

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 54

FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1966

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

I N D E X

- Argyris, J. H.*: Elasto-Plastic Analysis of Three-Dimensional Media — Elasto-plastische Analyse von dreidimensionalen Medien — Analyse élasto-plastique des milieux tridimensionnels — *Аргирис, И. Х.*: Эласто-пластический анализ трехмерных сред 219
- Balogh, A.*: Torsional Vibration. Problems and Practical Solutions — Torsionsschwingungen. Probleme und deren praktische Lösungen — Vibrations de torsion. Problèmes et solution pratique — *Балог, А.*: Крутильные колебания. Проблемы и практические решения 5
- Бардош, В.*: Чувствительность плоских механизмов к ошибкам в размерах его звеньев — *Bardos, V.*: The Sensitivity to Dimensional Errors of the Members of Plane Mechanism — Die Empfindlichkeit gegen Maßfehler der Glieder bei ebenen Mechanismen — La sensibilité des erreurs dimensionnelles des membres dans les mécanismes plans 87
- Berceli, T.*: The Ideal Klystron Modulator — Der ideale Klystronmodulator — Le modulateur à klystron idéal — *Берцели, Т.*: Идеальный клистронный модулятор 413
- Brodzsky, D.*: The Hungarian Invention of the Ram Jet Drive is 50 Years Old — Die ungarische Erfindung des selbstansaugenden Strahltriebwerkes ist 50 Jahre alt — L'invention hongroise d'un moteur à réaction aspirant a 50 ans — *Бродски, Д.*: 50-летие конструирования реактивного двигателя с всасыванием воздуха 395
- Csáki, F.*: Analytical Design of Multivariable Control Systems with Constraints for Deterministic Inputs Applying the Integral of Sum of Errors Squared Criterion — Analytische Synthese von mehrfachvariablen Regelungssystemen mit deterministischen Eingangssignalen auf Grund des Kriteriums des quadratischen Fehlerintegrals — Synthèse analytique des systèmes de régulation multivariables avec contrainte et signaux d'entrée déterministiques, sur la base du critère de l'intégrale de la somme des erreurs quadratiques — *Чаки, Ф.*: Аналитический расчет многомерных систем регулирования с ограничениями в случае детерминированных входных сигналов на основе интегрального критерия суммы квадратических ошибок 403
- Csibi, S.*: On a Queuing Problem in Random Access Communication — Über ein Warteschlangenproblem bei Nachrichtensystemen mit zufälligem Zugang — Un problème de queue en télécommunication avec accès aléatoire — *Чуби, Ш.*: О проблеме очереди в системах связи со случайным доступом..... 373
- Drahoš, I.*: Die Geometrie des theoretischen Eingriffes von mittels eines Kreisringabwälzwerkzeuges erzeugten Zahnflächen — Geometry of Theoretical Mesh Conditions of Tooth Surfaces Generated by Means of a Torus Shaped Tool Surface — La géométrie de l'engrènement théorique des surfaces de dents engendrées par une surface toroïdale — *Драхош, И.*: Геометрия теоретического зацепления в случае поверхностей зубьев, обработанных по кольцевой поверхности.... 101
- Ember, Gy.—Halász, I.*: Some Theoretical Problems of Radioisotope Scanning — Über einige theoretische Fragen der Szintographie — Quelques problèmes théoriques

de la scintigraphie — Эмбер, Д.—Халас, И.: Некоторые теоретические вопросы
сцинтиграфии 385

Kardos, A.: On the Relation of Cutting Factors to Cutting Force in Turning of Aluminium Alloy — Beziehungen zwischen der Schnittkraft und den Zerspannungsfaktoren beim Drehen einer Aluminiumlegierung — Les relations entre la force de coupe et les caractéristiques de coupe au tournage des alliages d'aluminium — Кардош, А.: Зависимость между усилием резания и данными резания при токарной обработке алюминиевых сплавов 73

Kerényi, D.—Újházy, G.: Über die Wahl der Reihenkapazitäten von Stelltransformatorwicklungen aus dem Gesichtspunkt der Stoßspannungsbeanspruchungen — Selection of the Series Capacities of Regulating Transformer Windings from the Point of View of Surge Voltage Stresses — Choix des capacités en série des enroulements des transformateurs de réglage du point de vue des efforts de tensions de choc — Керени, Д.—Уйхазы, Г.: О выборе последовательных емкостей обмоток регулируемых трансформаторов с точки зрения требований в отношении импульсных напряжений 423

Krysko, W. W.—Newburn, J. M.: Investigation of the Lead-Antimony System — Untersuchung des Blei-Antimon Systems — Recherches sur le système plomb-antimoine — Криско, В. В.—Ньюбурн, Й. М.: Исследование системы свинец — сурьма 125

Krysko, W. W.—Fenton, R. G.: The Influence of Temperature and Relative Interfacial Shear Movement Rate on the Shear Strength of High Purity Lead — Der Einfluß der Temperatur und der relativen Gleitflächen-Schubgeschwindigkeit auf die Schubfestigkeit von Reinstblei — L'influence de la température et de la vitesse de cisaillement interfaciale relative sur la résistance au cisaillement du plomb de très haute pureté. — Криско, В. В.—Фентон, Р. Г.: Воздействие температуры и относительной скорости среза между поверхностями на сопротивление среза очень чистого свинца 137

Kovács, K. P.: On the Starting Phenomena of Asynchronous Motors — Über die Anlaufvorgänge von Asynchronmotoren — Sur le processus de démarrage des moteurs asynchrones — Ковач, К. П.: О процессах пуска асинхронных двигателей 453

Lakatos, Gy.—Büó, J.: Investigations of the Current Load of Auxiliary Electrodes Placed at the Sides of the Main Electrode Spirals of Fluorescent Lamps — Untersuchung über die Stromaufnahme der in Leuchtstofflampen verwendeten Hilfselektroden — Recherches sur la consommation électrique des électrodes auxiliaires employées dans les tubes luminescents — Лакатош, Д.—Буто, Я.: Исследование потребления тока вспомогательными электродами, применяемыми в люминесцентных лампах 255

Lenner, D.: Ein transistorisierter Ringzähler mit erhöhter Betriebssicherheit — Transistorized Ring-Counter with Increased Reliability of Operation — Un compteur à sécurité de service accrue — Леннер, Д.: Кольцевой счетчик на транзисторах с повышенной эксплуатационной надежностью 347

Lukács, J.—Bogoly, I.: The Formation of Electrical Fields Nearly Perpendicular to the Direction of Leakage Current in Non-Linear Silicon-Carbide Resistances — Die Entstehung von zur Richtung des Ableitungsstromes nahezu senkrechten Feldern in nichtlinearen Siliziumkarbid-Widerständen — Formation de champs électriques quasi-perpendiculaires au sens du courant de fuite dans les résistances non-linéaires — Лукач, Й.—Богой, И.: Возникновение электрических, приближенно перпендикулярных к направлению тока утечки, в силико-карбидных нелинейных сопротивлениях 241

Nath, G.: A New Method of Designing a Single Stage Axial-Flow Fan for Prescribed Spanwise Circulation — Eine neue Methode für die Berechnung eines einstufigen Axialventilators für vorgeschriebene Zirkulation entlang der Schaufel — Méthode nouvelle pour l'étude d'un ventilateur axial à un étage pour circulation prescrite le long de l'aube — Нат, Г.: Новый метод проектирования одноступенчатого аксиального вентилятора при заданной циркуляции вдоль лопастей 41

Nath, G.: Hypersonic Flow in the Stagnation Region of a Circular Cylinder — Überschallströmung im Staubereich eines Kreiszyllinders — Écoulement supersonique dans la

- région de stagnation d'un cylindre circulaire — *Ham, G.*: Движение потока со сверхзвуковой скоростью в реактивной области некоторого круглого цилиндра 175
- Nath, G.*: The Flow of a Perfect Fluid Through a Single Stage Axial Flow Fan with Prescribed Spanwise Circulation — Die Strömung einer vollkommenen Flüssigkeit durch einen einstufigen Axialventilator mit vorgeschriebener Zirkulation entlang der Schaufel — L'écoulement d'un fluide parfait à travers un ventilateur axial à un étage, avec circulation prescrite le long de l'aube — *Ham, G.*: Движение потока идеального газа через одноступенчатый аксиальный вентилятор при заданной циркуляции вдоль лопастей 181
- Németh, M.—Szép, I. C.*: Etch Figures on Germanium Induced by Surface Contaminants — Einfluß der Oberflächenverunreinigungen auf die Ätzfiguren von Germanium — Figures de corrosion chimique sur le monocristal de Germanium, causées par des impuretés de la surface — *Немет, М.—Сен, И. Ц.*: Фигуры травления на германии, возникающие под действием поверхностных примесей 243
- Póbcza, A.*: Energieübertragung in Mechanismen — Energy Transmission in Mechanisms — Transmission d'énergie dans les mécanismes — *Пооца, А.*: Передача энергии в механизмах 355
- Rónay, Maria*: On Strain Incompatibility and Grain Boundary Damage in Fatigue — Über die Unverträglichkeit der Deformationen und die Schädigung der Korngrenzen bei Ermüdung — Incompatibilité des déformations et dommages aux joints des grains à la fatigue — *Ронаи, М.*: Деформационная несовместимость и повреждение границ зерен при усталости 199
- Smrček, K.—Čejchan, O.—Chvatik, J.*: Beitrag zur Problematik der Entstehung von magnetischen Eigenschaften des α -Fe₂O₃ beim Erhitzen auf mittlere Temperaturen — Contribution to the Problems of the Origin of Magnetic Properties of α -Fe₂O₃ During Heating to Medium Temperatures — Contribution aux problèmes d'origine des propriétés magnétiques α -Fe₂O₃ au cours de la mise aux températures moyennes — *Смрчек, К.—Чейхан, О.—Хватик, Й.*: К проблематике возникновения магнитных свойств α -Fe₂O₃ при нагреве до средней температуры 61
- Шомло, Я.*: Описывающие функции нелинейностей с кусочно-линейной характеристикой — *Somló, J.*: Describing Functions of Non-Linearities with Piecewise Linear Characteristics — Funktionen für die Beschreibung von Nichtlinearitäten mit durch Geradenabschnitte angenäherter Kennlinie — Fonctions décrivant des non-linéarités à caractéristique approchée par des sections droites .. 307
- Tóth, L.*: Bestimmung der beim Gesenkschmieden auftretenden Höchstkraft — Determination of the Maximum Force in Die-Forging — Détermination de la force maximum à l'étampage — *Том, Л.*: Определение максимального усилия, возникающего при ковке в штампах 143
- Vajda, Gy.*: Semi-Automatic Recording of Volt-Microsecond Characteristics — Halbautomatische Ausmessung von Volt-mikrosekunden Kennlinien — Enregistrement semi-automatique des courbes caractéristiques Volt-microseconde — *Вайда, Д.*: Полуавтоматическое определение вольт-микросекундных характеристик 261
- Vajda, Gy.*: Test Method for Determining the Impulse Withstand Strength of Electrical Insulations — Eine Prüfmethode zur Bestimmung der elektrischen Stoßspannungsfestigkeit von Isolationen — Méthode d'examen pour la détermination de la résistance aux tensions de choc des isolations — *Вайда, Д.*: Методика испытания изоляций для определения электрической прочности при ударном напряжении 283
- Vajda, Gy.—Csida, S.*: Effect of Neutral Loosening of a 120 kV Network upon the Overvoltage Protection of Transformers — Der Einfluß der Lockerung des Sternpunkts des 120 kV-Netzes auf den Überspannungsschutz der Transformatoren — L'effet du relâchement du point neutre du réseau de 120 kV sur la protection contre les surtensions des transformateurs — *Вайда, Д.—Чуда, Ш.*: Влияние ослабления нейтрали 120 кВ-ной сети на защиту трансформаторов от перенапряжений 337

<i>Vámos, T.—Gyürki, J.</i> : Some Remarks on the Optimum Setting of Variable Parameter Process-Controllers — Einige Bemerkungen zur optimalen Einstellung der Regler von Prozessen mit veränderlichen Parametern — Quelques remarques sur le réglage optimum des régulateurs de processus à paramètres variables — <i>Вамош, Т.—Дюрки, Й.</i> : Некоторые замечания по оптимальной настройке регуляторов процессов с изменяющимися параметрами	439
---	-----

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

<i>I. Sályi—G. Fáber</i> : Szilárdságtani példatár (Aufgabensammlung aus der Festigkeitslehre) (J. Barta)	239
<i>J. Mika</i> : Metallurgische Analysen (J. Proszjt)	239
<i>A. F. Harvey</i> : Microwave Engineering. (E. Istvánffy).....	461

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 54



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

ACTA TECHN. HUNG.

TO OUR READERS!

From 1966, papers on geophysics and geodetics will be published in a new periodical of the Hungarian Academy of Sciences, the *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Academiae Scientiarum Hungaricae*. Consequently, the *Series Geodaetica et Geophysica* of our periodical ceases publishing.

The *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica* publishes papers, in English, French, German or Russian, besides geodetics and geophysics also on mining subjects.

Editorial office: Budapest V, Nádor u. 7, Hungary.

Subscriptions: Kultúra Trading Company for Books and Newspapers, Budapest I, Fő u. 32, or the foreign agencies of the company.

AN UNSERE LESER!

In der *Acta Technica* werden von 1966 an Abhandlungen über geodätische und geophysikalische Themen nicht mehr veröffentlicht. Aus diesem Grunde wird das Erscheinen der *Series Geodaetica et Geophysica* eingestellt. An ihrer Stelle werden Artikel aus Fachgebieten der Geodäsie, Geophysik und Bergbauwissenschaft in der neuen Zeitschrift der Ungarischen Akademie der Wissenschaften *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica* erscheinen.

Redaktion: Budapest V, Nádor u. 7, Ungarn.

Zu bestellen durch: Außenhandelsunternehmen für Bücher und Zeitschriften *Kultúra*, Budapest I, Fő u. 32, oder bei ihren Auslandsagenturen.

A NOS LECTEURS !

Etant donné qu' à partir de 1966 les *Acta Technica* ne publient plus des travaux du domaine des sciences géodésiques et géophysiques, la *Series Geodaetica et Geophysica* cessera de paraître. Elle se trouvera remplacée par le nouveau périodique de l'Académie Hongroise des Sciences *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica*.

Ce périodique publiera des travaux géodésiques, géophysiques et miniers en langues anglaise, française, allemande et russe.

Rédaction: Budapest V, Nádor u. 7, Hongrie.

Abonnement: Entreprise pour le commerce extérieur des livres et journaux *Kultúra*, Budapest I, Fő u. 32 ou chez les représentants et dépositaires de cette entreprise.

К ЧИТАТЕЛЮ!

Начиная с 1966 года в журнале „Acta Technica“ не будут публиковаться работы по геофизике и геодезии и, таким образом, серия „Series Geodaetica et Geophysica“ прекращается. Вместо упомянутой серии будет издаваться новый журнал Академии наук Венгрии „Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica“ который будет публиковать работы по геодезии, геофизике и горному делу на английском, французском, немецком и русском языках.

Адрес редакции: Budapest V, Nádor u. 7.

Подписку оформляет Внешнеторговое предприятие „Kultúra“ (Budapest I, Fő u. 32) или его зарубежные представительства.

TORSIONAL VIBRATION PROBLEMS AND PRACTICAL SOLUTIONS

A. BALOGH
CAND. OF TECHN. SC.

[Manuscript received April 2, 1962]

For the purpose of calculating the natural frequencies of torsional vibrations, generally the frequency determinant or the frequency equation developed therefrom is used. This latter is an algebraic equation with real roots. In eight preceding studies the method was developed by the author of how to establish a general, and for some essentially practical cases a suitable system, appropriate for finding the algebraic equation for any given number of masses. In this way it is possible to obtain exact — and not only approximative — results. It seemed to be useful to give a short summary of the essential matter of all these previous studies enumerated under the usual heading of references. The reader will find further details and numerical examples in these papers.

I. Introduction

Several methods of calculating the natural frequencies of torsional vibrations need preliminary estimations, judgement and also experience, because all these methods have some uncertainties, therefore the prevailing intention is to simplify the whole operation. Many methods are based on first approximations. For the estimation of the first frequency many kinds of graphs combined with correctional graphs are known. Such uncertainties are present with the known tabulation methods.

All these methods which one usually applied for solving the problem are not exact; and when we can find the solution of how to solve the problem exactly, in the future all these previous calculating methods will be superfluous.

In the following we shall explain first the essentials of the problem and then we will try to solve it exactly.

To this end the frequency determinant that has many interesting features, will be used. In this way we shall be able to find the exact solution of the problem without the necessity to make preliminary estimations.

Our whole procedure will be illustrated by examples, and it will be shown, that no approximations are needed.

The following matter contains seven essential topics of already published studies. More details with numerical examples are to be found in the original studies, which are quoted in the respective chapter.

II. Frequency Determinant and Equation

In general cases of torsional vibrations of a shaft with several rotating masses the following differential equations are obtained:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{f}_1 + c_1(f_1 - f_2) &= 0 ; \\ I_2 \ddot{f}_2 + c_2(f_2 - f_3) - c_1(f_1 - f_2) &= 0 ; \\ &\dots \\ I_n \ddot{f}_n + c_{n-1}(f_n - f_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where $I_1 \dots I_n$ are values of the moment of inertia of the masses rotating around the axis of the shaft, f_1, f_2, \dots, f_n the momentary angles of twist of the masses, $c_1, c_2 \dots c_{n-1}$ the values of shaft stiffness.

The particular solutions of the Eqs (1) are:

$$f_1 = p_1 \cos wt, \quad f_2 = p_2 \cos wt, \dots \quad (2)$$

where p is the amplitude of vibration, w is the angular velocity.

Substituting (2) into Equ. (1), we obtain:

$$\begin{aligned} (I_1 w^2 - c_1)p_1 + c_1 p_2 &= 0 ; \\ c_1 p_1 + (I_2 w^2 - c_1 - c_2)p_2 + c_2 p_3 &= 0 ; \\ &\dots \\ c_{n-1} p_{n-1} + (I_n w^2 - c_{n-1})p_n &= 0 . \end{aligned} \quad (3)$$

Considering the coefficients of the p values [in (3)] the following denotation shall be introduced:

$$u_{ik} = \frac{c_i}{I_k} . \quad (4)$$

The introduction of this denotation implies the following operation: all the rows of the original determinant are divided by the value of the moment of inertia that characterises each member of the respective row. In this way the following determinant is obtained:

$$B_n = 0 = \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1,n} w^2 - u_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Developing the determinant-equation (5) in the usual way we obtain the frequency equation; notably the roots of this algebraic equation serve as basis for the calculation of the natural frequencies.

But this equation is, for practical calculation, especially in the case of a large number of masses rather unsuitable. Therefore, in all methods which have been developed till now, the use of this determinant (5) for calculation was discarded. This determinant is however of the continuous type and is appropriate in many respect for establishing the algebraic equation from which the natural frequencies can be derived.

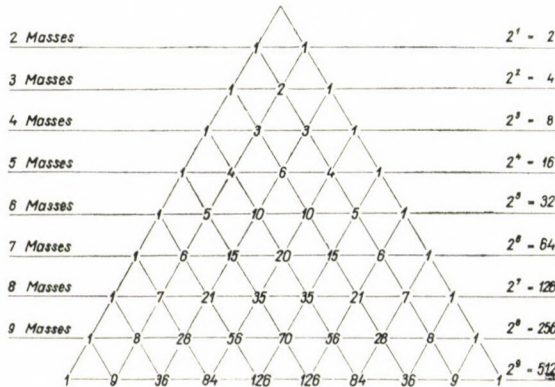


Fig. 1

This determinant can be expressed as follows [1]:

$$B_n = (w^2 - u_{n-1,n-1} - u_{n-1,n}) B_{n-1} - u_{n-2,n-1} \cdot u_{n-1,n-1} \cdot B_{n-2}. \quad (6)$$

As an example for $n = 8$:

$$B_8 = (w^2 - u_{77} - u_{78}) B_7 - u_{67} \cdot u_{77} \cdot B_6,$$

where B denotes the determinant with a subscript index denoting the grade.

In other words the determinant B_8 can be calculated if the determinants B_6 and B_7 are known.

By making use continually of the expression (6) we obtain the number of the members of the frequency equation, developed from the frequency determinant. The results are shown in Table I and in the Pascal-Triangle in Fig. 1 [2].

In Table I the number of the members of the respective frequency equation can be found for the cases characterized by 4 up to 9 masses corresponding to the powers of w .

In Fig. 1 we see how it is possible to find, e.g. the number of the members in the equation for eight masses when that for seven masses is known:

Table I
Synoptic table of the numbers in frequency equations

	9 masses	8 masses	7 masses	6 masses	5 masses	4 masses
w^{16}	$\binom{8}{0} = 1$	—	—	—	—	—
w^{14}	$\binom{8}{1} = 8$	$\binom{7}{0} = 1$	—	—	—	—
w^{12}	$\binom{8}{2} = 28$	$\binom{7}{1} = 7$	$\binom{6}{0} = 1$	—	—	—
w^{10}	$\binom{8}{3} = 56$	$\binom{7}{2} = 21$	$\binom{6}{1} = 6$	$\binom{5}{0} = 1$	—	—
w^8	$\binom{8}{4} = 70$	$\binom{7}{3} = 35$	$\binom{6}{2} = 15$	$\binom{5}{1} = 5$	$\binom{4}{0} = 1$	—
w^6	$\binom{8}{5} = 56$	$\binom{7}{4} = 35$	$\binom{6}{3} = 20$	$\binom{5}{2} = 10$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{3}{0} = 1$
w^4	$\binom{8}{6} = 28$	$\binom{7}{5} = 21$	$\binom{6}{4} = 15$	$\binom{5}{3} = 10$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{3}{1} = 3$
w^2	$\binom{8}{7} = 8$	$\binom{7}{6} = 7$	$\binom{6}{5} = 6$	$\binom{5}{4} = 5$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{3}{2} = 3$
w^0	$\binom{8}{8} = 1$	$\binom{7}{7} = 1$	$\binom{6}{6} = 1$	$\binom{5}{5} = 1$	$\binom{4}{4} = 1$	$\binom{3}{3} = 1$
Number of members	256	128	64	32	16	8

Number of members for 8 masses:

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 1 + 7 + 21 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128;$$

for 7 masses:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64;$$

in other form: $128 = 2 \times 64$.

Using the results in Table I we can obtain the number of members e.g. in the equation for 14 masses as follows:

Number of masses	10	11	12	13	14
Number of members	$2 \times 256 = 512$	$2 \times 512 = 1024$	$2 \times 1024 = 2048$	$2 \times 2048 = 4096$	$2 \times 4096 = 8192$

Of course, equations with so many members are unsuitable for practical purposes. In order to avoid these difficulties several methods were developed; among these, the most known is the method by Tolle—Gümbel—Holtzer.

In the following we shall demonstrate that the original problem can be solved — by using correct denotations in the derivation of the frequency determinant — because we obtain an algebraic equation with real roots, and from these roots we can calculate the natural frequencies instead of estimations by chance.

Developing the original frequency determinant, where the values of stiffness and of the moments of inertia are kept in the original form, without introducing the symbol of u we can introduce, by making use of the addition and the multiplication of the respective values, the new denotation L [3]:

$$c_k c_{k+1} \dots c_{n-1} \frac{I_k + I_{k+1} + \dots + I_n}{I_1 \cdot I_{k+1} \dots I_n} = L_{k,k+1 \dots n}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} w^{10} - (L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45} + L_{56})w^8 + \\ + [L_{123} + L_{234} + L_{345} + L_{456} + L_{12}(L_{34} + L_{45} + L_{56}) + \\ + L_{23}(L_{45} + L_{56}) + L_{34}L_{56}]w^6 - \\ - [L_{1234} + L_{2345} + L_{3456} + L_{123}(L_{45} + L_{56}) + L_{12}(L_{345} + \\ + L_{446} + L_{34}L_{56}) + L_{234}L_{56} + L_{23}L_{456}]w^4 + \\ + (L_{12\dots 5} + L_{23\dots 6} + L_{1234}L_{56} + L_{123}L_{456} + L_{12}L_{3456})w^2 - L_{12\dots 6} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

E.g. for the case of 6 masses, the ultimate Equ. (8) is established on the basis of Table II; in considering the repetitions occurring, and making use of the above denotation L (7) this ultimate expression of frequency (8) can be considerably shortened. In other words, for 6 masses only the following values have to be calculated:

$$\begin{aligned} L_{12}, L_{23}, L_{34}, L_{45}, L_{56}; L_{123}, L_{234}, L_{345}, L_{456}; \\ L_{1234}, L_{2345}, L_{3456}; L_{12\dots 5}, L_{23\dots 6}; L_{12\dots 6}. \end{aligned}$$

Returning to the expression as written in (4) for u , this can be applied in order to find the calculation of the natural frequencies:

Table II
6 masses

w^{10}	w^8	w^6	w^4	w^2	w^0
	$c_1 L_{12}$	$c_1 c_2 L_{123}$	$c_1 c_2 c_3 L_{1234}$	$c_1 c_2 c_3 c_4 L_{12345}$	$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 L_{12345}$
	$c_2 L_{23}$	$c_1 c_3 L_{12} L_{34}$	$c_1 c_2 c_4 L_{123} L_{45}$	$c_1 c_2 c_3 c_5 L_{1234} L_{56}$	
	$c_3 L_{34}$	$c_1 c_4 L_{12} L_{45}$	$c_1 c_2 c_5 L_{123} L_{56}$	$c_1 c_2 c_4 c_5 L_{123} L_{456}$	
	$c_4 L_{45}$	$c_1 c_5 L_{12} L_{56}$	$c_1 c_3 c_4 L_{12} L_{345}$	$c_1 c_3 c_4 c_5 L_{12} L_{3456}$	
	$c_5 L_{56}$	$c_2 c_3 L_{234}$	$c_1 c_3 c_5 L_{12} L_{34} L_{56}$	$c_2 c_3 c_4 c_5 L_{2345}$	
		$c_2 c_4 L_{23} L_{34}$	$c_1 c_4 c_5 L_{12} L_{456}$		
		$c_2 c_5 L_{23} L_{56}$	$c_2 c_3 c_4 L_{2345}$		
		$c_3 c_4 L_{345}$	$c_2 c_3 c_5 L_{234} L_{56}$		
		$c_3 c_5 L_{34} L_{56}$	$c_2 c_4 c_5 L_{23} L_{456}$		
		$c_4 c_5 L_{456}$	$c_3 c_4 c_5 L_{3456}$		

$$u_{ik} = \frac{c_i}{I_k} [1/\text{sec}^2].$$

The advantage in using this formula is obvious because it is kept valid irrespective of whether dimensions are chosen in english or metric units.

In order to illustrate its application the following example of the frequency equation for 5 masses will serve:

$$\begin{aligned} w^8 - (L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45})w^6 + \\ + [L_{123} + L_{234} + L_{345} + L_{12}(L_{34} + L_{45}) + L_{23}L_{45}]w^4 - \\ - (L_{1234} + L_{2345} + L_{123}L_{45} + L_{12}L_{345})w^2 + L_{12\dots 5} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Accordingly all the values of L of Equ. (9) should be changed into u_{ik} which are to be found in Table IV and by using the denotations in Table III, we obtain the equations (10) and (11). With the known values of k and A , the frequency equation can be established [4, 5].

$$\begin{aligned} w^8 - k_{11-5} w^6 + [u_{11} k_{22-5} + u_{12} k_{23-5} + u_{22} k_{33-5} + u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + \\ + u_{34} k_{45}]w^4 - [u_{11} (u_{22} k_{33-5} + u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}) + \\ + u_{12} (u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}) + u_{22} (u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}) + u_{23} u_{34} k_{45}]w^4 + \\ + u_{11} [u_{22} (u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}) + u_{23} u_{34} k_{45}] + u_{12} u_{23} u_{34} k_{45} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w^8 - k_{11-5} w^6 + [u_{11} k_{22-5} + u_{12} k_{234} + A_{22-5}]w^4 - \\ - [u_{11} A_{22-5} + u_{12} A_{23-5} + u_{22} A_{33-5} + u_{23} A_{345}]w^2 + \\ + u_{11} [u_{22} A_{33-5} + u_{23} A_{345}] + u_{12} u_{23} A_{345} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

As can be seen, this equation (11) incorporates the ultimate simplification for the case of 5 masses.

The values of k and A can be obtained from the graphs as shown in Fig. 2; moreover this graph is a modified Pascal-Triangle. Some examples are indicated in these graphs.

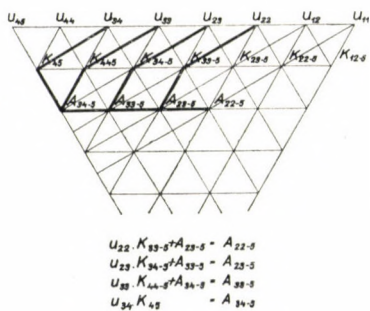


Fig. 2

Table III

Notations

$k_{11-5} =$	$u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45} =$	$u_{11} + k_{12-5}$
$k_{12-5} =$	$u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45} =$	$u_{12} + k_{22-5}$
$k_{22-5} =$	$u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45} =$	$u_{22} k_{23-5}$
$k_{23-5} =$	$u_{23} + u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45} =$	$u_{23} + k_{33-5}$
$k_{33-5} =$	$u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45} =$	$u_{33} k_{345}$
$k_{345} =$	$u_{34} + u_{44} + u_{45} =$	$u_{34} k_{445}$
$k_{445} =$	$u_{44} + u_{45} =$	$u_{44} k_{45}$
$k_{45} =$		u_{45}
$A_{22-5} =$	$u_{22} k_{33-5} + u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45} =$	$u_{22} k_{33-5} + A_{23-5}$
$A_{23-5} =$	$u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45} =$	$u_{23} k_{345} + A_{33-5}$
$A_{33-5} =$	$u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45} =$	$u_{33} k_{445} + A_{345}$
$A_{345} =$	$u_{34} k_{45}$	

In the same way as for 5 masses, this simplification can be extended for any number of masses. In Table V can be seen the frequency equations for the range of 4 ÷ up to 9 masses; and also that the number of capital symbols are always identical with the highest power minus 3.

E.g. for the case of 8 masses the denotations are shown in Table VI and the respective Pascal-Triangle in Fig. 3; some examples are also indicated.

All the expressions denoted with capital letters are established on the same scheme; therefore, on this basis, any type of graphs can be developed

Table IV

$$L_{12} = c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = \frac{c_1}{I_1} + \frac{c_1}{I_2} = u_{11} + u_{12},$$

$$L_{23} = u_{22} + u_{23},$$

$$L_{34} = u_{33} + u_{34},$$

$$L_{45} = u_{44} + u_{45}$$

$$L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45} = u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45} = k_{11-5};$$

$$L_{123} = c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} = \frac{c_1}{I_1} \left(\frac{c_2}{I_2} + \frac{c_2}{I_3} \right) + \frac{c_1}{I_2} \frac{c_2}{I_3} = u_{11} (u_{22} + u_{23}) + u_{12} u_{23},$$

$$L_{234} = u_{22} (u_{33} + u_{34}) + u_{23} u_{34},$$

$$L_{345} = u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} u_{45},$$

$$L_{12} L_{34} = (u_{11} + u_{12}) (u_{33} + u_{34}),$$

$$L_{12} L_{45} = (u_{11} + u_{12}) (u_{44} + u_{45}),$$

$$L_{23} L_{45} = (u_{22} + u_{23}) (u_{44} + u_{45})$$

$$\begin{aligned} L_{123} + L_{234} + L_{345} + L_{12} (L_{34} + L_{45}) + L_{23} L_{45} &= u_{11} (u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45}) + \\ &+ u_{12} (u_{23} + u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45}) + u_{22} (u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45}) + u_{23} (u_{34} + u_{44} + u_{45}) + \\ &+ u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} u_{45} = u_{11} k_{22-5} + u_{12} k_{23-5} + u_{22} k_{33-5} + u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}; \end{aligned}$$

$$L_{1234} = c_1 c_2 c_3 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} = \frac{c_1}{I_1} \frac{c_2}{I_2} \left(\frac{c_3}{I_3} + \frac{c_3}{I_4} \right) + \frac{c_1}{I_1} \frac{c_2 c_3}{I_3 I_4} + \frac{c_1 c_2 c_3}{I_2 I_3 I_4} = u_{11} [u_{22} (u_{33} + u_{34}) + u_{23} u_{34}] + u_{12} u_{23} u_{34},$$

$$L_{2345} = u_{22} [u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} u_{45}] + u_{23} u_{34} u_{45},$$

$$L_{123} L_{45} = [u_{11} (u_{22} + u_{23}) + u_{12} u_{23}] (u_{44} + u_{45}),$$

$$L_{12} L_{345} = [u_{11} + u_{12}] \cdot [u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} u_{45}]$$

$$L_{1234} + L_{2345} + L_{123} L_{45} + L_{12} L_{345} =$$

$$\begin{aligned} &= u_{11} [u_{22} (u_{33} + u_{34} + u_{44} + u_{45}) + u_{23} (u_{34} + u_{44} + u_{45}) + u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} u_{45}] + \\ &+ u_{12} [u_{23} (u_{34} + u_{44} + u_{45}) + u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} u_{45}] + \end{aligned}$$

$$+ u_{22} [u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} u_{45}] + u_{23} u_{34} u_{45} =$$

$$= u_{11} [u_{22} k_{33-5} + u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}] + u_{12} [u_{23} k_{345} + u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}] +$$

$$+ u_{22} [u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}] + u_{23} u_{34} k_{45};$$

$$L_{12345} = c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} = u_{11} [u_{22} (u_{33} (u_{44} + u_{45}) + u_{34} + u_{45}) +$$

$$+ u_{23} u_{34} u_{45}] + u_{12} u_{23} u_{34} u_{45} =$$

$$= u_{11} [u_{22} (u_{33} k_{445} + u_{34} k_{45}) + u_{23} u_{34} k_{45}] + u_{12} u_{23} u_{34} k_{45}$$

for n masses. This is shown in a modified Pascal-Triangle according to Fig. 4. The use of this graph is illustrated by the following examples:

First example: $A_{23-n} = u_{23} k_{34-n} + A_{33-n}$.

For 5 masses is $n = 5$: $u_{23} k_{34-5} + A_{33-5} = A_{23-5}$;

for 8 masses is $n = 8$: $u_{23} k_{34-8} + A_{33-8} = A_{23-8}$.

Another example: $u_{44} A_{55-n} + B_{45-n} = B_{44-n}$.

For $n = 8$ we have:

$$u_{44} A_{55-8} + B_{45-8} = B_{44-8}.$$

Table V

4 masses

$$w^6 - k_{11-4} w^4 + (u_{11} k_{22-4} + u_{12} k_{234} + u_{22} k_{334} + u_{23} k_{34}) w^2 - [u_{11} (u_{22} k_{334} + u_{23} k_{34}) + u_{12} u_{23} k_{34}] = 0.$$

5 masses

$$w^8 - k_{11-5} w^6 + (u_{11} k_{22-5} + u_{12} k_{23-5} + A_{22-5}) w^4 - (u_{11} A_{22-5} + u_{12} A_{23-5} + u_{22} A_{33-5} + u_{23} A_{345}) w^2 + [u_{11} (u_{22} A_{33-5} + u_{23} A_{345}) + u_{12} u_{23} A_{345}] = 0.$$

6 masses

$$w^{10} - k_{11-6} w^8 + (u_{11} k_{22-6} + u_{12} k_{23-6}) w^6 - (u_{11} A_{22-6} + u_{12} A_{23-6} + B_{22-6}) w^4 + (u_{11} B_{22-6} + u_{12} B_{23-6} + u_{22} B_{33-6} + u_{23} B_{34-6}) w^2 - [u_{11} (u_{22} B_{33-6} + u_{23} B_{34-6}) + u_{12} u_{23} B_{34-6}] = 0.$$

7 masses

$$w^{12} - k_{11-6} w^{10} + (u_{11} k_{22-6} + u_{12} k_{23-6} + A_{22-6}) w^8 - (u_{11} A_{22-6} + u_{12} A_{23-6} + B_{22-6}) w^6 - (u_{11} B_{22-6} + u_{12} B_{23-6} + C_{22-6}) w^4 + (u_{11} C_{22-6} + u_{12} C_{23-6} + u_{22} C_{33-6} + u_{23} C_{34-6}) w^2 - [u_{11} (u_{22} C_{33-6} + u_{23} C_{34-6}) + u_{12} u_{23} C_{34-6}] = 0.$$

8 masses

$$w^{14} - k_{11-8} w^{12} + (u_{11} k_{22-8} + u_{12} k_{23-8} + A_{22-8}) w^{10} - (u_{11} A_{22-8} + u_{12} A_{23-8} + B_{22-8}) w^8 + (u_{11} B_{22-8} + u_{12} B_{23-8} + C_{22-8}) w^6 - (u_{11} C_{22-8} + u_{12} C_{23-8} + D_{22-8}) w^4 + (u_{11} D_{22-8} + u_{12} D_{23-8} + u_{22} D_{33-8} + u_{23} D_{34-8}) w^2 - [u_{11} (u_{22} D_{33-8} + u_{23} D_{34-8}) + u_{12} u_{23} D_{34-8}] = 0.$$

9 masses

$$w^{16} - k_{11-9} w^{14} + (u_{11} k_{22-9} + u_{12} k_{23-9} + A_{22-9}) w^{12} - (u_{11} A_{22-9} + u_{12} A_{23-9} + B_{22-9}) w^{10} + (u_{11} B_{22-9} + u_{12} B_{23-9} + C_{22-9}) w^8 - (u_{11} C_{22-9} + u_{12} C_{23-9} + D_{22-9}) w^6 + (u_{11} D_{22-9} + u_{12} E_{22-9}) w^4 - (u_{11} E_{22-9} + u_{12} E_{23-9} + u_{22} E_{23-9} + u_{23} E_{34-9}) w^2 + [u_{11} (u_{22} E_{33-9} + u_{23} E_{34-9}) + u_{12} u_{23} E_{34-9}] = 0.$$

III. Simplified Method of Calculating the Natural Frequencies by Means of the Frequency Determinant

A most interesting practical application is found for multi-cylinder i.e. engines, because a large range of values of moment of inertia and of the stiffness respectively are equal; this correlation helps us to find a more simplified method for the calculation of the natural frequencies. (Besides there are a few values which are different, e.g. the values referring to the flywheel.)

In this case, the u values take the form:

$$u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = \dots$$

Table VI

The denotations refer to the case of 8 masses

$$\begin{aligned}
 k_{78} &= u_{78} \\
 k_{778} &= k_{78} + u_{77} \\
 k_{678} &= k_{778} + u_{67} \\
 k_{77-8} &= k_{678} + u_{66} \\
 k_{56-8} &= k_{66-8} + u_{56} \\
 k_{55-8} &= k_{56-8} + u_{55} \\
 k_{45-8} &= k_{55-8} + u_{45} \\
 k_{44-8} &= k_{45-8} + u_{44} \\
 k_{34-8} &= k_{44-8} + u_{34} \\
 k_{33-8} &= k_{34-8} + u_{33} \\
 k_{23-8} &= k_{33-8} + u_{23} \\
 k_{22-8} &= k_{23-8} + u_{22} \\
 k_{12-8} &= k_{22-8} + u_{12} \\
 k_{11-8} &= k_{12-8} + u_{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{678} &= k_{78} u_{67} \\
 A_{77-8} &= A_{678} + k_{778} u_{77} \\
 A_{56-8} &= A_{66-8} + k_{678} u_{57} \\
 A_{55-8} &= A_{55-8} + k_{66-8} u_{55} \\
 A_{45-8} &= A_{55-8} + k_{56-8} u_{45} \\
 A_{44-8} &= A_{45-8} + k_{55-8} u_{44} \\
 A_{34-8} &= A_{44-8} + k_{45-8} u_{34} \\
 A_{33-8} &= A_{34-8} + k_{44-8} u_{33} \\
 A_{23-8} &= A_{33-8} + k_{34-8} u_{23} \\
 A_{22-8} &= A_{23-8} + k_{33-8} u_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{56-8} &= A_{678} u_{56} \\
 B_{55-8} &= B_{56-8} + A_{66-8} u_{55} \\
 B_{45-8} &= B_{55-8} + A_{56-8} u_{45} \\
 B_{44-8} &= B_{55-8} + A_{55-8} u_{44} \\
 B_{34-8} &= B_{44-8} + A_{45-8} u_{34} \\
 B_{33-8} &= B_{34-8} + A_{44-8} u_{33} \\
 B_{23-8} &= B_{33-8} + A_{34-8} u_{23} \\
 B_{22-8} &= B_{23-8} + A_{33-8} u_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{45-8} &= B_{56-8} u_{45} \\
 C_{44-8} &= C_{45-8} + B_{55-8} u_{44} \\
 C_{34-8} &= C_{44-8} + B_{45-8} u_{34} \\
 C_{33-8} &= C_{34-8} + B_{44-8} u_{33} \\
 C_{23-8} &= C_{33-8} + B_{34-8} u_{23} \\
 C_{22-8} &= C_{23-8} + B_{33-8} u_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{34-8} &= C_{45-8} u_{34} \\
 D_{33-8} &= D_{34-8} + C_{44-8} u_{33} \\
 D_{23-8} &= D_{33-8} + C_{34-8} u_{23} \\
 D_{22-8} &= D_{23-8} + C_{33-8} u_{22}
 \end{aligned}$$

For this special case in Table VII the modified frequency equations are shown for 4 up to 9 masses and also for the case of 12 masses. In order to facilitate the calculation, the numerical values of the factors by which u_{11} and u_{12} are to be multiplied in order to obtain all the factors of the powers of w according to the frequency equations.

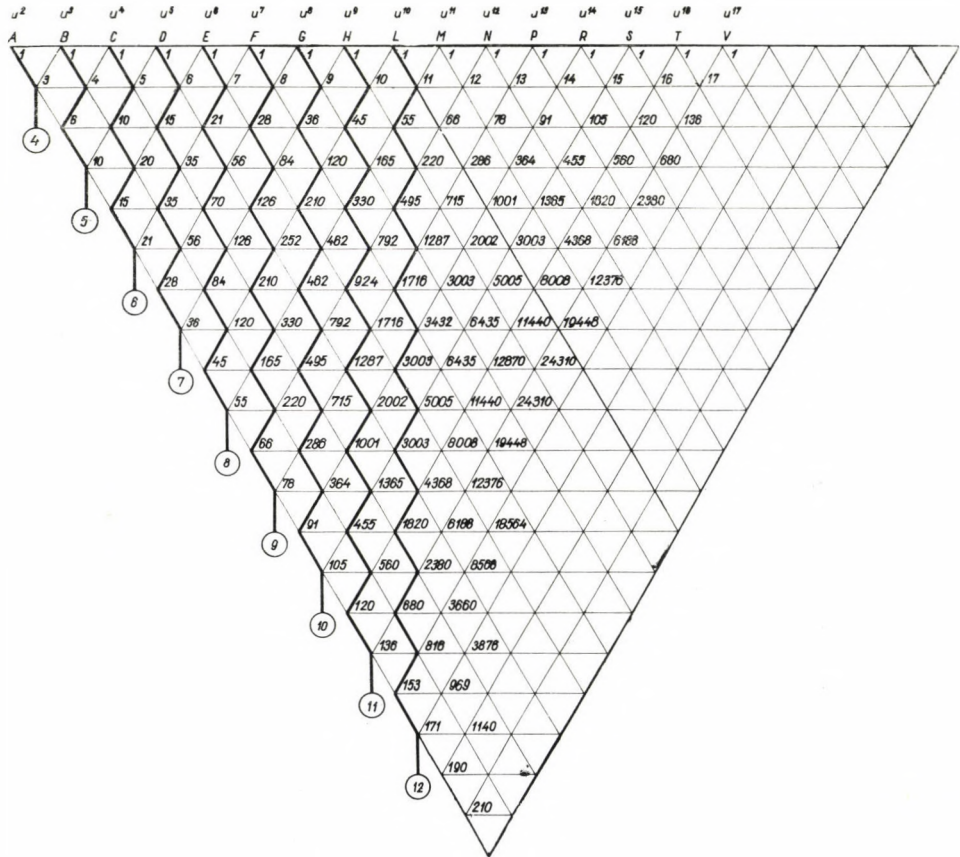


Fig. 5

The way to find the coefficients of the powers of w in the quoted equations is shown in Table VIII for 5, 7, 8, 9 and 12 as binomial factors. In this way it is possible to develop the frequency equation for any number of masses.

It is worth while to remark that all the coefficients can be obtained by using the Pascal-Triangle as it is shown in Fig. 5; according to this graph, the vertical lines help us to find all the coefficients for calculation purposes.

Table VII

7 masses

$$w^{12} - (u_{11} + u_{12} + 10u)w^{10} + u(10u_{11} + 9u_{12} + 36u)w^8 - u^2(36u_{11} + 28u_{12} + 56u)w^6 + u^3(56u_{11} + 35u_{12} + 35u)w^4 - u^4(35u_{11} + 15u_{12} + 6u) + u^5(6u_{11} + u_{12}) = 0$$

u_{11}	1	10	36	56	35	6
u_{12}	1	9	28	35	15	1
u	10	36	56	35	6	

8 masses

$$w^{14} - (u_{11} + u_{12} + 12u)w^{12} + u(12u_{11} + 11u_{12} + 55u)w^{10} - u^2(55u_{11} + 45u_{12} + 120u)w^8 + u^3(120u_{11} + 84u_{12} + 126u)w^6 - u^4(126u_{11} + 70u_{12} + 56u)w^4 + u^5(56u_{11} + 21u_{12} + 7u)w^2 - u^6(7u_{11} + u_{12}) = 0$$

u_{11}	1	12	55	120	126	56	7
u_{12}	1	11	45	84	70	21	1
u	12	55	120	126	56	7	

9 masses

$$w^{16} - (u_{11} + u_{12} + 14u)w^{14} + u(14u_{11} + 13u_{12} + 78u)w^{12} - u^2(78u_{11} + 66u_{12} + 220u)w^{10} + u^3(220u_{11} + 165u_{12} + 330u)w^8 - u^4(330u_{11} + 210u_{12} + 252u)w^6 + u^5(252u_{11} + 126u_{11} + 84u)w^4 - u^6(84u_{11} + 28u_{12} + 8u)w^2 + u^7(8u_{11} + u_{12}) = 0$$

u_{11}	1	14	78	220	330	252	84	8
u_{12}	1	13	66	165	210	126	28	1
u	14	78	220	330	252	84	8	

12 masses

$$w^{22} - (u_{11} + u_{12} + 20u)w^{20} + u(20u_{11} + 19u_{12} + 171u)w^{18} - u^2(171u_{11} + 153u_{12} + 816u)w^{16} + u^3(816u_{11} + 680u_{12} + 2380u)w^{14} - u^4(2380u_{11} + 1820u_{12} + 4368u)w^{12} + u^5(4368u_{11} + 3003u_{12} + 5005u)w^{10} - u^6(5005u_{11} + 3003u_{12} + 3432u)w^8 + u^7(3432u_{11} + 1716u_{12} + 1287u)w^6 - u^8(1287u_{11} + 495u_{12} + 220u)w^4 + u^9(220u_{11} + 55u_{12} + 11u)w^2 - u^{10}(11u_{11} + u_{12}) = 0$$

u_{11}	1	20	171	816	2380	4368	5005	3432	1287	220	11
u_{12}	1	19	153	680	1820	3003	3003	1716	495	55	1
u	20	171	816	2380	4368	5005	3432	1287	220	11	

Table VIII

5 masses

$$\begin{aligned}
 w^8 - \left[u_{11} \binom{8-1}{0} + u_{12} \binom{8-2}{0} + u \binom{8-2}{1} \right] w^6 + u \left[u_{11} \binom{8-2}{1} + \right. \\
 \left. + u_{12} \binom{8-3}{1} + u \binom{8-3}{2} \right] w^4 - u^2 \left[u_{11} \binom{8-3}{2} + u_{12} \binom{8-4}{2} + u \binom{8-4}{3} \right] w^2 + \\
 \left. + u^3 \left[u_{11} \binom{8-4}{3} + u_{12} \binom{8-4}{4} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

7 masses

$$\begin{aligned}
 w^{12} - \left[\binom{12-1}{0} u_{11} + \binom{12-2}{0} u_{12} + \binom{12-2}{1} u \right] w^{10} + \\
 + \left[\binom{12-2}{1} u_{11} + \binom{12-3}{1} u_{12} + \binom{12-3}{2} u \right] w^8 - \\
 - u^2 \left[\binom{12-3}{2} u_{11} + \binom{12-4}{2} u_{12} + \binom{12-4}{3} u \right] w^6 + \\
 + u^3 \left[\binom{12-4}{3} u_{11} + \binom{12-5}{3} u_{12} + \binom{12-5}{4} u \right] w^4 - \\
 - u^4 \left[\binom{12-5}{4} u_{11} + \binom{12-6}{4} u_{12} + \binom{12-6}{5} u \right] w^2 + \\
 + u^5 \left[\binom{12-6}{5} u_{11} + \binom{12-6}{6} u \right] = 0.
 \end{aligned}$$

9 masses

$$\begin{aligned}
 w^{16} - \left[\binom{16-1}{0} u_{11} + \binom{16-2}{0} u_{12} + \binom{16-2}{1} u \right] w^{14} + \\
 + u \left[\binom{16-2}{1} u_{11} + \binom{16-3}{1} u_{12} + \binom{16-3}{2} u \right] w^{12} - \\
 - u^2 \left[\binom{16-3}{2} u_{11} + \binom{16-4}{2} u_{12} + \binom{16-4}{3} u \right] w^{10} + \\
 + u^3 \left[\binom{16-4}{3} u_{11} + \binom{16-5}{3} u_{12} + \binom{16-5}{4} u \right] w^8 - \\
 - u^4 \left[\binom{16-5}{4} u_{11} + \binom{16-6}{4} u_{12} + \binom{16-6}{5} u \right] w^6 + \\
 + u^5 \left[\binom{16-6}{5} u_{11} + \binom{16-7}{5} u_{12} + \binom{16-7}{6} u \right] w^4 - \\
 - u^6 \left[\binom{16-7}{6} u_{11} + \binom{16-8}{6} u_{12} + \binom{16-8}{7} u \right] w^2 + u^7 \left[\binom{16-8}{7} u_{11} + \binom{16-8}{8} u_{12} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

8 masses

$$\begin{aligned}
 w^{14} - \left[u_{11} \binom{14-1}{0} + u_{12} \binom{14-2}{0} + u \binom{14-2}{1} \right] w^{12} + \\
 + u \left[u_{11} \binom{14-2}{1} + u_{12} \binom{14-3}{1} + u \binom{14-3}{2} \right] w^{10} - \\
 - u^2 \left[u_{11} \binom{14-3}{2} + u_{12} \binom{14-4}{2} + \binom{14-4}{3} u \right] w^8 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u^3 \left[u_{11} \binom{14}{3} + u_{12} \binom{14}{3} + u \binom{14}{4} \right] w^6 - \\
& - u^4 \left[u_{11} \binom{14}{4} + u_{12} \binom{14}{4} + u \binom{14}{5} \right] w^4 + \\
& + u^5 \left[u_{11} \binom{14}{5} + u_{12} \binom{14}{5} + u \binom{14}{6} \right] w^2 - \\
& - u^6 \left[u_{11} \binom{14}{6} + u_{11} \binom{14}{7} \right] = 0.
\end{aligned}$$

12 masses

$$\begin{aligned}
w^{22} & - \left[\binom{22}{0} u_{11} + \binom{22}{0} u_{12} + \binom{22}{1} u \right] w^{20} + \\
& + u \left[\binom{22}{1} u_{11} + \binom{22}{1} u_{12} + \binom{22}{2} u \right] w^{18} - \\
& - u^2 \left[\binom{22}{2} u_{11} + \binom{22}{2} u_{12} + \binom{22}{3} u \right] w^{16} + \\
& + u^3 \left[\binom{22}{3} u_{11} + \binom{22}{3} u_{12} + \binom{22}{4} u \right] w^{14} - \\
& - u^4 \left[\binom{22}{4} u_{11} + \binom{22}{4} u_{12} + \binom{22}{5} u \right] w^{12} + \\
& + u^5 \left[\binom{22}{5} u_{11} + \binom{22}{5} u_{12} + \binom{22}{6} u \right] w^{10} - \\
& - u^6 \left[\binom{22}{6} u_{11} + \binom{22}{6} u_{12} + \binom{22}{7} u \right] w^8 + \\
& + u^7 \left[\binom{22}{7} u_{11} + \binom{22}{7} u_{12} + \binom{22}{8} u \right] w^6 - \\
& - u^8 \left[\binom{22}{8} u_{11} + \binom{22}{8} u_{12} + \binom{22}{9} u \right] w^4 + \\
& - u^9 \left[\binom{22}{9} u_{11} + \binom{22}{9} u_{12} + \binom{22}{10} u \right] w^2 - \\
& + u^{10} \left[\binom{22}{10} u_{12} + \binom{22}{11} u_{12} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Taking into consideration the case when two independent masses are situated on the same end of a multicylinder i.e. engine, we find for the rotating masses belonging to the cylinders:

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} \dots$$

All the frequency equations for this case are shown in Table IX, i.e. for 4, 5, 6 and 8 masses; as can be seen, the regularity of the factors of the equations is obvious and serves to establish the frequency equations for any number of masses in a more simple way. This table contains only binomial factors.

Table IX

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = \dots$$

4 masses

$$\begin{aligned} w^6 - & \left[\binom{6-1}{0} u_{11} + \binom{6-2}{0} u_{12} + \binom{6-3}{0} u_{22} + \binom{6-4}{0} u_{23} + \binom{6-4}{1} u \right] w^4 + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{6-3}{0} u_{22} + \binom{6-4}{0} u_{23} + \binom{6-4}{1} u \right] + u_{12} \left[\binom{6-4}{0} u_{23} + \binom{6-4}{1} u \right] + \right. \\ & \quad \left. + \binom{6-4}{1} u_{22} u + \binom{6-4}{2} u_{23} u \right\} w^2 - \\ & - \left\{ u_{11} \left[\binom{6-4}{1} u_{22} + \binom{6-4}{2} u_{23} \right] u + \binom{6-4}{2} u_{12} u_{23} u \right\} = 0. \end{aligned}$$

5 masses

$$\begin{aligned} w^8 - & \left[\binom{8-1}{0} u_{11} + \binom{8-2}{0} u_{12} + \binom{8-3}{0} u_{22} + \binom{8-4}{0} u_{23} + \binom{8-4}{1} u \right] w^6 + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{8-3}{0} u_{22} + \binom{8-4}{0} u_{23} + \binom{8-4}{1} u \right] + u_{12} \left[\binom{8-4}{0} u_{23} + \binom{8-4}{1} u \right] + \right. \\ & \quad \left. + u \left[\binom{8-4}{1} u_{22} + \binom{8-5}{1} u_{23} + \binom{8-5}{2} u \right] \right\} w^4 - \\ & - \left\{ u_{11} \left[\binom{8-4}{1} u_{22} + \binom{8-5}{1} u_{23} + \binom{8-5}{2} u \right] u + u_{12} \left[\binom{8-5}{1} u_{23} + \binom{8-5}{2} u \right] u + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{8-5}{1} u_{22} + \binom{8-6}{2} u_{23} \right] u^2 \right\} w^2 + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{8-5}{2} u_{22} + \binom{8-6}{2} u_{23} \right] + \binom{8-6}{2} u_{12} u_{23} \right\} u^2 = 0. \end{aligned}$$

$$u = u_{33} = u_{34} = \dots$$

6 masses

$$\begin{aligned} w^{10} - & \left[\binom{10-1}{0} u_{11} + \binom{10-2}{0} u_{12} + \binom{10-3}{0} u_{22} + \binom{10-4}{0} u_{23} + \binom{10-4}{1} u \right] w^8 + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{10-3}{0} u_{22} + \binom{10-4}{0} u_{23} + \binom{10-4}{1} u \right] + u_{12} \left[\binom{10-4}{0} u_{23} + \binom{10-4}{1} u \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{10-4}{1} u_{22} + \binom{10-5}{1} u_{23} + \binom{10-5}{2} u \right] u \right\} w^6 - \\ & - \left\{ u_{11} \left[\binom{10-4}{1} u_{22} + \binom{10-5}{1} u_{23} + \binom{10-5}{2} u \right] u + u_{12} \left[\binom{10-5}{1} u_{23} + \binom{10-5}{2} u \right] u + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{10-5}{2} u_{22} + \binom{10-6}{2} u_{23} + \binom{10-6}{3} u \right] u^2 \right\} w^4 + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{10-5}{2} u_{22} + \binom{10-6}{2} u_{23} + \binom{10-6}{3} u \right] u^2 + u_{12} \left[\binom{10-6}{2} u_{23} + \binom{10-6}{3} u \right] u^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{10-6}{3} u_{22} + \binom{10-6}{4} u \right] u^3 \right\} w^2 - \\ & - u_{11} \left\{ \left[\binom{10-6}{3} u_{22} + \binom{10-6}{4} u_{23} \right] + \binom{10-6}{4} u_{12} u_{23} \right\} u^3 = 0. \end{aligned}$$

$$u = u_{33} = u_{34} = \dots$$

$$\begin{aligned} & w^{14} - \binom{14}{0} u_{11} + \binom{14}{0} u_{12} + \binom{14}{0} u_{22} + \binom{14}{0} u_{23} + \binom{14}{1} u \Big] w^{12} + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{14}{0} u_{22} + \binom{14}{0} u_{23} + \binom{14}{1} u \right] + u_{12} \left[\binom{14}{0} u_{23} + \binom{14}{1} u \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{14}{1} u_{22} + \binom{14}{1} u_{23} + \binom{14}{2} u \right] u \right\} w^{10} - \\ & - \left\{ u_{11} \left[\binom{14}{1} u_{22} + \binom{14}{1} u_{23} + \binom{14}{2} u \right] u + u_{12} \left[\binom{14}{1} u_{23} + \binom{14}{2} u \right] u + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{14}{2} u_{22} + \binom{14}{2} u_{23} + \binom{14}{3} u \right] u^2 \right\} w^8 + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{14}{2} u_{22} + \binom{14}{2} u_{23} + \binom{14}{3} u \right] u^2 + u_{12} \left[\binom{14}{2} u_{23} + \binom{14}{3} u \right] u^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{14}{3} u_{22} + \binom{14}{3} u_{23} + \binom{14}{4} u \right] u^3 \right\} w^6 - \\ & - \left\{ u_{11} \left[\binom{14}{3} u_{22} + \binom{14}{3} u_{23} + \binom{14}{4} u \right] u^3 + u_{12} \left[\binom{14}{3} u_{23} + \binom{14}{4} u \right] u^3 + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{14}{4} u_{22} + \binom{14}{4} u_{23} + \binom{14}{5} u \right] u^4 \right\} w^4 + \\ & + \left\{ u_{11} \left[\binom{14}{4} u_{22} + \binom{14}{4} u_{23} + \binom{14}{5} u \right] u^4 + u_{12} \left[\binom{14}{4} u_{23} + \binom{14}{5} u \right] u^4 + \right. \\ & \quad \left. + \left[\binom{14}{5} u_{22} + \binom{14}{5} u_{23} \right] u^5 \right\} w^2 - \\ & - \left\{ u_{11} \left[\binom{14}{5} u_{22} + \binom{14}{5} u_{23} \right] u^5 + \binom{14}{5} u_{12} u_{23} u^5 \right\} = 0. \end{aligned}$$

IV. Reduction of the Number of Masses by Using the Frequency Equation [6]

The reduction of the number of masses, in other words the moments of inertia is made for the purpose of obtaining a system of only two masses; the reduced form is [6]:

$$w^2 = c_1 \left[\frac{1}{I_2'(w^2)} + \frac{1}{I_1} \right],$$

where I_2' is a function of w^2 and I_1 is the inertia moment of the independent mass. This expression is valid for two masses but can be extended for systems of more masses.

First we shall develop this method or reduction for a system of three masses.

For three masses the frequency equation is:

$$w^4 - (u_{11} + u_{12} + 2u) w^2 + (2u_{11} + u_{12})u = 0.$$

In this case: $u_{22} = u_{23} = u$.

Written in another form:

$$u_{11}(-w^2 + 2u) + u_{12}(-w^2 + u) - w^2(-w^2 + 2u) = 0$$

or

$$(-w^2 + 2u)(u_{11} - w^2) + u_{12}(u - w^2) = 0,$$

and

$$w^2 = u_{12} \frac{u - w^2}{2u - w^2} + u_{11} = u_{12} \frac{1 - \frac{w^2}{u}}{2 - \frac{w^2}{u}} + u_{11}.$$

With the denotation:

$$q = \frac{w^2}{u}$$

we obtain:

$$w^2 = u_{12} \frac{1 - q}{2 - q} + u_{11} = u_{12} \frac{1}{\left(\frac{2 - q}{1 - q}\right)} + u_{11}.$$

Substituting the values of u_{11} and u_{12} :

$$w^2 = c_1 \left[\frac{1}{\frac{2 - q}{1 - q} I_2} + \frac{1}{I_1} \right],$$

and with the denotation

$$I'_2 = \left(\frac{2 - q}{1 - q} \right) I_2$$

we obtain:

$$w_2 = c_1 \left(\frac{1}{I'_2} + \frac{1}{I_1} \right).$$

As can be seen, we have reduced the system of three masses to another one of two.

Table X contains the expression of $I_2^{(n)}$ for 4 up to 9 masses always with one independent mass; as is to be seen w^2 is a function of I_2 .

Table XI contains the general formula for the reduction of the number of masses, for the case when the number of the independent masses is only one. In this table the use of the general formula is shown for 8 and 10 masses. We should like to recall that $n = i + 2$.

Table X

4 masses

$$I_2^{(2)} = I \left(1 + \frac{q-2}{-q^2+3q-1} \right).$$

5 masses

$$I_2^{(3)} = I \left(1 + \frac{q^2-4q+3}{-q^3+5q^2-6q+1} \right).$$

6 masses

$$I_2^{(4)} = I \left(1 + \frac{q^3-6q^2+10q-4}{-q^4+7q^3-15q^2+10q-1} \right).$$

7 masses

$$I_2^{(5)} = I \left(\frac{q^4-8q^3+12q^2-20q+5}{1-q^5+9q^4-28q^3+35q^2-15q+1} \right).$$

8 masses

$$I_2^{(6)} = I \left(1 + \frac{q^5-10q^4+36q^3-56q^2+35q-6}{-q^6+11q^5-45q^4+84q^3-70q^2+21q-1} \right).$$

9 masses

$$I_2^{(7)} = I \left(1 + \frac{q^6-12q^5+55q^4-120q^3+126q^2-56q+7}{-q^7+13q^6-66q^5+165q^4-210q^3+126q^2-28q+1} \right).$$

Table XI

$$I_2^{(i)} = I \left[1 + \frac{\binom{2i-1}{0}q^{i-1} - \binom{2i-2}{1}q^{i-2} + \binom{2i-3}{2}q^{i-3} - \dots + (1)^{i-1} \binom{i}{i-1}}{-\binom{2i}{0}q^i + \binom{2i-1}{1}q^{i-1} - \binom{2i-2}{2}q^{i-2} + \dots + (i)^{i-1} \binom{2i}{1}} \right].$$

8 masses and $i = 6$

$$\begin{aligned} I &= I_2^{(6)} \left[1 + \frac{\binom{11}{0}q^5 - \binom{10}{1}q^4 + \binom{9}{2}q^3 - \binom{8}{3}q^2 + \binom{7}{4}q - \binom{6}{5}}{-\binom{12}{0}q^6 + \binom{11}{1}q^5 - \binom{10}{2}q^4 + \binom{9}{3}q^3 - \binom{8}{4}q^2 + \binom{7}{5}q - \binom{6}{6}} \right] = \\ &= I \left[1 + \frac{q^5 - 10q^4 + 36q^3 - 56q^2 + 35q - 6}{-q^6 + 11q^5 - 45q^4 + 84q^3 - 70q^2 + 21q + 1} \right]. \end{aligned}$$

10 masses and $i = 8$

$$\begin{aligned} I_2^{(8)} &= I \left[1 + \frac{\binom{15}{0}q^7 - \binom{14}{1}q^6 + \binom{13}{2}q^5 - \binom{12}{3}q^4 + \binom{11}{4}q^3 - \binom{10}{5}q^2 + \binom{9}{6}q - \binom{8}{7}}{-\binom{16}{0}q^8 + \binom{15}{1}q^7 - \binom{14}{2}q^6 + \binom{13}{3}q^5 - \binom{12}{4}q^4 + \binom{11}{5}q^3 - \binom{10}{6}q^2 + \binom{9}{7}q - \binom{8}{8}} \right] = \\ &= I \left[1 + \frac{q^7 - 14q^6 + 78q^5 - 220q^4 + 330q^3 - 252q^2 + 84q - 8}{-q^8 + 15q^7 - 91q^6 + 286q^5 - 495q^4 + 462q^3 - 210q^2 + 36q - 1} \right]. \end{aligned}$$

The results can be read off also from Fig. 6, this being essentially the Pascal-Triangle. The straight lines, marked by I_2 and with an additional letter n , refer to the numerators; again those marked with an additional letter d refer to the denominators. Along the lines the ciphers are the numerical values of the coefficients. The coordinated exponents of q are noted at the peaks of the crossing lines.

The next step is to deal with the case when not one but two independent masses (having the moment of inertia I_1 and I_2) are present at the same end of the main shaft; notably, the moment of inertia of the rotating masses all being equal for each cylinder, is denoted by I . In this connection the expressions of w^2 are contained in Table XII, for the cases of 4, 5 and 6 masses.

Table XII

4 masses

$$w^2 = c_1 \left[\frac{1}{I_2 + \frac{I \frac{2-q}{1-q}}{c_2 \frac{I \frac{2-q}{1-q}}{1-q}}} + \frac{1}{I_1} \right] = c_1 \left[\frac{1}{I_2 + \frac{I_2^{(1)}}{1 - \frac{w^2}{c_2} I_2^{(1)}}} + \frac{1}{I_1} \right].$$

5 masses

$$w^2 = c_1 \left[\frac{1}{I_2 + \frac{I \left(1 + \frac{q-2}{-q^2+3q-1} \right)}{1 - \frac{w^2}{c_2} I \left(1 + \frac{q-2}{-q^2+3q-1} \right)}} + \frac{1}{I_1} \right] =$$

$$= c_1 \left[\frac{1}{I_2 + \frac{I_2^{(2)}}{1 - \frac{w^2}{c_2} I_2^{(2)}}} + \frac{1}{I_1} \right].$$

6 masses

$$w^2 = c_1 \left[\frac{1}{I_2 + \frac{I \left(1 + \frac{3-4q+q^2}{-q^3+5q^2-6q+1} \right)}{1 - \frac{w^2}{c_2} I \left(1 + \frac{3-4q+q^2}{-q^3+5q^2-6q+1} \right)}} + \frac{1}{I_1} \right] =$$

$$= c_1 \left[\frac{1}{I_2 + \frac{I_2^{(3)}}{1 - \frac{w^2}{c_2} I_2^{(3)}}} + \frac{1}{I_1} \right].$$

Notably, in the obtained formulae we succeeded in establishing the expressions that have already been developed for the case of only one independent mass; as can be seen in the formulae in Table XII. In these expressions for w^2 , a clear regularity is manifested in such a manner that any wanted formula can be written down for any number of masses surpassing 6.

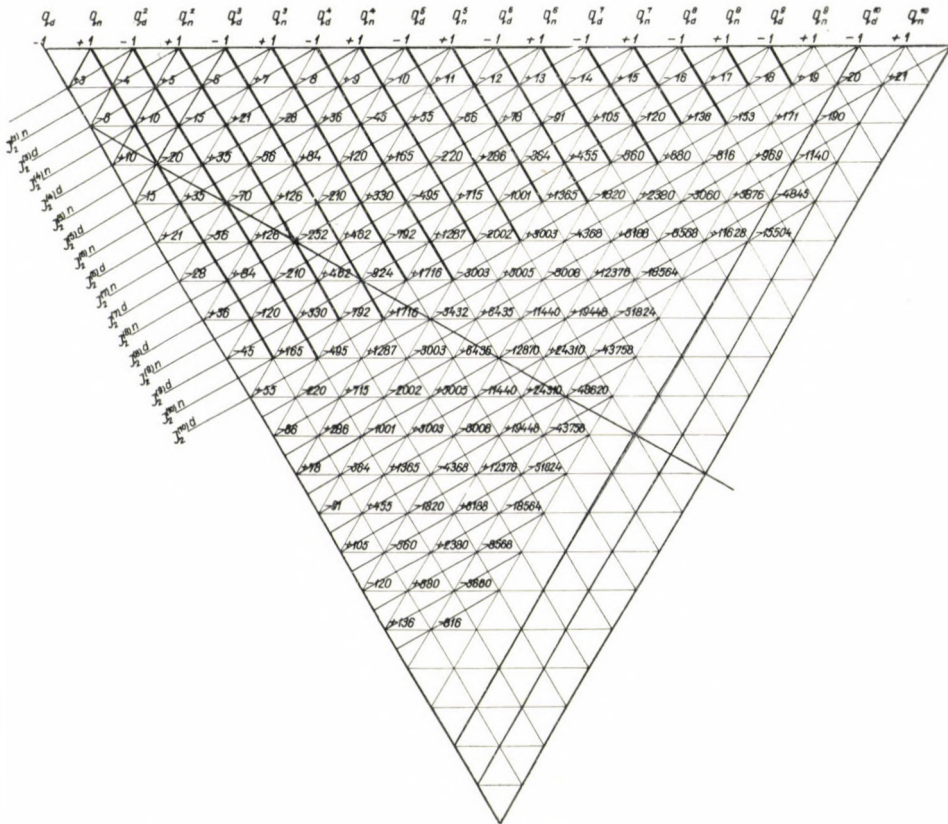


Fig. 6

V. Some Special Forms of the Frequency Equation for Torsional Vibrations [7, 8]

The case of multi-cylinder i.e. engines are to be dealt with where independent masses are situated on both the forward and the rear end; notably the cylinders have equal moments of inertia and equal values of stiffness.

In order to facilitate the course of explanation the following designation seems to be convenient:

e.g.: $2(8m)1$

is a system with a total of 8 masses, of which 2 independent masses are situated at one end, and one independent mass is situated at the other end.

In this symbol the middle member ($n m$) stands for denoting the total number of masses, with the letter m being the abbreviation of "mass". The number of the independent masses — being a part of the total — is denoted by i (at the one end) and by k (at the other end). Consequently, this symbol runs as follows:

$$i (n m) k .$$

Making use of this symbol an example of the case 1 (8m) 1 is elaborated in Table XIII.

As we have shown in the precedings, the use of the frequency determinant viz. of the frequency equation is rather cumbersome, because the number of members is high. By introducing new denotations we obtained a simplified equation and we have shown its application to systems with independent masses on only one end of the engine.

For practical purposes we have to deal with the case when independent masses are placed on both ends; further, it is essential to find the possibility to promptly establish the frequency equation in an easy manner.

The following explanation and the figures refer to the usual arrangement when at one end of the engine there is only a single independent mass, and at the other end there are 1, 2 or 3 independent masses. In order to find the coefficients, a Pascal-Triangle was drawn according to the special Fig. 7. By using this triangle, the frequency equation can be promptly established. To make this triangle understandable first two new symbols were introduced namely, f_1 and f_2 . Both are functions of w^2 , and by using them, the final result for n masses goes as follows:

$$- w f_1(w^2) + u_{n-1,n} f_2(w^2) + u_{n,n} \cdot f_1(w^2) = 0 .$$

It should be stated that the triangle in Fig. 7 is equally suitable for the case when 1, 2 or 3 independent masses are arranged only at one end of the engine, as indicated by the letter symbol. This case will be dealt with later on and its explication will be followed up by a further simplification of the method of establishing the equation.

1. Cases of Engines Having Independent Masses at Both Ends of the Crankshaft

Here we shall analyze some generally realized cases:

- a) 1 (6m) 1 in four cylinder engines;
- b) 1 (8m) 1 in six cylinder engines; in both cases the engine is characterized by having one independent mass at each end (Table XIII).

Table XIII

1 (m8) 1

8 masses

$$\begin{aligned}
 u_{11} + u_{12} + 10u &= K_{112} & u_{11} + u_{12} + 9u &= V_{112} \\
 (10u_{11} + 9u_{12} + 36u)u &= U_{10} & (9u_{11} + 8u_{12} + 28u)u &= V_9 \\
 (36u_{11} + 28u_{12} + 56u)u^2 &= U_{36} & (28u_{11} + 21u_{12} + 35u)u^2 &= V_{28} \\
 (56u_{11} + 35u_{12} + 35u)u^3 &= U_{56} & (35u_{11} + 20u_{12} + 15u)u^3 &= V_{35} \\
 (35u_{11} + 15u_{12} + 6u) &= U_{35} & (15u_{11} + 5u_{12} + u)u^4 &= V_{15} \\
 (6u_{11} + u_{12})u^5 &= U_6
 \end{aligned}$$

$$f_1(w^2) = w^{14} - K_{112} w^{12} + U_{10} w^{10} - U_{36} w^8 + U_{56} w^6 - U_{35} w^4 + U_6 w^2;$$

$$f_2(w^2) = -w^{12} + V_{112} - V_9 w^8 + V_{28} w^6 - \bar{V}_{35} w^4 + V_{15} w^2 - u_{11} u^5;$$

$$\begin{aligned}
 f_1(w^2) &= -w^{12} + K_{112} w^{10} - U_{10} w^8 + U_{36} w^6 - U_{56} w^4 + U_{35} w^2 - U_6 \\
 -w^2 f_1(w^2) + u_{77} f_2(w^2) + u_{78} f_1(w^2) &= 0.
 \end{aligned}$$

c) 2 (8m) 1 in five cylinder engines having one independent mass at one end of the engine, and two masses at the other end (Table XIV).

d) 3 (12m) 1 in eight cylinder engines having one independent mass at one end of the engine and three masses at the other end (Table XV).

1a) To begin with, the first explicative analysis refers to the case 1 (6m) 1 in order to show how the triangle according to Fig. 7 serves the purpose of establishing the frequency equation.

The u values are arranged in three groups, as follows:

u_{11}, u_{12} for the independent mass at the one end;

$u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45}$ for the six equal masses of the engine;

u_{55}, u_{56} for the independent masses at the other end of the engine.

Notably, the number of the equal values is 6. Consequently, in the expression u_6 , the coefficient of the first member equals 6; for the next member, the coefficient is equal to the first minus one, i.e. 5. For the 3rd member, the coefficient is taken from Fig. 7 (in this case, it makes 10). Of course, the same rule applies to U_5 ; namely, the first coefficient is 5, the second equals $(5 - 1) = 4$; further, the 3rd is taken from Fig. 7, in this case it equals 6.

The next step is to find the way of how to form the expression of $f_1(w^2)$ and $f_2(w^2)$, by using Fig. 7.

According to the rubric

1 (6m) 1
f_1

in the triangle, we find the following values:

$$10, 6, 4, 1.$$

By applying these values we obtain:

$$U_6 = (6u_{11} + 5u_{12} + 10u)u ,$$

$$U_{10} = (10u_{11} + 6u_{12} + 4u)u^2,$$

$$U_4 = (4u_{11} + u_{12})u^3 ,$$

and so the final result is:

$$f_1(w^2) = w^{10} - (u_{11} + u_{12} + 6u)w^8 + U_6 w^4 - U_{10} w_4 - U_4 w^2 .$$

The next step is to form the expression of $f_2(w^2)$; to this end, we find according to the rubric

$1(6m)1$ f_2

in Fig. 7 the following values (8)

$$6, 3, 1 .$$

These values help us to form the following formulae:

$$V_5 = (5u_{11} + 4u_{12} + 6u)u ,$$

$$V_6 = (6u_{11} + 3u_{12} + u)u^2$$

from which we obtain:

$$f_2(w^2) = w^8 - (u_{11} + u_{12} + 5u)w^6 + V_5 w^4 - V_6 w^2 - u_{11} u^3,$$

and as final expression we have:

$$-w^2 f_1(w^2) + u_{56} f_2(w^2) + u_{66} f_1(w^2) = 0 .$$

Members having the same power are summarized; in this way, as has been proved, Fig. 7 serves to establish the frequency equation.



1b) Taking into consideration the case of an engine characterized by 1(8m)1 (i.e. a six cylinder engine) we now refer to the Table XIII.

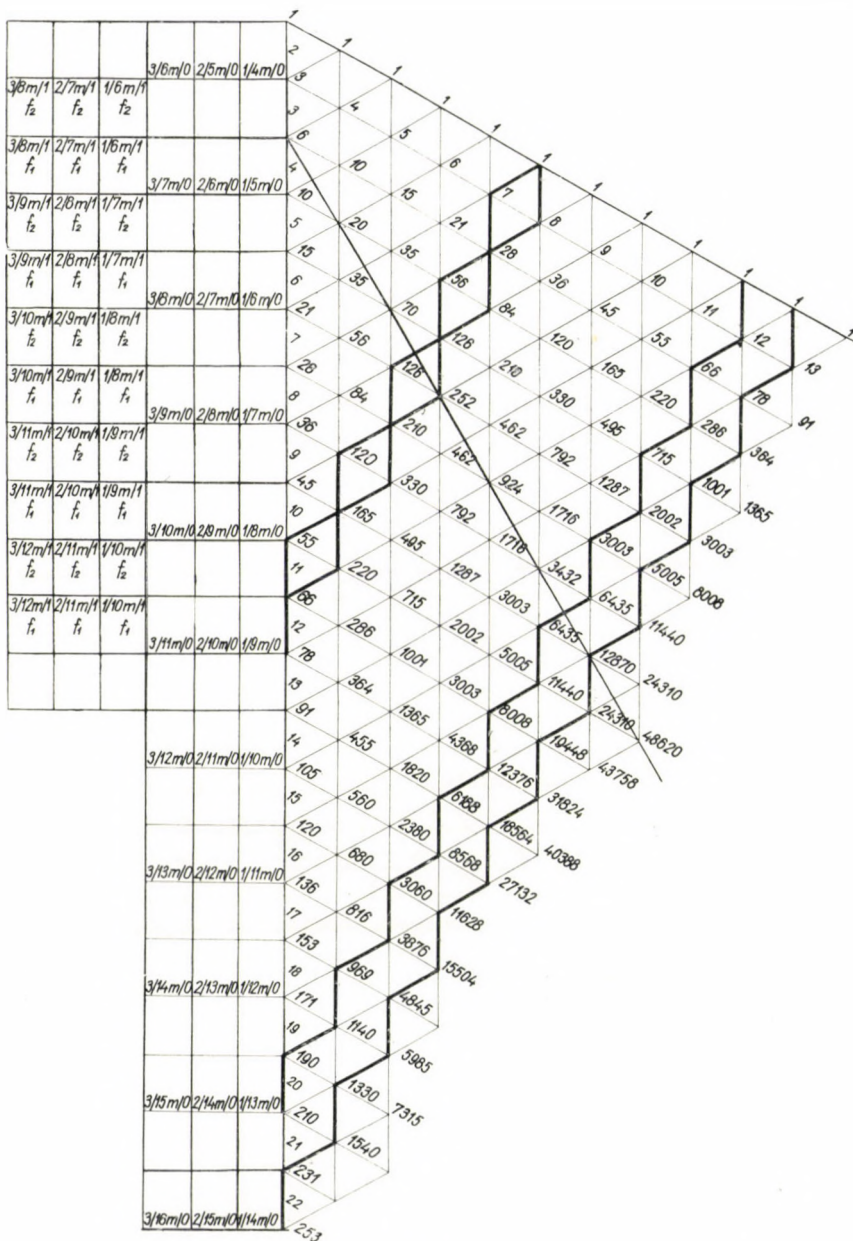


Fig. 7

As before, the u values are classed into three groups: u_{11}, u_{12} are to be understood for the independent mass at the one end of the engine's crankshaft; $u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67}$ refer to the ten equal masses of the engine; u_{77}, u_{78} refer to the independent mass at the other end of the engine's crankshaft.

The number of the equal values (group second) is 10. Consequently, this applies to the first member in the expression of U_{10} . In the same way as was shown in the example for $1(6m)1$, in the expression of U_9 the analogous figure equals $(10 - 1) = 9$.

Now, when establishing the formulae for $f_1(w^2)$ and $f_2(w^2)$, we find, in Figure 7, the following values:

according to the rubric

$$\begin{array}{c} 1(6m)1 \\ f_1 \end{array}$$

the figures are 36, 28, 25, 25, 15, 6, 1;

and according to the rubric

$$\begin{array}{c} 1(8m)1 \\ f_2 \end{array}$$

the figures are 28, 21, 35, 20, 15, 5, 1.

By using these figures we can establish the U and V values for $f_1(w^2)$ and $f_2(w^2)$. And these formulae serve to form the resulting equation, the solution of which serves to obtain the roots. Of course, for the final expression the members having the same power in the formulae of $f_1(w^2)$ and $f_2(w^2)$ shall be summarized.

1c) By analyzing the case of the five cylinder engine characterized by $2(8m)1$, we refer to Table XIV. The values of u , forming three groups, are the following: $u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{23}$ for the 2 independent masses at one end of the engine's crankshaft; $u = u_{33} + u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67}$, being the figures for the 8 equal masses, u_{77}, u_{78} for the independent mass at the other end of the engine. The number of equal masses is 8, and this applies to the first member in the expression of u_8 . Again, in the first member of the expression for u_7 , the corresponding figure is $(8 - 1) = 7$.

In order to establish the formula for $f_1(w^2)$, the values are to be found in the rubric

$$\begin{array}{c} 2(8m)1 \\ f_1 \end{array}$$

Table XIV

2 (8m) 1

8 masses

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 8u &= K_{11-3}, \\ u_{12} + u_{22} + u_{23} + 8u &= K_{123}, \\ u_{22} + u_{23} + 8u &= K_{223}, \\ u_{23} + 8u &= K_{23}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8u_{22} + 7u_{23} + 21u)u &= U_8, & (7u_{23} + 21u)u &= U_7, \\ (21u_{22} + 15u_{23} + 20u)u^2 &= U_{21}, & (15u_{23} + 20u)u^2 &= \bar{U}_{15}, \\ (20u_{22} + 10u_{23} + 5u)u^3 &= U_{20}, & (10u_{23} + 5u)u^3 &= U_5; \\ (5u_{22} + u_{23})u^4 &= U_5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 7u &= H_{11-3} = K_{11-3} - u, \\ u_{12} + u_{22} + u_{23} + 7u &= H_{123} = K_{12-3} - u, \\ u_{22} + u_{23} + 7u &= H_{223} = K_{223} - u, \\ u_{23} + 7u &= H_{23} = K_{23} - u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7u_{22} + 6u_{23} + 15u)u &= V_7, & (6u_{23} + 15u)u &= V_6, \\ (15u_{22} + 210u_{23} + 10u)u^2 &= V_{15}, & (210u_{23} + 10u)u^2 &= \bar{V}_{20}, \\ 10u_{23} + 4u_{23} + u)u^3 &= V_{10}, & (4u_{23} + u)u^3 &= V_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{14} - K_{113} w^{12} + (u_{11} K_{223} + u_{12} K_{23} + U_8)w^{10} - (u_{11} U_8 + u_{12} U_7 + U_{21})w^8 + \\ + (u_{11} U_{21} + u_{12} U_{15} + U_{20})w^6 - (u_{11} U_{20} + u_{12} U_{10} + U_5)w^4 + (u_{11} U_5 + u_{12} u_{23} u)u^4 w^2 \\ - w^{12} + H_{11-3} w^{10} - (u_{11} H_{223} + u_{12} H_{23} + V_7)w^8 + (u_{11} V_7 + u_{12} V_6 + V_{15})w^6 - \\ - (u_{11} V_{15} + u_{12} V_{20} + V_{10})w^4 + (u_{11} V_{10} + u_{12} V_4 + u_{22} u^4)w^2 - u_{11} u_{22} u^4 \\ - w^{12} + K_{11-3} w^{10} - (u_{11} K_{223} + u_{12} K_{23} + U_8)w^8 + (u_{11} U_8 + u_{12} U_7 + U_{21})w^6 - \\ - (u_{11} U_{21} + u_{12} U_{15} + U_{20})w^4 + (u_{11} \bar{U}_{20} + u_{12} U_{10} + U_5)w^2 - (u_{11} U_5 + u_{12} u_{23} u^4) = \\ = -w^2 f_1(w^2) + U_{77} f_2(w^2) + U_{78} f_1(w^2) = 0 \end{aligned}$$

in Fig. 7, and they are the following:

$$21, 15, 20, 10, 5, 1.$$

As for the formula of f_2 , we find according to the rubric

$$2(8m) 1$$

$$f_2$$

the values:

$$15, 10, 4, 1.$$

Of course, the final equation is found, when in the formulae of f_1 and f_2 the members having the same power exponent, are summarized.

As can be observed, the detailed examination of the examples quoted above clearly showed the advantages of the triangle in Fig. 7. Since all the coefficients are to be found in the ready series of values, the wanted algebraic equation can be promptly established.

Id) Here follows the explanation of a most interesting case, namely referring to the engine characterized by 3 (12m) 1. Of course, this symbol indicates an 8 cylinder engine having 3 independent masses at one end of the crankshaft, and 1 independent mass at the other end. The three groups are:

$u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{23}, u_{33}, u_{34}$ referring to the three independent masses at one end.

$u = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67} = u_{77} = u_{78} = u_{88} = u_{89} = u_{99} =$
 $= u_{9,10} = u_{10,10} = u_{10,11}$ referring to the equal masses (14 equal values).

$u_{11,11}, u_{11,12}$ referring to the one independent mass at the other end.

The number of the equal masses (14) applies to the first member in the formula of U_{14} . Diminished by 1, i.e. 13, applies to the first member in the formula of U_{13} . In order to establish the equations for $f_1(w^2)$ and $f_2(w^2)$, the values are to be found in Fig. 7, according to the rubric

$$\boxed{\begin{array}{c} 3(12m)1 \\ f_1 \end{array}} \quad \text{and} \quad \boxed{\begin{array}{c} 3(12m)1 \\ f_2 \end{array}}$$

respectively. There we find the following values:

(for f_1): 78, 66, 220, 165, 330, 210, 252, 126, 84, 28, 8, 1;

(and for f_2): 66, 55, 165, 120, 210, 126, 126, 56, 28, 7, 1.

After forming the formulae for the U values as before, and establishing the equations for $f_1(w^2)$ and $f_2(w^2)$, the final result is:

$$-w^2 f_1(w^2) + u_{11,11} f_2(w^2) + u_{11,12} f_1(w^2) = 0.$$

Of course, in order to solve the equation, members having the same power should be summarized according to a series of diminishing exponent values.

By a further examination of Table XV, as far as the function $f_1(w^2)$ is concerned, we find items that appear repeatedly; these are:

Table XV
3 (12m) 1

12 masses

For $f_1(w^2)$

$$\begin{aligned}
 U_{14} &= (14u_{33} + 13u_{34} + 78u) & U_{13} &= (13u_{34} + 78u)u \\
 U_{78} &= (78u_{33} + 66u_{34} + 220u)u^2 & U_{66} &= (66u_{34} + 220u)u^2 \\
 U_{229} &= (220u_{33} + 165u_{34} + 330u)u^3 & U_{165} &= (165u_{34} + 330u)u^3 \\
 U_{339} &= (330u_{33} + 210u_{34} + 252u)u^4 & U_{210} &= (210u_{34} + 252u)u^4 \\
 U_{252} &= (252u_{33} + 126u_{34} + 84u)u^5 & U_{126} &= (126u_{34} + 84u)u^5 \\
 U_{84} &= (84u_{33} + 28u_{34} + 8u)u^6 & U_{28} &= (28u_{34} + 8u)u^6 \\
 U_8 &= (8u_{33} + u_{34})u^7
 \end{aligned}$$

$$k_{34} = u_{34} + 14u, \quad k_{334} = u_{33} + k_{34}, \quad k_{234} = u_{23} + k_{334}, \quad k_{22-4} = u_{22} + k_{234} \\
 k_{12-4} = u_{12} + k_{22-4}, \quad k_{11-4} = u_{11} + k_{12-4};$$

$$\begin{aligned}
 f_1(w^2) &= w^{22} - k_{11-4}w^{20} + (u_{11}k_{22-4} + u_{12}k_{234} + u_{22}k_{334} + u_{23}k_{34} + U_{14})w^{18} - \\
 &- (u_{11}(u_{22}k_{334} + u_{23}k_{34} + U_{14}) + u_{12}(u_{23}k_{34} + U_{14}) + u_{22}U_{14} + u_{23}U_{13} + U_{78})w^{16} + \\
 &+ [u_{11}(u_{22}U_{14} + u_{23}U_{13} + U_{78}) + u_{12}(u_{23}U_{13} + U_{78}) + u_{22}U_{78} + u_{23}U_{66} + U_{220}]w^{14} + \\
 &+ [u_{11}(u_{22}U_{78} + u_{23}U_{66} + U_{220}) + u_{12}(u_{23}U_{66} + U_{220}) + u_{22}U_{220} + u_{23}U_{165} + U_{330}]w^{12} - \\
 &- [u_{11}(u_{22}U_{220} + u_{23}U_{165} + U_{330}) + u_{12}(u_{23}U_{165} + U_{330}) + u_{22}U_{330} + u_{23}U_{210} + U_{252}]w^{10} + \\
 &+ [u_{11}(u_{22}U_{330} + u_{23}U_{210} + U_{252}) + u_{12}(u_{23}U_{210} + U_{252}) + u_{22}U_{252} + u_{23}U_{120} + U_{84}]w^8 - \\
 &- [u_{11}(u_{22}U_{252} + U_{23}U_{126} + U_{84}) + u_{12}(u_{23}U_{126} + U_{84}) + u_{22}U_{84} + u_{23}U_{28} + U_8]w^6 + \\
 &+ [u_{11}(u_{22}U_{84} + u_{23}U_{28} + U_8) + u_{12}(u_{23}U_{28} + U_8) + u_{22}U_8 + u_{23}u_{34}u^7]w^4 - \\
 &- [u_{11}(u_{22}U_8 + u_{23}u_{34}u^7) + u_{12}u_{23}u_{34}u^7] - w^2.
 \end{aligned}$$

For $f_2(w^2)$

$$\begin{aligned}
 U_{13} &= (13u_{33} + 12u_{34} + 66u) & U_{12} &= (12u_{34} + 66u)u \\
 U_{66} &= (66u_{33} + 55u_{34} + 165u)u^2 & U_{55} &= (55u_{34} + 165u)u^2 \\
 U_{145} &= (165u_{33} + 126u_{34} + 210u)u^3 & U_{126} &= (126u_{34} + 210u)u^3 \\
 U_{210} &= (210u_{33} + 126u_{34} + 126u)u^4 & \bar{U}_{126} &= (126u_{34} + 126u)u^4 \\
 U_{126} &= (126u_{33} + 56u_{34} + 28u)u^5 & U_{56} &= (56u_{34} + 28u)u^5 \\
 U_{28} &= (28u_{33} + 7u_{34} + u)u^6 & U_7 &= (7u_{34} + u)u^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{34} + 13u &= k_{34} - u, \quad u_{33} + u_{34} + 13u = k_{334} - u, \quad u_{23} + u_{33} + u_{34} + 13u = k_{234} - u \\
 u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 13u &= k_{22-4} - u, \quad u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 13u = k_{12-4} - u \\
 u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 13u &= k_{11-4} - u
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(w^2) &= w^{20} - (k_{11-4} - u)w^{18} + \\
 &+ [u_{11}(k_{22-4} - u) + u_{12}(k_{234} - u) + u_{22}(k_{334} - u) + u_{23}(k_{34} - u) + U_{13}]w^{16} - \\
 &- u_{11}[u_{22}(k_{334} - u) + u_{23}(k_{34} - u) + U_{13}] + u_{12}[u_{23}(k_{34} - u) + U_{13}] + \\
 &+ u_{22}U_{13} + u_{23}U_{12} + U_{66}]w^{14} + [u_{11}(u_{22}U_{13} + u_{23}U_{12} + U_{66}) + u_{12}(u_{23}U_{12} + U_{66}) + \\
 &+ u_{22}U_{66} + u_{23}U_{55} + U_{165}]w^{12} - \\
 &- [u_{11}(u_{22}U_{66} + u_{23}U_{55} + U_{165}) + u_{12}(u_{23}U_{55} + U_{165}) + u_{22}U_{165} + u_{23}U_{120} + U_{210}]w^{10} + \\
 &+ [u_{11}(u_{22}U_{165} + u_{23}U_{120} + U_{210}) + u_{12}(u_{23}U_{120} + U_{210}) + u_{22}U_{210} + u_{23}U_{126} + U_{126}]w^8 - \\
 &- [u_{11}(u_{22}U_{210} + u_{23}\bar{U}_{126} + U_{126}) + u_{12}(u_{23}\bar{U}_{126} + U_{126}) + u_{22}U_{126} + u_{23}U_{56} + U_{28}]w^6 + \\
 &+ [u_{11}(u_{22}U_{126} + u_{23}U_{56} + U_{28}) + u_{12}(u_{23}U_{56} + U_{28}) + u_{22}U_{28} + u_{23}U_7 + u_{33}u^7]w^4 - \\
 &- [u_{11}(u_{22}U_{28} + u_{23}U_7 + u_{33}u^7) + u_{12}(u_{23}U_7 + u_{33}u^7) + u_{22}u_{33}u^7]w^2 + \\
 &+ u_{11}u_{22}u_{33}u^7.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_{22} k_{334} + u_{23} k_{34} + U_{14}, \\
& u_{22} U_{14} + u_{23} U_{13} + U_{78}, \\
& u_{22} U_{78} + u_{23} U_{66} + U_{220}, \\
& u_{22} U_{220} + u_{23} U_{165} + U_{330}, \\
& u_{22} U_{330} + u_{33} U_{210} + U_{252}, \\
& u_{22} U_{252} + u_{23} U_{126} + U_{84}, \\
& u_{22} U_{84} + u_{23} U_{28} + U_8, \\
& u_{22} U_8 + u_{23} u_{24} u^7.
\end{aligned}$$

Making reasonable use of these repetitions, an additional simplification of the equation is possible.

The same applies to the expression of $f_2(w^2)$.

2. Cases of engines having independent masses only at one end of the crankshaft

In the following a special use of Fig. 7 will be dealt with, referring to cases where at one end of the engine's crankshaft no masses are present.

The cases forming the object of our examinations are the following:

- a) 1 (7m) 0 a six cylinder engine having one independent mass at the loaded end (Table XVI);
- b) 2 (7m) 0 a five cylinder engine having 2 independent masses at the loaded end (Table XVII);
- c) 3 (7m) 0 a four cylinder engine having 3 independent masses at the loaded end (Table XVIII);
- d) 1 (8m) 0 a seven cylinder engine having one independent mass at the loaded end (Table XIX);
- e) 2 (8m) 0 a six cylinder engine having 2 independent masses at the loaded end (Table XX);
- f) 3 (8m) 0 a five cylinder engine having 3 independent masses at the loaded end (Table XXI).

2a) Referring to Table XVI, the following values of u are equal (viz. for the case 1 (7m) 0): $u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67}$; the number of these values amounts to 10, and this is the coefficient of the first member in the equation. The coefficient of the next member equals $(10 - 1) = 9$. According to the rubric $\boxed{1(7m)0}$ in Fig. 7, the coefficients of the 3^{rd} , and of all the other members following this are:

$$36, 28, 56, 35, 35, 15, 6, 1.$$

Table XVI

1 (7m) 0

7 masses

$$u = u_{22} = u_{23} = \dots = u_{67}$$

$$u_{11} + u_{12} + 10u = K_{112};$$

$$(10u_{11} + 9u_{12} + 36u)u = U_{10},$$

$$(36u_{11} + 28u_{12} + 56u)u^2 = U_{36},$$

$$(56u_{11} + 35u_{12} + 35u)u^3 = U_{56},$$

$$(35u_{11} + 15u_{12} + 5u)u^4 = U_{35},$$

$$(6u_{11} + u_{12})u^5 = U_6;$$

$$w^{12} - K_{112}w^{10} + U_{10}w^8 - U_{36}w^6 + U_{56}w^4 - U_{35}w^2 + U_6 = 0.$$

Table XVII

2 (7m) 0

7 masses

$$u = u_{33} = u_{34} = \dots = u_{67}$$

$$u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 8u = K_{11-3},$$

$$u_{12} + u_{22} + u_{23} + 8u = K_{123},$$

$$u_{22} + u_{23} + 8u = K_{223},$$

$$u_{23} + 8u = K_{233};$$

$$(8u_{22} + 7u_{23} + 21u)u = U_8,$$

$$(7u_{23} + 21u)u = U_6,$$

$$(21u_{22} + 15u_{23} + 20u)u^2 = U_{21},$$

$$(15u_{23} + 20u)u^2 = U_{15},$$

$$(20u_{22} + 10u_{23} + 5u)u^3 = U_{20},$$

$$(10u_{23} + 5u)u^3 = U_{10};$$

$$(5u_{22} + u_{23})u^4 = U_5,$$

$$w^{12} - K_{11-3}w^{10} + (u_{11}K_{223} + u_{12}K_{223} + U_8)w^8 - (u_{11}U_8 + u_{12}U_7 + U_{21})w^6 + (u_{11}U_{21} + u_{12}U_{15} + U_{20})w^4 - (u_{11}U_{20} + u_{12}U_{10} + U_5)w^2 + u_{11}U_5 + u_{12}u_{23}u^4 = 0.$$

Using these coefficients, the expressions of the values U can be established.

2b) In the same way, the equal values for the case 2 (7m) 0 according to *Table XVII* are the following:

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67}.$$

The number of the equal values amounts to 8, and consequently 8 is the coefficient of the first member in the equation. The next member will have a coefficient obtained by subtracting 1 from 8, i.e. 7. And as far as the coefficients for the expression of the U values are concerned, they are, according to Fig. 7, namely to the rubric $\boxed{2(7m)0}$ the following:

$$21, 15, 20, 10, 5, 1.$$

Table XVIII

3 (7m) 0

7 masses

$$u = u_{44} = \dots u_{67}$$

$$u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 6u = K_{11-4} = u_{11} + K_{12-4},$$

$$u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 6u = K_{12-4} = u_{12} + K_{23-4},$$

$$u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 6u = K_{22-4} = u_{22} + K_{234},$$

$$u_{23} + u_{33} + u_{34} + 6u = K_{234} = u_{23} + K_{334},$$

$$u_{33} + u_{34} + 6u = K_{334} = u_{33} + K_{34},$$

$$u_{34} + 6u = K_{34};$$

$$(6u_{33} + u_{34} + 10u)u = U_6,$$

$$(5u_{34} + 10u)u = U_5,$$

$$(10u_{33} + (u_{34} + 4u))u^2 = U_{10},$$

$$(6u_{34} + 4u)u^2 = \bar{U}_6,$$

$$(4u_{33} + u_{34})u^3 = U_4;$$

$$\begin{aligned} & w^{12} - K_{11-4} w^{10} + (u_{11} K_{22-4} + u_{12} K_{234} + u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_6) w^8 - \\ & - [u_{11} (u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_6) + u_{12} (u_{33} K_{34} + U_6) + u_{22} U_6 + u_{23} U_5 + U_{10}] w^6 + \\ & + [u_{11} (u_{22} U_6 + u_{23} U_5 + U_{10}) + u_{12} (u_{23} U_6 + U_{10}) + u_{22} U_{10} + u_{23} \bar{U}_6 + U_4] w^4 - \\ & - [u_{11} (u_{22} U_{10} + u_{23} \bar{U}_6 + U_4) + u_{12} (u_{23} \bar{U}_6 + U_4) + u_{22} U_4 + u_{23} U_3 + u_{23} u_{34} u^2] w^2 + \\ & + [u_{11} (u_{22} U_4 + u_{23} u_{34} u^3) + u_{12} u_{23} u_{34} u^3] = 0. \end{aligned}$$

2c) Referring to Table XVIII, we can find for the case $\boxed{3(7m)0}$ the following group of equal values of u :

$$u = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67};$$

their number is 6, and therefore 6 is the coefficient of the first member in the equation. For the next member, the coefficient is $(6 - 1) = 5$.

For the purpose of establishing the expression of the U values, the following values are found, according to the rubric

$$\boxed{3(7m)0}$$

in Fig. 7:

$$10, 6, 4, 1.$$

2d) Analysis of Table XIX (Referring to the case: 1 (8m) 0):

Enumerated are 12 equal values viz.:

$$u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67} = u_{77} = u_{78}.$$

Consequently, 12 is the coefficient of the first member in the equation. For the next member, the coefficient is equal to $(12 - 1) = 11$. For the formulae of U , the values are found, according to the rubric $\boxed{1(8m)0}$ to be as follows:

$$55, 45, 120, 84, 126, 70, 56, 21, 7, 1$$

Table XIX

1 (8m) 0

8 masses

$$w^{14} - (u_{11} + u_{12} + 12u)w^{12} + u(12u_{11} + 11u_{12} + 55u)w^{10} - \\ - u^2(55u_{11} + 45u_{12} + 120u)w^8 + u^3(120u_{11} + 84u_{12} + 126u)w^6 - \\ - u^4(126u_{11} + 70u_{12} + 56u)w^4 + u^5(56u_{11} + 21u_{12} + 7u)w^2 - u^6(7u_{11} + u_{12}) = 0;$$

$$u_{11} + u_{12} + 12u = K_{11-2},$$

$$u(12u_{11} + 11u_{12} + 55u) = U_{12},$$

$$u^2(55u_{11} + 45u_{12} + 120u) = U_{55},$$

$$u^3(120u_{11} + 84u_{12} + 126u) = U_{120},$$

$$u^4(126u_{11} + 70u_{12} + 56u) = U_{126},$$

$$u^5(56u_{11} + 21u_{12} + 7u) = U_{56},$$

$$u^6(7u_{11} + u_{12}) = U_7;$$

$$w^{14} - K_{112} w^{12} + U_{12} w^{10} - U_{55} w^8 + U_{120} w^6 - U_{126} w^4 + U_{56} w^2 - U_7 = 0.$$

Table XX

2 (8m) 0

8 masses

First group :

$$u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 10u = K_{11-3} = u_{11} + K_{12-3},$$

$$u_{12} + u_{22} + u_{23} + 10u = K_{123} = u_{12} + K_{223},$$

$$u_{22} + u_{23} + 10u = K_{223} = u_{22} + K_{23},$$

$$u_{23} + 10u = K_{23};$$

Second group :

$$(10u_{22} + 9u_{23} + 36u)u = U_{10},$$

$$(9u_{23} + 36u)u = U_9,$$

$$(36u_{22} + 28u_{23} + 56u)u^2 = U_{36},$$

$$(28u_{23} + 56u)u^2 = U_{28},$$

$$(56u_{22} + 35u_{23} + 35u)u^3 = U_{56},$$

$$(35u_{23} + 35u)u^3 = \bar{U}_{35},$$

$$(35u_{22} + 15u_{23} + 6u)u^4 = U_{35},$$

$$(15u_{23} + 6u)u^4 = U_{15};$$

$$(6u_{22} + u_{23})u^5 = U_5;$$

$$w^{14} - K_{11-3} w^{12} + (u_{11} K_{223} + u_{12} K_{23} + U_{10})w^{10} -$$

$$- (u_{11} U_{10} + u_{12} U_9 + U_{36})w^8 + (u_{11} U_{36} + u_{12} U_{28} + U_{56})w^6 -$$

$$- (u_{11} U_{56} + u_{12} \bar{U}_{35} + U_{35})w^4 - u(u_{11} U_{35} + u_{12} U_{15} + U_6)w^2 + (u_{11} U_{15} + u_{12} u_{23} u^5) = 0.$$

2c) Analysis of Table XX [Referring to the case 2 (8m)0]:

Enumerated are 10 equal values of u , viz:

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67} = u_{77} = u_{78}.$$

Consequently, the coefficient of the first member in the equation is 10, and for the second member the coefficient is obtained by diminishing it by 1; thus, $(10 - 1) = 9$.

Table XXI

3 (8m) 0

8 masses

First group :

$$\begin{aligned}
 u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{11-4} = u_{11} + K_{12-4}, \\
 u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{12-4} = u_{12} + K_{22-4}, \\
 u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{22-4} = u_{22} + K_{234}, \\
 u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{234} = u_{23} + K_{334}, \\
 u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{334} = u_{33} + K_{34}, \\
 u_{34} + 8u &= K_{34}.
 \end{aligned}$$

Second group :

$$\begin{aligned}
 (8u_{33} + 7u_{34} + 21u)u &= U_8, & (7u_{34} + 21u)u &= U_6, \\
 (21u_{33} + 15u_{34} + 20u)u^2 &= U_{21}, & (15u_{34} + 20u)u^2 &= U_{15}, \\
 20u_{33} + 10u_{34} + 5u)u^3 &= U_{20}, & (10u_{34} + 5u)u^3 &= U_{10}, \\
 (5u_{33} + u)u^4 &= U_5,
 \end{aligned}$$

The frequency equation:

$$\begin{aligned}
 w^{14} - K_{11-4} w^{12} + (u_{11} K_{22-4} + u_{12} K_{23-4} + u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_8) w^{10} - \\
 - [u_{11} (u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_8) + u_{12} (u_{23} K_{34} + U_8) + u_{22} U_8 + U_{23} U_7 + U_{21}] w^8 + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_8 + u_{23} U_7 + U_{21}) + u_{12} (u_{23} U_7 + U_{21}) + u_{22} U_{21} + u_{23} U_{15} + U_{20}] w^6 - \\
 - [u_{11} (u_{22} U_{21} + U_{23} U_{15} + U_{20}) + u_{12} (u_{23} U_{15} + U_{20}) + u_{22} U_{20} + u_{23} U_{10} + U_5] w^4 + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_{20} + u_{23} U_{10} + U_5) + u_{12} (u_{23} U_{10} + U_5) + u_{22} U_5 + u_{23} u_{34} u^4] w^2 - \\
 - [u_{11} (u_{22} U_5 + u_{23} u_{34} u^4) + u_{12} u_{23} u^4] = 0.
 \end{aligned}$$

Again, for the expressions of U values, the Fig. 7 contains, corresponding to the rubric [2 (8m) 0] the following coefficients:

$$36, 28, 56, 35, 35, 16, 6, 1.$$

2f) The object of our consideration is the case of 8 masses according to the arrangement of 3 (8m) 0.

There are 8 equal masses enumerated, to which the following u values are coordinated:

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67}.$$

Accordingly, the coefficient of the first member of the equation is 8, and for the second member, this equals $(8 - 1) = 7$. Again, for the purpose of forming the U values, we find by means of the triangle in Fig. 7, the following coefficients:

$$21, 15, 20, 10, 5, 1.$$

REFERENCES

1. BALOGH, A.: Einiges über die Eigenschaften der charakteristischen Gleichung bei Torsionsschwingungen. *Acta Techn. Hung.* **32** (1961), 436 [Derivation of formula (6)].
2. Ibid. 429—440.
3. BALOGH, A.: Torzióslengés karakterisztikus egyenlete együtthatóinak kiszámítása (The Calculation of the Coefficients of the Frequency Equation). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* **27** (1960), 333—358.
4. BALOGH, A.: Torzióslengés önlengésszámának számítása a karakterisztikus egyenlettel (The Calculation of the Natural Frequencies for the Torsional Vibration by Means of the Frequency Equation). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* **15** (1955), 91—114.
5. BALOGH, A.: A torzióslengés karakterisztikus egyenletével kapcsolatos táblázatok szerkezete (The Construction of the Tables for the Frequency Equation of Torsional Vibration). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* **30** (1962), 65—84.
6. BALOGH, A.: Torzióslengéseknél keletkező tehetetlenségi nyomatékok redukciója (The Reduction of the Number of the Moments Inertia in the Equation of Torsional Vibration). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* **30** (1962), 417—456.
7. BALOGH, A.: Einige spezielle Formen der charakteristischen Gleichung bei Torsionsschwingungen. *Acta Techn. Hung.* **40** (1962), 105—126.
8. BALOGH, A.: A torzióslengés karakterisztikus egyenletének diagramja (The Diagram for the Characteristic Equation of Torsional Vibration). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* **35** (1965), 293—318.

TORSIONSSCHWINGUNGEN
PROBLEME UND DEREN PRAKTISCHE LÖSUNGEN

A. BALOGH

ZUSAMMENFASSUNG

Bei Torsionsschwingungen wird die charakteristische Determinante bzw. nach deren Entwicklung die charakteristische Gleichung — eine algebraische Gleichung mit reellen Wurzeln — dazu benützt, die Eigenschwingungszahlen des Systems zu berechnen. In acht früheren Aufsätzen wurde ein Verfahren vorgeführt, um im allgemeinen und in einigen wichtigen praktischen Fällen für beliebige Massenzahlen, durch Vermeidung von jedweden Annäherungen, die algebraische Gleichung aufzustellen. Es hat sich gezeigt, daß die hier gegebene zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse dieser Aufsätze wenigstens in den wichtigsten Teilen erwünscht ist, um das Verfahren übersichtlich für die Praxis übergeben zu können. In dem üblichen Schrifttumsverzeichnis sind diese Arbeiten aufgezählt. Der Leser findet in diesen nähere Aufklärungen über die Problematik und auch Ergänzungen zu den praktischen Zahlenbeispielen.

VIBRATIONS DE TORSION
PROBLÈMES ET SOLUTION PRATIQUE

A. BALOGH

RÉSUMÉ

Lors du calcul des vibrations de torsion, on part du déterminant caractéristique dont on développe l'équation caractéristique, c'est-à-dire une équation algébrique ayant des racines réelles qui servent à déterminer les vibrations naturelles des arbres. Dans ses huit études antérieures, l'auteur a développé une méthode générale permettant de résoudre l'équation algébrique même dans quelques cas pratiques et obtenir des résultats non pas approximatifs, mais parfaitement exacts. Le présent abrégé contenant les parties essentielles de ces études a pour but d'offrir une vue d'ensemble du procédé à l'usage des praticiens. Les lecteurs désireux de trouver des informations plus détaillées ou des explications supplémentaires concernant les exemples numériques, peuvent se reporter aux travaux précédents de l'auteur, énumérés dans la liste bibliographique publiée en fin de l'étude.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОБЛЕМЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

А. БАЛОГ

РЕЗЮМЕ

При расчёте крутильных колебаний для определения порядка количества собственных колебаний применяем характеристическое алгебраическое уравнение с действительными корнями, получающееся из обоснования параметра определителя. В предыдущих восьми работах автор уже показал один такой общий метод, который действителен в отдельных практических случаях, когда требуется вывести алгебраическое уравнение, дающее точные, а не приблизительные результаты при любом количестве качающейся массы. Отсюда следует, что опубликованные здесь выводы, содержащие в себе основные вопросы предыдущих работ, наглядно показывает практическое значение метода. Из выше приведённого перечня работ читатель может получить дальнейшие сведения и дополнительные разъяснения к практическим примерам для расчёта.

A NEW METHOD OF DESIGNING A SINGLE STAGE AXIAL-FLOW FAN FOR PRESCRIBED SPANWISE CIRCULATION

G. NATH

DEPARTMENT OF FLUID MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received August 4, 1964]

In the present paper, the author has obtained the solution of the inverse problem of the three dimensional flow in axial fan, consisting of rotor only, having finite number of blades and hub/tip ratio lying between 0,2 to 0,4, by the method of isolated aerofoil of finite span. The circulation is taken as variable along the radius and the effects of trailing and bound vortices are taken into account. The trailing vortices are considered to be straight lines extending to infinity. The fluid is taken as incompressible, frictionless and without heat transfer. The velocity components of induced velocity, chord distribution, geometric angle of attack, efficiency, etc. have been obtained.

Symbols

Γ	circulation;
Γ_H	circulation at the hub;
N	number of blades;
σ	$= 2\pi/N$ angle between consecutive blades;
R, Θ, Z	cylindrical polar co-ordinates;
l	chord length;
R_T	tip radius;
R_H	hub radius;
R_H/R_T	hub/tip ratio;
ω	angular velocity of the rotor;
X	distance of the fixed point on a given blade from the origin;
C_L	lift coefficient;
C_D	drag coefficient;
$\Phi_{\text{geo.}}$	geometrical angle of attack;
$\Phi_{\text{eff.}}$	effective angle of attack;
ψ	angle which the relative mean velocity (W_∞) makes with the tangential direction;
$\bar{\psi}$	angle which the new relative mean velocity (\bar{W}_∞) makes with the tangential direction;
C_a	axial velocity;
V_i	induced velocity due to trailing vortices;
V_{Ri}	induced radial velocity due to trailing vortices;
V_{ti}	induced tangential velocity due to trailing vortices;
W_1	relative inlet velocity;
W_2	relative outlet velocity;
W_∞	relative mean velocity;
W'_∞	new relative mean velocity;
Y	distance between two points;
i, j, k	unit vectors along radial, tangential and axial directions;
a, b, c	constants;
π	3,141592;
t	blade spacing;
l/t	solidity;
Q	torque;
Q_c	torque coefficient;
T	thrust;

T_c	thrust coefficient;
n_T	efficiency at a point;
\bar{n}_T	mean efficiency;
K_{th}	theoretical head rise coefficient at any point;
$K_{act.}$	actual head rise coefficient at any point;
K_R	loss coefficient of rotor at a point;
K_{swirl}	loss coefficient due to swirl at a point;
K_{Dp}	profile drag loss coefficient at a point;
K_{Ds}	secondary drag loss coefficient at a point;
K_{DA}	annulus drag loss coefficient at a point;
C_{DP}	profile drag coefficient;
C_{DS}	secondary drag coefficient;
C_{DA}	annulus drag coefficient;
n	unit vector along tangent to the vortex line.

I. Introduction

The aerodynamic problems of axial-flow fans may be classified under the following two general problems:

a) If the circulation distribution, blade speed, axial velocity and the fluid state ahead of the fan are given, the three dimensional velocity field, chord length, geometrical angle of attack and energy distribution can be obtained.

b) If the blade shape, geometrical angle of attack, axial velocity and the fluid state ahead of the fan are given, the three dimensional velocity field, the circulation distribution and the energy distribution can be obtained.

These are designated, respectively, the inverse and the direct problem. The solution of the inverse problem is much easier than the solution of the direct problem. These problems can be solved by isolated aerofoil method of finite span or by Cascade method. The isolated aerofoil method is appropriate when solidity $l/t < 0,7$. The Cascade method is appropriate when solidity $l/t > 1$. When solidity lies between 0,7 and 1, both methods can be applied.

The solution of three dimensional flow through an axial turbomachine was obtained by MARBLE [1], SMITH, TRAUGOTT and WISLICENUS [2], VAVRA [3], HOWELL [4], SEIPPEL [5], GINSBURG [6] and others [7-11], when the fluid flow is steady, isentropic, free of fluid friction and heat transfer. They have obtained the solution on the assumption that there are infinite number of blades in each row and $R_H/R_T > 0,4$.

BETZ [12] has obtained expressions for the three components of induced velocity at any point of a given blade due to trailing vortices emanating from all the blades in the case of an airscrew, but has not integrated them. GLAUERT [13] has obtained the solution of the direct problem in the case of a finite wing by the isolated aerofil method, by considering the variation of circulation along the span. He considers that there is no change in the direction of inflow and outflow which cannot be valid in the case of an axial fan. WALLIS [14] has obtained the solution of the three dimensional flow in an axial fan with pre-

rotator and straightener in the case of free vortex and arbitrary vortex flow.

The present author has obtained the solution of the inverse problem of a single stage axial fan consisting of finite number of blades by the isolated aerofoil method of finite span without pre-rotator and straightener when the circulation varies along the span and the hub/tip ratio is $< 0,4$. Since the circulation is not constant, in addition to bound vortices, infinite number of trailing vortices will emanate from each blade and move in the direction of stream lines. These trailing vortices will be spirals, but for most purposes it is sufficiently accurate to assume that they are straight lines parallel to the axial direction. These trailing vortices will induce a velocity at every point of a given blade.

II. Basic Assumptions

At present axial fans are generally designed by taking the hub/tip ratio 0,4 and circulation as constant along the span. But if $R_H/R_T < 0,4$, and the circulation is taken as constant along the span of the blade, the design and manufacturing difficulties will arise, because the swirl coefficient C_u/C_a and flow coefficient $C_a/\omega R$ being inversely proportional to radius R , tend to infinity as R tends to zero. Therefore, at very small R_H/R_T , these coefficients will be very great. Hence, in order to overcome this difficulty, we prescribe a circulation which is maximum at the tip and minimum at the hub and its derivative must vanish at the tip and the hub. In this case the blade will not occupy a large portion of the circumference at the hub, whereas in the case of constant circulation, when $R_H/R_T < 0,4$ it occupies a large portion at the circumference of the hub.

In addition, the following assumptions have been made:

- a) The fluid is non-viscous and incompressible;
- b) the blades are considered as lifting lines and are symmetrically placed;
- c) the hub/tip ratio R_H/R_T lies between 0,2 to 0,4 and $C_a/\omega R_T$ lies between 0,1 to 0,3;
- d) the axial velocity C_a is given and is constant before the rotor;
- e) the tip clearance is considered to be zero.

III. Basic Equations and Solutions

Consider the rotor of an axial fan consisting of N blades symmetrically placed whose circulation Γ varies from the inner radius R_H to the outer radius R_T . We want to obtain the components of the induced velocity in the radial, tangential and axial directions at any point of a blade due to trailing vortices and bound vortices of all the blades.

There are an infinite number of trailing vortices emanating from each blade which move parallel to the axial direction. The strength of a trailing vortex which originates from the point $(R, 0, 0)$ is $(d\Gamma/dR)dR$ and the strength remains constant along the whole length. The induced velocity at a given point due to trailing vortices is given by the Biot-Savart rule:

$$V_i = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Gamma}{dR} dR \frac{n \times \mathbf{Y}}{Y^3} dZ. \quad (1)$$

In the present case

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{i}(x - R \cos \sigma) + \mathbf{j}R \sin \sigma + \mathbf{k}z, \quad (2)$$

$$\mathbf{n} = -\mathbf{k}. \quad (3)$$

The circulation distribution along the span is taken as a cubic expression and in non-dimensional form can be expressed as:

$$\frac{\Gamma}{\omega R_T^2} = \Gamma_1 = a \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^3 + b \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^2 + c, \quad (4)$$

where

$$b = -\frac{3a}{2} \left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right).$$

If the linear circulation distribution is taken, the radial and tangential induced velocity becomes infinite at the hub and at the tip.

From the equations (1), (2), (3) and (4), we can express the induced velocity due to trailing vortices of all the blades at a point $(X/R_T, 0, 0)$ in non-dimensional form:

$$\frac{V_i}{\omega R_T} = \frac{3a}{4\pi} \sum_{\sigma} \int_{\frac{R_H}{R_T}}^1 \frac{\left[\left(\frac{R}{R_T} \right)^2 - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{R}{R_T} + \frac{R_H}{R_T} \right] \left[\mathbf{i} \frac{R}{R_T} \sin \sigma + \mathbf{j} \left(\frac{X}{R_T} - \frac{R}{R_T} \cos \sigma \right) \right] d \left(\frac{R}{R_T} \right)}{\left[\left(\frac{X}{R_T} \right)^2 + \left(\frac{R}{R_T} \right)^2 - 2 \frac{X}{R_T} \cdot \frac{R}{R_T} \cos \sigma \right]}. \quad (5)$$

There is no component of induced velocity along the axial direction. From (5) the tangential component is given by:

$$\frac{V_{ti}}{\omega R_T} = \frac{3a}{4\pi} \sum_{\sigma} \left\{ \left[\sin \sigma (4 \cos^2 \sigma - 1) \left(\frac{X}{R_T} \right)^2 - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{X}{R_T} \sin 2\sigma + \frac{R_H}{R_T} \sin \sigma \Big] \cdot \\
& \cdot \left[\tan^{-1} \frac{\left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{X}{R_T} \sin \sigma}{\left(\frac{X}{R_T} \right)^2 + \frac{R_H}{R_T} - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{X}{R_T} \cos \sigma} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left[(3 \cos \sigma - 4 \cos^3 \sigma) \left(\frac{X}{R_T} \right)^2 - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) (1 - 2 \cos^2 \sigma) \frac{X}{R_T} - \right. \\
& - \left. \frac{R_H}{R_T} \cos \sigma \right] \cdot \ln \left[\frac{\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma \right)^2}{\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma \right)^2} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cos \sigma \left[\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 - \left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 \right] + \\
& + \left[(1 - 3 \cos^2 \sigma) \frac{X}{R_T} + \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \cos \sigma \right] \left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right) \Big\}. \tag{6}
\end{aligned}$$

The radial component of induced velocity is given as:

$$\begin{aligned}
\frac{VR_i}{\omega R_T} &= \frac{3a}{4\pi} \sum_{\sigma} \sin \sigma \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 - \left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 \right] + \right. \\
& + \left[3 \frac{X}{R_T} \cos \sigma - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right) + \\
& + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{X}{R_T} \right)^2 (3 \cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma) - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{X}{R_T} \cos \sigma + \frac{1}{2} \frac{R_H}{R_T} \right] \cdot \\
& \cdot \ln \left[\frac{\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma \right)^2}{\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma \right)^2} \right] + \left[\frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} \left(\frac{X}{R_T} \right) (2 \cos^2 \sigma - \right. \\
& - \left. 3 \sin^2 \sigma) - \frac{\left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{X}{R_T} (\cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma)}{\sin \sigma} + \frac{R_H}{R_T} \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} \right] \cdot \\
& \cdot \left. \left[\tan^{-1} \frac{\left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{X}{R_T} \sin \sigma}{\left(\frac{X}{R_T} \right)^2 + \frac{R_H}{R_T} - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{X}{R_T} \cos \sigma} \right] \right\}. \tag{7}
\end{aligned}$$

The induced velocity may be regarded as variable along the chord of the blade, but the theory of aerofoil of finite span can be developed with sufficient accuracy by assuming a constant value of the induced velocity. As every quantity in equation (6) is given, we can obtain the induced velocity in the tangential direction due to trailing vortices of all blades at the point $(X/R_T, 0, 0)$. The radial component of the induced velocity vanishes at every point of the blade. The value of the induced velocity in the tangential direction is given in Table I.

Table I
Tangential component of induced velocity
 $a = -0,01; c = 0,02$

X/R_T	$N = 4$		$N = 3$	
	$\frac{V_{ti}}{\omega R_T}$	$\frac{\bar{C}_u}{\omega R_T} = \frac{C_u + 2 V_{ti}}{\omega R_T}$	$\frac{V_{ti}}{\omega R_T}$	$\frac{\bar{C}_u}{\omega R_T} = \frac{C_u + 2 V_{ti}}{\omega R_T}$
0,2	-0,00023	0,06318	-0,00033	0,04707
0,3	-0,00034	0,04175	-0,00048	0,03086
0,4	-0,00011	0,03160	-0,00027	0,02332
0,5	0,00017	0,02580	-0,00000	0,01909
0,6	0,00052	0,02227	0,00034	0,01660
0,7	0,00087	0,01994	0,00070	0,01504
0,8	0,00117	0,01826	0,00100	0,01394
0,9	0,00135	0,01684	0,00118	0,01298
1,0	0,00119	0,01511	0,00103	0,01162

The induced velocity in the tangential direction (Fig. 1) depends on Γ , X/R_T , R_H/R_T and N . It increases as Γ or X/R_T or both increase and decrease as R_H/R_T or N or both increase. It is independent of $C_a/\omega R_T$. It changes the effective angle of attack. The effective angle is less than the geometrical angle of attack when the induced velocity is positive and is greater than the geometrical angle of attack when the induced velocity is negative. It changes the lift and gives rise to an induced drag on the blade. The tangential induced velocity is only present downstream of the rotor and no tangential velocity is induced before the rotor. In the plane of the rotor, its value is V_{ti} but far from the rotor, it becomes $2V_{ti}$.

1. Induced Velocity Due to Bound Vortices

The induced velocity due to bound vortices of all the blades at a given point $(X, 0, 0)$ of a blade is given by:

$$V_{Bi} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma} \int \Gamma \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Y}}{Y^3} dR; \quad (8)$$

where

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{i}(X - R \cos \sigma) + \mathbf{j}R \sin \sigma, \tag{9}$$

$$\mathbf{n} = -\mathbf{i} \cos \sigma - \mathbf{j} \sin \sigma. \tag{10}$$

From equations (4), (8), (9) and (10), the induced velocity in a non-dimensional

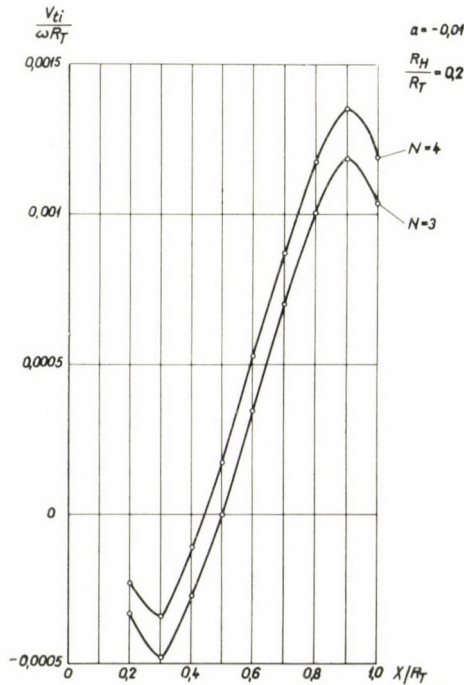


Fig. 1. Tangential induced velocity distribution

form is given by:

$$\begin{aligned} \frac{V_{Bi}}{\omega R_T} &= \frac{(-\mathbf{k})}{4\pi} \sum_{\sigma} \int_{R_H/R_T}^1 \frac{\left[a \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^3 - \frac{3a}{2} \left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right) \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^2 + c \right] \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma \right) d \left(\frac{R}{R_T} \right)}{\left[\left(\frac{X}{R_T} \right)^2 + \left(\frac{R}{R_T} \right)^2 - 2 \frac{X}{R_T} \cdot \frac{R}{R_T} \cos \sigma \right]^{3/2}} = \\ &= \frac{(-\mathbf{k})}{4\pi} \sum_{\sigma} \frac{X}{R_T} \sin \sigma \left\{ a \left[\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma \right)^2 \right]^{3/2} - \right. \\ &\quad \left. - a \left[\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma \right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma \right)^2 \right]^{1/2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \left[\frac{\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right) + \left[\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma\right)^2\right]^{1/2}}{\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right) + \left[\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma\right)^2\right]^{1/2}} \right] \\
& \cdot \left[3a \frac{X}{R_T} \cos \sigma - \frac{3a}{2} \left(1 + \frac{R_H}{R_T}\right) \right] + \\
& + \frac{1}{\left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma\right)^2} \left[a \left(\frac{X}{R_T}\right)^2 (\cos^2 \sigma - 3 \sin^2 \sigma) - \right. \\
& - \frac{3a}{2} \left(1 + \frac{R_H}{R_T}\right) \left(\frac{X}{R_T}\right)^2 (\cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma) + 3a \frac{R_H}{R_T} \cdot \frac{X}{R_T} \cos \sigma + \\
& + c + \frac{a}{2} \left(\frac{R_H}{R_T}\right)^3 - \frac{3a}{2} \left(\frac{R_H}{R_T}\right)^2 \left. \right] \cdot \left[\frac{1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma}{\sqrt{\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma\right)^2}} - \right. \\
& - \frac{\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma}{\sqrt{\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma\right)^2}} \left. \right] + \\
& + \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{X}{R_T} \cos \sigma\right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} \sin \sigma\right)^2}} \right] \cdot \\
& \cdot \left[a \left(\frac{X}{R_T}\right)^2 (\sin^2 \sigma - 3 \cos^2 \sigma) + 3a \frac{X}{R_T} \left(1 + \frac{R_H}{R_T}\right) \cos \sigma - 3a \frac{R_T}{R_T} \right].
\end{aligned} \tag{11}$$

From (11), it can easily be shown that the induced velocity due to bound vortices of all the blades at every point of a blade is zero. Hence, there is no induced velocity due to bound vortices.

2. Geometrical Angle of Attack and Chord Length

We know that the tangential velocity induced by the trailing vortices changes the effective angle of attack and the blade behaves as a blade of infinite span at this angle of attack. Hence the profile drag coefficient, c_{DP} , lift coefficient c_L and Φ_{eff} can be obtained from the experimental data of isolated aerofoil [15]. We know that

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{geo}} - (\bar{\psi} - \psi) \tag{12}$$

and

$$C_L = a_0 \Phi_{\text{eff.}} \tag{13}$$

where a_0 is the slope of the curve of C_L with respect to the angle of incidence.

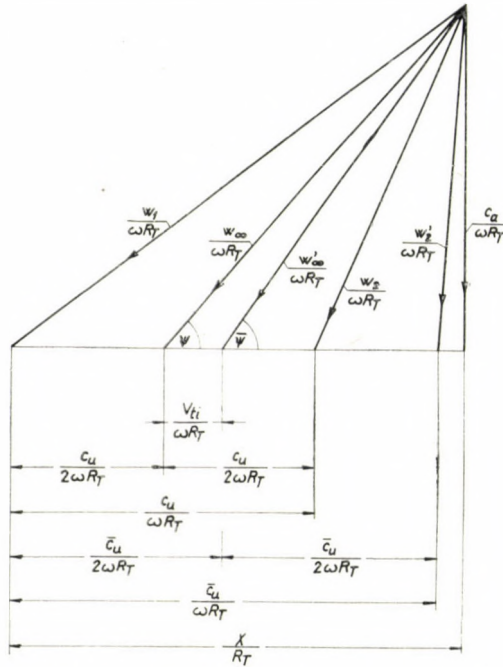


Fig. 2. Dimensionless velocity diagram of axial flow fan

In the present paper for numerical calculation $R_H/R_T = 0,2$; $C_L = 1,0$; $C_{DP} = 0,0177$; $a = -0,01$; $c = 0,02$; $\Phi_{\text{eff.}} = 6^\circ$. The aerofoil is RAF 6E, Re. NO $= 0,312 \times 10^6$.

The angle ψ and $\bar{\psi}$ can be determined from the dimensionless velocity diagram (Fig. 2).

We know that

$$\frac{C_u}{\omega R_T} = \frac{N}{2\pi} \frac{\Gamma_{1H}}{X} \frac{1}{R_T}, \tag{14}$$

where $\Gamma_{1H} = c$.

Hence

$$\tan \psi = \frac{\frac{C_a}{\omega R_T}}{\frac{X}{R_T} - \frac{N}{4\pi} \cdot \frac{\Gamma_{1H}}{X} \frac{1}{R_T}}; \tag{15}$$

$$\tan \bar{\psi} = \frac{C_a / \omega R_T}{\frac{X}{R_T} - \frac{N}{4\pi} \cdot \frac{\Gamma_{1H}}{X/R_T} - \frac{V_{ti}}{\omega R_T}}. \quad (16)$$

From (12), (13), (15) and (16), $\Phi_{\text{geo.}}$ can be obtained. The new relative mean velocity is given by

$$\left(\frac{W'_\infty}{\omega R_T} \right)^2 = \left(\frac{C_a}{\omega R_T} \right)^2 + \left(\frac{X}{R_T} - \frac{N}{4\pi} \frac{\Gamma_{1H}}{X/R_T} - \frac{V_{ti}}{\omega R_T} \right)^2. \quad (17)$$

The chord length is given by

$$\frac{l}{R_T} = \frac{2 \Gamma_1}{C_L \cdot \frac{W'_\infty}{\omega R_T}}. \quad (18)$$

The theoretical total head rise coefficient is given by:

$$K_{th} = \frac{2\epsilon}{\Lambda} \frac{X}{R_T} \quad \text{and} \quad \frac{K_{\text{act.}}}{K_{th}} = 1 - \frac{K_R}{K_{th}}, \quad (19)$$

where

$$\epsilon = \frac{Cu + 2V_{ti}}{Ca} \quad \text{and} \quad \Lambda = \frac{Ca}{\omega R_T}.$$

The chord length and geometrical angle of attack are given in Table II and $(\bar{\psi} + \Phi)^\circ$ is given in Table III.

Table II
 $a = -0,01; c = 0,02$

X/R_T	$N = 4$				$N = 3$			
	$\Lambda = 0,3$		$\Lambda = 0,2$		$\Lambda = 0,3$		$\Lambda = 0,2$	
	l/R_T	$\Phi_{\text{geo.}}^\circ$	l/R_T	$\Phi_{\text{geo.}}^\circ$	l/R_T	$\Phi_{\text{geo.}}^\circ$	l/R_T	$\Phi_{\text{geo.}}^\circ$
0,2	0,1162	5,964°	0,1529	5,9600°	0,1149	5,9443°	0,1499	5,946°
0,3	0,0981	5,967°	0,1171	5,9672°	0,0972	5,9403°	0,1156	5,9543°
0,4	0,0837	5,9922°	0,0941	5,9930°	0,0831	5,9795°	0,0934	5,9834°
0,5	0,0727	6,0121°	0,0790	6,0069°	0,0723	6°	0,0785	6°
0,6	0,0643	6,0208°	0,0684	6,016°	0,0641	6,0135°	0,0681	6,0099°
0,7	0,0578	6,0262°	0,0605	6,0193°	0,0576	6,0213°	0,0603	6,0154°
0,8	0,0523	6,0326°	0,0543	6,021°	0,0522	6,0234°	0,0541	6,0177°
0,9	0,0477	6,0269°	0,0491	6,018°	0,0476	6,024°	0,0490	6,0156°
1,0	0,0435	6,0192°	0,0445	6,0135°	0,0434	6,0170°	0,0444	6,0117°

Table III

$$(\bar{\psi} + \Phi_{\text{eff}})^\circ$$

$$a = -0,01; c = 0,02$$

X/R_T	$N = 4$		$N = 3$	
	$A = 0,3$	$A = 0,2$	$A = 0,3$	$A = 0,2$
0,2	66,6911°	55,8918°	65,5328°	54,5845°
0,3	53,0697°	41,6233°	52,5076°	41,1009°
0,4	43,9839°	33,4984°	43,6865°	33,2507°
0,5	37,6290°	28,3236°	37,4533°	28,1843°
0,6	32,9980°	24,7598°	32,8871°	24,6755°
0,7	29,4981°	22,1653°	29,4251°	22,1114°
0,8	26,8114°	20,1937°	26,7189°	20,1554°
0,9	24,5990°	18,6432°	24,5608°	18,6177°
1,0	22,8202°	17,3957°	22,7922°	17,3760°

The chord length, l/R_T and geometrical angle of attack, $\Phi_{\text{geo.}}$, depend upon circulation Γ , $C_a/\omega R_T$, X/R_T and N (Fig. 3). From Table II, it is evident that N has very small effect on the chord distribution. The chord length decreases as $C_a/\omega R_T$ or R_H/R_T increases, all other variables remaining constant. In the present case l/t at the hub is $< 0,55$, hence there is no interference effect and the application of isolated aerofoil method is valid.

The geometrical angle of attack, $\Phi_{\text{geo.}}$, slightly changes as circulation,

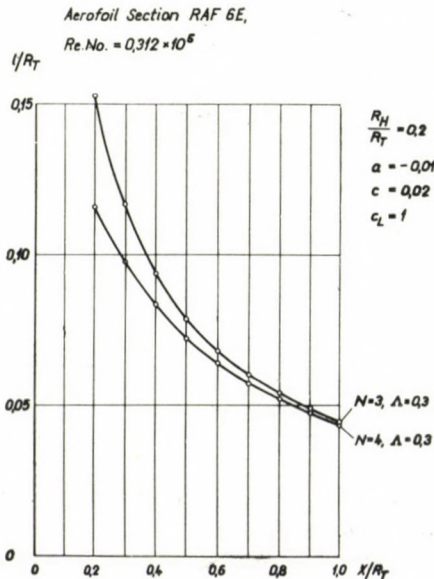


Fig. 3. Chord distribution

Γ , or N changes. The angle, $\bar{\psi} + \Phi_{\text{eff}}$, decreases as X/R_T increases and increases as $C_a/\omega R_T$ increases. The number of blades, N , has very little effect on it.

3. Fan Unit Efficiency

In a fan unit which consists of a rotor only, the loss in efficiency is due to rotor loss and swirl loss, other losses can be neglected. The distribution of losses along the blade span will not be regular. To overcome this difficulty, we calculate the mean value of the losses and assume a uniform distribution of these losses along the span.

Small inaccuracies are not critical in calculating the efficiency in rotor design.

Hence the efficiency at a point $(X/R_T, 0, 0)$ can be expressed as:

$$n_T = 1 - \frac{KR}{K_{th}} - \frac{K_{\text{swirl}}}{K_{th}}. \quad (20)$$

Now

$$\begin{aligned} \frac{K_R}{K_{th}} &= \frac{K_{Dp} + K_{Ds} + K_{DA}}{K_{th}} = \\ &= \left(\frac{C_{Dp} + C_{DS}}{C_L} \right) \frac{A}{\sin^2 \bar{\psi}} \frac{1}{X/R_T} + \frac{K_{DA}}{K_{th}}. \end{aligned} \quad (21)$$

The secondary drag coefficient, C_{DS} , is given by the well known empirical formula by HOWELL i.e., $C_{DS}/C_L^2 = 0,018$ [14] and the annulus loss $K_{DA}/K_{th} = 0,02$ [14] for the fan unit. The secondary loss should be calculated at the mean radius.

The swirl loss at any point $(X/R_T, 0, 0)$ is given by:

$$\frac{K_{\text{swirl}}}{K_{th}} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon A}{X/R_T}. \quad (22)$$

The mean efficiency is given by:

$$\eta_T = 1 - \frac{2}{1 - \left(\frac{R_H}{R_T} \right)^2} \int_{\frac{R_H}{R_T}}^1 \left[\frac{K_R}{K_{th}} + \frac{K_{\text{swirl}}}{K_{th}} \right] \left(\frac{X}{R_T} \right) d \left(\frac{X}{R_T} \right), \quad (23)$$

which can be integrated graphically or numerically. The loss in efficiency due to the profile drag is given in Table IV.

For a prescribed circulation, the loss due to the profile drag increases rapidly towards the tip when $C_a/\omega R_T = 0,2$, but when $C_a/\omega R_T = 0,3$, the

Table IV
Rotor loss due to profile drag, K_{DP}/K_{th}
 $a = -0,01; c = 0,02$

X/R_T	$N = 4$		$N = 3$	
	$A = 0,3$	$A = 0,2$	$A = 0,3$	$A = 0,2$
0,2	0,0349	0,0302	0,0357	0,0314
0,3	0,0330	0,0347	0,0336	0,0356
0,4	0,0350	0,0415	0,0355	0,0422
0,5	0,0386	0,0490	0,0390	0,0496
0,6	0,0429	0,0570	0,0432	0,0575
0,7	0,0477	0,0652	0,0480	0,0656
0,8	0,0527	0,0736	0,0530	0,0739
0,9	0,0580	0,0820	0,0582	0,0824
1,0	0,0634	0,0907	0,0636	0,0910

increase is not so rapid (Fig. 4). For a given circulation, the loss decreases when $C_a/\omega R_T$ or R_H/R_T or both increase, but N has very little effect on it.

The swirl loss is given in Table V.

The swirl loss is independent of $C_a/\omega R_T$ (Fig. 5). For a given circulation the swirl loss decreases as N decreases. It has very high value at the hub. Near the hub it rapidly decreases but later on it slowly decreases. The loss decreases as R_H/R_T increases and increases as circulation increases.

The efficiency, taking into account losses due to the profile drag and swirl, is given in Table VI. The mean efficiency, $\bar{\eta}_T$ (taking into account profile, secondary, annulus and swirl losses) is given in Table VII. From Fig. 6, it is

Table V
Swirl loss, K_{swirl}/K_{th}
 $a = -0,01; c = 0,02$

X/R_T	$N = 4$	$N = 3$
0,2	0,1570	0,1176
0,3	0,0695	0,0514
0,4	0,0395	0,0291
0,5	0,0258	0,0190
0,6	0,0185	0,0138
0,7	0,0142	0,0107
0,8	0,0114	0,0087
0,9	0,0093	0,0072
1,0	0,0075	0,0058

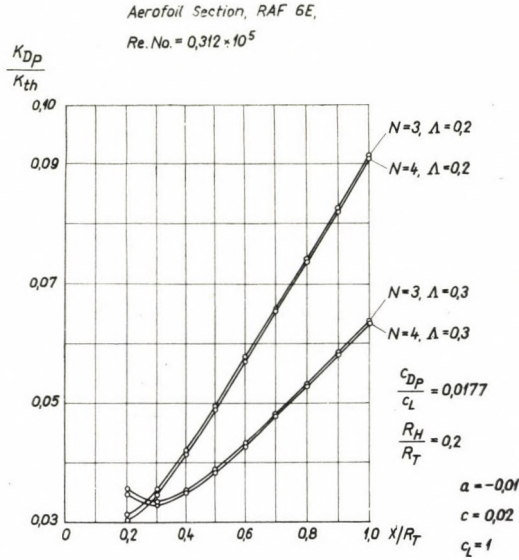


Fig. 4. Loss in efficiency due to profile drag

evident that the efficiency, n_T , has the lowest value at the hub, but it rapidly increases near the hub and again slowly decreases near the tip. The efficiency or the mean efficiency increases as $C_a/\omega R_T$ or R_H/R_T or both increase and it slightly increases as N decreases.

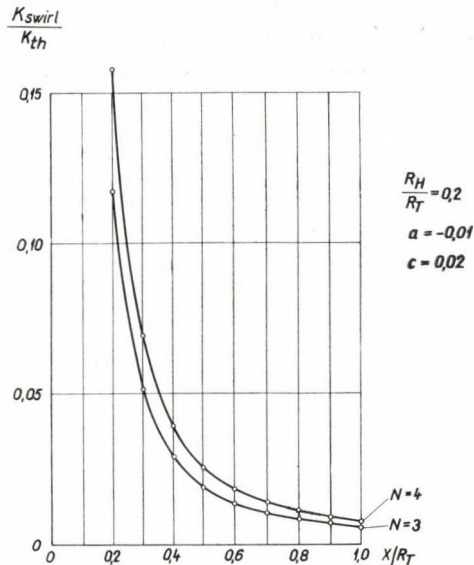


Fig. 5. Loss in efficiency due to swirl

Table VI

Efficiency (taking into account losses due to profile drag and swirl only), η_T
 $a = -0,01; c = 0,02$

X/R_T	$N = 4$		$N = 3$	
	$\Lambda = 0,3$	$\Lambda = 0,2$	$\Lambda = 0,3$	$\Lambda = 0,2$
0,2	0,8071	0,8117	0,8465	0,8508
0,3	0,8973	0,8956	0,9149	0,9128
0,4	0,9254	0,9189	0,9353	0,9286
0,5	0,9355	0,9251	0,9419	0,9312
0,6	0,9384	0,9243	0,9428	0,9286
0,7	0,9380	0,9205	0,9412	0,9235
0,8	0,9358	0,9149	0,9382	0,9172
0,9	0,9326	0,9085	0,9345	0,9103
1,0	0,9290	0,9017	0,9305	0,9031

Table VII

Mean efficiency, $\bar{\eta}_T$
 $a = -0,01; c = 0,02$

$N = 4$		$N = 3$	
$\Lambda = 0,3$	$\Lambda = 0,2$	$\Lambda = 0,3$	$\Lambda = 0,2$
0,8659	0,8348	0,8708	0,8395

Aerofoil Section RAF 6E.
 $Re. No. = 0,312 \cdot 10^6$

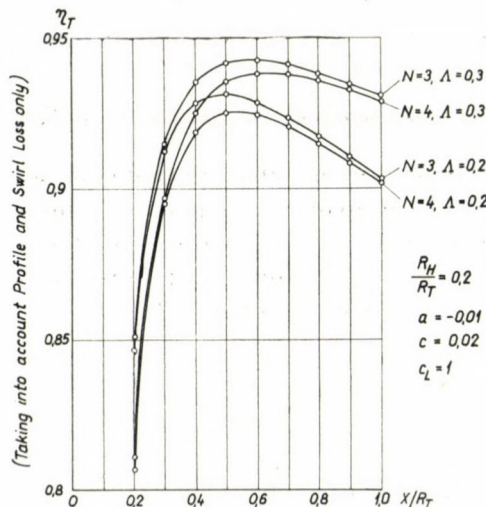


Fig. 6. Efficiency distribution

4. Torque and Thrust

The torque acting on the rotor shaft can be expressed in terms of the swirl momentum.

We define the torque coefficient as:

$$Q_c = \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho c_a^2 \pi R_T^3} \quad (24)$$

Hence

$$Q_c = 4 \int_{\frac{R_H}{R_T}}^1 \left(\frac{X}{R_T} \right)^2 d \left(\frac{X}{R_T} \right), \quad (25)$$

which can be integrated numerically or graphically or otherwise.

In the design of a fan, the main interest in the thrust produced by the rotor is in relation to the design of thrust bearing and supports. Hence an estimate based on the pressure rise across the rotor and the swept area is usually adequate.

We define the thrust coefficient T_c , as:

$$T_c = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho c_a^2 \pi R_T^2} \quad (26)$$

Hence

$$T_c = 2 \int_{\frac{R_H}{R_T}}^1 K_{th} \left(1 - \frac{K_R}{K_{th}} - \frac{\epsilon^2}{K_{th}} \right) \frac{X}{R_T} d \left(\frac{X}{R_T} \right), \quad (27)$$

which can be integrated numerically or graphically.

5. Approximate Estimation of a and c

The maximum and minimum value of a and c can be estimated by assuming that the finite number of blades are replaced by infinite number of blades whose total circulation is the same as the total circulation in the case of finite number of blades. Now the trailing vortices will form vortex sheets and tangential component of induced velocity is given by

$$C_u = \frac{N\Gamma}{2\pi x}, \quad (28)$$

or

$$a \left(\frac{X}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^3 - \frac{3a}{2} \left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right) \left(\frac{X}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^2 + c = \frac{2\pi \epsilon_1 A}{N} \frac{X}{R_T}, \quad (29)$$

where

$$\epsilon_1 = \frac{C_u}{C_a},$$

The minimum and maximum value of ϵ_1 are 0 and 1, respectively. When $\epsilon_1 = 0$, there is no change in the direction of inflow and outflow. If the maximum value of ϵ_1 is taken greater than 1, the lift coefficient C_L becomes greater than 1,2, which is generally the maximum permissible value. If the lift coefficient is greater than 1,2, the drag coefficient rises rapidly with the angle of incidence, hence drag/lift ratio increases. Hence the losses become greater which reduces the efficiency. For a given $c_a/\omega R_T$, R_H/R_T and N , the minimum value of a (a is negative) and minimum value of c are obtained by prescribing maximum circulation at the tip and minimum at the hub by putting 1 and 0, respectively. Similarly the maximum value of a and maximum value of c are obtained by prescribing the circulation at the tip to be equal to the maximum circulation at the hub. The maximum and minimum values of a and c are given below:

$$\begin{aligned} a &= 0 && \text{(maximum),} \\ a &= -\frac{4\pi\Lambda}{N} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_H}{R_T}\right)^3} && \text{(minimum);} \\ c &= \frac{2\pi\Lambda}{N} \frac{R_H}{R_T} && \text{(maximum),} \\ c &= 0 && \text{(minimum).} \end{aligned} \quad (30)$$

IV. Conclusions

In the present paper, a method has been developed to design a fan without pre-rotator and straightener with three or more blades having hub/tip ratio lying between 0,2 to 0,4, considering the circulation distribution as variable along the span and taking into account the effects of trailing vortices which are taken as straight lines. The circulation is taken as maximum at the tip and minimum at the hub. At every point of the blade the trailing vortices induce velocity in the tangential direction only and the velocity induced by bound vortices is zero. The efficiency rises as the number of blades N , or $C_a/\omega R_T$ or R_H/R_T increases. The swirl loss at the hub is very high. The present method is quite different from the methods of other authors. The present method is valid for R_H/R_T lying between 0,2 to 0,4, whereas other methods are valid for $R_H/R_T > 0,4$.

Acknowledgements

The author is thankful to Professor Dr. J. GRUBER and other members of the Department of Fluid Mechanics, Technical University Budapest, for the discussion and suggestions during the preparation of this paper.

REFERENCES

1. MARBLE, F. E.: The flow of a perfect fluid through an axial turbomachine with prescribed blade loading. *Journal of the Aeronautical Sciences* **15** (1948), 473—485.
2. SMITH, L. H.—TRAUGOTT, S. C.—WISLICENUS, G. F.: A practical solution of a three-dimensional flow problem of axial-flow turbomachine. *Trans. ASME* **75** (1953), 789—803.
3. VAVRA, M. H.: *Aero-Thermodynamics and flow in turbomachine*. John Wiley and Sons Inc., New York 1960; 439—470.
4. HOWELL, W. T.: Approximate three-dimensional flow theory for axial turbomachines. *Aeronautical Quarterly* **14** (1963); May, part 2.
5. SEIPPEL, C.: Three-dimensional flow in multistage turbine. *Brown Boveri Review* **45** (1958); March, 99—107.
6. GINSBURG, T.: Investigation of three-dimensional potential flow through axial cascades of aerofoils. *E. T. H., Prom.*, No. 2609, 1956.
7. RUDEN, R.: Investigation of single stage axial fans. *Tech. Mem. Nat. Adv. Comm. Aero. Wash.* (1944), No. 1062.
8. CARTER, A. D. S.: Three-dimensional flow theories for axial compressors and turbines. *Proc. Instn. Mech. Engrs, Lond.* **159** (1948), 255.
9. KAHANE, A.: Investigation of axial-flow fan and compressor rotors designed for three-dimensional flow. *Tech. Note Nat. Adv. Comm. Aero. Wash.* (1948), No. 1652.
10. MARBLE, F.: Analytical investigation of some three-dimensional flow problems in turbomachines. *Tech. Note Nat. Adv. Comm. Aero. Wash.* (1952), No. 2614.
11. MIKHAIL, S.: Three-dimensional flow in axial pumps and fans. *Proc. Instn. Mech. Engrs, Lond.* **172** (1958), No. 35.
12. BETZ, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen 1927; 68—92.
13. GLAUERT, H.: *The elements of aerofoil and airscrew theory*. Cambridge University Press, 1930; 125—155.
14. WALLIS, R. A.: *Axial flow fans*. William Clowes and Sons Ltd, London 1961.
15. PATTERSON, G. N.: Ducted fans: design for high efficiency. *Australian Council for Aeronautics, Report ACA 0*, 1944.

EINE NEUE METHODE FÜR DIE BERECHNUNG EINES EINSTUFIGEN AXIALVENTILATORS FÜR VORGESCHRIEBENE ZIRKULATION ENTLANG DER SCHAUFEL

G. NATH

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit hat der Verfasser — mit Hilfe der Theorie des Tragflügels von endlicher Tragweite — das Problem der dreidimensionalen Strömung in einem Axialventilator gelöst, der bloß aus einem Rotor besteht, eine endliche Zahl von Schaufeln und ein Nebenverhältnis zwischen 0,2 und 0,4 besitzt. Die Zirkulation wird als mit dem Radius veränderlich in Rechnung gestellt, und die Wirkung der freien und der gebundenen Wirbel wird berücksichtigt. Die freien Wirbel werden als unendlich lange Geraden betrachtet. Das Medium wird als inkompressibel, reibungslos und ohne Wärmeübertragung betrachtet. Die Geschwindigkeitskomponenten der induzierten Geschwindigkeit, Sehnenlängeverteilung, Anstellwinkel, Wirkungsgrad usw. wurden berechnet.

**MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE D'UN VENTILATEUR AXIAL A UN ÉTAGE
POUR CIRCULATION PRESCRITE LE LONG DE L'AUBE**

G. NATH

RÉSUMÉ

L'auteur utilisant la méthode du profil isolé à portée finie, a obtenu la solution du problème inverse de l'écoulement tridimensionnel dans un ventilateur axial. Celui-ci consiste seulement en un rotor, les aubes sont d'un nombre fini et le rapport de moyeu est de 0,2 à 0,4. L'auteur considère la circulation comme variable le long du rayon et tient compte de l'effet des tourbillons libres et liés. Les tourbillons libres sont considérés comme des lignes droites s'étendant à l'infini et le fluide comme incompressible, sans frottement et sans transmission de chaleur. Les composantes de la vitesse induite, la distribution de la longueur de corde, l'angle d'attaque géométrique, le rendement, etc . . . ont été calculés par l'auteur.

**НОВЫЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОДНОСТУПЕНЧАТОГО
АКСИАЛЬНОГО ВЕНТИЛЯТОРА ПРИ ЗАДАННОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ВДОЛЬ
ЛОПАСТЕЙ**

Г. НАТ

РЕЗЮМЕ

В данной работе автор решил инвертную проблему в случае аксиального вентилятора трехмерного движения потока методом отдельностоящей лопасти конечного размера. Вентилятор состоит только из ротора, число лопастей является конечным и отношение ступицы равно 0,2—0,4. Автор принимает циркуляцию переменной вдоль радиуса и учитывает действие свободных и связанных вихрей. Свободные вихри приняты в качестве прямых, распространяющихся до бесконечности; среда предполагается в качестве несжимаемой, не имеющей трения и теплопередачи. Автором рассчитаны компоненты возбужденной скорости, распределение длины хорды, угол стояния, коэффициент полезного действия и т. д.

BEITRAG ZUR PROBLEMATIK DER ENTSTEHUNG VON MAGNETISCHEN EIGENSCHAFTEN DES α - Fe_2O_3 BEIM ERHITZEN AUF MITTLERE TEMPERATUREN

K. SMRČEK, O. ČEJCHAN und J. CHVATÍK

FORSCHUNGSINSTITUT DER EISENBERGWERKE UND RENNANLAGEN; MNIŠEK POD DRDY, ČSSR

[Eingegangen am 1. August 1964]

Im vorliegenden Aufsatz wird unter Verwendung von Specularit — einem indischen Hämatit — und von analytisch reinem synthetischen Hämatit die Bildungsmöglichkeit des Maghemits (γ - Fe_2O_3) im Laufe des einfachen Röstens des α - Fe_2O_3 bei einer mittleren Temperatur von 500–800 °C untersucht. Es konnte die Bildung einer neuen Phase mit magnetischen Eigenschaften beobachtet werden, und mit Hilfe der chemischen Analyse konnte die Gegenwart des zweiwertigen Fe^{2+} nachgewiesen werden. Der alleinige Träger der magnetischen Eigenschaften dürfte der Magnetit sein, der durch die Reduktion der vorhandenen und von ihrem Sulfidgehalt durch thermische Dissoziation befreiten Sulfide erhalten wird. Diese Annahmen wurden durch Versuche bestätigt, die an synthetisch dargestellten Verbindungen vorgenommen worden waren.

I. Einleitung

Bei der Untersuchung der Aufbereikbaarheit des sideritischen Erzes der Lagerstätte Rákoš bei Sirk, im südlichen Teil des Zips-Gemer'schen Erzgebirges, durch magnetisierende Röstung war es notwendig, eine erhöhte Aufmerksamkeit dem Verhalten des Specularits zu widmen, da sein Anteil im Erz stellenweise ziemlich hoch war. Der Übergang des Specularits bei der Magnetscheidung in den nichtmagnetischen Anteil würde einen beträchtlichen Verlust an Eisen und somit eine bedeutende Herabsetzung der Eisenausbeute bedeuten. Die technologischen Laborversuche wurden mit einem bis zu 40% Specularit enthaltenden sideritischen Erz [1] durchgeführt und haben im Gegenteil gezeigt, daß der überwiegende Teil von Specularit in den magnetischen Anteil übergeht. Deshalb wurden weitere Untersuchungen allein mit dem Specularitkonzentrat und Zusatz festen Reduktionsbrennstoffes durchgeführt; diese haben zu der überraschenden Feststellung geführt, daß bei Röstung des bloßen Specularits eine magnetische Verbindung entsteht [2].

Über die Entstehung magnetischen γ - Fe_2O_3 bei der Röstung von α - Fe_2O_3 im Bereich mittlerer Temperaturen von 500 bis 800 °C wird in der Literatur nur an einer Stelle [3] berichtet. Die Bildung von γ - Fe_2O_3 bei der thermischen Oxydation von Fe_3O_4 ist sehr gut bekannt [4, 5]. Minder bekannt ist die Entstehung von γ - Fe_2O_3 beim thermischen Zerfall von Hämatit in Magnetit bei hohen Temperaturen [6]. Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, festzustellen, inwieweit die vorherigen und die letztgenannten Tatsachen zusammenhängen.

II. Experimenteller Teil

1. Angewandte Rohstoffe

Bei den Untersuchungen wurde α -Fe₂O₃ in dreierlei Form angewandt: blättriger Specularit, isometrisch körniger Hämatit und pulverförmiges α -Fe₂O₃ p. a. Der untersuchte Specularit aus Rudňany bildet an hydrothermalen Erzadern anomale Akkumulationen im siderit-baryt-quarz-sulfidischen Erz, wovon er leicht zu trennen ist. Mit Quarz und Pyrit verwächst er so eng, daß diese nicht völlig entfernt werden können. Der Hämatit wurde aus indischem metamorphen Hämatit-quarz-Erz mit akzessorischem Magnetit gewonnen. Die Zusammensetzung von Rohstoffen ist in Tafel I angeführt. Der bei der Untersuchung benützte Siderit und Pyrit stammen auch aus den

Tafel I
Chemische Zusammensetzung der benützten Rohstoffe

	Specularit, %	Indischer Hämatit, %
Fe _{tot}	66,70	62,00
Fe ²⁺	1,17	0,58
SiO ₂	0,22	7,72
Al ₂ O ₃	0,09	1,21
MnO	0,08	0,12
MgO	0,26	0,97
CaO	1,33	1,03
S	2,79	0,35

Rudňan'schen Erzadern; der Siderit enthält mikroskopische, heterogene Beimengungen, die abgetrennten Pyritkristalle sind praktisch monomineral. Die Korngröße des Specularits war gleich 0,5 mm, diejenige von Hämatit, Siderit und Pyrit 0,25–1,0 mm.

2. Durchführung der Versuche

Die Einwaage von 20 g α -Fe₂O₃ wurde an der Luft bei 500 bis 900 °C im elektrischen Muffelofen 5–20 Min geröstet, und zwar sowohl in offenen als auch in mit Asbestdeckeln abgedeckten breiten Pyrolanschalen mit einem Bodendurchmesser von 55 mm. Die Proben wurden nach Ablauf der Röstzeit entweder im frei abkühlenden Ofen gelassen, oder aus diesem herausgenommen und schnell luftgekühlt.

Bei der Untersuchung von Mischungen mit Pyrit wurden beide Rohstoffe vor der Röstung vollkommen vermischt. Die Versuche in der Atmosphäre

gasförmiger Produkte des Sideritzerfalls wurden so durchgeführt, daß in die Schale 25 g Siderit eingebracht, dieser mit Drahtnetz gedeckt und auf diesem die Einwaage von Specularit ausgebreitet und die Schale mit Asbestdeckel abgedeckt wurde.

Die Gewichtsausbeute wurde unter Benützung von nassem Magnetscheider Type 25—SE mit Feldstärke 2800 Oersted an den Polschuhspitzen und 980 Oersted inmitten der Spalte zwischen den Polschuhen, bei einer Spitzenentfernung von 55 mm festgestellt.

III. Versuchsergebnisse

Bei Röstung in Schalen ohne Deckel wurden bei allen drei Rohstoffen sehr niedrige, nicht einmal 3% der Gesamteinwaage überschreitende Gewichtsausbeuten magnetischen Anteils erreicht, wobei keine Unterschiede bei verschiedener Art der Kühlung des gerösteten Produktes beobachtet wurden.

Bei der Kühlung in abgedeckten Schalen beeinflusste im Gegenteil die Art der Kühlung entscheidend die Gewichtsausbeute (Tafel II). Beim Specularit wurde festgestellt, daß im Falle langsamer Kühlung eine beträchtlich niedrigere Ausbeute des magnetischen Anteils erreicht wird, und deshalb verzichteten wir bei weiteren zwei Rohstoffen auf diese Versuche. Bei synthetischem α -Fe₂O₃

Tafel II

Prozentuale Ausbeuten des magnetischen Anteiles nach Rösten in abgedeckten Schalen

Rösttemperatur, °C	Röstdauer, Min					
	5	10	20	5	10	20
	Schnelle Abkühlung			Langsame Abkühlung		
	Specularit					
500	1	31,6	11,0	1	11,0	7,8
600	4,8	35,6	17,8	1	6,9	4,8
700	60,3	45,0	5,2	6,2	4,5	3,4
800	97,3	45,5	1,0	2,0	1	1
900	65,5	5,0	3,4	1,3	1	1
	Indischer Hämatit					
500	3,3	3,4	1,3			
600	4,0	3,4	2,6			
700	3,3	3,0	3,0			
800	32,2	12,4	3,4			
900	3,4	2,0	2,3			

Bemerkung: Beim nichtgerösteten Specularit war die Ausbeute des magnetischen Anteiles 1 %, beim nichtgerösteten indischen Hämatit 3,2 %.

p. a. war nicht einmal bei schneller Abkühlung die Ausbeute des magnetischen Anteils höher als 1%, und deshalb wurden die Ergebnisse in Tafel II überhaupt nicht einbezogen.

Aus den Angaben der Tafel II geht hervor, daß bei schneller Abkühlung des Specularits eine viel größere Ausbeute des magnetischen Anteils als bei langsamer Abkühlung erreicht wird, und daß mit Verlängerung der Röstzeit sowohl die Menge des magnetischen Anteils als auch die Temperatur sinkt, bei welcher die höchste Ausbeute des magnetischen Anteils erreicht wird. Beim

Tafel III

Ausbeuten des magnetischen Anteiles der im Gemisch mit Pyrit und in Anwesenheit von Siderit gerösteten Rohstoffe

Rohstoff	Verlauf der Röstung	Ausbeute, %
Specularit	1000 °C, 30 Min	1
	1000 °C, 30 Min, anschließend 800°C, 5 Min	1
	1000 °C, 30 Min, Zusatz 5% FeS ₂ , anschließend 800 °C, 5 Min	49,7
Indischer Hämatit	Zusatz 5% FeS ₂ , anschließend 800 °C, 5 Min	69,4
Fe ₂ O ₃ p.a.	Zusatz 5% FeS ₂ , anschließend 800 °C, 5 Min	21,8
Specularit	In der Atmosphäre der Zerfallsprodukte des Siderites (CO + CO ₂) 800 °C, 10 Min	39,8
	800 °C, 20 Min	2,6

indischen hämatitischen Erz kann man nur die Abhängigkeit der Ausbeute des magnetischen Anteils von der Röstzeit feststellen, wobei das Maximum der Ausbeute immer bei derselben Temperatur erreicht wird.

Die Versuchsröstungen von α -Fe₂O₃ mit Pyritzusatz und in der Atmosphäre von Produkten der thermischen Dissoziation des Siderites wurden nur bei schneller Abkühlung durchgeführt (die Ergebnisse siehe in Tafel III). Nach einer halbstündigen Röstung des Specularits bei 1000 °C verschwinden völlig die magnetischen Eigenschaften, die nicht einmal nach wiederholter Röstung unter optimalen Bedingungen (800 °C, 5 Min) erscheinen. Unter diesen Umständen ruft jedoch der Pyritzusatz wieder die Entstehung magnetischer Phasen hervor. In gleicher Weise verhält sich das indische Hämatitzerz sowie reines α -Fe₂O₃, wenn mit dem Pyritzusatz die durch Magnetscheidung vorher abgetrennten nichtmagnetischen Anteile geröstet werden. Zu ähnlichen Ergebnissen führt die Röstung des Specularits oberhalb der Sideritschicht; die betreffenden Ergebnisse wurden ebenfalls in Tafel III angeführt.

IV. Diskussion der Ergebnisse

Die im Verlauf der technologischen Versuche der Aufbereitbarkeit sideritischen Erzes mit höherem Specularitgehalt ermittelte Entstehung einer Phase mit magnetischen Eigenschaften wurde an einer Reihe von Laborversuchen nachgeprüft, wobei die Grundbedingungen des Specularitüberganges in eine Verbindung mit magnetischen Eigenschaften bestimmt wurden. Es wurde festgestellt, daß die magnetischen Eigenschaften nicht nur bei Specularit

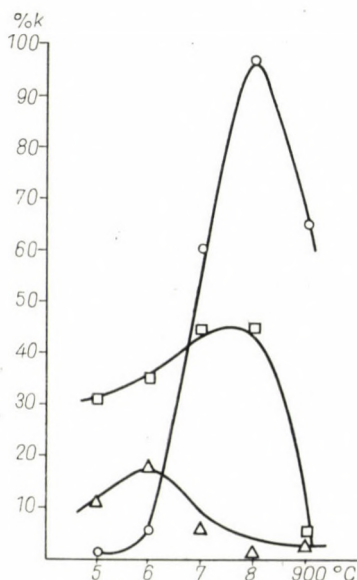


Bild 1. Temperaturabhängigkeit der Ausbeute des magnetischen Anteils des Specularit (schnell gekühlt, geröstet in abgedeckten Schalen)
Röstdauer: ○ — 5 Min, □ — 10 Min, △ — 20 Min

entstehen, sondern auch beim indischen Hämatiterz; sie wurden jedoch nicht bei der Röstung von α -Fe₂O₃ p. a. beobachtet. Im Falle beider Hämatiterze machten sich die Röstbedingungen entscheidend bemerkbar. Die magnetische Verbindung entsteht nämlich nur bei Röstung unter beschränkter Luftzufuhr (dies wurde durch Abdecken der Tiegel mit Asbestdeckeln erzielt) und bei schneller Abkühlung des Röstproduktes. Bei freier Luftzufuhr und allmählicher Abkühlung des Ofens entsteht keine magnetische Phase. Diese Unterschiede sind auffällig beim untersuchten Specularit (Bild 1 und 2). Mit der Verlängerung der Röstdzeit bei einer bestimmten Temperatur sinkt die Ausbeute des magnetischen Anteils sowie die Temperatur, bei der die maximale Ausbeute des magnetischen Anteils erreicht wird. Minder bemerkbar machten sich diese Abhängigkeiten bei dem indischen Hämatiterz (Bild 3), und ohne jedwede

Änderung blieb geröstetes synthetisches $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$. Die Versuchsergebnisse deuten an, daß für die Entstehung magnetischer Eigenschaften neben den Röst- und Abkühlungsbedingungen auch die chemische Zusammensetzung des Rohstoffes entscheidend ist, falls wir die Unterschiede in Betracht ziehen, die bei drei untersuchten Formen von $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ festgestellt wurden.

Bei der Untersuchung des Trägers von magnetischen Eigenschaften gingen wir zuerst vom mikroskopischen Studium der Anschliffe der Produkte der Specularitröstung aus. Das Bild 4 zeigt einen schrägen Schnitt durch ein Aggregat von Specularitschuppen, in dem schwarze Linien die einzelnen Kristalle abgrenzen. Das Bild 5 zeigt einen Rand eines ähnlichen Aggregates nach

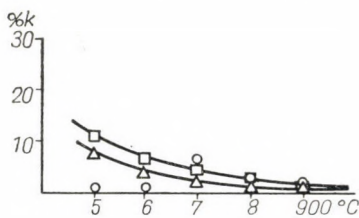


Bild 2. Temperaturabhängigkeit der Ausbeute des magnetischen Anteils des Specularits (langsam gekühlt, geröstet in abgedeckten Schalen)

Röstdauer: ○ — 5 Min, □ — 10 Min, △ — 20 Min

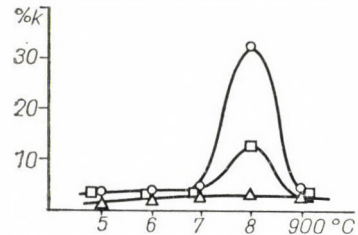


Bild 3. Temperaturabhängigkeit der Ausbeute des magnetischen Anteils indischen Hämatiterzes (schnell gekühlt, geröstet in abgedeckten Schalen)

Röstdauer: ○ — 5 Min, □ — 10 Min, △ — 20 Min

der Röstung auf 600 °C während 10 Min; die Oberflächzone des Aggregates ist deutlich dunkler, mit niedrigerem Reflexionsvermögen. Analogische Doppelphasenzusammensetzung wurde bei allen aus dem magnetischen Anteil vorbereiteten Präparaten beobachtet; mit der Verlängerung der Röstzeit nimmt allmählich die neugebildete dunklere Phase ab, die dem ursprünglichen Specularit gegenüber beträchtlich kleineres Reflexionsvermögen aufweist und zwischen gekreuzten Nicols sich isotrop verhält. Optisch kann man jedoch diese neugebildete Phase verlässlich nicht identifizieren, denn die Isotropie ist sowohl für Maghemit als auch für Magnetit charakteristisch. Nicht einmal die Röntgenanalyse gibt infolge der Isostruktur der Gitter beider Minerale überzeugend eindeutige Antwort, und darüber hinaus deshalb, da im Röntgenogramm die Linien des Hämatits weiterhin deutlich bleiben. An der DTA-Kurve des Produktes der Röstung an der Luft weist ein breiter exothermer Ausschlag eher auf die Anwesenheit von Magnetit hin. Eine genaue Antwort bot die chemische Analyse, welche im Falle des nach fünfminütiger Röstung bei 800 °C gewonnenen magnetischen Anteils die Werte 69,1% Fe_{tot} und 9,2% Fe^{2+} ergab. Diese Erhöhung des Fe^{2+} -Gehaltes beweist verlässlich die Anwesenheit von Magnetit, dessen Gehalt fast 38% der Proben entspricht.

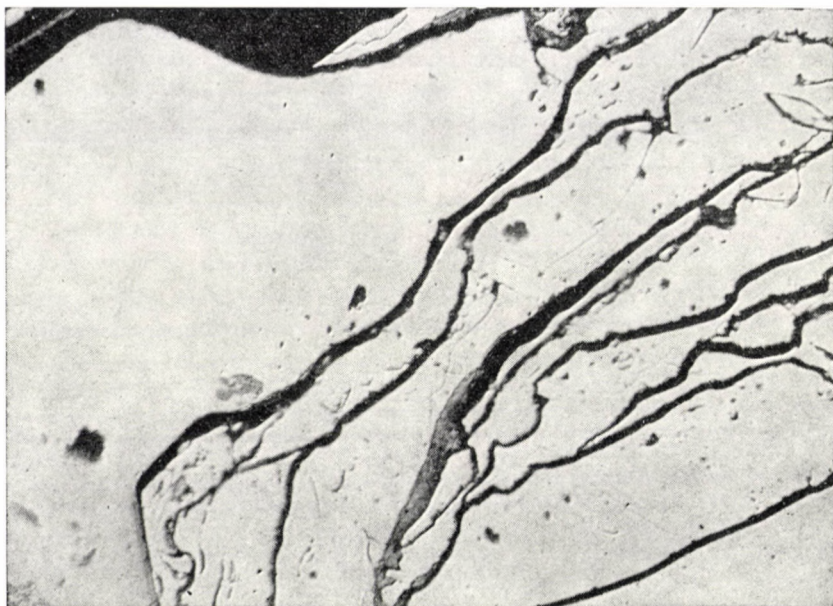


Bild 4. Schräger Schnitt durch ein Aggregat von Specularit

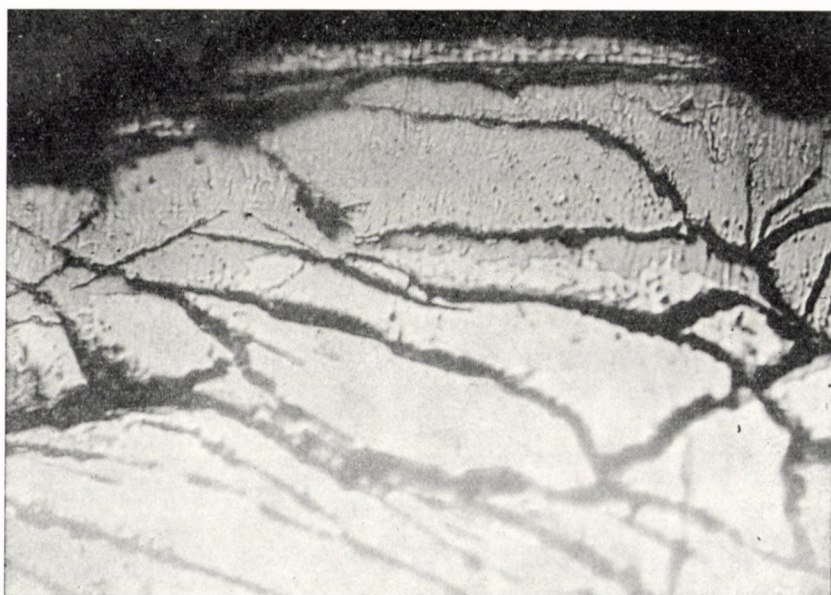


Bild 5. Rand eines Aggregates, nach Röstung auf 600 °C, während 10 Min

Grundsätzlich ist es zu erklären, wie es zur Umwandlung von $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ in Fe_3O_4 in Abwesenheit üblicher Reduktionsmittel kommt. Mit Bezug darauf, daß bei chemisch reinem Fe_2O_3 praktisch keine magnetische Verbindung gebildet wird, ist es nötig, die Ursache der Änderungen im Unterschiede der chemischen Zusammensetzung der Rohstoffe zu suchen. Als eine der Möglichkeiten ergibt sich die Reduktion durch den beim Wärmezerfall der anwesenden Sulfide, insbesondere des Pyrites, entstandenen Schwefel.

Zur Bestätigung dieser Vermutung wurde eine Reihe von Röstversuchen der untersuchten Rohstoffe mit Pyritzusatz durchgeführt, wobei es vermutlich zur Bildung von Magnetit kommen sollte. Bei den Versuchen wurden verlässlich unmagnetische Anteile angewandt; der Specularit wurde zuerst geröstet unter Bedingungen einer optimalen Ausbeute des magnetischen Anteiles (800 °C, 5 Min), der magnetisch separiert und weiter 30 Minuten bei 1000 °C geröstet wurde, um vollständiges Abbrennen von Schwefel und Reoxydation des eventuell anwesenden Magnetites in Hämatit zu erreichen. Ein Teil des auf solche Weise vorbereiteten Rohstoffes wurde dann direkt magnetisch separiert, ein weiterer Teil nochmals unter den obenangeführten Bedingungen geröstet, um zu ermitteln, ob bloßes Erhitzen zur Neubildung einer magnetischen Verbindung genügt, und schließlich wurde der letzte Teil unter denselben Bedingungen (800 °C, 5 Min) mit Zusatz von 5% FeS_2 geröstet. Nach Beendigung der Röstung wurde das Produkt schnell luftgekühlt und magnetisch separiert; die ermittelten Ausbeuten der magnetischen Anteile sind in Tafel III angeführt. Die Ergebnisse beweisen, daß durch Röstung bei 1000 °C die magnetischen Bestandteile praktisch völlig verschwinden, daß durch neue Röstung bei 800 °C keine Neubildung hervorgerufen wird, und daß es in Anwesenheit von Pyrit wirklich zur Magnetitbildung kommt. Diese Ergebnisse unterstützen wohl in genügendem Maße die geäußerten Voraussetzungen.

Analogische Versuche wurden auch mit nichtmagnetischen Anteilen indischen Hämatiterzes und mit reinem Fe_2O_3 durchgeführt; auch in diesen Fällen führte der Zusatz von Pyrit zur Bildung einer magnetischen Verbindung. Die Vermutung über die Wirkung des beim thermischen Zerfall der anwesenden Sulfide entstandenen Schwefels kann man als bewiesen betrachten und das Schema des Reduktionsprozesses mit der Reaktionsgleichung



ausdrücken, deren Stöchiometrie zeigt, daß zur vollständigen Reduktion etwa 11% von Pyrit ausreicht. Den vorausgesetzten Reaktionsverlauf kann man durch Berechnung der Veränderung der freien Enthalpie

$$\Delta G_T^\circ = 74\,980 - 94,94 \cdot T,$$

überprüfen, wie sie sich aus den Tafeldaten für die einzelnen Teilreaktionen

[7—9] ergibt, die andeuten, daß die Reaktion theoretisch von 510 °C ab verlaufen wird.

Der angedeutete Mechanismus erlaubt die Erklärung der Umwandlungen, die bei der Röstung vorkommen. In den Schalen ohne Deckel tritt zuerst der Zerfall von FeS_2 und unter freier Zufuhr atmosphärischen Sauerstoffs auch die schnelle Oxydation des bei der Dissoziation entstehenden Schwefels beziehungsweise des reduzierten Magnetites auf. Unter diesen Umständen erreichen deswegen die magnetischen Anteile nur Prozentbruchteile. Ähnliche Veränderungen treten auch bei den in abgedeckten Schalen, d.h. in der Atmosphäre von eigenen Zerfallprodukten, gerösteten Rohstoffe auf, die jedoch einer mehrstündigen freien Kühlung im Ofen unterzogen wurden. In diesem Falle dauert die Erhitzung der Rohstoffe auf hohe Temperaturen verhältnismäßig lange, und obzwar anfangs oberhalb des Rohstoffes eine Reduktionsatmosphäre gebildet wird und Magnetit entsteht, kommt es im Verlauf einer verhältnismäßig langen Kühlzeit zum Abbrennen der Schwefeldampfreste oberhalb der Probe und zur Reoxydation von Magnetit. Je niedriger die Temperatur und kürzer die Röstzeit ist, um so früher werden die Bedingungen der thermischen Stabilität des Magnetites und somit die Möglichkeiten der Erzielung einer höheren Ausbeute des magnetischen Anteiles bei der Abkühlung erreicht; diese Ausbeute kann jedoch nie eine solche Höhe erreichen, die bei schneller Abkühlung der Produkte unter denselben Bedingungen erreichbar ist. In diesem Falle tritt nach anfänglichem Wärmezerfall von Sulfiden die Reduktion des Hämatites mit entstandenem Elementarschwefel in Magnetit ein, jedoch wird durch schnelle Abkühlung die Reoxydation durch Luftsauerstoff verhindert. Daraus resultieren bedeutend höhere Ausbeuten des magnetischen Anteiles gegenüber den vorigen Fällen. Aus den Abhängigkeiten in Bild 2 ist gleichzeitig klar ersichtlich, daß mit der Verlängerung der Röstzeit die Ausbeute des magnetischen Anteiles erniedrigt wird, d. h., die Bedingungen der Aufrechterhaltung des Magnetites werden verschlechtert, und daß die Ausbeute des magnetischen Anteiles in Abhängigkeit von der Temperatur ein Maximum aufweist, das mit Verlängerung der Röstzeit herabgesetzt wird. Hier kommen offensichtlich gegensätzliche Einflußgrößen zur Geltung, wie eine Beschleunigung der Reduktion mit Temperaturanstieg, allmähliche Verschwindung der Reduktionsatmosphäre mit Verlängerung der Röstzeit, Beschleunigung der Reoxydation von Magnetit mit dem Temperaturanstieg und Verlängerung der Röstzeit; diese Einflußgrößen haben die angeführten Abhängigkeiten mit maximalen Ausbeuten des magnetischen Anteiles bei einer bestimmten den Versuchsbedingungen gemäß schwankenden Temperatur zur Folge.

Der angedeutete Mechanismus der Umwandlung erlaubt vorauszusetzen, daß auf gleiche Weise wie die Sulfide auch der Siderit (im Gemisch mit Hämatit) sich verhalten wird, der die Basis des ursprünglich untersuchten Erzes der Lagerstätte Rákoš darstellt. Die Zerfallprodukte von Siderit, d. h. ein Gemisch

aus CO und CO₂, können gleichfalls Fe₂O₃ in Fe₃O₄ reduzieren, wie es die Versuche erwiesen haben, deren Durchführung bereits im experimentellen Teil beschrieben worden ist. Die Resultate in Tafel III beweisen klar, daß die Reduktion von Hämatit wirklich eintritt, und daß die Bedingungen der Reduktion grundsätzlich mit denjenigen der Reduktion mit Zerfallprodukten der thermischen Dissoziation von Sulfiden übereinstimmen.

Die angeführten Feststellungen weichen einigermaßen von den Ergebnissen der Arbeit von LECZNAR [3] ab, die sich praktisch als die einzige mit der analogischen Problematik befaßt und die Bildung von magnetischen Eigenschaften bei Röstung von Hämatit im Temperaturbereich von 500 bis 800 °C an der Luft der Umwandlung von Hämatit (α -Fe₂O₃) in Maghemit (γ -Fe₂O₃) zuschreibt. Die Durchführung der Versuche ist ein wenig unterschiedlich, da der Autor die Entstehung der magnetischen Eigenschaften an den aus angefeuchtetem Hämatit geballten Kugeln mit Durchmesser von einigen Zentimetern sowie an Proben, die in einen mit einer Schicht von Quarzsand isolierten Quarzriegel frei geschüttet worden, untersucht. Er führt jedoch keine chemische Zusammensetzung von den angewandten Rohstoffen an, und man kann deshalb die Möglichkeit nicht ausschließen, daß sie Anteile der die Reduktion hervorrufenden Bestandteile (z. B. Sulfide) enthalten. In diesem Falle wären die meisten angeführten Ergebnisse mit Hilfe eines die Magnetbildung klarlegenden Reaktionsmechanismus leicht zu erklären. In größeren Kugeln ist in diesem Falle deshalb eine größere Menge des magnetischen Anteils anwesend, weil die Reoxydation des entstandenen Magnetits bis in deren Mitte nicht eindringt; bei schneller Abkühlung im Luftstrom muß die Reoxydation des Magnetits schneller verlaufen, und die Abdeckung von Proben bei der Kühlung beschränkt die Luftzufuhr und bremst also die Reoxydation des Magnetits. Die angeführten Abhängigkeiten zwischen der Menge des magnetischen Anteiles, der Temperatur und der Röstzeit stimmen mit den unsererseits ermittelten Beziehungen überein.

Durch Bildung von Magnetit kann man jedoch die Entstehung der magnetischen Phase bei Röstung von synthetischem Fe₂O₃ p. a. nicht erklären. In dieser Hinsicht differieren unsere Ergebnisse von den Angaben der zitierten Arbeit: LECZNAR behauptet, daß reines synthetisches Fe₂O₃ durch Röstung bei 850 °C in Abwesenheit der Reduktionsmittel in eine magnetische Substanz völlig umgewandelt wurde, während in unserem Falle beim Erhitzen auf 800 °C an der Luft (10 Min) der entstandene magnetische Anteil sehr klein, unter 1%, war.

Die Frage, ob magnetisches γ -Fe₂O₃ aus α -Fe₂O₃ durch bloßes Erhitzen auf mittlere Temperaturen (500 ÷ 800 °C) entsteht, oder nur ein Zwischenglied der Redox-Reaktion α -Fe₂O₃ → γ -Fe₂O₃ → Fe₃O₄ darstellt, kann man anscheinend nur auf Grund weiterer Untersuchungen mit reinen Stoffen oder mit Hämatit völlig bekannter chemischer Zusammensetzung entscheiden.

SCHRIFTTUM

1. CHVATÍK, J.: Forschungsbericht über die Aufbereikbaarkeit der Erze der Lagerstätte Rákoš. *VÚŽDH-Mníšek* **3** (1962).
2. CHVATÍK, J.: Ausgewählte Arbeiten. *VÚŽDH-Mníšek* **4** (1963), 77.
3. LECZNAR, F. J.: *Acta Techn. Hung.* **16** (1957), 381.
4. GMEIN's Handbuch der anorg. Chemie. 8. Aufl. (1929), No. 593.
5. MELLOR, J. W.: *Comprehensive Treatise on Inorganic and the Oretical Chemistry*, London 1947.
6. ČEJCHAN, O.—SMRČEK, K.—SRB, J.: *Rudy* **11** (1963), 400.
7. RICHARDSON, F. D.—JEFFES, J. H. E.: *J. Iron Steel Inst.* **160** (1948), 261.
8. RICHARDSON, F. D.—JEFFES, J. H. E.: *J. Iron Steel Inst.* **171** (1952), 165.
9. KUBASCHEWSKI, O.—EVANS, E. L.: *Metallurgische Thermochemie*, Berlin 1959.

CONTRIBUTION TO THE PROBLEMS OF THE ORIGIN OF MAGNETIC PROPERTIES OF α -Fe₂O₃, DURING HEATING TO MEDIUM TEMPERATURES

K. SMRČEK, O. ČEJCHAN and J. CHVATÍK

SUMMARY

Using a specular hematite concentrate, an Indian hematite ore and a synthetic Fe₂O₃ p.a., the possibility of forming maghemite (γ -Fe₂O₃) by a simple annealing of α -Fe₂O₃ in the temperature range of 500 to 800 °C was investigated. The formation of a new phase which exhibits magnetic properties was observed; by chemical analysis the presence of Fe²⁺ was proved. It is most probable that magnetite is the sole carrier of magnetic properties; it originates by the reducing action of sulphur liberated by the thermal dissociation of the sulphides present, possibly also by the action of carbon monoxide contained in the gaseous products of thermal dissociation of siderite. These presumptions were verified experimentally on synthetic mixtures.

CONTRIBUTION AUX PROBLÈMES D'ORIGINE DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES α -Fe₂O₃ AU COURS DE LA MISE AUX TEMPÉRATURES MOYENNES

K. SMRČEK, O. ČEJCHAN et J. CHVATÍK

RÉSUMÉ

La possibilité de la formation de maghémite (γ -Fe₂O₃) par le recuit simple dans l'intervalle des températures de 500 à 800 °C fut vérifiée sur un concentré de spécularite, sur l'hématite de l'Inde et sur Fe₂O₃ p.a. synthétique. La formation d'une phase nouvelle faisant apparaître des propriétés magnétiques fut observée; la présence de Fe²⁺ fut montrée par l'analyse chimique. Comme porteur unique le plus probable des propriétés magnétiques, on peut considérer la magnétite produite par l'action réductrice de soufre libéré par la décomposition thermique des sulfites présents, possiblement aussi par l'action de l'oxyde de carbon contenu dans les produits gazeux de la décomposition thermique de la sidérite. Ces hypothèses furent vérifiées par des essais aux mélanges synthétiques.

К ПРОБЛЕМАТИКЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$
ПРИ НАГРЕВЕ ДО СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

К. СМРЧЕК, О. ЧЕЙХАН и Й. ХВАТИК

РЕЗЮМЕ

Возможность образования маггемита ($\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$) простым обжигом $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ в области температур от 500 до 800 °С была проверена на спекуларутовом концентрате, индийской гематитовой руде и синтетической Fe_2O_3 аналитической чистоты. Обнаружено образование новой фазы с магнитными свойствами и путем химического анализа доказано присутствие двухвалентного железа. Носителем магнитных свойств можно считать, по всей вероятности, только магнетит, который образуется вследствие восстановительного воздействия при термическом распаде присутствующих сульфидов выделяющейся серы или окиси углерода, которую содержат газообразные продукты термической диссоциации сидерита. Эти предположения проверены экспериментально на синтетических соединениях.

ON THE RELATION OF CUTTING FACTORS TO CUTTING FORCE IN TURNING OF ALUMINIUM ALLOY

Á. KARDOS

DEPARTMENT OF TECHNOLOGY OF MACHINE PRODUCTION, TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received November 4, 1964]

In this paper the influence exerted by the variation of feed, depth of cut, and cutting speed on the cutting force is dealt with. The tests are described and the results are made known. On the basis of a large number of experiments and measurements including computing operations, the relations between the specific cutting force, the chip thickness and the chip area are discussed and analyzed. The change of the cutting force as a function of the cutting speed is explained by investigation of variations of the chip deformation coefficient.

I. Introduction

In the field of cutting research, investigation of the relation of cutting factors to cutting force including the determination of the latter has ever been object of technological studies as can be seen by reviewing the relevant literature during the past century.

According to recent experiments the magnitude of the cutting force is influenced the most by cutting factors, especially by the chip section.

During the last 100 years, a great many measurements were carried out in order to find some regular relation of cutting factors to cutting force. Among these investigations, there were only a few measurements made in the field of turning aluminium alloys. The present paper deals with experiments carried out by turning an aluminium alloy containing 2,8% Cu, having a hardness of $HB = 61 \text{ kp/mm}^2$, and characterized by a breaking stress of $\sigma_B = 24 \text{ kp/mm}^2$. Remarkably, methods of, and means for, the measurement of cutting force are generally known. Our task is restricted to show the results and to draw some consequences in a more concise form.

II. Relation of Chip Section to Cutting Force

During our experiments the main factors were the following: depth of cutting $f = 1 \div 8 \text{ mm}$; feed $e = 0,1 \div 0,8 \text{ mm/rev}$; cutting speed $v = 280 \text{ m/min}$; the chisels used were uniformly characterized by the following values: $\gamma = 30^\circ$, $\alpha = \alpha_1 = 10^\circ$, $\kappa = 45^\circ$, $\tau = 15^\circ$, $\lambda = 0^\circ$ and $r = 0,5 \text{ mm}$. The main cutting

force was measured by means of a strain gauge type dynamometer [1]. Results were evaluated by a semi-graphical method.

Table I shows the sequence of experiments carried out in order to find

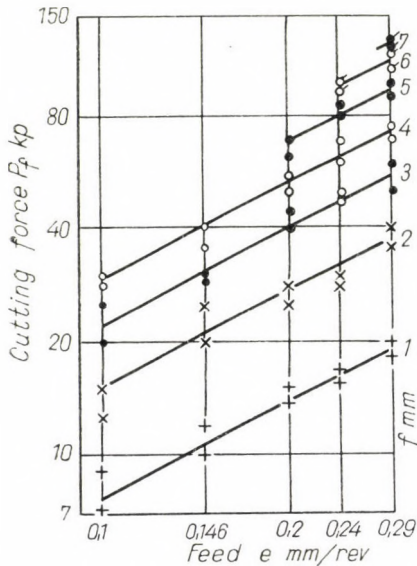


Fig. 1

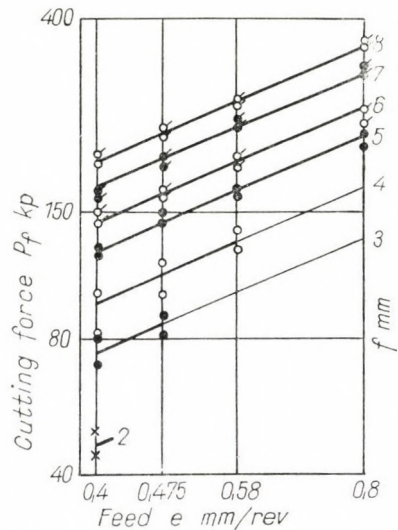


Fig. 2

some regularity of the relation cutting force versus feed, and cutting force versus depth of cut.

In Figs 1 and 2, in a system of coordinates having logarithmic scales on both axes, curves are shown which illustrate the functions P_f versus e , and f versus e respectively (where P_f denotes the main cutting force). The resulting

Table I
Program of cutting tests

Depth of cutting, mm	Feed values, mm/rev								
	0,1	0,146	0,2	0,24	0,29	0,4	0,475	0,58	0,8
1	+	+	+	+	+				
2	+	+	+	+	+	+			
3	+	+	+	+	+	+	+		
4	+	+	+	+	+	+	+	+	
5			+	+	+	+	+	+	+
6				+	+	+	+	+	+
7					+	+	+	+	+
8						+	+	+	+

values represent the average of more, at least of two, measurements. Plotted are only 2 measuring points for each value.

The basic idea of evaluation was the assumption that the relation of feed to cutting force has parabolic character as generally experienced by previous tests.

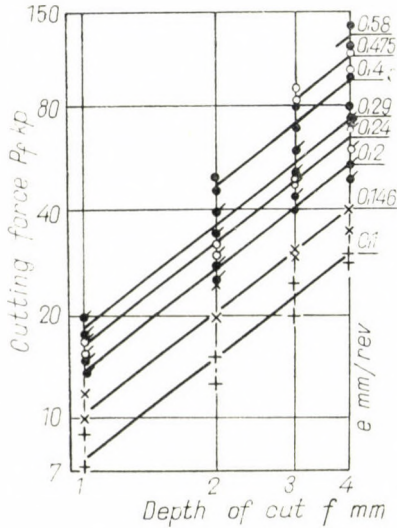


Fig. 3

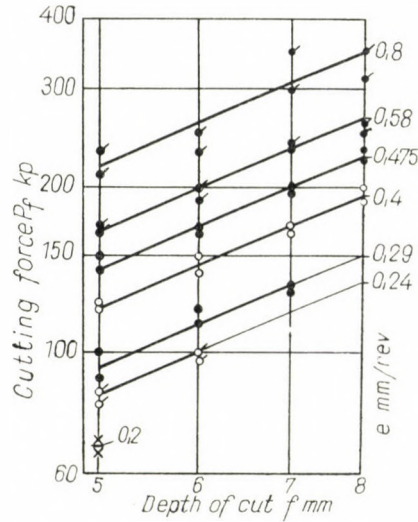


Fig. 4

The parallel straight lines, as drawn in this double logarithmic system, show a fairly good approximation of the plotted measuring points. The evaluation of these lines as curves can be expressed by the following type of formula:

$$P_f = C_e \cdot e^{0,85}.$$

The same manner of illustration serves to show the relation cutting force P_f versus depth of cut f , according to Figs 3 and 4. These curves lead to the following formula:

$$P_f = C_f \cdot f^{0,98}.$$

By a logical and systematical comparison obtained measuring results and by partial extrapolations, the following formula can be stated as the expression of the cutting force:

$$P_f = C_p \cdot e^x \cdot f^y = 54 \cdot e^{0,85} \cdot f^{0,98}.$$

The value of C_p i.e. a constant representing the cutting force necessary from the given material, to remove by means of the tool as determined, a chip having a section area of $f \cdot e = 1 \times 1 \text{ mm}^2$ is, by basing this determination of the hardness and the tensile strength, proportional to values found in known handbooks with reference to steel tests.

Exponent x of the feed is greater than the corresponding exponent referring to steel. By precise and detailed calculations carried out in taking all the available measuring results into account, this exponent is found when feed is reduced to be a bit less and when feed is increased to be greater than the above fixed average value of $x = 0,85$.

Exponent y of the depth of cut is less than the corresponding exponent for the cutting operation of other metals. Besides, this exponent is characterized by the same rule as the exponent x . With smaller values of depth of cut it is less and with larger values of depth of cut it is greater than the above fixed average value (0,98).

A further research work was done, partly on the basis of a thorough recalculation of experimental results, partly by carrying out further experimental results, partly by carrying out further experiments in order to find some regular relation between the chip thickness and the specific cutting force. As is known from literary sources, some authors preferred to take the specific cutting force ($k = P_f/q \text{ kp/mm}^2$) and the change of its value as a basic factor of inferences on the ground of experiments, that could help us to a more exact knowledge of the whole cutting process (see e.g. [2, 14]).

LEYENSETTER was the first to introduce the term of a chip thickness [3] for research work in the field of cutting technology. According to this definition, the chip thickness is determined as the original chip section divided by the length of the tool edge in action. This is, by using conventional symbols:

$$e_k = \frac{e \cdot f}{l}$$

Relying on approximate calculations, it is usual to take, instead of the length of the tool edge l , the chip width (l') into account. This method does not allow for a real consideration of the rounding-off the tool edge and of the tool's secondary cutting edge. Chip width is generally expressed, for straight edged cutting tools, by the formula: $l' = f/\sin \alpha$. For our purposes, we calculated the edge length in action by using the formula:

$$l = \frac{f - r(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} + 2r \frac{\alpha}{360} + r \operatorname{arc} \sin \frac{e}{2r}$$

For routine calculations in the workshop, the simplification by introducing the chip width is permissible, but for the purposes of scientific research,

we had to look for another method of estimation. Doing so, we have found that instead of calculating the mean chip thickness (a) by taking the chip width (l') into account, it is better to determine the chip thickness e_k on the basis of the length of edge being theoretically in action (l).

First, experimental values directly obtained were recalculated. On the basis of the depth of cut, of the feed, of the tip radius and of the setting angle of the main cutting edge, it is possible to determine the value of e_k . Again, the value of k can be calculated by the cutting force and the chip area.

In Table II, the course of calculation is shown by means of a partial computing operation. For comparison's sake, the table contains, besides the chip thickness (e_k) also the values of the mean chip thickness (a).

Table II

f , mm	e , mm/rev	e_k , mm	P_f , kp	q , mm ²	k , kp/mm ²	a , mm
3	0,2	0,135	40	0,6	66,6	0,142
3	0,29	0,196	55	0,87	64,1	0,206
3	0,475	0,306	84	1,42	59,1	0,336
4	0,29	0,199	74	1,16	63,6	0,206
5	0,29	0,202	91	1,45	62,7	0,203

The curves in Figs 5 and 6 were obtained from recalculated results after cumbersome computing operations and geometrical constructions were carried out. In these figures measuring points are plotted in order to keep the diagrams more conspicuous.

In Fig. 5 the curve represents the relation of the specific cutting force and the chip thickness. The curve can be considered as a fairly good approximation of the measuring points obtained with various values of feed and depth of cut.

Obviously, the statement seems to be well motivated according to which, from the practical viewpoint, the specific cutting force is but a function of the chip thickness, of course by the given conditions and within the ranges of measurements observed when testing the actual material machined. The mathematical expression of this curve (Fig. 5) is found in the formula:

$$k = \frac{50}{e_k^{0,145}} .$$

As seen from Fig. 5, the diminution of the specific cutting force, in consequence of an increase of the chip thickness, is relatively slower than in the case of steel machining. Therefore, when feed becomes greater, — by keeping

the chip area constant — no sensible decrease of the specific cutting force can be expected. This fact is obviously able to reinforce the validity of the formula:

$$P_f = C_e \cdot e^{0,85},$$

that was obtained from the previous tests.

The relation of the specific cutting force and the chip area is shown in the curves in Fig. 6.

For plotting the curves, feed values and depth of cut values served as parameters. These diagrams make the statement plausible that the values of

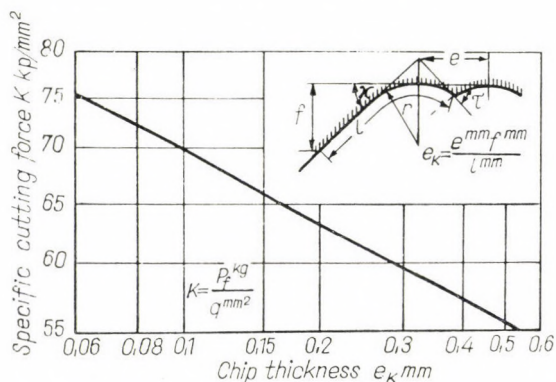


Fig. 5

the specific cutting force undergo relatively greater variations, under the influence of small values of the parameters, and they show smaller variations under the influence of greater parameter values.

According to the diagram in Fig. 6 that was plotted on the basis of meticulous calculations the following statement seems to be motivated:

The thesis most preferred by acknowledged scientists, namely that the relation between the specific cutting force and the chip area is characterized, quite independently from the depth of cut, by a hyperbolic curve, cannot be maintained. Such a relation is valid only for a single depth of cut, and cannot be accepted as a general rule. (In Fig. 6, this can be seen when considering the specific cutting force values belonging to depth of cut values $f = 2, 3, 4$ mm for the case of a chip area of $q = 0,4$ mm².) In other diagrams, although of a similar character as the one in Fig. 6, the relation $k - q$ can be illustrated only by a multitude of straight lines and not by a single line (as in Fig. 6). It follows from what has been said above, that the relation between the cutting force and the values of depth of cut and feed, respectively, finds its motivation in the relation between the specific cutting force and the chip

thickness. Variations as found during the tests within small intervals can be motivated by the same reason.

It should be noted that to the best of our knowledge, nowhere and never have tests been carried out for the purpose to throw light on this problem by making such a great deal of measurements and computing operations than it was done during our experiments with the task to investigate cutting conditions of light alloys. Our results culminate in the perception that the right determination of the cutting force is only possible by taking the chip thickness and the specific cutting force into consideration, whereas the hypothesis according to which the relation between the specific cutting force and the

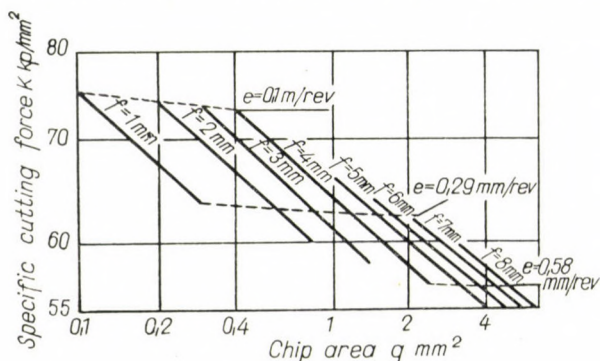


Fig. 6

chip area can be represented by a strict mathematical formula should be considered as refuted.

As a final result of our investigations, a nomograph was constructed mainly for practical purposes (Fig. 7). With a view of possibly varying values of the setting angle α , the diagram contains some auxiliary lines for the sake of corresponding corrections. Of course, these auxiliary lines are the result of supplementary tests.

III. Relation between the Cutting Force and the Cutting Speed

In connection with bringing about so many new kinds of structural materials, it is to be understood why in the last three decades scientists were anxious to investigate the influence exerted by the cutting speed on the cutting force. At the beginning of this century, NICOLSON and TAYLOR [4] preferred the view that the magnitude of the cutting force is quite independent of the cutting speed. Again, it was LEYENSETTER [5] who carried out measurements according to which the theorem seemed to be motivated that the relation between the cutting force and the cutting speed can be illustrated by a hyperbolic curve.

In our days, the prevailing opinions can be classed into three groups. According to the first opinion, practically there is no fixed rule that could be applied to the influence of the cutting speed on the cutting force. According to researches of the second group, an increase of the cutting speed acts, up to a certain limit value, diminishing with the cutting force, but starting from a limit value, the force remains unchanged in spite of the further increase of the cutting force. Again, the opinion of the third group is the following: when cutting speed is increased, a certain fluctuation of the cutting force takes place. This period is followed by a decrease of the cutting force and finally this force remains constant.

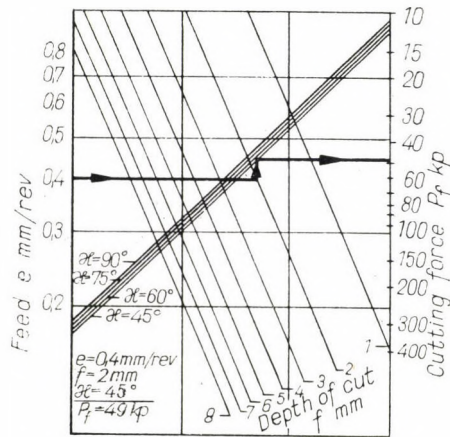


Fig. 7

By considering experiments that were carried out by various scientists we find that the above mentioned three differing opinions are generally adopted. To quote COENEN [6], according to his experiments made on four kinds of aluminium alloys, the change of the cutting speed has no bearing on the cutting force. Again, SCHALLBROCH and SCHAUMANN [7] observed that the force shows a monotonic decrease when the cutting speed increases, although, according to some experiments made by SCHALLBROCH and BETHMANN [8] the force increases at the beginning and afterwards diminishes. Most interesting informations are to be found in reports about the latest experiments carried out by others [11–13].

Various comments were construed in order to find the reasons of the observed effects. The factors to which some influence was ascribed were generally the cutting temperature, the coefficient of friction, the built up edge, the tensile strength of the workpiece, and the coefficient of deformation (of the chip).

We started with tests to determine, by means of dynamometric methods, the relation between cutting force and cutting speed. Doing so, the measuring range was characterized by a cutting speed $v = 10 \div 600$ m/min, by values of the depth of cut $f = 2$ and 3 mm, and by values of the feed $e = 0,1; 0,2; 0,28; 0,292; 0,36; 0,4$ and $0,475$ mm/rev.

Some measuring results are to be seen in Figs 8, 9 and 10. For the purpose of a clear visibility only the points that correspond to average values are plotted. The chip area is noted beside each curve.

The diagrams show the general trend that the cutting force decreases when the cutting speed increases. Only, this decrease is not continuous. The

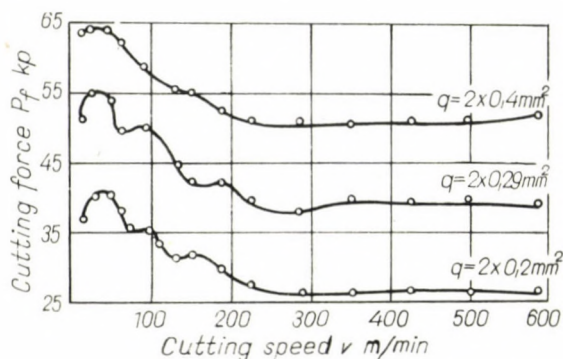


Fig. 8

wavy form of the curves cannot be considered as some error of measurement. In view of this waviness it seems to be motivated that the third view-point among those that are enumerated above should be accepted, namely, under the given conditions when the cutting speed increases, the cutting force assumes a fluctuation combined with a lowering trend, and reaches a final low value that remains practically constant when the cutting speed arrived at abt. 250 m/min. The general feature of the curves seems to coincide with the thesis laid down by HORNUNG [2] according to which the cutting force reaches its final low value at a lower cutting speed when a greater feed is chosen.

The second series of tests was carried out in order to find some explanation for the curves in connection with the coefficient of deformation.

When the coefficient of deformation was examined, it seemed probable that some change of the chip root was to be assumed [9].

The coefficient of chip deformation can be determined by measuring the chip length and the chip area [10]. In our tests, we compared the chip area values.

To this end, the first series of experiments served to throw light on the relation of cutting force versus cutting speed, within the speed range $v = 15 \div 500$ m/min. For each measurement we carefully kept some pieces of chip separated. These served then for the determination of the chip deformation coefficient.

The cut areas of chips were polished and measured by planimetry (photomicrograph 10-times magnification). The coefficient of chip deformation

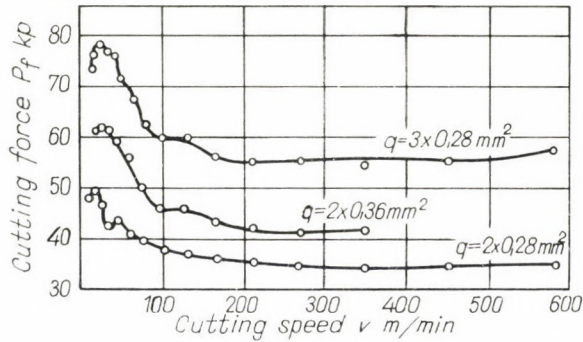


Fig. 9

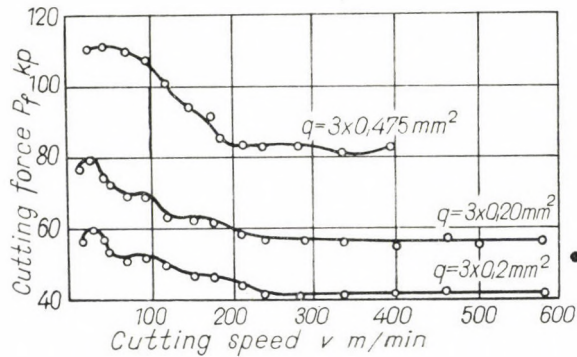


Fig. 10

is obtained by the ratio of the measured value to the calculated one (this latter being $q = e \cdot f$).

These two groups of results (measured values of force and determined values of the deformation coefficient) are gathered on one diagram of Fig. 11. In this system of coordinates, the cutting speed scale is placed on the abscissa axis, while on the ordinate axis there are two scales: one for the force values and another for the deformation coefficient values corresponding to a calculated chip-area (this being equal to $3 \times 0,4 \text{ mm}^2$).

The similarity between the two curves is conspicuous. (The slight waviness on the curves of deformation coefficient can probably be ascribed to some mistakes committed during the preparation before polishing.) Consequently, the thesis seems to be motivated, according to which, for the given case, the variation of the cutting force depends on the variation of chip deformation as a function of cutting speed.

From the processes observed the statement can be inferred that the deformations of the chip and the chiproot exert a decisive influence on the

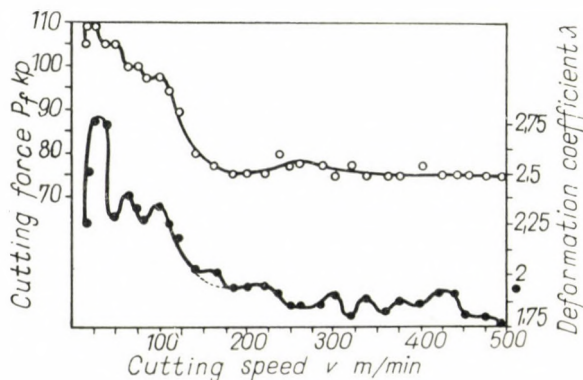


Fig. 11

variation of the cutting force. The nature of the measuring results is suitable to support the opinion according to which a further investigation of chip deformation is greatly needed. The importance of this kind of tests is most obvious by the experience that the obtained results originate not from a direct observation of chiproot deformation but by means of indirectly made investigations, besides throwing light on the essential feature of the cutting process.

IV. Consequences

In summarizing the results obtained from the investigation of the relation between cutting force and cutting speed, the following facts were found:

a) The mathematical formula expressing the relation of cutting force to chip area runs as follows:

$$P_f = 54 \cdot e^{0.85} \cdot f^{0.98}.$$

The effective value of the exponents belonging to smaller or larger values of feed and of depth of cut always deviates from the average exponent as given above. These differences can be explained by the variations of the specific cutting force.

b) In the given range of the tests, the function of specific cutting force versus chip thickness is represented by the formula:

$$k = \frac{50}{e_k^{0,145}}.$$

This equation can be considered as an explanation for the cutting force depending on the chip area.

c) From the diagram in Fig. 6, it may be inferred that the opinion of some authors, according to which the relation between the specific cutting force and the chip area is characterized by a hyperbolic curve, cannot be maintained.

d) Within the given conditions and with the material tested, the cutting force changes when the cutting speed changes. Only, the decrease of the force is not monotonic but the respective curve shows a wavy form. Practically, in the speed range greater than 250 m/min, the change of force is negligible. The cutting speed values usually applied in connection with the conventional values of tool life belong to the range here mentioned ($v > 250$ m/min).

e) The nature of the variation of the cutting force as a function of cutting speed finds its explanation by taking the change of chip deformation or more exactly the change of deformation in the chiproot into consideration.

REFERENCES

1. KARDOS, Á.: Nyúlásmérőszalagokkal működő forgácsolási erőmérő készülék (Dynamometer of the Strain Gauge Type for the Measurement of the Cutting Force). *Mérés és Automatika* 9 (1958), 278.
2. HORNUNG, A.: Forgácsolási elmélet és forgácsoló szerszámok (Textbook on Machining Theory and Machining Instruments). Tankönyvkiadó, Budapest 1953.
3. LEYENSETTER, W.: Die Bestimmung der Bearbeitbarkeit der Werkstoffe und des Abnutzungswiderstandes der Schneidwerkzeuge. *Maschinenbau* (1927), 1177.
4. TAYLOR, F. V.—WALLICHS, A.: Über Drehbarkeit und Werkzeugstähle. Springer, Berlin 1908.
5. LEYENSETTER, W.: Grundlagen und Prüfverfahren der Zerspanung. Teubner, Leipzig 1938.
6. COENEN, M.: Schnittdruckversuche an Leichtmetallwerkstücken. *Maschinenbau* (1940), 944.
7. SCHALLBROCH, H.—SCHAUMANN, H.: Schnittkraftmessung beim Drehen. *Maschinenbau* (1940), 235.
8. SCHALLBROCH, H.—BETHMANN, H.: Kurzprüfverfahren der Zerspanbarkeit. Teubner, Leipzig 1950.
9. KAZINCZY, L.: Az acél forgácsolása közben a forgácstőben létesülő alakváltozások vizsgálata (Investigation of Chiproot Deformation during the Machining of Steel). Budapest 1939.
10. KARDOS, Á.: A forgácsalakváltozási tényező meghatározása (Determination of the Coefficient of Chip Deformation). *Mérés és Automatika* 10 (1959), 273.
11. ЛИВШИЦ, В. Ш.: Некоторые особенности процесса резания алюминиевых сплавов. *Изв. вузов машиностроения* (1963); № 1, 140.
12. Untersuchungen an spanabgebenden Bearbeitungsverfahren. 21. Forschungsber. Lab. Werkzeugmasch. u. Betriebslehre, Aachen 1962.
13. SIGEO, D.—SUSUMU, K.: A study on the machinability of wrought aluminium alloy. *Light metal* (1963); Nr. 6, 400.
14. HORNUNG, A.: Methode zur Bestimmung der Hauptschnittkraft und der Spanungsleistung. *Fertigungstechnik u. Betrieb* (1963); Nr. 9, 545.

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER SCHNITTKRAFT UND DEN ZERSPANUNGS-
FAKTOREN BEIM DREHEN EINER ALUMINIUMLEGIERUNG

Á. KARDOS

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die von dem Vorschub, der Schnitttiefe und der Schnittgeschwindigkeit auf die Schnittkraft ausgeübte Wirkung behandelt. Verfasser beschreibt den Verlauf der Experimente und gibt die Resultate an. Ferner wird, auf Grund zahlreicher Messungen und eigener Kalkulationen, der Zusammenhang zwischen Schnittkraft und mittlerer Spandicke bzw. Spanquerschnitt analysiert. Die Änderung der Schnittkraft als Funktion der Schnittgeschwindigkeit wird durch Einbeziehen des Spandeformationskoeffizienten erklärt.

LES RELATIONS ENTRE LA FORCE DE COUPE ET LES CARACTÉRISTIQUES
DE COUPE AU TOURNAGE DES ALLIAGES D'ALUMINIUM

Á. KARDOS

RÉSUMÉ

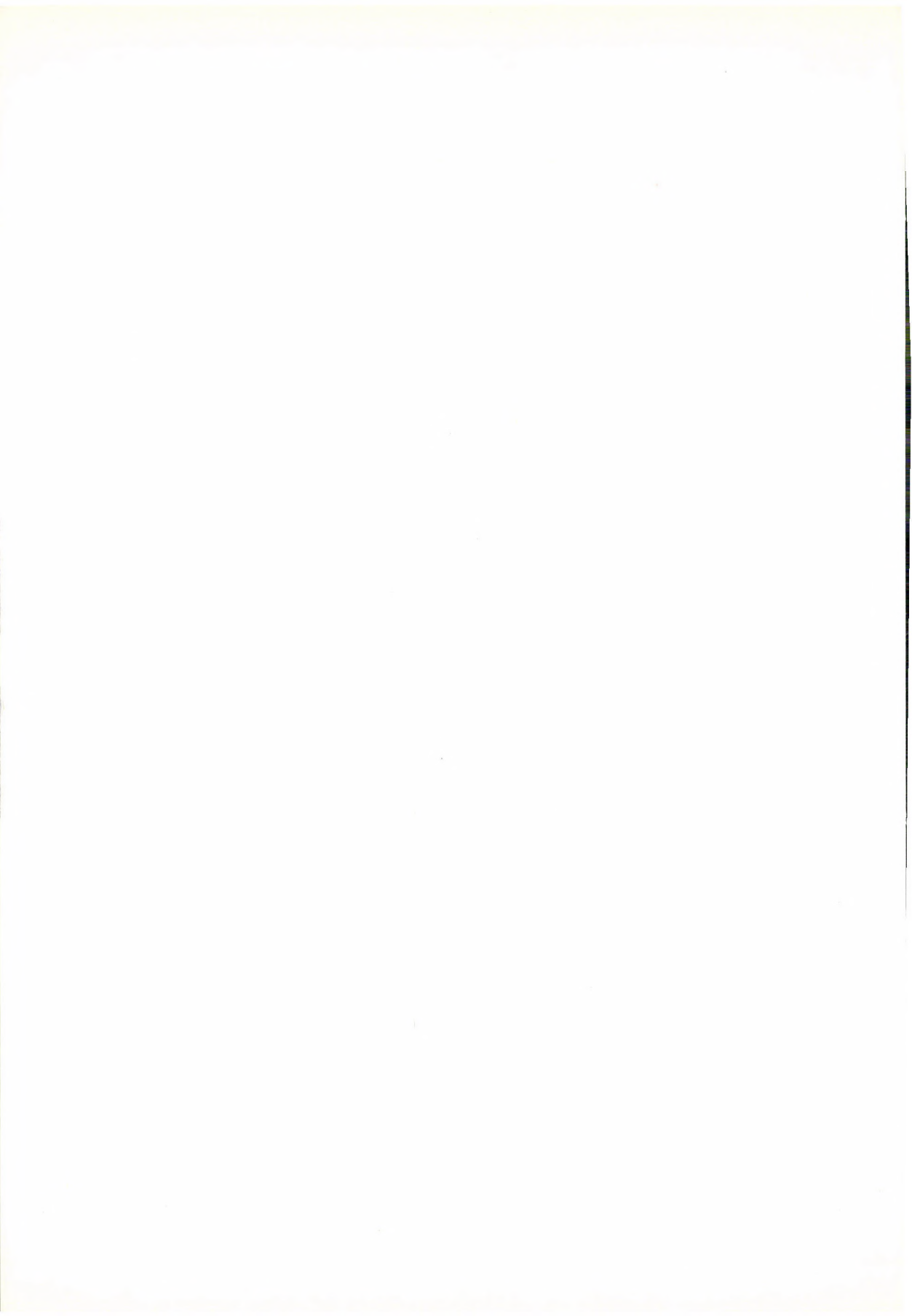
L'étude traite de l'influence des variations de l'avance, de la profondeur et de la vitesse de coupe sur la force de coupe et indique la marche et les résultats des essais. La relation entre la force de coupe spécifique et l'épaisseur moyenne, resp. la section des copeaux est ensuite analysée sur la base d'un grand nombre de mesures et de calculs. La variation de la force de coupe en fonction de la vitesse de coupe est expliquée par l'analyse du facteur de variation de la forme des copeaux.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ УСИЛИЕМ РЕЗАНИЯ И ДАННЫМИ РЕЗАНИЯ
ПРИ ТОКАРНОЙ ОБРАБОТКЕ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

А. КАРДОШ

РЕЗЮМЕ

Статья занимается воздействием, оказываемым подачей, глубиной резания и скоростью резания на усилие резания. Излагается процесс проведения экспериментального опыта и полученные при нем результаты. На основе большого числа измерений и расчетов дается анализ зависимости между удельным усилием резания и средней толщиной стружки, или же сечением стружки. Исследованием показателя изменения формы стружки объясняется изменение усилия резания в функции скорости резания.



ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ К ОШИБКАМ В РАЗМЕРАХ ЕГО ЗВЕНЬЕВ

В. БАРДОШ канд. техн. наук

СЛОВЕНСКА ВИСОКА ШКОЛА ТЕХНИЦА, БРАТИСЛАВА

[Поступило 5. ноября 1964 г.]

Автор статьи описывает метод, с помощью которого можно определить чувствительность положения и движения ведомого звена или точки ведомого звена плоского механизма к первичным ошибкам. Метод исходит из первичных ошибок в структуральных размерах плоского механизма. Автор сначала излагает основные понятия, потом описывает весь метод и, наконец, констатирует, что для определения чувствительности действительных механизмов к первичным ошибкам в структуральных размерах надо, пользуясь схемой механизма, определить первую собственную передаточную функцию и отдельно первые фиктивные передаточные функции. Исходя из этих данных, можно кроме определения чувствительности также достичь понижение влияния первичных ошибок, или довести их влияние до минимума.

1. Введение

Статья ставит целью объяснить и описать метод, с помощью которого можно определить чувствительность положения и движения ведомого звена или точки ведомого звена плоского механизма к первичным ошибкам [1, 2] в структуральных размерах плоского механизма, причем под понятием структуральные размеры подразумеваем размеры кинематической схемы данного механизма; например, в механизмах на рис. 1 размеры h , b , $\overline{O_1A} = R$, $\overline{OB} = l$ и k являются структуральными размерами данных плоских механизмов.

В дальнейшем тексте исследуются только плоские механизмы, которые кратко называем просто механизмами.

2. Основные понятия

Под понятием механизм будем понимать систему звеньев (тел), соединенных кинематическими парами с одним неподвижным звеном относительно релятивно неподвижной плоскости и с одной степенью свободы движения, т. е. с одним ведущим звеном. У данного механизма одно ведомое звено, т. е. звено, которое должно выполнять требуемую полезную работу.

Механизм, которого все структуральные размеры довольно точны, называется *идеальным механизмом* [2].

Идеальных механизмов, таким образом, не существует. Нужды механизации и автоматизации требуют, чтобы изготовленный механизм отличался от идеального механизма минимально.

Механизм, который построен на основе идеальной схемы, называется *действительным механизмом*. Структуральные размеры действительного механизма отличаются от структуральных размеров идеального механизма.

Пусть дан, например, n -звенный идеальный и соответствующий ему действительный механизм.

Пусть имеют идеальный и соответствующий ему действительный механизм m структуральных размеров; затем пусть, например, размер параметер i -того звена n -звенного идеального механизма будет q_i ; А соответствующий ему размер n -звенного действительного механизма потом будет q_{is} . Таким образом, имеем:

$$q_{is} = q_i + \Delta q_i, \quad (1)$$

где Δq_i — т. н. первичная ошибка [1, 2] в структуральном размере q_{is} , на которую отличается структуральный размер действительного механизма от соответствующего ему структурального размера идеального механизма; индексом s обозначаются параметры, соответствующие действительному механизму.

Первичная ошибка Δq_i может быть положительной, отрицательной или иногда может быть равной нулю.

Первичную ошибку Δq_i можно определить вычислением или измерением.

Предлагаемые понятия представляют собою основы учения о точности механизмов [1, 2], предметом которого является исследование разностей в положении или движении действительного и соответствующего ему идеального механизма; идеальная схема этого механизма известна.

Основателем учения о точности механизмов является академик *Н. Г. Бруевич* [3].

Учение о точности механизмов имеет три основные части:

- а) исследование геометрической точности;
- б) исследование кинематической точности и
- в) исследование динамической точности механизмов [2].

Эта статья по своему содержанию относится к части геометрической точности механизмов.

При исследовании геометрической точности механизмов можно исходить из функции положения ведомого звена или функции положения точки ведомого звена [4]; эти функции называются *геометрическими характеристиками идеальных механизмов*.

Пусть дан n -звенный идеальный механизм. Функцией положения ведомого звена или функцией положения точки ведомого звена называется

функция

$$\delta = p(q_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (2)$$

где δ параметр, определяющий положение ведомого звена или точки ведомого звена относительно плоскости, определенной координатными осями, которые неподвижно соединены со стойкой данного идеального механизма;

q_i при $i = 1$ — параметр, определяющий положение ведущего звена или положение точки ведущего звена относительно некоторого другого звена;

q_i при $i = 2, 3, \dots, m$ независимые друг от друга параметры, определяющие структуральные размеры исследованного идеального механизма.

Характеристической особенностью функции положения ведомого звена или точки ведомого звена является, что эта функция не зависит от темпа движения идеального механизма, а зависит только от структуральных размеров и от параметра, который определяет положение ведущего звена или положение точки ведущего звена.

3. Описание метода

Метод определения чувствительности механизма к первичным ошибкам в структуральных размерах основан на понятиях ошибки положения ведомого звена, ошибки положения точки ведомого звена, ошибки положения действительного механизма или ошибки положения точки действительного механизма [2].

Ошибкой положения ведомого звена или точки ведомого звена называется разность в положении ведомого звена действительного и соответствующего ему идеального механизма, которая существует вследствие существования первичных ошибок Δq_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Ошибкой положения действительного механизма или ошибкой положения точки действительного механизма называется разность в положении ведомого звена или точки ведомого звена действительного механизма и ему соответствующего идеального механизма, которая появилась вследствие существования первичных ошибок Δq_i , где $i = 2, 3, \dots, m$.

Разность между ошибкой положения ведомого звена или ошибкой положения точки ведомого звена и ошибкой действительного механизма или ошибкой положения точки действительного механизма мы учитываем потому, что ошибка положения действительного механизма или ошибка положения точки действительного механизма выражает влияние первичных ошибок в структуральных размерах на положение ведомого звена, и ошибка положения ведомого звена или ошибка положения точки ведомого звена учитывает также ошибку параметра q_1 ; параметр q_1 определяет положение ведущего звена, это означает, что полученная ошибка выражает также влияние ошибки привода.

Ошибка положения ведомого звена или ошибка положения точки ведомого звена исследуется потому, что ведомое звено или его точка совершают требуемое движение и от точности положения или движения ведомого звена зависит также точность реализации требуемой операции.

Указанные выше ошибки вытекают из уравнений (1) и (2) и рассмотрены в [1] и [2].

Ошибка положения ведомого звена или ошибка положения точки ведомого звена будет:

$$\Delta\delta = \mu_{2n} \Delta q_1 + \sum_{i=2}^n \mu_{qi n} \Delta q_i. \quad (3)$$

Ошибка положения действительного механизма или ошибка положения точки действительного механизма будет:

$$\Delta\delta_M = \sum_i \mu_{qi n} \Delta q_i, \quad (i = 2, 3, \dots, m). \quad (4)$$

Взаимосоотношение между ошибкой положения ведомого звена и ошибкой положения действительного механизма вытекает из уравнений (3) и (4)

$$\Delta\delta = \mu_{2n} \Delta q_1 + \Delta\delta_M. \quad (5)$$

Символом μ_{2n} обозначена величина, называемая *первой собственной передаточной функцией* идеального механизма [5]. Она определяется по формуле

$$\mu_{2n} = \frac{\partial\delta}{\partial q_1}. \quad (6)$$

Величины $\mu_{qi n}$ называются *первыми фиктивными передаточными функциями* идеального механизма [6]. Имеем

$$\mu_{qi n} = \frac{\partial\delta}{\partial q_i}, \quad (i = 2, 3, \dots, m). \quad (7)$$

Из уравнений (3) и (4) вытекает, что ошибка положения ведомого звена или ошибка положения точки ведомого звена также, как и ошибка положения действительного механизма или ошибка положения точки действительного механизма при данных первичных ошибках Δq_i является линейной зависимостью от первых передаточных функций; из этого вытекает, что чем меньшими будут первые передаточные функции, тем меньшей будет, например, ошибка положения действительного механизма или ошибка положения точки действительного механизма.

Наоборот, при данных первых передаточных функциях, которые заданы геометрией механизма, будет, например, ошибка положения действительного механизма или ошибка положения точки действительного механизма тем меньше, чем меньшими будут первичные ошибки Δq_i .

Чувствительность положения или движения ведомого звена или действительного механизма к первичным ошибкам можно определить следующим образом.

Действительный механизм является наиболее чувствительным к этой первичной ошибке Δq_i параметра q_i , первая передаточная (собственная или фиктивная) функция которого достигает относительно максимальных значений в сравнении со значениями других первых передаточных функций.

Действительный механизм, наоборот, является очень малочувствительным к этой первичной ошибке Δq_i параметра q_i , первая передаточная (собственная или фиктивная) функция которого достигает минимальных значений в сравнении со значениями других первых передаточных функций.

Это значит, что при необходимости повышения точности положения или движения действительного механизма надо, прежде всего, уменьшить первичную ошибку по тому размеру, по ошибке которого исследуемый действительный механизм является наиболее чувствительным.

Описанные свойства позволяют также сравнить несколько вариантов механизмов, которые должны реализовать подобные положения или движения ведомого звена в отношении чувствительности к первичным ошибкам Δq_i по параметрам q_i .

Менее чувствительной или наименее чувствительной к первичным ошибкам Δq_i по параметрам q_i является та схема, первая собственная передаточная функция и первые фиктивные передаточные функции которой достигают минимальных значений по сравнению со значениями первых передаточных функций других принятых во внимание схем.

Пусть, например, имеем шестизвенный механизм (рис. 1а); ведущим является звено 2, а ведомым — звено 6. Положение точки C звена 6 относительно системы координат x, y с началом в точке O и единичными векторами i, j , где

$$i^2 = 1, \quad j^2 = 1$$

определяет функция положения (рис. 1а)

$$s = k + l \frac{R \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + b^2 + 2 Rb \cos \varphi}}. \quad (8)$$

Ошибка положения точки C этого механизма при данном угле φ будет

$$\Delta s_M = \mu_{k6} \Delta k + \mu_{l6} \Delta l + \mu_{b6} \Delta b + \mu_{R6} \Delta R, \quad (9)$$

Таблица 1

	μ_{kb}	μ_{lb}	μ_{ba}	μ_{Ra}
0°	1,000	0,000	0,000	0,000
15°	1,000	0,055	-0,079	0,298
30°	1,000	0,106	-0,153	0,582
45°	1,000	0,154	-0,229	0,863
60°	1,000	0,197	-0,301	1,141
75°	1,000	0,230	-0,350	1,335
90°	1,000	0,254	-0,426	1,612
105°	1,000	0,262	-0,470	1,788
120°	1,000	0,254	-0,491	1,864
135°	1,000	0,223	-0,463	1,762
150°	1,000	0,167	-0,392	1,433
165°	1,000	0,092	-0,220	0,838
180°	1,000	0,000	0,000	0,000
195°	1,000	-0,092	0,220	-0,838
210°	1,000	-0,167	0,392	-1,433
225°	1,000	-0,223	0,463	-1,762
240°	1,000	-0,254	0,491	-1,864
255°	1,000	-0,262	0,470	-1,738
270°	1,000	-0,254	0,426	-1,612
235°	1,000	-0,230	0,350	-1,383
300°	1,000	-0,197	0,301	-1,141
315°	1,000	-0,154	0,229	-0,868
330°	1,000	-0,106	0,153	-0,582
345°	1,000	-0,055	0,079	-0,298
360°	1,000	0,000	0,000	0,000

Из диаграммы рис. 2 далее вытекает, что при подходящем выборе соотношения между первичными ошибками Δb и ΔR можно (теоретически) устранить влияние этих первичных ошибок; в действительности возможно только понижение влияния этих первичных ошибок до минимума, потому что и первичные ошибки Δb и ΔR невозможно реализовать абсолютно точно.

Требуемое взаимоотношение между первичными ошибками Δb и ΔR можно определить с помощью уравнений (12) и (13); итак

$$\frac{\mu_{Rb}}{\mu_{bb}} = - \frac{b}{R} \quad (14)$$

или

$$\mu_{R6} + \mu_{b6} \frac{b}{R} = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (14) или (15) при умножении на ΔR имеем:

$$\mu_{R6} \Delta R + \mu_{b6} \frac{b}{R} \Delta R = 0. \quad (16)$$

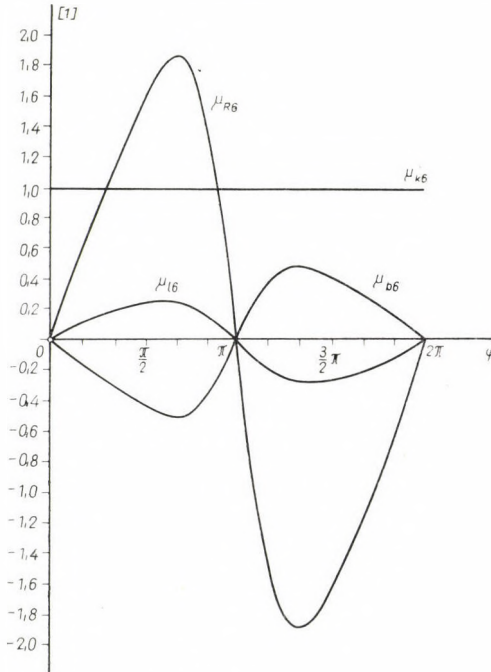


Рис. 2

Из уравнения (16) вытекает, что

$$\Delta b = \frac{b}{R} \Delta R$$

или же

$$\frac{\Delta b}{\Delta R} = \frac{b}{R} \quad (17)$$

причем

$$\operatorname{sgn} \Delta b = \operatorname{sgn} \Delta R.$$

Если реализуется соотношение между первичными ошибками Δb и ΔR , выраженное уравнением (17), то потом эти первичные ошибки не влияют на положение или движение точки C механизма рис. 1а.

Исследуем теперь других два шестизвенных механизма, которые предназначены для реализации той самой операции как механизм на рис. 1а (рис. 1б и 1в). Интересным является, что оба эти механизма имеют при оди-

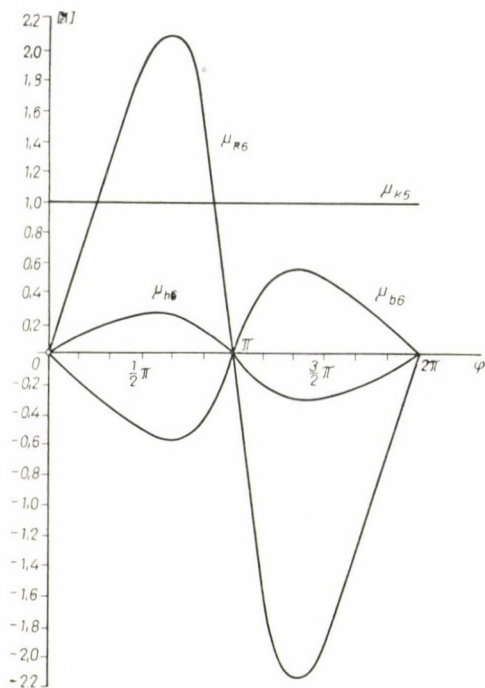


Рис. 3

наковых размерах одинаковые функции положения точки С звена 6. Функция положения точки С механизма рис. 1б и 1в имеет вид:

$$s = k + h \frac{R \sin \varphi}{b + R \cos \varphi} . \tag{18}$$

Ошибка положения точки С этих механизмов при данном угле φ будет:

$$\Delta s_M = \mu_{k6} \Delta k + \mu_{h6} \Delta h + \mu_{b6} \Delta b + \mu_{R6} \Delta R , \tag{19}$$

где

$$\mu_{k6} = 1 , \tag{20}$$

$$\mu_{h6} = \frac{R \sin \varphi}{b + R \cos \varphi} , \tag{21}$$

$$\mu_{b6} = - \frac{Rh \sin \varphi}{(b + R \cos \varphi)^2} , \tag{22}$$

$$\mu_{R6} = \frac{bh \sin \varphi}{(b + R \cos \varphi)^2} . \tag{23}$$

Для случая $R = 0,2 \text{ м}$, $b = 3,8R$ и $h = 7,1R$ (рис. 1б, в) значения первых фиктивных передаточных функций, которые определены уравнениями (20) — (23), указаны в табл. 2; на основе величин, табл. 2 можно произвести

Таблица 2

	$\mu_{k\epsilon}$	$\mu_{h\epsilon}$	$\mu_{b\epsilon}$	$\mu_{R\epsilon}$
0°	1,000	0,000	0,000	0,000
15°	1,000	0,054	-0,081	0,312
30°	1,000	0,106	-0,163	0,632
45°	1,000	0,155	-0,246	0,958
60°	1,000	0,201	-0,332	1,283
75°	1,000	0,238	-0,416	1,617
90°	1,000	0,263	-0,491	1,903
105°	1,000	0,272	-0,546	2,119
120°	1,000	0,262	-0,564	2,175
135°	1,000	0,229	-0,522	2,031
150°	1,000	0,170	-0,411	1,594
165°	1,000	0,091	-0,230	0,885
180°	1,000	0,000	0,000	0,000
195°	1,000	-0,091	0,230	-0,885
210°	1,000	-0,170	0,411	-1,594
225°	1,000	-0,229	0,522	-2,031
240°	1,000	-0,262	0,564	-2,175
255°	1,000	-0,272	0,546	-2,119
270°	1,000	-0,263	0,491	-1,903
285°	1,000	-0,238	0,416	-1,617
300°	1,000	-0,201	0,332	-1,283
315°	1,000	-0,155	0,246	-0,958
330°	1,000	-0,106	0,163	-0,632
345°	1,000	-0,054	0,081	-0,312
360°	1,000	0,000	0,000	0,000

сравнение отдельных первых фиктивных передаточных функций. На основе табл. 2 можно также построить графики первых фиктивных передаточных функций (рис. 3).

Из диаграммы рис. 3 вытекает, что механизмы рис. 1б, в наиболее чувствительны к первичной ошибке ΔR в структуральном размере R кривошипа 2 и очень малочувствительны к первичной ошибке Δh в структуральном размере h .

Если сравнить диаграммы рис. 2 и 3, то видно, что при заданных размерах менее чувствительным к первичным ошибкам в структуральных размерах является механизм рис. 1а.

Чувствительность механизмов рис. 1б, в к первичной ошибке ΔR можно уменьшить выбором соотношения между первичными ошибками Δb и ΔR . Из уравнений (22) и (23) имеем:

$$\frac{\mu_{R6}}{\mu_{b6}} = - \frac{b}{R} . \quad (24)$$

Из уравнения (24) получаем:

$$\mu_{R6} + \mu_{b6} \frac{b}{R} = 0 . \quad (25)$$

Если помножить уравнение (25) на величину ΔR , получим:

$$\mu_{R6} \Delta R + \mu_{b6} \frac{b}{R} \Delta R = 0 ;$$

если предположим:

$$\frac{b}{R} \Delta R = \Delta b ,$$

тогда

$$\frac{\Delta b}{\Delta R} = \frac{b}{R} , \quad (26)$$

где

$$\text{sgn } \Delta b = \text{sgn } \Delta R ,$$

потом влияние первичных ошибок ΔR и Δb на положение или движение точки С исследованных механизмов будет минимальным (теоретически оно будет отсутствовать); для выбранных нами размеров необходимо, чтобы

$$\Delta b = 3,8 \Delta R , \quad (27)$$

причем

$$\text{sgn } \Delta b = \text{sgn } \Delta R . \quad (27a)$$

Если реализуется соотношение, выраженное уравнениями (27) и (27a), то механизм на рис. 1б и 1в является менее чувствительным к первичным ошибкам в структуральных размерах, как механизм на рис. 1а, потому что в этих механизмах влияют на положение или движение только первичные ошибки Δh и Δk .

4. Заключение

При определении чувствительности механизмов к первичным ошибкам в структуральных размерах надо знать схему идеального механизма, на основе которого возникает действительный механизм; с помощью этой схемы можно определить первую собственную передаточную функцию и первые фиктивные передаточные функции алгебраическим, графико-алгебраическим или графическим [5, 6] путем.

После определения первых передаточных функций уже можно приступить к определению чувствительности или же, если имеется несколько вариантов, можно определить наименее чувствительную по отношению к первичным ошибкам в структуральных размерах схему.

При определении значений первых фиктивных передаточных функций можно применять вспомогательные механизмы [3, 1] или методы, которые вытекают из вспомогательных механизмов, причем их построение для получения требуемых результатов не является необходимым [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бардош, В.: Точность механизмов. *Машиностроительный вестник САВ* № 4, XI.
2. Бардош, В.: Развитие и современное состояние исследования точности механизмов. Сборник научных работ машиностроительного факультета СВШТ; 1962, т. 2.
3. Бруевич, Н. Г.: Точность механизмов. ОГИЗ, 1946.
4. Бардош, В.: Геометрические характеристики плоских механизмов и их кинематический смысл. *Машиностроительный вестник САВ* № 6, XII.
5. Бардош, В.: Графический, графико-алгебраический и алгебраический метод определения первой передаточной функции плоских механизмов. *Машиностроительный вестник САВ* № 3, XIII.
6. Бардош, В.: К вопросу исследования геометрической и кинематической точности плоских механизмов. Диссертация, 1962.

THE SENSITIVITY TO DIMENSIONAL ERRORS OF THE MEMBERS OF PLANE MECHANISMS

V. BARDOŠ

SUMMARY

In this paper the author describes a method for the determination of the positional and cinematic sensitivity of the guided members of plane mechanisms. He starts from the primary errors of the dimensions of plane mechanisms. Then by discussing basic concepts he describes the method and in the summary he points out that for the determination of the sensitivity to dimensional errors in real mechanisms, the first transmission eigenfunction must be determined and, separately, the first fictive transmission function, using for that the cinematic plan of the mechanism. With the aid of the transmission functions (eigen and fictive) not only the sensitivity can be determined, but it also becomes possible to diminish the influence of the primary errors, and to reduce them to a minimum.

DIE EMPFINDLICHKEIT GEGEN MASSFEHLER DER GLIEDER
BEI EBENEN MECHANISMEN

V. BARDOŠ

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser beschreibt eine Methode für die Bestimmung der Lage- und kinematischen Empfindlichkeit des geführten Gliedes von ebenen Mechanismen. Er geht von den primären Fehlern der Konstruktionsmaße der ebenen Mechanismen aus. Zuerst bespricht er die Grundbegriffe, dann beschreibt er die Methode und als Schlußfolgerung stellt er fest, daß zur Bestimmung der Empfindlichkeit gegenüber Maßfehlern in wirklichen Mechanismen mit Hilfe des kinematischen Plans die erste Eigenübersetzungsfunktion und gesondert hievon die erste fiktive Übersetzungsfunktion bestimmt werden muß. Mit Hilfe der Übersetzungsfunktionen (Eigen- und fiktive Funktion) kann nicht nur die Empfindlichkeit bestimmt werden, sondern es wird auch möglich, den Einfluß der primären Fehler zu verringern bzw. sie auf ein Minimum zu reduzieren.

LA SENSIBILITÉ DES ERREURS DIMENSIONNELLES DES MEMBRES
DANS LES MÉCANISMES PLANS

V. BARDOŠ

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une méthode permettant de déterminer dans les mécanismes plans la sensibilité positionnelle et cinématique du membre guidé. La méthode part des erreurs primaires de dimension des mécanismes plans. L'auteur faisant connaître d'abord les notions fondamentales, décrit la méthode et constate, en conclusion, que la détermination de la sensibilité aux erreurs dimensionnelles des mécanismes réels nécessite d'obtenir, à l'aide de l'épure cinématique du mécanisme, la première fonction de transmission propre et, séparément, les premières fonctions de transmission fictive. Les fonctions de transmission (propre et fictive) permettent non seulement de déterminer la sensibilité, mais aussi de diminuer l'influence des erreurs primaires et de les réduire au minimum.

DIE GEOMETRIE DES THEORETISCHEN EINGRIFFES VON MITTELS EINES KREISRINGABWÄLZWERKZEUGES ERZEUGTEN ZAHNFLÄCHEN*

I. DRAHOS

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR DARSTELLENDGEOMETRIE
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC (UNGARN)

[Eingegangen am 16. Dezember, 1964]

Man kann nach dem Wildhaber-Novikov-Prinzip zylindrische Zahnradpaare an der Forster-Kegelverzahnmaschine und Hypoidradpaare an der Gleason-Verzahnmaschine herstellen. Für solche Verzahnungen bedient man sich solcher Zahnstangen bzw. Planrädern, deren Abwälz-Zahnflächen als Rotations-Kreisringflächen ausgebildet sind, mit dem Rotationskreis als Berührungslinie. (Man kann die Zähne auch mittels einer kreisprofilierten Topfscheibe bearbeiten!) Es wird hier mit Hilfe von konstruktiven Methoden die Kinematik der oben beschriebenen Zahnflächen besprochen.

Wir verdanken WILDHABER [27] die Idee einer zylindrischen Schrägverzahnung, bei welcher die Normalprofile von eingreifenden Zahnflächen aus Kreisbögen bestehen, und sich diese Zahnflächen momentan entlang je eines Normalkreisprofils — kontinuierlich immer entlang von nacheinander folgenden Normalkreisprofilen — berühren.

Nun hatte NOVIKOV [7, 8, 19] eine zylindrische Schrägverzahnung konstruiert, bei welcher eines der eingreifenden Stirnprofile als konvex, das andere als konkav erzeugt ist, und die Zahnflächen berühren sich in einem Punkt. Das Novikovsche Prinzip wurde auch auf Räder mit windschiefen Achsen angewendet [21].

Diese Verzahnungen haben an der Internationalen Konferenz Zahnrad und Zahnradgetriebe Essen 1960, sozusagen die erste internationale Bewertung erfahren [14, 21, 26]. Nach NIEMANN's Vortrag werden solche Verzahnungen gemeinsam als WN (Wildhaber—Novikov) Verzahnungen genannt [18].

Das Wildhaber—Novikov'sche Prinzip kann und wird auch an Kreisbogenverzahnungen angewendet. Die Verzahnmaschine Forster [24] ist geeignet, nach dem WN-Prinzip ein zylindrisches Zahnradpaar durch Abwälzen mit einer Kreisringfläche [11] herzustellen [3]. An der Verzahnmaschine Gleason [6, 12] kann nach dem WN-Prinzip ein Kegelradpaar und auch ein Hypoid-Kegelradpaar ebenfalls durch Abwälzen mit einer Kreisringfläche erzeugt werden.

In dieser Abhandlung soll — für die in der Praxis üblichen Fälle der Axoidanordnungen [20, 22] — an den durch eine Abwälz-Kreisringfläche

* Diese Abhandlung ist ein Teil der Kandidats-Dissertation v. 25. Juni 1964.

erzeugten zylindrischen Räderpaaren, Kegel- und Hypoidräderpaaren der theoretische Eingriffsvorgang mit Hilfe von geometrischen Konstruktionen analysiert werden. Das Problem unterschrittener Zähne wird nicht berührt.

I.

Die Anordnung der Axoiden eines zylindrischen Zahnradpaares mit parallelen Achsen ist im Bild 1 folgenderweise dargestellt: die Axoiden A_{12} und A_{21} des kleinen bzw. des großen Rades sind Drehzylinderflächen, die Axoide $A_{31} \equiv A_{32} \equiv A_{312}$ der Abwälz-Zahnstange ist eine Ebene. Die Axoiden A_{12} ,

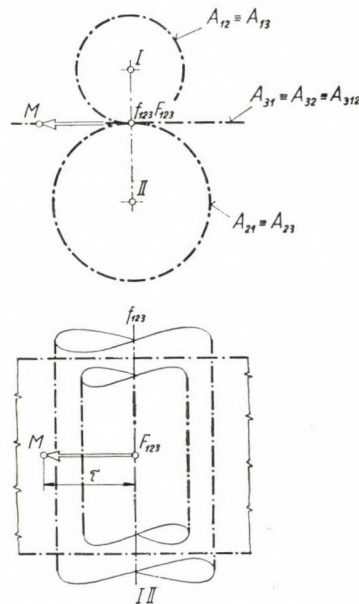


Bild 1. Axoiden der zylindrischen Verzahnung

A_{21} , A_{312} berühren sich entlang der Hauptgeraden f_{123} , und rollen auf einander ohne Gleiten ab, folglich ist $A_{12} \equiv A_{13}$ und $A_{21} \equiv A_{23}$. Der Punkt F_{123} der Hauptgeraden ist der Hauptpunkt in der Mittelebene der Radkörper.

Die Zahnfläche Φ_3 (Bild 2) der Abwälz-Zahnstange, mittels welcher die eingreifenden Zahnflächen Φ_1 am kleinen und Φ_2 am großen Zahnrad erzeugt werden, ist eine Kreisringfläche (vierter Ordnung) mit dem Profilhalbmesser ϱ , deren Achse t normal zur Axoide A_{312} ist und von der Mittelebene der Radkörper sich in einem Abstand T befindet, und deren Mittelkreis k mit dem Halbmesser K von A_{312} sich in einem Abstand H befindet. Die augenblickliche Lage von Φ_3 wird durch die relative Verschiebung $\tau = F_{123} M$ der Zahn-

stange gegenüber der Hauptgeraden f_{123} bestimmt, wobei im Falle $\tau = 0$ der Punkt M mit dem Hauptpunkt F_{123} zusammenfällt.

Die Gesamtheit der Normalen zu Φ_3 ist durch die Kongruenz der Geraden, die sowohl die Achsen t wie auch die Mittelkreise k schneiden, gegeben [23].

Die momentanen Eingriffsnormalen n der Zahnflächen Φ_1, Φ_2, Φ_3 sind jene Geraden der durch die Normalen zu Φ_3 gebildeten Kongruenz, die die Hauptgerade f_{123} schneiden [16]. Die gemeinsamen Normalen bilden nun

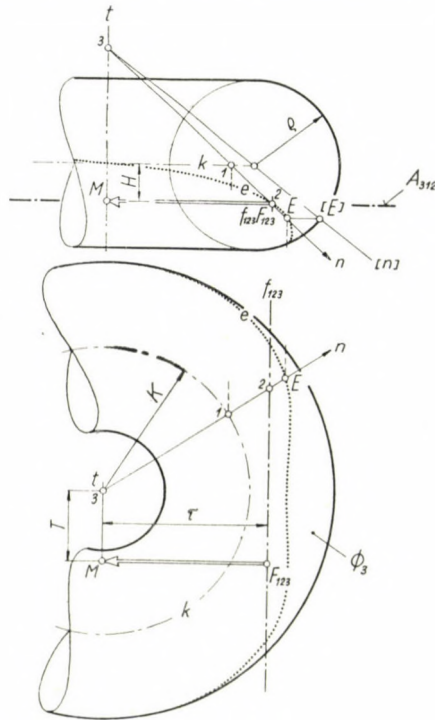


Bild 2. Zylindrische Verzahnung mit linienmäßiger Berührung

(im Falle $\tau \neq 0$) eine Regelfläche vierter Ordnung, da sie zugleich k , t und f_{123} schneiden, d. h. sie sind die Transversalen eines Kreises (als Linie zweiter Ordnung) und zweier Geraden (als Linien erster Ordnung) [17, 28].

Die zum momentanen Eingriff gehörende, für die Zahnflächen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 gemeinsame Berührungslinie e (achter Ordnung) besteht aus Linien, die auf dieser Regelfläche von k sich in einem Abstand ρ befinden. (Die technisch notwendige Lösung ist nur ein Teil der geometrisch vollständigen Lösung!)

Ein Punkt E der Linie e wird folgenderweise konstruiert: eine durch t gelegte Ebene schneidet k im Schnittpunkt I , und f_{123} im Schnittpunkt 2 .

schar von Φ_3 besteht aus dem Äquatorkreis, dem Kehlkreis und der Schar der Profilkreise. Die Eingriffsfläche zerfällt in die Ebene A_{312} und eine von der im Eingriff befindlichen Profilkreisschar gebildete Fläche [3].

Die Tatsache, daß in diesem Sonderfall die Profilkreise der Zahnfläche Φ_3 der Abwälz-Zahnstange zugleich als Berührungslinien erscheinen, d. h. sie sind auch die Profilkreise der eingreifenden Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 , entspricht dem Wildhaberschen Prinzip [27]. Also kann man die aus der oben

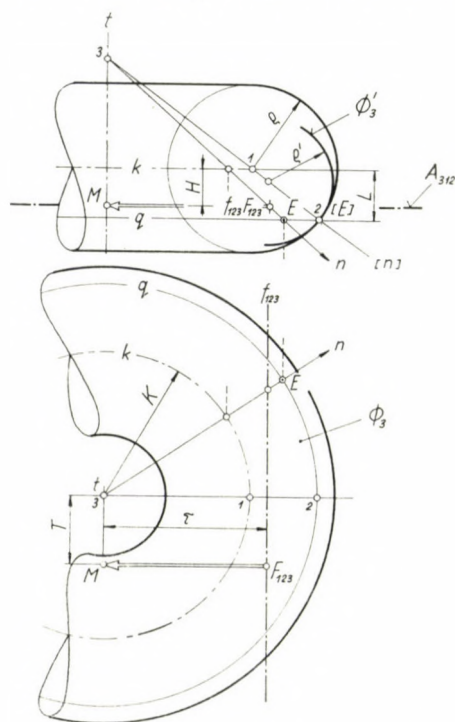


Bild 4. Zylindrische Verzahnung mit punktmäßiger Berührung

beschriebenen Anordnung abgeleitete Verzahnung als W-Verzahnung erkennen und benennen.

Wenn eine von den zwei eingreifenden Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 — wie zuvor — durch Abwälzen einer Kreisringfläche Φ_3 mit dem Profilhalbmesser ρ , die andere aber (Bild 4) durch Abwälzen einer Kreisringfläche Φ'_3 mit dem Profilhalbmesser $\rho' \neq \rho$ erzeugt wird, wobei die Berührungslinie von Φ_3 und Φ'_3 als ein Rotationskreis q der Fläche Φ_3 in einem Abstand L von der Mittelkreisebene (derselben Fläche Φ_3) erscheint, so sind die den Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ'_3 gemeinsamen momentanen Eingriffsnormalen n jene Geraden der von den Normalen der Φ_3 gebildeten Kongruenz, die den Kreis q und auch die Hauptgerade f_{123} schneiden. Die gemeinsamen Normalen sind also die

Transversalen von k , t , q und f_{123} . Die Transversalen von k , t und q sind teilweise zugleich die Erzeugenden einer Drehkegelfläche mit der Achse t und mit den Kreisschnitten k und q ein und derselben Halbkugelmantelfläche. Jene Erzeugenden der Kegelfläche, welche die Gerade f_{123} schneiden, sind die gemeinsamen Normalen. Die Zahl der gemeinsamen Normalen ist also endlich (allgemein zwei), und der Eingriff der Flächen Φ_1 und Φ_2 ist punktmäßig.

Die momentanen Eingriffspunkte E der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ_3' sind die Schnittpunkte der gemeinsamen Normalen mit dem Kreis q .

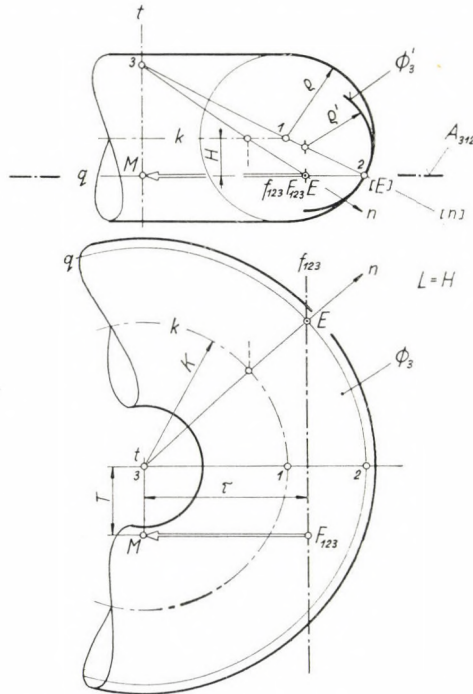


Bild 5. Zylindrische Verzahnung mit punktmäßiger Berührung im Falle $H = L$

Irgendein Punkt E wird folgenderweise konstruiert. Eine Erzeugende der oben bezeichneten Kegelfläche hat mit dem Kreis k den Schnittpunkt 1 und mit q den Schnittpunkt 2 (u. zw. liegen beide Schnittpunkte in der Hauptprofilebene) und hat noch mit der Geraden t den Schnittpunkt 3. Die Ebene durch Punkt 3 und die Gerade f_{123} schneidet q im Punkte E . (Je nach der Größe von τ gibt es zwei, eine oder gar keine geometrische Lösung.)

Durch wiederholte Konstruktionen bei Annahme verschiedener τ -Werte kann man an dem gemeinsamen Kreis q der Zahnflächen Φ_3 und Φ_3' die der punktmäßigen Berührung der Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 entsprechende Punktschar und die Eingriffslinie von Φ_1 und Φ_2 herstellen.

den Schnittpunkt der Achsen I und II (des kleinen bzw. des großen Kegelrades) hindurchgeht. Die Axoiden A_{12} , A_{21} und A_{312} berühren sich entlang der Hauptgeraden f_{123} und rollen aufeinander ohne Gleiten ab, also ist $A_{12} \equiv A_{13}$ und $A_{21} \equiv A_{23}$. Punkt F_{123} auf der Hauptgeraden ist also der in der Mittelebene der Radkörper befindliche Hauptpunkt.

Die Zahnfläche Φ_3 des Abwälz-Planrades, durch welches die eingreifenden Zahnflächen Φ_1 (des kleinen Zahnrades) und Φ_2 (des großen Zahnrades) erzeugt werden (Bild 8), ist eine Kreisringfläche (vierter Ordnung) mit dem

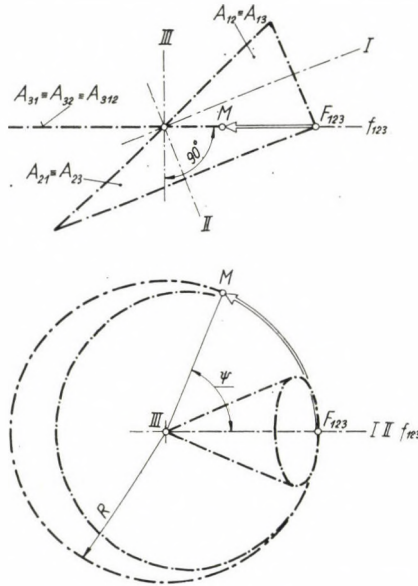


Bild 7. Axoiden der Kegelverzahnung

Profilhalbmesser ρ , deren Achse t zur Achse III des Planrades sich in paralleler Lage und davon in einem Abstand S befindet, und deren Mittelkreis k , mit dem Halbmesser K , von der Axoide A_{312} des Planrades sich in einem Abstand H befindet. Die augenblickliche Lage der Zahnfläche Φ_3 wird durch den von der Hauptgeraden f_{123} ausgehend gemessenen Verdrehungswinkel $\psi = \sphericalangle F_{123} III M$ bestimmt, wobei im Falle $\psi = 0$ der Punkt M mit dem Hauptpunkte F_{123} zusammenfällt.

Die Gesamtheit der Normalen der Fläche Φ_3 ist durch die Kongruenz von Geraden, die zugleich t und k schneiden, bestimmt [23].

Die momentanen Eingriffsnormalen der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 sind jene Geraden der durch die Normalen von Φ_3 gebildeten Kongruenz, die die Hauptgerade f_{123} schneiden [16]. So bilden die gemeinsamen Normalen (im Falle $\psi \neq 0$) eine Regelfläche vierter Ordnung, da sie den Kreis k und

die Geraden f_{123} und t schneiden, d. h. sie sind die Transversalen eines Kreises (als Linie zweiter Ordnung) und zweier Geraden (als Linien erster Ordnung) [17, 28].

Die zum momentanen Eingriff gehörende, für die Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 gemeinsame Berührungslinie e (achter Ordnung) besteht aus Linien, die sich auf dieser Regelfläche von k in einem Abstand ϱ befinden. (Die technisch notwendige Lösung ist nur ein Teil der geometrisch vollständigen Lösung.)

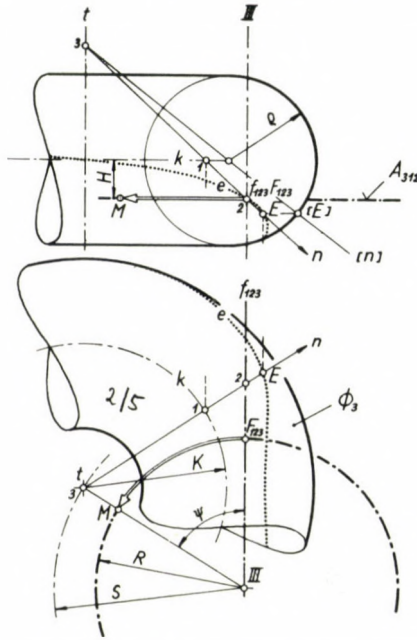


Bild 8. Kegelerzahnung mit linienmäßiger Berührung

Irgendein Punkt E der Linie e kann folgenderweise konstruiert werden. Eine durch t gelegte Ebene hat mit k den Schnittpunkt I und mit f_{123} den Schnittpunkt 2 . Die die Punkte I und 2 verbindende Normale n schneidet t im Punkte 3 . Durch Drehung um t in die Hauptprofilebene nimmt die Gerade n die Lage $[n]$ ein, und $[n]$ schneidet den Hauptprofilkreis im Punkte $[E]$ als Bildpunkt von E . (Die Zahl der geometrischen Lösungen ist für jede Ebene vier.)

Durch wiederholte Konstruktionen mit verschiedenen ψ -Werten erhält man die Berührungslinienschar der Zahnfläche Φ_3 und die gemeinsame Eingriffsfläche von Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 .

Ist $H = 0$ (Bild 9), so liegt der Mittelkreis k in der Ebene der Axoiden A_{123} und hat (im Falle $S \cdot \sin |\psi| < K$) mit der Hauptgeraden f_{123} zwei Schnitt-

punkte. So zerfällt die Regelfläche (vierter Ordnung) der gemeinsamen Normalen in ein doppelt zu zählendes und an dem Schnittpunkt von A_{312} und t in der Ebene A_{312} sitzendes Strahlenbüschel, und in zwei andere Strahlenbüschel, die an je einem Schnittpunkt von f_{123} und k sitzen, und t schneiden [17]. (Die letzten zwei Büschel fallen zusammen, wenn $S \cdot \sin |\psi| = K$, und verschwinden, falls $S \cdot \sin |\psi| > K$.)

Die Berührungslinie e (achter Ordnung) zerfällt (im Falle $S \cdot \sin |\psi| < K$) in die durch die oben angeführten Strahlenbüschel in der Zahnfläche Φ_3 gebildeten Schnittfiguren, nämlich den Äquatorkreis, den Kehlkreis und zwei

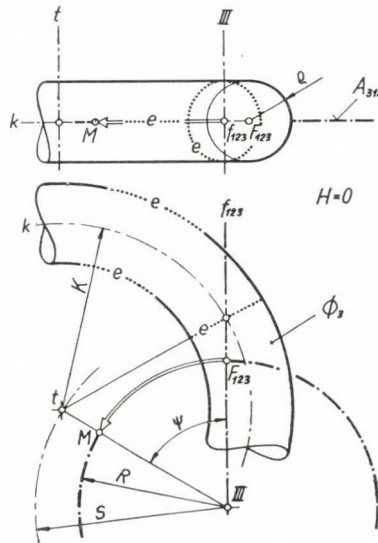


Bild 9. Im Falle $H = 0$ zerfällt die Berührungslinie in Kreise

Profilkreise. (Die letzteren fallen in einem Profilkreis zusammen, falls $S \cdot \sin |\psi| = K$, und verschwinden, falls $S \cdot \sin |\psi| > K$.) Die Berührungslinienschar von Φ_3 besteht aus dem Äquatorkreis, dem Kehlkreis und aus der Schar der Profilkreise. Die Eingriffsfläche zerfällt in die Ebene A_{312} und in eine durch die Schar der sich in Eingriff befindenden Profilkreise gebildete Fläche.

Die Tatsache, daß in diesem Sonderfall die Profilkreise der Zahnfläche Φ_3 des Abwälz-Planrades zugleich Berührungslinien, d. h. auch Profilkreise der eingreifenden Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 sind, entspricht dem Wildhaber'schen Prinzip [27]. Also kann man die aus der oben beschriebenen Anordnung abgeleitete Kegolverzahnung als W-Verzahnung erkennen und benennen.

Wenn eine von den zwei eingreifenden Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 — wie zuvor — durch Abwälzen einer Kreisringfläche Φ_3 mit dem Halbmesser ρ , die

andere aber (Bild 10) durch Abwälzen einer Kreisringfläche Φ'_3 mit dem Profilhalmmesser $\rho' \neq \rho$ erzeugt wird, wobei die Berührungslinie von Φ_3 und Φ'_3 als ein Rotationskreis q der Fläche Φ_3 in einem Abstand L von der Mittelkreisebene (derselben Fläche Φ_3) erscheint, so sind die für die Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ'_3 gemeinsamen momentanen Eingriffsnormalen n jede Geraden der von den Normalen der Φ_3 gebildeten Kongruenz, die den Kreis q und auch die Hauptgerade f_{123} schneiden. Die gemeinsamen Normalen sind also die Transversalen von k , t , q und f_{123} . Die genannten Transversalen sind teilweise

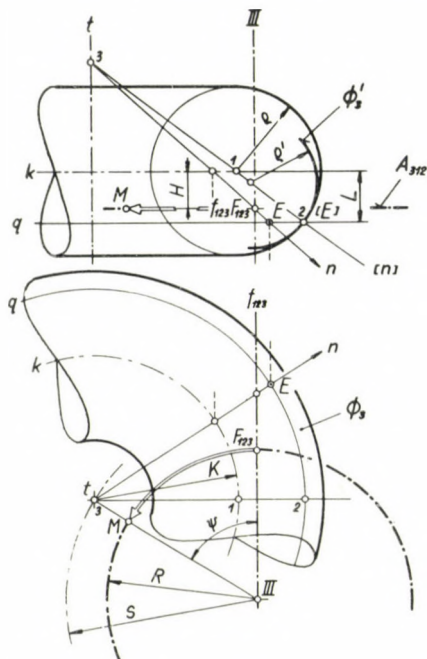


Bild 10. Kegelerzahnung mit punktmäßiger Berührung

zugleich die Erzeugenden einer Drehkegelfläche mit der Achse t und mit den Kreisschnitten k und q ein und derselben Halbkegelmantelfläche. Jene Erzeugenden der Kegelfläche, welche die Gerade f_{123} schneiden, sind die gemeinsamen Normalen. Die Zahl der gemeinsamen Normalen ist also endlich (allgemein zwei), und der Eingriff der Flächen Φ_1 und Φ_2 ist punktmäßig.

Die momentanen Eingriffspunkte E der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 und Φ'_3 sind die Schnittpunkte der gemeinsamen Normalen mit dem Kreis q .

Irgendein Punkt E wird folgenderweise konstruiert. Eine Erzeugende der oben bezeichneten Kegelfläche hat mit dem Kreis k den Schnittpunkt I und mit q den Schnittpunkt 2 (u. zw. liegen beide Schnittpunkte in der Hauptprofilebene), und hat noch mit der Geraden t den Schnittpunkt 3 . Die Ebene

durch Punkt 3 und die Gerade f_{123} schneidet q im Punkte E . (Je nach der Größe von ψ gibt es zwei, eine oder gar keine geometrische Lösung.)

Durch wiederholte Konstruktionen bei Annahme verschiedener ψ -Werte kann man auf dem gemeinsamen Kreis q der Zahnflächen Φ_3 und Φ'_3 die der punktmäßigen Berührung der Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 entsprechende Punkt-schar und die Eingriffslinie von Φ_1 und Φ_2 darstellen.

Ist $L = H$ (Bild 11), so ist der Punkt E der Schnittpunkt der Haupt-

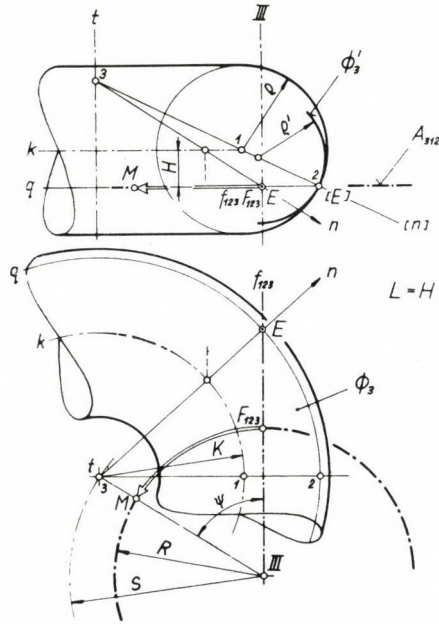


Bild 11. Kegelerzahnung mit punktmäßiger Berührung im Falle $H = L$

geraden f_{123} mit dem Kreis q . Die Hauptgerade f_{123} ist zugleich die Eingriffslinie.

Ist aber $H = 0$ und dabei $L \neq 0$ (Bild 12), so ist E der Schnittpunkt eines Profilkreises der Zahnfläche Φ_3 mit dem Kreis q , vorausgesetzt, daß der Kreismittelpunkt des Profilkreises mit dem Schnittpunkt von f_{123} und k identisch ist.

Der Eingriff der Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 eines Kegelerzahnungspaares mit sich schneidenden Achsen ist auch in dem Falle punktmäßig, wenn zwar die Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 von ein und derselben Zahnfläche Φ_3 des Planrades erzeugt werden, aber die Axoiden [20] anders, u. zw. folgenderweise (Bild 13) angeordnet sind: die Axoiden A_{12} und A_{21} sind Drehkegelflächen. Die Axoide A_{32} des Planrades ist eine Ebene, deren Achse III durch den Schnittpunkt der Achse II (des großen Rades) mit der Ebene A_{32} hindurchgeht. Die Axoide A_{23} des

großen Rades ist eine Drehkegelfläche. Die Axoide A_{31} des Abwälz-Planrades ist eine Drehkegelfläche, deren Spitze sich im Schnittpunkte der Achse I (des kleinen Rades) mit der Achse III befindet. Die Axoide A_{13} des kleinen Rades ist eine Drehkegelfläche. Für die Axoiden A_{13} und A_{31} ist die Hauptgerade f_{13} , und für die Axoiden A_{23} und A_{32} ist die Hauptgerade f_{23} die Berührungslinie, wobei die Axoiden aufeinander ohne Gleiten abrollen. Der Schnittpunkt F_{123} der beiden Hauptgeraden ist der Hauptpunkt in der Mittelebene der Radkörper. Die Berührungslinie für die Axoiden A_{12} und A_{21} ist Hauptgerade

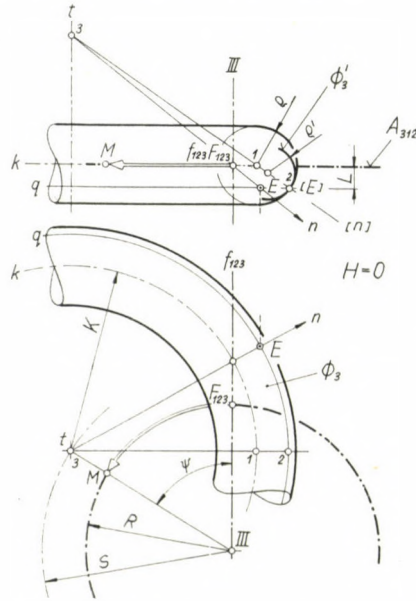


Bild 12. Kegolverzahnung mit punktmäßiger Berührung im Falle $H = 0$

f_{12} , die durch den Schnittpunkt der Achsen I und II und den Hauptpunkt F_{123} bestimmt ist, wobei auch diese Axoiden aufeinander ohne Gleiten abrollen.

Die Zahnfläche Φ_3 des Abwälzplanrades, durch welches die eingreifenden Zahnflächen Φ_1 (des kleinen Zahnrades) und Φ_2 (des großen Zahnrades) erzeugt werden (Bild 14), ist eine Kreisringfläche (vierter Ordnung) mit dem Profilkreisradius ρ , deren Achse t zur Achse III des Planrades sich in paralleler Lage und davon in einem Abstand S befindet und deren Mittelkreis k mit dem Radius K von der Axoide A_{32} des Planrades sich in einem Abstand H befindet. Die augenblickliche Lage der Zahnfläche Φ_3 wird durch den von der Hauptgeraden f_{23} ausgehend gemessenen Verdrehungswinkel $\psi = \sphericalangle F_{123} III M$ bestimmt, wobei im Falle $\psi = 0$ der Punkt M mit dem Punkte F_{123} zusammenfällt.

Die gemeinsamen momentanen Eingriffsnormalen n der Zahnflächen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 sind zum Teil jene Geraden der von den Normalen der Fläche Φ_3 gebildeten Kongruenz, die durch den Hauptpunkt F_{123} hindurchgehen, und zum Teil jene Geraden, die in der von den Hauptgeraden f_{12} und f_{23} gebildeten Ebene liegen. Die gemeinsamen Normalen sind also Transversalen von k und t durch F_{123} . Die Zahl der gemeinsamen Normalen ist (falls $\psi \neq 0$) endlich. (Die

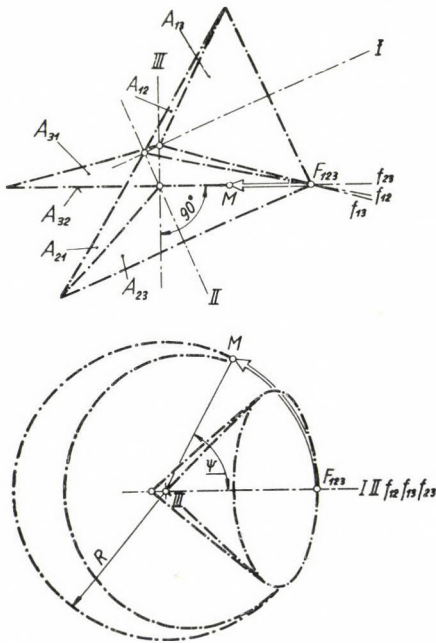


Bild 13. Axoiden der Kegelverzahnung, wenn $A_{31} \neq A_{32}$

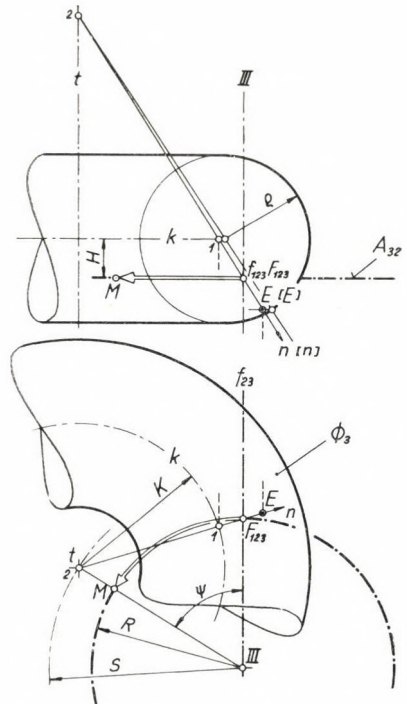


Bild 14. Kegelverzahnung mit punktmäßiger Berührung, wenn $A_{31} \neq A_{32}$

Zahl der obigen Teillösungen ist allgemein zwei.) Der Eingriff von Φ_1 und Φ_2 ist effektiv punktmäßig.

Die momentanen Eingriffspunkte E der Zahnflächen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 sind jene Punkte der gemeinsamen Normalen, welche von dem Schnittpunkt der betreffenden Normale mit dem Kreis k sich in einem Abstand ρ befinden.

Irgendein Punkt E kann folgenderweise konstruiert werden: die durch die Gerade t und den Punkt F_{123} gelegte Ebene hat mit dem Kreis k den Schnittpunkt I . Die Normale n durch die Punkte F_{123} und I schneidet die Gerade t im Punkte 2. Durch Drehung um t nimmt n in der Ebene des Hauptprofilkreises die umgelegte Lage $[n]$ ein, und $[n]$ schneidet den Hauptprofilkreis im Punkte $[E]$ als Umlegung des Punktes E . Die Anzahl der geometrischen Teillösungen ist vier. (Zusammen mit den Lösungen in den Ebenen der

Hauptgeraden ist die Gesamtzahl der Lösungen allgemein acht, da man auf den zwei mit t parallelen Normalen, die durch die Schnittpunkte von k mit den Ebenen der Hauptgeraden hindurchgehen, weitere vier Punkte erhält.)

Durch wiederholte Konstruktionen — mit verschiedenen ψ -Werten — kann man auf der Zahnfläche Φ_3 die der punktmäßigen Berührung von Φ_1

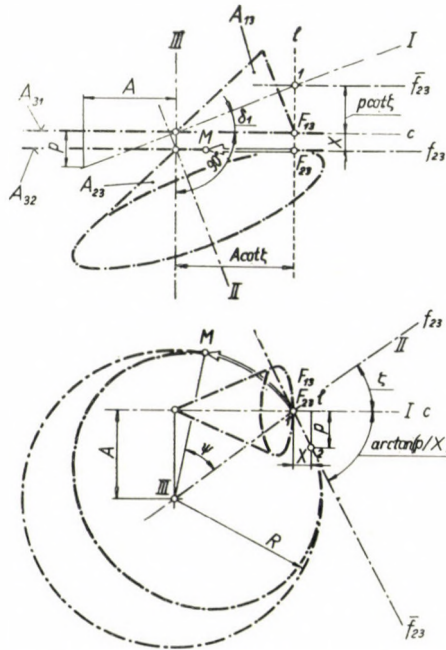


Bild 15. Axoiden der Hypoidverzahnung, wenn $X > 0$

und Φ_2 entsprechende Punktschar und die Eingriffslinie von Φ_1 und Φ_2 bestimmen.

Da ein Verzahnungssystem mit punktmäßiger Berührung von konvexen und konkaven Zahnflächen dem Prinzip von Novikov entspricht [19] kann man die aus der im Bild 10, 11, 12 und 14 dargestellten Anordnung abgeleitete Verzahnung als eine WN-Verzahnung betrachten.

3.

Die übliche Anordnung der Axoiden eines Hypoid-Kegelräderpaares (mit windschiefen Achsen) [20] ist die folgende (Bild 15, 16 u. 17): Die aufeinander schrotenden Axoiden A_{12} und A_{21} des kleinen bzw. des großen Kegelrades sind einschalige Drehhyperboloiden [2, 9, 13, 25]. Die Achse III des Abwälzplanrades schneidet die Achse II des großen Rades. Die Axoide A_{32}

des Planrades ist eine durch diesen Schnittpunkt hindurchgehende (zugleich zur Achse *III* normale) Ebene, und die Axoide A_{23} des großen Rades ist eine Drehkegelfläche. Die Axoide A_{23} und A_{32} berühren sich längs der Hauptgeraden f_{23} , und rollen aufeinander ohne Gleiten ab. Die Axoide A_{31} des Planrades ist eine durch die Normaltransversale der Achsen *I* (des kleinen Rades) und *III* (des Planrades) hindurchgehende zur Achse *III* normale Ebene, und die Axoide A_{13} des kleinen Rades ist eine Drehkegelfläche. Die Axoide A_{13}

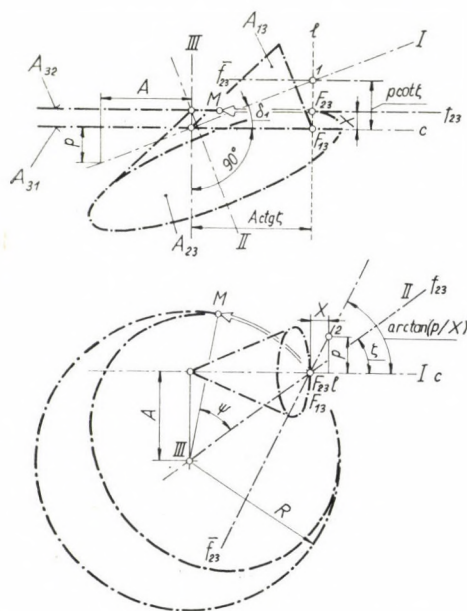


Bild 16. Axoide der Hypoidverzahnung, wenn $X < 0$

und A_{21} berühren sich längs der relativen Schraubenachse c , und schroten aufeinander [20]. Der Parameter p dieser relativen, hier rechtsgewundenen Schraubenbewegung kann auf Grund der im Bild 18 dargestellten Zusammenhänge mit Hilfe einer einfachen geometrischen Konstruktion folgenderweise bestimmt werden:

Die Größe der relativen Geschwindigkeit ist

$$v = |\vec{v}_3 - \vec{v}_1| = v_3 \sin \zeta = R \omega_3 \sin \zeta = A \omega_3.$$

Die Größe der relativen Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega = |\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_1| = \omega_3 \cot \delta_1.$$

Also ist $p = v/\omega = A \omega_3/\omega_3 \cot \delta_1 = A \tan \delta_1$, wobei A der Abstand zwischen den Achsen *I* und *III*, und δ_1 der Ersatzwinkel des Winkels dieser

Achsen ist. Der Abstand X der Planradaxoiden A_{31} und A_{32} von einander kann $X > 0$ (Bild 15) oder $X < 0$ (Bild 16) oder $X = 0$ (Bild 17) sein. Nach Bild 15 und 16 ist F_{23} , bzw. nach Bild 17 ist F_{123} der Hauptpunkt in der Mittelebene der Radkörper.

Die momentanen Eingriffsnormalen der Zahnflächen Φ_2 (des großen Rades) und Φ_3 (des Planrades) schneiden die Hauptgerade f_{23} [16]. Die momentanen Eingriffsnormalen der Zahnflächen Φ_1 (des kleinen Rades) und Φ_3

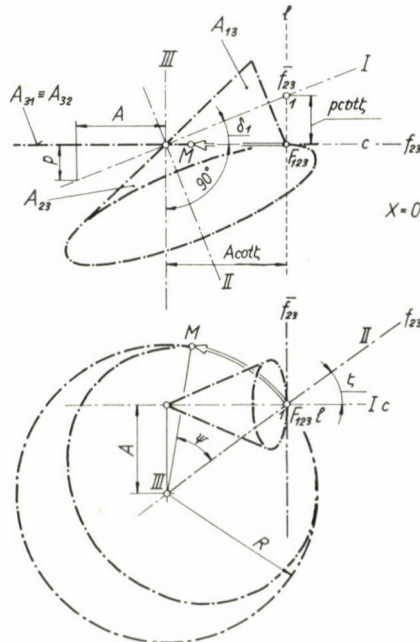


Bild 17. Axoiden der Hypoidverzahnung, wenn $X = 0$

(des Planrades) sind jene Geraden, die zugleich in dem zur relativen Schraubung mit der Achse c und dem Parameter p angehörenden linearen Komplex [13] enthalten sind [1, 13, 16]. Die momentanen gemeinsamen Eingriffsnormalen n von Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 sind also die, welche die Hauptgerade f_{23} schneiden und auch im obigen Komplex enthalten sind. Wenn aber diese Normalen die Hauptgerade f_{23} schneiden, so wird von ihnen auch die zu dieser Hauptgeraden koordinierte reziproke Polare \bar{f}_{23} (in dem obigen Komplex) auch geschnitten [13]. Man kann nach den hier folgenden prinzipiellen Zusammenhängen diese Polare \bar{f}_{23} einfach bestimmen. Die zur Achse III parallele Transversale l der Achsen I und II (Bild 15, 16, 17) ist zugleich eine gemeinsame Normaltransversale von c , f_{23} und \bar{f}_{23} . Der Schnittpunkt I der Achse I und der Geraden l ist zugleich ein Punkt von \bar{f}_{23} , da der Abstand (im Sinne der Rechtsschraubung)

zwischen c und \vec{f}_{23} gleich $p \cdot \cot \zeta$ ist, und weil $p/A = p \cot \zeta / A \cot \zeta$, wobei ζ der Winkel zwischen \vec{f}_{23} und c ist. Der Winkel (im Sinne der Rechtsschraubung) zwischen c und \vec{f}_{23} ist $\arctan(p/X)$. Also (Bild 15 und 16) wenn man in einer zu III normalen Ansicht den Abstand X auf die Gerade c und in hierzu normalen Richtung (in entsprechenden Sinne) p aufträgt, so ist der derart erhaltene Punkt 2 ein Punkt auf der Projektion von \vec{f}_{23} . Ist $X = 0$ (Bild 17), so ist \vec{f}_{23} normal zu c [10, 13, 15].

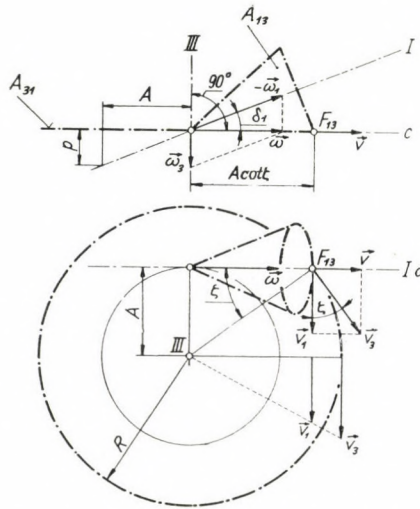


Bild 18. Axoiden des versetzten kleinen Rades

Die Zahnfläche Φ_3 des Abwälzplanrades, durch welches die eingreifenden Zahnflächen Φ_1 (des kleinen Rades) und Φ_2 (des großen Rades) erzeugt werden (Bild 19), ist eine Kreisringfläche (vierter Ordnung) mit dem Profilhalmmesser ϱ , deren Achse t mit der Achse III des Planrades sich in paralleler Lage und davon in einem Abstand S befindet, und deren Mittelkreis k mit dem Halbmesser K von der Axoide A_{32} des Planrades sich in einem Abstand H befindet. Die augenblickliche Lage der Zahnfläche Φ_3 wird durch den von der Hauptgeraden \vec{f}_{23} ausgehend gemessenen Verdrehungswinkel $\psi = \sphericalangle F_{23} III M$ bestimmt, wobei im Falle $\psi = 0$ der Punkt M mit dem Punkte F_{23} zusammenfällt.

Die Gesamtheit der Normalen von Φ_3 ist die Kongruenz von Geraden, welche t und auch k schneiden [23].

Die momentanen Eingriffsnormalen n von den Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 sind jene Geraden in der von den Normalen der Fläche Φ_3 gebildeten Kongruenz, welche die Gerade \vec{f}_{23} und auch deren reziproke Polare \vec{f}_{23} schneiden [4, 5]. Die gemeinsamen Normalen (der drei Zahnflächen) sind also die Trans-

versalen von k , t , f_{23} und \bar{f}_{23} . Die Transversalen von k , t und \bar{f}_{23} sind allgemein die Erzeugenden einer Regelfläche vierter Ordnung. Die gemeinsamen Normalen von den Erzeugenden dieser Regelfläche sind jene, die die Hauptgerade f_{23} schneiden. Die Anzahl der gemeinsamen Normalen ist endlich (allgemein vier) und der Eingriff von Φ_1 und Φ_2 ist punktmäßig.

Die momentanen Eingriffspunkte E von Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 liegen auf den gemeinsamen Normalen, u.zw. in einem Abstand ρ vom Schnittpunkte von k mit der betreffenden Normalen.

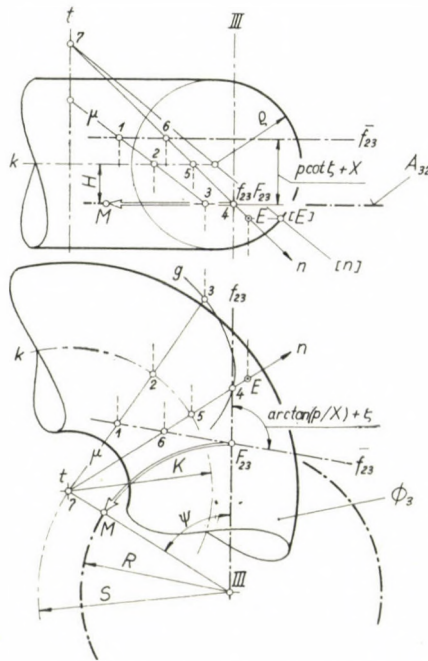


Bild 19. Hypoidverzahnung mit punktmäßiger Berührung

Ein Punkt E kann folgenderweise gefunden werden. Allgemein kann die Aufgabe mit Hilfe einer geometrischen (d. h. euklidischen) Konstruktion zweiter Ordnung nicht gelöst werden. Eine graphische Annäherung (Bild 19) ist die folgende: eine beliebige durch t gelegte Ebene hat mit \bar{f}_{23} in I und mit k in 2 je einen Schnittpunkt. Die durch I und 2 geführte Gerade μ ist eine Normale zu Φ_3 , aber allgemein keine momentane Eingriffsnormale. Die Gerade μ hat in der durch f_{23} gelegte Ebene A_{32} einen Schnittpunkt 3 . Durch Wiederholung dieser Konstruktion — mit verschiedenen angenommenen Ebenen durch t — oder unter Mitverwendung der Proportion $\lambda = \sqrt{23/13} = H/(p \cot \zeta + X)$ erhält man einzelne Punkte der Kurve g (vierter Ordnung), als Schnittlinie der Ebene A_{32} mit der von den die Gerade \bar{f}_{23} schneidenden Normalen der Fläche Φ_3 ge-

Ist $H = 0$ (Bild 20), so liegt der Mittelkreis k in der Axoidenebene A_{32} und hat mit der Hauptgeraden f_{23} allgemein zwei Schnittpunkte. In diesem Falle zählt man zu den gemeinsamen momentanen Eingriffsnormalen n der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 teilweise jene Geraden aus der von den Normalen der Fläche Φ_3 gebildeten Kongruenz, die durch die Schnittpunkte von k und f_{23} hindurchgehen und zugleich \bar{f}_{23} schneiden, und teilweise noch die (zweimal mitzurechnende) Gerade, welche mit \bar{f}_{23} parallel ist. Die gemeinsamen Normalen

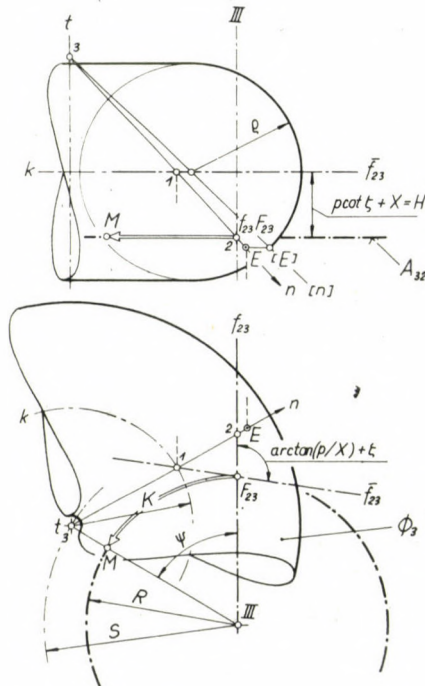


Bild 21. Hypoidverzahnung mit punktmäßiger Berührung im Falle $H = p \cdot \cot \zeta + X$

sind also teilweise die durch die Schnittpunkte von k und f_{23} hindurchgehenden Transversalen von t und \bar{f}_{23} . In diesem Sonderfall kann also die Lösung nach den euklidischen Prinzipien gefunden werden. (Die Anzahl der obigen Teillösungen ist allgemein zwei.)

Irgendein Punkt E kann folgenderweise konstruiert werden: die durch die Gerade t und den Schnittpunkt I von k und f_{23} gelegte Ebene hat mit \bar{f}_{23} den Schnittpunkt 2 . Die die Punkte I und 2 verbindende Normale n schneidet die Gerade t im Punkte 3 . Wird n durch Drehung um t in die Hauptprofilebene in die Lage $[n]$ umgelegt, so schneidet $[n]$ den Profilkreis im Punkte $[E]$, also ist $[E]$ die umgelegte Lage von E . (Die Anzahl der geometrischen Teillösungen ist allgemein vier. Die Anzahl sämtlicher Lösungen ist acht, da wir

auf der durch den Mittelpunkt von k hindurchgehenden, mit \bar{f}_{23} parallelen Normalen weitere vier Punkte erhalten.)

Ist $H = p \cdot \cot \zeta + X$ (Bild 21), so liegt der Mittelkreis k in der zur Achse III normalen, durch die Hauptgerade \bar{f}_{23} gelegten Ebene, und hat k mit \bar{f}_{23} allgemein zwei Schnittpunkte. In diesem Falle kann man zu den gemeinsamen, momentanen Eingriffsnormalen n der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 teilweise jene Geraden, der durch die Normalen von Φ_3 gebildeten Kongruenz, die durch den Schnittpunkt von k und \bar{f}_{23} hindurchgehend f_{23} schneiden, und andererseits noch jene Gerade (der Kongruenz) zählen (diesmal doppelt), die mit f_{23} parallel läuft. So sind die gemeinsamen Normalen zum Teil die Transversalen von t und f_{23} , welche durch die Schnittpunkte von k und \bar{f}_{23} hindurchgehen. (Die Lösung kann in diesem Sonderfall nach euklidischen Prinzipien gelöst werden. Die Anzahl der obigen Teillösungen ist allgemein zwei.)

Ein Punkt E kann folgenderweise konstruiert werden. Die durch die Gerade t und durch den Schnittpunkt 1 von k und \bar{f}_{23} gelegte Ebene hat mit f_{23} den Schnittpunkt 2. Die die Punkte 1 und 2 verbindende Normale n schneidet t im Punkte 3. Wenn man durch Drehung um t die Gerade n in die Hauptprofilenebene in die Lage $[n]$ umlegt, so schneidet $[n]$ den Hauptprofilkreis im Punkte $[E]$, also in dem umgelegten Bildpunkt von E . (Die Anzahl der geometrischen Teillösungen ist allgemein vier. Die Anzahl sämtlicher Lösungen ist allgemein acht, da man auf der durch den Mittelpunkt von k mit f_{23} parallel gezogenen Normalen weitere vier Punkte erhält.)

Da ein Verzahnungssystem mit punktmäßiger Berührung von konvexen und konkaven Zahnflächen dem Novikovschen Prinzip [19] entspricht, kann man die aus der in den Bildern 19, 20, 21 gezeigten Anordnungen abgeleitete Verzahnung als eine WN-Verzahnung betrachten.

SCHRIFTTUM

1. ALTMANN, F. G.: Bestimmung des Zahnflankeneingriffs bei allgemeinen Schraubgetrieben. *Forsch. Ing. Wes.* **8** (1937), 209—225.
2. BEYER, R.: Technische Raumkinematik. Springer, Berlin 1963.
3. DRAHOS, I.: Geometrische Grundlagen zur Herstellung einer Wildhaber-Nowikow-Verzahnung auf der Forster-Wälzfräsmaschine. *Acta Techn. Hung.* **53** (1966), 203—219.
4. DRAHOS, I.: A hipoidfogazás kapcsolási vonalának szerkesztése gömbfelülettel lefejtett fogfelületek esetére (Die Konstruktion der Eingriffslinie der Hypoidverzahnung bei sphärisch abgewinkelten Zahnflächen). *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei* **12** (1965), 45—49.
5. DRAHOS, I.: Die konstruktive Ermittlung der Eingriffslinie der Gleason-Hypoidzahnräder. *Nehézipari Műszaki Egyetem Idennyelvű Közleményei* **24** (1964), 151—155.
6. DUDLEY, D. W.: Gear handbook. McGraw-Hill, New York 1962.
7. Федякин, Р. В.—Чесноков, В. А.: Расчет зубчатой передачи М. Л. Новикова (Berechnung der Novikovschen Zahnradgetriebe). *Вестник машиностроение* (1958); № 5, 11—19.
8. Федякин, Р. В.—Чесноков, В. А.: Зубчатые передачи с зацеплением Новикова. (Zahnradgetriebe mit Novikovschen Verzahnung). *Вестник машиностроение* (1958); № 4, 3—11.

9. HOHENBERG, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. Springer, Wien 1961.
10. JAKOBI, R.: Die Eingriffsfläche beim Schneckentrieb und ihre Konstruktion. Vieweg, Braunschweig 1956.
11. KÁRTESEI, F.: Ábrázoló geometria (Darstellende Geometrie). Tankönyvkiadó, Budapest 1957.
12. КЕСК, К. F.: Die Zahnradpraxis, 2. Bd. Oldenbourg, München 1958.
13. KRAMES, J. L.: Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Deuticke, Wien 1952.
14. KRÜGER, A. K.: Internationale Konferenz Zahnräder und Zahnradgetriebe, Essen 1960. *Konstruktion* 13 (1961); 2, 41—54.
15. Литвин, Ф. Л.: Теория зубчатых зацеплений (Theorie des Zahnradereingriffes). Физматгиз, Москва 1960.
16. MAROS, D.: A fogazás legáltalánosabb törvénye (Das höchst allgemeine Prinzip der Verzahnung). A 3. nemzetközi »Mechanizmusok és hajtóművek« tudományos ülészak előadásainak kivonata (Auszug aus den Vorträgen der 3. Internationalen Konferenz über Mechanismen und Getriebe). NME, Miskolc 1963.
17. MÜLLER, E.—KRUPPA, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Springer, Wien 1948.
18. NIEMANN, G.: Novikov-Verzahnung und andere Sonderverzahnungen für hohe Tragfähigkeit. *VDI Berichte* (1961); Nr. 47, 3—12.
19. Новиков, М. Л.: Новая система зубчатого зацепления (Neues Verzahnungssystem). МДНТИ им. Джержинского, Москва 1959.
20. PRUDHOMME, R.—LEMASSON, G.: Cinématique. Dunod, Paris 1955.
21. RITTER, R.: Getriebe mit Kreisbogen-Zahnformen. *Technische Rundschau* (1961), 22.
22. SÁLYI, I.: Műszaki mechanika, I. A kinematika elemei (Technische Mechanik, I. Die Grundlagen der Kinematik). Tankönyvkiadó, Budapest 1960.
23. STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie, 3. Bd. (Theorie der Flächenkrümmung). Walter de Gruyter, Berlin 1950.
24. TEN BOSCH, M.: Gépelemek (Maschinenelemente). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1957.
25. TERPLÁN, Z.: Mechanizmusok (Mechanismen). Tankönyvkiadó, Budapest 1962.
26. *VDI—Berichte* (1961), Nr. 47.
27. WILDHABER, E.: Eine Kreisbogenverzahnung für Stirnräder, ähnlich der Novikov-Verzahnung. *VDI Berichte* (1961); Nr. 47, 19—21.
28. ZIGÁNY, F.: Ábrázoló geometria (Darstellende Geometrie). Tankönyvkiadó, Budapest 1962.

GEOMETRY OF THEORETICAL MESH CONDITIONS OF TOOTH SURFACES GENERATED BY MEANS OF A TORUS SHAPED TOOL SURFACE

I. DRAHOS

SUMMARY

According to the Wildhaber-Novikov principle, cylindrical gears can be generated by the Forster-type gearcutting machine, and bevel- or hypoid-gears by the Gleason-type gearcutting machine. The tooth surfaces of the respective generating tools, the rack and the imaginary crown-wheel are rotational torus surfaces, having the rotational circle as tangent line. (These teeth can be machined by means of a cup-type grinding wheel with a circular profile.) In this paper, kinematical relations of working conditions are treated with geometrical analysis.

LA GÉOMÉTRIE DE L'ENGRÈNEMENT THÉORIQUE DES SURFACES DE DENTS ENGENDRÉES PAR UNE SURFACE TOROIDALE

I. DRAHOS

RÉSUMÉ

Sur les machines de type Forster on peut faire des couples d'engrenages cylindriques, et sur les machines de type Gleason, des roues coniques et hypoïdes, dont l'engrènement répond au principe de Wildhaber—Novikov. Les surfaces des dents des crémaillères ou roues planes génératrices sont alors des surfaces toroïdales venant en contact le long de leur cercle de rotation. Les dents peuvent aussi être usinées par meulage à développante au moyen de meules boisseaux de profil circulaire. L'auteur, étudiant la cinématique de l'engrènement des surfaces de dents engendrées par ce procédé, utilise des méthodes graphiques.

ГЕОМЕТРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗУБЬЕВ, ОБРАБОТАННЫХ ПО КОЛЬЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. ДРАХОШ

РЕЗЮМЕ

На станках типа Форстера можно изготавливать такие цилиндрические, а на станках типа Глисон такие конические и гипоидные зубчатые колеса, зацепление которых соответствует принципу Вильдгабера—Новикова. В этом случае поверхности зубьев обрабатывающих реек и, соответственно, плоских колес представляют собой плоскости колец вращения, которые касаются друг друга вдоль круга вращения. (Зубья можно обрабатывать также шлифованием обкаткой при помощи горшечного камня круглого профиля!) В статье рассматривается кинематика зацепления обработанных вышеописанным способом поверхностей зубьев, разработанная с использованием конструктивных методов.

INVESTIGATION OF THE LEAD-ANTIMONY SYSTEM

W. W. KRYSKO and J. M. NEWBURN

Dr. Ing.

M. Sc.

THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES, SYDNEY (AUSTRALIA)

[Manuscript received January 11, 1965]

An investigation into the aspects of the lead-antimony phase equilibrium diagram was undertaken. It was found that the abrupt increase in the gravity segregation of the antimony-rich phase when the eutectic point is passed is due to the different morphology of the primary solid phase and not to the viscosity change of the system. Hardness tests were conducted on a macro and micro scale and it was found that the hardness of high purity antimony is 79,5 kg/mm² and not 26 kg/mm², and the hardness of the antimony-rich phase is 107,4 kg/mm² and not 32 kg/mm² as hitherto reported. The hardness of high purity lead (99,9999) was found to be 2,74 kg/mm² and of commercial lead (99,99) 3,75 kg/mm² in Brinell units, H 10/100/30 at 20 °C. The composition of the eutectic point was found to be 11,5% antimony which is close to the accepted value of 11,1% antimony. The maximum solubility of lead in antimony was determined by a new method of separation with the aid of hot centrifuging and was found to be 5,01% lead at 300 °C, 4,92% lead at 400 °C, and 4,21% lead at 500 °C. These values in the antimony-lead phase equilibrium diagram were not known hitherto.

The lead-antimony system was investigated in the earliest times of scientific research, and SACK [1] describes investigations before 1890. In 1896, ROLAND—GOSSELIN [2] determined, with the aid of 12 alloys, the liquidus line, and found the eutectic point to be 13% of antimony in lead at a temperature of 228 °C. The composition of the eutectic point was confirmed by CHARPY [3] to be 13% of antimony. STEAD [4] reported measuring a temperature of 247 °C as the eutectic temperature and the composition of the eutectic point to be 12,7% antimony. GONTERMANN [5] found a eutectic temperature of 247 °C and a eutectic composition of 13% antimony. Table I presents the composition of the eutectic point and the temperature of the eutectic transformation as found by various authors in an historical aspect. The eutectic temperature is today taken as being 252 °C \pm 0,5 °C, and the eutectic composition as 11,1 per cent by weight or 17,5 atomic per cent of antimony.

The strong supercooling effect, combined with a marked tendency for gravity segregation are the reasons why, over the years, the results of the determination of the eutectic temperature have increased from 228 °C to 252 °C \pm 0,5 °C, and the eutectic composition has decreased from 13% antimony to 11,1% antimony. It is also known that the gravity segregation of lead-antimony alloys increases abruptly on passing the eutectic composition towards the antimony side. This behaviour has been attributed, firstly, to the difference in the density of the primary crystals of antimony-rich solid solu-

tions formed in the hyper-eutectic alloys, compared with the density of the primary crystals of lead-rich solid solutions in the hypo-eutectic alloys, and secondly, to the decreasing viscosity of the molten alloy itself as a function of the antimony content.

Table I

Author	Year	Eutectic point	
		Temperature, in °C	Composition Antimony: per cent, b/w
ROLAND—GOSSELIN [2]	1896	228	13
CHARPY [3]	1897	—	13
STEAD [4]	1897	247	12,7
GONTERMANN [5]	1907	247	13,0
LOEBE [6]	1911	245	13,0
HEYN—BAUER [7]	1914	245	13,0
DEAN [8]	1923	247/258	12,5
ENDO [9]	1925	250	12,5
BRONIEWSKI—SLIWOWSKI [10]	1928	250/252	13,0
ABEL—REDLICH—ADLER [11]	1928	245	12,1
QUADRAT—JIRIŠTĚ [12]	1934	—	11,4
HOFE—HANEMANN [13]	1940	254	—
PELLINI—RHINES [14]	1943	251,5 ± 0,5	—
BLUMENTHAL [15]	1944	252	11,1
RAYNOR [16]	1951	252 ± 0,5	11,1
HOFMANN—ENGEL [17]	1953	—	11,6
KRYSKO	1963	—	11,5
Values accepted today HANSEN [18], HOFMANN [19]		252 ± 0,5	11,1

It is known that the viscosity of the lead-antimony system decreases steadily towards the eutectic point and beyond [19, 20] but no abrupt changes in the viscosity values have ever been observed. Calculations on the basis of Stokes' Law may be applied for estimating the rate of separation [21, 22] but this is only applicable under the assumption that a spherical body moves through an ideal liquid. The morphology of the primary crystals of antimony-rich solid solutions may have bearing on the rate of segregation, and the form of crystallization may be the decisive factor for the abrupt increase in gravity segregation.

On the basis of the above-said, the authors decided to investigate this, and allied phenomena, of the lead-antimony system.

II. Experimental Investigations

The material selected for the investigation consisted of two commercial antimonial lead ingots each of approximately 22 kg weight, containing respectively 10% and 13% antimony. These ingots were sectioned in both longitudinal and transverse directions and drillings were taken from numerous places and chemically analysed. The maximum variation in composition of the 10% antimonial lead was $9,10\% \div 9,79\%$ antimony, whereas the maximum variation in the 13% antimonial lead was $10,72 \div 19,34\%$ antimony. The results confirm the observations by ENSSLIN [23] with particular reference to hyper-eutectic alloys, and emphasise the need to remelt one ingot for sampling and to take samples by chillcasting, preferably on to a large cold metal plate. The two ingots were cast and then aged for 5 years at $15^\circ\text{C} \div 30^\circ\text{C}$.

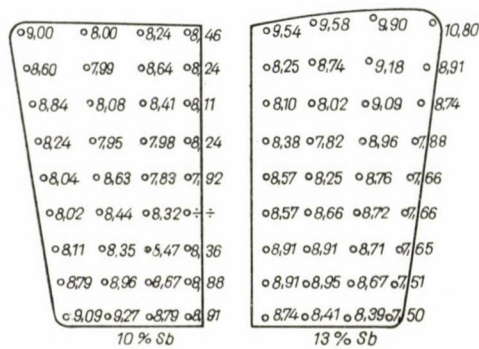


Fig. 1

III. Hardness Determinations

Test plates for hardness tests were cut out as cross-sections from the centre of each ingot and hardness determinations made with an Avery Visual Hardness Testing Machine, Type 6406, using a diamond pyramid indenter with an included angle of 136° and a load of 5 kg. The rate of loading was automatically adjusted with the aid of a hydraulic cushioning device. Both diagonals for each indentation were read and the means determined. The Vickers pyramid hardness numbers were extracted from the tables [24] and are presented in Fig. 1 for the 10% and 13% antimony alloy, superimposed on each half section of the ingot, the centre partitioning planes facing each other. It can be seen that the hardness numbers at the top of the 13% antimonial alloy were considerably higher than those of the 10% alloy. This behaviour is consistent with the chemical analysis, and this hardness determination test was conducted to investigate the applicability for semimicro-hardness testing as a means of determining the degree of segregation.

Because the results were lower than expected [19], eutectic areas were selected under the microscope and were subjected to hardness determination. The hardness of the eutectic composition was found to be $8,41 \pm 0,5$ VH5, representing a mean value determined from 30 indentations.

The same eutectic structure measured by the Brinell method with a 10 mm ball and a load of 100 kg with a steady increase of the load during 15 seconds and holding the maximum load for 30 seconds, showed a hardness of $H\ 10/100/30 = 13,5 \pm 0,5$ kg/mm². The hardness of the eutectic structure as determined with the Leitz Durimet with a load of 15 g and a loading time of 30 seconds, was $HV\ (15\ g) = 16,6 \pm 3,0$ kg/mm². The Durimet was also used to find the hardness of the phases present in the eutectic structure. The lead-rich dendrites showed a value of $HV\ (15\ g) = 15,7 \pm 3,2$ kg/mm², whereas the antimony-rich phase in the form of large cuboids showed a Durimet value of $HV\ (15\ g) = 107,4 \pm 2,0$ kg/mm². For comparison with previously determined values, the hardness determination tests of commercial lead (Feinblei 99,99 DIN 1719), high purity lead (Cominco 69*), and high purity antimony (Cominco 69) with the Brinell, Avery and Durimet machines respectively, were undertaken. The results given are a means of at least 30 indentations with maximum and minimum variations and are presented in Table II.

Table II

Hardness values in Brinell and Vickers (Avery and Durimet) for commercial lead, high purity lead, high purity antimony, lead-rich dendrites, antimony-rich cuboids and the eutectic structure of the lead-antimony system.

The results are the means of at least 30 indentations with maximum and minimum readings as tolerances

Temperature of test, 20 °C ± 0,5 °C	Hardness determined by		
	Brinell, H/10/100/30 kg/mm ²	Avery Universal Tester, HV HV (5) kg/mm ²	Leitz Durimet, HV (15 g) kg/mm ²
Commercial lead, Feinblei 99,99 (Grainsize: 0,5 mm ²)	3,57 ± 0,05	Outside reading range	3,71 ± 0,1
High purity lead, Cominco 69 (Grainsize: 0,2 mm ²)	2,74 ± 0,04	Outside reading range	3,26 ± 0,08
High purity antimony, Com- inco 69 (Cast structure)	30,0 ± 18,0	38,6 ± 20,0	79,5 ± 2,0
Lead-rich dendrites	Not possible	Not possible	15,7 ± 6,2
Antimony-rich solid solution as cuboids	Not possible	Not possible	107,4 ± 2,0
Eutectic structure	13,5 ± 0,5	8,41 ± 0,5	16,6 ± 3,0

* Cominco is the abbreviation of Consolidated Mining and Smelting Company of Canada Limited, Montreal. Cominco 69 means 99,9999% purity.

The previously reported values of 2,5 to 4,0 Brinell Units for commercial lead [19] at room temperature, are similar to the values in Table II. The values for high purity lead are, as expected, considerably lower than the values for commercial lead. High purity antimony showed a broad scattering on the Brinell and Avery testing equipment, whereas the accuracy of the Durimet was satisfactory. In the latter case, the hardness values were considerably higher than those obtained with the Brinell and Avery readings, as well as the previously reported result of 26 kg/mm² by GOEBEL [25]. The same author reported a maximum hardness of 32 kg/mm² in the lead-antimony system for an alloy of 90% antimony. This is considerably lower than the result obtained in this investigation of 79,5 kg/mm² for high purity antimony and 107,4 kg/mm² for the cuboids. The difference may be explained by the observation that the high purity antimony showed even at low loads, microscopic cracks through the indentations, which increased the diameter considerably. With loads of 15 g no cracks were observed and the results showed no scattering. It was concluded that the value of the hardness of high purity antimony at a temperature of 20 °C is $79,5 \pm 2,0$ kg/mm² in Vickers H Units (15 g) measured with the Leitz Durimet, rather than the previously reported value of 26 kg/mm².

The determination of the hardness of the antimony-rich solid solution in form of cuboids led to the following observation. If the cuboids were smaller than 20 times the diagonal of the indentation they split and were pressed into the soft matrix. Further, if the indenter was not placed centrally on the cuboids, they tilted in the soft matrix and the indenter slid along the tilted surface producing a scratch. By carefully selecting larger cuboids under the microscope, 30 indentations were produced which did not scatter more than 2%. On the basis of the above said, it may be claimed that the highest hardness in the lead antimony system is the antimony-rich solid solution of cuboids with a hardness value of $107,4 \pm 2,0$ kg/mm², determined with the Leitz Durimet micro hardness tester under a load of 15 g, and not the previously reported value of 32 kg/mm² [25].

The values of the hardness of the eutectic structure of $13,5 \pm 0,5$ kg/mm² found with the Brinell machine, are similar to the previously reported value of 15 kg/mm² [26]. The values determined with the Durimet are more scattered, but this is not surprising, taking into consideration the duplex nature of the structure. The values determined with the Avery machine are lower, and this may be explained by the shorter testing time and the fact that the edges of the diamond pyramid crush or press the hard lamellas of the antimony-rich phase and thus decrease the hardness. Further, the minimum load applicable (5 kg) is unfavourable in the case of the lead-antimony alloy.

Summarizing, it may be said that the Brinell machine is the most reliable for measuring the values of pure lead and the lead-antimony eutectic, whereas micro hardness testing is the only means of determining the hardness of pure

antimony and the antimony-rich cuboids. The Avery hardness tests are fast and convenient but do not give results to the Brinell values in hardness testing of the lead-antimony system.

IV. Structural Investigations

A metallurgo-metallographic investigation was conducted on samples similar to the samples used for the hardness test. Macro examination of samples (Fig. 2) showed a stronger segregation of antimony in the 13% antimony alloy

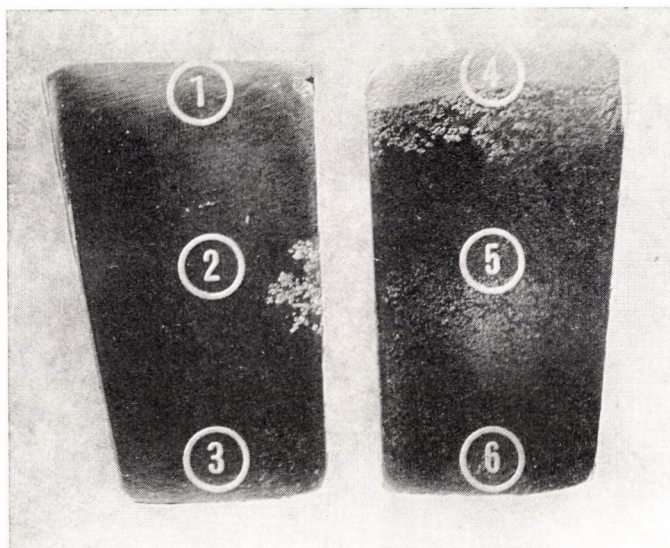
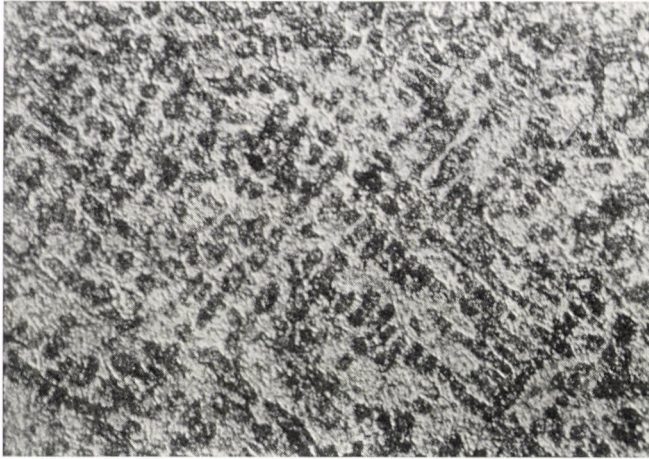
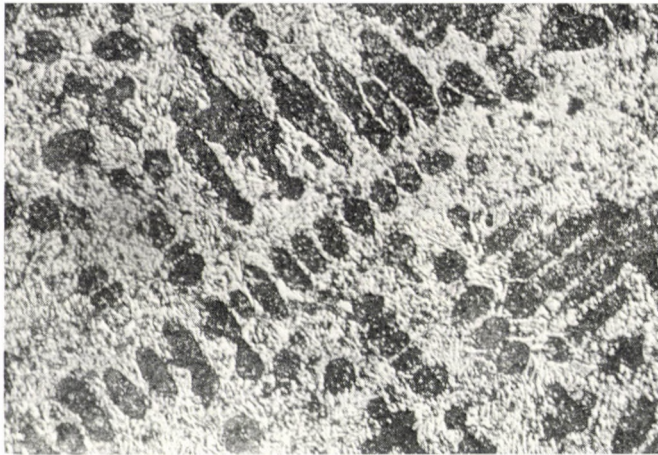


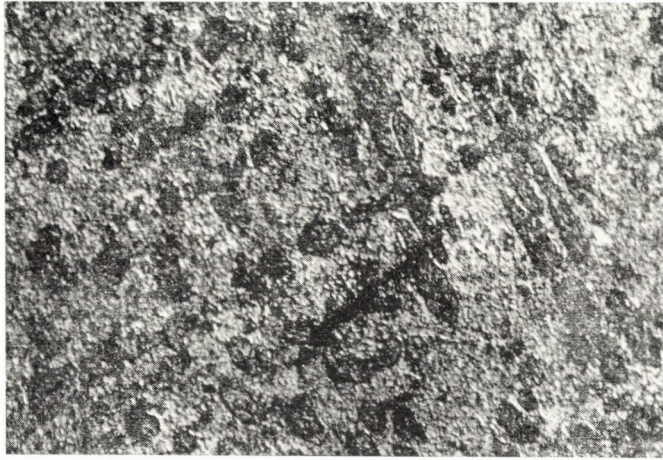
Fig. 2

than in the 10% alloy. The area of segregation was out of proportion to the increase in the primary formed antimony-rich phase, and all this points towards an abrupt increase in the gravity segregated phase on passing the eutectic point.

Samples for microscopic investigation were selected. The sampling of the alloys, which is presented in Fig. 2, took place in such a manner that point 1 is presented in Fig. 5; point 2 in Fig. 4; and point 3 in Fig. 3 at 120 times magnification. From these micro structures we can observe that the primary crystallization took place in the form of a dendritic formation of the lead-rich phase and the eutectic structure was formed between the dendritic branches, in consequence of which any gravity segregation was very restricted. The micro structures of the 13% antimony alloy were sampled so that point 4 is presented in Fig. 8; point 5 in Fig. 7; and point 6 in Fig. 6. By examination of these

*Fig. 3**Fig. 4*

pictures it may be concluded that in contrast to the behaviour of the hypo-eutectic alloys, the primary crystallized phase in the hyper-eutectic alloys is the antimony-rich phase, and this phase does not form any dendritic pattern but crystallizes in individual independent cuboids the segregation of which is not restricted and can be calculated [21, 22]. Due to the pronounced segregation of the primary cuboids of the hyper-eutectic composition, the antimony-rich phase of the eutectic is absorbed by the primary phase and an antimony deficiency is produced forming localized hypo-eutectic compositions and a reappearance of the dendritic pattern of the lead-rich phase (Fig. 7).

*Fig. 5**Fig. 6*

From this investigation it may be deduced that the main reason for the abrupt increase in the gravity segregation of the hyper-eutectic alloys is the different form of the primary crystallization. In the hypo-eutectic alloys the primary crystallization is dendritic and interferes with any type of segregation. In the hyper-eutectic composition the primary phase is a formation of individual independent cuboids of the antimony-rich solid solution and there is no restricting interference to gravity segregation. This has contributed considerably to the difficulties in determining the eutectic composition. Further, it must be recommended that wherever possible the casting of lead-antimony alloys with an antimony content of more than 11,1% be avoided, and the

*Fig. 7**Fig. 8*

specifications for commercial 13% antimonial lead in the light of the latest investigations [15—19] should be rewritten.

V. Determination of the Eutectic Composition

Areas of the polished samples showing the eutectic structure were selected under a low-power binocular microscope and sampling was done with the aid of a micro-drill, carefully selecting only the eutectic structure. Ten independent samples were taken and chemically analysed. The result of this analysis was $11,5 \pm 0,3$ per cent by weight of antimony. The lowest analytical

value found was 11,2% antimony, and this value approaches today's accepted value of 11,1% [18, 19] very closely.

VI. Determination of the Maximum Solid Solubility of the Antimony-rich Phase

Because the composition of the antimony-rich phase appears to be not known [18, 19] an attempt was made to determine the composition of the cuboids. A cylindrical container was placed in an electric pot furnace and heated to $300\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 5\text{ }^{\circ}\text{C}$; $400\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 5\text{ }^{\circ}\text{C}$; and $500\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 5\text{ }^{\circ}\text{C}$. This container was so constructed that the vertical walls were made of porous bearing material and the bottom was made of solid sheet material as well as the upper horizontal collar ring. When the container reached the desired temperature it was rotated giving at the walls of the container a gravity force of $g = 21$. Through a pipe, a lead alloy of 13% antimony heated up to $300\text{ }^{\circ}\text{C}$; $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ and $500\text{ }^{\circ}\text{C}$, was introduced into the rotating container. With the aid of the centrifugal force of $g = 21$, the liquid part of this alloy was squeezed through the porous material and catapulted from the container, whereas the solid part remained as a layer on the vertical wall. The advantage of this method was that a large amount of alloy could be put through the rotating cylinder without a stop and an accumulation of the solid phase could take place. This solid phase was removed after completion of the test and underwent the following analytical treatment. Preliminary investigations on pure antimony and pure lead shaken in various portions for various times showed that only the lead was dissolved in cold concentrated hydrochloric acid and the antimony remained.

Five samples for each temperature were treated according to the above described methods and the final residue analysed. The results are presented in Table III.

Table III

Temperature separation	Percentage of lead by weight					
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Mean
300 °C	5,11	5,02	5,14	4,83	4,95	5,01
400 °C	4,90	4,92	4,95	4,89	4,94	4,92
500 °C	4,22	4,29	4,14	4,19	4,23	4,21

From this investigation it may be said that the composition of the antimony-rich solid solution of the lead-antimony phase equilibrium diagram is as follows:

At 300 °C 5,01% lead by weight;
 at 400 °C 4,92% lead by weight;
 at 500 °C 4,21% lead by weight.

*

ACKNOWLEDGEMENT

The authors are pleased to acknowledge the assistance of Mrs. E. FILSON, A.S.T.C., School of Metallurgy, The University of New South Wales; *The Broken Hill Associated Smelters Proprietary Limited, Port Pirie* (Australia) and *The Britannia Lead Company Limited, Northfleet* (England), and thank them for their help in analysing various samples.

REFERENCES

1. SACK, M.: *Z. anorg. allg. Chemie* **35** (1903), 249—328.
2. Referred by GAUTIER, H. in *Contribution à l'étude des alliages*. Paris 1907, 107.
3. CHARPY, G.: *Bull. Soc. Encour. Ind. nat.* **5**, **2** (1897), 394.
4. STEAD, J. E.: *J. Soc. chem. Ind.* **16** (1897), 200—208.
5. GONTERMANN, W.: *Z. anorg. allg. Chem.* **55** (1904), 419—425.
6. LOEBE, R.: *Metallurgie* **8** (1911), 8—9.
7. HEYN, E.—BAUER, O.: *Untersuchungen über Lagermetalle*. Berlin 1914.
8. DEAN, R. S.: *J. Amer. chem. Soc.* **45** (1923), 1683—1688.
9. ENDO, H.: *Sci. Rep. Tohoku Univ.* **14** (1925), 502—507.
10. BRONIEWSKI, W.—SLIWOWSKI, L.: *Rev. Metallurgie* **25** (1928), 397.
11. ABEL, E.—REDLICH, O.—ADLER, J.: *Z. anorg. allg. Chem.* **174** (1928), 270.
12. QUADRAT, O.—JIRISTE, J.: *Chim. et. Ind.* (1934), 485—489.
13. HOPE, V. H.—HANEMANN, H.: *Z. Metallkde* **12** (1940), 115.
14. PELLINI, W. S.—RHINES, F. N.: *Trans. AIME* **152** (1943), 65—71.
15. BLUMENTHAL, B.: *Trans. AIME* **156** (1944), 240—250.
16. RAYNOR, G. V.: *Met. Abstr.* **19** (1951), 160.
17. HOFMANN, W.—ENGEL, R.: *Z. Metallkde* **44** (1953), 132.
18. HANSEN, M.: *Constitution of Binary Alloys*. McGraw-Hill, 1958.
19. HOFMANN, W.: *Blei und Bleilegierungen*. Springer, 1963.
20. GROSHEIM—KRISKO, K. W.: *Z. Metallkde* **34** (1942), 102.
21. KRYSKO, W. W.: *Erzmetall* **6** (1953), 442.
22. KRYSKO, W. W.: *Trans. AIME* **224** (1962), 819—821.
23. ENSSLIN, F.: *Erzmetall* **5** (1952), 475—479.
24. *British Standard 427 1931* incl. Amendment No. 1. 27. Oct. 1958.
25. GOEBEL, I.: *Z. Metallkde.* **14** (1922), 357.
26. WERNER, M. in BAUER, O.—KRÖHNKE, O.—MASING, G.: *Korrosion metallischer Werkstoffe*. Hirzel, 1938.

UNTERSUCHUNG DES BLEI-ANTIMON SYSTEMS

W. W. KRYSKO und J. M. NEWBURN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser untersuchten das Blei-Antimon Zustandsdiagramm. Sie fanden, daß das plötzliche Anwachsen der Gravitationssteigerung der antimonreichen Phase nach Überschreitung des eutektischen Punkts durch die verschiedene Morfologie der primären Solidusphase verursacht wird und nicht durch eine Veränderung der Viskosität des Systems. Mikro- und Makrohärtemessungen wurden durchgeführt und die Härte von Reinstantimon wurde zu 79,5 kg/mm² gefunden und nicht zu 26 kg/mm², die Härte der antimonreichen Phase ist 107,4 kg/mm² und nicht 32 kg/mm², wie bisher bekannt. Die Härte von reinstem Blei (99,9999) wurde zu 2,74 kg/mm² gefunden und die von handelsüblichem Blei (99,99) zu 3,75 kg/mm², in Brinelleinheiten H 10/100/30 bei 20 °C. Die Zusammensetzung des eutektischen Punkts war 11,5% Antimon, was nahe dem allgemein anerkannten Wert von 11,1% Antimon ist. Die maximale Löslichkeit von Blei in Antimon wurde mittels einer neuen Separationsmethode durch Heißzentrifugieren gefunden und wurde zu 5,01% Blei bei 300 °C, zu 4,92% Blei bei 400 °C und zu 4,21% Blei bei 500 °C gefunden. Diese Werte im Antimon-Blei-Zustandsdiagramm waren bisher nicht bekannt.

RECHERCHES SUR LE SYSTÈME PLOMB-ANTIMOINE

W. W. KRYSKO et J. M. NEWBURN

RÉSUMÉ

Le diagramme d'équilibre du système plomb-antimoine a été étudié par les auteurs. Ils ont trouvé que l'augmentation brusque de la ségrégation gravitationnelle de la phase riche en antimoine au delà du point eutectique est due à la morphologie différente de la phase solide primaire et non au changement de viscosité du système. Des essais de micro- et macrodureté ont été faits par les auteurs, qui ont trouvé que la dureté de l'antimoine de haute pureté est de 79,5 kg-mm² et celle de la phase riche en antimoine de 107,4 kg-mm², au lieu de 26 kg-mm², resp. de 32 kg-mm², comme on l'a cru jusqu'à présent. La dureté du plomb le plus pur (99,9999) est de 2,74 kg-mm² et celle du plomb commercial (99,99) de 3,75 kg-mm², en unités Brinell H 10/100/30 à 20 °C. La composition du point eutectique présentait 11,5% d'antimoine, pourcentage proche de la valeur généralement admise: 11,1% d'antimoine. La solubilité maximum du plomb dans l'antimoine était déterminée par une nouvelle méthode de séparation avec centrifugeage à chaud, qui donnait 5,01% du plomb à 300 °C, 4,92% du plomb à 400 °C et 4,21% du plomb à 500 °C. Ces valeurs du diagramme d'équilibre antimoine-plomb n'étaient pas connues jusqu'à présent.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ СВИНЕЦ — СУРЬМА

В. В. КРИСЬКО и И. М. НЬЮБЕРН

РЕЗЮМЕ

Авторы исследовали диаграмму состояния системы свинец — сурьма. Авторами установлено, что внезапный рост гравитационного зейгерования богатой сурьмой фазы после перехода через эвтектическую точку является следствием различной морфологии первичных солидусных фаз, а не следствием изменения вязкости системы. Были проведены измерения микро- и макротвердости и твердость совершенно чистой сурьмы была установлена равной 79,5 кг/мм², а не 26 кг/мм²; твердость же богатой сурьмой фазы равна 107,4 кг/мм², а не 32 кг/мм², как это считалось до сих пор. Твердость очень чистого свинца (99,9999) была установлена равной 2,74 кг/мм², а свинца торговой марки (99,99) равной 3,75 кг/мм², в единицах Бринеля Н 10/100/30 при 20 °C. Состав в эвтектической точке был установлен равным 11,5% сурьмы, что лежит близко к общепринятому значению в 11,1% сурьмы. Максимальная растворимость свинца в сурьме была установлена при помощи нового метода сепарирования (центрифугирования в горячем состоянии) и определена равной 5,01% свинцу при 300 °C, 4,92% свинцу при 400 °C и 4,21% свинцу при 500 °C. Эти величины на диаграмме состояния системы сурьма — свинец до сих пор не были еще известны.

THE INFLUENCE OF TEMPERATURE AND RELATIVE INTERFACIAL SHEAR MOVEMENT RATE ON THE SHEAR STRENGTH OF HIGH PURITY LEAD

W. W. KRYSKO and R. G. FENTON
Dr. Ing. M.Sc.

THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES, SYDNEY (AUSTRALIA)

[Manuscript received January 11, 1965]

Tests were carried out to determine the influence of the temperature and the relative interfacial shear movement rate on the shear strength of high purity lead. It was found that critical rates exist, as follows: At $+170^{\circ}\text{C}$ and $+100^{\circ}\text{C}$, above 150 mm/cm/min; at 0°C , 80 mm/cm/min; at -70°C , 50 mm/cm/min; at -135°C , 35 mm/cm/min; and at -185°C , less than 5 mm/cm/min, for 99,9999% purity lead with a grain size of $0,2\text{ mm}^2$. These values are needed for the calculation of power requirements during the process of extrusion and may explain the increase in pressure required with increasing ram speed.

For the calculation of the power consumption required during the process of extrusion of metals [1] it is necessary to know the shear strength of these metals at different temperatures, applying various deformation rates. It is known that the shear strength of lead at a given temperature depends on the grain size [2] and on the deformation rate [3]. The effect of the strain rate on the properties determined varies with the temperature. Its influence rapidly increases with increasing temperature and it becomes dominant at temperatures close to the melting point of metals. At room temperature the effect of the strain rate on properties of high melting point metals is generally negligible, but properties of low melting point metals are strongly influenced by the applied strain rate even below room temperature.

Since the extrusion of metals usually takes place at elevated temperatures relatively close to the melting point, it is therefore necessary to obtain exact values of the shear strength of metals used in extrusion as a function of the temperature and the relative interfacial shear area movement.

The shear strength properties of high purity lead (99,9999%) [4] are investigated in this paper as part of an extended investigation on extrusion of metals. Lead was extruded to a rod of 11,2 mm diameter. Specimens were cut from this rod, each measuring about 70 mm in length. The surface of the specimens was smooth, the grain structure fine and uniformly distributed. The average grain size measured $0,2\text{ mm}^2$. This grain size was determined by etching the extruded surface [5]. The tensile strength of the material at a strain rate of 10,2 mm/cm/min and a temperature of 22°C was found to be $158,2\text{ kg/cm}^2$ and its elongation over 110 mm was 85%.

A universal electro-hydraulic testing machine was used to carry out the tests. An average deformation rate in mm/min was calculated by dividing the relative transverse displacement of the fixed and moving shearing rings by the corresponding time interval. By dividing the average deformation rate by the diameter of the specimen in cm the average relative interfacial shear movement rate in mm/cm/min was obtained.

The tests were carried out in a temperature bath. The specimen was placed in the circular hole of the two fixed and one moving steel shearing rings and when the specimen was properly placed in position and the rings adjusted,

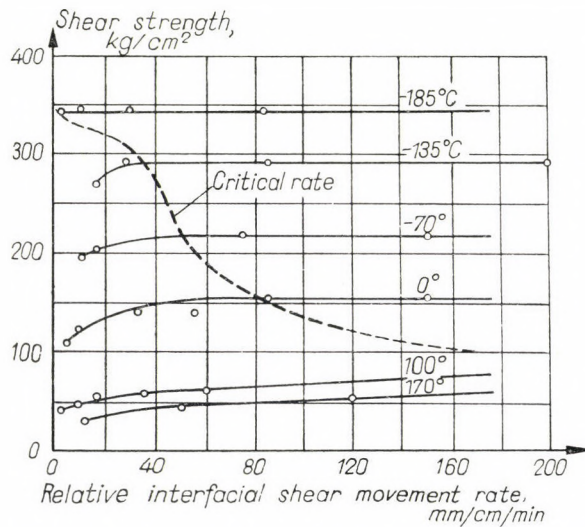


Fig. 1. The shear strength of high purity lead as a function of temperature and the relative interfacial shear movement rate, the dotted line shows the critical rate

the container was filled with liquid. The specimen and the rings were completely submerged so that uniform temperature could be kept throughout. A thermometer was placed in the liquid to measure its temperature. At one end of each specimen a small hole was drilled, into which the end of a thermocouple was placed and by this means the actual temperature of the specimen itself was measured. Most of the temperatures at which tests were carried out were fixed temperatures, selected to enable constant temperatures to be maintained over a lengthy period of time. The results obtained from six test temperatures are listed in Table I.

These results are plotted in Fig. 1. The shear strength increases with the increase of shear movement rate until the critical rate is reached, and after that, the shear movement rate has no effect at all on the shear strength. The value of the critical rate is dependent on the temperature. At high temperatures the critical rate is high and the shear strength keeps on increasing.

Table I

The variation of the shear strength of high purity lead as a function of the relative interfacial shear movement rate at six different test temperatures

Temperature, °C	Shear strength, kg/cm ²	Shear movement rate, mm/cm/min
+170	54,8	120,0
	45,2	50,0
	30,5	13,0
+100	74,0	150,0
	64,0	60,0
	59,0	35,3
	53,8	17,1
	47,2	9,2
	42,2	2,3
0	155	150,0
	155	85,5
	141	54,6
	142	33,3
	123	10,0
	110	5,5
- 70	218	150,0
	218	75,0
	218	50,0
	203	17,1
	196	11,3
	- 135	292
292		85,8
291		27,3
271		17,1
- 185	344	86,0
	343	40,0
	346	30,0
	345	10,9
	343	3,4

Such is the case at +100 °C and at +170 °C where the critical rate was not actually reached during testing. At lower temperatures the value of the critical rate gets smaller. The horizontal part of the curves corresponding to 0 °C, -70 °C and -135 °C testing temperatures, can be clearly seen. The critical rates are, at +170 °C and +100 °C above 150 mm/cm/min; at 0 °C, 80 mm/cm/min; at -70 °C, 50 mm/cm/min; at -135 °C, 35 mm/cm/min;

and at -185°C = below 5 mm/cm/min. The dotted line on Fig. 1 shows the critical rates.

The increase in shear strength as a function of the increasing shear movement rate may explain the observation that under otherwise equal conditions the power consumption increases with increasing ram speed [6] during the extrusion of lead in a ram press.

REFERENCES

1. GELEJI, A.: *Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch*. Akademie-Verlag, Berlin 1961.
2. GARRE, B.—MÜLLER, A.: *Zeitschr. anorg. allgm. Chemie* **198** (1931), 296.
3. ERDMANN-JESNITZER, F.—HANEMANN, H.: *Zeitschr. f. Metallkd.* **32** (1940), 118.
4. Cominco 69 grade-metals.
5. HOFMANN, W.: *Blei und Bleilegierungen*. Springer-Verlag, Berlin 1962.
6. PEARSON, C. E.: *The Extrusion of Metals*. Chapman & Hall, London 1944.

DER EINFLUß DER TEMPERATUR UND DER RELATIVEN GLEITFLÄCHEN-SCHUBGESCHWINDIGKEIT AUF DIE SCHUBFESTIGKEIT VON REINSTBLEI

W. W. KRYSKO und R. G. FENTON

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser untersuchten experimentell den Einfluß der Temperatur und der relativen Gleitflächen-Schubgeschwindigkeit auf die Schubfestigkeit von Reinstblei. Sie fanden, daß für Blei von 99,9999% Reinheit mit einer Korngröße von 0,2 mm² kritische Verhältnisse existieren, und zwar: bei $+170^{\circ}\text{C}$ und bei $+100^{\circ}\text{C}$ über 150 mm/cm/min; bei 0°C 80 mm/cm/min, bei -70°C 50 mm/cm/min, bei -135°C 35 mm/cm/min und bei -185°C weniger als 5 mm/cm/min. Diese Werte werden für die Berechnung des Leistungsbedarfs der Strangpresse benötigt und sie können die Erhöhung des Drucks mit steigender Kolbengeschwindigkeit erklären.

L'INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE ET DE LA VITESSE DE CISAILLEMENT INTERFACIALE RELATIVE SUR LA RÉSISTANCE AU CISAILLEMENT DU PLOMB DE TRÈS HAUTE PURETÉ

W. W. KRYSKO et R. G. FENTON

RÉSUMÉ

Les auteurs ont fait des essais pour déterminer l'influence de la température et du rapport de la vitesse de cisaillement interfaciale relative sur la résistance au cisaillement du plomb de très haute pureté. Ils ont trouvé que pour un plomb de 99,9999% de pureté à grains de 0,2 mm², il existe des rapports critiques de vitesse, notamment: au-dessus de 150 mm/cm/min à $+170^{\circ}\text{C}$ et $+100^{\circ}\text{C}$, 80 mm/cm/min à 0°C , 50 mm/cm/min à -70°C , 35 mm/cm/min à -135°C et moins de 5 mm/cm/min à -185°C . Ces valeurs sont nécessaires pour calculer les puissances demandées par l'extrusion et peuvent expliquer l'augmentation de pression en fonction de l'accroissements de la vitesse du piston.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ СРЕЗА
МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ СРЕЗА ОЧЕНЬ
ЧИСТОГО СВИНЦА

В. В. КРИСЬКО и Р. Г. ФЕНТОН

РЕЗЮМЕ

Авторы проводили опыты для того, чтобы определить воздействие, оказываемое температурой и отношения относительной скорости среза между поверхностями на сопротивление среза очень чистого свинца. Авторы нашли, что в случае свинца чистотой 99,9999% с крупностью зерен порядка $0,2 \text{ мкм}$ имеются отношения критических скоростей, а именно при $+170$ и $+100$ °C выше 150 мм/см/мин ; при 0 °C 80 мм/см/мин ; при -70 °C 50 мм/см/мин ; при -135 °C 35 мм/см/мин и при -185 °C ниже 5 мм/см/мин . Эти величины необходимы для вычисления потребной мощности при экструдировании и могут объяснить рост давления, наблюдаемый при возрастающей скорости поршня.

BESTIMMUNG DER BEIM GESENKSCHMIEDEN AUFTRETENDEN HÖCHSTKRAFT

36. MITTEILUNG DER METALLURGISCHEN ARBEITSGEMEINSCHAFT

L. TÓTH

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC (UNGARN)

[Eingegangen am 24. Februar, 1965]

Vorliegende Studie beschäftigt sich mit der Bestimmung des maximalen Kraftbedarfs beim Schmieden von Gesenkschmiedestücken. Das Hauptkennzeichen der hier erläuterten Theorie der Näherungsbestimmung der maximalen Schmiedekraft ist neben ihrer Einfachheit der Umstand, daß sie sämtliche, das Gesenkschmieden beeinflussende Faktoren berücksichtigt. Im Artikel werden ferner Zusammenhänge abgeleitet, die sich auf einfache Schmiedestücke beziehen. Über die Richtigkeit der abgeleiteten Zusammenhänge kann man sich mit Hilfe eines Vergleichs mit den Versuchswerten überzeugen. Die Näherungsbestimmung des Höchstkraftbedarfs beim Schmieden von Schmiedestücken mit komplizierten Formen bildet die letzte Anwendung der in der Studie beschriebenen Theorie. Die Anwendung des Rechenverfahrens ist an einem Zahlenbeispiel dargestellt.

Bezeichnungen

A	[mkp]	Arbeitsbedarf je Schlag;
b	[mm]	Höhe der bildsamen Zone im Falle eines einfachen zylindrischen Schmiedestückes;
b_1, b_2	[mm]	Höhe der Teile der bildsamen Zone;
b_m	[mm]	mittlere Höhe der bildsamen Zone;
D	[mm]	Durchmesser oder Breite des Schmiedestückes;
F	[mm ²]	Fläche des Querschnittes vom Schmiedestück in der Gratebene;
h	[mm]	Höhe des Schmiedestückes;
h_1	[mm]	Ausgangshöhe des Schmiedestückes;
h_{2m}	[mm]	mittlere Höhe des fertigen Schmiedestückes;
Δh	[mm]	Höhenabnahme;
Δh_m	[mm]	mittlere Höhenabnahme des Schmiedestückes;
k_f	[kp/mm ²]	Verformungsfestigkeit;
k_{fm}	[kp/mm ²]	mittlere Verformungsfestigkeit;
k_{f1Gr}	[kp/mm ²]	Verformungsfestigkeit des im Grat befindlichen Stoffes vor dem Schlag;
k_{f2Gr}	[kp/mm ²]	Verformungsfestigkeit des im Grat befindlichen Stoffes nach dem Schlag;
k_{fmGr}	[kp/mm ²]	mittlere Verformungsfestigkeit des im Grat befindlichen Stoffes;
k_{f1Ge}	[kp/mm ²]	Verformungsfestigkeit des im Gesenkhohlraum befindlichen Stoffes vor dem Schlag;
k_{f2Ge}	[kp/mm ²]	Verformungsfestigkeit des im Gesenkhohlraum befindlichen Stoffes nach dem Schlag;
k_{fmGe}	[kp/mm ²]	mittlere Verformungsfestigkeit des im Gesenkhohlraum befindlichen Stoffes;
L	[mm]	Länge des Schmiedestückes;
l_s	[mm]	Breite des Gratstegs;
p	[kp/mm ²]	Preßdruck beim Strangpressen;
P_{max}	[kp]	beim Gesenkschmieden auftretende Höchstkraft;
$P_{max, prism.}$	[kp]	beim Gesenkschmieden von prismatischen Körpern auftretende Höchstkraft;
$P_{max, zyl.}$	[kp]	beim Gesenkschmieden von zylindersymmetrischen Schmiedestücken auftretende Höchstkraft;

$P_{\max 1}, P_{\max 2}$	[kp]	beim Schmieden von einfachen Teilen eines komplizierten Gesenkschmiedestückes auftretende maximale Schmiedekraft;
q	[kp/mm ²]	beim Strangpressen in normaler Richtung auf die tote Ecke wirkende Spannung;
r	[mm]	Radius eines beliebigen Raumelementes von zylindersymmetrischen Schmiedestücken;
R	[mm]	Radius oder halbe Breite des Schmiedestückes;
R'	[mm]	Kennzeichnendes Innenmaß (Radius oder halbe Breite) des Schmiedestückes;
s	[mm]	Gratdicke;
S_{Rf}	[mm ²]	die bildsame und die elastische Zone trennende s.g. Rißfläche;
t	[s]	Zeitdauer des Schmiedens;
v	[m/s]	Geschwindigkeit des Schmiedens (der Umformung);
v_r	[m/s]	radiale Geschwindigkeit vom beliebigen Volumen des zylindersymmetrischen Schmiedestückes;
x	[mm]	Koordinate;
y	[mm]	Koordinate;
ε	—	spezifische Querschnittsverminderung;
ε_{1Ge}	—	Querschnittsverminderung des im Gesenkohlraum vorhandenen Stoffes während des vorigen Schlages;
ε_{2Ge}	—	Querschnittsverminderung des im Gesenkohlraum vorhandenen Stoffes nach dem Schlag;
ε_{1Gr}	—	Querschnittsverminderung des im Grat befindlichen Stoffes vor dem Schlag;
ε_{2Gr}	—	Querschnittsverminderung des im Grat befindlichen Stoffes nach dem Schlag;
$\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_z$	—	Formänderungsgeschwindigkeiten der Raumeinheit des zylindersymmetrischen Körpers;
λ	—	Verhältniszahl zwischen den Spannungen und Formänderungsgeschwindigkeiten;
μ	—	Reibungszahl zwischen Schmiedestück und Werkzeugwand;
σ_1	[kp/mm ²]	auf ein beliebiges Raumelement des bildsamen Körpers wirkende Höchstspannung;
σ_3	[kp/mm ²]	auf ein beliebiges Raumelement des bildsamen Körpers wirkende Kleinstspannung;
$\sigma_3 \max$	[kp/mm ²]	in der Symmetrieachse des Schmiedestückes auftretende Spannung σ_3 ;
$\sigma_{1(x=0)}, \sigma_{3(x=0)}$	[kp/mm ²]	an der Stelle $x = 0$ auftretende Spannung σ_1 bzw. σ_3 ;
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	[kp/mm ²]	auf ein beliebiges Raumelement des zylindersymmetr. Körpers wirkende Hauptspannungen;
σ_m	[kp/mm ²]	auf ein beliebiges Raumelement des bildsamen Körpers wirkende mittlere Spannung (algebraischer Mittelwert der Hauptspannungen);
τ	[kp/mm ²]	entlang der Gesenkwand auftretende Schubspannung;
τ_{\max}	[kp/mm ²]	im Werkstoff auftretende maximale Schubspannung;
ξ_{Gr}	—	Faktor zur Berücksichtigung der Gratwirkung;
ξ_{Ge}	—	Faktor zur Berücksichtigung der Formwirkung des Gesenkohlraumes;
$\xi_{Ge \text{ prism.}}$	—	Faktor zur Berücksichtigung der Formwirkung des Gesenkohlraumes beim Schmieden von prismatischen Körpern;
$\xi_{Ge \text{ zyl.}}$	—	Faktor zur Berücksichtigung der Formwirkung des Gesenkohlraumes beim Schmieden von zylindersymmetrischen Körpern.

I. Einleitung

Die Kenntnis der beim Schmieden auftretenden Kraft bildet die Grundlage für die Ausarbeitung der Technologie des Gesenkschmiedens. Nach den Versuchen von A. GELEJI [1] erfolgt die Kraftänderung in Abhängigkeit von der Höhenabnahme bei der Umformung eines einfachen Schmiedestückes

entsprechend des Bildes 1. Im Bild bezeichnet *a* Beginn der Gesenkraumfüllung, *b* Austrittsbeginn des Grates, *c* Beginn des Zusammendrückens des Grates, *d* vollkommene Ausfüllung des Gesenkraumes. Es ist zu sehen, daß mit der Abnahme der Höhe der Kraftbedarf der Umformung ständig wächst. Die im Bild 1 dargestellte Kraft-Höhenabnahme-Kurve liefert für die Ausarbeitung der Schmiedetechnologie zwei wichtige Angaben: Einerseits die Größe der zur Fertigung des Schmiedestückes erforderlichen Höchstkraft, aus der die Belastbarkeit der Maschine angegeben werden kann, andererseits die Größe der zur Herstellung des Schmiedestückes aufgewandten mechanischen Arbeit, mit deren Hilfe die Maschinenleistung bzw. die Anzahl der erforderlichen Schläge be-

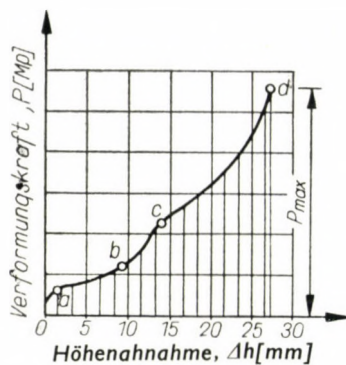


Bild 1

stimmt werden kann. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmungsmöglichkeit der beim Schmieden auftretenden Höchstkraft. Die Höchstkraft tritt nach dem Bild 1 im letzten Augenblick des Schmiedens auf, wenn das Gesenk bereits ganz ausgefüllt ist.

In den letzten Jahren ist eine bedeutende Entwicklung in der Theorie der Bestimmung der Höchstkraft des Schmiedens festzustellen. Als Erster stellte A. GELEJI [2] den Umstand fest, daß im Verlauf des Gesenkschmiedens im ausgefüllten Gesenk nicht der ganze Werkstoff in einen bildsamen Zustand übergeht. A. GELEJI bestimmte experimentell die Grenzen der bildsamen Zone, und in Kenntnis der Größe der bildsamen Zone arbeitete er ein Rechenverfahren zur Bestimmung der maximalen Schmiedekraft aus. SEMENOW [3], STROSCHEW und POPOV [4], ferner STROSCHEW, SEMENOW und KIRSANOWA [5] haben ein der Gelejischen Methode ähnliches Verfahren zur Bestimmung der maximalen Schmiedekraft ausgearbeitet. GANAGO, WAISBURD und TARNOWSKIJ [6] haben die Grenzen der bildsamen Zone mit Hilfe der Variationsgleichungen, die für kleine Formänderungen der Plastizitätstheorie gültig sind, bestimmt. SOFMAN [8] und JOHNSON [9] haben mittels der sog. Charakte-

ristikmethode die Grenzen der bildsamen Zone und die maximale Schmiedekraft ermittelt. Gegen jede der hier aufgeführten Lösungen können Ansprüche gestellt werden, die sie nicht erfüllen können. Die mit Hilfe der Variations- und der Charakteristikmethode gefundenen Lösungen sind trotz ihrer scheinbaren Exaktheit doch nicht ganz zufriedenstellend. Wegen der Ausgangsbedingungen und der Einschränkungen besitzen sie nur für kleine Formänderungen Gültigkeit, darüber hinaus jedoch, stößt ihre Anwendung auf komplizierte Gesenke auf ernsthafte rechnerische Schwierigkeiten. Die Lösungen von GELEJI [2], SEMENOW [3], STROSCHEW [4], ferner von STROSCHEW, SEMENOW und KIRSANOWA [5] sind auch im Fall von kompliziert geformten Gesenken einfach anzuwenden. Zur Feststellung der Grenzen der im Schmiedestück auftretenden bildsamen Zonen sind jedoch Einzel- und mitunter recht komplizierte Versuche erforderlich. Die vorliegende Studie bezweckt die Ausarbeitung einer Näherungslösung, mit deren Hilfe die Grenzen der bildsamen Zone und die maximale Schmiedekraft theoretisch einfach bestimmbar sind.

II. Theoretische Grundlagen der Bestimmung der Schmiedekraft

Die im Betrieb tätigen Ingenieure erachten jene Beziehungen als befriedigend, die außer ihrer einfachen Handhabung auch die Faktoren entsprechend berücksichtigen können, welche das Schmieden beeinflussen. Um eine theoretische Lösung, welche diesen Bedingungen entspricht, ausarbeiten zu können, müssen wir vereinfachende Voraussetzungen einführen. Diese vereinfachenden Voraussetzungen müssen mit den tatsächlichen Verhältnissen im Einklang stehen, daher ist es zweckmäßig, sie aus den Versuchsergebnissen ausgehend zu bestimmen.

Im Bild 2 sehen wir den Querschnitt eines Probestückes, das in einem einfachen zylindrischen Gesenk eine relative Höhenabnahme von 5% erleidet. Aus dem Bild ist es zu ersehen, daß von den ursprünglich geraden Linien nur ein Teil, auf einer begrenzten Fläche, eine Krümmung, als Zeichen einer bleibenden Formänderung erfährt. Auf Grund des Bildes 2 kann die im Schmiedestück entstandene bildsamen Zone abgegrenzt werden. Die Grenze der im Schmiedestück gebildeten bildsamen Zone ist im Bild 3 veranschaulicht. Nach Bild 3 kann die bildsamen Zone auf drei Teile, mit voneinander abweichenden Eigenschaften, zerlegt werden:

I. Zone, Stauchung des Werkstoffes zwischen parallelen, rauhen Platten;
II. Zone, Stauchung des Werkstoffes durch parallele, glatte Flächen von elastischen Stoffteilen;

III. Zone, Pressen zwischen elastischen Stoffteilen, die miteinander einen Winkel von glatten Flächen bilden.

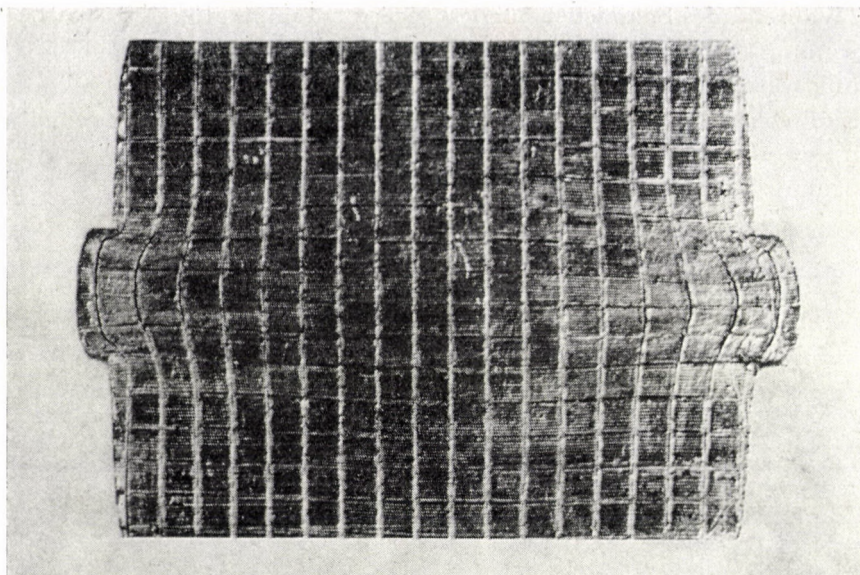


Bild 2

In den folgenden Ausführungen werden wir ausgehend aus den Grundbedingungen, die im Bild 3 dargestellt sind, die Schmiedekraft theoretisch bestimmen.

1. Bestimmungsmethode der maximalen Schmiedekraft

Die bei der einachsigen Verformung (Ziehen oder Stauchen) von Metallen auftretenden Verformungsspannungen bezeichnen wir als Verformungsfestigkeit. Die Verformungsfestigkeit bedeutet vom Standpunkt der bildsamen Verformung aus das wichtigste Kennzeichen des metallischen Stoffes. Dieser Umstand kommt auch in der Mohrschen bildsamen Bedingung zum Ausdruck.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k_f, \quad (1)$$

wo σ_1 die auf das Volumenelement des bildsamen Stoffes wirkende grösste, σ_3 die kleinste Spannung und k_f die Verformungsfestigkeit des Metalles bedeuten.

Die Verformungsfestigkeit der Metalle ist außer der Metalleigenschaften noch eine Funktion der Verformungstemperatur, des Grades und der Zeitdauer der Formänderung. Die Verformungsfestigkeit der Metalle kann durch Versuche bestimmt werden [10]. Die Versuchsergebnisse können in Fachveröffentlichungen in Form von Gleichungen, Tabellen oder Diagrammen gefunden werden.

Während des Schmiedens ändert sich die Temperatur und der Grad der Verformung als Funktion der Zeit. Daraus geht hervor, daß auch die Verformungsfestigkeit sich als Funktion der Zeit ändert. Die Schmiedekraft wird der Einfachheit halber mit Hilfe einer konstanten, sogenannten mittleren Verformungsfestigkeit bestimmt. Das für die Bestimmung der mittleren Verformungsfestigkeit anerkannte Verfahren ist im Bild 4 veranschaulicht.

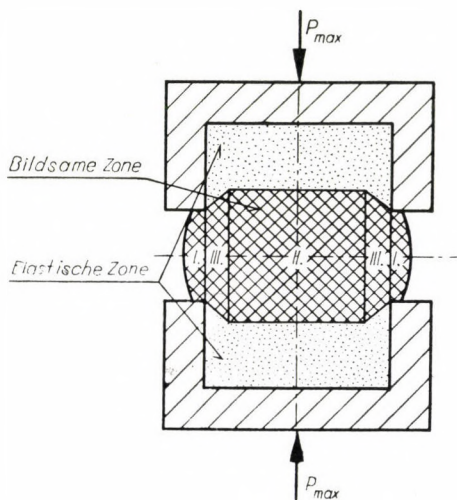


Bild 3

Zur Bestimmung der mittleren Verformungsfestigkeit ist nach Bild 4 das Aufzeichnen des Diagramms der Verformungsfestigkeit und der spezifischen Formänderung erforderlich. Im Fall der Kaltverformung hängt die Verformungsfestigkeit nur vom Grad der Formänderung ab, daher ist die Kurve $k_f - \varepsilon$ durch die Versuche unmittelbar gegeben. Im Fall der Warmverformung, wenn die Verformungsfestigkeit auch noch von der Zeitdauer der Formänderung abhängig ist, kann das Diagramm $k_f - \varepsilon$ in Kenntnis der Kurve $t = f(\varepsilon)$ aus der räumlichen Darstellung $k_f = k_f(\varepsilon; t)$ ermittelt werden [11]. Als Beispiel untersuchten wir in dem Bild 5b eine auf einer Kurbelpresse durchgeführte Verformung. Im Bild 5a ist unten die Kurve $t = f(\varepsilon)$ dargestellt. In Kenntnis der Funktion $t = f(\varepsilon)$ ist aus der Funktion $k_f = k_f(\varepsilon; t)$, und im Bild 5a die Kurve $k_f = f(\varepsilon)$ im Bild 5b Punkt für Punkt bestimmt worden. Der Wert der mittleren Verformungsfestigkeit kann in Kenntnis der Funktion $k_f - \varepsilon$ als Funktion der vollen spezifischen Formänderung ermittelt werden. In den Zonen nach Bild 3 zeigt die bildsame Formänderung verschiedene Maße, daher ist die mittlere Verformungsfestigkeit ebenfalls verschieden groß. Besonders groß ist die Differenz zwischen der in der Zone I auftretenden mittleren

Verformungsfestigkeit und der Verformungsfestigkeit, die in den Zonen II und III auftritt. Daher ist es zweckmäßig, sie getrennt zu bestimmen.

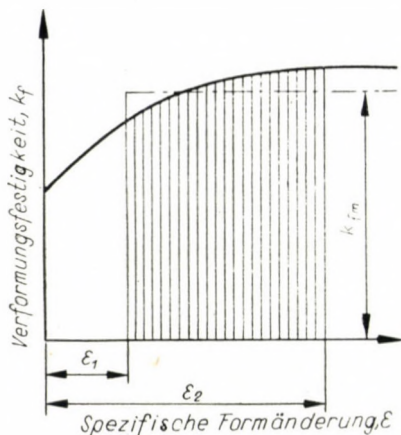


Bild 4

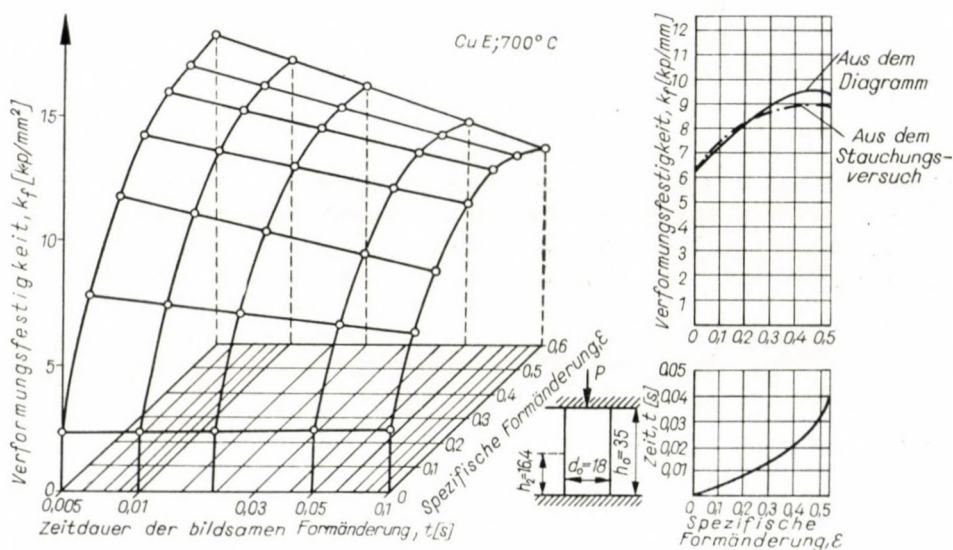


Bild 5

Nach dem Bild 6 beträgt die in den Zonen II—III auftretende mittlere volle Formänderung angenähert:

$$\varepsilon_{2Ge} = \frac{h_1 - h_{2m}}{h_1 - (h_{2m} - b)} = \frac{\Delta h_m}{\Delta h_m + b}, \quad (2)$$

wobei ε_{2Ge} das Maß der mittleren spezifischen Formänderung des im Gesenkraum befindlichen Stoffes, Δh_m die beim Schmieden auftretende durchschnittliche Höhenabnahme, b die Höhe der bildsamen Zone bedeutet.

In Kenntnis des Wertes von ε_{2Ge} , der mit Hilfe der Gleichung (2) bestimmt wurde, kann nach Bild 4 die mittlere Verformungsfestigkeit des im Gesenkraum befindlichen Stoffes ermittelt werden:

$$k_{fmGe} = \frac{1}{\varepsilon_{2Ge} - \varepsilon_{1Ge}} \int_{\varepsilon_{1Ge}}^{\varepsilon_{2Ge}} k_f d\varepsilon \approx \frac{k_{f1Ge} + 2k_{f2Ge}}{3}, \quad (3)$$

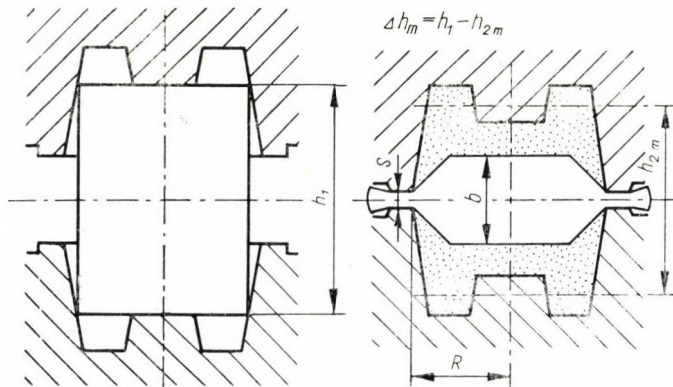


Bild 6

wo k_{f1Ge} die Verformungsfestigkeit vor dem Schlag, k_{f2Ge} den Wert der Verformungsfestigkeit nach der spezifischen Formänderung ε_{2Gf} bedeutet.

Auf Grund des Bildes 6 kann das Maß der Verformung des in der Gratrille befindlichen Stoffes aus folgender Gleichung bestimmt werden:

$$1 - \varepsilon_{2Gr} = (1 - \varepsilon_{2Ge}) \left(1 - \frac{b - s}{b}\right). \quad (4)$$

Aus der Gleichung (4) kann man die Größe der mittleren spezifischen Formänderung des Grates ermitteln:

$$\varepsilon_{2Gr} = 1 - \frac{s}{b} (1 - \varepsilon_{2Ge}), \quad (5)$$

wo s die Gratdicke bezeichnet. Mit Hilfe der Gleichung (5) wurde ε_{2Gr} bestimmt, und in Kenntnis dieses Wertes kann die mittlere Verformungsfestigkeit des in der Gratrille befindlichen Stoffes bestimmt werden:

$$k_{fmGr} = \frac{1}{\varepsilon_{2Gr} - \varepsilon_{1Gr}} \int_{\varepsilon_{1Gr}}^{\varepsilon_{2Gr}} k_f d\varepsilon \approx \frac{k_{f1Gr} + 2k_{f2Gr}}{3}, \quad (6)$$

wo k_{f_2Gr} die bei der spezifischen Formänderung ε_2 auftretende Verformungs-
festigkeit bedeutet.

Im Fall der Warmverformung muß man bei der Bestimmung der mittleren
Verformungsfestigkeit des Grates auch darauf achten, daß sich der Grat
infolge seiner kleineren Masse und seiner großen Fläche stärker abkühlt als der
im Gesenkraum vorhandene Stoff.

In Kenntnis der mittleren Verformungsfestigkeit ergibt sich die maximale
Schmiedekraft nach GELEJI [1]:

$$P_{\max} = F (k_{fmGr} \cdot \xi_{Gr} + k_{fmGe} \cdot \xi_{Ge}), \quad (7)$$

wo P_{\max} die maximale Schmiedekraft, F die Querschnittsfläche des Schmiede-
stückes in der Gratebene, k_{fmGe} die mittlere Verformungsfestigkeit des im
Gesenkraum vorhandenen Stoffes, k_{fmGr} die mittlere Verformungsfestigkeit
des im Grat befindlichen Stoffes, ξ_{Gr} und ξ_{Ge} Faktoren bedeuten, die sich auf
die Reibungs- und geometrischen Verhältnisse beziehen. In den weiteren
Ausführungen befassen wir uns mit den theoretischen Grundlagen der Bestim-
mung unserer Faktoren.

2. Stauchung zwischen parallelen Ebenen

Die angenäherte Analyse der Spannungen, die in einem bildsamen Stoff
zwischen zwei parallelen, rauhen, ebenen Flächen auftreten, kann entsprechend
dem Bild 7 erfolgen. Im Bild 7 ist der Querschnitt eines unendlich langen pris-
matischen Körpers zu sehen. Das Gleichgewicht der Kräfte, die auf ein belie-
biges Flächenelement $h \cdot dx$ des Querschnittes wirken, ergibt sich zu:

$$\frac{d\sigma_3}{dx} = - \frac{2\tau}{h} \quad (8)$$

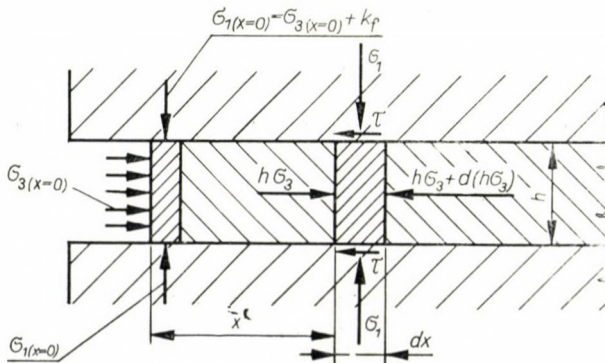


Bild 7

Die Bedingung der Bildsamkeit auf Grund der Gleichung (1) lautet:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k_{fm}. \quad (9)$$

An der Berührungsfläche der Druckplatte und des bildsamen Stoffes entsteht ein Gleiten. Als Folge hiervon ist das Auftreten der Schubspannung τ , die im Bereich des Gleitens mit Hilfe des Coulombschen Gesetzes bestimmt werden kann:

$$\tau = \mu \cdot \sigma_1. \quad (10)$$

Aus den Gleichungen (8), (9) und (10) kann eine Differentialgleichung gebildet werden:

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = - \frac{2\mu}{h} \cdot \sigma_1. \quad (11)$$

Die Gleichung (11) kann unter Berücksichtigung der im Bild veranschaulichten Grenzbedingungen integriert werden:

$$\sigma_1 = \sigma_{1(x=0)} \cdot e^{\frac{2\mu}{h} \cdot x}. \quad (12)$$

Die kleinste Spannung kann aus den Gleichungen (9) und (12) entnommen werden:

$$\sigma_3 = \sigma_{1(x=0)} \cdot e^{\frac{2\mu}{h} \cdot x} - k_{fm}. \quad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) haben in dem Fall Gültigkeit, wenn zwischen der Druckplatte und dem Stoff ein Gleiten auftritt. Sofern die Druckebene einen im elastischen Zustand befindlichen, mit dem bildsamen Teil des Materials zusammenhängenden Stoff bedeutet, bzw. wenn der Wert der Schubspannung $\tau = \mu\sigma_1$ die maximale Scherspannung des bildsamen Stoffes überschreitet, dann wird die Schubspannung:

$$\tau_{\max} = \frac{k_{fm}}{2}. \quad (14)$$

Die aus den Gleichungen (8) und (14) gebildete Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d\sigma_3}{dx} = - \frac{k_{fm}}{h}. \quad (15)$$

Die Gleichung (15) kann unter Berücksichtigung der im Bild 10 angeführten Grenzbedingungen integriert werden:

$$\sigma_3 = \sigma_{3(x=0)} + k_{fm} \frac{x}{h}. \quad (16)$$

Die größte Hauptspannung kann aus den Gleichungen (8) und (16) entnommen werden:

$$\sigma_1 = \sigma_{1(x=0)} + k_{fm} \frac{x}{h} \quad (17)$$

Die Gleichungen (12), (13), (16) und (17), die zur Bestimmung der Spannungen dienen, bringen nur eine Annäherung an die praktischen Verhältnisse. Einerseits berücksichtigen sie nicht die in der bildsamen Zone auftretenden Schub-

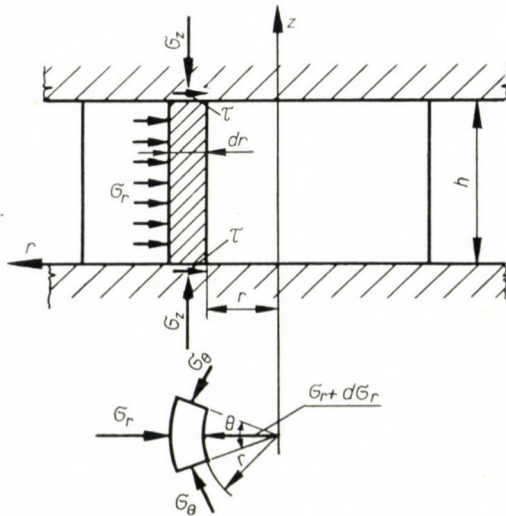


Bild 8

spannungen, andererseits sind sie aus den idealisierten ebenen Formänderungen abgeleitet. Trotzdem ist eine entsprechende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen feststellbar. Eine besonders gute Übereinstimmung ist im Fall des Stauchens von zylindersymmetrischen Stücken zu erwarten, denn dabei sind die Gleichungen (8) und (9) richtig; ihre Richtigkeit ist in exakter Form nachweisbar (mit Ausnahme der elastischen Bereiche in der Stückmitte). Zum Nachweis dieser Behauptung mögen folgende Ausführungen dienen: σ_r , σ_θ und σ_z sind die Normalspannungen, die auf ein Flächenelement des im Bild 8 veranschaulichten zylindersymmetrischen Körpers wirken. Bei Anwendung der Gleichgewichtsgleichungen, die für die zylindersymmetrischen Körper gültig sind, auf die im Bild 8 dargestellte Stauchung erhält man [10]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = -\frac{2\tau}{h} \quad (18)$$

In den Gleichungen (9), (10) und (18) kommen vier Unbekannte vor, daher muß man bei Bestimmung der Spannungen eine weitere Gleichung verwenden. Diese konnte anhand des Bildes 9 abgeleitet werden. Nach dem Bild 9 kann die Radialgeschwindigkeit der Punkte des ringförmigen Raumelementes $h \cdot 2 \cdot r \cdot dr \cdot \pi$ aus einer Gleichung, welche die Stetigkeit des Stoffes ausdrückt, bestimmt werden:

$$v_r = -v \frac{r}{2h} \quad (19)$$

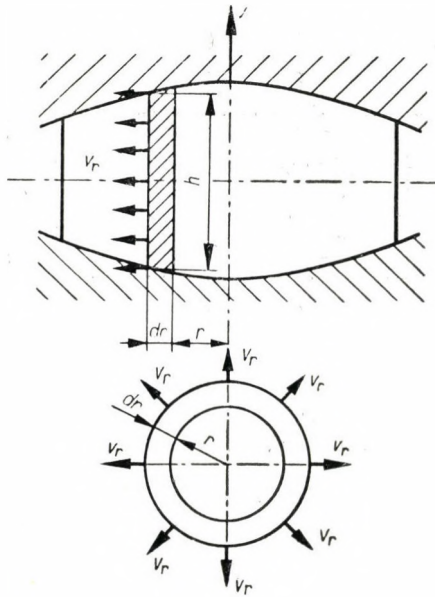


Bild 9

Anhand des Bildes 9 können die Formänderungsgeschwindigkeiten des untersuchten Raumelementes ermittelt werden:

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{v}{h} \quad (20)$$

Auf Grund der Gleichung (19), unter Berücksichtigung der Beziehung $\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v_r}{r}$ ergibt sich:

$$\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{v}{2h} \quad (21)$$

Wenn man das Gesetz von der Erhaltung der Masse in bezug auf das unter-

suchte Raumelement anschreibt, so erhält man [10]:

$$\dot{\varepsilon}_{\theta} + \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z = 0. \quad (22)$$

Aus den Gleichungen (20), (21) und (22) kann $\dot{\varepsilon}_r$ ausgedrückt werden:

$$\dot{\varepsilon}_r = -\frac{v}{2h}. \quad (23)$$

Im weiteren muß man die Gleichungen nach Lévy—Mises [10] anwenden; nach ihnen besteht zwischen den Spannungen und Formänderungsgeschwindigkeiten folgende Beziehung:

$$\dot{\varepsilon}_{\theta} = \lambda(\sigma_{\theta} - \sigma_m), \quad (24)$$

$$\dot{\varepsilon}_r = \lambda(\sigma_r - \sigma_m).$$

Aus den Gleichungen (22), (23) und (24) geht hervor:

$$\sigma_r = \sigma_{\theta}. \quad (25)$$

Nach der Gleichung (25) wird die Gleichung (18) zu:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{2\tau}{h}. \quad (26)$$

Im Fall eines Stauchens zwischen zylindersymmetrischen Druckplatten stimmt die Gleichung (26) formell mit der Gleichung (8) überein, daher stimmen die Lösungen der Gleichungen (26), (9) und (10) mit denen der Gleichungen (12) und (13) überein. Demnach besitzen Gleichungen, die unter Voraussetzung einer ebenen Formänderung im Falle eines Stauchens von zylindersymmetrischen Körpern zwischen Druckplatten beliebiger Form bestimmt wurden, eine exakte Gültigkeit.

Die mit Hilfe der Gleichungen (12) und (17) bestimmbaren Spannungen σ_1 sind im Bild 10 in Abhängigkeit von x/h zu sehen. Aus dem Bild 10 geht hervor, daß die zwischen dem bildsamen Stoff und der Druckplatte auftretende Reibungszahl nur unter einem Wert von 0,3 von bedeutendem Einfluß auf die Spannungen ist. Da beim Gesenkschmieden die Reibungszahl im allgemeinen zwischen 0,3 ÷ 0,5 liegt, kann der Spannungswert σ_1 nach dem Bild 10 durch folgende Beziehung annähernd bestimmt werden:

$$\sigma_1 \cong k_{fm} \left(1 + \frac{x}{h} \right). \quad (27)$$

Die Berechnung mit Hilfe der Gleichung (27) zeigt mit den Versuchswerten eine sehr gute Übereinstimmung sowohl beim Stauchen von ebenen als auch beim Stauchen von zylindersymmetrischen Stücken; dieser Umstand wird auch durch die sorgfältigen Versuche von GEORG [12] bestätigt.

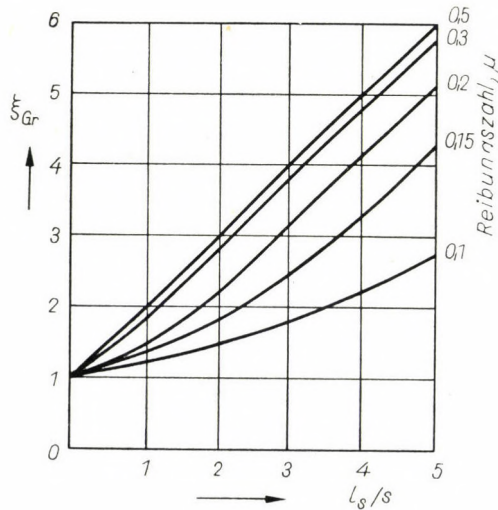


Bild 10

3. Stauchung zwischen »toten« Ecken

Die im Bild 3 mit III bezeichnete Zone zeigt eine Ähnlichkeit mit dem Strangpressen, da bei Anwendung von Werkzeugen mit einem halben Kegelwinkel von 90° im Fall des Strangpressens ebenfalls tote Ecken von 45° auftreten (elastischer Anteil des Stoffes). Die im Fall des Strangpressens auftretenden Spannungsverhältnisse können anhand des Bildes 11 bestimmt werden. Vom Standpunkt des Kraftbedarfes beim Strangpressen bedeutet die im Bild 11 mit p bezeichnete Spannung die wichtigste Angabe. Die Spannung kann auch durch Versuche bestimmt werden. Im Bild 12 sind die auf Grund der Versuche von JOHNSON und MELLOR [9], JOHNSON [13], WILLCOX [14] und CHANG [15] bestimmten Werte von p/k_{fm} in Abhängigkeit von der relativen Querschnittsabnahme zu sehen. Die versuchsmäßig festgestellten Werte von p/k_{fm} liegen bis zur Querschnittsabnahme von 50% in der Nähe der Geraden

$$\frac{P}{k_{fm}} \approx 3,5 \varepsilon, \quad (28)$$

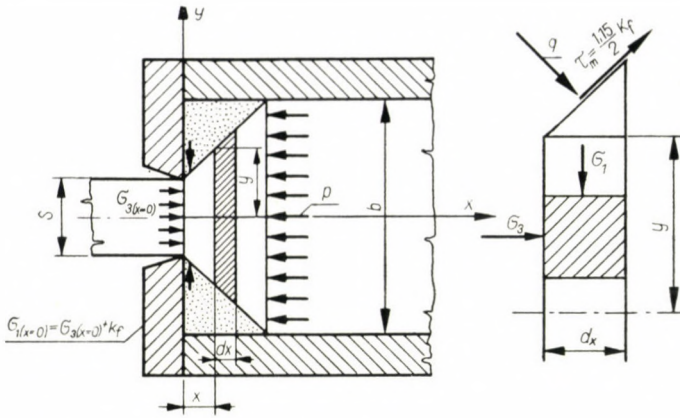


Bild 11

wegen bei Werten der Querschnittsabnahme über 50% liegen sie nahe der Johnsonschen Kurve [9]:

$$\frac{p}{k_{fm}} = 0,85 + 1,5 \ln \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad (29)$$

Über einer Querschnittsabnahme von 50% zeigt die Gleichung nach A. GELEJI

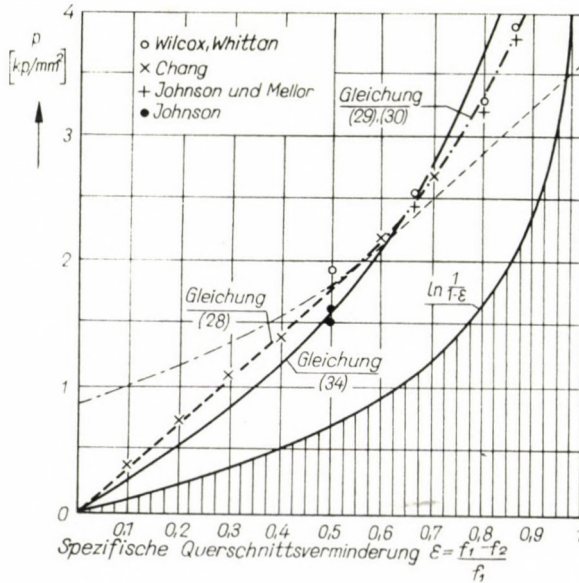


Bild 12

[1] eine gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten:

$$\frac{p}{k_{fm}} = \frac{1 + 0,93 \varepsilon}{1 - 0,93 \varepsilon} \quad (30)$$

Die Gültigkeitsgrenze der Gleichungen (28), (29) und (30) muß eingehalten werden, denn aus den Gleichungen (29) und (30) kann zum Beispiel im Fall von $\varepsilon = 0$ für den Wert von p/k_{fm} anstelle von 0 ein Wert von 0,85 bzw. 1 errechnet werden.

Aus den weiteren Ausführungen wird hervorgehen, daß man beim Schmieden Näherungsgleichungen benötigt, die im ganzen Bereich von ε , mit nur kleinem Fehler, mit einer einzigen Gleichung die Werte von p/k_{fm} angeben. Daher war die Ausarbeitung der nachfolgenden Näherungsberechnung erforderlich.

Das Gleichgewicht der Spannungen, die auf das Raumelement $h \cdot dx$, veranschaulicht im Bild 11, wirken, kann man mit folgenden zwei Gleichungen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma_3 \cdot y)}{dx} &= \frac{1,15}{2} k_{fm} + q, \\ \sigma_1 &= q - \frac{1,15}{2} k_{fm}. \end{aligned} \quad (31)$$

Wenn man zu den Gleichungen (31) die Gleichung (9) hinzufügt, erhält man ein aus drei Gleichungen bestehendes Gleichungssystem. Berücksichtigt man, daß $y = s/2 + x$ ist, so kann aus dem Gleichungssystem die folgende Differentialgleichung gewonnen werden:

$$\frac{d\sigma_3}{dx} = \frac{2,3 k_{fm}}{s/2 + x} \quad (32)$$

Die Gleichung (32) kann getrennt und integriert werden [im Fall der Grenzbedingung: $x = 0$, $y = s/2$ und $\sigma_3 = \sigma_{3(x=0)}$]:

$$\sigma_3 = \sigma_{3(x=0)} + 2,3 k_{fm} \ln \frac{s/2 + x}{s/2} \quad (33)$$

Wenn man die Definition von p und ε beachtet, erhält man aus der Gleichung (33):

$$\frac{p}{k_{fm}} = 2,3 \ln \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad (34)$$

Vergleicht man die Gleichung (34) mit den im Bild 12 dargestellten Versuchswerten, so kann man sehen, daß die mit der Gleichung (34) bestimmten Werte von p/k_{fm} bei einer Querschnittsabnahme von 0 bis 90% eine entsprechende Übereinstimmung aufweisen. Bei relativ kleinen Querschnittsabnahmen ergibt sich ein maximaler Fehler von 25%. Die durch die Gleichung (34) ermittelten p/k_{fm} Werte sind beim Pressen von Stangen mit beliebiger Symmetrie gültig. PURCHASE und TUPPER [16] haben nämlich durch Versuche nachgewiesen, daß sich beim Pressen von sowohl prismatischen als auch zylindersymmetrischen Stangen identische p/k_{fm} Werte ergeben, wenn die relativen Querschnittsabnahmen übereinstimmen. Aus den Gleichungen (9) und (33) kann die Spannung σ_1 , die auf die toten Ecken wirkt, in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\sigma_1 = \sigma_{1(x=0)} + 2,3 \cdot k_{fm} \cdot \ln \frac{s/2 + x}{s/2} \quad (35)$$

4. Das Prinzip der minimalen Arbeit

Das Prinzip der minimalen Arbeit bedeutet eine wichtige Lösungsmethode in der mathematischen Plastizitätslehre. Im Fall der Schmiedeaufgaben kann das Prinzip der sogenannten kinematisch zulässigen Spannungen angewandt werden. Kinematisch zulässig nennt man jene Spannungen, welche auf beliebige, aber auf kinematisch vorstellbare Geschwindigkeitsfelder, mit Hilfe der Lévi—Misesschen Gleichungen, unter Wahrung der Gleichgewichtsgleichungen, zurückgeführt werden können. Das bei der bildsamen Verformung tatsächlich auftretende Geschwindigkeitsfeld reiht sich ebenfalls in die unendliche Zahl der kinematisch vorstellbaren Felder, die den gegebenen Grenzbedingungen der Geschwindigkeit entsprechen, ein. Das Prinzip der minimalen Arbeit bezeichnet gerade den Umstand, daß ein bei der tatsächlichen Verformung auftretendes Geschwindigkeitsfeld den über besondere Eigenschaften verfügenden Grenzfall der kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfelder bedeutet. Es ist nämlich jenes kinematisch zulässige Geschwindigkeitsfeld, bei dem die Gesamtarbeit (Leistung) eine minimale ist. Dieses Gesetz kann in Gleichungsform mit den Bezeichnungen vom Bild 13 niedergeschrieben werden [10]:

$$\delta \left[2 \int_{S_{R/t}} \sigma_n^* \cdot v_n \, dS - \int_V (\sigma_1^* \dot{\epsilon}_1^* + \sigma_2^* \dot{\epsilon}_2^* + \sigma_3^* \dot{\epsilon}_3^*) \, dV \right] = 0, \quad (36)$$

wobei $\dot{\epsilon}_3^*$, $\dot{\epsilon}_2^*$ und $\dot{\epsilon}_1^*$ die kinematisch zulässigen Formänderungs-Geschwindigkeitskomponenten von beliebigen Raumelementen des bildsamen Körpers, σ_1^* , σ_2^* und σ_3^* die zu den kinematisch zulässigen Formänderungsgeschwindigkeiten gehörenden inneren Spannungen, v_n die bekannte Grenzbedingung der

Geschwindigkeit entlang der Fläche s_{Rf1} , σ_n die in Normalrichtung der Fläche s_{Rf1} wirkende innere Spannung bedeutet.

Das Prinzip der minimalen Arbeit kann man bei den praktischen Problemen der bildsamen Verformung, also auch beim Schmieden anwenden. Im Bild 14 sieht man drei beliebige kinematisch zulässige Geschwindigkeitsverteilungen für den im Bild 2 dargestellten Schmiedefall. Selbstverständlich bestehen unzählige Möglichkeiten für den Entwurf einer derartigen Geschwin-

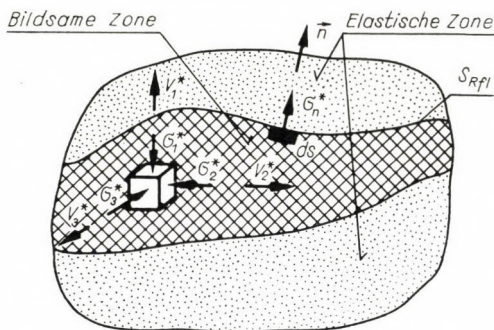


Bild 13

digkeitsverteilung. Nach dem Prinzip der minimalen Arbeit bedeutet jenes Feld das wirkliche Geschwindigkeitsfeld, bei dem die Arbeit der äußeren und inneren Kräfte zu einem Minimum wird. Diese Bedingung kann, ähnlich der Gleichung (26), auch mathematisch formuliert werden. Wenn man annimmt, daß das Raumelement $dV = h \cdot dx \cdot 1$ ist, dann kann anhand der Gleichung (26) angeschrieben werden:

$$\delta \left[2 \int_{x=0}^R \sigma_1^* \cdot v \cdot dx - \int_{x=0}^R (\sigma_1^* \cdot \dot{\epsilon}_1 + \sigma_3^* \cdot \dot{\epsilon}_3) h \cdot dx \right] = 0. \quad (37)$$

Nach dem Bild 14 ist $\dot{\epsilon}_1^* = v/h$ und $\dot{\epsilon}_3^* = -v/h$, ferner unter Verwendung der

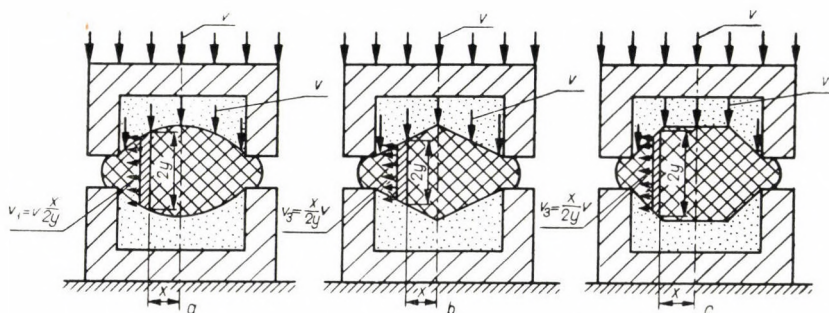


Bild 14

Mohrschen Bedingung der Bildsamkeit [Gleichung (1)] erhält man aus der Gleichung (37):

$$\delta \left[\int_{x=0}^R \sigma_3^* \cdot dx \right] = 0. \quad (38)$$

Mit Rücksicht darauf, daß wir auf Grund von Versuchen die im Bild 14c dargestellte Geschwindigkeitsverteilung als richtig annehmen, ist σ_3 die Funktion von lediglich einer Veränderlichen, von b . Daher können wir anstelle der Variation zu einer partiellen Differentiation übergehen:

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\int_{x=0}^R \sigma_3^*(b; x) dx \right] = 0. \quad (39)$$

Die Gleichung (39) kann noch weiter vereinfacht werden, wenn wir die Erfüllung folgender Bedingung annehmen:

$$\sigma_3^*(b; x) = f(x) \cdot \sigma_{3\max}^*(b). \quad (40)$$

Die annähernde einfache Formulierung des Prinzips der minimalen Arbeit lautet auf Grund der Gleichungen (39) und (40):

$$\frac{\partial}{\partial b} \sigma_{3\max}^*(b) = 0. \quad (41)$$

Aus der Gleichung (41) kann eine algebraische Gleichung gewonnen werden, aus der man die Höhe der bildsamen Zone bestimmen kann.

III. Untersuchung des Schmiedens im Gesenk

Die im Kapitel II erläuterte Theorie ist grundsätzlich auch für das Schmieden im kompliziertesten Gesenk gültig. Dennoch ist es zweckmäßig, zuerst das Stauchen im einfachsten Gesenk zu untersuchen, damit die Richtigkeit der im Kapitel II beschriebenen Theorie ohne störende Umstände durch einfache Versuche überprüft werden kann.

1. Bestimmung der Grenzen der im Schmiedestück auftretenden bildsamen Zone

Im Schmiedefall nach Bild 3 besteht die Absicht, die Höhe b der bildsamen Zone zu bestimmen, da sie im vollem Maße die bildsamen Zone definiert. Nach den Erläuterungen im Kapitel II kann der Wert von b unter Anwendung des Prinzips der minimalen Arbeit [Gleichung (41)] bestimmt werden. In der Gleichung (41) tritt $\sigma_{3\max}^*$ in der Symmetrieachse des im Bild 15 dargestellten

Schmiedestückes auf. Ihre Größe kann mit den Bezeichnungen auf Bild 15, mit Hilfe der Gleichungen (27) und (35) bestimmt werden:

$$\sigma_{3\max}^* = k_{fmGe} \left[\frac{R - (b - s)/2}{b} + 2,3 \cdot \ln \frac{b}{s} \right] + k_{fmGr} \left(1 + \frac{l_s}{s} \right). \quad (42)$$

Anhand der Gleichungen (41) und (42) erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial b} \sigma_{3\max}^* = k_{fmGe} \left[\frac{2,3}{b} - \frac{R + s/2}{b^2} \right] = 0. \quad (43)$$

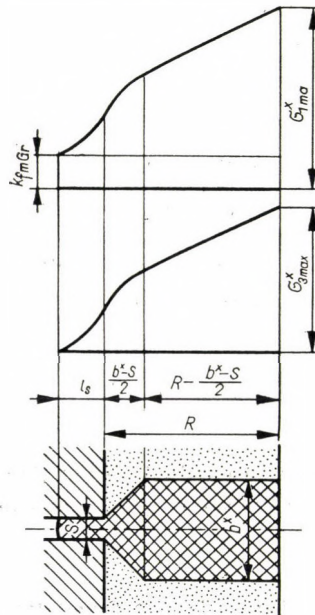


Bild 15

Aus der Gleichung (43) ergibt sich die Bedingung der minimalen Arbeit:

$$b = \frac{1}{2,3} \left(R + \frac{s}{2} \right) \approx \frac{1}{2} \left(R + \frac{s}{2} \right) = \frac{D + s}{4}, \quad (44)$$

wo b die Dicke der bildsamen Zone, s die Gratstärke, R den Radius oder die halbe Breite des Gesenkschmiedestückes, D den Durchmesser oder Breite des Schmiedestückes bezeichnet.

Die Höhe der bildsamen Zone kann nicht kleiner sein als die Gratdicke:

$$b = \frac{1}{2} \left(R + \frac{s}{2} \right) \geq s. \quad (45)$$

Aus der Gleichung (45) folgt:

$$\frac{R}{s} \geq 1,5. \quad (46)$$

Wenn die Bedingung (46) nicht erfüllt wird, so wird die bildsame Zone von zwei parallelen, im Abstand s voneinander liegenden Geraden begrenzt, wie das auch durch die Versuche von A. GELEJI [1] bestätigt wird.

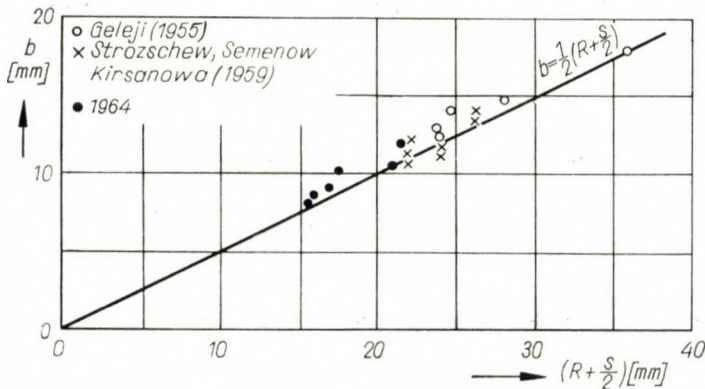


Bild 16

Von der Richtigkeit der durch die Gleichung (44) bestimmbaren Werte kann man sich durch Versuche überzeugen. Im Bild 16 sind die Versuchsergebnisse von A. GELEJI [1], ferner von GIRS und VOLKOVICKIJ [17] zu sehen. Im Bild 16 ist neben den Versuchswerten auch die Gleichung (44) angegeben. Aus dem Bilde ist es zu ersehen, daß zwischen den versuchsmäßigen und theoretischen Werten eine sehr gute Übereinstimmung herrscht, und dieser Umstand liefert einen der Beweise für die Richtigkeit der im Kapitel II beschriebenen Annahmen.

Die Gleichung (44) liefert richtige Ergebnisse sowohl im Fall von prismatischen als auch zylindersymmetrischen Schmiedestücken, was anhand der Erläuterungen des Kapitels II einleuchtet.

2. Bestimmung der maximalen Schmiedekraft

Anhand der Kenntnis der Grenzen der bildsamen Zone und der Spannungsverteilung kann die maximale Schmiedekraft bestimmt werden.

Die maximale Schmiedekraft, die beim Schmieden eines prismatischen Körpers von der Länge L und der halben Breite R , der eine ebene Formänderung erleidet, auftritt, kann mit den Bezeichnungen des Bildes 15 und

unter Anwendung der Gleichungen (27) und (35) bestimmt werden:

$$P_{\max prism} \cong 2L \left\{ k_{fmGr} \left(R + \frac{l_s}{2} \right) \left(1 + \frac{l_s}{s} \right) + k_{fmGe} \left[\frac{(R - (b-s)/2)^2}{2b} + 2,3 \left(R - \frac{b-s}{4} \right) \ln \frac{b}{s} \right] \right\}. \quad (47)$$

Wenn man die Gleichung (47) mit der Gleichung (7) vergleicht und berücksichtigt, daß $F = 2 \cdot R \cdot L$ ist, so erhält man für die Verhältniszahl ξ_s :

$$\xi_s = \left(1 + \frac{l_s}{2R} \right) \left(1 + \frac{l_s}{s} \right). \quad (48)$$

Für die Verhältniszahl $\xi_{Ge Prism}$ kann angeschrieben werden:

$$\xi_{Ge prism} = \frac{[R - (b-s)/2]^2}{2bR} + 2,3 \frac{R - (b-s)/4}{R} \cdot \ln \frac{b}{s}. \quad (49)$$

Nach Ordnung der Gleichungen (44) und (49) gewinnt man:

$$\xi_{Ge prism} \approx \left(2 + \frac{s}{R} \right) \left[0,28 + \ln \left(0,25 + 0,5 \frac{R}{s} \right) \right]. \quad (50)$$

Anhand der Gleichungen (7), (48) und (50) ergibt sich die beim Schmieden eines Schmiedestückes von der Länge L und Breite $2R$ auftretende maximale Schmiedekraft zu:

$$P_{\max prism} = 2R \cdot L (k_{fmGr} \cdot \xi_{Gr} + k_{fmGe} \xi_{GePrism}), \quad (51)$$

wo

$$\xi_{Gr} = \left(1 + \frac{l_s}{2R} \right) \left(1 + \frac{l_s}{s} \right) \quad (52)$$

und

$$\xi_{Ge prism} = \left(2 + \frac{s}{R} \right) \left[0,28 + \ln \left(0,25 + 0,5 \frac{R}{s} \right) \right] \quad (53)$$

ist. Nach der Gleichung (46), im Fall von $R/s < 1,5$, kann aus der Gleichung (27) der Wert der Verhältniszahl $\xi_{Ge prism}$ abgeleitet werden:

$$\xi_{Ge prism} = 0,5 \frac{R}{s}. \quad (54)$$

Die Höchstkraft, die beim Schmieden von zylindrischen Körpern auftritt, kann ähnlich den Gleichungen (51), (52), (53) und (54), entsprechend der Bezeichnungen im Bilde 14, unter Anwendung der Gleichungen (27) und (35)

abgeleitet werden:

$$P_{\max \text{ zyl}} = R^2 \pi (k_{fmGr} \cdot \xi_{Gr} + k_{fmGe} \cdot \xi_{Gezyl}); \quad (55)$$

$$\xi_{Gr} \cong \left(1 + \frac{l_s}{2R}\right) \left(1 + \frac{l_s}{s}\right); \quad (56)$$

$$\xi_{Gezyl} \cong 0,28 \left(1 + \frac{s}{R}\right) + \left(1,54 + 0,29 \frac{s}{R}\right) \cdot \ln \left(0,25 + 0,5 \frac{R}{s}\right), \quad (57)$$

$$\left(\frac{R}{s} > 1,5\right);$$

$$\xi_{Gezyl} \cong \frac{1}{3} \frac{R}{s}, \quad (58)$$

$$\left(\frac{R}{s} < 1,5\right).$$

In den Gleichungen (51) und (54) bedeutet k_{fmGr} die mittlere Verformungsfestigkeit des im Grat befindlichen Stoffes, k_{fmGe} die mittlere Verformungsfestigkeit des im Gesenkraum befindlichen Stoffes. Ihre Bestimmung erfolgt nach den Erläuterungen des Kapitels II. 1.

Die mittlere Verformungsfestigkeit des im Gesenkraum vorhandenen Stoffes kann auf Grund der Gleichung (3) ermittelt werden:

$$k_{fmGe} \cong \frac{k_{f1Ge} + 2k_{f2Ge}}{3}, \quad (59)$$

wo k_{f2Ge} die Verformungsfestigkeit des im Hohlraum befindlichen Stoffes bei einer Formänderung ε_{2Ge} bedeutet. Das Maß der relativen Formänderung ε_{2Ge} kann mit Hilfe der Gleichungen (2) und (44) bestimmt werden:

$$\varepsilon_{2Ge} \cong \frac{\Delta h_m}{\Delta h_m + \frac{1}{2} \left(R + \frac{s}{2}\right)}. \quad (60)$$

Die mittlere Verformungsfestigkeit des im Grat vorhandenen Stoffes ergibt sich nach Gleichung (6) zu

$$k_{fmGr} = \frac{k_{f1Gr} + 2k_{f2Gr}}{3}, \quad (61)$$

wo k_{f2Gr} die Verformungsfestigkeit des Grates nach einer spezifischen Formänderung ε_{2Gr} bedeutet. Das Maß der spezifischen Formänderung kann anhand der Gleichungen (5) und (44) ermittelt werden:

$$\varepsilon_{2Gr} = 1 - \frac{2s}{R + s/2} (1 - \varepsilon_{2Ge}). \quad (62)$$

Von der Richtigkeit der Gleichungen (54), (55) und (56) kann man sich durch Vergleich mit Versuchsergebnissen überzeugen. Im Bild 17 sind Werte von ξ_{Gezyl} , die nach den Versuchsergebnissen von GELEJI [1], von GIRS und WOLKOWICKIJ [17], und nach unseren eigenen Versuchsergebnissen mit Hilfe der Gleichungen (54), (55) und (56) bestimmt wurden, veranschaulicht. Außer den Versuchswerten ist im Bild 17 auch die Kurvendarstellung der Gleichung (57) zu sehen. Aus dem Bild geht hervor, daß die theoretisch abgeleitete Kurve sehr gut mit den Ergebnissen der von verschiedenen Autoren durchgeführten Versuche übereinstimmt. Dieser Umstand liefert einen grundlegenden Beweis für die Richtigkeit der im Kapitel II dargestellten Annahmen.

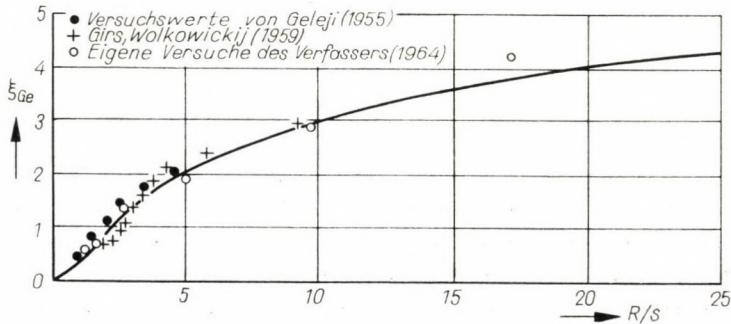


Bild 17

IV. Die Bestimmung der maximalen Schmiedekraft im Fall eines beliebig geformten Schmiedestückes

Selbst das komplizierteste Gesenkschmiedestück kann in Teilprofilstücke zerlegt werden, bei denen innerhalb der Profile der auf den Grat des Schmiedestückes senkrechte Querschnitt konstant ist. In diesem Fall kann die maximale Schmiedekraft als die Summe der auf die Teilprofile wirkenden Schmiedekräfte berechnet werden. In dem Bild 18a ist eine Pleuelstange zu sehen. Die Zerlegung der Pleuelstange in Teile kann nach dem Bild 18b erfolgen. Die Summe der bei der Verformung der einzelnen Teile auftretenden Kräfte ergibt den maximalen Kraftbedarf für das Schmieden des Pleuels:

$$P_{\max} = P_{\max 1} + P_{\max 2} + P_{\max 3}, \quad (63)$$

wo P_{\max} den maximalen Kraftbedarf für das Schmieden des Pleuels, $P_{\max 1}$, $P_{\max 2}$ und $P_{\max 3}$ den maximalen Kraftbedarf der drei Teilprofile bedeutet.

Die auf die Teilprofile wirkenden maximalen Schmiedekräfte kann man anhand der für die Teilprofile kennzeichnenden Querschnitte bestimmen. In der Tafel I sind die kennzeichnenden Querschnitte zu sehen, aus denen die

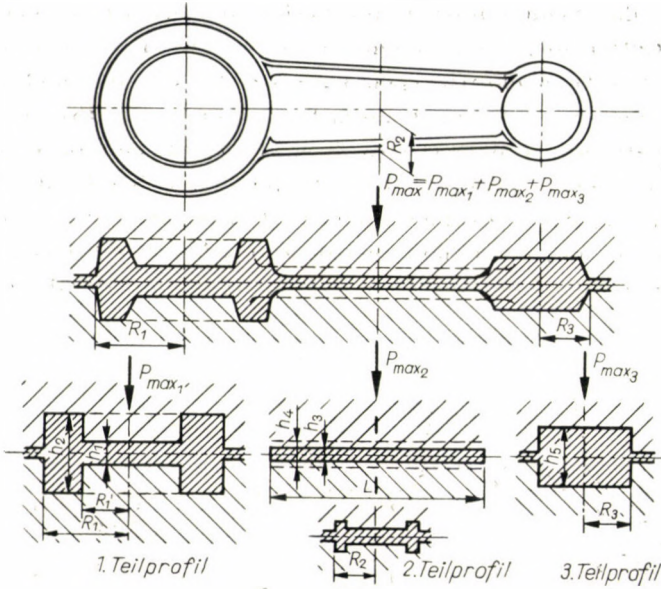


Bild 18

häufigsten Teilprofile der Schmiedestücke bestehen. In der Tafel I sind lediglich jene kennzeichnenden Querschnittstypen zusammengefaßt, für die eine Berechnung durchführbar ist. Daher fehlen in der Tafel die Querschnittstypen,

Tafel I

Typ	1	2		3		4
		2a	2b	3a	3b	
Querschnittform						
Zusammenhang dem Abmessungen	$\frac{1}{2}(R + \frac{s}{2}) < h$	$\frac{1}{2}(R + \frac{s}{2}) > h$		$\frac{R'}{h} < 1,5$	$\frac{R'}{h} > 1,5$	$\frac{1}{2}(R' + \frac{h}{2}) > h_2$
Form der bildsamen Zone						
Höhe der bildsamen Zone	$b = \frac{1}{2}(R + \frac{s}{2})$	$b = h$	$b = \frac{1}{2}(R + \frac{s}{2})$	$b = h$	$b = \frac{1}{2}(R' + \frac{h}{2})$	$b_1 = h_1, b_2 = h_2$
Mittlere Höhe der bildsamen Zone	$b_m = b$	$b_m = b$	$b_m \approx \frac{h+b}{2}$	$b_m = b$	$b_m = \frac{h+b}{2}$	$b_m \approx \frac{b_1+b_2}{2}$

bei denen sich das Schmiedestück im Verhältnis zur Ebene der Gratrille, innerhalb der Entfernung $\pm b/2$, asymmetrisch ist. Im Fall der in der Tafel I zusammengefaßten Querschnittstypen kann die Grenze der bildsamen Zone durch die Anwendbarkeit des im Kapitel II. 4. erläuterten Prinzips der minimalen Arbeit bestimmt werden. Der Rechengang ähnelt dem im Kapitel III. 1. beschriebenen Rechengang. In der Tafel I findet man bereits die Endformel für die Bestimmung der bildsamen Zone. In Kenntnis der Grenzen der bildsamen Zone wäre es möglich, anhand der im Kapitel II beschriebenen Theorie, den Kraftbedarf für die Teilprofile genau zu bestimmen. Die Gleichungen, die

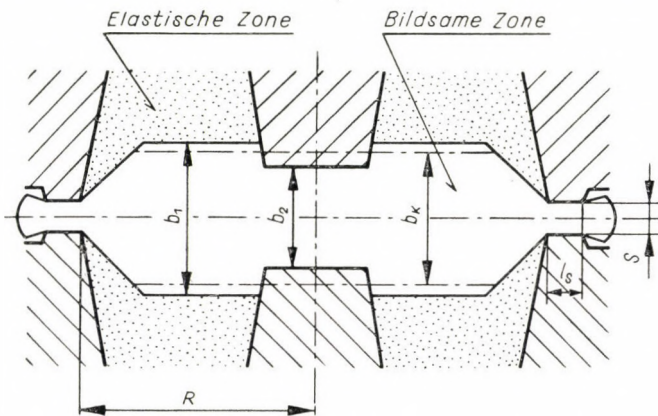


Bild 19

ein genaues Ergebnis liefern, sind jedoch sehr kompliziert. Zwecks Vereinfachung der Berechnungen ist es zweckmäßig, den Wert von P_{\max} durch eine Annäherungsmethode zu bestimmen. Das Wesentliche dieser Methode besteht darin, daß man die relativ komplizierten Formen der bildsamen Zone bei jedem Typ durch Näherungsformen ersetzt. Wenn daher die bildsamen Zone aus Teilen verschiedener Höhen besteht (aus den Typen 2b, 3b, und 4), dann führen wir die Berechnung mit der mittleren Höhe b_m der bildsamen Zone durch. Als mittlere Höhe kann in erster Annäherung der arithmetische Mittelwert der Teilhöhen benutzt werden. In der Tafel I findet man auch die Beziehungen, die zur Bestimmung der mittleren Höhe der einzelnen Querschnittstypen dienen.

Die Bestimmung des maximalen Kraftbedarfs für das Schmieden von Teilprofilen konstanten Querschnitts mit Hilfe der mittleren Höhe der bildsamen Zone kann anhand der Gleichungen (7), (27), (57), (53), (59), (60), (61) und (62) durchgeführt werden:

$$P_{\max} = F(k_{fmGr} \cdot \xi_{Gr} + k_{fmGe} \xi_{Ge}), \quad (64)$$

wo

$$\xi_{Gr} = \left(1 + \frac{l_s}{2R}\right) \left(1 + \frac{l_s}{s}\right), \tag{65}$$

$$\xi_{Ge\ prism} = \frac{[1 - (b_m - s)/2R]^2}{2b_m/R} + 2,3 \left(1 - \frac{b_m - s}{4R}\right) \cdot \ln \frac{b_m}{R} \cdot \frac{R}{s}, \tag{66}$$

$$\xi_{Ge\ zyl} = \frac{[1 - (b_m - s)/2R]^3}{3b_m/R} + 2,3 \left[1 - \frac{b_m - s}{2R} + \frac{1}{3} \left(\frac{b_m - s}{2R}\right)^2\right] \ln \frac{b_m}{R} \cdot \frac{R}{s}, \tag{67}$$

$$k_{fmGe} = \frac{k_{f1Ge} + 2k_{f2Ge}}{3}, \tag{68}$$

$$k_{fmGr} = \frac{k_{f1Gr} + 2k_{f2Gr}}{3}, \tag{69}$$

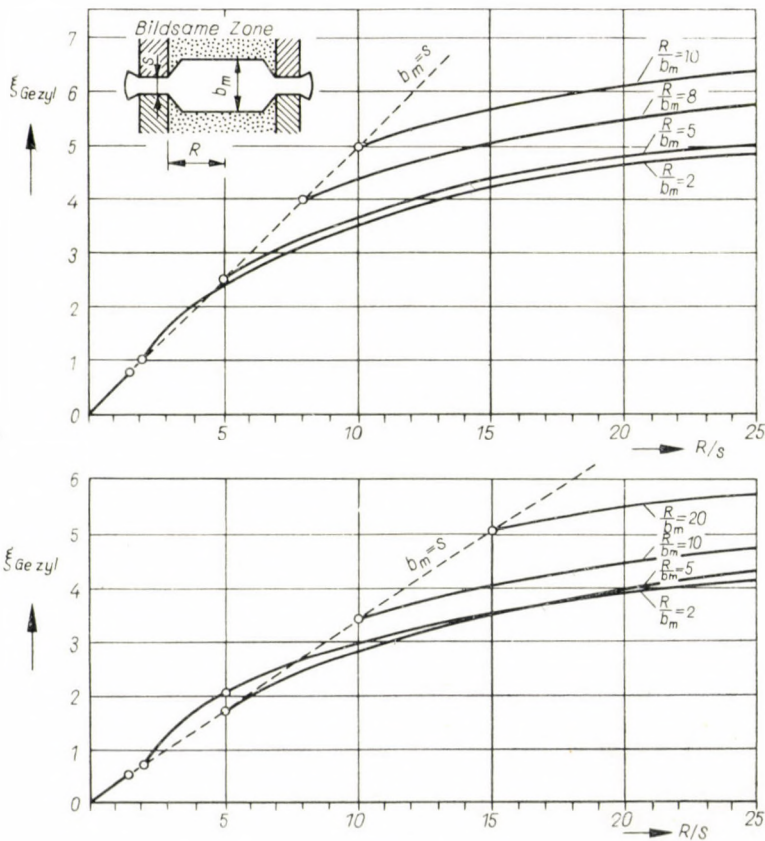


Bild 20

$$\varepsilon_{2Ge} = \frac{\Delta h_m}{\Delta h_m + b_m}, \quad (70)$$

$$\varepsilon_{2Gr} = 1 - \frac{s}{b_m} (1 - \varepsilon_{2Ge}) \quad (71)$$

ist.

Um die Berechnung mit den Gleichungen (66) und (67) zu erleichtern, kann man an dem Bild 20 die Verhältniszahlen $\xi_{Ge\ zyl}$ und $\xi_{Ge\ prism}$ in Abhängigkeit von s/R und b_m/R unmittelbar ablesen.

In Kenntnis des maximalen Kraftbedarfs für das Schmieden der Teilprofile kann nach dem Muster der Gleichung (63) der maximale Kraftbedarf für das Schmieden des ganzen Stückes bestimmt werden.

V. Beispiel

Die Anwendung der im Kapitel IV beschriebenen Theorie kann man aus dem Schmiedebeispiel eines Pleuels ersehen. Die vom Standpunkt der Bestimmung der maximalen Schmiedekraft wichtigen Abmessungen findet man in Tafel II. Werkstoff des Pleuels ist Aluminium Schmiedetemperatur 550 °C, die Temperatur des Grates 450 °C. Die Verformungsfestigkeit des Pleuelstoffes kennen wir aus den Versuchen von BELLA und GULYÁS [18].

Tafel II

Teilprofil 1		Teilprofil 2		Teilprofil 3	
R_1	35 mm	R_2	20 mm	R_3	25 mm
R'_1	18 mm	R'_2	15 mm	h_3	25 mm
h_1	15 mm	h_3	6 mm	—	—
h_2	35 mm	h_4	20 mm	—	—
—	—	L	150 mm	—	—

Die Bestimmung der Schmiedekraft findet man in den Tafeln III, IV und V zusammengefaßt. Aus den Tafeln ist der Rechengang deutlich zu ersehen.

Anhand der Tafeln I und II bestimmen wir in der Tafel III die Abmessungen der bildsamen Zone und dann die von Reibungs- und geometrischen Verhältnissen abhängigen Faktoren ξ_{Gr} und ξ_{Ge} .

In Tafel IV bestimmen wir die mittlere Verformungsfestigkeit des im Gesenk und Grat vorhandenen Stoffes anhand der Versuche von BELLA und GULYÁS [18]. Die durchschnittliche Höhenabnahme im Fertiggesenk kann mit 5 mm, die aus der Schmiedegeschwindigkeit errechnete Verformungszeit mit etwa 0,1 sec angenommen werden.

In Tafel V wird aus den Angaben der Tafeln II, III und IV der maximale Kraftbedarf für das Schmieden des Pleuels bestimmt. Nach Tafel V ist der maximale Kraftbedarf für das Schmieden des Aluminiumpleuels etwa 175 Mp, woraus der Arbeitsbedarf des Schläges näherungsweise folgende Größe ergibt:

$$A \approx (0,2 \div 0,4) \Delta h_m \cdot P_{\max} \approx 0,3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 175 \cdot 10^3 = 262 \text{ mkp.}$$

Tafel III

$s = 1,5 \text{ mm}, l_g = 4 \text{ mm}$

Nummer des Teilprofils	R[mm]	Typenbezeichnung des kennzeichnenden Querschnitts (Tafel I)	b_m [mm]	R/s	R/b	ξ_s	$\xi_{\bar{u}}$
			Nach Tafel I			$\left(1 + \frac{l_g}{2R}\right) \left(1 + \frac{l_g}{S}\right)$	Aus Bild 20
1	35	2a	15	23,3	2,33	3,8	4
2	20	2a	6	18,3	3,33	3,92	4,6
3	25	1	13,25	16,6	1,89	3,88	3,65

Tafel IV

Stoff: Al 99 Schmiedetemperatur 550 °C Grattemperatur 450 °C
 $\Delta h_m = 6 \text{ mm}$ Zeitdauer des Schmiedens 0,1 sec $S = 1,5 \text{ m}$ $L_s = 4 \text{ mm}$

Nummer des Teilprofils	b_m [mm]	$\varepsilon_2 Ge$	$E_2 Gr$	k_{f1Ge} [kp/mm ²]	k_{f1Gr} [kp/mm ²]	k_{f2Ge} [kp/mm ²]	k_{f2Gr} [kp/mm ²]	k_{fmGe} [kp/mm ²]	k_{fmGr} [kp/mm ²]
	Nach Tafel III	$\frac{\Delta h_m}{\Delta h_m + b_m}$	$1 - \frac{s}{b_m} (1 - \varepsilon_2 Ge)$	Anhand der Versuche von BELLA und GULYÁS [18]				$\frac{k_{f1Ge} + 2 k_{f2Ge}}{3}$	$\frac{k_{f1Gr} + 2 k_{f2Gr}}{3}$
1	15	0,285	0,93	1	2	1,2	2,8	1,13	2,53
2	6	0,5	0,875	1,1	2	1,4	2,8	1,3	2,53
3	13,25	0,452	0,94	1,1	2	1,4	2,8	1,3	2,53

Tafel V

	k_{fmGr} [kp/mm ²]	ξ_{Gr}	k_{fmGe} [kp/mm ²]	ξ_{Ge}	F [mm ²]	P_{max} [Mp]
Nummer der Teilprofils	Nach Tafel IV	Nach Tafel III	Nach Tafel IV	Nach Tafel III	Fläche des Teilprofilquerschnitts in der Gratebene	Aus Gleichung (64)
1	2,53	3,8	1,13	4	3670	51,7
2	2,53	3,92	1,3	4,6	6000	95
3	2,53	3,88	1,3	3,65	1960	28,5

Der maximale Kraftbedarf für das Schmieden des Pl euels

175,2

SCHRIFTTUM

1. GELEJI, A.: *Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch*. Berlin 1960.
2. GELEJI, A.: *Kraftbedarf und Fließvorgänge beim Strangpressen und beim Pressen im Gesenk*. *Acta Techn. Hung.* (1950), 187—220.
3. Семенов, Е. И.: Определение необходимого для штамповки номинального усилия кривошипного горячештамповочного пресса. Машины и технология обработки металлов давлением. МАШГИЗ, Москва 1955.
4. Строзжеф М. В.—Попов Е. А.: *Теория обработки металлов давлением*. МАШГИЗ, Москва 1959.
5. Строзжев М. В.—Семенов Е. И.—Курсаново С. Б.: Уточнение формы очага деформации и определение усилия при штамповке. *Вестник машиностроения* 4 (1959).
6. Ганаго О. А.—Вайсбурд Р. А.—Тарновский И. Я.: Определения усилий пресса и всех подающих частей молота, потребных для горячей штамповки. *Кузнечно-штамповочная промышленность* (1960), № 4.
7. Григорьев И. И.—Вайсбурд Р. А.: Сопоставление методов расчета усилий штамповки. *Кузнечно-штамповочное производство* 2 (1962).
8. Софман, Л. А.: *Основы расчета процессов штамповки и прессования*. МАШГИЗ, Москва 1961.
9. JOHNSON, W.—MELLOR, P. V.: *Plasticity for Mechanical Engineers*. D. Van Nostrand Company 1962.
10. PRAGER, W.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Birkhauser, Basel-Stuttgart 1961.
11. TÓTH, L.: *Doktor-Dissertation*. Technische Universität für Schwerindustrie, Miskolc 1964.
12. GEORG, O.: *Der Arbeitsbedarf beim Stauchen dünner Ronden*. *Schmiedetechnische Mitteilungen* (1964), Heft 4.
13. JOHNSON, W.: Experiments in Plane-Strain Extrusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (1956), 269—282.
14. WILCOX, R. J.—WHITTON, P. W.: The Cold Extrusion of Metals using Lubrication at Slow Speeds. *Journal of the Institute of Metals* (1958—59), 289—293.
15. CHANG, S. S.: Practical and Theoretical Aspects of the Cold Forming of Steel. *Sheet Metal Industries* (1963), 575—583.
16. PURCHASE, N. W.—TUPPER, N. W.: Experiments with a Laboratory Extrusion Apparatus under Conditions of Plane-Strain. *J. Mech. Phys. Solids* (1953), 277.
17. Гириш И. И.—Волковицкий В. Ф.: Деформации кривошипных прессов надрузкой. *Кузнечно-штамповочное производство* 12 (1959).
18. BELLA, —E. GULYÁS, J.: Warmstauchversuche mit Kupfer bei mittleren Formänderungsgeschwindigkeiten. *Acta Techn. Hung.* (1964).

DETERMINATION OF THE MAXIMUM FORCE IN DIE-FORGING

L. TÓTH

SUMMARY

The paper deals with the determination of the maximum forging force in die forging. In the first chapter the theory of the approximate determination of the maximum forging force is to be found. The theory is characterized mainly by its simplicity and by taking into consideration every influencing factor. In the second chapter the relation for simple forgings are deduced. The results are checked by comparing them with experimental results. Finally, the theory is applied to the maximum forging force required for the forgings of complicated shape. A numerical example shows the application of the method.

DÉTERMINATION DE LA FORCE MAXIMUM A L'ÉTAMPAGE

L. TÓTH

RÉSUMÉ

L'étude traite de la force maximum nécessaire au forgeage des pièces étampées. Le premier chapitre contient la théorie de la détermination approchée de la force de forgeage maximum. La théorie exposée est caractérisée surtout par sa simplicité et le fait qu'elle tient compte de tous les facteurs intervenant dans l'étampage. Le deuxième chapitre est consacré à la déduction des relations se rapportant aux pièces étampées simples. Les relations déduites à l'aide de la théorie ont été vérifiées par comparaison avec des résultats d'essais. L'application finale de la théorie exposée par l'étude est la détermination approchée de l'effort d'étampage maximum des pièces de forme compliquée. L'application de la méthode de calcul est démontrée sur un exemple numérique.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО УСИЛИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ
КОВКЕ В ШТАМПАХ

Л. ТОТ

РЕЗЮМЕ

Работа занимается определением максимального усилия при ковке заготовок обрабатываемых в штампах. В первой главе дается теория приближенного определения максимального усилияковки. Основной характерной чертой, наряду с простотой, этого метода является, что он учитывает все факторы, воздействующие на ковку в штампах. Во второй главе можно найти введение зависимостей, касающихся простых заготовок. В правильности выведенных зависимостей можно убедиться путем сравнения с экспериментальными данными. Приближенное определение максимального потребного усилия при ковке сложных по конфигурации заготовок представляет собой конечное применение теории, описанной в работе. Методика расчета приведена в работе с показом ее применения на числовом примере.

HYPersonic FLOW IN THE STAGNATION REGION OF A CIRCULAR CYLINDER

G. NATH

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received April 15, 1965]

An approximate solution of the inviscid hypersonic flow in the stagnation region of a circular cylinder with detached shock wave has been obtained. Real gas effects are taken into account. Various characteristics of the flow have been obtained. When λ , the ratio of the densities just behind the shock and the stagnation point, is equal to 1, the results in the stagnation region are reduced to that of other authors. By using real gas values of λ , the shock detachment distance, pressure coefficient and temperature increase, but stagnation point velocity gradient and Mach number decrease. The predicted values correlate well with experimental data which are for perfect gas conditions.

Symbols

R, Θ	polar co-ordinates;
u	radial velocity component;
v	tangential velocity component;
U_∞	free stream velocity;
Δ	$= R_S - R_B$;
R_B	radius of the cylinder;
R_S	radius of the shock cylinder;
σ	$= R - R_B$, radial distance from the surface of the cylinder;
ρ	density;
P	pressure;
T	absolute temperature;
K	$= \rho_\infty / \rho_S$;
λ	$= \rho_s / \rho_t$;
M	Mach number;
C_p	pressure coefficient;
Y	ratio of specific heats;
h	specific enthalpy;
a	velocity of sound.

Subscripts

∞	conditions in free stream;
S	conditions just behind the shock;
t	stagnation point conditions;
o	conditions at the axis, $\Theta = 0$.

I. Introduction

The interest in hypersonic flow has been stimulated around blunt bodies in the last few years by intercontinental ballistic missile and satellite programmes. In this problem the bow shock wave is detached from the body surface. The solution of the inviscid hypersonic flowing past blunt bodies is important

from a practical point of view. The inviscid analysis provides an accurate description of the main stream conditions outside the viscous boundary layer. Analysis of the boundary layer behaviour will provide important design information on skin friction and heat transfer. The heat transfer rate near the stagnation point of blunt body is important for designers, because for certain kinds of body shapes, the aerodynamic heating is the most severe in this region.

The hypersonic flow past blunt bodies has been considered by several authors [1-3] without taking into account the real gas effect. LINNÉL [4] obtained the solution of the symmetric inviscid hypersonic flow in the stagnation region of a sphere, by taking into account the real gas effect. The present author has obtained a similar solution for a cylinder under the following assumptions:

- a) The shock layer is thin;
- b) the shape of the shock in the neighbourhood of the stagnation point is the same as that of the body;
- c) the density in the shock layer is constant;
- d) the density ratio across the shock, ρ_∞/ρ_S , in the very small neighbourhood of the stagnation point, is taken as constant and is the same as that of the normal shock.

II. Conditions just behind the Shock Wave

The thermodynamic state of a gas behind a shock wave is calculated from Rankine-Hugonot equations of the conservation of mass, momentum and energy across the shock wave. The equations can be written as:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_S} = K = \frac{\frac{2}{M_\infty^2 \cos^2 \theta} + Y - 1}{Y + 1}, \quad (1)$$

$$\frac{p_S}{p_\infty} = 1 + Y(1 - K) M_\infty^2 \cos^2 \theta, \quad (2)$$

$$\frac{T_S}{T_\infty} = K [1 + Y(1 - K) M_\infty^2 \cos^2 \theta], \quad (3)$$

$$\frac{h_S}{h_\infty} = 1 + \frac{Y - 1}{2} (1 - K^2) M_\infty^2 \cos^2 \theta. \quad (4)$$

For a normal shock, $\theta = 0$. In the present case, θ is very small.

III. The Velocity and the Shock Detachment Distance

The velocity components and the shock detachment distance are obtained as in reference [4] and hence no details are given.

$$\frac{u}{U_\infty} = - \frac{b\sigma + c\sigma^2}{R} \cos \theta \quad (5)$$

where

$$b = \sqrt{2\lambda K(1-K) + K^2},$$

$$c = \frac{1-b}{2\lambda}.$$

$$\frac{v}{U_\infty} = (b + 2c\sigma) \sin \theta, \quad (6)$$

$$\frac{\Delta}{R_B} = \frac{K}{\frac{1 + \sqrt{2\lambda K(1-K) + K^2}}{2} - K}. \quad (7)$$

IV. Pressure, Temperature and Mach Number

The pressure is given by:

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + \frac{YM_\infty^2}{2\lambda} \left[2\lambda(1-K) + K - \frac{1}{K} \left(\frac{b\sigma + c\sigma^2}{R} \right)^2 \right] \cos^2 \theta, \quad (8)$$

$$\frac{p_B}{p_\infty} = 1 + \frac{YM_\infty^2}{2\lambda} [2\lambda(1-K) + K] \cos^2 \theta. \quad (9)$$

Similarly the temperature is given by:

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{a^2}{a_\infty^2} = \lambda K \left[1 + \frac{YM_\infty^2}{2\lambda} \left\{ 2\lambda(1-K) + K - \frac{1}{K} \left(\frac{b\sigma + c\sigma^2}{R} \right)^2 \right\} \cos^2 \theta \right], \quad (10)$$

$$\frac{T_B}{T_\infty} = \frac{a_B^2}{a_\infty^2} = \lambda K \left[1 + \frac{YM_\infty^2}{2\lambda} \left\{ 2\lambda(1-K) + K \right\} \cos^2 \theta \right]. \quad (11)$$

Similarly Mach number is given by:

$$M_S^2 = \frac{M_\infty^2 (\sin^2 \theta + K^2 \cos^2 \theta)}{K [1 + Y(1-K) M_\infty^2 \cos^2 \theta]}, \quad (12)$$

$$M^2 = \frac{M_\infty^2 \left[\left(\frac{b\sigma + c\sigma^2}{R} \right)^2 \cos^2 \Theta + (b + 2c\sigma)^2 \sin^2 \Theta \right]}{\lambda K \left[1 + \frac{YM_\infty^2}{2\lambda} \left\{ 2\lambda(1-K) + K - \frac{1}{K} \left(\frac{b\sigma + c\sigma^2}{R} \right)^2 \right\} \cos^2 \Theta \right]}, \quad (13)$$

$$M_B^2 = \frac{M_\infty^2 [2\lambda K(1-K) + K^2] \sin^2 \Theta}{\lambda K \left[1 + \frac{YM_\infty^2}{2\lambda} \{ 2\lambda(1-K) + K \} \cos^2 \Theta \right]}. \quad (14)$$

All the characteristics of the flow at the stagnation point and along the axis $\Theta = 0$ are obtained from the above equations by simply putting $\Theta = 0$.

V. The Pressure Coefficient and the Stagnation Point Velocity Gradient

The pressure coefficient is given by:

$$C_{P_B} = \left[\frac{2\lambda(1-K) + K}{\lambda} \right] \cos^2 \Theta. \quad (15)$$

When $\lambda = 1$, LI and GEIGER's [1] result is obtained. By putting $\Theta = 0$, stagnation point pressure coefficient is obtained.

The stagnation point velocity gradient is given by:

$$\left(\frac{dv}{d\Theta} \right)_{\Theta=0} = U_\infty [\sqrt{2\lambda K(1-K) + K^2}]. \quad (16)$$

For $\lambda = 1$, the result is the same as that of LI and GEIGER [1] and that of the sphere [4]. It agrees well with experimental results even for Mach numbers as low as 2.

VI. Discussions and Conclusions

The shock detachment and the stagnation point velocity gradient agrees fairly well with experimental results, when Mach number is high and either perfect gas values of λ for $Y = 1.4$ or $\lambda = 1$ is used. The effect of using real gas values of λ obtained from FELDMAN [5] is to decrease the stagnation point velocity gradient by about 5 per cent and to increase the shock detachment distance by about 3 per cent. By using real gas values of λ , there is little increase in the values of pressure δ and temperature and little decrease in the value of Mach number. For $\lambda = 1$, in the stagnation region, the results are the

same as obtained by LI and GEIGER and others. While shock detachment distance for the cylinder is greater than that of the sphere, the stagnation point velocity gradient both for the cylinder and the sphere is the same. The velocity at the stagnation point is zero, but the velocity gradient is finite. The pressure at the stagnation point is finite, but the pressure gradient is zero. The present solution is valid only in the stagnation region.

REFERENCES

1. LI, T. Y.—GEIGER, R. E.: Stagnation Point of a Blunt Body in Hypersonic Flow. *J. Aero Sci.* **24** (1957), 25—32.
2. MASLEN, S. H.—MOECKEL, W. E.: Inviscid Hypersonic Flow Past Blunt Bodies. *J. Aero. Sci.* **24** (1957), 683—693.
3. HAYES, W. D.—PROBSTEIN, R. F.: Hypersonic Flow Theory. Academic Press, New York 1959; 150—156.
4. LINNELL, R. D.: Hypersonic Flow Around a Sphere (Readers Forum). *J. Aero. Sci.* **25** (1958), 65—66.
5. FELDMAN, S.: Hypersonic Gas Dynamic Charts for Equilibrium Air. AVCO Research Laboratory, 1957; Jan.

ÜBERSCHALLSTRÖMUNG IM STAUBEREICH EINES KREISZYLINDERS

G. NATH

ZUSAMMENFASSUNG

Eine Näherungslösung für die reibungsfreie Überschallströmung in der Stauzone eines Kreiszyllinders mit gekrümmter Stoßfront ist abgeleitet. Die Effekte bei realen Gasen sind in Betracht gezogen. Die Kennzahlen der Strömung sind berechnet. Für ein Verhältnis der Dichte knapp hinter der Stoßwelle zu derjenigen im Staupunkt von $\lambda = 1$ reduzieren sich die Ergebnisse für den Staubereich auf diejenigen von anderen Autoren. Für reale Gase erhöhen sich die Werte von λ , die kürzeste Entfernung zwischen der abgegriffenen Stoßwelle und dem Körper, der Druck, der Druckkoeffizient und die Temperatur, aber der Staupunktgeschwindigkeitsgradient und die Machzahl sinken. Die berechneten Werte stimmen mit den experimentellen Daten für ideale Gase gut überein.

ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE DANS LA RÉGION DE STAGNATION
D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE

G. NATH

RÉSUMÉ

Une solution approchée pour le problème de l'écoulement supersonique sans frottement ayant lieu dans la région de stagnation d'un cylindre circulaire a été élaborée par l'auteur, qui tient compte aussi des effets dus à la présence d'un gaz réel. Différentes caractéristiques de l'écoulement ont été calculées. Si λ , c'est-à-dire le rapport de la densité après l'onde de choc à la densité au point de stagnation est égal à 1, on reçoit dans la région de stagnation des résultats plus simples, identiques à ceux des autres auteurs. En appliquant des λ correspondant à des gaz réels, la distance minima entre l'onde de choc détachée et le corps, le coefficient de pression et la température augmentent, mais le gradient de vitesse au point de stagnation et le nombre de Mach décroissent. Les valeurs calculées à l'avance concordent bien avec les données expérimentales mesurées sur des gaz idéals.

ДВИЖЕНИЕ ПОТОКА СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ В РЕАКТИВНОЙ ОБЛАСТИ НЕКОТОРОГО КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

РЕЗЮМЕ

Г. НАТ

Автор разработал метод приближенного решения проблемы движения потока со сверхзвуковой скоростью в реактивной области круглого цилиндра без трения. Учитываются воздействия, соответствующие действительным газам. Автором вычислены различные параметры потока. Если $\lambda=1$, отношение плотности непосредственно после ударной волны к плотности в реактивной точке, тогда в реактивной области результаты редуцируются до результатов других авторов. Применяя значения λ , соответствующие действительным газам, увеличиваются наименьшее расстояние между отключенной ударной волной и телом, давление, коэффициент давления и температура, но градиент скорости в точке напора и число Маха уменьшаются. Вычисленные заранее данные хорошо совпадают с экспериментальными данными, которые определены для случая идеальных газов.

THE FLOW OF A PERFECT FLUID THROUGH A SINGLE STAGE AXIAL FLOW FAN WITH PRESCRIBED SPANWISE CIRCULATION

G. NATH

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received July 19, 1965]

A new method of solving the inverse problem of the three dimensional flow in the rotor of a single stage axial fan has been developed for a prescribed variable circulation. The number of blades has been replaced by an infinite number of blades so that the total circulation is NT . The trailing vortices are spirals and the axial velocity before the rotor, A is not great. The method is valid for small R_H/R_T i.e. $R_H/R_T > 0,2$. The mean efficiency, chord length and other design parameters have also been obtained. The fluid is taken as incompressible and frictionless.

Symbols

Γ	circulation;
Γ_H	circulation at the hub;
N	number of blades;
R, Θ, Z	cylindrical polar coordinates;
l	chord length;
R_T	tip radius;
R_H	hub radius;
R_H/R_T	hub/tip ratio;
ω	angular velocity of rotor;
C_L	lift coefficient;
C_D	drag coefficient;
$\Phi_{geo.}$	geometrical angle of attack;
$\Phi_{off.}$	effective angle of attack;
ψ	angle which the relative mean velocity W_∞ makes with the tangential direction;
$\bar{\psi}$	angle which the new relative mean velocity \bar{W}_∞ makes with the tangential direction;
C_a	axial velocity before the rotor;
C_{ai}	axial component of induced velocity due to trailing vortices;
C_{Ri}	radial component of induced velocity due to trailing vortices;
C_{ti}	tangential component of induced velocity due to trailing vortices;
C_u	tangential component of induced velocity due to trailing vortices, when the circulation is constant along the radius;
W_1	relative inlet velocity;
W_2	relative outlet velocity;
W_∞	relative mean velocity;
\bar{W}_∞	new relative mean velocity;
a, b, c	constants;
π	3,141592;
t	blade spacing;
l/t	solidity;
Q	torque;
Q_c	torque coefficient;
T	thrust;
T_c	thrust coefficient;
η_T	efficiency at a certain point;
$\bar{\eta}_T$	mean efficiency;
K_{th}	theoretical total head rise coefficient at any point;

K_R	total head loss coefficient of rotor at a certain point;
K_{swirl}	loss coefficient due to swirl at a certain point;
K_{DP}	profile drag loss coefficient at a certain point;
K_{DS}	secondary drag loss coefficient at a certain point;
K_{DA}	annulus drag loss coefficient at a certain point;
C_{DP}	profile drag coefficient;
C_{DS}	secondary drag coefficient;
C_{DA}	annulus drag coefficient;
\bar{A}	$= C_a/\omega R_T$;
\bar{A}	$= (C_a + C_{ai})/\omega R_T$;
λ	constant of integration.

I. Introduction

The solution of the three-dimensional flow of a non-viscous, incompressible fluid through an axial turbo-machine, has been obtained by several authors [1–14], under the assumption that the circulation is variable along the span of the blade. There are an infinite number of blades and $R_H/R_T > 0,4$. But none of them has considered that the trailing vortices are spirals which approximate to the real pattern of flow.

The present author has obtained the inverse problem of the three-dimensional flow of a non-viscous, incompressible fluid through a single stage axial flow fan by the isolated aerofoil method for a prescribed variable circulation, when R_H/R_T lies between 0,2 to 0,4. The trailing vortices considered are spirals extending up to infinity. It was also assumed that the finite number of blades, N , are replaced by infinite number of blades so that the total circulation is $N\Gamma$. Hence the trailing vortices form concentric cylinders of infinite length. The efficiency, chord length and other design parameters have been obtained. The back flow can occur near the hub, but it can be prevented by suitably choosing a . The present method is valid for $R_H/R_T \geq 0,2$, whereas other methods are valid for $R_H/R_T > 0,4$.

II. Basic Assumptions

As the circulation is assumed as being known, we take the circulation which increases as the radius R/R_T increases, being maximum at the tip and minimum at the hub, and its derivative vanishes both at the tip and at the hub. In addition the following assumptions are made:

- The blades are considered as lifting lines;
- the axial velocity, $C_a/\omega R_T$ is constant along the radius and lies between 0,13 and 0,3. The lower limit of $C_a/\omega R_T$ depends upon N and Γ ;
- the tip clearance is considered as being zero;
- the radial component of induced velocity is considered to be zero as it is very small and it vanishes far from the rotor;

e) the angle of spiral lies between ψ and ψ_2 . In the present case, it is assumed that throughout the whole length the angle of spiral is ψ ;

f) for numerical calculation, in the present paper: $a = -0,01$; $C = 0,02$; $R_H/R_T = 0,2$; the aerofoil is *RAF 6E*, *Re. No.* $0,312 \times 10^6$; $\Phi_{\text{eff.}} = 6^\circ$; $C_{D_p} = 0,0177$ and $C_L = 1$.

III. Basic Equations and Solutions

Let us consider the rotor of a single stage axial fan consisting of N blades symmetrically placed whose circulation Γ varies along the radius. The requirement is to obtain the components of the induced velocity in the radial, tangential and axial directions at any point of a blade, due to trailing vortices and bound vortices of all the blades. The trailing vortices are spirals and form infinite concentric cylinders.

The circulation is prescribed and can be expressed in a non-dimensional form as:

$$\frac{\Gamma}{\omega R_T^2} = \Gamma_1 = a \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_H} \right)^3 + b \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^2 + C, \quad (1)$$

where $b = 3a/2 (1 - R_H/R_T)$ and a and C are assumed to be known.

The induced tangential velocity due to trailing vortices at the point $(R/R_T, 0, 0)$ for a constant circulation is given by:

$$\frac{C_u}{\omega R_T} = \frac{N \Gamma_{1H}}{2 \pi R/R_T}. \quad (2)$$

Table I
Tangential component of induced velocity

R/R_T	$N = 4$		$N = 3$	
	$\frac{C_u}{\omega R_T}$	$\frac{\bar{C}_u}{\omega R_T}$	$\frac{C_u}{\omega R_T}$	$\frac{\bar{C}_u}{\omega R_T}$
0,2	0,0636	0,0636	0,0477	0,0477
0,3	0,0424	0,0426	0,0318	0,0320
0,4	0,0318	0,0324	0,0238	0,0243
0,5	0,0254	0,0264	0,0190	0,0198
0,6	0,0212	0,0225	0,0159	0,0169
0,7	0,0181	0,0197	0,0136	0,0148
0,8	0,0159	0,0176	0,0119	0,0132
0,9	0,0141	0,0158	0,0106	0,0119
1,0	0,0127	0,0143	0,0095	0,0107

The induced tangential velocity due to trailing vortices at any point $(R/R_T, 0, 0)$ when the circulation is variable is given by:

$$\frac{\bar{C}_u}{\omega R_T} = \frac{C_u + 2 C_{ti}}{\omega R_T} = \frac{N \Gamma_1}{2 \pi R/R_T} \quad (3)$$

The tangential component of induced velocity due to trailing vortices is given in Table I (Fig. 1). It decreases as R/R_T increases. It also decreases

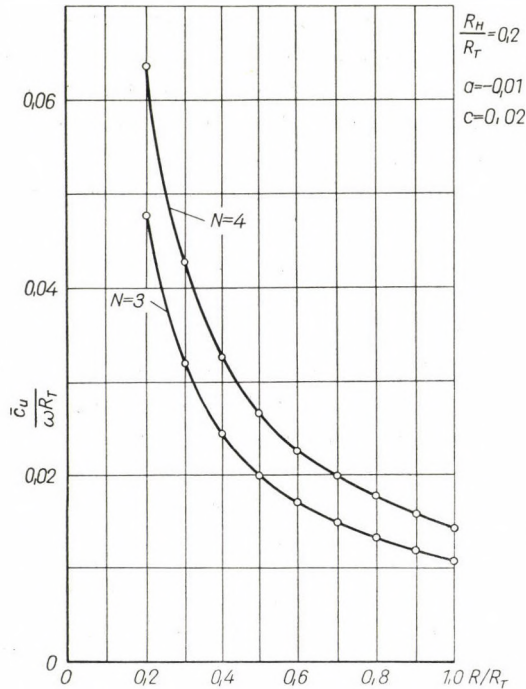


Fig. 1

when either Γ or N decreases or R_H/R_T increases. It is independent of Λ . It represents a discontinuity, as there is no tangential velocity before the rotor.

The axial component of induced velocity due to trailing vortices at any point $(R/R_T, 0, 0)$ is given by:

$$\begin{aligned} \frac{C_{ai}}{\omega R_T} &= - \int \frac{Nd\Gamma_1}{d(R/R_T)} \cos \psi d(R/R_T) = \\ &= \lambda - \frac{3aN}{\beta} \left\{ \Delta X \left[\frac{\alpha^4}{3K'^2} \left(\sec^2 \bar{\Theta} - \frac{2(2-K^2)}{K'^2} \right) \tan \bar{\Theta} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{\alpha^3}{2K^2} \sec^2 \bar{\Theta} + \left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{NC}{4\pi} \right) \frac{\alpha^2}{K'^2} \tan \bar{\Theta} \Big] + \\
& + \frac{\alpha^2}{K'^2} \left[\frac{\alpha^2 2(2-K^2)}{3K'^2} - \left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{NC}{4\pi} \right) \right] E(\bar{\Theta}, K) - \\
& - \left[\frac{\alpha^4}{3K'^2} + \frac{R_H}{R_T} \frac{NC}{4\pi} \right] \cdot F(\bar{\Theta}, K) + \\
& + \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{\alpha}{2K'} \left[\frac{\alpha^2(1+K'^2)}{2K^2} + \frac{NC}{4\pi} \right] \ln \left(\frac{\Delta X + K'}{\Delta X - K'} \right) \Big], \quad (4)
\end{aligned}$$

when

$$\left(\frac{C_a}{\omega R_T} \right)^2 > \frac{NC}{\pi},$$

where

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{-\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2}}{2}, \quad \beta = -\frac{-\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2}}{2}; \\
\frac{R}{R_T} &= \alpha \tan \bar{\Theta}; \quad K^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2}; \quad \Delta X = \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \bar{\Theta}}; \\
K' &= \sqrt{1 - K^2}; \quad \lambda_1 = \left(\frac{C_a}{\omega R_T} \right)^2 - \frac{NC}{2\pi}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{NC}{4\pi} \right)^2;
\end{aligned}$$

$F(\bar{\Theta}, K)$ and $E(\bar{\Theta}, K)$ are elliptic integrals of the first and the second kind, respectively.

But when

$$\left(\frac{C_a}{\omega R_T} \right)^2 = \frac{NC}{\pi},$$

equation (4) reduces to

$$\begin{aligned}
\frac{C_{ai}}{\omega R_T} &= \lambda - 3aN \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{R}{R_T} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \left(\frac{R}{R_T} \right)^2 + \right. \\
& + \left[\left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{NC}{4\pi} \right) - \left(\frac{NC}{4\pi} \right)^2 \right] \frac{R}{R_T} + \\
& + \left[\left(1 + \frac{NC}{4\pi} \right) \left(1 + \frac{R_H}{R_T} \right) \frac{NC}{4\pi} \right] \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{R}{R_T} \right)^2 + \left(\frac{C_a}{\omega R_T} \right)^2 \right] + \\
& \left. + \left[\left(\frac{NC}{4\pi} \right)^3 - \frac{NC}{4\pi} \left(\frac{R_H}{R_T} - \frac{NC}{4\pi} \right) - \frac{R_H}{R_T} \right] \tan^{-1} \frac{R/R_T}{4\pi} \right\}. \quad (5)
\end{aligned}$$

$C_{ai}/\omega R_T$ is imaginary if

$$(C_a/\omega R_T)^2 < NC/\pi.$$

The constant of integration, λ , in equations (4) and (5), is calculated in order to satisfy the condition of continuity, which is:

$$\int_{R_H/R_T}^1 \frac{C_a}{\omega R_T} - 2\pi R/R_T d(R/R_T) = \int_{R_H/R_T}^1 \left(\frac{C_a + 2C_{ai}}{\omega R_T} \right) 2\pi R/R_T d(R/R_T). \quad (6)$$

The axial component of induced velocity is given in Table II (Fig. 2). It increases as R/R_T increases. Further it also increases as Γ increases and decreases as N or Λ or R_H/R_T increases. If the constant a is taken as large, then back-flow occurs near the hub of the rotor. The value of a beyond which back-flow occurs at different points on the rotor is given in Table III. It can

Table II
Axial component of induced velocity, $C_{ai}/\omega R_T$

R/R_T	$a = -0,01, C = 0,02$			$a = -0,01, C = 0,01$	
	$N = 4$		$N = 3$	$N = 4$	
	$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,2$	$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,2$
0,2	-0,0222	-0,0244	-0,0181	-0,0240	-0,0259
0,3	-0,0203	-0,0220	-0,0166	-0,0220	-0,0233
0,4	-0,0175	-0,0187	-0,0143	-0,0190	-0,0199
0,5	-0,0138	-0,0145	-0,0112	-0,0149	-0,0155
0,6	-0,0089	-0,0092	-0,0072	-0,0095	-0,0098
0,7	-0,0026	-0,0025	-0,0021	-0,0032	-0,0027
0,8	0,0052	0,0056	0,0042	0,0057	0,0060
0,9	0,0149	0,0157	0,0121	0,0161	0,0167
1,0	0,0267	0,0279	0,0216	0,0295	0,0296

Table III
The value of a beyond which back-flow occurs on the rotor

R/R_T	$N = 4$		$N = 3$
	$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,2$	$C_a/\omega R_T = 0,3$
0,2	0,135	0,081	0,164
0,3	0,147	0,090	0,180
0,4	0,170	0,106	0,209
0,5	0,216	0,137	0,266
0,6	0,334	0,215	0,413
0,7	1,119	0,774	1,414

easily be shown that the induced velocity due to bound vortices vanishes at every point of the blade.

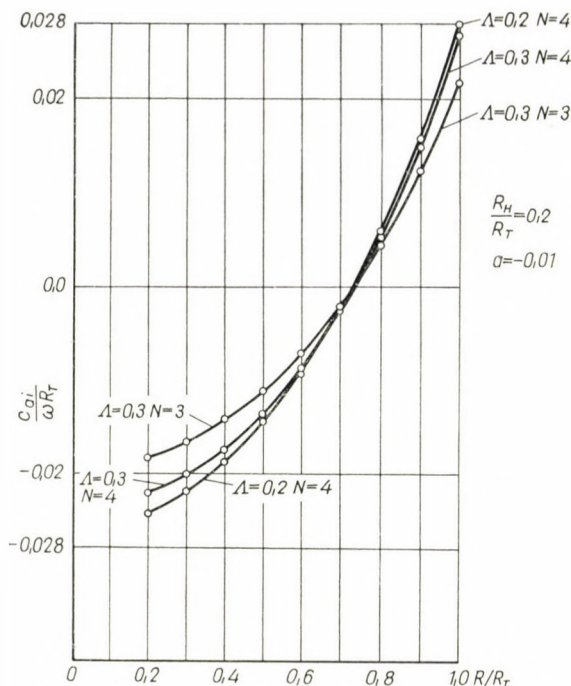


Fig. 2

1. Geometrical angle of attack and chord length

It is known that the induced velocity changes the effective angle of attack and the blade behaves as a blade of infinite span at this angle of attack. Hence the profile drag coefficient, C_{Dp} , lift coefficient C_L and Φ_{eff} . can be obtained from the experimental data of isolated aerofoil of infinite span [15].

The geometrical angle of attack, Φ_{geo} . can be obtained from $\Phi_{eff} = \Phi_{geo} - (\bar{\psi} - \psi)$ (7).

The angle ψ and $\bar{\psi}$ can be obtained from the dimensionless velocity diagram (Fig. 3). Hence

$$\tan \psi = \frac{C_a/\omega R_T}{R/R_T - \frac{N}{4\pi} \frac{\Gamma_{1H}}{R/R_T}}, \tag{8}$$

$$\tan \bar{\psi} = \frac{C_a + C_{ai}}{R/R_T - \frac{N}{4\pi} \frac{\Gamma_1}{R/R_T}}. \tag{9}$$

The new relative mean velocity \bar{W}_∞ is given by:

$$\left(\frac{\bar{W}_\infty}{\omega R_T}\right)^2 = \left(\frac{C_a + C_{ai}}{\omega R_T}\right)^2 + \left(\frac{R}{R_T} - \frac{N}{4\pi} \frac{\Gamma_1}{R/R_T}\right)^2. \tag{10}$$

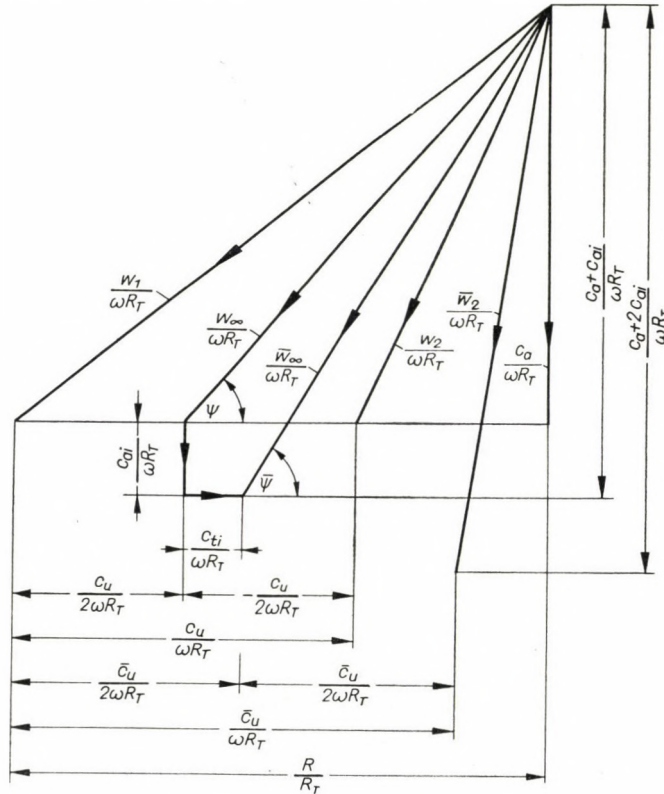


Fig. 3

The chord length is given by:

$$\frac{l}{R_T} = \frac{2 \Gamma_1}{C_L \frac{\bar{W}_\infty}{\omega R_T}}. \tag{11}$$

Again

$$K_{th} = \frac{2 \epsilon}{\Lambda} \frac{R}{R_T}, \tag{12}$$

where $\epsilon = \bar{C}_u/C_a$

The chord length and geometrical angle of attack are given in Table IV.

For a prescribed circulation, l/R_T decreases as Λ increases and N has very little effect on the chord length. There is no interference effect on the

Table IV

R/R_T	$N = 4$				$N = 3$	
	$C_a/\omega R_T = 0,3$		$C_a/\omega R_T = 0,2$		$C_a/\omega R_T = 0,3$	
	l/R_T	Φ_{geo}°	l/R_T	Φ_{geo}°	l/R_T	Φ_{geo}°
0,2	0,1231	4,08	0,1645	2,28	0,1203	4,41
0,3	0,1018	4,01	0,1216	2,90	0,100	4,37
0,4	0,0856	4,35	0,0961	3,77	0,0847	4,66
0,5	0,0737	4,83	0,0799	4,54	0,0731	5,05
0,6	0,0648	5,33	0,0687	5,20	0,0644	5,45
0,7	0,0578	5,83	0,0606	5,81	0,0576	5,86
0,8	0,0523	6,30	0,0542	6,39	0,0521	6,28
0,9	0,0474	6,87	0,0489	6,97	0,0474	6,70
1,0	0,0431	7,41	0,0442	7,54	0,0431	7,14

rotor, as l/t lies between 0,3 and 0,6 at the hub. The geometrical angle of attack generally increases as l/R_T increases. The angle $\bar{\psi} + \Phi_{eff}$ is given in Table V.

Table V

$$(\bar{\psi} + \Phi_{eff})^\circ$$

R/R_T	$N = 4$		$N = 3$
	$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,2$	$C_a/\omega R_T = 0,3$
0,2	64,81°	52,22°	64,00°
0,3	51,11°	38,56°	50,93°
0,4	42,34°	31,27°	42,37°
0,5	36,44°	26,86°	36,50°
0,6	32,30°	23,95°	32,33°
0,7	29,30°	21,96°	29,27°
0,8	27,09°	20,57°	26,98°
0,9	25,44°	19,59°	25,24°
1,0	24,21°	18,93°	23,92°

IV. Fan Unit Efficiency

In an axial fan which consists of a rotor only, the loss in the efficiency is due to rotor loss and swirl loss; other losses are neglected. The distribution of losses along the radius is not uniform, therefore, the mean value is calculated.

The efficiency at point $(R/R_T, 0, 0)$ is given by:

$$\eta_T = 1 - \frac{K_R}{K_{th}} - \frac{K_{swirl}}{K_{th}}, \quad (13)$$

$$\frac{K_R}{K_{th}} = \frac{K_{DP} + K_{Ds} + K_{DA}}{K_{th}} = \frac{C_{DP} + C_{Ds}}{C_L} \frac{\Lambda}{\sin^2 \psi} \cdot \frac{1}{R/R_T} + \frac{K_{DA}}{K_{th}}. \quad (14)$$

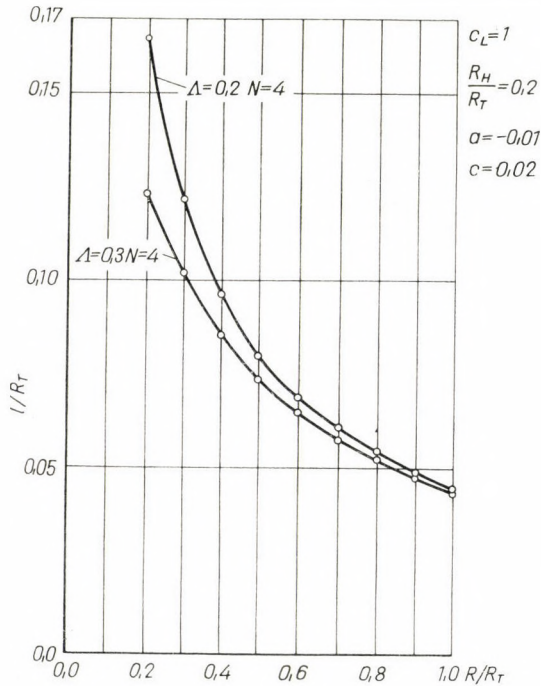


Fig. 4

The profile drag coefficient, C_{Dp} , is calculated from the experimental data of isolated aerofoil. The profile loss is given in Table VI (Fig. 5). For a given Γ , it decreases when Λ or N increases.

The secondary drag coefficient, C_{Ds} , is given by the well-known empirical formula by HOWELL, i.e. $C_{Ds} = 0,018 C_L^2$ and should be calculated at the mean radius. Similarly the annulus loss, $K_{DA}/K_{th} = 0,02$, for the entire axial fan.

The swirl loss is given by:

$$\frac{K_{swirl}}{K_{th}} = \frac{1}{2} \frac{\overline{C_u}/\omega R_T}{R/R_T}. \quad (15)$$

The swirl loss is given in Table VII (Fig. 6).

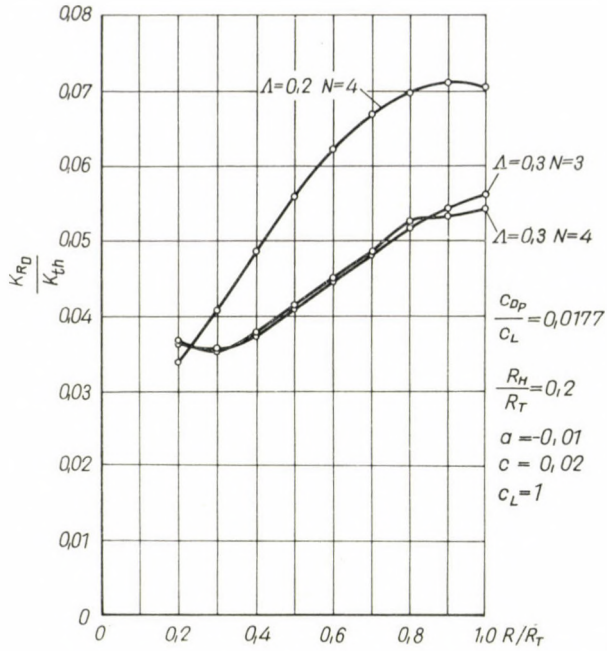


Fig. 5

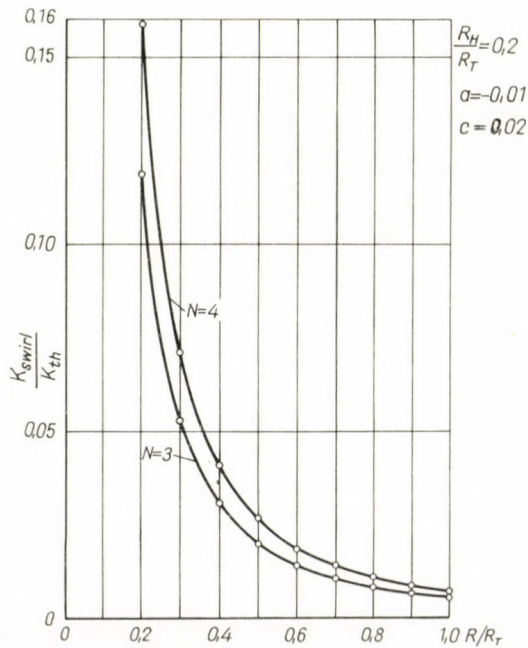


Fig. 6

Table VI
Rotor loss due to profile drag, K_{DP}/K_{th}

R/R_T	$N = 4$		$N = 3$
	$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,2$	$C_a/\omega R_T = 0,3$
0,2	0,0362	0,0339	0,0369
0,3	0,0352	0,0407	0,0354
0,4	0,0377	0,0485	0,0377
0,5	0,0413	0,0558	0,0412
0,6	0,0450	0,0621	0,0449
0,7	0,0484	0,0668	0,0485
0,8	0,0526	0,0698	0,0517
0,9	0,0532	0,0711	0,0543
1,0	0,0543	0,0706	0,0560

Table VII
Swirl loss, K_{swirl}/K_{th}

R/R_T	$N = 4$	$N = 3$
0,2	0,1591	0,1193
0,3	0,0711	0,0533
0,4	0,0405	0,0304
0,5	0,0264	0,0198
0,6	0,0188	0,0141
0,7	0,0141	0,0105
0,8	0,0110	0,0082
0,9	0,0088	0,0066
1,0	0,0071	0,0053

The swirl loss is independent of Λ and decreases as R/R_T increases. It also decreases as R_H/R_T increases, and increases as circulation or N increases.

The mean efficiency is given by:

$$\bar{\eta}_T = 1 - \left\{ \frac{2}{1 - \left(\frac{R_H}{R_T}\right)^2} \int_{\frac{R_H}{R_T}}^1 \left[\frac{K_{DP}}{K_{th}} + \frac{K_{swirl}}{K_{th}} \right] \left(\frac{R}{R_T}\right) d(R/R_T) \right\} - \frac{K_{Ds} + K_{DA}}{K_{th}}. \quad (16)$$

Equation (16) can be integrated numerically or graphically.

The efficiency due to profile loss and swirl loss and the mean efficiency (taking into account all the losses) are given in Table VIII (Fig. 7) and Table IX

Table VIII

Efficiency, η_T ; taking into account losses due to profile drag and swirl only

R/R_T	$N = 4$		$N = 3$
	$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,2$	$C_a/\omega R_T = 0,3$
0,2	0,8045	0,8068	0,8437
0,3	0,8936	0,8881	0,9111
0,4	0,9216	0,9108	0,9318
0,5	0,9321	0,9176	0,9389
0,6	0,9361	0,9190	0,9409
0,7	0,9374	0,9190	0,9408
0,8	0,9363	0,9190	0,9399
0,9	0,9379	0,9200	0,9390
1,0	0,9384	0,9221	0,9385

Table IX

Mean efficiency, $\bar{\eta}_T$

$N = 4$		$N = 3$
$C_a/\omega R_T = 0,3$	$C_a/\omega R_T = 0,2$	$C_a/\omega R_T = 0,3$
0,8644	0,8315	0,8698

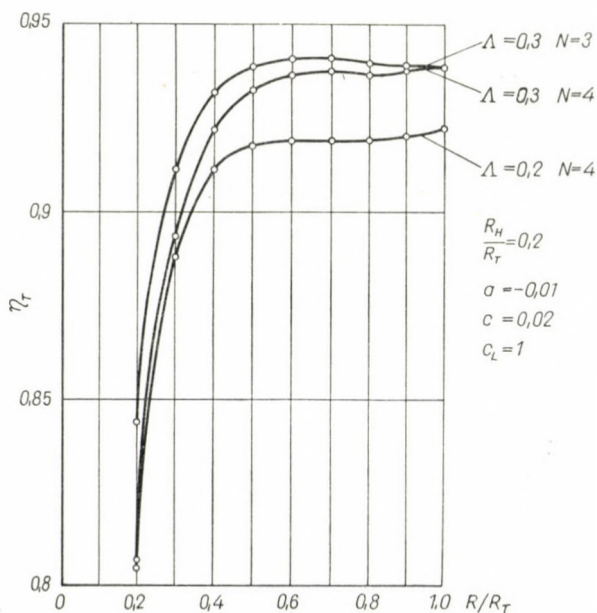


Fig. 7

respectively. For a prescribed circulation, the mean efficiency increases as Λ increases, and N has very little effect on it.

V. Torque and Thrust

The torque is given by:

$$Q_C = \frac{4}{\Lambda} \int_{\frac{R_H}{R_T}}^1 \left(1 + \frac{C_{ai}}{\omega R_T} \cdot \frac{1}{\Lambda} \right) \frac{\overline{C_u}}{\omega R_T} (R/R_T)^2 d(R/R_T), \quad (17)$$

where

$$Q_C = \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho C_a^2 \pi R_T^3}$$

The thrust is given by:

$$T_C = 2 \int_{\frac{R_H}{R_T}}^1 \left[K_{th} - K_R - \left(1 + \frac{C_{ai}}{C_a} \right)^2 - \left(\frac{\overline{C_u}}{C_a} \right)^2 + 1 \right] \frac{R}{R_T} d(R/R_T), \quad (18)$$

where

$$T_C = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho C_a^2 \pi R_T^3}$$

Both equations (17) and (18) can be integrated numerically.

VI. Estimation of a and C

The maximum and minimum values of a and C are given below (for details see Appendix I):

$$\begin{aligned} a &= 0 \text{ (maximum),} \\ a &= -\frac{4\pi\Lambda}{N} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_H}{R_T}\right)^3} \text{ (minimum);} \\ C &= \frac{2\pi\Lambda}{N} \frac{R_H}{R_T} \text{ (maximum),} \\ C &= 0 \text{ (minimum).} \end{aligned} \quad (19)$$

VII. Conclusions

In the present paper the trailing vortices are taken as spirals which approximate the real pattern of flow that occurs in the rotor of an axial fan, when the circulation is variable. The derivative of the circulation along the radius should not be high, i.e. a should not be taken as large, because back-flow will occur near the hub. The occurrence of back-flow should be avoided, because the portion where the back-flow occurs will act as a turbine. For a prescribed circulation, the mean efficiency increases as Δ increases and it is affected very little by the number of blades. The swirl loss at the hub is very high. For prescribed circulation Γ , N and Δ , the chord length, l/R_T , and the mean efficiency, $\bar{\eta}_T$, are almost the same, whether the trailing vortices are spirals or straight lines or the number of blades are finite or infinite. The present method is valid for $R_H/R_T \geq 0,2$, whereas the method by other authors [1—14] are valid for $R_H/R_T > 0,4$.

REFERENCES

1. BETZ, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen 1927; 68—92.
2. GLAUER, H.: The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory. Cambridge University Press 1930, 125—155.
3. RUDEN, P.: Investigation of Single Stage Axial Fans. *Tech. Memor. nat. adv. comm. Aero. Wash.* 1944; No. 1062.
4. MARBLE, F. E.: The Flow of a Perfect Fluid through an Axial Turbomachine with Prescribed Blade Loading. *J. Aero. Sci.* **15** (1948), 473—485.
5. CARTER, A. D. S.: Three-Dimensional Flow Theories for Axial Compressors and Turbines. *Proc. Instn. Mech. Engrs. London.* **159** (1948), 255.
6. KAHANE, A.: Investigations of Axial-Flow Fan and Compressor Rotors Designed for Three-Dimensional Flow. *Tech. Note. Nat. adv. Comm. Aero. Wash.* 1948, No. 1652.
7. MARBLE, F.: Analytical Investigations of Some Three-Dimensional Flow Problems in Turbo-Machines. *Tech. Note. Nat. adv. Comm. Aero. Wash.* 1952, No. 2614.
8. SMITH, L. H.—TRAUGOTT, S. C.—WISLICENUS, G. F.: A Practical Solution of a Three-Dimensional Flow Problem of Axial-Flow Turbomachine. *Trans. ASME* **75** (1953), 789—803.
9. GINSBURG, T.: Investigation of Three-Dimensional Potential Flow through Axial Cascade of Aerofoils. E. T. H. Prom. No. 2609, 1956.
10. SEIPPEL, C.: Three-Dimensional Flow in Multi-stage Turbine. *Brown Boveri Review* **45** (1958), 99—107.
11. MIKHAIL, S.: Three-Dimensional Flow in Axial Pumps and Fans. *Proc. Instn. Mech. Engrs. London* **172** (1958), No. 35.
12. VAVRA, M. H.: Aero-Thermodynamics and flow in Turbo-Machines. John Wiley and Sons Inc., New York 1960.
13. WALLIS, R. A.: Axial Flow Fans. William Clowes and Sons, London 1961.
14. HOWELL, W. T.: Approximate Three-Dimensional Flow Theory for Axial Turbo-Machines. *Aeronautical Quarterly* **14** (1963); May, part 2.
15. PATTERSON, G. N.: Ducted Fans: Design for High-Efficiency. *Australian Council for Aeronautics, Report ACA 7*; 1944.

APPENDIX I

The maximum and minimum values of a and C are obtained from equation (3). Equation (3) can be written as:

$$a \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^3 - \frac{3a}{2} \left(1 - \frac{R_H}{R_T} \right) \left(\frac{R}{R_T} - \frac{R_H}{R_T} \right)^2 + C = \frac{2\pi\zeta A}{N} \frac{R}{R_T}.$$

The minimum and the maximum values of ζ are 0 and 1, respectively. If $\zeta = 0$, the inflow and the outflow directions coincide. If the maximum value of ζ is taken greater than 1, C_L becomes greater than 1,2, which is generally the maximum permissible value. If $C_L > 1,2$, C_D rises rapidly with the angle of incidence, hence C_L/C_D increases, thus reducing the efficiency. For a given $C_a/\omega R_T$, R_H/R_T and N , the minimum value of a (a is negative) and C are obtained by prescribing maximum circulation at the tip and minimum at the hub, by putting ζ equal to 1 and 0, respectively. Similarly the maximum values of a and C are obtained by prescribing the circulation at the tip to be equal to the maximum circulation at the hub. Hence, the maximum and minimum values of a and C are given by equation (19).

DIE STRÖMUNG EINER VOLLKOMMENEN FLÜSSIGKEIT DURCH EINEN
EINSTUFIGEN AXIALVENTILATOR MIT VORGESCHRIEBENER ZIRKULATION
ENTLANG DER SCHAUFEL

G. NATH

ZUSAMMENFASSUNG

Für die Lösung des inversen Problems der dreidimensionalen Strömung im Rotor eines einstufigen Axialventilators mit vorgeschriebener veränderlicher Zirkulation entlang der Schaufel wurde eine neue Methode entwickelt. Die Schaufelzahl wurde durch eine unendliche Schaufelzahl ersetzt, so daß die gesamte Zirkulation NI' wird. Die freien Wirbel sind Spiralen und die axiale Geschwindigkeit vor dem Rotor, A , ist nicht groß. Die Methode ist für kleine Verhältnisse R_H/R_T gültig, d.h. $R_H/R_T \geq 0,2$. Der durchschnittliche Wirkungsgrad, Sehnenlänge und sonstige Parameter für die Konstruktion wurden auch berechnet. Die Flüssigkeit wird als inkompressibel und reibungsfrei betrachtet.

L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE PARFAIT A TRAVERS UN VENTILATEUR
AXIAL A UN ÉTAGE, AVEC CIRCULATION PRESCRITE LE LONG DE L'AUBE

G. NATH

RÉSUMÉ

L'auteur a élaboré une nouvelle méthode pour résoudre le problème inverse de l'écoulement tridimensionnel à travers un ventilateur axial à un étage, en cas de circulation variable prescrite. Le nombre d'aubes a été remplacé par un nombre infini d'aubes, de sorte que la circulation totale est NI' . Les tourbillons libres sont des spirales et la vitesse axiale devant le rotor, A , n'est pas grande. La méthode est valable pour des R_H/R_T de faible valeur, c'est-à-dire $R_H/R_T \geq 0,2$. Le rendement moyen, la longueur de corde et d'autres caractéristiques de la construction ont été également déterminés par l'auteur, le fluide étant considéré comme incompressible et sans friction.

ДВИЖЕНИЕ ПОТОКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ ОДНОСТУПЕНЧАТЫЙ
АКСИАЛЬНЫЙ ВЕНТИЛЯТОР ПРИ ЗАДАННОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ВДОЛЬ
ЛОПАСТЕЙ

Г. НАТ

РЕЗЮМЕ

Для решения инвертной проблемы трехразмерного потока, движущегося через одноступенчатый аксиальный вентилятор, автором разработан новый метод для случая заданного переменного времени цикла. Число лопастей замещено бесконечным числом лопастей, так что полная циркуляция будет N . Свободные вихри являются спиралями, аксиальная скорость перед ротором невысока. Метод пригоден для небольшого соотношения R_H/R_T , т. е. для $R_H/R_T = 0,2$. Автор определяет также средний η , длину хорды и другие проектные параметры. Среда принимается несжимаемой и не имеющей трения.

ON STRAIN INCOMPATIBILITY AND GRAIN BOUNDARY DAMAGE IN FATIGUE

MARIA RÓNAY

COLUMBIA UNIVERSITY, NEW YORK

[Manuscript received July 21, 1965]

The incompatibility between the imposed macroscopic strain field and the deformation of the inhomogeneous anisotropic polycrystalline aggregate as well as between the deformation of the individual members of the aggregate is considered to be most severe under circumstances of fatigue mainly as a result of the very small number of operating slip systems in the individual grains, the characteristic concentration of slip into bands under reversed straining of moderate amplitudes and the accumulation of permanent deformation due to imperfect reversibility of slip. As a result of strain incompatibilities caused by the restrictions imposed by surrounding grains or non-deforming parts of the same grain, slip-band, grain-boundary, and subgrain-boundary damage occur. The strain incompatibilities find relief on the surface in the form of extrusions, intrusions, grain rumpling and subgrain rumpling. The concepts are illustrated by photomicrographic studies on superpurity copper aluminium and 70/30 alpha brass under conditions of constant strain amplitude cycling in torsion.

I. Introduction

Fatigue is a progressive deterioration of the continuity of the medium terminated by macroscopic cracking and final separation due to the repetition of reversed strain cycles imposed on the inhomogeneous, locally anisotropic crystal structure [1, 2]. The state of strain which is defined in terms of continuum mechanics on the usual basis of continuity, homogeneity and isotropy of the medium thus enforces the deformation of a locally inhomogeneous anisotropic aggregate that cannot accommodate such strains without high-intensity elastic distortion creating severe local discontinuities in the microscopic deformation pattern. Such discontinuities, which are the source of "textural stresses" [3], arise mainly from a lack of compatibility of the deformation of neighboring crystals, or of different parts of a single crystal and had been referred to as incompatibility centers [4]. The density of their distribution is highest where the discrepancy between the overall "continuum mechanical" strain field and the resulting localized glide fields are largest and where the intensity of this strain field is highest. It will therefore in general be lower in cubic crystals where the large number of potential slip systems makes accommodation by slip easier than in crystals with a small number of slip systems, and higher in the region of macroscopic strain concentration.

There is obviously a significant difference in the severity of incompatibility produced in uni-directional and in reversed straining. The increase of the

strain in uni-directional straining activates new slip planes and slip systems in the course of the deformation. The result of this process is a pattern of widely distributed and statistically oriented glide processes which tends to produce a quasi-isotropic deformation field rather closely related to the continuum mechanical strain field, and it is on the effectiveness of this process that the classical continuum-mechanical theory of plasticity is based.

In reversed straining the strain does not increase but is kept constant or decreases depending on whether constant strain or constant stress cycling is applied. Under circumstances significant for fatigue usually only one slip system operates in individual grains. This predominantly one-fold slip per grain (in a few grains two-fold slip may exist, in other grains none develops) is the least favorable state of deformation of a polycrystalline aggregate tending to accommodate to the applied macroscopic strain field while maintaining continuity at the boundary of differently oriented grains. The well-known concentration of slip in slip bands and the accumulation of uni-directional displacement at the intersection of slip bands with grain boundaries due to the non-reversibility of the slip process further increases the difficulty of the accommodation of the deformation of individual grains to each other. Thus under low amplitude reversed cyclic straining there are three main sources of strain incompatibility:

- a) Incompatibility due to differently oriented grains with predominantly one operating slip system (see Fig. 4).
- b) Incompatibility between the accumulated permanent deformation at the end of the slip bands and the intersecting grain boundary (see (Figs 1, 2, 4).
- c) Incompatibility within one grain between parts subject to concentrated deformation (slip bands) and their non-deforming neighbourhood (see Fig. 12).

II. Inhomogeneity of Deformation Due to the Varying Orientation of Grains

The simplest type of incompatibility in the polycrystalline aggregate is due to the elastic and plastic anisotropy of the grains. The angles between the planes and directions of easy glide and the direction of the applied stress are different for different grains. Under a given load, grains of different orientation take up different stresses already in the elastic range due to differences in elastic moduli. As a result of this variation of stress, the surface of a polycrystalline specimen subject to load will show a slight warping from grain to grain even within the elastic range [5].

When local plastic deformation begins the stress differences usually increase. Studies of the inhomogeneity under uni-directional straining of the plastic deformation in the crystals of an aggregate [6] have not only shown

wide differences in the amount of deformation from grain to grain, but also that deformation is inhomogeneous within each grain due to interaction of neighbouring grains which enforces continuity of the macroscopic strain across grain boundaries. Hence the distribution of stress in the aggregate is not uniform, some grains carrying more and some less than average related to the externally applied forces; moreover, the spacing of the stress-operated slip is non-uniform within an individual grain, varying from the interior to the restraining grain boundary. Obviously, crystals in the interior of a polycrystalline specimen are more restrained in their deformation since they are not allowed the freedom in deformation at a free surface that can be observed as surface rumpling; they have, moreover, a larger grain-boundary area relative to their volume.

It is important to note that this inhomogeneity of the plastic deformation is considerably intensified under fatigue conditions where usually only one slip system operates and the relief that can be expected from polyslip and change in orientation of crystals in the course of uni-directional straining is usually not available.

Inhomogeneity of the deformation of single crystals and associated formation and intensification of incompatibilities arise from the imposition of homogeneous or non-homogeneous stress fields on the anisotropic crystal; the specific features of the relation between incompatibility and fatigue in single crystals will, however, be dealt with in a subsequent paper.

III. Strain Incompatibility at Grain Boundaries

If it is assumed that glide starts in two neighbouring grains of a polycrystal of different lattice orientation at the same intensity of the applied force, the grain boundary restraints imposed by the surrounding crystals of the aggregate as well as the incompatibility of the simultaneous slip of the neighbouring crystals will obviously modify the plastic deformation in the individual grains.

Single crystals of cubic metals subjected to uniaxial tension usually deform by pure shear along the slip system for which the resolved shear stress is higher than the critical value. This type of deformation cannot satisfy the continuity conditions for the displacement across grain boundaries in an aggregate of crystals. It is theoretically possible to maintain macroscopic continuity within the polycrystal by appropriate combinations of slips on several crystal planes. According to purely geometric considerations any arbitrary incompressible deformation of a crystal within an aggregate can be accommodated by a suitable combination of slip along five independent slip systems. However, if five-fold slip were to operate from the start of the plastic

deformation, the critical shear stress would have to be attained in all five systems, and the applied force would have to be much higher than that which produces the critical shear stress on the most favorably oriented slip system. Continuity of the deformation across the boundary of the two simultaneously deforming crystals would require different stresses on two sides of a boundary between crystals of different orientation, a requirement that is contradicted by equilibrium conditions. Thus, G. I. TAYLOR's proof [7] that Fcc crystal grains can adjust to any specified deformation by slip on five slip systems selected out of the total number of available systems by a concept of minimum rate of energy dissipation, and can therefore be expected to maintain continuity of deformation at grain boundaries of a polycrystal is open to serious questions even under conditions of uni-directional straining [8], unless it can be assumed that most of the crystals of the aggregate are oriented for "polyslip" [9, 10].

In reversed repeated straining leading to fatigue the situation is radically different. The stress amplitudes, the repetition of which produces fatigue damage after a large number of cycles, are of the order of magnitude that usually produces single slip on the most favorably oriented slip system only. While it is well-known [10] that even under uni-directional straining, deformation of a crystal by slip on one system cannot, in general, satisfy continuity conditions across a grain boundary, the characteristic concentration in reversed cyclic straining of slip into relatively widely spaced bands concentrates this strain in narrow regions. This fact coupled with the most significant feature of the deformation in fatigue of strain-hardening metals which distinguishes it from uni-directional straining, namely, the large total amount of permanent strain (added irrespective of sign) which the material absorbs before fracture, clearly shows that under conditions of fatigue the strain across the grain boundary cannot remain continuous but will instead be concentrated in regions of severe incompatibility. There is, moreover, hardly any doubt that the so-called "reversed slip" in or close to the original slip plane produced by reversed straining is not fully reversible, particularly at higher strain amplitudes; this non-reversibility of the slip motion induced by cyclic strain produces an accumulation of uni-directional displacements on the slip system activated by cyclic straining, and thus intensifies the strain incompatibilities at the grain boundary. At small strain amplitudes the uni-directional displacement produced by a single cycle is very small but accumulates during a very large number of cycles; at larger strain amplitudes the uni-directional displacement per cycle is larger, but the accumulation takes place in the course of a smaller number of cycles. Obviously, at small enough amplitudes the cyclic slip movement becomes practically reversible as a result of the gradual decrease and final stoppage of plastic strain due to strain hardening, as postulated in Orowan's theory [1, 2] and the accumulation of uni-directional displacement in individual slip bands comes to an end. At still lower strain amplitudes, the

elastic surrounding of the localized slip band forces the slip to be reversible from the start of the cycling. It is assumed that reversibility of the slip in the individual localized bands is the criterion of the safe range.

After a certain number of cycles, depending on strain amplitude, the uni-directional displacement accumulated on the slip bands interferes with the deformation by slip of the surrounding grains and leads to two forms of damage depending on the extent of slip concentration:

a) Under circumstances favorable for slip concentration (low strain amplitudes in Fcc metals, low temperature) the incompatibility of the accumulated uni-directional displacement concentrated in slip bands with the restrictions imposed by the surrounding grains results in damage within the slip bands. For grains located in the surface, the effects of this incompatibility can be relieved by the formation of surface extrusions and intrusions, which are the most easily visible appearance of the accumulated permanent displacements on the end of the slip bands.

In the widely accepted explanation, based on purely geometrical concepts, of the development of fatigue damage in the surface as a result of forward and backward movement of fine slip intersecting the surface and forming extrusions and intrusions on the surface [11], the intrusions being considered as incipient fatigue cracks, it seems to have remained unnoticed that the inverse of the configuration appearing on the surface should appear on the other end of the slip band, usually at the grain boundary.

Fig. 1 shows extrusions and intrusions on the surface end and on the grain boundary end of the slip bands in a taper-sectioned [12] 70/30 alpha brass specimen after 6×10^5 cycles of alternating torsion at 1750 cpm. All specimens had circular cross section $7/32$ in. ($-0,555$ cm) diameter with $1\frac{1}{4}$ in. ($-3,175$ cm) long cylindrical test portion. They were annealed to 0,1 mm grain-size and electropolished in orthophosphoric acid. A twist of 1° corresponds to a surface shear of 15×10^{-4} .

Fig. 2 represents an inside grain of the same specimen showing that the permanent deformation accumulated in the slip bands tends to develop configurations similar to those of "extrusions and intrusions" at the grain boundary. Because of the restrictions imposed on the development of uni-directional displacements at the end of the slip band by the neighbouring grain, damage occurs within the slip bands close to the grain boundary. The deformation of the specimen represents an intermediate condition between heavily concentrated and evenly distributed slip, and has been selected in order to illustrate that the damage occurs in the slip band because of the restriction imposed on the deformation by the surroundings. This effect is also present at smaller strain amplitudes and therefore more concentrated slip, where slip band damage occurs all across the grain. Since its appearance under such conditions is well-known, it does not need a special illustration. However, it should be mentioned

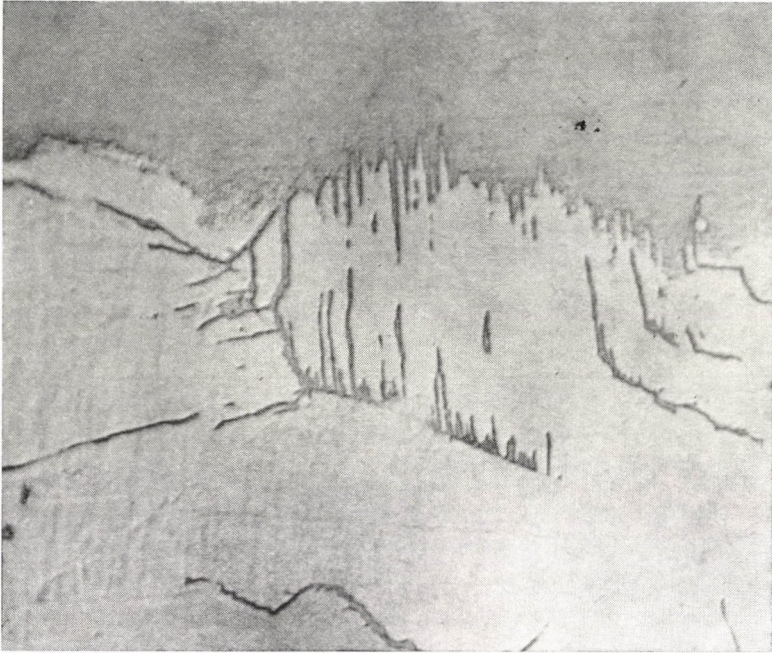


Fig. 1. Stiles and notches on the surface end and on the grain boundary end of slip bands (Amp. $\pm 3^\circ$; taper-sectioned brass specimen etched with ammonium persulfate; 1000 \times)



Fig. 2. Inside grain with slip band damage concentrated along the grain boundary (Amp. $\pm 3^\circ$; taper-sectioned brass specimen etched with ammonium persulfate; 1000 \times)

that after careful re-electropolishing of the surface of a long-life fatigue specimen showing slip band damage all across the grain, the most persistent portions of the slip bands are those close to the grain boundaries, as illustrated in Fig. 3 (failure at $6 \cdot 10^6$ cycles).

Fig. 4 shows the surface of a brass specimen which failed after $8,3 \times 10^5$ cycles under cyclic strain amplitudes that produce an intermediate condition between concentrated and evenly distributed slip. In grains where slip is

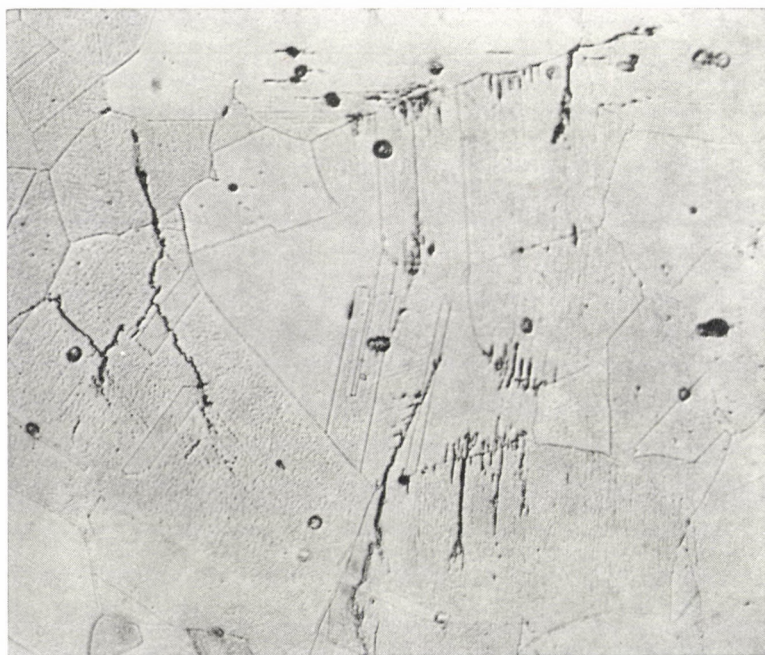


Fig. 3. Surface of fatigued brass specimen after electropolish, showing persistent slip bands at the grain boundaries (Amp. $\pm 2^\circ$; $500 \times$)

concentrated (arrows *A*), the grain boundary damage follows a zigzag path according to slip bands similar to that in Figs 1 and 2. However, along boundaries of grains with uniformly distributed slip the grain boundary damage follows a smooth path (arrow *B*). Fig. 4 shows the *a* and *b* type of incompatibilities referred to in the Introduction.

b) Under circumstances which do not favor slip band concentration (large amplitudes in Fcc metals or amplitudes that lead to fatigue failure in Bcc metals, high temperatures) the incompatibilities arising from different grain orientation and accumulated permanent displacements are not concentrated but evenly distributed; thus damage occurs where the restrictions are: along the grain boundaries. Relatively few papers have been published concerning grain boundary damage in fatigue. Grain boundary cracks have

been found in aluminium [13]; repeated electropolishing of the specimens showed that grain boundary cracks were deeper than slip band cracks. Extensive grain boundary damage has also been found in nickel and magnesium subject to alternating torsion producing failure in the 10^5 cycle range [14]. While it should be expected that grain-boundary damage will be most severe when the misorientation between crystals at the boundary is largest or least susceptible to relief, as in hexagonal crystals such as magnesium or zinc,



Fig. 4. Surface of fatigued brass specimen showing grain boundary damage with zigzag path at boundaries of grains with concentrated slip (arrows *A*) and smooth path at boundaries of grains with uniformly distributed slip (arrow *B*) (Amp. $\pm 3^\circ$; 500 \times)

this is not necessarily the case. That grain boundary cracks are extensive and severe in hexagonal metals has been shown in magnesium and zinc [12]; however, the grain-boundary damage observed in nickel [14] has been quite pronounced in spite of the fact that slip bands have been able to cross the grain boundaries. It seems that "restricted slip" concentrated along grain boundaries [12] is closely associated with grain boundary damage. At large strain amplitudes grain boundary damage has also been found in the form of "pores" [15] which, however, represent regions of atomic misfit rather than microscopic strain incompatibility.

Experiments carried out by the author on high purity copper in alternating torsion showed an extensive amount of grain boundary damage at the larger cyclic strain amplitudes at which slip does not concentrate. The surface

of the specimens showed extensive rumpling determined by the individual grains, thus illustrating the deformation of individual grains with only partial restrictions from the neighbouring grains. The differently oriented hills and valleys that develop from the initially flat surface of the individual grains is an indication of the permanent deformation that accumulates during cycling. The grain-sized hills and valleys on the surface in the case of evenly distributed slip are the equivalent of the extrusions and intrusions characteristic for



Fig. 5. Surface rumpling on a fatigued copper specimen built up by distortions of the individual grains (Amp. $\pm 3^\circ$; $200\times$)

concentrated slip. The restriction of the deformation that occurs on the surface as rumpling is believed to cause grain boundary damage in inside grains.

Fig. 5 shows the surface of an O. F. H. C. copper specimen which failed after $1,7 \times 10^5$ cycles. It can be seen that the surface rumpling is built up by distortions of the individual grains, and is determined by grain and twin boundaries.

Fig. 6a shows the surface of the same specimen; sharp hills and valleys are developed at twin boundaries. Fig. 6b shows damage at twin and grain boundaries. In specimens of longer lives the rumpling of the surface is somewhat decreased but still significant. Fig. 7 represents the surface of a specimen which failed after 10^6 cycles.

After fatigue cycling the surface of the specimens has been electro-polished in order to make the persistent damage visible. Fig. 8 shows the sur-



Fig. 6. (a) Rumpled surface of copper specimen showing sharp hills and valleys at twin boundaries (Amp. $\pm 3^\circ$; 200 \times); (b) Rumpled surface of copper specimen, with sharp hills and valleys at twin boundaries showing damage at twin and grain boundaries. (Amp. $\pm 3^\circ$; 500 \times)

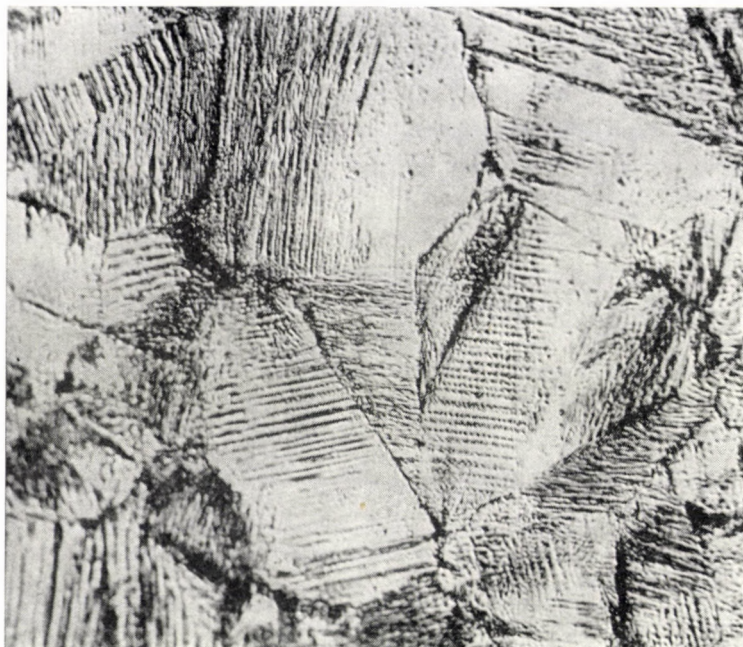


Fig. 7. Rumpling of the surface of a copper specimen at smaller strain amplitude (Amp. $\pm 2^\circ$; 500 \times)



Fig. 8. Surface of copper specimen after fatigue and electropolish showing twin boundary and grain boundary damage (Amp. $\pm 3^\circ$; 500 \times)

face of a specimen of fatigue life of $1,5 \times 10^5$ cycles after removal by electropolishing of a 5 micron deep surface layer. The surface is still rumpled and shows grain boundary and twin boundary damage. Fig. 9 shows extensive grain boundary damage in the same specimen after removal by electropolishing of a 20 micron deep surface layer. In specimens of fatigue lives of 10^6 cycles the damage is similar to that shown in Figs. 8 and 9; the grain boundary damage is somewhat less extensive and slip band damage can be observed to start. Fig. 10 shows grain boundary, twin boundary and slip band damage

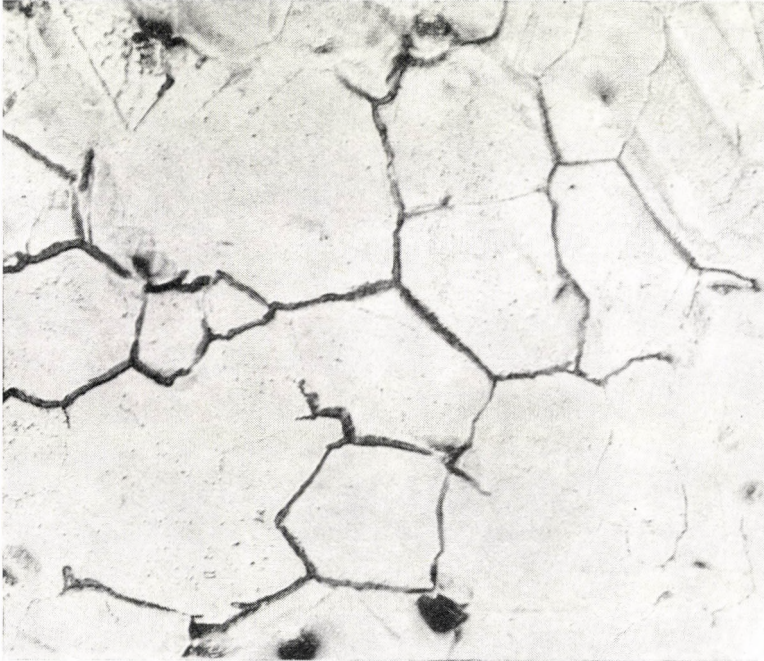


Fig. 9. Surface of copper specimen after fatigue and further electropolish, showing extensive grain boundary damage (Amp. $\pm 3^\circ$; $200 \times$)

on the surface of a specimen which failed at 9×10^5 cycles after the removal of a 7,5 micron deep layer by electropolishing. Fig. 11 shows grain boundary damage on the same specimen. Specimens with a life of 10^7 cycles still show a small amount of grain boundary damage, but usually only on one side of the grain.

It is worth noting that grain boundary incompatibility increases with increasing grain size and increasing length of slip movements. As grain boundary incompatibility is considered a major contribution to fatigue damage, the effect of grain size on fatigue life might require a more elaborate study than the few investigations reported in the past.

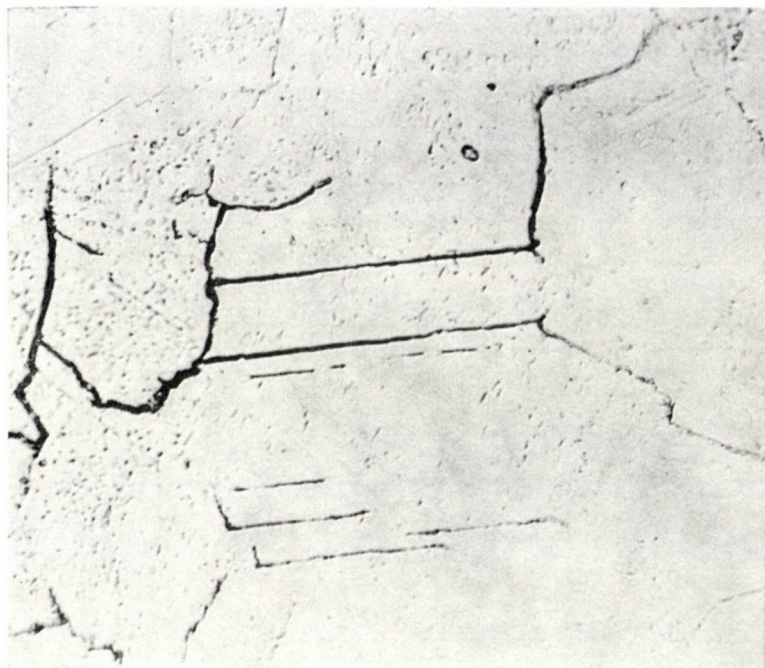


Fig. 10. Grain boundary, twin boundary and slip band damage on the surface of fatigued and electropolished copper specimen, fatigued with smaller strain amplitude (Amp. $\pm 2^\circ$; $500\times$)

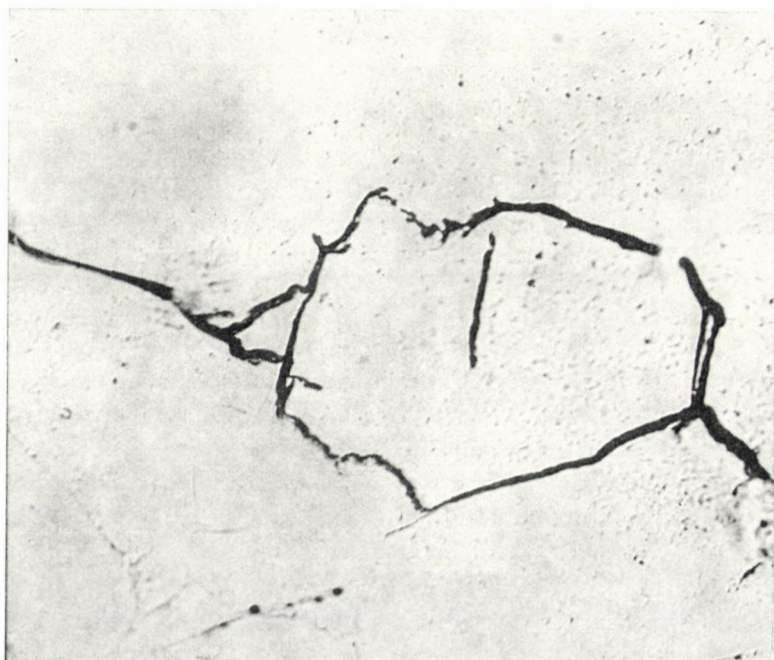


Fig. 11. Grain boundary damage on the surface of fatigued and electropolished copper specimen (Amp. $\pm 2^\circ$; $500\times$)

IV. Incompatibility between Slip Bands and Non-Deforming Neighbourhood

The characteristic concentration of slip into bands under conditions of low amplitude fatigue introduces another kind of incompatibility, namely that between the slip bands and the non-deforming parts between them. This type of incompatibility is shown in Fig. 12 where heavy damage occurs at the side of the deforming part adjacent to the non-deforming part of the

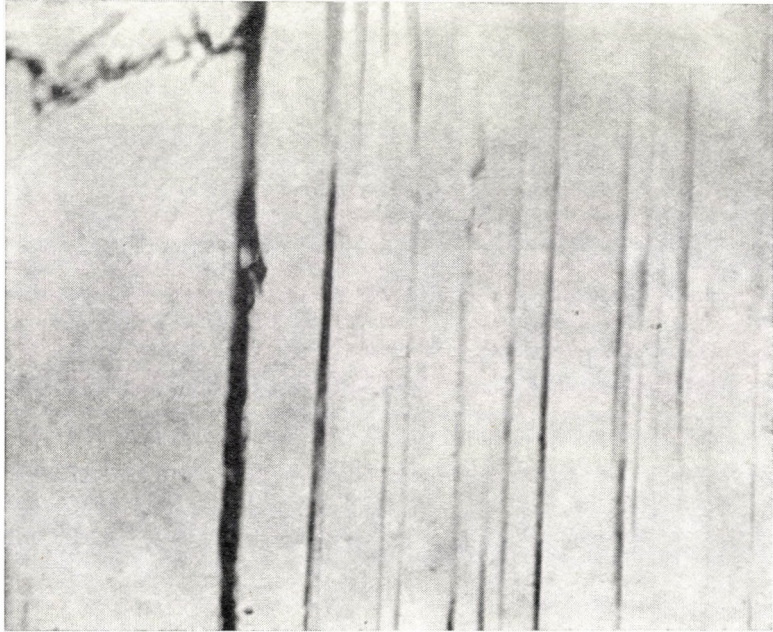


Fig. 12. Damage between deforming and non-deforming zones of the same grain (Amp. $\pm 2^\circ$; taper-sectioned brass specimen etched with ammonium persulfate; $1500\times$)

same grain (taper-sectioned brass specimen, failure at 6×10^6 cycles). It can be partly relieved by subgrain formation in the "non-deforming region" between two slip bands and in such cases less damage is produced in the slip bands. The subgrain formation between slip bands is represented in Fig. 13 which shows the surface of a superpurity aluminum specimen that failed after 3×10^5 cycles in alternating torsion. Subgrain formation as a relief mechanism of textural stresses caused by incompatibilities is discussed in the following Section.

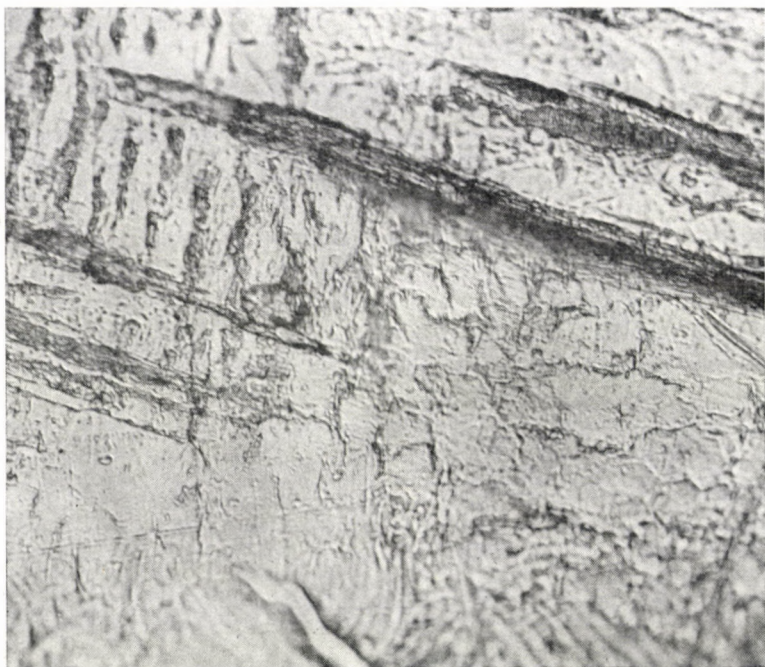


Fig. 13. Subgrain formation between slip bands on the surface of electropolished and fatigued aluminum specimen (Amp. $\pm 1^\circ$; electropolished in 1 : 5 perchloric acid and methanol; 750 \times)

V. Substructure Formation and Incompatibility Cracking

In the early studies of the inhomogeneity of the plastic deformation in uniaxial straining of a polycrystalline aggregate [6] the conclusion seemed already inescapable that because of the wide differences in strain between individual grains and the inhomogeneity of the deformation within each grain polyslip alone could not provide the mechanism by which continuity of strain across grain boundaries could be enforced without excessive elastic distortion, and that the existence of another, at that time unspecified, mechanism would have to be assumed for this purpose. It only seemed clear that the stress activating this mechanism must be lower than that initiating slip on the less favorably oriented of the five slip systems.

Electron-microscope and X-ray studies of various metals have since shown that this mechanism is related to sub-grain formation. The intensification of the inhomogeneity of the plastic deformation by reversed cyclic straining, which further reduces the effectiveness of polyslip to relieve, or at least reduce the grain-boundary incompatibilities characteristic of this type of straining, necessarily increases the participation of the subgrain formation mechanism in the total plastic deformation.

Subgrain formation thus acts, at least over a significant initial range of cyclic straining, as a relief mechanism, reducing the severity of the strain incompatibilities that have arisen along the grain boundaries and dissipating part of the elastic distortion energy latently stored around them. It has been conclusively demonstrated that the development of subgrain structure is a significant feature in both constant stress fatigue of aluminum at high stress cycles [16] and constant strain fatigue of iron at large strain cycles [17] and aluminum over a wide range of reversed strain cycles [17, 18] and that subgrain formation and fatigue cracking are inseparably related in those metals.

It might, however, be important to consider the fact that the significance of the process with respect to fatigue damage changes in the course of fatigue cycling. The formation of subgrains undoubtedly starts as a relief mechanism of the strain incompatibilities at the grain boundaries, a view that is supported by the fact that the rate of their formation is proportional to the cyclic strain [18], and that the misorientation between subgrains increases considerably in the course of cycling, attaining angles as large as $1,5^\circ$ in super-pure aluminum and 13° in commercially pure aluminum [17, 18]. It might not be unreasonable to assume that this misorientation is proportional to the severity of the strain incompatibilities along the grain boundaries which the subgrain formation is attempting to relieve. Obviously, maximum relief requires a maximum ratio of sub-boundary area to volume of the subgrains and thus a minimum subgrain dimension still consistent with thermodynamic stability of the structure; the observation that during cycling of annealed metals the average subgrain volume decreases towards a stable limit [18] characteristic of the metal confirms this view.

However, once the minimum subgrain size and the maximum misorientation consistent with continuity is attained, the relief mechanism is exhausted. Further increase of misorientation along subgrain boundaries is incompatible with continuity of the strain on both sides of the boundary and further cycling is therefore increasing the incompatibility between the subgrains. At the surface the incompatibility between subgrains can be relieved by surface rumpling. Fig. 14a is a photomicrograph about the surface of a superpurity aluminum specimen that failed after 4×10^4 cycles of alternating torsion. Fig. 14b is an electronmicrograph about the same surface. The sample was replicated with Faxfilm shadowed with 80–20 Pt–Pd (45°) and then with carbon (90°). Both pictures show that the surface is rumpled according to the subgrains in a similar way as the surface of copper specimen has been shown to be rumpled according to the grains (Figs 5–7). In the inside grains the incompatibility cannot be relieved by rumpling; hence further cycling is accompanied by micro-cracking in the subgrain boundaries, which had become new regions of severe strain incompatibility. Their number is obviously much larger than that of the grain boundary incompatibilities which they have

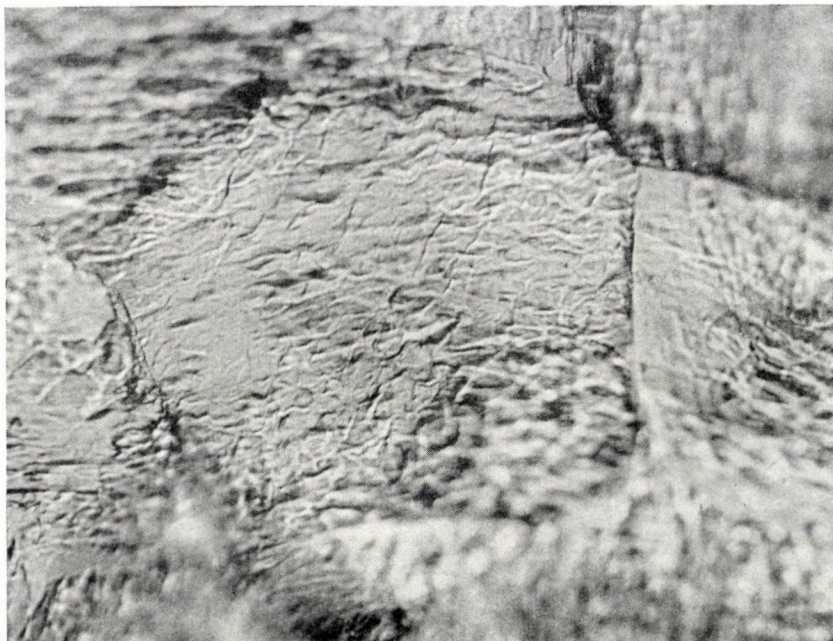


Fig. 14a. Subgrain rumpling on the surface of electropolished and fatigued aluminum specimen (Amp. $\pm 2^\circ$; electropolished in 1 : 5 perchloric acid and methanol; 500 \times)

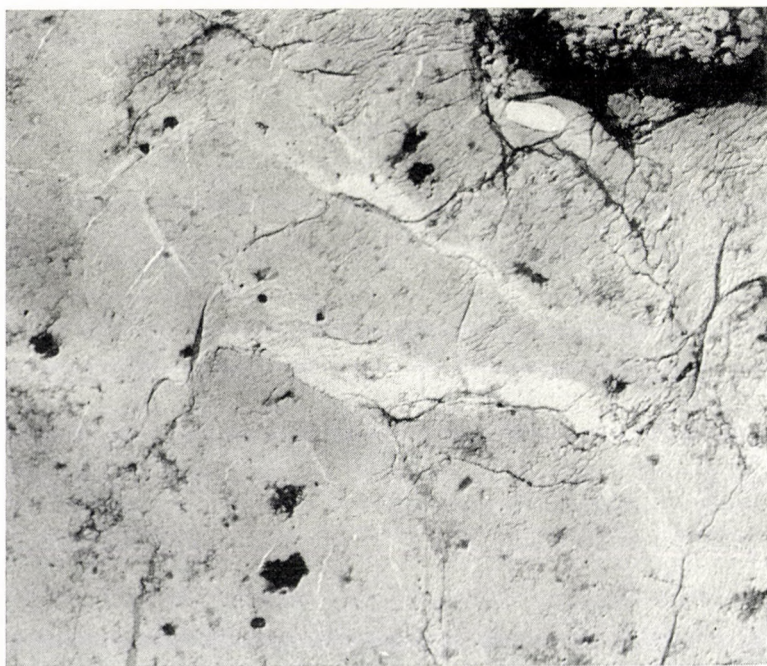


Fig. 14b. Subgrain rumpling on the surface of electropolished and fatigued aluminum specimen (Amp. $\pm 2^\circ$; electropolished in 1 : 5 perchloric acid and methanol. Electron micrograph; 4500 \times)

partly relieved (if they were completely relieved no further misorientation of subgrains would be necessary), which explains their importance in the propagation of the final fatigue crack [17, 19]. Since the extent of subgrain formation might well depend on the severity of the strain incompatibilities built up along the grain boundaries in the earlier stages of strain-cycling, it would therefore appear to have the character of a secondary phenomenon with respect to the initiation of fatigue damage, although it is a primary feature of the mechanism of micro-crack formation and crack propagation. This fact is responsible for the importance that is sometimes attributed to phenomena which facilitate subgrain formation, such as cross-slip, as primary causes of fatigue damage, while they are in fact only contributing features.

The importance of distinguishing between primary and secondary features of the fatigue process is of more than theoretical significance. The production of metals of superior fatigue performance would seem to require the suppression of the primary causes of fatigue rather than the alleviation of secondary or contributing features.

VI. Conclusions

The following conclusions can be reached on the basis of the joint consideration of the inhomogeneity of the deformation, the appearance of strain incompatibilities and the formation of subgrain structure in the course of repeated reversed straining (fatigue cycling) of a polycrystalline metal:

a) The inhomogeneity of the deformation of a polycrystalline aggregate due to different lattice orientation is magnified by reversed cyclic straining, mainly as a result of limited number of operating systems, the characteristic concentration of slip under reversed straining of moderate amplitudes and the accumulation of permanent deformation due to imperfect reversibility of slip.

b) The magnification of the inhomogeneity of the deformation results in the formation of concentrated regions of strain incompatibility along the grain boundaries. The severity of these incompatibility regions increases with decreasing number of operating slip systems, increasing strain amplitude and increasing grain size.

c) The high energy of elastic distortion concentrated in the regions of strain incompatibility can be relieved by subgrain-structure formation. However, the increasing misorientation of the subgrains in the course of cycling creates new incompatibility centers, the severity of which may be lower, the number of which, however, is much larger than that of the grain-boundary regions. Hence subgrain formation, after a period of operation as a relief mechanism, appears to introduce a new severe mechanism of micro-cracking.

ACKNOWLEDGEMENT

The author gratefully acknowledges the encouragement of and valuable discussions with W. A. WOOD, Visiting Professor, and A. M. FREUDENTHAL, Technical Director of the Institute for the Study of Fatigue and Reliability, Columbia University.

REFERENCES

1. OROWAN, E.: *Proc. Roy. Soc. A* **171** (1939), 79.
2. Reports on Progress in Physics, 1949; 12, 221.
3. Symposium on Internal Stresses in Metals and Alloys, London 1947. Institute of Metals, London 1948; 51.
4. FREUDENTHAL, A. M.: Proc. Symp. on Internal Stresses and Fatigue in Metals, Detroit 1958. Elsevier, Amsterdam 1959; 429.
5. LÁSZLÓ, F.: *J. Iron Steel Inst.* **150** (1944), 183.
6. BOAS, W.—HARGREAVES, M. E.: *Proc. Royal Soc. A.* **193** (1948), 89.
7. TAYLOR, G. I.: *J. Inst. Metals* **62** (1938), 307.
8. BARRETT, C. S.:—LEVENSON, L. H.: *Trans. AIME* **137** (1940), 112.
9. KOCKS, U. F.: *Acta Met.* **6** (1958), 85.
10. ELBAUM, C.: Proc. Second Symp. Naval Struct. Mechanics; Brown University, Providence 1960. Pergamon Press, London 1960; 107.
11. FORSYTH, P. J. E.: *J. Inst. Metals* **82** (1953), 449.
12. WOOD, W. A.: Fatigue in Aircraft Structures (*Proc. Conf. Columbia University, New York* 1956). Academic Press, New York 1956, 1.
13. SMITH, G. C.: *Proc. Roy. Soc. A* **242** (1957), 189.
14. DUCE, A. G.: Ph. D. Dissertation, Cambridge 1951. (See A. F. BROWN: *Phil. Mag. Suppl.* **1** (1952); Plate xxii, Figs 58—69.
15. WOOD, W. A.: *Acta Met.* **11** (1963), 643.
16. SEGALL, R. L.—PARTRIDGE, P. G.: *Phil. Mag.* **4** (1959), 912.
17. HOLDEN, J.: *Phil. Mag.* **6** (1961), 547.
18. GROSSKREUTZ, J. C.: *J. Appl. Phys.* **34** (1963), 372.
19. *J. Appl. Phys.* **33** (1962), 1787.

ÜBER DIE UNVERTRÄGLICHKEIT DER DEFORMATIONEN UND DIE SCHÄDIGUNG DER KORNGRENZEN BEI ERMÜDUNG

M. RÓRAY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Unverträglichkeit zwischen dem aufgezwungenen makroskopischen Deformationsfeld einerseits, und der Deformation der inhomogenen anisotropischen polykristallinen Vielheit und der Verformung ihrer einzelnen Mitglieder andererseits ist am stärksten bei Ermüdung. Der Grund hierfür ist hauptsächlich die sehr kleine Zahl von funktionierenden Gleitsystemen in den einzelnen Körnern, die charakteristische Konzentration von Gleitsystemen in Bänder bei zyklischer Deformation von mäßiger Amplitude und die Anhäufung der permanenten Deformation wegen der unvollkommenen Umkehrbarkeit des Gleitens. Infolge von Unverträglichkeiten der Deformation, welche die von benachbarten Körnern oder von nichtdeformierenden Teilen desselben Korn hervorgegerufenen Beschränkungen verursachen, treten Schäden in den Bändern, an den Korngrenzen und an den Unterkorngrenzen auf. Die Unverträglichkeiten der Deformationen finden einen Auslaß an der Oberfläche in der Form von Beulen, Einbeulungen, Kornfaltenbildung und Unterkornfaltenbildung. Die Ausführungen werden durch fotomikrografische Studien an Reinstkupfer, Reinstaluminium und 70/30 Alpha-Messing unter zyklischer Torsion bei konstanter Deformationsamplitude illustriert.

INCOMPATIBILITÉ DES DÉFORMATIONS ET DOMMAGES
AUX JOINTS DES GRAINS À LA FATIGUE

M. RÓNAY

RÉSUMÉ

Le champ de déformations macroscopique imposé à la matière, présente avec les déformations de la multitude polycristalline inhomogène et anisotrope d'une part, et avec les déformations des membres individuels de la multitude d'autre part, une incompatibilité qui semble arriver à son plus haut degré en cas de fatigue. La cause en est à chercher surtout dans le petit nombre des systèmes de glissement fonctionnant dans les grains individuels, dans la concentration caractéristique en bandes des glissements sous l'action de déformations cycliques d'amplitude modérée, enfin dans l'accumulation des déformations permanentes due à la réversibilité imparfaite du glissement. Par suite des incompatibilités de déformation dues aux restrictions imposées par les grains environnants ou aux parties sans déformation du même grain, des dommages se produisent dans les bandes de glissement, dans les joints des grains et des sous-grains. Les incompatibilités de déformation se traduisent à la surface par les renflements, intrusions et bourrelets des grains et sous-grains. Ces vues de l'auteur sont illustrées par des essais photo-micrographiques faits sur du cuivre et de l'aluminium de très haute pureté et du laiton alpha de 70/30, soumis à des cycles de torsion à amplitude de déformation constante.

ДЕФОРМАЦИОННАЯ НЕСОВМЕСТИМОСТЬ И ПОВРЕЖДЕНИЕ ГРАНИЦ
ЗЕРЕН ПРИ УСТАЛОСТИ

M. RONAY

РЕЗЮМЕ

Несовместимость принудительно приданного макроскопического деформационного пространства с неомогенным анизотропным поликристаллиным множеством, а также первого с деформацией индивидуумов множества можно считать наибольшей в случае усталости. Причинами этого в основном являются небольшое число систем скольжения, действующих в зернах, концентрация скольжений в полосах при переменной нагрузке со средней амплитудой, а также накопление постоянной деформации из-за несовершенной обратимости скольжения. Из-за несовместимостей деформации, — которые вызваны окружающими зернами или недеформирующимися частями этих же зерен, — может произойти повреждение в полосах скольжения, на границах зерен и частичных границах зерен. Несовместимости деформации на поверхности уравниваются в форме выступов, впадин, складчатости зерен и складчатости частичного зерна. Эти соображения иллюстрируются фотомикрографическими опытами, проведенными на образцах из очень чистой меди, алюминия и α -латуни 70/30 при помощи циклов с постоянной амплитудой кручения.

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL MEDIA

J. H. ARGYRIS

DEPARTMENT OF AERONAUTICAL STRUCTURES, IMPERIAL COLLEGE LONDON and
INSTITUTE FOR STATICS AND DYNAMICS OF AIRCRAFT AND SPACECRAFT
TECHNICAL UNIVERSITY, STUTTGART

[Manuscript received November 5, 1965]

The paper develops a procedure exclusively based on the use and philosophy of digital computers for the analysis of three-dimensional continua with arbitrary elasto-plastic behaviour. Essentially the theory evolves from the matrix displacement method of the author, in which the continuum is represented by a finite assembly of elements with the prescribed simplified kinematic behaviour. Thus, in general, for three-dimensional media the most commonly adopted element is the tetrahedron of constant or linear variation of strain [2, 3]; the corresponding element in two-dimensions is the triangle again of constant or linear strain [6, 7]. The plastic strains as function of stresses may be derived from any analytical or experimental constitutive equations. Here the procedure is illustrated on the basis of the Prandtl-Reuss (incremental) equations in conjunction with the von Mises yield criterion and the concept of equivalent stress and strain. The plastic strains may be considered as a particular form of initial strains [5] and their effect represented by the so-called initial load vector [1-3]. Since the plastic strains are initially unknown the author proposes two step by step procedures on the computer. The first is a direct one and relies on suitably small incremental loading or displacement steps and effectively introduces at each step the preceding incremental plastic strain. The second, a more accurate one, uses for each step a sequence of iterations leading to a convergent solution which processes also the current plastic strain. Two examples, both two-dimensional, illustrate the application of the technique on plates with internal holes.

I. Introduction

Though the basic principles and equations of the matrix theory of structures are essentially concerned with linear systems, non-linear systems may easily be brought within their scope by representing the non-linear relations as a series of linear steps. Many problems have already been treated successfully in this way. The particular type of non-linear relation with which we will concern ourselves in this paper is that for the stress-strain properties of the material. In the most general case, this relation may not be simply non-linear, but also dependent on time and the stress-strain history. At present, the state of knowledge in this field is neither as certain nor as comprehensive as could be desired. It is open to argument whether completely general constitutive equations can be formed to cover all cases, or even whether this is desirable. But in practice, analyses which are made are usually concerned with fairly distinct phenomenological descriptions of the material properties such as plasticity, creep and viscoelasticity. In their introduction into the matrix displacement theory, however, all these share the common property that they can be described in terms of incremental strain/stress laws with time, temper-

ature and direction of strain in relationship to previous history as further parameters. Given these data, either in functional or tabular form, the principles of solution by the matrix displacement method are the same for all types of behaviour. We restrict ourselves in what follows to strain hardening, elastoplastic materials and to fix ideas, assuming the Prandtl—Reuss equations and the von Mises yield criterion for calculation of the stress/strain relations in the plastic regime. The presentation is equally applicable to large displacements and strains, provided the experimental data are available.

For the step-by-step calculations, two distinct incremental techniques are possible. Thus, we may calculate an effective tangent modulus, which describes directly the incremental stress/strain relation, allowing for plasticity and distinguishing between increase of plastic strain and unloading. From this, the tangent stiffnesses are computed and hence the incremental displacements for the linear step. The alternative method is always to operate with the elastic stiffness and to represent the plasticity effects as initial loads. This latter method appears, at present, to have some computational advantages when local unloading may occur and is the one discussed in the following sections.

For a three-dimensional continuum, tetrahedral elements are the most generally usable, since they can be fitted to arbitrary boundaries and changed in size throughout the body, so as to give a more detailed representation in regions of particular importance. These may be of the constant stress type [2, 3] or be permitted linear variation of stress and strain [5—10]. Tetrahedral elements have the further advantage that large displacements may also be allowed for simply by incorporating the geometrical stiffness [2, 3]. In two dimensions, the corresponding element is the triangle.

II. General Incremental Stress/Strain Law

Whatever the nature of the deformational characteristics of a three-dimensional continuum, we may define an incremental stress/strain law in the form

$$\gamma_{\Delta} = \eta_{\Delta} + \varepsilon_{\Delta} = \eta_{\theta\Delta} + \eta_{e\Delta} + \eta_{c\Delta} + \varepsilon_{\Delta} = \eta_{\theta\Delta} + \eta_{e\Delta} + \eta_{c\Delta} + \mathbf{E}^{-1}\sigma_{\Delta}, \quad (1)$$

where all lower case symbols are (6×1) vectors or column matrices. Their components or elements may be measured in any coordinate system, e.g., as the natural strains introduced in Refs [1—3]. The specific meaning of the vector symbols in Equ. (1) is

γ_{Δ}	incremental total strain;
ε_{Δ}	incremental elastic strain;
$\eta_{\theta\Delta}$	incremental thermal strain;
$\eta_{p\Delta}$	incremental plastic strain;
$\eta_{c\Delta}$	incremental creep strain;
σ_{Δ}	incremental stress.

\mathbf{E} is the generalised (6×6) elasticity modulus as given in Refs [2, 3] and need not be constant, i.e., non-linear elasticity is allowed for, but requires careful definition, especially in the unloading stage, since it is, in general, a function of the preceding loading history. \mathbf{E} may, moreover, vary with temperature. Fig. 1 illustrates typical stress/strain diagrams in the presence of temperature and its effect on the elastic limit and proof stress. Anisotropy of the material is easily included in our theory, as is inhomogeneity, as long as each element is taken to be homogeneous. However, we assume in our present discussion that the material is isotropic.

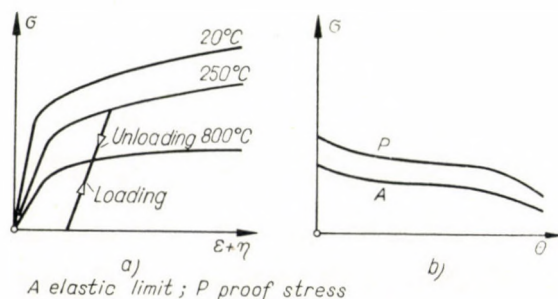


Fig. 1. Characteristic stress-strain-temperature diagrams

Assuming for simplicity sake a cartesian system of axes, we write the incremental strain and stress vectors in the form

$$\gamma_A = \left\{ \gamma_{xx} \quad \gamma_{yy} \quad \gamma_{zz} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{xy} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{yz} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{zx} \right\}_A, \quad (2)$$

$$\sigma_A = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sqrt{2} \sigma_{xy} \quad \sqrt{2} \sigma_{yz} \quad \sqrt{2} \sigma_{zx} \}_A. \quad (3)$$

Expressions analogous to γ_A may be given for η_A , $\eta_{\theta A}$, η_{pA} . The generalised Young's Modulus \mathbf{E} for a three-dimensional isotropic body is then most conveniently put in the form

$$\mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{2G} \mu_e^{-1} = \frac{1}{2G} \left[\mathbf{I}_6 - \frac{\nu}{1+\nu} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \right] \quad (4)$$

or

$$\mathbf{E} = 2G \mu_e = 2G \left[\mathbf{I}_6 + \frac{\nu}{1-2\nu} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \right]. \quad (4a)$$

Here G is the shear modulus, ν Poisson's ratio, and \mathbf{E}_3 a (3×3) matrix, fully populated with 'ones'. Before proceeding to the plastic strains we must first consider the yield criterion.

III. Yield Criterion

When operating with the digital computer, it is, in principle, possible to allow for any yield condition in association with strain hardening. The law need not be given as an analytical expression, but can be fed into the machine in tabular form. We base our consideration here on the von Mises criterion. This is founded on the so-called equivalent stresses $\bar{\sigma}$ and strains $\bar{\gamma}$ ($\bar{\eta}$ or $\bar{\epsilon}$) which, for the present purposes, are best written as*

$$\bar{\sigma} = \left[\boldsymbol{\sigma}_d^t \boldsymbol{\sigma}_d - \boldsymbol{\sigma}_d^t + \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_s^t \boldsymbol{\sigma}_s \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{3} \left[\boldsymbol{\gamma}_d^t \boldsymbol{\gamma}_d - \boldsymbol{\gamma}_d^t + \frac{3}{2} \boldsymbol{\gamma}_s^t \boldsymbol{\gamma}_s \right]^{1/2}; \quad (6)$$

where $\boldsymbol{\sigma}_d$ and $\boldsymbol{\sigma}_s$ ($\boldsymbol{\gamma}_d$ and $\boldsymbol{\gamma}_s$) are the two (3×1) submatrices of the total stress (strain) vector corresponding to the direct and shear components, respectively. For example,

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \boldsymbol{\sigma}_d \ \boldsymbol{\sigma}_s \} = \{ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sqrt{2} \sigma_{xq} \ \sqrt{2} \sigma_{yz} \ \sqrt{2} \sigma_{zx} \}. \quad (7)$$

Hence

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \{ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \}, \quad \boldsymbol{\sigma}_s = \{ \sqrt{2} \sigma_{xx} \ \sqrt{2} \sigma_{yx} \ \sqrt{2} \sigma_{zx} \}. \quad (7a)$$

Similarly

$$\boldsymbol{\gamma}_d = \{ \gamma_{xx} \ \gamma_{yy} \ \gamma_{zz} \}, \quad \boldsymbol{\gamma}_s = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{xy} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{yx} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{zx} \right\}. \quad (8)$$

The subscript “-” indicates a single regression of the elements of a vector. Thus,

$$\boldsymbol{\sigma}_{d-} = \{ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xx} \}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{d-} = \{ \gamma_{yy} \ \gamma_{zz} \ \gamma_{xx} \}. \quad (9)$$

The formulation (5) and (6) for the yield criteria is very suitable for operations on a digital computer in conjunction with a matrix interpretative scheme.

If $\bar{\sigma}$ at the current loading step is found to exceed the critical value, which may include the effect of work hardening due to previous plastic strain, additional plastic deformation will take place. We may also include the effect of a temperature increment Θ_A in the yield criterion by re-writing Equ. (5) in the form

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_d^t \boldsymbol{\sigma}_d - \boldsymbol{\sigma}_d^t + \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_s^t \boldsymbol{\sigma}_s \right]^{1/2} = \bar{\sigma}_0 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Theta} \frac{\Theta_A}{2}. \quad (5a)$$

* These formulae may also be expressed concisely in terms of natural stresses or strains.

Given the necessary experimental data, the application of Equ. (5a) proves to be straightforward. Fig. 2 shows some typical $\bar{\sigma}$ versus $\varepsilon_{\Delta} + \bar{\eta}_p$ curves, and the corresponding diagrams for ideal plastic behaviour.

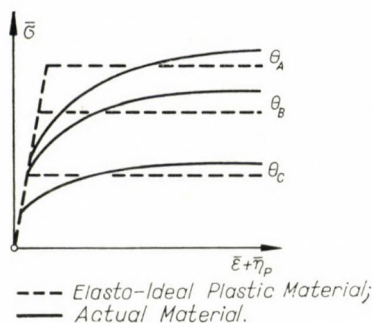


Fig. 2. Characteristic equivalent stress-equivalent strain diagram for different temperatures

IV. Plastic and Thermal Strains

Following the basic philosophy of HILL's classical work [4] on a mathematically consistent theory of work hardening, we may reformulate the Prandtl—Reuss stress/strain equations in conjunction with the von Mises criterion in a suitable matrix form. (As stated previously, we could operate equally well with any other more general constitutive equation.) For an isotropic and plastically incompressible body we find for the incremental non-elastic straining vector η_{Δ} , whose elements are ordered as in Equ. (2), the simple matrix expression

$$\eta_{\Delta} = \beta_{\Delta} \mu_p \sigma + \eta_{\theta \Delta} \mathbf{e}, \quad (10)$$

where σ is the *total* stress vector of Equ. (7), $\eta_{\theta \Delta}$ the thermal strain increment and

$$\mu_p = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 \end{array} \right] - \frac{1}{3} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \end{array} \right], \quad (11)$$

$$\mathbf{e} = \{ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \} \quad (12)$$

β_{Δ} is a non-constant scalar, which depends on the plastic and thermal straining history and hence may vary from point to point. Substitution of Equ. (11) into the yield criterion specified by $\bar{\eta}_{\Delta}$ leads to HILL's results,

$$\beta_{\Delta} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\eta}_{p \Delta}}{\bar{\sigma}}, \quad (13)$$

$\bar{\eta}_{p\Delta}$ is the equivalent plastic strain derived from an expression of the type (6) with $\eta_{p\Delta}$ in place of γ .

Let us now assume that we have the diagrams or tabular data of the $\bar{\sigma}$ versus $\bar{\eta}_p$ relations for various temperatures suitably stored in the computer; whence corresponding information may be construed for the $\bar{\eta}_p$ versus Θ relations for various stresses $\bar{\sigma}$ (see, for example, Figs 3a, 3b). To the first approximation, we obtain

$$\bar{\eta}_{p\Delta} = \frac{\partial \bar{\eta}_p}{\partial \bar{\sigma}} \delta \bar{\sigma} + \frac{\partial \bar{\eta}_p}{\partial \Theta} \delta \Theta = \frac{1}{\zeta} \bar{\sigma}_\Delta + \varphi \Theta_\Delta, \quad (14)$$

where

$$\zeta = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\eta}_p}, \quad \varphi = \frac{\partial \bar{\eta}_p}{\partial \Theta} \quad (15)$$

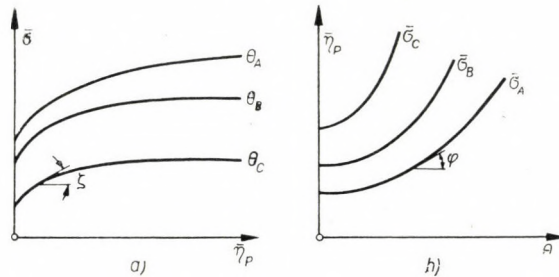


Fig. 3. Characteristic equivalent stress-equivalent plastic strain diagrams for different temperatures (a), characteristic equivalent plastic strain-temperature diagrams for different equivalent stresses (b)

are the slopes of the diagrams in Fig. 3 and $\bar{\sigma}_\Delta$, Θ_Δ are the incremental changes in $\bar{\sigma}$ and Θ ; note that $\bar{\sigma}_\Delta$ is evaluated from an expression of the type (5) with σ_Δ in place of σ . Substitution of Equ. (14) into (13) yields

$$\beta_\Delta = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\zeta} \bar{\sigma}_\Delta + \varphi \Theta_\Delta \right) \frac{1}{\bar{\sigma}}. \quad (16)$$

It is evident that for a plastically isotropic material the $\bar{\sigma}$ versus $\bar{\eta}_p$ information required to obtain ζ and φ , may be deduced from uniaxial test $\sigma_1 - \gamma_1$ for a sequence of temperatures Θ ; see Fig. 3. In fact, for such a loading we immediately confirm that

$$\bar{\sigma} = \sigma, \quad \bar{\eta}_p = \eta_p = \gamma - \varepsilon = \gamma - \frac{\sigma}{E}. \quad (17)$$

To illustrate the application of this procedure to the calculation of ζ , let us assume that the uniaxial strain η_p is given by a modified Ramberg—Osgood

expression of the type

$$\eta_p = \frac{1 \cdot 1 \sigma_l}{mE} \left[\left(\frac{\sigma}{1 \cdot 1 \sigma_l} \right)^m - \left(\frac{1}{1 \cdot 1} \right)^m \right], \quad (18)$$

where σ_l is the elastic limit and m a constant. Using Eqs (17), (18) in the first of Eq. (15) we find

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{E} \left(\frac{\bar{\sigma}}{1 \cdot 1 \sigma_l} \right)^{m-1}. \quad (15a)$$

V. Method of Solution of the Elasto-Plastic Problem

To understand the basic philosophy of our technique, we first assume that the initial strain vectors η of all constituent elements are known, irrespective of their origin. Then the problem may be solved directly by applying the idea of initial loads. From Ref. [11] we have

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_E \mathbf{r} + \mathbf{a}^t \mathbf{J} \quad (19)$$

where \mathbf{R} and \mathbf{r} are the external load and displacement vectors at the nodal points. \mathbf{K}_E is the elastic stiffness and \mathbf{J} the elastic loads arising at the nodal points, if all initial strains are suppressed; \mathbf{a} is a Boolean or location matrix. If the effect of large displacements is being included, we must substitute the total stiffness $\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G$ for \mathbf{K}_E in Equ. (19). Refs [2, 3, 12] show in detail how the \mathbf{K}_E , \mathbf{K}_G and \mathbf{J} may be set up for anisotropic, constant stress triangular and tetrahedron elements where the initial vector η is permitted to be arbitrary. \mathbf{K}_E and \mathbf{J} for tetrahedral and triangular membrane elements with linear varying strain are established in Ref. [6], for triangular plate bending elements in Ref. [8]. For example, for a typical constant strain tetrahedron element subject to a uniform thermal strain $\eta = \alpha \theta$, the (12×1) vector \mathbf{J} of the x, y, z components of the initial loads is simply

$$\mathbf{J} = -\eta \mathbf{k} \psi, \quad (20)$$

where \mathbf{k} is the (12×12) cartesian stiffness of the element and ψ the (12×1) vector

$$\psi = \{\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4\} \quad (21)$$

in which

$$\psi_i = \{x_i \ y_i \ z_i\}.$$

In practice, plastic and creep strains are not known in advance. Solution of the problem is then necessarily incremental (either direct or preferable iterative). We start by establishing in our load cycle (see Fig. 4) the load \mathbf{R}_d

and temperature Θ_{Δ} for which the elastic limit A is just reached at some point within the structure. The subsequent loading is then represented by a sequence of steps \mathbf{R}_{Δ} and Θ_{Δ} as indicated in Fig. 4. For each increment we apply the linearised equation

$$\mathbf{R}_{\Delta} = \mathbf{K}_E \mathbf{r}_{\Delta} + \mathbf{a}^t \mathbf{J}_{\Delta}. \quad (22)$$

There remains the vital problem of establishing the \mathbf{J}_{Δ} associated with the initially unknown strain η_{Δ} . We have applied on the computer the following two procedures with success:

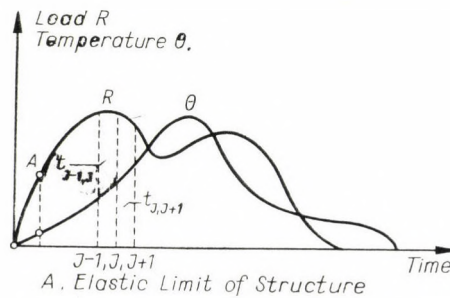


Fig. 4. Load temperature cycle

a) The direct incremental approach

Assuming that the analysis of a typical preceding step $j - 1, j$ has been completed, we obtain from its results $\sigma, \bar{\sigma}_{\Delta}, 1/\zeta, \beta_{\Delta}$ and hence $\eta_{p\Delta}$ from Eq. (10). This $\eta_{p\Delta}$ is then fed into the subsequent step $j, j + 1$ and added to the current $\eta_{\theta\Delta}$. Hence, we determine \mathbf{J} and solve Equ. (22) for \mathbf{r}_{Δ} from which we derive the solution of the step $j, j + 1$ and so on; Figs 5a, b. Thus, starting with point A , we find in turn the points B, C, D of the time-displacement history. If unloading occurs, this is not taken into account until the next step, which then operates under purely elastic conditions. This method is seen to include at each incremental step (a) the directly associated thermal strain vector $\eta_{\theta\Delta}$ and (b) the preceding plastic strain vector $\eta_{p\Delta}$. The question of further loading after unloading is discussed after the iterative method.

b) The iterative incremental approach

The first loop of each loading step is elastically analysed. The calculation of the subsequent loops is based on an average value of $1/\zeta$ from which the relevant η_{Δ} are obtained and hence \mathbf{r}_{Δ} from Equ. (22). This mean value of $1/\zeta$ is in each case set up using the final $1/\zeta$ of the antecedent step $j - 1, j$ and the $1/\zeta$ derived at the end of the preceding loop of the current step $j, j + 1$.

We may repeat these operations until convergence to a point B , is achieved. Note that in each loading step the η_{pA} of the preceding step is ignored, since it has been processed in the relevant computation. Fig. 5b. shows a sequence of equilibrium positions B, C, D , etc. attained by this procedure.* This second method is evidently more accurate, but more time consuming. It is necessary to check out at each iteration if loading or unloading occurs. At the same time, high accuracy is, in general, achieved after three iterations. In our experience

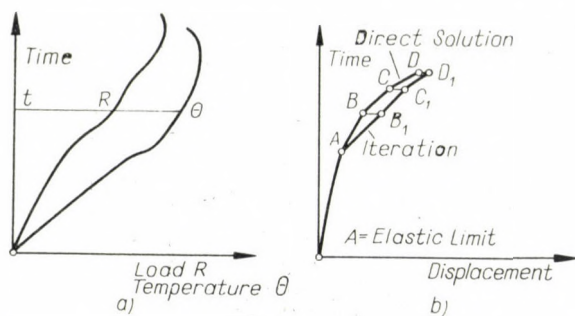


Fig. 5. Load temperature history (a), direct and iterative incremental solution of elasto-plastic problem (b)

the direct approach proves sufficiently accurate for engineering purposes as long as small enough intervals are chosen. However, it may be best in practice to apply an intermediate procedure with fewer loading steps but allowing for a finite number of iterations, say two or three, for each increment.

In either of the two procedures, the programming must also provide for the case when loading follows an unloading sequence. To take account of the strain hardening β_A is held zero until the current $\bar{\sigma}$ is found to exceed the highest equivalent stress $\bar{\sigma}_{\max}$ (not σ_l) achieved (and stored) in the previous loading history. In fact, this is best realised by introducing initially a column matrix with an entry σ_l corresponding to each element. As plasticity occurs and spreads in the loading history, the corresponding σ_l entries are changed into the appropriate $\bar{\sigma}_{\max} > \sigma_l$.

It follows that the incremental $\bar{\sigma}_A$ of Equ. (16) for a current step $j, j + 1$ may always be written (when positive) in the form

$$\bar{\sigma}_A = \bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_{\max} \quad (23)$$

where $\bar{\sigma}_{\max}$ is the highest equivalent stress achieved in the previous loading history of the element. The above argument applies for a constant temperature

* The differences between the results of the two methods are exaggerated in Fig. 5b for illustrative purposes.

case $\Theta_{\Delta} = 0$. The factor β_{Δ} , when positive, is then evaluated from Equ. (16) in conjunction with Equ. (15). In the presence of a temperature history we may allow for a negative $\bar{\sigma}_{\Delta}$ as long as Θ_{Δ} is sufficiently large to yield a positive β_{Δ} ; in this case $\bar{\sigma}_{\max}$ must correspond to the current temperature.

VI. Examples of Elasto-Plastic Analysis

Two problems which have been analysed by the direct increment method are illustrated in Figs. 6 to 15. Both consist of flat, square plates of constant thickness, loaded by a uniform shear flow at the edges and both have a central hole, giving rise to stress concentrations.

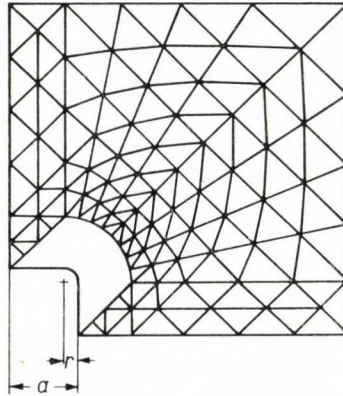


Fig. 6. Plate with central hole, $r/a = 0,2$; outer grid for TRIM3 elements

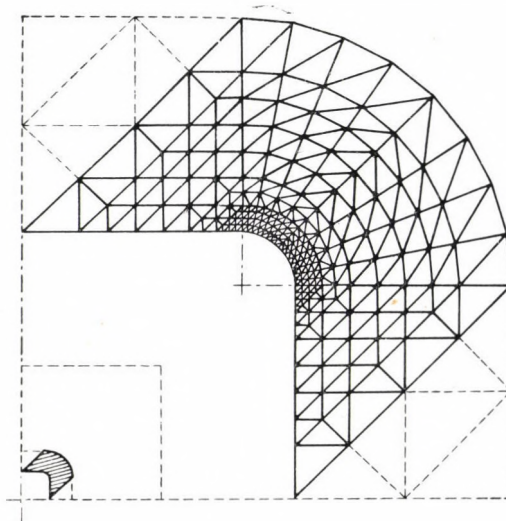


Fig. 7. Plate with central hole, $r/a = 0,2$; inner grid for TRIM3 elements

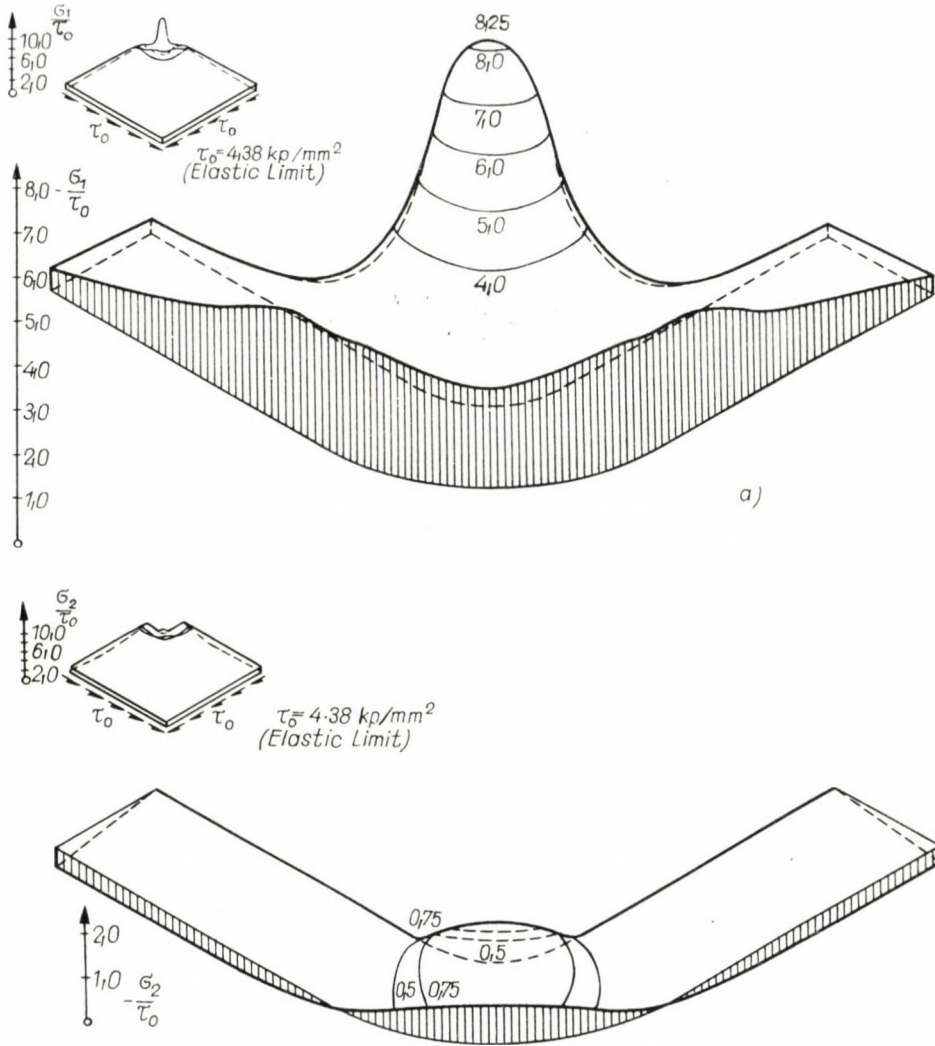


Fig. 8. (a) Plate with central hole, $r/a = 0,2$ (TRIM3 elements) principal stress σ_1 , applied uniform stress τ_0 (elastic state), (b) plate with central hole, $r/a = 0,2$ (TRIM3 elements) principal stress σ_2 , applied uniform stress τ_0 (elastic state)

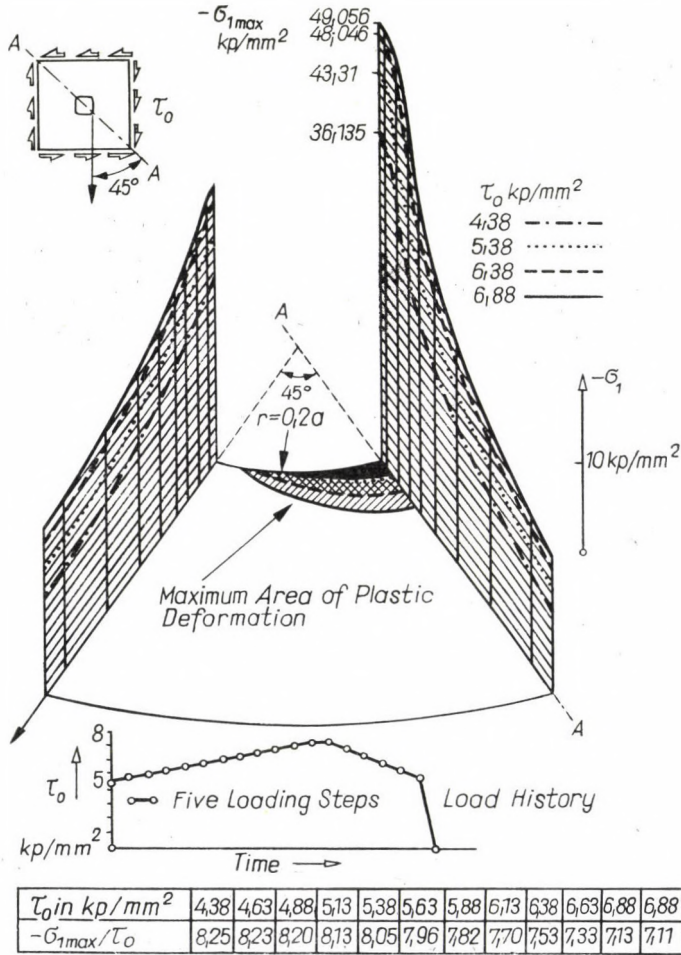


Fig. 9. Plate with central hole, $r/a = 0,2$, load increasing

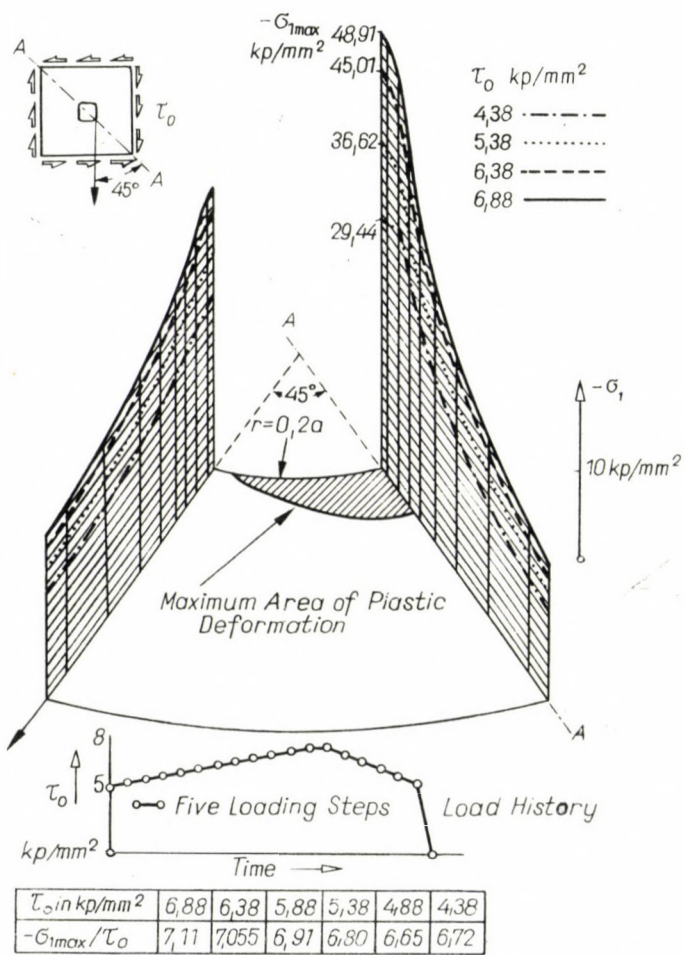


Fig. 10. Plate with central hole, $r/a = 0,2$, load decreasing

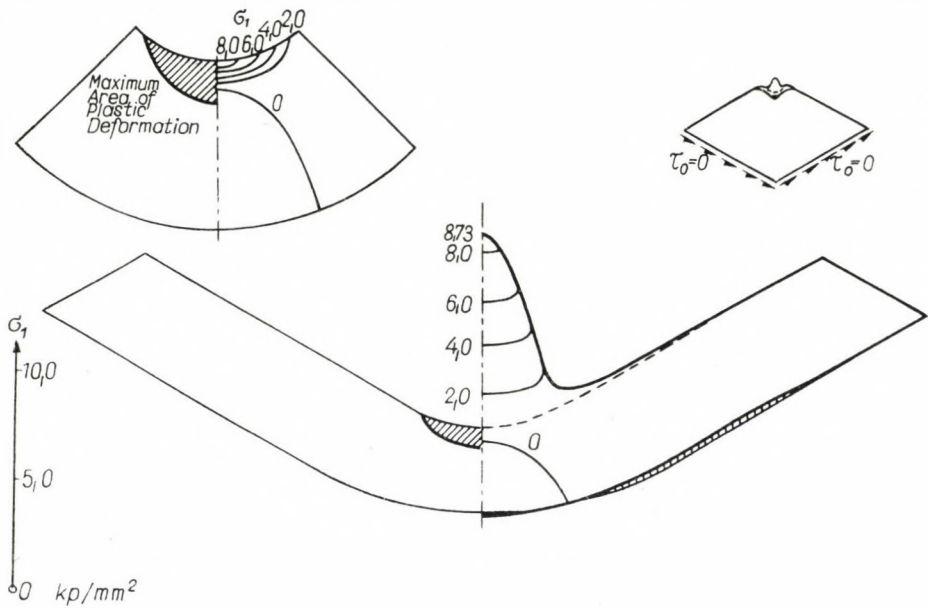


Fig. 11. Plate with central hole $r/a = 0,2$ stress τ_0 (TRIM3 elements), residual stress σ_1 , after unloading load

In each case, the analysis was carried out for a quarter of the plate, by taking advantage of the symmetry about the diagonals. For the square hole with rounded corners ($r/a = 0,2$), constant strain triangular elements (TRIM3) were used and the finer grid adjacent to the hole is shown in Fig. 7. The number of nodal points, triangles and unknowns is 309, 556 and 603, respectively. Results are given, first for the elastic analysis in the form of non-dimensional principal stress contours and show a stress concentration factor of 8,25 as compared with 8,04 obtained analytically [19] for an infinite plate with the same shape of hole; Fig. 8, 8a. From the end of the elastic range, load was applied in a series of 48 steps for which the direct incremental method was used; the incremental load was in each case $\tau_0 = 0,05$ kp/mm². A final 49th step had zero load increment in order to give the final elasto-plastic state from which the unloading calculation proceeded. The stress distribution σ_1 , at four loading steps are reproduced in Fig. 9 and Fig. 10 shows the corresponding information for four unloading steps. It is confirmed that the stresses in the latter stage are in agreement with those deduced by subtraction of the elastic stresses, associated with the current load decrement, from the stresses of maximum load level. Fig. 11 illustrates the residual stress σ_1 , after removal of the external load. The computing time for each loop was 6' 50''.

Similar results appear in the remaining figures for the plate with a circular hole. However, in this case, the triangular elements used were allowed linearly varying stresses (TRIM6) and the grid of Fig. 12 is correspondingly coarser. The number of nodal points, triangles and unknowns is now 441, 200 and 840, the loading increment is once more $\tau_0 = 0,05$ kp/mm². The analytical solution [14] for an elastic infinite plate yields a stress concentration factor of 4,0; this compares with 4,7 given by the present analysis of the finite plate; see Fig. 13.

Since the development of plastic strains would obviously be limited to the elements in the vicinity of the hole, the elements were divided into two groups and the plastic plain calculations were carried out only for the inner group. This afforded some shortening of the computation time, but would not, of course, be possible in a more general problem. The programming for the calculations was made entirely with ASKA, except for the calculation of the incremental initial loads J_A , which had not then been incorporated into ASKA [15]. The computing time per loop was 7' 48''. The stress σ_1 , at four loading steps is graphically shown in Fig. 14, whilst Fig. 15 reproduces the final residual stresses σ_1 .

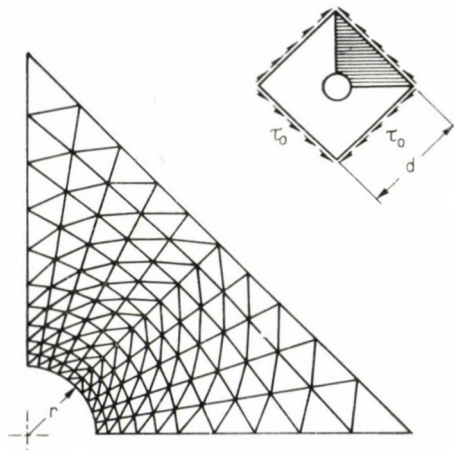


Fig. 12. Plate with circular hole $r/d = 0,125$, TRIM6 elements

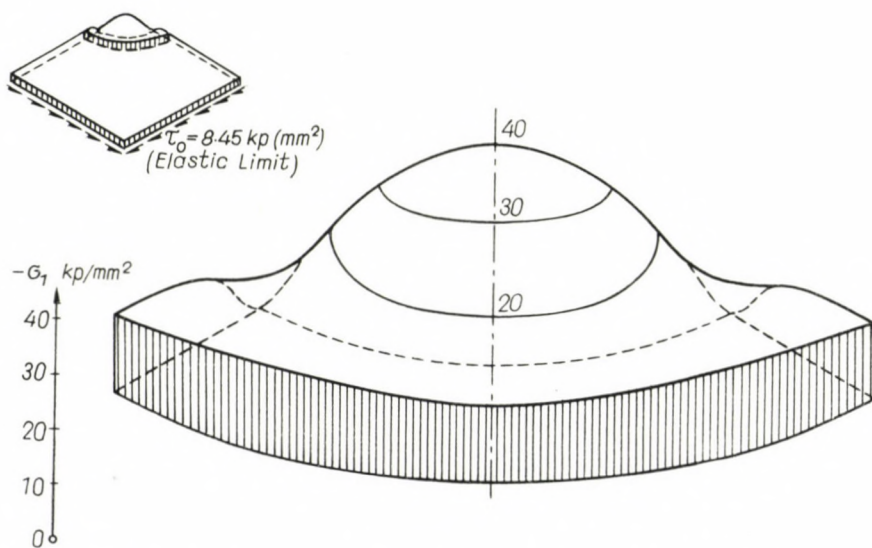


Fig. 13. Plate with circular hole under shear τ_0 (elastic state)

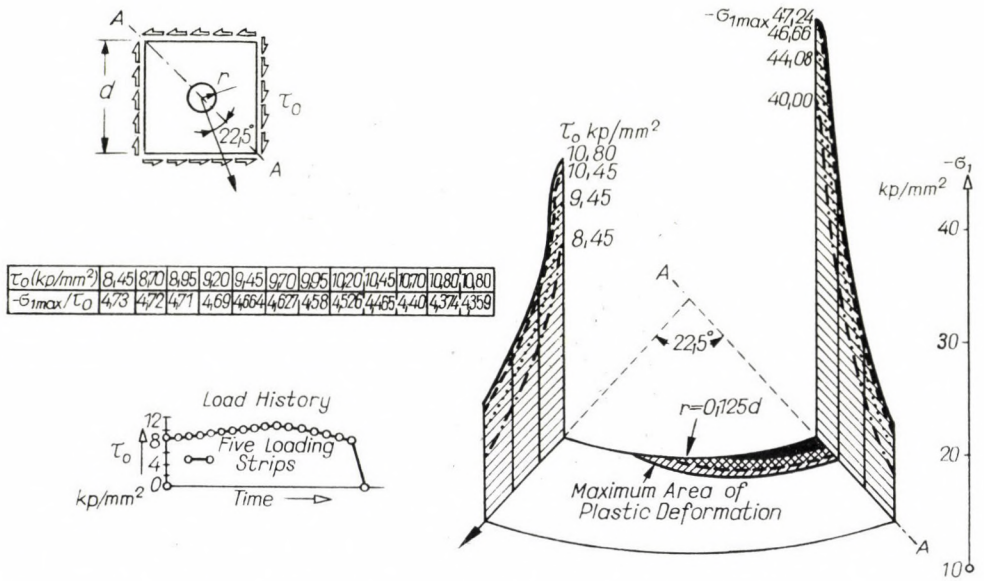


Fig. 14. Plate with circular hole $r/d = 0,125$ and shear loading (TRIM6 elements), load increasing

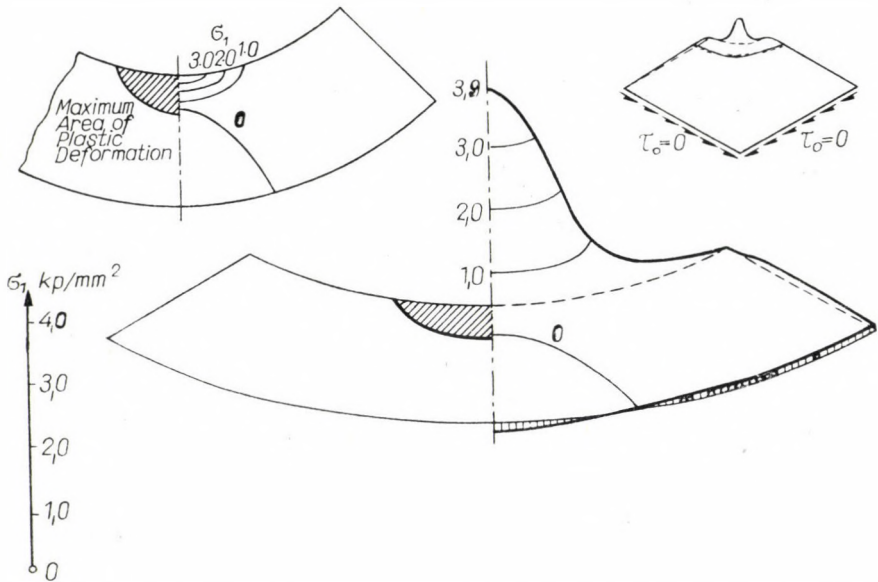


Fig. 15. Plate with circular hole under shear τ_0 , TRIM6 elements, residual stress σ_1 after unloading

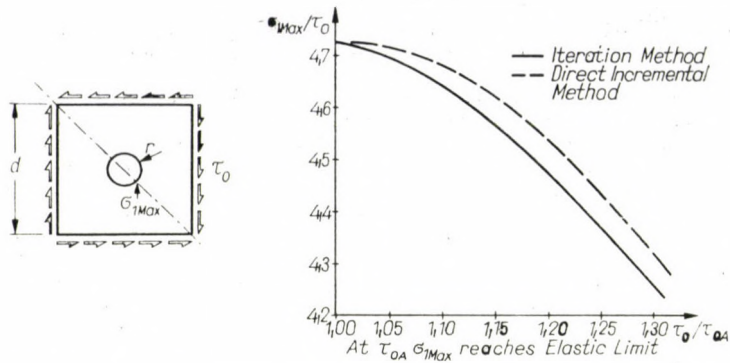


Fig. 16. Plate with circular hole $r/d = 0,125$ under shear τ_0 , comparison of iteration and direct incremental method in elasto-plastic analysis

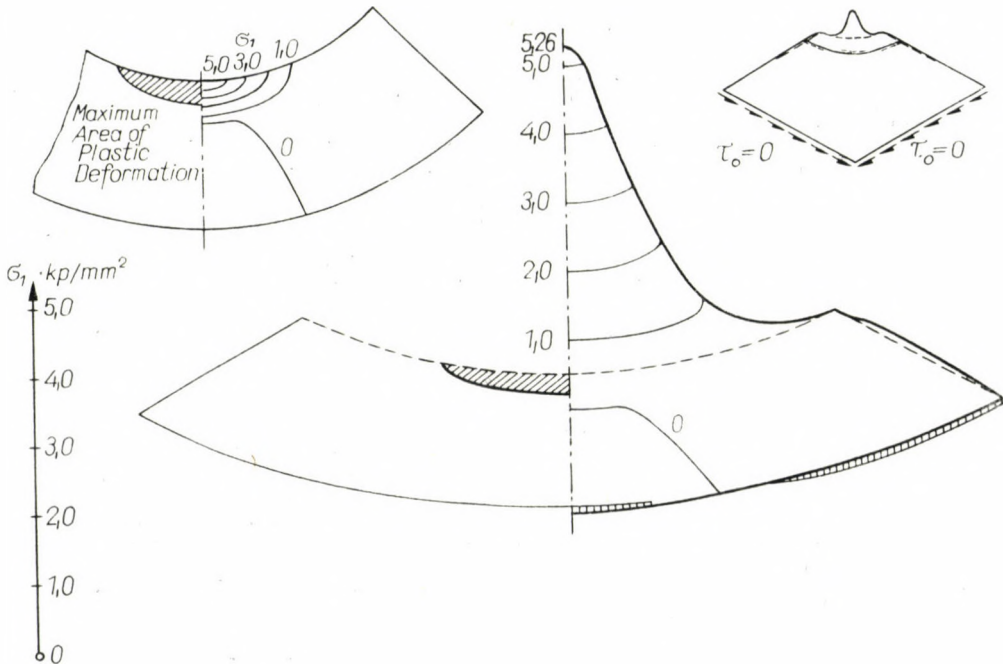


Fig. 17. Plate with circular hole under shear τ_0 (TRIM6 elements), residual principal stress σ_1 , after unloading (iteration method)

The last example has also been analysed by the iterative incremental method, applying constant loading increments $\tau_0 = 10 \times 0,05 = 0,5 \text{ kp/mm}^2$ and on the average five iterations at a time. Close agreement between the two procedures has been found as may be seen from Fig. 16. As is to be expected, greater differences are observed in the residual stresses; Fig. 17. The total computing time required by the iterative method is smaller.

REFERENCES

1. ARGYRIS, J. H.: Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis. Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 4. Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris 1963.
2. ARGYRIS, J. H.: Matrix Analysis of Three-Dimensional Elastic Media, Small and Large Displacements. *Journal of the AIAA* **3** (1965), 45—51.
3. ARGYRIS, J. H.: Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media; Matrix Analysis for Small and Large Displacements. *Ingenieur Archiv* **34** (1965), 33—35.
4. HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1950.
5. ARGYRIS, J. H.: Elasto-Plastic Matrix Displacement Analysis of Three-Dimensional Continua. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Technical Note **69** (1965), September.
6. ARGYRIS, J. H.: Triangular Elements with Linearly Varying Strain for the Matrix Displacement Method. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Technical Note **69** (1965), October.
7. ARGYRIS, J. H.: Reinforced Fields of Triangular Elements with Linearly Varying Strain, Effect of Initial Strains. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Technical Note **69** (1965), November.
8. ARGYRIS, J. H.: Matrix Displacement Analysis of Anisotropic Shells by Triangular Elements. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Technical Note **69** (1965), November.
9. ARGYRIS, J. H.: Arbitrary Quadrilateral Spar Webs for the Matrix Displacement Method. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Technical Note **70** (1966), February.
10. ARGYRIS, J. H.: Membrane Parallelogram Element with Linearly Varying Strain for Matrix Displacement Method. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Technical Note **70** (1966), May.
11. ARGYRIS, J. H.: Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworths, London 1960.
12. ARGYRIS, J. H.: Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media, Matrix Analysis for Small and Large Displacements. Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics; Munich, Sep. 1964. To be published by J. Springer, 1965.
13. SOBEY, A. J.: a) The Estimation of Stresses around Unreinforced Holes in Infinite Elastic Sheets. *R. A. E. Report Structures* 283, October 1962. b) Stress Concentration Factors for Rounded Rectangular Holes in Infinite Sheets. *R. A. E. Report Structures* 292, November 1962.
14. TIMOSHENKO, S.—GOODIER, J. N.: Theory of Elasticity. McGraw Hill, 1951.
15. ARGYRIS, J. H.—KAMEL, H.—SØRENSEN, M.—SCHMID, G.—PRETSCH, H.: Automatic System for Kinematic Analysis (ASKA). Research Report to The Boeing Company, Airplane Division, February 1965 (to be published externally).

ELASTO-PLASTISCHE ANALYSE VON DREIDIMENSIONALEN MEDIEN

J. H. ARGYRIS

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird ein ausschließlich auf die Verwendung und die Philosophie von Digitalrechnern begründetes Verfahren für die Analyse von dreidimensionalen Kontinua mit beliebigem elasto-plastischem Verhalten beschrieben. Die Theorie ist im Wesen auf der Matrix-Verschiebungsmethode des Verfassers aufgebaut, in welcher das Kontinuum durch eine endliche Gesamtheit von Elementen mit vorgeschriebenem vereinfachtem kinematischem Verhalten dargestellt wird. Dabei ist im allgemeinen das für dreidimensionale Media gebräuchlichste Element das Tetraeder mit konstanter oder linearer Änderung der Dehnung [2, 3]. Das entsprechende zweidimensionale Element ist das Dreieck, wiederum mit konstanter oder linearer Dehnung [6, 7]. Die plastischen Deformationen als Funktionen der Spannungen können aus beliebig analytischen oder experimentellen Grundgleichungen abgeleitet werden. Das Verfahren ist hier auf Grund der (stufenweise aufgebauten) Prandtl—Reuss'schen Gleichungen in Verbindung mit dem von Mises'schen Plastizitätskriterium und dem Begriff von äquivalenter Spannung und Deformation beschrieben. Die plastischen Deformationen können als eine spezielle Form von Vorspannungen [5] betrachtet werden, und ihre Wirkung wird durch den sogenannten Vorspannungsvektor [1, 2, 3] dargestellt. Da die plastischen Deformationen ursprünglich unbekannt sind, schlägt der Verfasser zwei stufenweise durchgeführte Methoden für den Digitalrechner vor. Die erste ist eine direkte Methode und beruht auf zweckentsprechend kleiner stufenweiser Belastung oder Verschiebungsstufen und führt bei jedem Schritt die vorhergehende plastische Verformungsstufe ein. Die zweite Methode ist genauer und verwendet für jeden Schritt eine Folge von Iterationen, die zu einer konvergenten Lösung führen, welche auch die laufenden plastischen Dehnungen berücksichtigt. Zwei zweidimensionale Beispiele illustrieren die Anwendung der Technik auf Platten mit zentralen Löchern.

ANALYSE ÉLASTO-PLASTIQUE DES MILIEUX TRIDIMENSIONNELS

J. H. ARGYRIS

RÉSUMÉ

L'étude présente un procédé basé exclusivement sur l'utilisation et la philosophie des calculatrices digitales, pour l'analyse des continus tridimensionnels d'un comportement élasto-plastique quelconque. La théorie a été développée, pour l'essentiel, de la méthode de déplacement matriciel de l'auteur, où le continu est représenté par un assemblage fini d'éléments d'un comportement cinématique prescrit. Ainsi, en général, l'élément le plus communément adopté pour les milieux tridimensionnels est le tétraèdre à variation constante ou linéaire de la déformation [2, 3]; l'élément bidimensionnel correspondant est le triangle, également à déformation constante ou linéaire [6, 7]. Les déformations plastiques, comme fonctions des contraintes, peuvent être dérivées de n'importe quelles équations fondamentales, analytiques ou expérimentales. Ici le procédé est illustré sur la base des équations de Prandtl-Reuss, en rapport avec le critère de plasticité de von Mises et la notion de contrainte et de déformation équivalentes. Les déformations plastiques peuvent être considérées comme une forme particulière des déformations initiales [5] et leur action peut être représentée par le vecteur dit de la charge initiale [1, 2, 3]. Les déformations plastiques étant en général inconnues, l'auteur propose deux procédés pas à pas pour la calculatrice. Le premier est un procédé direct qui dépend de paliers de chargement ou de déplacement suffisamment petits et introduit à chaque pas le palier de déformation plastique précédent. Le deuxième procédé, plus précis, utilise pour chaque pas une série d'itérations conduisant à une solution convergente, laquelle contient aussi la déformation instantanée plastique. Deux exemples bidimensionnels illustrent les applications de la technique de calcul aux plaques à orifice central.

ЭЛАСТО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНЫХ СРЕД

И. Х. АРГИРИС

РЕЗЮМЕ

В работе автор излагает метод анализа трехмерных континуумов с произвольным эласто-пластическим поведением, обоснованный исключительно на использовании и методике цифровых вычислительных машин. Автор вывел теорию, по существу, из метода смещения собственной матрицы, в которой континуум получается в качестве конечной суммы элементов, обладающих заданным поведением. Таким образом, вообще, в случае трехмерной среды обычно используемым элементом является тетраэдр, обладающий постоянной или линейной деформацией [2, 3]; в двух размерностях подходящим элементом является треугольник, опять-таки с постоянной или линейной деформацией [6, 7]. Пластические деформации, как функции напряжений, могут быть выведены из любых аналитических или экспериментальных основных уравнений. Здесь метод демонстрируется автором на основе уравнений Прандтля—Реуса (ступенчатых) в зависимости от порога пластичности Mises и соотношений эквивалентных напряжений и деформаций. Пластическую деформацию можно считать в качестве особой формы начальных деформаций [5] и их действие можно представить т. н. вектором основной нагрузки [1, 2, 3]. Вследствие того, что пластические деформации по существу неизвестны, автор предлагает два ступенчатых метода расчета при помощи вычислительной машины. Первый представляет собой прямой метод и соответственно этому основывается на небольших ступенчатых нагрузках или ступенях смещения. При каждой ступени вводит предыдущую ступень пластической деформации. Другой метод является более точным. Для каждой ступени применяется итерационная серия, которая ведет к конвергентному решению, которое дает также непрерывную пластическую деформацию. Два двухмерных примера демонстрируют применение методики на пластинах с центральным отверстием.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG —
COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

I. Sályi—G. Fáber:

SZILÁRDSÁGTANI PÉLDATÁR (AUFGABENSAMMLUNG AUS DER FESTIGKEITS-
LEHRE)

Tankönyvkiadó (Budapest), Bd. I, Aufl. 2, 1962 (323 Seiten). Bd. II, Aufl. 1, 1964
(534 Seiten).

Dieses in ungarischer Sprache erschienene Werk umfaßt über 900 Beispiele, die die folgenden Gruppen bilden: Beanspruchungen zufolge der ruhenden Last, Beanspruchungen zufolge der beweglichen Last, Geometrie des Stabquerschnittes, Spannung und Formänderung, allgemeine Zielsetzungen der Festigkeitslehre, Zug und Druck, Biegung, Knickung. Wegweisend für die Auswahl und Anordnung des Stoffes waren die Erfahrungen, welche die Verfasser aus Vorlesungen schöpften, die sie an der Maschineningenieur fakultät der Technischen Universität Miskolc und an der Elektrotechnischen Fakultät der Technischen Universität Budapest hielten. Das Werk eignet sich Studierende dieser Fakultäten oder zum Selbststudium in hervorragender Weise. Auch in der Praxis stehende Ingenieure können aus ihm zahlreiche Anregungen erhalten. Es sei die große Mannigfaltigkeit der behandelten Beispiele hervorgehoben, die es dem Praktiker ermöglichen wird, die meisten einschlägigen Aufgaben nach den hier gegebenen Methoden selbständig zu lösen. Den einzelnen Kapiteln gehen knappe und leichtfaßliche Einleitungen voraus, die die zum Verständnis der Beispiele notwendigen Grundbegriffe und Lehrsätze zusammenfassen. Zur Behandlung der Spannung und Formänderung werden der Tensorbegriff und die Matrizenrechnung reichlich benützt. Musterhaft sind die Zusammenfassungen über reduzierte Spannung und Ermüdung. Die sehr gründlich ausgearbeiteten Lösungen bilden den großen Wert des Werkes.

Dr. J. Barta

J. Mika:

METALLURGISCHE ANALYSEN

Chemische Untersuchung von technisch wichtigen Metallen und Erzen

Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1964. 843 S. 32 Abbildungen
u. 2 Beilagen

Dieses großangelegte Werk von Professor J. MIKA ist die neubearbeitete und erweiterte deutschsprachige Ausgabe der im Jahre 1958 in ungarischer Sprache erschienenen Monographie des Verfassers, die ins Deutsche übersetzt den Titel »Hüttenmännische Analysen« trug. — Das vor uns liegende Buch gliedert sich in zwei Hauptteile.

Der Teil I befaßt sich in acht Kapiteln ausführlich mit der Analyse der Metalle, namentlich der technisch wichtigen Legierungen bzw. Vorlegierungen in folgender Zusammenstellung: 1. Eisen-, 2. Aluminium-, 3. Magnesium-, 4. Kupfer-, 5. Blei-, 6. Zinn-, 7. Zink-, 8. Silberlegierungen. Jedes Kapitel beginnt mit einer allgemeinen Einleitung bzw. mit einer Übersicht der einschlägigen Legierungen und wird dann entsprechend in mehrere Abschnitte je nach der Anzahl der üblichen Legierungskomponenten geteilt, wobei die Mehrzahl der Abschnitte natürlich auf die Eisenlegierungen fällt, so daß dies allein etwa die Hälfte des I. Teiles bzw.

mehr als ein Drittel des ganzen Werkes ausmacht. In den einzelnen Abschnitten werden nach Besprechung der Grundlagen der anzuwendenden bzw. anwendbaren Verfahren auch die genauen Vorschriften, ja sogar Anweisungen für die Berechnung der Resultate angegeben, so daß die Analysen eine jede in der Laboratoriumspraxis nur einigermaßen bewanderte Person glatt durchführen kann.

Der Teil II. ist nun der Analyse der Erze gewidmet und umfaßt folgende vier Kapiteln: 9. Eisen- u. Manganerze, 10. Bauxit, 11. Magnesit u. Dolomit, 12. Kupfer-, Blei-, und Zinkerze, welche je nach den zu bestimmenden Bestandteilen der einzelnen Erzgattungen gleichfalls in Abschnitte eingeteilt sind. Über diese ließe sich nun dasselbe wiederholen, was bereits in Beziehung der Abschnitte des I. Teiles gesagt wurde, doch soll es hinzugefügt werden, daß der Verfasser die Darstellung dieses naturgemäß etwas mehr verwickelten Teils der analytischen Praxis gleichfalls ausgezeichnet meistern konnte.

Was nun die Zweckmäßigkeit der Auswahl der beschriebenen bzw. empfohlenen Methoden anlangt, soll betont werden, daß in diesem gediegenen Werke neben der rezenten Verfahren der herkömmlichen Gewichts- und Maßanalyse auch aus den heutzutage bereits auch als klassisch betrachtenden physikalisch-chemischen Methoden der chemischen Analyse wie die der Photometrie, Potentiometrie, Polarographie u.s.w. weitgehend Gebrauch gemacht wird. An vielen Stellen des Buches findet man auch Vorschriften für Schiedsanalysen, doch die nicht ausgesprochen als solche bezeichneten haben sich in der Praxis offenbar gut bewährt, wodurch das Werk sozusagen den Charakter eines Kodexes metallurgischer Analysen gewinnt.

Der Verfasser selbst auch Hütteningenieur arbeitet ja seit Jahrzehnten mit namhaftem Erfolg auf diesem Gebiet sowohl als Forscher wie auch als Professor der analytischen Chemie. Offenbar diesem letzteren Umstand ist zu verdanken, daß sein Buch gemäß seiner Zielsetzung nicht nur für Chemiker der Betriebslaboratorien, sondern auch für Studierenden wärmstens empfohlen werden kann.

Dr. J. Prosz

INDEX

- Balogh, A.*: Torsional Vibration. Problems and Practical Solutions — Torsionsschwingungen. Probleme und deren praktische Lösungen — Vibrations de torsion. Problèmes et solution pratique — *Балог, А.*: Крутильные колебания. Проблемы и практические решения 5
- Nath, G.*: A New Method of Designing a Single Stage Axial-Flow Fan for Prescribed Spanwise Circulation — Eine neue Methode für die Berechnung eines einstufigen Axialventilators für vorgeschriebene Zirkulation entlang der Schaufel — Méthode nouvelle pour l'étude d'un ventilateur axial à un étage pour circulation prescrite le long de l'aube — *Нат, Г.*: Новый метод проектирования одноступенчатого аксиального вентилятора при заданной циркуляции вдоль лопастей 41
- Smrček, K.—Čejchan, O.—Chvatík, J.*: Beitrag zur Problematik der Entstehung von magnetischen Eigenschaften des α -Fe₂O₃ beim Erhitzen auf mittlere Temperaturen — Contribution to the Problems of the Origin of Magnetic Properties of α -Fe₂O₃ During Heating to Medium Temperatures — Contribution aux problèmes d'origine des propriétés magnétiques α -Fe₂O₃ au cours de la mise aux températures moyennes — *Смрчек, К.—Чейхан, О.—Хватик, Й.*: К проблематике возникновения магнитных свойств α -Fe₂O₃ при нагреве до средней температуры 61
- Kardos, Á.*: On the Relation of Cutting Factors to Cutting Force in Turning of Aluminium Alloy — Beziehungen zwischen der Schnittkraft und den Zerspanungsfaktoren beim Drehen einer Aluminiumlegierung — Les relations entre la force de coupe et les caractéristiques de coupe au tournage des alliages d'aluminium — *Кардош, А.*: Зависимость между усилием резания и данными резания при токарной обработке алюминиевых сплавов 73
- Bardoš, V.*: Чувствительность плоских механизмов к ошибкам в размерах его звеньев — *Bardoš, V.*: The Sensitivity to Dimensional Errors of the Members of Plane Mechanism — Die Empfindlichkeit gegen Maßfehler der Glieder bei ebenen Mechanismen — La sensibilité des erreurs dimensionnelles des membres dans les mécanismes plans 87
- Drahoš, I.*: Die Geometrie des theoretischen Eingriffes von mittels eines Kreisringabwälzwerkzeuges erzeugten Zahnflächen — Geometry of Theoretical Mesh Conditions of Tooth Surfaces Generated by Means of a Torus Shaped Tool Surface — La géométrie de l'engrènement théorique des surfaces de dents engendrées par une surface toroïdale — *Драхош, И.*: Геометрия теоретического зацепления в случае поверхностей зубьев, обработанных по кольцевой поверхности 101
- Krysko, W. W.—Newburn, J. M.*: Investigation of the Lead-Antimony System — Untersuchung des Blei-Antimon Systems — Recherches sur le système plomb-antimoine — *Крыско, В. В.—Ньюбурн, И. М.*: Исследование системы свинец — сурьма 125
- Krysko, W. W.—Fenton, R. G.*: The Influence of Temperature and Relative Interfacial Shear Movement Rate on the Shear Strength of High Purity Lead — Der Einfluß der Temperatur und der relativen Gleitflächen-Schubgeschwindigkeit auf die Schubfestigkeit von Reinstblei — L'influence de la température et de la vitesse de cisaillement interfaciale relative sur la résistance au cisaillement du plomb de très haute pureté — *Крыско, В. В.—Фентон, Р. Г.*: Воздействие температуры и относительной скорости среза между поверхностями на сопротивление среза очень чистого свинца 137

<i>Tóth, L.:</i> Bestimmung der beim Gesenkschmieden auftretenden Höchstkraft — Determination of the Maximum Force in Die-Forging — Détermination de la force maximum à l'étampage — <i>Том, Л.:</i> Определение максимального усилия, возникающего при ковке в штампах	143
<i>Nath, G.:</i> Hypersonic Flow in the Stagnation Region of a Circular Cylinder — Überschallströmung im Staubereich eines Kreiszyllinders — Écoulement supersonique dans la région de stagnation d'un cylindre circulaire — <i>Нат, Г.:</i> Движение потока со сверхзвуковой скоростью в реактивной области некоторого круглого цилиндра	175
<i>Nath, G.:</i> The Flow of a Perfect Fluid Through a Single Stage Axial Flow Fan with Prescribed Spanwise Circulation — Die Strömung einer vollkommenen Flüssigkeit durch einen einstufigen Axialventilator mit vorgeschriebener Zirkulation entlang der Schaufel — L'écoulement d'un fluide parfait à travers un ventilateur axial à un étage, avec circulation prescrite le long de l'aube — <i>Нат, Г.:</i> Движение потока идеального газа через одноступенчатый аксиальный вентилятор при заданной циркуляции вдоль лопастей	181
<i>Rónay, Maria:</i> On Strain Incompatibility and Grain Boundary Damage in Fatigue — Über die Unverträglichkeit der Deformationen und die Schädigung der Korngrenzen bei Ermüdung — Incompatibilité des déformations et dommages aux joints des grains à la fatigue — <i>Ронац, Мария:</i> Деформационная несовместимость и повреждение границ зерен при усталости	199
<i>Argyris, J. H.:</i> Elasto-Plastic Analysis of Three-Dimensional Media — Elasto-plastische Analyse von dreidimensionalen Medien — Analyse élasto-plastique des milieux tridimensionnels — <i>Аргирис, И. Х.:</i> Эласто-пластический анализ трехмерных сред	219
Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг	
<i>I. Sályi—G. Fáber:</i> Szilárdságtani példatár (Aufgabensammlung aus der Festigkeitslehre) (J. Barta)	239
<i>J. Mika:</i> Metallurgische Analysen (J. Prosz)	239

Führende deutsche Fachzeitschriften

Eisenhüttenwesen



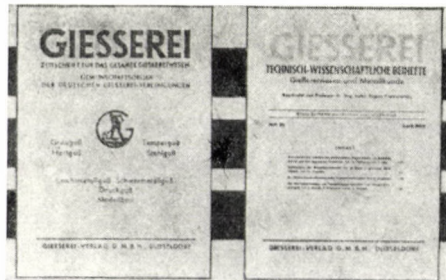
Herausgegeben vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute

Jährlich 26 Hefte
DM 96,— einschließlich Versandkosten

Herausgegeben vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute und Max-Planck-Institut für Eisenforschung

Jährlich 12 Hefte
DM 100,— einschließlich Versandkosten

Gießereiwesen



Herausgegeben von allen deutschen Gießerei-Vereinigungen

Jährlich 26 Hefte
DM 60,— einschließlich Versandkosten

Begründet von Professor Dr.-Ing. Eugen Piwowarsky

Jährlich 4 Hefte
DM 80,— einschließlich Versandkosten

VERLAG STAHLISEN M.B.H. GIESSEREI-VERLAG G.M.B.H.
4000 DÜSSELDORF 1 • BREITE STRASSE 27

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett; 1966. II. 10. — Terjedelem: 21,25 (A/5) ív, 123 ábra

66.61957 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

All the reviews of the Hungarian Academy of Sciences may be obtained among others from the following bookshops:

- ALBANIA**
Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana
- AUSTRALIA**
A. Keesing
Box 4886, GPO
Sidney
- AUSTRIA**
Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I.
- BELGIUM**
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles
- BULGARIA**
Raznoiznos
1Tzar Assen
Sofia
- CANADA**
Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.
- CHINA**
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. Nr. 88.
- CZECHOSLOVAKIA**
Artia A. G.
Ve Smeckách 30
Praha II.
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tlace
Leningradská 14
Bratislava
- DENMARK**
Ejnar Munksgaard
Nørregade 6
Kopenhagen
- FINLAND**
Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki
- FRANCE**
Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5
- GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC**
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16.
Leipzig C. I.
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62.
Berlin N. W.
- GERMAN FEDERAL REPUBLIC**
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.
- GREAT BRITAIN**
Collet's' Subscription Dept.
44-45 Museum Street
London W. C. I.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford
- HOLLAND**
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471-487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague
- INDIA**
Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
Head Office:
India House OPP.
GPO Post Box 1374
Bombay I.
- ITALY**
Santo Vansia
71 Via M. Macchi
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze
- JAPAN**
Nauka Ltd.
2 Kanada-Zimbocho 2-chome
Chiyoda-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo
- Far Eastern Booksellers
Kanada P. O. Box 72
Tokyo
- KOREA**
Chulpanmul
Korejskoje Obshchestvo po Exportu i
Importu Proizvedenij Pechati
Phenjan
- NORWAY**
Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo
- POLAND**
Export und Import Unternehmen
RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa
- ROUMANIA**
Cartimex
Str. Aristide Briand 14-18.
Bucuresti
- SOVIET UNION**
Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow
G-200
- SWEDEN**
Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm
- USA**
Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York 3 N. Y.
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York 3. N. Y.
- VIETNAM**
Xunhasaba
Service d'Export et d'Import des Livres
et Périodiques
19, Tran Quoc Toan
Hanoi
- YUGOSLAVIA**
Forum
Vojvode Misica broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Kniga
Terazije 27.
Beograd

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 54

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1966

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

THE FORMATION OF ELECTRICAL FIELDS NEARLY PERPENDICULAR TO THE DIRECTION OF LEAKAGE CURRENT IN NON-LINEAR SILICON-CARBIDE RESISTANCES

J. LUKÁCS

CAND. OF TECHN. SC.

and

I. BOGOLY

RESEARCH INSTITUTE FOR ELECTRICAL INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received February 13, 1963]

During a series of tests on non-linear resistances made of silicon-carbide as basic material, and with 10 kA discharge current, we observed some interesting phenomena. We rejected as unsuitable a production series of the resistances of 90 mm \varnothing and 45 mm height, produced by the "Warmpressen" technique. Previously the resistance blocks withstood some current waves with a peak value of 15 kA, and a form of 20/40. To destroy resistances, we applied a blow with a sharp instrument to the mantle, in the plane of the circular cross-section, as shown in Fig. 1 under the blow, the resistance body cracked conically, most likely as a result of the isobar layer formed during pressure.

In certain fortunate cases, we noticed black streaky lines of creeping on the cracked conical (possibly paraboloid) surface. These lines were similar to those, that can be seen on insulating materials due to leakage current. We wish to stress that no signs of puncture or flashover showed either on the front surface or on the mantle of the resistance bodies. The above signs could be observed on several blocks.

We give the following possible explanations with regard to these signs. It is known that, when pressing powders, the pressure does not spread hydrostatically. During the pressure of cylindrical shapes the peripheral layers are retarded, owing to wall friction, in comparison with the layers in the middle of the circular cross-section, with regard to piston movement direction. Moreover, in the case of insufficient heat treatment, the conductivity is lower in the middle of the disc than at the edges. In the same way during pressure, changes occur in conductivity along the gliding surface as well. In our opinion, at the time of the impulse current, different voltage drops occur in the layers next to the mantle and in those in the middle of the cross section (see Fig. 2). The difference in tension creates a tangential field along the contour lines, which is perpendicular to the main field strength. According to facts, the latter also produces a leakage current.

We must point out that the first phase of the tension current characteristics of the insufficiently heat-treated resistance bodies proved to be of better non-linearity than those which had received the necessary heat treatment.

On the other hand, the latter could withstand less current surges during type testings, and the point of breakdown generally occurred in the middle.

The above explanation is not supported by detailed structure tests. We consider the interpretations as an approximation. We would be grateful,

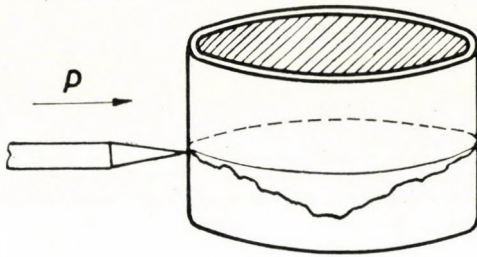


Fig. 1

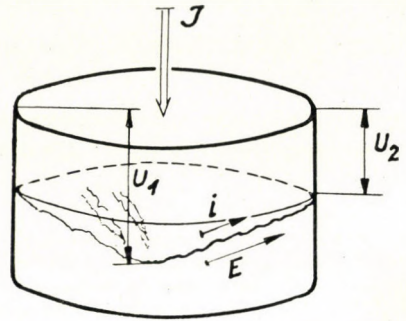


Fig. 2

if our colleagues working in a similar field, were to contribute their views and observations to help complete this picture.

Fig. 3 shows the photograph, in mirror reflection, of the fractured surfaces of a broken resistance body due to leakage current. The blow causing the split was administered on the upper edge.



a)



b)

Fig. 3

ETCH FIGURES ON GERMANIUM INDUCED BY SURFACE CONTAMINANTS

Mrs. M. NÉMETH and I. C. SZÉP

RESEARCH INSTITUTE FOR TECHNICAL PHYSICS OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received September 2, 1963]

According to some authors' opinion, certain figures appearing after chemical etching on the surface of Ge single crystals are related to occluded impurities. The authors of the present paper investigated contaminants both soluble and insoluble in the etchant as to their effect on the formation of etch figures. They established that soluble contaminants on the surface of Ge (whether originating from microscopic impurities incorporated in the crystal or from the surroundings) induce pits in the surface structure, whereas insoluble contaminants have an impeding effect on etching and lead to the formation of hillocks. The formation of pits is caused by local heat development, which fact can be proved both experimentally and by approximate thermochemical calculations. The hillocks are caused partly by the abrasive and polishing material embedded in the surface layer.

I. Introduction

Due to different chemical treatments etch pits of various shape and origin were produced on the surface of a Ge single crystal. The most thoroughly studied etch figures are those corresponding to dislocations [1-7]. The etch figures appearing after chemical treatment on the surface of Ge single crystals and having different character from the dislocation etch figures have been most investigated. Fig. 1 shows such peculiar etch figures [8]. The cavities "C" were formed under the influence of microscopic SiO_2 , GeO_2 particles [9-11] or are due to the oxidation products of other impurities [12] found in the crystals. The importance of physical contaminants (e.g. dust) and of adsorbed or adsorbed chemical impurities as to the smoothness of the etched surface has been emphasized by other authors, too.

In the course of our research work differences were experienced in the effects caused by contaminants, as above referred to, on the structure of the surface (see below) and therefore we have gone into detailed investigation on this problem. The investigation started from the suggestion that the impurities forming a separate phase must behave in the same manner whether they were originally in the occluded state inside the crystal or they got on its surface later. This is obvious, since the impurities are able to show a real effect during chemical treatment only, if they have reached the surface. On the basis of this hypothesis the role had to be cleared which soluble and insoluble impurities, either built in the Ge crystal or got later on its surface from the surroundings, are playing a role in the process of etch figure formation.

II. Experimental results and discussion

The experiments were made on 1 ohmcm p-type Ge single crystal slices of (111) orientation (the surface area was about 2 cm²). After cutting they were ground and polished with Al₂O₃ powder. The surface roughness was $\leq 0,1 \mu$.

The slices were cleaned by washing in water and afterwards in alcohol. In order to remove the last remainders of adhesive and surface contaminations, the crystals were treated with bidistilled p.a. alcohol which contained no dry residues.

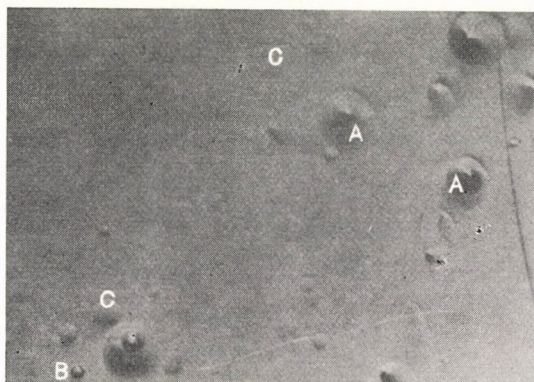


Fig. 1. Etch pits on the surface of Ge treated with CP-4 [8]

In these experiments a composition was chosen for etching to which dislocations on the (111) surface are not sensitive at all. This etchant was developed in the Research Institute for Technical Physics of the Hungarian Academy of Sciences for obtaining slight surface roughness [14]. It is labelled etchant "A"*. Neither the composition nor the temperature of the etchant was altered during the experiments. Each slice was etched in 40–45 ml of etchant. SiO₂ was used as soluble impurity and Al₂O₃ as the insoluble one. The maximum size of particles was less than 100 μ .

III. Contaminants soluble in the etchant

The SiO₂ or Si particles in known quantities were deposited onto the surface of the samples with the aid of a sieve. Thus it could be achieved that the distribution on the particles falling through an intermediate layer of liquid onto the surface of the Ge crystal became statistically uniform. Using distilled water as medium, this distribution was experimentally controlled with a stereo-

* Etchant "A" is composed of: 254,3 g 38% H₂F₂; 75 ml 65% HNO₃; 0,50 g J₂ crystal. The solution is saturated at 22 °C, within 20 minutes.

microscope. During the etching process continuous but slow mixing was applied. Under the above condition adding different amounts of SiO_2 , the results summarized in Table I were found. These data show that the density of "C" pits per cm^2 increases if the added quantity of SiO_2 is increased (Fig. 2) thus the pits develop as a consequence of the presence of SiO_2 particles on the surface. The diameter of the pits varies in a wide range (see Table I and Fig. 3).

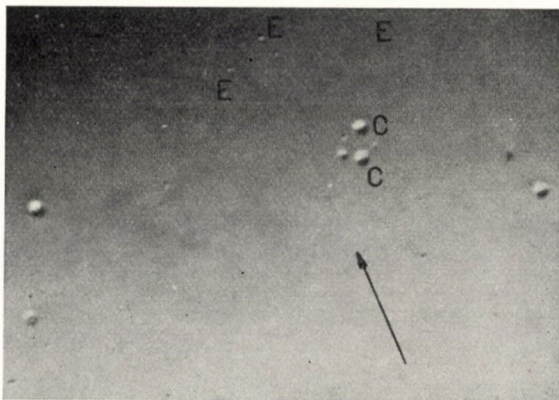


Fig. 2. The increase of density of pits under the influence of SiO_2

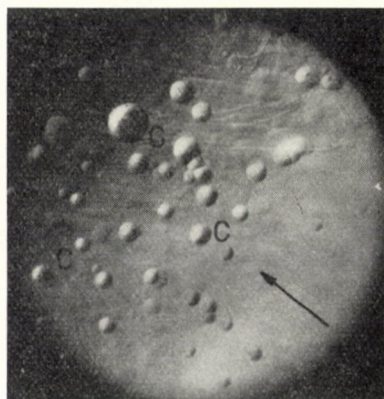


Fig. 3. Pits produced under the influence of SiO_2 during etching, "C":pit; \uparrow : direction of illumination; (hundredfold magnification).

This is caused by the varying size of the applied SiO_2 particles and partly by the fact, that due to mixing each single particle stay for different periods at a particular spot of the surface. At the very sites where the SiO_2 particles remain for a longer interval, the formation of larger and deeper pits is possible, even in case of smaller particles, as will be later explained in detail.

If the etching time is long enough, it can happen that the SiO_2 particles perforate the Ge slice according to Fig. 4. In some experiments only about one

Table I

The influence of SiO_2 addition on the density of "C" pits
(Under dustproof conditions, using 45 cm^3 of etchant)

SiO_2 [mg]	Number of		Diameter of	
	"C" pits	hillocks	"C" pits	hillocks
	per cm^2		μ	
1	40	434	$11 \div 78$	$2 \div 15$
2	75	455	$6 \div 53$	$6 \div 12$
3	110	420	$7 \div 75$	$3 \div 20$
10	306	490	$3 \div 40$	$3 \div 25$
40	656	667	$4 \div 40$	$3 \div 30$
50	764	890	$7 \div 55$	$5 \div 24$
70	987	745	$5 \div 51$	$2 \div 28$

half of the specimens' surface was covered with SiO_2 particles. The rate of etching was considerably higher on the covered parts, thus after etching the difference between the surface levels of the covered and uncovered part was approx. 40μ , while the rate of etching on the opposite side was uniform.

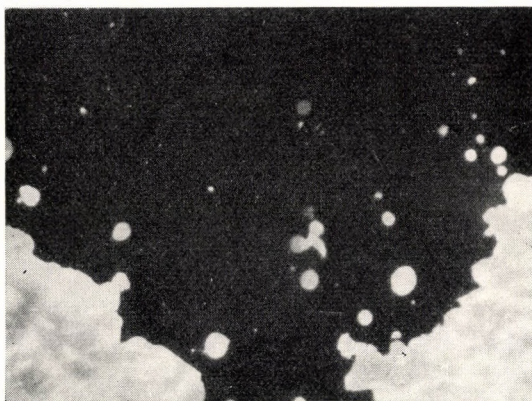


Fig. 4. Ge slice, perforated under the influence of SiO_2 (hundredfold magnification)

Similar tests were made by also adding Si powder and similar to the case of SiO_2 "C" pits developed as well. Their number was proportional to the quantity of admixed Si powder. The rate of the solution and the effect of Si powder was considerably higher in etchant "A" than that of SiO_2 .

In order to check the influence of a possible dust contamination coming from the air, the above mentioned experiments were also made without adding any SiO_2 , but, under dustproof conditions. The data of Table II show that under dustproof conditions etchant "A" induces only few "C" pits on the surface

Table II
Ge slices etched without adding Si, SiO₂
 (under dustproof conditions)

Samples	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No. of "C" pits/cm ²	0	0	0	1	4	0	0	0	5	1
Dia of "C" pits [μ]	—	—	—	6	23÷40	—	—	—	12÷69	30
No. of hillocks/cm ²	357	397	443	476	320	415	290	370	425	315
Dia of hillocks [μ]	6-59	9-75	5-24	6÷18	6÷54	6÷60	6÷53	6÷29	7÷15	6÷44

of most specimens. When the described experiments were made with etchant "A" under standard laboratory conditions, i. e. without air-conditioning and filtering, the Ge surface showed more pits than given in Table II and Table III proves this fact.

From the increase of the number of "C" pits per cm², the conclusion might be drawn that the dust content of the laboratory air has a strong effect upon the density of the "C" pits induced on the surface (see Table II and III).

Table III
Ge slices etched under standard laboratory conditions

Samples	1	2	3	4	5	6	7
No. of "C" pits/cm ²	50	50	34	48	20	43	4
No. of hillocks/cm ²	435	466	209	406	310	321	453
Dia of "C" pits [μ].	3÷78	4÷41	10÷35	10÷35	7÷45	10÷50	5÷30
Dia of hillocks [μ].	3÷18	3÷28	5÷30	2÷40	3÷35	1÷25	1÷28

IV. Mechanism of "C" pit formation

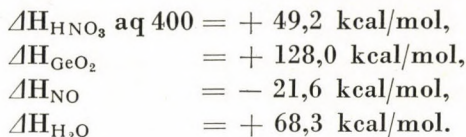
A great number of experiments made on Ge single crystal slices prove, that all contaminants, the solution heat of which in the etchant is higher than that of Ge play a great role in producing "C" pits. Such impurities might be present in the single crystal in the form of occluded micrograins, or can get to the surface from the different chemicals applied, and also from the air.

In the above described case the released heat of solution of SiO₂ particles is decisive in the formation of the pits. Considering f.i. in detail the relation between the quantities of relatively evolved heat between the SiO₂ grain and its

corresponding pit, both having a diameter of 50 μ , the following result was found:



Measured data of the reaction heat of this procedure were not available but on the basis of the formation [18] its approximation would be as follows:



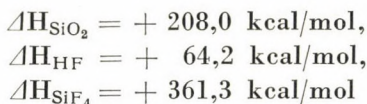
Thus, when oxidizing 1 atomic mass of Ge the evolved heat is + 80 kcal/mol. Further it is known that the reaction heat of process:



comes to + 30 kcal/mol [15], i.e. that when dissolving 1 gramatomic mass of Ge during the originating of fluoric complex the evolved heat comes to + 110 kcal/mol. SiO_2 dissolves in HF similarly to GeO_2 , forming $\text{H}_2[\text{SiF}_6]$. The dissolution heat of the process:



comes from the basis of the formation heat [18]:



to + 33,5 kcal/mol, to which the formation heat of the complex + 36 kcal/mol has to be added, i.e. the total comes to 695 kcal/mol. The above approximate calculation proves that more than the double of the dissolution heat of GeO_2 evolves when dissolving SiO_2 . The + 80 kcal/mol oxidation heat of Ge was left out of consideration, since it is characteristic for the whole procedure occurring on the surface. The local overheating is due only to the presence of SiO_2 . As to their shape the etched pits occurring on Ge surface ("C" pits) may be looked upon as hemispheres.

According to the example the volume of such a pit is $3,2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3$ and the quantity of the dissolved Ge $2 \cdot 10^{-7} \text{ g}$. The order of magnitude of the local overheating can be estimated by the rate of the etching as a function of temperature (Fig. 5). The etching rate of the etchant "A" on pure Ge surface

at 0 °C is 0,6 μ /min. On the basis of the above data the etching rate, related to a pit area having a cross-section surface of $2 \cdot 10^{-5}$ cm², comes to 17,3 μ ; the measured data of Fig. 5 prove, that the local rise in temperature comes to 50 °C. The volume of the spherical SiO₂ grain is $1,6 \cdot 10^{-8}$ cm³. To raise its

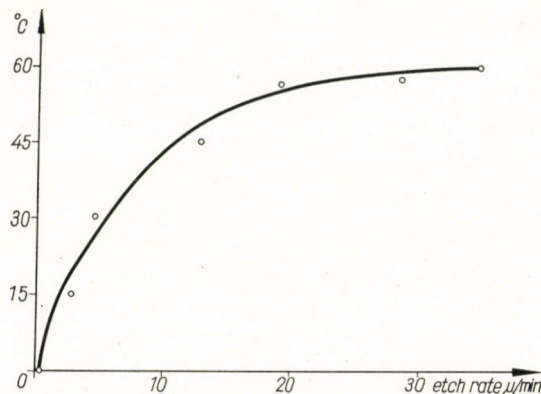


Fig. 5. The variation rate of etching of etchant "A" as the function of temperature

temperature by 50 °C, $8,1 \cdot 10^{-7}$ cal is needed; assuming that the specific heat of the etchant is unity.

We have not considered the heat conduction of the etchant, as the dissolution of a rather little part (some thousandth) of the grain in question would produce the raise of local heat. In practice more SiO₂ is dissolving than estimated, but the convective currents in the etchant set limits to local overheating in the above mentioned order of magnitude.

V. Contaminants which do not dissolve in the etchant

In order to control the influence of contaminants insoluble in the etchant, Al₂O₃ was distributed on the Ge surface with methods similar to those applied in the case of SiO₂ and Si. Al₂O₃ is practically insoluble in etchant "A". In this way a great number of hillocks could be produced (Fig. 6). The number of hillocks is proportional to the amount of added particles. The process of etching can be completely prevented by depositing sufficient quantity of Al₂O₃ particles on one part of the Ge slice (> 50 mg/cm²). The thickness on the covered area did not change at all, whereas the uncovered part of the slice decreased with 5 μ .

Since Ge dissolves from the uncovered parts, the covered part will be successively more and more exposed to the etchant laterally, and, in consequence of its sides being etched, pointed hillocks are formed. After a possible displacement of the covering grain, or due to the lifting effect of the gaseous

products, the spikes become rather unprotected and gradually disappear under the action of the etchant. Tables I, II and III show that hillocks are to be found on the Ge slices after *each* etching. The density of these varies between $2-4 \cdot 10^2/\text{cm}^2$, their diameter between $1-90 \mu$. The diameter of the majority is approx. $1-5 \mu$, big hillocks are not numerous. Concerning the hillocks it has been found (Tables II and III), that they are due to mechanical effects on the specimens. During grinding and polishing the Al_2O_3 particles, which are insoluble in the etchant, become mixed with Ge powder and are embedded

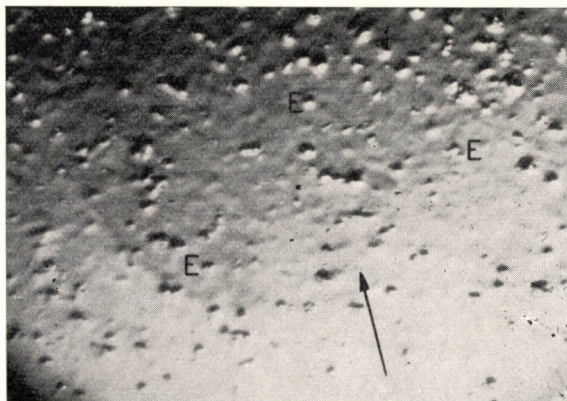


Fig. 6. Hillocks, produced during etching, under the influence of Al_2O_3 ; "E": hillocks; \uparrow : direction of illumination (hundredfold magnification)

between the irregularities of the surface. These embedded particles influence the etch figures as stated above; they are removed during the etching procedure.

This mechanism explains the great density of hillocks in Tables I, II and III. The experiments unambiguously confirm, that after the removal of the damaged layer, the density of hillocks decreases by increasing the time of etching, moreover, after etching for several $2 \div 3$ hours they disappear completely.

The data of Table I show, that the number of hillocks tends to increase proportionally to the quantity of added SiO_2 , though the primary effect of SiO_2 grains is the production of the pits. Microscopic observations made it possible to interpret this phenomenon as the consequence of adherence of SiO_2 grains.

The enhancing effect of the reaction heat acts at the periphery of the adhering group of grains, however, under the central part of the conglomerate the surface being covered extended, flat hillocks arise in this area.

According to Table I the number of hillocks is approximately doubled when the quantity of SiO_2 is 50 times as much and on the other hand the number of cavities increases to $20 \div 25$ times as much.

Thus, it is evident that the presence of SiO_2 particles ensures the predominancy of the cavity-producing effect. Of course, even in this case, one part of the hillocks is either due to the presence of Al_2O_3 particles embedded into the damaged surface layer, or to insoluble contaminants coming from the atmosphere to the surface.

VI. Conclusions

When investigating the etching of Ge-slices, it was found, that in the production of those pits and hillocks which are not correlated to dislocations, solid contaminants play an important role. These might be divided into two groups according to their attitude towards the etchant: whether they dissolve in it, or not. Taking into account, that the impurities occluded in the Ge single crystals play the role of *surface contaminants* when influencing the etch figures, above experiments were performed using contaminants distributed homogeneously on the surface of the crystals. SiO_2 was selected as model material for soluble contaminants.

After great many experiments the conclusion could be drawn, that the primary effect of SiO_2 which dissolves in the etchant is producing the pits. This effect can be explained by local heat development. The experimental observations and thermochemical calculations confirmed this hypothesis.

Al_2O_3 was chosen as an impurity which is not soluble in the etchant. Under the surface of mechanically treated and etched crystal slices one can observe hillocks as well, which may be due to the abrasive and polishing materials embedded into the damaged layer.

Above investigations made it clear, that in the presence of solid contaminants purposefully added, the dust content of the air and the chemicals as well as the applied methods of surface treatment greatly influence the appearance of etch figures, hence one has to be very careful when interpreting these structures as to their origin.

REFERENCES

1. VOGEL, F. L.—PFANN, V. G.—THOMAS, E. E.: *Phys. Rev.* **90** (1953), 489.
2. DEUTSCHANEIN, O.—BERNARD, B.: Proceedings of the Brussels Conference on Solid State Physics (1958), 117—125.
3. TYLER, W. W.—DASH, W. C.: *J. Appl. Phys.* **28** (1957), 122.
4. DASH, W. C.: *J. Appl. Phys.* **27** (1956), 1195.
5. ELLIS, S. G.: *J. Appl. Phys.* **26** (1955), 1140.
6. ROSI, F. D.: *R. C. A. Review* **19** (1958), 349.
7. SZÉP, I.—NÉMETH, M.: *Festkörperphysik*. Akademie Verlag, Berlin 1961; 122.
8. MURAOKA, H.: *Thosiba Rev.* **1** (1960), 580.
9. ABE, T.—OHASHI, T.: *Acta Met.* **9** 1072; 12, 1961.
10. ABE, T.—OHASHI, T.: *Appl. Phys.* **30** (1961), 9.685 (in Japanese).
11. LYON, D. H.: *Western Electric The Engineer* **10** (1963), 5.
12. DALE, J. R.—BRICE, J. D.: *Solid State Electronics* **3** (1961), 105.

13. FAUST, J. W. Jr.: *ASTM Symposium on Cleaning Electronic Components and Materials*; STP 246. March, 1959.
14. NÉMETH Tiborné: Hung. Patent. No. Ma-1311. Procedure providing crystals surfaces of semiconductors with surface roughness better than $0,05\mu$. Date of application: 1964. Jan. 15. (in Hungarian)
15. GMELIN: Germanium. Verlag Chemie GmbH, Weinheim 1958, 497.
16. GMELIN: Silicium. Verlag Chemie GmbH, Weinheim 1958, 639.
17. ROTH, A.—TROITZSCH, H.: *Z. anorg. Chemie* **260** (1949), 337.
18. ERDEY-GRÚZ—SCHAY: *Elméleti fizikai kémia*, II (1958).

EINFLUSS DER OBERFLÄCHENVERUNREINIGUNGEN AUF DIE ÄTZFIGUREN VON GERMANIUM

Frau M. NÉMETH und I. C. SZÉP

ZUSAMMENFASSUNG

Nach Ansicht einiger Autoren hängen gewisse, bei der chemischen Ätzung der Ge-Einkristalle entstehende Oberflächenerscheinungen mit dem Vorhandensein okkludierter Verunreinigungen zusammen. Die Verfasser dieses Artikels untersuchten die Wirkung auf die Oberflächenerscheinungen der im Ätzmittel löslichen und unlöslichen Verunreinigungen. Es wurde festgestellt, daß die auf die Ge-Oberfläche gelangenden löslichen Verunreinigungen (unabhängig davon, ob diese von Mikroverunreinigungen des Kristalls selbst oder von der Umgebung herrühren) auf der Oberfläche Gruben verursachen. Dagegen entstehen infolge der unlöslichen Verunreinigungen, die auf den Ätzprozess hemmend wirken, Erhebungen. Vertiefungen entstehen infolge lokaler Wärmeentwicklung, wie dies durch Experimente und annähernde thermochemische Berechnungen bewiesen wurde. Die Erhebungen entstehen teilweise durch die, in der Oberflächenschicht enthaltenen Schleif- bzw. Polierstoffe.

FIGURES DE CORROSION CHIMIQUE SUR LE MONOCRISTAL DE GERMANIUM, CAUSÉES PAR DES IMPURETÉS DE LA SURFACE

Mme M. NÉMETH et I. C. SZÉP

RÉSUMÉ

Selon l'opinion de quelques auteurs, certaines figures chimiques apparentes sur la surface du monocristal de Ge sont dues à des impuretés occlusées. Les auteurs de cet article ont examiné les effets d'impuretés solubles et insolubles dans le liquide corrosif sur les figures apparentes à la surface. Ils ont trouvé que les impuretés solubles sur la surface de Ge (parvenues à la surface soit des micro-impuretés du cristal même, soit de l'ambiance) forment des cavernes dans la structure de la surface, tandis que les impuretés insolubles, empêchant le processus de corrosion forment des protubérances. La formation des cavernes est due à la chaleur locale, fait prouvé par des expériences et des calculs thermo-chimiques approximatifs. Les protubérances se forment en partie à la suite des substances abrasives et de polissage, se trouvant sur la surface du cristal.

ФИГУРЫ ТРАВЛЕНИЯ НА ГЕРМАНИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПРИМЕСЕЙ

М. НЕМЕТ. и И. Ц. СЕП

РЕЗЮМЕ

Поверхностные образования, возникающие в результате химического травления монокристаллов Ge, некоторые авторы связывают с присутствием окклюдированных загрязнений. В настоящей работе исследовалось влияние растворимых и нерастворимых в травителе загрязнений на вышеуказанные образования. Обнаружено, что растворимые загрязнения, находящиеся на поверхности германия (независимо от того происходят ли они из находящихся в германии микро-загрязнений или занесены туда из внешней среды) образуют углубления на поверхности кристалла. В то время как нерастворимые примеси, препятствуя процессу травления, образуют холмики. Образование углублений сопровождается локальным образованием тепла, что подтверждается опытами и термодинамическим расчетом. Образование холмиков частично связано с наличием на поверхности кристаллов остатков шлифующего и полирующего материала.

INVESTIGATIONS OF THE CURRENT LOAD OF AUXILIARY ELECTRODES PLACED AT THE SIDES OF THE MAIN ELECTRODE SPIRALS OF FLUORESCENT LAMPS

GY. LAKATOS

RESEARCH INSTITUTE
FOR ELECTRICAL INDUSTRY, BUDAPEST

and

J. BITÓ

RESEARCH INSTITUTE
FOR ELECTRONICS, BUDAPEST

[Manuscript received November 25, 1963]

Investigations were made to determine, during the anodic half-period, the current load of auxiliary electrodes that serve as regulating elements to the spirals of the main electrodes of 100 W fluorescent lamps having main dimensions equal to a 40 W lamp, and fed with an A. C. current. Authors set up tables showing the current load of the main electrode as a function of the relative position of the auxiliary electrodes to the spirals.

I. Introduction

In some types of fluorescent lamps fed with D.C. or A.C. currents it is usual to apply auxiliary electrodes as supplementary elements of the main electrode spirals. These auxiliary electrodes can be made of various metals, and are formed differently: they may form wires (of a few mm diameter), or small plates; they can be placed around the main spiral in a cylindric position.

Generally, these auxiliary electrodes are mechanically fixed into the spiral-ends of the main electrodes having the same electric potential. These auxiliary electrodes play an important role equally at the start and during the discharge. They have a significant bearing on the space charging conditions around the electrodes and on the discharge and current conditions.

According to some literary sources [1] the influence of the auxiliary electrodes is acting on the tube voltage of the lamp as well. Varying the surface area of the auxiliary electrodes a change of the tube voltage of the lamp can be observed.

Our previous investigations [2] revealed the variations of the specific current load on the surface of the discharge with varying discharge conditions, and we made use of these characteristics in order to increase the life of some special type of fluorescent lamps.

In that which follows authors have determined the current load of auxiliary electrodes having the same potential values as the main electrodes, in connection with the varying positions of the auxiliary electrodes.

II. Testing conditions, measuring methods

The normal ambient temperature for testing was 25 ± 2 °C, and tests were carried out on fluorescent lamps having the same outer dimensions as the usual 40 W type. The applied electrodes were identical with those of the 80 W type. Auxiliary electrodes in the form of perforated nickel plates were placed at the side of the main spirals, in a parallel position. A 100 mm long extension of the electrodes was protruded into the discharge tube along the axis of the discharge. No external heating effect was directed to the electrodes.

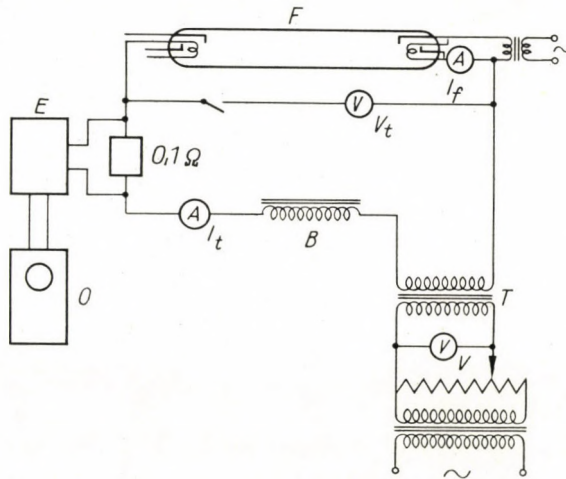


Fig. 1. Connection scheme of the tests

During the tests, the tubes were fed with a stabilized A.C. current. The discharge current of 1 amp. was regulated by a special iron-cored throttle coil. Igniting was made by application of high frequency. The input was controlled at the level of 100 W. The inner surface of the tube walls was coated with a fluorescent material as usual. The gas filling the tubes was composed of 60 mg mercury and a neon-argon mixture of the ratio of 80% Ne and 20% Ar having a pressure corresponding to 2 mm mercury column with an accuracy of $\pm 0,05$ mm Hg.

The special task of the tests required that the ends of the auxiliary electrodes should be separately pulled out from the discharge tube.

The tests were carried out by using a circuit according to the scheme in Fig. 1. The instrument I_t served to indicate the current load of tube F . Instrument V_t served to indicate the tube voltage. The discharge tube was fed by a stabilized A.C. source, by means of a separating transformer and an autotransformer.

The discharge current passes through the measuring resistance of 0,1 Ohm; this voltage drop is amplified by the amplifier E , and the amplified signal is lead to the vertical input of the oscilloscope O . Preceding the measuring operations, the vertical amplification of the oscilloscope was measured and calibrated by an A.C. current. By making uses of the calibration curve, the discharge current could be determined by the magnitude of the signal size in the oscilloscope. Possibilities were arranged to compare the shape of the current curves seen in the oscilloscope and to make snapshots. During the tests, the various methods of connection as illustrated in Fig. 2 were carried

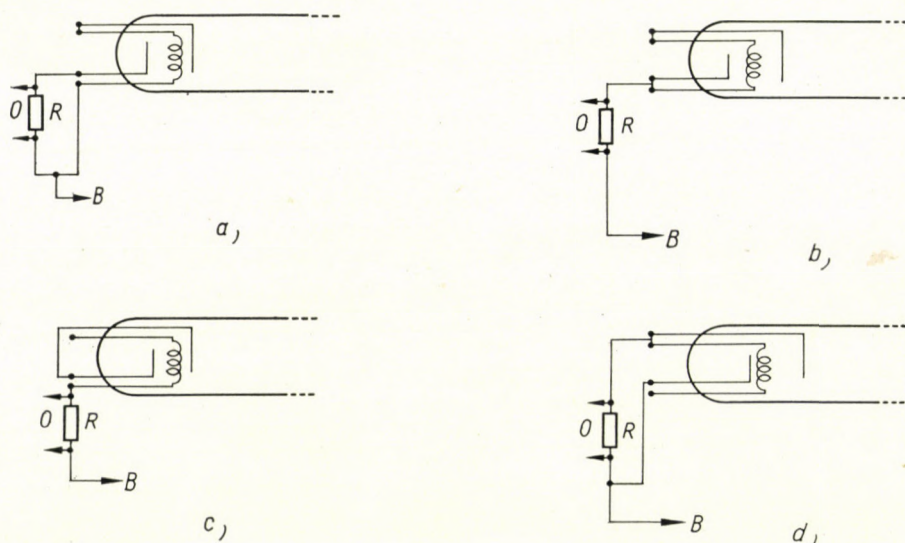


Fig. 2. Auxiliary connections for the determination of the current load of auxiliary electrodes and of main spirals

out. These served to determine separately the current load of the two auxiliary electrodes of different function, and to compare the shapes in the oscilloscope. The two parallel arrows in Fig. 2 on both sides of resistance R indicate the connecting points to oscilloscope O . A third arrow that points to B indicates the point at which the circuit to be tested joins the inductive limiting element B placed into the discharge circuit.

For the sake of a positive control, the discharge tube was put in action for 20 minutes before the measurements began in order to have a stabilized state under normal discharge conditions.

III. Results

By making use of the connecting conditions according to Fig. 2, the current load of the spirals and that of the auxiliary electrodes could be separately stated. When the current of the auxiliary electrodes passed the resistance

R the oscilloscope diagram as a consequence of the A. C. working period showed the signal of rectification. When the main electrode under test assumed the function of a cathode during discharge, no current was observed through the auxiliary electrode. In this period the discharge current passed through the cathodic spiral by simultaneous emission of the electrons into the discharge space.

Due to the negative potential at the auxiliary electrodes, some minute current load may pass through them, although this ionic current is not observable at all.

According to Table I, the current load during the anodic half-period of the spiral equals — when the auxiliary electrode is in the position *b*, only 19% of the discharge current. According to our measurements, the other 81% of

Table I

Sign of the position of the auxiliary electrode	Determination of the relative position of the auxiliary electrode to the spiral		
	Axial distance of the auxiliary electrode from the spiral, <i>l</i> [mm]	Radial distance between the two auxiliary electrodes, <i>d</i> [mm]	Current through the spiral in percents of the total, %
<i>a</i>	0	12	6,7
<i>b</i>	0	7	19,0
<i>c</i>	10	7	13,2
<i>d</i>	20	7	24,9

the current passes through the auxiliary electrodes. It is to be noted, that the current input of the two perforated plates placed as auxiliary electrodes close to the spiral, is not always the same; the distribution of the current load between the two auxiliary electrodes depends not only on the relative position to the spirals but also on the relative position of the two auxiliaries to each other.

Based on the observed effects, the next series of experiments served the purpose of showing the influence of an arrangement when the relative position of the two auxiliary electrodes to the spiral was not the same.

Two parameters were varied during the experiments. One of them was the distance of the auxiliary electrode from the spiral measured in the radial direction within the discharge tube. The other parameter was the distance of the auxiliary electrodes from the spiral in the axial direction of the discharge tube.

In comparing the position *a* and *b*, the current load of the spiral increases when the radial distance decreases (NB. the values of the radial distance, as

given in the Table I, are twice as much as the distance measured from the spiral). On the other hand, when the distance between the auxiliary electrodes and the spiral increases, the current load of the spiral is the lowest at an axial distance of 10 mm (Pos. *b*, *c*, and *d*).

As seen from the preceding, the position of the auxiliary electrodes has a very great bearing on the superficial current load of the spiral. It is important to determine the detailed current load condition when taking the life of the electrodes into consideration. The electronic and ionic attack exerted on the electrodes during the cathodic and anodic period highly influences the charge of the electrodes, and their deterioration due to increased charge is decisive as far as the life of the lamp is concerned. When we are able to disclose these conditions, we will be in a position to ensure a longer life of the lamp.

The current load of the auxiliary electrodes was the subject of tests made by TOOMEY, carried out at a time after our own experiments, but were made known before our paper could be published [4]. His investigations were carried out under different conditions than the ours were. He made the tests with a D.C. current instead of A.C. He applied an uncoated cathodic spiral. Further, in his paper there is no mention made of the performance of the tube, the shape of the auxiliary electrodes and their position or distance.

In a previous study the authors of the present paper dealt with the question referring to the varying function of the auxiliary electrodes, in one or the other half-period of their discharge. By means of measurements carried out at random, authors stated that during the cathodic half-period the auxiliary electrodes are acting to diminish the voltage drop at the cathodic pole. Authors then did not extend their investigations to determine the superficial current charge in the cathodic and anodic half-periods.

Another series of experiments should be made by applying probe measurements in order to obtain more detailed data that could help to increase the life of the electrodes.

REFERENCES

1. HINMAN, D. D.—FOX, R. S.: *Ill. Eng.* **56** (1961), 222.
2. LAKATOS, Gy.—BITÓ, J.: *Villamosság* **12** (1964), 446.
3. LAKATOS, Gy.—BITÓ, J.: Előadás az elektronfizikai és vákuumtechnikai szimpozionon, Balatonföldvár 1962 (Lecture held at the Symposium on Electron and Vacuum Physics and Vacuum Engineering, Balatonföldvár 1962).
4. TOOMEY, C. L.: *Ill. Eng.* (1962), 588.

UNTERSUCHUNG ÜBER DIE STROMAUFNAHME DER IN LEUCHTSTOFF- LAMPEN VERWENDETEN HILFSELEKTRODEN

GY. LAKATOS und J. BITÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Versuche wurden durchgeführt, um die Stromaufnahme während der anodischen Halbperiode von Hilfselektroden zu bestimmen, die als Regelelemente zu der Hauptelektrodenspirale von Leuchtrohlampen eingebaut sind, wobei sich um wechselstromgespeiste 100-W-Lampen handelt, deren Dimensionen mit denen der 40-W-Lampe übereinstimmen. Es wird in einer Tabelle die jeweilige Stromstärke in der Hauptelektrode als Funktion der relativen Lage der Hilfselektroden mitgeteilt.

RECHERCHES SUR LA CONSOMMATION ÉLECTRIQUE DES ÉLECTRODES AUXILIAIRES EMPLOYÉES DANS LES TUBES LUMINESCENTS

GY. LAKATOS et J. BITÓ

RÉSUMÉ

Les auteurs déterminent, pour des tubes luminescents de 100 W de dimensions analogues à celles des tubes luminescents de 40 W, l'intensité de courant des électrodes auxiliaires employées à côté de la spirale électrode, dans la demi-période anodique. En modifiant la position des électrodes auxiliaires par rapport à la spirale cathodique, ils observent comment les électrodes auxiliaires influencent le pourcentage de courant des spirales dans les différentes positions. Les résultats sont donnés en pour cent du courant de décharge.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТРЕБЛЕНИЯ ТОКА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ, ПРИМЕНЯЕМЫМИ В ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ ЛАМПАХ

Д. ЛАКАТОШ и Я. БИТО

РЕЗЮМЕ

Авторы определяют токовую нагрузку вспомогательных электродов, примененных возле спирали электродов, в анодный полупериод, для люминесцентных ламп с потребляемой мощностью в 100 *вт*, идентичных по наружным размерам с люминесцентными лампами 40 *вт*, и питаемых переменным током. Изменяя расположение вспомогательных электродов по отношению к катодной спирали, указывается, каким образом воздействуют вспомогательные электроды на процентную токовую нагрузку спирали в отдельных положениях. Результаты даются в процентах разрядного тока.

SEMI-AUTOMATIC RECORDING OF VOIT-MICROSECOND CHARACTERISTICS

GY. VAJDA

DOCTOR OF TECHN. SC.
MINISTRY OF HEAVY INDUSTRIES

[Manuscript received December 20, 1963]

In this paper a measuring method is given for the statistical test of breakdown and flashover. The equipments developed make possible the automatic evaluation of the measurements. By the procedure discussed, the probability distribution of the breakdown in function of the voltage may be plotted, the distribution of the time lags measured and the set of volt/ μ sec characteristics plotted.

I. Introduction

One of the most important methods of the atmospherical overvoltage protection is the co-ordination of insulations. This assures that in the case of an overvoltage of dangerous value, the breakdown should occur at a definite point of the system, where it cannot cause considerable damage (mostly between the spark-gaps of the overvoltage protecting devices) and at the same time, at other points of the system no breakdown should occur on the insulations, even at higher voltages. Accordingly, to realize a suitable protection, the dielectric strength of the insulations and the sparkover voltage of the protective devices must be known.

As a consequence of endeavouring to attain economic dimensions, the difference between the insulations breakdown voltages and the sparkover voltage of the protective devices shows a tendency to decrease. Therefore, the accurate knowledge of decisive values is becoming increasingly important. For a perfect co-ordination of the overvoltage protecting devices and the insulations to be protected, indication of some average breakdown voltages is not sufficient, therefore the actual values of the impulse breakdown voltages must be taken as a basis.

If in a given arrangement breakdown occurs under given circumstances, two facts must be considered.

One of these is that the breakdown voltage is not a discrete value, but the measurable values are dispersed within a certain voltage range. The deviation is essentially greater than the incertitude of the test method and the error of the voltage measurement, so the scatter must be considered as a characteristic feature of the breakdown. The scatter is caused partly by

inhomogeneity and contamination of the insulating materials, as well as by fluctuations in the characteristics of the environment (temperature, air pressure, atmospheric humidity). The other reason of the scatter is that the quantum-mechanical statistical feature of the elementary processes taking place during breakdown manifests themselves macroscopically, enlarged through the electron avalanche. Due to the dispersion, when repeating a test with the same voltage and under identical circumstances, it does not by all means cause a breakdown again. Under given circumstances, occurrence of the breakdown may be characterized by a probability p_b .

The other fact to be considered is that the duration of the surges is commensurable with that of the breakdown formation. Consequently, the time lag between the start of the voltage stress and the ensuing of the breakdown also shows a statistical deviation, depending on the circumstance, to what extent are the microconditions, necessary for the breakdown at the given instant, fulfilled (if there are, at the place and time wanted, charge carriers to start the breakdown and to further carry on the physical processes.)

The higher the voltage is, the better are the circumstances for the breakdown, probability for the breakdown increases, while its time lag is reduced. These relations can be account for by the breakdown probability-voltage and breakdown voltage-time lag characteristics, respectively, the latter used to be called volt/ μ sec characteristics.

Concerning the characteristics of this kind of insulations and overvoltage protective devices, few detailed data have been published. This is first of all due to the fact that the tests demand much work and time. Thus, it seemed to be practicable to elaborate a simple — half-automatized — test method permitting to plot the characteristics relatively quickly with a suitable accuracy for the practice. It is expedient to treat the phenomena relative to the breakdown, as well as the experimental results with the method of probability calculation and mathematical statistics.

II. The developed test method

To plot the necessary characteristics, a high number of breakdowns and flashovers, respectively, must be produced at different voltages on the arrangement tested. By the test the value of the impulse voltage must be regulated and measured, it must also be observed if the breakdown had actually taken place and if so the time lag must be measured. As control and measurement of the voltage is relatively simple, these problems were solved by the usual methods, for the other two tasks special equipments have been developed.

The schematic diagram of the measurements is shown in Fig. 1. With the high-voltage produced by transformer T , the surge generator S is fed through the rectifier R . The value of the impulse voltage may be regulated

from operating table O by the motor M (adjusting the spheres of the surge generator), for adjusting the charging serves voltage controller C , this being hand-operated, too. The D.C. voltage feeding the surge generator is measured by the static voltmeter V .

At the low-voltage part (I_1) of the surge generator starter the operating method may be adjusted, its high-voltage part (I_2) is connected to the first sphere gap of the surge generator developed as a triggatron. The high-voltage

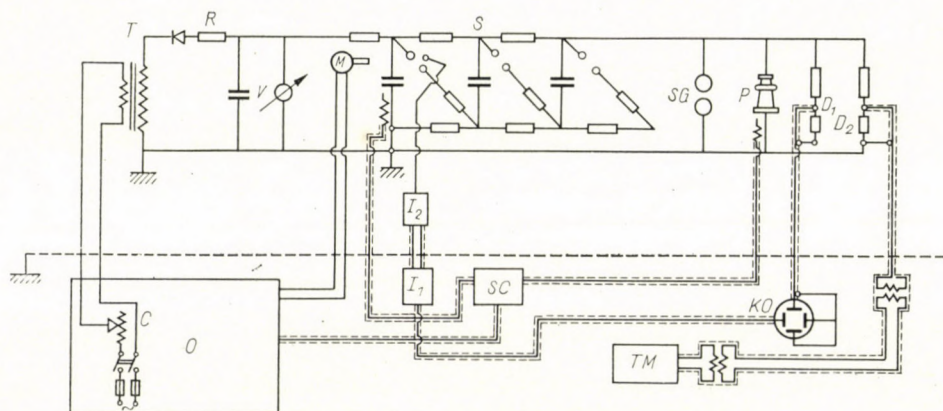


Fig. 1. Circuit diagram of the statistical measurements

part gives high-voltage impulses and if the charging voltage is sufficiently high the flashover of the surge generator spheres gets started. The equipment I_1 produces two impulses, one of them may be used for starting the cathode-ray oscilloscope, the other may be delayed arbitrarily with respect to former and this latter serves for starting the surge generator, through the high voltage part. In one of the operations the starter produces repetitive impulses of adjustable frequencies, at that time the surge generator gives repeating impulses by the preadjusted frequency. In an other operation the starting impulse may be produced by a push button on the low-voltage part, the surge generator is started only by operating this button.

The starter facilitates the measurement, but is not indispensable. Without a starting equipment the frequency of the impulses can be adjusted by controlling the charging voltage.

The value of the impulse voltage can be measured partly by the sphere gap SG and partly by the cathode-ray oscillograph KO joining the voltage divider D_1 (It is also possible to use a peak-voltmeter). If loading of the surge generator is constant, and the repetition time is long enough, also the crest of the charging voltage may be measured without starter by a voltmeter V , which can be calibrated to impulse voltages. The so measured values were in perfect accordance with those measured by sphere gap, or cathode-ray oscillo-

graph and the voltage measurement is considerably quicker. To obtain standard values, the greater part of the voltage figuring in the paper was measured by a sphere gap.

The surge counter SC counts all surges given by the surge generator, recording separately the flashovers and breakdowns of the proofed object P. Besides, it is suited for stopping the surge generator after all preadjusted impulses and flashovers, respectively, are over.

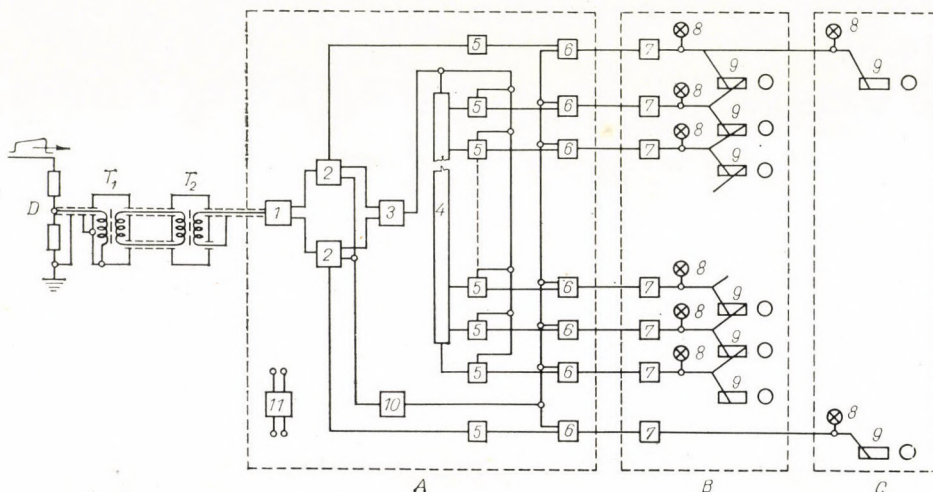


Fig. 2. Block diagram of the time meter

D voltage divider; T_1 and T_2 pulse transformers; *A* the pulse forming unit: 1 differentiator and limiter, 2 bistable multivibrator 3 square wave former and amplifier, 4 delay line, 5 logical integrator, 6 time discriminator, 10 reset stage, 11 battery eliminator; *B* signal registering unit, 7 amplifier, 8 signalling lamp, 9 electromechanical metering relay; *C* unit for recording the number of pulses and breakdowns.

The time meter *TM*, detects the time lag of the breakdowns, classifying and counting them at distinct intervals. The instrument gets the signals from the voltage divider D_2 through two impulse transformers. The time meter includes 10 electromechanical metering relays, so it can count the times in 10 intervals, one time is registered only by a single counter. The measuring range and the length of the intervals may be adjusted by a simply exchangeable delay line, in the measurements two linear delay lines have been applied till now. One of the delay lines permits the classification of the time lags between 0 and 5 μsecs with intervals of 0,5 μsecs , while the other within 0 and 10 μsecs , at intervals of 1 μsec . Naturally, delay lines of other time scales or of not linear calibration may be used, too. Accuracy of the time metering is higher than 0,1 μsec .

Also in this instrument two further relays count the number of all surges and of all breakdowns. The block scheme of the time meter is illustrated in Fig. 2.

The course of the measurements is generally as follows. After adjusting the value of the impulse voltage, the number to be given to the proof object or of the permissible breakdowns must be preadjusted on the surge counter. By switching the starter on the series of measurements begins and is automatically stopped after a number of adjusted measurements. At the end of the series, the total number of the surges and breakdowns may be read off directly, the ratio of these two values gives the probability p_b of the breakdown. Besides,

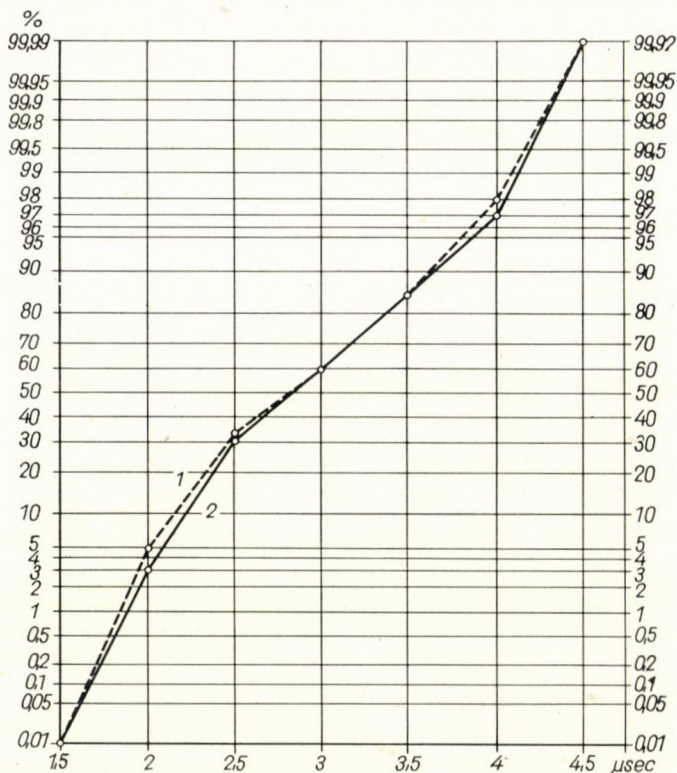


Fig. 3. Distribution of the time lags on the insulation to earth of a 20 kV isolator at +152 kV, out of 100 flashovers: measured by the time meter (1), determined by oscillograms (2)

one may read off the way the breakdowns single time lags within the intervals determined by the delay line are distributed. Evaluation of the values measured will be discussed in a further article of the author, entitled: "Test method for determining the impulse withstand strength of electrical insulations". Thereafter the series of measurements can be continued at the following voltage step. A typical measurement is shown in Table I concerning the test between phases of a 10 kV isolator, with surge voltages of positive polarity.

From the viewpoint of the measurements the reliable work of the time meter is of special importance, the equipment proved to be perfect in the prac-

Table I
Measurement of a 10 kV

Voltage		Impulse [piece]	Flashover [piece]	P_b [%]	Short (5 μ s) delay line																
Polarity					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11						
[cm]	[kV]				0-0,5	0,5-1	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5	>5						
7,6	189	50	50	100		37	13														
7,0	178	50	50	100		27	23														
6,4	166	50	50	100		10	28	12													
6,26	163	50	50	100		1	4	44	1												
6,2	162	50	50	100			3	43	4												
6,0	158	50	50	100				40	10												
5,7	151,5	50	50	100				15	31	4											
5,4	145,5	50	50	100				2	29	18	1										
5,1	139,5	50	50	100					7	33	10										
4,8	131,5	50	50	100						5	28	13	3								1
4,6	126,5	116	100	86,2																	
4,5	124	169	100	59,1																	
4,4	122	353	122	34,5																	
4,2	117	200	6	3																	
4,0	111	100	0	0																	

tice. After calibrating by electronic devices, the agreement of the values measured by time meter, and those of the oscillograms were verified at actual surges. For that purpose the surge voltage oscilloscope type PL 9191 of the AEG was applied, in Figs 3 and 4 the results of two of these comparative measurements may be seen. The figures illustrate the empirical distribution of the time lags in Gauss' co-ordinate system, on the horizontal axis the time lags are indicated in μ secs, while on the vertical one the number of the time lags being shorter than the instant tested, of all the time lags measured in percentage. On account of the presentation possibility given, the initial and final values of the distributions were indicated — arbitrarily — at values 0,01 and 99,99%. The function values of the distributions plotted by the time

isolator in connection d_2

Long (10 μs) delay line											t [μs]	s [μs]	s/t	t_{50} [μs]	$\frac{t_{50}-t}{t_{50}}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11						
0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	≥ 10						
												0,88	0,22	0,25	0,84	0,05
												0,98	0,25	0,26	0,96	0,02
												1,27	0,33	0,26	1,27	0,062
												1,70	0,21	0,12	1,73	0,01
												1,76	0,19	0,11	1,76	0
												1,85	0,20	0,11	1,81	0,02
												2,14	0,29	0,14	2,16	0,01
												2,43	0,29	0,12	2,40	0,01
												2,78	0,29	0,10	2,77	0,003
												3,43	0,45	0,13	3,36	0,02
				53	32	12	2	1				4,16	0,84	0,20	3,94	0,05
				14	57	22	4	1	2			4,77	0,93	0,19	4,63	0,03
				7	57	47	9	—	1	1		5,05	0,88	0,17	4,95	0,02
						2	2	2				6,5	0,89	0,14	6,5	—
												—	—	—	—	—

meter and on the basis of the oscillograms are everywhere lower than 0,1 μsec . Considering that the evaluation of the oscillograms is charged by an uncertainty of abt. 0,1 μsec (because of nonlinearity of the time deflection, accuracy of the time calibration, distortion of the cathode-ray tube, line thickness, etc.), the agreement may be judged to be perfect.

Possibility of reproducing the distribution functions is illustrated by Fig. 5 on the basis of comparing two series of measurements consisting of at least 1000 flashovers. According to the figure, on the section between the probability values 1,0 and 99,0%, the deviation between the distribution curves is smaller than 0,1 μsec , while between the probabilities 5,0 and 95,0% it is below 0,05 μsec . Similar results were obtained when testing other arrangements, too.

The possibility of reproducing the breakdown probability is illustrated in Table II, on the insulation to earth of a 20 kV isolator.

Fig. 6 is characteristic of the two delay lines overlapping, at the probability values exceeding 0,5% the deviation between the distribution curves plotted by two delay lines is smaller than 0,15 μsec .

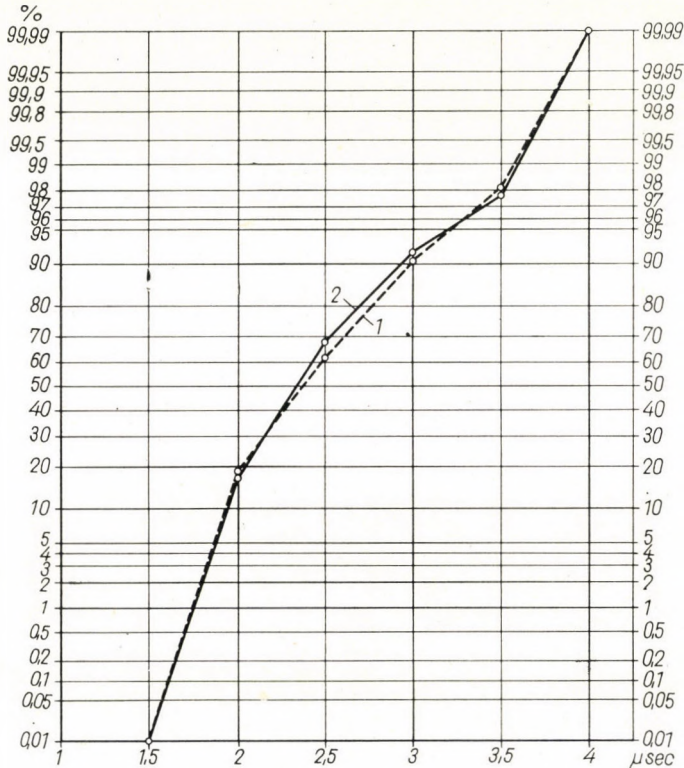


Fig. 4. Distribution of the time lags on the insulation to earth of a 20 kV isolator at $-156,5$ kV out of 53 flashovers: measured by the time meter (1), determined by oscillograms (2)

According to experiences, the repetition time of the surges is of relatively small influence, the measurements were performed with a frequency of 5–10 impulses/min.

For the sake of completeness the atmospherical conditions were recorded, too. During the total duration of the tests the temperature was between 16 and 22 $^{\circ}\text{C}$, the relative atmospherical humidity between 46 and 60%, while the air pressure between 741,0 and 756,6 Torr. The differences between the extreme values are so small that the atmospherical conditions cannot greatly influence the measurement results. Naturally, within a day and especially during a single series of measurement, the variations were much smaller.

Table II

Flashover probability on the insulation to earth of a 20 kV isolator

Time of measurement	Flashover probability	Number of flashovers
February 6, 1963	1300	0,97
February 7, 1963	1000	0,97
February 14, 1963	2100	0,98
February 15, 1963	2000	0,97

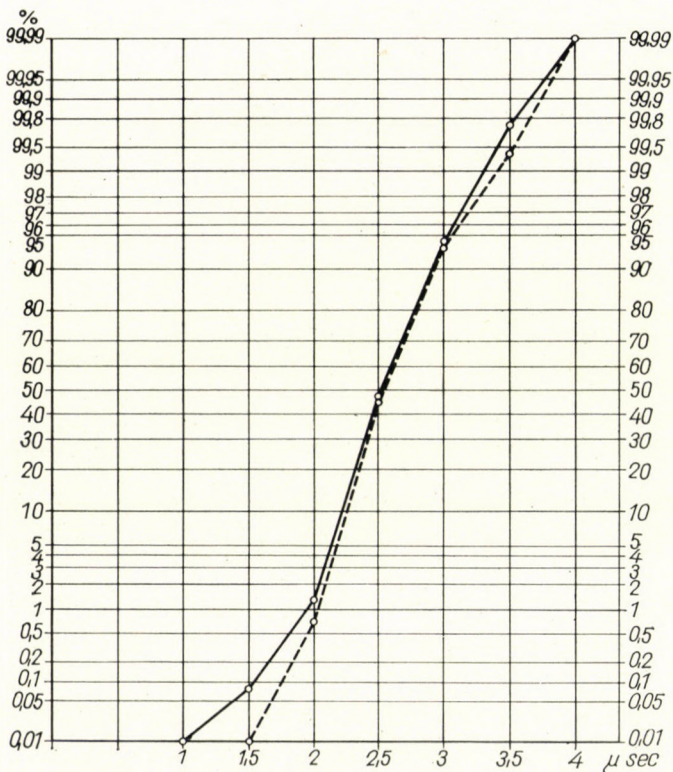


Fig. 5. Flashovers on the insulation to earth of an open, 20 kV isolator, surges on the moving contact, +156 kV, 10 pulses pro minutes: 6th February from 1300 flashovers (1), 7th February from 1000 flashovers (2)

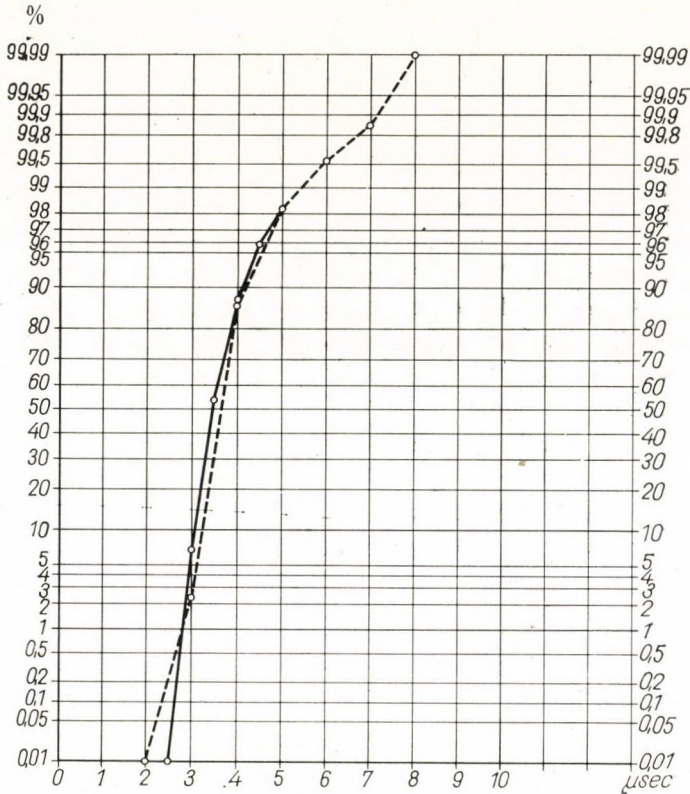


Fig. 6. Flashovers on the insulation to earth of an open, 20 kV isolator; surges on the standing contact with +176 kV by 10 pulses pro minutes: 14th February from 2100 flashovers measured by a delay line of 5 μsec (1), on the 15th February out of 2000 flashovers measured by a delay line of 10 μsec (2)

III. The arrangements tested

Temporarily the measurements were carried out for testing the breakdowns in air.

The first time the test method was proved for a 10 kV insulator and for a 10 kV, 1000 A isolator. The insulator was tested in the arrangement as per Fig. 7, the circuits realized with the isolator are shown in Fig. 8. In the course of the measurements the frame of the isolator was placed on insulators its height was 0,6 m above the earth. In Fig. 8 the arrangements a—d correspond to the IEC recommendations, in some cases, in order to force the breakdown between certain points, also connections different from this were applied. The measurements were performed with 1/50 waves.

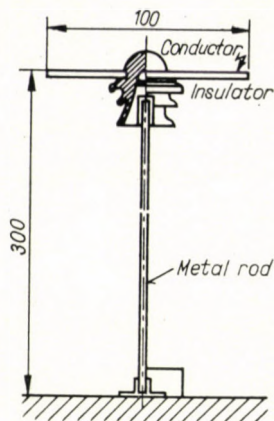


Fig. 7. Arrangement with the test of an overhead line insulator

IV. Statistical characteristics of the breakdown

In the last years many publications have appeared on the statistical deviation of the breakdown voltages and on the aspect of the breakdown probability, one part of them containing also experimental data. The publications are, however, often conflicting and the greatest part of the problems is undecided as yet. The most important questions are as follows:

- a) By what sort of distribution function may probability of the breakdown be plotted in function of the voltage;
- b) by what values is it practicable to characterize the breakdown voltage;
- c) on how many voltage steps must measurements be made to plot the characteristics in a reliable way;
- d) how many impulses are necessary at one voltage step;
- e) what is the relation between the characteristics plotted at different wave shapes.

All these problems may be solved in an experimental way only. On the basis of a sufficiently high number of measurements the probability distribution of the breakdown voltage may be plotted. The test method developed considerably facilitates this as the number n of all impulses and the number of the breakdowns n_b are recorded automatically at a voltage adjusted. If the value n_b is high enough, the frequency of the breakdown n_b/n is, with a good approximation, equal to the breakdown probability p_b .

Newertheless, when interpreting the probability p_b , the test method and way of the breakdown must be considered. By agreement, in the case of an impulse voltage, the highest voltage actually arising during the stress is considered as the breakdown voltage. Consequently, with a breakdown at the front,

the momentary value prevailing at the instant of the breakdown, while for a breakdown at a wave crest and tail, the crest value is decisive.

According to our experiences hitherto obtained within this range, where $p_b < 1$, the breakdown always occurs at the wave tail. If the breakdown is tested

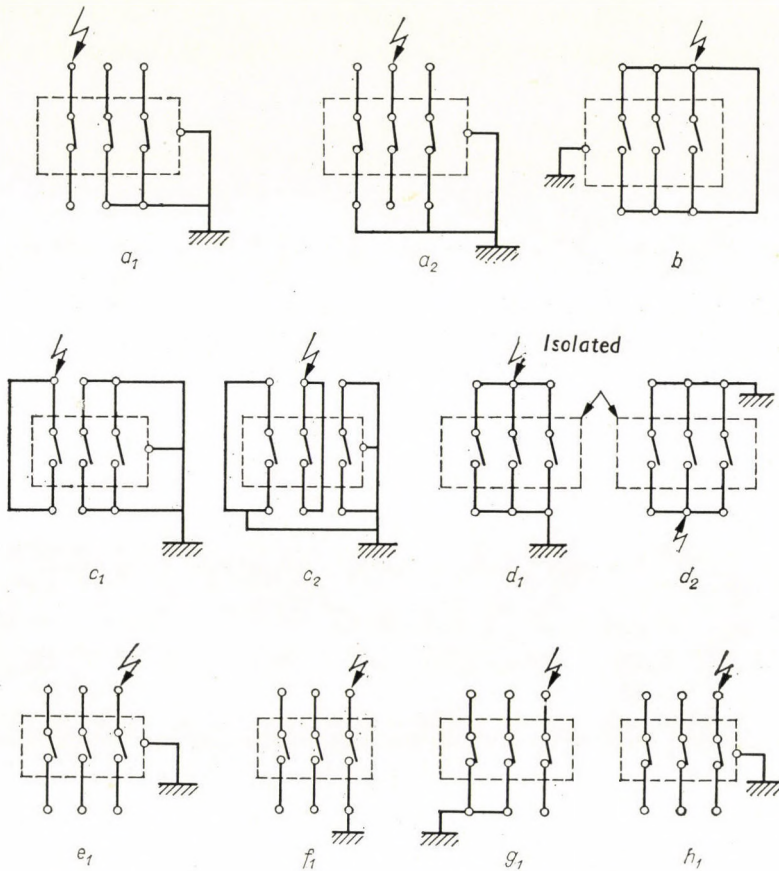


Fig. 8. Connections for isolator tests

by a fixed voltage, there is no guarantee that the breakdown would not arise—after a longer delay — at a voltage of lower crest. Therefore, on the basis of the value p_{bi} measured at the voltage U_i only that may be stated without doubt, that there is a probability of the breakdown taking place at a voltage exceeding U_i which is $1 - p_{bi}$. Consequently, p_{bi} is the resultant probability of the breakdowns arising at voltages U_i and below, that is, it is a point of experimental distribution.

Figs 9—11 illustrate the results of some of our measurements, on the horizontal axis the voltage is shown in kV, while on the vertical axis the value

of p_b is given in percentage. The measured points were, instead of interpolating the curves, interconnected by dotted lines, thus illustrating the tendencies better. Already the relatively small number of measurements performed till now furnish data for approximating the problems mentioned at the beginning of the chapter, or at least for raising the questions more unambiguously.

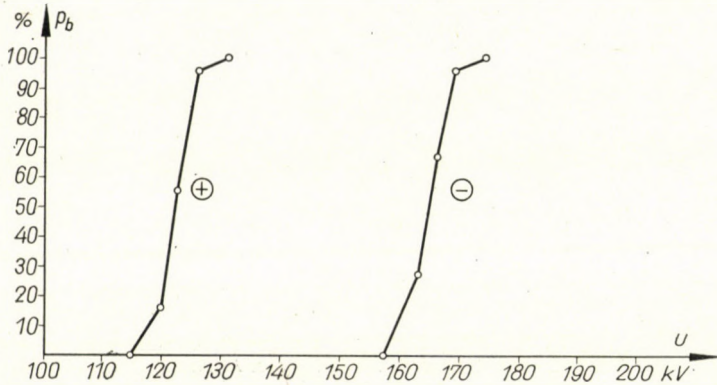


Fig. 9. Flashover probability of an insulator type ER 10 in function of the voltage

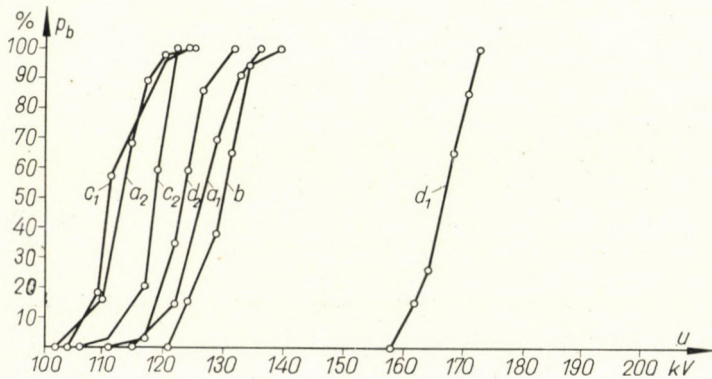


Fig. 10. Flashover probability of a 10 kV isolator in function of the voltage, at positive polarity, with the connections of Fig. 8

From the figures it can be seen that also the shape of the characteristics depend considerably, besides the value of the breakdown voltage, also on the connection and thereby on the character of the electric field. This effect seems to be greater at a negative polarity, than at a positive one. The role of the field character is especially striking with a breakdown between the isolator contacts, extremely great differences may be observed depending on the circumstance, which of the contacts is stressed (arrangements d_1 and d_2). The conditions first

of all depend on the polarity of the electrode of greater field strength. It was interesting to observe that in the open state of the isolator the dielectric strength to earth was smaller than in a closed position.

Further on the publications of literature regarding the individual problems will be outlined, completing them with our own experiences.

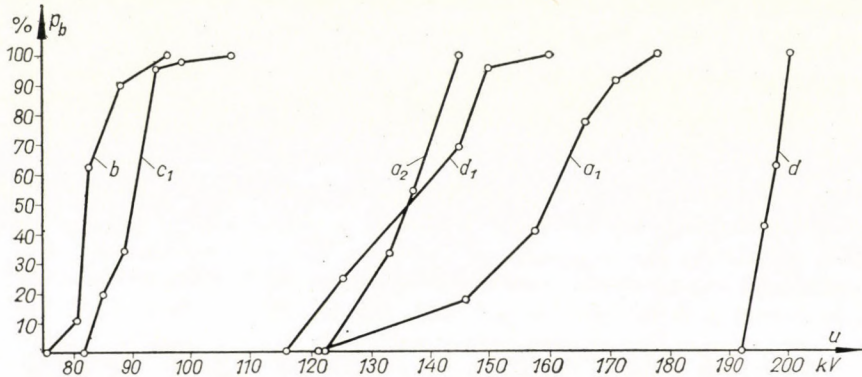


Fig. 11. Flashover probability of a 10 kV isolator in functions of the voltage at a negative polarity, with the connections of Fig. 8

1. Analytical approximation of the empirical distribution

This problem is not merely of theoretical importance. The breakdown voltage may be characterized by a discrete value, with a distinct reliability and probability, only if the measurement results can be elaborated by mathematical methods. For this purpose the empirical distribution must however be approximated, by some analytically expressed distribution function.

Generally, the normal distribution is applied, according to which the probability of the breakdown taking place at a voltage lower than U is

$$\begin{aligned}
 p_b(U) = F(U) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^U \exp\left[-\frac{(U - U_m)^2}{2\sigma^2}\right] dU = \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{U - U_m}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{1}$$

where U_m is the mean value of the distribution and σ its standard deviation, while Φ the symbolic representation of the standardized, normal distribution.

In many references a normal distribution is assumed [1-3], but these do not always approach the measurement-results well [4-6]. The fact that the normal distribution attains the value $p_b = 0$ at a voltage $-\infty$, while the value $p_b = 1$ at $+\infty$, is opposed to the physical reality, too. In the literature

suggestions are made for the use of binomial [7, 8], POISSON'S [9], not central t [10], PEARSON'S [10], twice exponential GUMBEL I [11], and twice-exponential logarithmic [11] distributions.

BAUMANN [1] and RJABOV [2] approximate the distribution curve by the straight line

$$p_b(U) \cong \frac{1}{2} + \frac{U - U_{50}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \quad (2)$$

considering the first two terms of the infinite series of curve S , where U_{50} is the 50% probability value. At the medium section this straight line approximates the normal distribution very well, in the section between $F(U) = 0,1$ and $F(U) = 0,9$ the deviation is less than 6,7%, in the range between 0,2 and 0,8 it is smaller than 2,8%. With the linear approximation, instead of the statistical deviation the symbol

$$\sigma = \frac{U'_{100} - U'_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{U_{50}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{U'_{100} - U'_0}{U_{50}} = \frac{U_{50}}{\sqrt{2\pi}} \cdot h \quad (3)$$

may be introduced, where U'_0 and U'_{100} are the points of intersection of the straight line with the ordinates $p_b = 0$ and $p_b = 1$, respectively. According to Baumann, in the air $h \leq 10\%$, while in a liquid $h < 30\%$.

The greatest part of the empirical distributions plotted in the course of our measurements may be approximated by curves S having well-defined, finite initial and final values, which in the middle section within a significant range may be replaced with a good approximation by a straight line. Some distributions were nearly uniform throughout, but a few irregularities could be observed.

The greater part of the found distributions could be approximated by a suitable matched truncated normal distribution, yielding

$$p_b = \frac{\int_{-\infty}^U \exp\left[-\frac{(U - U_{50})^2}{2\sigma^2}\right] dU}{\int_{U_0}^{U_{100}} \exp\left[-\frac{(U - U_{50})^2}{2\sigma^2}\right] dU}, \quad (4)$$

where U_0 and U_{100} are the points of intersection with the ordinates $p_b = 0$ and $p_b = 1$, actually observed. Also the end points of the truncated normal distribution are in the infinity; to eliminate this, if the characteristic is symmetrical for U_{50} , the approximation

$$p_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left[\frac{\pi}{\Delta U} \left(U - U_{50} + \frac{\Delta U}{2}\right)\right] \quad (5)$$

may be considered, too, where $\Delta U = U_{100} - U_0$. Formula (5) is naturally interpreted only in the range $U_{50} - \Delta U/2 \leq U \leq U_{50} + \Delta U/2$, below this $p_b = 0$, above it $p_b = 1$.

2. The breakdown voltage

From the viewpoint of practice, some medium values (average value, means, median, etc.), as well as the lower and upper limit values, respectively, are significant.

Formerly, for characterizing the impulse breakdown, determination of the U_{50} 50% breakdown voltage was in use exclusively. By trials such voltages could be adjusted, at which the breakdown took place in half the cases. The method is very lengthy, wearisome, uncertain and subjective. Recently plotting of the empirical distribution $p_b = F(U)$ is being generalized, by these U_{50} may be determined on the basis of the intercept belonging to the value $p_b = 0,5$. It is worth mentioning that the value of U_{50} and the probable value of the distribution are not by all means equal, U_{50} is the median of the distribution.

Lately the problem that determination of the 50% breakdown voltage might be given up has been raised by several experts. As from the measuring techniques point of view the 50% breakdown voltage may be determined in the most simple way (based on the characteristics $p_b = F(U)$ and for obtaining U_{50} no further calculations are needed either, these suggestions are not correct. For giving the general character of the breakdown voltage, U_{50} is still by far the most suitable.

From the viewpoint of practice, the highest voltage U_0 at which a breakdown does not occur in any case (0% breakdown voltage), as well as the lowest voltage U_{100} at which a breakdown certainly arises (100% breakdown voltage), must be determined. In case of a few measurements, these values may reliably be stated only if treatment of the distributions is based in a suitable way mathematically.

In the literature one may often find such views, that the determination of U_0 and U_{100} is very doubtful. First of all these ideas originate from the circumstance that the empirical distribution was approximated by a normal distribution function, which function attains its lower and upper limit asymptotically in the infinite. Therefore, instead of the values 0 and 100% application of the numbers 1; 2; 2,5; 4; 5; 10; 16 and 99; 98; 97,5; 96; 95; 90; 84%, respectively, have often been suggested. Generalization of the normal approximation for the limit values of the distribution is obviously wrong and also physically unjustified.

The measurements have shown, that the limits are real characteristics of finite values and the voltages U_0 and U_{100} , respectively, may be properly

determined by the test method discussed. Reliability of the measured values is not limited by the physical process, but by the uncertainty of the voltage regulation and -measurement. With these values the breakdown probability was not altered by the multiple repetition of the tests, either.

In Table III the characteristic values determined on the basis of the empirical distributions are summarized for some arrangements. The first six columns of the table indicate the 50% breakdown voltage U_{50} , the difference $\Delta U = U_{100} - U_0$ between the voltages U_0 of 0% and U_{100} of 100%, as well as the percentage ratio $100\Delta U/U_{50}$ of the two voltages, for both polarities. The relative extent $\Delta U/U_{50}$ of the distribution curve at positive polarities is generally below 20%, while at negative polarities the distribution becomes more extended, the relative extent often exceeding even the 30%. The upper limit of the relative extent may be reliably estimated for 40% in air.

The relative extent is interesting first of all from the viewpoint of accuracy, aimed at in determining the values of U_{50} . The steeper the distribution is, the lower is the accuracy with which it can be satisfied, as the dielectric strength of the insulation may be well assessed on the basis of a less accurate value, too. It appears from the foregoing that at negative polarities to attain higher accuracy is advisable.

The succeeding columns of the table contain the values obtained by the linear approximation of the distribution. It may be stated that the straight line interpolated between the points measured may be regarded as a good approximation. Between the voltage U'_{50} so determined and the value U_{50} obtained on the basis of the empirical distribution a deviation of 1–2 kV could be observed at the most. In the following columns of the table the difference $U'_{100} - U'_0$ of the 0% and 100% values obtained by extrapolating the straight line, as well as the ratio $h = 100(U'_{100} - U'_0)/U'_{50}$ characteristic of the straight line rate of rise may be seen. From these it can be seen that at a positive polarity the upper limit is about 10%, while at a negative polarity the values are often much higher, the upper limit being 26%.

Consequently, the 10% upper limit assumed for the air by BAUMANN and RJABOV is not valid, so the reliability of their calculations is considerably smaller than the value published by them and, at the same time, the number of the necessary measurements is greater than the suggested one.

The last eight columns of the table give a comparison between the extreme values measured actually and those extrapolated linearly, the relative deviations always being less than 15%. It may be suggested that the extreme values should be estimated on the basis of the linear approximation by a 20% correction towards security, $U_0 \simeq 0,8 U'_0$ and $U_{100} \simeq 1,2 U'_{100}$.

Table III

The characteristic values determined on the basis

Test object	Arrangement	U_{50} [kV]		ΔU [kV]		$\frac{\Delta U}{U_{50}}$ [%]	
		+	-	+	-	+	-
ER 10		122,1	165,5	16	15,5	13	9,5
10 kV isolator	a_1	126,5	160,0	21	57	16,5	35,5
	a_2	113,0	136,0	23	23	20,5	17,0
	b	130,0	82,0	18,5	20,5	14,0	25,0
	c_1	110,5	90,0	16	25,5	14,5	28,5
	c_2	118,5	93,0	20	22	17,0	23,5
	d_1	166,5	136,5	14,5	44	9,0	32,0
	d_2	123,0	197,0	20,5	8,5	16,5	4,5
	f_1		208,0		22,5		11,0
	g_1		135,5		20,5		15,0
	h_1		180,0		50		27,5
20 kV isolator	e_1		151,5		30		20,0
	f_1		189,0		40		21,0
	g_1		196,0		26		13,0

3. Number of the voltage steps

The higher the number of the voltage steps, the more reliable is its characteristic, but at the same time the measurement becomes longer, too.

BAUMANN [1] suggested measurements at 4 voltage steps between $p_b = 0$ and $p_b = 1$, the IEC [12] suggests 3–4 voltage steps in such a way that at least one voltage should be under U_{50} and one above it.

According to our experiences, to plot the characteristics, measurements are to be made at least on 4 voltages, so that there should be a point both below and above U_{50} . To measure at more voltage steps is not often possible, as the voltage regulation and -measurement involve difficulties.

4. Number of the impulses needed

When choosing this number, an optimum must be found between reliability of the measurement and economy of the test.

When stating the number of impulses in order to determine the 50% breakdown voltage, BAUMANN [1] assumed that the breakdown follows a binomial distribution. Accordingly, if an impulse of number n is imposed on an insulation by a voltage U , at which probability of the breakdown is p ,

of the distribution curves with some arrangements tested

$U'_{100} - U'_0$ [kV]		h [%]		$U'_0 - U_0$ [kV]		$\frac{U'_0 - U_0}{U_{50}}$ [%]		$U_{100} - U'_{100}$ [kV]		$\frac{U_{100} - U'_{100}}{U_{50}}$ [%]	
+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
7	7,5	5,7	4,5	4	3	3,3	1,8	5	5	4,1	3,0
8,5	35,0	6,7	21,7	9	19	7,1	11,9	3,5	3	2,8	1,9
3	20,5	2,7	15,1	5	2,5	4,4	1,8	15	0	13,2	0
14	12	10,8	14,6	2	2,5	1,5	3,0	2,5	6	1,9	7,3
2	13	1,8	14,4	2,5	2,5	2,3	2,8	12,5	10	11,3	11,1
10	10	8,5	10,8	10	5	8,4	5,4	0	7	0	7,5
12	35,5	7,2	26,0	2,5	2,5	1,5	1,8	0	6	0	4,4
7,5	5,5	6,1	2,8	9	-1	7,3	-0,5	4	0,5	3,3	0,3
	10		4,8		2		0,9		10		4,8
	6		4,5						5		3,7
	45		25,0		-5		-2,8		10		5,6
	25		16,6		2		1,3		3		2,0
	30		15,8						5		2,1
	10		5,1						17		8,8

the probability that from n impulses not pn , but k will cause breakdown, is P_{nk} .

$$P_{nk} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (6)$$

From his calculations it is assumed that $p = F(U)$ (formula (2)) is linear, based on this to determine the 50% breakdown voltage ($k=n/2$) a number of impulses $n = 100$ is necessary at a wanted 5% reliability. The necessary impulses may be divided in to several voltage steps, in case of m voltage steps impulses of $n' = n/m$ are necessary at one step, while with 4 steps $n' = 25$ is the value suggested by BAUMANN. It is to be noted that due to the rounding off the frequency, a further error of $\pm 50/n'$ is possible.

RJABOV [2] similarly deduces — but assuming a normal distribution for p_{nk} for the number n of the impulses needed — a relation

$$n = u^2 \frac{h^2}{\varepsilon^2}, \quad (7)$$

where u is the safety factor depending on the needed reliability, $h = (U_{100} - U'_0)/U_{50}$ a ratio interpreted on the basis of formula (3), and ε is the relative

error permissible with the voltage measurement. Starting from this he calculated, that at a 95% reliability (safety factor $u = 1,96$) U_{50} may be determined in air by less than 3% deviation, if $n \geq 42$. The voltage may be regarded as of 50%, if from $n = 42$ there stands $15 \leq k \leq 27$.

It should be emphasized that both former calculations can be made on condition that $p_b(U)$ may be approximated by a straight line and they both refer to the determination of the 50% value. Both authors assume that the value of h figuring in formula 3 is less than 10% in air. In the course of our measurements even values of 26% occurred, so these calculations are to be revised. With the 26% limit, in case of the 100 measurements suggested by BAUMANN the error increases from 1% to 2,6%, with the conditions prescribed by RJABOV instead of 42 impulses a number of 288 is needed. The IEC [12] suggests 10—10 impulses on all voltage steps.

According to our own tests, for well reproducible p_b values 100 breakdowns were to be assured (and not 100 impulses) at the individual voltage steps (and not on all the steps together). As on the medium section the characteristics are quite steep, to determine U_{50} not quite precisely, production of 50 breakdowns on the individual steps is sufficient, the number of the necessary impulses is naturally above this. Determination of the voltage U_{50} with an accuracy of some percentage needs less breakdowns, this problem requires further investigation.

5. Effect of the wave shape

For the time being no data are available concerning the influence of the wave shape on the distribution.

REFERENCES

1. BAUMANN, W.: Statistischer Fehler bei der Bestimmung der 50% Überschlag-Stoßspannung. *ETZ-A* 78 (1957), 369.
2. РЯБОВ, В. М.: Определения 50-процентного импульсного разрядного напряжения. *Электричество* (1959), 84.
3. Брагин, С. М.: Исследование электрической прочности воздушно-стирофлексовой изоляции кабеля статистическим методом. *Электричество* (1959), 78.
4. BERGER, K.: Experimentelle Untersuchungen über die Streuung der Überschlag- und Ansprechspannungen von Isolatoren, Funkenstrecken und Ableitern unter hohen Stoßspannungen. *Bull. SEV* 44 (1953), 353.
5. ROHRER, H.: Variation of the impulse breakdown voltages of lightning arresters. *CIGRÉ Rep.* (1952), No. 322.
6. HANCOX, R.: The interpretation of the results of impulse breakdown tests. *Proc. IEE* 105 (1958); Part C, 404.
7. Зингерман, А. С.: Статистический метод определения пробивного напряжения диэлектрика. *Ж. Т. Ф.* 18 (1948), 1029.
8. LEWIS, T. J.: The statistical basis of impulse testing. *Proc. IEE* 105 (1957); Part C, 27.
9. BROOKS, H.: The probable breakdown voltage of paper-dielectric capacitors. *Trans. AIEE* 66 (1947), 1137.

10. KRONDL, M.: Schätzung der Haltespannung und ihren Vertrauensgrenzen aus Messreihen von Durchschlagspannungen. *Bull. SEV* 44 (1953), 1017.
11. WEBER, K. H.—ENDICOTT, H. S.: Area effect and its extremal basis for the electric breakdown of transformer oil. *Trans. AIEE* 75 (1956); Part III, 371.
12. High voltage testing techniques. *IEC Publ.* (1963), No. 60. (in print).

HALB-AUTOMATISCHE AUSMESSUNG VON VOLT-MIKROSEKUNDEN KENNLINIEN

GY. VAJDA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Artikel behandelt eine Meßmethode zur statistischen Untersuchung des Durchschlags und des Überschlags. Die entwickelten Einrichtungen ermöglichen die automatische Auswertung der Messungen. Durch die entwickelte Methode werden die Aufnahme der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Durchschlages als Funktion der Spannung, die Messung der Verteilung der Verzögerungszeiten und die Aufnahme der Volt-Mikrosekunde-Kennlinie ermöglicht.

ENREGISTREMENT SEMI-AUTOMATIQUE DES COURBES CARACTÉRISTIQUES VOLT-MICROSECONDE

GY. VAJDA

RÉSUMÉ

L'article expose une méthode de mesure pour l'examen statistique de la disruption et de la formation d'un arc. Les instruments développés permettent l'évaluation automatique des mesures. Par la méthode développée, il devient possible de relever la distribution des probabilités des disruptions en fonction de la tension, de mesurer la distribution des temps de retardement et de relever la famille des caractéristiques Volt-microseconde.

ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛТ-МИКРОСЕКУНДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Д. ВАЙДА

РЕЗЮМЕ

В работе излагается методика измерения для статистического исследования пробоя и разряда. Разработанные устройства позволяют осуществить автоматическую оценку измерений. Разработанный метод позволяет отразить в функции напряжения распределение вероятности пробоя, далее измерение разброса значений времени запаздывания и построение семейства вольт-микросекундной характеристики.

TEST METHOD FOR DETERMINING THE IMPULSE WITHSTAND STRENGTH OF ELECTRICAL INSULATIONS

GY. VAJDA
DOCTOR OF TECHN. SC.
MINISTRY OF HEAVY INDUSTRIES

[Manuscript received December 20, 1963]

The paper gives the first experimental results affording in many respects a basis for better approaching the theoretical and methodological problems as yet not cleared up. A part of the conclusions to be made on the basis of the test disagree with some statements of the literature. Paper includes some suggestions for the practical evaluation of the measurements—results and for plotting the characteristics.

I. Statistical characteristic of the time lag

The time lag of the breakdown has been examined more thoroughly only from a physical point of view hitherto, first of all with small electrode gaps in air for practical arrangements only a few data are available [2].

The essential questions, when examining the time lags are as follows:

- a) By what kind of distribution function can the empirical distribution be represented;
- b) by what values is it practicable to characterize the distribution;
- c) how many measurements are to be made for determining the time lags;
- d) how is the character of the distribution influenced by the wave shape.

Till now the time lag of the breakdown was determined from the oscillogram of the voltage arising on the tested insulation. For recording the empirical distribution a great number of oscillograms had to be photographed and evaluated, this is expensive and takes much time; at the same time the possibility of the objective and subjective errors is greater. Besides, if the probability p_b of the breakdown is less than 1, many superfluous records must be made. Further difficulties are encountered because the oscilloscope time deflection must be preadjusted; if the time lag is short with respect to the total deflection, the measurement is inaccurate, while if it is greater than the full deflection, it cannot be determined.

One of the greatest advantages of the test method developed is that it permits a rapid, automatic and objective registration of the distribution of the time lags. The so recorded distributions are in good accordance with those to be plotted on the basis of the oscillograms (e.g. Figs 3 and 4 of [1]). On the

counter of the time meter the histogram of the distribution can directly be read off with the intervals adjusted by the delay line within its measuring limits. By the cumulative sum of the values counted, the empirical distribution is given. Considering all breakdowns, determination of the relative frequencies and recalculation of the empirical distribution to the relative unit raises no problems.

Figs 1—2 illustrate the results of two characteristic series of measurements. On the horizontal axis the time lag is given in μsec , on the vertical one

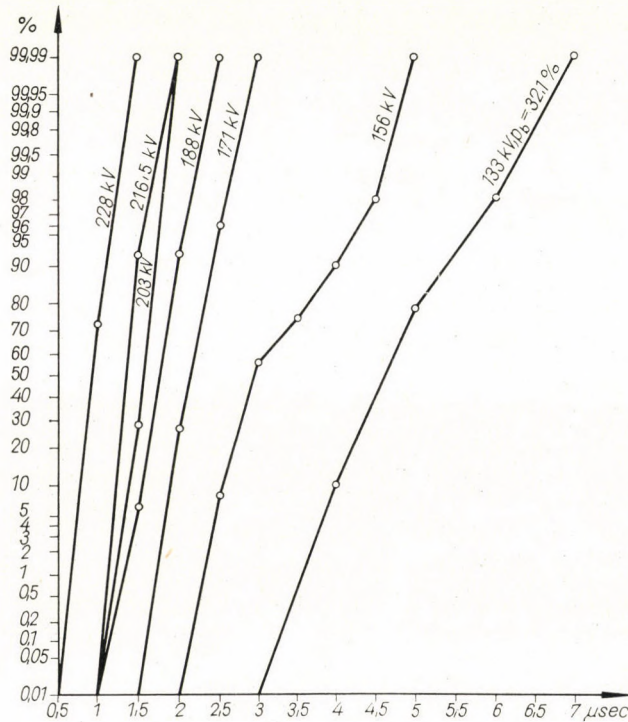


Fig. 1. Empirical distributions on a 10 kV isolator at negative polarity in connection a_2

the percentage value of the empirical distribution is indicated. The distribution is shown instead of the usual step curve by the interconnecting envelope line, thus the figures are more perspicuous and clear. This way of illustration may be interpreted in such a way that the distribution can be regarded as being nearly linear within each interval. The initial and final values of the distributions are indicated arbitrarily at the initial 0,01% and end point 99,99% of the available co-ordinate system.

Raising the voltages, the distribution curves become displaced towards the shorter time lags and steeper.

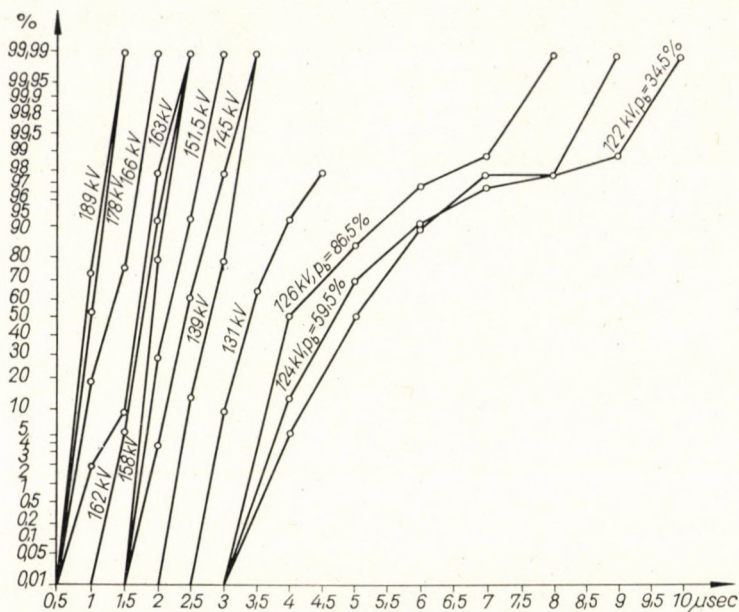


Fig. 2. Empirical distribution on a 10 kV isolator at positive polarity in connection d_2

1. The type of distribution

On the basis of the available data it cannot still be decided what type of distribution follows the time lag t . Some experts assume a normal distribution [3], that, in the case of short electrode gaps in the air there are some measurement-results supporting this [4]. At the same time, according to the other measurements the distribution is of exponential character [4], moreover there are measurements resulting in an exponential distribution, but not in the function of t , but in t^c , where $c > 1$.

With the distributions illustrated in Figs 1, 2, in the voltage range, where $p_b = 1$, the distributions may be replaced practically by a straight line. In the co-ordinate system chosen the normal distribution function is a straight line, that is, in the voltage range, where the breakdown certainly arises the distribution of the time lags may be approximated by a normal distribution in the cases tested. In the voltage range $p_b < 1$ the empirical distributions deviate from the straight line considerably, the normal distribution cannot be applied.

The experiences were essentially similar with all of the measurements performed with abt. 300 characteristics, in some cases, at voltages somewhat higher than the 100% breakdown voltage, also distributions deviating some from the normal one could be experienced and only at some kV higher voltages could the distribution be replaced by a straight line. At voltages exceeding

the 100% value, the range of the time lags becomes restricted, the distribution was often plotted merely on the basis of 2 ÷ 3 measuring points. One might have doubts, if the linear representation is not a consequence of the few numbers of the measuring points and of the characteristics being restricted to a narrow range. To control this, measurements were also made by an oscillograph, as oscillograms permit a greater resolution capability than the time meter.

On a Gauss paper, the hystogram of a nearly linear distribution is shown in Fig. 3, while the hystogram of a curved distribution may be seen in

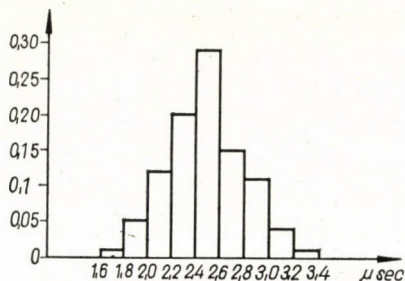


Fig. 3. Hystogram of the time lags with the flashover of the insulation to earth of a 20 kV isolator with a voltage +150 kV, $n_b = 100$

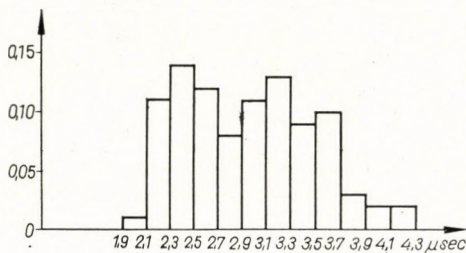


Fig. 4. Hystogram of the time lags with the flashover of the insulation to earth of a 20 kV isolator with a voltage -152 kV, $n_b = 100$

Fig. 4. It can be stated also from visual observation, that the distribution is practically normal (a Poisson distribution is possibly even a better approximation), the second is certainly not a normal one. The same was proved by the matching tests, too. The curved characteristics may be resolved to the sum of more normal distributions (Fig. 5), the question is, how can this be physically justified.

Here, instead of the normal distribution application of the truncated normal distribution may come into question, too. The lower limit is stipulated by the fact that the time lag cannot be shorter than the formative time t_0 , necessary for the physical development of the breakdown channel. In the

practice there is also an upper limit, the maximum of which may be estimated in the following way. The actual impulses are of finite time, the tails, or envelop curves are decreasing aperiodically and after a certain time t' they reach the lower limit of the static breakdown voltage value, below which no breakdown can be formed. Consequently, the time lag may not exceed $t' + \Delta t$, the additional term Δt expressing the fact that if the breakdown is to develop before the instant t' the field becomes deformed and the breakdown voltage of the scheme decreases below the static breakdown voltage. In reality the upper limit of the time lag is considerably lower than this value.

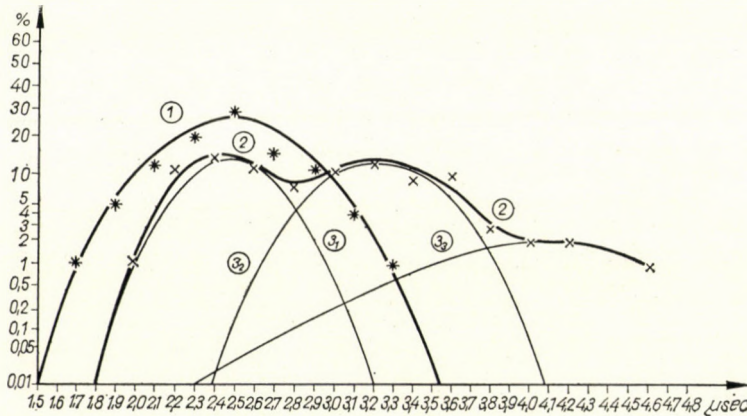


Fig. 5. Density functions of the time lags: With the distribution shown in Fig. 3 (1); with the distribution shown in Fig. 4 (2); normal components of the distribution of Fig. 4 (3_1 , 3_2 , 3_3)

2. Features of the time lags

The time lag can be the most practically characterized by a medium value. The characteristics volt/ μsec to be found in literature indicate the arithmetical mean calculated on the basis of the oscillograms. When examining the conditions more thoroughly, the minimum and maximum values become interesting, too.

It is advisable to process the measurement results by the methods of mathematical statistics. If on the time meter there are data on counters of number k , the medium value of the interval of the i^{th} counter is t_i and this counter detects times in a number f_i , than the series of measurements consisting of n_b breakdowns may be characterized by

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i t_i}{n_b} \quad (1)$$

and by the corrected empirical standard deviation

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (t_i - \bar{t})^2}{n_b - 1}}. \quad (2)$$

If n_b is high enough, the mean \bar{t} approaches the expected value of the distribution and the empirical standard deviation s approximates the standard deviation of the distribution. The extreme values may be given by a definite probability as a multiple of the standard deviation, introducing the safety factor u , the lower limit is $\bar{t} - us$ and the upper one $\bar{t} + us$.

The above relations are valid exclusively in case of a normal distribution, reliability of the results so obtained is the less, the more the distribution differs from the normal. An important part of the experienced distributions deviates considerably from the normal one, therefore one had to consider which type of values are suitable for characterizing them expediently. Further considerations were also necessary because in certain — though only a few — cases time lags occurred outside the measuring limits determined by the delay lines, with unknown values. All of these problems were removed by introducing instead of the mean value the median t_{50} , calculated by a linear interpolation between the ends of the l^{th} and $(l+1)^{\text{th}}$ interval, as per formula (3),

$$t_{50} = \frac{1}{2} (t_{l+1} + t_l + \Delta t) + \frac{1}{2} \frac{t_{l+1} - t_l}{p_{l+1} - p_l} (1 - p_{l+1} - p_l), \quad (3)$$

where Δt is the length of the interval (0,5, or 1,0 μsec , depending on the delay line), t_{l+1} and t_l the mean of the intervals $(l+1)^{\text{th}}$ and l^{th} , p_{l+1} and p_l the corresponding values of the empirical distribution in relative units, further the values l and $l+1$, respectively, are interpreted, so that

$$p_{l+1} = \frac{\sum_{i=1}^{l+1} f_i}{n_b} > 0,5; \quad (4)$$

$$p_l = \frac{\sum_{i=1}^l f_i}{n} < 0,5.$$

The median t_{50} may be determined more simply from the empirical distributions also by plotting (as a value belonging to the probability $p = 0,5$).

Tracing the extreme values can also be simplified by introducing the notion of range. Approximately, as the lower limit of the range one may regard

the beginning of the interval in the first operating counter, and as the upper one the end of the interval in the last working counter. This poses a problem, if also greater time lags than the measuring limit adjusted occur. At those times these were classified into an 11th interval and regarding the upper limit of the range it was merely stated that it is higher, or equal to the end of the 11th interval.

The measurement-results were elaborated on the computer type Elliott 803 B. In Tables I and II the computed data of nearly 300 distributions are summarized. 52% of the plotted distributions fall into the range $U > U_{100}$ ($p_b = 1$), 48% to the range $U_0 < U < U_{100}$ ($p_b < 1$), the data summarized are also illustrated in a resolution according to the voltage range. The distributions having a range inside the measuring limit adopted are denoted in the tables as "complete measurement".

It occurred first of all in the range $p_b < 1$ that some time lags were greater than the measuring limit applied and these were classified into the 11th interval. These distributions are distinguished in the tables by "fall-out values", such distributions form 18% of the total ones. When calculating the mean and the standard deviation, the fall-out values were considered — as an approximation — by the mean value t_{11} of the 11th interval.

In Table I the data of the relative standard deviation s/t are summed up in the range $U > U_{100}$ the great majority of cases it is (94,5%) below 30%, the fall-out values may practically be neglected. In the range $U < U_{100}$ the standard deviation of the complete series of measurements is displaced towards somewhat higher values, naturally the standard deviation of the series involving fall-out values is even greater. With 84% of the total measurements the deviation is below 30%.

Table II gives a picture of the relative deviations $(t_{50} - \bar{t})/t_{50}$ between the median and the means. It is surprising that the values of \bar{t} and t_{50} are in good accordance, the deviation being with the complete measurements some percents, with 93% of the complete series it is smaller than 10% and it never exceeds 20%. The agreement is good even in the case of fall-out values (though the mean \bar{t} is calculated in a quite arbitrary way) and only in 4 cases was a deviation of 20 and 40% observed. All these support the correctness and expedience of applying the median t_{50} .

3. Number of the necessary measurements

The number of measurements needed for plotting the empirical distribution is stipulated by the character of the problem.

If it is required that the empirical distributions should approach the physical distribution function in a well reproducible manner, many hundred breakdowns are necessary. Measurements of that type are demonstrated in

Table I
Percentage distribution of the

Range tested	Type of characteristics	S/ \bar{x} [%]				
		0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
$U > U_{100}$	Complete measurement	12,3	12,3	32,1	18,9	7,6
	with fall out values (2,8%)	—	—	33,3	33,3	—
$U > U_{100}$	complete measurement	—	1,2	21,0	19,8	22,2
	with fall out values (34,6%)	—	—	7,0	14,2	14,2
Total		5,9	6,4	24,8	18,8	13,8

Table II
Percentage distribution of the upper limit of the relative

Range tested	Type of characteristics	$\frac{t_{50}-\bar{t}}{t_{50}}$ [%]							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$U > U_{100}$	complete measurement	44,7	64,4	81,4	87,5	90	92	93,6	94,6
	with fall-out values (2,8%)	0	50	50	50	50	50	50	50
	Total	43,9	64,2	80,8	87,0	89,5	91,3	93,0	94,0
$U > U_{100}$	Complete measurement	16,2	31,1	45,9	58,1	66,2	71,8	74,4	85,2
	with fall-out values (34,6%)	10	16,7	26,7	26,7	33,3	36,7	36,7	46,7
	Total	14,6	27,2	40,8	49,6	57,4	62,2	64,2	74,8
Total		29,9	46,5	61,7	69,1	74,2	77,4	79,2	84,7

the first part of the paper [1]. For characterizing a distribution of well-known kind, a sample consisting of a lower number of measurements also suffices to estimate the number of the measurements needed to apply the methods of mathematical statistics. An estimation of this kind may be made e. g., by the relation

$$n \geq \frac{u^2}{\alpha^2} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \quad (5)$$

relative standard deviations

S/ \bar{i} [%]							
25-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
11,3	1,9	0,9	0,9	0,9	—	—	0,9
—	33,3	—	—	—	—	—	—
17,3	8,7	6,1	—	2,5	1,2	—	—
11,6	17,8	7,0	7,0	3,5	14,2	—	3,5
13,3	6,9	3,7	1,4	1,8	2,3	—	0,9

deviation between the median and the mean value

$\frac{t_{50} - \bar{i}}{t_{50}}$ [%]												
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	40
95,5	95,5	97,5	97,5	97,5	97,5	98,3	98,3	98,3	99,2	99,2	100	—
50	50	100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
94,7	94,7	97,4	97,4	97,4	97,4	98,4	98,4	98,4	99,3	99,3	100	—
90,6	90,6	94,5	96,0	96,0	96,0	96,0	97,5	97,5	97,5	98,6	100	—
53,3	63,3	63,3	70	73,4	76,7	80,0	80,0	83,5	83,5	83,5	86,8	100
80,6	83,5	86,5	89,5	90,5	91,5	92,5	93,4	94,3	94,3	95,3	96,2	100
88	89,3	92,2	93,5	94,0	94,5	95,5	96,0	96,5	97,0	97,3	98,2	100

according to which, to determine the probability point $p = 0,5$ of the distribution function, if the safety factor $u = 1,28$ (the one-side discarding probability being $P_s = 10\%$) and the relative deviation permitted is $\alpha = 5\%$, measurements of $n_b \geq 655$ are necessary; with a relative deviation of 10% a number of $n_b \geq 164$ is sufficient. The exact knowledge of the distribution type permits a more accurate estimation, such calculations for the needed n_b give lower values, in the practice generally 100 measurements are sufficient.

Fig. 6 was made on the basis of 13 series consisting of 100 measurements each. It shows the distribution function as well as the envelope curves limiting the greatest deviations of the empirical distributions, plotted on the basis of the above series. Over an important section of the distribution the standard deviation is small, the greatest deviation being between 5 and 95% having a

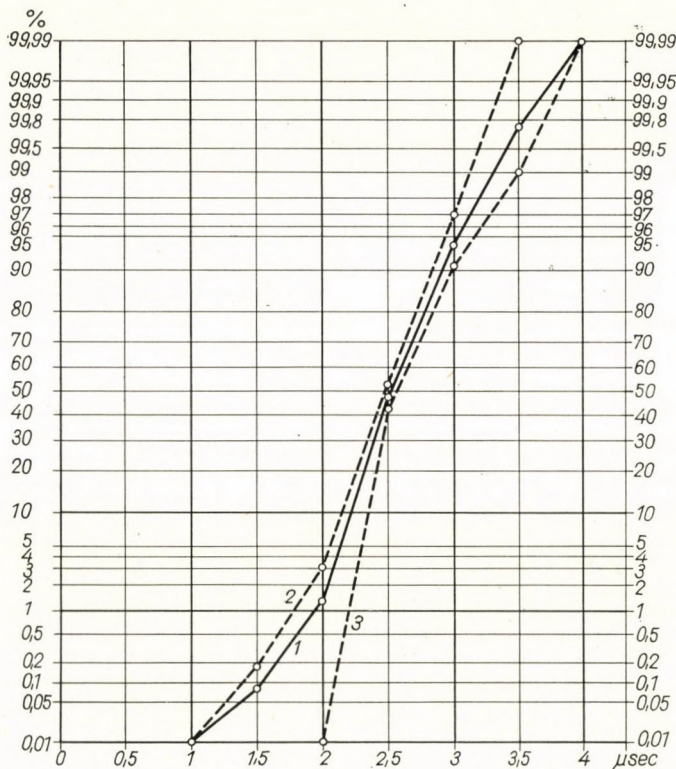


Fig. 6. Flashovers on the insulation to earth of an open 20 kV isolator, surges on the moving contact +156 kV, 10 pulses pro minute: On the 6th February out of 1300 flashovers (1); envelope curve interconnecting the highest values of series consisting of 100 flashovers (2); envelope curve interconnecting the lowest values of series consisting of 100 flashovers (3)

value $0,15 \mu\text{s}$, between 10 and 90% it is $0,1 \mu\text{s}$ and at t_{50} it does not exceed $0,05 \mu\text{s}$. It must be emphasized that the dotted lines are envelope curves and the individual distributions fit the distribution function much better. Similar results were obtained when testing other arrangements, Table III gives an idea of the greatest deviations experienced with 100 series of measurements.

As shown by the more detailed tests, the extent of the distribution in the range $p_b = 1$ is generally small, only $2 \div 3$ counters of the time meter are working (at a very high voltage sometimes only 1), at those times even 50 measurements are enough to plot the distribution. The characteristics volt/ μsec

were plotted for each voltage step on the basis of a series of measurements consisting as a rule of 50 flashovers where the magnitude of the time lags distribution increased (at least 4 counters operating), the series of measurements

Table III

The greatest deviations were observed between the series of measurements consisting of 10 flashovers and the distribution function

Measurements range (percentage values) delay	Greatest deviation in μsec		
	short artificial line complete series of measurement	(5 μsec) with fall out values	long artificial line (10 μsec)
1-99	0,25	—	1,0
5-95	0,15	—	0,5
10-90	0,1	0,2	0,25
20-80	0,1	0,15	0,15
50	0,06	0,06	0,1

was extended to 100 flashovers. In the range $p_b < 1$ generally series of measurements consisting of 100 flashovers were adopted.

4. Effect of the wave shape

Regarding the influence of the wave shape no data are available.

II. The volt-microsecond characteristics

The main object of the tests was to plot the volt/ μsec characteristics indicating the breakdown voltage as a function of the breakdown time lag. In the literature a few characteristics for insulations and spark gaps may be found. These were plotted by making an oscillogram on a great number of breakdowns at many voltage steps, based on this the mean time lag was calculated for each voltage step and a curve was inserted between the points obtained.

The usual volt/ μsec characteristics do not show the full value relations, a perfect idea may be given only by a set of characteristics to be plotted on the basis of the time lags distribution (Fig. 7). In Fig. 7 the curves interconnect the points of identical probability of the distributions recorded at different voltages, the probability figuring as a parameter. The curve p_i means that the quota fraction p_i of the time lags is falling to the left of the points marked by the curve at all voltages, the half of the total breakdowns falls to the left of the curve $p_i = 0,5$, this curve interconnecting the values t_{50} .

In connection with plotting the characteristics, the main problems are as follows:

- a) On how many voltages is it practicable to perform measurements;
- b) how many impulses are needed for the single voltages;
- c) how are the relations influenced by the deviation of the breakdown voltage;
- d) how may the set of characteristics be characterized more simply;
- e) by what kind of analytical function may the characteristic be approximated;
- f) how are the characteristics influenced by the wave shape.

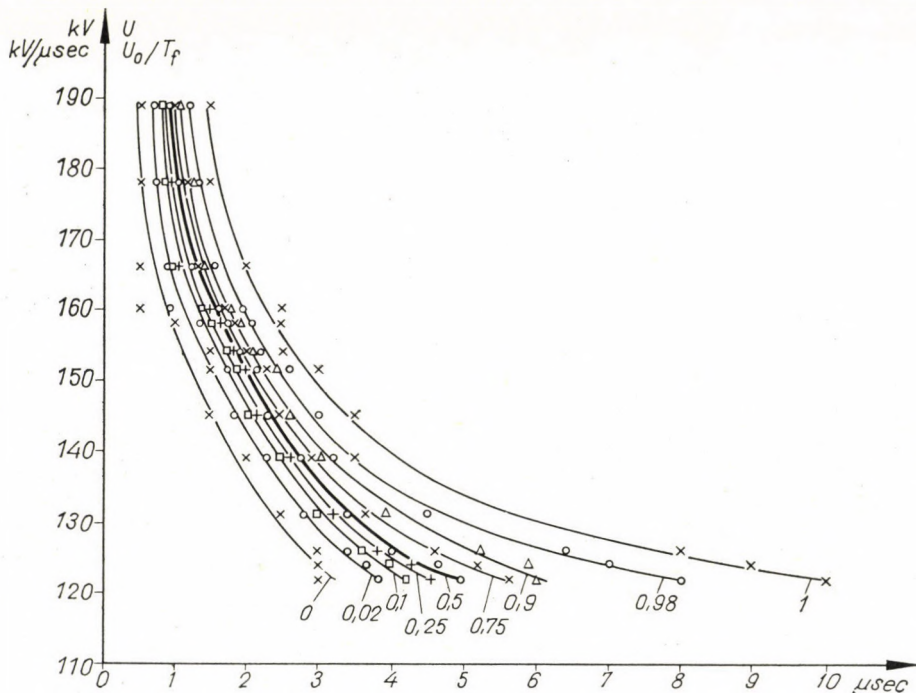


Fig. 7. Set of characteristics volt/ μ sec based on the distribution shown in Fig. 2. U_0 crest of the impulse voltage, T_f front time

The test method developed permits the quick and reliable plotting of the average characteristic or of the complete set of characteristics. The times t_i belonging to the arbitrary probability p_i may simply be determined from the time lag distributions and so the characteristics may be plotted.

Figs 8—12 illustrate the probability curves 0,5 of some sets of characteristics plotted by us for different test arrangements and connections.

It should be pointed out that the characteristics of the 10 kV insulator intersect many characteristics of the 10 kV isolator. Thus, if there is no coordination, it depends on the shape of the wave entering the transmission line whether the breakdown follows on the overhead line, or on the insulator.

1. Number of the practicable voltage steps

It is advisable to connect the measurements with the probability test of the breakdown, within the range $U < U_{100}$ — according to those mentioned in the first part [1] — it is proper to measure on 4 voltage steps. For plotting

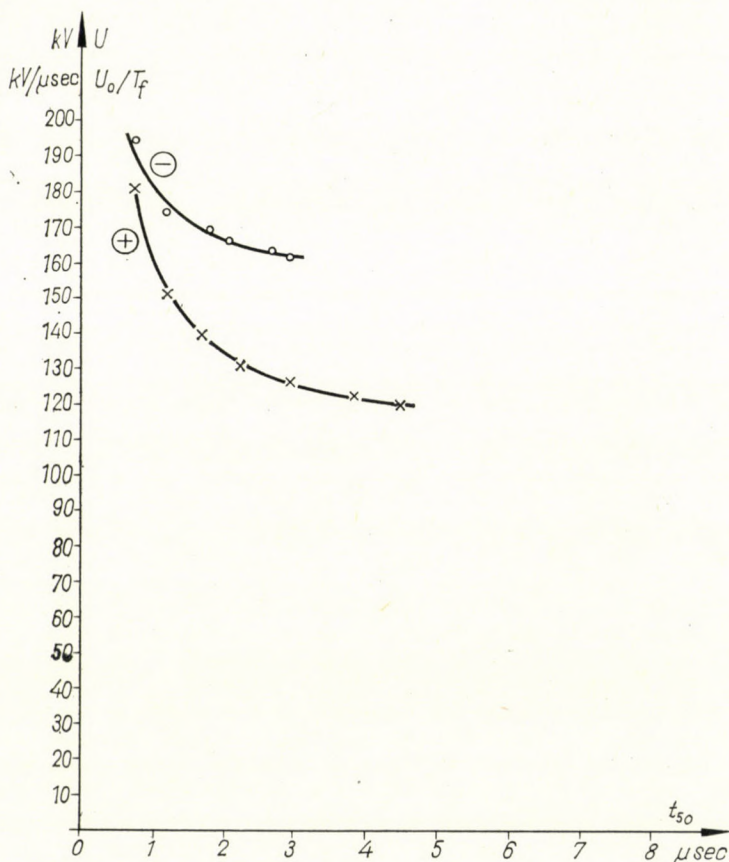


Fig. 8. Volt/ μsec characteristics of a 10 kV isolator type ER 10 on the basis of t_{50}

the characteristics in a reliable way, the purpose is to perform measurements on at least 4–5 voltage steps in the voltage range $U > U_{100}$, the number of the necessary steps depending naturally on the magnitude of the voltage range to be tested.

2. Number of the impulses needed

As was stated in chapter 1, according to our experiences the time lags may reliably be characterized within the range $p_b = 1$ mostly on the basis of 50 impulses, while as a rule in the range $p_b < 1$ by 100 flashovers.

3. Role of the standard deviation in the breakdown voltage

If the breakdown follows at the tail, or crest of the wave, the conditions are not influenced, but by the accuracy of the impulse voltage measurement and by the deviation of the surge generator sparkover voltage. Under the cir-

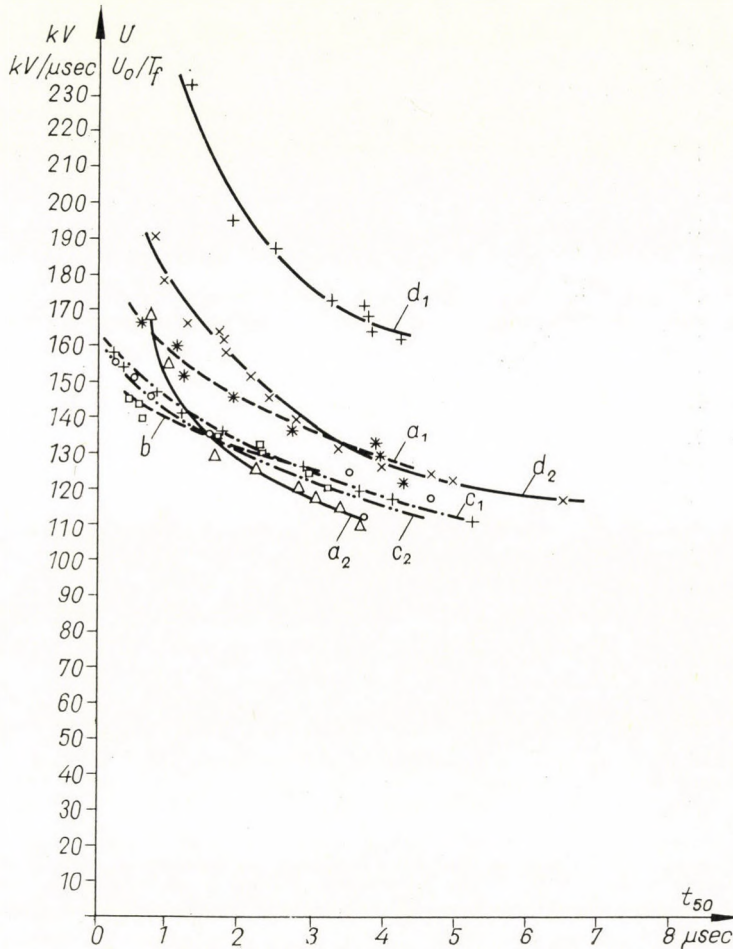


Fig. 9. Volt/ μsec characteristics of a 10 kV isolator on the basis of t_{50} at a positive polarity, standard connections

circumstances of the given test, it could be assured that these factors should not cause an uncertainty of more than 1–2%. By the measurements it is important that the voltage of the surge generator should be practically constant within one voltage step.

If the breakdown follows at the wave front, the conditions are more complicated. Besides the voltage and the time, a third factor — the rate of

rise of the front — also plays a role, at the same time there is a unanimous and definite relation between the breakdown voltage and the time lag, contrary to the probability relation observed at breakdowns arising not at the front. The deviation in the time lag results the deviation of the breakdown voltage. With uniform impulses the distribution of the time lags may be transformed

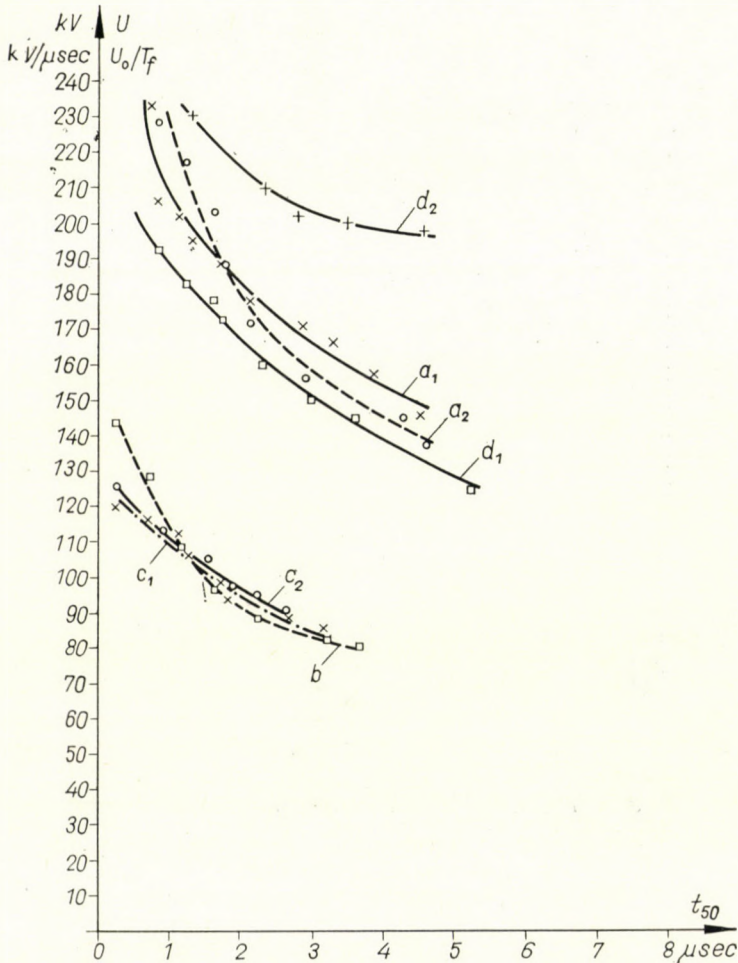


Fig. 10. Volt/ μsec characteristics of a 10 kV isolator on the basis of t_{50} at a negative polarity standard connections

into the distribution of the breakdown voltages on the basis of the front shape (with a linear front the two distributions are proportional to each other). As a consequence of this, with waves of identical rate of rise (i.e., in case of identical crest and front time), the breakdown at different voltages ensues; nevertheless, with waves of divergent rates of rise (that is, with different

crest values and front values) it may occur that some breakdown voltages are identical. All these involve problems for the statistical evaluation of the measurement-results as a function of the breakdown voltage. Based on the oscillograms — at a fixed rate of rise — at least a more probable breakdown voltage and a relating, more probable time lag (determined by this) may be established.

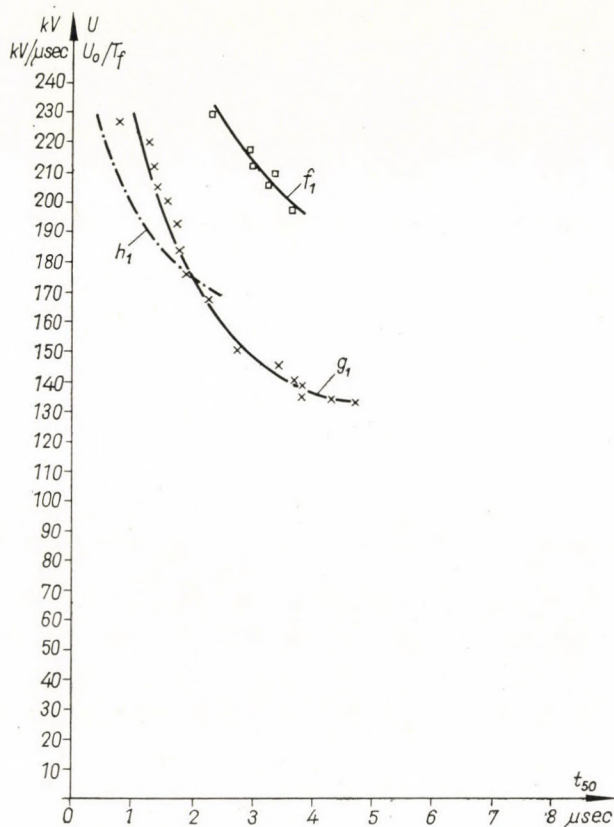


Fig. 11. Volt/ μ sec characteristics of a 10 kV isolator on the basis of t_{50} at negative polarity, special connections

The problem may be solved exactly only by examining the conditions in the case of breakdowns at the front instead of the breakdown voltages as a function of the rate of rise. It makes it more complicated that there is a transitory voltage range where breakdowns occur both at the front and at the tail. Fig. 13 illustrates the probability distributions of breakdowns with different characters, in range I breakdown arises only at the tail or at a crest value, in range III only at the front, in range II both possibilities exist.

In our measurements the most simple voltage measuring method was applied, that is, measuring with fixed voltage of the surge generator — at

that time also the rate of rise being constant — the crests of the impulses were recorded. Accordingly, in the figures and tables of the paper relative to the volt/ μ sec characteristics, the voltage scales mean above 1 μ sec for a breakdown voltage, while below 1 μ sec a rate of rise measured in kV/ μ sec, finally at 1 μ sec both interpretations are possible.

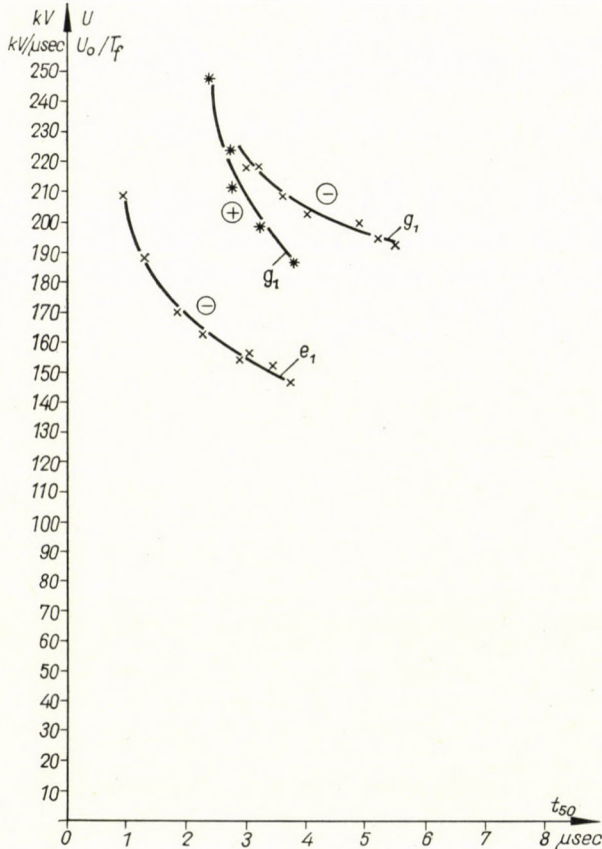


Fig. 12. Volt/ μ sec characteristics of a 20 kV isolator in some connections

For breakdowns at the front the 0,5 μ sec interval of the delay line adopted is too long, the measurements performed in this way may be regarded only as being of informatory character. For more precise tests delay lines with intervals of 0,1 \div 0,2 μ sec are suitable. (Such lines are under construction.) In the cases examined, with the wave shape 1/50 applied in the measurements, this problem is not of practical importance, as a considerable part of the characteristics is placed in the range above 1 μ sec. With the arrangements tested, in the range where the probability of the breakdown is less than 1, the breakdown always follows at the wave tail. The situation was similar in a consider-

able part of the zone above the 100% breakdown voltage. Table IV shows that with the 25 sets of characteristics plotted, at which voltage U_l occurred, more than 1 breakdown out of 50 at the wave front ($1 \mu\text{sec}$).

Table IV
Distribution of breakdowns at the front

$\frac{U_l}{U_0}$ higher than	In percentage of all cases
1,1	100
1,15	92
1,2	88
1,25	84
1,3	76
1,35	64
1,4	56
1,45	52
1,5	40
1,55	40
1,6	32
1,65	24
1,7	20
1,75	16
1,8	12
1,85	4
1,9	0

From the table it can be seen that the breakdowns appearing at the front do not at all influence the plotting of the characteristic within an important section. The greatest part of our measurements was made on insulations of 10 kV rated voltage. At higher rated voltages the characteristics became dis-

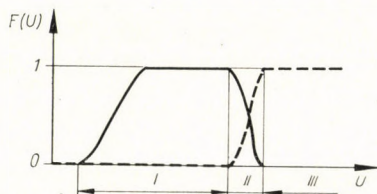


Fig. 13. Probability of breakdown considering the way of breakdown; — breakdown probability at crest and tail; --- breakdown probability at front

placed towards a longer time lag, at that time the effect to be counted is even smaller.

If only plotting of the mean characteristic is aimed at, the effect of the breakdowns at the front is insignificant until their ratio does not exceed half of the total breakdowns, as these do not influence the determination of the median. Here again the advantage of applying median t_{50} is proved. Determination of the median is generally not influenced by the breakdowns at the front, at least up to $1,5 U_0$, in the majority of cases it is sufficient to plot the characteristic up to this voltage.

The set of characteristics volt/ μ sec gives information on the actual breakdowns. In the range, where $p_b < 1$ a modification of the set of characteristics may be suggested, taking into consideration the probability of the breakdown, too. If the number of the measured time lags does not refer to the number of breakdowns, but to the total number of impulses, instead of p_i the parameter is $p_e = p_i p_b$. With a demonstration of this kind, in the range $p_b < 1$ the characteristics become prolated. As $p_i < 1$, p_e may be at least equal to p_b , that is, in this lower range the characteristics p_e are broken and ended at the voltage where $p_e = p_b$. The advantage of this modified set of characteristics is that it gives a more detailed picture of the breakdown and the end point of the characteristics is more definite (Fig. 14).

4. The set of characteristics

Among the characteristics the medium and extreme curves are the most important. Depending on the possibilities of two kinds of characterization of the time lags, also the curves may be given in two ways.

If the medium curve interconnects the arithmetical means \bar{t} of the time lags, the extreme curves may properly be given with the aid of the standard deviation and of a safety factor suitably chosen. With this demonstration — in principle — the complete, positive half-plane of the co-ordinate system contains values within the range $p_b > 0$.

If the medium curve interconnects the medians t_{50} of the time lags, the extreme curves may be plotted by the suitably chosen points of the empirical distribution. The range interpreted in chapter 1 permits a quick representation, the lower limit is the beginning of interval of the first operating counter, the upper limit being the end of the interval of the last working counter.

Fig. 15 makes a comparison between the two kinds of representations for the cases to be seen in Fig. 6. In the figure the characteristics plotted on the basis of the mean value and of the standard deviation are shown by a full line, the curves obtained from the distribution function are drawn by a dotted line, on the basis of Fig. 6. One can see that the characteristics plotted on the basis of the mean value (\bar{t}) and of the median (t_{50}) practically agree. At the

extreme values the coincidence is naturally not so good. In case of the first conception the extreme curves are to be plotted at least on the basis of the limits $3s$ discarding level of 2% , the lower limits $\bar{t} - 3s$ proved to be suitable, but the upper limit $\bar{t} + 3s$ is not completely so.

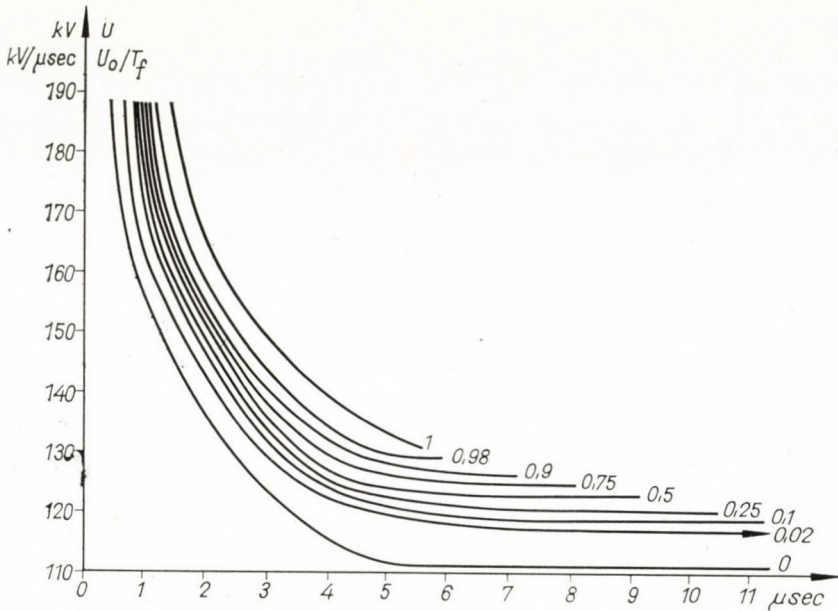


Fig. 14. Modified volt/ μ sec characteristics on the basis of Fig. 7, parameter of the curves $P_e = P_b P_i$

5. Mathematical approximation of the characteristics

GROVE and MASKILEISON [5] have established for the medium curve in air the relation

$$U = U_{\infty} \sqrt{1 + \frac{a}{b-t}}, \quad (6)$$

where U_{∞} , a , and b are constants depending on the arrangement. Application of the functions of character

$$U = a + \frac{b}{t^c} \quad (7)$$

may be considered, too, where the constants a , b and c are functions of the arrangement.

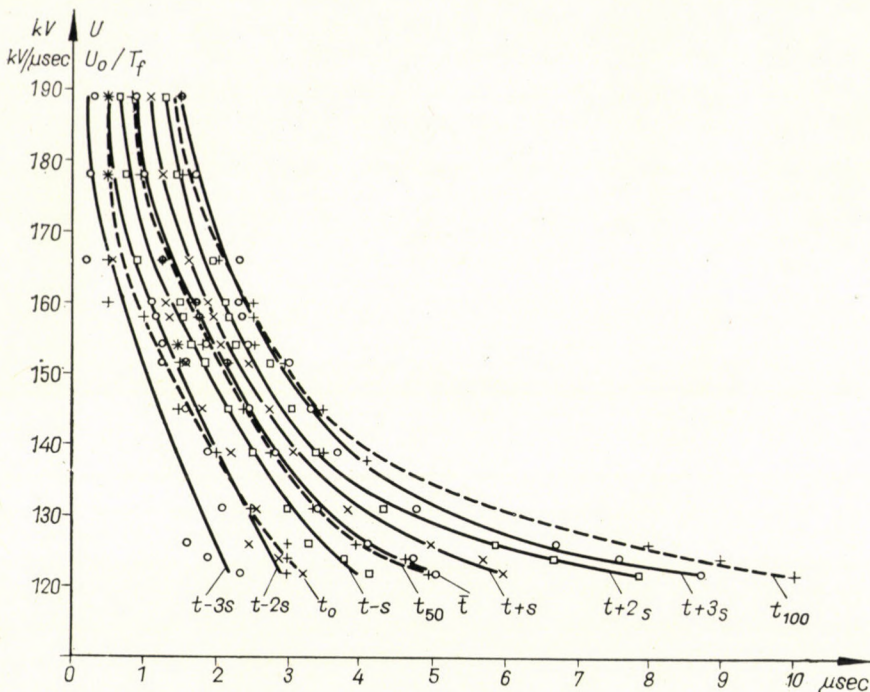


Fig. 15. Characteristics of the extreme values

6. Influence of the wave shape

In the literature several methods can be found for recalculating the characteristics plotted for a given wave shape to another wave shape. Among these methods ZINGERMAN's [3] and KIND's [6] works are especially remarkable. The calculations refer to characteristics plotted on the basis of the mean values.

III. Summary

Method and instruments have been developed for the statistical analysis of impulse breakdown voltages and flashovers. The equipments realized are suitable for the half automatic control of series of measurements consisting of numerous impulses and for the automatic evaluation of the measurement-results. It may be predetermined, of how many impulses, or breakdowns (flashovers) should the series of measurements consist, the instrument records the number of impulses and breakdowns (flashovers), as well as the probability of the breakdown, it classifies the time lags in adjustable time ranges and counts their distribution.

With this test method probability of the breakdown in function of the voltage may be determined in a quick and simple way, distribution of the time

lags for each voltage step, as well as the set of characteristics volt/ μ sec representing the relation between the time lag and the breakdown voltage may be plotted.

The first — methodological — test were made on medium-voltage insulations. The different characteristics may well be represented, reliability and accuracy of the measurements are satisfactory. On the basis of the characteristics plotted, numerous conclusions can be drawn even now, assisting in solving the principal and theoretical problems better which have not been cleared up yet.

The probability-voltage characteristics of the breakdown (curves S) are situated in a voltage range limited by voltages U_0 and U_{100} , the full characteristic may be approximated by a truncated normal distribution, or by a similar one; on the medium section a good result is given by the linear approximation. The ratio $(U'_{100} - U'_0)/U_{50}$ characteristic of the uniform distribution rate of rise may according to our measurements attain even a value of 26%, as against to the 10% limit generally accepted in literature. The data and derivations published in the literature for the number of impulses to be imposed on each voltage step are not valid and are to be corrected; according to our experiences 100 breakdowns are necessary by voltage steps and it is advisable to measure 4 voltage steps at least. For estimating the extremes, the values $U_0 = 0,8 U'_0$ and $U_{100} = 1,2 U'_{100}$ may be considered.

Distribution of the time lags above the 100% breakdown voltage is practically normal, below this value it is strongly curved and the distribution can be produced as the sum of some normal distributions. The distribution may be most suitably characterized by the median t_{50} and the range, in the great majority of cases t_{50} was in a good accordance with the mean value. For plotting the distribution, below U_{100} 100 flashovers, above it 50 impulses proved to be necessary.

The set of characteristics volt/ μ sec can simply be plotted on the basis of the measurements, it may be most practicably characterized by the mean curve interconnecting the medians of the time lags and by the extreme curves traced by the range. To plot this, measurements are to be made on at least 4 voltage steps within the area $U > U_{100}$.

In the area $U < U_{100}$ modification of the characteristics may come into question, taking into account the resultant probability referring to all of the impulses.

The tests discussed in the paper refer as yet merely breakdowns in the air. Consequently, the relations and conclusions given may be considered valid only for the case of air.

REFERENCES

1. VAJDA, Gy.: Semi-Automatic Recording of Volt-Microsecond Characteristics. *Acta Techn. Hung.* 54 (1966), 265
2. CSERNÁTONY-HOFFER, A.—GESZTI, P. O.—VAJDA, Gy.: Some Remarks on the Volt/ μ sec Characteristics of Air Gaps. *Acta Techn. Hung.* 44 (1963), 379.
3. Зингерман, А. С.: Построение вольтсекундных характеристик изоляции. *Электричество* (1948); № 6, 30.
4. МЕЕК, J. M.—Craggs, J. D.: *Electrical Breakdown of Gases*. Clarendon, Oxford 1953.
5. Сиротинский, Л. И. и др.: *Техника высоких напряжений I*. Госэнергоиздат, Москва 1951.
6. KIND, D.: Die Aufbaufläche bei Stossspannungsbeanspruchung technischer Elektrodeanordnungen in Luft. *ETZ-A* 79 (1958), 65.

EINE PRÜFMETHODE ZUR BESTIMMUNG DER ELEKTRISCHEN STOSSPANNUNGSFESTIGKEIT VON ISOLATIONEN

GY. VAJDA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Studie teilt die ersten Versuchsergebnisse mit, die in mehreren Hinsichten Stützpunkte für eine bessere Annäherung noch ungeklärter prinzipieller und methodologischer Probleme bieten. Ein Teil der Folgerungen, die aus den Experimenten gezogen werden können, steht zu einigen Feststellungen der Literatur im Gegensatz. Die Studie enthält mehrere Vorschläge für die zweckmäßige Auswertung der Meßergebnisse und für die Konstruktion der Kennlinien.

MÉTHODE D'EXAMEN POUR LA DÉTERMINATION DE LA RÉSISTANCE AUX TENSIONS DE CHOC DES ISOLATIONS

GY. VAJDA

RÉSUMÉ

L'étude expose les premiers résultats expérimentaux, qui servent à plus d'un égard de points d'appui permettant de mieux approcher les problèmes théoriques et méthodologiques non éclaircis. Une partie des conclusions tirées des essais contredit à certaines constatations de la littérature. Plusieurs propositions pour l'évaluation pratique des résultats de mesures et pour le tracé des caractéristiques ont été faites par l'auteur.

МЕТОДИКА ИСПЫТАНИЯ ИЗОЛЯЦИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ УДАРНОМ НАПРЯЖЕНИИ

Д. ВАЙДА

РЕЗЮМЕ

В работе описываются первые опытные результаты, которые во многих отношениях дают исходные точки для лучшего приближения еще не уточненных принципиальных и методических точек зрения. Часть выводов, которые можно сделать на основе проведенных опытов, противоречит некоторым литературным установлениям. В работе приведен ряд предложений относительно целесообразной оценки результатов измерений и построения характеристик.

ОПИСЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Я. ШОМЛО

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ПО АВТОМАТИЗАЦИИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ, БУДАПЕШТ

[Поступило 27-го января, 1964 г.]

Работа занимается гармонической линеаризацией нелинейностей в совершенно общем случае. С помощью выведенных формул в случае любых нелинейностей со статической характеристикой, кусочно-линейной аппроксимацией, можно получить постоянную, составляющую и параметры первой гармонии периодического сигнала, появляющегося на выходе под воздействием действующего на входе нелинейного члена сигнала с постоянной и гармонической составляющей. Результаты можно получить как в виде формул (аналитическая форма), так и в числовой форме при помощи таблиц. Симметричные колебания фигурируют в качестве специального случая, для которых полностью действительны сделанные выше выводы (и они дают описывающую функцию нелинейной характеристики). Для данного случая результаты совпадают с результатами прежней работы автора.

1. Введение

Вообще нелинейные члены характеризуются статическими характеристиками. Это в форме функциональной связи показывает, какой выходной сигнал соответствует некоторому входному сигналу нелинейного члена.

Статическую характеристику $[x_k = f(x_b)]$ можно задать в аналитической и графической формах.

При гармонической линеаризации нелинейный член характеризуется описывающей функцией. Это показывает отношение между первой гармоникой периодического сигнала, возникающего на выходе под воздействием гармонического сигнала, действующего на входе, и входным сигналом.

Для случая центрально симметричных однозначных, а также двухзначных статических характеристик и симметричных гармонических входных сигналов, в [3] дается общий метод для определения описывающих функций при помощи кусочно-линейной аппроксимации.

На практике, однако, большое значение имеет также исследование несимметричных колебаний. Несимметричные колебания возникают на выходе нелинейного члена в том случае, если

- а) статическая характеристика его несимметрична;
- б) центр колебания входного гармонического сигнала сдвинут по отношению к центру симметрии симметричной статической характеристики;

в) в общем случае, когда статическая характеристика является несимметричной и сдвинут центр колебания входного сигнала (рабочая точка). В этом случае, используя обозначения [3], выходной сигнал нелинейного члена

$$x_k(t) = \frac{A'_0(B, x_b^0)}{2} + \left[b(B, x_b^0) + \frac{a(B, x_b^0)}{\omega} p \right] \tilde{x}_b, \quad (1)$$

$$\left(p = \frac{d}{dt} \right)$$

где

$$x_b = x_b^0 + \tilde{x}_b;$$

$$\tilde{x}_b = B \sin \varphi, \quad (\varphi = \omega t);$$

$$\frac{A'_0}{2} = A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_k(x_b) d\varphi \quad (2)$$

постоянная составляющая разложения в ряд Фурье.

$$a = \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} x_k(x_b) \cos \varphi d\varphi, \quad (3)$$

$$b = \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} x_k(x_b) \sin \varphi d\varphi \quad (4)$$

коэффициенты первой гармоники.

С помощью кусочно-линейной аппроксимации и в этом случае можно определить описывающую функцию для обобщенной статической характеристики. В отдельных специальных случаях из общих формул можно получить описывающие функции при помощи простой подстановки, а при помощи таблицы можно определить их цифровые значения.

Данная работа ставит своей целью обобщить метод, разработанный в [3], для случая несимметричных колебаний.

Следует отметить, что графический метод определения описывающих функций кусочно-линейных нелинейностей рассматривается в [2]. В [6] и [7] описывается графический метод определения описывающей функции на основе первоначальной не приближенной характеристики. Исходя из работы К. Магнуса (упомянутой позднее в тексте), в [4] дается изложение описывающей функции значительного числа характеристик и их связи. На основе [5] в работе [8] излагается общий метод определения описывающей функции в случае кусочно-линейных характеристик определенного характера. Это можно считать в качестве частного результата общего метода, описанного в [3], но результаты имеют довольно сложную форму.

2. Общие замечания

Проанализируем случай, когда статическая характеристика нелинейного члена соответствует рис. 1 и входной сигнал имеет постоянную составляющую.

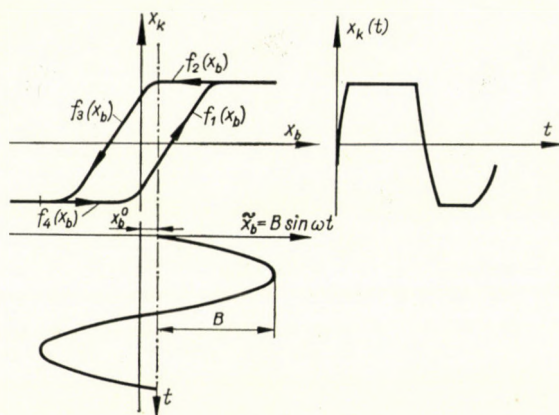


Рис. 1

Как видно, этот случай, и вообще любой случай несимметричных колебаний можно свести к такому случаю, когда статическая характеристика нелинейного члена является различной в каждой фазовой четверти

$$\left(\varphi = 0 + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi; \dots \right).$$

Это показано в полностью обобщенном виде на рис. 2.

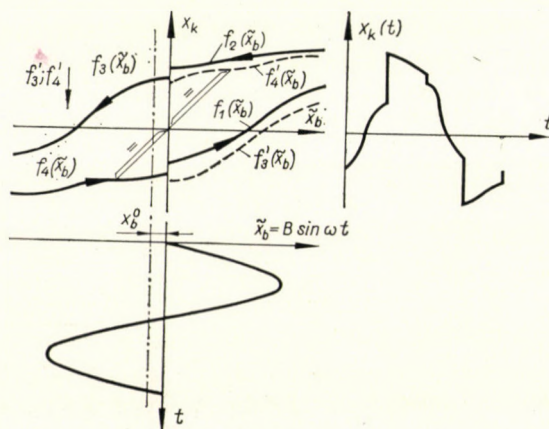


Рис. 2

3. Определение коэффициента «b»

При определении коэффициента b можно было бы использовать общие формулы [формулы (14) и (17)], выведенные в [3], естественно, применяя их в данном случае только для какой-либо одной ветви статической характеристики, однако в данном случае ради полноты упомянутые зависимости выводятся отличным от [3] образом.

На основе (4)

$$b(B, x_b^0) = \frac{1}{\pi B} \left[\int_0^{\pi/2} f_1(\tilde{x}_b) \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} f_2(\tilde{x}_b) \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi}^{3\pi/2} f_3(\tilde{x}_b) \sin \varphi d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f_4(\tilde{x}_b) \sin \varphi d\varphi \right].$$

Так как

$$\sin \varphi = \frac{\tilde{x}_b}{B},$$

$$d\varphi = \frac{d\tilde{x}_b}{B \cos \varphi} = \frac{d\tilde{x}_b}{B \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{x}_b}{B}\right)^2}},$$

$$b = \frac{1}{\pi B^2} \left[\int_0^B f_1(\tilde{x}_b) \frac{\tilde{x}_b}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b - \int_B^0 f_2(\tilde{x}_b) \frac{\tilde{x}_b}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b - \int_0^{-B} f_3(\tilde{x}_b) \frac{\tilde{x}_b}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b + \int_{-B}^0 f_4(\tilde{x}_b) \frac{\tilde{x}_b}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b \right].$$

Отсюда естественно следует, что

$$b = \frac{1}{\pi B^2} \left[\int_0^B f_1(\tilde{x}_b) + f_2(\tilde{x}_b) + f_3'(\tilde{x}_b) + f_4'(\tilde{x}_b) \right] \frac{\tilde{x}_b}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b, \quad (5)$$

где кривые $f_3'(\tilde{x}_b)$ и $f_4'(\tilde{x}_b)$ являются кривыми $f_3(\tilde{x}_b)$ и $f_4(\tilde{x}_b)$, повернутыми вокруг центра координат на 180° (центрально отраженно или f_3 и f_4 , рассматривая рис. 2 сверху). Следовательно, как это видно по формуле (5), b можно получить при интегрировании, выполненном идентичным образом для фазовых четвертей, и алгебраическим сложением полученных результатов.

Интегрирование

$$\int_0^B f(\tilde{x}_b) \frac{\tilde{x}_b}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b$$

МОЖНО ВЫПОЛНИТЬ ПО ЧАСТЯМ

$$\int_0^B f(\tilde{x}_b) \frac{\tilde{x}_b}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b = [-f(\tilde{x}_b) \sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}]_0^B + \quad (6)$$

$$+ \int_0^{f(B)} \sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2} df(\tilde{x}_b) = Bf(o) + \int_0^B \frac{df(\tilde{x}_b)}{d\tilde{x}_b} \sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2} d\tilde{x}_b.$$

Статическую характеристику аппроксимируем линейными отрезками (рис. 3).

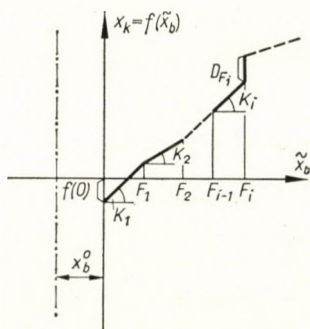


Рис. 3

Пусть

$$\left[\frac{df(\tilde{x}_b)}{d\tilde{x}_b} \right]_i = K_i.$$

Где на статической характеристике имеется конечный разрыв

$$\left[\frac{df}{d\tilde{x}_b} \right]_{F_i} = D_{F_i} \delta(\tilde{x}_b - F_i),$$

где

$$F_{n-1} < B \leq F_n.$$

(Вместо F_n верхним пределом интегрирования необходимо взять B .)

D_F значение разрыва статической характеристики,

$$D_{F_i} = [f(F_i + 0) - f(F_i - 0)].$$

На основе (6) для одной ветви характеристики получим

$$b = \frac{f(b)}{\pi B} + \frac{1}{\pi B^2} \sum_{i=1}^n \left[K_i \int_{F_{i-1}}^{F_i} \sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2} d\tilde{x}_b + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^B D_{F_i} \delta(\tilde{x}_b - F_i) \sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2} d\tilde{x}_b \Big] = \\
& = \frac{f(0)}{\pi B} + \frac{1}{\pi B^2} \sum_{i=1}^n \left\{ K_i \frac{1}{2} \left[\tilde{x}_b \sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2} + B^2 \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} \right]_{F_{i-1}}^{F_i} + \right. \\
& + \left. D_{F_i} \sqrt{B^2 - F_i^2} \right\} = \frac{f(0)}{\pi B} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ K_i \frac{2}{\pi} \left[\frac{F_i}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_i}{B} \right)^2} + \right. \right. \\
& + \left. \arcsin \frac{F_i}{B} - \frac{F_{i-1}}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_{i-1}}{B} \right)^2} - \arcsin \frac{F_{i-1}}{B} \right] + \\
& + \left. \frac{4 D_{F_i} F_i}{F_i B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_i}{B} \right)^2} \right\}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Так как

$$\sin \varphi_i = \frac{F_i}{B}$$

и применив обозначения [3]

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{F_i}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_i}{B} \right)^2} + \arcsin \frac{F_i}{B} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi_i + \varphi_i \right) = k \left(\frac{B}{F_i} \right), \tag{8}$$

$$\frac{2}{\pi} \left(2 \frac{F_i}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_i}{B} \right)^2} \right) = \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi_i = l \left(\frac{B}{F_i} \right) \tag{9}$$

по формуле (7) при подстановке (8) и (9) получим

$$b^1 = \frac{f(0)}{\pi B} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ K_i \left[k \left(\frac{B}{F_i} \right) - k \left(\frac{B}{F_{i-1}} \right) \right] + \frac{D_{F_i}}{F_i} l \left(\frac{B}{F_i} \right) \right\}. \tag{10}$$

Выразив сумму

$$\sum_{i=1}^n K_i \left[k \left(\frac{B}{F_i} \right) - k \left(\frac{B}{F_{i-1}} \right) \right] = M,$$

учитывая, что

$$k \left(\frac{B}{F_n} \right) = k \left(\frac{B}{B} \right) = 1$$

получим

$$\begin{aligned}
M & = K_n - K_n k \left(\frac{B}{F_{n-1}} \right) + K_{n-1} k \left(\frac{B}{F_{n-1}} \right) - K_{n-1} k \left(\frac{B}{F_{n-2}} \right) + \dots + \\
& + K_{i+1} k \left(\frac{B}{F_{i+1}} \right) - K_{i+1} k \left(\frac{B}{F_i} \right) + K_i k \left(\frac{B}{F_i} \right) - K_i k \left(\frac{B}{F_{i-1}} \right) + \\
& + K_{i-1} k \left(\frac{B}{F_{i-1}} \right) - K_{i-1} k \left(\frac{B}{F_{i-2}} \right) + \dots + K_2 k \left(\frac{B}{F_2} \right) - K_2 k \left(\frac{B}{F_1} \right) + \\
& + K_1 k \left(\frac{B}{F_1} \right) - K_1 k \left(\frac{B}{F_0} \right) = K_n + \sum_{i=0}^{n-1} (K_i - K_{i+1}) k \left(\frac{B}{F_i} \right). \tag{11}
\end{aligned}$$

[Следует отметить, что $k(B/F_0) = 0$, так как

$$F_0 = 0 \text{ и } l(B/F_n) = l(B/B) = 0.]$$

Подставив в (10) выражение (11), получим

$$b^1(B, x_b^0) = \frac{f(0)}{\pi B} + \frac{1}{4} \left\{ K_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[(K_i - K_{i-1}) k \left(\frac{B}{F_i} \right) + \frac{D_{F_i}}{F_i} l \left(\frac{B}{F_i} \right) \right] \right\}. \quad (I)$$

Значения $k(B/F_i)$ и $l(B/F_i)$ можно найти в [3] в таблицах.* Ради полноты изложения эти таблицы приведены в приложении (приложения Б, В).

По выражению (I) при подстановке (8) и (9) коэффициент « b » описывающей функции в случае любой нелинейности с кусочно-линейной статической характеристикой можно получить также и в обычной аналитической форме.

В частности — в случае однозначных симметричных нелинейностей и симметрических колебаний по формуле (5):

$$b(B) = K_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left[(K_i - K_{i+1}) k \left(\frac{B}{F_i} \right) + \frac{D_{F_i}}{F_i} l \left(\frac{B}{F_i} \right) \right], \quad (Ia)$$

где, если $F_0 \rightarrow 0$

$$\frac{D_{F_0}}{F_0} l \left(\frac{B}{F_0} \right) + \rightarrow \frac{4 D_{F_0}}{\pi B} = \frac{4 f(0)}{\pi B}.$$

В случае двухзначных нелинейностей с симметричной статической характеристикой, если одна ветвь состоит из « n », а другая из « m » прямых отрезков, тогда по формуле (5) получим:

$$b(B) = \frac{1}{2} \left\{ K_m + K_n + \sum_{j=0}^{m-1} \left[(K_j - K_{j+1}) k \left(\frac{B}{F_j} \right) + \frac{D_{F_j}}{F_j} l \left(\frac{B}{F_j} \right) \right] + \sum_{i=0}^{n-1} \left[(K_i - K_{i+1}) k \left(\frac{B}{F_i} \right) + \frac{D_{F_i}}{F_i} l \left(\frac{B}{F_i} \right) \right] \right\}. \quad (Ib)$$

Формулы (Ia) и (Ib) идентичны формулам (14) и (17) работы [3].

* Таблица $k(B/F_i)$ взята из работы: MAGNUS K.: Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme (VDI-Forschungsheft 451). VDI-Verlag, Düsseldorf 1955.

4. Определение коэффициента A_0

Аналогично изложенному выше несимметричность колебаний может быть рассмотрена как следствие различных по фазовым четвертям статических характеристик (рис. 2). По (2) имеем

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_k(\tilde{x}_b) d\varphi.$$

На основе рис. 2

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} f_1(\tilde{x}_b) d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} f_2(\tilde{x}_b) d\varphi + \int_{\pi}^{3/2\pi} f_3(\tilde{x}_b) d\varphi + \int_{3/2\pi}^{2\pi} f_4(\tilde{x}_b) d\varphi \right].$$

Аналогично, как и выше, заменив переменную, имеем

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^B \frac{f_1(\tilde{x}_b)}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b - \int_B^0 \frac{f_2(\tilde{x}_b)}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b - \int_0^{-B} \frac{f_3(\tilde{x}_b)}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b + \int_{-B}^0 \frac{f_4(\tilde{x}_b)}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b \right].$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^B [f_1(\tilde{x}_b) + f_2(\tilde{x}_b) - f_3'(\tilde{x}_b) - f_4'(\tilde{x}_b)] \frac{1}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b. \quad (12)$$

На основе (12) интегрирование и в данном случае может быть осуществлено по фазовым четвертям идентичным образом.

Интегрируя по частям, для каждой ветви кривой получим:

$$\int_0^B f(\tilde{x}_b) \frac{1}{\sqrt{B^2 - \tilde{x}_b^2}} d\tilde{x}_b = \frac{\pi}{2} f(B) - \int_{f(0)}^{f(B)} \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} df = 2\pi A_0^I.$$

В случае кусочно-линейной аппроксимации (рис. 3) приведенный выше интеграл можно записать в следующей форме

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} f(B) - \int_0^B \frac{df}{d\tilde{x}_b} \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} d\tilde{x}_b &= \frac{\pi}{2} f(B) - \\ &- \sum_{i=1}^n \left[K_i \int_{F_{i-1}}^{F_i} \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} d\tilde{x}_b - \int_0^B D_{F_i} \delta(\tilde{x}_b - F_i) \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} d\tilde{x}_b \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 f(B) = & D_{F_0} + K_1 F_1 + K_2 (F_2 - F_1) + \dots + K_i (F_i - F_{i-1}) + \\
 & + D_{F_i} + \dots + K_{n-1} (F_{n-1} - F_{n-2}) + K_n (B - F_{n-1}) = D_{F_0} + \\
 & + F_1 (K_1 - K_2) + F_2 (K_2 - K_3) + \dots + F_i (K_i - K_{i+1}) + \\
 & + D_{F_i} + \dots + F_{n-1} (K_{n-1} - K_n) + K_n B;
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 K_i \int_{F_{i-1}}^{F_i} \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} d\tilde{x}_b = & K_i \left(F_i \arcsin \frac{F_i}{B} + \sqrt{B^2 - F_i^2} - \right. \\
 & \left. - F_{i-1} \arcsin \frac{F_{i-1}}{B} - \sqrt{B^2 - F_{i-1}^2} \right) = K_i (\psi_i - \psi_{i-1}),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где было введено обозначение

$$\psi_i = F_i \arcsin \frac{F_i}{B} + \sqrt{B^2 - F_i^2}. \tag{16}$$

Используя (15) и учитывая, что $F_{n-1} < B \leq F_n$ — и что вместо F_n верхним пределом интегрирования является B , получим:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=1}^n K_i \int_{F_{i-1}}^{F_i} \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} d\tilde{x}_b = & - K_n \left(B \frac{\pi}{2} - \psi_{n-1} \right) - K_{n-1} (\psi_{n-1} - \psi_{n-2}) - \\
 & - K_{n-2} (\psi_{n-2} - \psi_{n-3}) - \dots - K_2 (\psi_2 - \psi_1) - K_1 (\psi_1 - \psi_0) = \\
 = & - \frac{\pi}{2} K_n B + (K_n - K_{n-1}) \psi_{n-1} + (K_{n-1} - K_{n-2}) \psi_{n-2} + \dots + \\
 & + (K_{i+1} - K_i) \psi_i + \dots + (K_2 - K_1) \psi_1 + K_1 B;
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$- \int_0^B D_{F_i} \delta(\tilde{x}_b - F_i) \arcsin \frac{\tilde{x}_b}{B} d\tilde{x}_b = - \sum_{i=1}^n D_{F_i} \arcsin \frac{F_i}{B} = \sum_{i=0}^n - D_{F_i} \varphi_i. \tag{18}$$

Подставляя в (13) выражения (14), (17) и (18), а также подставив по (16) величину ψ_i , получим

$$\begin{aligned}
 A_0^i = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[(K_{i+1} - K_i) \left(\psi_i - F_i \frac{\pi}{2} \right) \right] + \sum_{i=0}^n \left[D_{F_i} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_i \right) \right] + \right. \\
 & \left. + K_1 B \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[(K_{i+1} - K_i) \left(F_i \arcsin \frac{F_i}{B} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + B \sqrt{1 - \left(\frac{F_i}{B} \right)^2} - F_i \frac{\pi}{2} \right) \right] + \sum_{i=0}^n \left[D_{F_i} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_i \right) \right] + K_1 B \right\} =
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2} B \left\{ \frac{K_1}{\pi} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[(K_{i+1} - K_i) \frac{1}{\pi} \left(\frac{F_i}{B} \arcsin \frac{F_i}{B} - \frac{F_i}{B} \frac{\pi}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{F_i}{B} \right)^2} \right) \right] \right\} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n \left[D_{F_i} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_i \right) \right].$$

Введем обозначение:

$$p \left(\frac{B}{F_i} \right) = \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{F_i}{B} \right)^2} + \frac{F_i}{B} \left(\arcsin \frac{F_i}{B} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \left(\cos \varphi_i - \sin \varphi_i \arccos \frac{F_i}{B} \right). \quad (20)$$

(Для облегчения обращения принимаем, что для « p » переменная имеет вид B/F_i , а не F_i/B .)

Используя это, выражение (19) можно записать в следующем виде

$$A_0^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ B \frac{K_1}{\pi} + \frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[B(K_{i+1} - K_i) p \left(\frac{B}{F_i} \right) + D_{F_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_i}{\pi} \right) \right] \right\}, \quad (II)$$

где $f(0) = D_{F_0}$.

По формуле (II) получим величину коэффициента A_0 для одной ветви статической характеристики. Конечный результат для всей статической характеристики получается при сложении по (12) результатов, полученных для отдельных ветвей характеристики. В случае однозначной статической характеристики $f_1 = f_2; f_3 = f_4$ и

$$A_0 = B \frac{(K_1^j - K_1^b)}{\pi} + \frac{1}{2} [f^j(0) - f^b(0)] + \sum_{i=1}^{n-1} \left[B(K_{i+1} - K_i) p \left(\frac{B}{F_i} \right) + D_{F_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_i}{\pi} \right) \right] - \sum_{h=1}^{r-1} \left[B(K_{h+1} - K_h) p \left(\frac{B}{F_h} \right) + D_{F_h} \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_h}{\pi} \right) \right], \quad (IIa)$$

где индексы « j » и « b » действительны для правой стороны статической характеристики и, соответственно, для левой, повернутой на 180° (и состоящей из « r » отрезков).

Значения функции $p(B/F_i)$ можно свести в таблицу. Такая таблица приведена в приложении (Приложение А).

5. Определение коэффициента α

Пусть аналогично упомянутому выше статическая характеристика нелинейного члена будет различной по фазовым четвертям (рис. 4).

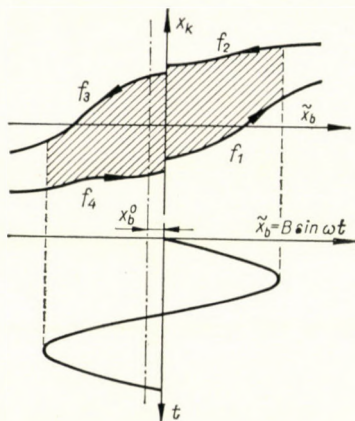


Рис. 4

На основе формулы (3) имеем

$$\alpha = \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} x_k \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi B^2} \int_{\tilde{x}_b(0)}^{\tilde{x}_b(2\pi)} x_k d\tilde{x}_b = \frac{1}{\pi B^2} \left\{ \int_0^B f_1(\tilde{x}_b) d\tilde{x}_b + \int_B^0 f_2(\tilde{x}_b) d\tilde{x}_b + \int_0^{-B} f_3(\tilde{x}_b) d\tilde{x}_b + \int_{-B}^0 f_4(\tilde{x}_b) d\tilde{x}_b \right\}. \quad (21)$$

Выражение, взятое в скобки {}, соответствует заштрихованной на рис. 4 площади и в данном случае имеет отрицательный знак. (Вообще этот знак зависит от направления обхода кривой.) Эту площадь можно легко определить графическим методом. Аналитический метод определения коэффициента α излагается ниже.

Аппроксимируем характеристику кусочно-линейно указанным на рис. 5 образом, несколько отклоняясь от применявшегося до сих пор способа обозначения

$$(s = m + n).$$

Осуществим интегрирование, указанное в (21), только для правой стороны характеристики.

Само собою разумеется, что для левой стороны рисунка после поворота на 180° (центральное отражение) выводы будут полностью действительными.

Выполним сложение J_i :

$$\begin{aligned}
 J_1 &= (K_1 - K_2)F_1(F_2 - F_1); \\
 J_2 &= [(K_1 - K_2)F_1 + (K_2 - K_3)F_2] (F_3 - F_2); \\
 J_3 &= [(K_1 - K_2)F_1 + (K_2 - K_3)F_2 + (K_3 - K_4)F_3] (F_4 - F_3); \\
 J_{s-2} &= [(K_1 - K_2)F_1 + (K_2 - K_3)F_2 + \dots + (K_{s-2} - \\
 &\quad - K_{s-1}) F_{s-2}] (F_{s-2} - F_{s-1}); \\
 \sum_{i=1}^{s-2} J_i &= (K_1 - K_2)F_1F_{s-1} + (K_2 - K_3)F_2F_{s-1} + \dots + \\
 &\quad + (K_{s-2} - K_{s-1}) F_{s-2} F_{s-1} + (K_2 - K_1) F_1^2 + \\
 &\quad + (K_3 - K_2) F_2^2 + \dots + (K_{s-1} - K_{s-2}) F_{s-2}^2. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Так как $F_s = 0$, поэтому

$$\begin{aligned}
 J_{s-1} &= [(K_1 - K_2) F_1 + (K_2 - K_3) F_2 + \dots + (K_{s-2} - K_{s-1}) F_{s-2} + \\
 &\quad + (K_{s-1} - K_s) F_{s-1}] (0 - F_{s-1}). \quad (24)
 \end{aligned}$$

По (23) и (24) получаем

$$\sum_{i=1}^{s-1} J_i = \sum_{i=1}^{s-1} (K_{i+1} - K_i) F_i^2. \quad (25)$$

В формуле (22) имеем (см. рис. 4 и 5)

$$\begin{aligned}
 D_B &= f_2(B) - f_1(B); \quad (26) \\
 f_2(B) &= f_2(0) + K_s F_{s-1} + K_{s-1} (F_{s-2} - F_{s-1}) + \dots + \\
 &\quad + K_{n+1} (B - F_{n+1}) + \sum_{i=s-1}^{n-1} D_{F_i}; \\
 f_1(B) &= f_1(0) + K_1 F_1 + K_2 (F_2 - F_1) + K_3 (F_3 - F_2) + \dots + \\
 &\quad + K_n (B - F_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} D_{F_i}.
 \end{aligned}$$

Подставляя в выражение (26) $f_1(B)$ и $f_2(B)$, имеем

$$\begin{aligned}
 D_B &= f_2(0) - f_1(0) + (K_2 - K_1)F_1 + (K_3 - K_2)F_2 + \dots + \\
 &\quad + (K_n - K_{n-1}) F_{n-1} + (K_{n+1} - K_n) B + (K_{n+2} - K_{n+1}) F_{n+1} + \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + (K_{s-1} - K_{s-2}) F_{s-2} + (K_s - K_{s-1}) F_{s-1} = f_2(0) - f_1(0) + \\
 & + \sum_{i=1}^{s-1} (K_{i+1} - K_i) F_i + \sum_{i=s-1}^{n+1} D_{F_i} + \sum_{i=1}^{n-1} D_{F_i}.
 \end{aligned}$$

В формуле (27) $F_{n-1} < B < F_n$ и вместо F_n следует писать B .

Подставив в выражение (22) выражения (25) и (27) и выполнив алгебраическое сложение, получим:

$$\begin{aligned}
 I' = \sum_{i=1}^{s-1} \left[\frac{1}{2} (K_{i+1} - K_i) F_i^2 - D_{F_i} \right] - B \left[f_2(0) - f_1(0) + \right. \\
 \left. + \sum_{i=1}^{s-1} (K_{i+1} - K_i) F_i \right] - \sum_{i=s-1}^{n+1} D_{F_i} + \sum_{i=1}^{n-1} D_{F_i}.
 \end{aligned} \quad (28)$$

На основе (21), учитывая выражения (22) и, соответственно (25), значение a для правой стороны характеристики будет:

$$a_j = \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{s-1} \left[\frac{1}{2} (K_{i+1} - K_i) \left(\frac{F_i}{B} \right)^2 - \frac{D_{F_i} F_i}{B^2} \right] - \frac{D_B}{B} \right\}. \quad (IIIa)$$

Из (IIIa), учитывая (27)

$$\begin{aligned}
 a_j = \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{s-1} \left[\frac{1}{2} (K_{i+1} - K_i) \left(\frac{F_i^2}{B^2} - 2 \frac{F_i}{B} \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{D_{F_i} F_i}{B^2} \right] - \frac{f_2(0) - f_1(0)}{B} - \frac{- \sum_{i=s-1}^{n+1} D_{F_i} + \sum_{i=1}^{n-1} D_{F_i}}{B} \right\}.
 \end{aligned} \quad (III)$$

На основе формулы (III) можно определить окончательное значение коэффициента a . Как уже говорилось выше

$$a = a^j + a^b. \quad (29)$$

В случае симметричной нелинейности типа петли гистерезиса и симметричного колебания, вследствие того, что $D_B = 0$ и $a^j = a^b$, по формуле (IIIa) получим:

$$a = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s-1} \left[(K_{i+1} - K_i) \left(\frac{F_i}{B} \right)^2 - \frac{2 D_{F_i} F_i}{B^2} \right]. \quad (III)$$

Формула (IIIb) совпадает с формулой [3], полученной для этого же случая [формула (20)].

6. Выводы

При гармонической линеаризации на выходе нелинейного члена под воздействием гармонического сигнала в общем случае появляется выходной сигнал

$$x_k(t) = A_0(x_b^0, B) + \left[b(x_b^0, B) + \frac{a(x_b^0, B)}{\omega} p \right] \tilde{x}_b.$$

В статье дается общий метод определения коэффициентов « A_0 », « b » и « a ».

Теперь обобщим эти методы.

При определении b и A_0 статическая характеристика нелинейного члена разбивается на четыре ветви кривой вправо и влево от прямой « x_b^0 ». Повернем левосторонние ветви кривой на 180° , то есть правую полуплоскость (рисунок следует рассматривать сверху, см. рис. 2). Ветви кривой разбиваются на линейные отрезки и последним придаются обозначения, указанные на рис. 3.

По формуле (I), для одной ветви кривой, определяется коэффициент b , а по формуле (II) A_0 . Коэффициенты складываются по (5) и соответственно по (12). Это для b означает сложение результатов, полученных для отдельных ветвей кривой. В случае A_0 результат, полученный для повернутых на 180° ветвей кривой, необходимо вычесть из результата, полученного для оставшихся на месте ветвей кривой.

Числовые расчеты в большой мере облегчаются составленными таблицами. Однако, при желании b и A_0 можно получить в полностью развернутом виде при подстановке по формулам (8), (9) и (20) выражений $k(B/F_i)$, $l(B/F_i)$ и $p(B/F_i)$. При определении « a » статическая характеристика нелинейного члена тоже разбивается указанным выше способом на ветви кривой, последние пересекаются прямыми $\tilde{x}_b = B$; $-B$ (рис. 4), а полученные кривые аппроксимируются с линейными отрезками и обозначаются по рис. 5. Левую сторону характеристики указанным ранее образом перевернем на правостороннюю полуплоскость. Для двух замкнутых кривых по (III) или (IIIa) определяются a^j и a^b . Полученные результаты складываются.

Для однозначных статических характеристик $a = 0$. Когда заштрихованную «перекрытую» площадь (рис. 4) можно легко вычислить (или же в случае, когда проще непосредственно измерить эту площадь), тогда значение a целесообразно вычислить по формуле (21).

Выведенные формулы можно применять и в случае встречающихся на практике более простых случаев. (В отношении этого в IV-ом приложении приведено несколько примеров.)

*

Наконец, автор данной работы выражает свою благодарность проф. д-ру. Ф. Чаки за просмотр рукописи и за ценные советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица $p(B/Fi)$

B/Fi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цена деления 0,1										
1	0,0000	0,0083	0,0206	0,0337	0,0465	0,0588	0,0703	0,0810	0,0910	0,1003
2	0,1090	0,1170	0,1245	0,1315	0,1380	0,1441	0,1498	0,1552	0,1603	0,1650
3	0,1695	0,1737	0,1777	0,1815	0,1851	0,1885	0,1918	0,1949	0,1978	0,2006
4	0,2033	0,2059	0,2083	0,2107	0,2129	0,2150	0,2172	0,2191	0,2211	0,2229
5	0,2247	0,2264	0,2281	0,2297	0,2312	0,2327	0,2341	0,2355	0,2369	0,2382
6	0,2394	0,2406	0,2418	0,2429	0,2441	0,2452	0,2462	0,2472	0,2482	0,2491
7	0,2501	0,2510	0,2519	0,2528	0,2537	0,2545	0,2553	0,2560	0,2568	0,2576
8	0,2583	0,2590	0,2597	0,2604	0,2611	0,2617	0,2623	0,2629	0,2635	0,2641
9	0,2647	0,2653	0,2658	0,2664	0,2669	0,2674	0,2680	0,2685	0,2690	0,2694
10	0,2699	0,2704	0,2708	0,2713	0,2717	0,2722	0,2726	0,2730	0,2734	0,2738
11	0,2742	0,2745	0,2749	0,2753	0,2757	0,2760	0,2764	0,2767	0,2771	0,2774
12	0,2778	0,2781	0,2784	0,2787	0,2790	0,2793	0,2796	0,2799	0,2802	0,2805
13	0,2808	0,2811	0,2813	0,2816	0,2819	0,2821	0,2824	0,2826	0,2829	0,2832
14	0,2834	0,2837	0,2839	0,2841	0,2844	0,2846	0,2848	0,2850	0,2852	0,2855
15	0,2857	0,2859	0,2861	0,2863	0,2865	0,2867	0,2869	0,2871	0,2873	0,2875
16	0,2877	0,2879	0,2881	0,2883	0,2884	0,2886	0,2888	0,2889	0,2891	0,2892
17	0,2895	0,2896	0,2898	0,2899	0,2901	0,2903	0,2904	0,2906	0,2907	0,2908
18	0,2910	0,2912	0,2913	0,2915	0,2916	0,2918	0,2919	0,2920	0,2922	0,2923
19	0,2924	0,2925	0,2927	0,2929	0,2930	0,2931	0,2932	0,2933	0,2935	0,2936

Цена деления 1

20	0,2937	0,2949	0,2959	0,2969	0,2977	0,2986	0,2993	0,3000	0,3007	0,3013
30	0,3018	0,3023	0,3028	0,3033	0,3038	0,3041	0,3045	0,3049	0,3053	0,3056
40	0,3059	0,3062	0,3065	0,3067	0,3070	0,3073	0,3075	0,3077	0,3080	0,3082
50	0,3084	0,3086	0,3088	0,3089	0,3091	0,3093	0,3094	0,3096	0,3098	0,3099
60	0,3100	0,3102	0,3103	0,3104	0,3106	0,3107	0,3108	0,3109	0,3110	0,3111
70	0,3112	0,3113	0,3114	0,3115	0,3116	0,3117	0,3117	0,3118	0,3119	0,3120
80	0,3121	0,3122	0,3122	0,3123	0,3124	0,3124	0,3125	0,3126	0,3126	0,3127
90	0,3128	0,3128	0,3129	0,3130	0,3130	0,3131	0,3131	0,3132	0,3132	0,3133

Цена деления 10

100	0,3133	0,3138	0,3142	0,3145	0,3148	0,3150	0,3152	0,3154	0,3156	0,3157
-----	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

$$p = f(B/F_i)$$

Примечание:

$$B/F_i \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow \frac{1}{\pi} = 0,31831.$$

Примеры:

1. $B/F_i = 7,1, \quad p = 0,2510;$

2. $B/F_i = 71, \quad p = 0,3113;$

3. $B/F_i = 140, \quad p = 0,3148.$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица $k(B/Fi)$

B/Fi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цена деления										
1	1,00000	0,96755	0,92937	0,87163	0,82474	0,78090	0,74040	0,70319	0,66906	0,63775
2	0,60900	0,58254	0,55815	0,53561	0,51474	0,49537	0,47735	0,46055	0,44487	0,43018
3	0,41642	0,40348	0,39131	0,36984	0,36901	0,35877	0,34907	0,33988	0,33115	0,32286
4	0,31496	0,30744	0,30026	0,29341	0,28686	0,28059	0,27459	0,26884	0,26333	0,25803
5	0,25294	0,24804	0,24333	0,23880	0,23443	0,23022	0,22615	0,22222	0,21843	0,21476
6	0,21122	0,20779	0,20447	0,20125	0,19813	0,19511	0,19217	0,18933	0,18656	0,18388
7	0,18127	0,17873	0,17627	0,17387	0,17153	0,16926	0,16704	0,16489	0,16279	0,16074
8	0,15874	0,15679	0,15489	0,15303	0,15122	0,14945	0,14772	0,14603	0,14437	0,14276
9	0,14118	0,13963	0,13812	0,13664	0,13519	0,13378	0,13239	0,13103	0,12969	0,12839
10	0,12711	0,12586	0,12463	0,12342	0,12224	0,12108	0,11994	0,11882	0,11772	0,11665
11	0,11559	0,11455	0,11353	0,11253	0,11154	0,11058	0,10962	0,10869	0,10777	0,10687
12	0,10598	0,10511	0,10425	0,10340	0,10257	0,10175	0,10094	0,10015	0,09937	0,09860
13	0,09784	0,09710	0,09636	0,09564	0,09493	0,09423	0,09353	0,09285	0,09218	0,09152
14	0,09087	0,09022	0,08959	0,08896	0,08835	0,08774	0,08714	0,08655	0,08596	0,08539
15	0,08482	0,08426	0,08370	0,08316	0,08262	0,08209	0,08156	0,08104	0,08053	0,08002
16	0,07952	0,07903	0,07854	0,07806	0,07759	0,07712	0,07665	0,07620	0,07574	0,07529
17	0,07485	0,07441	0,07398	0,07356	0,07313	0,07272	0,07230	0,07190	0,07149	0,07109
18	0,07070	0,07031	0,06992	0,06954	0,06916	0,06879	0,06842	0,06805	0,06769	0,06733
19	0,06698	0,06663	0,06628	0,06594	0,06560	0,06526	0,06493	0,06460	0,06428	0,06395

Цена деления 1

20	0,06363	0,06061	0,05785	0,05534	0,05303	0,05092	0,04896	0,04715	0,04546	0,04389
30	0,04243	0,04106	0,03978	0,03858	0,03744	0,03637	0,03537	0,03441	0,03350	0,03264
40	0,03183	0,03105	0,03031	0,02961	0,02893	0,02829	0,02768	0,02709	0,02652	0,02598
50	0,02546	0,02496	0,02448	0,02402	0,02358	0,02315	0,02273	0,02233	0,02195	0,02158
60	0,02122	0,02087	0,02053	0,02021	0,01989	0,01959	0,01929	0,01900	0,01872	0,01845
70	0,01819	0,01793	0,01768	0,01744	0,01720	0,01697	0,01675	0,01653	0,01632	0,01612
80	0,01591	0,01572	0,01553	0,01534	0,01516	0,01498	0,01480	0,01463	0,01447	0,01430
90	0,01415	0,01399	0,01384	0,01369	0,01354	0,01340	0,01326	0,01313	0,01299	0,01286

Цена деления 10

100	0,01273	0,01157	0,01061	0,00979	0,00909	0,00849	0,00796	0,00749	0,00707	0,00670
-----	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

$$k = f(B/F_i)$$

Примеры:

1. $B/F_i = 7,1, \quad k = 0,17873;$

2. $B/F_i = 71, \quad k = 0,01793;$

3. $B/F_i = 140, \quad k = 0,00909.$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица $l(B/F_i)$

B/F_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цена деления										
1	0	0,4822	0,5865	0,6258	0,6365	0,6327	0,6212	0,6057	0,5882	0,5698
2	0,5513	0,5332	0,5155	0,4986	0,4822	0,4668	0,4521	0,4381	0,4246	0,4122
3	0,4002	0,3889	0,3781	0,3677	0,3578	0,3485	0,3398	0,3313	0,3231	0,3154
4	0,3081	0,3011	0,2944	0,2879	0,2819	0,2758	0,2703	0,2649	0,2594	0,2543
5	0,2495	0,2447	0,2403	0,2359	0,2317	0,2277	0,2238	0,2200	0,2164	0,2128
6	0,2093	0,2058	0,2026	0,1994	0,1963	0,1935	0,1906	0,1879	0,1853	0,1826
7	0,1801	0,1776	0,1751	0,1726	0,1703	0,1682	0,1661	0,1641	0,1620	0,1600
8	0,1579	0,1560	0,1541	0,1523	0,1505	0,1487	0,1471	0,1454	0,1437	0,1422
9	0,1406	0,1390	0,1375	0,1361	0,1348	0,1334	0,1320	0,1306	0,1293	0,1279
10	0,1266	0,1254	0,1242	0,1230	0,1218	0,1206	0,1195	0,1185	0,1173	0,1162
11	0,1152	0,1142	0,1132	0,1122	0,1112	0,1103	0,1094	0,1085	0,1075	0,1065
12	0,1057	0,1049	0,1042	0,1031	0,1023	0,1015	0,1008	0,1000	0,0992	0,0984
13	0,0976	0,0968	0,0961	0,0954	0,0947	0,0940	0,0933	0,0927	0,0921	0,0914
14	0,0907	0,0901	0,0894	0,0887	0,0881	0,0875	0,0869	0,0863	0,0858	0,0852
15	0,0847	0,0842	0,0836	0,0831	0,0826	0,0820	0,0814	0,0809	0,0804	0,0799

Примечание: Если $B/F_i > 16$, тогда значения $l = k$ можно определить, используя таблицу $k = f(B/F_i)$.

Примеры:

- | | | |
|--------------------|-----------------|--------------------------------------|
| 1. $B/F_i = 7,1$, | $l = 0,1776$; | |
| 2. $B/F_i = 71$, | $l = 0,01793$ } | ; на основе таблицы $k = f(B/F_i)$. |
| 3. $B/F_i = 140$, | $l = 0,00909$ } | |

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Примеры

1. Симметричная статическая характеристика с переменным коэффициентом усиления с несимметричным входным сигналом (см. рис. 6). По (1) и (5) имеем

$$b(B, x_b^0) = \frac{1}{2} \left\{ K_2 + K_3 + (K_2 - K_3) k \left(\frac{B}{F_2} \right) + (K_1 - K_2) k \left(\frac{B}{F_1} \right) + (K_1 - K_2) k \left(\frac{B}{F_1} \right) \right\}.$$

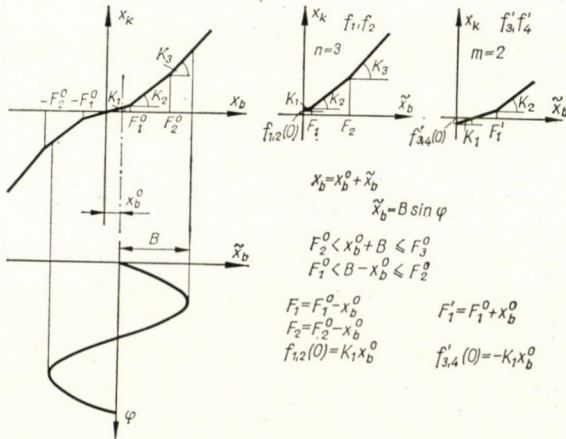


Рис. 6

Впишем по (8) выражение $k(B/F_i)$, с целью получения в привычной форме коэффициента b

$$b(B, x_b^0) = \frac{1}{2} \left\{ K_2 + K_3 + (K_2 - K_3) \frac{2}{\pi} \left[\frac{F_2^0 - x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_2^0 - x_b^0}{B} \right)^2} + \arcsin \frac{F_2^0 - x_b^0}{B} \right] + (K_1 - K_2) \frac{2}{\pi} \left[\frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \right)^2} + \arcsin \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \right] + (K_1 - K_2) \frac{2}{\pi} \left[\frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right)^2} + \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right] \right\}.$$

Если

$$\left. \begin{array}{l} F_1^0 < x_b^0 + B \leq F_2^0 \\ F_1^0 < B - x_b^0 \leq F_2^0 \end{array} \right\} (m = 2, n = 2).$$

Тогда в полностью развернутой форме

$$b(B, x_b^0) = K_2 + \frac{1}{\pi B} (K_1 - K_2) \left[(F_1^0 - x_b^0) \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \right)^2} + (F_1^0 + x_b^0) \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right)^2} + \arcsin \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} + \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right].$$

На основе (IIa) при

$$\begin{aligned} F_2^0 < x_b^0 + B \leq F_3^0, \\ F_1 < B - x_b^0 \leq F_2^0; \end{aligned}$$

$$A_0(B, x_b^0) = K_1 x_b^0 + B(K_3 - K_2) p\left(\frac{B}{F_2}\right) + B(K_2 - K_1) p\left(\frac{B}{F_1}\right) - B(K_2 - K_1) p\left(\frac{B}{F_1'}\right).$$

Вписав по формуле (20) выражение $p(B/F_i)$, получим

$$\begin{aligned} A_0 = K_1 x_b^0 + B(K_3 - K_2) \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{F_2^0 - x_b^0}{B}\right)^2} + \frac{F_2^0 - x_b^0}{B} \left(\arcsin \frac{F_2^0 - x_b^0}{B} - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \\ + B(K_2 - K_1) \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B}\right)^2} + \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \left(\arcsin \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \\ + B(K_2 - K_1) \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 + x_b^0}{B}\right)^2} + \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \left(\arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если

$$\left. \begin{aligned} F_1^0 < B + x_b^0 \leq F_2^0 \\ F_1^0 < B - x_b^0 \leq F_2^0 \end{aligned} \right\} (m = 2, n = 2).$$

Выполнив алгебраическое сложение, получим

$$\begin{aligned} A_0 = K_2 x_b^0 + \frac{B(K_2 - K_1)}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 + x_b^0}{B}\right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} - \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right]. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что точно таким же образом следует поступать и в случае несимметричной статической характеристики.

2. Симметричная статическая характеристика с зоной нечувствительности, участком насыщения (см. рис. 7). На основе (1) и (5) имеем

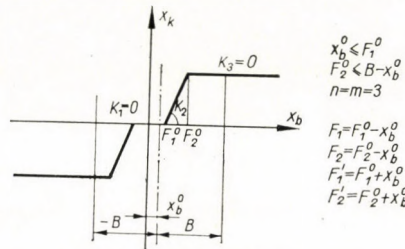


Рис. 7

$$\begin{aligned} b = \frac{1}{2} \left\{ K_2 \left[k\left(\frac{B}{F_2}\right) - k\left(\frac{B}{F_1}\right) \right] + K_2 \left[k\left(\frac{B}{F_2'}\right) - k\left(\frac{B}{F_1'}\right) \right] \right\} = \\ = \frac{K_2}{\pi} \left[\frac{F_2^0 - x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_2^0 - x_b^0}{B}\right)^2} + \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_2^0 + x_b^0}{B}\right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B}\right)^2} - \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 + x_b^0}{B}\right)^2} + \right. \\ \left. + \arcsin \frac{F_2^0 - x_b^0}{B} + \arcsin \frac{F_2^0 + x_b^0}{B} - \arcsin \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} - \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right]. \end{aligned}$$

На основе (IIa) получаем

$$\begin{aligned}
 A_0 &= BK_2 \left[P \left(\frac{B}{F_1} \right) - P \left(\frac{B}{F_1'} \right) - P \left(\frac{B}{F_2} \right) + P \left(\frac{B}{F_2'} \right) \right] = \\
 &= BK_2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{F_2^0 - x_b^0}{b} \right)^2} + \right. \\
 &+ \sqrt{1 + \left(\frac{F_2^0 + x_b^0}{B} \right)^2} + \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} - \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} - \\
 &\left. - \frac{F_2^0 - x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_2^0 - x_b^0}{B} + \frac{F_2^0 + x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_2^0 + x_b^0}{B} \right].
 \end{aligned}$$

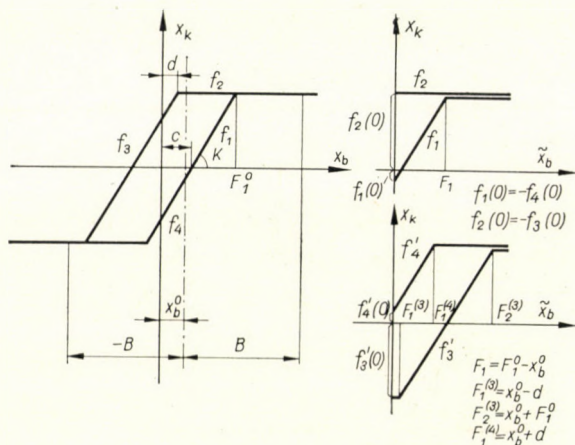


Рис. 8

3. Статическая характеристика типа петли гистерезиса с участком насыщения (рис. 8).

На основе (1) и (5) имеем

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{1}{\pi B} [f_1(0) + f_2(0) + f_3'(0) + f_4'(0)] + \frac{1}{4} \left[Kk \left(\frac{B}{F_1} \right) + \right. \\
 &+ Kk \left(\frac{B}{F_1^{(4)}} \right) - Kk \left(\frac{B}{F_1^{(3)}} \right) + Kk \left(\frac{B}{F_2^{(3)}} \right) \left. \right] = \\
 &= \frac{K}{4} \left[k \left(\frac{B}{F_1} \right) + k \left(\frac{B}{F_1^{(4)}} \right) + k \left(\frac{B}{F_2^{(3)}} \right) - k \left(\frac{B}{F_1^{(3)}} \right) \right] = \\
 &= \frac{K}{2\pi} \left[\frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \right)^2} + \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \right)^2} + \right. \\
 &+ \frac{x_b^0 + d}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{x_b^0 + d}{B} \right)^2} - \frac{x_b^0 - d}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{x_b^0 - d}{B} \right)^2} + \\
 &\left. + \arcsin \frac{F_1^0 - x_b^0}{B} + \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} + \arcsin \frac{x_b^0 + d}{B} - \arcsin \frac{x_b^0 - d}{B} \right].
 \end{aligned}$$

На основе (II) и (12) получаем

$$A_0 = \frac{1}{2} \left[f_1(0) + f_2(0) - BK_P \left(\frac{B}{F_1} \right) - BK_P \left(\frac{B}{F_1^{(3)}} \right) + BK_P \left(\frac{B}{F_1^{(2)}} \right) + BK_P \left(\frac{B}{F_1^{(4)}} \right) \right].$$

$$f_1(0) = -K(C - x_b^0),$$

$$f_2(0) = K(F_1^0 - C),$$

$$f_1(0) + f_2(0) = K(x_b^0 + d);$$

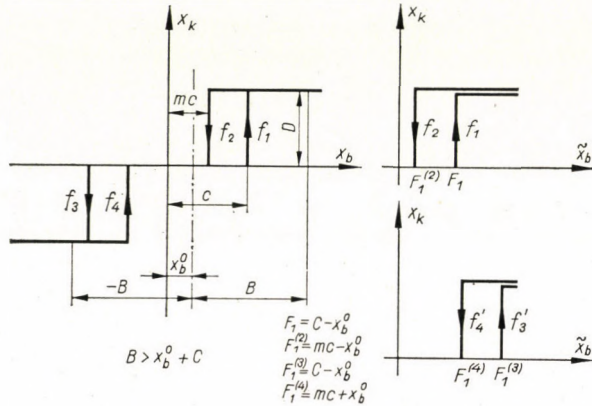


Рис. 9

$$A_0 = \frac{KB}{2\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x_b^0 + F_1^0}{B} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x_b^0 + d}{B} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{F_1^0 - x_b^0}{B} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{x_b^0 - d}{B} \right)^2} + \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} + \frac{x_b^0 + d}{B} \arcsin \frac{x_b^0 + d}{B} - \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} \arcsin \frac{F_1^0 + x_b^0}{B} - \frac{x_b^0 - d}{B} \arcsin \frac{x_b^0 - d}{B} \right].$$

В данном случае „а” можно очень просто определить по площади петли гистерезиса на основе (21)

$$a = \frac{4c(F_1^0 - c)K}{\pi B^2}.$$

Из этого примера видно, что при помощи таблиц можно очень просто осуществить определение параметров выходного колебания, но после выполнения подстановок можно получить также привычные формы в виде формул без каких-либо затруднений и немедленно в самом простом виде.

(Становится возможным осуществить интересное сравнение с выводами и полученными результатами для этого же случая, указанными в [1].)

4. Релейная характеристика с петлями гистерезиса, несимметричные колебания (рис. 9).

На основе (I) и (5) будет

$$b = \frac{1}{4} \left[\frac{D}{F_1} l \left(\frac{B}{F_1} \right) + \frac{D}{F_1^{(2)}} l \left(\frac{B}{F_1^{(2)}} \right) + \frac{D}{F_1^{(3)}} l \left(\frac{B}{F_1^{(3)}} \right) + \frac{D}{F_1^{(4)}} l \left(\frac{B}{F_1^{(4)}} \right) \right];$$

подставив на основе (9) выражение для $l(B/F_i)$, получим:

$$b = \frac{D}{\pi B} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{c - x_b^0}{B}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mc - x_b^0}{B}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c + x_b^0}{B}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mc + x_b^0}{B}\right)^2} \right].$$

На основе (II) и (12) имеем

$$A_0 = \frac{D}{2\pi} \left[\arcsin \frac{c + x_b^0}{B} + \arcsin \frac{mc + x_b^0}{B} - \arcsin \frac{c - x_b^0}{B} - \arcsin \frac{mc - x_b^0}{B} \right].$$

На основе (21) получим

$$a = - \frac{2c(1-m)D}{\pi B^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов, Е. П.—Пальтов, И. П.: Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, Москва 1960.
2. Дрогаченко, А. И.: Графические методы определения коэффициентов гармонической линеаризации нелинейностей. *Изв. АН СССР, ОТН*. Техническая кибернетика (1963), № 3.
3. Шомло, Я.: Описывающие функции нелинейностей, с кусочно-линейной аппроксимацией, типа петли гистерезиса (на венгерском языке). II-ой Коллоквиум по автоматизации, Будапешт 1963.
4. GRAHAM, D.—Mc RUER D.: *Analysis of Nonlinear Control System*. Miley, New-York 1961.
5. SRIDHAR, R.: A general Method for Deriving the Describing Functions for a Certain Class of Nonlinearities. *IRE. Trans.* (1962); Part II, July.
6. DEEKSHATULU, V. L.: A Graphical Method of Evaluating the Describing Function. *AIEE Trans.* (1962); Part II., July.
7. KU, Y. H.—CHEN, C. F.: A New Method for Evaluating the Describing Function of Hysteresis-Type Nonlinearities. *Journal of the Franklin Institute* (1962), March.
8. GIBSIN, J. E.: *Nonlinear Automatic Control*. Mc Graw-Hill, New-York 1963.

DESCRIBING FUNCTIONS OF NON-LINEARITIES WITH PIECEWISE LINEAR CHARACTERISTICS

J. SOMLÓ

SUMMARY

The paper deals with the harmonic linearization of non-linearities in the completely general case. With the aid of the deduced formulae the parameters of the constant component and of the first harmonic of the signal appearing on the output of any non-linearity having a piecewise linear characteristic can be obtained under the action of a signal with a constant and harmonic components acting on the input. The results can be got by simple substitutions either in analytic form (formulae) or, with the aid of tables, in a numerical form. Symmetrical oscillations are a special case for which the calculations are fully valid (and produce the describing function the non-linear characteristic). For this case the results agree with those of an earlier paper of the author.

FUNKTIONEN FÜR DIE BESCHREIBUNG VON NICHTLINEARITÄTEN MIT DURCH
GERADENABSCHNITTE ANGENÄHERTER KENNLINIE

J. SOMLÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit der harmonischen Linearisierung von Nichtlinearitäten im vollkommen allgemeinen Fall. Mit Hilfe der abgeleiteten Formeln können für eine beliebige Nichtlinearität mit durch Geradenabschnitte angenäherter statischer Kennlinie die Parameter der konstanten Komponente und der ersten Harmonischen des am Ausgang — unter der Wirkung des am Eingang des nichtlinearen Gliedes wirkenden Signals mit konstanter und mit harmonischer Komponente — erscheinenden Signals bestimmt werden. Die Ergebnisse können durch einfache Substitutionen sowohl in analytischer Form (Formeln) als auch mit Hilfe von Tabellen numerisch erhalten werden. Symmetrische Schwingungen erscheinen als Sonderfall, für welchen die Ableitungen voll gelten (und die nichtlineare Kennlinie beschreibenden Funktionen ergeben). Für diesen Fall stimmen die Ergebnisse mit denen der früheren Arbeit des Verfassers überein.

FONCTIONS DÉCRIVANT DES NON-LINÉARITÉS A CARACTÉRISTIQUE APPROCHÉE
PAR DES SECTIONS DROITES

J. SOMLÓ

RÉSUMÉ

L'étude traite de la linéarisation harmonique des non-linéarités dans le cas le plus général. A l'aide des formules obtenues on peut calculer, dans le cas de n'importe quelle non-linéarité à caractéristique statique approchée par des sections droites, la composante constante et les paramètres de la première harmonique du signal périodique, signal qui apparaît à la sortie sous l'action du signal à composantes constante et harmonique, agissant à l'entrée. Les résultats peuvent être obtenus par simples substitutions, soit sous une forme analytique (formules), soit sous forme numérique, à l'aide de tableaux. Les oscillations symétriques figurent comme un cas particulier, pour lequel les calculs sont pleinement valables (et donnent la fonction décrivant la caractéristique non-linéaire). Pour ce cas, les résultats concordent avec ceux d'un travail antérieur de l'auteur.

EFFECT OF NEUTRAL LOOSENING OF A 120 KV NETWORK UPON THE OVERVOLTAGE PROTECTION OF TRANSFORMERS

GY. VAJDA

DOCTOR OF TECHN. SC.
MINISTRY OF HEAVY INDUSTRIES
AND

S. CSIDA

INSTITUTE FOR ELECTRICAL POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received February 11, 1964]

The Hungarian 120 kV system is an effectively earthed one. The rapid extension of the interconnected system has led to a sudden rise in the short-circuit power and has in some places necessitated the reduction of the earth-fault currents. For this aim a practicable solution is, among others, the loosening of the neutral earthing, when on disconnecting the earthing of a part of the transformers the neutral is left isolated or earthed through a reactor, while the other transformers of the system are working further with a directly earthed neutral. By a suitable selection of the reactances it may be assured, that the network should further remain effectively earthed; in case of a phase-to-earth fault the voltage to earth of the sound phases does not rise to a higher value than 80% of the phase-to-phase voltage. As a consequence of offsetting the direct earthing, the neutral voltage rises with respect to the earth in certain cases. In the interest of operational safety it had to be examined, what the effect of the electrical stresses upon the insulation is and by what kinds of overvoltage protecting measures could these be limited to a reasonable value.

I. The permissible stresses of the neutral insulation

The Hungarian 120 kV transformers are produced with a graded insulation towards the neutral. Dimensioning of the insulated to earth of the transformer winding in the neutral is determined by the fact, that to some transformers a regulating transformer is connected. In this case 66 kV power frequency withstand voltage is prescribed by the Hungarian standard [1], a similar value follows from the corresponding IEC recommendation. For the same withstand voltage are realized the regulating transformer and the neutral reactor, too.

Regarding the neutral and the objects connected to it, neither operating, nor rated voltage can be indicated. The permissible stresses can be estimated only on the basis of the withstand voltage.

Under normal operational conditions the stress of the neutral is not considerable, the stresses endangering the insulation may arise in case of internal and atmospherical overvoltages. In case of internal overvoltages it may generally be assured that even the highest stress arising should not exceed the crest value of the 50-cycle withstand voltage. The extent of loosening is often limited just by this requirement. If, e.g., in view of the D.C. component, $30 \text{ kV}_{r. m. s.}$ is permitted for the voltage rise in the neutral caused by the sub-transient a.c. component of the single-phase earth-fault current, this voltage

often appears at a smaller X_0/X_1 proportion than $X_0/X_1 = 3$ [2], which is the limit of the system effective earthing.

The most unfavourable stresses for the neutral can arise in case of atmospheric overvoltages. For the neutral and the elements connected to it, no impulse-test is prescribed. The permissible stress may be estimated by interpolating the usual withstand voltages, the value calculated according to Table I is 162 kV.

Table I
Power-frequency and impulse test voltages

U_n rated voltage, kV _{r.m.s.}	$U_{t\ 50}$ power frequency test voltage, kV _{r.m.s.}	$U_{t\ imp}$ impulse test voltage, kV _{peak}	$U_{t\ imp}/U_{t\ 50}$
20	50	125	2,5
neutral	66	162	2,45
30	70	170	2,43
35	80	190	2,37

For the main insulation of 120 kV transformers an impulse test of 520 kV is prescribed by the co-ordination standard. Consequently, it is to be assured that under the effect of an impulse voltage of 520 kV arriving to the 120 kV terminals, no crest voltage exceeding 162 kV, i.e. 31% of the incoming surge should appear in the neutral.

The stress of the turn insulation greatly depends on the rate of rise of surges. Under the effect of surges with a 1/50 waveshape, appearing at the 120 kV terminals, voltage oscillations appear in the undirectly earthed neutral, of which the rate of rise is 1 or 2 orders of magnitude smaller than that of the front of the incoming surge. Thus, neither the insulation of the transformer nor that of the reactor is exposed to danger.

II. Determination of the overvoltage stress of the neutral

From the point of view of tests the following combinations may be met with:

- a) The neutral of the main transformers is earthed;
- b) the neutral of the main transformers is isolated;
- c) the neutral of the main transformers is earthed through a reactor;
- d) a regulating transformer, the neutral of which is earthed, is connected to the main transformer;
- e) a regulating transformer is joined to the main transformer, the neutral of which is earthed through a reactor;
- f) a number of transformers are earthed through a common reactor.

According to more detailed tests, the secondary-side loading [3] of the main transformer and the position of the regulating transformer [4] do not influence the stress of the neutral, so these questions may be neglected in the following.

Determination of the competent stresses has partly been realized by measurements and partly by calculations.

1. Measurement of the stresses

The measurements have been carried out with different circuits on a number of stations. The surge entering the station was furnished with a low-voltage, repetitive surge generator. According to preliminary tests, the distribution of the overvoltages is, from a practical point of view, the same both at high and low voltage. Magnitude and form of the arising voltages were recorded by a cathode-ray oscillograph. The transformers, neutral regulators and reactors were manufactured in the Ganz Electrical Factories. According to the measurements the reactors for the overvoltage distribution tests can be replaced by a concentrated inductivity of small resistance [3], thus it could be tested how the stresses are influenced by the magnitude of inductivity.

The low-voltage measurements have also made it possible to examine how the limiting elements connected to the neutral (resistance, capacitor, lightning arrester) influence the relations. These elements could be assembled of low-voltage impedances and electronic circuits, respectively.

Some examined circuits are shown in Fig. 1. The surge generator was connected to the 120 kV terminals to which the impulse was applied. The not examined 120 kV terminals were earthed through a 500 Ohm, inductive-free resistance replacing the surge impedance of the overhead lines.

Some typical oscillations occurring formed in the neutral may be seen in Figs 2 and 3.

2. Calculation of the stresses

The stress of the neutral designating the transformer impedance by $Z_t(p)$ while the resultant impedance between the neutral and the earth by $Z_n(p)$ is

$$U_n(p) = \frac{Z_n(p)}{Z_t(p) + Z_n(p)} U_{in}(p) \text{ volt.} \quad (1)$$

The incoming surge may be expressed by the relation

$$u_{in} = U_0 (e^{-at} - e^{-bt}) \text{ volt} \quad (2)$$

where a and b are constants depending on the waveshape. According to detailed calculations [5] the shape and magnitude of the surges to be calculated by Equ. (1) and (2) are in good accordance with the measurement results if the transformer is replaced by an inductive impedance $Z_i(p) = pL_t$. The expressions so obtained may be simplified by taking into account the orders of magnitudes met with in the practice [5] and the neutral voltage may be approached by the relation

$$u_n \approx U_0 \frac{L_r}{L_t + L_r} (e^{-at} - \cos \omega t) \text{ volt.} \quad (3)$$

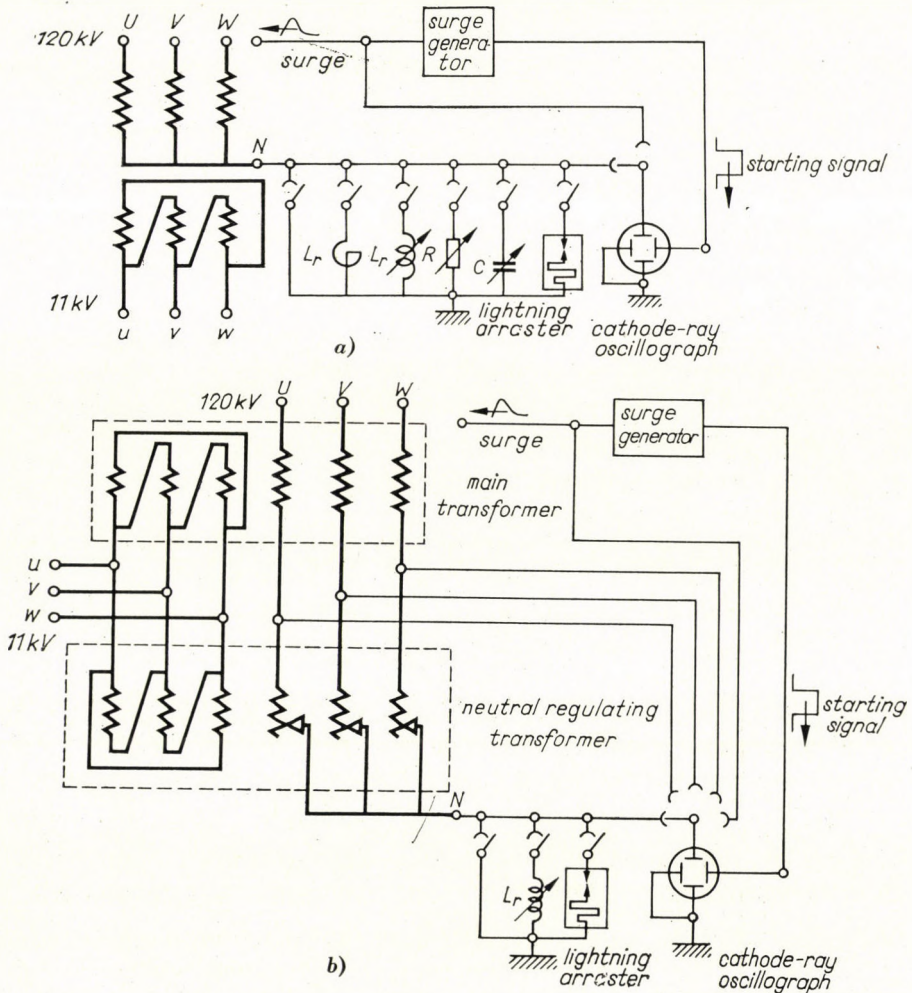


Fig. 1. Circuit diagram of the measurements; a without a neutral regulator, b with neutral regulator

The angular frequency ω depends, besides the inductivity L_t , also on the value of the inductivity L_r and capacity C between neutral and earth (L_r is generally the inductivity of the reactor)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_t L_r / (L_t + L_r) C}} \quad (4)$$

The values u_i and ω_i , characteristic of the isolated neutral may be obtained from Equ. (3) and (4) by a substitution $L_r = \infty$. As in the practice the forma-

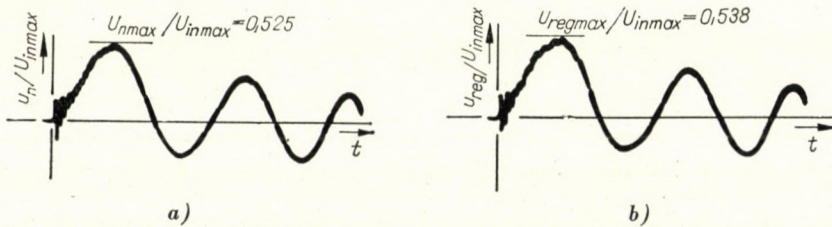


Fig. 2. Voltage of the neutral and of the regulator terminals in case of a neutral earthed through a reactor ($L_r = 24,3$ mH); a neutral (marker: $10 \mu s$), b regulator terminals

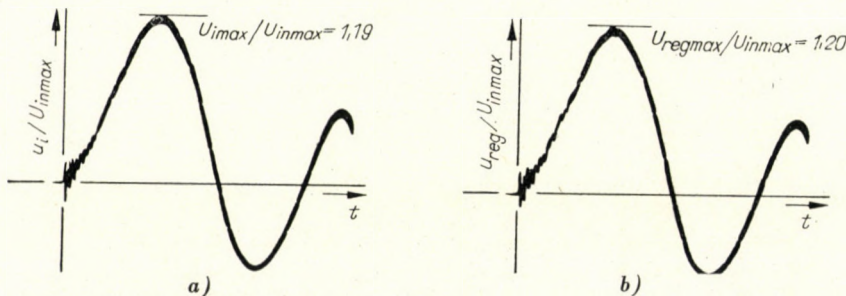


Fig. 3. Voltage of the neutral and of the regulator terminals in case of an isolated neutral ($L_r = \infty$); a neutral (marker: $10 \mu s$), b regulator terminals

tion of the crest values is not considerably influenced by the deviation between ω and ω_i , for the crest values the relation

$$U_{n \max} = \frac{L_r}{L_t + L_r} U_{i \max} \text{ volt} \quad (5)$$

may be deduced from Equ. (3) [5]. By Equ. (5) a relation is established between the stress crest value $U_{n \max}$ of the neutral earthed through a reactor of an inductivity L_r and the maximum value $U_{i \max}$ of the isolated neutral stress, the relation being greatly supported by experiments.

The inductance replacing the transformer may be calculated from the zero-sequence reactance of the primary winding. With transformers of Y/d

connection, this value is half of the resultant leakage reactance. The inductance by phases of the primary winding will be

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{X_0}{2\pi f} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon U_n^2}{2\pi f P_n} \text{ henry,} \quad (6)$$

where ε is the drop in relative units, f frequency (50 Hz), U_n rated voltage in kV, and P_n nominal MVA rating. With single-pole surges $L_t = L_1$, in case of 2-, resp. 3-pole surges, two, resp. three poles are parallelly connected, at this event $L_t = L_1/2$ and $L_t = L_1/3$, respectively. If a regulating transformer is connected to the transformer of β relative regulation as a maximum, instead of L_t , the resultant inductivity L_{res} of the two transformers are to be substituted in the formula, where

$$L_{res} = L_t(1 + \beta) \text{ henry,} \quad (7)$$

assuming that the percentage drop of the regulating and the main transformer are equal. The expressions are also valid for the case of many transformers parallelly connected and their neutrals interconnected [4].

The inductivity L_r figuring in the formulas is that of the short-circuit limiting reactor, in case of isolated neutral $L_r = \infty$. The capacitance C is the equivalent capacitance to earth of the transformer neutral, to which the other capacitances possibly connected between the neutral and the earth are to be added.

The isolated neutral maximum stress will be, expanding formula (3) approximately

$$U_{i \max} \simeq 1,02 U_{in \max} \left[2 - \frac{a}{\omega_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_i} \right)^2 \right], \quad (8)$$

where $\omega_i = 1/\sqrt{L_t C}$ and with the half time T_h of the incoming wave $a = 0,693/T_h$.

III. Stress of the unprotected neutral

The voltage in the neutral depends on the number of phase-conductors the overvoltage is entering through, correspondingly, single-, two-, and three-pole surges may be distinguished. The highest stresses arise with three-pole surge; in case of two-pole and single-pole stresses smaller voltages arise, according to the circumstance, if in formula (5) $L_1/3$, $L_1/2$, respectively L_1 is figuring at the place of L_t and the inductivity L_r is shunted by the inductivity L_1 , respectively $L_1/2$ of the phases to which no impulse was applied [4]. The probability of entering simultaneously all the three 120 kV phase conductors at high overvoltage value, is small. Nevertheless, in the interest of the insulations operation-

al safety, the most unfavourable three-pole surges are to be considered as decisive.

In some arrangements of Fig. 4 the maximal stresses arising in the neutral are shown, in function of the inductance and reactance, respectively, of the neutral, in case of a three-pole surge. According to the figure, the results cal-

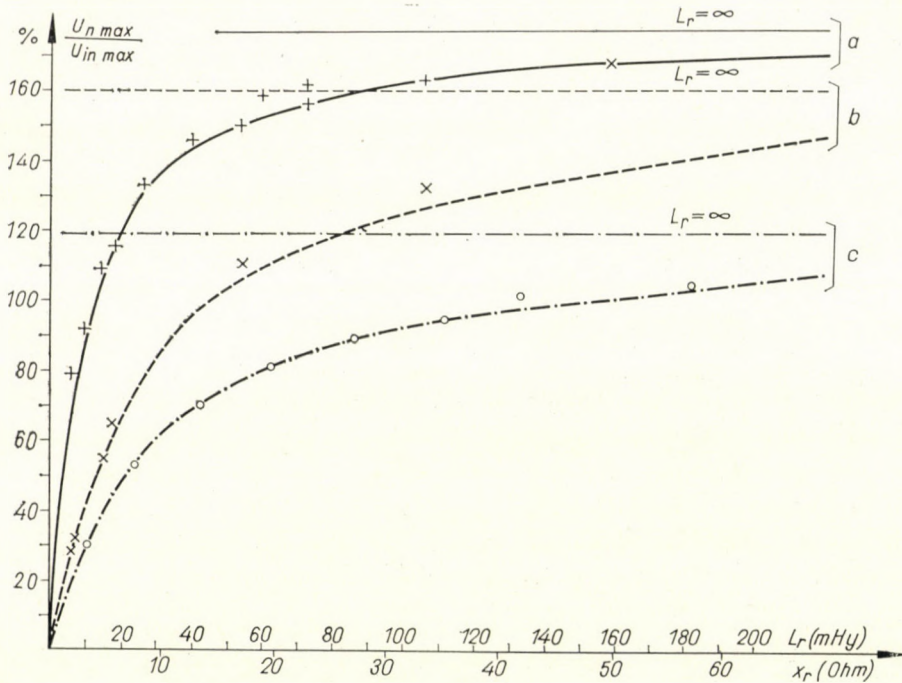


Fig. 4. Stress of the neutral in case of a three-pole surge

- a) 60 MVA, 132/10,5 kV transformer, $\varepsilon = 8,35\%$, - - - calculated values, + measured values;
 b) 24 MVA, 120/11 kV transformer, $\varepsilon = 10,5\%$, - - - calculated values, x measured values;
 c) 24 MVA, 120/11 kV transformer, series neutral regulator of $\varepsilon = 8\%$ and $\beta = \pm 15\%$, - . - calculated values, O measured values

culated by the aid of formula (5) and the measurement-results are in a good accordance.

A similar good accordance may be met with also in case of single- and two-pole impulses. The highest voltage in the isolated neutral is $1/3$ and $2/3$, respectively, of the three-pole stress.

As per Fig. 4, if the inductivity of the neutral reactor exceeds a certain value L_{rkr} , then the stress of the neutral exceeds the upper limit $U_{nperm} = 31\%$, prescribed in clause 1. With a three-pole surge this limit value is, transforming Formula (5)

$$L_{rkr3} = \frac{L_1}{3} \frac{U_{nperm}/U_{i max}}{1 - (U_{nperm}/U_{i max})}, \quad (9)$$

while with single-pole surges

$$L_{r\ kr\ 1} = L_1 \frac{U_{n\ perm}/U_{r\ max}}{1 - 3(U_{n\ perm}/U_{i\ max})} \quad (10)$$

For the cases shown in Fig. 4 the corresponding values are summarized in Table II.

Table II
The neutral reactors corresponding to the permissible stress

Arrangement	$L_{r\ kr\ 3}$, mHy	$X_{r\ kr\ 3}$, Ohm	$L_{r\ kr\ 1}$, mHy	$X_{r\ kr\ 1}$, Ohm
<i>a</i>	2,16	0,68	11,6	3,66
<i>b</i>	6,1	1,92	46	14,5
<i>c</i>	10,35	3,25	104	32,8

If the neutral of many transformers is earthed through a common reactor, the stress of the neutral increases. In case of the same transformers of number n , instead of L_i the value L_i/n must be substituted in Formula 5, whereas the critical inductivity will in case of three-pole impulses be

$$L_{r\ kr\ 3n} = \frac{L_{r\ kr\ 3}}{n} \quad (11)$$

If we also have a regulator in the neutral, the stress between the regulator terminals and the earth is by some percents higher than that arising at the reactor terminals.

IV. Limitation of the neutral stress

According to the aforesaid, as a consequence of loosening the neutral earthing, on the effect of atmospheric overvoltages, stresses endangering the neutral insulation may arise. To avoid disturbances, the stresses must be reduced to below 31% of the transformer impulse withstand voltage. For this aim many conceptions outlined below have come up:

1. Inductivity reduction of the reactor

If the inductivity of the reactor is smaller than the value as per Formula (9) and (11), under no circumstances do higher stresses arise than the permissible ones. If there is a possibility to use a reactor smaller than this no special

overvoltage protecting measures are necessary. Unfortunately, this is not often a feasible arrangement, in most cases reactances of about $10\div 20$ Ohm are needed for reducing the short-circuit current to a suitable value [2], this being much higher than the values included as an example in Table II.

2. Reactors applied by phases

The stresses may be reduced somewhat if the neutral is disjoined and a separate reactor is inserted to each phase (Fig. 5a). In case of equal short-circuit limitations, to each phase a reactor of the same magnitude must be connected, as between the joint neutral and the earth, nevertheless, in case

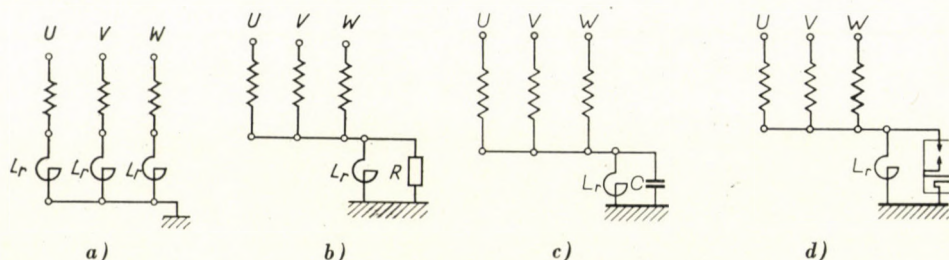


Fig. 5. Possibilities of reducing the neutral stress; a reactors by phases, b parallel resistance, c parallel capacitor, d lightning arrester

of a three-pole overvoltage the highest voltage between the terminal and the earth corresponds to the stress of a neutral reactor of a third value. The desired stress reduction may sometimes be assured in this way, but its application in practice is out of question, as three reactors are too expensive and they must be dimensioned for a constant working load.

3. Effect of a resistance parallel to the reactor

The stress of the neutral is reduced when a resistance parallel to the reactor is inserted (Fig. 5b). The reduction becomes effective at about some hundred ohms (Fig. 6). The resistance is to be dimensioned for high short-circuit stresses and for a high thermal load, which raises problems difficult to eliminate.

4. Role of the capacitor parallel to the reactor

The stress is also reduced by a capacitor parallel to the reactor (Fig. 5c), a suitable reduction may be achieved, however, by such a great capacitor (Fig. 7) which cannot be realized in practice.

5. Application of a lightning arrester in the neutral

The most effective and economic way of neutral overvoltage protection is the use of a lightning arrester (Fig. 5d). The characteristic values of the lightning arrester types to be taken to consideration are shown in Table III.

Table III
Sparkover voltages of lightning arresters

Rated voltage, kV _{r.m.s.}	Protection level, kV _{peak}	Minimum 50 Hz sparkover voltage	
		kV _{r.m.s.} , as per IEC	kV _{r.m.s.} , as per MSZ
35	132	60,5 (85,5)	87,5 (124)
30	116	52 (73,5)	75 (106)
20	86	34,5 (48,8)	50 (71)

When choosing the suitable lightning arrester, care must be taken, on the one hand, that their protection level should be lower than the permitted stress. On the other hand, it must be assured that they should not spark over at

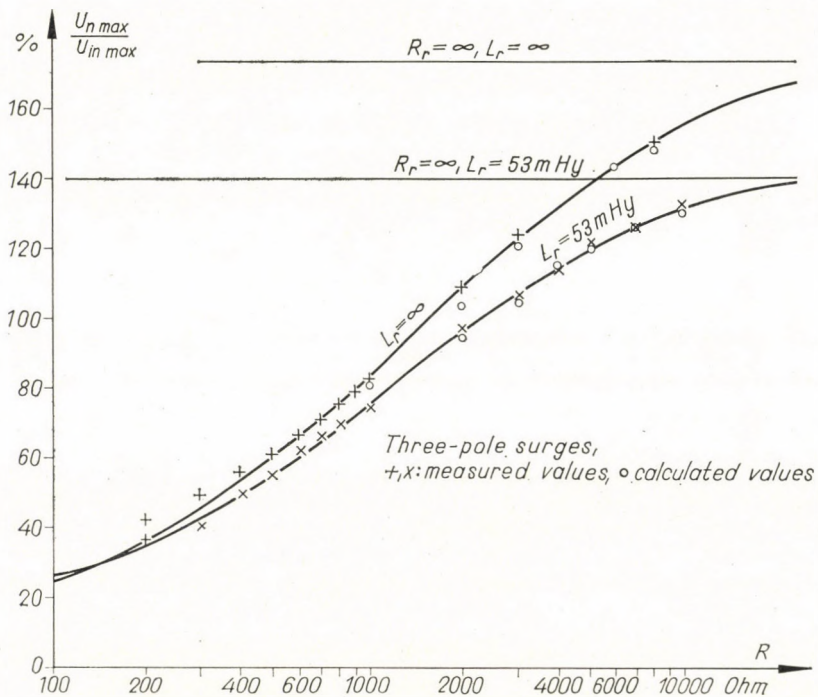


Fig. 6. Effect of a parallel resistance upon the neutral stress

overvoltages of internal origin, i.e. the crest of the internal overvoltages should not exceed that of the 50 Hz sparkover voltage (values in brackets of the Table).

For estimating the highest internal overvoltage, the $1,8\sqrt{2} = 2,54$ -times value of the alternative component of the subtransient neutral voltage arising with single-phase short-circuit to earth can be assumed as an approximation. The voltage in the neutral may be determined more exactly by a model-measurement together with a test for determining the necessary measure of

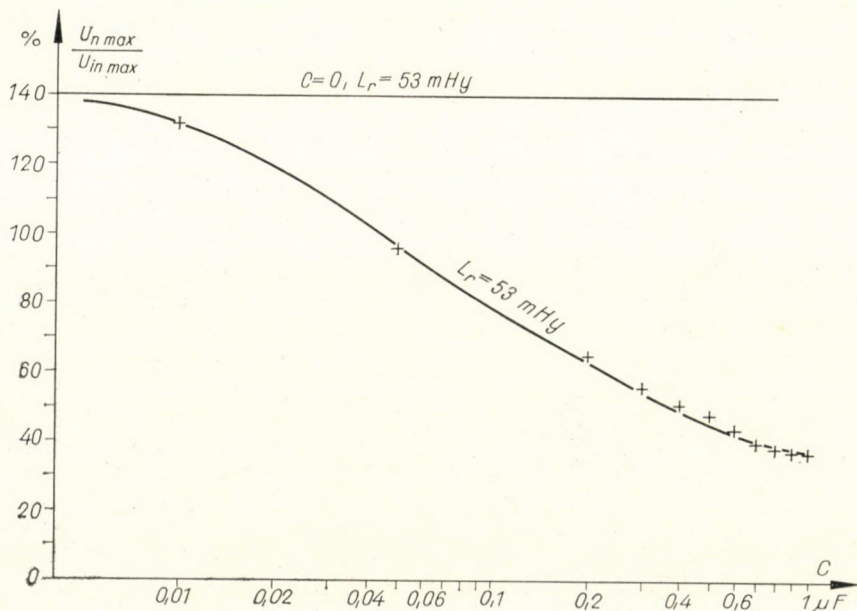


Fig. 7. Effect of a parallel capacitance upon the neutral stress. Three-pole stresses, layout as per "a", measured values

short-circuit limitation. In lack of accurate data, according to the aforesaid, for the neutral voltage a value of about 33,5 kV is allowed with a 35 kV lightning arrester, about 29 kV with a 30 kV lightning arrester. To protect the neutral, application of a special lightning arrester is practicable, which has a high residual voltage. In that case the relatively small impulse current flowing after the sparkover does not cause an abrupt voltage collapse between the sparkover voltage and the residual voltage.

Applying a neutral series regulator, it is not sufficient to assure the protection of the neutral, but also the stresses arising at the regulator terminals should if possible be reduced. Theoretically, the lightning arresters may be adopted in two ways (Fig. 8). With the layout shown in Fig. 8a, the stresses are reduced only in the neutral, the effect is far less intense on the regulator

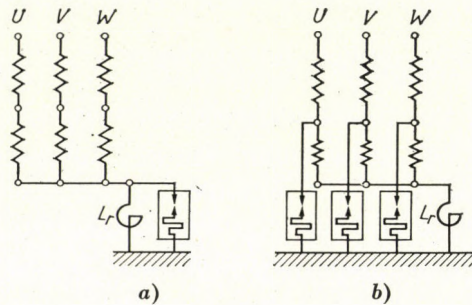


Fig. 8. Overvoltage protection in case of a neutral regulator; a lightning arrester at the neutral, b lightning arresters at the regulator terminals

terminals. The results of a measurement according to c on Fig. 4 a 35 kV lightning arrester model with the arrangement are summarized in Table 4.

Table IV

Stresses in case of a 35 kV lightning arrester
(Three-pole surges; layout "c" on Fig. 4; $L_r = 41,8$ mHy)

Connection of the lightning arresters	Maximum stress, kV _{peak}	
	in the neutral	at the regulator terminals
Fig. 8a	132	175
Fig. 8b	125	132

Consequently, when choosing a lightning arrester, besides the above said it must be assured that the stress should not exceed the permissible value at any of the critical points.

REFERENCES

1. Olajtranszformátor. Általános előírások és vizsgálatok — MSZ 9230—52 (Oil transformer. General prescriptions and tests. Hungarian Standard MSZ 9230—52).
2. БОКАУ, Б.: А будапешти хálózat csillagpontlazítása; a VILLENKI 317. sz. tanulmánya, 1960. (Loosening of the Neutral in the Budapest System; Report No. 317 of the Institute for Electrical Power Research, Budapest 1960.)
3. VAJDA, Gy.—ТАЙНУ, Т.: Зárlatkorlátozó fojtótekeres befolyása a 120 kV-os hálózat túlfeszültségvédelmére (Effect of Reactors upon the Overvoltage Protection of the 120 kV System). *Elektrotechnika* **51** (1958), 473.
4. VAJDA, Gy.—CSIDA, S.: 120 kV-os transzformátorok túlfeszültségvédelmének kérdései csillagponti fojtótekeres alkalmazása esetén; a VILLENKI 389. sz. tanulmánya, 1962. (Problems Relating to the Overvoltage Protection of 120 kV Transformers in Case of a Reactor in the Neutral; Report No. 389 of the Institute for Electrical Power Research, Budapest 1962).
5. Д. Вайда—Т. Тайту: Влияние дросселя, подсоединенного к нейтрали, на воздействие перенапряжений на нейтраль трансформатора. *Acta Techn. Hung.* **27** (1959), 279.

DER EINFLUSS DER LOCKERUNG DES STERNPUNKTS DES 120 kV-NETZES AUF DEN ÜBERSpannungSSCHUTZ DER TRANSFORMATOREN

GY. VAJDA und S. CSIDA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Erdschlußstrom des ungarischen 120 kV-Netzes wird durch Lockerung des Sternpunkts des früher starr geerdeten Systems begrenzt. Im Zusammenhang hiermit untersuchen die Verfasser die Überspannungsbeanspruchungen im über Drosselspulen geerdeten bzw. isoliert belassenen Sternpunkt und die Möglichkeiten für deren Herabsetzung. Nach Bestimmung der elektrischen Festigkeit der Sternpunktisolationen werden die Ergebnisse der Niederspannungsmessungen und der Berechnungen mitgeteilt. Bei der theoretischen Untersuchung der Vorgänge ergaben sich einige einfache Formeln für die Beanspruchung des Sternpunkts, welche von den Versuchsergebnissen voll bestätigt worden sind. Mit Hilfe des Berechnungsverfahrens kann entschieden werden, ob im gegebenen Fall eine Begrenzung der Beanspruchung nötig ist. In den meisten praktischen Fällen können unter der Einwirkung von atmosphärischen Überspannungen Beanspruchungen auftreten, welche die Isolation des Sternpunktes bzw. des Sternpunkt-Reihen-Regeltransformators gefährden. Die Verfasser geben einen Überblick über die Methoden für die Herabsetzung der Sternpunktbeanspruchung und veröffentlichen die Ergebnisse der Messungen, welche sie zur quantitativen Bestimmung der begrenzenden Wirkung der einzelnen Elemente durchgeführt haben. Auf Grund dieser Untersuchungen empfehlen sie für den Schutz des Sternpunkts die Anwendung von Überspannungsableitern, was vom technischen und wirtschaftlichen Standpunkt aus gleicherweise eine entsprechende Lösung ist. Die für die Auswahl und die Anwendung des Überspannungsableiters maßgebenden Gesichtspunkte werden besprochen.

L'EFFET DU RELÂCHEMENT DU POINT NEUTRE DU RÉSEAU DE 120 kV SUR LA PROTECTION CONTRE LES SURTENSIONS DES TRANSFORMATEURS

GY. VAJDA et S. CSIDA

RÉSUMÉ

Le courant de court-circuit à la terre du réseau hongrois de 120 kV est limité par relâchement du point neutre du système, au lieu de la mise à la terre rigide employée par le passé. Les auteurs examinent les contraintes de surtension dans le point neutre des transformateurs mis à la terre à travers des bobines d'induction ou laissés isolés, ainsi que les possibilités de réduire ces contraintes. Après détermination de la rigidité diélectrique des isolations des points neutres, ils communiquent les résultats des mesures à basse tension et des calculs. Par l'examen théorique des phénomènes, ils ont obtenu quelques formules simples pour le calcul des contraintes au point neutre, formules pleinement confirmées par les résultats des mesures. En utilisant la méthode de calcul, on peut savoir s'il est nécessaire de limiter les contraintes dans un cas donné. Dans la plupart des cas pratiques, une contrainte mettant en danger l'isolement du point neutre ou du transformateur de réglage en série de ce dernier peut être engendrée par les surtensions atmosphériques. Les auteurs passent en revue les méthodes de réduction des contraintes. Ils donnent les résultats de leurs mesures faites en vue de déterminer l'effet quantitatif des éléments de limitation. Sur la base de ces examens, ils recommandent l'utilisation de para-surtensions pour la protection du point neutre, solution satisfaisante du double point de vue technique et économique. L'examen des points de vue devant prévaloir lors de la sélection et de l'emploi des parasurtensions termine l'étude.

ВЛИЯНИЕ ОСЛАБЛЕНИЯ НЕЙТРАЛИ 120 КВ-НОЙ СЕТИ НА ЗАЩИТУ
ТРАНСФОРМАТОРОВ ОТ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ

Д. ВАЙДА и Ш. ЧИДА

РЕЗЮМЕ

Ток замыкания на землю венгерской 120 кВ-ной сети ограничивается ослаблением нейтрали ранее жестко заземленной системы. Авторы в связи со сказанным выше исследовали нагрузки по перенапряжениям, возникающие на нейтрали, заземленные через реакторы трансформаторов или же оставленные изолированными, и возможности снижение этих нагрузок. После определения электрической прочности изоляций на нейтрали описываются результаты измерений при низких напряжениях и результаты расчетов. При помощи теоретического исследования явлений для расчета нагрузки нейтрали получено несколько простых формул, которые полностью подтверждены результатами измерений. Использование методики расчета можно решить, следует ли ограничивать нагрузки в данном случае. В большинстве случаев под воздействием атмосферных перенапряжений могут возникнуть перегрузки, которые могут быть опасными для изоляции нейтрали или же последовательного регулирующего трансформатора нейтрали. Авторы дают обзор способов снижения нагрузки. Сообщаются результаты измерений, проведенных авторами для определения действия отдельных ограничивающих элементов. На основе этих исследований авторы предлагают применение разрядников для защиты нейтрали, что как в техническом, так и в экономическом отношении является подходящим решением. Излагаются точки зрения выбора и применения разрядников.

EIN TRANSISTORISIERTER RINGZÄHLER MIT ERHÖHTER BETRIEBS SICHERHEIT

D. LENNERS

MITTEILUNG AUS DEM GEOMAGNETISCHEN INSTITUT DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
POTSDAM

[Eingegangen am 7. August, 1964]

Herrn Prof. Dr. FANSELAU zur Vollendung des 60. Lebensjahres am 30. April 1964 gewidmet.

Der in der Arbeit beschriebene basisgesteuerte Ringzähler ist in seiner Art ein Spezialfall des Schieberegisters. Die erhöhte Betriebssicherheit begründet sich auf die Trennung der Weiterschaltimpulse (Schiebetakt) von der zum Verschieben des L-Signals notwendigen Steuerung des jeweils nächstfolgenden Multivibrators. Das erleichtert auch die Umschaltung des Ringzählers, denn es braucht nur das L-Signal des letzten in den Ring eingeschlossenen Multivibrators mittels des Tastenschalters der dem ersten Multivibrator vorgeschalteten Torstufe zugeleitet zu werden. Dagegen sind die Taktimpulse gleichzeitig an allen Toreingängen wirksam. Weiterhin ist die Verwendung selbständiger bistabiler Elemente von Vorteil, die nur durch die Hilfstorschaltungen miteinander verbunden sind. Dadurch können, im Gegensatz zum emittorgesteuerten Ringzähler, beliebig viele dieser Elemente zu einem Ring zusammengeschaltet werden, ohne daß die Betriebssicherheit der Schaltanordnung beeinflußt wird. Im praktischen Einsatz hat sich der basisgesteuerte Ringzähler bisher sehr gut bewährt. Außer dem in der Arbeit beschriebenen zehnstufigen Ringzähler wurde auch ein 19-stufiger Ringzähler mit Basissteuerung für die Meßstellenabfrage eingesetzt.

I. Einleitung

Im Rahmen der Entwicklungsarbeiten für eine vollautomatisch arbeitende programmgesteuerte Kurvenauswerteanlage war u. a. auch zu berücksichtigen, daß auf dem zu bearbeitenden Registrierstreifen mehrere Komponenten gleichzeitig aufgezeichnet sind. Es ist somit naheliegend, diese beim Auswertevorgang auch gemeinsam zu erfassen. Dadurch werden Parallaxenfehler vermieden, die bei mehrmaligem Durchlauf der Registrierung und nacheinanderfolgender Auswertung der einzelnen Komponenten nur schwer zu korrigieren sind. Diese Aufgabenstellung erfordert also eine Einrichtung, die es gestattet, das Kurvenbild in Ordinatenrichtung abzutasten. Am Ausgang des hierzu notwendigen, aber hier nicht näher beschriebenen optischen Teiles erhält man dann bei jedem Abtastvorgang eine Impulsfolge, die ein getreues Abbild der Kurvenabstände zu dem jeweiligen Abszissenwert darstellt. Für die weitere Verarbeitung dieser Impulsfolge ist die Umwandlung von der Serien- in die Paralleldarstellung notwendig, die zweckmäßigerweise mit einer Ringzählerschaltung durchgeführt wird.

II. Die Aufgabe einer Ringzählerschaltung

Ringzähler werden immer dann verwendet, wenn nacheinander an einer Reihe von Anschlüssen S (Bild 1) ein Signal abgegeben werden soll, wobei das Fortschalten durch ein von außen in den Ring gegebenes Signal R geschieht. Wichtig ist, daß die Folge der abgegebenen Signale S_1, S_2 usw. zeitlich nicht gleichmäßig eintreffen braucht, sondern in einem Rhythmus, der ausschließlich durch R bestimmt wird. Nach S_n kommt als nächstes wieder S_1 .

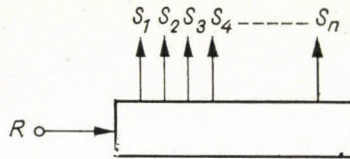


Bild 1

Ringzählschaltungen bestehen aus einer Anzahl bistabiler Stufen, die so zusammengeschaltet sind, daß nur jeweils eine dieser Stufen dem Schaltzustand L entsprechen kann, während alle übrigen in der Stellung 0 stehen, und daß sich dieses L durch Steuerimpulse von Stufe zu Stufe fortschalten läßt.

III. Der emittorgesteuerte Ringzähler

1. Wirkungsweise

Die beiden ersten Stufen einer üblichen Ringzählschaltung sind im Bild 2 dargestellt. Die einzelnen bistabilen Multivibratoren sind jeweils über einen Kondensator C_K miteinander gekoppelt. Die Emittoren aller linken Transistoren liegen mit dem gemeinsamen Emittorwiderstand R_1 in Reihe mit dem Transistor T_2 an Null. Die Emittoren aller rechten Transistoren besitzen den gemeinsamen Emittorwiderstand R_2 . Der Zustand linker Transistor gesperrt, rechter geöffnet, soll der Nullstellung entsprechen und der umgekehrte Zustand der Stellung L .

Befindet sich z. B. die erste Stufe in der Stellung L , so wird sie beim Anlegen eines positiven Impulses an den Eingang in die Stellung 0 umgeschaltet. Dabei ist am Kollektor des linken Transistors ein negativer Spannungssprung wirksam, der die folgende Stufe in die Stellung L umschaltet. Der dabei an deren Ausgang entstehende positive Impuls trifft auf die Basis des gesperrten Transistors der darauffolgenden Stufe und sperrt diesen vollends, schaltet also die Ziffer L nicht weiter. Jeder weitere Impuls am Eingang rückt die Ziffer L um einen Schritt weiter nach rechts.

Die Rückstellung des Zählers erfolgt durch einen positiven Impuls auf die Basis des Transistors T_1 . Der Basiswiderstand R_4 der ersten Stufe liegt nicht direkt, sondern über T_1 an Null. T_1 wird normalerweise über R_3 offen gehalten. Durch den positiven Impuls an seiner Basis steigt die Basisspannung des rechten Transistors der ersten Zählstufe, so daß diese in die Stellung L kippt. Eine zuvor in der Stellung L stehende beliebige Stufe wird über den gemeinsamen Emittterwiderstand R_1 rückgestellt.

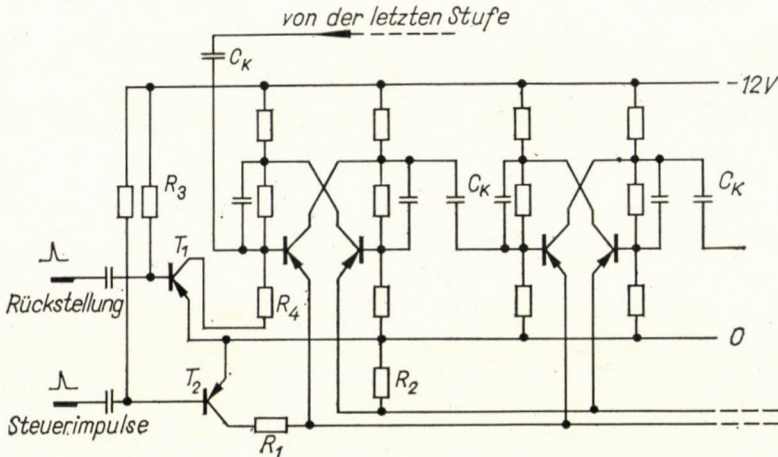


Bild 2

2. Die nachteiligen Eigenschaften des emitttergesteuerten Ringzählers

Der Aufbau eines Ringzählers in der eben beschriebenen Art hat zwar den Vorteil eines geringeren Bauelementbedarfs, nachteilig ist aber, daß die Form und das Tastverhältnis der Steuerimpulse einen großen Einfluß auf die maximale Zählfrequenz haben. Kurze, steile Impulse sind für das Fortschalten des Ringzählers notwendig. Solange der Steuerimpuls T_2 gesperrt hält, kann die Ziffer L nicht weitergeschaltet werden, da alle linken Transistoren über ihre Emittter gesperrt sind. Die Breite des Steuerimpulses stellt also eine gewisse Totzeit des Zählers dar, in der keine weiteren Schaltungen möglich sind. Sie ist in der Art der Ansteuerung begründet und muß möglichst klein gehalten werden.

Weiterhin sind bei diesen Ringzählschaltungen die Mitkopplungen zu beachten, da die ganze Anordnung in sich geschlossene Wechselstromwege enthält. Wenn man unterstellt, daß die beiden Schaltzustände von den Transistoren nicht ideal eingenommen werden, daß also ein Sperrimpuls einen bereits gesperrten Transistor »noch etwas besser sperrt« und ein Öffnungsimpuls einen schon leitenden Transistor »noch etwas besser leitend« macht, dann können bei

jedem Umschaltimpuls diese beiden Fälle, von Stufe zu Stufe wechselnd, eintreten. Das Ausmaß der Fortwirkung der dabei auftretenden kleinen Impulse in der Kette hängt vor allem davon ab, wie stark sich die Potentialänderungen noch in der auf die der umgeschalteten Stufe nächstfolgende auswirken können.

Unangenehm wirkt sich auch die begrenzte Stufenzahl eines Ringzählers aus. Die praktische Grenze der Stufenzahl wird von der Größe des gemeinsamen Emitterwiderstandes aller rechten Transistoren bestimmt. Wie schon erwähnt, sind von den linken n Transistoren stets einer leitend und $n - 1$ gesperrt und von den rechten $n - 1$ leitend und einer gesperrt. Da die Symmetrie der einzelnen Stufen aber gleiche Emitterspannung erfordert, gilt für die Emitterwiderstände

$$\frac{R_1}{R_2} = n - 1.$$

Für einen zehnstufigen Ringzähler ergibt sich dann mit einem üblichen Wert von $R_1 = 300$ Ohm ein R_2 von rund 33 Ohm. Die Einstellung dieses Wertes ist schon relativ kritisch, wenn man außerdem noch das Temperaturverhalten der einzelnen Transistoren berücksichtigen muß. Man gelangt dann leicht in den Bereich, wo der Ringzähler nicht mehr betriebssicher arbeitet.

IV. Der basisgesteuerte Ringzähler

1. Die Wirkungsweise

Diese Nachteile waren nun der Anlaß, eine Ringzählschaltung aufzubauen, die diese Nachteile weitgehend ausschließt. Das erfordert zwar einen höheren Bauelementbedarf, hat aber dafür den Vorteil, daß die Schaltung absolut betriebssicher arbeitet. Der Zähler (Bild 3) besteht aus einer Kombination von zehn bistabilen Multivibratoren, die je zwei über Hilfstorschaltungen gesteuerte Eingänge besitzen. Mittels eines Tastenschalters ist es möglich, die Zahl der zu einem Ring geschlossenen Zählelemente zwischen 2 und 10 zu variieren. Diese Aufgabenstellung ist speziell durch die automatische Kurvenauswertung bedingt und berücksichtigt die Forderung, Registrierstreifen mit maximal zehn verschiedenen Registrierkurven auswerten zu können.

Zur Beschreibung der Wirkungsweise dieses Ringzählers ist das Impulsbild im Bild 4 dargestellt. Nach Anlegen der Betriebsspannung befindet sich zunächst jeder bistabile Multivibrator in einer der beiden stabilen Lagen. Da nicht vorhergesehen werden kann, in welche von beiden sich jede Kippstufe einstellt, ist zunächst eine definierte Anfangsstellung aller Multivibratoren herzustellen. Das geschieht durch einen Rückstellimpuls an Kontakt 13. Die positive Vorderflanke dieses Rückstellimpulses öffnet nur den rechten Transistor des ersten Multivibrators, während dagegen in allen übrigen Multivibrato-

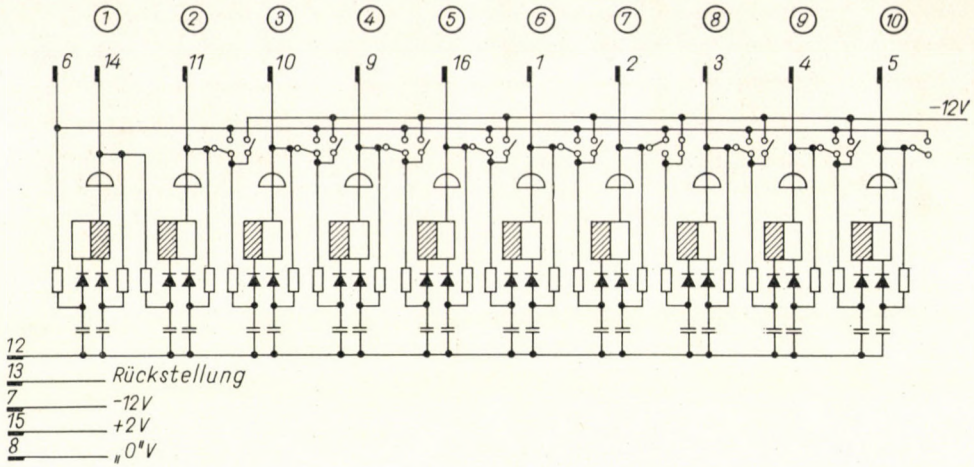


Bild 3

ren die rechten Transistoren gesperrt und die linken leitend sind. Somit sind die durch Emitterfolger niederohmig gemachten Ausgänge (2) bis (10) negativ (Schaltzustand 0) und der Ausgang (1) schwach negativ (Schaltzustand L).

Führt man nun die Steuerimpulse an den Eingang 12, dann wird die erste Stufe durch die positive Vorderflanke des ersten Steuerimpulses in die zur Anfangsstellung komplementäre Lage geworfen, und durch das schon offen gewesene Tor des linken Systems der zweiten Stufe wird diese jetzt in den Schaltzustand L versetzt. Diese öffnet nun wiederum das Hilfstor des rechten Systems der zweiten Stufe, und das über den Schalter angeschlossene

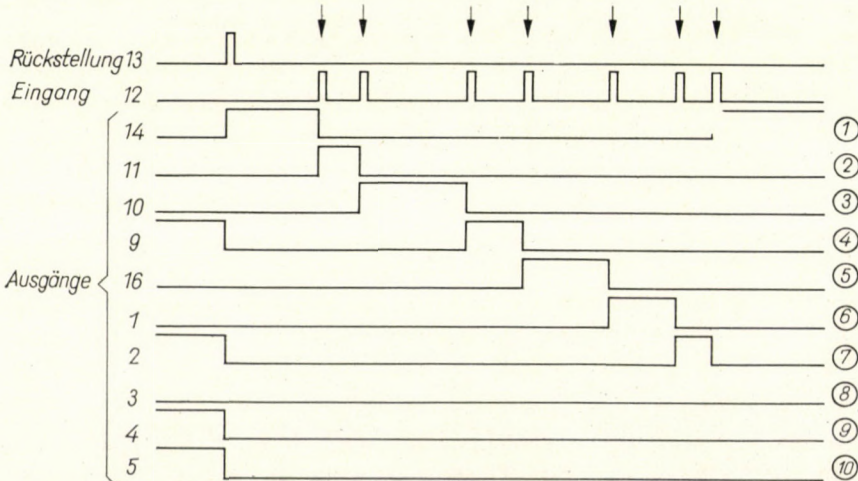


Bild 4

linke Diodentor der dritten Stufe bereitet somit die Weiterschaltung von der zweiten zur dritten Stufe vor. Durch den ersten Steuerimpuls ist also an (1) ein negativer Spannungssprung wirksam, dessen negative Flanke mit der positiven Vorderflanke des Steuerimpulses zeitlich übereinstimmt.

Diese Vorgänge wiederholen sich nun für alle folgenden Steuerimpulse an den Ausgängen (2), (3) usw. bis, wie für einen speziellen Fall im Bild 3 und 4 dargestellt, durch Schließen des Ringes nach dem 7 Multivibrator der 7 Steuerimpuls sowohl den 7 Multivibrator in seine Anfangsstellung zurückstellt, als auch an (1) wieder die Ziffer *L* erscheinen läßt. Damit befindet sich der Zähler wieder in seiner Grundstellung. Die Multivibratoren 8, 9 und 10 im Bild 3 werden durch diese Schaltvorgänge in keiner Weise beeinflußt, da durch Schließen des Ringes nach Stufe 7 das linke Diodentor des 8 Multivibrators an eine feste negative Spannung gelegt und damit ein Weiterschalten von 8 auf 9 und 10 verhindert wird.

2. Die Anwendung des basisgesteuerten Ringzählers

Der wesentliche Vorteil dieses Ringzählers liegt in der Basissteuerung der Multivibratoren mittels Hilfstorschaltungen. An die Form der Steuerimpulse brauchen bei weitem nicht mehr so hohe Anforderungen gestellt werden wie bei dem emittergesteuerten Ringzähler. Die Impulsbreite kann sogar beliebig groß sein. Entscheidend ist nur eine ausreichend steile positive Vorderflanke, die bei einem offenen Diodentor einen genügend großen positiven Nadelimpuls an der entsprechenden Basis wirksam werden läßt.

Entschieden günstiger ist auch das Temperaturverhalten des Ringzählers, da jeder Multivibrator durch seine eigene Emitterspannung bessere Symmetrieeigenschaften besitzt. Dadurch ist es auch möglich, beliebig viele Multivibratoren zu einem Ring zusammenzuschließen, ohne die Betriebssicherheit des Ringzählers zu beeinflussen.

Schließlich ist auch die Gefahr der Mittkopplungserscheinungen bei dieser Art der Ansteuerung praktisch zu vernachlässigen.

Es ist nun ohne weiteres möglich, an die Ausgänge (1) bis (10) je einen monostabilen Multivibrator zu legen, der auf die schon erwähnte negative Impulsflanke des jeweiligen Multivibrators anspricht und damit einen definierten Ausgangsimpuls liefert, dessen positive Vorderflanke mit der des Steuerimpulses zeitlich übereinstimmt. Dies ist besonders wichtig, da bei der Kurvenauswertung die positive Vorderflanke des Steuerimpulses die Kurvenunterkante einer Registrierlinie darstellt. Dieser Informationsinhalt darf durch die Umwandlung von der Serien- in die Paralleldarstellung nicht verfälscht werden.

Betrachtet man nun die im Bild 4 für den Eingang 12 dargestellten Impulse als Kurvenimpulse eines Abtastvorganges, dann sieht man eindeutig, daß die durch Pfeilspitzen gekennzeichneten positiven Vorderflanken wieder-

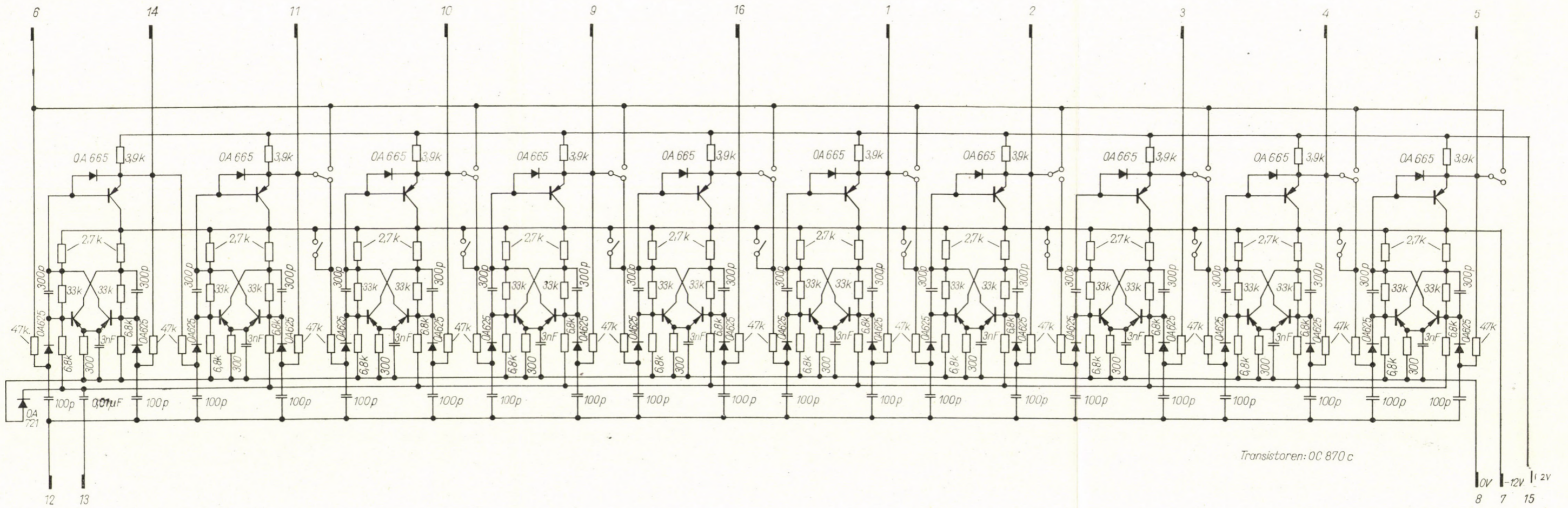


Bild 5

um definierte Impulse an den Ausgängen ④ bis ⑦ liefern. Damit ist eine einwandfreie Umwandlung von der Serien in die Paralleldarstellung gewährleistet. Die ausführliche Schaltung dieses Ringzählers ist im Bild 5 dargestellt. Bild 6 zeigt schließlich den Ringzähler in seinem praktischen Aufbau. Der gesamte elektronische Teil ist beiderseits des Tastenschalters auf zwei Leiterplatten

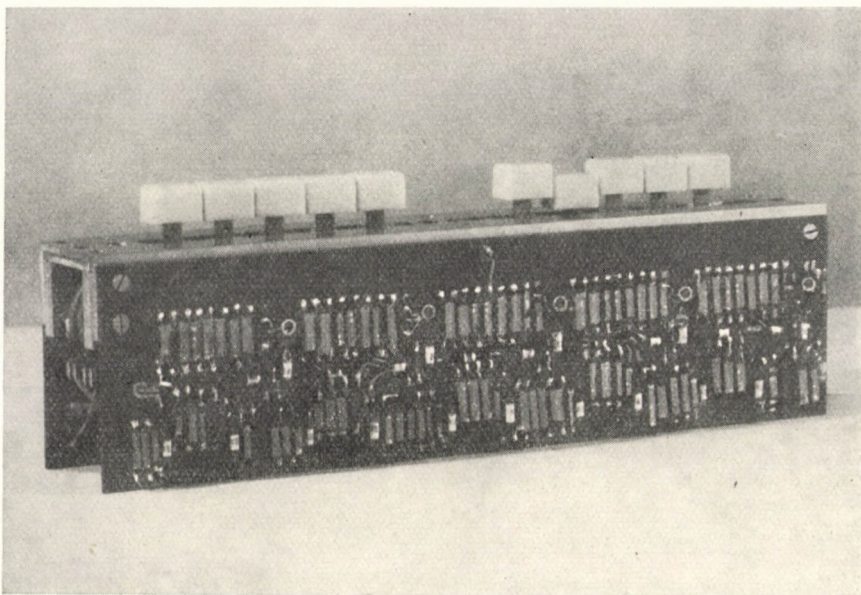


Bild 6

angeordnet. Die Steckverbindung erfolgt über zwei achtpolige Messerleisten, die an der Unterseite des Tastenschalters zwischen den beiden Leiterplatten angeordnet sind. Eine längere praktische Erprobung dieses Ringzählers hat bei Änderungen der Betriebsspannung um $\pm 20\%$ in einem Temperaturbereich von $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$ bis $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ein betriebs sicheres Arbeiten gezeigt.

TRANSISTORIZED RING-COUNTER WITH INCREASED RELIABILITY OF OPERATION

D. LENNERS

SUMMARY

The base controlled ring-counter discussed in this paper is a special case of the shift-register. The increased reliability of operation is founded on the separation of the switching pulse (shift cadence) from the control of the next multivibrator needed for the shifting of the *L*-signal. That makes it easier to switch over the ring-counter, because only the *L*-signal of the last multivibrator of the ring-counter must be connected by means of a press-button to the gate-circuit preceding the first multivibrator. On the other hand, the timing pulses simultaneously effect each gate input. It is advantageous to use independent bistable elements

which are connected to each other merely by auxiliary gate-circuits. By this means any number of these elements may be connected to a ring — in contradiction to the emitter controlled ring-counters — without impairing the reliability of operation of the circuit. In practice the base controlled ring-counter has proved very good. Besides the ten-stage ring-counter, a 19-stage base controlled ring-counter was used for reading-off measuring points.

UN COMPTEUR A SÉCURITÉ DE SERVICE ACCRUE

D. LENNERS

RÉSUMÉ

Le compteur en anneau à commande par la base, que l'auteur décrit dans cette étude, est un cas spécial du registre de décalage. La sécurité de service augmentée est basée sur la séparation des impulsions de décalage et de la commande du multivibrateur suivant nécessaire pour décaler le signal L . Ceci facilite aussi le basculement du compteur en anneau, le signal L du dernier multivibrateur inclus dans l'anneau devant être simplement conduit, à l'aide d'un bouton-poussoir, au circuit porte placé devant le premier multivibrateur. Par contre, les impulsions de cadence agissent simultanément à toutes les entrées des portes. Un autre avantage est l'utilisation d'éléments bistables autonomes, reliés seulement par les circuits portes auxiliaires. Ainsi, à la différence du compteur en anneau commandé par l'émetteur, il est possible de brancher en anneau un nombre quelconque de ces éléments, sans influencer la sécurité de fonctionnement du montage. Le compteur en anneau à commande par la base a fait ses preuves dans la pratique. En plus du compteur en anneau à 10 étages décrit dans l'étude, un compteur à 19 étages a été utilisé pour le relevé des points de mesure.

КОЛЬЦЕВОЙ СЧЕТЧИК НА ТРАНЗИСТОРАХ С ПОВЫШЕННОЙ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ НАДЕЖНОСТЬЮ

Д. ЛЕННЕРС

РЕЗЮМЕ

Описанный в работе кольцевой счетчик базового управления является, в своем роде, специальным случаем шифт-регистра. Повышенная эксплуатационная надежность основывается на отделении управления, необходимого для смещения сигнала L последующего мультивибратора, от коммутационного импульса. Такой режим облегчает переключение кольцевого счетчика, так как сигнал L мультивибратора, включенного только в последнее кольцо, необходимо при помощи кнопочного переключателя подавать на стробирующую цепь первого мультивибратора. При этом все импульсы временных сигналов одновременно действуют на все входы. Кроме того, выгодно применять самостоятельные бистабильные элементы, которые соединяются между собой только при помощи вспомогательных стробсхем. Вследствие этого (в противоположность с кольцевым счетчиком эмиттерного управления) можно произвольное количество таких элементов соединить в кольцо без того, чтобы эта схема воздействовала бы на эксплуатационную надежность схемы. Во время практического применения кольцевой счетчик базового управления оправдался очень хорошо. Кроме десятикаскадного кольцевого счетчика, описанного в статье, для опроса измерительных точек был применен также 19-каскадный кольцевой счетчик базового управления.

ENERGIEÜBERTRAGUNG IN MECHANISMEN

A. POÓCZA

ROTTENBURG/NECKAR (DEUTSCHE BUNDESREPUBLIK)

[Eingangen am 28. September, 1964]

Mit Hilfe der flächenhaften Wirbel werden Energievorgänge in Mechanismen gedeutet

I. Vektoranalytische Grundlagen

Das unvollständige Differential $\lambda d\varphi$ der die Energie — von einem Nullpunkt abgesehen — ausdrückenden skalaren Größe $\lambda\varphi$ stellt bei Energieprozessen die Elementararbeit dar [1]. So ist z. B. die Elementararbeit dA einer Kraft vom Betrage Q entlang ihrer Wirkungslinie $dA = Qds$ das unvollständige Differential der Energiegröße: Qs . Die elementare Expansionsarbeit Pdv stellt das unvollständige Differential der Verdrängungsarbeit Pv dar. Ähnlich läßt sich die elementare Wärmemenge in der Thermodynamik $dQ = Tds$ (T absolute Temperatur, s Entropie) als unvollständiges Differential der gebundenen Energie Ts angeben.

Die totale Änderung $d\varphi$ der skalaren Größe φ kann im stationären Wirkungsfeld stets als

$$d\varphi = dr \operatorname{grad} \varphi \quad (1)$$

angegeben werden. Die Größe φ ist also eine skalare Ortsfunktion $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, deren Wert nur von der Lage eines Punktes, den man im allgemeinen Feldpunkt nennt, abhängt. Der Raum, in dem die Abhängigkeit der Größe φ von der Lage des Feldpunktes definiert ist, heißt das Feld dieser Größe. Die Punkte, in denen die Größe φ konstant ist, bilden im allgemeinen krumme Flächen. Grad φ ist in jedem Punkt einer solchen Fläche parallel zur Flächennormale und weist in die Richtung der steigenden φ . Die Flächen auf denen die Ortsfunktion $\varphi(\mathbf{r})$ einen konstanten Wert hat, werden Niveau- oder Äquipotentialflächen der Funktion $\varphi(\mathbf{r})$ genannt. Man kann in jedem Fall zu den zusammenhängenden Äquipotentialflächen senkrechte Linien legen, die als Feldlinien die Wirkungslinien des Feldvektors \mathbf{A} darstellen. Wegen der Orthogonalität der Feldlinien zu den Niveauflächen heißt ein solches Feld flächennormal $[\mathbf{A}, \operatorname{grad} \varphi] = 0$. In einem flächennormalen Felde ist somit der Feldvektor \mathbf{A} stets in der Form

$$\mathbf{A} = \lambda \operatorname{grad} \varphi \quad (2)$$

darstellbar, wo λ eine beliebige skalare Ortsfunktion sein kann. Man gewinnt einen klaren Einblick in die Eigenschaften solcher *komplex-lamellaren* Vektorfelder, wenn man den raumhaften Wirbelvektor $\text{rot } \mathbf{A}$ betrachtet. Nach den Regeln der Vektoranalysis findet man:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \text{rot} (\lambda \text{ grad } \varphi) = \lambda \text{ rot grad } \varphi + [\text{grad } \lambda \text{ grad } \varphi] = \\ &= [\text{grad } \lambda \text{ grad } \varphi], \end{aligned} \quad (3)$$

da für einen beliebigen stetigen Vektor $\text{grad } \varphi$

$$\text{rot grad } \varphi = 0 \quad (4)$$

ist. Wenn λ nur eine Funktion von φ ist, auf einer Orthogonalfläche $\varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ also $\lambda = \text{konst.}$ ist, kann geschrieben werden:

$$\lambda = \lambda(\varphi). \quad (5)$$

Dann ist aber für stetige, endliche, eindeutige Funktionen:

$$\text{grad } \lambda = \text{grad } \lambda(\varphi) = \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \text{ grad } \varphi \quad (6)$$

also $\text{grad } \lambda$ parallel zu $\text{grad } \varphi$, womit das äußere Produkt in Gl. (3) zu Null wird. Die Flächen $\varphi = \text{konst.}$ und $\lambda = \text{konst.}$ fallen zusammen, das Feld wird wirbelfrei, also ein reines Gradientenfeld. In diesem Fall kann ja der Feldvektor \mathbf{A} als Gradient

$$\mathbf{A} = \text{grad } w \quad (7)$$

des skalaren Feldes

$$w = \int \lambda d\varphi + C \quad (8)$$

dargestellt werden. In einem solchen Potentialfelde auf einem geschlossenen Weg Arbeit zu leisten ist nur möglich, wenn das Feld des Vektors \mathbf{A} unstetig ist, genauer gesagt, wenn der sonst im Felde stetige Vektor \mathbf{A} an bestimmten Flächen eine sprunghafte Änderung erleidet. Der für die Arbeitsleistung auf einem geschlossenen Wege wichtige Stokessche Satz gilt in seiner üblichen Form

$$\oint_K d\mathbf{r} \mathbf{A} = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{u} \text{ rot } \mathbf{A}, \quad (9)$$

wobei \mathbf{u} den normalen Einheitsvektor des Flächenelementes $d\mathbf{f}$ bezeichnet, nur, wenn der Vektor \mathbf{A} auf der von der Kurve K berandeten Fläche F endlich und stetig ist. Ist nun auf F eine geschlossene Unstetigkeitskurve K' vorhanden, so zerlegt sie die Fläche F in zwei Teile F' und $F - F'$, wobei auf beide, da

\mathbf{A} stetig bleibt, der Stokessche Satz laut Gl. (9) anwendbar ist. Mit dem Wert \mathbf{A}_1 des Feldvektors \mathbf{A} auf der negativen und mit \mathbf{A}_2 auf der positiven Seite der Unstetigkeitskurve K' findet man unter Berücksichtigung des Umlaufsinnnes auf K' die Zusammenhänge:

$$\oint_{K'} d\mathbf{r}\mathbf{A}_1 = \oint_{F'} d\mathbf{f}\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (10)$$

bzw.

$$\oint_K d\mathbf{r}\mathbf{A} - \oint_{K'} d\mathbf{r}\mathbf{A}_2 = \int_{(F-F')} d\mathbf{f}\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (11)$$

Nach Addieren der Gl. (10) und (11) ergibt sich:

$$\oint_K d\mathbf{r}\mathbf{A} = \oint_{K'} \Phi d\mathbf{r}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) + \int_F d\mathbf{f}\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (12)$$

Bei einer ungeschlossenen Unstetigkeitskurve K' umgibt man sie mit einer geschlossenen Kurve, die sich im Grenzfall unendlich dicht an die Kurve K' anschmiegen soll, womit das Randintegral K' in Gl. (12) in ein Linienintegral über die offene Kurve K' übergeht:

$$\oint_K d\mathbf{r}\mathbf{A} = \int_{K'} d\mathbf{r}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) + \int_F d\mathbf{f}\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (13)$$

Hat der Vektor \mathbf{A} die Bedeutung einer Kraft, so ist der Ausdruck auf der linken Seite der Gl. (9), (12), (13) offenbar die Umführungsarbeit dieser Kraft entlang der geschlossenen Kurve K' , also während einer Periode einer periodisch arbeitenden Maschine. Wie man es aus Gl. (12) bzw. (13) ersieht, verschwindet diese Arbeit auch im Potentialfelde ($\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$) nicht, wenn der Integrationsweg K eine Unstetigkeitsstelle des Vektors \mathbf{A} umschließt.

Bei Aufgaben über Energie stößt man auf Wirbel. Dies hängt mit dem weiter oben diskutierten unvollständigen Differential $\lambda d\varphi$ der die Energie ausdrückenden skalaren Größe $\lambda\varphi$ eng zusammen. Im Gegensatz zum Integral des vollständigen Differentials $d(\lambda\varphi) = \varphi d\lambda + \lambda d\varphi$ — das nur von den Koordinaten der Grenzpunkte abhängt — ist das Integral des unvollständigen Differentials $\lambda d\varphi$ im allgemeinen wegabhängig, da zwei unabhängige skalare Ortsfunktionen $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ und $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ den Integrabilitätsbedingungen nicht genügen. Somit ist das Feld dann im allgemeinen wirbelhaft. [Es gibt Fälle, in denen das scheinbar unvollständige Differential $\lambda d\varphi$ ein vollständiges Differential $d(\lambda\varphi)$ darstellt, und somit der Integrand $\lambda d\varphi$ den Integrabilitätsbedingungen genügt, und das Feld des Vektors $\mathbf{A} = \lambda \operatorname{grad} \varphi$ wirbelfrei wird. Es leuchtet sofort ein, daß das immer der Fall ist, wenn $\lambda = \text{konst.}$ oder wenn λ

nur eine Funktion von φ ist, wie das bei Gl. (5) und (6) angedeutet wurde. Dann ist nämlich der Ausdruck $\lambda d\varphi = \lambda(\varphi)d\varphi$ eben das vollständige Differential der Funktion: $w = \int \lambda(\varphi)d\varphi + C$.

Man weiß aus der Erfahrung, daß auf einem geschlossenen Wege auch im Gradientenfelde Arbeit geleistet werden kann; es muß eben nur dafür gesorgt werden, daß das Feld auf der von der geschlossenen Kurve K berandeten Fläche eine Sprunglinie habe, wie das bei Gl. (13) gezeigt wurde. Eine Kolbenpumpe z. B., die das Gewicht einer Wassersäule zu heben hat, arbeitet offenbar im Gradientenfelde der Schwerkraft. Eine Arbeitsleistung wird erst dadurch möglich, daß in die Pumpe Organe — die Ventile nämlich — eingebaut sind, die für eine sprunghafte Änderung des Feldvektors sorgen. Um zu zeigen, daß auch in solchen Fällen Wirbel vorhanden sind, wollen wir Gl. (13) etwas näher diskutieren.

In der Vektoranalysis wird der sogenannte Flächenrotor (der zur Unterscheidung vom raumhaften Rotor $\text{rot } \mathbf{A}$ mit großem Anfangsbuchstaben geschrieben werden soll: $\text{Rot } \mathbf{A}$ als Ausartung der entsprechenden räumlichen Ableitung definiert [2]. Einen flächenhaften Rotor haben Vektoren, die an gegenüberliegenden Stellen auf beiden Seiten einer gegebenen Fläche dicht an der Fläche verschiedene Werte haben. Obwohl sich der physikalische Zustand an der Trennfläche benachbarter Körper — wenn auch ziemlich schroff — im allgemeinen doch stetig ändert, idealisiert man den Zustand — um die Berechnung zu erleichtern — indem man eine sprunghafte Änderung annimmt. Bezeichnet man den Vektor \mathbf{A} auf der positiven Seite der Sprungfläche mit dem Index 2, den Vektor auf der anderen Seite mit 1, so findet man für den Flächenrotor des Vektors \mathbf{A} den Ausdruck:

$$\text{Rot } \mathbf{A} = [\mathbf{u}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)]. \quad (14)$$

Man kann leicht zeigen, daß dieser Ausdruck mit dem Integrand in Gl. (13) $d\mathbf{r}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)$ in engem Zusammenhang steht. Es ist:

$$d\mathbf{r}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = d\mathbf{r}[\mathbf{u}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{u}]] = d\mathbf{r}[\text{Rot } \mathbf{A}, \mathbf{u}]. \quad (15)$$

Nach dem Entwicklungssatz findet man nämlich:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}[\mathbf{u}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{u}]] &= d\mathbf{r}\{(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\} = \\ &= d\mathbf{r}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \end{aligned} \quad (16)$$

da $(\mathbf{u}\mathbf{u}) = 1$ und längs der Sprungfläche $(d\mathbf{r}\mathbf{u}) = 0$ sind. Mit Gl. (15) kann man also Gl. (13) auf folgende Form bringen:

$$\oint_K d\mathbf{r}\mathbf{A} = \int_{K'} d\mathbf{r}[\text{Rot } \mathbf{A}, \mathbf{u}] + \int_F d\mathbf{f}\mathbf{u} \text{ rot } \mathbf{A}. \quad (17)$$

Ist nun das Feld des Vektors \mathbf{A} ein Gradientenfeld, und $F \neq 0$, dann entfällt das letzte Glied in Gl. 17. und man findet:

$$\begin{aligned} \oint_K \mathbf{dr} \mathbf{A} &= \int_{K'} \mathbf{dr} [\text{Rot} \mathbf{A}, \mathbf{u}] = \int_{K'} \mathbf{dr} [\text{Rot} \text{ grad } \Phi, \mathbf{u}] = \\ &= \int_{K'} \mathbf{dr} \{[\mathbf{u}, \text{grad}(\Phi_2 - \Phi_1)]\mathbf{u}\} = \int_{K'} \mathbf{dr} \text{grad}(\Phi_2 - \Phi_1) = \\ &= \int_{K'} d\Phi_2 - \int_{K'} d\Phi_1. \end{aligned} \quad (18)$$

In einem Potentialfelde ist also die auf einem geschlossenen Wege K geleistete Arbeit durch den Potentialsprung an der Sprungfläche K' gegeben. Ist diese eine geschlossene Fläche, so ist natürlich $\oint_{K'} \mathbf{dr} \mathbf{A} = 0$, da $\oint_{K'} d\Phi = 0$ ist.

Das zweite Integral auf der rechten Seite von Gl. (17) verschwindet noch in einem anderen wichtigen Falle: Dann nämlich, wenn man die geschlossene Kurve K unendlich dicht an die Unstetigkeitskurve K' anschmiegen läßt, da in diesem Falle die von K berandete Fläche F dem Grenzwert Null zustrebt. Dann liegt die wirkliche Bahn K des Kraftangriffspunktes in der Sprungfläche und der Arbeitsprozess spielt sich längs beider Seiten der Unstetigkeitskurve K' ab, womit die in Gl. (14) angegebenen flächenhaften Wirbel — als Träger der Arbeitsleistung — verbunden sind.

Bei einer geschlossenen Unstetigkeitskurve K' ist es nicht möglich, die wirkliche Bahn K an die Unstetigkeitskurve von beiden Seiten her anzuschmiegen. Die Kurve K bleibt stets auf der positiven Seite von K' . Eine geschlossene Unstetigkeitskurve K' ist aber offenbar möglich, wenn die zugehörige Sprungfläche ein Volumen, einen Raumteil umschließt. Der Raum ist somit zweifach zusammenhängend. Man kann also sagen, daß der von der Sprungfläche umschlossene Raum nicht zum Bereich des Vektors \mathbf{A} gehört, womit für diesen Raum $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = 0$ wird. Nach dieser Auffassung spielt sich der Arbeitsprozeß am Rande des Vektorfeldes \mathbf{A} ab, wo nach Gl. (14) die flächenhaften Wirbel

$$\text{Rot } \mathbf{A} = [\mathbf{u}, (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)] = [\mathbf{u}, \mathbf{A}_2] = [\mathbf{u}, \mathbf{A}]$$

vorhanden sind.

Somit erhält man aus Gl. (17) beim unendlich dichten Anschmiegen von K an K' für eine offene Bahn die Gleichung:

$$\oint_{K \rightarrow K'} \mathbf{dr} \mathbf{A} = \int_{K'} \mathbf{dr} [\text{Rot} \mathbf{A}, \mathbf{u}] = \int_{K'} \mathbf{dr} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \quad (19)$$

und für eine geschlossene Bahn:

$$\oint_{K \rightarrow K'} \mathbf{dr} \mathbf{A} = \oint_{K'} \mathbf{dr} [\text{Rot } \mathbf{A}, \mathbf{u}] = \oint_{K'} \mathbf{dr} \mathbf{A}_2. \quad (20)$$

Wie Gl. (17) zeigt, ist eine Arbeitsleistung nur im Zusammenhang mit Wirbeln möglich. Diese Wirbel haben die charakteristische Eigenschaft, daß sie immer senkrecht zum Feldvektor stehen. Für den Flächenrotor geht diese Behauptung unmittelbar aus Gl. (14) hervor. Für die räumlichen Wirbel gehen wir einfach von Gl. (3) aus und setzen, im Einklang mit Gl. (2)

$$\text{grad } \varphi = \frac{\mathbf{A}}{\lambda} . \quad (21)$$

Somit nimmt Gl. (3) die Form:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left[\frac{\text{grad } \lambda}{\lambda} , \mathbf{A} \right] \quad (22)$$

an. Man kann also schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{A} &= 0 , \\ \mathbf{A} \text{ Rot } \mathbf{A} &= 0 , \end{aligned} \quad (23)$$

d. h., der Feldvektor steht in einem flächennormalen Felde senkrecht zu seinem Rotor bzw. zu seinem Flächenrotor.

II. Beispiele für flächenhafte Wirbel

1. Zahnrad

Um die Vektorfelder bei unseren einfachen Mechanismen zu zeigen, wählen wir einen von einem Zahnrad angetriebenen Kurbeltrieb, wie er z. B. bei Kolbenmaschinen, Kurbelpressen usw. verwendet wird. Der einfachen mathematischen Darstellung halber setzen wir eine unendlich lange Pleuelstange voraus. Somit haben wir mit dem im Bild 1 skizzierten Mechanismus zu tun, wobei also der am oberen Gelenkpunkt der Pleuelstange angebrachte Bolzen eine reine sinoidale Bewegung hat.

Wir betrachten zuerst das Feld der am Umfang des Zahnrades angreifenden Kraft. Wir sehen dabei von dem Eingriffswinkel und der Reibung ab und ziehen nur die tangentielle Komponente der wirklichen Umfangskraft — die zeitlich unveränderlich sein soll — in Betracht. Die elementare Arbeitsleistung einer solchen Kraft wird bekanntlich durch die Gleichung

$$dA = - Trd \varphi \quad (24)$$

definiert, wo die einzelnen skalaren Größen folgende Bedeutung haben:

- T** Betrag der tangential gerichteten Kraft, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(r, \varphi)$ eine stetige Funktion;
 r, ψ Ortskoordinaten im zylindrischen Koordinatensystem $(\mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{z}_0)$.

Für die bisher benutzten skalaren Größen λ und φ findet man in Anlehnung an Gl. (24) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \lambda &= -Tr; \\ \varphi &= \psi. \end{aligned} \quad (25)$$

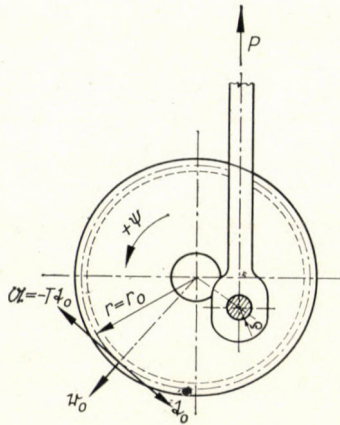


Bild 1

[Eine freie Wahl, wie etwa $\lambda = -T, \varphi = r\psi$ oder $\lambda = -T\psi, \varphi = r$ ist nicht möglich, da in Gl. (24) das totale Differential der skalaren Größe φ — wie das Gl. (1) zeigt — vorhanden sein muß. Dies ist nur möglich bei der Aufteilung des Produktes $Trd\psi$ nach Gl. (25).] Die Gradienten ergeben sich zu:

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } \psi = \frac{1}{r} \mathbf{t}_0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } \lambda &= \text{grad}(-Tr) = -T \text{grad } r - r \text{grad } T = \\ &= -T \mathbf{r}_0 - r \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \psi} \mathbf{t}_0 \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Laut Gl. (2) ist also der Feldvektor

$$\mathbf{A} = \lambda \text{grad } \varphi = -T \mathbf{t}_0 \quad (28)$$

eine tangentiale Kraft vom Betrage T . Der räumliche Rotor des Feldes errech-

net sich aus Gl. (3) zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\operatorname{grad} \lambda, \operatorname{grad} \varphi] = - \left\{ \frac{T}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} \right\} \mathbf{z}_0. \quad (29)$$

Das Feld der tangentialen Kraft \mathbf{A} ist also wirbelhaft. Somit ist es möglich in diesem Felde entlang einer geschlossenen Kurve K Arbeit zu leisten:

$$\oint_K d\mathbf{r} \mathbf{A} = - \oint_K T \mathbf{t}_0 (d\mathbf{r} r_0 + r d\psi \mathbf{t}_0) = - \oint_K T r d\psi = - \oint_K \lambda d\varphi. \quad (30)$$

Im vorliegenden Fall ist die physikalisch mögliche Bewegung durch die Kreisbahn $r = r_0 = \text{konst.}$ gegeben. Somit erhält man aus Gl. (30) für die entlang einer geschlossenen Kreisbahn geleistete Arbeit:

$$\oint_K d\mathbf{r} \mathbf{A} = - r_0 \int_0^{2\pi} T d\psi \quad (31)$$

oder nach dem Stokesschen Satz [Gl. (9)]:

$$\begin{aligned} \oint_K d\mathbf{r} \mathbf{A} &= \int_F d\mathbf{f} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{A} = - \int_F r d\psi dr \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{T}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} \right\} \mathbf{z}_0 = \\ &= - \int_F \left\{ T + r \frac{\partial T}{\partial r} \right\} dr d\psi = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r_0} \left\{ T + r \frac{\partial T}{\partial r} \right\} dr \right) d\psi = \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r_0} \{ T dr + r dT \} \right) d\psi = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r_0} d(Tr) \right) d\psi = \\ &= - \int_0^{2\pi} [Tr]_0^{r_0} d\psi = - r_0 \int_0^{2\pi} T d\psi. \end{aligned} \quad (32)$$

Die geschlossene Kurve K kann im Sinne des Stokesschen Satzes irgend eine beliebige Kurve sein. Wählen wir z. B. die im Bild 2 dargestellte Kurve K , so erhalten wir für die geleistete Arbeit:

$$A = \oint_K d\mathbf{r} \mathbf{A} = - \oint_K T r d\psi = - r_2 \int_0^{\psi_0} T d\psi + r_1 \int_0^{\psi_0} T d\psi \quad (33)$$

oder nach dem Stokesschen Satz:

$$\begin{aligned} A &= \int_F d\mathbf{f} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{A} = - \int_F r d\psi dr \mathbf{z}_0 \left\{ \frac{T}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} \right\} \mathbf{z}_0 = \\ &= - \int_0^{\psi_0} \left(\int_{r_1}^{r_2} d(Tr) \right) d\psi = - \int_0^{\psi_0} [Tr]_{r_1}^{r_2} d\psi = - r_2 \int_0^{\psi_0} T d\psi + r_1 \int_0^{\psi_0} T d\psi. \end{aligned} \quad (34)$$

Diese Arbeit A wird Null, wenn $r_1 = r_2$ ist, wenn also das Zahnrad eine hin- und herpendelnde Bewegung ausführt, wenn sich also der Kraftangriffspunkt auf dem offenen Kreisbogen K' bewegt. Somit spielt in diesem Falle bei einer Energieübertragung der räumliche Rotor $\text{rot } \mathbf{A}$ überhaupt keine Rolle, da die von der Kurve $K = K'$ berandete Fläche F Null wird. Eine Energieübertragung entlang einem offenen Kreisbogen ist jedoch erfahrungsgemäß möglich, wenn für den »Hingang« und »Rückgang« verschiedene Kraftfunktionen gelten. Das bedeutet aber vektoranalytisch gesehen, daß der Feldvektor \mathbf{A} auf der durch diesen offenen Kreisbogen gelegten offenen Zylinderfläche, an deren beiden Seiten der Hin- bzw. Rückgang stattfindet, eine sprunghafte Änderung erleidet und somit einen flächenhaften Rotor

$$\text{Rot } \mathbf{A} = [\mathbf{u}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)] = [\mathbf{r}_0(-T_2\mathbf{t}_0 + T_1\mathbf{t}_0)] = (-T_2 + T_1)\mathbf{z}_0 \quad (35)$$

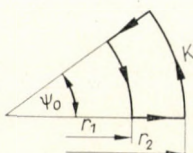


Bild 2

hat, wobei T_2 und T_1 die für den Hin- bzw. Rückgang geltenden Beträge der in beiden Fällen tangential wirkend angenommenen Kraft bezeichnen. Der offene Kreisbogen liegt also in der durch die parallelen Wirbelfäden des $\text{Rot } \mathbf{A}$ gebildeten Fläche, in einer »Wirbelschicht«, die mit den Wirbeln laut Gl. (35) belegt ist. Aus Gl. (17) ergibt sich die geleistete Arbeit zu

$$\begin{aligned} A &= \int_{K'} d\mathbf{r}[\text{Rot } \mathbf{A}, \mathbf{u}] = - \int_{K'} d\mathbf{r}[(T_2 - T_1)\mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0] = \\ &= -r_0 \int_0^{\psi_0} T_2 d\psi + r_0 \int_0^{\psi_0} T_1 d\psi. \end{aligned} \quad (36)$$

Gl. (36) ist natürlich auch für den Fall $\psi_0 \geq 2\pi$ gültig, nur wird jetzt — da bei einer geschlossenen Unstetigkeitsfläche ein zweifach zusammenhängender Raum vorliegt — der Vektor $(T_1\mathbf{t}_0)$ im Inneren des von der Sprungfläche berandeten Raumes zu Null. Der Arbeitsprozeß spielt sich jetzt an dem durch den geraden Kreiszyylinder vom Halbmesser r_0 gebildeten Rande des Vektorfeldes $\mathbf{A} = T\mathbf{t}_0 = T_2\mathbf{t}_0''$ ab, wo die Flächenwirbel

$$\text{Rot } \mathbf{A} = \text{Rot}(-T\mathbf{t}_0) = -[\mathbf{r}_0, T\mathbf{t}_0] = -T\mathbf{z}_0 = -T_2\mathbf{z}_0 \quad (37)$$

vorhanden sind. Für die geleistete Arbeit während einer Periode erhält man

aus Gl. (20):

$$\oint_{K \rightarrow K'} \mathbf{dr} \mathbf{A} = \oint_{K'} \mathbf{dr} [-T \mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0] = - \int_0^{2\pi} r_0 \, d\psi \, \mathbf{t}_0 T \mathbf{t}_0 = - r_0 \int_0^{2\pi} T \, d\psi \quad (38)$$

wie bei den Gl. (31) und (32).

2. Kurbel

Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel wählen wir nun ein Gradientenfeld.

An der Pleuelstange soll die Kraft vom Betrage P (Bild 1) angreifen. Die Krafttrichtung ist im Raume konstant, da voraussetzungsgemäß die Pleuelstange unendlich lang sein soll.

Die Elementararbeit läßt sich nun wie folgt angeben:

$$dA_a = \lambda_a d\varphi_a = P(-dr \cos \psi + r \sin \psi d\psi) = P \cdot d(H - r \cdot \cos \psi). \quad (39)$$

Die zwei skalaren Größen der Energie sind somit:

$$\lambda_a = P, \quad (40)$$

$$\varphi_a = H - r \cos \psi \quad (41)$$

mit H als einer Konstanten.

Die Gradienten ergeben sich zu:

$$\text{grad } \lambda_a = \frac{\partial P}{\partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \psi} \mathbf{t}_0, \quad (42)$$

$$\text{grad } \varphi_a = -\cos \psi \mathbf{r}_0 + \sin \psi \mathbf{t}_0. \quad (43)$$

Der Feldfaktor ist:

$$\mathbf{A}_a = \lambda_a \text{grad } \varphi_a = P(-\cos \psi \mathbf{r}_0 + \sin \psi \mathbf{t}_0). \quad (44)$$

Für den räumlichen Rotor findet man:

$$\text{rot } \mathbf{A}_a = [\text{grad } \lambda_a \text{ grad } \varphi_a] = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \sin \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \psi} \cos \psi \right) \mathbf{z}_0. \quad (45)$$

Das Feld des Vektors \mathbf{A}_a ist also im allgemeinen wirbelhaft. Um ein Potentialfeld zu erhalten, wählen wir $P = P_0 = \text{konst.}$, womit grad λ_a und

rot \mathbf{A}_a Null werden. Wir finden aus Gl. (44)

$$\mathbf{A}_a = P_0(-\cos \psi \mathbf{r}_0 + \sin \psi \mathbf{t}_0). \quad (46)$$

Bei wirklichen Maschinen sind am Kurbelzapfen Reibkräfte vorhanden. Unter der Voraussetzung, daß für diese Reibkräfte das Coulomb'sche Gesetz gilt, ergibt sich mit dem Reibbeiwert μ und mit dem Halbmesser ϱ des Zapfens ein wirksames Reibmoment von:

$$M = -P\mu\varrho. \quad (47)$$

Die Elementararbeit dieses Momentes errechnet sich aus der Gleichung

$$dA_b = M d\psi = -P\mu\varrho d\psi = \lambda d\varphi. \quad (48)$$

Für die zwei skalaren Größen λ und φ finden wir:

$$\lambda_b = M = -P\mu\varrho, \quad (49)$$

$$\varphi_b = \psi. \quad (50)$$

Die Gradienten sind:

$$\text{grad } \lambda_b = -\mu\varrho \left\{ \frac{\partial P}{\partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \psi} \mathbf{t}_0 \right\}, \quad (51)$$

$$\text{grad } \varphi_b = \frac{1}{r} \mathbf{t}_0. \quad (52)$$

Der Vektor dieses Feldes ist somit:

$$\mathbf{A}_b = \lambda_b \text{ grad } \varphi_b = -\frac{P\mu\varrho}{r} \mathbf{t}_0. \quad (53)$$

Für den räumlichen Rotor findet man:

$$\text{rot } \mathbf{A}_b = [\text{grad } \lambda_b \text{ grad } \varphi_b] = -\frac{\mu\varrho}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \mathbf{z}_0. \quad (54)$$

Mit $P = P_0 = \text{konst.}$ wird dieses Feld auch wirbelfrei.

Wir setzen also:

$$\mathbf{A}_b = -\frac{P_0 \mu\varrho}{r} \mathbf{t}_0. \quad (55)$$

Der Vektor des Gesamtfeldes ergibt sich aus Gl. (46) und (55) zu:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_b = P_0 \left\{ -\cos \psi \mathbf{r}_0 + \left(\sin \psi - \frac{\mu Q}{r} \right) \mathbf{t}_0 \right\}. \quad (56)$$

Der Anschaulichkeit halber ist dieser Vektor im Bild 3 dargestellt. Wegen des negativen Vorzeichens in Gl. (47) weist die Komponente \mathbf{A}_b gegen \mathbf{t}_0 . Da die zwei Teilfelder \mathbf{A}_a und \mathbf{A}_b wirbelfrei sind, ist das resultierende Feld \mathbf{A} auch

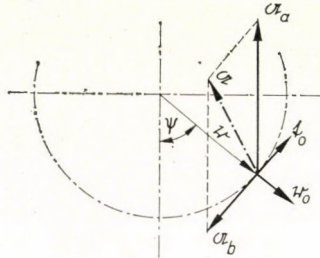


Bild 3

wirbelfrei. Somit muß es möglich sein, den Vektor \mathbf{A} als Gradienten des Potentials Φ darzustellen:

$$\mathbf{A} = \text{grad } \Phi. \quad (57)$$

Dann ist aber:

$$\Phi - \Phi_1 = \int_{r_1}^r \text{dr grad } \Phi = \int_{r_1}^r \text{dr} \cdot \mathbf{A}. \quad (58)$$

Nach Einsetzen von Gl. (56) in Gl. (58) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Phi - \Phi_1 &= P_0 \int_{r_1}^r (-\cos \psi_1) \text{dr} + P_0 \int_{\psi_1}^{\psi} r \left(\sin \psi - \frac{\mu Q}{r} \right) \text{d}\psi = \\ &= -P_0 \cos \psi_1 (r - r_1) + P_0 r \left[-\cos \psi - \frac{\mu Q}{r} \psi \right]_{\psi_1}^{\psi}. \end{aligned} \quad (59)$$

Es ist also:

$$\Phi = P_0 \{ r_1 \cos \psi_1 - r \cos \psi - \mu Q (\psi - \psi_1) \} + \Phi_1 \quad (60)$$

wobei Φ_1 das Potential im Punkt $Q_1(r_1, \psi_1)$ bezeichnet, das frei zu wählen ist. Wählen wir z. B.

$$\psi_1 = 0, \quad r_1 = R, \quad \Phi_1 = 0, \quad (61)$$

dann erhalten wir für die Gleichung der Äquipotentiallinien den Zusammen-

hang:

$$r = \frac{R - \frac{\Phi}{P_0} - \mu_0 \psi}{\cos \psi}, \quad (62)$$

wobei für eine Linie $\Phi = \text{konst.}$ zu setzen ist.

Führen wir noch die Substitutionen

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{R} &= \beta \\ \frac{\Phi}{P_0 R} &= \alpha \end{aligned} \quad (63)$$

ein, so findet man die für die zeichnerische Darstellung bequeme Gleichung:

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \alpha - \beta \psi}{\cos \psi}, \quad (64)$$

wobei jetzt also α zu variieren ist. Im Bild 4. sind die Äquipotentiallinien für $\beta = 6/5\pi$ und für den Potentialsprung $\Delta\Phi = \Delta\alpha P_0 R = 0,1 P_0 R$ dargestellt.

Die Konstruktion der Linien wird sehr einfach, wenn man zwei wichtige Eigenschaften der Kurvenschar vor Augen hält. :

a) Auf einer Geraden $\psi = \text{konst.}$ wird keine Reiarbeit geleistet, da keine relative Verdrehung zwischen Pleuelstange und Kurbelzapfen stattfindet. Aus Gl. (64) folgt:

$$\Delta r = - \frac{R}{\cos \psi} \Delta\alpha = - \frac{\Delta\Phi}{P_0 \cos \psi}. \quad (65)$$

Der Abstand der Äquipotentiallinien in Richtung der Radien ist mit dem Potentialsprung proportional.

b) Auf einer Geraden $r \cos \psi = \text{konst.}$ leistet die Kraft an der Pleuelstange keine Arbeit, da keine Verschiebung in Richtung dieser Kraft stattfindet. Aus Gl. (64) folgt für solche Geraden:

$$\Delta\psi = - \frac{\Delta\alpha}{\beta} = - \frac{\Delta\Phi}{\mu_0 P_0}. \quad (66)$$

Die Potentialänderung entlang einer waagerechten Geraden ist also der Änderung des Azimutwinkels ψ proportional. Aufgrund dieser zwei Gesetzmäßigkeiten kann man ein bequemes Netz der zweierlei Geradenscharen mit festem Potentialsprung konstruieren, wobei die Netzpunkte jeweils auf einer Äqui-

potentiallinie liegen. Durch sinngemäßes Verbinden erhält man die Schar der Äquipotentiallinien.

In einem solchen Felde entlang einer geschlossenen Kurve ist keine Arbeitsleistung möglich. Lassen wir z. B. die geschlossene Kurve K ganz dicht an einen die physikalisch mögliche Bewegung des Zapfenmittelpunktes darstellenden offenen Kreisbogen K' anschmiegen, den Zapfen also eine hin- und herpendelnde Bewegung ausführen, erhalten wir in diesem Felde keine Arbeit,

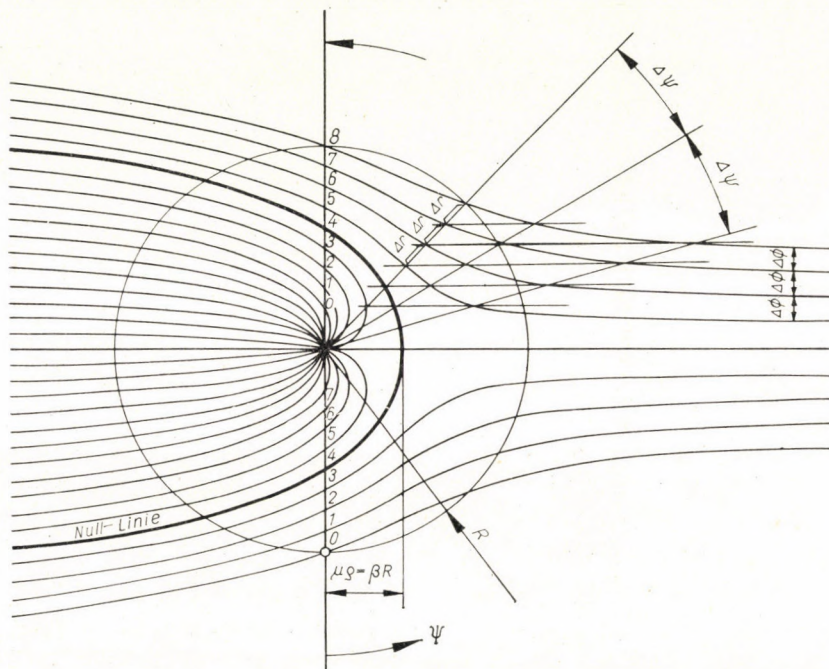


Bild 4

soweit das Feld auf der durch die Kurve K berandeten Fläche stetig ist. Nun weiß man aber, daß bei der hin- und herpendelnden Bewegung eines solchen verspannten Mechanismus Arbeit geleistet wird, u. zw. in der Höhe der entstehenden Reibverluste. Daraus muß man folgern, daß das Feld auf der die Kurve K' enthaltenden Fläche unstetig ist, daß also hier der Feldvektor eine sprunghafte Änderung erleidet. Die sprunghafte Änderung des Feldvektors findet man bei Reibvorgängen sehr leicht, indem man bedenkt, daß die Richtung der natürlichen Reibkraft immer entgegen dem Vektor der relativen Verschiebung zeigt. Somit — wenn wir für den Hingang den Vektor $\mathbf{A}_{b2} = \mathbf{A}_b$ laut Gl. (55) gelten lassen — ist beim Rückgang der entgegengesetzte Vektor

$$\mathbf{A}_{b1} = + \frac{P_0 \mu Q}{r} \mathbf{t}_0 \quad (67)$$

vorhanden. Das Gesamtfeld ist also für den Hingang mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2$ laut Gl. (56) für den Rückgang mit

$$\mathbf{A}_1 = P_0 \left\{ -\cos \psi \mathbf{r}_0 + \left(\sin \psi + \frac{\mu Q}{r} \right) \mathbf{t}_0 \right\} \quad (68)$$

gegeben. Der Sprung des Vektors an der Sprungfläche beträgt somit:

$$\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 = -2 P_0 \frac{\mu Q}{r} \mathbf{t}_0 \quad (69)$$

und für die geleistete Arbeit erhält man aus Gl. (13):

$$\begin{aligned} \oint_K d\mathbf{r}\mathbf{A} &= \int_{K'} d\mathbf{r}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = -2 P_0 \mu Q \int_{K'} \frac{\mathbf{t}_0}{r} d\psi \mathbf{t}_0 = -2 P_0 \mu Q \int_0^{\psi_0} d\psi = \\ &= -2 P_0 \mu Q \psi_0 = M 2 \psi_0, \end{aligned} \quad (70)$$

Obige Ausführungen lassen sich verallgemeinern: In jedem Vektorfeld, dessen Feldvektor eine von Reibung herrührende Komponente hat, kann jede mit dieser Komponente parallele Verschiebung als Sprungfläche im Feld angesehen werden. Daraus folgt weiterhin, daß jede physikalisch mögliche Bewegungslinie eines Maschinenelementes — soweit Reibung vorhanden ist — auf einer Sprungfläche des Feldvektors liegt, da jede physikalisch mögliche Bewegung parallel zur Reibkraft ist. In unserem Beispiel sind also alle konzentrischen Kreiszyylinder mit der Achse z mögliche Sprungflächen im Feld.

Wie früher gezeigt wurde, ist jede Sprungfläche eine Wirbelschicht. Der Flächenrotor errechnet sich in unserem Beispiel zu:

$$\text{Rot } \mathbf{A} = [\mathbf{u}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)] = \left[\mathbf{r}_0 \left(-2 P_0 \frac{\mu Q}{r} \mathbf{t}_0 \right) \right] = -2 P_0 \frac{\mu Q}{r} \mathbf{z}_0. \quad (71)$$

Ein Kreisbogen ist also gleichmäßig mit Wirbeln belegt. Erst durch Vorhandensein bzw. Zustandekommen dieser Wirbel ist eine Energieübertragung möglich.

Für eine geschlossene Kurve, hier für einen um den Anfangspunkt O gezogenen, geschlossenen Kreis, erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \text{Rot } \mathbf{A} &= [\mathbf{u}(\mathbf{A} - 0)] = \left[\mathbf{r}_0, P_0 \left\{ -\cos \psi \mathbf{r}_0 + \left(\sin \psi - \frac{\mu Q}{r} \right) \mathbf{t}_0 \right\} \right] = \\ &= P_0 \left(\sin \psi - \frac{\mu Q}{r} \right) \mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (72)$$

die geleistete Arbeit aus Gl. (20) zu:

$$\begin{aligned} \oint_{K \rightarrow K'} \mathbf{dr} \mathbf{A} &= \oint_{K'} \mathbf{dr} [\text{Rot } \mathbf{A}, \mathbf{u}] = \oint_{K'} \mathbf{dr} \left[P_0 \left(\sin \psi - \frac{\mu Q}{r} \right) \mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0 \right] = \\ &= \int_0^{2\pi} r d\psi \mathbf{t}_0 P_0 \left(\sin \psi - \frac{\mu Q}{r} \right) \mathbf{t}_0 = P_0 r \int_0^{2\pi} \sin \psi d\psi - \\ &- P_0 \mu Q \int_0^{2\pi} d\psi = -P_0 \mu Q 2\pi = M 2\pi. \end{aligned} \quad (73)$$

Anhand des Bildes 4 soll nun noch eine lehrreiche Analogie kurz besprochen werden. Die im Bild 4 gezeichneten Äquipotentiallinien unseres mechanischen Problems könnten auch die Stromlinien einer aus der Hydrodynamik wohlbekannten Strömung sein. Diese Ähnlichkeit ist nicht nur oberflächlich: Durch die Superposition einer horizontalen parallelen Potentialströmung und einer Quellströmung im Anfangspunkt des Koordinatensystems erhält man bei geeigneter Wahl der Konstanten die gezeichneten Linien. Die zu diesen Linien orthogonale Kurvenschar stellt die Kraftlinien des Feldes dar. Sie sind die Superposition des homogenen Feldes \mathbf{A}_a [Gl. (46)] und des Potentialfeldes \mathbf{A}_b [Gl. (55)], dem in der Hydromechanik bekanntlich ein Potentialwirbel — auch Stabwirbel genannt — entspricht. Die sogenannte Null-Linie, die bei dem Strömungsbild die Flüssigkeit der Quelle von der der Potentialströmung trennt, grenzt in unserem mechanischen Beispiel die Potentiale ab, die der singuläre Punkt 0 haben kann. Diese Linie ist die einzige Äquipotentiallinie, die — nur die rechts liegende Halbebene betrachtet — ganz im Endlichen liegt und somit die einzig mögliche wirkliche Bahn darstellt, die ohne Arbeitsleistung durch die Symmetrieachse des Potentialfeldes in der Halbebene führt.

Auch das Analogon der Sprungflächen läßt sich in der Mechanik der Flüssigkeit auffinden und wird dort als eine Wirbelschicht, an der die Strömungsgeschwindigkeit eine sprunghafte Änderung aufweist, erklärt [3]. So ersetzt man z. B. in der Aeromechanik den Tragflügel bzw. sein Skelett bei dünnen Profilen durch eine gebundene Wirbelschicht, deren Zirkulationsdichte so gewählt wird, daß die resultierende Geschwindigkeit aus der ungestörten Anströmung und den Geschwindigkeiten der flächenhaften Wirbelbelegung an jeder Stelle in die Richtung der Skelett-Tangente fällt. Die durch die Skelettlinien gebildete Fläche ist eine offene Sprungfläche im Geschwindigkeitsfeld, während der Tragflügel selbst eine geschlossene Sprungfläche darstellt.

SCHRIFTTUM

1. MATZ, W.: Die Wirbelschicht als Energieübertragungsfläche. Springer 1958.
2. SPIELREIN, J.: Vektorrechnung. Wittwer 1926.
3. KAUFMANN, W.: Technische Hydro- und Aeromechanik. Zweite Auflage, Springer 1958.

ENERGY TRANSMISSION IN MECHANISMS

A. POÓCZA

SUMMARY

After a short review of the vectoranalytical bases of considerations on energetic phenomena, which in a continuous field are always connected with whirls, the transmission of energy in a discontinuous field is interpreted with the aid of plane whirls. Thus, it is shown that work is possible only in connection with whirls. The toothed wheel and the crank are used as examples for the practical calculation of plane whirls. Incidentally, some interesting hydrodynamical analogies are discussed.

TRANSMISSION D'ÉNERGIE DANS LES MÉCANISMES

A. POÓCZA

RÉSUMÉ

Après un bref exposé des bases de l'analyse vectorielle des phénomènes énergétiques, reliés dans les champs continus à des tourbillons, la transmission d'énergie dans le champ discontinu est interprétée à l'aide des tourbillons plans. L'auteur prouve ainsi qu'une production d'énergie n'est possible qu'en relation avec des tourbillons. La roue dentée et la bielle sont utilisées comme exemples pour le calcul pratique des rotors plans. Quelques analogies hydrodynamiques intéressantes sont également mentionnées par l'auteur.

ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ В МЕХАНИЗМАХ

A. ПООЦА

РЕЗЮМЕ

После краткого схематического изложения основ по векторному анализу энергетических процессов, в сплошном пространстве всегда зависящих с вихрями, дается объяснение энергопередачи в несплошных пространствах при помощи плоскостных вихрей. Таким образом можно показать, что выполнение работы возможно только в связи с вихрями. На примере зубчатого колеса и вращающего рычага автор практически вычисляет плоскостные роторы. В дополнение автор рассматривает несколько интересных гидродинамических аналогий.

ON A QUEUING PROBLEM IN RANDOM ACCESS COMMUNICATION

S. CSIBI

CAND. OF TECH. SC.

TELECOMMUNICATION RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received March 3, 1965]

Congestion in a particular random access multiplex situation, proposed by Ács, is examined, using position-modulated code-words. Quantities characterizing performance deterioration are estimated, assuming a Markovian queuing rule. Numerical results are presented for two particular traffic situations.

I. Introduction

When several talkers are served by a common communication channel, bandwidth may be saved by utilizing the partial activity of the talkers.

Multiplex systems exploiting this possibility are called random access systems [3], since access to the common channel is governed by a property, viz. activity, varying at random.

In random access systems however we run the risk of getting the system congested, and therefore congestion has to be carefully studied in any of these situations.

The purpose of the present paper is to investigate a particular random access situation. The procedure under consideration, proposed by Ács [1], may be specified as follows:

We transmit messages from several talkers simultaneously, by means of a sequence of pulses, arranged in time-frames and code-words as in usual pulse-code-modulation (PCM).

However, the use of structure and position of the code-words is interchanged, unlike in usual PCM, viz. position bears information, the individual-messages being distinguished by code-word-structure. Particularly the code-words are position-modulated throughout the entire time-frame.

Provided the samples drawn from two or more talkers happen to be equal at the same sampling instant — within resolution — congestion occurs and either the loss or a delayed transit of some code-words has to be tolerated.

In the course of this procedure we may, of course, readily prevent passive sources from sending code-words through the channel.

The afore-mentioned principles leave still some ambiguity concerning the performance of the system. Particularly, rules on transit, loss and delay of the code-words have to be defined.

We shall specify, in the sequel, queuing rules selected chiefly for a simple comprehensive treatment. Note however that the queuing procedure to be considered does not represent an optimum as far as either instrumentation or performance characteristics are concerned.

2. Posing the problem

Assume that the code-words from the individual talkers may only be inserted at discrete instants into the time-frame, viz. at

$$0, \tau, \dots, \mu\tau, \dots, \varrho\tau, \quad (1)$$

where τ denotes the length of a code-word, 0 the first, $\varrho\tau$ the last possible position within a frame. [Provided no code-word is delayed into a subsequent frame, the inspection of a single frame, according to (1) suffices.]

Note that the assuming of discrete time is a restriction fairly irrelevant, provided τ is only a small fraction of the frame-period.

Suppose that incoming code-words are directed according to the rules as follows:

When only a single code-word arrives at $\mu\tau$, it is immediately inserted into the frame.

Provided j arrivals occur at $\mu\tau$, these are rank-ordered randomly, viz. any one may obtain the first, second, . . . j th place with equal probability. The particular code-word having the first place is inserted immediately into the frame, those occupying the 2nd through $(s - i + 1)$ -th places are queued up, any additional code-word being lost. Note that i denotes the number of the code-words queued up just preceding $\mu\tau$ and s is the maximum possible length of the queue:

$$0 \leq i \leq s.$$

The code-words selected for waiting are queued up according to their rank-order, subsequent to those already in the queue. If there is no new arrival at $\mu\tau$ the word having the first place in the queue is inserted into the frame.

We shall describe, in the sequel, the state of the system in terms of two series, viz. by ξ_μ and η_μ , ξ_μ denoting the number of the code-words queued up just after $\mu\tau$ —for instance at $(\mu + \frac{1}{2})\tau$ — and η_μ the number of the words arriving at $\mu\tau$.

Suppose that the possible states are

$$\begin{aligned} \eta_\mu &= 0, 1, \dots, N, \\ \xi_\mu &= 0, 1, \dots, s, \end{aligned}$$

where N denotes the number of sources.

Note that $\{\eta_\mu\}$ is a series of independent random variables and, therefore $\{\xi_\mu\}$ is a finite Markov chain.

We are, of course, interested in $P(\eta_\mu = j)$, the probability that exactly j code-words arrive at $\mu\tau$.

In real life this probability depends, of course, on the particular position μ under consideration. As a matter of fact the probability distribution of the speech samples is non-uniform, and can only partly be equalized by expansion (i. e. specifying the voltage vs. position curve properly), unless undue quantizing-distortion or tolerance-sensitivity is not admitted.

For simplicity, however, we shall substitute the real-life distribution by a uniform distribution defined over a subinterval $[\mu_1, \mu_2]$ of the frame.

Particularly let B_μ denote the event that a code-word arrives from an arbitrary active source F_i at $\mu\tau$, and assume

$$P(B_\mu) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\mu_2 - \mu_1}, & \text{for } \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2)$$

where $(\mu_2 - \mu_1)^{-1}$ is the lowest possible value dominating the maximum of the real-life probability density function. (From well known speech statistics [2] and a proper expansion curve we have: $\varrho/(\mu_2 - \mu_1) \simeq 1.5$ (see Sec. VI). α is the probability that a source is active.

For j arrivals we simply assume that

$$P(\eta_\mu = j) \simeq \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad (3)$$

where

$$\lambda = N\alpha/(\mu_2 - \mu_1).$$

In order to construct a situation definitely worse than the real-life situation, we shall assume that (3) holds not only within $[\mu_1, \mu_2]$ but throughout the entire frame.

Next let us neglect details depending on frame length, build-up conditions, etc. In order to do this we first extend the domain of $\{\xi_\mu\}$ and $\{\eta_\mu\}$ from (1) to

$$-\vartheta\tau, \dots, 0, \dots, \mu\tau, \dots, \varrho\tau, \quad (4)$$

assuming (3) to hold everywhere. Then we take: $\vartheta \rightarrow \infty$.

We shall be concerned in the sequel only with this asymptotic situation. Following this procedure we obviously examine the transfer of any code-word under worse conditions than faced in real-life situation.

As a matter of fact, the model to be considered enables us to select promising performance conditions.

We shall describe the deterioration due to loss and delay, respectively in terms of the following attributes:

Freeze-out: K ,
 mistake: T_w ,
 remainder: M_w .

We call *freeze-out* the probability, that a code-word arriving from source F_i is lost immediately.

We call *remainder* the probability that a code-word arriving from F_i stays for a time exceeding $w\tau$ in the queue.

Finally, we call *mistake* the r.m.s. of the number of steps by which code-words in the queue are delayed, provided the transit of the code-words queued up for a time longer than $w\tau$ is prohibited.

III. Freeze-out

Let us consider the transition probabilities, concerning ξ_μ . Following from the rules defined in Sec. II, we have (see Fig. 1):

$$a_{ij} = P(\xi_\mu = j | \xi_{\mu-1} = i) = \begin{cases} 0, & \text{for } j - i < -1 \\ P(\eta=0) + P(\eta=1), & \text{for } j = i = 0, \\ & j < s \\ P(\eta = j - i + 1), & \text{for } j + i > 0, \\ & j - i \geq -1, \\ & j < s, \\ \sum_{l=i}^N P(\eta = l - i + 1), & \text{for } j = s. \end{cases} \quad (5)$$

Let A denote the event that a code-word arriving from F_i is immediately lost, and $C_\mu^{(j)}$ the event that j arrivals occur at $\mu\tau$.

The probability that a code-word arriving from F_i is immediately lost, reads

$$P(A) = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_2} P(A|B_\mu). \quad (6)$$

Realizing that no more than N code-words may occur

$$\begin{aligned}
 P(A|B_\mu) &= \sum_{j=1}^N P(A|B_\mu C_\mu^{(j)}) \cdot P(C_\mu^{(j)}|B_\mu), \\
 P(C_\mu^{(j)}|B_\mu) &= P(\eta_\mu = j - 1) \simeq \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda}, \\
 P(A|B_\mu \cdot C_\mu^{(j)}) &= \sum_{i=0}^s P(A|B_\mu \cdot C_\mu^{(j)} \cdot \{\xi_{\mu-1} = i\}) \cdot \\
 &\quad \cdot P(\{\xi_{\mu-1} = i\} | B_\mu C_\mu^{(j)}).
 \end{aligned}$$

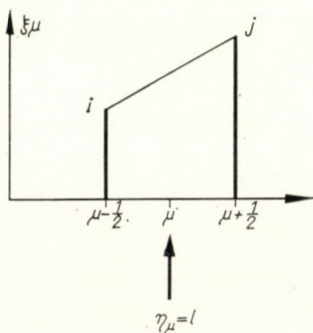


Fig. 1

From the rules on rank-ordering and queuing, defined in Sec. II, it readily follows that

$$P(A|B_\mu \cdot C_\mu^{(j)} \cdot \{\xi_{\mu-1} = i\}) = \begin{cases} \frac{j+i-s-1}{j} & \text{for } j+i-s-1 > 0, \\ 0 & \text{for } j+i-s-1 \leq 0. \end{cases}$$

Considering the temporary succession of the positions labelled by $\mu - 1$ and μ we obtain

$$P(\{\xi_{\mu-1} = i\} | B_\mu \cdot C_\mu^{(j)}) = P(\{\xi_{\mu-1} = i\}).$$

Note that the transitional probabilities of $\{\xi_\mu\}$ meet the conditions of Markov's limit theorem. Thus for $\vartheta \rightarrow \infty$ the following limit distribution exists:

$$\Pi_i = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} P(\xi_{\mu-1} = i), \tag{7}$$

and the limit distribution is given by

$$\Pi_i = \sum_{j=0}^s \Pi_j \cdot P(\xi_\mu = i | \xi_{\mu-1} = j).$$

Here $i = \overline{0, s}$, $j = \overline{0, s}$, and the transitional probabilities follow from (5) and (3).

Particularly, referring to (6) and (7), the freeze-out reads as follows:

$$K \simeq \sum_{i=0}^s \Pi_i \left[\sum_{k=s-i+1}^{N-1} \left(\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \right) \frac{k-(s-i)}{k+1} \right]. \quad (8)$$

IV. Mistake

Let D_ν be the event that a code-word arriving from F_i stands in the queue throughout exactly ν steps.

The mistake, i. e. the mean-squared value of the number of steps by which code-words in the queue are delayed, reads

$$M\nu^2 = \sum_{\nu=1}^w \nu^2 P(D_\nu),$$

where

$$P(D_\nu) = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_2} P(D_\nu | B_\mu). \quad (9)$$

Let E_u be the event that a code-word from F_i is queued up exactly at the u th place. Then

$$P(D_\nu | B_\mu) = \sum_{u=1}^s P(D_\nu | E_u B_\mu) \cdot P(E_u | B_\mu). \quad (10)$$

It follows from the rules in Sec. II that a code-word queued up at $\mu\tau$ exactly at the u th place will be inserted at $(\mu + \nu)\tau$ into the frame if and only if there are exactly $(u - 1)$ -times no new arrivals during the $\nu - 1$ steps subsequent to $\mu\tau$, and no additional code-word arrives at $(\mu + \nu)\tau$, provided $\nu \geq u$. Thus

$$P(D_\nu | E_u B_\mu) \simeq \binom{\nu-1}{u-1} (1 - e^{-\lambda})^{u-1} e^{-\lambda\nu}. \quad (11)$$

The probability that a code-word arriving from F_i at $\mu\tau$ is queued up exactly at the u th place reads

$$P(E_u | B_\mu) = \sum_{j=2}^N P(E_u | C_\mu^{(j)} B_\mu) P(C_\mu^{(j)} | B_\mu), \quad (12)$$

where

$$P(E_u | C_\mu^{(j)} B_\mu) = \sum_{i=0}^{-1} P(E_u | C_\mu^{(j)} B_\mu \cdot \{\xi_{\mu-1} = i\}) \cdot P(\{\xi_{\mu-1} = i\} | C_\mu^{(j)} B_\mu),$$

and

$$P(\{\xi_{\mu-1} = i\} | C_{\mu}^{(j)} B_{\mu}) = P(\{\xi_{\mu-1} = i\}).$$

Consider next the conditional probability that a code-word arriving from F_i at $\mu\tau$ is queued up exactly at the u th place, provided j arrivals occur at $\mu\tau$ and the length of the queue at $[\mu - (1/2)]\tau$ is just equal to i .

Following from the rules in Sec. II, a code-word from F_i may only be queued up if $i \leq s - 1$, and exclusively the places, numbered by

$$u = i + 1, \dots, s$$

along the queue, may be occupied.

Referring to the rank-ordering defined in Sec. II, we have

$$P(E_u | C_{\mu}^{(j)} \cdot B_{\mu} \cdot \{\xi_{\mu-1} = i\}) = \begin{cases} \frac{1}{j}, & \text{for } u = i + 1, \dots, s, \\ j & i \leq s - 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (13)$$

For $\vartheta \rightarrow \infty$

$$P(\{\xi_{\mu-1} = i\}) \approx \Pi_i. \quad (14)$$

The probability that a code-word arriving from F_i stays in the queue throughout exactly ν steps is, from (9)–(14):

$$P_{\nu} \simeq \frac{1}{\lambda} \sum_{j=2}^N \sum_{i=0}^{s-1} \Pi_i \sum_{u=i+1}^{\omega} \binom{\nu-1}{u-1} (1 - e^{-\lambda})^{\nu-u} \cdot e^{-\lambda u} \left(\frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \right), \quad (15)$$

where $\omega = \min(i + j - 1, s, \nu)$ and $P_{\nu} = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} P(D_{\nu})$.

Note that the mistake is

$$T_w = \left[\sum_{\nu=1}^w \nu^2 P_{\nu} \right]^{1/2}. \quad (16)$$

V. Remainder

The remainder, i.e. the probability that a code-word from F_i stands in the queue for a time exceeding $w\tau$, reads

$$M_w = \sum_{\nu=w+1}^{\infty} P_{\nu}.$$

Let G be the event that a code-word arriving from F_i at $\mu\tau$ is transferred without any delay.

From the rules defined in Sec. II, we obtain

$$P(G) = \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_2} P(B_\mu) \left\{ P(C_\mu^{(1)}) + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} P(C_\mu^{(j)}) \right\} \simeq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda},$$

provided (3) approximately holds.

G, D_1, D_2, \dots represent a complete system of events. Thus, the remainder may be written as follows

$$M_w = 1 - P(G) - K - \sum_{v=1}^w P_v. \quad (17)$$

Note that if the transfer of the code-words queued up longer than $w\tau$ is prohibited, the freeze-out as well as the remainder cause a sample loss.

Let us call *loss* the probability that a code-word arriving from F_i is lost. The loss reads

$$L = K + M_w. \quad (18)$$

VI. Numerical results

We shall confine ourselves now to cases A and B , specified in Table 1.

Table 1
Cases to be considered

Case	A	B	
λ	0,45	0,75	
$\frac{n}{\varrho} = \frac{\lambda}{1,5}$	0,3	0,5	
$\frac{N}{\varrho}$	$\alpha = 1/4$	1,2	2
	$\alpha = 1/40$	12	20

For convenience we have also included the load parameter n/ϱ and the economy parameter N/ϱ into Table 1, assuming particularly that

$$(\mu_2 - \mu_1)^{-1} = 1,5 \varrho^{-1}, \quad (19)$$

and

$$\alpha = \begin{cases} 1/4 \\ 1/40 \end{cases} \quad (20)$$

Here $n = \alpha N$ denotes the average number of active sources.

Formula (19) holds, e. g., for a probability distribution-function according to HOLBROOK and DIXON [2], a maximum-to-r.m.s. ratio of 12 dB, and the particular weight function:

$$y = \frac{4}{1 - e^{-5}} [e^{-5(1-x)} - e^{-5}]. \quad (21)$$

Here x denotes the relative position within the time-frame, y the ratio of the instantaneous-to-r.m.s. voltage. $\rho\tau/2$ is attached to $x = 0$ and $\rho\tau$ to $x = 1$.

Note that the quantization distortion may be kept within acceptable limits under these conditions.

$\alpha = 1/4$ characterizes a trunk situation supposing that all sources are busy (however pauses are still included), $\alpha = 1/40$ refers to a situation when individual subscribers are served, viz. only 10 percent of the total number of sources is busy.

Data on direct transfer, loss and mistake are given in Tables 2 and 3, and Figure 2 for $s = 4$.

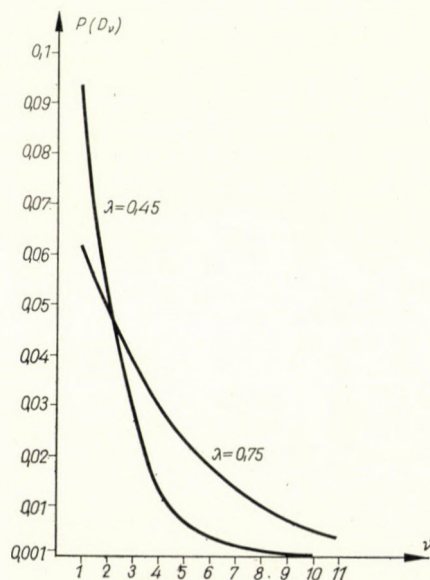


Fig. 2

Table 2
Freeze-out and direct transfer

λ	K	$P(G)$
0,45	0,0006	0,805
0,75	0,018	0,704

Table 3
Delayed transfer

ν	λ			
	0,45		0,75	
	P_ν	T_ν	P_ν	T_ν
1	0,092	0,30	0,061	0,25
2	0,049	0,53	0,050	0,51
3	0,026	0,72	0,040	0,79
4	0,013	0,85	0,032	1,1
5	0,0069	0,95	0,026	1,3
6	0,0035	1,0	0,020	1,6
7	0,0018	1,0	0,015	1,8
8	0,00090	—	0,011	—
9	0,00044	—	0,0075	—
10	0,00021	—	0,0052	—
11	0,00012	—	0,0035	—

The mistake itself is only of relevance if delay means ambiguity in code-word-position, viz. no bits are added to the code-words for delay-identification.

As far as mistake is concerned, we may refer to well known data concerning particularly r.m.s. quantization-distortion to step-height ratio, taking for convenience, equidistant and equiprobable quantizing levels. This figure reads: $T_0 = 12^{-1/2} \simeq 0,3$.

Note that if no means for delay identification are introduced the value of ρ has to be about T_w/T_0 -times higher than the minimum value just meeting quantization-distortion objectives.

Data in two specific situations are illustrated in Table 4, assuming that the transit of code-words waiting for more than w steps is prohibited.

In particular applications, of course, one is also interested in the bandwidth requirements. This is defined by ρ and the code-word-length (neglecting, for the moment, questions of minor interest, e. g. space reserved at the edge of the frame, etc.).

The bandwidth compression relative to a usual PCM situation, conveying N speech channels at the same time and using exactly the same number of bits per code-word as the system under consideration, is just N/ρ .

However the code-word-length depends on the total number of the voice channels to be distinguished. If this number is low, additional bits are needed for delay identification. Anyhow the code-words have to be longer than in usual PCM. Thus the gain given by N/ρ is reduced.

If, for instance, a code-word consists of nine bits in contrast to the seven bits needed in an equivalent usual-PCM situation the gain given by N/ρ is

Table 4
Particular situations

Case	<i>A</i>	<i>B</i>
w	7	7
L	0,003	0,07
T_w/T_o	3,3	6,0

reduced by a factor of 1,3. This is to be taken into account when comparing the procedure under consideration with competing possibilities in particular design situations.

*

The author is indebted to Mr. E. ÁCS, Doctor of techn. sc. for posing the underlying problem, to Mr. O. GULYÁS for reading the manuscript and preparing work for sec. VI, and to Miss E. PÉTER for assisting in computations.

REFERENCES

1. ÁCS E.: Hírközlés címet és tartalmat, valamint csak címet hordozó kódokkal (Communication by means of code-words carrying content plus address and address only). *Híradástechnika* (1964), No. 8.
2. HOLBROOK, B. D.—DIXON, J. T.: Load Rating Theory for Multichannel Amplifiers. *The Bell System Technical Journal* (1939), October.
3. DAWSON, Ch. H.: An Introduction to Random-Access, Discrete-Address Systems. *IEEE International Convention Record* 1964.

ÜBER EIN WARTESCHLANGEPROBLEM BEI NACHRICHTENSYSTEMEN MIT ZUFÄLLIGEM ZUGANG

S. CSIBI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Stauung im Falle eines Multiplexverfahrens mit zufälligem Zugang wird untersucht. Der Gegenstand der Untersuchung ist die Pulsphasenmodulation von Kodegruppen, gemäß einem Vorschlag von Ács. Eine Abschätzung der die Verschlechterung beschreibenden Größen wird angegeben, unter Voraussetzung von Markovschen Warteregeln. Zahlenergebnisse für zweierlei Verkehrszustände werden mitgeteilt.

UN PROBLÈME DE QUEUE EN TÉLÉCOMMUNICATION AVEC ACCÈS ALÉATOIRE

S. CSIBI

RÉSUMÉ

L'auteur étudie l'accumulation dans le cas d'un procédé multiplex ayant une communication aléatoire. L'étude a pour objet la modulation de position des groupes de codes, traitée suivant la proposition d'Ács [1]. Une évaluation des quantités décrivant la détérioration du fonctionnement est donnée, dans la présomption des règles d'alignement en queue de Markov. L'auteur donne des résultats numériques pour deux états de trafic.

О ПРОБЛЕМЕ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ СО СЛУЧАЙНЫМ ДОСТУПОМ

Ш. ЧИБИ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается скопление в случае процесса уплотнения со случайным соединением. Предметом изучения является импульснофазовая модуляция кодовых групп в соответствии с предложением Ач. Оцениваются величины, описывающие ухудшение работы, предполагая правила очереди Маркова. Даются численные результаты для двух видов состояния обмена.

SOME THEORETICAL PROBLEMS OF RADIOISOTOPE SCANNING

GY. EMBER and I. HALÁSZ
GAMMA OPTICAL WORKS, BUDAPEST

[Manuscript received June 4, 1965]

The paper based on the simple counting principle defines the minima of the observable activity differences by statistical methods in the scanning technics. The authors compute recording error caused by detector movement. They consider, that observation decreases about the calculated value which was computed by the statistical method for the logarithmic sensitivity of eyes. The authors examined the generally used contrast enhancement in the scanning record and they conclude from them, that they do not essentially increase the observation, but cause a loss of information without exception. They give the theoretically best gradation curve and prove it by scanning image which was taken by a thought experiment.

I. Introduction

The generally used device of medical scanning diagnostic is the medical scanner. Therefore we should like to examine a few problems connected with the perfect picture transmission. The sensitivity and effect on the visualization of intensity differences of the various collimator types has been the subject of several papers, both from the theoretical and the experimental point of view, and therefore, it is not intended to deal with this problem in this paper [1, 2]. In the following examinations, the detector and the shielding collimator are considered as given. It is equally assumed that — photons will not pass through the collimator wall to reach the detector and the scattering occurring on the inner wall of the collimator will be left out of consideration.

Let us assume that the detector will detect two areas, one after the other, the activities of which are such that the detector measures an average count of \bar{n}_1 , resp. \bar{n}_2 (Fig. 1).

The distribution being of the Poisson type, a standard deviation of $\sqrt{\bar{n}_1}$ may occur on measuring n_1 (or $\sqrt{\bar{n}_2}$ on measuring n_2). It is quite obvious that the activity difference of the two areas can be discriminated with a given probability by the measurement only if the difference between average values \bar{n}_1 and \bar{n}_2 is so great that the two areas of standard deviation do not overlap each other.

Thus we may write

$$\bar{n}_2 - \bar{n}_1 \geq h(\sqrt{\bar{n}_1} + \sqrt{\bar{n}_2}), \quad (1a)$$

where h is a factor expressing the reliability of the detection. As a consequence of the basic laws for the mathematical statistics the real conditions are expressed more truly by the standard deviation value $\sqrt{n_1 + n_2}$, instead of standard deviation $\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2}$ and therefore

$$\bar{n}_2 - \bar{n}_1 \geq h \sqrt{n_1 + n_2}. \quad (1b)$$

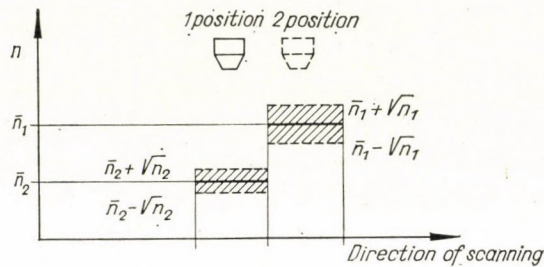


Fig. 1

The above formula holds good in V per cent of the measurements, depending on the value of h . If a reliability of 99 per cent is striven for, h assumes the value of 3. Based on the above, we define the reliability of the yielded information as true observation on the following

$$K = \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{n_1 + n_2}} \geq 3, \quad (2)$$

where n_1 is the count rate detected at the point in question, n_2 the administered count rate detected at the scanning element preceding this point immediately. If we assume that ratio n_2/n_1 being constant for a given recording, we might write on the base of (2)

$$K = \text{constant} \cdot \sqrt{n_2} \geq 3. \quad (3)$$

From equation (3) it is obvious that at a given ratio, the true observation of the hot, resp. cold area increases with the square root of the administered isotope quantity. The true observation so computed is valid only for the case of the counting, for the case when the detector is placed on points k_1, k_2, \dots, k_n and the counts arriving at every point "k" during time "T" are scaled.

II. Effect of scaling on the scan recording

When computing the true observation for the scan recording, where a detector passes continuously and at a uniform speed along a specified area, two further factors should also be considered.

For the most simple case, the counts appear after the scaling in the form of lines during the scintillation recording. This means that the lines are functions of the counting rates. The line thickness being, for technical reasons, finite, the number of lines to be introduced into a given area is also limited. A given area can be supplied only with limited, definite information. The problem can be solved by dividing the number of informations thus introduced. In this case, we are forced to complete the true observation with further factors.

Let us assume that the number of pulses arriving from the detector are divided by k , i.e. each k^{th} count is recorded.

When recording every k^{th} particle, the probability of recording a mistaken line is $(k - 1)/2k$ on two neighbouring areas still resolved by the collimator. The detector, namely, can store informations of any value from 0 up to $k - 1$ from the preceding area, depending on the instantaneous position of the detector head and so an older information of a value from 0 up to $k - 1$ may be added to the count detected on the new area. Thus we may draft our task as follows: let us examine, which is the probability that the sum of two informations, each within the range from 0 to $k - 1$, may yield a value exceeding k . It is quite obvious that this probability is $(k - 1)/2k$.

Consequently, the true observation is

$$K = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{t_1 + t_2 + (k - 1)/6k}} \geq 3 \quad (4)$$

at the areas corresponding to count rate n_1 , resp. n_2 , where the number of lines has been marked by t_1 and t_2 , $t = n/k$. k being the mentioned dividing factor.

The examination of the equation (4) is the following, that a ds distance originates for the dividing independently of it, what size is the resolution of collimator. The magnitude of this line section is, in case of homogeneous intensity distribution,

$$ds = v \frac{k}{\bar{n}}, \quad (5)$$

where k is the number of the divisions, v the translation speed of the detector, \bar{n} the expected value of the counts in the surroundings of point a . Namely, the resultant expected value of time interval between two particles is $1/\bar{n}$ and as the time intervals between the particles show an exponential distribution, their standard deviation is

$$\pm 1/\bar{n}. \quad (6)$$

From equation (5) it can be seen that the true observation decreases with the magnitude of the transmitted range and the maximum change of \bar{n} is understood as the information range.

If the distribution of the radiation is inhomogenous around point a , the surroundings of point a are separated into areas wherein the radiation

intensity is uniform. The expected values are determined individually for these areas, the resultant expected value being the sum of the expected values of the individual areas. The result can be generalized for any case of the local intensity distribution.

III. Effect of the logarithmic detection of the human eye on true observation

The other reason for the decreasing true observation can be found in the subjective human detection. Due to the great number of lines, the human eye will detect on the scanner images the density differences caused by the lines instead of the number of the lines. For further calculations aiming at the determination of the true observation it is required to express the counts in the error formula by the blackening observed in fact by the human eye.

If the area momentarily scanned by the collimator is d cm² and the area of a line f cm², then the blackening of the scanned area d , in case of lines t denoted by p is $p = tf/d$ per cent, since $n/k = t$. In this last expression, k denotes the number of the divisions, t the number of the lines, and n the counts recorded by the detector. Between the blackening of area d and the count rate the following relation can be set up:

$$p = \frac{nf}{kd} \cdot 100 \text{ per cent.} \quad (7)$$

Now we may already determine the condition of the true observation for the two neighbouring areas still resolved by the collimator. The detector moving at a uniform speed, the two neighbouring areas may overlap each other.

The geometrical dimensions of the collimator and of the detector being given, the difference of the recorded counts is determined by the length of the path section ds . This is the smallest section to be resolved where an intensity difference may still exist; ds denotes the uncertainty caused by the scaling defined by equation (5). To facilitate further calculations, it is assumed that the difference between the diameters of the two neighbouring areas examined is always greater than ds [cm].

The physicians and opticians knew the fact that the human eye detects the blackening logarithmically, because the stimulation must increase logarithmically, that the sense is able to increase by linear (by Weber—Fechner's law). The best agreement with practical conditions can be obtained by taking account of the logarithmic detection of the human eye in case of the detectability here defined. Thus true observation K must be put into the logarithmic system in order to obtain the subjective true observation K_s . Using equation (7), K_s

can be expressed as follows:

$$K_s = \frac{\log n_2 - \log n_1}{[\log n_2 - \log (n_2 - 3\sqrt{n_2})]^2 + [\log (n_1 + 3\sqrt{n_1}) - \log n_1]^2 + L} \geq 1, \quad (8)$$

L denotes the resolving ability of the human eye.

Before proceeding with the examination of the results here obtained, let us define the place where $n_2 = 0$. In the numerator of equation (8) there is $\log n_1 - \log n_2$; when $n_2 = 0$, then $\log n_2$, i.e. if the background is zero, it is seemingly the true observation which tends to infinite. To remove the apparent contradiction which has thus occurred, let us examine the physical contents of $\log n_2$; $n_2 = 0$ means that the blackening is 0. The blackening of the white paper, however, never corresponds to zero but to a definite numerical value. Thus, $\log 0$ has no physical contents. Agreement with experience is obtained when assuming that at $n_2 = 0$, $\log n_2 = c$, where c is a constant characteristic for the "blackness" of the paper.

By increasing the blackening, a limit will be reached where the human eye is unable to resolve the differences in the blackening, even independently of the Poisson error. From equation (7), the following features of the projection follow:

1. Due to the logarithmic detection of the human eye, the subjective detection is considerably lower than that obtained by the counting, at any value of n_1 and n_2 , where the detection may be estimated. As both n_1 and n_2 are considerably greater than the difference of the logarithm of 1, both are considerably less than the difference of the arguments. From equation (8) it is obvious that the true observation can be defined for the case of $n \geq 3$ only. The denominator of equation (8) decreases at a smaller rate than the numerator, even in the boundary case when equality exists in equation (8) for the true observation. The denominator would decrease at an identical rate with the nominator if the square root of the sum of the standard deviation were replaced by the sum of the standard deviation. As the square root extracted from the squared sum of the standard deviations is always less than the sum of the standard deviations, the decrease of the nominator is always smaller than that of the denominator, even in a limited case.

Thus, if the plotting of the distribution of the radioactive isotopes is done by means of lines, then, due to the recording, the true observation decreases at any number of lines.

2. In counting, the true observation increases with the square root of the isotope administered; in the present case, however K_s cannot be increased beyond any limit by the increase of the isotope quantity administered. From equation (8) it may be seen that by increasing the administered isotope quantity, eventually a limit is attained, due to the very nature of the logarithmic

curve, where the differences in the blackening become smaller than L , the resolving ability of the human eye. Thus at a certain value of the blackening, the human eye is unable to detect the differences of the blackening, independently of the standard deviation. If scaling is applied, the error resulting from the scaling increases, on the other hand, according to equations (4) and (5).

Consequently, the true observation increases by the increase of the isotope quantity administered up to a maximum value, and is followed, beyond this value, by a decrease.

3. Equation (8) further shows that after projection, the photons having originally a symmetrical standard deviation, due to the recording, will have an asymmetrical distribution. The error in the *negative sense* will show considerably greater values than toward the positive. In most cases, this is the cause of the mistaken negative "nodules" occurring in the scanner images.

4. It is profitable to examine equation (8) for the special case when the measuring error remains constant. This case is represented by Fig. 2 when the information transmission has been examined at constant measuring error for the case of warm "nodules" of a small diameter. In the figure it can be seen that, due to the logarithmic sensitivity of the human eye, the scanner images do not indicate the activity differences, but the logarithms of the activity differences. Thus heavily distorted warm, resp. cold "nodules" are obtained and quantitative differences in respect to the activities and magnitudes of the various cold and warm "nodules" cannot be established.

The projection of the "nodules" greatly depends on the activity of the surrounding body tissues and on the magnitude of "nodules".

IV. Conditions of the ideal projection

Based on equation (8), it is worthwhile to examine the question of the so-called background erase. The improvement of the detection in the scanner images is achieved by applying various electronic circuits to provide the recording for only above a certain count rate [4, 5]. Based on equation (8) it is obvious that in case of negative "nodules" the count rate cut off the background does not result in essential improvement. By the decrease of n_2 , the nominator of equation (8) increases in proportion to $\log n_1/n_2$, the denominator, on the other hand, similarly increases if n_2 is decreased. In this case, it is practically just the same when no recording is done up to a certain n_0 or if the smaller values are cut off gradually. At the same time, by increasing the number of the removed counts, we run the risks of losing valuable information and mistaken negative "nodules" occur in the image, due to the asymmetric error distribution. In case of isotope enrichment when detecting the so-called warm "nodules" advantages of the background erase may occur in some special

cases. The Poisson statistical raggedness can be left out of consideration in case of high counting rates, the detection being determined only by the value of L .

For this special case, the following is obtained from equation (8):

$$K_s = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \geq L. \quad (9)$$

In practical diagnostics, the possibilities for the application of equation (9) are excessively rare. Possibilities for losing informations may, however, exist, also in this case. The physician cannot know in advance which portion of the background fraction may be cut off.

The greatest disadvantage of the background erase is that it does not eliminate the logarithmic transmission of the activity differences.

The logarithmic transmission can be eliminated by transformation

$$n_r = 10^{bn_d}. \quad (10)$$

The recorder counts are denoted by n_r , the detected counts by n_d ; b is a constant determining the gradient of the transmission curve. The value of b should be selected so high as to enable the use of the entire information range for the transmission. Using equation (10), the true observation obtained in counting can be recovered from equation (8), in case of $b = 1$:

$$K = \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{n_1 + n_2}} \geq 3. \quad (2)$$

Such, transformation is supplied by the photoscanning, the gradation curve of which is exponential. A film can be found the blackening curve of which will just eliminate the logarithmic character of visual perception of the human eye. In this case, the differences are not distorted by the recorder, the transmission curve is linear as shown by the curve b in Fig. 2.

It is worth mentioning that value K obtained from (2) was examined by W. ENTZIAN who has tried to determine the optimum true observation by means of photoscanning for phantoms of different activities and magnitudes [6]. His results show good agreement with equation (2) figuring in the present work. It should be mentioned, however, that various problems have arisen in connection with the photoscanning-type recorders but these problems are not dealt with in this paper.

Finally, we wish to demonstrate the logarithmic nature of the subjective visualization. Two pictures are shown which have been taken in the following manner:

Initially it was assumed that a detector feeds two different analyzers. The first analyzer provides for the usual linear signal transmission, the second one, e.g. a film, shows a blackening curve which fulfils the transformation required by equation (10). The area has been divided, in thought, into small squares and above each of these small squares the detector has been staying for a definite time; thus preventing the analyzer from transferring information from one square to the other. This means that the error originating from the scaling has been admitted and distance ds defined by equation (3) been considered. The Poisson set was recorded corresponding to practice. The staying

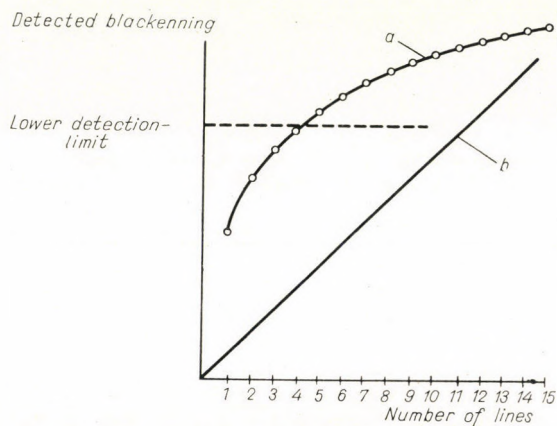


Fig. 2

time of the detector above each of the small squares to be scanned during the assumed recording did correspond to the usual continuous scanner speed of 10 cm/min. The intensity of the assumed warm "nodule" was 3000 cpm, the homogeneous intensity of the surrounding 300 cpm, whereas the intensity of the cold area 60 cpm. For the linear transmission, a signal has been allocated to every 6th pulse.

The blackness value was adjusted as a combination of dots and dashes, on the scanner image taken by exponential transformation method for the better approximation of the exact exponential function. The blackness value is ten times greater than caused by a dash than a dot.

The pictures show conspicuously the better transmission of the transformed image wherein the subjective visualization has been considered. The outlines of both the cold and warm areas are more definite and in the transformed image the homogeneous basic intensity is really homogeneous; as for the linear transmission, more cold areas occur in the homogeneous intensity.

Summing up our examination, it can be established that improvement of the scan recording may be realized by two methods: The "best" picture can be obtained by increasing the administered isotope quantity and by applying

simultaneously the photo-scanning to remove the logarithmic sensitivity of the human eye. The increase of the administered isotope quantity is limited by the risk of radiation damage. According to the more recent reports, the presently applied isotopes of short half-periods and containing weak beta-components may open new outlooks for the radioisotope scanning [7].

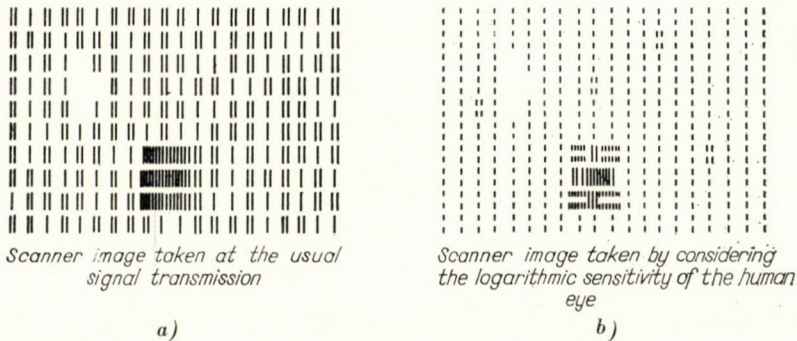


Fig. 3

REFERENCES

1. BRONWELL, G. I.: Theory of Radioisotope Scanning. *Int. Journ. of Appl. Rad. and Isotopes* **3** (1959), 181.
2. HIROTAKE KAHEKI: Problems of Collimation. Int. Atomic Energy Agency, Vienna 1959.
3. BENDER, M. A.—BLAU, M. A.: Versatile High Contrast Photo Scanner for the Localization of Human Tumore with Radioisotope. *Int. J. Appl. Rad. and Isotopes* **4**, (1959), 154.
4. INTRIE, M. E.—HOUSER, D. S.: Method for the Visualization of the Liver. *Am. J. Roentgenol.* **77** (1957), 455.
5. KROHMER, A.—BONTA, F. J.: Scintillation Scanning of the Liver. *Physical. Basis Am. J. Roentgenol.* **88** (1962), 269.
6. ENTZIAN von W.: Über Phantom Untersuchungen in der Scanning Diagnostik, *Atompraxis* **7** (1961), 7—10.
7. HARPER, P. V.—BECK, R.—CHARLESTON, D.—LATHROP, K. A.: Optimization of a Scanning Method using Tc 99 m. *Nucleonics*, **22** (1964), 50.

ÜBER EINIGE THEORETISCHE FRAGEN DER SZINTOGRAPHIE

GY. EMBER und I. HALÁSZ

ZUSAMMENFASSUNG

Die Publikation bestimmt, von den Eigenschaften des einfachen Zählprinzips ausgehend, mit Hilfe statistischer Methoden den scanning-diagnostisch nachweisbaren kleinsten Aktivitätsunterschied. Die Verfasser berechnen den durch das Bewegen des Detektors entstandenen Registrierungsfehler. Sie beachten, daß die wahrgenommene Nachweisbarkeit, wegen der logarithmischen Empfindlichkeit des menschlichen Auges mit der mit Hilfe statistischer Methoden berechneten Nachweisbarkeit nicht übereinstimmt. Die Verfasser haben die in der Scanning-Technik üblichen Kontrastverbesserungsmethoden geprüft und stellen fest, daß dieselben die wahrgenommene Nachweisbarkeit wesentlich nicht steigern, wogegen die angewendeten Verfahren wesentlichen Informationsverlust verursachen. Sie bestimmen die prinzipiell wirksamste Gradationskurve und zum Beweis legen sie als theoretischen Versuch ein Scannerbild bei.

QUELQUES PROBLÈMES THÉORIQUES DE LA SCINTIGRAPHIE

GY. EMBER et I. HALÁSZ

RÉSUMÉ

Les auteurs, partant des propriétés du compteur normal, déterminent par des méthodes statistiques la plus petite différence d'activité observable par scintigraphie. Les auteurs calculent l'erreur d'enregistrement due au déplacement du détecteur. Ils considèrent qu'en raison de la sensibilité logarithmique de l'oeil, le pouvoir séparateur observé diffère de celui calculé par des méthodes statistiques. Les auteurs ayant examiné les procédés d'amplification de contraste habituellement utilisés dans la technique scanner, ont trouvé que ceux-ci n'augmentent pas sensiblement le pouvoir séparateur observé, mais impliquent, par contre, une perte notable d'information. Les auteurs déterminent la courbe de gradation la plus efficace en principe et donnent, pour vérifier cette courbe, une image scanner obtenue par voie hypothétique.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ СЦИНТИГРАФИИ

Д. ЭМБЕР и И. ХАЛАС

РЕЗЮМЕ

Исходя из особенности принципа простого счёта, в статье с помощью статистических методов определяется наименьшая разность активностей, воспринимаемая сцинтиграфией. Авторы определяют ошибку регистрации, возникающую из-за передвижения детектора. Учитывают, что наблюдаемое разрешение отличается от разрешения, рассчитанного статистическим методом, из-за логарифмического восприятия глаза. Авторы рассмотрели методы улучшения контрастности, обычно используемые в сцинтиграфии и делают вывод, что эти методы особо не улучшают наблюдаемое разрешение, однако, приводят к значительной потере информации. Определяют теоретически наиболее выгодную кривую градиации и для теоретического подтверждения этой кривой приводят сцинтиграфическую картину.

THE HUNGARIAN INVENTION OF THE RAM JET DRIVE IS 50 YEARS OLD

D. BRODSZKY

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES
TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received March 11, 1965]

The paper discusses the solution of the ram jet drive proposed by a Hungarian pioneer.

ALBERT FONÓ, mechanical engineer — to-day Corresponding Member of the Hungarian Academy of Sciences — 50 years ago on February 10, 1915 set forward a proposal to the Austro-Hungarian Army Headquarters for the creation of a ramjet-driven projectile (air torpedo). The detailed calculations submitted in support of the proposal show that with the proposed air torpedo efficient shooting was possible at a far greater distance than with the longest-range guns known at the time [1].

The Technical Committee of the Army Headquarters informed FONÓ in a brief letter that no practical success was to be expected from the realization of the proposal and therefore it would not deal with it (Fig. 1).

Viewing the proposal with our eyes of to-day, there can be no doubt that a very important invention was rejected. FONÓ's proposal involved every basic idea of the power plants of our modern sonic and supersonic air transportation and above this, it recommended an application which in its time (1915) was the most realistic and could have been realized with the maximum chance of success.

The sketch of ALBERT FONÓ's air torpedo is shown in Fig. 2 [1]. To-day one needs only to give it a swift glance in order to see that it is jet drive without an aspirating compressor (ram-jet, athodid). Its operation is already well-known, theoretically it can be separated into a thermal power unit and a propulsion unit. The basic condition for its operation is that the air arrives at adequate relative velocity. This relative velocity is provided by the flight itself. The operating cycle is the following: the relative kinetic energy of the air arriving at the drive unit is already partly reduced in front of the drive unit, partly in its adequately arranged channel, thus its enthalpy increases and also its pressure; so dynamic compression is brought about. Then fuel is injected into the compressed air, ignited and burnt at constant pressure; the increased-energy gas expands in a driving nozzle and is exhausted at high speed. The reaction of the impulse of the high-speed medium provides the thrust.

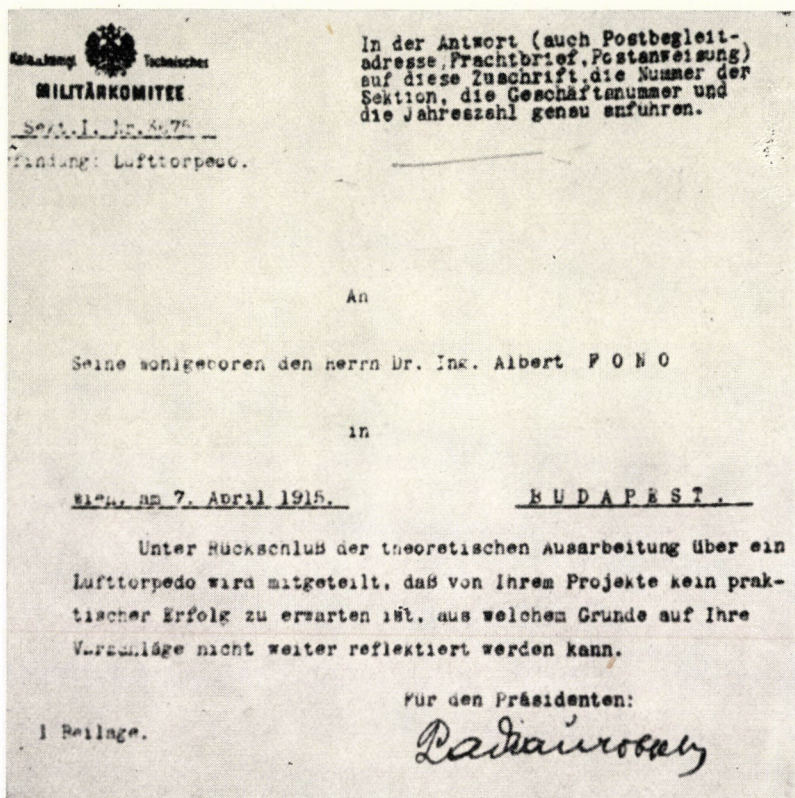


Fig. 1

According to the foregoing, the ideal working cycle of the power unit consists of adiabatic (isentropic) compression, heat introduction at constant pressure, adiabatic expansion (outflow) and heat extraction at constant pressure (Fig. 3). The efficiency of the thermal power plant working according to the ideal cycle depends only on the compression ratio,

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

where p_0 is the initial pressure, p_1 the final pressure of compression. But here there is dynamic compression, the pressure ratio depends on the inlet velocity and finally efficiency is an univocal function of the inlet velocity, which can be characterized by its M number Hence

$$\eta = 1 - \frac{1}{1 + 0,2 M^2} = \frac{1}{\frac{5}{M^2} + 1},$$

which is also shown on the diagram of Fig. 4. At small M numbers efficiency is low, and with increasing M it increases first slowly, then rapidly and finally again at a lower rate. At $M = 0,1$ the efficiency attains only 0,1%, at $M = 0,5$ it is 5%, at $M = 1$ it is 16,6%, at $M = 2$ it is already 45% and at $M = 5$ it attains 83%.

If we consider that these values give the ideal efficiency of the thermal power plant but that its real efficiency is reduced by further considerable losses and that the over-all efficiency of the power plant is reduced still further by the propulsion efficiency, we see that the very base of advantageous application of the compressorless ram jet is supersonic speed, which fact has practically been proven to-day.

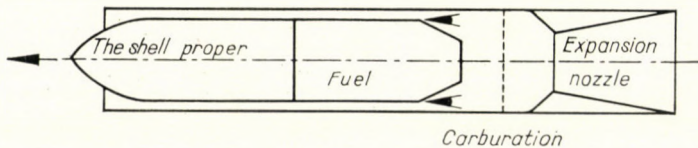


Fig. 2. Sketch of FONÓ's air torpedo [1]

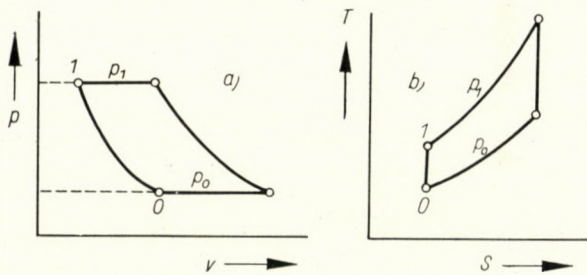


Fig. 3. Ideal working cycle of the air-aspirating jet drive: $p-v$ diagram (a); $T-s$ diagram (b)

In 1915 only projectiles attained supersonic speed, aircraft was still in its infancy, their speed was far below sonic and attained only a fraction of its speed. Attaining sonic speed was at that time not a question of drive units, but much more of airframes, therefore the development of a power plant suitable for supersonic flying was untimely. For the aircraft of the time the petrol-engine driven airscrew was absolutely suitable from the points of view of thrust efficiency and many other points, too. At low flying speeds the compressorless jet plant (ram jet) is not suitable for replacing it; under such conditions — slow flying — it did not acquire importance during later stages of development either.

From what has been said it is clear that FONÓ's proposal of 1915 was realistic, much more so than the paper of the French LORIN published in 1915

which also set up the idea of the ram jet, but without pointing to the need for high speed [4]. FONÓ's most important finding was that the jet propulsion plant without aspirating compressor becomes of great importance at supersonic flying speed. Furthermore he saw not only that the initial speed required for its operation must be secured from some other source, but he also found that field of application where in 1915 this could be realized within a limited time. He was clear about the importance of experimental work and insisted on this in his proposal [1].

With this the basic principle of our modern aircraft propulsion plants was created. A smaller step was necessary for the adaption of the propulsion plant to infrasonic speeds and to provide it with a starting power. FONÓ also achieved decisive progress in the solution of this question. Although in favour-

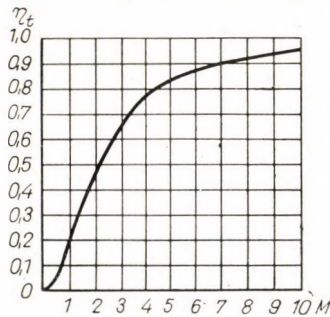


Fig. 4. Variation of the ideal thermal efficiency of the air-aspirating jet drive as a function of the M number

able conditions caused loss of time, meantime development brought the solution of the problem into the foreground.

For a long time after the rejection of his proposal FONÓ had no possibility of continuing his work on the air-aspirating jet power plant. Only in 1928 could he think of realizing a jet plant suitable for aircraft and to claim a patent for sonic. He applied for a patent also in the *German Reichspatentamt*, because the preliminary examination carried out by this institution was considered at that time as being the most reliable one. First he claimed a patent for the application to supersonic aircraft of the solution he had proposed for the air torpedo and within half a year he asked for an additional patent on a power plant suitable for infrasonic flight. In the latter a compressor driven by a separate thermal engine (e.g. a piston engine or a rotating piston engine) created the pressure ratio necessary for satisfactory operation, to which during flight also the dynamic compression contributes. This additional patent basically solves the problem of the aspirating compressor jet engine, leaving open the question as to what kind of compressor and of thermal engine would finally

be of advantage. The German patents granted after a preliminary examination lasting for an unusually long time of about 4 1/2 years priority as from 1928 [2].

After the patent applications FONÓ searched for a possibility to try the air aspirating jet engine on aircraft. After several promises (*Fokker, Junkers*) there was finally no opportunity for this, largely because engineering at that time had not reached a level permitting adequate temperatures at the critical places, e.g. at the exhaust valves of petrol engines. So the experimental work and the practical realization fell to others.

At present the most important drive unit for sonic and supersonic flight is the turbo-jet engine, on which afterburning can be used, too. This power

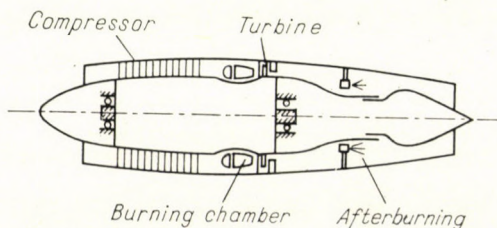


Fig. 5. Theoretical drawing of a gas-turbine jet drive unit with afterburning

plant can be completed by a ram jet, which enters into operation at high speed only.

Now let us examine a modern turbo-jet engine completed by afterburning, — used also for infrasonic flight — and then let us investigate what part of it could have been realized at a general level of engineering of 1915.

Fig. 5 shows the theoretical arrangement of a modern gas-turbine jet-driven unit with an afterburning device; Fig. 6 shows $i-s$ and $T-s$ diagrams of the drive unit's working cycle during supersonic flight operation. As shown in the $i-s$ diagram, the working cycle starts with dynamic compression (0-1) then the compressor continues by the compressing the air (1-2).

After that — neglecting smaller pressure losses — fuel is burnt at constant pressure in the combustion chamber (2-3), then the gas expands in the turbine (3-4). The turbine covers the work needed for driving the compressor and for this it does not require the whole of the available total heat drop, so the pressure behind the turbine is still higher than in front of the compressor. Behind the turbine — in the afterburning chamber — a fresh quantity of fuel is burned (4-5), finally the gas carrying increased energy is expanded in the propulsion nozzle (5-6) and thus high outlet velocity is secured, resulting in a high thrust.

This working cycle is the result of knowing the limits imposed by structural materials and by design and therefore of complying with them. Such a limit is permissible temperature on the turbine blade. In the propulsion nozzle higher

temperature is permitted than on the turbine blades because there are no centrifugal stresses and because of the possibility of better cooling. These limits — as is known — are of essential influence on the energy which can be obtained from the cycle and its efficiency. Further considerable influence on them have the efficiencies of the turbine and of the compressor.

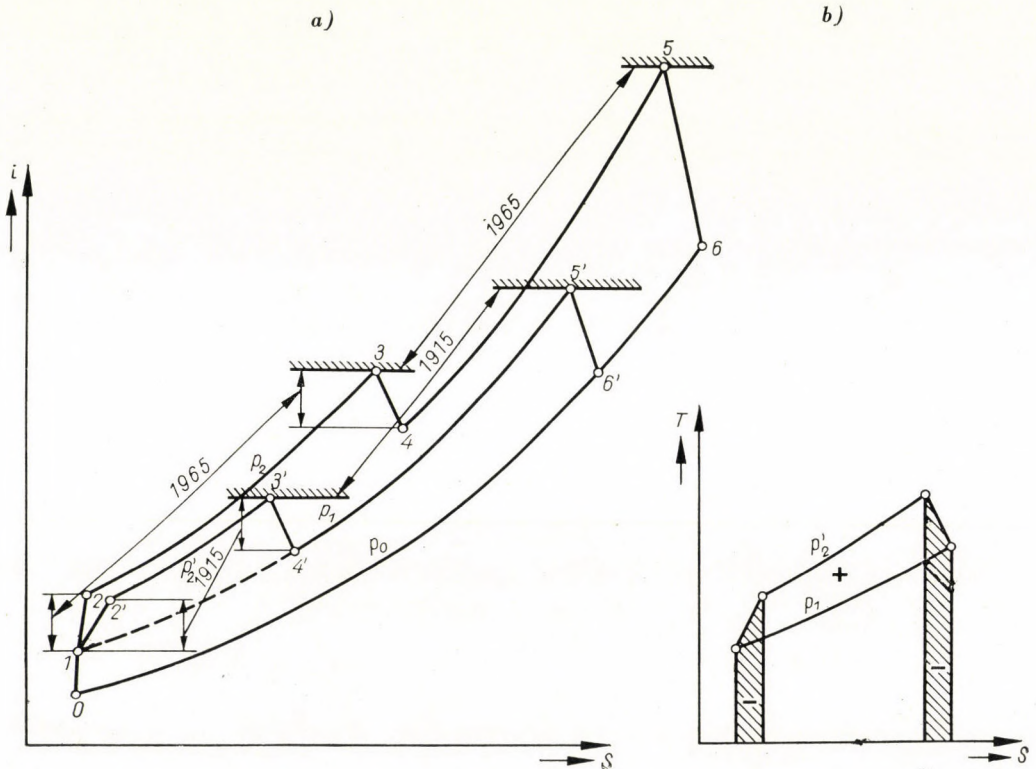


Fig. 6. Entropy diagram of afterburning gas-turbine jet drive unit and of compressor-less air-aspirating jet drive unit: a) $i-s$ diagrams of to-day's (1965) gas-turbine jet drive and of a jet drive unit imaginable in 1915; b) $T-s$ diagrams of an idling gas turbine (the + and the - thermal areas compensate each other)

In 1915 temperature limits were much lower and efficiencies of turbine and compressors were smaller. These are shown in the diagram by indicating the date. The smaller allowable temperature of the afterburning chamber has only the effect of reducing the thrust. But the smaller allowable temperature in front of the turbine and the worse efficiencies of turbine and compressor bring about basic changes. The turbine working at low inlet temperature and low efficiency for driving the compressor of still lower efficiency needs such a temperature drop that after-turbine pressure drops to about the pressure in front of the turbine, i.e. the turbine would nearly be idling and would not be of any appreciable use. So the turbine could be omitted, it being a superfluous

complication. But this one can lead to FONÓ's proposal of 1915 concerning supersonic flight, which is also shown in the $T-s$ diagram where heat is introduced at pressure p'_2 .

It can rightly be assumed — although it would be difficult to prove — that the ideas of FONÓ reached those who later realized the air-aspirating jet engine and that they had a stimulating influence on their work. On the base of the German patent, and in broader circles on the base of recent papers, FONÓ's work receives more and more acknowledgement. I.e. a paper published in 1960 by W. H. AVERY in the *American Rocket Society Journal* [4] terminates by the following:

“The documentation furnished by Dr. Fonó indicates that he was the first person to visualize the possibilities of ram-jet propulsion for supersonic flight. Although the work of Lorin was earlier, there is no indication in Lorin's published papers that he foresaw the use of ram-jets at the high speeds needed by this type of engine to achieve useful thrust or efficient operation.

I feel sure that all ARS readers will be glad to acknowledge Dr. Fonó recognition for his pioneering studies of ram-jet propulsion.”

REFERENCES

1. DR. ING. ALBERT FONÓ: Lufttorpedo; Budapest February, 1915. (Proposal submitted to the Austro-Hungarian Army Headquarter.)
2. DRP 554 905 and additional patent DRP 560 075.
3. DR. FONÓ: On Ram Jet Propulsion. *Acta Techn. Hung.* **12** (1955), 3—4.
4. AVERY, W. H.: Air Torpedo (A proposal of Dr. Ing. ALBERT FONÓ Dated February 10, 1915.) *ARS Journal* **30** (1960), No. 11.

DIE UNGARISCHE ERFINDUNG DES SELBSTANSAUGENDEN STRAHLTRIEBWERKES IST 50 JAHRE ALT

D. BRODSZKY

ZUSAMMENFASSUNG

Der Artikel macht mit der von einem ungarischen Bahnbrecher vorgeschlagenen Lösung des selbstansaugenden Strahltriebwerkes bekannt.

L'INVENTION HONGROISE D'UN MOTEUR A RÉACTION ASPIRANT A 50 ANS

D. BRODSZKY

RÉSUMÉ

L'article expose la solution du problème de construction d'un moteur à réaction aspirant, proposée par un savant hongrois ayant fait oeuvre de pionnier.

50-ЛЕТИЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ С ВСАСЫВАНИЕМ ВОЗДУХА

Д. БРОДСКИ

РЕЗЮМЕ

В статье излагается предложенное одним венгерским пионером решение реактивного двигателя с всасыванием воздуха.

ANALYTICAL DESIGN OF MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEMS WITH CONSTRAINTS FOR DETERMINISTIC INPUTS APPLYING THE INTEGRAL OF SUM OF ERRORS SQUARED CRITERION

F. CSÁKI

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received August 17, 1965]

In this paper the optimum design of multivariable control systems is treated in the case of the semi-free configuration with constraints. The inputs are assumed to be deterministic signals. As optimization criterion the integral of the sum of the squared errors is taken. An illustrative example is also given.

I. Theoretical considerations

In the technical literature many papers deal with the statistical design of single-variable, e. g. [1-3], and multivariable, e. g. [4-9], control systems. There are also some publications concerned with the design of single-variable systems for deterministic inputs [10, 2]. In this paper the optimum design of multivariable control systems is treated concerning the most general case, that is, the so-called semi-free configuration with constraints. The derivation of results is based merely on frequency-domain notions, thus, variational calculus and integral equations are completely avoided.

The problem is depicted in Fig. 1. Here the following symbol is used: $\mathbf{R}_k(s)$ ($k = 1, \dots, K$) is the Laplace transform (or with $s = j\omega$ the Fourier transform) of the input row vector, $\mathbf{C}_l(s)$ ($l = 1, \dots, L$) is the transform of the output row vector. $\mathbf{M}_j(s)$ ($j = 1, \dots, J$) is the transform of the row vector of manipulated variables acting between the fixed part, for example, the plant and the controller. The former is represented by transfer-function matrix $\mathbf{W}_{ji}^f(s)$ while the later by matrix $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$. An indirect constraint is introduced by matrix $\mathbf{W}_{jh}^k(s)$ ($j = 1, \dots, J$; $h = 1, \dots, H$). The output row-vector $\mathbf{B}_h(s)$ of this transfer link represents the indirect variables: the so-called modified manipulated variables to be constrained. For the sake of simplicity $K = J = L = H$ is assumed.

As performance criterion the sum of the integrals of the squared error components is taken, the errors being the differences between the inputs and outputs:

$$\mathbf{E}_k(s) = \mathbf{R}_k(s) - \mathbf{C}_l(s); \quad (1)$$

$$(k = l = 1, 2, \dots, K = L).$$

Applying Parseval's theorem the functional in question can be expressed as

$$I_e = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\mathbf{E}_{k'}(-s) \mathbf{E}_{k'}(s)] ds, \quad (2)$$

where $\mathbf{E}_{k'}(-s)$ is the conjugate complex column vector of the error row vector $\mathbf{E}_{k'}(s)$ as here and in the following treatise $s = j\omega$. Hence, $\mathbf{E}_{k'}(-s) \mathbf{E}_{k'}(s)$ is a matrix of type $K \times K$, while the symbol "tr" denotes the trace i. e. the sum of the principal diagonal elements of the matrix.

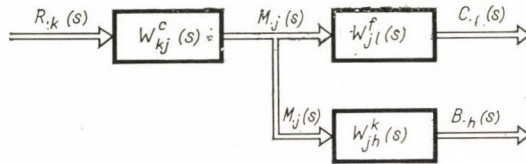


Fig. 1

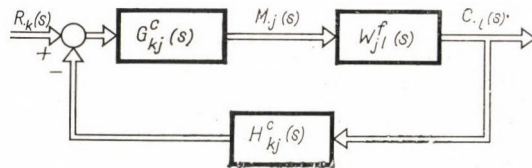


Fig. 2

In a similar way the condition of constraint can be expressed as

$$I_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\mathbf{B}_{h'}(-s) \mathbf{B}_{h'}(s)] ds \leq \sigma^2 \quad (3)$$

the sum of the integrals of the squared values of the indirect manipulated variables being limited.

Applying the Lagrangean conditional extremum technique the functional to be minimized is

$$I = I_e + \lambda I_b. \quad (4)$$

Taking Equ. (1) and Fig. 1 into consideration Equ. (2) gives:

$$I_e = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\mathbf{R}_{k'}(-s) - \mathbf{C}_{l'}(-s)] [\mathbf{R}_{k'}(s) - \mathbf{C}_{l'}(s)] ds, \quad (5a)$$

or

$$I_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) - \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) - \\ - \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) + \\ + \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) \} ds \quad (5b)$$

where $\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)$, $\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)$ are the adjoint i. e. the conjugate complex transposed matrices of $\mathbf{W}_{jl}^f(s)$ and $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$, respectively. Similarly, from Equ. (3) and Fig. 1

$$I_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} [\mathbf{W}_{h'j'}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh}^k(s)] ds \leq \sigma^2 \quad (6)$$

Now let us introduce two adjoint auxiliary matrices $\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda)$ and $\mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda)$ by the following implicit definition

$$\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) + \\ + \lambda \mathbf{W}_{h'j'}^k(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jh}^k(s) = \quad (7) \\ = \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s).$$

It is assumed that the elements of matrix $\mathbf{A}_{k'k''}(s, \lambda)$ have only poles and possibly zeros in the left-half plane while the elements of the adjoint matrix $\mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda)$ have poles (and zeros) merely in the right-half plane, the corresponding poles and possibly zeros being mirror images with respect to the imaginary axis of the complex plane. The poles and zeros on the imaginary axis are assumed as being shifted by a small quantity to the left-hand and to the right-hand side, respectively. The same is valid also for the inverse matrices. It can be shown that the choice of the auxiliary matrices does not depend on matrices $\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)$ and $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ if

$$\mathbf{W}_{jh}^k(s) [\mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1} = I(s) \mathbf{I}_{jj}, \quad (8)$$

where \mathbf{I}_{jj} is an unity matrix of type $J \times J$, while $I(s)$ is some scalar transfer function. Indeed in this case, the product of the auxiliary matrices can be written as

$$\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) = [1 + \lambda I(-s) I(s)] \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s). \quad (9)$$

Thus, taking Equs (5b), (6) and (7) into consideration the function in Equ. (4) takes the following form

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \{ \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) - \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) - \\ - \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) + \\ + \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s) \mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) \} ds. \quad (10)$$

Let us introduce furthermore two other adjoint auxiliary matrices $\mathbf{M}_{kj}(s, \lambda)$ and $\mathbf{M}_{j'k'}(-s, \lambda)$ by the following implicit relations:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{M}_{kj}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) &= \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s), \\ \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{M}_{j'k'}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) &= \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s). \end{aligned} \quad (11)$$

Hence, the functional to be minimized assumes the form:

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \operatorname{tr} \{ &\mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) - \\ & - \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) \mathbf{M}_{j'k'}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{M}_{kj}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) + \\ & + \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) [\mathbf{M}_{j'k'}(-s, \lambda) - \mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)] \mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \times \\ & \times \mathbf{A}_{k'k''}(s, \lambda) [\mathbf{M}_{kj}(s, \lambda) - \mathbf{W}_{kj}^c(s)] \mathbf{W}_{jl}^f(s) \} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

The matrix $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ and its adjoint is contained only in the last term. The functional I should be minimum if this last term would be zero. This condition would be fulfilled if and only if the optimum transfer-function matrix of the controller was

$$\mathbf{W}_{kj}^{co}(s, \lambda) = \mathbf{M}_{kj}(s, \lambda). \quad (13)$$

However, as the matrix $\mathbf{M}_{kj}(s, \lambda)$ is generally physically unrealizable the matrix $\mathbf{W}_{kj}^{co}(s, \lambda)$ is also unrealizable and does not solve our problem.

Let us decompose the later matrix into two parts:

$$\mathbf{W}_{kj}^{co}(s, \lambda) = \mathbf{W}_{kj}^{cn}(s, \lambda) + \mathbf{W}_{kj}^{cm}(s, \lambda), \quad (14)$$

where the second term on the right-hand side of Equ. (14) is the transform of a certain physically realizable positive-time-function matrix, while the first term on the right-hand side of Equ. (14) belongs to a negative-time-function matrix, consequently it is physically unrealizable. Substituting instead of $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ and its adjoint matrix the physically realizable matrix $\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s)$ and its adjoint matrix, the last term in Equ. (12) does not become zero but the functional I gives the least possible value, as according to

$$\mathbf{M}_{kj}(s, \lambda) - \mathbf{W}_{kj}^{cm}(s, \lambda) = \mathbf{W}_{kj}^{cn}(s, \lambda) \quad (15)$$

only a transfer-function matrix belonging to a negative-time function figures in the expression of I .

Taking Equs (13) and (14) into consideration the first relation of Equ. (11) gives

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{cm}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) &= \\ &= \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) + \mathbf{F}_{k'j'}(s, \lambda), \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\mathbf{F}_{k'j'}(s, \lambda) = -\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{cn}(s, \lambda) \mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)$$

is a certain matrix with elements containing only right-half plane poles. (The proof will be given somewhat later.) In Equ. (16) the matrix $\mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)$ must figure for the sake of symmetry. Now, let us perform the following factorization

$$\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) = [\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)]^+ [\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s)]^-, \quad (17)$$

where the upper index $-$ (minus) denotes a matrix factor whose elements, and the elements of its inverse matrix, have only right-half-plane poles and possibly zeros, while the upper index $+$ (plus) denotes a matrix factor whose elements, together with the elements of its inverse matrix, have only left-half-plane poles and possibly zeros.

Thus, from Equ. (16) we have

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{cm}(s, \lambda) (\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+ = \\ & = [\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda)]^{-1} \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}]^{-1} + \\ & + [\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda)]^{-1} \mathbf{F}_{k'j'}(s, \lambda) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}]^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

if the inverse matrices do exist.

To ensure this condition some diagonal elements tending to zero must be inserted into the auxiliary matrices defined in Equ. (7) (see the illustrative example on the end of this article).

Separating the physically realizable and unrealizable matrix components on both sides of Equ. (18) the following two relations can be obtained:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{k''k}(s, \lambda) \mathbf{W}_{kj}^{cm}(s, \lambda) (\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+ = \\ & = \{ [\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda)]^{-1} \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}]^{-1} \}_+ \\ \text{and} \quad & \mathbf{0} = \{ [\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda)]^{-1} \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_k(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}]^{-1} \}_- + \\ & + [\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda)]^{-1} \mathbf{F}_{k'j'}(s, \lambda) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}]^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

where the lower index $+$ (plus) denotes a matrix component with physically realizable elements belonging to positive-time functions while the lower index $-$ (minus) denotes a matrix component with physically unrealizable elements, that is, with right-half-plane poles, and thus belonging to negative-time functions. Generally, the physically realizable component can be obtained by first performing an inverse Fourier transformation and then a Laplace transformation.

Here the fact was taken into consideration that the left-hand side of Equ. (18) supplies merely a physically realizable component, while the second

term on the right-hand side of Equ. (18) gives only a physically unrealizable component.

Expressing the matrix $\mathbf{F}_{k'j'}(s, \lambda)$ from the second relation of Equ. (19) explicitly it is clearly shown that indeed its elements have only right-half-plane poles.

On the other hand, the first relation of Equ. (19) yields

$$\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s, \lambda) = [\mathbf{A}_{k'k'}(s, \lambda)]^{-1} \{ [\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda)]^{-1} \mathbf{R}_{k'}(-s) \mathbf{R}_{.k}(s) \times \\ \times \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s) [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^{-1}] \}_+ [(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+]^{-1}. \quad (20)$$

The solution $\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s, \lambda)$ and its adjoint matrix may now be substituted into condition of constraint in Equ. (6) in place of $\mathbf{W}_{kj}^c(s)$ and $\mathbf{W}_{j'k'}^c(-s)$, respectively. The parameter λ must be so adjusted that the inequality (6) will be satisfied. After having determined the proper value of the parameter λ , the latter can be substituted back into Equ. (20). Hence, the physically realizable optimum transfer-function matrix of the cascade controller $\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s)$ is obtained.

After having determined the matrix $\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s)$, according to the equivalence of the two configurations show in Fig. 1 and Fig. 2, the transfer-function matrix of the controller in the forward branch or that of the feed-back link can also be ascertained. For example if there is no feed-back controller then the transfer-function matrix of the series controller can be expressed as

$$\mathbf{G}_{kj}^{cm}(s) = [\mathbf{I}_{kk} - \mathbf{W}_{kj}^{cm}(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1} \mathbf{W}_{kj}^c(s) \quad (21)$$

while, on the other hand, if the series controller is missing then the transfer-function matrix of the feed-back controller is given in the following relation

$$\mathbf{H}_{lk}^c(s) = [\mathbf{W}_{kj}^c(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1} - [\mathbf{W}_{jl}^f(s)]^{-1}. \quad (22) \\ (k = j = l = 1, \dots, K = J = L)$$

II. An illustrative example

For the sake of illustration a relatively simple example is presented. The starting data are the following:

$$\mathbf{R}_{.k}(s) = [1/s^2, \quad 1/s]; \\ \mathbf{W}_{jl}^f(s) = \begin{bmatrix} 9/s^2 & 0 \\ 0 & 3/s \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{jh}^k(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s/3 \end{bmatrix}.$$

On the basis of Equ. (9)

$$\mathbf{A}_{k'k''}(-s, \lambda) \mathbf{A}_{k'k}(s, \lambda) = (1 + \lambda s^4/81) \begin{bmatrix} 1/s^2 \\ -1/s \end{bmatrix} [1/s^2, 1/s].$$

Hence

$$\mathbf{A}_{k^*k}(s, \lambda) = \left(1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2 \right) \begin{bmatrix} 1/s^2 & 1/s \\ 0 & \varepsilon/s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{k'k^*}(-s, \lambda) = \left(1 - \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2 \right) \begin{bmatrix} 1/s^2 & 0 \\ -1/s & -\varepsilon/s \end{bmatrix}$$

where ε is a small quantity later tending to zero. After introducing the diagonal elements, the inverse matrices can be determined

$$[\mathbf{A}_{k^*k}(s, \lambda)]^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2} \begin{bmatrix} s^2 & -s^2/\varepsilon \\ 0 & s/\varepsilon \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{A}_{k'k^*}(-s, \lambda)]^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ -s^3/\varepsilon & -s/\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Furthermore

$$[(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^+]^{-1} = \begin{bmatrix} s^2/9 & 0 \\ 0 & s/3 \end{bmatrix};$$

$$[(\mathbf{W}_{jl}^f(s) \mathbf{W}_{l'j'}^f(-s))^-]^{-1} = \begin{bmatrix} s^2/9 & 0 \\ 0 & -s/3 \end{bmatrix}.$$

First, let us calculate the term in brackets in Equ. (20). Completing the column and row matrices $\mathbf{R}_{k'}(-s)$ and $\mathbf{R}_{k^*}(s)$ with corresponding diagonal elements and performing some algebraic manipulations:

$$\left\{ \dots \right\}_+ = \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2} \begin{bmatrix} 1/s^2 & 1/s \\ 0 & \varepsilon/s \end{bmatrix} \right\}_+ = \left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3s} \right) \frac{1}{s} \\ 0 \\ \frac{\varepsilon}{s} \end{array} \right].$$

Hence, applying Equ. (20)

$$\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2} \cdot \begin{bmatrix} (1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s^2/9 & 0 \\ 0 & s/3 \end{bmatrix}.$$

Thus, the overall transfer-function matrix of the control system is

$$\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2} \begin{bmatrix} (1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The condition of constraint in this case is

$$I_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{81} \frac{\left(1 - s \sqrt{1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{9}} \right) \left(1 + s \sqrt{1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{9}} \right)}{\left(1 - \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2 \right) \left(1 + \frac{\sqrt[4]{4\lambda}}{3} s + \frac{\sqrt{\lambda}}{9} s^2 \right)} ds \leq \sigma^2,$$

which results

$$I_b = \frac{\sqrt{\lambda} + 3}{\sqrt{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{\lambda^3}} \leq \sigma^2.$$

For example, if $\sigma^2 = 11/81$, then $\lambda = 81/64$ and the overall transfer-function matrix becomes

$$\mathbf{W}_{kj}^{cm}(s) \mathbf{W}_{jl}^f(s) = \frac{1}{1 + 0,5s + 0,125s^2} \begin{bmatrix} 1 + 0,5s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applying Equ. (21) finally, the expression of the controller in the closed loop is

$$\mathbf{G}_{kj}^{cm}(s) = \begin{bmatrix} \frac{8}{9}(1 + 0,5s) & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \frac{1}{1 + 0,25s} \end{bmatrix}.$$

Thus a controller of type PD and a controller of type PT would be necessary.

REFERENCES

1. WIENER, N.: The extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Technology Press, Cambridge 1949.
2. NEWTON, C. C.—GOULD, L. A.—KAISER, J. F.: Analytical Design of Linear Feedback Controls. John Wiley and Sons Inc., New-York 1957.
3. TSIEN, H. S.: Engineering Cybernetics. Mc Graw-Hill Book Company Inc., New-York—Toronto—London 1954.
4. AMARA, R. C.: Application of Matrix Methods to the Linear Least Squares Synthesis of Multivariable Systems. *Journal of the Franklin Institute* **268** (1959), 1.
5. HSIEH, H. C.—LEONDES, C. T.: On the Optimum Synthesis of Multipole Control Systems in the Wiener Sense. *IRE National Convention Record 1959*. **7** (1959); Part 4, 18.
6. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of Optimum Transfer Functions for Multivariable Systems. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **7** (1963), 171.
7. HSIEH, H. C.—LEONDES, C. T.: Techniques for the Optimum Synthesis of Multipole Control Systems with Random Processes as Inputs. *Transactions IRE* (1961), 212—231.
8. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of the Optimum Multipole Cascade Controller for Random Processes. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **8** (1964), 1.
9. CSÁKI, F.: Simplified Derivation of the Optimum Multipole Cascade Controller for Multivariable Systems with Constraints. *Periodica Polytechnica* (Electrical Engineering) **8** (1964), 117.
10. CHANG, S. L.: Synthesis of Optimum Control Systems. Mc Graw-Hill Book Company Inc., New-York—Toronto—London 1961.

ANALYTISCHE SYNTHESE VON MEHRFACHVARIABLEN REGELUNGSSYSTEMEN MIT DETERMINISTISCHEN EINGANGSSIGNALEN AUF GRUND DES KRITERIUMS DES QUADRATISCHEN FEHLERINTEGRALS

F. CSÁKI

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Artikel wird die Optimierung von mehrfachvariablen Regelungssystemen für den Fall der halbfreien Konfiguration mit Beschränkung behandelt, wobei die Eingangssignale deterministisch sind. Als Kriterium der Optimierung wurde die Summe der quadratischen Fehlerintegrale genommen. Zur Veranschaulichung wurde auch ein Beispiel angeführt.

SYNTHÈSE ANALYTIQUE DES SYSTÈMES DE RÉGULATION MULTIVARIABLES
AVEC CONTRAINTE ET SIGNAUX D'ENTRÉE DÉTERMINISTIQUES, SUR LA BASE
DU CRITÈRE DE L'INTÉGRALE DE LA SOMME DES ERREURS QUADRATIQUES

F. CSÁKI

RÉSUMÉ

L'article traite de la synthèse optimale des systèmes de régulation multivariables en cas de configuration demi-libre et de contrainte. Les signaux d'entrée sont déterministiques. Comme critère de l'optimisation, on prend l'intégrale de la somme des erreurs quadratiques. Un exemple présenté par l'auteur termine l'étude.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В СЛУЧАЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВХОДНЫХ
СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ СУММЫ
КВАДРАТИЧЕСКИХ ОШИБОК

Ф. ЧАКИ

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматривается вопрос оптимального синтеза многомерных систем регулирования в случае полусвободной конфигурации с ограничениями. Предполагается, что входные сигналы являются детерминированными. В качестве критерия берется интеграл суммы квадратических ошибок. Для иллюстрации теоретического материала в статье приводится также конкретный пример.

THE IDEAL KLYSTRON MODULATOR

T. BERCELI

DOCTOR OF TECHN. SC.

TELECOMMUNICATION RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received September 28, 1965]

The main task of the frequency modulators is to ensure a modulation characteristic of high linearity. For this purpose the klystron modulator is the most suitable. In this connection the author has solved, in a general way, the following problem: the active element of the modulator, a reflex klystron, is given and the question is what requirements by the passive load circuit must be satisfied in order to obtain an ideally linear modulation characteristic. The requirement of linear modulation leads to a non-linear differential equation for the phase angle of the load circuit. The function Ψ obtained as solution determines the phase characteristic of the assumed load circuit of the ideal klystron modulator. In the designing of klystron modulator circuits, the problem is to achieve the phase characteristic of the load circuit within a given range approaching as much as possible the ideal function Ψ .

I. Introduction

One of the principal tasks in designing multi-channel microwave links is to provide for a frequency modulation giving high linearity within a wide band. For such purposes the klystron modulator may be used at the greatest advantage because its frequency-reflector voltage characteristic may be linearized within a wide frequency band by the proper choice of loading circuit.

PIERCE and SHEPHERD [1] described the operation of a single-cavity reflex klystron oscillator in detail. JEPSEN and MORENO [2], later HOUGHTON and HATCH [3] dealt intensively with the analysis of the single-cavity klystron modulator. The problem of the two or more coupled cavity klystron modulators are, however, still not quite cleared up. The papers dealing with this subject [4, 5] are based namely on the assumption that the frequency and amplitude characteristics of the klystron oscillators are determined exclusively by the loading circuit. This may be accepted in effect only as a first approximation.

In the present paper, the analysis is extended to the entire circuit, i.e., the effect of the reflex klystron as the active circuit element on the modulation characteristic is also taken into consideration. On this basis, the author examines in general, the demands on the loading circuit of an ideal modulation characteristic is striven for.

II. Electronic and loading admittance

The operation of the klystron modulator is the result of the interaction of the electron beam passing through the reflex klystron with the loading circuit coupled to it. From the point of view of circuitry, the electron beam may be taken into consideration with an electronic admittance Y_e connected in parallel with the admittance Y_l represented by the load. To deal with the modulator, we should know the electronic and loading admittances, and then the working characteristics of the modulator may be determined by considering the parallel connection of the two admittances.

According to the small signal theory [1] known from the literature, the electronic admittance caused by the electron beam of the reflex klystron is:

$$Y_e = \frac{2I_0\beta}{V} J_1\left(\frac{\beta V\Theta}{2V_0}\right) \cdot [\sin\Theta + j \cos\Theta], \quad (1)$$

where I_0 the effective component of the direct current of the electron beam;

V_0 the electron acceleration voltage;

V the amplitude of the high-frequency voltage between the grids of the cavity;

β the beam modulation factor;

Θ the transit angle;

J_1 the Bessel function of the first kind and first order.

The transit angle Θ , for the case of a reflector space with linear potential distribution, is given by the following equation [5]:

$$\Theta = \frac{8\pi l}{\sqrt{2\eta}} \frac{\sqrt{V_0}}{V_0 + V_R} f, \quad (2)$$

where V_R the voltage between the reflector and cathode;

f the frequency;

l the distance from the reflector to the grid;

η the ratio of the charge and mass of the electron.

The loading admittance is expressed in the general form:

$$Y_l = |Y_l| e^{j\Psi}, \quad (3)$$

where Ψ the phase angle of the loading admittance.

III. The oscillation frequency

From the point of view of circuitry, the electronic admittance and the loading admittance are connected in parallel. In case of natural oscillation,

the sum of the two admittances should be consequently equal to zero. Thus, it follows that the loading admittance should be equal to the negative of the electronic admittance

$$Y_l = -Y_e. \quad (4)$$

Admittances Y_e and Y_l being complex quantities, Equ. (4) may be decomposed into two independent equations:

$$\operatorname{Re}(Y_l) = \operatorname{Re}(-Y_e), \quad (5)$$

$$\operatorname{arc}(Y_l) = \operatorname{arc}(-Y_e). \quad (6)$$

By the solution of these two equations, two unknowns, the oscillation frequency and the oscillation amplitude can be obtained.

In the following, the place where the electronic admittance is a negative real number will be called mode-centre. The values of the various parameters at the n^{th} mode-centre will be noted by index n where n represents the serial number of the mode.

In the following we only require the determination of the oscillation frequency, which may be obtained from Equ. (6). The formation of the arcus of the electronic admittance is carried out by referring it to the n^{th} mode-centre.

Consequently, on the basis of Eqs (1) and (3), we may write:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arc}(Y_L) &= \Psi \\ \operatorname{arc}(-Y_e) &= \Theta_n - \Theta \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Here, Θ_n is the value of the transit angle at the n^{th} mode-centre.

Let us substitute now relations (7) into Equ. (6):

$$\Theta_n - \Theta = \Psi. \quad (8)$$

Let us substitute thereafter the expression of the transit angle according to Equ. (2) into Equ. (8):

$$\Theta_n - \frac{8\pi l}{\sqrt{2}\eta} \frac{\sqrt{V_0}}{V_0 + V_R} f = \Psi. \quad (9)$$

At the mode-centre, the formula of the transit angle will be:

$$\Theta_n = \frac{8\pi l}{\sqrt{2}\eta} \frac{\sqrt{V_0}}{V_0 + V_{Rn}} f_0, \quad (10)$$

where V_{Rn} the value of the reflector-cathode voltage at the n^{th} mode-centre; f_0 the load resonance frequency which is equal to the mode-centre frequency.

Let us express $8\pi l/\sqrt{2\eta}$ from Equ. (10) and substitute this into Equ. (9). After having arranged the equation,

$$\frac{V_0 + V_{Rn}}{V_0 + V_R} \frac{f}{f_0} = \frac{\Theta_n - \Psi}{\Theta_n} \quad (11)$$

is obtained.

In Equ. (11), Θ_n , f_0 , V_0 and V_{Rn} are given quantities and thus a relation is obtained between V_R and f , supposing, of course, that the frequency dependence of Ψ is known.

IV. Modulation sensitivity

The modulation sensitivity is the derivative of the frequency with respect to the reflector voltage. This may be obtained from the implicit Equ. (11), after suitable rearrangement, in the following form:

$$S = \frac{df}{dV_R} = \frac{1}{\Theta_n} \frac{f_0}{V_0 + V_{Rn}} \frac{(\Theta_n - \Psi)^2}{\Theta_n - \Psi + f \cdot (d\Psi/df)} \quad (12)$$

At the mode-centre, the loading circuit should be at resonance, and, therefore, it seems to be advisable to introduce the relative frequency deviation as a new variable, instead of the frequency:

$$\delta = \frac{f - f_0}{f_0} \quad (13)$$

On this basis, the formula of the sensitivity is:

$$S = \frac{1}{\Theta_n} \cdot \frac{f_0}{V_0 + V_{Rn}} \cdot \frac{(\Theta_n - \Psi)^2}{\Theta_n - \Psi + (1 + \delta)(d\Psi/d\delta)} \quad (14)$$

The mode-centre sensitivity is obtained by taking the expression for the sensitivity at $\delta = 0$:

$$S_0 = \frac{f_0}{V_0 + V_{Rn}} \frac{\Theta_n}{\Theta_n + g_1}, \quad (15)$$

where

$$g_1 = \left. \frac{d\Psi}{d\delta} \right|_{\delta=0} \quad (16)$$

In Equ. (15) it has been considered that phase angle Ψ should assume zero value at point $\delta = 0$.

V. The differential equation of the ideal klystron modulator

The modulation sensitivity of an ideal klystron modulator is constant, i. e. it has no non-linearity. Thus, our requirement is that the sensitivity be constant and equal to its mode-centre value:

$$S = S_0. \quad (17)$$

Let us substitute Eqs (14) and (15) into Equ. (17). After suitable arrangement the following relation is obtained:

$$(1 + \delta) \frac{d\Psi}{d\delta} = \frac{\Theta_n + g_1}{\Theta_n^2} \Psi^2 - \frac{\Theta_n + 2g_1}{\Theta_n} \Psi + g_1. \quad (18)$$

The requirement for the constant modulation sensitivity thus leads to the differential equation referred to phase Ψ of the loading circuit. In the following, this equation is considered as the differential equation of the ideal klystron modulator.

In the differential equation of the ideal klystron modulator, the phase angle Ψ of the load is the function of the relative frequency deviation δ , and transit angle Θ_n is a parameter. The differential equation incorporates, as another parameter, the value of the first derivative of phase angle Ψ at $\delta = 0$. In addition to this, phase angle Ψ should be equal to zero at $\delta = 0$. The form of the differential equation as shown at (18) already involves this requirement.

The differential equation of the ideal klystron modulator is a non-linear differential equation of the first order and belongs to the group of the Riccati's differential equations [6, 7].

Let a solution of the differential equation be assumed in the form of an infinite convergent power series with a convergency range around the mode-centre frequency. Consequently, the relative frequency deviation is selected for independent variable. Thus:

$$\Psi_0 = g_1\delta + g_2\delta^2 + g_3\delta^3 + \dots \quad (19)$$

The solution of the differential equation should yield zero value at $\delta = 0$, therefore the constant term in series (19) has been taken for zero. Further, the coefficient of the first-order term has been selected as g_1 and thus the re-

quirement represented by Equ. (16) is also fulfilled, i.e., the value of the first derivative of the phase angle at zero — obtained as the result — is equal to g_1 . Subscript o of function Ψ_0 in (19) suggests that this solution is valid only for the surroundings of $\delta = 0$.

Let us determine now the coefficients in power series (19). Let us substitute for this reason the form of Ψ_0 according to power series (19) into the differential equation (18). The differential equation should hold after the substitution for any δ value in the neighbourhood of location $\delta = 0$. Thus, it follows that on the left-hand and right-hand side of the equation, the coefficients belonging to identical powers of δ should be equal. On this basis, the coefficients may be determined. When carrying out the detailed computations, it may be seen that the coefficients may be obtained by means of the following recursion formula:

$$g_v = \left(-\frac{\Theta_n + g_1}{\Theta_n} \right)^{v-1} \cdot g_1. \quad (20)$$

Thus, the solution of the differential equation of the ideal klystron modulator in the surroundings of location $\delta = 0$ is:

$$\Psi_0 = \sum_{v=1}^{\infty} \left(-\frac{\Theta_n + g_1}{\Theta_n} \right)^{v-1} \cdot g_1 \delta^v. \quad (21)$$

It may be established directly that the expression for Ψ_0 , according to Equ. (21), is convergent if:

$$|\delta| < \left| \frac{\Theta_n}{\Theta_n + g_1} \right|. \quad (22)$$

This range is entirely satisfactory for practical purposes.

Let us now transform Equ. (21). Let us factor out $g_1 \delta$ and then exponent v may begin at zero. Thus:

$$\Psi_0 = g_1 \delta \sum_{v=0}^{\infty} \left(-\frac{\Theta_n + g_1}{\Theta_n} \right)^v \cdot \delta^v. \quad (23)$$

The sum of the infinite power series here represented is [8], within the range (22), the following:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(-\frac{\Theta_n + g_1}{\Theta_n} \right)^v \delta^v = \frac{\Theta_n}{\Theta_n + (\Theta_n + g_1) \delta}. \quad (24)$$

Let us substitute Equ. (24) into (23) and use notation Ψ :

$$\Psi = \frac{\Theta_n g_1 \delta}{\Theta_n + (\Theta_n + g_1) \delta}. \quad (25)$$

When this is substituted into differential equation (18), it becomes evident that function Ψ , according to Equ. (25), is a solution of (18) within the entire range of δ , from $-\infty$ up to $+\infty$. The lack of subscript suggests that the function Ψ , according to Equ. (25), is a solution for the entire range of alteration of δ , while the solution Ψ_0 , according to Equ. (21), may be used only within the range

$$|\delta| < \left| \frac{\Theta_n}{\Theta_n + g_1} \right|.$$

At values beyond this range, Ψ may be expanded in power series only in a form that differs from (21).

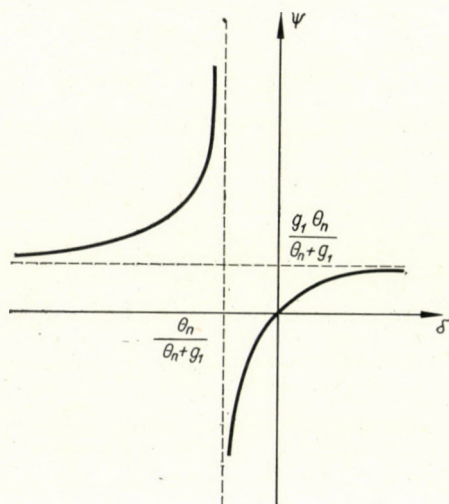


Fig. 1. Phase characteristic of the supposed loading circuit of the ideal klystron modulator

VI. The approximation problem

Let us now examine the course of function Ψ on the basis of formula (25). The curve representing this function is shown in Fig. 1. The slope of the curve at point $\delta = 0$ is g_1 . The limit value of the function at $+\infty$ is $g_1 \Theta_n / (\Theta_n + g_1)$. The function has a pole at $\delta = -\Theta_n / (\Theta_n + g_1)$. Its limit value at $-\infty$ is similarly $g_1 \Theta_n / (\Theta_n + g_1)$.

Based on Fig. 1, it may be stated that there exists no such real load, the phase characteristics of which would show a course corresponding to function Ψ within the entire frequency range. On the other hand, it is possible to approach more and more the characteristics of the ideal klystron modulator by means of real circuits, in the neighbourhood of the mode-centre. This is entirely satisfactory from the practical point of view, since this approach is in fact required only within the range of a given klystron mode.

When designing the circuits of a klystron modulator, the task is consequently to obtain a phase characteristic of the loading circuit which approaches, within a given range the ideal function Ψ as far as possible.

REFERENCES

1. PIERCE, J. R.—SHEPHERD, W. G.: Reflex Oscillators. *Bell System Technical Journal* (1947), 460—690.
2. JEPSEN, R. L.—MORENO, T.: FM Distortion in Reflex Klystrons, *Proc. I.R.E.* (1953), 32—36.
3. HOUGHTON, E. W.—HATCH, R. W.: FM Terminal Transmitter and Receiver for the TH Radio System. *Bell System Technical Journal* (1961), 1587—1626.
4. REED, E. D.: A Coupled Resonator Reflex Klystron. *Bell System Technical Journal* (1953), 715—766.
5. SCHUON, E.—BUTTERWECK, H. J.: Die Linearisierung der Frequenzmodulations-Kennlinie eines Reflexklystrons (Linearization of the Frequency Modulation Characteristic of a Reflex Klystron). *Archiv der Elektrischen Übertragung* (1958), 99—108 (in German).
6. McLACHLAN, N. W.: Ordinary Nonlinear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences. Clarendon Press, Oxford 1950.
7. SUGAL, I.: A Table of Solutions of Ricatti's Equations. *Proc. IRE* (1962), 2124—2126.
8. PATTANTYUS, I., Matematikai képletek, táblázatok (Mathematical Formulae and Tables). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1961.

DER IDEALE KLYSTRONMODULATOR

T. BERCELI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Hauptaufgabe der Frequenzmodulatoren ist die Sicherung einer Modulationskennlinie von hoher Linearität. Für diesen Zweck eignet sich der Klystronmodulator am besten. In diesem Zusammenhang hat der Verfasser folgendes Problem im allgemeinen gelöst: das aktive Element des Modulators, ein Reflexklystron ist gegeben, und es wird gefragt, welchen Forderungen der passive Verbraucherkreis genügen soll, damit die Modulationskennlinie auf ideale Weise linear sei. Die Forderung der linearen Modulation führt zu einer nichtlinearen Differentialgleichung des Phasenwinkels des Verbraucherkreises. Die als Lösung gewonnene Funktion Ψ bestimmt die Phasenkennlinie des angenommenen Verbraucherkreises des idealen Klystronmodulators. Beim Entwurf der Klystronmodulator-Stromkreise besteht die Aufgabe darin, eine Lösung zu finden, bei der die Phasenkennlinie des Verbraucherkreises in einem gegebenen Bereich die ideale Funktion Ψ möglichst annähert.

LE MODULATEUR A KLYSTRON IDÉAL

T. BERCELI

RÉSUMÉ

La tâche essentielle des modulateurs de fréquence est d'assurer une caractéristique de modulation d'une haute linéarité. Le modulateur à klystron est le plus approprié à ce but. L'auteur a résolu d'une façon générale le problème suivant: étant donné l'élément actif du modulateur qui est un klystron réflexe, on se demande quelles conditions doivent être remplies par le circuit de charge passif pour que la caractéristique de modulation soit d'une linéarité idéale. L'exigence d'une modulation linéaire conduit à une équation différentielle non-linéaire pour l'angle de phase du circuit de charge. La fonction Ψ obtenue comme solution détermine la caractéristique de phase du circuit de charge supposé du modulateur à klystron idéal. Lors de l'établissement du projet des circuits des modulateurs à klystron, le problème est d'assurer que la caractéristique de phase du circuit de charge s'approche le plus possible de la fonction idéale Ψ dans un domaine donné.

ИДЕАЛЬНЫЙ КЛИСТРОННЫЙ МОДУЛЯТОР

Т. БЕРЦЕЛИ

РЕЗЮМЕ

Основной задачей частотных модуляторов является обеспечение высоколинейной модуляционной характеристики. Для такой цели больше всего подходит клистронный модулятор. В связи с этим автор решил следующую проблему в общем виде: задан активный элемент модулятора (отражательный клистрон) и спрашивается, какие требования должны быть удовлетворены пассивной цепью нагрузки для того, чтобы модуляционная характеристика была идеально линейной. Требование линейной модуляции дает нелинейное дифференциальное уравнение для фазового угла цепи нагрузки. Полученная как решение функция Ψ определяет фазовую характеристику предполагаемой цепи нагрузки идеального клистронного модулятора. При проектировании цепей клистронных модуляторов задача состоит в том, чтобы фазовая характеристика цепи нагрузки в заданном диапазоне как можно больше приближалась к идеальной функции Ψ .

ÜBER DIE WAHL DER REIHENKAPAZITÄTEN VON STELLTRANSFORMATORWICKLUNGEN AUS DEM GESICHTSPUNKT DER STOßSPANNUNGSBEANSPRUCHUNGEN

D. KERÉNYI
KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

und

G. ÚJHÁZY
„GANZ“ ELEKTROWERKE, BUDAPEST

[Eingegangen am 30. September, 1965]

Die gleichmäßige Stoßspannungsverteilung bei Stelltransformatoren wird durch große Reihenkapazitäten der einzelnen Wicklungen allein nicht erreicht. Die Schwingungsfreiheit eines Wicklungssystems erfordert nämlich auch die Abstimmung der einzelnen Reihenkapazitäten auf einander. Stimmt die kapazitive Spannungsverteilung im Wicklungssystem mit der stationären Spannungsverteilung überein, so werden keine Schwingungen auftreten. Die verschachtelten Wicklungen ermöglichen die Änderung der Reihenkapazitäten zwischen den in der Praxis nötigen Grenzen.

I. Einleitung

Bei der Kupplung von Netzen, deren Nennspannungen voneinander abweichen, wurden innerhalb der letzten Jahre in zunehmendem Umfang Stelltransformatoren zur Energieübertragung eingesetzt. Bei Transformatoren zur Kupplung von Hochspannungsnetzen besteht nämlich das Verlangen, die Übersetzung unter Last in weiten Grenzen einstellen zu können. Eine Wicklung eines derartigen Transformators, und zwar meistens die Oberspannungswicklung ist so ausgeführt, daß sie eine Hauptwicklung und eine oder mehrere Stellwicklungen enthält. Die Stellwicklung bzw. eine der Stellwicklungen ist mit vielen (8—10) Anzapfungen versehen. Die erforderliche Übersetzung des Transformators kann nunmehr dadurch eingestellt werden, daß ein dem gewünschten Spannungsverhältnis entsprechender Teil der Stellwicklung mit Hilfe eines Stufenschalters an die Stammwicklung angeschaltet wird. Die Verwendung von Spartransformatoren zur Kupplung von Netzen bringt in vielen Fällen wesentliche wirtschaftliche Vorteile.

Die Stoßspannungsfragen spielen beim Entwurf von Stelltransformatoren eine ebenso wichtige Rolle, wie bei den Transformatoren mit konstanter Übersetzung. Die Berechnungsmethoden aber, die für den letzteren Typ von Transformatoren geeignet sind, können für die Stelltransformatoren nicht ohne weiteres verwendet werden. In diesem Falle müssen neuere Gesichtspunkte beachtet werden.

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundsätze behandelt, die bei der Bemessung der Stelltransformatoren für Stoßspannungsbeanspruchungen unbedingt berücksichtigt werden müssen, um dadurch die Beanspruchungen bis auf einen minimalen Wert herabsetzen zu können. Im Aufsatz wird das

Kriterium der Schwingungsfreiheit einer Transformatorwicklung, die mit keiner anderen Wicklung in galvanischer Kupplung steht, für ein Wicklungssystem, das aus mehreren Wicklungen besteht, angewendet, und die Bedingungen der Schwingungsfreiheit des Wicklungssystems angegeben. Danach werden praktische Methoden für die Realisierung von schwingungsfreien Wicklungssystemen vorgeführt und endlich die Ergebnisse der theoretischen Erwägungen durch Meßergebnisse an Modellwicklungen bestätigt.

II. Bedingungen für die Schwingungsfreiheit von Stelltransformatoren

Es ist bekannt, daß infolge der Überspannungen mit steiler Stirn in den Transformatorwicklungen Spannungsschwingungen auftreten können. Die durch diese Schwingungen hervorgerufenen Spannungsbeanspruchungen der Isolation können gefährliche Werte erreichen. Die Dimensionierung der Isolation für diese Beanspruchungen ist entweder ganz unmöglich oder erfordert einen solchen Mehrpreis, der sich nicht lohnt. Die Konstrukteure der zeitgemäßen Transformatoren bestreben sich darum schwingungsfreie Wicklungen auszuführen.

Die Schwingungsvorgänge von einer einzelnen homogenen Transformatorwicklung wurden erstens von K. W. WAGNER [1] behandelt. Es wurde festgestellt, daß eine Schwingung der Wicklung dann entsteht, wenn sich der Anfangszustand des Vorganges, der durch die Reihen- und Parallelkapazitäten der Wicklung bestimmt wird, von dem Endzustand, der sich aus den Widerständen der Wicklung ergibt, unterscheidet. Die Anfangsverteilung in einer schwingungsfreien Wicklung stimmt also mit der linearen Endverteilung überein. Die Anfangsverteilung wird durch den Stoßspannungsfaktor der Wicklung gekennzeichnet ($\alpha = \sqrt{C/K}$, wo C die gesamte Erdkapazität und K die resultierende Reihkapazität bedeutet). Eine lineare Anfangsverteilung tritt bei einem Stoßspannungsfaktor $\alpha = 0$ auf, das bedeutet, daß die Erdkapazität der Wicklung gleich Null ist. Da dies sich offensichtlich nicht verwirklichen läßt, kann eine Transformatorwicklung als ganz schwingungsfrei nicht ausgeführt werden. In den üblichen Transformatoren beträgt der Faktor $\alpha 5 \div 30$. Durch Vergrößerung der Reihkapazitäten kann der Stoßspannungsfaktor bis auf 0,5 vermindert werden, und der ideale schwingungsfreie Zustand läßt sich annähern. In Transformatorwicklungen mit großer Reihkapazität ($\alpha < 3$) unterscheidet sich die Anfangsspannung nur wenig von dem Endzustand, die Wicklung ist praktisch schwingungsfrei. Auf Grund dieser Erfahrung wurden in den letzten Jahrzehnten die verschachtelten Wicklungen verschiedener Art entwickelt [2, 3].

In den Transformatoren »europäischer Anordnung« sind zwei oder mehrere konzentrische Wicklungen je Phase untergebracht. Die über die einzelnen Wicklungen vorgeführten Erwägungen gelten auch für Transformatoren mit

mehreren Wicklungen, wenn man die nicht gestoßenen Wicklungen als kurzgeschlossen und geerdet betrachten kann. Diese Näherung ist nur in dem Falle statthaft, wenn die Wicklungen galvanisch nicht gekoppelt sind. In Stelltransformatoren und Autotransformatoren sind aber die Stoßvorgänge infolge der direkten galvanischen Kupplung der Haupt- und Stellwicklung bzw. der Hochspannungs- und Niederspannungswicklung viel komplizierter. In diesem Falle müssen die Stoßerscheinungen in einem Wicklungssystem, das aus mehreren Wicklungen besteht, untersucht werden.

Von dem Gesichtspunkt der Dimensionierung der Isolation aus ist die Festlegung der Bedingungen der Schwingungsfreiheit eine der wichtigsten Aufgaben. Selbstverständlich muß man erstens *die einzelnen Wicklungen* schwingungsfrei ausgestalten. Diese Forderung ist durch die großen Reihenkapazitäten der Wicklungen erfüllt. Von dem Standpunkt der Schwingungsfreiheit *des ganzen Systems* ist es aber nicht immer richtig, die möglich größten Reihenkapazitäten zu verwirklichen. Infolge der großen Reihenkapazitäten ist nämlich die Spannungsverteilung nur *innerhalb der einzelnen Wicklungen* gleichmäßig. Die Schwingungsfreiheit *des ganzen Systems* ist nur dann erfüllt, wenn sich die Spannung unter den einzelnen Wicklungen gleichmäßig verteilt, die Überspannungen der einzelnen Wicklungen sind also den Betriebsspannungen der betreffenden Wicklungen proportional. Ähnlicherweise wie bei den einzelnen Wicklungen kann das Kriterium für die Schwingungsfreiheit eines Wicklungssystems folgenderweise angegeben werden: *Ein Wicklungssystem, das aus mehreren Wicklungen besteht, ist nur dann schwingungsfrei, also die Überspannungen verteilen sich unter den einzelnen Wicklungen nur dann gleichmäßig, wenn die kapazitive Anfangsspannung jeder Wicklung mit der stationären Spannung der Wicklung übereinstimmt.* Die stationäre Spannung wird durch die Induktivitäten der Wicklungen bestimmt und kann im allgemeinen nicht verändert werden. Die Schwingungsfreiheit erfordert also die richtige Einstellung der kapazitiven Spannungen, das heißt die richtige Wahl der Wicklungskapazitäten.

Die Anfangsverteilung eines Wicklungssystems, das aus mehreren Wicklungen besteht, wird durch die Reihen- und Erdkapazitäten und durch die Kapazitäten zwischen den einzelnen Wicklungen bestimmt. Aus diesen Kapazitäten wird das kapazitive Modell des Systems aufgebaut. (Das Modell bedeutet in diesem Falle ein mathematisches Modell, das der Berechnung der Spannungsverteilung zugrunde liegt.) Da für die Feststellung der Schwingungsfreiheit die Spannungen nur an den kritischen Stellen des Wicklungssystems zu bestimmen sind, genügt es, für diesen Zweck ein vereinfachtes, aus wenigen Elementen bestehendes Modell zu benutzen. Es ist z. B. zweckmäßig, ein solches Modell zu wählen, wo jede Wicklung durch ihre resultierende Induktivität und Reihenkapazität abgebildet wird, und die Parallelkapazitäten an den Wicklungsenden (als zwei konzentrierte Kapazitäten) untergebracht sind (siehe [4, 5] und Bild 5).

Auf Grund des kapazitiven Netzes, das das Wicklungssystem abbildet, können so viele Spannungsgleichungen angeschrieben werden, wie die Zahl der Knotenpunkte in dem Netz. Sind die Kapazitäten bekannt, so können die Spannungen in den einzelnen Knotenpunkten mit Hilfe der Spannungsgleichungen bestimmt werden. In unserem Falle sind aber die Spannungen bekannt, da diese mit den stationären Spannungen der Knotenpunkte übereinstimmen müssen. Das Ersatzschema eines Wicklungssystems, das aus zwei Wicklungen besteht, kann z. B. so aufgefaßt werden wie ein Spannungsteiler, der Induktivitäten und Kapazitäten enthält (siehe das Beispiel im IV. Kapitel und das Bild 5b). Die Schwingungsfreiheit des Spannungsteilers wird selbstverständlich dadurch erreicht, daß die kapazitive Anfangsspannung mit der durch die Selbstinduktivitäten und die gegenseitigen Induktivitäten bestimmten stationären Spannungsverteilung übereinstimmt. (Es muß bemerkt werden, daß die stationären Spannungen, die sich aus der Übersetzung errechnen, nur eine Näherung bilden. Die genauen Werte ergeben sich mit Hilfe der Methode von P. A. ABETTI [6].)

In dem auf Grund der Bedingung der Schwingungsfreiheit sich ergebenden Gleichungssystem, das aus so vielen Gleichungen besteht, wie die Zahl der Knotenpunkte beträgt, werden also nur die Kapazitäten unbekannt sein. Auf Grund des Wicklungssystems können so viele Kapazitäten errechnet werden, wie die Zahl der Knotenpunkte beträgt. Die parallelen Kapazitäten des Wicklungssystems sind durch die Hauptabmessungen des Transformators und durch die verwendeten Isolierstoffe im allgemeinen eindeutig bestimmt, so daß nur die Reihenkapazitäten als unbekannt berücksichtigt werden sollen. Enthält das Wicklungssystem n Wicklungen, so ist die Zahl der Knotenpunkte nur $(n - 1)$, die Serienkapazität einer der Wicklungen kann also frei gewählt werden, die anderen errechnen sich aus dem Gleichungssystem.

Die oben angeführten Erwägungen zusammenfassend, können die Bedingungen der Schwingungsfreiheit folgenderweise summiert werden:

a) Die einzelnen Wicklungen des Wicklungssystems sollen schwingungsfrei sein ($\alpha < 3$).

b) Das Wicklungssystem als Ganzes darf nicht schwingen. Diese Forderung ist durch die richtige Wahl, die »Abstimmung« der Reihenkapazitäten auf einander erfüllt. (Eine ähnliche Abstimmung ist im Falle einer inhomogenen Transformatorwicklung erforderlich, wenn man eine gleichmäßige Spannungsverteilung erreichen kann [7].)

Auf Grund der oben vorgeführten Gedanken können beim Entwurf von Stelltransformatoren die günstigsten Kapazitäten der einzelnen Wicklungen festgestellt werden. Es muß hier bemerkt werden, daß die kapazitiven und stationären Spannungen in den verschiedenen Schaltstellungen im allgemeinen voneinander abweichen. So ergeben sich für die verschiedenen Schaltstellungen verschiedene »günstigste« Kapazitäten. Für praktische Zwecke genügt es aber,

die Berechnungen nur für die Schaltstellungen durchzuführen, in denen die ganze Stellwicklung entweder mit der Hauptwicklung in Reihe geschaltet wird, oder nur einpolig an die Hauptwicklung angeschlossen wird, während ihr anderes Ende frei ist. Die maximalen Beanspruchungen treten nämlich gemäß ausländischer [8] und eigener Erfahrungen in diesen Schaltstellungen auf, oder die hier auftretenden Beanspruchungen unterscheiden sich nur wenig von den maximalen Werten. Selbstverständlich ergeben sich auch in diesem Falle den verschiedenen Schaltstellungen entsprechend mehrere »günstigste« Kapazitäten. Beim Entwurf ist darum auf Grund der berechneten Kapazitätswerte ein guter Mittelwert zu wählen.

Ein Wicklungssystem, das als schwingungsfrei betrachtet werden kann, kann nur dann ausgeführt werden, wenn sich die gemäß der Berechnungen ergebenden Kapazitäten beim Konstruieren verwirklichen lassen. Das III. Kapitel befaßt sich darum mit den Möglichkeiten der Veränderung der Reihenkapazitäten.

III. Praktische Möglichkeiten für die Veränderung der Reihenkapazitäten

Es wurde in Kapitel II festgestellt, daß die einzelnen Wicklungen eines schwingungsfreien Wicklungssystems große Reihenkapazitäten haben müssen. Die *Lagenwicklung*, die eine der häufigst verwendeten Wicklungsarten ist, hat wegen der großen Kapazität zwischen den einzelnen Lagen ohne besondere konstruktive Maßnahmen eine bedeutende Reihenkapazität. Die Reihenkapazität der anderen häufig verwendeten Wicklungsart, der *Scheibenspulenwicklungen* kann demgegenüber nur mit gewissen Veränderungen vergrößert werden. Die Reihenkapazität der Lagenwicklung wird durch die Konstruktion praktisch genau bestimmt, dieser Wert läßt sich nur in kleinem Maße beeinflussen. Die Reihenkapazität der Scheibenspulenwicklungen kann demgegenüber zwischen den praktisch nötigen Grenzen verändert werden, ohne dadurch die anderen Daten der Wicklung (z. B. Windungszahl, Hauptabmessungen usw.) verändern zu müssen. Die erforderliche Anpassung der Reihenkapazitäten des Wicklungssystems aneinander kann also im allgemeinen nur bei Verwendung von Scheibenspulenwicklungen verwirklicht werden.

Die Reihenkapazität der gewöhnlichen Scheibenspulenwicklungen (siehe Bild 1a) kann mit der sogenannten Verschachtelung der Windungen vergrößert werden. Das Prinzip der verschachtelten Wicklungen besteht in der Steigerung des Spannungsunterschiedes zwischen den benachbarten Windungen. Auf dem Gebiete der verschachtelten Wicklungen wurden bei den verschiedenen Firmen zahlreiche Lösungen entwickelt und patentiert. Die verschachtelte Wicklung der Firma English Electric war die erste Wicklung dieser Art und

kann als am meisten charakteristisch betrachtet werden. Die Wicklung der »Ganz« Elektrotechnischen Werke kann aus der English Electric Wicklung abgeleitet werden. Diese beiden Arten der verschachtelten Wicklungen gehen aus zwei parallelen Drähten aus, das Ende des einen parallelen Zweiges wird dann nach einer gewissen Strecke mit dem Anfang des anderen parallelen Zwei-

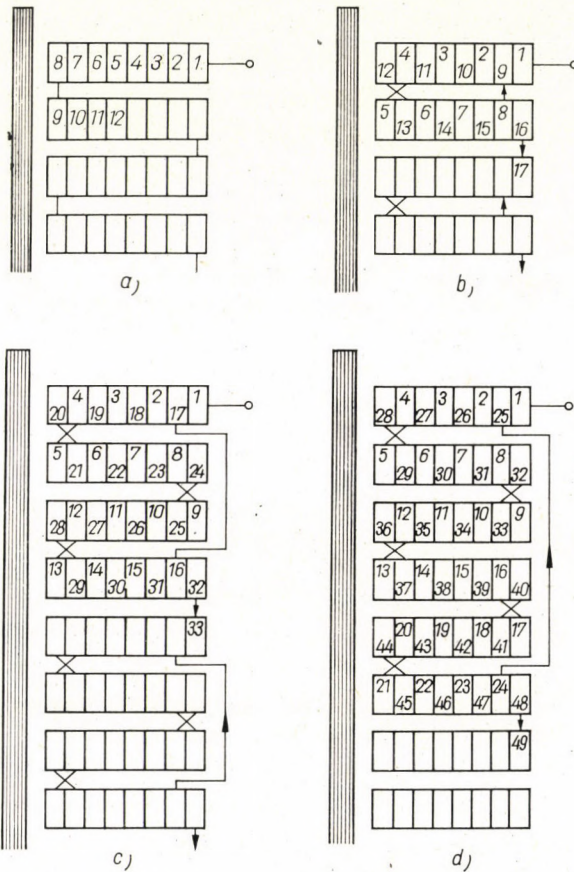


Bild 1. Scheibenspulenwicklungen verschiedener Art

a) Normale Scheibenspulenwicklung; b) Verschachtelte Wicklung mit Wicklungselementen, die aus zwei Scheiben bestehen ($E = 2$); c) Verschachtelte Wicklung mit Wicklungselementen, die aus vier Scheiben bestehen ($E = 4$); d) Verschachtelte Wicklung mit Wicklungselementen, die aus sechs Scheiben bestehen ($E = 6$).

ges verbunden. Eine solche Strecke — ein Wicklungselement — muß aus praktischen Gründen eine gerade Zahl von Scheiben enthalten. Die English Electric Wicklung wird aus Wicklungselementen, die aus zwei Scheiben bestehen, aufgebaut, ein Wicklungselement der Ganz Wicklung besteht aus 4, 6 oder mehr Scheiben (siehe das Bild 1b, 1c, 1d). Ein Wicklungselement, das aus mehreren Scheiben besteht, besitzt eine größere Reihenkapazität.

Wird die Wicklung wegen der großen Stromstärke aus zwei oder mehreren parallelen Zweigen aufgebaut, ergibt sich eine weitere Möglichkeit für die Vergrößerung der Reihenkapazität. Sind die zwei parallelen Zweige z. B. nicht nebeneinander (Bild 2a), sondern voneinander abgesondert (Bild 2b) untergebracht, so verdoppelt sich die Reihenkapazität.

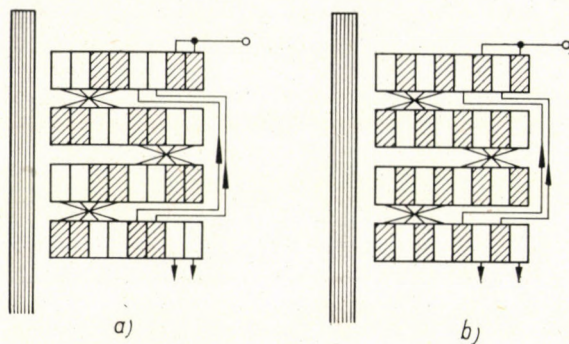


Bild 2. Verschachtelte Wicklungen aus zwei parallelen Zweigen

a) Die parallelen Zweige sind nebeneinander untergebracht ($p = 1$); b) Die parallelen Zweige liegen nicht nebeneinander ($p = 2$).

Die Möglichkeiten der Veränderung der Reihenkapazität können aus der folgenden Formel gut abgelesen werden [3]:

$$K = \frac{E^2 C_w}{4 N} (n - 1) p, \tag{1}$$

wo E die Zahl der Scheiben in einem Wicklungselement;
 C_w die Kapazität zwischen den benachbarten Windungen;
 N die Zahl der in der Wicklung untergebrachten Scheiben;
 n die Windungszahl in einer Scheibe;
 p die Zahl der parallelen Zweige
 bedeutet.

Sind die Werte für C_w , N und n , die im allgemeinen durch die elektrischen Daten und die Hauptabmessungen der Wicklung bestimmt werden, gegeben, so kann die Formel (1) in folgender Form geschrieben werden:

$$K = k E^2 p, \tag{2}$$

wo

$$k = \frac{C_w (n - 1)}{4 N}$$

ist. Bei einer Wicklung, die aus zwei parallelen Zweigen besteht, beträgt der Wert von p 1 oder 2. Aus dem Standpunkt der praktischen Ausführungen kann

die Zahl der Scheibenspulen in einem Wicklungselement 2, 4, 6 oder 8 gewählt werden. Das Verhältnis der größten und der kleinsten Reihenkapazität ist also bei den erwähnten Bedingungen

$$\frac{K_{\max}}{K_{\min}} = \frac{8^2 \cdot 2}{2^2 \cdot 1} = 32.$$

Das bedeutet also, daß die Reihenkapazität in Abhängigkeit von E und p in weiten Grenzen verändert werden kann. Die Veränderung ist selbstverständlich nur in gewissen Stufen möglich.

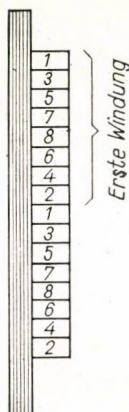


Bild 3. Einlagige Schraubenwicklung als Stellwicklung eines Stelltransformators ausgeführt. Die veranschaulichten Zahlen bedeuten die laufenden Nummern der Stufen ($N = 8$)

Die verschachtelten Wicklungen aller Art haben große Reihenkapazitäten, sie sind also schwingungsfrei. Diese Reihenkapazitäten betragen einen Wert, der um mehrere Größenordnungen höher ist als die Reihenkapazität einer normalen Scheibenspulenwicklung mit denselben elektrischen Daten und geometrischen Abmessungen.

Die verschachtelten Wicklungen werden hauptsächlich für die Hauptwicklungen der Stelltransformatoren verwendet, die Stellwicklungen werden im allgemeinen als einlagige Schraubenwicklungen ausgeführt (Bild 3). In dieser Wicklungsart sind die die einzelnen Stufen bildenden Wicklungsstrecken wie parallele Zweige nebeneinander aufgewickelt. Wie aus dem Bild ersichtlich ist, beträgt der Spannungsunterschied zwischen den benachbarten Windungen überwiegend das Zweifache der Stufenspannung. Dieser Wert ist ziemlich groß. Demzufolge ist die Reihenkapazität dieser Wicklungsart sehr groß. Es können bei diesem Wicklungstyp mehrere Kapazitätswerte im allgemeinen nur dann gewählt werden, wenn die einzelnen Stufen aus mehreren parallelen Zweigen gewickelt werden. Die resultierende Reihenkapazität der Wicklung

ergibt sich aus der Formel

$$K = C_w \frac{4np}{N}, \quad (3)$$

wo C_w die Kapazität zwischen den benachbarten Windungen;
 n die Zahl der Windungen in einer Stufe;
 N die Zahl der Stufen;
 p die Zahl der parallelen Zweige

bedeutet. Die Formel (3) wurde unter Berücksichtigung der in den Windungskapazitäten aufgespeicherten Energie berechnet.

Außer den oben vorgeführten und in der Praxis am meisten verwendeten Wicklungsarten gibt es natürlich auch andere Wicklungstypen, die in der vorliegenden Arbeit nicht erwähnt werden. Auch auf Grund der dargelegten Erwägungen kann aber festgestellt werden, daß in der Praxis die Veränderung der Reihenkapazitäten, das heißt die Abstimmung der Kapazitäten auf einander möglich ist.

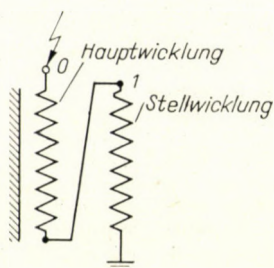


Bild 4. Schaltbild eines Stelltransformators

IV. Zahlenbeispiel

Die im II. und III. Kapitel vorgeführten Feststellungen werden durch ein Zahlenbeispiel erklärt. Für die Berechnungen wurde das geometrische Modell eines Stelltransformators gewählt. Das Modell bestand aus einer Hauptwicklung und einer Stellwicklung, die außer der Hauptwicklung konzentrisch untergebracht wurde. Die Niederspannungswicklung des Transformators wurde im Modell nicht abgebildet, ihre kapazitive Wirkung wurde aber durch einen im Inneren der Hauptwicklung untergebrachten Blechzylinder ersetzt. Die Berechnung wurde für die Schaltstellung der maximalen Spannung durchgeführt, die Haupt- und Stellwicklung wurde also mit gleicher Windungsrichtung in Reihe geschaltet (siehe Bild 4). Die Windungszahl der Hauptwicklung betrug 384, die der Stellwicklung 64. In stationärem Zustand ist der auf die Stellwicklung entfallende Anteil der gesamten Spannung ungefähr $[64/(384 + 64)] \cdot 100 = 14,3\%$ und der auf die Hauptwicklung $85,7\%$. Gemäß der Erwägungen des II. Kapitels wird die Bedingung der Schwingungsfreiheit dann erfüllt, wenn die kapazitiven Anfangsspannungen der einzelnen Wicklungen mit den stationären Spannungen übereinstimmen werden. (Außerdem müssen selbstverständlich auch die einzelnen Wicklungen schwingungsfrei sein.)

Das vereinfachte kapazitive Modell des Wicklungssystems wurde im Bild 5 veranschaulicht. Die Bezeichnungen des Bildes sind die folgenden:

- K_H die resultierende Reihenkapazität der Hauptwicklung;
 K_S die resultierende Reihenkapazität der Stellwicklung;
 C_H die Kapazität zwischen der Hauptwicklung und dem die Niederspannungswicklung ersetzenden Blechzylinder;
 C_{HS} die Kapazität zwischen der Hauptwicklung und der Stellwicklung.

Aus dem Gleichgewicht der Ladungen ergibt sich nach einer einfachen Berechnung die kapazitive Spannung der Stellwicklung, d. h. die Spannung des ersten Knotenpunktes zu

$$u_1 = u_0 \frac{K_H + 0,5 C_{HS}}{K_H + K_S + 0,5 C_H + C_{HS}} \quad (4)$$

(siehe das Bild 5b). Das Wicklungssystem wird auf Grund der oben vorgeführten Bedingung schwingungsfrei, wenn

$$\frac{u_1}{u_0} = 0,143$$

ist.

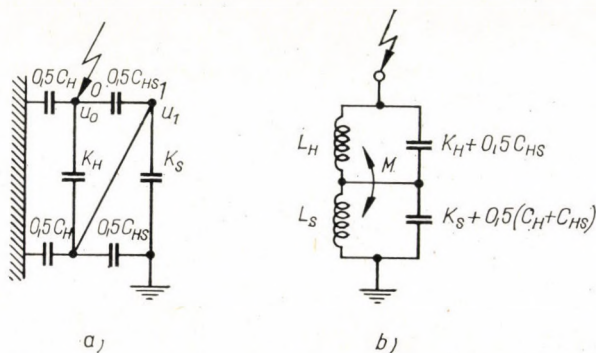


Bild 5. Vereinfachtes kapazitives Ersatzschema des im Bild 4 veranschaulichten Transformators (a) und Ersatzschema des im Bild 4 veranschaulichten Transformators nach dem Reduzieren der Kapazitäten (b)

Bezeichnungen: L_H Induktivität der Hauptwicklung; L_S Induktivität der Stellwicklung; M gegenseitige Induktivität der Haupt- und der Stellwicklung.

Aus den vier Kapazitäten, die in der Gleichung (4) vorkommen, können drei im voraus frei gewählt werden, eine der Kapazitäten muß aber auf Grund der Gleichung berechnet werden. Die parallelen Kapazitäten werden durch die Hauptabmessungen und die Dielektrizitätskonstante der verwendeten Isolation eindeutig bestimmt. In unserem Falle sind

$$C_H = 400 \text{ pF} \text{ und } C_{HS} = 320 \text{ pF}.$$

Die Stellwicklung ist eine verschachtelte Wicklung mit Wicklungselementen, die aus 8 Scheiben bestehen ($E = 8$), die Zahl der parallelen Zweige beträgt 1 ($p = 1$). Die resultierende Reihenkapazität dieser Wicklung ist

$$K_S = 2250 \text{ pF}.$$

Die oben angegebenen drei Kapazitäten und den stationären Wert von u_1/u_0 in die Gleichung (4) eingesetzt, ergibt sich für die optimale Kapazität der Hauptwicklung

$$K_{Hopt.} = 275 \text{ pF}.$$

Dieser Wert kann am besten mit der Kapazität einer verschachtelten Wicklung, in der die Wicklungselemente aus zwei Spulen bestehen ($E = 2$) angenähert werden. Die Reihenkapazi-

tät dieser Wicklung beträgt nämlich

$$K_{H(E=2)} = 420 \text{ pF.}$$

In diesem Falle weicht das Verhältnis u_1/u_0 von dem berechneten optimalen Wert nur wenig ab, die sich aus der Formel (4) ergebende Spannung ist nämlich 18,2%.

Diese Wicklung kann als schwingungsfrei betrachtet werden, da hier der Faktor $\alpha = \sqrt{400/420} \cong 1$ ist. Werden Wicklungselemente, die aus vier Spulen bestehen ($E = 4$), gewählt, so wird der vollkommen schwingungsfreie Zustand der Hauptwicklung noch besser

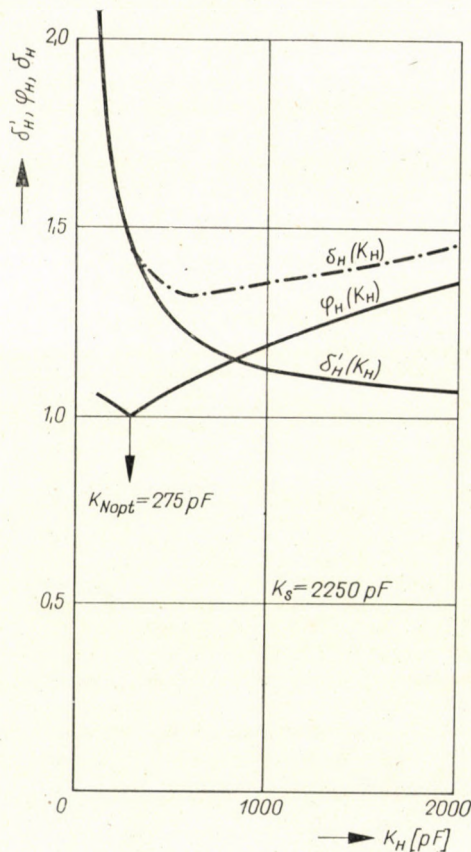


Bild 6. Faktoren, die die Spannungsverteilung innerhalb der Hauptwicklung bestimmen, in Abhängigkeit von der Reihkapazität

angenähert, da jetzt die Reihkapazität viermal so groß wird [$K_{H(E=4)} = 1680$ pF], und der Faktor α sich auf die Hälfte vermindert. Aus dem Standpunkt der Schwingungsfreiheit des ganzen Wicklungssystems genügt aber diese Lösung nicht, da jetzt die Anfangsspannung gemäß der Formel (4) 41,5% beträgt. Dieser Wert weicht von dem zum Endzustand gehörenden Wert von 14,3% wesentlich ab. Dementsprechend wird die Beanspruchung der Regelwicklung ungefähr dreimal so groß, und es ist das Auftreten von starken Schwingungen zu erwarten.

Von dem Gesichtspunkt der Stellwicklung aus ist also die Verwendung der Hauptwicklung mit kleinerer Reihkapazität unbedingt günstiger. Berechtigt wird aber die Frage aufgeworfen, in welchem Maße die Beanspruchungen der Hauptwicklung sich vergrößern, wenn man für diese Wicklung nicht die praktisch möglich größte Reihkapazität wählt. Wir wollen nun diese Frage behandeln.

Die Beanspruchungen der Hauptwicklung werden in unserem Falle durch zwei Faktoren beeinflusst. Die Stoßspannungsverteilung *innerhalb der Wicklung* hängt von dem Stoßspannungsfaktor ($\alpha_H = \sqrt{C_H/K_H}$) ab (siehe das II. Kapitel). Die Stoßspannungsbeanspruchungen werden aber auch durch die Verteilung der Spannung zwischen den einzelnen Wicklungen beeinflusst. Verteilt sich nämlich die Spannung ungleichmäßig zwischen den einzelnen Wicklungen, so entfällt auf die Hauptwicklung eine φ_H -mal größere Spannung als bei gleichmäßiger Spannungsverteilung:

$$\varphi_H = \frac{u_{H\max}}{u_{Hst}} \geq 1, \quad (5)$$

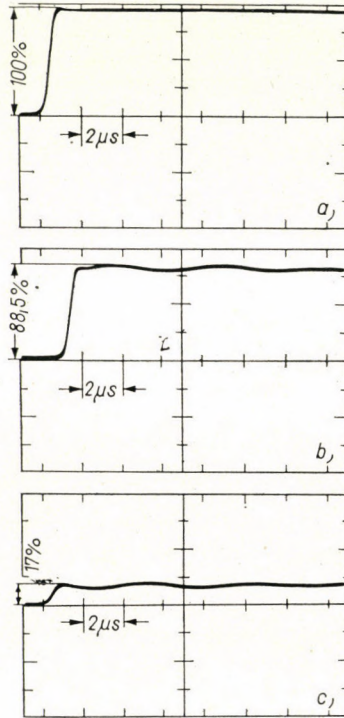


Bild 7. Oszillogramme bei richtiger Abstimmung der Kapazitäten aufeinander ($K_H = 420$ pF und $E = 2$)

Bezeichnungen: a) Wellenform der Spannung an der Klemme 0; b) Wellenform der Spannung der Hauptwicklung (Spannung zwischen den Punkten 0,1); c) Wellenform der Spannung der Stellwicklung (Spannung zwischen dem Punkt 1 und der Erde).

wo $u_{H\max}$ die maximale Spannung der Hauptwicklung, und u_{Hst} die auf die Hauptwicklung bei gleichmäßiger Spannungsverteilung entfallende, ungefähr die der Übersetzung proportionale Spannung bedeutet. In unserem Falle ist $u_{Hst} = 0,857$. Man kann leicht einsehen [4], daß bei Einheitsstoß

$$u_{H\max} = u_{Hst} + |u_{Hst} - u_{Hk}|, \quad (6)$$

wo u_{Hk} die kapazitive Spannung der Hauptwicklung bedeutet. In unserem Falle ist auf Grund des Bildes 5b

$$u_{Hk} = u_0 \frac{K_S + 0,5 (C_H + C_{HS})}{K_H + K_S + 0,5 C_H + C_{HS}}. \quad (7)$$

Für eine homogene Wicklung kann nunmehr das Verhältnis des maximalen (am Anfang der Wicklung auftretenden) und bei gleichmäßiger Spannungsverteilung sich ergebenden Spannungsgefälles bei Einheitsstoß leicht angegeben werden (z. B. [8]):

$$\delta'_H = \alpha_H \coth \alpha_H . \tag{8}$$

Wegen der ungleichmäßigen Spannungsverteilung innerhalb des Wicklungssystems muß man aber mit einem Spannungsscheitelwert höher als 1 rechnen. Der Faktor der Ungleichmäßigkeit ist im gegebenen Falle

$$\delta_H = \varphi_H \delta'_H = \varphi_H \alpha_H \coth \alpha_H . \tag{9}$$

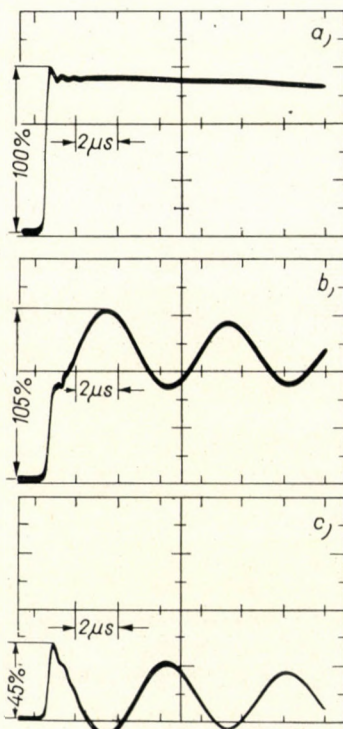


Bild 8. Oszillogramme bei unrichtiger Abstimmung der Kapazitäten aufeinander ($K_H = 1680 \text{ pF}$ und $E = 4$)

Bezeichnungen : a) Wellenform der Spannung an der Klemme 0; b) Wellenform der Spannung der Hauptwicklung (Spannung zwischen den Punkten 0,1); c) Wellenform der Spannung der Stellwicklung (Spannung zwischen dem Punkt 1 und der Erde).

Vom Gesichtspunkt der günstigsten Stoßspannungsverteilung in der Hauptwicklung muß man also den Faktor δ_H bis auf seinen Minimalwert herabsetzen.

Für unser Beispiel wurde der Wert φ_H in Abhängigkeit von der Reihkapazität K_H im Bild 6. veranschaulicht. Das Diagramm wurde auf Grund der Formeln (5), (6) und (7) und der schon gegebenen Kapazitätswerte konstruiert. In demselben Diagramm wurde auch der Faktor δ'_H von K_H aufgetragen. Ist die Kapazität kleiner als die vom Standpunkt der Schwingungsfreiheit des ganzen Systems optimale Kapazität K_{Hopt} , so wird mit abnehmender Kapazität sowohl δ als auch φ_H zunehmen. In diesem Gebiet folgt also kein Minimum des Faktors δ_H . Demgegenüber wird δ_H bei Kapazitäten größer als K_{Hopt} . mit zunehmender Kapazität abnehmen und φ_H zunehmen. Im Verlauf von δ_H kann also ein Minimum auftreten. Für den gegebenen Fall wurde im Bild auch der Verlauf des Faktors $\delta_H = \varphi_H \delta'_H$ veranschaulicht. Aus diesem Diagramm

kann festgestellt werden; daß δ_H bei einer Kapazität $K_H \cong 600$ pF sein Minimum hat. Ist die Reihenkapazität der Hauptwicklung größer als 600 pF, so wird das maximale Spannungsgefälle in der Hauptwicklung zunehmen. In unserem Beispiel unterscheidet sich also die Reihenkapazität der Hauptwicklung ($K_H = 420$ pF) nur wenig von dem für die Hauptwicklung optimalen Wert.

Auf Grund des Bildes 6 kann noch festgestellt werden, daß sich das maximale Spannungsgefälle der Hauptwicklung bei den praktischen Kapazitätswerten (400 pF und 1680 pF) nur um einige Prozente verändert. Demgegenüber wird der auf die Stellwicklung entfallende Teil der Stoßspannung bei der höheren Reihenkapazität fast dreimal so groß wie bei der kleineren. In gegebenem Falle muß also bei der Dimensionierung der Isolation von Stelltransformatoren für Stoßspannungsbeanspruchungen die Stellwicklung bevorzugt werden. Es muß noch bemerkt werden, daß die oben vorgeführten Erwägungen nur für Hauptwicklungen mit großer Reihenkapazität gelten, die Verhältnisse verändern sich wesentlich bei der Verwendung von normalen Scheibenspulenwicklungen.

Diese theoretischen Feststellungen wurden durch Modellmessungen vollkommen bestätigt. Aus den Oszillogrammen des Bildes 7 kann abgelesen werden, daß im Falle, der die optimale Abstimmung am besten annähert ($E = 2$), der auf die Hauptwicklung entfallende Anteil der ganzen Spannung 88,5%, und der auf die Stellwicklung entfallende 17% beträgt. [Auf Grund der Formel (6) errechnet sich für die Hauptwicklung 85% und der Formel (4) für die Stellwicklung 18,2%]. Demgegenüber entfällt auf die Stellwicklung bei ungenügender Anpassung 45%, und auf die Hauptwicklung 105%, siehe Bild 8. (Die berechneten Werte sind in diesem Falle 41,5% bzw. 113%). Infolge der unrichtigen Anpassung nimmt also die Beanspruchung der Hauptwicklung um 19%, die der Stellwicklung aber um 165% zu.

Die richtige Abstimmung ist also in erster Reihe für die Stellwicklung bedeutend. Es ist zu bemerken, daß im gegebenen Falle nicht die größere, sondern die richtig gewählte kleinere Reihenkapazität die Schwingungsfreiheit gewährleistet. Die gute Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Spannungswerte bestätigt nicht nur die Gültigkeit der theoretischen Erwägungen, sondern auch die Richtigkeit der Berechnungsmethode.

SCHRIFTTUM

1. WAGNER, K. W.: Das Eindringen einer elektromagnetischen Welle in eine Spule mit Windungskapazität. *Elektrotechnik und Maschinenbau* **33** (1915); 89, 105.
2. BRECHNA, H.: Stoßspannungssichere Transformatorenwicklungen. *Bulletin Oerlikon* (1958); Nr. 328/329, 89—101.
3. KARSAL, K.: Scheibenspulenwicklungen mit vergrößerter Reihenkapazität (in ungarischer Sprache). *Elektrotechnika* **55** (1962), 146.
4. WELLAUER, M.: Das Verhalten von Regulierspartransformatoren gegenüber Stoßspannungen. *Bulletin SEV* (1955), 240.
5. KERÉNYI, D.: Berechnung der Stoßspannungsbeanspruchungen von Stelltransformatoren (in ungarischer Sprache). *Elektrotechnika* **58** (1965), 453.
6. ABETTI, P. A.: Pseudo-Final Voltage Distribution in Impulsed Coils and Windings. *AIEE Transactions* **79** (1960); Part III, 87.
7. KARSAL, K.: Inhomogene Transformatorwicklungen (in ungarischer Sprache). *Elektrotechnika* **55** (1962), 538.
8. HELLER, B.—VEVERKA, A.: Stoßerscheinungen in elektrischen Maschinen. VEB Verlag Technik, Berlin 1957.

SELECTION OF THE SERIES CAPACITIES OF REGULATING TRANSFORMER WINDINGS FROM THE POINT OF VIEW OF SURGE VOLTAGE STRESSES

D. KERÉNYI and G. ÚJHÁZY

SUMMARY

The uniform distribution of surge voltages in regulating transformers cannot be obtained but by great series capacities of the individual windings. The absence of oscillations in a system of windings also requires mutual matching of the individual series capacities. If the capacitive voltage distribution in the winding system agrees with the stationary voltage distribution, no oscillations will occur. The interleaved windings permit the variation of the series capacities within the limits required in practice.

CHOIX DES CAPACITÉS EN SÉRIE DES ENROULEMENTS DES TRANSFORMATEURS
DE RÉGLAGE DU POINT DE VUE DES EFFORTS DE TENSIONS DE CHOC

D. KERÉNYI et G. ÚJHÁZY

RÉSUMÉ

La distribution uniforme des tensions de choc dans les transformateurs de réglage ne peut être obtenue uniquement par les grandes capacités en série des enroulements individuels. Pour arriver à l'absence d'oscillations dans un système d'enroulements, il faut accorder les capacités en série individuelles. Si la distribution capacitive des tensions dans le système d'enroulements est accordée avec la distribution des tensions stationnaires, il n'y aura pas d'oscillations. Les enroulements transposés permettent de varier les capacités en série entre les limites nécessaires dans la pratique.

О ВЫБОРЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЕМКОСТЕЙ ОБМОТОК
РЕГУЛИРУЕМЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТРЕБОВАНИЙ
В ОТНОШЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Д. КЕРЕНИ и Г. УЙХАЗИ

РЕЗЮМЕ

Равномерного распределения импульсного напряжения в случае регулируемых трансформаторов нельзя достигнуть только при помощи высоких значений последовательных емкостей отдельных обмоток. Свобода колебания некоторой системы обмоток, как известно, требует также согласования между собой отдельных последовательных емкостей. Если емкостное распределение напряжения согласуется в системе обмоток с стационарным распределением напряжения, тогда не возникнет никаких колебаний. Расположенные в шахматном порядке обмотки позволяют производить изменение последовательных емкостей в необходимых на практике границах.

SOME REMARKS ON THE OPTIMUM SETTING OF VARIABLE PARAMETER PROCESS-CONTROLLERS

T. VÁMOS

DOCTOR OF TECHN. SC.

and

J. GYÜRKI

RESEARCH INSTITUTE FOR AUTOMATION OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received November 19, 1965]

Authors made an analogue computation study to investigate the effect of parameter-changes in controlled plants on the optimum setting of controllers. Basic types of plants with two- and three-term controllers were modelled and conclusions are made for the optimum criterion of variable parameter controller settings.

Since the basic paper of ZIEGLER and NICHOLS [1], published in 1942, on the problem of the optimum setting of controllers an abundant literature has been available. Following the initial analogue computer solutions the mathematical theory of optimum setting has also been elaborated. Because of the easier computation and because of other practical considerations most of the publications discuss the minimization of the root mean square error. By means of the Parseval theorem indicating the relation between infinite interval integrals of the time and frequency domain this question can be discussed in a more simple way. The literature discusses in detail the problems of optimum setting according to different criteria [2].

The purpose of this paper is to draw attention to a practical problem arising in a wide class of process controls, namely the effect of the variation of the process parameters on the optimum setting of the controllers. As opposed to the previous simplifying view, aiming to describe the processes by linear equations of constant parameters, the majority of processes show considerable differences.

The variable parameters in several cases play a more important role than the nonlinearities, because in the practical cases the controlled range of normal operation is made so narrow, that the linear approximation generally proves fully satisfactory. The variation of the parameters — as was shown by the author previously in the case of boilers [3] — may be very significant, which may influence the optimum setting derived on the basis of constant parameters. Though in the general theory of variable parameter-systems important problems have been solved, it has not been possible to obtain explicit formulae for the computation of the parameter depending time-integrals of feedback systems. In the majority of cases the changes of the parameters are not fast, they last considerably longer than the time-constants of the systems, so that

it is possible to make a comparison between the optimum settings of two different parameter (time constant) systems, and also in the case of the deterioration of the setting, made for a given time constant, and altered by the change of the latter.

In a previous paper [4] the effect of the statistical fluctuations of the control error on the optimum parameter of the controlled process was discussed in details. In the case of a deviation from the optimum setting of the controller caused by the alteration of one of the system-parameters — the deviation of the system optimum generated by the statistical disturbance of the system will also be statistical. From this point of view the mean absolute value or the mean square of the error is characteristic, thus, the quadratic and absolute integral value criteria are suitable for our investigations.

In this paper we discuss a few typical linear controlled processes connected with two- and threeterm controllers. These controllers are set "optimally" for a discrete state by the method discussed later. We observe the change of the selected dynamic quality characteristic integral

$$\int_0^{\infty} |e| dt$$

as a response to a step function input, if we vary the time constant of the controlled process over a wide range. The paper gives the results of the analogue computations and some conclusions.

As pointed out by STREJC [5] and NASLIN [6], from the point of view of the transients in linear systems — and especially for the error integrals summing these transient effects — the investigation of a few basic types is sufficient. The following selected basic types were computed:

$$\text{one time lag, with delay} \quad Y(s) = e^{-sr} \frac{K}{1 + T_s};$$

$$\text{two identical time lags} \quad Y(s) = \frac{K}{(1 + T_s)^2};$$

$$\text{two different time lags} \quad Y(s) = \frac{K}{(1 + T_s)(1 + T_{0s})}.$$

Figures 1–10 contain the results of the investigations. The two- and three-term regulators were set according to the nominal values of the parameters of the plant, to minimize the integral of the absolute value of the error. Without varying the adjustment of regulator, the dominant time constant T was altered, and its effect on the value of the error-integral was observed.

The analogue models of the controlled plants and three-term regulator are shown in Fig. 11. These models give the possibility of rapid changes and

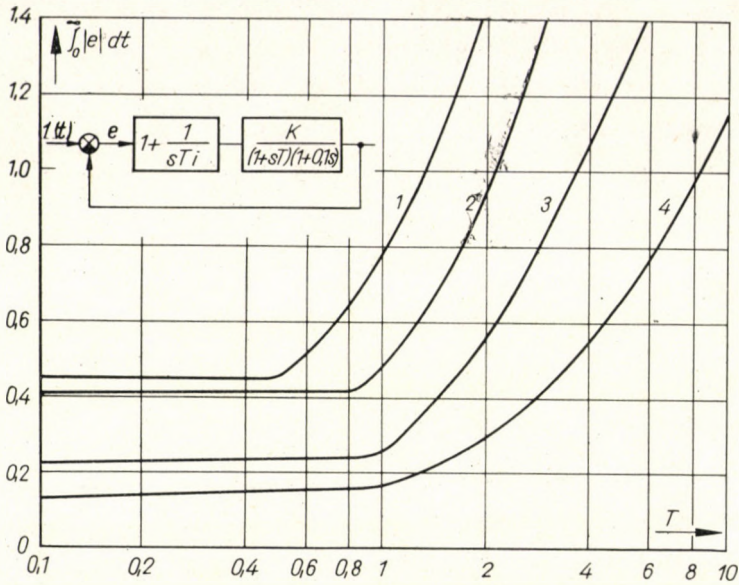


Fig. 1. Second order system, with two-term controller; optimum setting at nominal value ($T_n = 1$ sec)

1 curve: $K = 1$, $1/T_i = 2,2$; 2 curve: $K = 2$, $1/T_i = 1,2$; 3 curve: $K = 4$, $1/T_i = 1,0$;
4 curve: $K = 10$, $1/T_i = 1,0$.

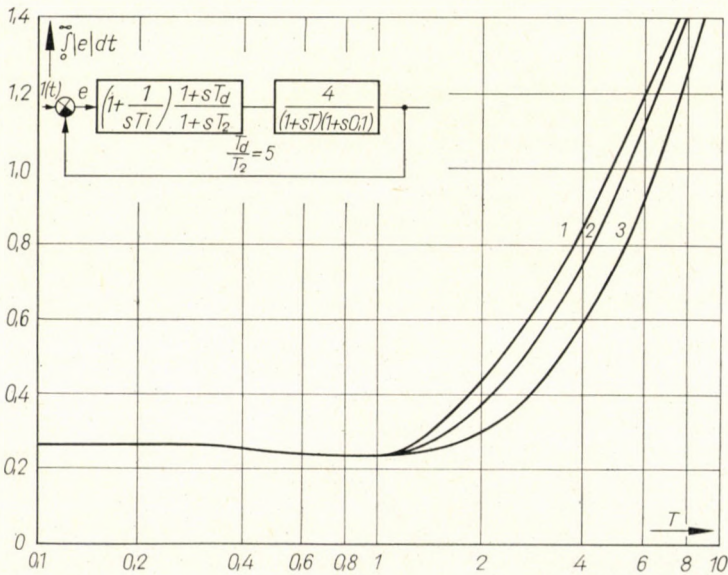


Fig. 2. Second order system, with three-term controller; the effect of the differentiating term ($T_n = 1$ sec)

1 curve: $1/T_i = 1$, $T_d = 0,25$; 2 curve: $1/T_i = 1$, $T_d = 0,5$; 3 curve: $1/T_i = 1$, $T_d = 1,0$.

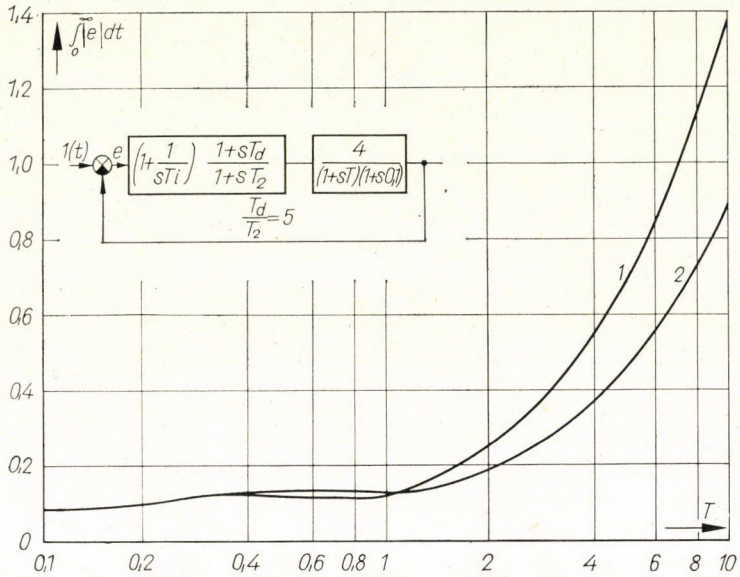


Fig. 3. Second order system, with three-term controller; optimum setting at nominal value ($T_n = 1$ sec)

1 curve: $1/T_i = 3,5$, $T_d = 0,5$; 2 curve: $1/T_i = 3,0$, $T_d = 1,0$.

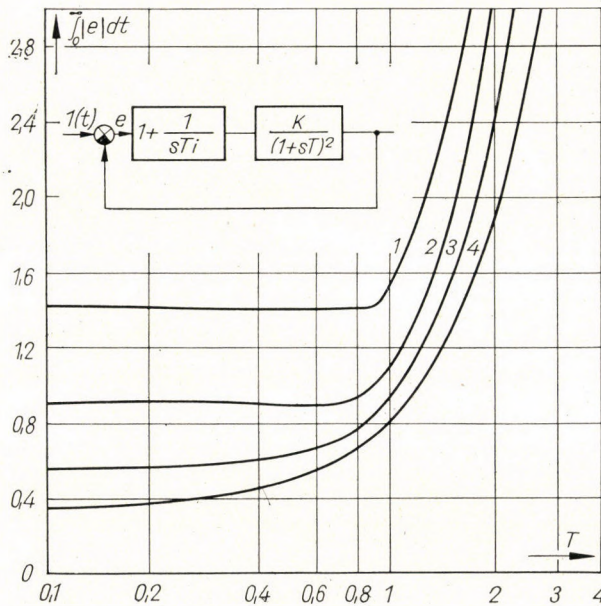


Fig. 4. Double-pole system with two-term controller; optimum setting at nominal value ($T_n = 1$ sec)

1 curve: $K = 1$, $1/T_i = 0,7$; 2 curve: $K = 2$, $1/T_i = 0,53$;
 3 curve: $K = 4$, $1/T_i = 0,43$; 4 curve: $K = 10$, $1/T_i = 0,31$.

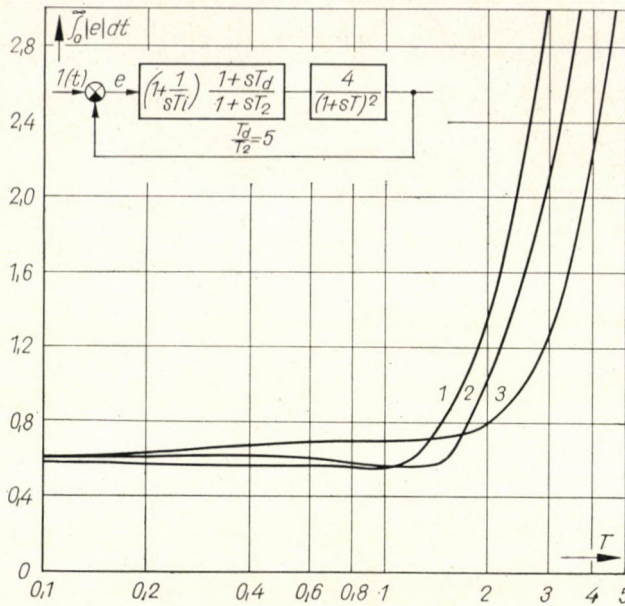


Fig. 5. Double-pole system with three-term controller; the effect of the differentiating term ($T_n = 1$ sec)
 1 curve: $1/T_i = 0,43$, $T_d = 0,5$; 2 curve: $1/T_i = 0,43$, $T_d = 1,0$; 3 curve: $1/T_i = 0,43$, $T_d = 2,5$.

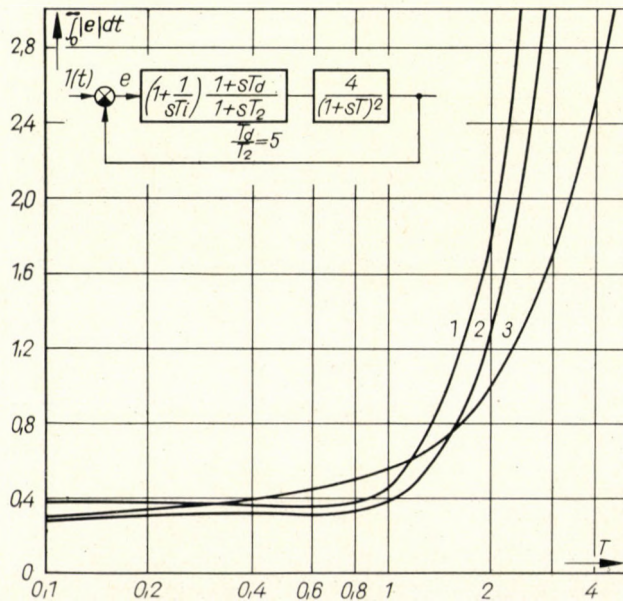


Fig. 6. Double-pole system with three-term controller; optimum setting at nominal value ($T_n = 1$ sec)
 1 curve: $1/T_i = 0,7$, $T_d = 0,5$; 2 curve: $1/T_i = 0,8$, $T_d = 1,0$; 3 curve: $1/T_i = 0,9$, $T_d = 2,5$.

adjustments since only one of the parameters becomes altered by one of the adjusting elements (potentiometers).

In the diagrams τ is plotted with relative values, the computer unit is one second. In all demonstrated cases the procedure was as follows: The time constant or time delay dominating the performance of the system at the plant has been fixed in the nominal value of 1 sec which was taken as a basis. (T_n, τ_n).

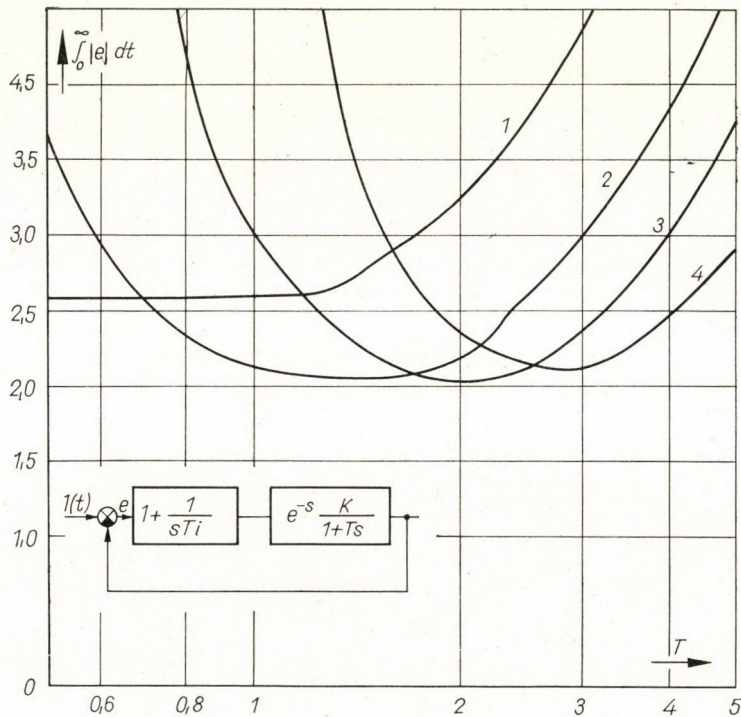


Fig. 7. First order system with time delay and two-term controller; optimum setting at nominal value ($\tau = 1$ sec, $T_n = 2$ sec)

- 1 curve: $K = 0,5$, $1/T_i = 0,75$; 2 curve: $K = 1,0$, $1/T_i = 0,5$;
 3 curve: $K = 1,5$, $1/T_i = 0,4$; 4 curve: $K = 2,0$, $1/T_i = 0,3$.

After that the setting of the PI, resp. PID controllers, simulated also on the analogue computer was varied until the minimal $\int_0^{\infty} |e| dt$ value has been reached. This situation conforms to the practical case when the optimum setting of the controller is made on the basis of the plant parameters measured or calculated once. After that the plant parameters have been changed (T time constant and K gain) and the influence of these parameter changes supposed during the operation was investigated in conjunction with the chosen optimum criterion.

The time delay cannot be exactly simulated by means of the standard analogue computer elements (summaters, integrators, potentiometers). Various approximations are being used giving a more or less adequate realization of the desired transfer function.

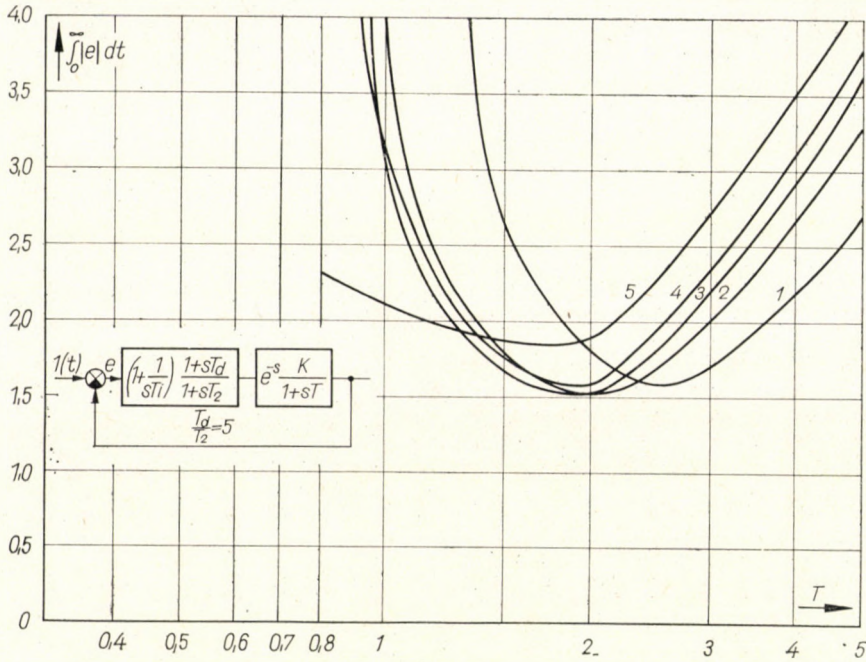


Fig. 8. First order system, with time delay and three-term controller; optimum setting at nominal value ($\tau = 1$ sec, $T_n = 2$ sec)

- 1 curve: $K = 2,0$, $1/T_i = 0,4$, $T_d = 0,384$; 2 curve: $K = 1,5$, $1/T_i = 0,5$, $T_d = 0,454$;
 3 curve: $K = 1,2$, $1/T_i = 0,6$, $T_d = 0,625$; 4 curve: $K = 0,8$, $1/T_i = 0,9$, $T_d = 1,111$;
 5 curve: $K = 0,3$, $1/T_i = 1,75$, $T_d = 2,00$.

The applied approximation is well known in the literature. The realized transfer function:

$$e^{-p\tau} \cong \prod_{i=1}^2 \frac{1 - 2\xi_i \tau_i p + \tau_i^2 p^2}{1 + 2\xi_i \tau_i p + \tau_i^2 p^2},$$

$$\tau = 4 \sum_{i=1}^2 \xi_i \tau_i.$$

2. Data: $\xi_1 = 0,866$; $\xi_2 = 0,4$; $\tau_1/\tau_2 = 1,68$.

The approximation is of all-pass character, i.e. without amplitude-error. The linear phase characteristic is valid to 7,44 radian phase shift. Within this range the maximum phase-error is 0,021 rad.

The error of the approximation from the point of view of transient response is relatively high because the delay of the high frequency components in the step function is bad. (We refer to the Fourier-transform.)

The relations are by far better if we do not realize a pure delay but a block containing also a proportional element, being our case at present. If the

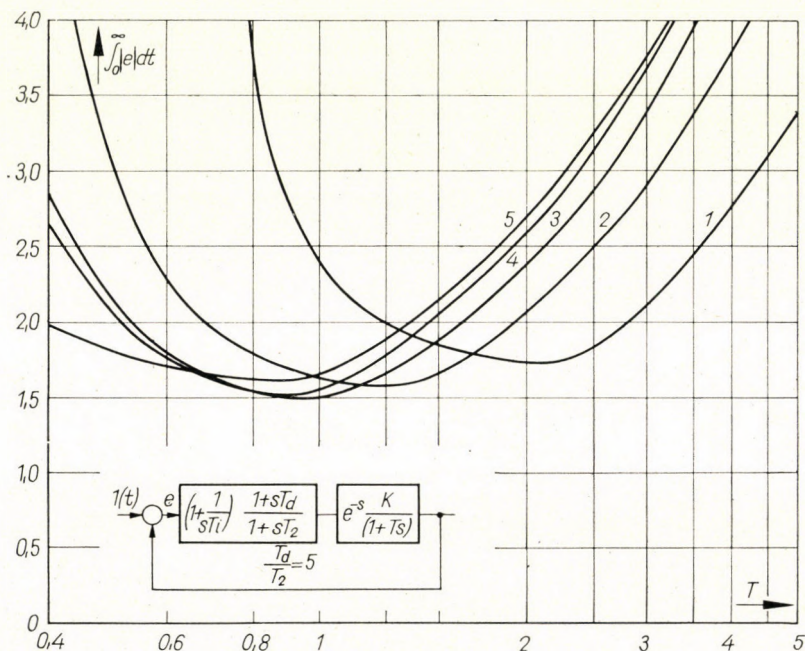


Fig. 9. First order system, with time delay and three-term controller; optimum setting at nominal value ($\tau = 1$ sec, $T_n = 1$ sec)

- 1 curve: $K = 1,5$, $1/T_i = 0,4$, $T_d = 0,25$; 2 curve: $K = 1,0$, $1/T_i = 0,7$, $T_d = 0,312$;
 3 curve: $K = 0,7$, $1/T_i = 1,0$, $T_d = 0,50$; 4 curve: $K = 0,5$, $1/T_i = 1,5$, $T_d = 0,714$;
 5 curve: $K = 0,3$, $1/T_i = 2,1$, $T_d = 1,00$.

time constant of the proportional part is in the magnitude of the delay time or it is greater the error is diminishing. (Fig. No. 12.)

At the referred computations the distortion did not influence the results and the qualitative conclusions.

The diagrams presented indicate the following important conclusions:

1. The change of the dominant time parameter, given for the controlled phase of supposed on the basis of the chosen optimum setting criterion, greatly influences this criterion. In the case of variable parameter processes this generally exerts a considerable effect on the performance and economy of the system, as was to be expected.

2. The change of the parameter, characterizing the optimum in the region of the working point chosen on the basis of the hypothetical constant system parameter is in many cases rather asymmetrical.

It follows that:

a) In setting the controllers "optimally" we have to check the optimum criterion for the whole range of the expected parameter values and must not be satisfied with the usual mean estimations.

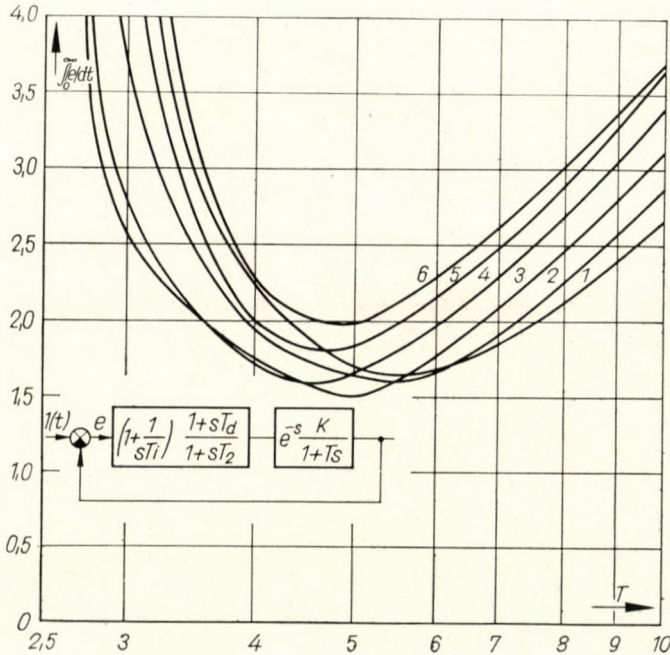


Fig. 10. First order system, with time delay and three-term controller; optimum setting at nominal value ($\tau = 1$ sec, $T_n = 5$ sec)

1 curve: $K = 4,5$, $1/T_i = 0,2$, $T_d = 0,417$; 2 curve: $K = 4,0$, $1/T_i = 0,2$, $T_d = 0,454$;
 3 curve: $K = 3,5$, $1/T_i = 0,2$, $T_d = 0,50$; 4 curve: $K = 3,0$, $1/T_i = 0,225$, $T_d = 0,714$;
 5 curve: $K = 2,5$, $1/T_i = 0,26$, $T_d = 1,111$; 6 curve: $K = 2,0$, $1/T_i = 0,35$, $T_d = 1,666$.

b) In the less sophisticated cases, where an adaptive control is not needed, the controller should be set at a point, which is optimal for the whole variation range. This point may in some cases be at one end of the expected band and not necessarily at its centre. In the case of statistical disturbance (input) we have to fix the setting on the basis of the appropriate optimum criterion matched to the statistical distribution of the input and the statistical distribution of the variable parameters. Therefore we have to consider what is the expected frequency of the single parameter changes in the region of the setting and what is the effected deviation from the optimum, caused by these parameter changes.

The setting must be fixed at that parameter where the best optimum-criterion value can be expected considering the expected variations. The criterion itself is of course independent of these considerations: it follows from the technical-economical condition of the system.

More exactly: let the optimum criterion for any functional ψ be:

$$\psi = \psi[y(t), t],$$

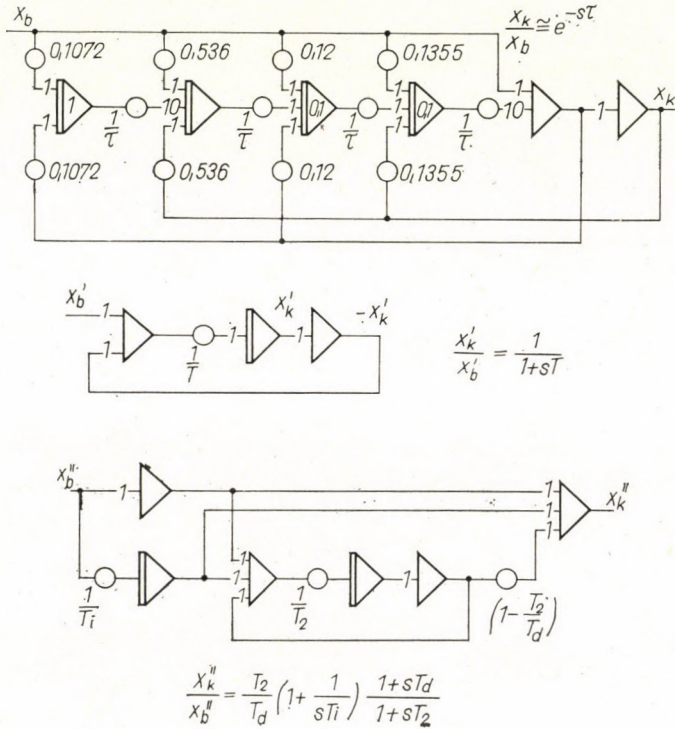


Fig. 11. Analogue computer block-schemes

where $y(t)$ is the output of the closed loop controlled system $y(t)$ is a function of the input $x(t)$ and of the variable parameter z of the system:

$$y(t) = g[x(t), z, t].$$

where

- $x(t)$ is, in the general case, a statistical variable with known statistical characteristics;
- g is any absolute integrable function;
- $z_1 < z < z_2$ is, in the general case a statistical variable with known distribution in a definite interval.

We have to find the optimum of ψ (per definitionem maximum or minimum), taking into consideration the whole range of variables given by the above conditions. For the cases discussed, the usual design for a fixed $x(t)$ input (e.g. step function) and fixed z parameter (e.g. time constant) is insufficient.

c) In more complicated problems, where the change of optimum involves considerable economic loss, an adaptive controller must be used [7]. This need can be checked by computations for the given cases on the basis of point b).

It should be pointed out that the conclusions drawn on the basis of the

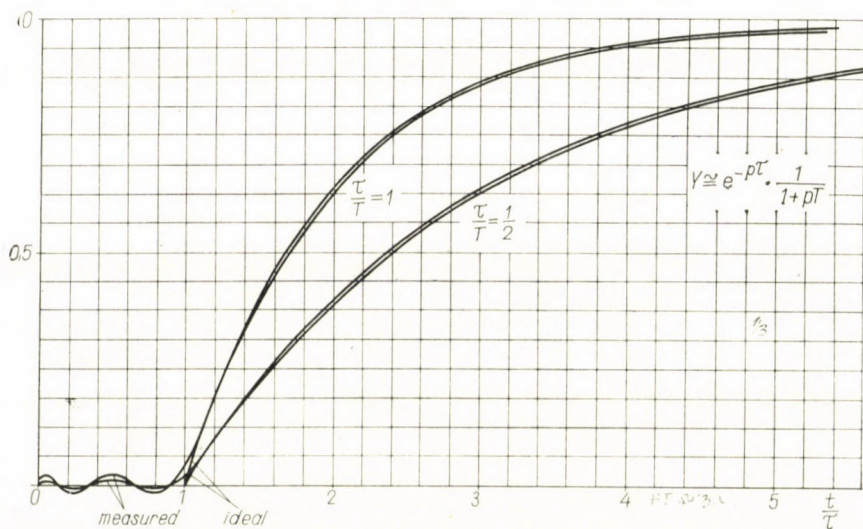


Fig. 12. The approximation of the time-delay

IAE (Integral-Absolute-Error) criterion [8], chosen by way of example, are also valid — mutatis mutandis — for other criteria, e.g. the ITAE (Integral-Time-Absolute-Error) criterion.

GRAHAM and LATHROP, discussing the various optimum setting criteria [9], touch on this question, but because of the differing purpose of their paper they do not further discuss the examples and do not draw conclusions similar to the above. For other types of transfer functions, for other input signal forms and other optimum criteria it has not been possible to find any closed formulae which could give an explicit expression for the influence of the parameters and the tendencies of change in general cases. This is probably not possible and would have no practical use. Similarly we did not consider it useful, to elaborate a more detailed collection of examples or nomograms beyond the above illustrative ones. The purpose of this paper was to draw the conclusions under a) to c), emphasizing the need for individual analogue or digital computer calculations.

*

ACKNOWLEDGEMENT

The authors wish to express their thanks to I. NAGY, cand. of techn. sc. for his valuable remarks.

REFERENCES

1. ZIEGLER, J. G.—NICHOLS, N. B.: Optimum Settings for Automatic Controllers. *Trans. ASME* (1942), 759—767.
2. NEWTON—GOULD—KAISER: Analytical Design of Linear Feedback Controls. John Wiley, 1957.
3. VÁMOS, T.: Роль барабана котла в блоксхеме регулирования нагрузки и передаточные функции котла. *Acta Techn. Hung.*, 27 (1959), 3—4.
4. VÁMOS, T.: Az energetikai optimalizálás néhány fő kérdéséről. Technical report No. 427 of the Research Institute for Electrical Energy (VILLENKI), Budapest 1963.
5. STREJČ, V.: Aproximace aperiodických přechodových charakteristik. *Slaboproudý Obzor* (1957), 565—571.
6. NASLIN, P.: Retour sur un critère algébrique d'amortissement. *Automatisme* 9 (1964), 315—320.
7. SARTURE, C. W.—ASELTINE, J. A.: Performance Criteria in Adaptive Control Systems. Proc. of Symp. Garden City, Oct. 1960; Pergamon Press, 1963.
8. GRAHAM, D.—LATHROP, R. C.: The Synthesis of "Optimum" Transient Response: Criteria and Standard Forms. *Trans. AIEE* 72 (1953); pt. II., 273—88.
9. GRAHAM, D.—LATHROP, R. C.: The Influence of Time Scale and Gain on Criteria for Servomechanism Performance. *Trans. AIEE*, 73 (1954); pt. II, 153—158.

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR OPTIMALEN EINSTELLUNG DER REGLER
VON PROZESSEN MIT VERÄNDERLICHEN PARAMETERN

T. VÁMOS, und J. GYÜRKI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Parameteränderungen der Regelstrecke sind eine Erscheinung, die beim großen Teil der Prozeßregelung eine Rolle spielt. Ihre Wirkung auf die optimale Einstellung der Regler wird mit Hilfe eines Analogrechners bei Anwendung von PI bzw. PID Reglern geprüft. Die Verfasser ziehen Folgerungen in Bezug auf das Optimum-Kriterium der durch verschiedene Parameteränderungen beeinflussten Reglereinstellungen.

QUELQUES REMARQUES SUR LE RÉGLAGE OPTIMUM DES RÉGULATEURS DE
PROCESSUS A PARAMÈTRES VARIABLES

T. VÁMOS et J. GYÜRKI

RÉSUMÉ

Les auteurs utilisant des calculateurs analogues ont examiné l'influence qu'un phénomène intervenant dans une large gamme de problèmes de régulation des processus, à savoir la variation des paramètres de la section réglée, exerce sur le réglage optimum des régulateurs PI ou PID. Ils tirent des conclusions sur le critère du réglage optimum des régulateurs, influencé par les différentes variations des paramètres.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ОПТИМАЛЬНОЙ НАСТРОЙКЕ РЕГУЛЯТОРОВ
ПРОЦЕССОВ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Т. ВАМОШ и Й. ДЮРКИ

РЕЗЮМЕ

Авторы произвели исследования на вычислительной машине непрерывного действия применением регуляторов ПИ и ПИД широкого класса явлений, имеющих место при регулировании процессов, с целью определения влияния изменений параметров объектов регулирования на оптимальную установку регуляторов и сделали выводы о критерии оптимальной установки регуляторов.

ON THE STARTING PHENOMENA OF ASYNCHRONOUS MOTORS

K. P. KOVÁCS

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
RESEARCH INSTITUTE OF THE ELECTRIC POWER INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received January 6, 1966]

At the starting of asynchronous motors — inasmuch as the accelerated masses having a small moment of inertia and no mechanical resistance is concerned — in consequence of the high accelerations, the speed of the motor may overshoot the synchronous speed, the no load speed being attained after damped oscillations. The author analytically deduces the conditions of the harmonic oscillations and shows that the data known from literature need correcting.

I. Introduction

It is well known that at the starting of asynchronous motors, when the moment of inertia of the mass to be started is small (e. g. the machine starts only by itself), in consequence of the torque conditions caused by the high acceleration the speed may exceed the synchronous speed. The rotor of the machine attains the no load speed under damped oscillations. Naturally these speed oscillations are concerned also with torque oscillations.

It became known from literature — especially in connection with the investigations carried out, with analog computers — that in the case of high acceleration the torque speed characteristic does not follow by far the static torque characteristic. In the case of high acceleration, on the one hand, the value of the torque-maxima (pull-out torques) decreases, and on the other hand, the machine arrives to the no load speed (approx. $M_{\text{mech.}} = 0$) in such a way that meanwhile also generator-torque conditions appear, corresponding to the speed oscillations. The conditions are shown by curve 2 on Fig. 1, which shows some analog computed results [1].

If the acceleration is going on slowly e. g., because a great mass must be accelerated, the machine will follow the static torque characteristics shown in Fig. 1 as well (curve 1).

From the measuring data obtained with the analog computer that limit of the torque of inertia was determined below which the acceleration is terminated amidst oscillations or when the machine reaches the no load speed aperiodically. This limit can be determined also analytically as will be shown further on — when it became evident that the conclusion drawn from the measurements performed with the analog computer did not lead to the quite correct result (owing to the fact that the extremum conditions are difficult to evaluate).

II. Equations of the accelerating motor

Assumptions:

- a) The machine is connected to 3-phase symmetrical mains;
- b) the changes of saturation are disregarded, the permeability in the iron is considered as being constant (saturated);
- c) the ohmic resistance of the stator is neglected;
- d) It is assumed that the rotor of the machine is allowed to accelerate freely only after the passing of the electromagnetic transients arising at switching-on: in other words, at the very moment of the beginning of acceleration, in the machine there exist stationary short circuit conditions (stationary short circuit current and torque);
- e) pure acceleration of masses is assumed (every mechanical friction is considered negligible);
- f) the leakage inductance of the stator and of the rotor are assumed to be equal: $L_s = L_r$.

The equation of the motor is written in the form known from literature [2] and a synchronous rotating frame is used, where the real axis of the co-ordinates is coincident with the direction of the stator voltage. Thus in these moving co-ordinates the value of the voltage is real and constant:

$$\bar{U}_s = U. \quad (1)$$

The equations are:

$$\bar{U}_s = U = \frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} + j\omega_1 \bar{\Psi}_s, \quad (2)$$

$$\bar{U}_r = 0 = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} + js\omega_1 \bar{\Psi}_r, \quad (3)$$

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} I_m (\bar{\Psi}_s^* \bar{i}_s), \quad (4)$$

where ω_1 is the angular frequency of the mains, the asterisk placed above the symbol denoting the conjugate complex quantity.

Expressing \bar{i}_r and \bar{i}_s , respectively, by the flux, Equs (3) and (4) respectively, pass onto the following:

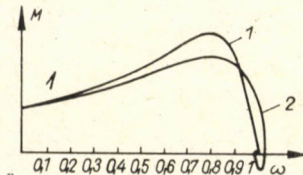
$$0 = s_k \omega_1 (\bar{\Psi}_r - k\bar{\Psi}_s) + \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} + js\omega_1 \bar{\Psi}_r, \quad (3a)$$

and

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{k}{L_r'} \text{Im} (\bar{\Psi}_s^* \bar{\Psi}_r), \quad (4a)$$

ERRATUM

Regrettably the figure as referred to in the paper *On the Starting Phenomena of Asynchronous Motors* by K. P. Kovács (in Vol. 54, Fasc. 3—4, p. 453) had been omitted. Now this figure is printed herebelow:



respectively, where $s_k = R_r/\omega_1 L'_r$ is the static pull-out slip of the machine and

$$k = \frac{L_m}{L_m + L_{s\sigma}} = \frac{L_m}{L_m + L_{r\sigma}},$$

and where

$$L'_r = L_{s\sigma} + \frac{L_{r\sigma} L_m}{L_{r\sigma} + L_m} = L_{r\sigma} + \frac{L_{s\sigma} L}{L_{s\sigma} + L_m}$$

is the transient inductivity.

As the length of the voltage vector does not change and as the ohmic stator resistance is disregarded it becomes in the synchronous co-ordinates

$$\frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} = 0$$

and so Equ. (2) takes the following form:

$$U = j\omega_1 \bar{\Psi}_s. \quad (2a)$$

The following further simplifications are introduced:

a) $\omega_1 t = \tau$;

b) we pass onto relative units. Namely: $U_N = 1$ (maximum value) is the nominal voltage;

$$\Psi_N = U_N/\omega_1$$

and the nominal output is

$$P_N = \frac{3}{2} U_N I_N.$$

If we refer the voltages to the nominal voltage, the fluxes to the nominal flux and the angular velocity to the nominal (synchronous) angular velocity then the above equations change to the following (no separate letters or indices are used to indicate relative units):

$$1 = j\bar{\Psi}_s \quad (5)$$

$$0 = s_k (\bar{\Psi}_r - k\bar{\Psi}_s) + \frac{d\bar{\Psi}_r}{d\tau} + js\bar{\Psi}_r, \quad (6)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{k}{H\omega_1 X'_r} \text{Im}[\bar{\Psi}_s^* \Psi_r], \quad (7)$$

where in Equ. (7) $H = \omega_1^2 \Theta/P_N$ is the inertia coefficient of the machine.

If ω_1 is the angular velocity referring to 50 Hz ($\omega_1 = 314$) then for machines having more than two poles

$$H = \frac{\left(\frac{\omega_1}{z_p}\right)^2 \Theta}{P_N},$$

where z_p indicates the number of pole pairs. Taking into account this and the circumstance that for the same flux and impedances the mechanical torque acting on the shaft of the machine is

$$M = z_p^3 \text{Im}(\bar{\Psi}_s^* \bar{i}_s).$$

Equ. (7) retains its original form, where, however, ω is a relative value referred to the real synchronous angular velocity of the shaft (ω_1/z_p) (i. e. in the case of synchronous rotation $\omega_1 = 1$).

The complex quantities figuring in Eqs (5), (6) and (7) are divided into their real and imaginary parts

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_s &= \Psi_\alpha + j\Psi_\beta, \\ \bar{\Psi}_r &= \Psi_{r\alpha} + j\Psi_{r\beta}.\end{aligned}$$

By substitution we obtain the following relations:

$$\begin{cases} 0 = \Psi_\alpha \\ -1 = \Psi_\beta \end{cases} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= s_k \Psi_{r\alpha} + \frac{d\Psi_{r\alpha}}{d\tau} - s\Psi_{r\beta}, \\ 0 &= s_k(\Psi_{r\beta} + k) \frac{d\Psi_{r\beta}}{d\tau} + s\Psi_{r\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{k}{H\omega_1 X_r^1} \Psi_{r\alpha}. \quad (10)$$

The slip shall also be introduced on the left side of Equ. (10). Owing to the relative units we have written ω instead of ω/ω_1 and therefore

$$\omega \equiv \frac{\omega}{\omega_1} = (1-s) \frac{\omega_1}{\omega_1} = 1-s,$$

that is

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{ds}{d\tau};$$

and Equ. (10) changes to

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{k}{H\omega_1 X'_r} \Psi_{r\alpha}. \quad (11)$$

III. The oscillation equation

If we wish to examine whether the machine attains the no load speed under oscillations or aperiodically we have to examine the coefficients of the following type of differential equation:

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} + A \frac{ds}{d\tau} + Bs = f(s). \quad (12)$$

It is well known that oscillations will appear if

$$A^2 - 4B < 0. \quad (13)$$

The process will become aperiodic, if

$$A^2 - 4B \geq 0. \quad (14)$$

Let us examine how we could obtain from equations (9) and (10) a form similar to Equ. (12). For this purpose we differentiate both sides of Equ. (11):

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = \frac{k}{H\omega_1 X'_r} \frac{d\Psi_{r\alpha}}{d\tau}. \quad (15)$$

Substituting $d\Psi_{r\alpha}/d\tau$ from the first equation of Equ. (9) into Equ. (15)

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = \frac{k}{H\omega_1 X'_r} (s\Psi_{r\beta} - s_k\Psi_{r\alpha}). \quad (16)$$

Substituting $\Psi_{r\alpha}$ from (11) into (16)

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = \frac{k}{H\omega_1 X'_r} s\Psi_{r\beta} - s_k \frac{ds}{d\tau}. \quad (17)$$

Or writing Equ. (17) in another form

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} + s_k \frac{ds}{d\tau} - \frac{k\Psi_{r\beta}}{H\omega_1 X'_r} s = 0. \quad (18)$$

1. The value of $\Psi_{r\beta}$ in the region of $s = 0$

In Equ. (18) $\Psi_{r\beta}$ appears in the coefficient of s . Its value must be determined. As the oscillations take place around the no load (synchronous) speed, the value of $\Psi_{r\beta}$ has to be examined at a quite small slip (practically at $s = 0$). In stationary state ($s = \text{constant}$) the Equ. (9) change to:

$$\left. \begin{aligned} (d\Psi_{r\alpha}/d\tau = d\Psi_{r\beta}/d\tau = 0). \\ 0 = s_k \Psi_{r\alpha} - s \Psi_{r\beta} \\ -k s_k = s \Psi_{r\alpha} + s_k \Psi_{r\beta} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

From the latter:

$$\Psi_{r\beta} = -k \frac{s_k^2}{s_k^2 + s^2} \quad (20)$$

It is to be seen that if $s \cong 0$ then

$$\Psi_{r\beta} \cong -k. \quad (21)$$

E. g. at 3% slip and $s_k = 0,15$ is still $\Psi_{r\beta} = 0,96 k$, if the value of $\Psi_{r\beta}$ taken from (21) is introduced into the relation (18) we obtain

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} + s_k \frac{ds}{d\tau} + \frac{k^2}{H\omega_1 X'_r} s = 0. \quad (22)$$

2. Conditions for oscillations

The machine connected to nominal voltage will at acceleration make oscillations, if according to Equ. (13)

$$s_k^2 - \frac{4k^2}{H\omega_1 X'_r} < 0. \quad (23)$$

From (23) the condition for oscillations is

$$\frac{s_k^2 H\omega_1 X'_r}{k^2} < 4. \quad (24)$$

Let us examine a numerical example:

$H = 0,2$ sec; $s_k = 0,15$; $s_k^2 = 2,25 \cdot 10^{-2}$; $\omega_1 = 3,14 \cdot 10^2$; $X'_r = 0,2$; $k = 0,96$ ($k^2 = 0,92$); then in the case of $z_p = 1$

$$\frac{s_k^2 H\omega_1 X'_r}{k^2} = \frac{2,25 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 0,2}{0,92} \cong 0,31,$$

less than 4, thus the assumed machine will reach the no load speed amidst oscillations. Let us compute how great must H be so that there will be no oscillations. The condition is:

$$H = \frac{4k^2}{s_k^2 \omega_1 X_r'} = \frac{4 \cdot 0,92}{2,25 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 0,2} = 2,6 \text{ sec.}$$

That means, that if the GD^2 on the shaft of the machine is so great that when accelerating the rotor by the nominal output till fullspeed the time of acceleration became 2,6 sec, the machine will certainly reach the synchronous speed without oscillations.

The oscillations can also be avoided at the given H by increasing the pull-out slip. E. g. in the case of the assumed $H = 0,2$, if $s_k = 0,54$ no oscillation occurs.

Finally we can evaluate on the basis of Equ. (22) the frequency of oscillation. The form of the wave of oscillations is given generally by an expression of the following form:

$$a + be^{p_1\tau} + ce^{p_2\tau} = f(\tau) \quad (25)$$

or

$$a + be^{p_1\omega_1 t} + ce^{p_2\omega_1 t} = f(t), \quad (25a)$$

where p_1 and p_2 are the roots of the characteristic equation. In our case the characteristic equation becomes

$$p^2 + s_k p + \frac{k^2}{H\omega_1 X_r'} = 0. \quad (26)$$

Its two roots are given

$$p_1 = -\frac{s_k}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k^2}{H\omega_1 X_r'} - s_k^2} = -\varrho + j\Omega,$$

$$p_2 = \frac{s_k}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k^2}{H\omega_1 X_r'} - s_k^2} = -\varrho - j\Omega.$$

The damping coefficient of the oscillation is

$$\varrho = s_k/2. \quad (27)$$

The angular velocity of the oscillations is

$$\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k^2}{H\omega_1 X_r'} - s_k^2}. \quad (28)$$

Using the data of the machine marked 7 elaborated in the paper [1] with an analog computer, where: $X_r' = 0,2$ $P_N = 28$ kW; 4 poles; $H = 0,225$ sec; $s_k = 0,212$ and $k = 0,97$ we calculate the value of Ω :

$$\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 \cdot 0,94}{0,2 \cdot 0,225 \cdot 314} - 0,212^2} = 0,235.$$

The real angular velocity of the oscillation is $0,235 \cdot 314 = 74 \text{ sec}^{-1}$, and the period time is $0,02/0,235 = 0,085$ sec. The measurements of the mentioned machine are contained in Fig. 8 of [1] with an oscillation time of 0,085 sec which corresponds absolutely with the calculated value mentioned above. According to the few numbers of oscillations the damping coefficient cannot be evaluated correctly from the measurement.

The paper quoted under [1] states for the right side of the inequality (24), from the different calculations carried out with the analog computer, the value 2,5 instead of the value 4 the latter calculated analytically. The reason of this difference lies very probably in the difficulty of the evaluation of the limits between the oscillatory and the aperiodic state from the oscillation curves themselves — especially in the case of transition from one state to the other.

This critical remark does not of course touch by far the fact that it was the universal analog computer, which permitted the solution of the non-linear differential equation and thus the practical evaluation of the whole problem.

REFERENCES

1. PFAFF, G.: Dynamische Kennlinie von Drehstrom-Asynchron-Motoren. Diss. T. H. Hannover 1962.
2. KOVÁCS, K. P.—RÁCZ, I.: Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen. Akadémiai Kiadó, Budapest 1959.

ÜBER DIE ANLASSVORGÄNGE VON ASYNCHRONMOTOREN

K. P. KOVÁCS

ZUSAMMENFASSUNG

Beim Anlassen von Asynchronmotoren — insofern es sich um die Beschleunigung von Massen mit kleinem Trägheitsmoment und ohne mechanischen Widerstand handelt — ist es zufolge der hohen Beschleunigungen möglich, daß die Drehzahl des Motors über die synchrone Drehzahl hinausschwingt, und der Motor seine Leerlaufdrehzahl nach gedämpften Schwingungen erreicht. Der Verfasser leitet die Bedingungen für die harmonischen Schwingungen analytisch ab und weist nach, daß die aus der Literatur bekannten Zahlangaben einer Korrektur bedürfen.

SUR LE PROCESSUS DE DÉMARRAGE DES MOTEURS ASYNCHRONES

K. P. KOVÁCS

RÉSUMÉ

Au démarrage des moteurs asynchrones — en tant qu'il s'agit de l'accélération de masses d'un faible moment d'inertie et n'ayant pas de résistance mécanique — la vitesse du moteur peut dépasser, par suite des accélérations élevées, la vitesse synchrone, le moteur atteignant alors sa vitesse à vide après des oscillations amorties. L'auteur déduit analytiquement les conditions des oscillations harmoniques et démontre que les données connues de la littérature nécessitent des corrections.

О ПРОЦЕССАХ ПУСКА АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

К. П. КОВАЧ

РЕЗЮМЕ

При пуске асинхронных двигателей (поскольку при этом идет речь об ускорении масс с небольшим моментом инерции и без механического сопротивления) вследствие больших ускорений число оборотов двигателя может превзойти синхронное число оборотов, и число оборотов холостого хода двигатель достигает после затухающих колебаний. В дальнейшем, условие гармонических колебаний выводится аналитически и показано, что известные из литературы данные требуют коррекции.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU
DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

A. F. Harvey:

MICROWAVE ENGINEERING

Academy Press, London 1963; 1313 pages

This very interesting and substantial technical book comprises various problems of principle as well as theoretical and design problems of the microwave engineering. It describes the various fields of application and discusses the fundamental problems connected with them.

This is by far the most significant work among the microwave books issued since the 27 volumes of the MIT Radiation Laboratory Series published in 1947—1948.

The great significance of HARVEY's book mainly consists of the following:

1. It deals with all passive and active microwave elements, components, devices as well as with the microwave properties of the materials. Out of the 26 chapters, 18 may be considered as such. The remaining 8 chapters deal with the receivers, with frequency measurement and stabilization, industrial, biological and medical aspects, wide-band wire transmission, wave propagation, radio relay links, radar systems, radioastronomy and radar astronomy.

2. The parts known from the MIT series are treated relatively briefly and concisely. On the other hand, the new methods and facilities developed since then are taken in detail more.

3. Many new constructions and diagrams are shown and described which can partly be used directly for the design work.

4. The enormous material is set forth concisely but to each chapter a very extensive list of references is given. Altogether, there are 10 100 references to which also the referring number in the text can be found.

To illustrate what a variety of materials not occurring in the MIT series has been treated by the author of the book, some examples may be cited here.

The ridged wave guides and their standard dimensions, the wide-band matchings by means of nonuniform wave guides, the up-to-date directional couplers and hybrids, the use of the Hall-effect on the measurement of microwave power, the travelling-wave resonant ring of the cavity resonators and the various up-to-date filter circuits are related. An exceedingly great number of data are given concerning the various gases, fluids and solids in the range of microwaves. The polar molecules are dealt with in detail and superconductivity is also considered. Under the heading "Dielectric Spectrometry" the means for taking the electric and magnetic resonance spectra of materials are treated.

The gyromagnetic effect, the ferrites, the granate structures, the measurement methods of microwave ferrites, the various isolators and circulators are described in detail.

23 pages are devoted to the strip transmission lines, to the calculus of their parameters as well as for the realization of various susceptances, junctions, directional couplers, filters and antennas used with such elements.

The periodically loaded lines are dealt with in a separate chapter. In this chapter enter the various surface wave guides, the corrugated-surface antennas, the wave guides made of dielectric rods, the slow-wave and helical structures.

The backward-wave oscillator, the magnetrons suitable for generating ultramicrowaves, the Tcherenkov radiation and its use to generate short microwaves are also treated.

The artificial dielectrics, the spectrometers and interferometers, the frequency-independent antennas, the Luneberg lenses, the wide-angle reflectors and lenses are dealt with in detail.

The present-day technological methods of manufacturing, the low-noise amplifiers, tunnel diodes, parametric amplifiers, masers, travelling-wave amplifiers are described.

The spectrum line frequency standards, the biological and healing effects of microwave radiation, the sanitary protective methods and the microwave apparatus of the particle accelerator (cyclotrons, synchrocyclotrons) are pointed out.

The wide-band wire transmission on coaxial cable and cylindrical wave guide in T_{011} mode as well as the mode conversion losses and the ways to reduce them are dealt with.

In the chapter on the radio relay links the use of passive reflectors, the space communication by means of earth satellites, the relay stations between celestial bodies, in the chapter on radar systems the guidance of missiles, the radioastronomy and radar astronomy, the radio telescopes, interferometers and polarimeters are related upon.

The book will for long years be a useful and valuable tool for microwave engineers in research institutes as well as in manufacturing works or in teaching.

E. Istvánffy

INDEX

- Lukács, J.—Bogoly, I.* : The Formation of Electrical Fields Nearly Perpendicular to the Direction of Leakage Current in Non-Linear Silicon-Carbide Resistances — Die Entstehung von zur Richtung des Ableitungsstromes nahezu senkrechten Feldern in nichtlinearen Siliziumkarbid-Widerständen — Formation de champs électriques quasi-perpendiculaires au sens du courant de fuite dans les résistances non-linéaires — Лукач, Й.—Богой, И. : Возникновение электрических, приближенно перпендикулярных к направлению тока утечки, в силико-карбидных нелинейных сопротивлениях 241
- Németh, M.—Szép, I. C.* : Etch Figures on Germanium Induced by Surface Contaminants — Einfluß der Oberflächenverunreinigungen auf die Ätzfiguren von Germanium. — Figures de corrosion chimique sur le monocristal de Germanium, causées par des impuretés de la surface — Немет, М.—Сен, И. Ц. : Фигуры травления на германии, возникающие под действием поверхностных примесей 243
- Lakatos, Gy.—Bitó, J.* : Investigations of the Current Load of Auxiliary Electrodes Placed at the Sides of the Main Electrode Spirals of Fluorescent Lamps — Untersuchung über die Stromaufnahme der in Leuchtstofflampen verwendeten Hilfselektroden — Recherches sur la consommation électrique des électrodes auxiliaires employées dans les tubes luminescents — Лакатош, Д.—Бито, Я. : Исследование потребления тока вспомогательными электродами, применяемыми в люминесцентных лампах 255
- Vajda, Gy.* : Semi-Automatic Recording of Volt-Microsecond Characteristics — Halbautomatische Ausmessung von Volt-mikrosekunden Kennlinien — Enregistrement semi-automatique des courbes caractéristiques Volt-microseconde — Вайда, Д. : Полуавтоматическое определение Вольт-микросекундных характеристик 261
- Vajda, Gy.* : Test Method for Determining the Impulse Withstand Strength of Electrical Insulations — Eine Prüfmethode zur Bestimmung der elektrischen Stoßspannungsfestigkeit von Isolationen — Méthode d'examen pour la détermination de la résistance aux tensions de choc des isolations — Вайда, Д. : Методика испытания изоляций для определения электрической прочности при ударном напряжении 283
- Шомло, Я.* : Описывающие функции нелинейностей с кусочно-линейной характеристикой — Somló, J. : Describing Functions of Non-Linearities with Piecewise Linear Characteristics — Funktionen für die Beschreibung von Nichtlinearitäten mit durch Geradenabschnitte angenäherter Kennlinie — Fonctions décrivant des non-linéarités à caractéristique approchée par des sections droites 307
- Vajda, Gy.—Csida, S.* : Effect of Neutral Loosening of a 120 kV Network upon the Overvoltage Protection of Transformers — Der Einfluß der Lockerung des Sternpunkts des 120 kV-Netzes auf den Überspannungsschutz der Transformatoren — L'effet du relâchement du point neutre du réseau de 120 kV sur la protection contre les surtensions des transformateurs — Вайда, Д.—Чуда, Ш. : Влияние ослабления нейтрали 120 кВ-ной сети на защиту трансформаторов от перенапряжений ... 333

- Lenners, D.* : Ein transistorisierter Ringzähler mit erhöhter Betriebssicherheit — Transistorized Ring-Counter with Increased Reliability of Operation — Un compteur à sécurité de service accrue — *Леннерс, Д.*: Кольцевой счетчик на транзисторах с повышенной эксплуатационной надежностью 347
- Poóczy, A.* : Energieübertragung in Mechanismen — Energy Transmission in Mechanisms — Transmission d'énergie dans les mécanismes — *Пооца, А.*: Передача энергии в механизмах 355
- Csibi, S.*: On a Queuing Problem in Random Access Communication — Über ein Warteschlangenproblem bei Nachrichtensystemen mit zufälligem Zugang — Un problème de queue en télécommunication avec accès aléatoire — *Чибби, Ш.*: О проблеме очереди в системах связи со случайным доступом 373
- Ember, Gy.—Halász, I.* : Some Theoretical Problems of Radioisotope Scanning — Über einige theoretische Fragen der Szintigraphie — Quelques problèmes théoriques de la scintigraphie — *Эмбер, Д.—Халас, И.*: Некоторые теоретические вопросы сцинтиграфии 385
- Brodzsky, D.* : The Hungarian Invention of the Ram Jet Drive is 50 Years Old — Die ungarische Erfindung des selbstansaugenden Strahltriebwerkes ist 50 Jahre alt — L'invention hongroise d'un moteur à réaction aspirant a 50 ans — *Бродски, Д.*: 50-летие конструирования реактивного двигателя с всасыванием воздуха 395
- Csáki, F.* : Analytical Design of Multivariable Control Systems with Constraints for Deterministic Inputs Applying the Integral of Sum of Errors Squared Criterion — Analytische Synthese von mehrfachvariablen Regelungssystemen mit deterministischen Eingangssignalen auf Grund des Kriteriums des quadratischen Fehlerintegrals — Synthèse analytique des systèmes de régulation multivariables avec contrainte et signaux d'entrée déterministiques, sur la base du critère de l'intégrale de la somme des erreurs quadratiques — *Чаки, Ф.*: Аналитический расчет многомерных систем регулирования с ограничениями в случае детерминированных входных сигналов на основе интегрального критерия суммы квадратических ошибок 403
- Berceli, T.* : The Ideal Klystron Modulator — Der ideale Klystronmodulator — Le modulateur à klystron idéal — *Берцели, Т.*: Идеальный клистронный модулятор 413
- Kerényi, D.—Újházy, G.* : Über die Wahl der Reihenkapazitäten von Stelltransformatorwicklungen aus dem Gesichtspunkt der Stoßspannungsbeanspruchungen — Selection of the Series Capacities of Regulating Transformer Windings from the Point of View of Surge Voltage Stresses — Choix des capacités en série des enroulements des transformateurs de réglage du point de vue des efforts de tensions de choc — *Керени, Д.—Уйhazi, Г.*: О выборе последовательных емкостей обмоток регулируемых трансформаторов с точки зрения требований в отношении импульсных напряжений 423
- Vámos, T.—Gyürki, J.* : Some Remarks on the Optimum Setting of Variable Parameter Process-Controllers — Einige Bemerkungen zur optimalen Einstellung der Regler von Prozessen mit veränderlichen Parametern — Quelques remarques sur le réglage optimum des régulateurs de processus à paramètres variables — *Вамош, Т.—Дюрки, Й.*: Некоторые замечания по оптимальной настройке регуляторов процессов с изменяющимися параметрами 439
- Kovács, K. P.* : On the Starting Phenomena of Asynchronous Motors — Über die Anlaufvorgänge von Asynchronmotoren — Sur le processus de démarrage des moteurs asynchrones — *Ковач, К. П.*: О процессах пуска асинхронных двигателей 453
- Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг*
- A. F. Harvey* : Microwave Engineering. (E. ISTVÁNYFY) 461

UNSERE NEUERSCHEINUNGEN:

Andreas LEWICKI

Einführung in die Mikroelektronik

1966. 588 Seiten, 370 Abbildungen, 57 Tabellen, Gr. —8°, Leinen DM 98,—

Mikroelektronik

Vorträge der gleichnamigen Tagung des „Internationalen Elektronik Arbeitskreises eV“ (INEA) in München vom 21.—23. 10. 1964

Herausgegeben von Dr. Leo Steipe

1965. 304 Seiten, 239 Abbildungen, 28 Tabellen, Gr. —8°, brosch. DM 50,—

Armin SCHÖNE

Das dynamische Verhalten von Wärmeaustauschern und seine Beschreibung durch Näherungen

1966. 89 Seiten, 62 Tafeln, Lex. —8°, brosch. DM 44,—

Kurt STAHL

Industrielle Steuerungstechnik in schaltalgebraischer Behandlung

1965. 331 Seiten, 315 Abbildungen, 14 Tabellen, Gr.—8°, Leinen DM 68,—

Taschenbuch Erdgas Vorkommen—Gewinnung—Verwendung

Herausgegeben von Dr. Helmut Laurien unter Mitarbeit von 21 Autoren

1966. XXIII, 678 Seiten, 339 Abbildungen, 57 Tabellen, 8°, Leinen DM 58,—

Gerd LEGGEWIE

Flüssiggase

Technische und wissenschaftliche Grundlagen ihrer Anwendung

2. verb. Auflage, 1965. 381 Seiten, 240 Abbildungen, 40 Tabellen, Gr. —8°, brosch. DM 108,—

W. E. CLASON

Fachwörterbuch für Elektronik und Wellenleiter

2. verbesserte und erweiterte Auflage, 1966. VIII, 833 Seiten, 5209 Wortstellen mit Definitionen, Gr. —8°, Kunstleder DM 82,—. In sechs Sprachen: Englisch/amerikanisch—französisch—spanisch—italienisch—niederländisch—deutsch

Günter RICHTER

Fachwörterbuch der Optik, Photographie und Photogrammetrie

1965. 502 Seiten, ca. 8200 Wortstellen, 8°, Leinen DM 52,—. In Englisch—Deutsch und Deutsch—Englisch.

J. MOLTZER

Ölfeld-Fachwörterbuch

1965. VIII, 162 Seiten, 1298 Wortstellen, Gr. —8°, Kunstleder DM 39,—. In fünf Sprachen: Englisch/amerikanisch—französisch—spanisch—niederländisch—deutsch

R. OLDENBOURG VERLAG, MÜNCHEN UND WIEN



Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1966. III. 17. — Terjedelem: 19,75 (A/5) ív, 103 ábra 1 melléklet

66.62135 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable
at the following addresses:

- ALBANIA**
Ndermarja Shtetnore e Bolimeve
Tirana
- AUSTRALIA**
A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney
- AUSTRIA**
Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I.
- BELGIUM**
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles
- BULGARIA**
Raznoiznos
1 Tzar Assen
Sofia
- CANADA**
Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.
- CHINA**
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88.
- CZECHOSLOVAKIA**
Artia
Ve Smeckách 30
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Madarská Kultura
Praha I
Václavské nám. 2.
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tlace
Leningradská 14
Bratislava
- DENMARK**
Ejnar Munksgaard
Nørregade 6
Copenhagen
- FINLAND**
Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki
- FRANCE**
Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5
- GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC**
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16.
Leipzig 70I
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62.
Berlin N. W.
- GERMAN FEDERAL REPUBLIC**
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart 5.
- GREAT BRITAIN**
Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough, Northamps.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford
- HOLLAND**
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague
- INDIA**
Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP.
GPO Post Box 1374
Bombay I.
- ITALY**
Santo Vansia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze
- JAPAN**
Nauka Ltd.
92, Ikebukuro O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo
- KOREA**
Chulpanmul
Phenjan
- NORWAY**
Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo
- POLAND**
RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa
- ROUMANIA**
Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18.
Bucuresti
- SOVIET UNION**
Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow G—200
- SWEDEN**
Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm
- USA**
Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York, N. Y. 1003
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York, N. Y. 1003
- VIETNAM**
Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi
- YUGOSLAVIA**
Forum
Vojvode Misica broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27.
Beograd