenntnis der Leitungsbelastungen und der Netzimpedanzen lassen sich die Parameter der Spannungsabfallverteilung einfacherweise bestimmen. Auch in diesem Fall erfolgt die Projektion auf eine durch den Vektor der Mittelwerte bestimmte Gerade; der Mittelwert und die Dispersion werden

nach (19a) und (19b) berechnet und dann wird die Kontrolle mit diesen Vektoren nach Beziehung (6) ausgeführt.

Schließlich gehen wir zur Untersuchung des Netzverlustes über. Der Verlust in einer Leitung mit Widerstand R ist durch

$$V = \int_0^T R(x^2 + y^2) dt \quad (23)$$

ausgedrückt. Der Mittelwert beträgt

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T R(x^2 + y^2) f(x, y; t) dt \cdot dx \cdot dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T R x^2 f(x, y; t) dt \cdot dx \cdot dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T R y^2 f(x, y; t) dt \cdot dx \cdot dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T R x^2 f(x; t) \cdot dt \cdot dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T R y^2 f(y; t) \cdot dt \cdot dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Dementsprechend können die Mittelwerte der durch die Wirklast und die Blindlast verursachten Verluste völlig getrennt behandelt werden.

Unter Anwendung des im Abschnitt VI beschriebenen Gedankenganges und der Technik erhält man nun zwei Matrizen: \mathbf{P}_y und \mathbf{P}_x und zwei Vektoren: \mathbf{q}_x bzw. \mathbf{q}_y . Ihre Summen mit den Symbolen \mathbf{P} und \mathbf{q} bezeichnet, stimmt der für den Mittelwert des Leitungsverlustes erhaltene Ausdruck mit der früher erwähnten Beziehung (11) überein. Die Matrix \mathbf{P} und der Vektor \mathbf{q} können auch hier vorherbestimmt werden, und somit gibt es bei der Bestimmung des Netzverlustes keinen Unterschied zwischen dem Gleichstrom- und dem Komplexverfahren.

VIII. Berücksichtigung der zeitlichen Zunahme des Verbrauches

Bis jetzt wurde der die Größe des Verbrauches kennzeichnende Vektor \mathbf{k} für eine Untersuchungsperiode als konstant angenommen. Die Erhöhung der Belastung wird üblicherweise mit der jährlichen Zuwachsrate in Betracht gezogen, und im folgenden Jahr wird ein entsprechend höherer Leistungsbedarf in den Berechnungen berücksichtigt.

Es ist offensichtlich, daß eine plötzliche Erhöhung des Verbrauches am Ende der Untersuchungsperiode nur eine Näherungsannahme darstellt. Der Verbrauch nimmt im Laufe des Jahres kontinuierlich, ungefähr nach einer

Exponentialkurve zu. Neben den in der Praxis vorkommenden Werten liefert jedoch schon die Annahme der linearen Zunahme ein gutes Ergebnis, und wir verwenden hier dieses einfachere Verfahren, um die rechentechnischen Komplikationen zu vermeiden.

Es sei ausbedingt, daß die Untersuchungsperiode jeweils ein Jahr beträgt und die Zeit in Jahren gemessen wird. Sei a_i der Zunahmefaktor irgendeines Verbrauchers für die i -te Verbraucherkategorie. Ist nun der Verbrauch am Jahresanfang k_i , so wird der Verbrauch am Jahresende $(1 + a_i)k_i$ bzw. in einem dazwischenliegenden Zeitpunkt $(1 + a_i t)k_i$ betragen. In verkürzter Form schreibt man den Vektor des Verbrauches für einen beliebigen Zeitpunkt als

$$\mathbf{k}(t) = (\mathbf{E} + \mathbf{A}t) \mathbf{k}, \quad (25)$$

wobei \mathbf{k} den Vektor am Jahresanfang, \mathbf{E} die Einheitsmatrix und \mathbf{A} die aus a_i Elementen gebildete Diagonalmatrix bedeuten.

Prüfen wir nun, welche Änderungen die Annahme eines nach (25) veränderlichen Vektors $\mathbf{k}(t)$ statt des konstanten Vektors \mathbf{k} in den bisherigen Ergebnissen verursacht.

Bei der Kontrolle der Leitungsbelastbarkeit und des größten Spannungsabfalls wird ein einziger Zeitpunkt, die Jahresspitzenlastzeit untersucht. Für einen gegebenen Augenblick ist dagegen der Vektor \mathbf{k} des Verbrauches ein fixer Wert. Mit diesem Wert gerechnet bleiben unsere bisherigen Feststellungen vollkommen gültig.

Die Jahresspitzenlast tritt in der Regel Ende des Jahres auf, und der für die Kontrolle der Leitungsbelastbarkeit und des größten Spannungsabfalls maßgebende Vektor \mathbf{k} ist somit nichts anderes als der Ausgangswert für das kommende Jahr.

Komplizierter steht es mit der Bestimmung des Netzverlustes. In unserem Gedankengang wurde keine Einschränkung bezüglich des zeitlichen Verlaufes des Verbrauches gemacht, bis wir an Hand der Beziehung (8) der Tatsache gewahr geworden sind, daß der Verlust sich aus dem Zeitintegral des quadratischen Mittelwertes und der Dispersion ergibt

$$V = R \int_0^1 [m^2(t) + d^2(t)] dt.$$

(Da die Untersuchungsperiode konventionsgemäß eine Einheit ausmacht, ist die obere Integrationsgrenze 1.)

Jetzt sind aber

$$m(t) = \sum_i k_i(t) m_i(t) = [(\mathbf{E} + \mathbf{A}t) \mathbf{k}]^* \mathbf{m} \quad (26a)$$

und

$$d^2(t) = \sum_i k_i(i) d_i^2(t) = [(\mathbf{E} + \mathbf{A}t) \mathbf{k}]^* \mathbf{d}^2. \quad (26b)$$

Definieren wir die Beziehungen mit den in (10a) und (10b) eingeführten Bezeichnungen P_{ij} und q_i

$$P'_{ij} = \int_0^1 t m_i(t) m_j(t) dt, \quad (27a)$$

$$q'_i = \int_0^1 t d_i^2(t) dt \quad (27b)$$

und seien die daraus gebildeten Matrix und Vektor mit \mathbf{P}' bzw. \mathbf{q}' bezeichnet. Werden nun die Glieder, die q_i^2 enthalten — mit Rücksicht auf die kleinen Komponenten von q_i — vernachlässigt, so beträgt der Verlust auf Grund eines analogen Gedankenganges, wie er im Abschnitt VI erörtert worden ist,

$$V = R[\mathbf{k}^* \mathbf{P} \mathbf{k} + \mathbf{k}^* \mathbf{q} + 2(\mathbf{q} \mathbf{k})^* \mathbf{P}' \mathbf{k} + 2(\mathbf{q} \mathbf{k})^* \mathbf{q}'].$$

Führen wir für die am Jahresbeginn und am Jahresende gültigen Vektoren $\mathbf{k}(1)$ und $\mathbf{k}(2)$ die Ausdrücke

$$\mathbf{k}(1) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}(2) = (\mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{k}; \quad (28a)$$

ferner

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{P} - 2\mathbf{P}', \quad \mathbf{P}(2) = 2\mathbf{P}' \quad (28b)$$

und

$$\mathbf{q}(1) = \mathbf{q} - 2\mathbf{q}', \quad \mathbf{q}(2) = 2\mathbf{q}' \quad (28c)$$

ein, so ergibt sich der Verlust zu

$$V = R[\mathbf{k}^*(1) \mathbf{P}(1) \mathbf{k}(1) + \mathbf{k}^*(2) \mathbf{P}(2) \mathbf{k}(2) + \mathbf{k}^*(1) \mathbf{q}(1) + \mathbf{q}^*(2) \mathbf{q}(2)]. \quad (29)$$

In Kenntnis der Kategorienverbrauchskurven können $\mathbf{P}(1)$ und $\mathbf{P}(2)$ sowie $\mathbf{q}(1)$ und $\mathbf{q}(2)$ vorher bestimmt werden.

SCHRIFTTUM

1. RÉNYI, A.: Valószínűség számítás (Wahrscheinlichkeitsrechnung). Tankönyvkiadó, Budapest 1954.
2. PARZEN, E.: Modern Probability Theory and Its Applications. Wiley, New York 1960.
3. FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I. Wiley, New York 1957.
4. FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. VEB, Berlin 1965.
5. SZENDY, K.: Villamos hálózat gazdasági értékelése (Wirtschaftliche Bewertung von elektrischen Netzen). *Elektrotechnika* (1962).
6. SCHIRMANNS, H.: Vergleich der Wissenschaftlichkeit von Mittelspannungsnetzen mit verschiedenen Spannungskombinationen. *Elektrizitätswirtschaft* (1960).
7. ZIMMERMANN, K.: Wirtschaftliche Gestaltung städtischer Stromverteilungsnetze. *Elektrizitätswirtschaft* (1961).
8. REPS, D. N.: The Economics of Subtransmission Planning. *Power Apparatus and Systems* (1958).
9. BRECHENFELDER, E. H.—STANLEY, C. M.: Rural Distribution Planning. *Power Apparatus and Systems* (1959).

10. ANDERSON, A. S.—THIEMAN, V. A.: Distribution Secondary Conductor Economics. *Power Apparatus and System* (1960).
11. LAWRENCE, R. F.—REPS, D. N.—PATTON, A. D.: Distribution System Planning through Optimized Design, I—II. *Power Apparatus and Systems* (1960).
12. AMBROSIUS, C. C.—SARIKAS, R. H.: Planning Rural Systems for Continuing Growth. *Power Apparatus and Systems* (1960).
13. WEBLER, R. M.—GANGEL, M. W.—CARTER, G. K.—ZEMAN, A. L.—ENDER, R. C.: Secondary Distribution System Planning for Load Growth. Transactions Paper, No. 63—91, 1963.
14. GAVER, D. P.—MONTMEAT, F. E.—PATTON, A. D.: Power System Reliability, I. *Power Apparatus and Systems* (1964).
15. GAVER, D. P.—MONTMEAT, F. E.—PATTON, A. D.: Power System Reliability, II. *Power Apparatus and Systems* (1964).
16. DEJOU, A.: Les études des réseaux électriques. *Revue Générale de l'Électricité* (1959).
17. GAUSSENS, M. P.: Méthodes pour l'étude des réseaux d'énergie électrique. *Revue Générale de l'Électricité* (1960).
18. CALVET, D.—MESTRES, C.: L'étude dynamique des réseaux de répartition et de distribution d'énergie électrique. *Revue Générale de l'Électricité* (1961).

STATISTICAL EVALUATION OF CONSUMERS IN RADIAL NETWORKS

I. BACH

SUMMARY

The paper deals with two questions arising in the planning of radial networks, i.e. with the calculation of the voltage drop and of the network loss. The difficulties of the present methods, which cannot correctly take into account the coincidence of the peak-loads is solved by considering consumer loads as stochastic variables. The load resulting from the many individual consumers is assumed to have a normal distribution at each moment and from this the load in the lines and in the nodes is calculated, which thus become also normally distributed. For the calculation of maximum voltage drop the author starts from a similar principle but he takes into consideration that the voltage drops across individual line sections cannot be considered to be independent. For the calculation of network losses the stochastic model of the loads is used as well, and from this is calculated the expectation of the loss. Inasmuch as the original load is considered as being composed of several characteristic types of consumers, the constants for the routine calculations can be calculated in advance from their consumption diagrams and so the method is relatively rapid. The paper presents also the relations valid for the more precise complex calculation and takes into account load changes due to load increases during the year.

ÉVALUATION STATISTIQUES DES CONSOMMATEURS DANS LES RÉSEAUX RADIAUX

I. BACH

RÉSUMÉ

L'auteur traite deux questions se posant lors de l'établissement des projets des réseaux radiaux: le calcul des chutes de tension et la détermination des pertes dans le réseau. Les inconvénients des méthodes actuelles ne pouvant tenir compte de la simultanéité d'une façon correcte sont éliminés en traitant les consommations comme des variables stochastiques. La charge apparaissant comme résultante des consommations individuelles multiples est supposée avoir une distribution normale à chaque instant. C'est à partir de cette hypothèse que sont calculées les charges des noeuds et des lignes, qui ont ainsi également une distribution normale.

Le calcul de la chute de tension maximum part d'un principe semblable, mais tient compte de ce que les chutes de tension se produisant dans les sections de ligne individuelles ne peuvent pas être considérées comme indépendantes. Pour le calcul de la perte de réseau, l'auteur utilise, de même, le modèle de probabilité des charges et en détermine la valeur escomptée de la perte. Si la consommation originale peut être composée de quelques types de consommateurs caractéristiques, les constantes figurant dans le calcul de routine peuvent être déterminées d'avance d'après leurs courbes de consommation, de sorte que la méthode est relativement rapide. L'étude présente aussi les relations valables pour le calcul complexe plus correct, et considère les variations de la consommation dues à l'accroissement de la charge au cours de l'année.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОТРЕБИТЕЛЕЙ РАДИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

И. БАХ

РЕЗЮМЕ

Статья посвящена двум вопросам, возникающим при проектировании радиальных сетей, а именно расчету падения напряжения и определению сетевых потерь. — Недостатки современных методов, которые не могут учитывать одновременность, устраняются путем рассмотрения нагрузок как случайных величин. Принимается, что суммарная нагрузка отдельных потребителей имеет нормальное распределение в каждый отдельный момент времени и, на основе этого, вычисляется нагрузка в узловых точках и линиях, которая в таком случае также будет иметь нормальное распределение. При расчете наибольшего падения напряжения автор исходит из аналогичного предположения, но учитывает то, что падения напряжения, возникающие на отдельных участках линии, нельзя рассматривать как независимые. Автор при расчете сетевых потерь также использует модель вероятности нагрузок и на основе этого определяет математическое ожидание потерь. Поскольку нагрузку отдельных узлов можно получить как сумму нагрузок нескольких характерных типов потребителей, то на основе их кривых потребления можно заранее определить применяемые в конкретных расчетах постоянные коэффициенты и поэтому метод является относительно быстрым. В статье приведены также необходимые зависимости для более точного комплексного расчета и учитываются изменения нагрузки, связанные с ростом нагрузки во времени.

OPTIMUM CASCADE CONTROLLERS FOR MULTIVARIABLE CONTINUOUS-DATA AND PULSED-DATA CONTROL SYSTEMS, WITH CONSTRAINTS

F. CSÁKI

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received June 27, 1966]

In this paper the optimum design according to Wiener—Newton is treated for continuous-data as well as for discrete-data multivariable control systems with semi-free configuration and constraints. For stationary ergodic stochastic processes explicit formulas are derived for the multivariable cascade controller taking as performance criterion the sum of the least-mean-square errors between the sets of actual and ideal outputs and considering as constraint the limitation of the sum of the mean-square values of some sets of manipulated variables.

I. Introduction

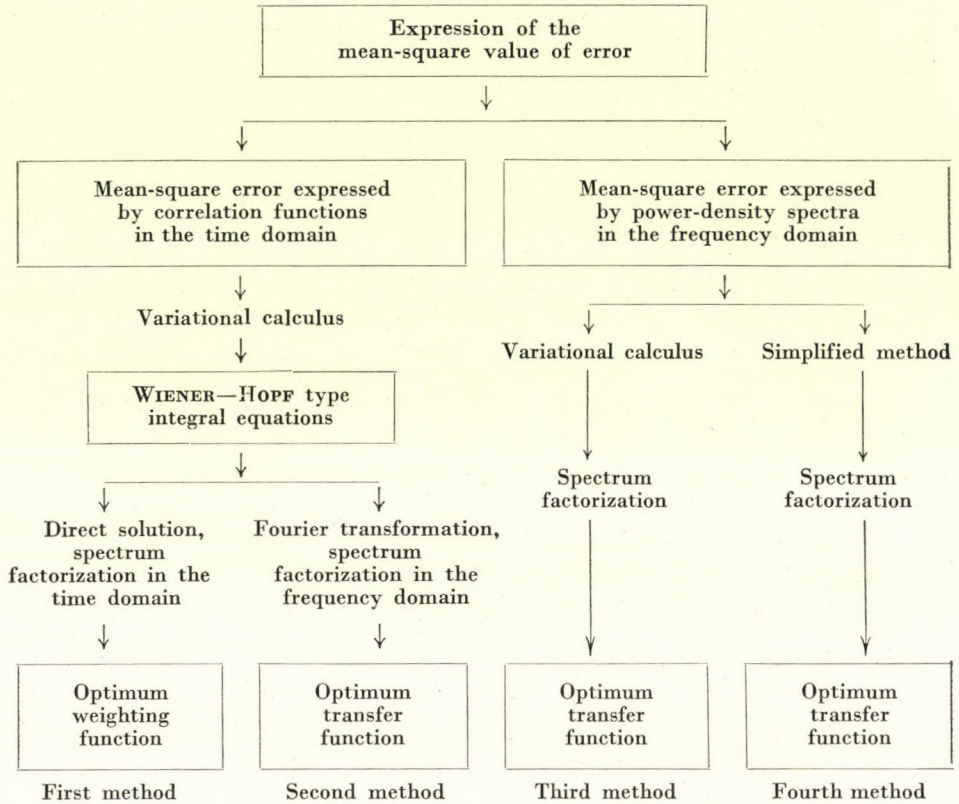
In most cases the statistical design of time-invariant continuous-data and pulsed-data linear control systems is usually performed on the basis of the following simplifying conditions: the stochastic signals are assumed to be stationary, the ergodic hypothesis is adopted, finally, as a criterion of the optimum synthesis the least-mean-square error is taken.

The optimization can be solved by one of the methods specified in Table I. The first two methods were proposed by WIENER [1, 2] and nowadays may undoubtedly be considered as classical ones, the third method can be found in the book of TSIEN [3] while the simplified method was first demonstrated by BODE and SHANNON [4] but only for the case of uncorrelated signal and noise components. Recently, the author of this paper proposed a much simpler and more direct method [5, 6]. The first method is somewhat awkward, because time-domain notions are only used. This difficulty will be alleviated by the second and third methods, which take advantage of the simplicity of the transform techniques and give the result in the form of transfer functions in the frequency domain. The fourth method completely relies on the frequency domain technique and avoids convolution integrals as well as the variational calculus.

The optimum synthesis of multivariable systems was first solved by AMARA [7] applying the second method combined with matrix calculus.

The author generalized the simplified method for multivariable continuous-data [12, 14, 17] and pulsed-data systems [31, 32], applying the matrix calculus. With the aid of the simplified method it was possible to examine

Table I



the most complicated case of semi-free configuration with constraints which, according to the authors knowledge, is up till now not treated as a whole generality for multivariable continuous-data or pulsed-data systems [17, 32]. The aim of the present paper is to summarize the achieved results and, on the one hand, to show how the special cases can be obtained from the most general case and, on the other hand, to draw attention to the similarities between the continuous-data and strictly pulsed-data systems.

According to reference [8] it is assumed that the spectrum factorization of power-density-spectrum matrices can be performed for continuous-data as well as for pulsed-data systems. It must be noted, however, that in our case the spectrum factorization will be slightly more complicated, because one or more parameters also figure in the corresponding power-density-spectrum matrix to be factorized.

According to the case of the semi-free configuration with constraints, this is so adopted that one part of the control system is fixed, for example

this is the *plant*, while the other part of the system i.e. the *controller* must be designed according to the least-mean-square error criterion, the error being taken between the actual and the ideal (or desired) outputs. In case of multivariable systems, this criterion means the least-mean value of the sum of squared error components. For the sake of simplicity, first it is also assumed that even the manipulated variables acting between the controller and the plant are either directly or indirectly submitted to constraints.

II. The proposed method for continuous-data systems

In the following treatise a double-index notation will be used. If both indices are variable we have a matrix, if one index is fixed or is missing and only the other index is variable we have a vector, finally, if both indices are fixed this notation refers to a scalar quantity. A column vector has a variable first index, while a row vector has a variable second index (the others being fixed).

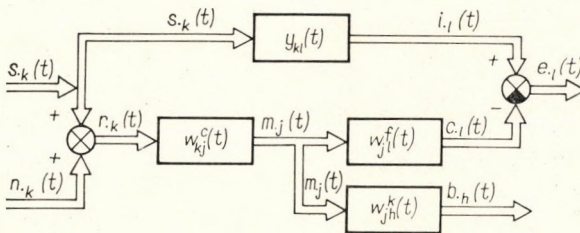


Fig. 1

The problem is depicted in Fig. 1. All the signals (the variables) in the control system are assumed to be stationary ergodic stochastic processes. Here $s_{\cdot k}(t)$ is the row vector composed of the useful signal components, while $n_{\cdot k}(t)$ is the row vector of the corrupting noise components ($k = 1, \dots, K$). Their sum forms the input row vector $r_{\cdot k}(t)$, being $r_{\cdot k}(t) = s_{\cdot k}(t) + n_{\cdot k}(t)$. The complete input signal first penetrates the cascade controller, the latter is represented by weighting-function matrix $w_{kj}^c(t)$ ($k = 1, \dots, K; j = 1, \dots, J$). The outputs of the controller are the manipulated variables. Taking the latter ones as components the row vector $m_{\cdot j}(t)$ of the manipulated variables can be formed ($j = 1, \dots, J$). It is assumed that even the manipulated variables are submitted to constraints. In general, an indirect manner can be taken as a basis. For this purpose some constraint-weighting-function matrix $w_{jh}^k(t)$ is constructed ($j = 1, \dots, J; h = 1, \dots, H; H \leq L$). The output row vector $b_{\cdot h}(t)$ ($h = 1, \dots, H$) of this transfer link represents the indirect variables: the so-called modified manipulated variables to be constrained.

Let us assume that the sum of the mean-square values of the indirect variables is limited. This condition, the so-called *inequality of constraint*, can be expressed as follows

$$\begin{aligned} \text{tr} [\overline{\mathbf{b}_{h'}(t) \mathbf{b}_h(t)}] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{tr} [\overline{\mathbf{b}_{h'}(t) \mathbf{b}_h(t)}] dt = \\ &= \text{tr} [\boldsymbol{\varphi}_{b_{h'} b_h}(0)] \leq \sigma^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Here $\mathbf{b}_{h'}(t)\mathbf{b}_h(t)$ is a symmetrical matrix composed of the matrix multiplication of column vector $\mathbf{b}_{h'}(t)$ and row vector $\mathbf{b}_h(t)$, while "tr" denotes the trace that is the sum of the diagonal elements of the matrix. The latter can also be expressed by a correlation matrix with zero shifting time.

As is well known, the inequality of constraint can also be expressed by the power-density-spectrum matrix as

$$\text{tr} [\overline{\mathbf{b}_{h'}(t) \mathbf{b}_h(t)}] = \text{tr} [\boldsymbol{\varphi}_{b_{h'} b_h}(0)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\boldsymbol{\Phi}_{b_{h'} b_h}(s)] ds \leq \sigma^2, \quad (2)$$

where $s = j\omega$ and $h, h' = 1, \dots, H$.

Returning again to Fig. 1 it can be observed that the manipulated variables enter into the fixed part of the system, that is, into the plant, while the outputs of the latter are the controlled variables. The plant is represented by weighting-function matrix $\mathbf{w}_{jl}^f(t)$ ($j = 1, \dots, J$; $l = 1, \dots, L$).

From the controlled variables as components the row vector $\mathbf{c}_l(t)$ is constructed ($l = 1, \dots, L$). The row vector of the error $\mathbf{e}_l(t)$ is nothing but the difference of the ideal or desired signal vector $\mathbf{i}_l(t)$ and actual output vector $\mathbf{c}_l(t)$ ($l = 1, \dots, L$). If needed the ideal output vector $\mathbf{i}_l(t)$ can be obtained from the useful signal vector $\mathbf{s}_k(t)$ by the weighting-function matrix $\mathbf{y}_{kl}(t)$ which can exceptionally be physically unrealizable.

Now let us adopt as minimization criterion the sum of the mean-square-error components. This latter can be expressed as the mean value of the trace of the matrix composed of the matrix multiplication of column vector $\mathbf{e}_l(t)$ and row vector $\mathbf{e}_l(t)$ and can obviously also be expressed by the corresponding correlation matrix or power-density-spectrum matrix:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\overline{\mathbf{e}_l(t) \mathbf{e}_l(t)}] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{tr} [\overline{\mathbf{e}_l(t) \mathbf{e}_l(t)}] dt = \\ &= \text{tr} [\boldsymbol{\varphi}_{e_l e_l}(0)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\boldsymbol{\Phi}_{e_l e_l}(s)] ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Applying the Lagrangean conditional extremum technique, our problem is reduced to the minimization of the following expression:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\varphi_{x_l, x_l}(0)] &= \text{tr} [\overline{x_l(t) x_l(t)}] = \text{tr} [\overline{e_l(t) e_l(t)}] + \\ &+ \lambda \text{tr} [\overline{b_h(t) b_h(t)}] = \text{tr} [\overline{e_l(t) e_l(t)} + \lambda \overline{b_h(t) b_h(t)}] = \\ &= \text{tr} [\varphi_{e_l, e_l}(0) + \lambda \varphi_{b_h, b_h}(0)] . \end{aligned} \quad (4)$$

The latter can also be expressed as

$$\text{tr} [\varphi_{x_l, x_l}(0)] = \text{tr} [\overline{x_l(t) x_l(t)}] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\Phi_{e_l, e_l}(s) + \lambda \Phi_{b_h, b_h}(s)] ds . \quad (5)$$

Therefore, the task in question is the minimization of the integral on the right side of Equ. (5), or in other words, it is necessary to find the minimizing trace of the resultant power-density spectrum matrix

$$\Phi_{x_l, x_l}(s, \lambda) = \Phi_{e_l, e_l}(s) + \lambda \Phi_{b_h, b_h}(s) , \quad (6)$$

which is a function of the variable s and parameter λ . As naturally, both the power-density-spectrum matrices in Equ. (6) are only functions of s^2 or ω^2 , thus the complex variable integral in Equ. (5) can readily be reduced to a real-variable integral.

Evidently, the following relation is valid [12, 14, 17]:

$$\Phi_{e_l, e_l}(s) = \Phi_{i_l, i_l}(s) - \Phi_{i_l, c_l}(s) - \Phi_{c_l, i_l}(s) + \Phi_{c_l, c_l}(s) . \quad (7)$$

Applying the generalization of the index-change rule [11] and taking Fig. 1 into consideration the latter matrix can also be expressed as

$$\begin{aligned} \Phi_{e_l, e_l}(s) &= \Phi_{i_l, i_l}(s) - \Phi_{i_l, r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) - \\ &- \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k, i_l}(s) + \\ &+ \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k, r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) \end{aligned} \quad (8)$$

and similarly

$$\begin{aligned} \Phi_{b_h, b_h}(s) &= \mathbf{W}_{h'j'}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k, r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh}^k(s) \\ (k, k' &= 1, \dots, K; j, j' = 1, \dots, J; l, l' = 1, \dots, L; h, h' = 1, \dots, H), \end{aligned} \quad (9)$$

where $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$, $\mathbf{W}_{jl}^f(s)$ and $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ are the transfer-function matrices of the controller, the plant and the constraint, respectively, determined from the corresponding weighting-function matrices by Fourier or Laplace transformation. Transfer function matrices $\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)$, $\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)$ and $\mathbf{W}_{h'j}^k(s)$ are the adjoint, that is, the conjugate complex transposed matrices of transfer-

function matrices $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$, $\mathbf{W}_{jl}^f(s)$ and $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ these latter being $K \times J$, $J \times L$ and $J \times H$ matrices, respectively. In most cases $K = J = L \geq H$ can be assumed without loss of generality.

Let us now introduce an auxiliary power-density-spectrum matrix $\Phi_{a_k a_k}(s, \lambda)$ implicitly defined in the following relation:

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k' r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) + \\ & + \lambda \mathbf{W}_{h'j'}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k' r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh}^k(s) = \\ & = \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{a_k a_k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s). \end{aligned} \quad (10)$$

It can be shown that the auxiliary power-density-spectrum matrix $\Phi_{a_k a_k}(s, \lambda)$ is solely determined by Equ. (10) if this matrix does not depend on the choice of transfer-function matrix $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ of the controller.

For this purpose let us see the explicit expression of the auxiliary power-density-spectrum matrix

$$\begin{aligned} & \Phi_{a_k a_k}(s, \lambda) = \Phi_{r_k' r_k}(s) + \lambda [\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)]^{-1} [\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)]^{-1} \times \\ & \times \mathbf{W}_{h'j'}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k' r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh}^k(s) [\mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1} [\mathbf{W}_{kj}^c(s)]^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

It is quite obvious that for arbitrary power-density-spectrum matrix $\Phi_{r_k' r_k}(s)$ the auxiliary power-density-spectrum matrix does not depend on the transfer-function matrix $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ and its adjoint matrix $\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)$ if and only if

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{jh}^k(s) [\mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1} = G(s) \mathbf{I}_{jj} \quad (12) \\ & (j = 1, \dots, J; h = l = 1, \dots, H = L), \end{aligned}$$

where $G(s)$ is some scalar transfer function or polynomial, while \mathbf{I}_{jj} is a unity matrix of the $J \times J$ type. This condition gives the following auxiliary matrix:

$$\Phi_{a_k a_k}(s, \lambda) = [1 + \lambda G(-s) G(s)] \Phi_{r_k' r_k}(s), \quad (13)$$

which is indeed independent of $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ and $\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)$. Thus, for a given plant matrix the constraint matrix cannot be optionally chosen but there must be an interdependency between them to ensure the independency of the auxiliary matrix. Now, taking Equis (8), (9) and (10) into consideration the power-density-spectrum matrix figuring in Equ. (6) can be expressed as

$$\begin{aligned} & \Phi_{x_l x_l}(s, \lambda) = \Phi_{i_l i_l}(s) - \Phi_{i_l r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) - \\ & - \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k' i_l}(s) + \\ & + \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{a_k a_k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s). \end{aligned} \quad (14)$$

Let us introduce an auxiliary $K \times J$ transfer-function matrix $\mathbf{G}_{kj}^{ck}(s, \lambda)$ and its adjoint matrix $\mathbf{G}_{j'k'}^{ck}(-s, \lambda)$ by the following implicit relations

$$\Phi_{a_k' a_k}(s, \lambda) \mathbf{G}_{kj}^{ck}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) = \Phi_{r_k' i_l}(s) \quad (15)$$

and

$$\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{G}_{j'k'}^{ck}(-s, \lambda) \Phi_{a_k' a_k}(s, \lambda) = \Phi_{i_l' r_k}(s) .$$

Substituting expression (15) into Equ. (14) the power-density-spectrum matrix in question takes the following form

$$\begin{aligned} \Phi_{x_l' x_l}(s, \lambda) &= \Phi_{i_l' i_l}(s) - \\ &- \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{G}_{j'k'}^{ck}(-s, \lambda) \Phi_{a_k' a_k}(s, \lambda) \mathbf{G}_{kj}^{ck}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) + \\ &+ [\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{G}_{j'k'}^{ck}(-s, \lambda) - \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)] \times \\ &\times \Phi_{a_k' a_k}(s, \lambda) [\mathbf{G}_{kj}^{ck}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) - \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s)] . \end{aligned} \quad (16)$$

The transfer-function matrix $\mathbf{W}_{kj}^{ck}(s)$ and its adjoint $\mathbf{W}_{j'k'}^{ck}(-s)$ are contained only in the last term of Equ. (16). The trace of the power-density spectrum matrix $\Phi_{x_l' x_l}(s, \lambda)$ will obviously be minimum if this last term becomes zero. The sufficient and necessary conditions are

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{kj}^{cko}(s, \lambda) &= \mathbf{G}_{kj}^{ck}(s, \lambda) , \\ \mathbf{W}_{j'k'}^{cko}(-s, \lambda) &= \mathbf{G}_{j'k'}^{ck}(-s, \lambda) \end{aligned} \quad (17)$$

where the upper index "o" signifies the optimum. Substituting Equ. (17) into Equ. (15) we obtain the implicit relations for the physically unrealizable transfer-function matrix of the cascade controller and its adjoint matrix:

$$\begin{aligned} \Phi_{a_k a_k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{cko}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) &= \Phi_{r_k i_l}(s) , \\ \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^{cko}(-s, \lambda) \Phi_{a_k' a_k}(s, \lambda) &= \Phi_{i_l' r_k}(s) . \end{aligned} \quad (18)$$

Of course, a physically unrealizable transfer-function matrix does not solve our problem and we must seek for a physically realizable one. Let us assume that $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda)$ is the physically realizable optimum transfer-function matrix of the cascade controller in case of constraints. Substituting this matrix instead of $\mathbf{W}_{kj}^{cko}(s, \lambda)$ then from the first relation of Equ. (18) the following expression can be derived:

$$\Phi_{a_k a_k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) = \Phi_{r_k i_l}(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) + \mathbf{F}_{k'j'}^{ck}(s, \lambda) , \quad (19)$$

where $\mathbf{F}_{k'j'}^{ck}(s, \lambda)$ is still an unknown matrix with transfer-function elements having only right-half-plane poles. In this equation the matrix factor $\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)$ is inevitable as $\mathbf{W}_{l'j'}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)$ must be treated as a power-density-spectrum matrix.

Now let us introduce the following spectrum-factorization relations:

$$\Phi_{a_k, a_{k'}}^-(s, \lambda) \Phi_{a_k, a_k}^+(s, \lambda) = \Phi_{a_k, a_k}(s, \lambda) \quad (20)$$

and

$$\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) = (\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+ (\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^- , \quad (21)$$

where the upper index $-$ (minus) denotes a matrix *factor* whose elements, and the elements of the inverse matrix, have only right-half-plane poles, while the upper index $+$ (plus) denotes a matrix factor whose elements together with the elements of its inverse matrix have only left-half-plane poles.

According to Equ. (13) the spectrum factorization of the auxiliary power-density-spectrum matrix $\Phi_{a_k, a_k}(s, \lambda)$ is not more complicated than that of the matrix $\Phi_{r_k, r_k}(s)$, the only difference being that it is necessary to find also the scalar factors

$$(1 + \lambda G(-s)G(s))^- \text{ and } (1 + \lambda G(-s)G(s))^+.$$

Taking Equs (20) and (21) into consideration Equ. (19) may assume the following form:

$$\begin{aligned} & \Phi_{a_k, a_k}^+(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda) (\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+ = \\ & = \{ [\Phi_{a_k, a_{k'}}^-(s, \lambda)]^{-1} \Phi_{r_k, i_l}(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \times \\ & \times [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^-]^{-1} \} + \\ & + [\Phi_{a_k, a_{k'}}^-(s, \lambda)]^{-1} \mathbf{F}_{k'l'}^{ck}(s, \lambda) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^-]^{-1}. \quad (22) \end{aligned}$$

Separating the physically realizable and unrealizable matrix components on both sides of Equ. (22) the following two relations can be obtained:

$$\begin{aligned} & \Phi_{a_k, a_k}^+(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda) (\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+ = \\ & = \{ [\Phi_{a_k, a_{k'}}^-(s, \lambda)]^{-1} \Phi_{r_k, i_l}(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \times \\ & \times [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^-]^{-1} \}_+ \quad (23a) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{0} & = \{ [\Phi_{a_k, a_{k'}}^-(s, \lambda)]^{-1} \Phi_{r_k, i_l}(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \times \\ & \times [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^-]^{-1} \}_- + [\Phi_{a_k, a_{k'}}^-(s, \lambda)]^{-1} \times \\ & \times \mathbf{F}_{k'l'}^{ck}(s, \lambda) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^-]^{-1}, \quad (23b) \end{aligned}$$

where the lower index $+$ (plus) denotes a matrix *component* with physically realizable elements, belonging to positive-time functions, while the lower index $-$ (minus) denotes a matrix component with physically unrealizable elements, that is, with right-half-plane poles, and thus belonging to negative-

time functions. Generally speaking, the physically realizable component can be obtained by first performing an inverse Fourier transformation and then a Laplace transformation.

Finally, from Equ. (23a) the physically realizable optimum transfer-function matrix of the cascade controller in case of constraints can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda) &= [\Phi_{a_k a_k}^+(s, \lambda)]^{-1} \times \\ &\times \{[\Phi_{a_k a_k}^-(s, \lambda)]^{-1} \Phi_{a_k i_i}(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \times \\ &\times [(\mathbf{W}_{j'l}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}]^{-1}\}_+ [(\mathbf{W}_{j'l}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+]^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

The solution $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda)$ may now be substituted into the condition of constraint. This can be performed by first substituting $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda)$ and its adjoint matrix instead of $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ and its adjoint, respectively, in Equ. (9). Thus, the power-density-spectrum matrix $\Phi_{b_h b_h}(s, \lambda)$ is obtained. Substituting the latter matrix into Equ. (2) the parameter λ can be adjusted so that the condition of constraint, that is, inequality (2) will be satisfied. After having determined the proper value of the parameter λ , the latter can be substituted back into Equ. (24) and finally the physically realizable optimum transfer-function matrix of the cascade controller $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s)$ is obtained. It must be emphasized that after the previous procedure the parameter λ is already missing. The transfer-function matrix $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s)$ is the final explicit solution of our problem for the case of the semi-free configuration with constraints.

Substituting the so obtained matrix expression of $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s)$ and its adjoint into Equ. (8) instead of $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ and $\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)$, respectively, the power-density-spectrum matrix of the error can be computed. Henceforth, using Equ. (3) the minimum sum of the mean-square-error components can be determined.

III. Some supplementary remarks

Let us now examine some possibilities of specializations and generalizations concerning the obtained results.

First, it is obvious that taking $\lambda = 0$, on the one hand, $\Phi_{a_k a_k}(s, \lambda)$ is immediately reduced to $\Phi_{r_k r_k}(s)$, and on the other hand, Equ. (21) gives

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{kj}^{cm}(s) &= [\Phi_{r_k r_k}^+(s)]^{-1} \{[\Phi_{r_k r_k}^-(s)]^{-1} \Phi_{r_k i_i}(s) \times \\ &\times \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) [(\mathbf{W}_{j'l}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}]^{-1}\}_+ \times \\ &\times [(\mathbf{W}_{j'l}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+]^{-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

which is the final explicit solution formula of the optimum cascade controller for the case of the semi-free configuration without constraints.

By the way, if the configuration is completely free, that is, the fixed part of the system can be considered as a unity (or in other words: idem) matrix the latter being independent of the variable $s = j\omega$, then Equ. (25) can be reduced to the form:

$$\mathbf{W}_{kl}^m(s) = [\Phi_{r_k^+ r_k}^+(s)]^{-1} \{ [\Phi_{r_k^- r_k}^-(s)]^{-1} \Phi_{r_k i_l}(s) \}_+ \quad (26)$$

This is the simplest closed-form solution formula for multivariable systems giving the optimum transfer-function matrix.

Now, let us concentrate our attention to the constraint matrix $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ and to its transform $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$. Of course, Equ. (12) must always be valid. If the manipulated variables are indirectly constrained the transfer-function matrix $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ may assume quite a general form. For example, if even the sum of the mean-square values of the controlled variables are limited, then the constraint matrix $\mathbf{W}_{jh}^h(s)$ becomes the very same as the plant matrix $\mathbf{W}_{ji}^f(s)$.

Furthermore, if the plant transfer-function matrix $\mathbf{W}_{ji}^f(s)$ can be expressed as the matrix multiplication of two corresponding transfer-function matrices

$$\mathbf{W}_{ji}^f(s) = \mathbf{W}_{jh}^f(s) \mathbf{W}_{hi}^f(s) \quad (27)$$

and even the sum of the mean-square value of the variables acting between the two control link mentioned above has to be limited, then $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ must be taken as identical with $\mathbf{W}_{jh}^f(s)$.

If, on the other hand, the set of the manipulated variables is directly constrained then the constraint transfer-function matrix assumes a certain special form, namely, it becomes a diagonal matrix. With due regard to Equ. (12) in this case the matrix $\mathbf{W}_{ji}^f(s)$ must also be a certain diagonal matrix. For example, if even the sum of the mean-square values of the manipulated variables is limited then $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ becomes a unity matrix:

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) = \mathbf{I}_{jj}$$

the latter being independent of the variable $s = j\omega$. If the mean-square values of manipulated variables must be added by taking some weights: $g_{11}, \dots, g_{jj}, \dots, g_{JJ}$ into consideration then the constraint transfer-function $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ becomes a diagonal matrix composed of the square roots of the weights as elements

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) = \text{diag} [\sqrt{g_{11}}, \dots, \sqrt{g_{jj}}, \dots, \sqrt{g_{JJ}}] \quad (28)$$

This matrix is also independent of the variable s .

A semi-direct constraint arises from the case when not the sum of the mean-square values of the manipulated variables themselves is limited but

that of the first (or second) derivative of the manipulated variables has to be constrained. In the latter cases the following choice will do

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) = s \mathbf{I}_{jj} \quad (29)$$

or

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) = s^2 \mathbf{I}_{jj}. \quad (30)$$

If weights are needed then

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) = s \operatorname{diag} [\sqrt{g_{11}}, \dots, \sqrt{g_{jj}}, \dots, \sqrt{g_{JJ}}] \quad (31)$$

or

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) = s^2 \operatorname{diag} [\sqrt{g_{11}}, \dots, \sqrt{g_{jj}}, \dots, \sqrt{g_{JJ}}] \quad (32)$$

are the proper choices. Unfortunately, the weights cannot be chosen at will but only with due respect to Equ. (12).

When, for example, the first manipulated variable itself, the second manipulated variable by its first derivative, the third manipulated variable by its second derivative and so on . . . , must be taken into consideration in the mean-square-summing procedure with weights, then the following diagonal matrix will do:

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) = \operatorname{diag} [\sqrt{g_{11}}, s \sqrt{g_{22}}, s^2 \sqrt{g_{33}} \dots], \quad (33)$$

if the condition (12) allows this.

Similarly, some other special matrix forms can be chosen according to the special need if the sum of the mean-square values of the manipulated variables must be semi-directly constrained, but always with the restriction (12).

Now, the question arises, how multiple constraints can be performed. If, for example, the manipulated variables are simultaneously submitted to two or more constraints, then instead of inequality (2) we have a system of inequalities:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \operatorname{tr} [\Phi_{b_h, b_h(i)}(s)] ds < \sigma_i^2; (i = 1, \dots, I) \quad (2')$$

and instead of Equ. (5) we have the following relation

$$\operatorname{tr} [\varphi_{x_i x_i}(0, \lambda_1, \dots, \lambda_I)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \operatorname{tr} \left[\Phi_{e_i, e_i}(s) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \Phi_{b_h, b_h(i)}(s) \right] ds \quad (5')$$

where the corresponding power-density-spectrum matrices are

$$\Phi_{b_h, b_h(i)}(s) = \mathbf{W}_{h'j'(i)}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh(i)}^k(s).$$

Here $\mathbf{W}_{jh(i)}^k(s)$ ($i = 1, \dots, I$) are the corresponding constraint matrices (Fig. 2).

In the latter case following the simplified derivation technique both the auxiliary power-density-spectrum matrix $\Phi_{a_k a_k}(s, \lambda_1, \dots, \lambda_I)$ and the physically realizable optimum transfer function matrix $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(s, \lambda_1, \dots, \lambda_I)$ becomes a multivariable function of the parameters λ_i .

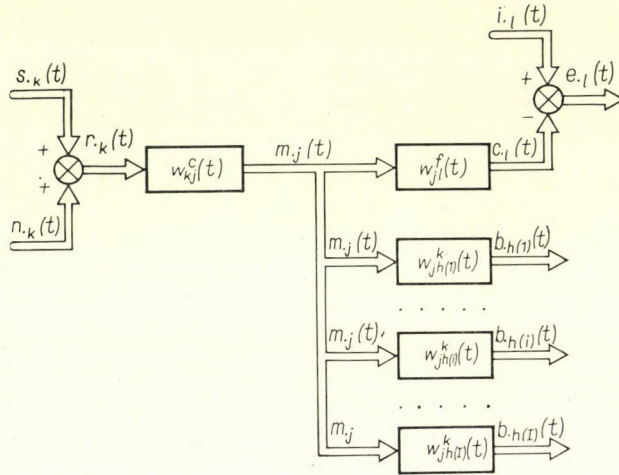


Fig. 2

Thus, instead of Equ. (10) we now have

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) + \\ & + \sum_{i=1}^{i=I} \lambda_i \mathbf{W}_{h'j'(i)}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh(i)}^k(s) = \\ & = \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{a_k a_k}(s, \lambda_1, \dots, \lambda_I) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s), \end{aligned} \quad (10')$$

while the explicit expression of the auxiliary power-density-spectrum matrix is now:

$$\begin{aligned} \Phi_{a_k a_k}(s, \lambda_1, \dots, \lambda_I) &= \Phi_{r_k r_k}(s) + \sum_{i=1}^I \lambda_i [\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)]^{-1} [\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)]^{-1} \times \\ & \times \mathbf{W}_{h'j'(i)}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \Phi_{r_k r_k}(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh(i)}^k(s) [\mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1} [\mathbf{W}_{kj}^c(s)]^{-1}. \end{aligned} \quad (11')$$

Instead of condition (12) we now have the restrictions:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{jh(i)}^k(s) [\mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1} &= G_i(s) \mathbf{I}_{jj}. \end{aligned} \quad (12')$$

$(i = 1, \dots, I)$

Finally, the explicit solution formula now becomes:

$$\begin{aligned} W_{kj}^{ckm}(s, \lambda_1, \dots, \lambda_I) = & [\Phi_{a_k, a_k}^+(s, \lambda_1, \dots, \lambda_I)]^{-1} \times \\ & \times \{ [\Phi_{a_k, a_k}^-(s, \lambda_1, \dots, \lambda_I)]^{-1} \Phi_{r_k, i_l}(s) \times \\ & \times W_{l'j'}^f(-s) [(W_{jl}^f(s) W_{l'j'}^f(-s))^{-1}]_+^{-1} \} \times \\ & \times [(W_{jl}^f(s) W_{l'j'}^f(-s))^+]^{-1}. \end{aligned} \quad (24')$$

The adjustment procedure of the parameters λ_i must now be performed in such a manner that the most rigorous of the inequalities (2') will be fulfilled.

Of course, a generalized matrix is also possible. In this case $\sigma_i^2 = (\sigma^2)_i$ and λ^i must be considered as vectors (or one-dimensional matrices), while

$$\Phi_{b_h, b_h(i)}(s), W_{jh(i)}^k(s), W_{h'j'(i)}^k(-s)$$

must be treated as three-dimensional matrices. Then in Equs (5'), (10') and (11') the summations become matrix multiplications.

Many special cases can be considered on the basis of the foregoing discussion.

IV. Generalizations for pulsed-data multivariable systems

For strictly digital or pulsed-data systems [18–32] (Fig. 3) the generalizations are quite obvious. The mean-square value of the sum of the number sequences of the errors can be expressed in the following forms:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\overline{e_{i_l}(nT) e_{i_l}(nT)}] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \text{tr} [e_{i_l}(nT) e_{i_l}(nT)] = \\ &= \text{tr} [\varphi_{e_{i_l} e_{i_l}}(0T)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{R_0} \Phi_{e_{i_l} e_{i_l}}(z) z^{-1} dz, \end{aligned} \quad (3')$$

where

$$\Phi_{e_{i_l} e_{i_l}}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{e_{i_l} e_{i_l}}(kT) z^{-k}$$

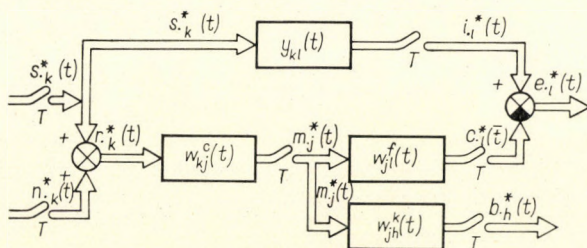


Fig. 3

is the corresponding power-spectrum matrix and Γ_0 is the unit circle in the z plane.

On the other hand, the inequality of constraint can now be expressed as follows

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} [\overline{\mathbf{b}_{h'}(nT) \mathbf{b}_h(nT)}] &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \operatorname{tr} [\mathbf{b}_{h'}(nT) \mathbf{b}_h(nT)] = \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varphi}_{b_{h'} b_h}(0T)] = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0} \operatorname{tr} \Phi_{b_{h'} b_h}(z) z^{-1} dz \leq \sigma^2 \end{aligned} \quad (2^*)$$

where $z = e^{j\omega T}$ and $h, h' = 1, \dots, H$.

It can be seen that the expressions for the pulsed-data systems are quite similar to the expressions for the continuous-data systems. To put this fact into relief the same numbers are used for the equations but with an asterisk. Thus, the derivation for the pulsed-data system can be performed just as in the case of the continuous-data system. For the sake of brevity this derivation is omitted here, only the final results are given.

The physically realizable optimum transfer-function matrix of the pulsed-data cascade controller in case of constraints can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{kj}^{ckm}(z, \lambda) &= [\Phi_{a_k^* a_k}^+(z, \lambda)]^{-1} \times \\ &\times \{ [\Phi_{a_k^* a_k^*}^-(z, \lambda)]^{-1} \Phi_{a_k i_l}(z) \mathbf{W}_{l' j'}^f(z^{-1}) \times \\ &\times [(\mathbf{W}_{j_l}^f(z) \mathbf{W}_{l' j'}^f(z^{-1}))^{-1}]^{-1} \}_+ [(\mathbf{W}_{j_l}^f(z) \mathbf{W}_{l' j'}^f(z^{-1}))^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (24^*)$$

Here the upper index $-$ (minus) denotes a matrix *factor* whose elements, and the elements of the inverse matrix, have only poles outside the unit circle Γ_0 while the upper index $+$ (plus) denotes a matrix factor whose elements together with the elements of its inverse matrix have only poles inside the unit circle. Furthermore, the lower index $+$ (plus) denotes a matrix *component* with physically realizable elements, belonging to positive-time functions and poles inside the unit circle, while the lower index $-$ (minus) denotes a matrix component with physically unrealizable elements, that is, with poles outside the unit circle, and thus belonging to negative-time functions.

Generally speaking, the matrix factors can be obtained by the spectrum factorization of power-spectrum matrices, while the physically realizable component can be obtained by first performing an inverse two-sided z transform taking for the integration path the unit circle, and thereafter, by the ordinary one-sided z transform performing the summation only from $n = 0$ to ∞ (and not from $n = -\infty$ to ∞).

It must be noted that the auxiliary power-spectrum matrix $\Phi_{a_k a_k}(z, \lambda)$ is now implicitly defined in the following relation

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_{j'j'}^f(z^{-1}) \mathbf{W}_{j'k'}^c(z^{-1}) \Phi_{r_k r_k}(z) \mathbf{W}_{kj}^c(z) \mathbf{W}_{jl}^f(z) + \\ & + \lambda \mathbf{W}_{h'j'}^k(z^{-1}) \mathbf{W}_{j'k'}^c(z^{-1}) \Phi_{r_k r_k}(z) \mathbf{W}_{kj}^c(z) \mathbf{W}_{jh}^k(z) = \\ & = \mathbf{W}_{j'j'}^f(z^{-1}) \mathbf{W}_{j'k'}^c(z^{-1}) \Phi_{a_k a_k}(z, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^c(z) \mathbf{W}_{jl}^f(z). \end{aligned} \quad (10^*)$$

The condition of independency is now

$$\mathbf{W}_{jh}^k(z) [\mathbf{W}_{jl}^f(z)]^{-1} = G(z) \mathbf{I}_{jj}. \quad (12^*)$$

This condition yields the following auxiliary matrix

$$\Phi_{a_k a_k}(z, \lambda) = [1 + \lambda G(z^{-1}) G(z)] \Phi_{r_k r_k}(z), \quad (13^*)$$

which is indeed independent of $\mathbf{W}_{kj}^c(z)$ and $\mathbf{W}_{j'k'}^c(z^{-1})$. This circumstance emphasizes the fact that for a given plant matrix the constraint matrix cannot be optionally chosen but there must be an interdependency between them to ensure the independency of the auxiliary matrix.

The elimination procedure of the underdetermined parameter λ is the same as before, the only difference being that now

$$\Phi_{b_k b_k}(z) = \mathbf{W}_{h'j'}^k(z^{-1}) \mathbf{W}_{j'k'}^c(z^{-1}) \Phi_{r_k r_k}(z) \mathbf{W}_{kj}^c(z) \mathbf{W}_{jh}^k(z) \quad (9^*)$$

must be applied. Substituting Equ. (24*) into Equ. (9*) and thereafter the so obtained matrix

$$\Phi_{b_k b_k}(z, \lambda)$$

in Equ. (2*), the parameter λ can be adjusted in such a manner that the inequality of constraint will be satisfied. With this value of λ and Equ. (24*) the physically realizable optimum transfer-function matrix of the pulsed-data cascade controller $\mathbf{W}_{kj}^{ckm}(z)$ is obtained.

V. Some remarks

It is obvious that taking $\lambda = 0$, on the one hand

$$\Phi_{a_k a_k}(z, \lambda)$$

is reduced to

$$\Phi_{r_k r_k}(z)$$

and on the other hand Equ. (24*) yields

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{kj}^{cm}(z) = & [\Phi_{r_k, r_k}^+(z)]^{-1} \times \\ & \times \{ [\Phi_{r_k, r_k}^-(z)]^{-1} \Phi_{r_k, i_l}(z) \mathbf{W}_{l', j'}^f(z^{-1}) \times \\ & \times [(\mathbf{W}_{j_l}^f(z) \mathbf{W}_{l', j'}^f(z^{-1}))^{-1}]^{-1} \}_+ [\mathbf{W}_{j_l}^f(z) \mathbf{W}_{l', j'}^f(z^{-1})]^+, \end{aligned} \quad (25^*)$$

which is the final explicit solution formula of the optimum pulsed-data cascade controller for the case of the semi-free configuration without constraints.

Furthermore, the optimum transfer-function matrix for pulsed-data multivariable systems with completely-free configuration is

$$\mathbf{W}_{ki}^m(z) = [\Phi_{r_k, r_k}^+(z)]^{-1} \{ [\Phi_{r_k, r_k}^-(z)]^{-1} \Phi_{r_k, i_l}(z) \}_+. \quad (26^*)$$

Similarly, it is not difficult to translate also the other remarks in Section III to the case of pulsed-data systems.

Now the results obtained may easily be generalized also for multiple constraints. For example, if the manipulated variables are simultaneously submitted to two or more constraints then instead of inequality (2*) a system of inequalities is valid:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0} \text{tr} [\Phi_{b_h, b_h(i)}(z)] z^{-1} dz \leq \sigma_i^2. \quad (2'^*)$$

Furthermore, we have the following relation:

$$\begin{aligned} & \text{tr} [\varphi_{x_l, x_l}(0T, \lambda_1, \dots, \lambda_I)] = \\ & = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_0} \text{tr} \left[\Phi_{e_l, e_l}(z) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \Phi_{b_h, b_h(i)}(z) \right] z^{-1} dz. \end{aligned} \quad (5'^*)$$

Here the corresponding power-spectrum matrices are

$$\Phi_{b_h, b_h(i)}(z) = \mathbf{W}_{h', j'(i)}^k(z^{-1}) \mathbf{W}_{j', k'}^c(z^{-1}) \Phi_{r_k, r_k}(z) \mathbf{W}_{k_j}^c(z) \mathbf{W}_{j_h(i)}^k,$$

where $\mathbf{W}_{jh(i)}^k$ ($i = 1, \dots, I$) are the corresponding constraint matrices. In case of the semi-free configuration with many constraints the conditions of independence

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{jh(i)}^k(z) [\mathbf{W}_{j_l}^f(z)]^{-1} = & G_{(i)}(z) \mathbf{I}_{jj} \\ & (i = 1, \dots, I) \end{aligned} \quad (12'^*)$$

must be fulfilled, where $G_{(i)}(z)$ ($i = 1, \dots, I$) are some scalar pulse-transfer functions (or polynomials) and \mathbf{I}_{jj} is a unity matrix of the $J \times J$ type.

Of course, in this case both the auxiliary power-spectrum matrix $\Phi_{a_k' a_k}(z, \lambda_1, \dots, \lambda_I)$ and the physically realizable optimum pulse-transfer-function matrix $\mathbf{W}_{kj}^{cm}(z, \lambda_1, \dots, \lambda_I)$ becomes a multivariable function of the parameters λ_i . Accordingly, we obtain in this case

$$\Phi_{a_k' a_k}(z, \lambda_1, \dots, \lambda_I) = \left[1 + \sum_{i=1}^I \lambda_i G_{(i)}(z^{-1}) G_{(i)}(z) \right] \Phi_{r_k r_k}(z).$$

Finally, the explicit solution formula for the semi-free configuration with multiple constraints becomes:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{kj}^{ckm}(z, \lambda_1, \dots, \lambda_I) &= [\Phi_{a_k' a_k}^+(z, \lambda_1, \dots, \lambda_I)]^{-1} \times \\ &\times \{ [\Phi_{a_k' a_k}^-(z, \lambda_1, \dots, \lambda_I)]^{-1} \Phi_{x' i}(z) \mathbf{W}_{l' j'}^f(z^{-1}) \times \\ &\times [(\mathbf{W}_{j l}^f(z) \mathbf{W}_{l' j'}^f(z^{-1}))^-]^{-1} \}_+ [(\mathbf{W}_{j l}^f(z) \mathbf{W}_{l' j'}^f(z^{-1}))^+]^{-1}. \end{aligned} \quad (24')$$

The adjustment procedure of the parameters λ_i must now be performed in such a way that the most rigorous of the inequalities (2'*) can be fulfilled.

Finally, it is perhaps worthwhile to mention that the single-variable systems are only special cases of the multivariable systems, and the optimum transfer functions of the continuous-data and pulsed-data systems, respectively, can immediately be obtained from the corresponding formulas derived if the matrices are substituted by scalar quantities. This is equally true for the completely-free configuration as well as for the semi-free configuration with and without constraints. It must be emphasized that in case of single variable systems Equ. (12) or (12*) is inherently guaranteed, because for $j = 1$ being $j j j = 1$, that is a scalar quantity. Thus, in single-variable systems the necessary independence is a priori ensured.

APPENDIX

After having determined the optimum transfer-function matrix of the cascade controller according to the equivalence of the two configurations shown in Fig. 4 the transfer-function matrix of the series controller or that of the feed-back controller can also be ascertained. For example, if there is no feed-back controller then the transfer-function matrix of the series controller can be expressed as

$$\mathbf{G}_{kj}^c(s) = [\mathbf{I} - \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{j l}^f(s)]^{-1} \mathbf{W}_{kj}^c(s),$$

while, on the other hand if the series controller is missing then the transfer-function matrix of the feed-back controller is given in the following relation

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{lk}^c(s) &= [\mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{j l}^f(s)]^{-1} - [\mathbf{W}_{j l}^f(s)]^{-1}, \\ (k &= 1, \dots, K; j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L; K = J = L) \end{aligned}$$

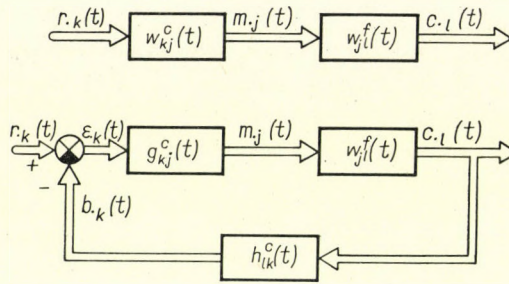


Fig. 4

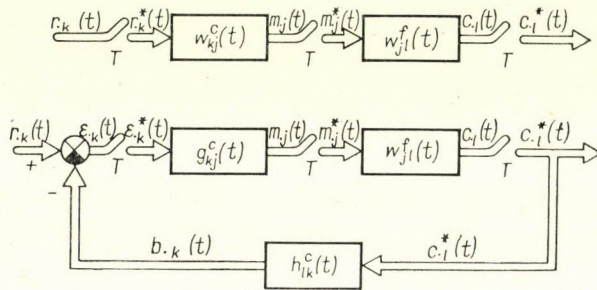


Fig. 5

Similarly, after having determined on the basis of Fig. 5 the optimum pulse-transfer-function matrix of the pulsed-data-cascade controller, the pulse-transfer-function matrix of the series controller in the closed loop can be expressed as

$$G_{kj}^c(z) = [I - W_{kj}^c(z) W_{jl}^f(z)]^{-1} W_{kj}^c(z)$$

if there is no feed-back controller. If, on the other hand, the series controller is missing, the pulse-transfer-function matrix of the feed-back controller is

$$H_{lk}^c(z) = [W_{kj}^c(z) W_{jl}^f(z)]^{-1} - [W_{jl}^f(z)]^{-1} .$$

$$(k = l = j = 1, \dots, K = L J)$$

REFERENCES

1. WIENER, N.: The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Technology Press, Cambridge 1949.
2. NEWTON, G. C.—GOULD, L. A.—KAISER, J. F.: Analytical Design of Linear Feedback Controls. John Wiley and Sons Inc., New York 1957.
3. TSIEN, H. S.: Engineering Cybernetics. McGraw-Hill Book Company Inc., New York—Toronto—London 1954.
4. BODE, H. W.—SHANNON, C. E.: Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory. Proc. IRE 38 (1950), 417.
5. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of Optimum Transfer Functions in the Wiener—Newton Sense. Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes 1962.

6. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of Optimum Transfer Functions in the Wiener—Newton Sense. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **6** (1962), 237.
7. AMARA, R. C.: Application of Matrix Methods to the Linear Least Squares Synthesis of Multivariable Systems. *Journal of the Franklin Institute* **268** (1959), 1.
8. YOULA, D. C.: On the Factorization of Rational Matrices. *IRE Transactions Information Theory* IT-7. No. 3 (1961), 172—189.
9. KAVANAGH, R. J.: A Note on Optimum Linear Multivariable Filters. *Proceedings of IEE* Part C (Monograph No. 439 M.) (1961), 412—417.
10. HSIEH, H. C.—LEONDES, C. T.: On the Optimum Synthesis of Multipole Control Systems in the Wiener Sense. *IRE National Convention Record* 1959. 7 Part 4 (1959), 18.
11. CSÁKI, F.: Some Remarks Concerning the Statistical Analysis and Synthesis of Control Systems. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **6** (1962), 187.
12. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of Optimum Transfer Functions for Multivariable Systems. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **7** (1963), 171.
13. HSIFH, H. C.—LEONDES, C. T.: Techniques for the Optimum Synthesis of Multipole Control Systems with Random Processes as Inputs. *IRE Transactions* (1961), 212—231.
14. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of the Optimum Multipole Cascade Controller for Random Processes. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **8** (1964), 1.
15. GAYLORD, R.: Dual Input Systems with a Saturation Constraint. Paper 411 on the Second International Congress of IFAC on Automatic Control, Basel 1963.
16. RAGAZZINI, J. R.—FRANKLIN, G. F.: *Sampled-data Control Systems*. McGraw-Hill Book Comp. Inc., New York 1958.
17. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of the Optimum Multipole Cascade Controller for Multivariable Systems with Constraints. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **8** (1964), 117.
18. TOU, J. T.: *Digital and Sampled-data Control Systems*. McGraw-Hill Book Comp. Inc., New York 1959.
19. MONROE, A. J.: *Digital Processes for Sampled-Data Systems*. John Wiley and Sons Inc., New York 1962.
20. ZADEH, L. A.: Correlation Functions and Power Spectra in Variable Networks. *Proc. IEE* **38**. (1950), 1342—1345.
21. MORI, M.: *Statistical Treatment of Sampled-Data Control Systems for Actual Random Inputs*. Rept. Institute of Industrial Science, University of Tokyo Chiba City (Japan) 1956.
22. JOHNSON, G. W.: *Statistical Analysis of Sampled-Data Systems*. *IRE Wescon Record* (1957); Part IV, 187—195.
23. CHANG, S. S. L.: *Statistical Design Theory for Strictly Digital Sampled-Data Systems*. *Proc. AIEE* (1958); part I, 702—709.
24. CHANG, S. S. L.: *Statistical Design Theory for Strictly Digitally Controlled Continuous Systems*. *Proc. AIEE* (1958), 191—201.
25. TOU, J. T.: *Statistical Design of Linear Discrete-Data Control Systems Via the Modified Z-Transform Method*. *J. Franklin Inst.* **271** (1961), 249.
26. Цылкин, Я. З.: Теория импульсных систем. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1958.
27. Солодовников, В. В.: Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1960.
28. Крутько, П. Д.: Статистическая динамика импульсных систем. Издательство «Советское радио», Москва 1963.
29. Перов, В. П.: Статистически синтез импульсных систем. Изд. «Советское радио», Москва 1959.
30. Поспелов, Г. С.: Импульсные системы автоматического регулирования. — Автоматическое управление и вычислительная техника (вып. 3). Машгиз, Москва 1960.
31. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of Optimum Transfer Functions for Digital Stochastic Processes. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **9** (1965), 237.
32. CSÁKI, F.: Optimum Pulse-Transfer Functions for Multivariable Digital Stochastic Processes. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **9** (1965), 353.

OPTIMALE KASKADREGLER FÜR KONTINUIERLICH- UND DISKRETWIRKENDE
MEHRFACHREGELSYSTEME MIT BEGRENZUNGEN

F. CSÁKI

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz wird die Optimalisierung nach Wiener—Newton für kontinuierlich und direkt wirkende Mehrfach-Systeme mit halbfreier Konfiguration und Beschränkung behandelt. Für stationäre, ergodische, stochastische Prozesse sind die Resultate für das Mehrfach-System Kaskadregler in expliziter Form gegeben, wobei als Kriterium das Minimum der Summe des quadratischen Mittelfehlers zwischen der idealen und aktuellen Ausgangs-Signalgruppe betrachtet wird. Als Beschränkungskriterium wird die Beschränkung der Summe des quadratischen Mittelwertes der Gruppe von den manipulierten Veränderlichen genommen.

DIMENSIONNEMENT DES RÉGULATEURS OPTIMA POUR
SYSTÈMES A VARIABLES MULTIPLES ET A RESTRICTIONS,
DE FONCTIONNEMENT CONTINU OU IMPULSIONNEL

F. CSÁKI

RÉSUMÉ

L'étude traite de l'optimisation d'après Wiener et Newton, pour les systèmes multiples à fonctionnement continu ou à fonctionnement impulsionnel, à configuration semi-libre et à restrictions. Pour des processus stationnaires, ergodiques, stochastiques, le critère de la somme des écarts quadratiques moyens entre le groupe des signaux de sortie idéals et actuels est adopté. Comme critère de restriction, on considère la restriction de la somme des écarts quadratiques moyens du groupe des variables manipulées. Pour le régulateur en cascade du système multiple les résultats sont donnés sous forme explicite.

ОПТИМАЛЬНЫЕ КАСКАДНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И
ИМПУЛЬСНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С
ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ф. ЧАКИ

РЕЗЮМЕ

Автор занимается оптимальным решением по Винеру—Ньютону многомерных, непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования полусвободной структуры с ограничениями. В случае стационарных, эргодических и стохастических процессов, когда критерием работы считается сумма среднеквадратичных отклонений групп идеальных и реальных выходных сигналов и существует ограничения для квадратичных значений некоторых групп вспомогательных переменных были найдены явные выражения для многомерного непрерывного и дискретного оптимального регулятора последовательного типа.

ENHANCEMENT OF WORKING GAS CONDUCTIVITY BY CONDENSING METAL VAPOUR

PRELIMINARY REPORT

K. P. KOVÁCS, D. HALÁSZ and K. SZENDY

[Manuscript received December 20, 1966]

In a previous theoretical study [1] it has been found that by using very fine dust particles ($r = 2,5 \cdot 10^{-9}$ m) with low work function sufficient thermionic conduction (mho/m) can be attained for MHD generators. It is, however, fairly difficult to produce such fine dust particles by mechanical grinding and to ensure their homogeneous distribution in the supporting gas when entering the generator channel.

Metals in vapour state which, while in liquid state do not wet the surface macroscopically, can be formed in liquid droplets more easily. This has the advantage of giving 2 ~ 20 times the heat transfer coefficient of film condensation. The condensation depends on the difference between saturation temperature of the vapour and the temperature of the liquid phase and this may be influenced by sudden changes in saturation pressure or, in the case of high temperature metal vapour, by heat radiation.

According to the kinetic theory and some experimental investigations [2] droplets cannot form on a liquid film or layer but condensation will begin around nucleation cores as contaminants. In the course of the spatial condensation of metal or metal compounds very fine liquid or solid (reverse sublimation) particles can be formed, the sizes of which correspond to the theoretical value. If the seeding material, when changing phase, is in an excited state necessary for reaching the ionization potential or working function, it can satisfactorily ionize the working fluid.

The temperature drop ($T_s - T_v$) required for spatial condensation of high temperature metal vapour (1500 ~ 1700 °K) is attainable by heat radiation or sudden pressure decrease. The heat transmission by radiation may be enhanced if this part of channel is covered with high-grade absorbent, provided that the absorption coefficient of the gas is unimportantly low.

These phenomena will be investigated on an experimental equipment developed for this special purpose at the *Institute for Electrical Power Research, Budapest*. A closed experimental loop, filled with pressurized argon, will be placed in a high temperature space (1500 ~ 1700 °K), and some alkali metal compound (e.g. CsCl which has a boiling point of 1563 °K) is to be put into the high temperature branch of the loop.

The required gas condition may be obtained by changing the temperature and pressure of gas inside the loop. The conductivity could be measured by means of platinum electrodes placed at several points of the channel.

REFERENCES

1. HALÁSZ, D.—SZENDY, K.—KOVÁCS, K. P.: Electron Emission in MHD Generators. *Proc. Int. Symp. Paris* (1964), 339—347.
2. ROHSENOW, W. M.—SUKHATME, S. P.: Condensation (Developments in Heat Transfer). *The MIT Press Massachusetts* (1964), 293—318.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU
DE LIVRE — ОБЗОР КНИГ

Fodor, Gy.:

LAPLACE TRANSFORMS IN ENGINEERING

Akadémiai Kiadó, Budapest 1965, 758 pp.

Technical and social development calls for continually increased accuracy and versatility in studying the phenomena encountered in practice. These various phenomena and processes can generally be described by the use of ordinary or partial differential equations or systems of such equations. Despite the fact that most of these are linear equations with constant coefficients, the conventional methods used to solve them are comparatively intricate, requiring laborious calculations. The solving of these equations (and systems of equations) is greatly simplified by the use of Laplace transforms, which are now in general use and find therefore necessarily an ever increasing application in engineering practice.

In this book, which was prepared as a greatly enlarged version of the Hungarian edition entitled "A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása" (published by the Akadémiai Kiadó in Budapest, 1962), Gy. FODOR discusses mathematical and engineering problems involving the use of Laplace transforms. The book is written in eight—even as independent sections valuable—parts and the problems in it are considered from the engineer's and mathematician's point of view.

In each subject matter a large number of examples is given to make the book easier to understand and to show the possibilities of applications of the discussed mathematical procedures. (On the whole, there are about 300 examples with full solutions in the book.)

In the first part the laws of the exact sciences with their mathematical descriptions and conventional solutions (without the use of Laplace transforms) are dealt with. Here, the notions of unit-step function and Dirac distribution are introduced and a discussion of the generalized differentiation is presented. (Though an adequate mathematical foundation is omitted, this part proves to be a very useful system in the later chapters.) In the last chapter of this section a short account on Fourier series, Fourier integrals, and correlation functions is given.

The second part of the book presents a detailed discussion of the Laplace transform including the analysis of various functions in the time and operator domain, the rules of direct and inverse transforms, and the generalization of correlation functions. An exhaustive analysis of the fundamentally important convolution theorem is also inserted.

The most important and even in an extent the most considerable material of the book is enclosed in Parts III and IV. Part III deals with the practical applications of the Laplace transforms. The calculation rule is described and then the solutions of differential equations, the application of transfer functions and the stability problems are analysed. A wide field of Laplace transform applications in connection with the use of operator impedances in electrical analogies is shown. In Part IV a full understanding of this material is facilitated by solving a number of particular problems. The author shows the application of Laplace transforms to oscillations, in the analysis of four-terminal networks and electromechanical systems, in control engineering, hydrodynamics, in describing electrical networks, power transmission systems, electromagnetic waves, etc. He also discusses the possibilities of solving nonlinear differential equations and differential equations with variable coefficients.

Part V is devoted to the spectrum method. In connection with this method Fourier spectra of periodic and non-periodic functions are mentioned. In this part a generalization of Laplace transforms, the transfer characteristics and stability criteria are also dealt with.

Part VI investigates discrete Laplace transforms. First, it gives a definition of the new notion and reasons for its introduction and then shows the applications of discrete Laplace transform to the analysis of sampled-data systems and to solving difference equations.

Part VII discusses stochastic processes by using correlation and density functions. A discussion of sampled-data calculations and optimization problems is also included.

Part VIII—which is at the same time the last part of the book—conveys short definitions of the functions used in the book throughout and then contains useful tables (e.g. with Laplace transforms of nearly 600 functions).

The vast material in the book should give a great help to engineers (especially electrical engineers) and scientists, giving them the solutions of a large number of particular problems in every field of interest.

Dr. K. P. Kovács

INDEX

- Házman, I.*: Saturation Current in Diffusion-Action Transistors — Reststrom von Diffusionstransistoren — Le courant résiduel des transistors à diffusion — *Хазман, И.*: Остаточный ток диффузионно действующих транзисторов 211
- Huszár, I.—Kovács, I.*: Strength Calculation of the Cage-System in Squirrel Cage Induction Motors — Festigkeitsrechnung des Kurzschluß-Käfigsystems von Asynchronmotoren — Calcul de la résistance mécanique des cages d'écuréuil des moteurs asynchrones — *Хусар, И.—Ковач, И.*: Расчет механической прочности беличьей клетки короткозамкнутых асинхронных двигателей 233
- Schwaner, K.*: Über den Einfluß der modifizierten Kresolharzsysteme auf die elektrischen Eigenschaften und Wasserbeständigkeit der Hartpapiere — The Influence of Modified Cresol-Resin Systems on the Electric Properties and the Resistance to Water of Paper-Base Laminated Plastics — L'influence des systèmes de résine à base de crésol modifiés, sur les qualités électriques et la résistance à l'eau des plastiques stratifiées à base de papier — *Шванер, К.*: Воздействие модифицированных систем крезольной смолы на электрические свойства и водонепроницаемость слоистых пластмасс с бумажным каркасом 247
- Lőcsei, B.*: The Effect of Small Quantities of Aluminium Fluoride Additives on the Strength of Refractory Materials — Die Wirkung des Zusatzes geringer Aluminiumfluoridmengen auf die Festigkeit von feuerbeständigen Materialien — L'influence de l'addition de faibles quantités de fluorure d'aluminium sur la résistance mécanique des matières réfractaires — *Лечей, Б.*: Воздействие небольшой добавки фтористого алюминия на изменение прочности огнеупорных материалов ... 267
- Lukács, J.*: Si—SiC *p-n* heterojunctions — Si—SiC *p-n*-Heteroübergänge — Jonctions hétérogènes *p-n* Si—SiC — *Лукач, Й.*: *p-n* гетеросвязи Si—SiC 281
- Biró, V.*: Analysis of a Varactor Frequency Doubler — Analyse eines Varaktor-Frequenzverdopplers — Analyse d'un doubleur de fréquences à diode de capacité variable — *Биро, В.*: Анализ удвоителя частоты на варакторном диоде 285
- Vajda, Gy.*: Some Remarks on the Interpretation of Discharge Investigations — Bemerkungen zur Interpretation der Untersuchungen über Entladungen — Remarques sur l'interprétation des décharges — *Вайда, Д.*: Замечания к трактовке исследований разряда 305
- Karsai, K.*: Calculation of the Pseudo-Final Voltage Distribution in Impulsed Windings with a Matrix Method — Berechnung der induktiven Spannungsverteilung in gestossenen Windungen mit Hilfe einer Matrizenmethode — Méthode matricielle pour le calcul de la distribution inductive des tensions dans les enroulements soumis à des tensions de choc — *Каршай, К.*: Матричный расчет распределения индуктивного напряжения, возникающего при импульсе на обмотках 309

- Vajda, Gy.*: An Approximate Method for the Determination of the Maximum Dielectric Stress in Electric Fields — Näherungsweise Bestimmung der größten Beanspruchung in elektrischen Feldern — Détermination approchée de la contrainte diélectrique maximum dans les champs électriques — *Вайда, Д.*: Приближенное определение максимальной нагрузки электрических силовых полей 319
- Fonó, A.*: Increasing the Efficiency of Gas Transmission Pipe Lines — Steigerung der Leistungsfähigkeit von Gasfernleitungen — L'augmentation de l'efficacité des lignes de transport de gaz — *Фоню, А.*: Повышение пропускной способности магистрального газопровода 333
- Bach, I.*: Die statistische Bewertung des Verbrauches in Radialnetzen — Statistical Evaluation of Consumers in Radial Networks. — Evaluation statistique des consommateurs dans les réseaux radiaux — *Бах, И.*: Статистическая оценка потребителей радиальных сетей 345
- Csáki, F.*: Optimum Cascade Controllers for Multivariable Continuous-Data and Pulsed-Data Control Systems, with Constraints — Optimale Kaskadregler für kontinuierlich- und diskretwirkende Mehrfachregelsysteme mit Begrenzungen — Dimensionnement des régulateurs optima pour systemes à variables multiples et à restrictions, de fonctionnement continu ou impulsionnel — *Чаки, Ф.*: Оптимальные каскадные регуляторы для непрерывных в импульсных многомерных систем управления с ограничениями 363
- Kovács, K. P.—Halász, D.—Szendy, K.*: Enhancement of Working Gas Conductivity by Condensing Metal Vapour — Steigerung der Leitfähigkeit des Arbeitsgases durch Kondensation von Metaldampf — Accroissement de la conductibilité du gaz de travail par la condensation de la vapeur de métal — *Ковач, К. П.—Халас, Д.—Сенди, К.*: Повышение магнетогидродинамической эм ссии газов конденсацией паров металлов и их солей 383

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES —
ОБЗОР КНИГ

- Fodor, Gy.*: Laplace Transforms in Engineering (K. P. Kovács) 385

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1965. XI. 8. — Terjedelem: 15,50 (A/5) ív, 74 ábra, 4 melléklet

67.63086 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

I. HÁZMAN: *Saturation Current in Diffusion-Action Transistors*

The currents flowing through the transistor have been divided into the following components: hole current of the volumetric transistor, emitter and collector volumetric electron currents, hole current of the volumetric collector diode and current components resulting from surface recombination. The determination of these saturation currents by measurement has been traced down to the measurement of $I_{E_0}^{**}$, $I_{E_0}^*$ and I_{C_0} . It has been stated that the mentioned three quantities are more characteristic of the processes in transistors than the saturation currents I_{EB_0} and I_{CB_0} , obtained from the simultaneous effect of all the components. The method adopted here gives a better insight into the physical processes and permits an exact quantitative determination of the current amplification factors and of the voltage dependence of the emitter current. The collector saturation current can be given as a function of voltage in good agreement with measurements.

I. HUSZÁR and I. KOVÁCS: *Strength Calculation of the Cage-System in Squirrel Cage Induction Motors*

The rod-conductors of the cage-system in an induction motor are short-circuited by means of rings on the face-sides. The mechanical stress conditions of the cage-system are predetermined by prestress due to assemblage, by centrifugal forces due to rotation, and by thermal dilatation due to heating-up during running. The methods to calculate the forces and the respective stresses at various states are explained.

K. SCHWANER: *The Influence of Modified Cresol-Resin Systems on the Electric Properties and the Resistance to Water of Paper-Base Laminated Plastics*

The author investigated the water absorption and the electrical properties of several different condensation resin systems starting from cresol-formaldehyde-resin. He found that the water absorption capacity of laminated plastics is considerably reduced only by those resin systems which contain aniline as well as melamine (e.g. aniline-melamine-cresol-formaldehyde system). The melamine plays the role of the water-resistance increasing activator of the melamine-cresol-formaldehyde-resin. The presence of epoxy resin has no influence on the water absorption, but, especially associated to aniline-resin, (e.g. in an aniline-epoxyd-cresol-formaldehyde system) it greatly improves the electrical properties of the laminated paper-base plastics.

I. BACH: *Statistical Evaluation of Consumers in Radia Networks*

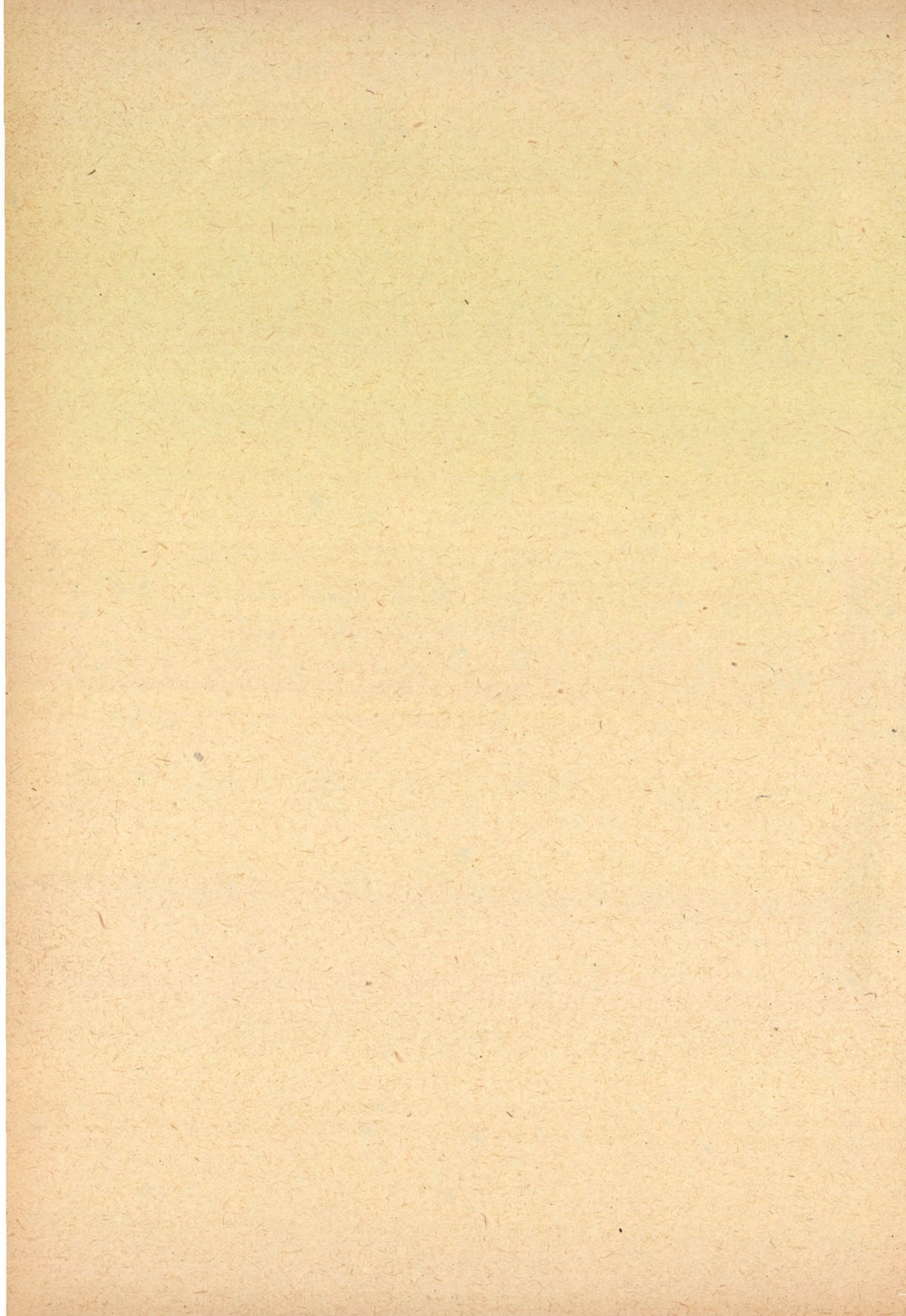
The paper deals with two questions arising in the palling of radial networks, i.e. with the calculation of the voltage drop and of the network loss. The difficulties of the present methods, which cannot correctly take into account the coincidence of the peak-loads is solved by considering consumer loads as stochastic variables. The load resulting from the many individual consumers is assumed to have a normal distribution at each moment and from this the load in the lines and in the nodes is calculated, which thus become also normally distributed. For the calculation of maximum voltage drop the author starts from a similar principle but he takes into consideration that the voltage drops across individual line sections cannot be considered to be independent. For the calculation of network losses the stochastic model of the loads is used as well, and from this is calculated the expectation of the loss.

F. CSÁKI: *Optimum Cascade Controllers for Multivariable Continuous-Data and Pulsed-Data Control Systems, with Constraints*

In this paper the optimum design according to WIENER—NEWTON is treated for continuous-data as well as for discrete-data multivariable control systems with semi-free configuration and constraints. For stationary ergodic stochastic processes taking as performance criterion the sum of the least-mean-square errors between the sets of actual and ideal outputs and considering as constraint the limitation of the sum of the mean-square values of some sets of manipulated variables, explicit formulas are derived for the multivariable cascade controller.

B. LŐCSEI: *The Effect of Small Quantities of Aluminium Fluoride Additives on the Strength of Refractory Materials*

The effect of aluminium fluoride on the processes which take place during the calcination of various refractory materials can be satisfactorily followed by differential thermogravimetric and analytical tests. On the addition of small quantities of aluminium fluoride a changes will occur in the mechanism of the reaction process, but the activation energy conditions and the kinetic will be modified. The dehydroxylation process is retarded by the incorporation and partial hydrolysis of aluminium fluoride, while on the other hand the activation energy of mullite formation is reduced by the addition of the fluoride. Beyond a certain limit, which corresponds to about 10÷12% of the clay mineral content, a fundamental change occurs in the nature of the processes which take place during calcination and these processes become more and more complicated. The above mentioned quantity of aluminium fluoride is the limit below which this additive only accelerates the processes taking place during the calcination and improves the quality of the end product.



Acta Techn. Hung. **56** (1966), 281—284

J. LUKÁCS: *Si—SiC p—n-heterojunctions*

The paper examines the possibilities of realizing the Si—SiC *p—n*-heterojunction and deals with the experiments made for recording the energy band diagram of the heterojunctions. From the results the conclusion can be drawn that in an Si—SiC heterojunction the most favourable rectifying characteristic can be attained with an *n—n⁺* junction.

Acta Techn. Hung. **56** (1966), 285—304

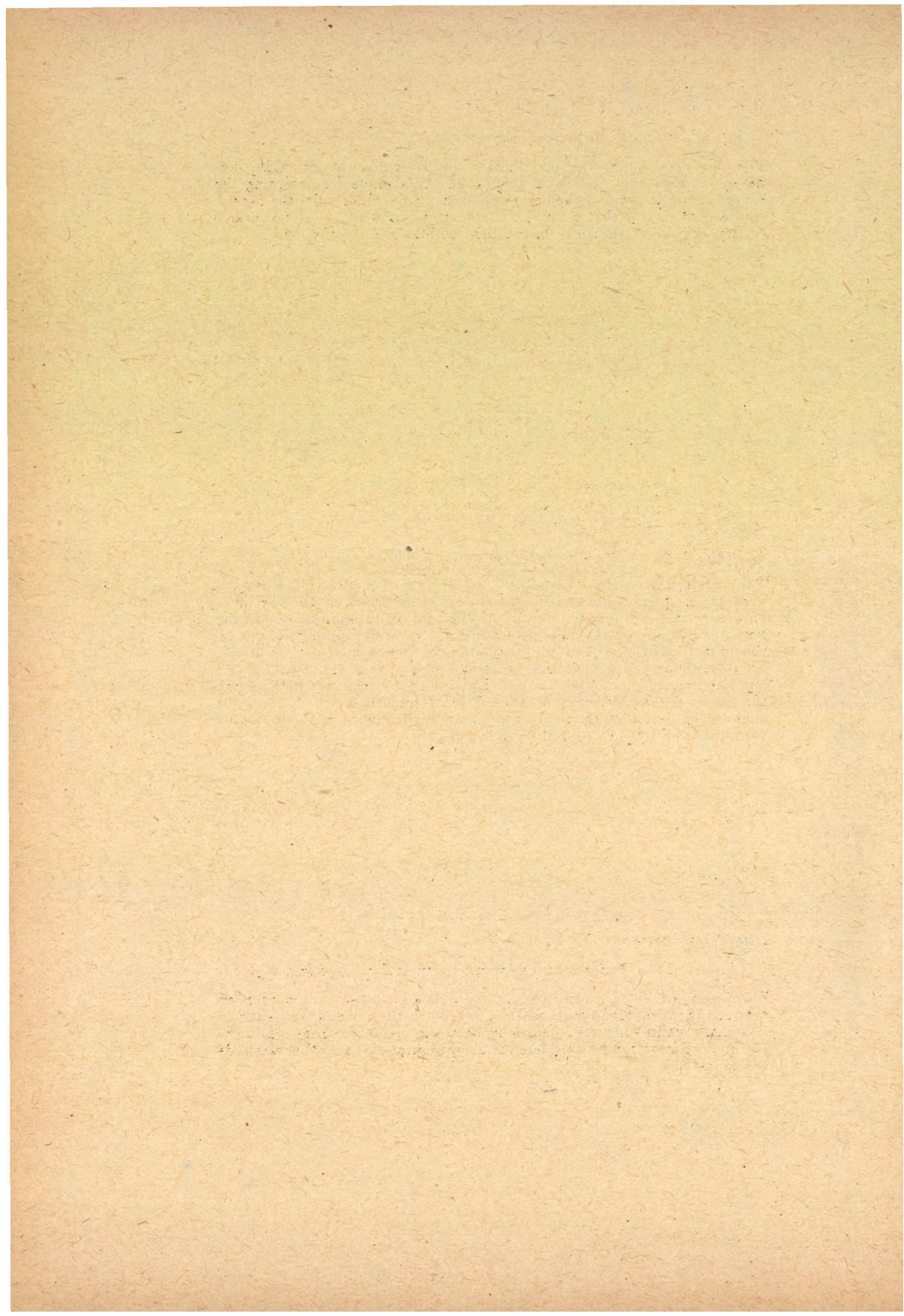
V. BIRÓ: *Analysis of a Varactor Frequency Doubler*

The article deals with the analysis of the operation of parallel coupled varactor frequency doubler circuit for the case when in this circuit a varactor with abrupt junction is used. The analysis takes into account the varactor loss and on this base determines the maximum invertible power, the highest efficiency and the dissipation occurring in these conditions. Further, the impedance relation necessary to attain the above parameters and the required varactor bias are also given. The relations determining the above parameters contain the physical quantities which allow the engineering design of the doubler circuit and the choice of the necessary varactor type by means of these relations.

Acta Techn. Hung. **56** (1966), 305—308

GY. VAJDA: *Some Remarks on the Interpretation of Discharge Investigations*

This paper presents, in principle, a possibility of finding some connection between the measured values and the volume of the cavities. The analysis is strictly valid only for conditions between plane electrodes, but the obtained relation can be considered as an approximation for other electrode configurations.



Acta Techn. Hung. 56 (1966), 309—318

K. KARSAI: *Calculation of the Pseudo-Final Voltage Distribution in Impulsed Windings with a Matrix Method*

This article reviews a matrix method which applies itself for calculation of the pseudo-final voltage distribution. The model to be used contains n elementary coils of finite length, which are identical among themselves. The pseudo-final voltage distribution is important from the viewpoint of the amplitudes of the harmonic voltage oscillations at surge voltage phenomena. In addition to this method it is also possible by means of this method to define the voltage distribution at industrial frequency of transformer coils i.e., the calculation of the radial flux components. The formulae deduced by the matrix method are very simple and include only algebraic operations.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 319—332

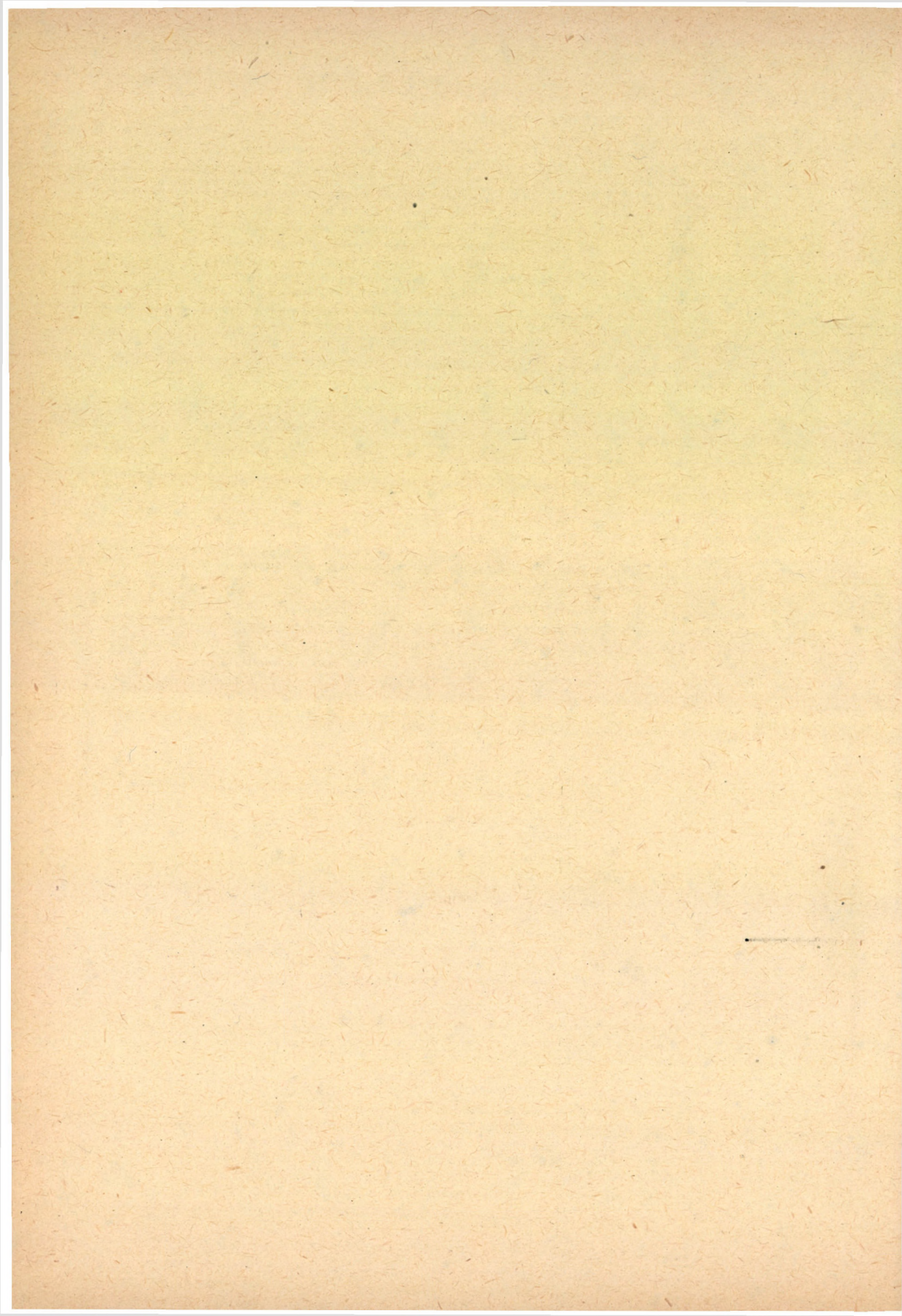
GY. VAJDA: *An Approximate Method for the Determination of the Maximum Dielectric Stress in Electric Fields*

The paper presents a method for the approximate calculation of the maximum dielectric stress in static electric fields. By a suitable substitution of electrodes the investigation of the electric field can be reduced to the investigation of some simpler arrangements which are easy to calculate. The calculation work is greatly facilitated by introducing the coefficient of inhomogeneity. The paper also presents a calculation method for numerically separating the fields which are inhomogeneous to the first degree from those which are inhomogeneous to the second degree.

Acta Techn. Hung. 56 (1966), 333—344

A. FONÓ: *Increasing the Efficiency of Gas Transmission Pipe Lines*

The efficiency of gas transmission pipe lines can be increased by reducing the distances between the compressor stations; in existing systems the method of step up efficiency is to insert intermediary compressor stations. The insertion of compressor stations improves the economy of operation even before it becomes a necessity for higher efficiency. The load at which a compressor station in the halving point between two existing ones contributes to better economy, can be calculated. The paper presents a calculation to establish the annual running time needed to cover the amortisation costs of such an intermediate compressor station for constant load round the year. Its rate provides information on the economy of the investment. The annual operating time above which the establishment of an intermediate compressor station improves economy with variable load can be determined on the basis of the load frequency curve.



The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable
at the following addresses:

ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien 1.

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Raznoiznos
1 Tzar Assen
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88.

CZECHOSLOVAKIA

Artia
Ve Smeckách 30
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Madarská Kultura
Praha 1
Václavské nám. 2.
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tlace
Leningradská 14
Bratislava

DENMARK

Einar Munksgaard
Nørregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16.
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62.
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough, Northamps.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471-487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP.
GPO Post Box 1374
Bombay 1.

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Nauka Ltd.
92, Ikebukuro O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND

RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14-18.
Bucuresti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow G-200

SWEDEN

Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA

Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York, N. Y. 1003
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York, N. Y. 1003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Misica broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27.
Beograd