

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 53

FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1966

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

- Csonka, P.*: Torsional Buckling of Straight-Axed Bars with Circular Cross-Section — Ausknicken eines auf Verdrehen beanspruchten geradachsigen Rundstabes — Le flambage dû à la torsion de barres droites de section circulaire — Чонка, П.: Прогиб прямоосного стержня круглого сечения от кручения 445
- Drahos, I.*: Geometrische Grundlagen zur Herstellung einer Wildhaber—Nowikow-Verzahnung auf der Forster-Wälzfräsmaschine — The Bases of the Geometry of Wildhaber—Novikov Gearing which can be Manufactured on Forster-Type Machines — Fondements géométriques de l'usinage de dentures Wildhaber—Novikov sur les machines de type Forster — Драхош, И.: Основы геометрии зацепления Вильдгабера—Новикова, изотвляемого на станке типа Форстер 203
- Dulácska, E.*: Die Stabilität der Bauwerke mit hochliegendem Schwerpunkt — The Stability of Structures with High Center of Gravity — Stabilité des constructions à centre de gravité élevé — Дулачка, Э.: Стабильность построек с высоким центром тяжести 439
- Dundrová, V.—Kovarik, V.—Slapák, P.*: Nichtlineare Biegungstheorie von Sandwich-Platten. I. — Non-Linear Bending Theory of Sandwich Plates. I. — Théorie de la flexion des plaques sandwich. I. — Дундрова, В., Коварик, В., Шлапак, П.: Нелинейная теория изгиба Sandwich-Platten, I. 343
- Gulyás, J.*: Theoretische und experimentelle Untersuchung der bildsamen Stauchung von Prismen mit rechteckiger Basis — Theoretical and Experimental Investigation of the Plastic Swelling of Prisms with Rectangular Bases — Étude théorique et expérimentale du gonflement plastique des prismes rectangulaires — Гуляш, Й.: Теоретическое и экспериментальное исследование пластичной раздачи параллелепипедов 183
- Horváth, F.*: Berechnung der Zahnwurzelstärke an der durch Trochoiden begrenzten Zahnwurzel — Calculation of Tooth-Thickness at the Root Portion between Trochoids — Calcul de l'épaisseur des pieds de dent limités par des trochoïdes — Хорват, Ф.: Расчет толщины зубьев, ограниченных трохоидами 10
- Huszthy, L.*: An Approximation for Computing the Sag of Involute Teeth — Annähernde Berechnung der Durchbiegung von Evolventenzähnen — Calcul approché du fléchissement des dentures à développante — Хусты, Л.: Приближенный расчет прогиба эвольвентных зубьев 3
- Kalászi, I.*: A Corrected Method for the Determination of Flank Wear on the Single Point Cutting Tool on Turning Steel — Eine korrigierte Methode für die Bestimmung des Freiflächenverschleisses beim Drehen mit einem einschneidigen Werkzeug — Méthode rectifiée pour déterminer l'usure dorsale au tournage avec outil à un tranchant — Каласи, И.: Скорректированный метод определения износа затылка при токарной обработке стали простым инструментом 73
- Kardoss, A.—Stahl, P.*: Particular Problems in Chip-Root Research — Einige Fragen der Spanwurzel-Untersuchung — Quelques problèmes relatifs à l'examen de la base des copeaux — Кардош, А.—Сталь, П.: Некоторые вопросы исследования корня стружки 165

<i>Lévai, Z.</i> : Analytische Untersuchung komplexer Planetengetriebe — Analytical Investigation of Complex Planetary Gears — Examen analytique d'engrenages planétaires complexes — <i>Левай, З.</i> : Аналитическое исследование комплексных планетарных механизмов	17
<i>Mistëth, E.</i> : New Method for the Determination of the Limit Bearing Force by Using the Probability Calculus — Neue Methode zur Bestimmung der Grenzbeanspruchungen unter Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung — Une nouvelle méthode de détermination des sollicitations limites per application du calcul des probabilités — <i>Мишмет, Э.</i> : Новый метод определения граничных нагрузок с помощью расчета по теории вероятности	297
<i>Panc, V.</i> : Theorie der dünnwandigen auf elastischer Unterlage gebetteten Stäbe — Theory of Thin-Walled Beams on Elastic Foundation — Théorie des barres à parois minces sur fondation élastique — <i>Пану, В.</i> : Теория тонкостенных стержней, лежащих на упругом основании	389
<i>Rétháti, L.</i> : Theoretische Untersuchungsmethoden der im Erdboden entstehenden Plastizitätsbereiche — On the Theoretical Methods of Analysis of Plasticity Zones in the Soil — Des méthodes d'examen théorique des zones plastiques se formant dans le sol — <i>Ретхати, Л.</i> : О методе теоретического исследования пластических зон, возникающих в грунте	417
<i>Roller, B.</i> : Berechnung von Seilträgernetzen, I. — Combination of Cable Suspension Roofs with Stiffening Girders, I. — Calcul de toits suspendus raidis par des poutres, I. — <i>Роллер, Б.</i> : Расчет цилиндрических высячек крыш, с балками жесткости, I.	407
<i>Rózsa, M.</i> : Modèles électriques analogues pour le calcul des ossatures — Electrical Analogy for Bar Structures — Elektrische Analogmodelle für Stabwerke — <i>Рожа, М.</i> : Электрические аналоговые модели стержневых конструкций	327
<i>Rózsa, M.</i> : Stability Analysis of Thin Annular Plates Compressed Along the Outer or Inner Edge by Uniformly Distributed Radial Forces — Stabilitätsuntersuchung der am äußeren oder inneren Rand in radialer Richtung drehsymmetrisch gedrückten Ringplatten — Analyse de la stabilité des plaques minces annulaires sous charge radiale uniformément répartie agissant sur le bord extérieur ou intérieur — <i>Рожа, М.</i> : Исследование устойчивости кольцеобразных пластин, сжатых центральносимметрично по наружной или внутренней краю	359
<i>Schäffner, H. J.</i> : Setzungsvorhersage aus Zeit-Setzungsmessungen — The Forecasting of Settling Based on the Progress of Settling with Time — Evaluation préliminaire des tassements à partir de mesures de tassement en fonction du temps — <i>Шеффнер, Х. Й.</i> : Прогноз осадения по данным измерений осадения в функции времени	431
<i>Stvrteckzy, F.—Szabó, A.</i> : Influence of Manufacturing Inaccuracies on the Characteristics of Pumps — Einfluß der Fertigungsgenauigkeit auf die Pumpencharakteristik — L'effet des défauts de fabrication sur les caractéristiques de la pompe — <i>Штвртецки, Ф.—Сабо, А.</i> : Влияние дефектов обработки на показатели насосов	153
<i>Сейман, Ш.</i> : Анализ сплава RC 49 растворенным способом спектральной рентгенофлюоресценции — <i>Szeiman, S.</i> : X-Ray Fluorescence Spectrochemical Analysis of RC 49 Alloy by the Solution Method — Eine Methode für die Analyse in Lösung der Legierung RC 49 mittels Röntgenfluoreszenz — La méthode d'analyse en solution X, de l'alliage RC 49 par fluorescence des rayons.....	127
<i>Szidarovszky, J.</i> : A Practical Determination Method for Bending Moments in Straight Bars under Combined Bending and Compression — Ein praktisches Verfahren für die Bestimmung des Biegemoments in einem gleichzeitig auf Biegung und Druck beanspruchten geraden Stab — Méthode pratique pour la détermination des moments fléchissants de barres droites soumises à des flexions et compressions simultanées — <i>Сидаровски, Я.</i> : Практический метод определения изгибающих моментов, образующихся в подвергнутом одновременно изгибу и сжатию прямоосном стержне	277
<i>Szmodits, K.</i> : Étude numérique de plaques encastées sur deux côtés opposés et reposant librement sur les deux autres côtés — Numerical Investigation of a Plate Fixed on Two Opposite Sides and Simply Supported on the Two Other Sides — Nume-	

rische Untersuchung einer auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannten, auf den zwei anderen Seiten frei aufliegenden Platte — <i>Смодич, К.</i> : Числовой анализ пластины, две противоположные стороны которой зажаты и две другие стороны которой свободно оперты	379
<i>Tarján, I.</i> : Windkanalventilation in Ortsvortrieben warmer Bergwerke — Ventilation of Air Channels for Grifts in Hot Mines — Ventilation par conduites d'air dans les exploitations par taille en atmosphère chaude — <i>Тарьян, И.</i> : Вентиляция воздушными каналами при проходке штреков на шахтах с высокой температурой	257
<i>Terplán, Z.</i> : Bestimmung des ausgeglichenen relativen Gleitens der Planetengetriebe mit Doppeleingriff des einstufigen Planetenrades durch eine graphische Konstruktionsmethode — The Compensated Sliding of Planetary Spur Gear Trains with Double Engagement — Glissement compensé des engrenages planétaires à engrènement binaire — <i>Терплан, З.</i> : Уравненное скольжение шестеренчатых планетарных механизмов с двойным зацеплением	139
<i>Теван, Д.</i> : Предел нагрузки электроприводов станков трио и дуо с регуляторами скольжения — <i>Tevan, Gy.</i> : The Load-Carrying Capacity of Two-High and Three-High Slip-Regulated Mill Drives — Die Belastbarkeit von Antrieben für Trio- und Duostrassen mit Schlupfregulierung — Capacité de charge de l'entraînement des trains trio et duo à regulateur de glissement	
<i>Thamm, I.</i> : Rechenmethode zur angenäherten Bestimmung von Massenträgheitsmomenten — A Method for the Approximate Determination of Mass Moments of Inertia — Une méthode pour la détermination approchée des moments d'inertie de masse — <i>Тамм, И.</i> : Метод для определения приблизительного значения моментов инерции массы	233
<i>Varga, J.—Sebestyén, Gy.</i> : Determination of the Frequencies of Vortex Shedding from Circular Cylinders — Bestimmung der Frequenz der sich von einem Kreiszyylinder ablösenden Wirbel — Détermination de la fréquence des tourbillons se décollant d'un cylindre circulaire — <i>Варга, И.—Шебештьен, Дь.</i> : Определение частоты вихрей, отделяющихся от цилиндров	91
<i>Welesz, R.</i> : Die im Laufe der Sinterung auftretende flüssige Phase und das Kristallitgefüge des Sintermetalls — The Liquid Phase Appearing during Sintering and the Crystallite Structure of the Sintered Metal — La phase liquide produite au cours du frittage et la structure des cristallites du métal fritté — <i>Велес, Р.</i> : Жидкая фаза, возникающая в процессе спекания, и кристаллитные образования синтерного металла	59
Gábor Kazinczy, 1889—1964 — Габор Казинци, 1889—1964	455
<i>Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг</i>	
W. Nowacki: Theorie des Kriechens. Lineare Viscoelastizität <i>P. Csonka</i>	461
K. Szmodits: Statik der Schalenkonstruktionen <i>P. Csonka</i>	462

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 53



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1966

ACTA TECHN. HUNG.

AN APPROXIMATION FOR COMPUTING THE SAG OF INVOLUTE TEETH

L. HUSZTHY

TECHNICAL UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC

[Manuscript received February 24, 1958]

To facilitate the computation of sag caused by bending and shear forces the involute curve is usually approximated by various simpler curves such as piecewise linear sections. This paper describes the application of an approximate curve, the use of which makes it possible to compute the sag in a closed form.

I. Principles of computing the sag

The inflection of the tooth is computed on the basis of Castigliano's Theorem. If a force is applied to a body at equilibrium, the displacement of the point of application is given by the partial derivative of the strain work in the direction of, and with respect to, the applied force.

Let us examine the tooth in a rectangular coordinate system as shown in Fig. 1. The origin of the system coincides with the center of the gear, the axis of symmetry of the tooth lies on the x axis, the y axis is perpendicular to the x axis. r_1 and r_2 denote the radii of the root circle and of the addendum circle, respectively. $v(x)$ denotes the half-thickness of the tooth at x .

Let us study the sag caused by a force F , when it is applied to a surface point on the addendum circle, parallel to the y axis. The tooth is taken as a beam, fixed to the dedendum circle. If one allows L equal the strain work and f equal the deflection of the midline of the tooth at the addendum circle, then by Castigliano's theorem,

$$f = \frac{\partial L}{\partial F} . \quad (1)$$

II. Stresses

The stress σ on the tooth flank can only be a tangential stress σ_1 . This stress can be expressed as the vector sum of two components σ_e and τ_e , where σ_e is perpendicular to the plane of the cross section, while τ_e is in this plane, parallel to the y axis (see Fig. 2).

The stresses acting at the point $P(x, y)$ can be computed by an approximate method [1] as follows:

Let us imagine that the tooth is put together by fibres so that the tangents to each and every fibre at points of the same abscissa meet at the

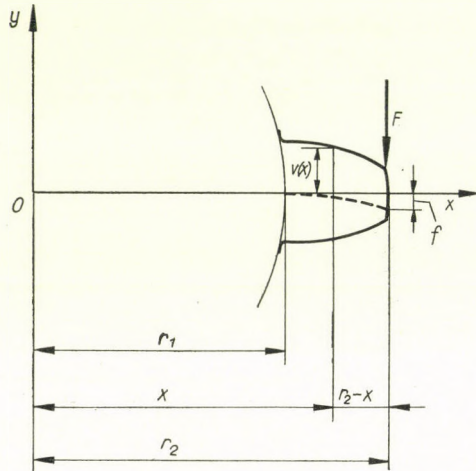


Fig. 1

point S on the x axis. (The imaginary fibre through the point P is shown by a broken line in Fig. 2.) Let the distance between point S and the examined cross section be $d = d(x)$ (a function of x). If the angle enclosed by the tangent

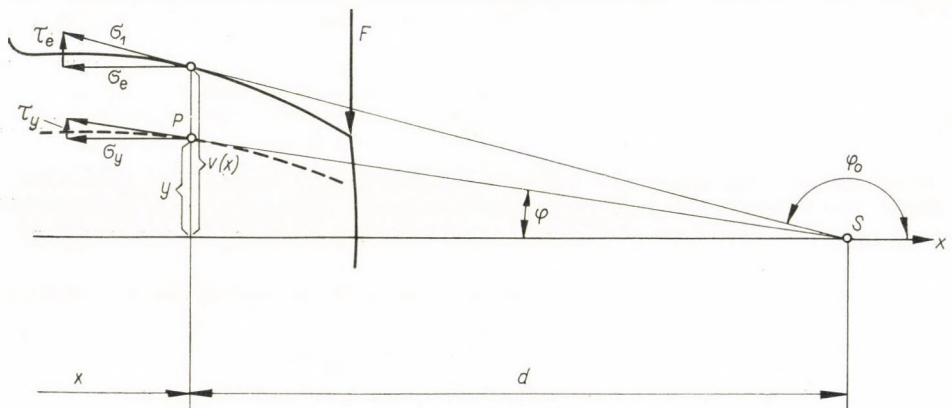


Fig. 2

drawn to the extreme fibre at a point of abscissa x , and by the positive x direction is φ_0 then, for the given cross section, from the equation of the curve of the tooth flank,

$$\frac{v(x)}{d} = -\tan \varphi_0 = -v'(x),$$

or

$$d = - \frac{v(x)}{v'(x)}. \quad (2)$$

The normal stress acting at the point $P(x, y)$ can be computed from the formula

$$\sigma_y = \frac{M}{I} y,$$

where $M = M(x)$ is the bending moment, while $I = I(x)$ is the inertia moment of the cross section. The y -component of the tangential stress acting on the fibre and originating at point P is

$$\tau_y = \sigma_y \cdot \tan \varphi = \frac{M}{I} y \cdot \frac{y}{d} = \frac{M}{I \cdot d} y^2.$$

The sum of the stresses τ_y in the y direction of the examined cross section is

$$V_1 = \int_{(A)} \tau_y dA,$$

where A denotes the entire area of the cross section, since M , I and d are constants for any given cross section. Substituting τ_y we obtain

$$V_1 = \frac{M}{I \cdot d} \int_{(A)} y^2 dA,$$

and

$$\int_{(A)} y^2 dA = I,$$

thus,

$$V_1 = \frac{M}{d}.$$

The force V_1 is balanced by the sum of the stresses τ_y . A shear force of magnitude $F - V_1$ remains which generates stresses τ_x . It is known [1] that the distribution of these τ_x in the cross section under study is [1]

$$\tau_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{F - V_1}{A} \left(1 - \frac{y^2}{v^2} \right).$$

Hence, the magnitude of shear stress at the point P in the y direction is:

$$\tau = \tau_x + \tau_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{F - V_1}{A} \left(1 - \frac{y^2}{v^2} \right) + \frac{M}{I d} y^2. \quad (3)$$

III. The strain work

Part of the strain work caused by the bending moment $M(x) = F(r_2 - x)$ is:

$$L_b = \frac{1}{2E} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[M(x)]^2}{I(x)} dx,$$

where E is Young's modulus of elasticity for the material of the tooth.

Denoting the face width (the dimension of the tooth normal to the xy plane) by b , one can write in a cross section which is perpendicular to the x axis:

$$I(x) = \frac{b[2v(x)]^3}{12} = \frac{2b[v(x)]^3}{3},$$

thus,

$$L_b = \frac{3F^2}{4bE} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r-x)^2}{[v(x)]^3} dx. \quad (4)$$

The strain work caused by the shear force in a volume element dK at point P is:

$$dL_s = \frac{1}{2G} \tau^2 dK,$$

where G is the modulus of torsional shear for the material of the tooth. The strain work created by the shear force in the entire tooth is obtained by integrating the above expression.

$$L_s = \frac{1}{2G} \int_{(K)} \tau^2 dK,$$

where K denotes the entire volume of the tooth. Substituting τ from (3):

$$\begin{aligned} L_s = & \frac{1}{2G} \int_{x=r_1}^{r_2} \int_{y=-v(x)}^{v(x)} \int_{z=0}^b \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{F - V_1}{A} \left(1 - \frac{y^2}{v^2} \right) + \right. \\ & + \frac{M}{Id} y^2 \left. \right]^2 dz dy dx = \frac{b}{G} \int_{x=r_1}^{r_2} \int_{y=0}^{v(x)} \left[\frac{9}{4} \left(\frac{F - V_1}{A} \right)^2 \left(1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2y^2}{v^2} + \frac{y^4}{v^4} \right) + 3 \cdot \frac{F - V_1}{A} \cdot \frac{M}{Id} \left(y^2 - \frac{y^4}{v^2} \right) + \frac{M^2}{I^2 d^2} y^4 \right] dy dx, \end{aligned}$$

where, for the sake of brevity, V_1 , A , v , M , I and d are not shown as functions of x . It has been taken into consideration that the shape of the tooth is symmetrical around the x axis.

Continuing our integration we obtain:

$$\begin{aligned}
 L_s &= \frac{b}{G} \int_{x=r_1}^{r_2} \left[\frac{9}{4} \left(\frac{F - V_1}{A} \right)^2 \left(y - \frac{2y^3}{3v^2} + \frac{y^5}{5v^4} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \frac{F - V_1}{A} \cdot \frac{M}{Id} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5v^2} \right) + \frac{M^2}{I^2 d^2} \cdot \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^v dx = \\
 &= \frac{b}{G} \int_{x=r_1}^{r_2} \left[\frac{9}{4} \left(\frac{F - V_1}{A} \right)^2 \left(v - \frac{2v}{3} + \frac{v}{5} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \frac{F - V_1}{A} \cdot \frac{M}{Id} \left(\frac{v^3}{3} - \frac{v^3}{5} \right) + \frac{M^2}{I^2 d^2} \cdot \frac{v^5}{5} \right] dx = \\
 &= \frac{b}{G} \int_{x=r_1}^{r_2} \left[\frac{9}{4} \left(\frac{F - V_1}{A} \right)^2 \frac{8}{15} v + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \frac{F - V_1}{A} \cdot \frac{M}{Id} \cdot \frac{2}{15} v^3 + \frac{M^2}{I^2 d^2} \cdot \frac{v^5}{5} \right] dx = \\
 &= \frac{b}{G} \int_{x=r_1}^{r_2} \left[\frac{6}{5} \left(\frac{F - V_1}{A} \right)^2 v + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{5} \cdot \frac{F - V_1}{A} \cdot \frac{M}{Id} v^3 + \frac{M^2}{I^2 d^2} \cdot \frac{v^5}{5} \right] dx = \\
 &= \frac{b}{5G} \int_{x=r_1}^{r_2} \left[6 \left(\frac{F - V_1}{A} \right)^2 \cdot v + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(F - V_1)M}{AId} \cdot v^3 + \frac{M^2}{I^2 d^2} \cdot v^5 \right] dx.
 \end{aligned}$$

Considering that

$$M = F(r_2 - x)$$

and

$$V_1 = \frac{M}{d} = \frac{F(r_2 - x)}{d},$$

simplification and factoring yields

$$\begin{aligned}
 L_s &= \frac{bF^2}{5G} \int_{x=r_1}^{r_2} \left\{ 6 \frac{[d - (r_2 - x)]^2}{A^2 d^2} \cdot v + 2 \frac{[d - (r_2 - x)](r_2 - x)}{AId^2} v^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(r_2 - x)^2}{I^2 d^2} v^5 \right\} dx.
 \end{aligned}$$

Substituting the expressions

$$d = -\frac{v}{v'}, \quad A = 2bv, \quad I = \frac{2bv^3}{3}$$

the following expression is obtained for the strain work generated by the shear force:

$$L_s = \frac{3F^2}{20bG} \int_{x=r_1}^{r_2} \frac{2v^2 + 2vv'(r_2 - x) + 3(r_2 - x)^2 \cdot v'^2}{v^3} dx. \quad (5)$$

IV. The sag

Partially differentiating the sum of L_b from (4) and L_s from (5) with respect to F one obtains for the sag sought for

$$f = \frac{\partial}{\partial F} (L_b + L_s) = \frac{3F}{2b} \left[\frac{1}{E} \int_{x=r_1}^{r_2} \frac{(r_2 - x)^2}{v^3} dx + \frac{1}{5G} \int_{x=r_1}^{r_2} \frac{2v^2 + 2vv'(r_2 - x) + 3(r_2 - x)^2 v'^2}{v^3} dx \right]. \quad (6)$$

V. Approximate curve of the tooth flank

Let us use the equation

$$v(x) = y = \sqrt[3]{\alpha x + \beta}$$

to approximate the equation of the actual curve. The parameters α and β are determined by the required conditions that the approximating curve must pass through the points P_1 and P_2 on the dedendum circle and on the addendum circle, respectively (Fig. 3).

Let v_i be the segmental arch of a circle between the two sides of the tooth drawn through an arbitrary point P on the involute tooth flank. Let the centre of the circle be at the origin of the coordinate system. Let r be the length of the radial vector to the point P . Let the corresponding evolute generating angle be ε . Let the angle between the axis of symmetry and the radius of the generating base circle drawn to the point of intersection between the upper tooth flank and the base circle be γ . Then, as seen in Fig. 3,

$$\frac{v_i}{2r} + e v \varepsilon = \gamma. \quad (7)$$

Any combination of the values v_i , r and ε determines the angle γ . Thus, the rectangular coordinates of an arbitrary involute point P are:

$$\begin{aligned} x &= r \cos (\gamma - ev\varepsilon), \\ y &= r \sin (\gamma - ev\varepsilon); \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\varepsilon = \arccos \frac{r_a}{r}.$$

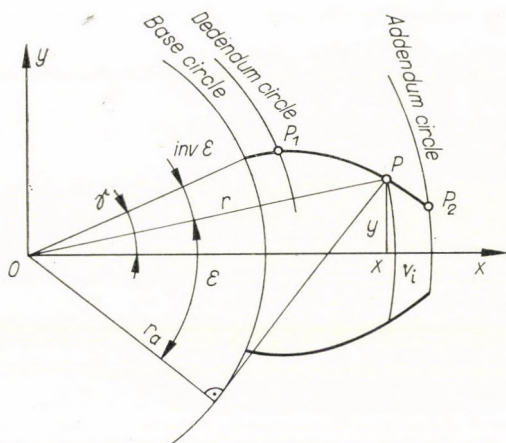


Fig. 3

The involute generating angles corresponding with P_1 on the dedendum circle and P_2 on the addendum circle are, respectively:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \arccos \frac{r_a}{r_1}, \\ \varepsilon_2 &= \arccos \frac{r_a}{r_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Hence the coordinates of the two selected involute points are

$$\begin{aligned} P_1 : & \begin{cases} x_1 = r_1 \cos (\gamma - ev\varepsilon_1), \\ y_1 = r_1 \sin (\gamma - ev\varepsilon_1); \end{cases} \\ P_2 : & \begin{cases} x_2 = r_2 \cos (\gamma - ev\varepsilon_2), \\ y_2 = r_2 \sin (\gamma - ev\varepsilon_2). \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

From the equation of the approximate curve of the tooth flank

$$\alpha x + \beta = y^3.$$

Substituting the coordinates of points P_1 and P_2 one obtains the following system of equations:

$$\begin{aligned} x_1 \alpha + \beta &= y_1^3 \\ x_2 \alpha + \beta &= y_2^3. \end{aligned} \quad (11)$$

From (11) one can compute α and β . This system of equations always has a unique solution, since the determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

VI. Approximate computation of the sag

Knowing α and β an approximate value of the sag can be computed from (6) if the following relationships are taken into consideration:

$$y = v(x) = \sqrt[3]{\alpha x + \beta}$$

and

$$v'(x) = \frac{\alpha}{3 \sqrt[3]{(\alpha x + \beta)^2}} = \frac{\alpha}{3 v^2}.$$

For the two integrals let us first solve, ignoring the scale factors.

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{(r_2 - x)^2}{v^3} dx = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r_2 - x)^2}{\alpha x + \beta} dx = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_2^2 - 2r_2 x + x^2}{\alpha x + \beta} dx.$$

Carrying out the division in the integrand one obtains

$$\frac{r_2^2 - 2r_2 x + x^2}{\alpha x + \beta} = x \frac{\beta}{\alpha} + 2r_2 + \frac{r_2^2 + \frac{\beta}{\alpha} + 2r_2}{\alpha x + \beta} \beta.$$

Let

$$\frac{\beta}{\alpha} + 2r_2 = C,$$

and

$$r_2^2 + \beta C = D.$$

Then the integral expressing the sag caused by bending action is written as

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{x}{\alpha} - C + \frac{D}{\alpha x + \beta} \right) dx = \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x^2}{2} - Cx + \frac{D}{\alpha} \ln \left(x + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]_{r_1}^{r_2} = \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} (r_2^2 - r_1^2) - C(r_2 - r_1) + \frac{D}{\alpha} \ln \frac{\alpha r_2 + \beta}{\alpha r_1 + \beta}.$$

The other integral to be solved is:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{2v^2 + 2vv'(r_2 - x) + 3(r_2 - x)^2 v'^2}{v^3} dx.$$

Substituting the expression

$$v' = \frac{\alpha}{3v^2}$$

one obtains the following integral:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{6v^6 + 2\alpha(r_2 - x)v^3 + \alpha^2(r_2 - x)^2}{3v^7} dx.$$

After the substitution of the ordinates of the approximate curve of the tooth flank we obtain

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{6(\alpha x + \beta)^2 + 2\alpha(r_2 - x)(\alpha x + \beta) + \alpha^2(r_2 - x)^2}{3\sqrt{(\alpha x + \beta)^7}} dx.$$

Introducing the substitution

$$\alpha x + \beta = u^3,$$

one obtains

$$x = \frac{u^3 - \beta}{\alpha}$$

and

$$dx = \frac{3u^2 du}{\alpha}.$$

The limits $x = r_1$ and $x = r_2$ must, of course, also be transformed into

$$u_1 = \sqrt[3]{\alpha r_1 + \beta}$$

and

$$u_2 = \sqrt[3]{\alpha r_2 + \beta},$$

respectively. This change of variables and some rearrangement gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_{u_1}^{u_2} \frac{5u^6 + (r_2\alpha + \beta)^2}{u^5} du &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{5u^2}{2} - \frac{(r_2\alpha + \beta)^2}{6u^6} \right]_{u_1}^{u_2} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{5}{2} (u_2^2 - u_1^2) - \frac{(r_2\alpha + \beta)^2}{6} \left(\frac{1}{u_2^6} - \frac{1}{u_1^6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Substituting the results from (12) and (13), into (6), an approximate value is obtained for the sag.

VII. Example

Given a gear of the following dimensions: $m = 1$ cm, $z = 39$, $\varepsilon_0 = 20^\circ$, $b = 10$ cm, $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm².

Compute the sag at a load $F = 500$ kp.

1. Pitch circle radius: $r_0 = mz/2 = 1 \cdot 39/2 = 19,5$ cm;
2. Base circle radius: $r_a = r_0 \cos \varepsilon_0 = 19,5 \cdot \cos 20^\circ = 19,5 \cdot 0,93969 = 18,3239$ cm;
3. Dedendum circle radius: $r_1 = r_0 - 7/6 m = 19,5 - 1,1667 = 18,3333$ cm;
4. Addendum circle radius: $r_2 = r_0 + m = 19,5 + 1 = 20,5$ cm;
5. Computation of the angle γ .

Considering the pitch circle radius, the pressure angle and that

$$v_i = t/2 = m \pi/2 = 1 \cdot 3,14159/2 = 1,5708 \text{ cm.}$$

From (7) we get

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{t/2}{2r_0} + \varepsilon v \varepsilon_0 = \frac{1,5708}{2 \cdot 19,5} + \varepsilon v 20^\circ = \frac{1,5708}{39} + 0,0149 = \\ &= 0,0552 \text{ rad} = 3^\circ 09' 43''. \end{aligned}$$

and from (9):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \arccos \frac{r_a}{r_1} = \arccos \frac{18,3239}{18,3333} = 1^\circ 50'; \\ \varepsilon_2 &= \arccos \frac{r_a}{r_2} = \arccos \frac{18,3239}{20,5000} = 26^\circ 38' 19''; \\ \varepsilon v \varepsilon_1 &= \tan \varepsilon_1 - \varepsilon_1 = 0,03201 - 0,03199 = 0,00002 = 04''; \\ \varepsilon v \varepsilon_2 &= \tan \varepsilon_2 - \varepsilon_2 = 0,50161 - 0,46493 = 0,03668 = 2^\circ 06' 06''. \end{aligned}$$

6. From (10) the coordinates of the point P_1 on the dedendum circle are:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos (\gamma - \varepsilon v \varepsilon_1) = 18,3333 \cos (3^\circ 09' 43'' - 04'') = \\ &= 18,3333 \cos 3^\circ 09' 39'' = 18,3333 \cdot 0,99848 = 18,3054 \text{ cm}; \\ y_1 &= r_1 \sin (\gamma - \varepsilon v \varepsilon_1) = 18,3333 \sin 3^\circ 09' 39'' = 18,3333 \cdot 0,05512 = 1,0105 \text{ cm.} \end{aligned}$$

7. Also from (10) the coordinates of the point P_2 on the addendum circle are :

$$\begin{aligned}x_2 &= r_2 \cos(\gamma - \varepsilon v \varepsilon_2) = 20,5 \cos(3^\circ 09' 43'' - 2^\circ 06' 06'') = \\ &= 20,5 \cos 1^\circ 03' 37'' = 20,5 \cdot 0,99983 = 20,4965 \text{ cm;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= r_2 \sin(\gamma - \varepsilon v \varepsilon_2) = 20,5 \cdot \sin 1^\circ 03' 37'' = \\ &= 20,5 \cdot 0,01850 = 0,3793 \text{ cm.} \end{aligned}$$

8. Computation of the parameters of the curve

$$y = \sqrt[3]{\alpha x + \beta}$$

passing through the points P_1 (18,3054; 1,0105) and P_2 (20,4965; 0,3793) from (11):

$$18,3054 \alpha + \beta = 1,0105^3$$

$$20,4965 \alpha + \beta = 0,3793^3.$$

Solving the system of equations one obtains:

$$\alpha = -0,4459,$$

$$\beta = 9,1942.$$

To compute the portion of the sag caused by bending action one needs to obtain

$$C = \frac{\frac{\beta}{\alpha} + 2 r_2}{\alpha} = \frac{\frac{9,1942}{-0,4459} + 2 \cdot 20,5}{-0,4459} = -45,7066;$$

$$D = r_2^2 + \beta C = 20,5^2 + 9,1942(-45,7066) = 0,0144.$$

From (6), ignoring the multiplier $3F/2b$ one obtains for the sag by bending:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r_2 - x)^2}{v^3} dx &= \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2\alpha} (r_2^2 - r_1^2) - C(r_2 - r_1) + \frac{D}{\alpha} \ln \frac{\alpha r_2 + \beta}{\alpha r_1 + \beta} \right] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^6} \left[\frac{1}{2(-0,4459)} (20,5^2 - 18,3333^2) + 45,7066 (20,5 - 18,3333) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,0144}{-0,4459} \ln \frac{-0,4459 \cdot 20,5 + 9,1942}{-0,4459 \cdot 18,3333 + 9,1942} \right] = 0,000\ 002\ 389. \end{aligned}$$

For (13) u_1 and u_2 can be computed as follows:

$$u_1 = \sqrt[3]{\alpha r_1 + \beta} = \sqrt[3]{-0,4459 \cdot 18,3333 + 9,1942} = 1,0064;$$

$$u_2 = \sqrt[3]{\alpha r_2 + \beta} = \sqrt[3]{-0,4459 \cdot 20,5 + 9,1942} = 0,3763.$$

That portion of the sag which is due to shearing action is obtained from (6) as follows, ignoring the multiplier $3F/2b$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5G} \int_{r_1}^{r_2} \frac{2v^2 + 2vv'(r_2 - x) + 3(r_2 - x)^2 v'^2}{v^3} dx &= \\ &= \frac{1}{5G} \cdot \frac{1}{\alpha} \left[\frac{5}{2} (u_2^2 - u_1^2) - \frac{(r_2\alpha + \beta)^2}{6} \left(\frac{1}{u_2^6} - \frac{1}{u_1^6} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 10^5} \cdot \frac{1}{-0,4459} \left[\frac{5}{2} (0,3763^2 - 1,0064^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-20,5 \cdot 0,4459 + 9,1942)^2}{6} \left(\frac{1}{0,3763^6} - \frac{1}{1,0064^6} \right) \right] = 0,000\ 001\ 315 . \end{aligned}$$

Hence the total sag from both bending and shearing action is

$$\begin{aligned} f &= \frac{3F}{2b} [0,000\ 002\ 389 + 0,000\ 001\ 315] = \\ &= \frac{3 \cdot 500}{2 \cdot 10} \cdot 0,000\ 003\ 705 = 0,000\ 2779 \text{ cm} \approx 2,77 \mu . \end{aligned}$$

VIII. Estimating the error of approximation

In the example most of the sag comes from bending action. Assuming that the tooth thickness computed from the equation for the approximate curve is

$$\lambda v(x) ,$$

where $v(x)$ is the actual tooth thickness and λ constant, then, ignoring the constant multiplier, in lieu of the integral

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{[M(x)]^2}{[v(x)]^3} dx = J$$

the integral has been solved by means of the approximation:

$$\frac{1}{\lambda^3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[M(x)]^2}{[v(x)]^3} dx = \frac{J}{\lambda^3} .$$

Since λ is actually not a constant the estimated error is greatly increased. (λ varies from zero at the points P_1 and P_2 to a maximum at the pitch point.)

Thus a conservative estimate of the relative error is:

$$h = \frac{J - \frac{J}{\lambda^3}}{J} = 1 - \frac{1}{\lambda^3} .$$

From (10) the actual y_0 and y_{ok} ordinates are computed of a surface point on the pitch circle:

$$\begin{aligned} y_0 &= r_0 \sin(\gamma - ev \varepsilon_0) = 19,5 \cdot \sin(3^\circ 09' 43'' - 0^\circ 51' 13'') = \\ &= 19,5 \cdot \sin 2^\circ 18' 30'' = 19,5 \cdot 0,04027 = 0,7853 \text{ cm.} \end{aligned}$$

The corresponding abscissa is

$$x_0 = r_0 \cos(\gamma - ev \varepsilon_0) = 19,5 \cdot \cos 2^\circ 18' 30'' = 19,5 \cdot 0,99919 = 19,4842 \text{ cm.}$$

From the equation of the approximate curve:

$$y_{ok} = \sqrt[3]{\alpha x_0 + \beta} = \sqrt[3]{-0,4459 \cdot 19,4842 + 9,1942} = 0,7969 \text{ cm.}$$

For the pitch point:

$$\lambda = \frac{y_{ok}}{y_0} = \frac{0,7969}{0,7853} \approx 1,015.$$

Assuming the value of λ to be constant along the entire length of the tooth flank, the estimated error of the sag is

$$h = 1 - \frac{1}{\lambda^3} = 1 - \frac{1}{1,015^3} \approx 0,05.$$

Thus the error is about 5%.

REFERENCE

- MUTNYÁNSZKY, Á.: Szilárdságtan (Strength of Materials). Tankönyvkiadó, Budapest 1956; 116—117, 101.

ANNÄHERNDE BERECHNUNG DER DURCHBIEGUNG VON EVOLVENTENZÄHNEN

L. HUSZTHY

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Berechnung der durch die Biege- und die Scherkraft verursachten Zahnbiegung ist es üblich, den Evolventenbogen durch verschiedene einfachere Kurven (teilweise durch gerade Strecken) zu ersetzen. Das hier gezeigte Verfahren beruht auf der Anwendung einer Näherungskurve, die es ermöglicht, die Durchbiegung in geschlossener Form zu berechnen.

CALCUL APPROCHÉ DU FLÉCHISSEMENT DES DENTURES A DÉVELOPPANTE

L. HUSZTHY

RÉSUMÉ

Lors du calcul du fléchissement de la dent, dû aux forces de flexion et de cisaillement, la courbe développante est remplacée généralement par des courbes plus simples (et en partie par des sections de droite). Le procédé présenté par l'auteur consiste dans l'application d'une courbe approchée permettant le calcul du fléchissement sous une forme finie.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗУБЬЕВ

Л. ХУСТИ

РЕЗЮМЕ

При вычислении прогиба зубьев от изгибающих и срезающих усилий обычно принято заменять эвольвентную дугу различными более простыми кривыми (частично прямолинейными отрезками). Приведенный в статье метод состоит в применении такой приближенной кривой, которая позволяет произвести вычисление прогиба в закрытой форме.

ANALYTISCHE UNTERSUCHUNG KOMPLEXER PLANETENGETRIEBE

Z. LÉVAI

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAU- UND VERKEHRSWESSEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 7. März, 1963]

Zur allgemeinen Kennzeichnung des Planetengetriebes wird ein Faktor B eingeführt, der von der konkreten Bauart, von den Abmessungen usw. des Planetengetriebes unabhängig ist. Es werden elementare und komplexe Planetengetriebe unterschieden; letztere unterscheiden sich dadurch von den elementaren Planetengetrieben, daß sie außer dem Planetengetriebe noch irgendein Verbindungselement (z. B. Wellenkupplung, Flüssigkeitswechselgetriebe usw.) enthalten. Das elementare Planetengetriebe kann von einfacher oder zusammengesetzter Ausführung sein. Diese werden im allgemeinen, bei ihrer Verwendung, in Konstruktionen mit einem Freiheitsgrad umgewandelt. In Abhängigkeit davon, an welche Stelle man mit Hilfe irgendeines Verbindungsgliedes die Achse III des Elementargetriebes anschließt, erhält man ein festgehaltenes (verriegeltes) Planetengetriebe oder ein umgekoppeltes Planetengetriebe bzw. im Falle eines zusammengesetzten Planetengetriebes, ein kreuzverbundenes Planetengetriebe. Für jede Bauart wurde auch die Übersetzungsformel bestimmt bzw. die Formel der Drehmomentenübersetzung auf Grund der für die Achsen des Planetengetriebes angeschriebenen Drehmomentenproportionen. An Hand der Leistungsproportionen wurde die im Planetengetriebe entstehende Leistungsströmung untersucht.

I. Einleitung

Die Planetengetriebe sind allgemein bekannte Mechanismen. In jedem Planetengetriebe kann man zwei selbständige Zahnräder, mit einer gemeinsamen Achse, die sog. Sonnenräder finden, die miteinander nicht unmittelbar kämmen, sondern über die sog. Planetenräder. Diese letzteren Räder nennt man aus dem Grunde Planetenräder, weil sie sich nicht nur um ihre eigene Achse drehen, sondern auch um die zwei Sonnenräder rotieren können. Die Planetenräder sind nämlich auf einem Steg, im Verhältnis zum Sonnenrad exzentrisch gelagert, und dieser Steg ist ebenfalls drehbar angeordnet (Bild 1).

Aus jedem Planetengetriebe führen grundsätzlich drei Wellen heraus, von denen zwei zu den Sonnenrädern gehören, eine dagegen zum Steg. Diese nennt man die Hauptelemente des Planetengetriebes.

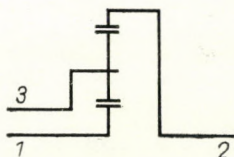


Bild 1

Die Sonnenräder können innen- oder außenverzahnt sein, die Planetenräder von einfacher oder doppelter Ausführung. Oft verwendet man die Planetenräder paarweise, wenn sie nicht unmittelbar mit den zwei Sonnenrädern kämten. In diesen Fällen kämten die Planetenräder miteinander und mit einem der Sonnenräder.

Im Planetengetriebe kann also eine vielseitige Kombination vorhanden sein, auf die Einzelheiten soll jetzt nicht eingegangen werden [6].

Planetengetriebe mit drei Hauptelementen werden in den weiteren Ausführungen als *elementare Planetengetriebe* bezeichnet.

Zur Kennzeichnung der elementaren Planetengetriebe wird nach der Methode von Willis ein mit b bezeichneter Quotient verwendet, der durch das Verhältnis der relativen Winkelgeschwindigkeiten von Sonnenrad und Steg gebildet wird; diesen Quotienten nennt man die *Grundübersetzung des elementaren Planetengetriebes*:

$$b = \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3}, \quad (1)$$

wo ω_1 und ω_2 die absoluten Winkelgeschwindigkeiten der Sonnenradwellen, ω_3 die absolute Winkelgeschwindigkeit der Stegwelle bedeutet. Wenn man obige Gleichung umformt, erhält man die kinematische Grundgleichung des elementaren Planetengetriebes:

$$b\omega_1 - \omega_2 - (b - 1)\omega_3 = 0. \quad (2)$$

Wie ersichtlich, ist das Planetengetriebe ein Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden.

Im Verlauf der praktischen Anwendung werden aus den Planetengetrieben Mechanismen mit einem oder mehreren Freiheitsgraden gebildet. Für die Ausbildung der verschiedenen Konstruktionen gibt es zahlreiche Lösungsmöglichkeiten. In den weiteren Ausführungen werden allgemeine Zusammenhänge abgeleitet, die für allerlei Planetengetriebe-Konstruktionen Gültigkeit besitzen. Die ausgearbeiteten Methoden können für die Untersuchung einer jeden beliebigen Konstruktion empfohlen werden.

II. Die allgemeine kinematische Grundgleichung der Planetengetriebe

Zwecks Verallgemeinerung, und als erster Schritt, werden die Hauptelemente 1, 2 und 3 des elementaren Planetengetriebes mit neuen Indizes versehen; diese geben keinen Hinweis auf das Hauptelement selbst, sondern nur auf die Art der Kupplung. Die neuen Indizes sind: *I*, *II* und *III*. Diese

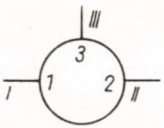
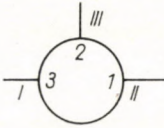
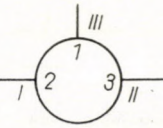
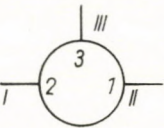
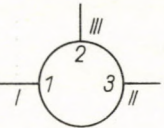
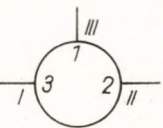
können nach Belieben Sonnenrad oder Steg bedeuten, d. h. die Wellen der Hauptelemente 1, 2 und 3 des elementaren Planetengetriebes können insgesamt nach sechs Variationen mit den Indizes I, II und III versehen werden. Mit anderen Worten, für die Kupplung eines gegebenen elementaren Planetengetriebes gibt es sechs Möglichkeiten.

Als zweiter Schritt wird eine allgemeine Formulierung der Auslegung der Grundübersetzung vorgenommen, d. h. die Wellen werden nicht mit den konkreten Indizes der mit ihnen gekuppelten Hauptelemente versehen, sondern mit Indizes, die die Art der Kupplung kennzeichnen:

$$B = \frac{\omega_{II} - \omega_{III}}{\omega_I - \omega_{III}} \quad (3)$$

Der Wert von B kann naturgemäß aus der Grundübersetzung b errechnet werden, wenn die Art der Kupplung bekannt ist. Die Formeln sind entsprechend den sechs Variationsmöglichkeiten in der Tafel I enthalten.

Tafel I

 $B = b$	 $B = \frac{b-1}{b}$	 $B = \frac{1}{1-b}$
 $B = \frac{1}{b}$	 $B = \frac{b}{b-1}$	 $B = 1-b$

Es ist offensichtlich, daß bei der Identität der Werte von B die Charakteristik der Planetengetriebe gleichfalls identisch ist, unabhängig davon, welche geometrischen Abmessungen, Aufbau, usw. das Planetengetriebe besitzt. Es kann daher vorkommen, daß zwei Planetengetriebe mit zwei verschiedenen Grundübersetzungen b — im Falle von verschiedenen Kupplungen — sich identisch verhalten (Bild 2) oder zwei identische Planetengetriebe mit ungleicher Kupplung einen durchaus verschiedenen Charakter zeigen.

	$r_1 = 4$ $r_2 = -16$	$b = \frac{r_1}{r_2} = -0,25$	$B = b = -0,25$
	$r_1 = 6$ $r_2 = 6,57$ $r_{41} = 3$ $r_{42} = 2,43$	$b = \frac{r_1}{r_{41}} \frac{r_{42}}{r_2} = 0,8$	$B = \frac{b-1}{b} = -0,25$
	$r_1 = 6$ $r_2 = 2,58$ $r_{41} = 3$ $r_{42} = 6,42$	$b = \frac{r_1}{r_{41}} \frac{r_{42}}{r_2} = 5$	$B = \frac{1}{1-b} = -0,25$
	$r_1 = 6$ $r_2 = 2$ $r_{41} = 3$ $r_{42} = 4$	$b = \frac{r_1}{r_{41}} \frac{r_{42}}{r_2} = -4$	$B = \frac{1}{b} = -0,25$
	$r_1 = 4$ $r_2 = 20$	$b = -\frac{r_1}{r_2} = 0,2$	$B = \frac{b}{b-1} = -0,25$
	$r_1 = -18$ $r_2 = -20,6$ $r_{41} = 6$ $r_{42} = 8,6$	$b = \frac{r_1}{r_{41}} \frac{r_{42}}{r_2} = 1,25$	$B = 1 - b = -0,25$

Bild 2

Durch Umformung der Formel von B erhält man die *allgemeine kinematische Grundgleichung* des Planetengetriebes:

$$B\omega_I - \omega_{III} - (B - 1)\omega_{III} = 0. \quad (4)$$

Aus zwei einfachen Planetengetrieben kann man ein sog. *zusammengesetztes Planetengetriebe* herstellen, das im weiteren Verlauf als ein selbständiger Planetengetriebe-Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden zu betrachten ist. Ein zusammengesetztes Planetengetriebe erhält man in der Weise, daß man je zwei Hauptelemente von zwei einfachen Planetengetrieben verbindet. Die gemeinsamen Wellen der gekuppelten Hauptelemente oder eines

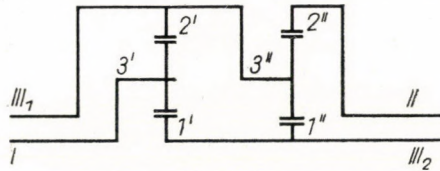


Bild 3

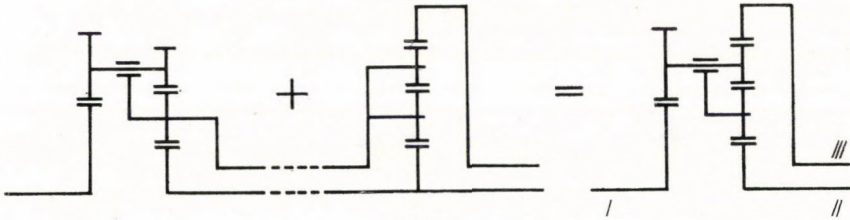


Bild 4

dieser Wellen muß man herausführen. Diese versieht man einheitlich mit dem Index III , zur Unterscheidung dagegen verwendet man die arabischen Ziffern I und II (III_1 und III_2) (Bild 3).

Wenn die gekuppelten Hauptelemente von derselben Art und Abmessung sind, dann ist es zweckmäßig sie zu vereinen (Bild 4, »Ford-o-matic«).

Es besteht die Möglichkeit, daß man bei der Verbindung von Hauptelementen irgendein *Verbindungselement* einfügt. Als Verbindungselement kann jeder beliebige mechanische, hydraulische, elektrische, pneumatische usw. Mechanismus verwendet werden, z. B. eine Wellenkupplung oder ein Wechselgetriebe. Wenn in dem zusammengesetzten Planetengetriebe ein derartiges, fremdes Verbindungselement vorhanden ist, dann kann man das Planetengetriebe als ein *komplexes zusammengesetztes Planetengetriebe* bezeichnen. Im Bild 5 ist ein komplexes zusammengesetztes Planetengetriebe zu sehen, bei dem als Verbindungselement eine hydrodynamische Wellenkupplung vorhanden ist.

Das Bild 6 bringt die Darstellung eines zusammengesetzten Planetengetriebes ohne Verbindungselement, das Bild 7 eine allgemeine Darstellung des komplexen, zusammengesetzten Planetengetriebes, wobei bei dem letzteren die Stellen von sämtlichen möglichen Verbindungselementen bezeichnet sind. Die Verbindungselemente können durch ihre kinematische Übersetzung charakterisiert werden, und diese wird im weiteren Verlauf aus dem

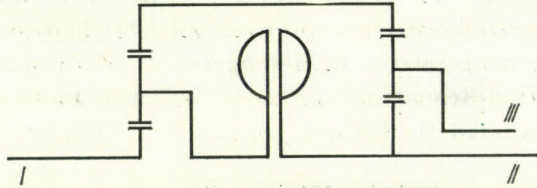


Bild 5

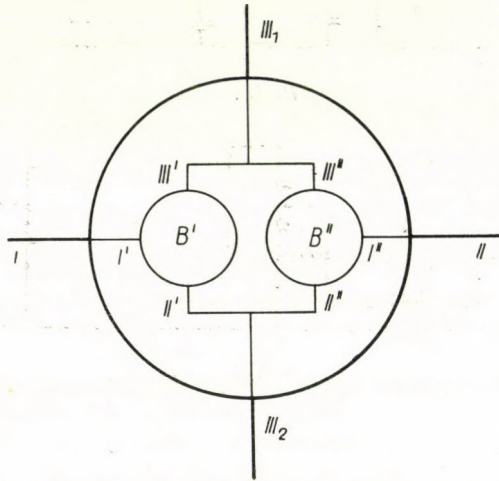


Bild 6

Winkelgeschwindigkeits-Quotienten der rechten und linken Welle gebildet, z. B.

$$i''_{III} = \frac{\omega''_{III}}{\omega_{III}}. \quad (5)$$

Die allgemeine kinematische Grundgleichung des zusammengesetzten komplexen Planetengetriebes kann ebenfalls bestimmt werden. Zu diesem Zweck sei die allgemeine kinematische Grundgleichung von zwei einfachen Planetengetrieben angeschrieben:

$$\begin{aligned} B' \omega'_I - \omega'_{II} - (B' - 1) \omega'_{III} &= 0 \\ B'' \omega''_I - \omega''_{II} - (B'' - 1) \omega''_{III} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Die zweite Gleichung kann umgeformt werden, da

$$\omega''_{II} = i'_{II} i''_{II} \omega'_{II}, \quad (7)$$

und damit ist

$$B'' \omega'_I - i'_{II} i''_{II} \omega'_{II} - (B'' - 1) \omega''_{III} = 0. \quad (8)$$

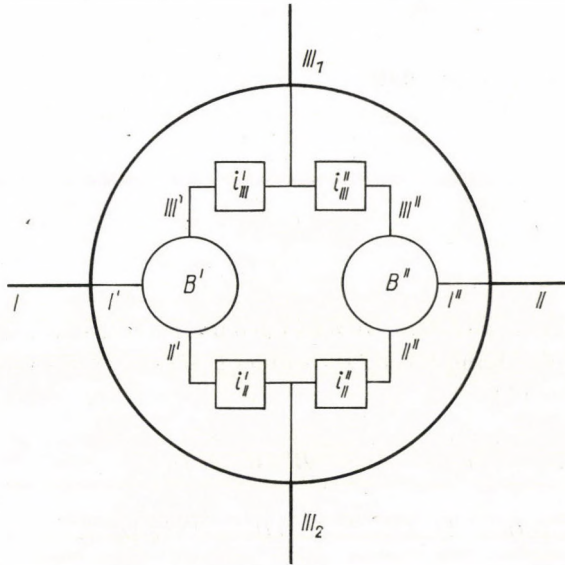


Bild 7

Mit Rücksicht darauf, daß

$$\omega'_I = \omega_I, \quad (9)$$

$$\omega''_{II} = \omega_{II}, \quad (10)$$

$$\omega'_{III} = \frac{\omega_{III}}{i'_{III}}, \quad (11)$$

$$\omega''_{III} = i''_{III} \omega_{III} \quad (12)$$

ist, sieht die neue Form des Gleichungspaares von (6) folgendermaßen aus:

$$B' \omega_I - \omega'_{II} - (B' - 1) \frac{\omega_{III}}{i'_{III}} = 0 \quad (13)$$

$$B'' \omega_{II} - i'_{II} i''_{II} \omega'_{II} - (B'' - 1) i''_{III} \omega_{III} = 0.$$

Aus der ersten Gleichung des Gleichungspaares (13) drücken wir ω'_{II} aus, und setzen dies in die zweite Gleichung ein. Nach Umordnung erhält die allgemeine kinematische Grundgleichung des komplexen, zusammengesetzten Planetengetriebes für die Wellen $I - II - III_1$:

$$B' i'_{II} i''_{II} \omega_I - B'' \omega_{II} - \left[(B' - 1) \frac{i'_{II} i''_{II}}{i'_{III}} - (B'' - 1) i''_{III} \right] \omega_{III1} = 0. \quad (14)$$

Wenn man berücksichtigt, daß

$$\omega'_{II} = \frac{\omega_{III2}}{i'_{II}}, \quad (15)$$

$$\omega''_{II} = i''_{II} \omega_{III2}, \quad (16)$$

$$\omega''_{III} = i'_{III} i''_{III} \omega'_{III} \quad (17)$$

ist, dann erhält man aus dem Gleichungspaar (6) die allgemeine kinematische Grundgleichung des komplexen, zusammengesetzten Planetengetriebes für die Wellen $I - II - III_2$:

$$B' (B'' - 1) i'_{III} i''_{III} \omega_I - B'' (B' - 1) \omega_{II} - \left[(B'' - 1) \frac{i'_{III} i''_{III}}{i'_{II}} - (B' - 1) i''_{II} \right] \omega_{III2} = 0. \quad (18)$$

Man erhält den speziellen, vereinfachten Fall (Bild 6), wenn

$$i'_{II} = i''_{II} = i'_{III} = i''_{III} = 1 \quad (19)$$

ist, d. h., wenn kein Verbindungselement verwendet wird.

In diesen Fällen lautet die kinematische Grundgleichung für die $I - II - III_1$ Wellen:

$$\frac{B'}{B''} \omega_I - \omega_{II} - \left(\frac{B'}{B''} - 1 \right) \omega_{III1} = 0 \quad (20)$$

bzw. für die $I - II - III_2$ Wellen:

$$\frac{B' (B'' - 1)}{B'' (B' - 1)} \omega_I - \omega_{II} - \frac{B'' - B'}{B'' (B' - 1)} \omega_{III2} = 0. \quad (21)$$

Wenn man die Gleichungen (14) und (21) mit der allgemeinen kinematischen Grundgleichung des einfachen Planetengetriebes (4) vergleicht, dann

ist zu ersehen, daß zwischen ihnen die Beziehungen

$$B = \frac{B'}{B''}, \quad (22)$$

beziehungsweise

$$B = \frac{B'(B'' - 1)}{B''(B' - 1)} \quad (23)$$

bestehen.

III. Winkelgeschwindigkeiten der Planetengetriebe

Die einfachen oder zusammengesetzten Planetengetriebe können auch als Konstruktionen mit zwei Freiheitsgraden verwendet werden, im allgemeinen werden sie jedoch in Mechanismen mit einem Freiheitsgrad umgewandelt.

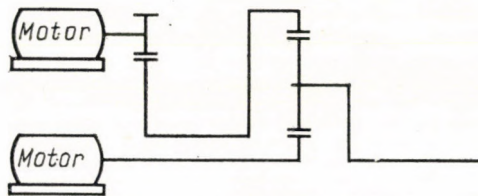


Bild 8

Mechanismen mit zwei Freiheitsgraden werden verwendet, wenn z. B. die Vereinigung zweier voneinander unabhängigen Drehbewegungen oder Leistungen zu einer bestimmten Proportion erforderlich wird (Bild 8). Zur Untersuchung derartiger Fälle kann die allgemeine kinematische Grundgleichung des Planetengetriebes unmittelbar verwendet werden.

Wesentlich öfter begegnen wir jedoch Mechanismen, die zu Planetengetrieben mit einem Freiheitsgrad umgewandelt wurden. Diese können in zwei Hauptgruppen unterteilt werden, je nach dem, in welcher Weise die Ableitung des überflüssigen Freiheitsgrades erfolgt. Die eine Methode besteht darin, daß irgendeine Welle — in den weiteren Ausführungen ist es einheitlich die Welle *III* — *ausgeschaltet* wird (durch Verbindung mit dem Rahmen, Bild 9), die zweite Methode besteht in der Umkupplung der Welle *III* mit einer anderen Welle — im weiteren Verlauf einheitlich mit der Welle *II* (Bild 10).

Im ersten Fall kann man das Planetengetriebe als *verriegeltes Planetengetriebe*, im zweiten Fall als *umgekuppeltes Planetengetriebe* bezeichnen.

Bei der Verwendung eines zusammengesetzten Planetengetriebes wird von den Wellen *III*₁ und *III*₂ nur die eine, sei es in Form von Verriegelung,

sei es durch Umkupplung, verwendet. Es besteht jedoch die Möglichkeit, daß die beiden Wellen miteinander verbunden werden, und in dieser Weise gelangt man zu den *kreuzverbundenen Planetengetrieben*. Es muß jedoch betont werden, daß die Kreuzverbindung lediglich bei zusammengesetzten Planetengetrieben verwendet werden kann, wo zwei Wellen *III* vorhanden sind. In allen drei Fällen, infolge der *Verriegelung*, der Umkupplung der Welle *III* bzw. der *Kreuzverbindung* der beiden Wellen *III* — verbleiben zwei Hauptwellen, die wir mit Indizes 0 und ∞ versehen (in den weiteren Ausführungen einheitlich, von der Seite *I* mit 0, von der Seite *II* mit ∞). Die Einführung der Leistung kann übrigens durch eine beliebige Welle von den beiden erfolgen.

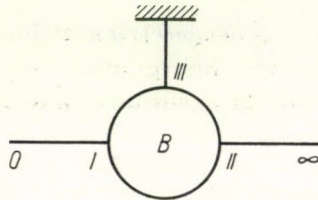


Bild 9

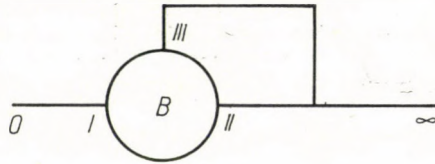


Bild 10

Zur Sicherung der eindeutigen Ausdrucksweise soll vom *geraden Antrieb* die Rede sein, wenn die Leistung über die Welle 0 eintritt (*»vorwärts verbundenes Planetengetriebe«*), und vom *umgekehrten Antrieb*, wenn der entgegengesetzte Fall vorliegt (*»rückverbundenes Planetengetriebe«*). Bei der Verriegelung oder Umkupplung der Wellen kann man die gleichen Verbindungselemente verwenden wie bei der Gestaltung von zusammengesetzten komplexen Planetengetrieben, sie können also ebenfalls als komplexe Planetengetriebe bezeichnet werden.

In den folgenden Ausführungen sollen die komplexen Planetengetriebe mit einem Freiheitsgrad (verriegelte, umgekuppelte und kreuzverbundene Planetengetriebe) hinsichtlich der äußeren kinematischen Verhältnisse untersucht werden. Zu diesem Zweck soll ihre Übersetzung, d. h. der Quotient der Winkelgeschwindigkeit der beiden Wellen bestimmt werden.

a) Bei *verriegelten komplexen Planetengetrieben* beträgt die Zahl der möglichen Verbindungselemente drei.

Die Verbindungselemente werden kinematisch durch ihre Übersetzung gekennzeichnet:

$$i_0 = \frac{\omega_I}{\omega_0}, \quad (24)$$

$$i_\infty = \frac{\omega_\infty}{\omega_{II}}, \quad (25)$$

$$i_{III} = \frac{\omega_x}{\omega_{III}}. \quad (26)$$

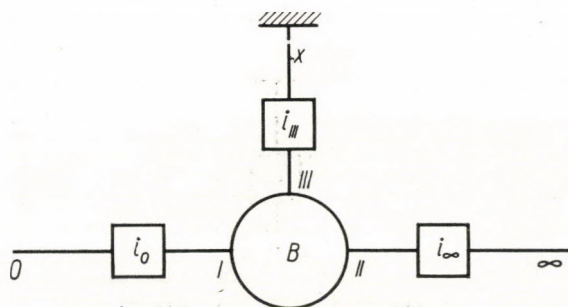


Bild 11

Da der Rahmen immer steht, ist

$$i_{III} = 0.$$

Anstatt dessen vergleichen wir zur Kennzeichnung des dritten Verbindungselementes die Winkelgeschwindigkeit der Wellen *III* und *I* des Planetengetriebes:

$$i_{III-I} = \frac{\omega_{III}}{\omega_I}. \quad (27)$$

Wenn man die Winkelgeschwindigkeit der Wellen des einfachen Planetengetriebes aus den Gleichungen (24), (25) und (26) entnimmt und die erhaltenen Werte in die allgemeine kinematische Grundgleichung des einfachen Planetengetriebes einsetzt, dann erhält man:

$$B i_0 \omega_0 - \frac{\omega_\infty}{i_\infty} - (B - 1) i_{III-I} i_0 \omega_0 = 0. \quad (28)$$

Damit kann die Übersetzung des verriegelten komplexen Planetengetriebes ausgedrückt werden:

$$\frac{\omega_{\infty}}{\omega_0} = i_0 i_{\infty} [B - (B - 1) i_{III-I}]. \quad (29)$$

Im Grunde genommen sind die Verbindungselemente i_0 und i_{∞} mit dem Planetengetriebe in Reihe geschaltet. Den vereinfachten Fall des verriegelten komplexen Planetengetriebes erhalten wir dann, wenn keine in Reihe geschalteten Verbindungselemente vorhanden sind (Bild 12), d. h. wenn

$$i_0 = i_{\infty} = 1. \quad (30)$$

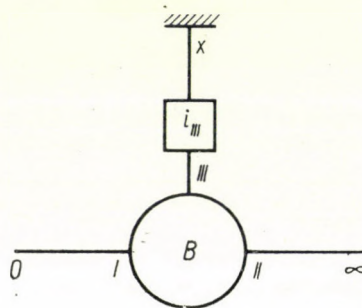


Bild 12

In diesem Fall ist

$$\frac{\omega_{\infty}}{\omega_0} = B - (B - 1) i_{III-I}. \quad (31)$$

Eine sehr verbreitete Variation dieses Typs stellt das mit geschlossener Kupplung verriegelte Planetengetriebe (Bild 9) dar, wobei $\omega_{III-I} = 0$ ist, und daher lautet die Übersetzung:

$$\frac{\omega_{\infty}}{\omega_0} = B. \quad (32)$$

Wenn bei komplexen Planetengetrieben die Welle III_1 verriegelt wird (Bild 13), dann ergibt sich nach Einsetzen der entsprechenden Werte die Grundgleichung (14) in der Form:

$$\left. \begin{aligned} & B' i'_{II} i''_{II} i_0 \omega_0 - B'' \frac{\omega_{\infty}}{i_{\infty}} - \\ & - \left[(B' - 1) \frac{i'_{II} i''_{II}}{i'_{III}} - (B'' - 1) i''_{III} \right] i_{III-I} i_0 \omega_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Hieraus ergibt sich die Übersetzung zu

$$\frac{\omega_{\infty}}{\omega_0} = i_0 i_{\infty} \left(\frac{B'}{B''} i'_{II} i''_{II} - \frac{(B' - 1) i'_{II} i''_{II} - (B'' - 1) i'_{III}}{B''} \right) i_{III-I}. \quad (34)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 14), wenn

$$i'_{II} = i''_{II} = i'_{III} = i''_{III} = 1 \quad (19)$$

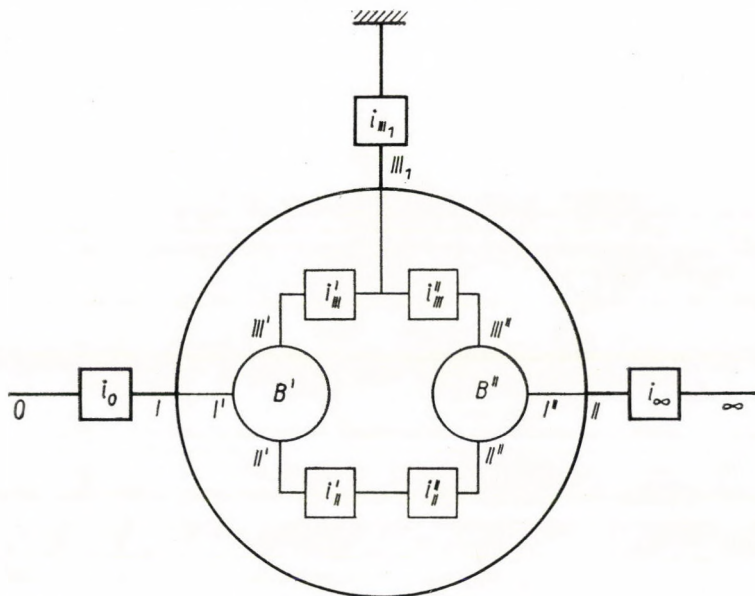


Bild 13

und

$$i_0 = i_{\infty} = 1 \quad (30)$$

ist, dann ist die Übersetzung

$$\frac{\omega_{\infty}}{\omega_0} = \frac{B'}{B''} - \frac{B' - B''}{B''} i_{III-I}, \quad (35)$$

beziehungsweise im Falle einer geschlossenen Kupplung ($i_{III-I} = 0$) (Bild 15),

$$\frac{\omega_{\infty}}{\omega_0} = \frac{B'}{B''}. \quad (36)$$

Auch für die Verriegelung der Welle III_2 könnte man die entsprechenden Gleichungen ableiten, sie sind jedoch von keiner praktischen Bedeutung,

denn im konkreten Fall kann man die Indizes immer in der Weise verwenden, daß die Gleichungen, die sich auf die Wellen I — II — III₁ beziehen, verwendet werden können.

b) Bei umgekuppelten komplexen Planetengetrieben (Bild 16) sind vier Verbindungselemente möglich. Ihre kinematischen Übersetzungen lauten:

$$i_0 = \frac{\omega_I}{\omega_0}, \quad (37)$$

$$i_\infty = \frac{\omega_\infty}{\omega_x}, \quad (38)$$

$$i_{II} = \frac{\omega_x}{\omega_{II}}, \quad (39)$$

$$i_{III} = \frac{\omega_x}{\omega_{III}}. \quad (40)$$

Aus ihnen kann die Winkelgeschwindigkeit der drei Wellen des Planetengetriebes bestimmt werden. Aus (37)

$$\omega_I = i_0 \omega_0, \quad (41)$$

aus (38) und (39):

$$\omega_{II} = \frac{\omega_\infty}{i_{II} i_\infty}, \quad (42)$$

aus (38) und (40)

$$\omega_{III} = \frac{\omega_\infty}{i_{III} i_\infty}. \quad (43)$$

Wenn man die Gleichungen (41), (42) und (43) in die allgemeine kinematische Grundgleichung des Planetengetriebes einsetzt, dann erhalten wir:

$$B i_0 \omega_0 - \frac{\omega_\infty}{i_{II} i_\infty} - (B - 1) \frac{\omega_\infty}{i_{III} i_\infty} = 0. \quad (44)$$

Hieraus kann die Übersetzung des umgekuppelten komplexen Planetengetriebes entnommen werden:

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = i_0 i_\infty \frac{B}{\frac{1}{i_{II}} + (B - 1) \frac{1}{i_{III}}}. \quad (45)$$

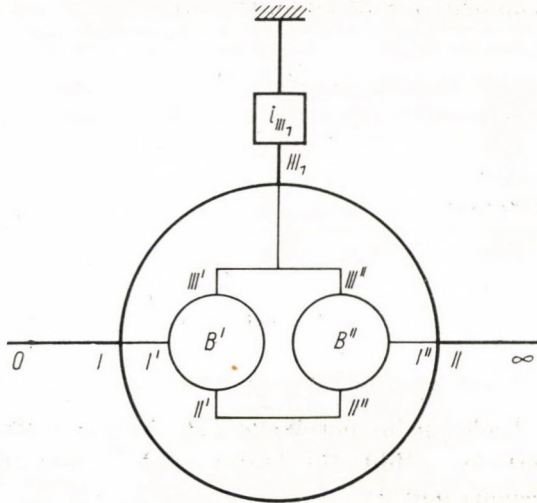


Bild 14

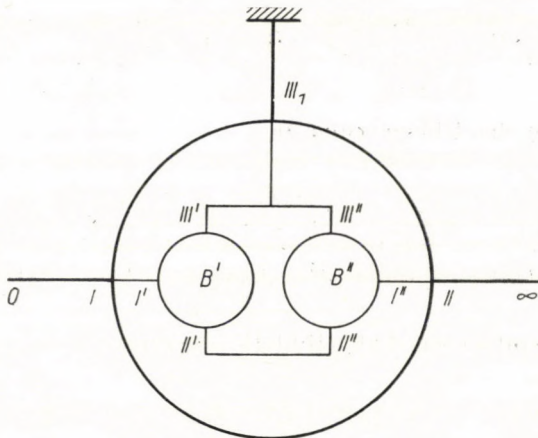


Bild 15

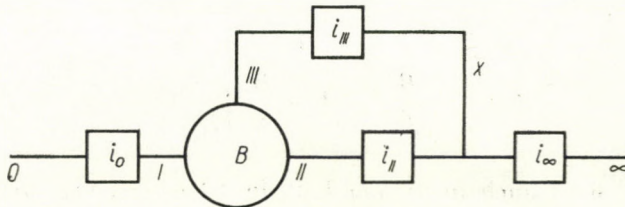


Bild 16

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 17), wenn

$$i_0 = i_\infty = 1 \quad (30)$$

und

$$i_{II} = 1, \quad (46)$$

dann ist die Übersetzung

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = \frac{B}{1 + (B-1) \frac{1}{i_{III}}} \quad (47)$$

Im Falle des Umkuppelns der Welle III_1 des zusammengesetzten komplexen Planetengetriebes (Bild 18) lautet nach Substitution die Grundgleichung (14) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & B' i'_{II} i''_{II} i_0 \omega_0 - B'' \frac{\omega_\infty}{i_{II} i_\infty} - \\ & - \left[(B-1) \frac{i'_{II} i''_{II}}{i'_{III}} - (B''-1) i''_{III} \right] \frac{\omega_\infty}{i_{III} i_\infty} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Hieraus ergibt sich die Übersetzung zu

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = \frac{i_0 i_\infty}{\frac{B'}{B''} \frac{1}{i'_{II} i''_{II} i_{II}} + \left[\left(1 - \frac{1}{B'} \right) \frac{1}{i'_{III}} - \frac{B''-1}{B'} \frac{i''_{III}}{i'_{II} i''_{II}} \right] \frac{1}{i_{III}}} \quad (49)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 19), wenn

$$i'_{II} = i''_{II} = i'_{III} = i''_{III} = 1, \quad (19)$$

$$i_0 = i_\infty = 1, \quad (30)$$

$$i_{II} = 1 \quad (46)$$

ist, beträgt die Übersetzung:

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = \frac{1}{\frac{B''}{B'} + \left(1 - \frac{B''}{B'} \right) \frac{1}{i_{III}}} \quad (50)$$

Selbstverständlich ist auch in diesem Fall die Gleichung (15) gültig [vgl. die Formeln (47) und (50)].

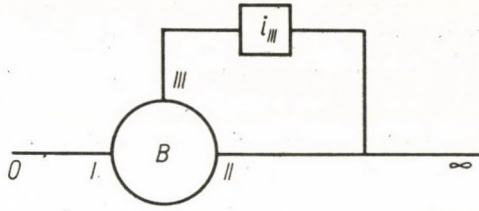


Bild 17

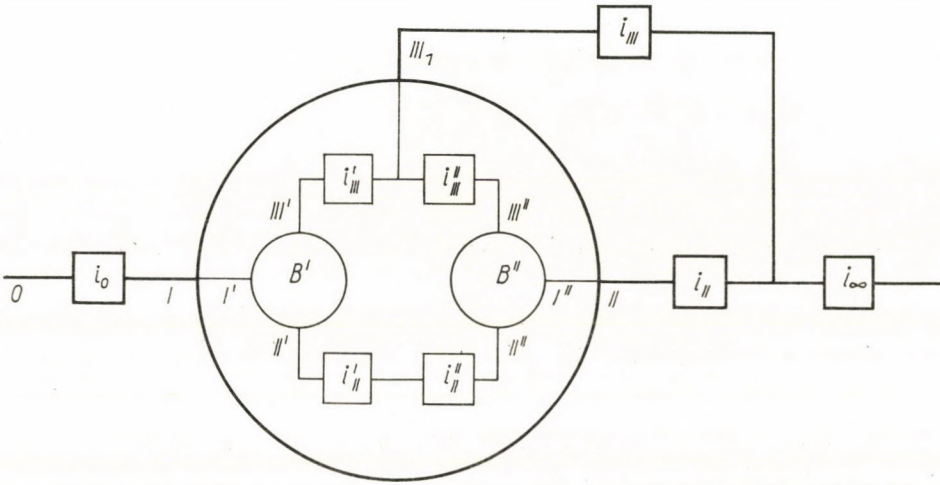


Bild 18

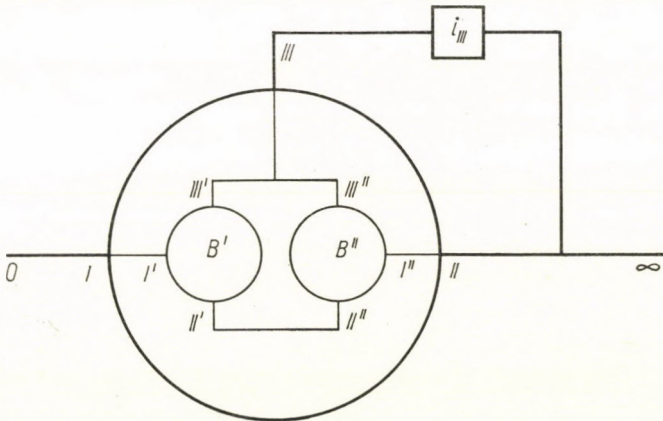


Bild 19

Für den Fall der Umkupplung der Welle III_2 werden die Gleichungen ebenfalls nicht abgeleitet, denn durch die geeignete Wahl der Indizes können die für die Welle III_1 gültigen Beziehungen praktisch immer verwendet werden.

c) *Kreuzverbinden* — wie bereits oben erwähnt — kann man nur zusammengesetzte Planetengetriebe. Im Bild 20 ist das allgemeine Schema des kreuzverbundenen, komplexen, zusammengesetzten Planetengetriebes dargestellt. Bei der Kreuzverbindung können drei Verbindungselemente verwendet werden. ihre kinematische Übersetzung lautet:

$$i_0 = \frac{\omega_I}{\omega_0}, \text{ bzw. } i_\infty = \frac{\omega_\infty}{\omega_{II}} \quad (51)$$

$$i_{III} = \frac{\omega_{III2}}{\omega_{III1}} \quad (52)$$

Werden diese Werte in die Gleichung (14) eingesetzt, so erhält man:

$$B' i'_{II} i''_{II} i_0 \omega_0 - B'' \frac{\omega_\infty}{i_\infty} - \left[(B' - 1) \frac{i'_{II} i''_{II}}{i'_{III}} - (B'' - 1) i''_{III} \right] \frac{\omega_{III2}}{i_{III}} = 0. \quad (53)$$

Hieraus wird ω_{III2} entnommen und dann in die Gleichung (18) eingesetzt. Nach der Umordnung erhält man:

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = i_0 i_\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{B''}\right) i''_{III} + \frac{1}{B''} i''_{II} i_{III}}{\left(1 - \frac{1}{B'}\right) \frac{1}{i'_{III}} + \frac{1}{B'} \frac{1}{i'_{II}} i_{III}} \quad (54)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 21), wenn

$$i'_{II} = i''_{II} = i'_{III} = i''_{III} = 1 \quad (19)$$

und

$$i_0 = i_\infty = 1, \quad (30)$$

ist die Übersetzung:

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = \frac{1 - \frac{1}{B''} + \frac{1}{B''} i_{III}}{1 - \frac{1}{B'} + \frac{1}{B'} i_{III}} \quad (55)$$

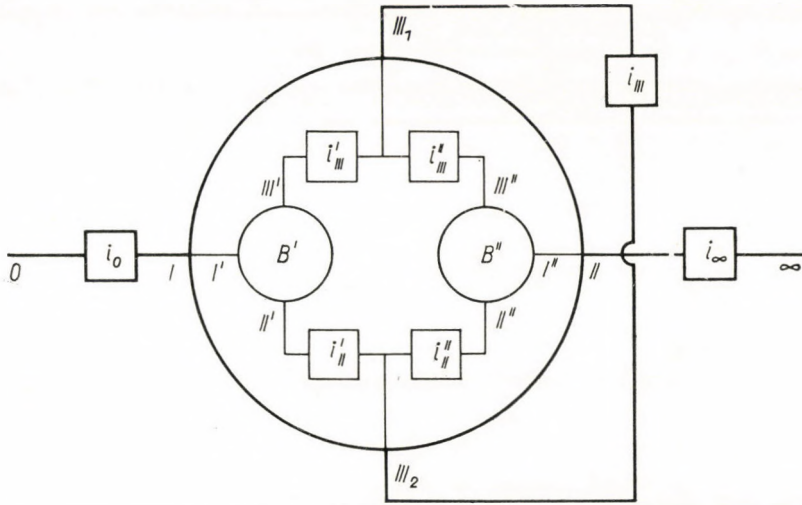


Bild 20

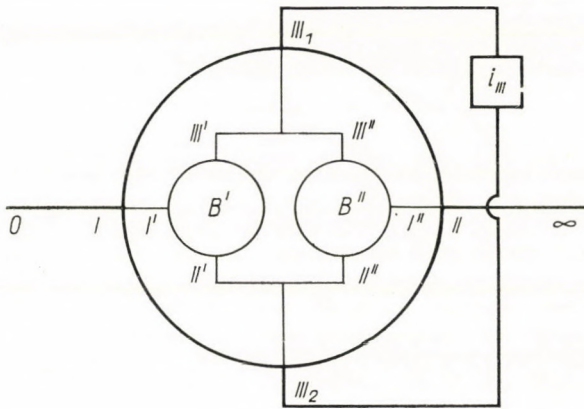


Bild 21

IV. Die Proportion der Momente bei den Planetengetrieben

Da das Planetengetriebe einen Zahnradmechanismus bedeutet, und die Abmessungen der Zahnräder sich bei demselben Planetengetriebe nicht ändern, so ist das Verhältnis der auf die Wellen des Planetengetriebes wirkenden Momente konstant, d. h. unabhängig von den Beziehungen der Winkelgeschwindigkeiten. Daraus folgt, daß es zweckmäßig ist — aus Gründen der Einfachheit — die Proportion der Momente unter Zugrundelegung der einfachsten kinematischen Bedingungen zu bestimmen.

Betrachten wir ein Planetengetriebe, bei dem kein Verbindungselement vorhanden ist (Bild 9). Bei diesem Zahnradmechanismus mit einem Freiheitsgrad besteht — wenn man die Verluste unberücksichtigt läßt — infolge des Gesetzes von der Erhaltung der Energie die bekannte Beziehung zwischen den Winkelgeschwindigkeiten und den Momenten:

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_I} = - \frac{M_I}{M_{II}}. \quad (56)$$

Da bei dem betrachteten Planetengetriebe nach Gleichung (32) folgende Beziehung besteht:

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = B = \frac{\omega_{II}}{\omega_I}, \quad (57)$$

so folgt aus der Gleichung (56), daß

$$B = - \frac{M_I}{M_{II}}. \quad (58)$$

Hieraus ist

$$M_{II} = - \frac{1}{B} M_I. \quad (59)$$

Aus dem Gleichgewicht der Momente folgt, daß

$$M_I + M_{II} + M_{III} = 0, \quad (60)$$

beziehungsweise

$$M_{III} = - M_I - M_{II}. \quad (61)$$

Durch Substitution von (59) und Ausklammern von M_I erhält man:

$$M_{III} = \left(\frac{1}{B} - 1 \right) M_I. \quad (62)$$

Mit den drei Momenten, auf Grund der Gleichungen (59) und (62), stellen wir folgende Proportionen auf:

$$M_I : M_{II} : M_{III} = 1 : \left(- \frac{1}{B} \right) : \left(\frac{1}{B} - 1 \right). \quad (63)$$

Im Falle des *zusammengesetzten* komplexen Planetengetriebes (Bild 7) wird das Momentengleichgewicht zuerst für den Anschlußpunkt der Welle III_1 angeschrieben:

$$k'_{III} M'_{III} + \frac{1}{k''_{III}} M''_{III} + M_{III} = 0, \quad (64)$$

wo mit k die Momentenübersetzung der Verbindungselemente bezeichnet wurde, z. B.

$$k'_{III} = \frac{M_{III}}{M'_{III}}. \quad (65)$$

Aus der Proportion (63) gewinnt man

$$M'_{III} = \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) M'_I = \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) M_I, \quad (66)$$

und

$$M''_{III} = (B'' - 1) M''_{II}, \quad (67)$$

da aber

$$M''_{II} = -k'_{II} k''_{II} M'_{II} = -k'_{II} k''_{II} \left(-\frac{1}{B'} \right) M'_I \quad (68)$$

ist, so folgt, daß

$$M''_{III} = -\frac{1 - B''}{B'} k'_{II} k''_{II} M'_I = \frac{B'' - 1}{B'} k'_{II} k''_{II} M_I. \quad (69)$$

Wenn man die Ausdrücke (66) und (69) in die Gleichung (64) einsetzt, so erhält man:

$$k'_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) M_I + \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{B'' - 1}{B'} M_I + M_{III} = 0. \quad (70)$$

Hieraus folgt, daß

$$M_{III} = \left[k'_{III} \left(1 - \frac{1}{B'} \right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{B'' - 1}{B'} \right] M_I. \quad (71)$$

Da

$$M_I + M_{II} + M_{III} = 0, \quad (60)$$

so ist

$$M_{II} = -M_I - M_{III} = \left[k'_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{1 - B''}{B'} - 1 \right] M_I. \quad (72)$$

Aus den Gleichungen (71) und (72) kann man folgende Proportionen aufstellen:

$$M_I : M_{II} : M_{III} = 1 : \left[k'_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{1 - B''}{B'} - 1 \right] : \left[k'_{III} \left(1 - \frac{1}{B'} \right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{B'' - 1}{B'} \right]. \quad (73)$$

Hiernach wird das Momentengleichgewicht für den Anschlußpunkt der Welle III_2 angeschrieben:

$$k'_{II} M'_{II} + \frac{1}{k''_{II}} M''_{II} + M_{III_2} = 0. \quad (74)$$

Aus der Proportion (63) folgt:

$$M'_{II} = \left(-\frac{1}{B'}\right) M_I = \left(-\frac{1}{B'}\right) M_I, \quad (75)$$

und

$$M''_{II} = \frac{1}{B'' - 1} M''_{III}, \quad (76)$$

da aber

$$M'_{III} = -k'_{III} k''_{III} M'_{III} = -k'_{III} k''_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1\right) M_I, \quad (77)$$

so ist

$$M''_{II} = -\frac{1}{B'' - 1} k'_{III} k''_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1\right) M_I = \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)} k'_{III} k''_{III} M_I. \quad (78)$$

Wenn man die Ausdrücke (75) und (78) in die Gleichung (74) einsetzt, so erhält man:

$$k'_{II} \left(-\frac{1}{B'}\right) M_I + \frac{k'_{III} k''_{III}}{k''_{II}} \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)} M_I + M_{III_2} = 0. \quad (79)$$

Hieraus ergibt sich

$$M_{III_2} = -\left[k'_{II} \frac{1}{B'} + \frac{k'_{III} k''_{III}}{k''_{II}} \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)}\right] M_I. \quad (80)$$

Da

$$M_I + M_{II} + M_{III_2} = 0, \quad (60)$$

daher ist

$$M_{II} = -M_I - M_{III_2} = \left[-\frac{k'_{II}}{B'} + \frac{k'_{III} k''_{III}}{k''_{II}} \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)} - 1\right] M_I. \quad (81)$$

Aus den Gleichungen (80) und (81) wird folgende Proportion angeschrieben:

$$M_I : M_{II} : M_{III} = 1 : \left[-\frac{k'_{II}}{B'} + \frac{k'_{III} k''_{III}}{k''_{II}} \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)} - 1\right] : \left[\frac{k'_{II}}{B'} - \frac{k'_{III} k''_{III}}{k''_{II}} \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)}\right]. \quad (82)$$

Im vereinfachten, speziellen Fall, wenn

$$k'_{II} = k''_{II} = k'_{III} = k''_{III} = -1, \quad (83)$$

dann ist

$$M_I : M_{II} : M_{III} = 1 : \left(-\frac{B''}{B'} \right) : \left(\frac{B''}{B'} - 1 \right) \quad (84)$$

beziehungsweise

$$M_I : M_{II} : M_{III} = 1 : \left[-\frac{B''(B' - 1)}{B'(B'' - 1)} \right] : \left[\frac{B''(B' - 1)}{B'(B'' - 1)} - 1 \right]. \quad (85)$$

V. Momentenverhältnisse der Planetengetriebe

Die äußeren Verhältnisse der Planetengetriebe werden von der Momentenübersetzung gekennzeichnet.

a) Beim *verriegelten* komplexen Planetengetriebe (Bild 11) ist

$$M_\infty = k_\infty M_{II} \quad (86)$$

und

$$M_0 = \frac{M_I}{k_0}. \quad (87)$$

Unter Berücksichtigung der Proportion (63) kann angeschrieben werden:

$$\frac{M_\infty}{M_0} = k_0 k_\infty \left(-\frac{1}{B} \right). \quad (88)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 9) gilt

$$\frac{M_\infty}{M_0} = -\frac{1}{B}. \quad (89)$$

Unter Berücksichtigung der Proportion (73) gilt im Hinblick auf die Wellen I—II—III (Bild 13) im Falle des zusammengesetzten Planetengetriebes

$$\frac{M_\infty}{M_0} = k_0 k_\infty \left[k'_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{1 - B''}{B'} - 1 \right] \quad (90)$$

beziehungsweise unter Zugrundelegung der Proportion (84), (Bild 15):

$$\frac{M_\infty}{M_0} = -\frac{B''}{B'}. \quad (91)$$

b) Im Falle des umgekuppelten Planetengetriebes (Bild 16) sei das Momentengleichgewicht für den Anschlußpunkt der Welle x angeschrieben:

$$k_{III} M_{III} = k_{II} M_{II} + \frac{M_{\infty}}{k_{\infty}} = 0. \quad (92)$$

Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (86), (87) und (63) kann man aussagen, daß

$$M_{II} = -\frac{k_0}{B} M_0 \quad (93)$$

und

$$M_{III} = \left(\frac{1}{B} - 1 \right) k_0 M_0 \quad (94)$$

ist.

Wenn man die Ausdrücke (93) und (94) in die Gleichung (92) einsetzt, so erhält man nach der Umformung den Ausdruck für die Momentenübersetzung:

$$\frac{M_{\infty}}{M_0} = k_0 k_{\infty} \frac{(B-1)k_{III} + k_{II}}{B}. \quad (95)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 17) ist die Momentenübersetzung:

$$\frac{M_{\infty}}{M_0} = \left(1 - \frac{1}{B} \right) k_{III} + \frac{1}{B}. \quad (96)$$

Im Falle des zusammengesetzten komplexen Planetengetriebes (Bild 18), wenn man in der obigen Ableitung anstelle der Proportion (63) die Proportion (73) berücksichtigt, so wird im allgemeinen Fall die Momentenübersetzung für die Wellen I—II—III₁:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\infty}}{M_0} = k_0 k_{\infty} & \left\{ k_{III} \left[k'_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{1 - B''}{B'} \right] + \right. \\ & \left. + k_{II} \left[\left(1 - \frac{1}{B'} \right) + \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{1 - B''}{B'} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (97)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 19) gilt:

$$\frac{M_{\infty}}{M_0} = \left(1 - \frac{B''}{B'} \right) k_{III} + \frac{B''}{B'}. \quad (98)$$

Es kann nachgeprüft werden, daß die für die Momentenübersetzung erhaltenen sämtlichen Ausdrücke aus der Formel der entsprechenden kinematischen

Übersetzung ebenfalls unmittelbar zu erhalten sind durch die Substitution

$$i = -\frac{1}{k} \quad (99)$$

beziehungsweise

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = -\frac{M_0}{M_\infty}. \quad (100)$$

c) Bei dem *kreuzverbundenen* Planetengetriebe (Bild 20) wird das Momentengleichgewicht für den Anschlußpunkt der Wellen des Verbindungselementes i_{III} angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} k'_{III} M'_{III} + \frac{1}{k''_{III}} M''_{III} + M_{III1} &= 0 \\ k'_{II} M'_{II} + \frac{1}{k''_{II}} M''_{II} + M_{III2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Da

$$M'_{III} = \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) M'_I = k_0 \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) M_0, \quad (102)$$

$$M''_{III} = \left(\frac{1}{B''} - 1 \right) M''_I = \frac{1}{k_\infty} \left(\frac{1}{B''} - 1 \right) M_\infty, \quad (103)$$

$$M'_{II} = \left(-\frac{1}{B'} \right) M'_I = k_0 \left(-\frac{1}{B'} \right) M_0, \quad (104)$$

$$M''_{II} = \left(-\frac{1}{B''} \right) M''_I = \frac{1}{k_\infty} \left(-\frac{1}{B''} \right) M_\infty \quad (105)$$

und

$$M_{III1} = \frac{1}{k_{III}} M_{III2} \quad (106)$$

ist, kann das Gleichungspaar (101) auch in folgender Form angeschrieben werden:

$$k_0 k'_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1 \right) M_0 + \frac{1}{k''_{III} k_\infty} \left(\frac{1}{B''} - 1 \right) M_\infty + \frac{1}{k_{III}} M_{III2} = 0, \quad (107)$$

$$k_0 k'_{II} \left(-\frac{1}{B'} \right) M_0 + \frac{1}{k''_{II} k_\infty} \left(-\frac{1}{B''} \right) M_\infty + M_{III2} = 0.$$

Wenn das erste Glied des Gleichungspaares mit k_{III} multipliziert, und daraus die zweite Gleichung subtrahiert wird, dann erhält man nach der

Umformung:

$$\frac{M_\infty}{M_0} = -k_0 k_\infty \frac{\frac{1}{B'} k'_{II} + \left(\frac{1}{B'} - 1\right) k'_{III} k_{III}}{\frac{1}{B''} \frac{1}{k''_{II}} + \left(\frac{1}{B''} - 1\right) \frac{1}{k''_{III}} k_{III}}. \quad (108)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 21) ist:

$$\frac{M_\infty}{M_0} = \frac{\frac{1}{B'} + \left(\frac{1}{B'} - 1\right) k_{III}}{\frac{1}{B''} + \left(\frac{1}{B''} - 1\right) k_{III}}. \quad (109)$$

VI. Die Proportion der Leistungen bei den Planetengetrieben

Man kann die Proportion der Leistungen bei den Planetengetrieben leicht aus der Proportion der Momente durch Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit ermitteln:

$$P_I : P : P_{III} = \omega_I : \left(-\frac{1}{B}\right) \omega_{II} : \left(\frac{1}{B} - 1\right) \omega_{III}. \quad (110)$$

Im Falle des *zusammengesetzten* komplexen Planetengetriebes (Bild 7) ergibt sich:

$$P_I : P_{II} : P_{III1} = \omega_I : \left[k'_{III} \left(\frac{1}{B'} - 1\right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{1 - B''}{B'} - \right. \\ \left. - 1 \right] \omega_{II} : \left[k'_{III} \left(1 - \frac{1}{B'}\right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{B'' - 1}{B'} \right] \omega_{III1}, \quad (111)$$

beziehungsweise

$$P_I : P_{II} : P_{III2} = \omega_I : \left[-\frac{k'_{II}}{B'} + \frac{k'_{III} k''_{III}}{k''_{II}} \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)} - \right. \\ \left. - 1 \right] \omega_{II} : \left[\frac{k'_{II}}{B'} - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{B' - 1}{B'(B'' - 1)} \right] \omega_{III2}. \quad (112)$$

In einem speziellen, vereinfachten Fall (Bild 6) ergibt sich:

$$P_I : P_{II} : P_{III1} = \omega_I : \left(-\frac{B''}{B'}\right) \omega_{II} : \left(\frac{B''}{B'} - 1\right) \omega_{III1} \quad (113)$$

beziehungsweise

$$P_I : P_{II} : P_{III} = \omega_I : \left(-\frac{B''}{B'} \frac{B' - 1}{B'' - 1} \right) \omega_{II} : \left(\frac{B''}{B'} \frac{B' - 1}{B'' - 1} - 1 \right) \omega_{III}. \quad (114)$$

VII. Leistungsfluß in Planetengetrieben

Auf Grund der Leistungsverhältnisse der Planetengetriebe kann ihr Leistungsfluß leicht untersucht werden.

a) Bei dem *verriegelten* Planetengetriebe fließt die Leistung nach einer Richtung, da auf den Rahmen keine Leistung entfallen kann. Im Falle eines geraden Antriebs tritt die Leistung an der Welle 0 ein, und tritt an der Welle ∞ aus; bei dem umgekehrten Antrieb bedeutet die ∞ -Welle den Eintritt und die 0-Welle den Austritt. Sofern die Verriegelung durch ein Verbindungselement erfolgt, in dem Verluste auftreten (z. B. mit einer hydrodynamischen Wellenkupplung), so werden die Eintritts- und Austrittsleistungen nicht gleich sein, obwohl das Planetengetriebe selbst als verlustfrei angesehen wird.

b) Bei dem *umgekuppelten* Planetengetriebe (Bild 16) kommt im allgemeinen eine Leistungsverzweigung zustande, die Untersuchung der Verteilung und der Richtung des Leistungsflusses bedeutet daher eine wichtige Aufgabe.

Man erhält ein kennzeichnendes Bild über die Verhältnisse des Leistungsflusses, wenn man die Vorzeichen der Leistungen vergleicht, die durch die einzelnen Wellen fließen.

Aus der Proportion (110) geht hervor:

$$\frac{P_{II}}{P_I} = \left(-\frac{1}{B} \right) \frac{\omega_{II}}{\omega_I}. \quad (115)$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird unter der Verwendung der Formeln (42) und (45) durch die Winkelgeschwindigkeiten der Wellen ∞ , bzw. 0 ausgedrückt:

$$\omega_{II} = \frac{\omega_\infty}{i_{II} i_\infty} = \frac{\omega_0}{i_{II} i_\infty} \frac{\omega_\infty}{\omega_0} = \frac{i_0}{i_{II}} \frac{B}{\frac{1}{i_{II}} + \frac{B-1}{i_{III}}} \omega_0. \quad (116)$$

Wenn man die Ausdrücke (41) und (116) in die Gleichung (115) einsetzt, so erhält man:

$$\frac{P_{II}}{P_I} = \frac{1}{\frac{i_{II}}{i_{III}} (1 - B) - 1}. \quad (117)$$

Die Vorzeichen der Leistungen an den Wellen I und II stimmen überein, d. h.

$$\frac{P_{II}}{P_I} > 0, \quad (118)$$

wenn

$$\frac{i_{II}}{i_{III}} (1 - B) > 1 \quad (119)$$

ist.

Erneut aus der Proportion (110):

$$\frac{P_{III}}{P_I} = \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \frac{\omega_{III}}{\omega_I}. \quad (120)$$

Unter Verwendung der Formeln (34) und (36):

$$\omega_{III} = \frac{\omega_\infty}{i_{III} i_\infty} = \frac{\omega_0}{i_{III} i_\infty} \frac{\omega_\infty}{\omega_0} = i_0 \frac{B}{\frac{i_{III}}{i_{II}} + B - 1} \omega_0. \quad (121)$$

Werden die Formeln (43) und (121) in den Ausdruck (120) eingesetzt, so erhält man:

$$\frac{P_{III}}{P_I} = \frac{1}{\frac{i_{III}}{i_{II}} \frac{1}{1 - B} - 1}. \quad (122)$$

Die Vorzeichen der Leistungen an den Wellen I und III stimmen also überein, d. h.

$$\frac{P_{III}}{P_I} > 0, \quad (123)$$

wenn

$$\frac{i_{III}}{i_{II}} \frac{1}{1 - B} > 1, \quad (124)$$

d. h. in eine Form gebracht, die ähnlich dem Ausdruck (119) ist, wenn

$$\frac{1}{\frac{i_{II}}{i_{III}} (1 - B)} > 1. \quad (125)$$

Auf Grund der Ungleichheiten von (119) und (125) können sämtliche möglichen Fälle der Leistungsverzweigungen bestimmt werden.

Wenn der Ausdruck (119) gültig ist, dann kann der Ausdruck (125) nicht bestehen, in diesem Fall unterscheidet sich daher das Vorzeichen von P_{III} sowohl von dem Vorzeichen von P_I als auch von dem Vorzeichen von P_{II} . Das bedeutet, daß im Falle des geraden Antriebs die Wellen I und II den Eintritt, die Welle III dagegen den Austritt darstellen, d. h., durch die Welle II fließt wieder Leistung in das Planetengetriebe zurück (Leistungszirkulation) (Bild 22). Im Falle des umgekehrten Antriebs gibt es ebenfalls eine Leistungs-

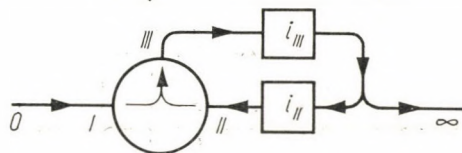


Bild 22

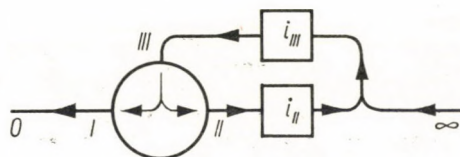


Bild 23

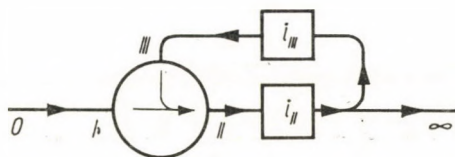


Bild 24

zirkulation, aber hier »schickt« das Planetengetriebe die zirkulierende Leistung »zurück« (Bild 23).

Wenn der Ausdruck (83) nicht zutrifft, dann sind zwei Fälle möglich. Sofern

$$0 < \frac{i_{II}}{i_{III}} (1 - B) < 1, \quad (126)$$

dann ist der Ausdruck (119) gültig, und dann unterscheidet sich das Vorzeichen von P_{II} vom Vorzeichen der beiden anderen Leistungen. Leistungszirkulation besteht auch in diesem Fall, jedoch mit entgegengesetzter Drehrichtung (Bilder 24 und 25).

Sofern

$$\frac{i_{II}}{i_{III}} (1 - B) < 0, \quad (127)$$

dann ist weder der Ausdruck (119), noch der Ausdruck (125) gültig, sondern das Vorzeichen von P_I unterscheidet sich vom Vorzeichen der beiden anderen Leistungen. In diesem Fall gibt es keine Leistungszirkulation, sondern nur einfache Leistungsverzweigung, bzw. die Leistung bewegt sich parallel (Bild 26 und 27).

Durch die Untersuchung der Ungleichheiten kann man daher einfach feststellen, in welche Richtung die Leistung an den einzelnen Verbindungs-

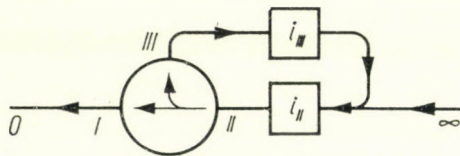


Bild 25

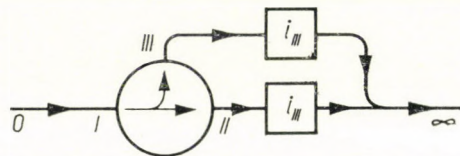


Bild 26

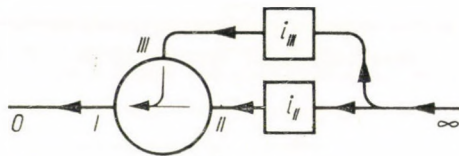


Bild 27

elementen fließt, und auf diesem Grund kann man die richtige Kupplungsart des betreffenden Verbindungselementes entscheiden. (So z. B. hat ein hydrodynamisches Momentenwechselgetriebe (Flüssigkeitswechselgetriebe) nur dann einen Sinn, wenn die Leistung sich vom Pumpenrad in Richtung Turbinenrad bewegt.) In der letzten Spalte der Tafel II wurden die drei Fälle angegeben.

Die an den einzelnen Wellen fließende Leistung bzw. ihre absolute Größe kann mit Hilfe der Formeln (117) und (122) bestimmt werden. Im Falle der Verwendung eines *zusammengesetzten* komplexen Planetengetriebes (Bild 18) können die Proportionen der einzelnen Leistungen ebenfalls bestimmt werden. Die Ableitung wird hier weggelassen, da sie vollkommen analog der Ableitung der Formeln (117) und (122) verläuft, nur muß anstelle der Proportion (110) von der Proportion (111) ausgegangen werden, und anstelle der Formel (45) muß man die Formel (49) verwenden.

Tafel II

$B =$	$\frac{B'}{B''}$				B	
$\frac{1-B}{i_{III}} > 1$					—	
$0 < \frac{1-B}{i_{III}} < 1$				—		
$\frac{1-B}{i_{III}} < 0$			—			
$\frac{P'_I}{P'_II}$	< 0		< 0	> 0	> 0	
$\frac{P''_I}{P''_II}$	< 0		> 0	< 0	> 0	
$\frac{P'_I}{P_I}$	> 0	< 0				

Das Endergebnis lautet:

$$\frac{P_{II}}{P_I} = \frac{k'_{III}(1-B') - \frac{k'_{II}k''_{II}}{k'_{III}}(1-B'') - B'}{\frac{1}{i'_{II}i''_{II}}B'' + \frac{i_{II}}{i_{III}} \left[\frac{1}{i'_{III}}(B'-1) - \frac{i''_{III}}{i'_{II}i''_{II}}(B''-1) \right]} \quad (128)$$

beziehungsweise:

$$\frac{P_{III}}{P_I} = \frac{k'_{III}(B'-1) - \frac{k'_{II}k''_{II}}{k'_{III}}(B''-1)}{\frac{i_{III}}{i'_{II}i''_{II}}B'' + \frac{1}{i'_{III}}(B'-1) - \frac{i''_{III}}{i'_{II}i''_{II}}(B''-1)} \quad (129)$$

Im speziellen, vereinfachten Fall (Bild 19):

$$\frac{P_{II}}{P_I} = \frac{1}{\frac{1}{i_{III}} \left(1 - \frac{B'}{B''} \right) - 1} \quad (130)$$

beziehungsweise:

$$\frac{P_{III}}{P_I} = \frac{1}{\frac{1}{i_{III}} \left(1 - \frac{B'}{B''} \right) - 1} \quad (131)$$

Selbstverständlich gilt auch hier die Beziehung (22), und wenn man diesen Umstand berücksichtigt, kann sinngemäß die Methode verwendet werden, die im Zusammenhang mit den Ungleichheiten (119) und (125) erwähnt wurde.

Im Falle des zusammengesetzten Planetengetriebes kann ev. auch die Untersuchung des Leistungsflusses *zwischen* zwei einfachen Planetengetrieben, d. h. *innerhalb* des zusammengesetzten Planetengetriebes benötigt werden. Innerhalb des zusammengesetzten Planetengetriebes sind vier Arten des

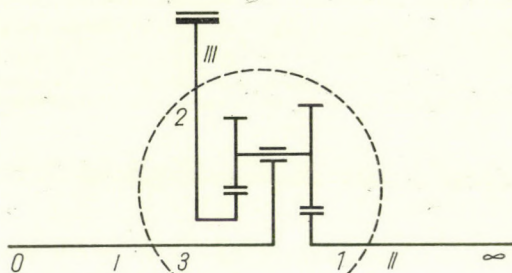


Bild 28

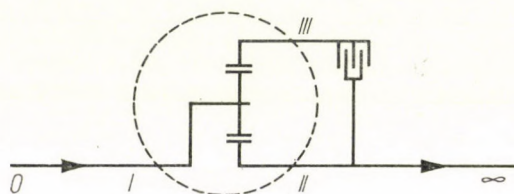


Bild 29

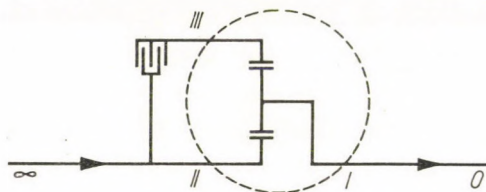


Bild 30

Leistungsflusses möglich bei den insgesamt drei Leistungsfließverhältnissen des umgekuppelten Planetengetriebes. In den horizontalen Reihen der Tabelle 2 sind die vom Standpunkt der Ungleichheit (119) identischen Fälle angeordnet, und in jeder Reihe sind je vier Variationen für den Leistungsfluß innerhalb des zusammengesetzten Planetengetriebes.

Für die Untersuchung des inneren Leistungsflusses geben die Verhältnisse P'_{II}/P'_{III} und P''_{II}/P''_{III} eine Aufklärung. Sofern beide Quotienten negativ sind, d. h.

$$\frac{P'_{II}}{P'_{III}} < 0 \quad (132)$$

und

$$\frac{P'_{II}}{P'_{III}} < 0 \quad (133)$$

ist, dann zirkuliert im zusammengesetzten Planetengetriebe die Leistung (die ersten beiden Spalten). Die Richtung der Zirkulation wird durch das Vorzeichen des Quotienten P'_{II}/P_I angezeigt. Wenn

$$\frac{P'_{II}}{P_I} > 0 \quad (134)$$

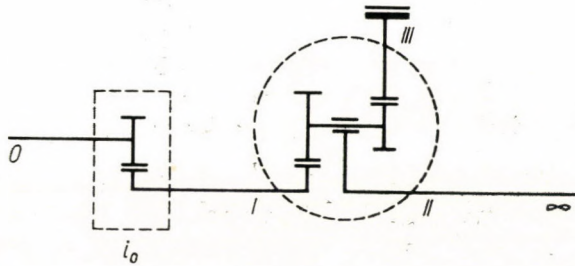


Bild 31

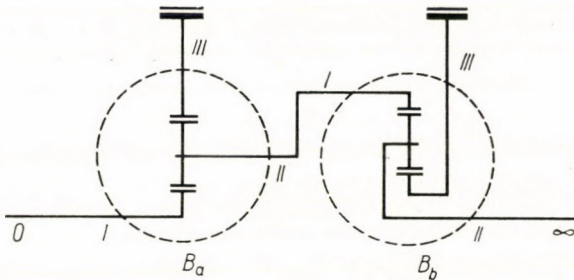


Bild 32

ist, dann entspricht die Leistungszirkulation den in der ersten Spalte dargestellten Bildern, im entgegengesetzten Fall sind die Bilder der zweiten Spalte maßgebend.

Sofern von den Quotienten P'_{II}/P'_{III} und P''_{II}/P''_{III} der eine oder beide positiv sind, erhalten wir eindeutig die Richtung der Leistungszirkulation, d. h., wenn der Wert von P'_{II}/P'_{III} positiv ist, dann wird die Richtung von der dritten Spalte, wenn der Wert von P''_{II}/P''_{III} größer ist als Null, von der vierten Spalte, und endlich, wenn beide Quotienten positiv sind, dann wird die Richtung von den Bildern der fünften Spalte angegeben. In der Tabelle 2 sind die Kriterien für alle zwölf Fälle gekennzeichnet.

Die Richtung des Leistungsflusses wurde für den Fall des geraden Antriebs angegeben. Im Falle des umgekehrten Antriebs muß jeder Pfeil mit entgegengesetzter Richtung gezeichnet werden.

Die Werte der einzelnen Quotienten können leicht berechnet werden, hier wird lediglich die Formel für den vereinfachten, speziellen Fall (Bild 19) angegeben, unter Weglassen der Ableitung:

$$\frac{P'_{II}}{P'_{III}} = \frac{B''(i_{III} - 1) + 1}{B' - 1}, \quad (135)$$

$$\frac{P''_{II}}{P''_{III}} = \frac{i_{III}}{1 - \frac{1}{B''} - 1}, \quad (136)$$

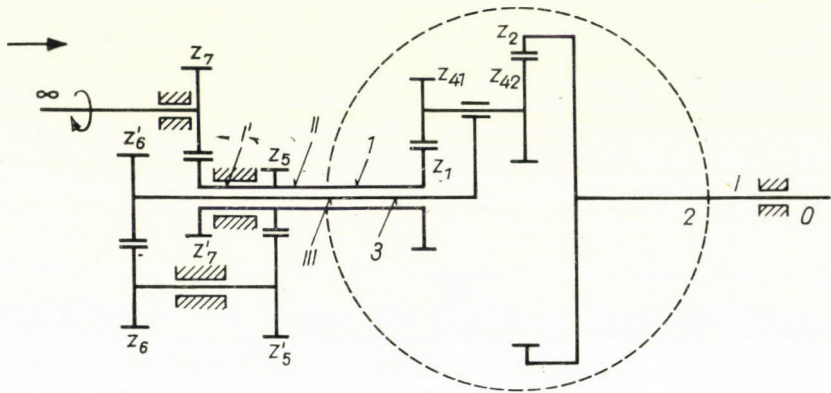


Bild 33

für die ersten beiden Spalten ist es erforderlich, daß:

$$\frac{P'_{II}}{P'_I} = \frac{1}{(B'' - B') \frac{1}{i_{III}} - B''}. \quad (137)$$

c) Bei dem *kreuzverbundenen* Planetengetriebe hat man lediglich das Vorzeichen der Leistung zu untersuchen, die durch das Verbindungselement i_{III} geht, denn hierbei sind nur zwei Fälle möglich: die Leistung geht von der Welle III_1 in Richtung nach III_2 oder der umgekehrte Fall liegt vor.

Aus der Proportion (111) ist

$$\frac{P_{III1}}{P_I} = \left[k'_{III} \left(1 - \frac{1}{B'} \right) - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} \frac{B'' - 1}{B'} \right] \frac{\omega_{III1}}{\omega_I}. \quad (138)$$

Aus der allgemeinen kinematischen Grundgleichung des komplexen Planetengetriebes B_1 (4) folgt:

$$\omega'_{III} = \frac{B' \omega'_I - \omega_{II}}{B' - 1}. \quad (139)$$

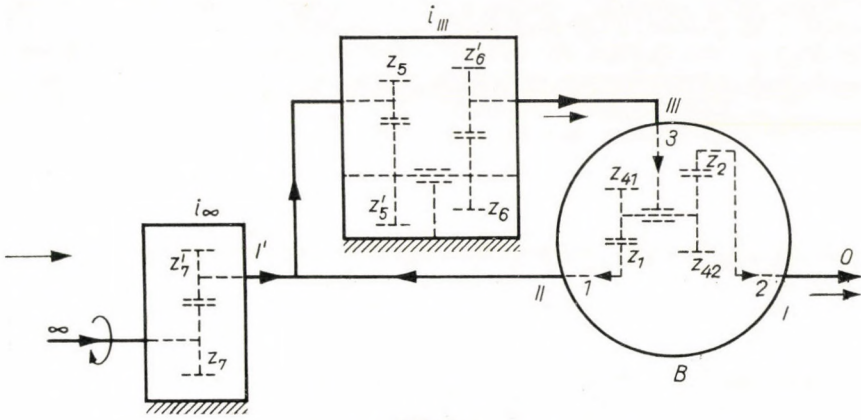


Bild 34

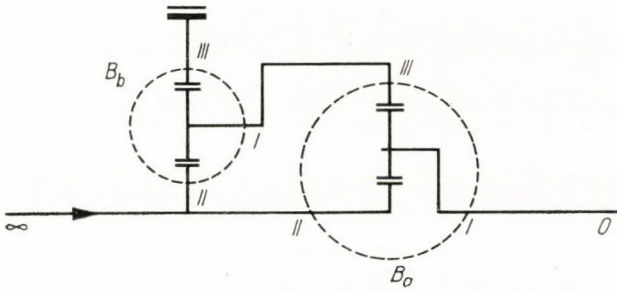


Bild 35

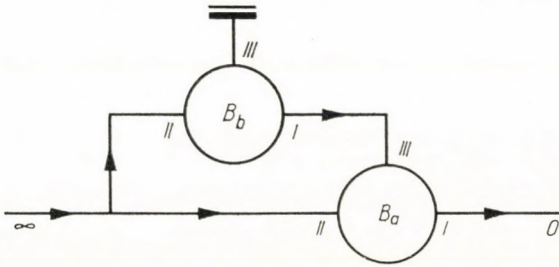


Bild 36

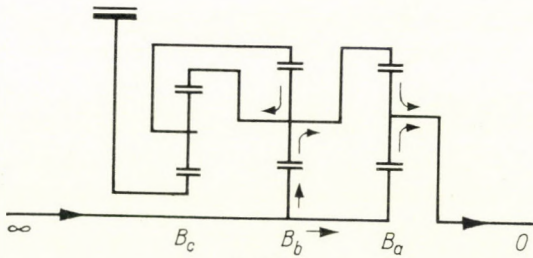


Bild 37

Wenn man berücksichtigt, daß

$$\omega'_{III} = \frac{\omega_{III}}{i'_{III}} \quad (140)$$

und

$$\omega'_{II} = \frac{i_{III}}{i'_{II}} \omega_{III} \quad (141)$$

ist, dann kann folgender Ausdruck angeschrieben werden:

$$\omega_{III} = \frac{\omega_I}{\left(1 - \frac{1}{B'}\right) \frac{1}{i'_{III}} + \frac{1}{B'} \frac{1}{i'_{II}} i_{III}} \quad (142)$$

Wenn dieser Ausdruck in die Gleichung (138) eingesetzt wird, erhält man für die an der Welle III_1 fließende Leistung:

$$\frac{P_{III}}{P_I} = \frac{(B' - 1) k'_{III} - \frac{k'_{II} k''_{II}}{k''_{III}} (B'' - 1)}{(B' - 1) \frac{1}{i'_{III}} + \frac{i_{III}}{i'_{II}}} \quad (143)$$

Für den speziellen, vereinfachten Fall gilt (Bild 21):

$$\frac{P_{III}}{P_I} = \frac{B'' - 1}{i_{III} + B' - 1} \quad (144)$$

Auch hierbei kann die Untersuchung des Leistungsflusses zwischen zwei einfachen Planetengetrieben bzw. innerhalb des zusammengesetzten Planetengetriebes erforderlich werden. Die Methode ähnelt dem Verfahren, das bei dem umgekuppelten Planetengetriebe besprochen wurde. Die beiden Quotienten sind:

$$\frac{P'_{II}}{P'_{III}} = \frac{1}{B' - 1} i_{III}, \quad (145)$$

$$\frac{P''_{II}}{P''_{III}} = \frac{i_{III}}{B'' - 1} \quad (146)$$

Sofern der Wert beider Quotienten negativ ausfällt, so benötigt man zur Feststellung der Zirkulationsrichtung noch das Vorzeichen des folgenden Quotienten:

$$\frac{P'_{II}}{P'_I} = \frac{1}{\frac{1 - B'}{i_{III}} - 1} \quad (147)$$

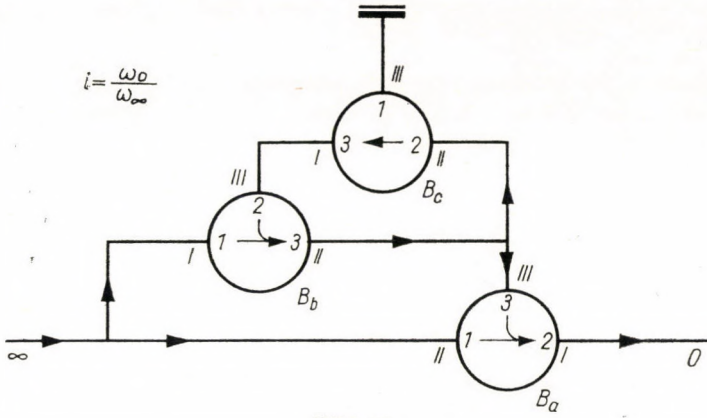


Bild 38

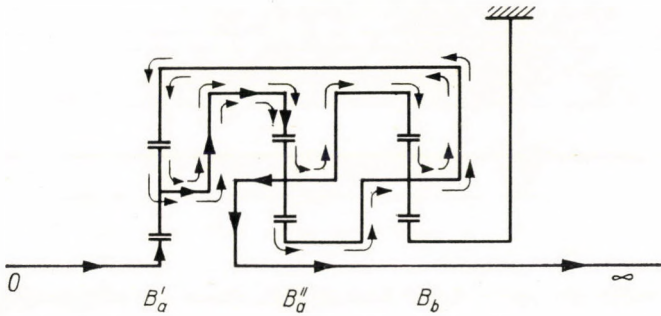


Bild 39

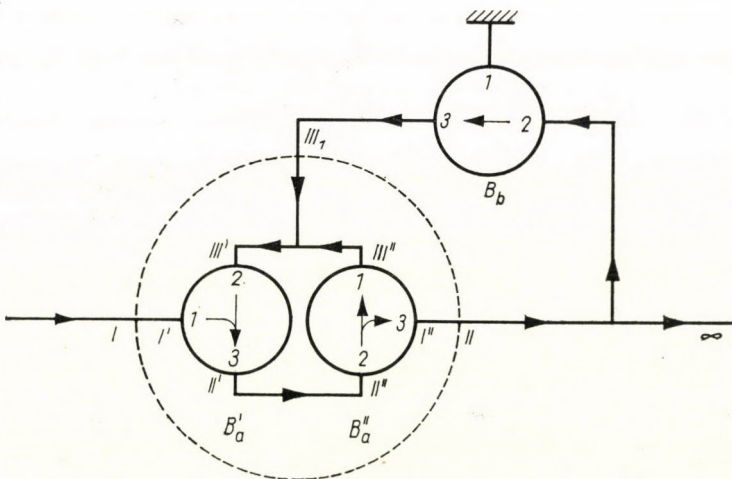


Bild 40

Die zehn möglichen Richtungen des Leistungsflusses im Falle des geraden Antriebs zeigt die Tafel III, in der auch die zu den einzelnen Fällen gehörenden Kriterien dargestellt sind.

Mit Hilfe der abgeleiteten Beziehungen können einfach und schnell die kinematischen, Momenten- und Leistungsverhältnisse einer jeden beliebigen Planetengetriebe-Konstruktion untersucht werden. Zur Erleichterung der praktischen Untersuchung von häufiger vorkommenden speziellen, verein-

Tafel III

$\frac{P_{III}}{P_I} = \frac{B^t - B'}{i_{II} + B^t} < 0$					
$\frac{P_{III}}{P_I} = \frac{B^t - B'}{i_{II} + B^t} > 0$					
$\frac{P_{II}}{P_{III}} = \frac{i_{III}}{B^t - 1}$	< 0	< 0	< 0	> 0	> 0
$\frac{P_{II}'}{P_{III}'} = \frac{i_{III}}{B - 1}$	< 0	< 0	> 0	< 0	> 0
$\frac{P_{II}'}{P_I} = \frac{1}{1 - B} = 1$	< 0	> 0			

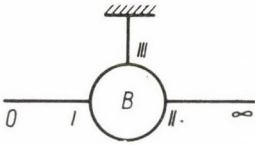
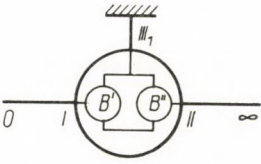
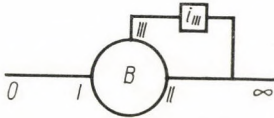
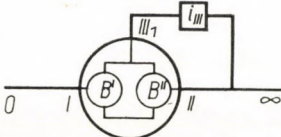
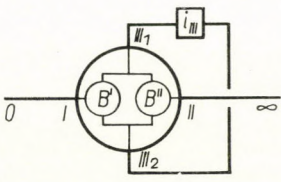
fachten Fällen wurden die Formeln in Tabellen zusammengefaßt (Tafeln I—VI). Die Formeln beziehen sich auf den geraden Antrieb; im Falle des umgekehrten Antriebs ist der reziproke Wert der Verhältniszahlen einzusetzen. Die kinematische Übersetzung lautet z. B. beim gerade angetriebenen umgekuppelten Planetengetriebe (bei dem »nach vorne« gekuppelten Planetengetriebe):

$$i_{\infty 0} = \frac{\omega_{\infty}}{\omega_0} = \frac{B}{1 + (B - 1) \frac{1}{i_{III}}} \quad (148)$$

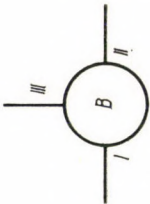
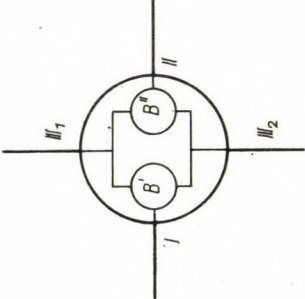
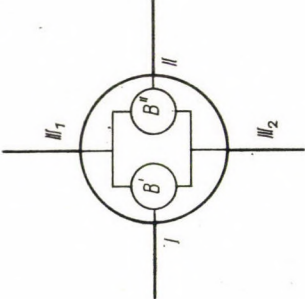
Sie lautet im Falle des umgekehrten Antriebs (beim »zurückgekuppelten« Planetengetriebe):

$$i_{0\infty} = \frac{\omega_0}{\omega_{\infty}} = \frac{1}{B} + \left(1 + \frac{1}{B}\right) \frac{1}{i_{III}} \quad (149)$$

Tafel IV

	$\frac{\omega_{\infty}}{\omega_0}$	$\frac{M_{\infty}}{M_0}$
	B	$-\frac{1}{B}$
	$\frac{B'}{B''}$	$-\frac{B''}{B'}$
	$\frac{1}{\frac{1}{B} + \left(1 - \frac{1}{B}\right) \frac{1}{i_{III}}}$	$\frac{1}{B} + \left(1 - \frac{1}{B}\right) k_{III}$
	$\frac{1}{\frac{B''}{B'} + \left(1 - \frac{B''}{B'}\right) \frac{1}{i_{III}}}$	$\frac{B''}{B'} + \left(1 - \frac{B''}{B'}\right) k_{III}$
	$\frac{1 - \frac{1}{B''} + \frac{1}{B''} i_{III}}{1 - \frac{1}{B'} + \frac{1}{B'} i_{III}}$	$\frac{\frac{1}{B'} + \left(\frac{1}{B'} - 1\right) k_{III}}{\frac{1}{B''} + \left(\frac{1}{B''} - 1\right) k_{III}}$

Tafel V

	Kinematische Grundgleichung	$M_I : M_{II} : M_{III} \rightarrow$
	$B\omega_I - \omega_{II} - (B - 1)\omega_{III} = 0$	$1 : \left(-\frac{1}{B}\right) : \left(\frac{1}{B} - 1\right)$
	$\frac{B'}{B''} \omega_I - \omega_{II} - \left(\frac{B'}{B''} - 1\right) \omega_{III} = 0$	$1 : \left(-\frac{B''}{B'}\right) : \left(\frac{B''}{B'} - 1\right)$
	$\frac{B'(B'' - 1)}{B''(B' - 1)} \omega_I - \omega_{II} - \frac{B'' - B'}{B''(B' - 1)} \omega_{III} = 0$	$1 : \left[-\frac{B''(B' - 1)}{B'(B'' - 1)}\right] : \left[\frac{B''(B' - 1)}{B'(B'' - 1)} - 1\right]$

SCHRIFTTUM

1. TERPLÁN, Z.: Mechanismen. Tankönyvkiadó, Budapest 1962.
2. JUREK, A.: Gépjárműszerkezetek (Kraftfahrzeugkonstruktionen). Felsőoktatási Jegyzet-ellátó Vállalat, Budapest 1960.
3. Зиновев, В. А.: Теория механизмов и машин. МАШГИЗ, Москва 1959.
4. Руденко, Н. Ф.: Планетарные передачи. МАШГИЗ, Москва 1947.
5. Леваи, З.: Анализ и выбор принципиальных схем гидромеханических передач. Автореферат ЛПИ, Ленинград 1956.
6. LÉVAI, Z.: Analytische Untersuchung von elementaren Planetengetrieben. *Acta Techn. Hung.* **49** (1964), 3—4.
7. Крюков, А. Д.: Планетарные передачи в транспортных машинах. МАШГИЗ, Москва 1950.

ANALYTICAL INVESTIGATION OF COMPLEX PLANETARY GEARS

Z. LÉVAI

SUMMARY

For the general characterization of planetary gears a factor B was introduced which is independent of the given type, dimension, etc. of the planetary gear (3). Distinction is made between elementary and complex planetary gears, the latter containing not only the planetary gear but also some connecting element (e.g. clutch, hydraulic torque converter, etc.). The elementary planetary gear can be simple or complex. Generally when in use they are converted into devices with one degree of freedom. Depending on whereto the shaft III of the elementary planetary gear by some connecting element is connected, the *fixed-down planetary gear* or the *tied planetary gear* is obtained; in the case of a complex planetary gear the *cross-connected planetary gear* is obtained. For each type the formula of the gear ratio was determined and on the basis of the torque ratios calculated for the shafts of the gear the torque transmission ratio formula was calculated. On the basis of the power ratios the power flow in the gear was investigated.

EXAMEN ANALYTIQUE D'ENGRENAGES PLANÉTAIRES COMPLEXES

Z. LÉVAI

RÉSUMÉ

Pour caractériser les engrenages planétaires, l'auteur introduit un facteur B indépendant du type concret de l'engrenage planétaire, de ses dimensions, etc. (3). On distingue des engrenages planétaires élémentaires et complexes, qui diffèrent en ce que ces derniers contiennent aussi un élément de liaison (par ex. embrayage, convertisseur hydrocinétique, etc.). L'engrenage planétaire élémentaire peut être, à son tour, simple ou composé; au cours de son utilisation, il est généralement transformé en systèmes à un degré de liberté. Suivant le point auquel l'arbre III de l'engrenage planétaire élémentaire est connecté par un élément de liaison, c'est l'*engrenage planétaire amarré*, l'*engrenage à liaison transversale*, ou en cas d'un engrenage composé, l'*engrenage à liaison croisée* qui se trouve réalisé. Pour chaque type, l'auteur a calculé aussi la formule du rapport de transformation, c'est-à-dire établi la formule de la transformation du couple à partir des rapports des couples calculés pour les arbres de l'engrenage. Suivant les rapports des puissances, l'écoulement des puissances a été examiné.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ
МЕХАНИЗМОВ

З. ЛЕВАИ

РЕЗЮМЕ

Для общей характеристики планетарного механизма вводится такой коэффициент B , который независим от конкретного вида, размеров и т. п. планетарного механизма. Различаются элементарные и комплексные планетарные механизмы; последние отличаются от первых тем, что они содержат кроме планетарного механизма также какой-либо соединительный элемент (напр. муфту сцепления, гидротрансформатор и т.п.). Элементарный планетарный механизм может быть простым или сложным. Вообще их при использовании преобразуют в конструкции с одной степенью свободы. В зависимости от того, с каким элементом соединяется с помощью соединительного элемента III -ий вал элементарного планетарного механизма, получаются *привязанный планетарный механизм* или *перевязанный планетарный механизм*, или же в случае сложного планетарного механизма *накрест связанный планетарный механизм*. Для каждого вида планетарного механизма определена также формула передаточного отношения, а на основе отношений моментов валов планетарного механизма — формула модификации момента. На основе отношений мощностей исследовалось движение мощности, возникающее в планетарном механизме.

DIE IM LAUFE DER SINTERUNG AUFTRETENDE FLÜSSIGE PHASE UND DAS KRISTALLITGEFÜGE DES SINTERMETALLS

R. WELESZ

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST

[Eingegangen am 23. Oktober, 1963]

Die in der Gegenwart der flüssigen Phase verlaufende Sinterung hat eine rasche Verdichtung der Preßlinge und gleichzeitig die Bildung eines eigenartigen, aus abgerundeten Körnern bestehenden Metallgefüges zur Folge. Diese Erscheinungen wurden bisher mit dem sogenannten »heavy-alloy« Mechanismus erklärt. Die durchgeführten Untersuchungen sprechen dafür, daß bei der Sinterung in der Gegenwart der flüssigen Phase die Wechselwirkung zwischen der flüssigen Phase und den Kristalliten bzw. den Kristallitgrenzen der Pulverteilchen von entscheidender Wichtigkeit ist, und daß diese Wechselwirkung immer auftritt, wenn die fest gebliebenen Pulverteilchen äußerst fein sind und vorwiegend aus Einkristallen bestehen. Der für den »heavy-alloy« Mechanismus charakteristische rasche Schwund und das eigenartige Metallgefüge können jedoch auch mit aus vorlegierten Körnern bestehenden grobem Pulver hervorgerufen werden.

Die Rolle der im Laufe der Sinterung auftretenden flüssigen Phase, die sie hinsichtlich der Gefügebildung des Sintermetalls spielt, wurde bisher hauptsächlich dem sogenannten »heavy-alloy« Mechanismus gemäß gedeutet. Nach den die Erscheinung als erste beobachtenden Forschern [1] bildet sich während der Sinterung, in der aus dem Pulvergemisch von 93% W, 5% Ni und 2% Cu gepreßten Proben, bei einer Temperatur von 1400 °C, zwischen den festgebliebenen Wolfram-Pulverteilchen eine flüssige Phase, und die Preßlinge weisen eine auffallend rasche Verdichtung auf. Im Laufe der Glühung tritt — unter der Wirkung der flüssigen Phase — eine Sphäroidisation der ursprünglich polygonalen Wolfram-Pulverteilchen ein, und sie wachsen äußerst rasch.

Seitdem haben sich zahlreiche Arbeiten mit der Sinterung in Gegenwart der flüssigen Phase befaßt, wobei sich über den für diese Sinterung äußerst charakteristischen »heavy-alloy« Mechanismus, das folgende Bild ausgestaltet hat:

1. Die rasche Verdichtung kann in drei Stufen verschiedener Geschwindigkeit aufgeteilt werden, und zwar

a) flüssigkeitartiges, rasches bzw. viskoses Fließen;

b) Lösung-Ausscheidung der winzigen festen Pulverteilchen in die bzw. aus der flüssigen Phase, die auch zum Wachstum und zum Sphäroidisieren der größeren festen Teilchen führt;

c) die Bildung eines festen Gerüsts, wodurch der Sinterprozeß abgebremst wird.

2. Für die rasche Verdichtung ist es charakteristisch, daß der Vorgang in einem logarithmischen Koordinatensystem (\log Sinterzeit — \log Verdichtung) mit einer Geraden dargestellt werden kann.

3. Die rasche Verdichtung und das damit eng verbundene Wachsen und Sphäroidisation der festgebliebenen Pulverteilchen kann nur bis zu einer gewissen Ausgangskorngröße der Pulverteilchen beobachtet werden.

So kann z. B. in dem erwähnten W—Ni—Cu System die Erscheinung nur bis zu Ausgangswolframpulverteilchen kleiner als $5 \mu\text{m}$ festgestellt werden, während im System Fe—Cu die Ausgangseisenpulverteilchen nicht größer als $30 \mu\text{m}$ sein können.

Das sich ausgestaltete Bild hat sich — trotz der zahlreichen, sich mit diesem Thema befassenden Arbeiten — auch bis heute kaum geändert.

Gleichzeitig war jedoch auch die Arbeit von C. S. SMITH [2] bekannt, nach welcher die Gefügebildung der Gußlegierungen bzw. die Form der Kristallite, durch das Gleichgewicht zwischen der Grenzflächenspannungen der Kristallite und Phasengrenzen bestimmt wird. Diese Gesetzmäßigkeit ist auch für die Grenzen der festen Kristallite und die sich mit denselben in Berührung stehende flüssige Phase gültig.

Werden die von C. S. SMITH erschlossenen Gesetzmäßigkeiten auf die Sinterung in Gegenwart flüssiger Phasen übertragen, so erscheint es selbstverständlich, daß die Sinterung der aus polykristallinen Pulverteilchen bestehenden Preßlingen, in Gegenwart flüssiger Phasen, nicht einfach nach dem »heavy-alloy« Mechanismus beschrieben werden kann. Auch nach unseren Versuchen geht die Bildung des Gefüges bzw. des Kristallitgefüges während der Sinterung in diesem Falle so vor sich, daß die Bewegung der flüssigen Phase und die der Kristallitgrenzen in dem Sinterkörper in engsten Zusammenhang miteinander stehen.

Ein Beispiel dafür ist die Sinterung von Sinterkörpern aus einem Gemisch von polykristallinem Eisenpulver und Kupferpulver. Hier dringt das geschmolzene Kupfer in wenigen Minuten zwischen die Austenitgrenzen der Eisenpulverteilchen ein und teilt letztere in viele Kristallite auf. Die Mikroaufnahmen im Bild 1 und Bild 2 stellen in 125facher Vergrößerung¹ das Gefüge von Probestücken dar, die aus dem Gemisch von Hametag-Eisenpulver mit Pulverteilchen zwischen 150 und $300 \mu\text{m}$ und von Kupferpulver der Korngröße unter 20 — $60 \mu\text{m}$ gepreßt und bei einer Temperatur von 1120°C bei einer Zeitdauer von 20 Minuten gesintert und dann rasch abgekühlt wurden.

Die früheren eingehenden Untersuchungen des Autors weisen darauf hin, daß die zwischen die Austenittelchen gedruckenen Kupferadern zum Quellen der einzelnen Eisenpulverteilchen führen. Da jedoch dieselben sich berührend eine feste, zusammenhängende Gerüststruktur bilden, bringt ihr Quellen gleichzeitig auch das Quellen des ganzen Probestückes mit sich. Der Kohlenstoffgehalt des Eisenpulverteilchens oder der dem Ausgangspulvergemisch bei-

gegebene Graphit vermindert dagegen das Quellen, da das Kupfer zwischen die Kristallitgrenzen des C-haltigen Eisenpulvers nicht eindringt [3].

Diese Erscheinungen weisen darauf hin, daß die Kristallite und die Kristallitgrenzen eine entscheidende Rolle in der in Gegenwart der flüssigen

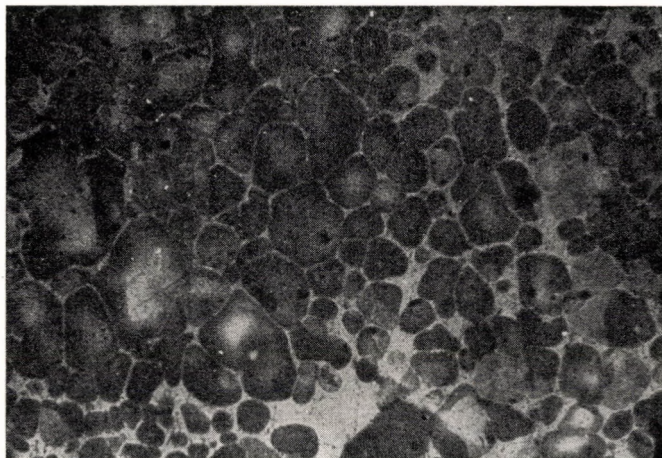


Bild 1. Das Gefüge eines Sinterkörpers, der aus einer Mischung von groben Hametag Eisenpulver + 20% Kupferpulver gepreßt und bei 1120° C gesintert wurde. Der Schnitt ist senkrecht zur Richtung des Preßens. Vergrößerung: 124×; mit Alkohol + 3% HNO₃ geätzt

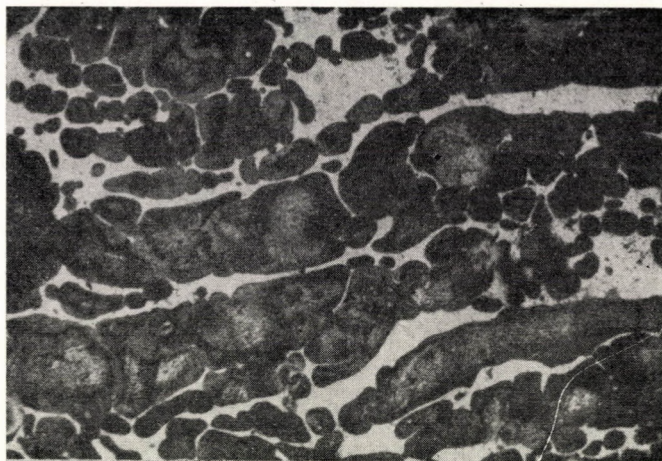


Bild 2. Wie im Bild 1, aber die Richtung des Schnittes ist gleich der Preßrichtung

Phase vor sich gehenden Sinterung spielen. Dies ist im Laufe der bisher ange-
stellten Untersuchungen wahrscheinlich darum nicht in den Vordergrund
getreten, weil die Versuche meistens mit derart feinen Pulvern durchgeführt
wurden, in welchen ein jedes Pulverteilehen ein Monokristall war. Demge-

mäß hat man dann ausschließlich den Pulverteilchen ein solches Verhalten und die Eigenschaften der Kristallite kennzeichnen [4—7].

Wir dachten, daß unsere bisher erworbenen Kenntnisse über das gegenseitige Verhalten der Kristallite der festbleibenden Pulverteilchen einerseits, und der flüssigen Phase andererseits, die Untersuchung der »anomal« raschen Schrumpfung des aus groben Pulverteilchen bestehenden Kupfer-Blei Legierungspulvers gut ergänzen können. Von diesem Standpunkt aus haben wir das Anfangsstadium der Sinterung des Kupfer-Blei Legierungspulvers mit einem Bleigehalt von 30% eingehend untersucht.

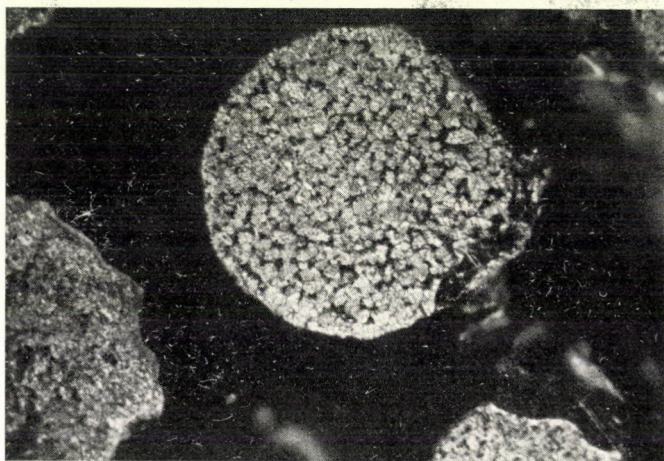


Bild 3. Der Schnitt eines Pulverkörnchens aus einer Cu—Pb Legierung mit 30% Pb. Vergrößerung: 300×, mit 50% wässr. HNO₃ geätzt

Das bei den Versuchen verwendete Pulver wurde hergestellt, indem die erschmolzene Cu—Pb Legierung in der bekannten Weise mit Preßluft in Wasser verdüst wurde. Das Pulver wurde in Fraktionen gesiebt, und nur die Teilchen der Größe von $-150 + 60 \mu\text{m}$ angewendet.

Im Bild 3 ist eine Mikroaufnahme von dem Schliff der in Bindstoff eingebetteten Pulverteilchen in 300facher Vergrößerung dargestellt. Aus den Aufnahmen ist es ersichtlich, daß das Blei in jedem einzelnen Pulverteilchen zwischen den äußerst winzigen Kupferkristalliten fein verteilt ist.

Zur Sinterung haben wir die Pulverdosen in kleine Graphittiegel mit zylindrischen Aushöhlungen von 10 mm Innendurchmesser und 10 mm Tiefe gefüllt. Die Dosen wurden samt den Tiegeln in die Wärmezone eines auf 550 °C—650 °C—750 °C—850 °C und 950 °C $\pm 1\%$ aufgeheizten kleinen Laborofens mit Keramikrohrfutter geschoben. Das Ofenrohr wurde während der Sinterung mit Flaschenwasserstoff gespült.

Die Proben wurden nach der Glühung verschiedener Zeitdauer in das gekühlte Ende des Ofenrohrs geschoben, wo sie in cca. 2 Minuten unter den

Schmelzpunkt des Bleis und dann auf Raumtemperatur abgekühlt wurden. Die dem Ofen entnommenen Stücke wurden mit Paraffin getränkt und ihr spezifisches Gewicht bzw. die Dichte mit der bekannten Wassereintauchmethode gemessen.

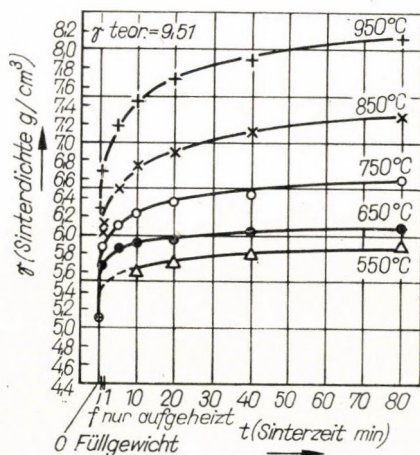


Bild 4. Die rasche Verdichtung des Kupfer-Blei Legierungspulvers

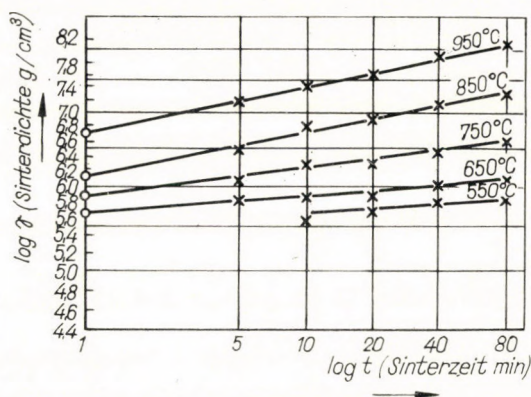


Bild 5. Der Charakter der Verdichtung des Kupfer-Blei Legierungspulvers in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Einteilung in beiden Richtungen

Die Dichteangaben sind in den Diagrammen der Bilder 4 und 5 dargestellt.

Aus Bild 4 ist es ersichtlich, daß in den ersten Minuten der Glühung ein für den »heavy-alloy« Mechanismus charakteristischer, äußerst rascher Schrumpf einsetzt, welcher bei der Sinterung von aus derart groben Pulverteilchen hergestellten Körpern — das Kupfer-Blei Legierungspulver ausgenommen — bisher noch nicht beobachtet werden konnte.

Aus Bild 5, wo auf die Abszisse die Logarithmen der Sinterzeit, auf die Ordinate die Logarithmen der Sinterdichte aufgetragen sind, kann festgestellt werden, daß die Meßergebnisse andeutenden Punkte mit guter Annäherung mit Geraden verbunden werden können. Ein solcher Zusammenhang zwischen Verdichtung und Sinterzeit ist ebenfalls für den »heavy-alloy« Mechanismus charakteristisch.

Um die unerwartete Erscheinung des »heavy-alloy« Mechanismus erklären zu können — mit besonderer Rücksicht auf die Kristallitgrenzen und der flüssigen Phase — haben wir das Kristallitgefüge der Probestücke einer

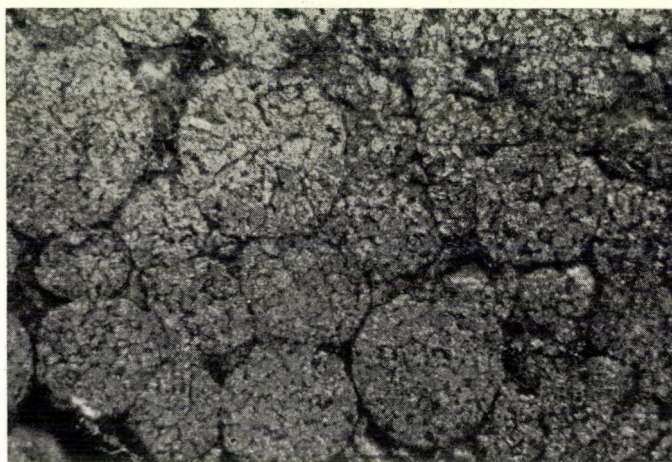


Bild 6. Das Gefüge eines Sinterkörpers aus lose gefülltem Cu—Pb Legierungspulver, welcher nur bis 850° C aufgeheizt und sofort abgekühlt wurde. Vergrößerung: 150×

eingehender Untersuchung unterzogen. Die Ergebnisse können mit Hilfe der Mikroaufnahmen der Bilder 6, 7 und 8 dargestellt werden.

Vergleichen wir nun das von dem Schliff der Pulverteilchen erhaltene Bild 4 mit dem in Bildern 6 und 7 vorgeführten Gefüge. Aus der 150fachen Vergrößerung im Bild 6 und 7 ist es ersichtlich, daß als Folge der Erhitzung bei 850° C das Gefüge sich wie folgt ändert:

a) Die Kupfer-Kristallite blieben innerhalb der Pulverteilchen zwar einstweilen eckig, sie sind jedoch bedeutend größer geworden. Es scheint, daß von den kleinen Kristalliten zwei bis drei sich zu einem einzigen Kristallit vereinigt haben.

b) Die zusammen mit dem Anwachsen der Kristallite sich ebenfalls vergrößernden koagulierenden Bleieinschlüsse umgeben die angewachsenen Kristallite und trennen sie voneinander.

c) Die dicker werdenden Bleiadern fließen aus den Pulverteilchen heraus. Gleichzeitig trennen sie die vielen, am Rand der großen Pulverteilchen

befindlichen Kupferkristallite nicht nur von dem benachbarten Kristallit, sondern auch von den großen Pulverteilchen und reißen sie in die zwischen den Pulverteilchen befindlichen Höhlungen mit.



Bild 7. Wie im Bild 6, aber das Probestück wurde bei 850 °C 10 Min. lang gesintert. Vergrößerung: 150×

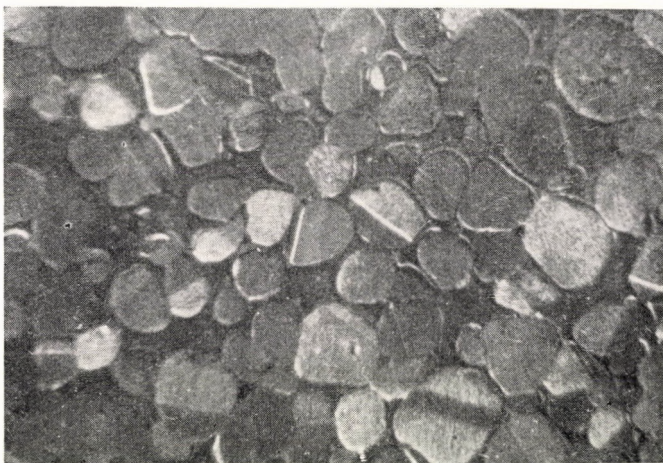


Bild 8. Wie im Bild 6, aber das Probestück wurde bei 850 °C 80 Min. lang gesintert. Vergrößerung: 100×

Bild 8 zeigt das Gefüge eines bei 850 °C während einer Zeitdauer von 80 Minuten geglühten Probestückes; die Vergrößerung ist 100fach, also kleiner als bei den vorherigen Aufnahmen. Das Gefüge zeigt das für den »heavy-alloy« Mechanismus so charakteristische Bild. Hier kann man die Aus-

gangspulverteilchen überhaupt nicht mehr erkennen. Die Kristallite haben das Vielfache ihrer ursprünglichen Größe erreicht und sind abgerundet worden. Auch die Abmessung und die Form der Bleiadern hat sich demgemäß geändert.

Die Bilderreihe bestätigt, daß in dem Gefüge der bekannten Kupfer-Blei Sinterlegierungen nicht die sich berührenden und von Bleiadern umgenommenen Kupfer-Pulverteilchen sichtbar sind. Man sieht dagegen, daß die ursprünglich winzigen Kupfer-Kristallite größer geworden sind, haben die Form einer Kugel angenommen und nachdem sie ihre durch das ursprüngliche Pulverteilchen bestimmte Lage verlassen haben, bilden in gleichmäßiger Verteilung mit der Bleiadern das Gefüge der Legierung aus.

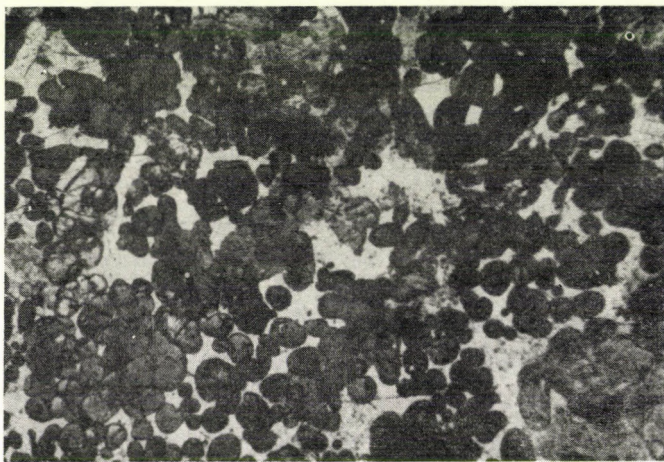


Bild 9. Das Gefüge eines Sinterkörpers aus lose gefülltem Fe—Cu Legierungspulver mit 30% Cu Gehalt. Vergrößerung: 300 \times , mit Alkohol + 3% HNO₃ geätzt

So ist es verständlich, warum auch bei den verhältnismäßig groben Kupfer-Blei Legierungspulvern der für den »heavy-alloy« Mechanismus charakteristische rasche Schwund beobachtet werden kann. Hier ist nämlich nicht die Abmessung der Pulverteilchen, sondern die Größe der die Pulverteilchen bildenden, ursprünglich sehr feinen Kupfer-Kristallite von entscheidender Bedeutung.

Um beurteilen zu können, ob diese Erscheinung allgemein und nicht nur für die Legierung Cu—Pb gültig ist, haben wir eine Eisen-Kupfer Legierung mit 30% Kupfergehalt erschmolzen, dann nach sorgfältiger Durchmischung luftverdüst. Das Eisen-Kupfer Legierungspulver haben wir durchgeseibt und für die Sinterversuche nur die Fraktion der Korngröße von -150 bis $+60$ Mikron verwendet. Mit einem so groben Eisenpulver in der Fe-Cu Sinterlegierung wurde bisher die für den »heavy-alloy« Mechanismus charakteristische rasche Schrumpfung noch nicht beobachtet.

Im Laufe der Sinterversuche schrumpfte das Legierungspulver äußerst rasch. So schrumpfte z. B. das unter einem Druck von 4 Mp/cm^2 gepreßte Brikett in 20 Minuten bei 1120°C etwa 4%, während das aus einem Gemisch von RZ-Eisenpulver und Kupferpulver unter den gleichen Verhältnissen und Druck gepreßte Stück ein Quellen von 0,5% aufwies.

Das Gefüge des gesinterten Stückes unterstützte unsere Annahme. Die Pulverteilchen (nach Bild 9) bei 1120°C wurden durch ihren Kupfergehalt in winzige Kristallite zerlegt, die rasch wuchsen und sphäroidisierten und fingen an, ihre ursprüngliche Lage zu verlassen, um das für den »heavy-alloy«

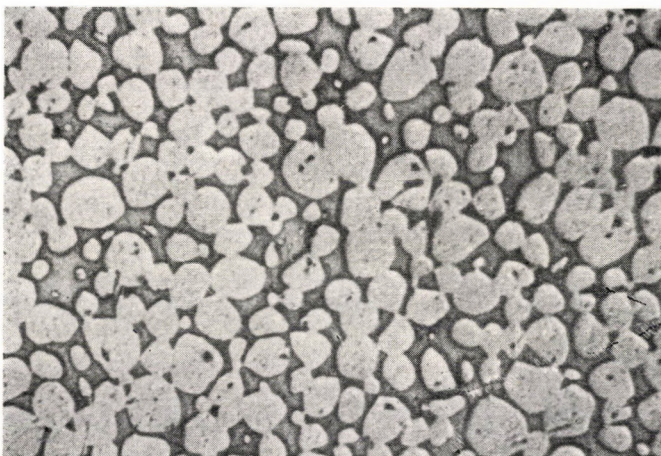


Bild 10. Das Gefüge einer Schwerlegierung (heavy alloy). Vergrößerung: $200\times$ ungeätzt

Mechanismus charakteristische Gefügebild auszubilden. Durch diese Erfahrungen wurde bestätigt, daß bei der Sinterung der verhältnismäßig groben Kupfer-Blei und Eisen-Kupfer Legierungspulver die die Pulverteilchen bildenden sehr feinen Kristallite für den »heavy-alloy« Mechanismus verantwortlich sind.

Von diesem Standpunkt ausgehend haben wir in den Cu—Pb Legierungspulvern bei der Sinterung in Gegenwart der flüssigen Phase den Mechanismus des Wachsens der Kristallite untersucht. Dieser wurde von den bisherigen Beobachtern — bei Sinterung anderer Legierungen — als die Lösung der feinsten Teilchen in der flüssigen Phase und deren Ausscheidung an den größeren gedeutet.

Auf Grund der Beobachtungen einer großen Zahl von Gefügebildern haben wir gefolgert, daß der Vorgang Lösung—Ausscheidung nur in geringem Maße der Grund für das Wachsen ist, und hauptsächlich für die Sphäroidisation der Teilchen verantwortlich sein dürfte.

Dazu nämlich, daß die eine gewisse Größe bereits erreichten Teilchen ihr Wachsen fortsetzen können, müßte eine große Anzahl der Teilchen stufen-

weise kleiner werden, damit stets eine genügende Anzahl von kleinen Teilchen zur Verfügung stehe, die durch Lösung zum Wachsen der großen Teilchen dienen sollen.

Betrachtet man jedoch irgendein, für den »heavy-alloy« Mechanismus charakteristisches Gefügebild, so wird man eben feststellen müssen, daß die Größe der Teilchen relativ gleichmäßig ist. Es kann nirgends eine große Anzahl von winzigen Teilchen gesehen werden, durch deren »Verzehrung« die größeren wachsen könnten.

Viel charakteristischer für diese Gefügebilder ist z.B. die Tatsache, daß die Spuren eines Zusammenwachsens von zwei oder mehreren Teilchen

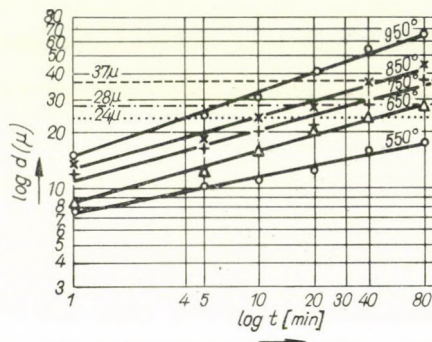


Bild 11. Der Charakter des Wachsens des Kupferkörnchens in Koordinatensystem mit logarithmischer Einteilung in beiden Richtungen

gleicher Größe zu vermerken sind, ferner daß die Mehrzahl der Teilchen Monokristalle sind, im Falle des Kupfers eventuell mit Zwillingskristallen.

Betrachten wir die von dem Schliff der Schwerlegierung (heavy-alloy) mit der Zusammensetzung 93% W, 5% Ni, 2% Cu hergestellte Mikroaufnahme (Bild 10), auf welcher mehrere solche Verwachsungen zu sehen sind. Das ähnliche ist zu sehen auf Bild 8, welche bereits früher in Zusammenhang mit der Sinterung des Blei-Kupfer Legierungspulvers vorgeführt wurde.

Aus diesen könnte gefolgert werden, daß wir es bei dem »heavy-alloy« Mechanismus in allen Fällen mit Kristalliten zu tun haben, die mit flüssiger Phase umgeben und unter solchen Verhältnissen zum raschen sammelrekristallisationsähnlichen Zusammenwachsen geneigt sind. Und zwar entweder deshalb weil die Ausgangspulverteilchen so klein sind, daß sie auch allein bereits solche feinen Einkristalle sind, oder aber weil die großen Pulverteilchen aus solchen feinen Kristalliten bestehen und durch die flüssige Phase in diese Kristallite zerlegt werden.

Diese Folgerung wurde dadurch unterstützt, daß das Wachsen der mit geschmolzenem Blei umgebenen Kupferteilchen bei der Sinterung der Cu—Pb Legierung ziemlich genau den Gesetzmäßigkeiten der Rekristallisation folgt.

Um dies begründen zu können, haben wir im Mikroskop bei dem für die oben besprochenen Versuche verwendeten Kupfer-Blei Pulver und in den bei verschiedenen Temperaturen verschieden lange Zeit gesinterten Probestücken die mittleren Durchmesser der Kupferkristallite bzw. der abgerundeten Kupferteilchen gemessen. Die Meßergebnisse sind in ein doppelt logarithmisches Koordinatensystem aufgetragen (Bild 11), wo die Meßpunkte ziemlich befriedigend durch Geraden angenähert werden können.

Dies ist nach G. WIENER [8] für das nach der Primär-Rekristallisation auftretende Kornwachstum der Metalle charakteristisch.

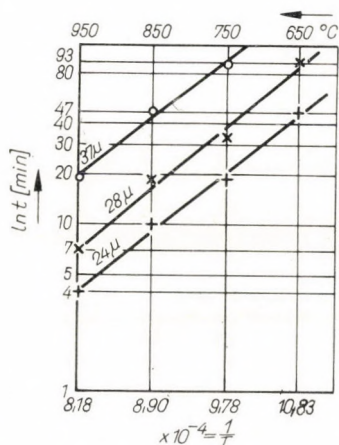


Bild 12. Der Zusammenhang zwischen der Sintertemperatur und dem Wachsen des Kornchens bei der Sinterung des Cu—Pb Legierungspulvers

Im Bild 11 sind die für die Größen 24, 28 und 37 μm charakteristischen Geraden mit punktierter, strichpunktierter und gestrichelter Linie eingezeichnet, um dadurch zu bezeichnen, welche Zeitdauer bei den verschiedenen Temperaturen zum Erreichen einer gegebenen Korngröße laut jener Geraden nötig ist, durch welche die Meßpunkte verbunden wurden.

Das Eintragen der zum Erreichen der Durchmesser von 24, 28 und 37 μm nötigen Glühzeiten in das Koordinatensystem $\ln t - 1/T$ hat ebenfalls Geraden ergeben (Bild 12).

Dadurch wurde es ermöglicht, auf Grund der für die monomolekularen Reaktionen gültigen Arrhenius-Beziehung die Aktivierungsenergie des beobachteten Kornwachstums zu berechnen.

Laut der Beziehung nach Arrhenius ist

$$\ln \frac{t_1}{t_2} = \frac{Q}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

wobei t_1 und t_2 die bei der Temperatur T_1 bzw. T_2 zum Erreichen einer gegebe-

nen Korngröße nötige Zeit, R die Gaskonstante und Q die Aktivierungsenergie des Kornwachstums bedeuten.

Nach Durchführung der Berechnung erhalten wir den Wert von fast 20 000 cal/g · Atom, der in gutem Einklang mit einigen Messungen bezüglich der Aktivierungsenergie des Kornwachstums des stark deformierten Kupfers steht [9].

All dies berücksichtigend kann die Folgerung gezogen werden, daß wir es bei der Sinterung in Gegenwart der flüssigen Phase und bei dem für dieselbe charakteristischen »heavy-alloy« Mechanismus ebenfalls mit der engen Wechselwirkung der Kristallite, Kristallitgrenzen und der flüssigen Phase zu tun haben.

Ferner kann festgestellt werden, daß das auf den »heavy-alloy« Mechanismus hinweisende Kornwachstum und die Sphäroidisation irgendeine eigentümliche »Sammelrekristallisation« der Kristallite des die feste Phase bildenden Metalls ist.

Und schließlich kann aus dem Obengesagten auch gefolgert werden, daß das rasche Sintern durch diese »Sammelrekristallisation« derart begünstigt wird, daß die flüssige Phase zwischen den nacheinander zusammenwachsenden Teilchen herausgedrängt wird und die größeren umgibt, wodurch ein ständiger Umordnungsvorgang zwischen den festen Teilchen hervorgerufen wird.

SCHRIFTTUM

1. PRICE, G. H. S.—SMITHELLS, C. J.—WILLIAMS, S. V.: Sintered Alloys, Part I — Copper-Nickel-Tungsten Alloys Sintered with a Liquid Phase Present. *J. Inst. Metals* **62** (1938), 39.
2. SMITH, C. S.: Grains, Phases and Interfaces. *Transactions of the AIME* **175** (1948), Inst. of Metals Div.
3. WELESZ, R.: Kandidats-Dissertation, Budapest 1958.
4. LENEL, F. V.: Sintering with a Liquid Phase. In "The Physics of Powder Metallurgy" by W. E. KINGSTON, 1951.
5. CHADWICK, R.—BROADFIELD, E. R.—PUGH, S. F.: Observations on Iron-Copper Powder Mixtures. Symposium on Powder Metallurgy, London 1947; Iron-Steel Inst. Spec. Rep. No. 38.
6. CANNON, H. S.—LENEL, F. V.: Some Observations on the Mechanism of Liquid Phase Sintering, in BENESOVSKY, F.: I. Plansee Seminar, Reutte (Tirol) 1952.
7. DUCKWORTH, G. H.: Production of Sintered Copper-Lead-Bearing Material. Symposium on Powder Met. London 1954; Iron and Steel Inst. Spec. Rep. Nr. 58.
8. WIENER, G.: *Trans. Am. Soc. Met.* **44** (1952), 1169.
9. DECKER, B. F.—HARKER, D.: *Trans. AIME* (1950), 887.

THE LIQUID PHASE APPEARING DURING SINTERING
AND THE CRYSTALLITE STRUCTURE OF THE SINTERED METAL

R. WELESZ

SUMMARY

The rapid dimensional reduction observed during sintering in the presence of the liquid phase and the formation of a special structure consisting of rounded-off grains in connection with it have so far been explained by the so-called "heavy-alloy" mechanism. The present investigation proves that during sintering in the presence of a liquid phase the interaction between the liquid phase and the crystallites of the powder particles, i.e. their crystallite boundaries have more importance than the former phenomenon and that it occurs if the powder particles remaining solid are very fine and in the majority consisting of monocrystals. But the rapid dimensional reduction and the special structures characterizing the heavy-alloy mechanism can also be brought about with a coarse powder consisting of pre-alloyed particles.

LA PHASE LIQUIDE PRODUITE AU COURS DU FRITTAGE
ET LA STRUCTURE DES CRISTALLITES DU MÉTAL FRITTÉ

R. WELESZ

RÉSUMÉ

La réduction rapide des dimensions, observée pendant le frittage en présence d'une phase liquide et la formation d'une structure à grains spéciaux arrondis qui l'accompagne, ont été expliqués jusqu'à présent par le mécanisme du «heavy-alloy». Les recherches de l'auteur prouvent que, lors du frittage en présence d'une phase liquide, l'interaction entre celle-ci et les cristallites et limites de cristallites des grains de poudre est d'une importance plus décisive que le mécanisme mentionné, et se manifeste quand les grains de poudre restés à l'état solide sont très fins et sont monocristallins dans leur majeure partie. Le frittage rapide et la structure particulière caractérisant le mécanisme du heavy-alloy peuvent cependant être produits aussi par des poudres à gros grains préalliés.

ЖИДКАЯ ФАЗА, ВОЗНИКАЮЩАЯ В ПРОЦЕССЕ СПЕКАНИЯ,
И КРИСТАЛЛИТНЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ СИНТЕРНОГО МЕТАЛЛА

P. ВЕЛЕС

РЕЗЮМЕ

Быстрая усадка, наблюдаемая в процессе спекания в присутствии жидкой фазы, и одновременное образование текстуры, состоящей из специальных округленных зерен, до сих пор объяснялось т. н. «heavy-alloy» механизмом. Проведенные исследования показали, что при спекании в присутствии жидкой фазы взаимодействие между жидкой фазой и кристаллами пылеобразных зерен, соотв. кристаллитными границами, играет более важную роль, чем упомянутое выше предыдущее явление, и возникает тогда, когда остающиеся в твердом состоянии пылевидные зерна весьма мелки и в основном состоят из монокристаллов. Однако, можно получить характерные для механизма «heavy-alloy» быстрое спекание и специальную текстуру также и при помощи крупнозернистого порошка, состоящего из заблаговременно легированных зерен.

A CORRECTED METHOD FOR THE DETERMINATION OF FLANK WEAR ON THE SINGLE POINT CUTTING TOOL ON TURNING STEEL

I. KALÁSZI

DEPARTMENT OF PRODUCTION ENGINEERING, TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received January 10, 1964]

This paper deals with the measuring flank wear when turning steel. It points out that flank wear has not been investigated until recently from another angle, namely, to find out if it would not be possible to verify the rules of metallic wear by assuming an error in the measuring method. The paper shows that measurable dimensions of the wear scars depend on the size of workpiece diameters which leads to errors when diameters periodically alter during cutting time. The derived formulas make it possible to check the deformation factor K_D . Experimental results are shown to be in concord with these assumptions. The chief conclusion of the investigations described in this paper is that the measuring method by flank wear is applicable for determining tool life only, when turning experiments are made on constant workpiece diameters.

I. Introduction

Many attempts have recently been made to bring into correlation wear phenomena of cutting tools with the wear of rubbing surfaces. The reason for this is that we have no reliable method for predicting tool life. It is well known that tool wear is defined by the measuring dimensions of wear scars on the various faces and it is impossible to determine tool wear directly.

The most important types of tool wear are the wear on the rake face or "cratering" and that on the flank (Fig. 1). The sizes of these worn regions increase with cutting time. It is also well known, that in some cases the cratering wear predominates and determines the end of tool life (e. g. at high cutting speeds), while in other cases the same role is played by flank wear. If we could determine the function of any of these wears versus cutting time, it would be possible to predict tool life, which has a great practical significance.

This paper is concerned with the contradictions of recent theories about flank wear, referring to an error found in the field of metal cutting research.

II. Contradictions on the theories of flank wear

Assuming the validity of the general rule of volumetric wear for metal cutting (i.e. the volumetric rate of flank wear being constant) the following formula may be derived

$$A = Ct^{0.5}, \quad (1)$$

where

- Δ dimension of flank wear [mm] (see Fig. 1);
- t cutting time [min];
- C constant, depending on cutting conditions.

It is interesting that many investigators have attempted to demonstrate that function without result [1, 2]. A great many of these attempts were done by turning steel. For example, WEBER found that the formula may be written as $\Delta = ct^n$, where $0,5 < n < 1$. He states that according to his experiments the higher values of n may exist at higher cutting speeds. Studying DANIELJAN's investigations [3] we could come to the same conclusions.

In view of the above the general theory of today concerning flank wear may be summarized as follows.

Plotting the dimensions of the flank wear against cutting time, according to the numerous turning experiments made all over the world, we obtain the so-called ideal curve of wear, which is to be seen in Fig. 2. The curve has three definite parts. The first one is the initial wear, the second one represents the constant wear and the third part shows the catastrophic wear. According to BURWELL and STRANG [4], SHAW and DIRKE [5], this theory is based on the following complicated assumptions.

From the experiments of rubbing metallic surfaces it has been found that

$$V = K \frac{PL}{\sigma_y}, \quad (2)$$

where

- V wear volume;
- P applied normal load;
- L sliding distance;
- σ_y flow pressure of the softer material;
- K a factor depending on the hardness of the rubbing surfaces, which according to SHAW and DIRKE can be written in the function (as a probability that a contact will result in a wear particle): $K = f(N; h)$, where N is the mean number contact per unit length of the sliding distance and h the mean height of a wear particle.

If we consider that the clearance angle is α , the rake angle is γ and this equals 0, and the depth of cut is b , then

$$V = \frac{\Delta^2 b}{2} \tan \alpha. \quad (3)$$

The above formula combined with Equ. (2) may be written as follows:

$$\Delta^2 = CPL. \quad (4)$$

Accordingly — as SHAW and DIRKE assume — the three parts of the wear curve can be obtained taking into consideration that

- a) in the period of initial wear P is assumed to be constant: $\Delta^2 = \text{constant} \times L$;
- b) in the period of gradual wear P is equal to constant $\times \Delta$, and $\Delta = \text{constant} \times L$;

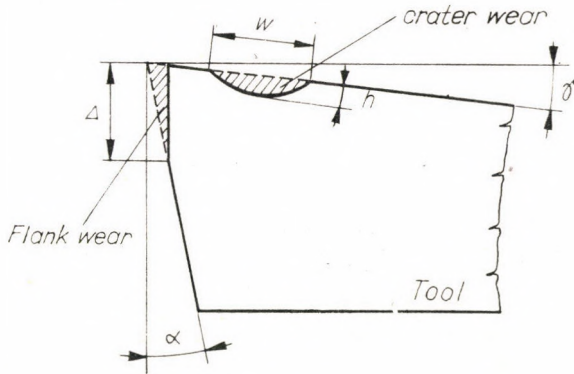


Fig. 1. The profile of a worn cutting tool (cross-section taken perpendicular to the cutting edge)
 α clearance angle; γ rake angle; Δ , w , h dimensions of the wear scars

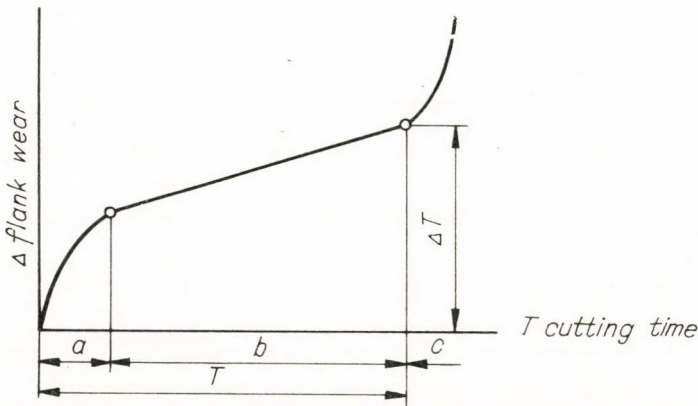


Fig. 2. Assumed ideal shape of curve is obtained when Δ is plotted against cutting time
 Portion a: "break-in" wear (or initial wear); portion b: gradual wear; portion c: catastrophic wear (or temperature sensitive region). ΔT is the maximal value of flank wear considered as the end of tool life T

c) in the third period P is a function of Δ , and $\Delta^m = \text{constant} \times L$.

It is found to be a contradiction that this theory based on the altering nature of the applied load has still not been testified exactly. We have read only one paper [6] written with the aim of proving the above-stated by experiments. For this reason the author regards it as a fair attempt to explain the phenomena without finally solving the problems.

J. TAYLOR's theory [7] is also worth mentioning. He refers to several papers in the metal cutting literature holding the same view. "Now if the curve Δ plotted against t is as shown (see Fig. 2) — he says — it is obvious that the flank wear rate is not constant."

TAYLOR's assumptions are based on the shape of wear curve idealized from the experiments. According to the opinion of the author, there is a second contradiction, more significant than the first one, namely, J. TAYLOR and many other investigators assume that we can measure Δ value without error by turning experiments.

Therefore, the author has determined to investigate the phenomena from another point of view, namely, would it not be possible to obtain different results in agreement with the theory of metallic wear, and to find an error in the measuring method itself which may lead to the deformation of the measured data of wear scar dimensions.

III. The effect of the workpiece diameter when measuring Δ flank wear dimensions

Turning experiments are usually made on test bars having definite dimensions. The general rule of investigations is that the rate of L/d , where L is the length and d the diameter of the test bar, need not be more than 10. There is no international standard for the diameter used, but it is generally chosen between $5 \div 10$ inches. For this reason, from the beginning of the test series the diameter size periodically decreases. In the following analysis it will be shown that these changes deform the measurable dimensions of flank wear.

Several assumptions are used in the present analysis, to wit:

a) According to the theory of metallic wear the volumetric rate of flank wear is constant [Equ. (1) may be used].

b) The heat flow is steady in the cutting tool and the temperature at the tool-work interface does not practically change in the region of the investigated Δ values. (But only by investigating these phenomena below the temperature sensitive region. About this assumption the paper by CHAO and TRIGGER [8] may be considered.)

c) The clearance angle is α , the rake angle is 0. The other angles and the corner radius of the tool are constant during the test.

d) The load is practically unaffected by the increase of wear.

e) The effect of the approach angle α may be omitted as a convenience in the first period of the analysis.

f) The wear phenomena are investigated on the unit length of the cutting edge. (I.e. it may be assumed $V = F \times l \approx F$, where V is the wear volume, F the area of the wear scar.)

Let us consider the case when the experiment is made from $t = 0$ up to t : first with a resharpened tool on a workpiece with a diameter having radius R , second with another one on a workpiece with a diameter $R - \delta$, where δ equals the depth of cut in most cases. The cutting conditions are the same in both cases, i.e.: cutting speed, depth of cut, feed, and the tool material are constant.

It is stated that the measurable scar dimension of the flank wear Δ , obtained on the two altering diameters in the moment t , can be related as

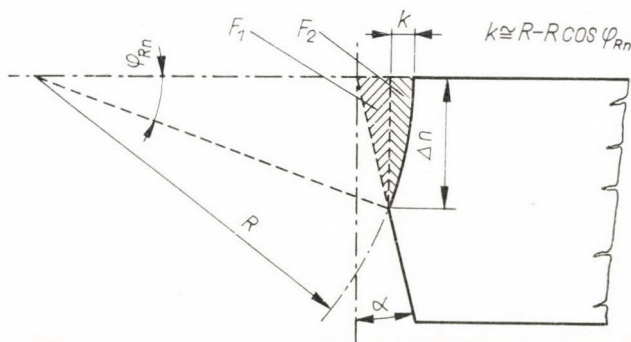


Fig. 3. The worn region at the moment t_n of cutting time when a workpiece diameter having radius R rubs the flank surface. (The unit length of the cutting edge is considered)

$$\frac{(\Delta)_{R-\delta}}{(\Delta)_R} = \frac{(C)_{R-\delta} t^{0,5}}{(C)_R t^{0,5}} = D, \quad (5)$$

where $D > 1$.

Fig. 3 shows the cross-section of the worn tool, illustrating the geometrical position at the moment t_n , when the workpiece radius is R . The worn region F_n shown by Fig. 3 may be calculated as the sum of F_1 and F_2 , where

$$F_1 = \frac{1}{2} \Delta_n^2 \tan \alpha;$$

$$F_2 = \frac{1}{2} k \Delta_n.$$

When the arc is substituted with the chord and $k = R - R \cdot \cos \varphi_{R,n}$ at F_2 , we get

$$F_n = F_1 + F_2 = \frac{1}{2} \Delta_n^2 \tan \alpha + \frac{\Delta_n R}{2} - \frac{\Delta_n R}{2} \cos \varphi_{R,n}. \quad (6)$$

If in the moment t_{n-1} the flank wear is Δ_{n-1} , the wear should equal $F_n - F_{n-1}$ during the time interval $t_n - t_{n-1}$. According to Equ. (6), it may be written

$$\begin{aligned} (F_n - F_{n-1})_R &= \left[\frac{1}{2} \Delta_n^2 \tan \alpha + \frac{\Delta_n R}{2} - \frac{\Delta_n R}{2} \cos \varphi_{R,n} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} \Delta_{n-1}^2 \tan \alpha + \frac{\Delta_{n-1} R}{2} - \frac{\Delta_{n-1} R}{2} \cos \varphi_{R,n-1} \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2} \tan \alpha (\Delta_n^2 - \Delta_{n-1}^2) + \frac{R}{2} (\Delta_n - \Delta_{n-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{2} [\Delta_n \cos \varphi_{R,n} - \Delta_{n-1} \cos \varphi_{R,n-1}] \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

The last term inside the brackets of the above formula can be estimated. If the radius has a value of 5 to 10 inches, the $\Delta = 0,001$ to 0,05 inch, then φ lies at 3' to 35' and $\cos \varphi$ varies between 1 and 0,99996. That is, the last term not showing a measurable value may be neglected.

Considering the assumption mentioned in a)

$$\Delta_{n-1} = \Delta_n \left(\frac{t_{n-1}}{t_n} \right)^{0,5}. \quad (8)$$

Substituting Equ. (8) into Equ. (7)

$$(F_n - F_{n-1})_R = \frac{\tan \alpha \Delta_n^2}{2} \left[1 - \frac{t_{n-1}}{t_n} \right] + \frac{R \Delta_n}{2} \left[1 - \left(\frac{t_{n-1}}{t_n} \right)^{0,5} \right]. \quad (9)$$

For convenience sake, one may write

$$\left[1 - \frac{t_{n-1}}{t_n} \right] = A, \quad \left[1 - \left(\frac{t_{n-1}}{t_n} \right)^{0,5} \right] = B$$

and similarly deriving Equ. (9) for the case of $R - \delta$, as the rate of the worn cross-sections, we obtain

$$\frac{(F_n - F_{n-1})_R}{(F_n - F_{n-1})_{R-\delta}} = \frac{\tan \alpha (\Delta_n^2)_R A + R (\Delta_n)_R \cdot B}{\tan \alpha (\Delta_n^2)_{R-\delta} \cdot A + (R - \delta) (\Delta_n)_{R-\delta} B} = 1 \quad (10)$$

because we have assumed that the cutting conditions are the same and the wear volume must be equal at the same time.

Analysing the value of Equ. (10), if

$$t_{n-1} \rightarrow t_n \quad \text{and} \quad \Delta_n \rightarrow \Delta$$

we find that $A/B \rightarrow 2$ and the above formula will be

$$\frac{(\Delta)_R [2 \tan \alpha (\Delta)_R + R]}{(\Delta)_{R-\delta} [2 \tan \alpha (\Delta)_{R-\delta} + R - \delta]} = 1. \quad (11)$$

Dividing with $2 \tan \alpha (\Delta)_R$ and considering that $(\Delta)_{R-\delta}/(\Delta)_R = D$, Equ. (11) becomes

$$\frac{1}{D} \frac{1 + \frac{R}{2 \tan \alpha (\Delta)_R}}{D + \frac{R}{2 \tan \alpha (\Delta)_R} - \frac{\delta}{2 \tan \alpha (\Delta)_R}} = 1.$$

For convenience, if one writes

$$E = \frac{R}{2 \tan \alpha (\Delta)_R} \quad \text{and} \quad G = \frac{\delta}{2 \tan \alpha (\Delta)_R}$$

then

$$D = \frac{1 + E}{D + E - G}. \quad (12)$$

Equ. (12) shows that

$$D > 1,$$

because in the cases of $D < 1$ or $D = 1$, that would be a contradiction, q.e.d.

By similar methods it can be shown, that if $\gamma \neq 0$, $\kappa \neq 0$ then the terms E and G of Equ. (12) are (see Appendix I):

$$E = \frac{(1 + 2 \tan \alpha \tan \gamma) R}{2 \tan \alpha (\Delta_n)_R \cos \kappa}$$

and

$$G = \frac{(1 + 2 \tan \alpha \tan \gamma) \delta}{2 \tan \alpha (\Delta_n)_R \cos \kappa} \quad (13)$$

From the above analysis it is evident that cutting research experiments by turning steel do not give the same results when the test bar diameters are altered and the method of measuring Δ flank wear for estimating tool life is used, excepted when $\kappa = 90^\circ$. In this case $R = \infty$.

It is also evident that Equ. (1) is right, but it may be proved only in the case of turning on the same diameter, of course measuring flank wear

within the range of Δ values below the temperature sensitive region. It follows that the rule of metallic wear does not alter. Moreover, because this rule is valid, the Δ values deform by "D" on another diameter.

By Equ. (12), applying the terms E and G of Equ. (13), the value of D may be calculated.

For example, if one has the following data:

$R = 5$ inch, $\delta = 0,1$ inch, $\alpha = 6^\circ$, $\gamma = 2^\circ$, $(\Delta)_R = 0,04$ inch, then D will be $\sim 1,025$, i. e. the measured $(\Delta)_{R-\delta}$ values increase by 2,5% on the smaller diameter.

The deformation will be greater in the case when turning with the same tool from the beginning of the test, and the diameter must be changed during

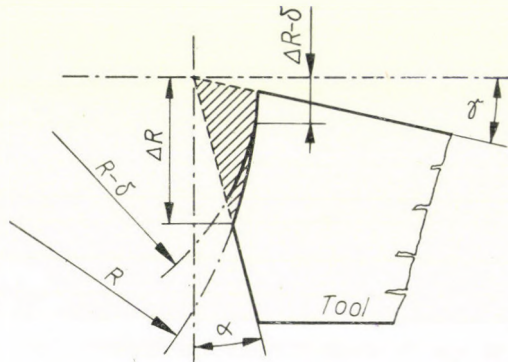


Fig. 4. Geometrical position when workpiece diameter is changed characterized as $(R) \rightarrow (R - \delta)$, just after the change

the cutting time. Fig. 4 shows the geometrical position just after the diameter change in the moment t_n . It is evident that a definite t' time is needed until the new worn section reaches the edge of the last wear scar remaining after the change at t_n , i.e. $(\Delta)_{R-\delta}$ will be equal $(\Delta)_R$. In this case t' time period Δ value is not measurable (not being visible by the usual workshop microscope). If one does not know anything about this t' time, then after a definite $t_n + t$ time period, where $t \gg t'$, one is to measure a Δ value which is supposedly greater than it would be without change because there is a section ratio determined as follows

$$a_s = \frac{F(ABD) + F(ABE)}{F(ABD)} = \frac{F(ABED)}{F(ABD)}, \quad (14)$$

where $F(ABD)$ represents the area ABD formerly worn and $F(ABE)$ represents the area ABE to be worn by the new workpiece diameter (see Fig. 5 and Appendix II).

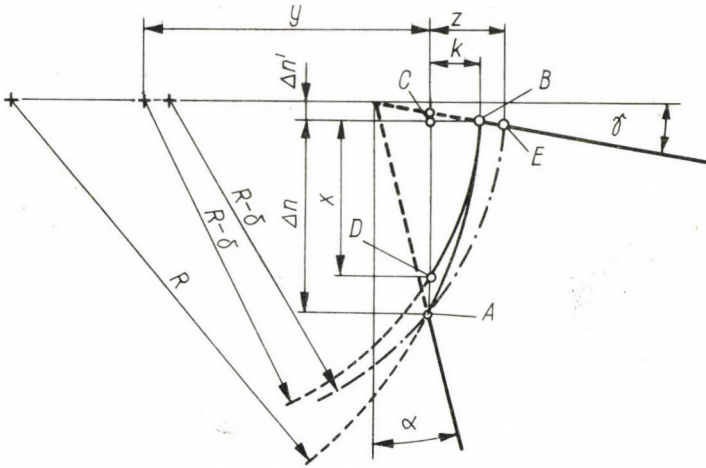


Fig. 5. Determining the a_s ratio when $(R) \rightarrow (R - \delta)$ is changed

Areas to be considered: ABD area formerly worn by workpiece surface characterized by radius R ; ABE area to be worn out by the new workpiece surface characterized by radius $R - \delta$; $AEBD$ (as $ABD + ABE$) area through which the new rubbing surface passes the time t' (see Appendix II)

Table I

D^* values in the function of a_s

a_s	D^*	a_s	D^*
3	0,414	$\frac{5}{4}$	0,061
2	0,224	$\frac{6}{5}$	0,048
$\frac{3}{2}$	0,118	$\frac{7}{6}$	0,041
$\frac{4}{3}$	0,081	$\frac{8}{7}$	0,036

With the aid of geometrical analysis it can be derived [9] that the factor of deformation in the above-mentioned case is

$$K_D = (1 + D^*)D, \tag{15}$$

where D^* depends on a_s and D can be calculated by Equ. (12) and (13).

This phenomenon of the geometrical position can be followed by an exact mathematical consideration, but it is difficult to obtain formulas for

practical calculations. It would be interesting only for the sake of the theory itself. In the opinion of the author an approximate method is enough, first to calculate the ratio a_s , second to estimate D^* , from the point of view of checking the experimental data only. This was developed by the author in his work [9] referred to. For practical use see Table I, concerning the values of D^* referring to a given value of a_s . One method for calculating a_s is shown in Appendix II.

IV. Experimental results

The experiments were made with a high speed tool and carbide tool. Besides, the author has investigated many published data of other researchers containing particulars on diameter or revolution. The cutting conditions of the experiments of the author were as follows:

Material to be cut: carbon steel, carbon contents being 0,5%. Tool: 18-4-1 high-speed steel, $\alpha = 6^\circ$, $\gamma = 14^\circ$, $\kappa = 45^\circ$. Initial cutting data: revolution 63/min, depth of cut 2 mm, feed 0,5 mm/rev, cutting fluid 5% emulsion.

During the cutting time the test bar diameters were changed three times. The revolution was adjusted to get the same speed, i.e. $v = 20$ m/min. The measured data are to be found in Table II. The Δ values plotted in log-log

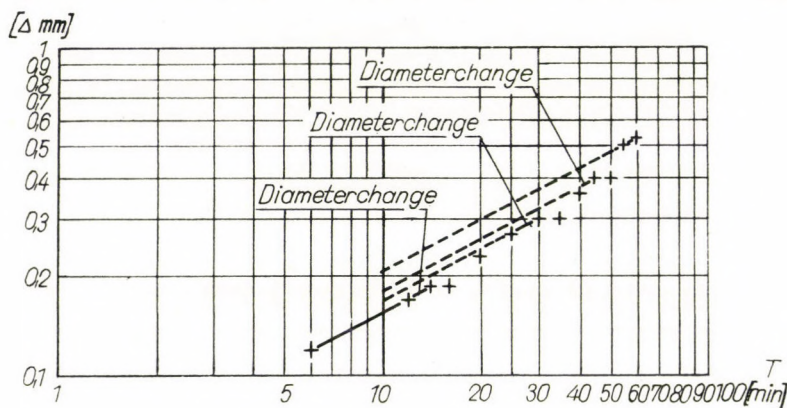


Fig. 6. The data of Table II plotted in log-log diagram

Cutting conditions. Material to be cut: carbon steel ($C = 0,5\%$); tool: 18-4-1 HSS; cutting speed: 20 m/min; depth of cut: 2 mm; feed: 0,5 mm/rev; cutting fluid: 5% emulsion. Straight line: measured Δ values on the same workpiece diameter; dotted line: interpolating to $t=10$ min time value to graphically check the deformation factor K_D . The slope of the lines 0,5

diagram may be seen in Fig. 6. If one connects the data measured at the same diameter with a line having a slope 0,5, one will see the deformation effect of diameter change. The deformation factor K_D can be graphically determined and can be checked by the above-stated methods. Results are to be seen in Table III.

Table II*Data measured by the author (cutting conditions see Chapter IV)*

Cutting time, [min]	Diameter of the workpiece, [mm]	Flank wear, [mm]	Remarks
6	166	0,12	Diameter change
12	166	0,17	
14	166	0,19	
16*	162	0,19	Diameter change
20	162	0,23	
25	162	0,27	
30	162	0,30	
35	158	0,30	
40	158	0,36	Diameter change
45	158	0,40	
50	154	0,40	
55	154	0,50	
60	154	0,53	

* measured to check the possibility of flank wear appearance.

Table III*Measured and calculated values of the deformation factor K_D (see Table II)*

Diameter change, characterized by	K_D	
	measured	calculated
166 → 162	1,08	1,066
162 → 158	1,07	1,067
158 → 154	1,11	1,088
Mean value:	1,085	1,074

Studying data of other researchers this effect will be made clear. For example Fig. 7 shows values measured by the research laboratory of the University in Tomsk [8] in the process of turning steel. The cutting conditions were as follows

Workpiece: carbon steel.

Tool: 18-4-1 high-speed steel, $\alpha = 12^\circ$, $\gamma = 15^\circ$, $\kappa = 45^\circ$.

Cutting data: $v = 8$ m/min, depth of cut = 1 mm, $f_{\text{cut}} = 0,2$ mm/rev.

Initial test bar diameter: 170 mm.

The Δ values plotted against cutting time in log-log diagram are to be seen in Fig. 8.

As it is shown during the test the diameter was changed at $t = 70; 270;$ and 340 min. That is, the test bar had two steps, one with a length of 210 mm and another with 600 mm. In this case the calculated value of deformation factor is within the range of the error of measuring (very small Δ values), but the t' time period, when flank wear increase is not visible, can be discerned.

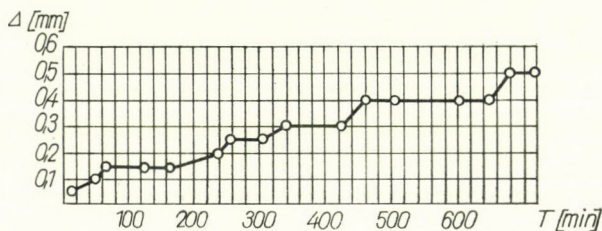


Fig. 7. Δ values measured by the research laboratory of the University in Tomsk [8]
Cutting conditions: cutting speed = $8 \frac{m}{min}$; depth of cut = 1 mm; feed = $0,2$ mm/rev. (Steel; HSS tool.)

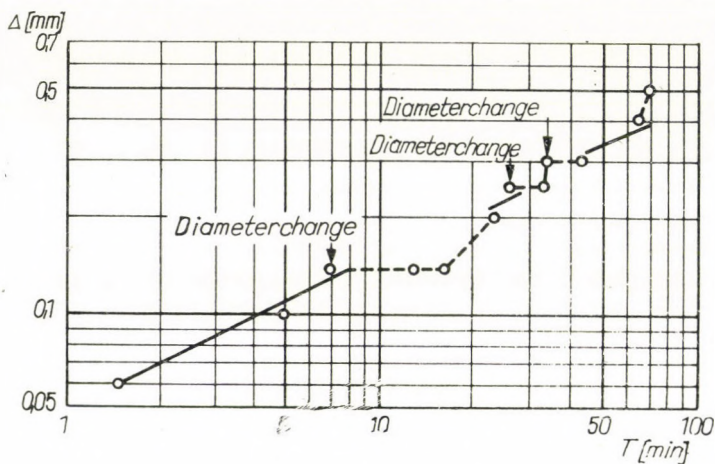


Fig. 8. The data of Fig. 7 plotted in log-log diagram

Straight line: measured Δ values on the same workpiece diameter; dotted line: represents the t' cutting period, when Δ is unmeasurable (see Chapter III).

V. Conclusions

On the basis of theoretical and experimental investigations it may be assumed that, according to the theory of metallic wear, the volumetric rate of flank wear is constant during the cutting time below the range of the temperature sensitive region.

It is obvious that the hypothesis about "break in" range and constant range of the tool-wear phenomenon especially in turning is not correct, because the function of $\Delta = Ct^{0.5}$ can be realized when cutting on the same test bar diameters. The so-called temperature sensitive region could set in, because

“cratering” increases together with the flank wear decreasing the mechanical strength of the cutting edge. If that is the case, one may assume that, near the cutting edge, some parts of the edge begin to break out increasing the rubbing coefficient between the tool-work interfaces. Consequently, the temperature grows decreasing the hardness of the tool and increasing the wear-rate.

It is evident that the so-called ideal wear curve does not show the physical phenomenon of wear, in fact when turning steel. The slope of the curve was idealized on the assumption that one can measure without error. In fact, Δ values incorporate a deforming effect on the changed workpiece diameter. The analysis has shown, that the deformation leading to this error must appear in accordance with the rules of metallic wear. It can be calculated approximately, and in this way the assumed theory may be checked, by comparing the calculated and the measured Δ values.

Moreover, the above-mentioned phenomena may be the cause of the so-called periodic wear rate cycle [11]. This effect of geometrical relations may also be the cause of many contradictions found on turning experiments when applying the method of flank wear measuring. Therefore, it is preferable to apply another method of evaluating tool life, when the radius of the workpiece diameter $R \neq \infty$ or R is not constant during the cutting period. The author supposes that similar errors of measurement may be found in other cutting methods as well, which should also be investigated in a similar fashion.

APPENDIX I

Derivation of Equation (13), Chapter III

a) *Considering the case, when $\kappa \neq 0$.* According to Fig. 9, if we assume that Section AA is taken as perpendicular to the cutting edge declining with κ to the direction of feed, it is clear that the rubbing surface is a cone, which has a radius \bar{R} greater than R .

If $\kappa < 45^\circ$, the radius may be calculated from an ellipse;

if $\kappa = 45^\circ$, the radius may be calculated from a parabola;

if $\kappa > 45^\circ$, the radius may be calculated from a hyperbole.

In the special case of $\kappa = 90^\circ$ the \bar{R} is infinite. It can be verified that the radius; \bar{R} is equal in every case to cR' where $R' = R/\cos \kappa$ and the values of c vary between $0,96 \div 0,98$, which is practically equal to 1, so then it may be written $\bar{R} \cong R'$ that is

$$\bar{R} \approx \frac{R}{\cos \kappa}.$$

b) *Considering the case when $\gamma \neq 0$.* If $\gamma = 0$ — according to Fig. 5 — the sum of $\Delta_n + \Delta'_n$ must be taken into consideration in deriving the basic Equs (5)–(12).

From the geometrical position shown in Fig. 5 it follows with a good approximation that

$$\Delta'_n = 2 \Delta_n \tan \alpha \cdot \tan \gamma.$$

That is

$$\Delta_n + \Delta'_n = \Delta_n + 2 \Delta_n \tan \alpha \cdot \tan \gamma.$$

c) *Solution of the basic equation.* The basic equation can be derived from a) and b) as shown in the following.

At a given t_n time the worn region F_n of the flank wear in section AA (see Fig. 9) will be

$$F_n = \frac{1}{2} (\Delta_n + 2 \Delta_n \tan \alpha \cdot \tan \gamma)^2 \tan \alpha + \frac{1}{2} (\Delta_n + 2 \Delta_n \tan \alpha \cdot \tan \gamma) \frac{R}{\cos \kappa} - \\ - \frac{1}{2} (\Delta_n + 2 \Delta_n \tan \alpha \cdot \tan \gamma) \frac{R}{\cos \kappa} \cos (\varphi_k)_R - \Delta_n \tan \alpha \cdot \tan \gamma \Delta_n (\tan \alpha + \tan \gamma).$$

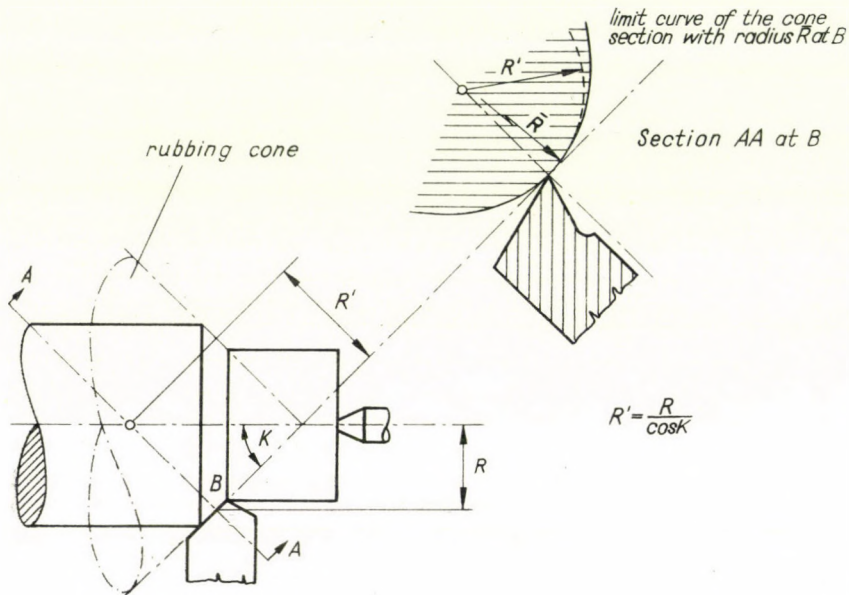


Fig. 9. Geometrical position when $\kappa \neq 0$. \bar{R} is the radius of the limit curve gained by the section at B. R' is the radius of the circle used for substituting the curve mentioned. It is shown that $\bar{R} = cR'$, where numerical value of c may be calculated in any case of κ .

After reducing we get

$$F_n = \frac{1}{2} \Delta_n^2 \tan \alpha + 2 \Delta_n^2 \tan^2 \alpha \cdot \tan \gamma + 2 \Delta_n^2 \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \gamma + \\ + \frac{\Delta_n R}{\cos \kappa} (1 + 2 \tan \alpha \cdot \tan \gamma) - \frac{\Delta_n R}{2 \cos \kappa} (1 + 2 \tan \alpha \tan \gamma) \cos (\varphi_n)_R - \\ - \Delta_n^2 (\tan^2 \alpha \cdot \tan \gamma + \tan \alpha \cdot \tan^2 \gamma).$$

After neglecting the square values of the very low tangents

$$F_n = \frac{1}{2} \Delta_n^2 \tan \alpha + \frac{1}{2} \Delta_n R (1 + 2 \tan \alpha \cdot \tan \gamma) - \\ - \frac{\Delta_n R}{2 \cos \kappa} [(1 + 2 \tan \alpha \cdot \tan \gamma) \cos (\varphi_n)_R].$$

By similar methods shown in Chapter 2 we can calculate the ratio of

$$(F_n - F_{n-1})_R \text{ to } (F_n - F_{n-1})_{R-\delta},$$

where F_n means the worn region of the flank wear at the time t_n and F_{n-1} the value of the worn region at the time t_{n-1} , respectively (as shown in the case of $\alpha = 0$ and $\gamma = 0$).

With this way we get

$$E = \frac{(1 + 2 \tan \alpha \cdot \tan \gamma)}{2 \tan \alpha (\Delta_n)_R} \frac{R}{\cos \alpha};$$

$$G = \frac{(1 + 2 \tan \alpha \tan \gamma)}{2 \tan \alpha (\Delta_n)_R} \frac{\delta}{\cos \alpha}.$$

APPENDIX II

To determine the a_s ratio mentioned in Chapter III the author proposes the following method (because exact mathematical method is difficult to be expressed in closed form).

Fig. 5 shows the various section areas in the moment t_n , just after the diameter is changed. At that moment the tool surface worn by the workpiece diameter having radius R contacts the new workpiece surface having radius $R - \delta$. The characteristic data are α clearance angle, γ rake angle, the measurable wear dimension Δ_n , which latter lies at the given moment from the section line at a distance Δ'_n . According to Fig. 5 the following formulas must be determined:

a) a_s ratio as $F(AEBD)/F(ABD)$. The above ratio may be calculated, if the following areas are known:

$F_I = (ACE)$ which is a half circle section area having a width of $2 \Delta_n$ and a height z ;

$F_{II} = (ABC)$ which is also a half circle section area having a width of $2 \Delta_n$ and a height k ;

$F_{III} = (BCD)$ similarly a half circle section area having a width of $2x$ and a height k .

Then

$$a_s = \frac{F_I - F_{III}}{F_I - F_{II}}.$$

b) I.e. by data k , x , z and the measured Δ_n , that ratio may be determined. Neglecting the value Δ'_n it can be written

$$k = R - R \cos \varphi_1, \quad x = (R - \delta) \sin \varphi_2 \text{ and } z = R - \delta (1 - \cos \varphi_3).$$

c) The values of φ_1 , φ_2 , φ_3 may be determined with the aid of a log-table as follows (see Fig. 5)

$$\sin \varphi_1 = \frac{\Delta_n}{R}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{y}{R - \delta}, \quad \text{where } y = (R - \delta) - k$$

and

$$\sin \varphi_3 = \frac{\Delta_n}{R - \delta}.$$

d) For example given the following data:

$R = 79$ mm, $\delta = 2$ mm, $\Delta_n = 0,4$ mm (measured at a cutting test, where $\alpha = 8^\circ$ and $\gamma = 12^\circ$) we get by the above calculation

$$a_s = 1,242 \approx \frac{5}{4}.$$

* * *

The author wishes to express his thanks to Prof. F. LETTNER for making it possible to carry out experiments in this field and to E. BARKÁSZ, candidate of technical sciences, for his valuable criticism, especially concerning the formulas given in this paper.

REFERENCES

1. SCHALBROCH-WALLICHS: Werkzeugverschleiß, insbesondere an Drehmeißeln. Berichte über betriebswissenschaftliche Arbeiten, VDI Verlag II (1938).
2. WEBER, G.: Beitrag zur Analyse des Standzeitverhaltens. *Industrie Anzeiger* (1955), 237—244.
3. Даниелян, А. М.: Теплота и износ инструментов. машиз, Москва 1954.
4. BURWELL, J. T.—STRANG, C. D.: On the Empirical Laws of Adhesive Wear. *Journal of Applied Physics* 23 (1952), 18—28.
5. SHAW, M. C.—DIRKE, S. O.: On the wear of cutting tools. Paper presented at International Institution for Production Engineering Research. *Microtecnic* (1955), No. 3.
6. BROWN-ARMAREGO: Der Werkzeugverschleiß bei feinen Schnitten. *Microtecnic* 17 (1963), 51—57.
7. TAYLOR, J.: Factors affecting the tool wear cutting time relationship for tools. *Machinery* 97 (1960), 853—859.
8. CHAO, B. T.—TRIGGER, K. J.: Temperature distribution at tool chip and tool work interface in metal cutting. *Trans. of the ASME* (1958), 311—319.
9. KALÁSZI, I.: A fémforgácsolás kopásjelenségeinek vizsgálata (Investigation of wear phenomena in metal cutting). Dissertation, presented at the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1963.
10. Author Collective: Смазочно охлаждающие жидкости при резании металлов. машиз, Москва 1961.
11. Members of CIRP: International manufacturing research. Part I: Advances in metal-cutting research. *Tool and Manufacturing Engineer* 50 (1963); No. 5, 71—77.

EINE KORRIGIERTE METHODE
FÜR DIE BESTIMMUNG DES FREIFLÄCHENVERSCHLEISSES
BEIM DREHEN MIT EINEM EINSCHNEIDIGEN WERKZEUG

I. KALÁSZI

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser untersucht die Messung des beim Drehen auftretenden Freiflächenverschleißes. Der Freiflächenverschleiß weicht von der bekannten Gesetzmäßigkeit des Metallverschleißes ab; die Ursache hierfür haben die Forscher bisher nicht untersucht, auf Grund der Annahme, daß die Messung selbst falsch sei. Dies ist die Grundlage für die in der Arbeit zusammengefaßten Untersuchungen. Die Arbeit beweist theoretisch, daß die meßbare Größe des Freiflächenverschleißes vom Durchmesser des Versuchsstückes beeinflußt wird. Wenn während des Versuchs die Größe des Durchmessers systematisch geändert wird, so werden die Meßergebnisse verzerrt. Auf Grund der abgeleiteten Zusammenhänge kann der Verzerrungsfaktor K_D berechnet werden. Die in der Arbeit beschriebenen Versuche bestätigen die theoretischen Erwägungen. Aus den Untersuchungen kommt der Verfasser zu dem wesentlichen Schluß, daß die durch die Messung des Freiflächenverschleißes durchgeführten Bestimmungen der Standzeit von Werkzeugen beim Drehen nur dann verläßlich sind, wenn die Größe des Durchmessers des zerspannten Probestücks nicht geändert wird.

MÉTHODE RECTIFIÉE POUR DÉTERMINER L'USURE DORSALE AU TOURNAGE
AVEC OUTIL A UN TRANCHANT

I. KALÁSZI

RÉSUMÉ

L'auteur étudie la mesure de l'usure dorsale se produisant au cours du tournage. Entre l'usure dorsale et le phénomène bien connu de l'usure du métal existe une différence, dont la cause n'a pas encore été cherchée dans l'erreur de la mesure elle-même. Les examens décrits dans l'article sont basés sur cette hypothèse. L'article démontre théoriquement que le degré mesurable de l'usure dorsale dépend de la grandeur du diamètre de la pièce à l'essai. Si on change régulièrement la grandeur du diamètre au cours de l'essai, les résultats de mesure se déforment. A l'aide des relations déduites, le coefficient de déformation K_D peut être calculé. Les essais présentés confirmant les considérations théoriques amènent l'auteur à cette constatation essentielle, que les déterminations de la durée du tranchant de l'outil, effectuées par des mesures de l'usure dorsale, ne sont sûres que si le diamètre des pièces soumises à l'essai reste constant.

СКОРРЕКТИРОВАННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗНОСА ЗАТЫЛКА
ПРИ ТОКАРНОЙ ОБРАБОТКЕ СТАЛИ ПРОСТЫМ ИНСТРУМЕНТОМ

И. КАЛАСИ

РЕЗЮМЕ

Автор исследует измерение износа затылка, образующегося при токарной обработке. Между известными закономерностями износа металла и действительным износом затылка существует определенное отклонение, причину которого исследователи до сих пор еще не изучили, считая, что само измерение имеет погрешности. На этом и основаны исследования, описанные в статье. В статье теоретически подтверждается, что на измеренный размер износа затылка воздействует размер диаметра опытного образца. Если в процессе испытаний систематически изменяется размер диаметра, тогда искажаются результаты измерений. При помощи выведенных зависимостей можно вычислить коэффициент искажения K_D . Продемонстрированные эксперименты подтверждают теоретические соображения. На основе проведенных исследований автор делает существенный вывод о том, что определение срока службы режущей кромки инструмента, выполненное измерением износа затылка, является надежным только в том случае, если не изменять размера диаметра опытных образцов, подвергаемых токарной обработке.

DETERMINATION OF THE FREQUENCIES OF WAKES SHEDDING FROM CIRCULAR CYLINDERS

J. VARGA and GY. SEBESTYÉN

[Manuscript received February 21, 1964]

The paper presents the results obtained from the experiments made for the purpose of determining the frequency of wakes shedding from a circular cylinder placed in water flow with values above the critical Reynolds-number. The determination of the frequencies was made by pressure gauges, stroboscope, vibration-measuring head, strain gauges attached to the wall of the test section and acoustic noise measurements. The experiments have given the relation $S = C \sqrt{\sigma}$ between the Strouhal-number and the cavitation number; this relation can be supported by theoretical considerations, too. The authors present the relations between frequency, pressure and velocity in diagrams also verified by the results from the measurements. They state that in the neighbourhood of the critical Reynolds-number and above it, with cavitating flow, the Strouhal-number is a function of the cavitation number and its value is not determined by the Reynolds-number. They have observed a regular eddy-generation in the region of the critical Reynolds-number as well. In the neighbourhood of the critical Reynolds-number the sudden decrease of the drag coefficient is also determined by the cavitation number and, with a given cavitation number, the value of the drag coefficient is independent of the Reynolds-number.

Symbols

$Re = v_{\infty} d / \nu$	is Reynolds-number, where
v_{∞}	is the velocity of undisturbed flow;
d	is the diameter of cylinder;
ν	is the kinematic viscosity;
$S = fd/v_{\infty}$	is the Strouhal-number, where
f	is the frequency of the shedding wakes;
$\sigma = (p_{\infty} - p_v) / (\rho/2) v_{\infty 0}^2$	is the cavitation-number, where
p_{∞}	is the ambient (free stream) pressure;
p_v	is the vapour pressure at the given temperature;
$(\rho/2) v_{\infty 0}^2$	is the dynamic pressure;
$v_{\infty 0}$	is the velocity in the centre line of flow; $v_{\infty 0} = i v_{\infty}$; values of i for the test sections under a) and b) 198 × 200 mm and 48 × 200 mm, respectively, $i_a \cong 1,0$, $i_b \cong 1,05$;
$\lambda = l_c/d$	is dimensionless cavity length, where l_c is the cavity length measured from the centre line of the cylinder (by visual observation).

I. Introduction

In the course of experimental studies on investigating the scale effect of cavitation erosion with a circular cylinder model [1, 2], the frequencies of cavities shedding from the two sides of the cylinder were simultaneously determined. The purpose of these experiments was to clarify the correlation between the Strouhal number and the cavitation number.

The experiments were carried out in two test sections each having different cross sections, with circular cylinders of identical size, between the limits of Reynolds-numbers $3,28 \times 10^5 - 7 \times 10^5$. In this region of Reynolds-numbers, the values of Strouhal-numbers, as determined by various investigators, cannot be considered as fully unambiguous; those above Reynolds-number 5×10^5 are even unknown. The correlations between the cavitation number and the Strouhal-number have hardly been subjected to any investigation at all. The present paper summarizes the experimental results, comparing them with the data of the publications of major importance hitherto published and offers some explanations of the results.

II. Experimental apparatus

The experimental studies were conducted in the two-dimensional closed circuit water tunnel at the Department of Hydraulic Machines, Polytechnical University, Budapest. The dimensions of the horizontally arranged test sections with rectangular cross section and those of the horizontal circular cylinder placed perpendicularly to the direction of flow, are shown in Table I.

Table I

	Width	Height	Dimensions of cylinder
a)	198 mm	200 mm	$\varnothing 48 \times 198$ mm
b)	48 mm	200 mm	$\varnothing 48 \times 48$ mm

Determination of the frequencies of cavities shedding from the cylinder was accomplished in the test section marked a) by membrane-type pressure gauges and by stroboscope; in that marked b) by stroboscope and sound frequency analyzer.

Fig. 1 shows the test section 48×200 mm. The walls of the test section on three sides were made of thick (50 mm) transparent plexiglass; on the fourth of thick (50 mm) steel plate. One side of the circular cylinder model is fastened into the steel plate, on the other side it extends into the plexiglass wall. The test section 198×200 is of similar design with considerable difference in wall thickness (the steel plate being 12 mm, the plexiglass plates 15 mm thick). Stream velocity and pressure conditions were adjustable. Temperature of the water varied during experimenting between $17 \div 23$ °C.

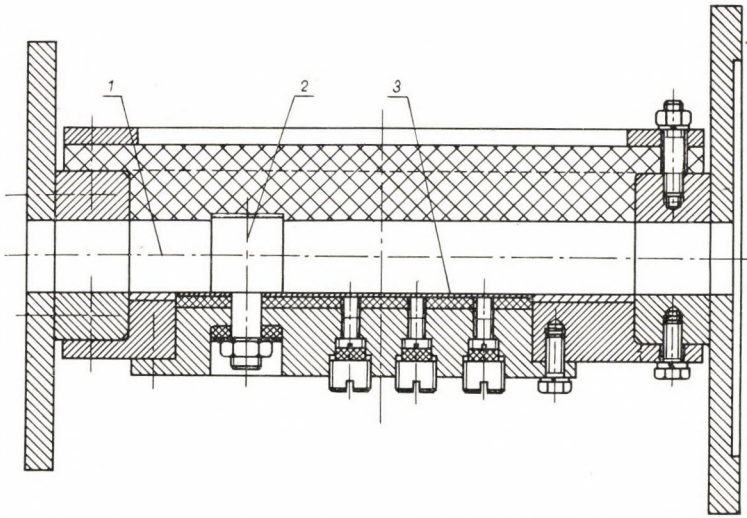


Fig. 1. Sectional view of the test section 48×200 mm

III. Cavitation number and cavity length

The relation between the cavitation number and the length of cavitation zone is shown in Figs 2a and 2b. The wakes begin to shed in the region between $\sigma = 2,4 \div 2,5$ values. With the former, at a larger cavitation number there is only a faint murmuring noise to be heard, which grows into an ever stronger one, as the cavitation number decreases. The beginning of separation can be

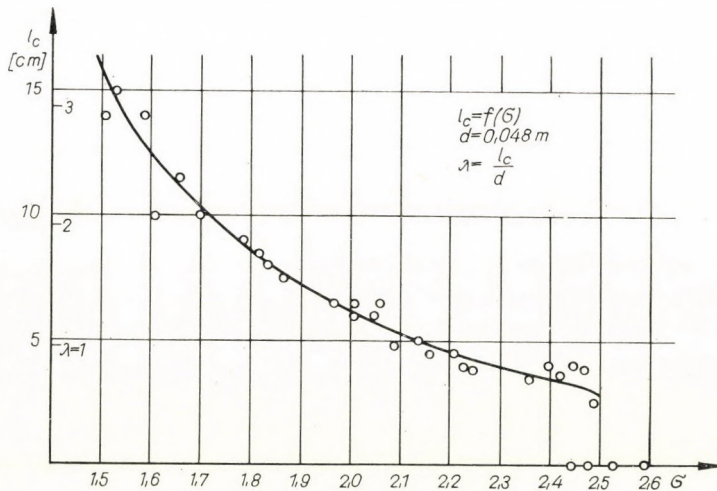


Fig. 2a. The relation of the cavitation number (σ) and the cavity length (l_c), in the test section 198×200 mm

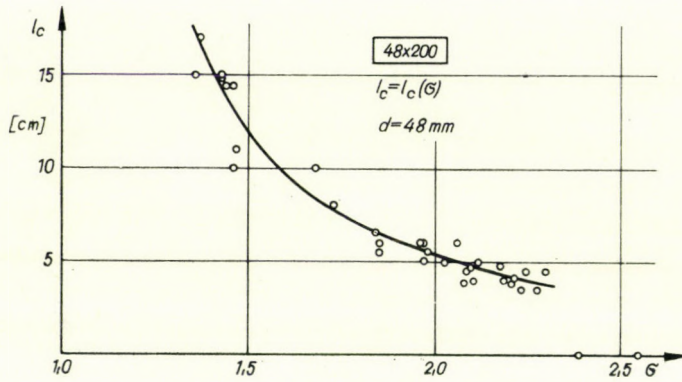


Fig. 2b. The relation of the cavitation number (σ) and the cavity length (l_c) in the test section 48×200 mm

observed in the form of individual thin fuzzy traces; as the cavitation number decreases, these appear along the full width of the cylinder. If the cavitation number is still further decreased, the fuzzy traces become fuller and fuller and form regular vortices that will appear as a short cavitation zone for the visual observer. In photographs taken with short exposure times the vortices can be well seen (Fig. 3). With a further decrease in the cavitation number the length of the observable cavitation zone will also grow (Figs 4 and 5). When the length of the zone reaches the threefold value of the cylinder diameter, the values produce a fixed cavity (steady-state cavity, Fig. 6).

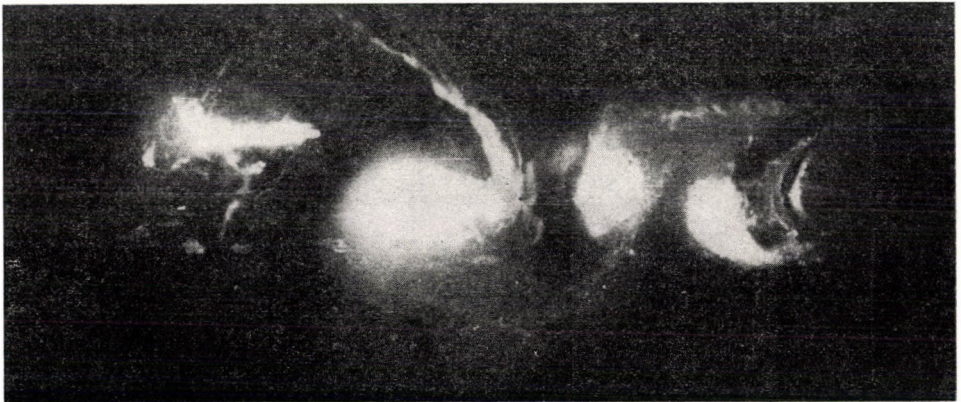


Fig. 3. Photograph of eddies shed from the circular cylinder in test section 198×200 mm. $\sigma = 2,18$; $Re = 6,35 \times 10^5$. Time of exposure: $t = 2 \cdot 10^{-6}$ s

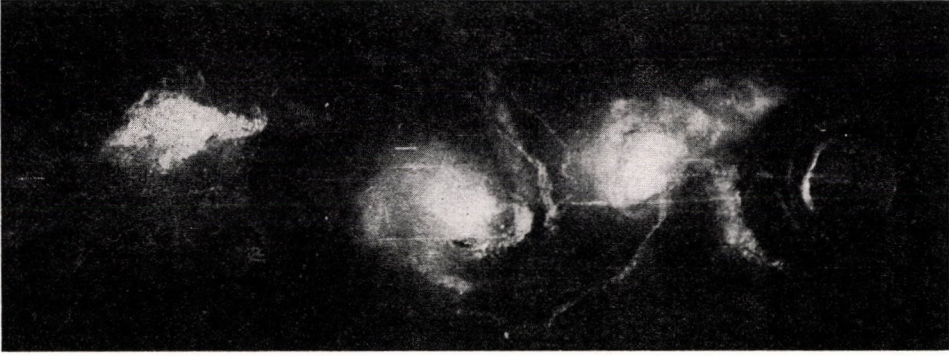


Fig. 4. Photograph of eddies shed from the circular cylinder in test section 198×200 mm.
 $\sigma = 1,80$; $Re = 4,97 \cdot 10^5$; $d = 48$ mm. Time of exposure: $t = 2 \cdot 10^{-6}$ s

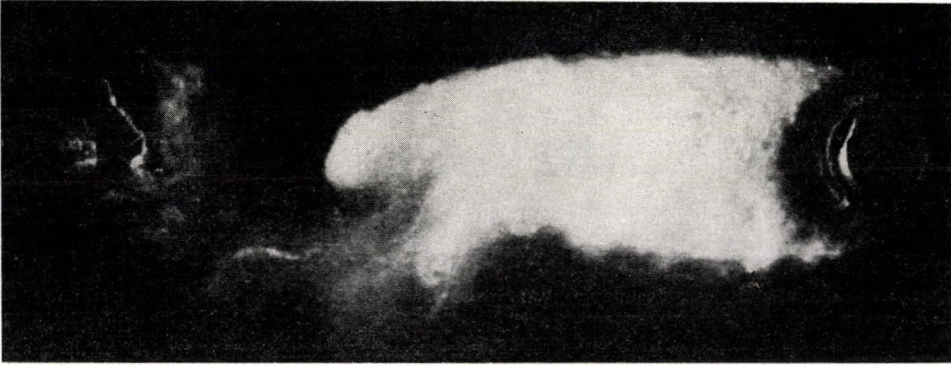


Fig. 5. Photograph of the cavitation zone in test section 198×200 mm. $d = 48$ mm; $\sigma =$
 $= 1,50$; $Re = 6,6 \cdot 10^5$. Time of exposure $t = 5 \cdot 10^{-5}$ s

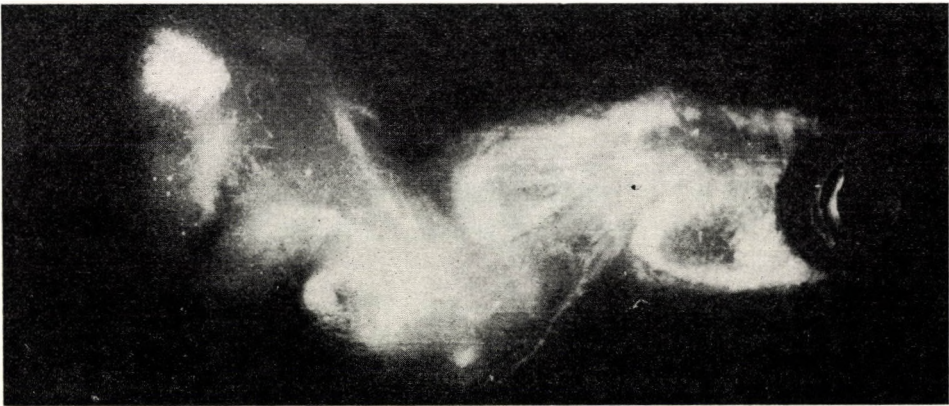


Fig. 6. Photograph of the cavitation zone in test section 198×200 mm; $d = 48$ mm, $\sigma = 1,45$;
 $Re = 6,5 \cdot 10^5$. Time of exposure: $t = 2 \cdot 10^{-6}$ s

IV. Determination of the frequency number

The pressure fluctuations were recorded in the test section of 198×200 mm cross section by means of membrane-type pressure gauges screwed into the wall of the test section; and strain gauges were attached to the membranes and connected to an electric bridge. Feeding 2 kHz carrier frequency modulated in the rhythm of pressure changes to a main current output-amplifier, the amplified signals were recorded on an oscillograph tape. Time was measured by 1 sec signals superposed on the 500 Hz time-signal; these signals were

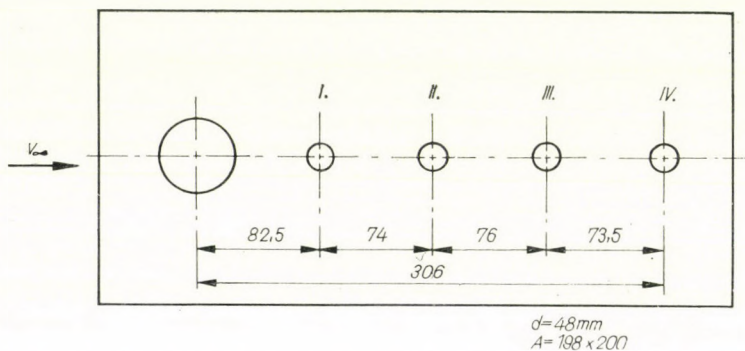


Fig. 7. Place of the membrane-type pressure gauges on the steel wall of the test section 198×200 mm

given by a signal-giving stop-watch through a multi-contact relay. In the steel wall of the test section, along the middle line and at distances as shown in Fig. 7, four pieces of pressure gauges (marked I — IV) were placed. Thus, it was probable that there would always be a gauge that would respond well to the pressure changes caused by the wakes passing before it. For these investigations — though the calibrating pressure values were also regularly recorded on the oscillograph — the pressure values were not needed, as the purpose of the experiments was solely to determine the frequencies.

Some of the oscillograms are shown in Figs 8a, 8b, 8c, 8d. At the bottom of each figure the 1 sec time signals superposed on the 500 Hz time signal are shown. Going from the bottom upwards, the signals of membranes I, II and III are given. The cavitation number, Reynolds-number, cavity length and the measured frequency are given in the legends of the graph. The gauge number in brackets at the end of each legend refers to the gauge that shows the data to determine the frequency given in the legend of that particular graph.

The measured frequency data were checked by a stroboscope (Type RFT-LS-1); the latter was previously calibrated by an electronic impulse-counter device (DISA). The results obtained from the stroboscope showed

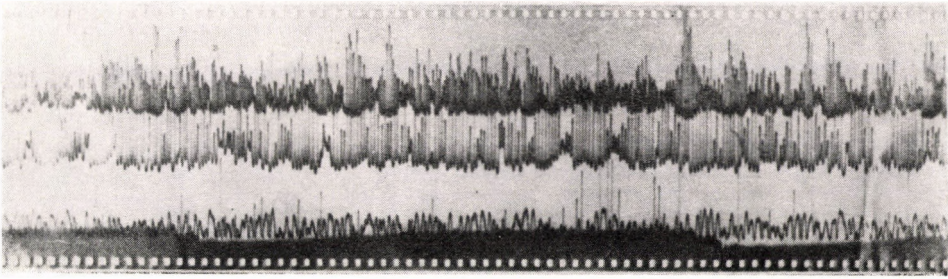


Fig. 8a. Oscillograph exposure made from pressure changes. $\sigma = 2,21$; $Re = 6,32 \cdot 10^5$; $l_c \cong 4,5$ cm; $f \cong 77,4/s$ (Membrane II)

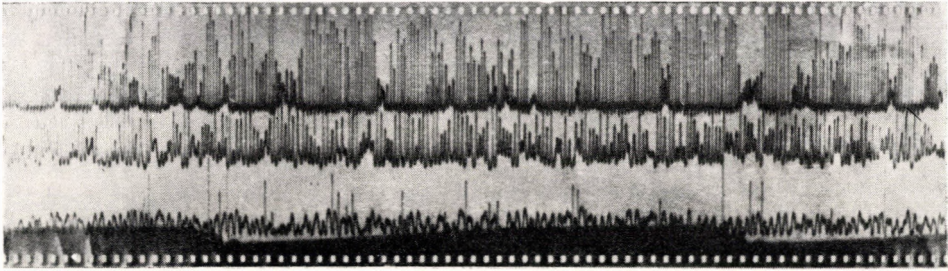


Fig. 8b. Oscillograph exposure made from pressure changes. $\sigma = 2,06$; $Re = 6,27 \cdot 10^5$; $l_c \cong 6,5$ cm; $f \cong 76,5/s$ (Membrane III)

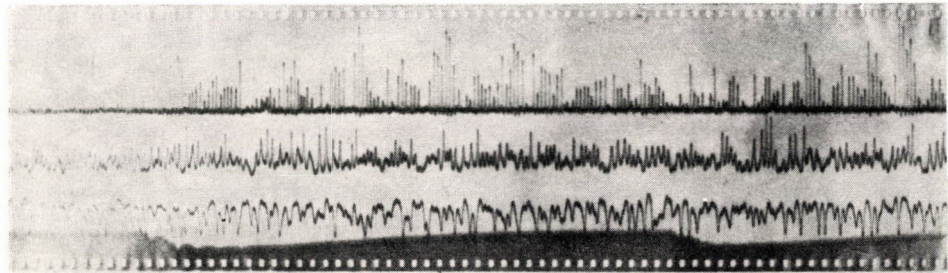


Fig. 8c. Oscillograph exposure made from pressure changes. $\sigma = 1,97$; $Re = 5,79 \cdot 10^5$; $l_c \cong 6,5$ cm; $f \cong 67,0/s$ (Membrane III)]

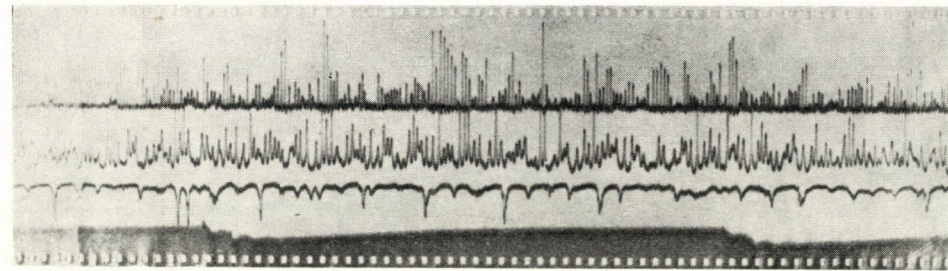


Fig. 8d. Oscillograph exposure made from pressure changes. $\sigma = 1,61$; $Re = 6,39 \cdot 10^5$; $l_c \cong 10$ cm; $f \cong 67/s$ (Membrane III)

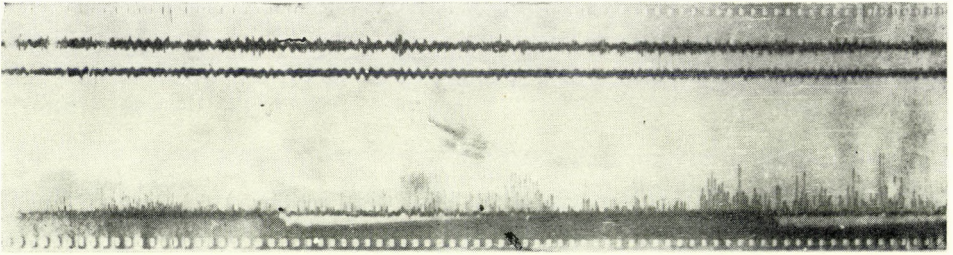


Fig. 9a. Oscillograph exposure made from pressure changes. $\sigma = 2,68$; $Re = 6 \cdot 10^5$; $l_c = 0$ cm; f is uncertain

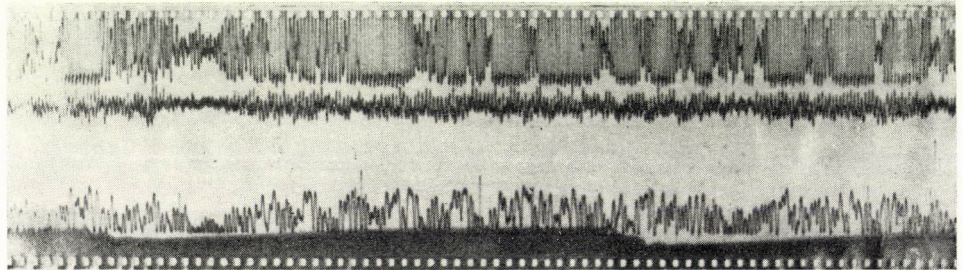


Fig. 9b. Oscillograph exposure made from pressure changes. $\sigma = 2,47$; $Re = 5,95 \cdot 10^5$; $l_c \cong 3,8$ cm; $f \cong 72/s$ (Line 2, 3)

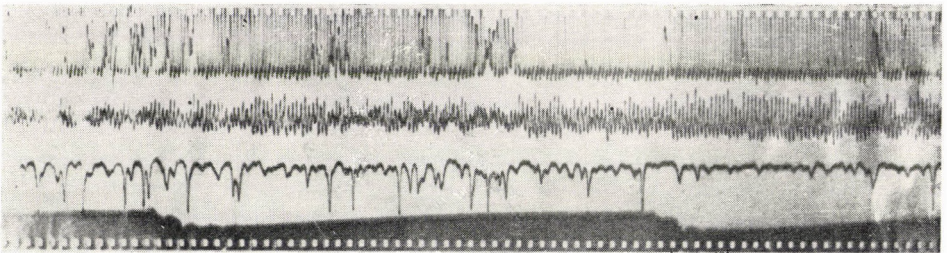


Fig. 9c. Oscillograph exposure made from pressure changes. $\sigma = 1,79$; $Re = 5,95 \cdot 10^5$; $l_c \cong \cong 9,0$ cm; $f \cong 61,5/s$. (Line 2, 3)

good agreement with the frequency numbers obtained by means of the pressure gauges. Differences were within ± 1 frequency.

For further checking another gauge was mounted on the plexiglass side of the test section opposite to the pressure gauge placed at I. However, this second gauge did not extend into the test section, but was supported by a piston moving in the duct; the other end of the piston was supported by the side-wall of the test section and the membrane was slightly prestressed. Thus the membrane-type gauge was used as a vibration-measuring head. Besides, onto the same plexiglass side wall that supported the former vibration-measuring head, a strain gauge was attached opposite to the pressure gauge marked IV.

The frequency of the modulation received through the changes in the resistance of the strain gauges attached onto the wall and of those on the membrane acting as vibration-measuring head was recorded by the oscillograph in the way previously described. Figs 9a, 9b, 9c show oscillogram-photographs that were taken from the indications of a pressure gauge, a vibration-measuring

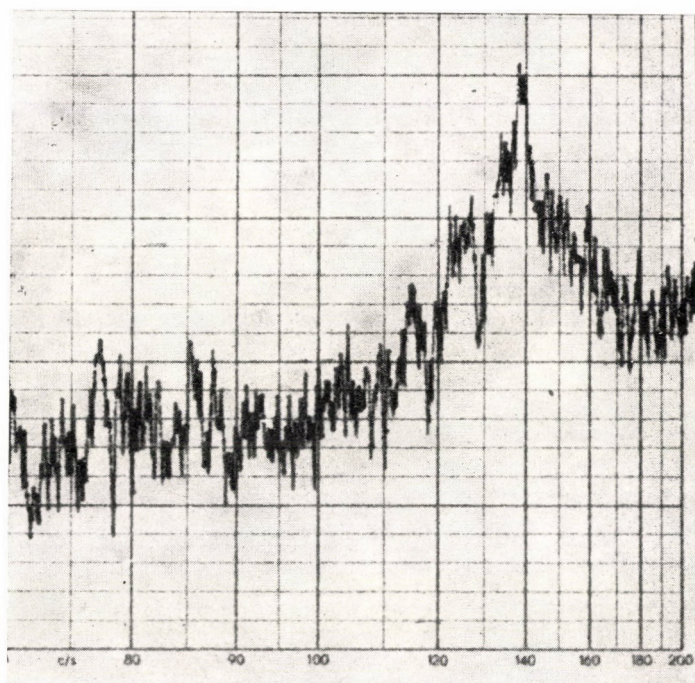


Fig. 10. Part of the frequency analysis curve of cavitation noise. $\sigma = 1,93$; $Re = 5,29 \cdot 10^5$;
 $f \simeq 69/s$

head and a strain gauge attached to the wall. In the oscillogram-photographs the bottom line is the time signal, followed by the signals of pressure changes taken by the pressure gauge placed in No. I bore; next are the signals from the strain gauge, and finally those of the vibration-sensing head. The frequency numbers calculated from these data coincide well with the results obtained from measurements made in the former way.

In the test section marked *b* and having size 48×200 mm, the frequency of the cavities shedding from the cylinder was determined by a stroboscope, and the values thus obtained were checked, while noise was measured through a condenser microphone by frequency analyser (BRÜEL and KJAER). The applied frequency analyser is suitable for tests in the $20 \div 20\,000$ Hz region; it was coupled to an automatic level recorder that set down the values from

the analyser. The analyser took measurements with constant relative bandwidth. One diagram thus obtained is given in Fig. 10. The results obtained from noise-measuring and those from frequency analysis show excellent agreement with the frequencies determined by the stroboscope.

V. The results and their evaluation

The values of Strouhal-numbers calculated from the results of the measurements, as functions of the cavitation number, are shown in Figs 11 and 12, referring to test sections *a*) and *b*), respectively. It should be noted that the calculation of Strouhal-numbers reported here was made with the free stream velocity (v_∞) values. If the values of the Strouhal-numbers are calculated with the uniform free downstream velocity ($v = kv_\infty$, where $k = b/(b - d)$, b denoting the height of the measuring unit), smaller numerical values corresponding to $S' = S/1,32$ will be obtained. These two kinds of numerical values again raise the so far not fully clarified problem of the extent of influence of the wall effect on the frequency of shedding wakes.

Denoting the longitudinal spacing of the vortices by l , and the relative velocity of the vortex configuration by v_r , the frequency of the eddies will be $f = v_r/l$. However, since $v_r/v_\infty = \text{constant}$ and since l is a function of the cavitation number σ , the frequency can be written as the relation

$$f = C'(\sigma) \cdot v_\infty. \quad (1)$$

Assuming that — as verified by our experiments —

$$C'(\sigma) = C_1 \sqrt{\sigma}, \quad (2)$$

where $C_1 = \text{const.}$

Thus

$$f = C_1 v_\infty \sqrt{\sigma}. \quad (3)$$

As from the cavitation number

$$v_\infty = C_2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\sigma}} \quad (4)$$

the frequency is

$$f = C_3 \sqrt{\Delta p} \quad (5)$$

and finally the Strouhal-number

$$S = \frac{fd}{v_\infty} = C \sqrt{\sigma}, \quad (6)$$

which correlation had been verified by experiments (Figs 11 and 12) as well as our assumption under (2).

The constant value of C is, with the test section a) (198×200 mm) $C = 0,191$; with b) (48×200 mm) $C = 0,197$.

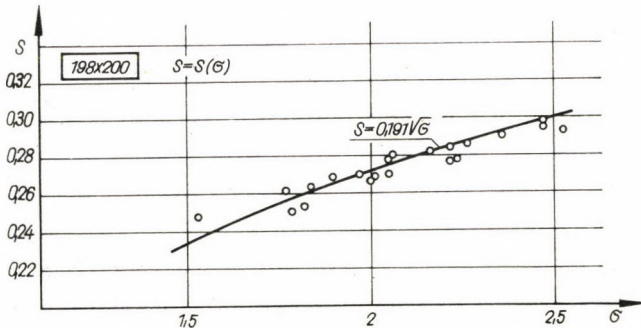


Fig. 11. Strouhal-number (S) as a function of the cavitation number (σ) in test section 198×200 mm

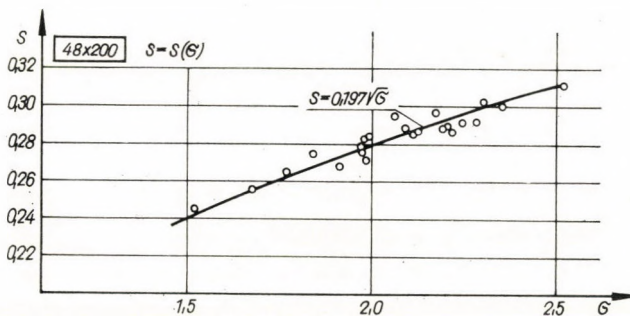


Fig. 12. Strouhal-number (S) as a function of the cavitation number (σ) in test section 48×200 mm

By reason of the foregoing it can be concluded that with cavitating flow the Strouhal-number is a function of the cavitation number. The cavitation number, however, depends on pressure and velocity. Its expression substituted into (6)

$$S = C_4 \frac{\sqrt{\Delta P}}{v_\infty} \quad (7)$$

consequently, with cavitating flow, the Strouhal-number, i.e. the frequency, will be determined by taking pressure and velocity together. Therefore, identical values of the Strouhal-numbers can belong to different velocities, i.e. Reynolds-numbers, depending on the pressure, which means that different Strouhal-numbers can belong to the same Reynolds-number.

Again, on the basis of the foregoing it can be stated that, with cavitating flow, the Strouhal-number is not determined by the Reynolds-number, contrary to the experience that with values under the critical Reynolds-number the Strouhal-number is a function of the Reynolds-number. KERMEEN, MCGRAW and PARKIN [3] have also made reference to this: "... the Reynolds-number was not the primary parameter for defining incipient cavitation." Correlations between the cavitation number, frequency, pressure and velocity are given in Fig. 13. In Table II some results from the measurements are shown.

Table II

f [1/s]	σ	v_{∞} [m/s]	p_{∞} [kp/cm ²]	S
76,5	2,06	13,19	1,843	0,280
77,4	2,21	13,19	1,976	0,282
79,6	2,36	13,19	2,108	0,291
67,0	1,61	13,19	1,449	0,244
67,0	1,97	11,94	1,449	0,270
61,5	1,79	11,88	1,309	0,250
68,2	2,23	11,88	1,586	0,276
72,0	2,47	11,88	1,799	0,292
—	2,68	11,88	1,946	—
48,5	2,00	8,60	0,740	0,270

These agree well with the values read from Fig. 13. Of the former it can also be stated that with cavitating flow there will be no sudden changes in the Strouhal-number.

Comparing the expressions (6) and (7) and considering that in the case of $v = \text{const}$ and $d = \text{const}$ the Reynolds-number is proportional to the velocity, then, in the case of $\Delta p = \text{const}$

$$Re \sqrt{\sigma} = \text{const.} \quad (8)$$

This relation is presented by the experimental results shown in Figs 14 and 15. The diagrams reflect well the influence of temperature, too.

The changes of the Strouhal-number as a function of the Reynolds-number were documented by the experiments made by RELF and SIMMONS, and the references in the literature on this subject refer chiefly to their reports [4]. Their investigations were made with air. Previous to that, RELF had determined the frequency of eddies from a cylinder placed in waterflow, but only for small Reynolds-numbers. Recently, ITAYA and YASUDA [5] conducted

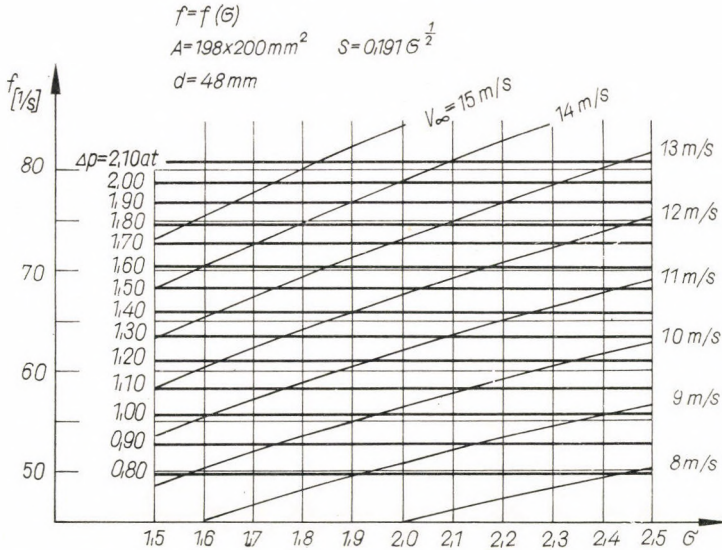


Fig. 13. Frequency (f) as a function of the cavitation number (σ) in test section $198 \times 200 \text{ mm}$. The flow velocity (v_∞) and the static pressure ($p_\infty - p_v = \Delta p$) are the parameters

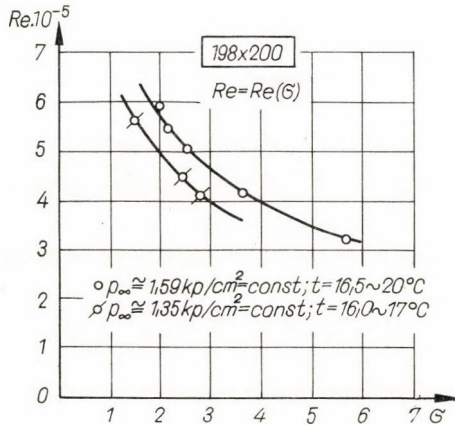


Fig. 14. Reynolds-number (Re) as a function of the cavitation number (σ) in test section $198 \times 200 \text{ mm}$

experimental studies worthy of attention, in the course of which they determined, using a high and low speed wind tunnel and water rotating vessel, the frequency of shedding eddies in the region of $Re = 6 \times 10^4 \div 5 \times 10^5$. The measurements with the cylinder placed in a water rotating vessel were made only for small Reynolds-numbers ($6 \times 10^4 \div 1 \times 10^4$); thus, similar to RELF and SIMMONS, no measurements were taken with cavitating flow. Their experiments show that between $Re = 1 \times 10^4 \div 1 \times 10^5$ the Strouhal-

number has the constant ($S \approx 0,18$) value, and then, in the neighbourhood of the critical Reynolds-number (5×10^5) it suddenly increases to the value $S \approx 0,3 \div 0,6$ (Fig. 16).

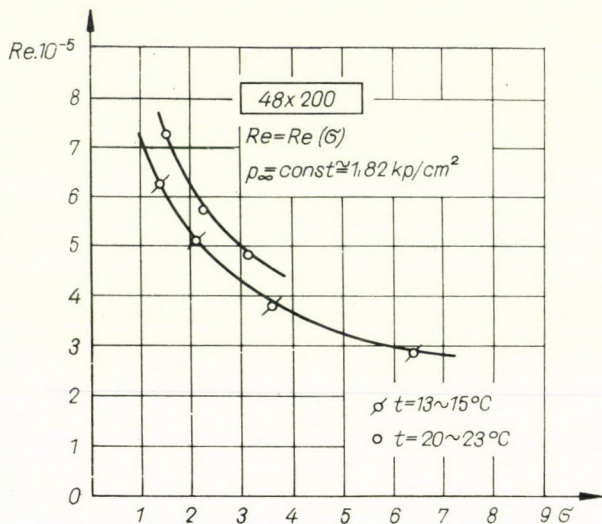


Fig. 15. Reynolds-number (Re) as a function of the cavitation number (σ) in test section 48×200 mm

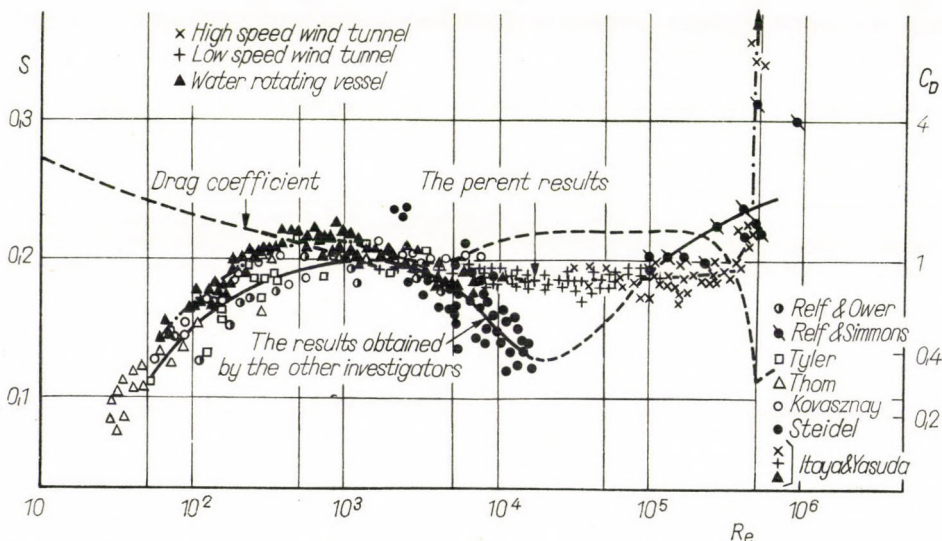


Fig. 16. Experimental curve of Strouhal-number—Reynolds-number $S = S(Re)$, after ITAYA and YASUDA

The close relation between the Strouhal-number and the drag coefficient can be verified from the relations derived for the KÁRMÁN vortex street; according to the former, the drag coefficient will decrease with increasing Strouhal-number values. The diagram published by ITAYA and YASUDA, in accordance with other author's publications, shows the same. It is well known

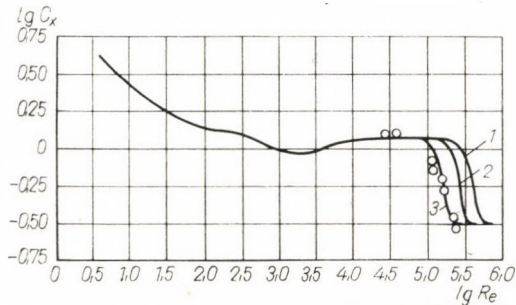


Fig. 17. The drag coefficient (C_x) as a function of Reynolds number [$C_x = C_x(Re)$] after KONSTANTYINOV's report

1 Göttingen measurements (with air); 2 EISNER's measurements (with water); 3 NPL measurements (with air); measurement results of the laboratory of the Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of the Soviet Union

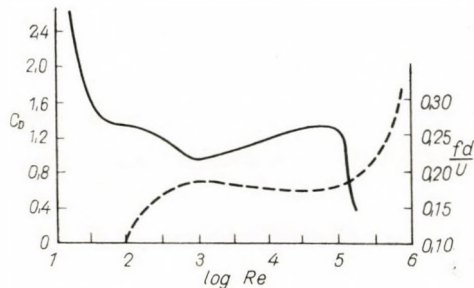


Fig. 18. The drag coefficient (C_d) and the Strouhal-number (fd/U) as a function of Re number — after RICHARDSON

that in the neighbourhood of the critical Reynolds-number the drag coefficient suddenly decreases; however, up till now the exact Reynolds-number at which this sudden decrease of the drag coefficient ensues could not be unambiguously defined, since it is influenced by other factors as well (roughness of the cylinder, turbulence of the flow). The results of KONSTANTYINOV [6] reflect the sudden change of the drag coefficient that may occur with rather different Reynolds-numbers (Fig. 17). In the diagram by RICHARDSON [7] (Fig. 18) the sudden decrease of the drag coefficient took place still earlier. The diagram in the paper of RELF and SIMMONS also refers to the same. Though in the experimental results of ITAYA and YASUDA the sudden increase of the Strouhal-number

occurs at $Re = 5 \times 10^5$, there is no reason why we should take this as of general prevalence.

The sudden decrease of the drag coefficient in the neighbourhood of the critical Reynolds-number will also occur with cavitating flow; but where, and to what extent it ensues, will be determined by the cavitation number. The change of the drag coefficient as a function of the cavitation number is shown in Fig. 19.

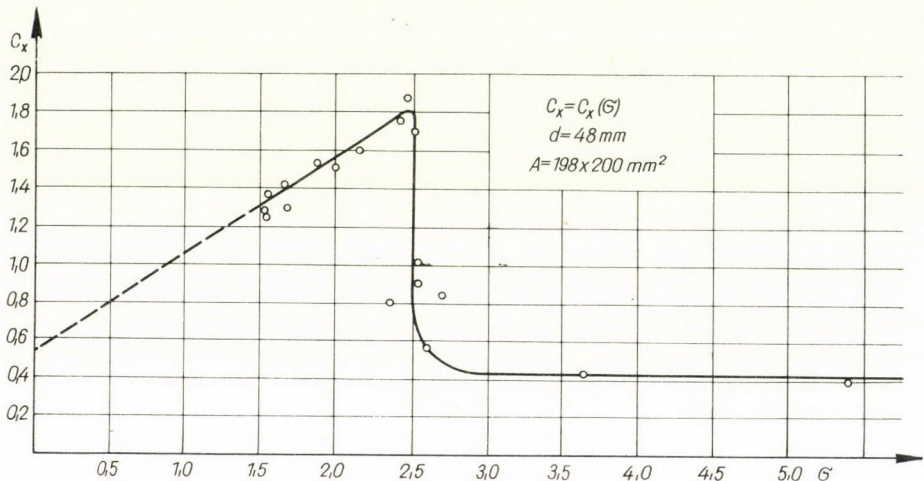


Fig. 19. The drag coefficient (C_x) as a function of the cavitation number (σ). Measured by authors in the test section $198 \times 200 \text{ mm}$

VI. Conclusions

On the strength of experiments made and from considerations it can be concluded that in the region above the critical Reynolds-number, and with cavitating flow, the Strouhal-number is a function of the cavitation number and its value will not be defined by Reynolds-number. The Strouhal-number with cavitating flow is not constant but increases together with the cavitation number and does not make sudden changes.

In the regions above the critical Reynolds-number also a regular vortex-generation can be observed.

If the Reynolds-number belonging to the flow is in the region of the critical Reynolds-number, with the change of the cavitation number there is a sudden change in the drag coefficient with cavitating flow. There is a definite cavitation number value belonging to this change.

In cavitating flow, with a given cavitation number, the drag coefficient has, independent of the value of the Reynolds-number, a constant value.

REFERENCES

1. Варга, Й. Й.—Чернявский, Б. А.—Шальнев, К. К.: О методе исследования масштабного эффекта кавитационной эрозии. ПМТФ (1963), № 3.
2. VARGA, J.—SEBESTYÉN, GY.—SHALNEV, K. K.—CSERNAVSZKI, B. A.: Untersuchung des Maßstabeffektes der Kavitationserosion (Investigation of the scale effects of cavitation erosion). *Acta Techn. Hung.* 51 (1965).
3. KERMEN, R. W.—MCGRAW, J. T.—PARKIN, B. R.: Mechanism of Cavitation Inception and the Related Scale-Effects Problem. *Transactions of the ASME* (1955), 533—541.
4. RELF, E. F.—SIMMONS, L. F. G.: The Frequency of the Eddies Generated by the Motion of Circular Cylinders through a Fluid. *R. and M.* (1924); June, No. 917.
5. ИТАЯ, С. — ЯСУДА, Я.: Experiments on Strouhal's Number. *Bulletin of JSME* 4 (1961), No. 14.
6. Константинов, В. А.: Влияние числа Рейнольдса на отрывное обтекание. Изв. АН СССР. ОTH. (1946), № 10.
7. RICHARDSON. E. G.: Dynamics of Real Fluids. Arnold, London 1961.

BESTIMMUNG DER FREQUENZ

DER SICH VON EINEM KREISZYLINDER ABLÖSENDEN WIRBEL

J. VARGA und GY. SEBESTYÉN

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz beschreibt die Ergebnisse von Versuchen, die zur Bestimmung der Frequenz der sich von einem Kreiszyylinder ablösenden Wirbel bei überkritischen Reynoldsschen Zahlen durchgeführt wurden. Die Messung der sich ablösenden Wirbel wurde mit druckmessenden Membranen, Stroboskop, Schwingungsmeßkopf und auf die Wand des Meßbehälters geklebten Dehnungsmeßstreifen durchgeführt. Die Versuche ergaben für den Zusammenhang zwischen der Strouhal-Zahl und der Kavitationszahl die Formel $S = C\sqrt{\sigma}$, die auch durch theoretische Überlegungen unterstützt werden kann. Die Verfasser zeigen die Zusammenhänge zwischen Frequenz, Druck und Geschwindigkeit in einem Diagramm, welches auch durch die Meßergebnisse bestätigt wird. Sie stellen fest, daß in der Umgebung der kritischen Reynoldsschen Zahl und darüber bei Kavitationsströmung die Strouhalsche Zahl eine Funktion der Kavitationszahl ist, und daß deren Wert nicht durch die Reynoldssche Zahl bestimmt wird. Im Bereich der kritischen Reynoldsschen Zahl beobachteten sie ebenfalls regelmäßige Wirbelablösung. In der Umgebung der kritischen Reynoldsschen Zahl wird die plötzliche Verringerung des Widerstandskoeffizienten ebenfalls von der Kavitationszahl bestimmt, und bei gegebener Kavitationszahl ist der Wert des Widerstandskoeffizienten von der Reynoldsschen Zahl unabhängig.

DÉTERMINATION DE LA FRÉQUENCE

DES TOURBILLONS SE DÉCOLLANT D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE

J. VARGA et GY. SEBESTYÉN

RÉSUMÉ

L'article présente les résultats d'essais effectués aux valeurs supérieures au nombre Reynolds critique, pour déterminer la fréquence de tourbillons se décollant d'un cylindre circulaire placé dans un courant. La détermination de ces tourbillons a été faite par des capteurs de pression à membrane, des stroboscopes, des capteurs de vibrations et des jauges tépic collés sur la paroi de la section de mesure. Pour la relation entre le nombre Strouhal et le nombre de cavitation, les essais ont donné la formule $S = C\sqrt{\sigma}$, dont la validité peut être également appuyée par des considérations théoriques. Les relations entre la fréquence, la pression et la vitesse sont présentées par les auteurs sous forme de diagramme, dont la réalité a été confirmée par les résultats de mesures. Les auteurs constatent qu'en cas de courant de cavitation, au voisinage et au-dessus du nombre Reynolds critique, le nombre Strouhal

est fonction du nombre de cavitation et ce n'est pas le nombre Reynolds qui en détermine la valeur. Dans le domaine du nombre Reynolds critique, on a aussi observé un décollement régulier de tourbillons. Au voisinage du nombre Reynolds critique, la brusque diminution du coefficient de résistance se trouve également déterminée par le nombre de cavitation, et en cas d'un nombre de cavitation donné, la valeur du coefficient de résistance est indépendante du nombre Reynolds.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ ВИХРЕЙ, ОТДЕЛЯЮЩИХСЯ ОТ ЦИЛИНДРОВ

Й. ВАРГА и Д. ШЕБЕШТЬЕН

РЕЗЮМЕ

В статье демонстрируются результаты опытов, проведенных в целях определения частоты вихрей, отделяющихся от помещенного в поток воды цилиндра, при значениях выше критического числа Рейнольдса. Определение вихрей производилось при помощи чувствительных к давлению мембран, стробоскопа, виброизмеряющей головки и тензометрической марки, наклеенной на стенку измерительного пространства. Опытами установлена зависимость между числом Струхала и кавитационным числом $S = C \sqrt{\sigma}$, которая зависимость может быть подтверждена также теоретическими соображениями. Авторы демонстрируют зависимости частоты, давления и скорости на диаграмме, которую подтверждают также результаты измерений. Установлено, что вблизи критического числа Рейнольдса и выше его, при кавитационном движении потока, число Струхала является функцией кавитационного числа и его величина определяется не числом Рейнольдса. В области критического числа Рейнольдса также наблюдалось правильное отделение вихря. Вблизи критического числа Рейнольдса внезапное падение коэффициента сопротивления определяется также кавитационным числом, и при данном значении кавитационного числа значение коэффициента сопротивления является независимым от числа Рейнольдса.

BERECHNUNG DER ZAHNWURZELDICKE AN DER DURCH TROCHOIDEN BEGRENZTEN ZAHNWURZEL

F. HORVÁTH

ZENTRAL-FORSCHUNGLABORATORIUM FÜR OPTIK UND FEINMECHANIK, BUDAPEST

[Eingegangen am 9. März 1964]

In dieser Arbeit wird die Berechnung der nur mit Hilfe der Trochoidengeometrie bestimmbarer Zahndicke besprochen. Es werden die Bedingungen festgelegt, die für den Fall der ausschließlich durch die Trochoidengeometrie bestimmbarer Zahnwurzelstärke bestehen bzw. erfüllt werden müssen. Verfasser führt die Berechnung der mit Hilfe der Trochoidengeometrie bestimmbarer Zahnwurzelstärke bis zu einer Verallgemeinerung durch, und so wird es möglich, die von Trochoiden begrenzte Zahnwurzelstärke an beliebiger Stelle mit Hilfe einer leicht aufstellbaren Explizitform aus den Original-Angaben der Verzahnung (Modul, Zähnezahl, Profilverschiebungsfaktor) zu berechnen. (Der Werkzeug-Kopfspliefaktor und der Bezugsprofilwinkel des Zahnstangenwerkzeuges sind in gegebenem Fall technologische Konstanten.) Zum Schluß wird ein Zahlenbeispiel zur Berechnung der von Trochoiden begrenzten Zahnwurzelstärke angeführt.

I. Einleitung

Bei Betrachtung eines Zahnprofils, welches im Abwälzverfahren mittels eines zahnstangenprofilierten Werkzeuges erzeugt ist, muß festgestellt werden, daß sich dieses Profil aus zwei verschiedenartigen Linienstrecken zusammensetzen läßt: die eine Linienstrecke ist die für das eigentliche Getriebe entscheidend wichtige Evolvente, die andere ist eine Trochoide an der Zahnwurzel.

Zur Bestimmung der durch die Evolventenkurvenstrecken begrenzten Zahndicke verwendet man die bekannte Rechenmethode der sogenannten Evolventengeometrie.

Wenn man aber die durch die Wurzelstelle der — im Betriebszustand — auftretenden größtmöglichen Spannung bestimmte Zahnwurzelstärke bestimmen soll, so kann die Lösung allgemein nur mit Hilfe der Trochoidengeometrie gelöst werden.

Als eine der wichtigsten Festigkeitskennzahlen der Zahnraddimensionierung soll vor allem die Zahnwurzelstärke, d. h. die Stelle der höchsten Zahnwurzelspannung bzw. der kritische Zahnwurzelquerschnitt bestimmt werden; nach der Hoferschen Auffassung wird der durch die Sehne bestimmte Querschnitt als kritisch betrachtet, die dem Berührungspunkt der unter 30° zur Zahnmittellinie tangential zur Trochoidenkurve der Zahnwurzel gezogenen Geraden angehört. In Hofer's Arbeit [1] sind vergrößerte graphische Dar-

- m Modul;
 x Profilverschiebungsfaktor;
 z Zähnezahl;
 r_a Grundkreishalbmesser;
 $r_0 = m \cdot z/2$ Teilkreishalbmesser;
 $c_0 = mc'_0$, wobei c'_0 Werkzeug-Kopfspielfaktor, uzw. $c'_0 = 0,25$;
 α_0 Herstellengriffswinkel (Bezugsprofilwinkel des Zahnstangenwerkzeuges), uzw. $\alpha_0 = 20^\circ$;
 $f_s = m(1 + c'_0 - x)$ Abstand der Kopflinie des Werkzeugs von der Teilgeraden;
 $r_l = r_0 - f_s$ Fußkreishalbmesser;
 r_l Halbmesser an dem zur größten Wurzelspannung gehörenden Profilpunkt;
 s_l Bogenlänge an dem Kreis r_l , begrenzt durch Zahnwurzelkurven;
 r_H Halbmesser des Grenzkreises, bestimmt durch den Grenzpunkt an der Zahnwurzel zwischen Evolvente und Trochoide.

Wie bereits erwähnt, wird nach den von JACOBSON durchgeführten Untersuchungen entlang der Wurzelstrecke die Stelle der größten Wurzelspannung mit dem Halbmesser

$$r_l = r_l + \frac{1}{6} m$$

bestimmt. Laut Bild 1 gilt für den Fall $m = 1$ mm:

$$r_l = r_l + \frac{1}{6} = r_0 - f_s + \frac{1}{6} = \frac{z}{2} - (1 + c'_0) + x + \frac{1}{6}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 r_H &= \sqrt{(\overline{CN} - \overline{CH})^2 + r_a^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{z}{2} \sin \alpha_0 - \frac{1 + c'_0 - x}{\sin \alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} \cos \alpha_0\right)^2}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Aus Bild 1 und den oben aufgestellten Gleichungen geht hervor, daß mit den Bedingungen (1) und (2) bei gleichzeitigem Bestehen von

$$r_l < r_H \quad (3)$$

der zum Halbmesser r_l zugeordnete kritische Wurzelquerschnitt nur mit Hilfe der Trochoidengeometrie bestimmt werden kann.

Wenn

$$x \leq 0 \quad \text{und} \quad f_s = r_0 - r_l > \overline{CN} \sin \alpha_0 = r_0 \sin \alpha_0, \quad (4)$$

so wird die Evolventenstrecke von der Trochoidenkurve unterschritten. Punkt H wird also nicht als Schnittpunkt der Werkzeugkopflinie und der Eingriffsstrecke, sondern als Schnittpunkt der Evolvente und der Trochoide bestimmt. So kann man also für unseren Fall $r_H > r_a$ anschreiben, dagegen $r_l < r_a \cos \alpha_0$ ist.

Aus diesen Ungleichungen kann die Ungleichung

$$r_t < r_H$$

abgeleitet werden; mit anderen Worten besteht die Ungleichung (3) auch bei Erfüllung der Bedingung (4). In einem solchen Fall aber kann man natürlich den Wert r_H in der erwähnten Weise auf Grund (2) nicht mehr errechnen. So ist zur Bestimmung des kritischen Querschnittes auch diesmal allein die Trochoidengeometrie anwendbar.

Wir haben uns bei der Bestimmung der Trochoidengeometrie auf den Fall eines scharfeckigen Abwälzwerkzeuges beschränkt. Es ist einleuchtend, daß der von Trochoiden begrenzte Wurzelquerschnitt an einem, mit Hilfe eines abgerundeten, ohne scharfe Ecke geformten Schneidwerkzeuges erzeugten Zahne an jeder beliebigen Stelle größer ist als bei Anwendung eines eckigen Werkzeuges. Es ist aber vorteilhaft, auch bei der Dimensionierung eines mit abgerundetem Werkzeugprofil erzeugten Zahnprofils, die Festigkeitsberechnung auf das eckige Werkzeug zu beziehen, da dies einfach die Sicherheit erhöht. Nun aber ist es oft üblich, die mittels eines abgerundeten Werkzeuges erzeugten Zähne zu härten und mit scharfeckigen Schleifscheiben nachzuschleifen. Also ist die Festigkeitskontrollrechnung solcher Zahnprofile auch nur mittels der Trochoidengeometrie durchführbar.

Wir wollen jetzt an die Berechnung des durch die Trochoidengeometrie bestimmten Zahnwurzelquerschnittes herangehen. Die Untersuchung soll verallgemeinert werden, um den von Trochoiden begrenzten Zahnwurzelquerschnitt für jeden beliebigen Halbmesser errechnen zu können.

II. Entstehung der Trochoide während des Abwälzverfahrens

Wenn wir die relative Bewegung des verzahnten Zahnrades und des Zahnstangenwerkzeuges im Bild 2 verfolgen, so sehen wir, daß die Teilgeradenstrecke \overline{QR} des Abwälzwerkzeuges an dem Umfang des Teilkreises mit dem Halbmesser r_0 (laut Bild in positiver Drehrichtung) derart abwälzt, daß der Berührungspunkt der Teilgeraden R in die Lage R' , und der Punkt Q in den Berührungspunkt Q' gelangt. Gleichzeitig wird der Schnittpunkt P der unter dem Neigungswinkel α_0 angelegten Flankengeraden mit der Teilgeraden in den Punkt P' verlegt. Nun sollen die Koordinaten des in Bewegung befindlichen Punktes P' berechnet werden.

Nach Bild 2 sind diese Koordinaten auf Grund des durch

$$X_{P'} = \overline{Q'A} - \overline{OB}, \quad (5)$$

$$Y_{P'} = \overline{BQ'} + \overline{AP'} \quad (6)$$

ausgedrückten geometrischen Zusammenhanges zu berechnen. Mit Rücksicht auf die Abwälzbewegung ist

$$\overline{QR} = \overline{Q'R'} = \overline{Q'R} = r_0 \vartheta, \tag{7}$$

mit ϑ als Verdrehungswinkel.

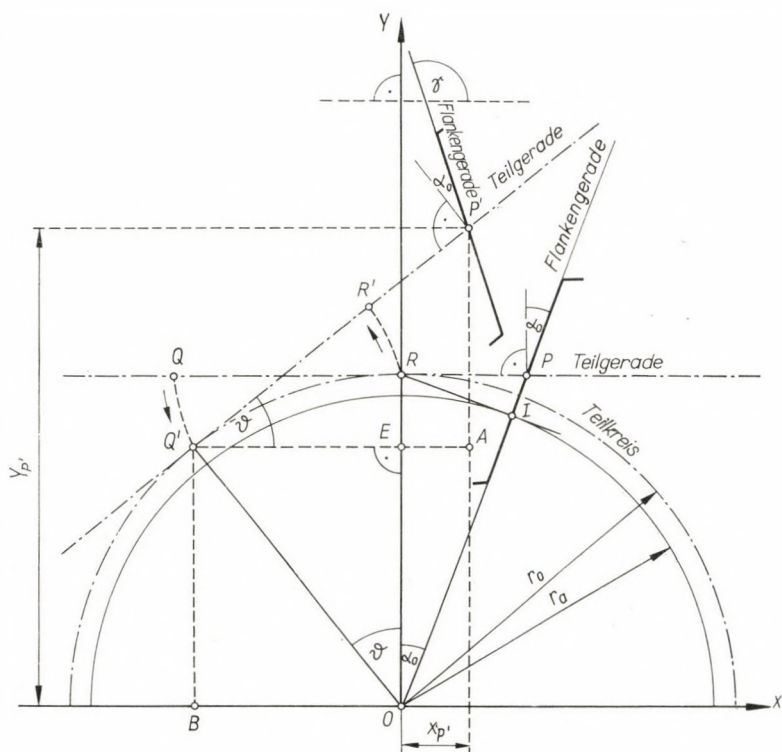


Bild 2. Abwälzbewegung des zahnstangenprofilierten Werkzeuges

Strecke \overline{RP} ist in der Ausgangsposition:

$$\overline{RP} = \overline{R'P'} = r_0 \tan \alpha_0. \tag{8}$$

Mit Rücksicht auf $\overline{Q'P'} = \overline{Q'R'} + \overline{R'P'}$ läßt sich aus (7) und (8) die Formel

$$\overline{Q'P'} = r_0(\tan \alpha_0 + \vartheta) \tag{9}$$

anschreiben.

Aus den Formeln (9), (5) und (6) erhält man:

$$\overline{Q'A} = \overline{Q'P'} \cos \vartheta = r_0(\tan \alpha_0 + \vartheta) \cos \vartheta,$$

$$\overline{OB} = r_0 \sin \vartheta,$$

$$\overline{BQ'} = r_0 \cos \vartheta,$$

$$\overline{AP'} = \overline{Q'P'} \sin \vartheta = r_0(\tan \alpha_0 + \vartheta) \sin \vartheta,$$

wobei nach Einsetzung dieser Werte in (5) und (6) gilt:

$$X_{P'} = r_0[(\tan \alpha_0 + \vartheta) \cos \vartheta - \sin \vartheta], \quad (10)$$

$$Y_{P'} = r_0[(\tan \alpha_0 + \vartheta) \sin \vartheta + \cos \vartheta]. \quad (11)$$

Nun verfolgen wir die im Bild 3 dargestellte Lage. Hier ist $\overline{OI} = r_a$ der Halbmesser des Grundkreises, wobei I zugleich den Fußpunkt einer, vom Punkte R für (unter dem Winkel α_0 gelegte) Gerade \overline{OP} senkrecht gezogenen Geraden bedeutet. Dieser Punkt I als Punkt des Grundkreises ist Grenzpunkt des Unterschneidens, falls sich die Flankengerade hier endet.

Ein Abwälzen der Teilgeraden an dem Teilkreis (mit dem Halbmesser r_0), usw. laut Bild 3 in negativer Drehrichtung, so wird die Flankengerade mit dem Endpunkt I zugleich die vom Grundkreispunkt I (des Grundkreises r_a) ausgehende Evolvente hüllen (Satz von DISTELI [3]).

Nun wählen wir als Endpunkt der Flankengeraden anstatt I , den Punkt U , wobei $\overline{OU} < \overline{OI}$, d. h. $\overline{OU} < r_a$. Während des Abwälzens der Teilgeraden an dem Teilkreis (auf dem Bild in positiver Drehrichtung) wird unterhalb des erzeugten Evolventenprofils bzw. unterhalb der Geraden \overline{OI} von dem Endpunkt U' der sich bewegenden Flankengeraden $P'U'$ eine Unterschnittskurve beschrieben.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß die durch den sich bewegenden Punkt I' beschriebene Kurve und die andere, durch den Punkt U' beschriebene derselben Kurvenart angehören. Der einzige Unterschied besteht darin, daß bei einer Flankengeraden mit dem Endpunkt in I das Evolventen-Zahnprofil von der durch den Punkt I beschriebenen Kurve nicht unterschritten wird. Diese (von I' bzw. von U' beschriebene) Kurvenart ist die sogenannte *Trochoide*.

Aus dem angeführten Zusammenhang geht es klar hervor, daß eine unterscheidende Trochoide nur im Falle entsteht, wenn für irgendeinen U' -Punkt der Kurve die Ungleichheit

$$\frac{Y_{U'}}{X_{U'}} < \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right)$$

erfüllt wird. Ohne Erfüllung dieser Bedingung kann ein Unterschnitt nicht entstehen.

Wir wollen nun bei Betrachtung von Bild 3 und im Anschluß an eine Zahnwurzeldicke, die nur mit Hilfe der Trochoidengeometrie bestimmt werden kann, die vom Punkte U' beschriebene Kurve für den allgemeinen Bewegungsfall untersuchen.

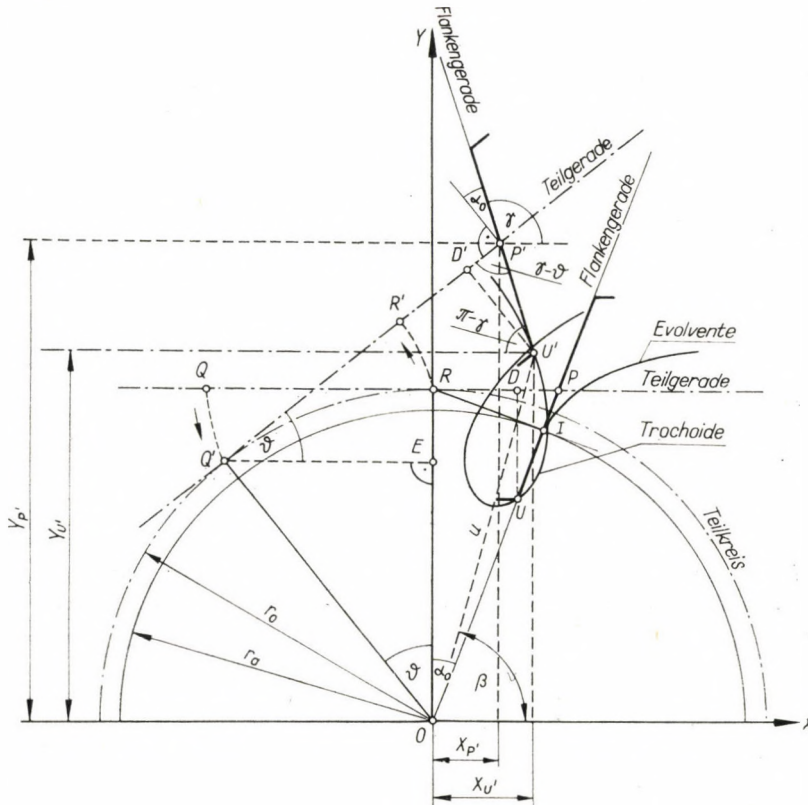


Bild 3. Entstehung der Trochoide während des Abwälzens

Laut Bild 3 sind die Koordinaten des Punktes U'

$$X_{U'} = X_{P'} + \overline{U'P'} \cos(\pi - \gamma), \tag{12}$$

$$Y_{U'} = Y_{P'} - \overline{U'P'} \sin(\pi - \gamma); \tag{13}$$

wo γ den Winkel bedeutet, den die verdrehte Flankengerade mit der waagerechten Richtung einschließt, d. h.

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \vartheta - \alpha_0. \tag{14}$$

In den Gleichungen (12) und (13) ist

$$\overline{U'P'} = \overline{UP} = \frac{\overline{UD}}{\cos \alpha_0}. \quad (15)$$

Für den allgemeinen Fall muß man bei Berechnung der Werkzeugkopfhöhe $f_s = \overline{UD}$ selbstredend dem Profilverschiebungsfaktor x auch Rechnung tragen.

Ist nämlich $x = 0$, so gilt

$$f_s = m + c_0 = m + mc'_0 = m(1 + c'_0);$$

wenn aber $x < 0$, so wird die Werkzeugkopfhöhe (gegenüber den Fall $x = 0$) mit der effektiven Profilverschiebung, d. h. mit mx größer. Umgekehrt, bei $x > 0$, wird diese Höhe um denselben Betrag kleiner. Demzufolge gilt:

$$f_s = \overline{UD} = m(1 + c'_0 - x). \quad (16)$$

Durch Einsetzen in (15) erhält man:

$$\overline{U'P'} = \frac{m(1 + c'_0 - x)}{\cos \alpha_0}. \quad (17)$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (10), (11) und (14), lassen sich die früheren Gleichungen (12) und (13) für die Koordinaten eines beliebigen Punktes U' der Trochoide folgenderweise beschreiben:

$$X_{U'} = r_0[(\tan \alpha_0 + \vartheta) \cos \vartheta - \sin \vartheta] + \frac{m(1 + c'_0 - x)}{\cos \alpha_0} \sin(\vartheta - \alpha_0), \quad (18)$$

$$Y_{U'} = r_0[(\tan \alpha_0 + \vartheta) \sin \vartheta + \cos \vartheta] - \frac{m(1 + c'_0 - x)}{\cos \alpha_0} \cos(\vartheta - \alpha_0). \quad (19)$$

III. Berechnung der Zahnwurzeldicke

Die Aufgabe ist offenbar gelöst, wenn die von Trochoiden begrenzte Bogenlänge s am Kreisumfang zu einem beliebig gewählten Kreishalbmesser u bekannt ist, da aus der Größe s auch die dazugehörige Sehnenlänge, d. h. die Zahnwurzeldicke einfach errechnet werden kann.

Wir wollen die entstandene Trochoide untersuchen. Im Bild 4 sind die beiden Kurven, nämlich die Zahnprofilevolvente und die Zahnwurzel-

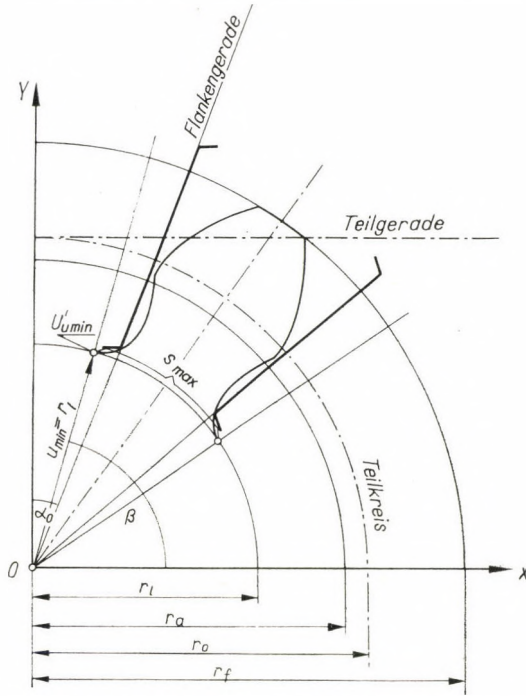


Bild 4. Durch Abwälzen erzeugtes Evolventen-Zahnprofil mit anschließender Trochoide als Zahnwurzelprofil

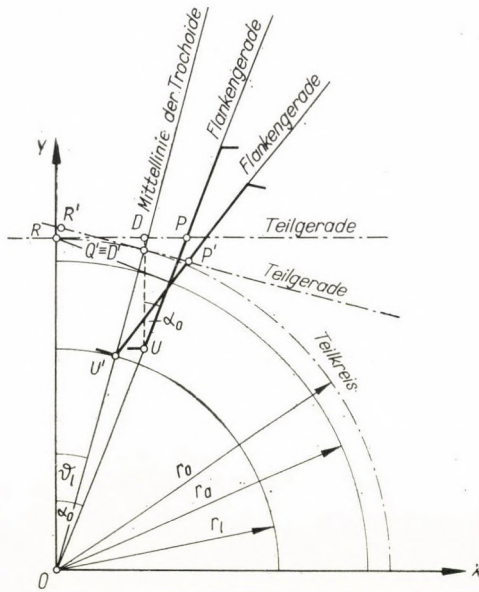


Bild 5. Zur Geometrie der Zahnwurzeldicke

trochoide dargestellt. Selbstredend, falls $u = r_l$, wo r_l den Fußkreishalbmesser bedeutet, so befindet sich der Maximalwert der Bogenlänge s genau an diesem Kreis.

Der Fußkreis ist eigentlich ein solcher Kreis von dem minimalen Halbmesser u_{\min} , welcher sich zur Trochoide (zu den Trochoiden) tangential anschließt.

Wie man dies aus Bild 5 klar sehen kann, ist der radiale Abstand zwischen dem Teilkreis und dem Punkt U der Schneidkantenprojektion (Flanken-gerade) des in Grundposition befindlichen Abwälzwerkzeuges am größten, wenn wir die Teilgerade an dem Teilkreis derart abwälzen lassen, daß der Punkt D an der Teilgeraden mit dem Berührungspunkt D' des Teilkreises an der Teilgeraden zusammenfällt; in diesem Fall gelangt Punkt U in den Punkt U' am Fußkreis. Im Sinne der Gleichung (16) ist:

$$f_s = \overline{UD} = m(1 + c'_0 - x),$$

und Abstand \overline{RD} an der Teilgeraden:

$$\overline{RD} = \overline{RP} - \overline{DP},$$

wo

$$\overline{RP} = r_0 \tan \alpha_0$$

und

$$\overline{DP} = \overline{UD} \tan \alpha_0 = f_s \tan \alpha_0,$$

d. h.

$$\overline{RD} = (r_0 - f_s) \tan \alpha_0. \quad (20)$$

Da infolge der Abwälzbewegung

$$\overline{RD} = \widehat{RD'} = r_0 \vartheta_l,$$

so nimmt die Gleichung (20) die Form an:

$$r_0 \vartheta_l = (r_0 - f_s) \tan \alpha_0. \quad (21)$$

Zum Zwecke unserer weiteren Überlegungen ist es ratsam den Teilkreishalbmesser r_0 mit der Einheit gleichzustellen. Wir haben also mit $r_{0(1)} = 1$ für die Kopfhöhe:

$$f_{s(1)} = \frac{f_s}{r_0}, \quad (22)$$

bzw. nach Einsetzen der Werte:

$$f_s = m(1 + c'_0 - x)$$

Trochoide an einem Kreis mit dem Halbmesser u liegt:

$$\beta + \omega = \frac{\pi}{2} + (\eta - \vartheta_l),$$

und daher ist:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - (\omega - \eta + \vartheta_l), \quad (26)$$

wo also ω den Winkel zwischen den Geraden $u = \overline{OU}$ und $r_0 = \overline{OQ'}$, η den Abwälzwinkel zum Bogen $\overline{D'Q'}$ und ϑ_l den mit (24) bestimmten Winkel bedeutet. Infolge der Abwälzbewegung der Teilgeraden an dem Teilkreis gilt:

$$\overline{Q'D} = \overline{Q'D'} = r_0 \eta.$$

Zur Errechnung der Winkel ω und η [in Gl. (26)] wollen wir die geometrische Figur ($OU D Q'$) näher analysieren (Bild 7).

Für den Winkel ε zwischen der Geraden $\overline{UD} = f_s$ und $\overline{UQ'}$ gilt:

$$\tan \varepsilon = \frac{r_0 \eta}{f_s},$$

und mit Gl. (22) erhalten wir:

$$\eta = f_{s(1)} \tan \varepsilon. \quad (27)$$

Infolge der Abwälzbewegung gilt laut Bild 7

$$r_0 \eta = u \sin \omega$$

und unter Zuhilfenahme des auf den Einheitshalbmesser des Teilkreises reduzierten Kreishalbmessers

$$u_{(1)} = \frac{u}{r_0} = \frac{2U}{mz}$$

gilt

$$\omega = \arcsin \frac{\eta}{u_{(1)}}. \quad (28)$$

Unter Einbeziehung der Werte f_s (als Werkzeugkopfhöhe) und die Abwälzstrecke $r_0 \eta$ gilt aus dem Dreieck UTO für den Halbmesser u

$$u^2 = r_0^2 \eta^2 + (r_0 - f_s)^2.$$

Nach Durchführung der Operationen und auf den Einheitssteilkreis reduziert haben wir:

$$u_{(1)}^2 = \eta^2 + f_{s(1)}^2 - 2f_{s(1)} + 1.$$

Nach dem Einsetzen der Formel (27) für η erhalten wir:

$$u_{(1)}^2 = f_{s(1)}^2 (1 + \tan^2 \varepsilon) - 2f_{s(1)} + 1,$$

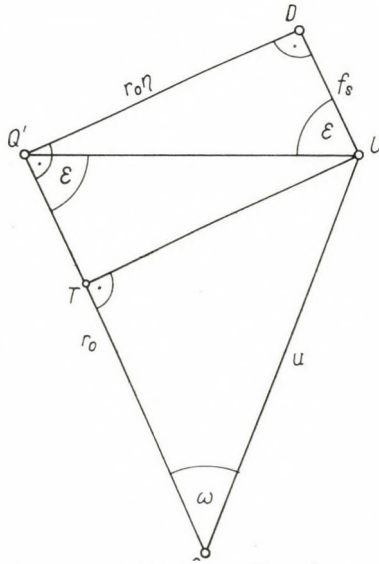


Bild 7. Teilkonstruktion zu Bild 6, zur Berechnung der Zahnwurzeldicke

und daher

$$\tan \varepsilon = \frac{\sqrt{u_{(1)}^2 - f_{s(1)}^2 + 2f_{s(1)} - 1}}{f_{s(1)}} = \frac{\sqrt{u_{(1)}^2 - (f_{s(1)} - 1)^2}}{f_{s(1)}}.$$

Nach Einsetzung des obigen Ausdruckes für $\tan \varepsilon$ in die Gleichung (27) ist

$$\eta = \sqrt{u_{(1)}^2 - (f_{s(1)} - 1)^2}, \quad (29)$$

und nach Einsetzen in (28) ist

$$\omega = \arcsin \frac{\sqrt{u_{(1)}^2 - (f_{s(1)} - 1)^2}}{u_{(1)}}. \quad (30)$$

Mit Hilfe dieser Formeln können wir den Winkel β aus den bekannten Zahnradparametern in Bogenmaß errechnen, wenn wir nämlich die Ausdrücke aus

(24), (29) und (30) in die Gl. (26) einsetzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \beta = \frac{\pi}{2} - \left[\operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{u_{(1)}^2 - (f_{s(1)} - 1)^2}}{u_{(1)}} - \sqrt{u_{(1)}^2 - (f_{s(1)} - 1)^2} + \right. \\ \left. + (1 - f_{s(1)}) \tan \alpha_0 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \beta = \frac{\pi}{2} - \left\{ \operatorname{arc} \sin \sqrt{1 - \left(\frac{mz}{2u} \right)^2 \left[\frac{2(1 + c'_0 - x)}{z} - 1 \right]^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{\left(\frac{2u}{mz} \right)^2 - \left[\frac{2(1 + c'_0 - x)}{z} - 1 \right]^2} + \left[1 - \frac{2(1 + c'_0 - x)}{z} \right] \tan \alpha_0 \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Mit Hilfe der Beziehungen im Bild 8 können wir nachweisen, daß mit dem erhaltenen Bogenwerte β die am Kreisumfang mit dem Halbmesser u zwischen den Trochoiden befindliche Bogenlänge s bzw. die Zahnwurzeldicke als Sehne einfach bestimmt werden können.

Die Bogenlänge s_0 am Teilkreisumfang ist bekannterweise:

$$s_0 = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_0 \right), \quad (33)$$

und der dazu gehörende Winkel ist:

$$2 \operatorname{arc} \psi_0 = \frac{s_0}{r_0}. \quad (34)$$

Nun können wir den Winkel δ aus Bild 8 einfach bestimmen:

$$\operatorname{arc} \delta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \alpha_0 - \operatorname{arc} \beta, \quad (35)$$

da dieser Winkel von der Geraden \overline{OI} und $\overline{OU'}$ gebildet ist, wobei I den Anfangspunkt der Zahnprofilevolvente und U' den Punkt der Trochoide bezeichnet.

Für den Winkel Φ , der zum Bogen $\widehat{II'}$ am Kreisumfang r_a gehört, ergibt sich die Beziehung:

$$\operatorname{arc} \Phi = 2 \operatorname{arc} \psi_0 + 2 \operatorname{inv} \alpha_0. \quad (36)$$

Demzufolge kann für den Winkel Θ

$$\operatorname{arc} \Theta = \operatorname{arc} \Phi - 2 \operatorname{arc} \delta \quad (37)$$

geschrieben werden, da dieser Winkel zu dem Kreisbogen $s = \widehat{U'U''}$ gehört, gemessen am Kreisumfang mit dem Halbmesser u zwischen den Trochoidpunkten U', U'' . Demzufolge ist das Bogenstück s an einem Kreis mit einem beliebigen Halbmesser u :

$$s = u \text{ arc } \Theta . \tag{38}$$

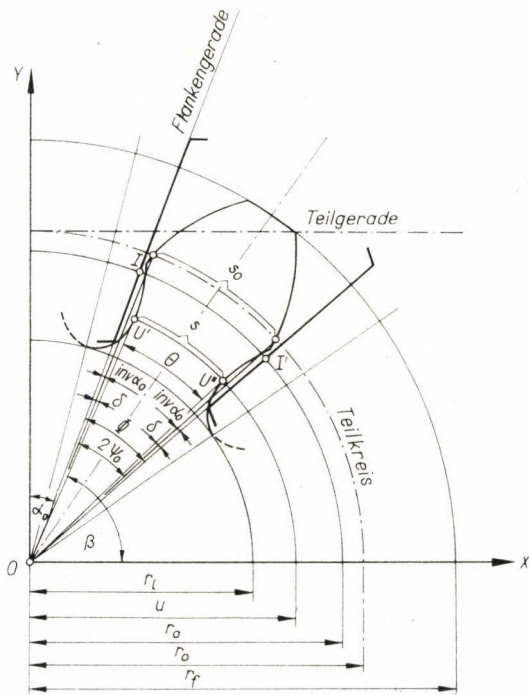


Bild 8. Zur Berechnung des von Trochoiden begrenzten Zahnwurzelbogens

Nach Einsetzen aller oben erhaltenen Ausdrücke erhalten wir

$$s = 2u \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_0}{z} - \text{arc sin} \sqrt{1 - \left(\frac{mz}{2u}\right)^2 \left[\frac{2(1 + c'_0 - x)}{z} - 1 \right]^2} + \right. \tag{39}$$

$$\left. + \sqrt{\left(\frac{2u}{mz}\right)^2 - \left[\frac{2(1 + c'_0 - x)}{z} - 1 \right]^2} - \left[1 - \frac{2(1 + c'_0 - x)}{z} \right] \tan \alpha_0 + \right.$$

$$\left. + \text{inv } \alpha_0 + \text{arc } \alpha_0 \right\} .$$

In einem gegebenen Verzahnungssystem sind die Werte

$$\text{inv } \alpha_0 + \text{arc } \alpha_0 = k_1 ,$$

$$\tan \alpha_0 = k_2$$

konstant und in den übrigen Gliedern der Gl. (39) haben wir als neue Angabe zur Bestimmung der Trochoide nur den Halbmesser u , da alle anderen Größen als Zahnradparameter gegeben sind (Zähnezahl, Modul, Profilverchiebungsfaktor).

IV. Zahlenbeispiel

Es seien die Angaben einer Verzahnungs-Konstruktion:

$$z = 17; \quad m = 10 \text{ mm}; \quad r_0 = m \frac{z}{2} = 85 \text{ mm};$$

$$x = 0,4716; \quad f_s = m(1 + c'_0 - x) = 7,7838 \text{ mm};$$

$$r_t = r_0 - f_s = 77,2162 \text{ mm}.$$

Es soll die Bogenlänge zwischen den Profilkurven an der Stelle der größten Zahnwurzelspannung berechnet werden. Nach JACOBSON ist diese Stelle, laut (1) und für $m = 10$ mm, mit dem Kreishalbmesser

$$u_t = r_t = r_l + \frac{1}{6} m = 78,883 \text{ mm}$$

bestimmt. Ferner mit $f_s < r_0 \sin^2 \alpha_0$ kommt der Fall (4) nicht in Betracht. Wir finden laut (2), im Falle $m = 10$ mm, für

$$r_H = m \sqrt{\left(\frac{z}{2} \sin \alpha_0 - \frac{1 + c'_0 - x}{\sin \alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} \cos \alpha_0\right)^2} = 80,123 \text{ mm}$$

und offenbar ist die Bedingung $r_t < r_H$ erfüllt, d. h. die Wurzelstärke läßt sich nur nach den Sätzen der Trochoidengeometrie errechnen. Hierzu soll nun die Gleichung (39) herangezogen werden, d. h.:

$$s_t = 157,77 \left\{ \frac{1,5708 + 0,9432 \cdot 0,36397}{17} - \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{170}{157,77}\right)^2 \left[\frac{1,5568}{17} - 1\right]^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\left(\frac{157,77}{170}\right)^2 - \left[\frac{1,5568}{17} - 1\right]^2} - \left[1 - \frac{1,5568}{17}\right] 0,36397 + 0,014904 + 0,349066 \right\}.$$

Das Endergebnis ist:

$$s_t = 20,412 \text{ mm},$$

und dieser Wert stimmt mit der an der geometrisch konstruierten Profilzeichnung gemessenen Länge überein (siehe Bild 1).

SCHRIFTTUM

1. HOFER, H.: *Automobil Technische Zeitschrift* (1947), 2. März.
2. JACOBSON, M. A.: Bending Stresses in Spur Gear Teeth. Proposed New Design Factors Based on a Photo-Elastic Investigation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* **169** (1955).
JACOBSON, M. A.: Diskussionsbeitrag zum Aufsatz von KELLEY, B. W. — PEDERSEN, R.: Zahnfußfestigkeit bei neuzeitlichen Getriebekonstruktionen. Getriebe-Kupplungen, Antriebsselemente. Vieweg, Braunschweig 1957.
3. DISTEL, M.: Über einige Sätze der kinematischen Geometrie, welche der Verzahnungslehre zylindrischer und konischer Räder zugrunde liegen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **56** (1908), 233.

CALCULATION OF TOOTH-THICKNESS
AT THE ROOT PORTION BETWEEN TROCHOIDS

F. HORVÁTH

SUMMARY

This paper deals with the calculation of tooth thickness on the basis of relations that can only be determined by geometrical analysis of trochoids. Author establishes the general conditions and finds the formulas suitable for the calculation of tooth thickness at any chosen point or radius respectively along the trochoidal root curve, by finally deducing the real explicit form. In other words, the value wanted can be computed if only the main parameters (module, number of teeth, addendum coefficient) are given. Tooth clearance and pressure angle are considered as technological parameters. Finally, a numerical example is given.

CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DES PIEDS DE DENT LIMITÉS PAR DES TROCHOÏDES

F. HORVÁTH

RÉSUMÉ

L'étude traite du calcul de la surface de base de la dent déterminable par la seule géométrie des trochoïdes. L'auteur précise aussi les conditions dans lesquelles la surface de base critique ne peut être déterminée que par ce moyen. Au cours du calcul de la surface de base déterminable par la géométrie des trochoïdes, les examens sont généralisés par l'auteur, de sorte que la surface de base limitée par des trochoïdes peut se calculer en n'importe quelle position. L'auteur examine la courbe trochoïde produite au cours de la génération et reçoit, au cours du calcul de la surface de base limitée par des trochoïdes, une expression explicite facile à calculer. Celle-ci permet de déterminer la surface de base de la dent en connaissance du module, du nombre de dents et du coefficient de déport (le facteur de vide et l'angle de flanc de l'outil générateur sont, dans le cas donné, des constantes technologiques). L'étude se termine par un exemple montrant le calcul de l'épaisseur du pied de dent limité par des trochoïdes.

РАСЧЕТ ТОЛЩИНЫ ЗУБЬЕВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ТРОХОИДАМИ

Ф. ХОРВАТ

РЕЗЮМЕ

Работа занимается только расчетом сечения основания зубьев, определенных трохоидной геометрией. Приведены условия, при удовлетворении которых критическое сечение основания зуба может быть определено только при помощи трохоидной геометрии. Автор в процессе расчета сечения основания зуба, определяемого при помощи трохоидной геометрии, проводил исследования, которые он обобщил, таким образом сечение основания зуба, ограниченного трохоидами, может быть вычислено в произвольном месте. В статье исследуются трохоидные кривые, образующиеся при обработке, и в процессе расчетов толщины основания зубьев, ограниченных трохоидами, в конечном результате получается легко вычисляемое явное выражение. В этом случае — если известны модуль, число зубьев и коэффициент деления профиля — можно вычислить сечение основания зубьев, соответствующее произвольно заданному радиусу. В работе, наконец, приведены примеры расчетов толщины основания зубьев, ограниченных трохоидами.

АНАЛИЗ СПЛАВА РС 49 РАСТВОРЕННЫМ СПОСОБОМ СПЕКТРАЛЬНОЙ РЕНТГЕНОФЛЮОРЕСЦЕНЦИИ

Ш. СЕЙМАН

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ЗАВОДСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО КОМБИНАТА ЧЕПЕЛЬ

[Поступило 8-го апреля 1964 г.]

В производственной практике металлы и сплавы анализируются рентгенофлюоресцентным способом в металлическом состоянии. Пробу отливают в кокили, испытываемую поверхность обрабатывают до получения плоскости а затем шлифуют при помощи шкурки соответствующей тонины.

Отбор, подготовка и хранение металлической пробы просты, проба во время испытаний не расходуется и не преобразуется. Анализ происходит быстро и его можно повторить.

Во время анализа измеряют характерную интенсивность излучения определяемого элемента пробы и на эталонной диаграмме отсчитывают его процентное содержание.

Продолжительность времени анализа зависит от анализируемого элемента и процентного содержания. Измерение вместе с оценкой занимает 2—3 минуты.

Эталонная диаграмма строится на основе данных измерений ряда сплавов известного состава.

Интенсивность в литературе обычно дают в *имп/сек*. Значение величины *имп/сек* кроме содержания легирующего вещества зависит также от многих факторов: температуры, атмосферного давления, колебания напряжения, износа рентгеновской трубки, неточной установки угла и т. д.

На практике величину интенсивности оказывается лучше давать как частное интенсивности $K\alpha$ применяемого для сравнения эталона и одних и тех же элементов пробы, так как это частное не чувствительно к упомянутым выше факторам.

Если построить диаграмму интенсивности — концентрации некоторой двухкомпонентной системы, тогда от места, занимаемого этими двумя элементами в периодической системе, получатся вогнутые или выгнутые кривые (рис. 1).

Линейную интерполяцию между $0 \div 100\%$ можно применять только в тех случаях, в которых диаграмму можно считать еще прямой. На практике же используют только небольшой участок диаграммы интенсивности — концентрации.

В сплаве *РС 49* изменения происходят в пределах $Ni = 41,5 \div 43,5\%$, $Mn = 0,3 \div 1,0\%$ (Cu остальное).

Диаграмма интенсивность — концентрация в пределах, указанных выше, может быть принята в качестве прямой, следовательно можно применять линейную интерполяцию.

Построена эталонная диаграмма Cu и Ni сплава *РС 49* (рис. 2 и 3), точки диаграммы не размещаются на одной прямой. Химический анализ и измерение интенсивности были повторены несколько раз, а результат остался одним и тем же.

На рис. 2 и 3 видно, что три точки, обозначенные через \bar{X} , сильно отклоняются от прямой. (Точки, обозначенные через \bar{X} , дают значения Cu — Ni трех различных проб.) Во время микроскопического исследования установлено, что пробы не имели трещин, газовых раковин и ликваций. При исследовании причин имевших место отклонений был применен растворный способ рентгенофлуоресцентного спектрального анализа.

А. Ганс—И. Гонбарт [3] говорят, что данный способ чувствителен к изменению концентрации кислоты исследуемого раствора так как различные кислоты имеют различный и зависящий от присутствующей концентрации показатель массовой абсорбции. Равномерное содержание кислоты достигается тем, что после растворения с летучими кислотами (HCl, HNO₃) к раствору немедленно добавляют фосфорную, серную или хлорную кислоту. Летучие кислоты удаляются путем выпаривания до начала дымления и после этого раствор разбавляется водой до необходимого объема.

Исследовано влияние соляной, азотной и серной кислот и раствора NaCl на интенсивность *K α* растворенного металла. Для этой цели был изготовлен кювет, из плексигласа с внутренним диаметром 29 мм и толщиной стенки 1 мм, а донная часть заклеена фольгой из миларда. Раствор исследовался в этом кювете. Влияние концентрации кислоты было исследовано следующим образом (таблица I).

Таблица I
Влияние концентрации кислоты

Обозначение	Раствор	Интенсивность имп/сек
1	5 мл раствора CuCl ₂ + 5 мл дист. воды	6095
2	„ + 5 мл 1% раствора HCl	5912
3	„ + 5 мл 5% „	5589
4	„ + 5 мл 10% „	5109
5	„ + 5 мл 20% „	4309
6	„ + 5 мл 40% „	3450

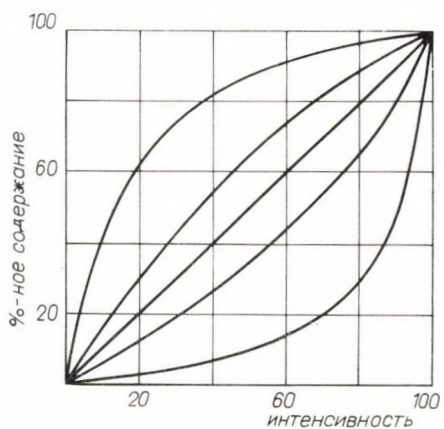


Рис. 1. Диаграмма интенсивности — концентрации двухкомпонентных сплавов

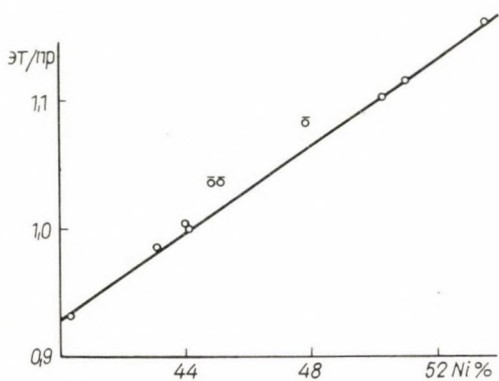


Рис. 2. Диаграмма интенсивности, эт/гр — Ni %

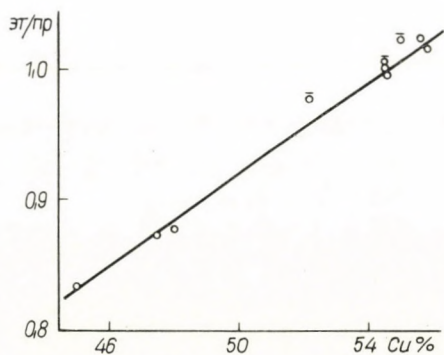


Рис. 3. Диаграмма интенсивности, эт/гр — Cu%

Интенсивность измерялась по линии $K\alpha$ -Cu. Упомянутые выше исследования проведены для HNO_3 , H_2SO_4 и раствора NaCl (рис. 4).

На интенсивность менее всего действует изменение концентрации HNO_3 , а сильнее всего H_2SO_4 . В процессе исследования установлено, что соляная кислота разлагается под воздействием рентгеновских лучей. От действия рентгеновских лучей изменяется концентрация соляной кислоты и это, в свою очередь, является причиной роста интенсивности. Если, например, 5 мл CuCl_2 + 5 мл 5% раствора HCl подвергнуть облучению рентгеновскими лучами в течение 15 мин, тогда $K\alpha$ интенсивность Cu возрастет на 1/3. Поэтому солянокислый раствор непригоден для рентгенофлуоресцентного спектрального анализа.

Вследствие того, что HNO_3 под воздействием рентгеновского облучения не разлагается, то изменение его концентрации влияет на интенсивность меньше всего, а растворение сплава *RC49* происходит в ней лучше всего, таким образом эту кислоту мы и использовали при растворении сплава.

В дальнейшем было исследовано, какое действие оказывает изменение концентрации HNO_3 на $K\alpha$ интенсивность Cu, Ni, Mn сплава *RC 49*.

6 × 1 г стружек сплава *RC 49* было растворено в 10 мл 1,25-ной HNO_3 , затем растворы были выпарены почти досуха, к остатку добавлено 3, 5, 10, 15 и 20 мл 1,25-ной HNO_3 и 100 мл дистиллированной воды. После чего измерена $K\alpha$ интенсивность Cu, Ni, Mn растворов с различной концентрацией HNO_3 , которые отображены в функции концентрации кислоты на рис. 5 и 6.

На рисунках видно, что $K\alpha$ интенсивность Cu и Ni при изменениях концентрации кислоты в пределах 3 ÷ 5% остается неизменной, а $K\alpha$ интенсивность Mn даже при изменении концентрации кислоты порядка 20% остается приблизительно идентичной. Это происходит потому, что сплав содержит 0,7 Mn, и вследствие большого разбавления нельзя измерить действие изменения концентрации кислоты. Если навески сплава *RC 49* в 1 г во всех случаях растворять в 10 мл 1,25-ной кислоты HNO_3 и этот раствор доводить

Таблица II

Состав эталонных растворов

Обозначение	Ni %	Cu %	Mn %
1	38,0	61,4	0,6
2	40,0	59,4	0,6
3	42,0	57,4	0,6
4	44,0	55,4	0,6
5	46,0	53,4	0,6
6	48,0	51,4	0,6

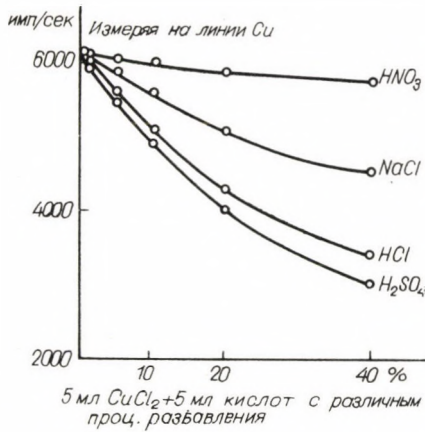


Рис. 4. Абсорбционное действие 5 мл CuCl_2 + 5 мл различных разбавленных кислот на интенсивность $K\alpha$ -Cu

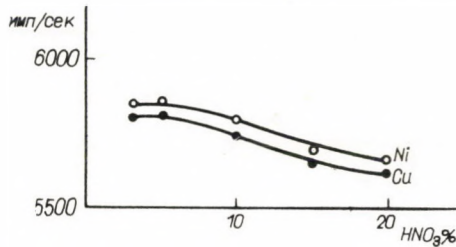


Рис. 5. Абсорбционное действие различных разбавленных HNO_3 на интенсивность $K\alpha$ -Ni и $K\alpha$ -Cu

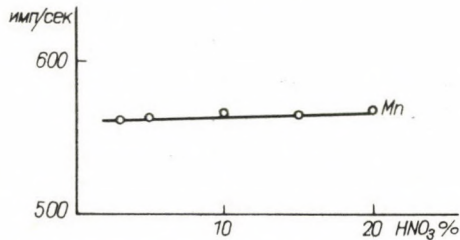


Рис. 6. Абсорбционное действие различных разбавленных HNO_3 на интенсивность $K\alpha$ -Mn

до 100 мл, тогда происходящее таким образом изменение концентрации кислоты будет ниже 0,5%, а это не влияет на измерение интенсивности.

Приготовление эталонных растворов для Cu и Ni. Для приготовления растворов достаточно навеска вещества в 1 г. Эталонные растворы приготавливаются с навеской в 1 г, они растворяются 10 мл HNO_3 и доводятся дистиллированной водой до объема 100 мл (таблица II).

Используя раствор 4 в качестве эталонного, построены диаграммы $K\alpha$ интенсивности (эталон/проба) — концентрации Cu, Ni приведенных выше растворов (рис. 7 и 8).

Из рисунков видно, что точки измерения располагаются на прямой. Из 10 проб металла, выбранных для эталона, было отобрана навеска металлической стружки также в 1 г, которая растворена в 10 мл 1,25-ной HNO_3 и полученный раствор разбавлен дистиллированной водой до 100 мл. При измерении интенсивности упомянутых выше 10 растворов в качестве исходного эталона использовался также раствор 4. Для всех 10 растворов было определено частное эталон/проба и по диаграммам 7 и 8 отсчитывались значения процентного содержания.

Данные растворного способа рентгеноспектроанализа и химического анализа приведены в таблице III.

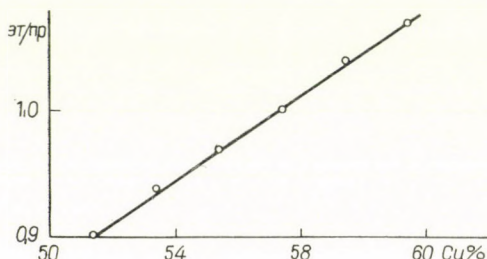


Рис. 7. Диаграмма интенсивности, эт/пр — $\text{Cu}\%$ эталонных растворов

Данные таблицы отображены на диаграммах рис. 9 и 10. На диаграммах результаты химического анализа обозначены крестиками, а данные растворного рентгеновского способа — точками.

Таблица III

Данные растворного способа

Обозначение	Ni % (рентг.)	Ni % (химич.)	Cu % (рентг.)	Cu % (химич.)
ТС 3	53,2	53,5	45,5	45,0
12	50,4	50,2	48,3	48,0
12 А	43,6	43,1	55,4	55,6
20	47,8	47,8	52,4	52,2
27	50,6	50,9	47,4	47,5
29	45,3	44,8	55,0	55,0
101	40,9	40,4	56,0	55,9
132	44,3	44,0	55,0	54,6
98	44,6	44,1	54,8	54,5
128	45,3	45,1	54,7	54,5
135	44,8	44,65	54,3	54,0

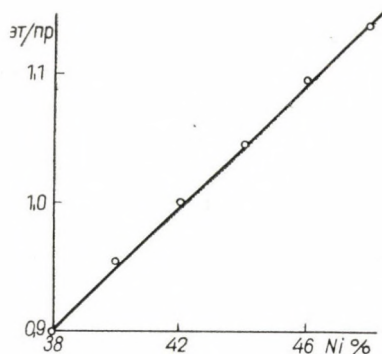


Рис. 8. Диаграмма интенсивности, $эт/пр$ — Ni% эталонных растворов

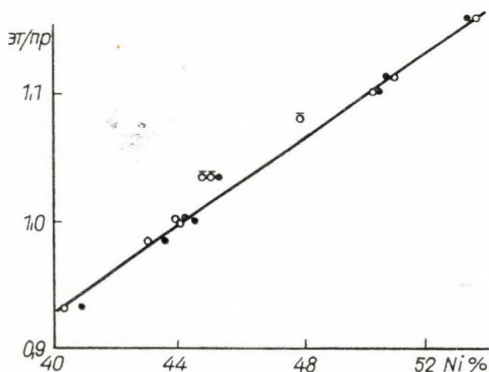


Рис. 9. Диаграмма интенсивности, $эт/пр$ — Ni% металлических эталонов
Точка \circ — процентное содержание, определенное раствором рентгеновским методом;
Точка \ominus — процентное содержание, определенное химическим анализом

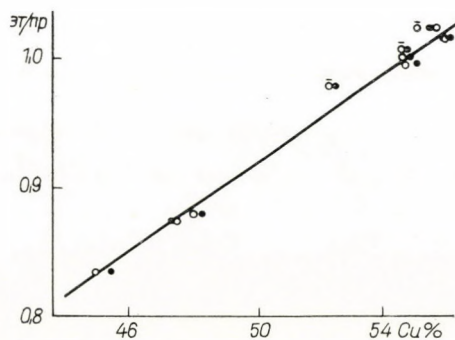


Рис. 10. Диаграмма интенсивности $эт/пр$ — Cu% металлических эталонов
Точка \circ — процентное содержание, определенное раствором рентгеновским методом;
Точка \ominus — процентное содержание, определенное химическим анализом

Проводились измерения для определения того, что получится ли меньший разброс в случае хронометража, необходимого при отсчете $1 \times$, $2 \times$, $3 \times$, $4 \times$, 5×256 ОСО импульсов.

После двухкратного измерения получены уже удовлетворительные результаты. Пределы разброса 360 измерений раствора с содержанием 40% Ni вычислялись при помощи следующей формулы:

$$\sigma = \pm t_{(N)} \sqrt{\frac{\sum_{z=1}^N \delta^2}{N-1}}$$

где δ отклонение от средней величины;
 $t_{(N)}$ при 95% надежности, 1,95;
 N число измерений.

Вычислением получено следующее значение

$$\sigma = \pm 0,4\% \text{ Ni.}$$

Определение 40% Ni в присутствии 59,4% Си с указанной выше точностью является удовлетворительным результатом.

Из таблицы, а также диагр. 9 и 10 видно, что значения, полученные при помощи растворного метода рентгеноспектроанализа и химического анализа, располагаются очень близко друг к другу. На диагр. 9 и 10 значения для Си и Ni в случае пробы (помеченные через \odot) располагаются на относительно большом расстоянии от прямой. Также на большом расстоянии располагаются значения, полученные при помощи растворного рентгеновского метода.

Таблица IV

Процентные данные железа и марганца

Обозначение	Mn %	Fe %	Fe+ Mn %
ТС 3	1,23	0,06	1,29
12 A	1,20	0,04	1,24
20	0,05	0,10	0,15
27	1,05	0,40	1,45
29	0,05	0,10	0,15
98	1,15	0,06	1,21
101	1,36	0,26	1,62
128	0,28	0,14	0,42
132	1,05	0,34	1,39
135	1,47	0,08	1,55

Ф. Р. Барехам и Й. Г. М. Фокс пишут, что в сплаве Cu—Ni—Fe изменение Fe сильно действует на определение Cu и Ni. Fe имеет большую абсорбцию к излучениям Cu-K α и Ni-K α .

В сплаве RC 49 Fe присутствует в качестве примеси. Показатель ослабления массы железа и марганца является приблизительно идентичным для Cu и Ni, поэтому влияние Fe и Mn исследуется вместе. Показатель ослабления массы Fe для Cu равен 324, а Ni 397 г⁻¹ см², показатель ослабления массы для Cu 284, Ni 348 г⁻¹ см².

Процентные данные железа и марганца приведены в таблице IV.

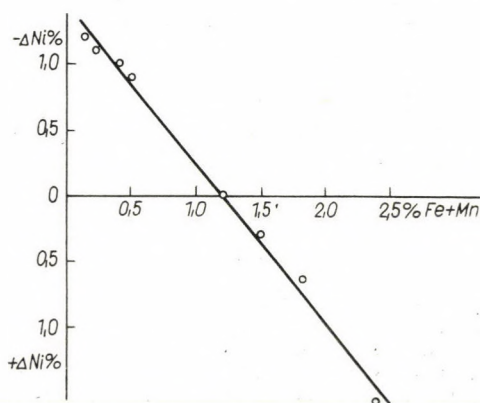


Рис. 11. Погрешность от содержания Fe + Mn, отклоняющегося от эталонного содержания, в \pm Ni %-ах

Содержание Fe + Mn у проб 20, 29 и 128 прил. на 1% ниже, чем у исходной эталонной пробы за номером 98.

На рис. 9 и 10 можно найти три точки, обозначенные через \bar{O} и отклоняющиеся от прямой, они дают значения Cu, Ni проб 20, 29 и 128. Значения Cu, Ni не расположены на прямой для тех проб, в которых содержание Fe + Mn меньше, чем в исходном эталоне 98.

В дальнейшем исследовано, каким образом действует изменение Fe + Mn на определение Ni.

Подобрано 8 таких проб сплава RC 49, в которых содержание Ni было идентичным, а содержание Fe + M переменным. Значение содержания Ni этих проб определено по среднему значению 15 измерений при помощи рентгенофлуоресцентного метода.

Если содержание Fe + Mn пробы больше чем у эталона, тогда получается значение меньше действительного содержания Ni, а в том случае, когда Fe + Mn меньше, тогда значение будет больше действительного.

Отклонение, вызванное Fe + Mn, показано в процентах на рис. 11.

А если содержание Fe + Mn некоторой пробы больше чем у эталона, тогда в точке диаграммы, соответствующей Fe + Mn, отсчитывается, какое количество Ni необходимо добавить к результату, или же, если Fe + Mn меньше, сколько необходимо вычесть из результата.

ВЫВОДЫ

а. Отклонения происходят не от ошибок при анализе, так как при помощи двух различных методов получены идентичные результаты.

б. Причиной отклонения было действие матрицы Fe + Mn.

в. Растворный рентгеновский спектральный анализ весьма пригоден для эталонного анализа. В растворе можно получить любой сплав, и при поддержании концентрации кислоты данный метод дает точный результат,

г. Предлагаемый метод непригоден для выполнения экспресс-анализа, так как приготовление раствора требует 1-10 часа времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. BRUCH, J.: *Archiv f. Eisenhüttenwesen* (1962), No. 1.
2. ПОМЕУ, С.: *Mécanique-Électricité* (1961); apr., 50—53.
3. HANS, A.—HONBART, I.: *Rev. Univ. Mines* (1962), 310—316.
4. BAREHAM, F. R.—FOX, J. G. M.: *I. Inst. Met.* (1960); apr., 344—51.
5. KAISER, H.—SPECKER, H.: *Z. für Analytische Chemie* (1956), Heft 149.

X-RAY FLUORESCENCE SPECTROCHEMICAL ANALYSIS OF RC 49 ALLOY BY THE SOLUTION METHOD

S. SZEIMAN

SUMMARY

Under service conditions RC 49 alloy is analyzed by X-ray fluorescence analysis of metallic specimens. Development of the X-ray fluorescence solution method of alloy analysis became necessary because of 1—2% discrepancies between the results of chemical and of X-ray fluorescence analysis. Development of the solution method made clear that the discrepancies are due to the impurities in the alloy. By the solution method the correction diagram for Fe + Mn impurities was established, which must be considered in the analysis of Cu-Ni alloys.

EINE METHODE FÜR DIE ANALYSE IN LÖSUNG DER LEGIERUNG RC 49 MITTELS RÖNTGENFLUORESZENZ

S. SZEIMAN

ZUSAMMENFASSUNG

In der Betriebspraxis wird die Legierung RC 49 mittels Röntgenfluoreszenz an metallischen Proben analysiert. Ausarbeitung des Verfahrens der Röntgenfluoreszenz-Analyse in Lösung war notwendig, weil bei gewissen Proben 1—2% Unterschied zwischen den Ergebnissen der chemischen und denen der Röntgenanalyse auftrat. Bei der Ausarbeitung des Meßver-

fahrens für die gelöste Legierung zeigte es sich, daß die Unterschiede durch die Verunreinigungen der Legierung verursacht werden. Mittels des Verfahrens der gelösten Legierung wurde das Korrektionsdiagramm für Fe + Mn ausgearbeitet, welches bei der Analyse der Cu-Ni Legierungen in Betracht gezogen werden muss.

LA MÉTHODE D'ANALYSE EN SOLUTION DE L'ALLIAGE RC 49 PAR
FLUORESCENCE DES RAYONS X¹

S. SZEIMAN

RÉSUMÉ

Dans la pratique industrielle, l'alliage RC 49 est analysé par la méthode de la fluorescence des échantillons métalliques soumis aux rayons X. L'élaboration de la méthode d'analyse de l'alliage en solution par fluorescence des rayons X devenait nécessaire, parce que pour certains échantillons, il y avait des écarts de Ni et Cu de 1-2% entre les résultats de l'analyse par fluorescence des rayons X et de l'analyse chimique. Par le développement de la méthode «en solution» on a pu éclaircir que les écarts étaient causés par les impuretés de l'alliage. On a établi, par la méthode «en solution», le diagramme des corrections pour les impuretés Fe + Mn, qu'il faut prendre en considération lors de l'analyse des alliages Cu-Ni.



BESTIMMUNG DES AUSGEGLICHENEN RELATIVEN GLEITENS DER PLANETENGETRIEBE MIT DOPPELEINGRIFF DES EINSTUFIGEN PLANETENRADES

Z. TERPLÁN

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR MASCHINENELEMENTE
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 3. Mai, 1964]

Bei den Zahnradplanetengetrieben erfordern die Ausführungen mit Planetenrädern von doppeltem Eingriff die Lösung von speziellen Problemen. Im Rahmen dieser Probleme untersucht die vorliegende Studie die Möglichkeit des ausgeglichenen relativen Gleitens. Sie weist nach, daß von den an vier Stellen auftretenden relativen Gleiterscheinungen die eine unberücksichtigt bleiben kann; von den übrigen drei können zwei ausgeglichen werden, wogegen die Abstumpfung des Kopfes des innenverzahnten Eingriffs leicht entworfen werden kann. Anhand der vorliegenden Studie kann auch das für eine Nullverzahnung entworfenen Planetengetriebe in eine V-Nullverzahnung umgeändert, und damit günstigere Betriebseigenschaften erreicht werden (z. B. größere übertragbare Leistung, kleinere Abnutzung und niedrigere Temperatur).

Bild 1 gibt die schematische Zusammenfassung der einfachsten Aufbau-elemente der Zahnradplanetengetriebe. Wenn man diese Elemente vom Standpunkt des Eingriffs der Zahnräder untersucht, dann muß auf Bild 1 die mit c bezeichnete Ausführung als eine besondere angesehen werden, mit Rücksicht darauf, daß sie von *doppeltem Eingriff* ist (d. h. derselbe Zahn des Planetenrades kämmt während einer Umdrehung einmal mit dem außenverzahnten, einmal mit dem innenverzahnten Sonnenrad). Dieser Umstand wirft verschiedene Fragen der Festigkeit, der Abmessungen [4] und des Eingriffs auf, von denen diese Studie die Möglichkeit der Lösung des ausgeglichenen Gleitens untersucht.

Bild 2 veranschaulicht das Bild 1c eingehender, mit zwei Darstellungen. An der Eingriffslinie wurden die Schnittpunkte der Kopfkreise bezeichnet, d. h. die Anfangs- und Endpunkte des Angriffs.

Bild 3 zeigt das Bild 2 in der zweckmäßigerweise veränderten Form, bei der um die Horizontale, die durch den Punkt O_3 geht, die mit 2–3 bezeichneten Eingriffe spiegelbildlich dargestellt sind ($C \equiv C_{23} \equiv C_{34}$). Dadurch fallen die Eingriffspunkte k_2 , k'_3 , k''_3 und k_4 auf eine Linie und die Gleitverhältnisse können übersichtlicher untersucht werden.

Aus dem Schrifttum [2, 3, 6, 7] ist es bekannt, daß man unter dem Begriff *Gleiten* (γ) an dem untersuchten Eingriffspunkt jene Verhältniszahl, die größer als eins ist, verstehe, in der der Quotient von Evolvent-Bogenlängen, die gleichzeitig gleitend abrollen, enthalten ist. Der Begriff *relatives Gleiten*

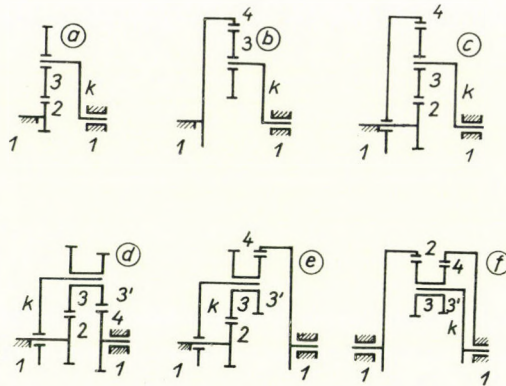


Bild 1. Skizzen der Elemente von Zahnradplanetengetrieben

a) Räderpaar und Kurbelarm mit Außenverzahnung; b) Räderpaar und Kurbelarm mit Innenverzahnung; c) Planetengetriebeausführung mit Doppeleingriff; d) -f) zweistufige Planetengetriebe mit einem außenverzahnenden, gemischtverzahnenden und innenverzahnenden Eingriff

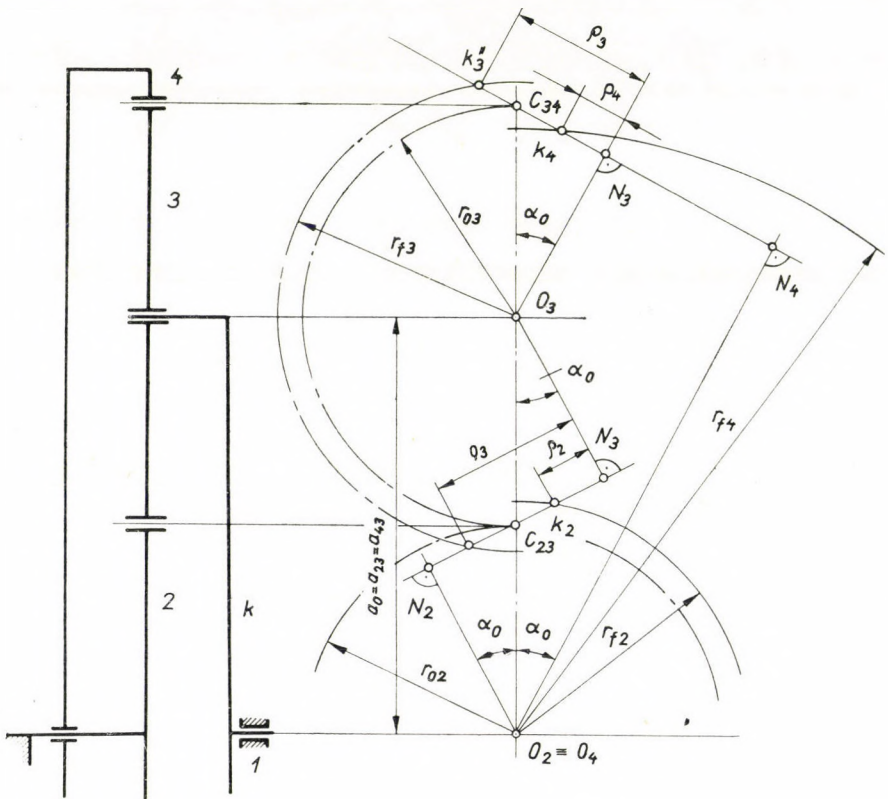


Bild 2. Zwei Darstellungen der Skizze eines Umlaufgetriebes (Bild 1c) mit einem Planetenrad von Doppeleingriff (unter Weglassen der Zähne), mit eingezeichneten Eingriffslinien und Eingriffspunkten vom Anfang und vom Ende, die von den Kopfkreisen ausgeschnitten sind (k_2 , k_3' , k_3'' und k_4)

(η) bedeutet dagegen das um eins verminderte Gleiten. Wenn daher während der Zeit Δt das mit 2 bezeichnete Sonnenrad um den Winkel $\Delta\varphi_2$, das mit 3 bezeichnete Planetenrad um den Winkel $\Delta\varphi_3$, und das mit 4 bezeichnete

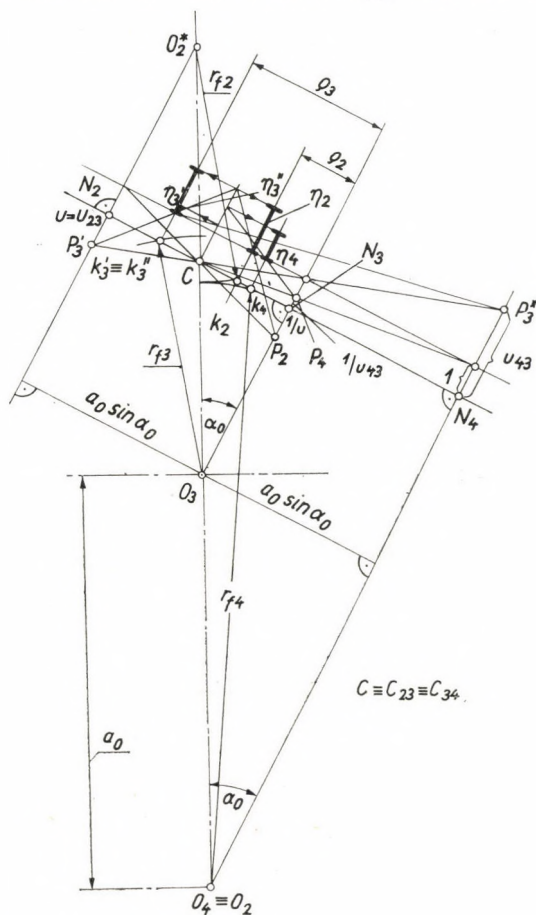


Bild 3. Änderung des Bildes 2 wobei die mit 2 und 3 bezeichneten Eingriffe um eine durch O_3 gehende Horizontale spiegelbildlich dargestellt sind. Das Bild enthält die für den Entwurf der Gleit-Hyperbeln erforderlichen Pole (P_2, P'_3, P''_3 und P_4), ferner das mit Hilfe der Vörös'schen Methode [7] entworfene relative Gleiten an den Eingriffsgrenzen ($\eta_2, \eta'_3, \eta''_3$ und η_4)

Sonnenrad um den Winkel $\Delta\varphi_4$ sich verdreht, dann kann man mit den Bezeichnungen des Bildes 4 in dem Eingriffspunkt k_2 zuerst das Verhältnis der im Augenblick kämmenden Evolventenbogen anschreiben:

$$y_2 = \frac{(\alpha_0 \sin \alpha_0 - \varrho_2) \Delta\varphi_2}{\varrho_2 \Delta\varphi_3} = \frac{\alpha_0 \sin \alpha_0 - \varrho_2}{\varrho_2 u_{23}},$$

daraus wird

$$\varrho_2 \left(y_2 + \frac{1}{u_{23}} \right) = \frac{\alpha_0 \sin \alpha_0}{u_{23}} = \text{const.}$$

Diese Fälle des *relativen Gleitens* kann man nach der Methode von VÖRÖS [7] schnell entwerfen (Bild 3). Der Nachweis der Pole P_2, P'_3, P''_3 und P_4 sind im Bild 5, wogegen der Entwurf der herausgegriffenen η'_{33} und η''_{33} in den Bildern 6 und 7 zu sehen.

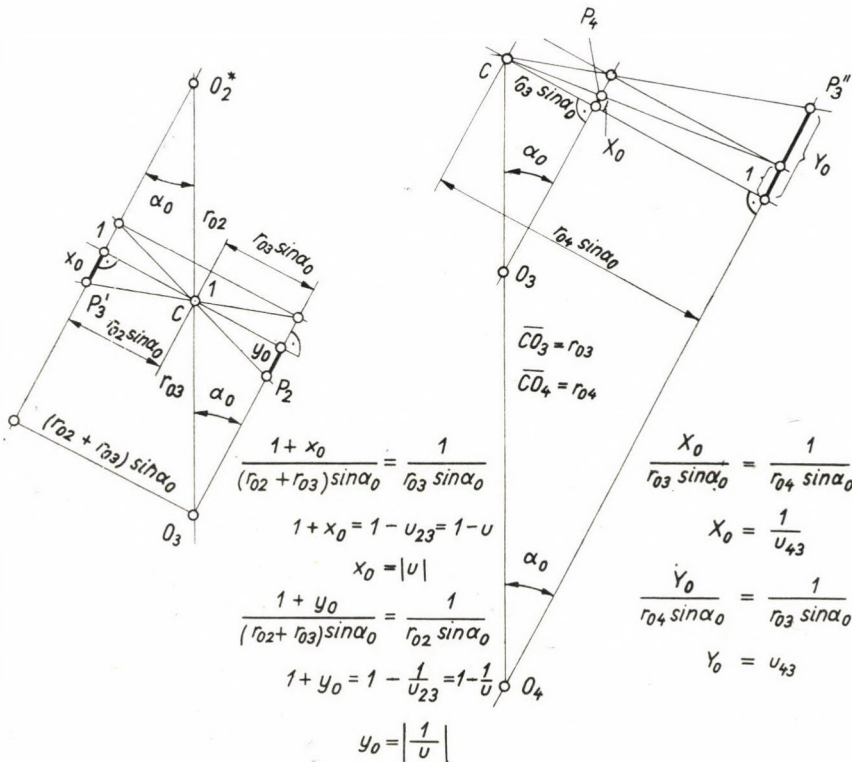


Bild 5. Beweis für den Entwurf der Pole P_2, P'_3, P''_3 und P_4

Die meisten Zahnradplanetengetriebe sind von einer *Nullverzahnung*, daher ist es wahrscheinlich, daß im konkreten Planetengetriebe das relative Gleiten sehr unterschiedliche Werte liefert. Im Verlauf einer Fachprüfung ergaben sich z. B. bei den zwei in Reihe geschalteten Einheiten des im Bild 1c dargestellten Planetengetriebeelementes [5] die Ergebnisse in Tafel I.

Tafel I

1. Stufe	1,3	3,9	0,2	0,4
2. Stufe	2,33	5,86	0,29	1,5

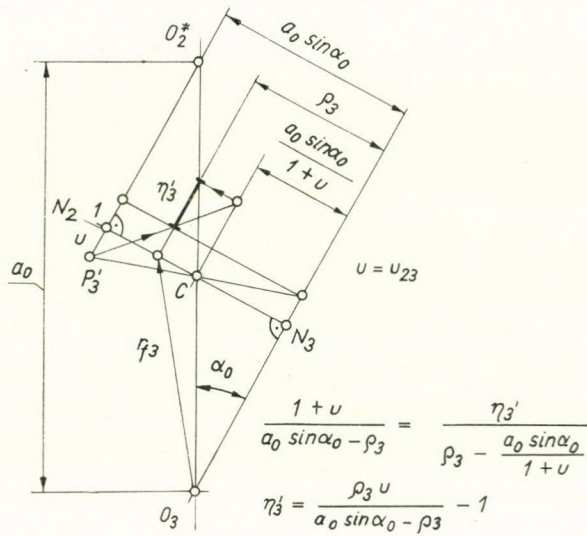


Bild 6. Beweis für den Entwurf von η_3' (siehe auch Bild 3)

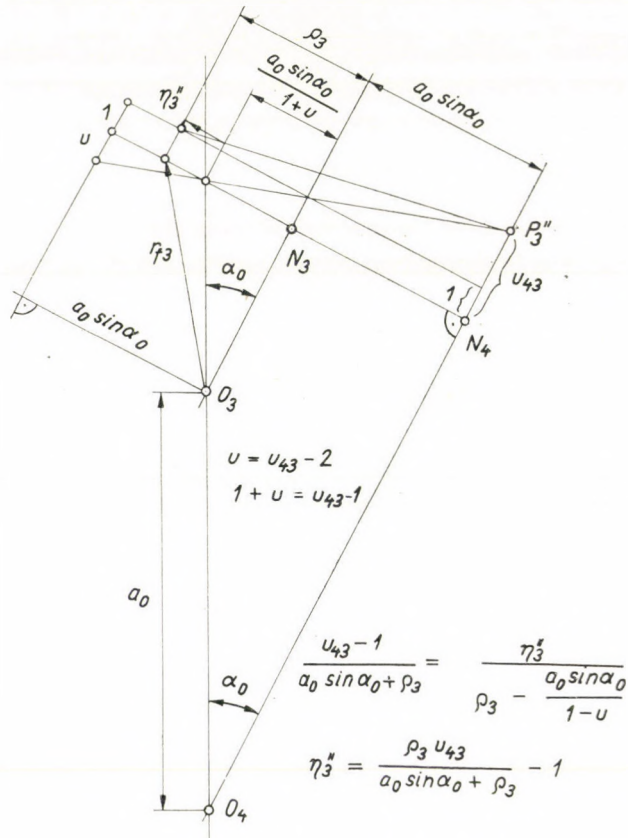


Bild 7. Beweis für den Entwurf von η_3'' (siehe auch Bild 3)

(In der Gleichung ist $t+u$ statt $1-u$ richtig)

In einer Diplomarbeit [1] ergaben sich sehr günstige, aber im Vergleich zueinander gleichfalls Streuwerte (siehe Tafel II).

Das *ausgegliche* relative Gleiten besitzt günstige Betriebseigenschaften. Entsprechend dem Nachweis von I. BOTKA [2] besitzt nämlich das ausge-

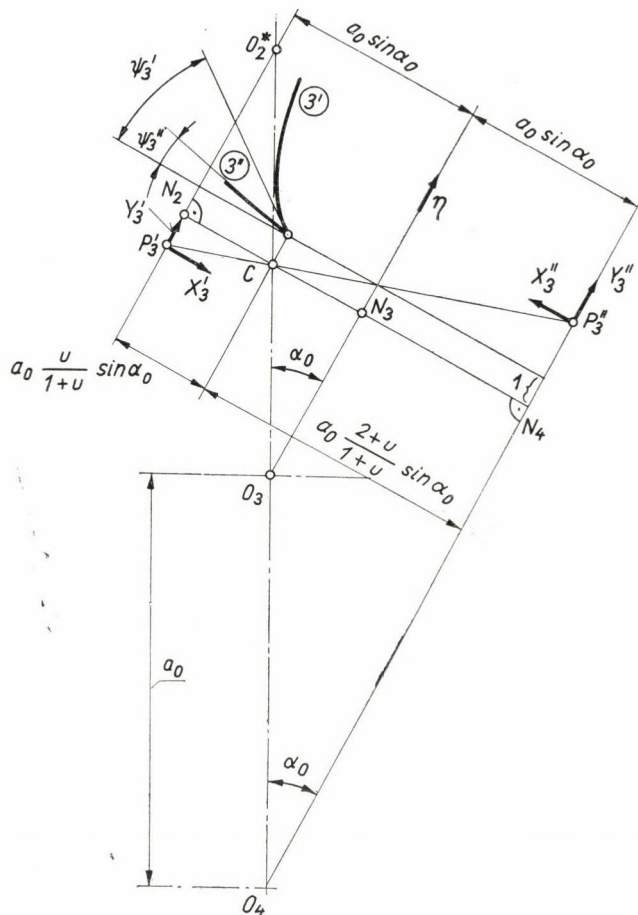


Bild 8. Die Gleithyperbeln $\textcircled{3}'$ und $\textcircled{3}''$ und ihre Wälzpunkt-Tangenten

glichene Gleiten einen dreifachen Ausgleich, d. h. das Ausgleichen von η ist verbunden mit dem Ausgleich des Produkts aus der Hertz'schen Spannung und der Gleitgeschwindigkeit (des sog. Almen'schen Produkts), ferner mit dem

Tafel II

1. Stufe	1,65	0,86	0,21	0,29
2. Stufe	1,15	1,15	0,40	0,15

Ausgleich der sog. Kontakttemperatur (der Blok'schen Temperatur). Es wäre daher zweckmäßig, das *ausgeglichene Gleiten* dieser Planetengetriebeart durch eine V-Null-Verzahnung in der Weise zu lösen, daß neben zwei Ausgleichen die beiden anderen kleiner sein sollen, oder eine von ihnen ebenfalls ausgeglichen sei.

Untersuchen wir zuerst das Verhältnis $\psi = \eta'_3/\eta''_3$. Nach den obigen Beispielen ist dieses Verhältnis immer größer als eins. Wenn die Beziehungen (2) und (3) dargestellt werden, dann erhält man Hyperbeln (Bild 8), deren

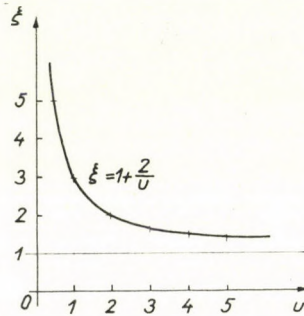


Bild 9. Die $\xi = f(u)$ Kurve zum Nachweis von $\eta'_3 > \eta''_3$

Gleichung auch einfacher angeschrieben werden kann. Unter Verwendung der Bezeichnungen der Abbildung ergibt sich die Gleichung der Hyperbel $\textcircled{3}'$ in dem Koordinatensystem $Y'_3 - X'_3$:

$$Y'_3 X'_3 = u a_0 \sin \alpha_0, \quad (5)$$

wo $u = u_{23} = z_2/z_3$ die sog. geometrische Übersetzung, oder das Zähnezahlverhältnis bedeutet.

Die Gleichung der mit $\textcircled{3}''$ bezeichneten Hyperbel wird im Koordinatensystem $Y''_3 - X''_3$

$$Y''_3 X''_3 = -u_{43} a_0 \sin \alpha_0, \quad (6)$$

wo $u_{43} = z_4/z_3$ die geometrische Übersetzung oder das Zähnezahlverhältnis des innenverzahnten Eingriffs bedeutet.

Es sei der erste Differentialquotient der Gleichungen (5) und (6) angeschrieben:

$$\frac{dY'_3}{dX'_3} = - \frac{u a_0}{X_3'^2} \sin \alpha_0; \quad (7a)$$

$$\frac{dY''_3}{dX''_3} = - \frac{u_{43} a_0}{X_3''^2} \sin \alpha_0. \quad (7b)$$

Die beiden Kurven schneiden sich in dem über dem Wälzpunkt gelegenen Einheitspunkt; seine Abszissen lauten:

$$X'_3 = r_{02} \sin \alpha_0 = a_0 \frac{u}{1+u} \sin \alpha_0 ;$$

$$X''_3 = (r_{02} + 2r_{03}) \sin \alpha_0 = a_0 \frac{2+u}{1+u} \sin \alpha_0 .$$

Wenn man diese Werte in die Gleichungen (7a–7b) einsetzt, dann erhält man die Richtungstangenten dieser Wälzpunkt tangente der beiden Hyperbeln.

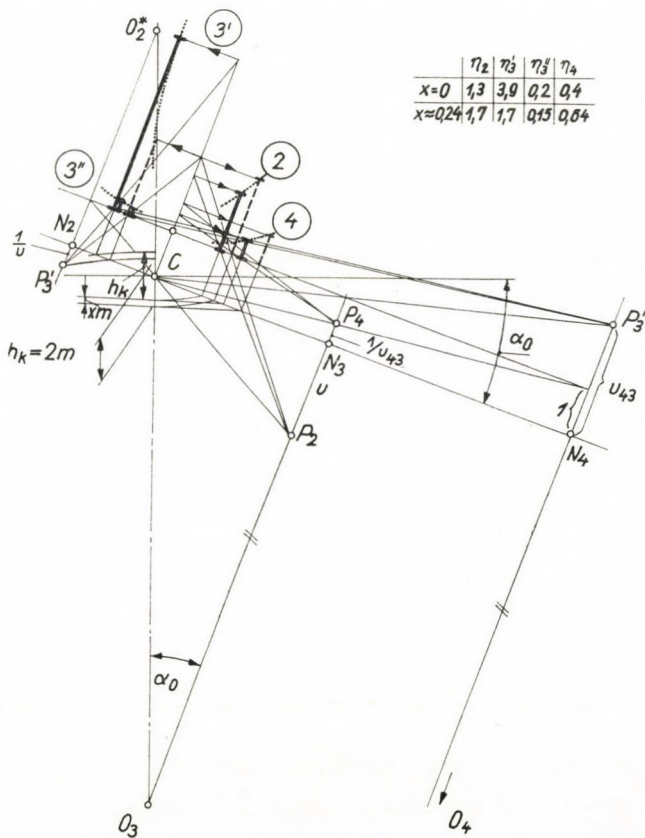


Bild 10. Entwurf des ausgeglichenen Gleitens, wenn $\eta_2 > \eta_4$. Grunddaten nach [5]

Entwurfsverlauf:

1. Auf der Achsengeraden die Mittelpunkte O_2 , O_3 und O_4 (der letztere ist im Bild nicht zu sehen) und der Wälzpunkt C ;
2. durch C gehend, zur Horizontalen um den Winkel α_0 geneigt die Eingriffslinie, auf ihr die Grundpunkte N_2 , N_3 und N_4 ;
3. für den Fall $x = 0$ (Nullverzahnung) mit $h_k = 2m$ gemeinsamer Zahnhöhe, die mit den Kopfkreisen angegebenen Eingriffsabschnitte;
4. Angabe einer mit der Eingriffslinie parallelen Geraden im Einheitsabstand, dann folgt der Entwurf der Pole P_2 , P_3 und P_4 ;
5. Entwurf von η_2 , η_3 , η_3' und η_4 nach der Methode von Vörös (s. die mit fetter Linie ausgezogenen Ordinaten);
6. durch Iteration zum Ausgleich von $\eta_2 = \eta_2'$ ($\eta_3' < \eta_3$ und $\eta_4 < \eta_2 = \eta_3'$, s. die gestrichelten Ordinaten) Ablesung der spezifischen Profilverschiebung x

Die Tatsache, daß ξ bei jedem beliebigen Wert von u größer ist als die Einheit (Bild 9), bedeutet, daß η'_3 immer größer ist als η''_3 , wegen der im Vergleich zur Tangente entgegengesetzten Krümmung der Kurven. Das bedeutet gleichzeitig, daß von dem Ausgleich der vier relativen Gleiten η''_3 weggelassen werden kann, da es immer kleiner ist als η'_3 .

In den meisten Fällen ist $\eta_2 > \eta_4$, so daß von den drei relativen Gleiten der Ausgleich von η'_3 und η_2 ausreicht (Bild 10). Wenn $\eta_4 > \eta_2$, dann ist es

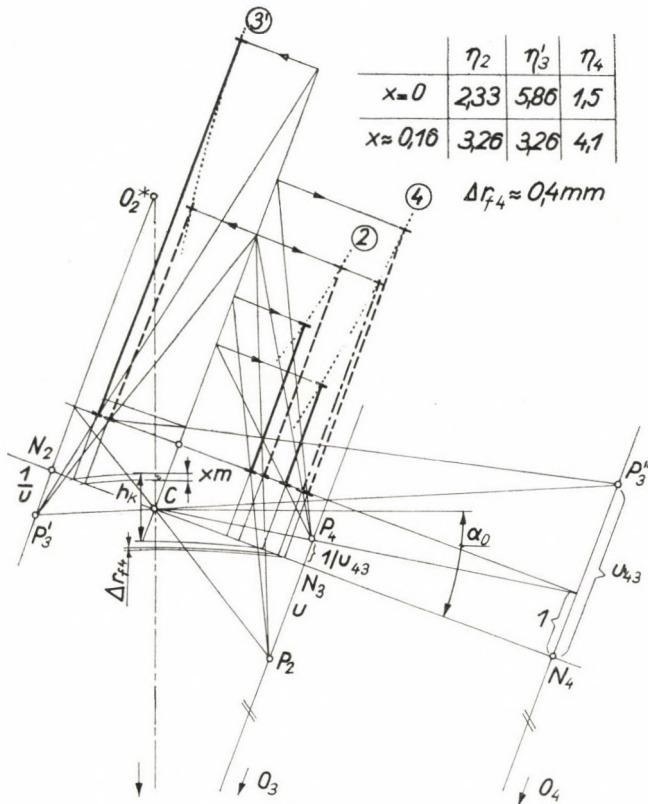


Bild 12. Maß der Drehbearbeitung des Kopfkreises Δr_{f4} , wenn $\eta_4 > \eta_2 = \eta'_3$. Die Grunddaten stimmen mit denen des Bildes 11 überein

zweckmäßig, den Ausgleich von η_4 und η'_3 vorzunehmen (Bild 11). Das Spiegelbild ist auch dazu geeignet, daß die Kopfhöhe des innenverzahnten Rades im Falle des ausgeglichenen η_2 und η'_3 jedoch bei einem größeren η_4 vermindert wird (Stumpferverzahnung durch Vergrößerung des Kopfkreises, mittels Drehbearbeitung). Hierfür zeigt das Bild 12 eine Konstruktionslösung. (Es muß bemerkt werden, daß in den Bildern u deswegen unter N_3 anstelle von N_2 (wie in den vorhergehenden Bildern) gelangt, weil hier $r_{02} < r_{03}$ ist). Die aus den

drei Bildern ersichtlichen punktierten Kurven bedeuten die entsprechend bezeichneten Hyperbeln des relativen Gleitens.

Die allgemeine, tabellarische Ausarbeitung dieses Problemenkreises mit den Bereichsgrenzen der Stirnverzahnung ist im Gange.

SCHRIFTTUM

1. ANTAL, M.: Kétfokozatú fogaskerekes bolygómű tervezése és kettőskapcsolású bolygókerék kompenzált fogazásának vizsgálata (Entwurf von zweistufigen Zahnradplanetengetrieben und Untersuchung der V-Null-Verzahnung eines Planetenrades mit Doppelengriff). Diplomaufgabe am Lehrstuhl für Maschinenelemente der Technischen Universität für die Schwerindustrie, Miskolc 1960.
2. BOTKA, I.: Egységes magyar homlokkerék fogazási rendszer (Einheitliches ungarisches Stirnrad-Verzahnungssystem), Manuskript. Mérnöki Továbbképző Intézet kiadása, Budapest 1953.
3. PATTANTYÚS: Gépész- és villamosmérnökök kézikönyve (Handbuch für Maschinen- und Elektroingenieure) Bd. III; SZENICZEI, L.: Fogaskerekek (Zahnräder). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1961.
4. TERPLÁN, Z.: Die Dimensionierungsprobleme der Umlaufgetriebe. Vortrag, gehalten auf der Wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Ilmenau, 1963, Teil 4.
5. TERPLÁN, Z.—APRÓ, F.: Szakvélemény az Ajtay—Korbuly-féle bolygómű vizsgálatáról (Gutachten über die Prüfung des Ajtay—Korbuly'schen Planetengetriebes). Manuskript, Miskolc 1962.
6. TERPLÁN, Z.—LÉVAI, I.: Gépelemek, IV. rész — Fogaskerekek (Maschinenelemente, Teil IV — Zahnräder). Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest 1957.
7. VÖRÖS, I.: Gépelemek, III. kiadás — Fogaskerekek (Maschinenelemente, III. Aufl. — Zahnräder). Tankönyvkiadó, Budapest 1956.

THE COMPENSATED SLIDING OF PLANETARY SPUR GEAR TRAINS WITH DOUBLE ENGAGEMENT

Z. TERPLÁN

SUMMARY

Amongst spur gear planetary trains, those with double engagement planetary gears require the solution of special problems. From amongst these problems the paper examines the possibility of equilibrated relative sliding. It is shown that from the relative slidings arising at four points, one need not be taken into consideration, two amongst the other three can be compensated, while the addendum decrease at the internal-gear contact can easily be found graphically. On the basis of the present paper the planetary drive designed with elementary gearing can also be easily changed to compensated gearing and thus more favourable operating characteristics can be obtained (e.g. greater transmitted power, smaller wear and lower temperature).

GLISSEMENT COMPENSÉ DES ENGRENAGES PLANÉTAIRES À ENGRÈNEMENT BINAIRE

Z. TERPLÁN

RÉSUMÉ

Les engrenages planétaires ayant des satellites à engrènement binaire nécessitent la solution de problèmes spéciaux. Parmi ceux-ci figure la possibilité du glissement relatif compensé, examinée par l'auteur. Il démontre que des glissements relatifs se produisant en quatre

points l'un peut être négligé, deux autres peuvent être compensés, enfin l'amortissement de tête de l'engrènement à denture intérieure peut être aisément assuré. Sur la base de l'étude, l'engrenage planétaire projeté pour une denture normale peut être adapté aussi à une denture compensée, ce qui permet d'obtenir des caractéristiques bien meilleures (plus grande puissance transmise, usure et température moindres, etc.).

УРАВНЕННОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ ШЕСТЕРЕНЧАТЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ДВОЙНЫМ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ

З. ТЕРПЛАН

РЕЗЮМЕ

Среди шестеренчатых планетарных механизмов, решения специальных проблем требуют те, которые обладают планетарными колесами с двойным зацеплением. Среди этих проблем в работе исследуется возможность уравненного относительного скольжения. Доказывается, что среди относительных скольжений, возникающих в четырех местах, одно скольжение не следует принимать во внимание, из числа остальных трех два можно уравнять, а скашивание вершин зубьев внутреннего зацепления можно легко определить построением. На основе данной работы планетарный механизм, сконструированный, исходя из элементарных зубьев, можно переделать на компенсированные зубья и этим добиться более выгодных эксплуатационных условий (напр. большая передаваемая мощность, меньший износ и более низкая температура).



INFLUENCE OF MANUFACTURING INACCURACIES ON THE CHARACTERISTICS OF PUMPS

F. STVRTECZKY and Á. SZABÓ

DEPARTMENT OF HYDRAULIC MACHINES, TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received May 6, 1964]

In order to throw light on the effect exerted upon the pump service by manufacturing inaccuracies, authors had impellers made with defects of workmanship brought about intentionally. All the impellers had three blades of identical shape. For experimental purposes, the actual impeller was always characterized by only one kind of defect, keeping all other dimensions true to specification. The test served to plot the characteristic curves of 18 impellers having the described intentional defects; in addition, measurements of the suction head were also carried out. All the results were compared with the respective reference data of a "true shaped" master impeller. We could state that even relatively small deviations of the dimensions of an impeller already caused well observable changes in the characteristic curves and in the values of the suction head. Finally, by assuming a permitted deviation of the delivery head amounting to 2%, it was possible to state the limits of defects of workmanship that might be tolerated in the case of the described impeller type according to standard specifications.

Symbols and denominations

- D_1 inlet diameter of the impeller;
- D_2 outlet diameter of the impeller;
- H head of delivery;
- Q rate of flow;
- b impeller width;
- η pump efficiency;
- γ specific gravity of the delivered water;
- φ capacity ratio;
- ψ head ratio;
- σ critical cavitation factor at an efficiency decrease of 3% r.p.m.;
- n speed;
- p_0 atmospheric pressure;
- p_s pressure in the suction pipe;
- h_s suction head;
- h_s' loss in the suction pipe;
- p_g pressure of saturated vapour;
- c_s flow speed in the suction pipe;
- e height of the inlet edge over the axis on the top;
- ε deviation in % of the delivery head of the impeller as compared to the master impeller;
- $\Delta\alpha_0$ angular shifting of the blade;
- Δr_1 radial shifting of the inlet edge;
- σ^* a lower limit of the cavitation factor;
- n_q specific speed.

Subscripts

- E master impeller;
- i serial number of the "impeller having inaccurate workmanship";
- opt. water delivery of the master impeller at the optimum efficiency;
- f running conditions without cavitation.

I. Introduction

In the course of pump tests carried out at the Department of Hydraulic Machines, Technical University Budapest, the pump impellers were manufactured in the workshops of the Department. This work is done by forming blades of sheet material by means of a master plate, and by brazing the blades onto the disk. It once happened that the blades — during the positioning before being brazed — were adjusted by unintentional inaccuracy. When this

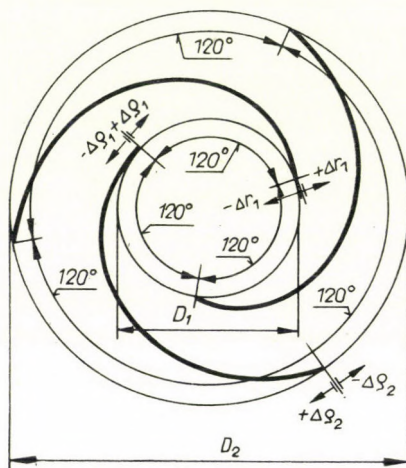


Fig. 1. Intentionally made defects of workmanship

faulty workmanship was observed, another impeller was made and appropriate measurements were carried out in order to investigate the effects of dimensional deviations. These results are reported in a paper published in the *Acta Techn. Hung.* [2, 3].

This first tentative work of comparative measurements was made at a rather antiquated measuring station of our Department, where the adjustment was cumbersome and tedious especially for the determination of sucking capacity. Thus we felt compelled to develop and to erect our new measuring station, type RS adjusted for semi-automatic operation [4]. With this new measuring equipment we reached a position for carrying out more precise investigations in order to clear up the influence of manufacturing inaccuracies.

For this purpose, 19 impellers were designed and made. Three blades, in form of a logarithmic spiral of 15° , were arranged on each impeller. In this group, 1 impeller was made as a master wheel in conformity with the designed accuracy, and the other 18 were formed with some intentional deviation from the true geometrical shape, having some "manufacturing inaccuracy". Thus we provided appropriate objects for carrying out measurements that could

probably throw some light on the influence exerted by the defects of workmanship on pump efficiency. With the intention to have a separate insight into the effect of this or that kind of defect, each test was arranged so as to investigate the influence of only one special deviation. In each impeller two blades were manufactured without any deviation; every third one was formed with one of the following three inaccuracies:

a) The whole of the camber of the blade was kept in its original form according to the above mentioned spiral: then, the blade was somewhat displaced from its original position in such a way, that maintaining the inlet endpoint as a fulcrum, the blade was turned away to the left or to the right in order to have its outlet endpoint shifted at an angle of $\pm \Delta \varrho_2$ from its original pitch point. These impellers are referred to as "shifted by an angle $\pm \Delta \varrho_2''$."

b) In an analogous way as before, this 3rd blade was turned away, around its outlet endpoint as a fulcrum in order to have the inlet endpoint shifted from its original pitch point by an angle of $\pm \Delta \varrho_1$. These impellers are referred to as "shifted by an angle of $\pm \Delta \varrho_1''$."

c) The inlet edge of the blade was shifted in the radial direction at a displacement of $\pm \Delta r_1$. These impellers are referred to as "shifted by $\pm \Delta r_1''$."

II. Measuring results

Through the whole test series the impeller speed was maintained at $n = 2000$ rpm. Main parameters of the master impeller:

$$n_q = 28; H_{Eopt.} = 11,85 \text{ m}; Q_{Eopt.} = 8,15 \text{ l/s}; n_{Ecpt.} = 0,74.$$

Besides the usual characteristics, the curves of suction capacity are plotted, too. In carrying out our tests, we were confined to some reasonable limits because of the open type of our equipment, and in consequence of the rather small delivery head of our pump.

The measurements served to determine the following functions: H versus Q , η versus Q , and η versus h_1 . Our calculations were based on the following equations:

$$\varphi = \frac{60 \cdot Q}{\pi^2 D_1^2 b n},$$

$$\psi = \frac{7,2 \cdot 10^3 g H}{\pi^2 D_2^2 n^2},$$

$$\sigma = \frac{(p_s - p_0)/\gamma + c_s^2/(2g) - e}{H},$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{H_{Jopt.}}{H_{Eopt.}} \right) \cdot 100\%.$$

A great many diagrams were plotted. For the sake of a shorter way of treating this subject, the six most important ones are illustrated here.

Fig. 2 shows the diagram ψ versus φ for the master impeller and for that shifted at an angular displacement of $+\Delta\varrho_2$. The curves refer to impeller No. 4 shifted by 20° . Here, deviations are significant as a consequence of the channel being restricted, as is well observable in the diagram. The wheels with a shifting angle of 10° and 5° are characterized by a stepwise approximation to the feature of the master wheel. The same holds true with respect to efficiency.

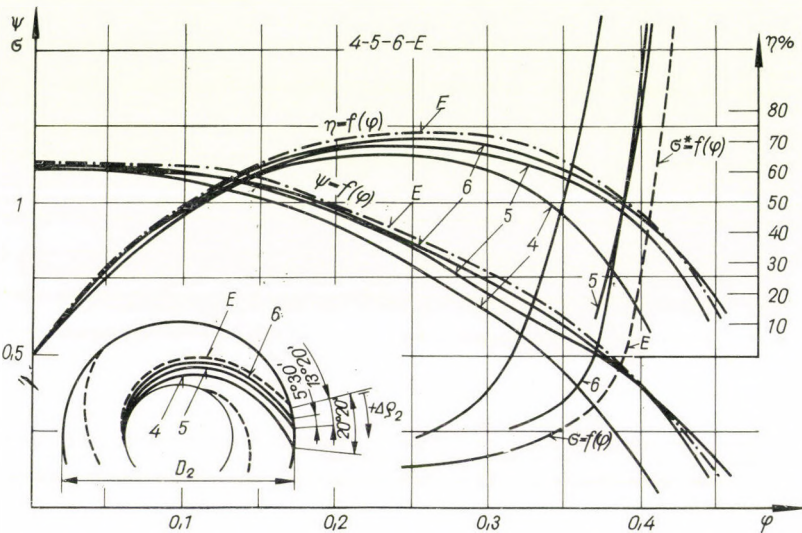


Fig. 2. Characteristic curves of the impellers marked 4 - 5 - 6 - E; positive angular shifting on the exit edge of one blade: $+\Delta\varrho_2^\circ$

In this figure, the critical cavitation number σ is also noted for the same four impellers. These curves, drawn as a full line, are plotted at steps of 3% decrease of efficiency. Inasmuch as the investigation of cavitation effects was not the object of our research work, this rather arbitrary choice of steps of 3% is not assumed as having influence on the results elaborated for the comparison of wheels having various manufacturing inaccuracies. This magnitude of 3% has been chosen with the assumption that measuring errors do not transgress this limit, even in the most unfavourable case.

There were some impellers that were not suitable for the observation of cavitation break down even with the smallest delivery values, since our equipment was suitable for the performance of a suction head of abt. $8,2 \div 8,3$ m. On the other hand, when working with greater delivery volumes, the extension of measurements up to the cavitation break down was limited

because of the increased pipe resistance caused by the throttle effect on the suction side.

The values of the critical cavitation number σ are plotted in the diagrams of impellers made with a faulty workmanship, only within the boundaries of water quantity within which the efficiency decrease of 3% was observable. There were some impellers under test with which we never reached a suction head high enough to bring about an efficiency decrease of 3%.

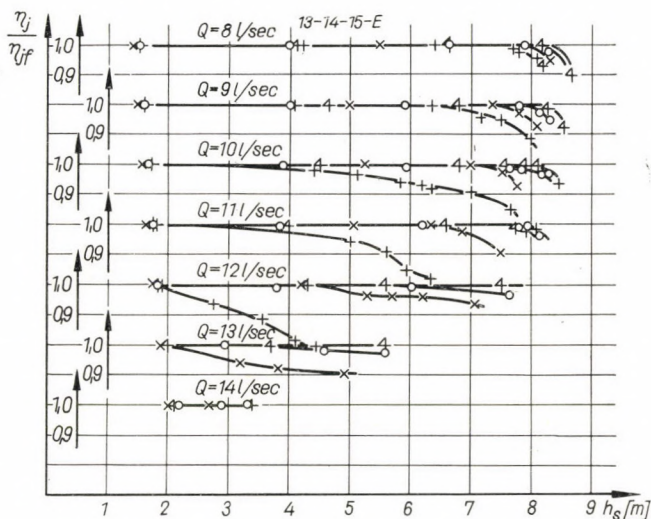


Fig. 3. Suction head curves of the impellers marked 13 - 14 - 15 - E ; efficiency η_j versus h_s and efficiency η_{jf} of an operation free of cavitation

When testing the master impeller, the critical σ value could be determined up to the range of $\varphi = 0,24 \div 0,35$. In order to create some practicable basis of comparison with larger φ values, we calculated a low-limit value of σ^* with an assumed maximum value of the suction head h_s that was still measurable without causing an efficiency decrease of 3%. This section is illustrated, in the diagram, by a dotted line.

Of course, it is not possible to demonstrate all the 19 curve diagrams η versus h_s , and we choose to illustrate the function $\eta_j/\eta_{jf} = f(h_s)$ for 4 impellers with a varying flow rate as parameter (Fig. 3).

In Fig. 4 the characteristic curves of impellers with blades shifted at the outer tip by $-\Delta\varphi_2$ are shown. As can be seen, the channel section of the impeller is less restricted by the faulty blades, and the curves $\psi = f(\varphi)$ and $\eta = f(\varphi)$ show, in comparison to those in Fig. 2, a rather small deviation from the master impeller.

In Fig. 5 the characteristic curves of impellers with blades shifted at the inner tip by $+\Delta\varphi_1$ are shown. The restriction of channel section, caused

by the faulty impellers, is negligible. Deviations in the trend of the curves are relatively small.

In Fig. 6 characteristic curves of impellers with blades shifted at the inner tip by $-\Delta\varrho_1$ are shown. The channel section restriction caused by faulty blades is significant. Deviations in the trend of the curve $\psi = f(\varphi)$ are here

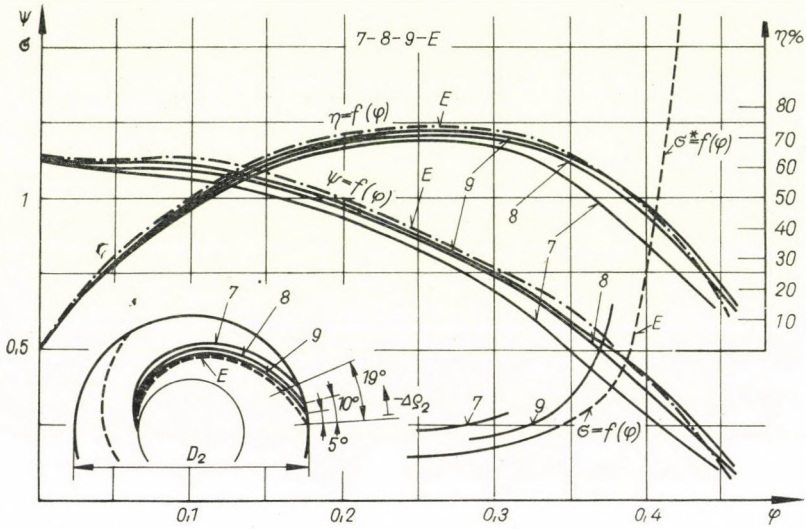


Fig. 4. Characteristic curves of the impellers marked 7 - 8 - 9 - E; negative angular shifting on the exit edge of one blade: $-\Delta\varrho_2^\circ$

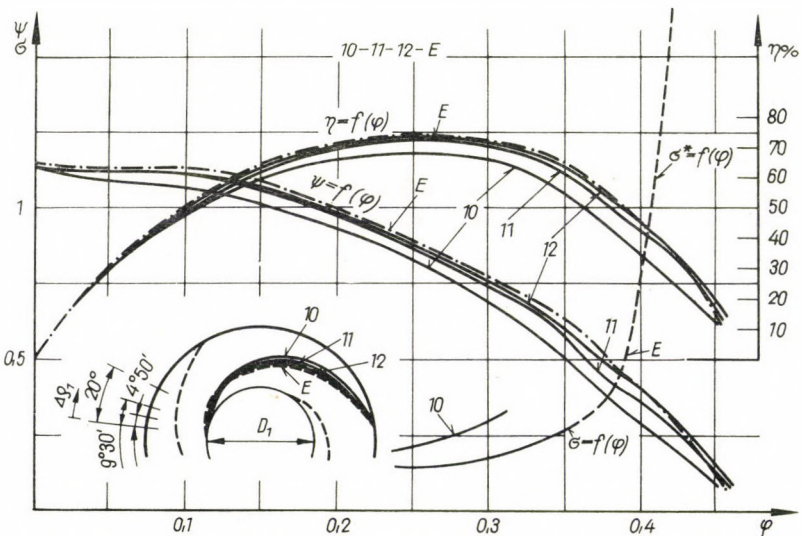


Fig. 5. Characteristic curves of the impellers marked 10 - 11 - 12 - E; positive angular shifting on the entry edge of one blade: $+\Delta\varrho_1^\circ$

on the whole, identical with those in Figs 5 and 6. Again, considering the curves $\eta = f(\varphi)$ and especially $\sigma = f(\varphi)$ the deviations caused by the blades with a shift in the direction $-\Delta\varrho_1$, is considerable greater than with blades shifted in the direction $+\Delta\varrho_1$.

In Figs 7 and 8 we will find the effect which was observable on impellers with blades shifted in the direction of $+\Delta r_1$ and $-\Delta r_1$ respectively. With blades shifted in direction $-\Delta r_1$, the deviations of σ are greater, those of φ and η are less than with blades shifted in direction $+\Delta r_1$.

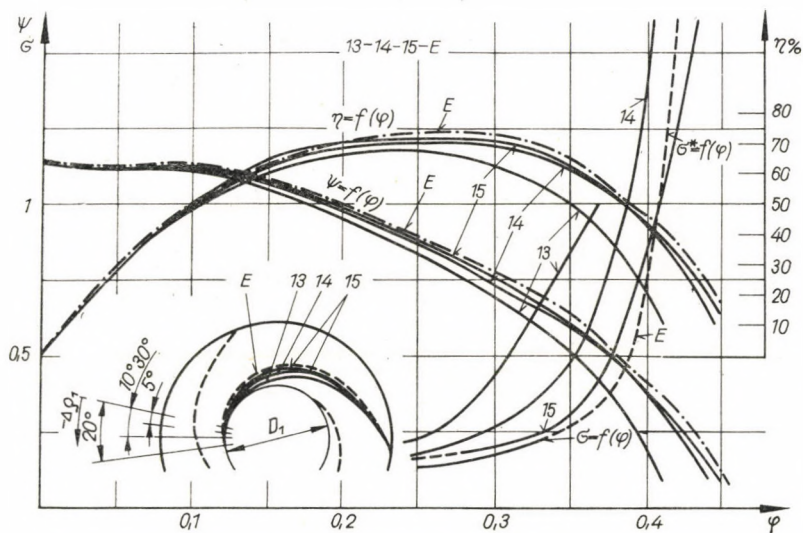


Fig. 6. Characteristic curves of the impellers marked 13 - 14 - 15 - E; negative angular shifting on the entry edge of one blade: $-\Delta\varrho_1^\circ$

In Fig. 9, the diagram shows in curves as functions of $\Delta\varrho$ and Δr_1 , the plotted deviations ($\varepsilon\%$) of the delivery head of all the impellers under test as compared to the delivery head of the master impeller, always with a water delivery corresponding to the maximum efficiency of the master impeller. From this diagram, the following can be stated:

1. In relation to the vertical through the point of zero shift, the curves corresponding to the same absolute values in the positive and the negative shifting directions, are not symmetrical.

Otherwise, this can be followed from the different restriction values of the impeller channel as mentioned before.

2. The most outstanding decrease of the delivery head is observed with blades shifted in the radial direction.

3. Under the given conditions, the less significant deviations are those caused by impellers with blades having an angular shift at the entry edge.

In the usual acceptance specifications for pumps, the allowed deviation of the delivery head caused by manufacturing defects amounts to 2%. In Fig. 9, a dotted horizontal line illustrates the level of this 2%.

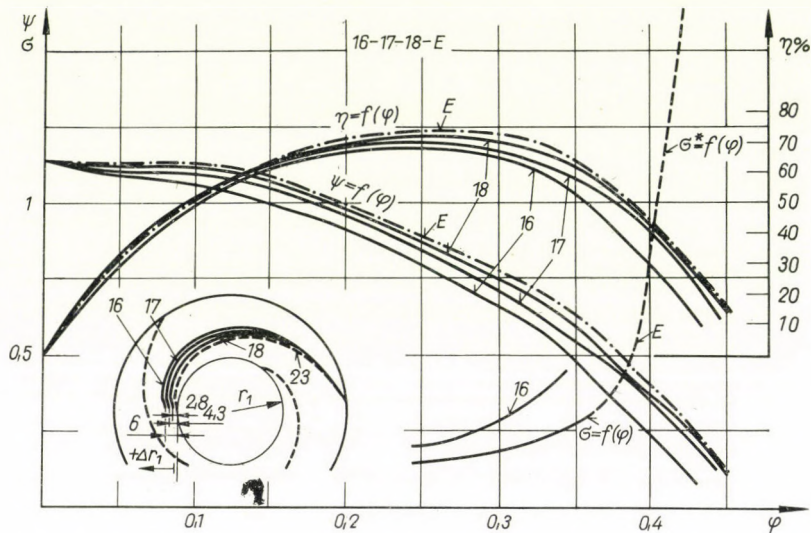


Fig. 7. Characteristic curves of the impellers marked 16 – 17 – 18 – E ; positive radial shifting on the inner tip of one blade: $+\Delta r_1$

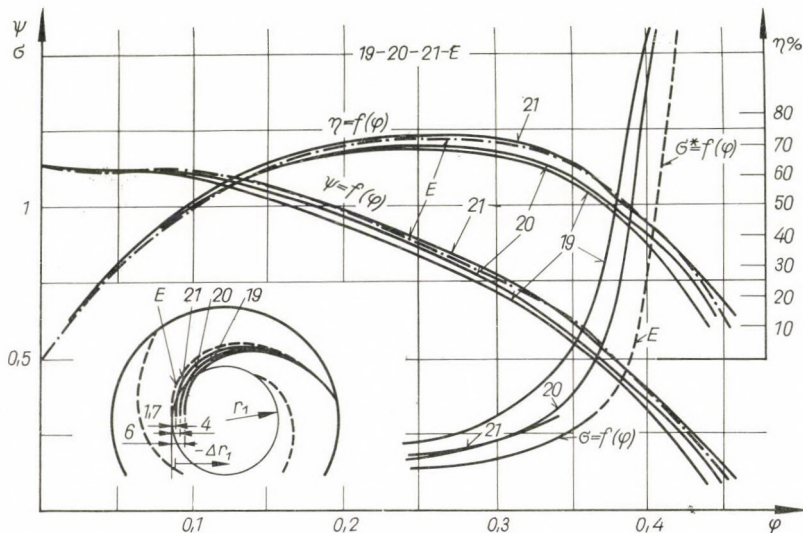


Fig. 8. Characteristic curves of the impellers marked 19 – 20 – 21 – E ; negative radial shifting on the inner tip of one blade: $-\Delta r_1$

In considering what is told in the above exposition, the impeller type applied in our research work can be considered as acceptable with the following inaccuracies of workmanship:

- a) With a radial shift of 3 mm in the positive, and
- b) of 4,4 mm in the negative direction.
- c) At the outlet diameter, with an angular shift of 7° in positive; and
- d) $8,5^\circ$ in negative direction.
- e) At the inlet diameter, with an angular shift of 9° in the positive; and
- f) of 10° in the negative direction.

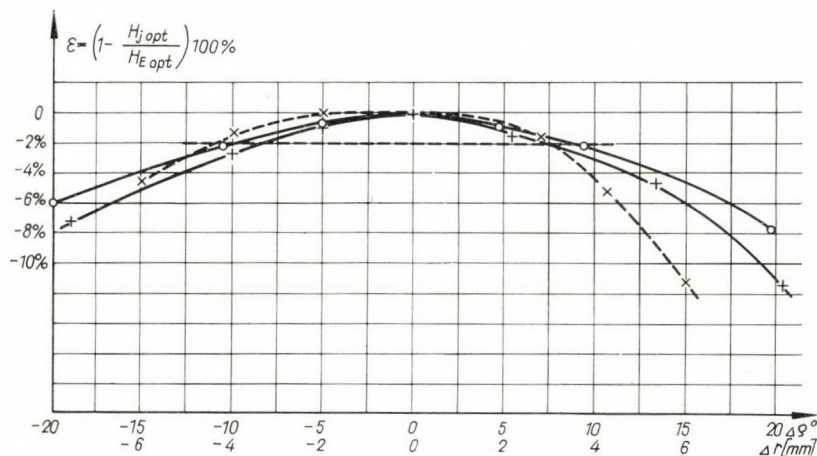


Fig. 9. Variation of the delivery head in % depending on the various inaccuracies of workmanship

Plotted + points: values for angular shift on the inlet edge; plotted o points: values for angular shift on the inlet edge; plotted x points: values for radial shift of the inner blade tip

Of course, the tested pieces having an intentional defect comprise only a small group in comparison to the vast variety of probable errors. We never thought it possible to include in our research work the totality of all chances; in the rather narrow field of actual investigation, we had to carry out an unusual large work (because of 19 various impellers and a lot of 1600 measured points).

In order to have a thorough insight into the effect of manufacturing inaccuracies, the work to be done is immense. It is important to include into this research activity the problem of surface roughness and form deviation of blades. As it is probable, change of impeller dimensions and change of speed would bring about results that much differ from the here described ones. It is to be understood that we shall and will continue our work in a systematic way.

REFERENCES

1. STVRTECZKY, F.—SZABÓ, Á.: Kísérleti szivattyúkerekék és hidraulikus tengelykapcsolók előállítása kemencében történő keményforrasztással (Construction of pump impellers and fluid-coupling wheels by means of brazing in a furnace). *Gép* **13** (1961), 100.
2. VERBA, A.—SZABÓ, Á.—STVRTECZKY, F.: Influence of the Precision of Manufacture on the Characteristics of Pumps. *Acta Techn. Hung.* **33** (1961), 53.
3. VERBA, A.—SZABÓ, Á.—STVRTECZKY, F.: The Influence of Manufacturing Inaccuracies on the Characteristics of Centrifugal Pumps. *Engineers Digest* (1961); July, 78.
4. SZABÓ, Á.—STVRTECZKY, F.: Félignyitott járókerekek szívóoldali előlapja lekerekítésének befolyása a szivattyú jellemzőire (Influence of the rounding off at the front-shroud of the half open suction side of the impeller on the characteristics of pump). *Gép* **17** (1965), 41.

EINFLUSS DER FERTIGUNGSUNGENAUIGKEIT AUF DIE PUMPENCHARAKTERISTIK

F. STVRTECZKY und Á. SZABÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Um den Einfluß von Erzeugungsfehlern auf die Pumpencharakteristik zu erforschen, hatten die Verfasser zweckbewußt mit vorgeschriebenen Formfehlern behaftete Schaufelräder hergestellt. Zu den Versuchen wurden Laufräder mit je 3 Schaufeln von derselben geometrischen Gestalt hergestellt. Für die Prüfung wurde immer nur je eine Schaufel fehlerhaft gestaltet, alle anderen Dimensionen blieben vorschriftsgetreu. Es wurden für 18 Schaufelräder, die mit der absichtlich vorgeschriebenen Formfehler verfertigt wurden, die Charakteristik-Kurven, und auch die Kurve der Saugfähigkeit (Saughöhe) durch Messen aufgenommen. Alle diese Ergebnisse hatte man mit den bezüglichen Kennzahlen des einen, formgetreu gestalteten Schaufelrades verglichen. Man konnte feststellen, daß bereits relativ kleine Formfehler leicht beobachtbare Abweichungen in den Charakteristik-Kurven verursachen. Abschließend wurde normgemäß eine zulässige Abweichung der Lieferhöhe von 2% angenommen und mit Hilfe dieser Koordinatenhöhe für die untersuchte Laufradbauart die Grenzen der noch ertragbaren Maßabweichungen aus dem Diagramm festgestellt.

L'EFFET DES DÉFAUTS DE FABRICATION SUR LES CARACTÉRISTIQUES DE LA POMPE

F. STVRTECZKY et Á. SZABÓ

RÉSUMÉ

Les auteurs cherchant à élucider l'effet que les imprécisions survenues en cours de fabrication peuvent avoir sur les caractéristiques de la pompe, ont fabriqué intentionnellement avec défauts des roues ayant trois aubes de forme identique. En vue des essais, on a veillé à ce que le défaut ne porte que sur une des dimensions de l'aube, les autres ayant été respectées. Les auteurs ont relevé les courbes caractéristiques et mesuré la capacité d'aspiration des 18 roues défectueuses pouvant être classées en trois groupes principaux. Les résultats ont été comparés ensuite à ceux des mesures faites sur la roue étalon d'une fabrication «sans défaut». Les auteurs ont constaté que des écarts même faibles dans les dimensions de la roue à aubes provoquent des variations apparentes dans les courbes caractéristiques et la capacité d'aspiration. L'étude admettant une diminution de 2% de la hauteur de levage prévue, passe en revue, pour la roue examinée, les défauts de fabrication encore acceptables en vertu des normes de réception.

ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТОВ ОБРАБОТКИ НА ПОКАЗАТЕЛИ НАСОСОВ

Ф. ШТВРТЕЦКИ и А. САБО

РЕЗЮМЕ

Для выяснения влияния, оказываемого на показатели насосов неточностями, возникающими в процессе обработки, авторы искусственно изготовили «дефектные» рабочие колеса, оснащенные тремя идентичными по форме лопастями каждое. Исследования производились так, что отклонение допускалось только по одному размеру одной из лопастей, а остальные размеры соблюдались. Характеристики 18 дефектных рабочих колес, которые можно сгруппировать в три основных группы, были сняты авторами, и насосы были подвергнуты также испытанию всасывающей способности. Полученные результаты были сравнены с данными измерений, выполненных при помощи «недефектного» эталонного рабочего колеса.

Установлено, что даже относительно небольшие отклонения, допущенные в размерах рабочего колеса, вызывают заметные изменения характеристик и всасывающей способности. Допуская падение расчетного напора порядка 2%, в работе перечислены все те производственные неточности, которые в случае замеренного рабочего колеса еще допустимы на основе приведенных выше технических условий приемки.

PARTICULAR PROBLEMS IN CHIP-ROOT RESEARCH

Á. KARDOS and P. STAHL
TECHNICAL UNIVERSITY BUDAPEST

[Manuscript received May 8, 1964]

Object of this paper is one of the main problems of machining research, especially the preparation of chip-root microsections. After a short review of methods for the breaking off of chip formation, author gives a description of a new break off apparatus, its function and a calibrating process based on electric records. As can be seen from the results of the experiments this apparatus is suitable for testing purposes with an accuracy generally obtained in laboratory works.

I. Introduction

When studying problems on machining, special attention should be paid to the formation of chip-root. It is TIME [1] who was the first to make researches in this field. The principles laid down in his work served as basis for PIISPANEN [2] and MERCHANT [3] for further experiments.

The established relations were obtained by theoretical considerations and practical control-tests as well. One of the usual experimental procedures is the analysis of the chip-root-formation. The above mentioned researchers have based their analytical work also on the study of the chip-root. Here in Hungary, it was L. KAZINCZY [4] the first to make chip-root tests as the basis of machining research.

Generally, there are four accepted ways for chip-root tests:

- a) Observation of the face on the machined workpiece [5];
- b) stress-optical tests [6];
- c) quick photography on films [7];
- d) preparation of ground micro-sections [8].

This last method will be dealt with in this paper.

For the purpose of chip-root research, the machining operation has to be broken off at the very moment when the chip has not been torn off yet. Thus, after having cut out the portion around the chip-root, the picture of the chip being connected with the work-piece appears in the micro-section, showing the effects of deformation.

The whole procedure of preparing such a micro-section can be considered as routine work, except for the break off of the operation that calls for the solution of some further problems. Namely, in order to obtain the picture

described above, the tool has to be withdrawn at a speed surpassing the cutting speed. Researchers have developed several methods of break off. Some of them that were considered as being relevant for the purpose of further improvement are described below.

II. Methods of break off

Some of the devices for break off are shown in Fig. 1.

System PÁTKAY, 1928 [9]: In this drilling device, the cylindric workpiece is fastened by a fixing pin; this pin when struck off, the cylindric workpiece turns together, with the rotating drill, thus the tool ceases chipping. The vulnerable point is that the rotation of the workpiece slowly reaches the speed of the drill, consequently, chip building, especially the formation of the chip-root is carried out at varying speeds; these not quite perfect relations are unavoidable because of the existing geometric conditions and the rather low speed of striking off.

System WALLICHS—OPITZ, 1933 [10]: The experiments were made by means of a chuck having pneumatic or hydraulic control. Through a quick chuck release the workpiece ceases rotating, since the chip gets caught on the tool. The weak point is the same as with the PÁTKAY system. Because of inertia and elasticity characteristics of the pneumatic or hydraulic system,

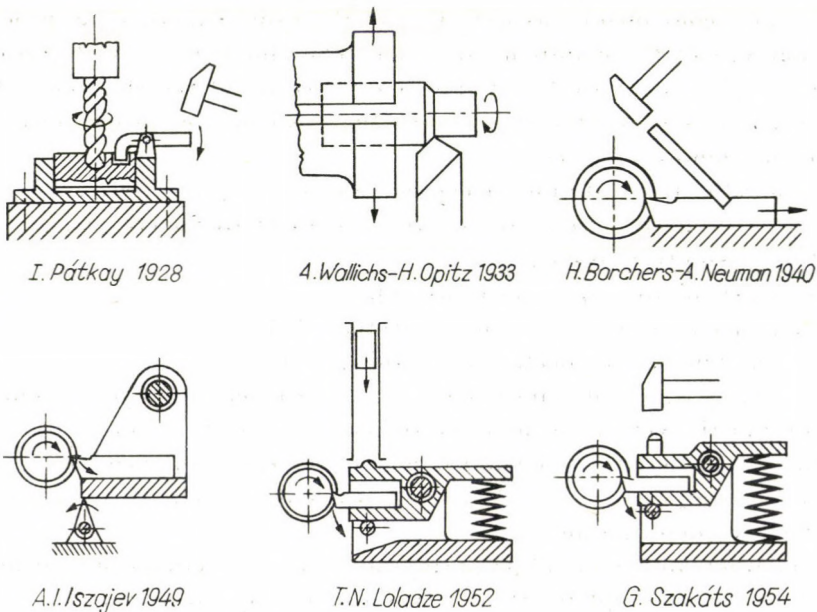


Fig. 1. Types of break off apparatuses

no instantaneous break off of the operation is possible. Clamping force decreases gradually, and so does the rotation of the piece, until the final stop.

System BORCHERS—NEUMANN, 1940 [11]: Break off is simply made by a sudden backwards stroke on the tool. A very simple method, although its drawback is that at the very moment of the withdrawal the piece does not cease rotating and thus the finally detached chip is flung against the tool face, which exerts a bending effort on the undetached chip. Consequently, a regular root-forming cannot be assumed.

System ISSAYEV, 1949 [12]: A device, that differs from the former ones inasmuch as the toolholder is of the swivelling type; a trigger when swung aside serves to break off the supporting action exerted on the tool against the cutting force. By striking of the trigger, the machining operation can be broken off at any given moment. The common gravity centre of the tool-toolholder system is between the point of application of the cutting force and the fulcrum pin; therefore, both the cutting force and the weight of the tool-toolholder system act in favour of a quick break off. With this kind of device, the real cutting conditions are, as far as chip-root formation is concerned, possibly assured. Although it takes a little time until the speed of the falling tool equals the speed of the workpiece. The main task, the author intended to solve by means of this device, is the investigation of the built-up edge.

System LOLADZE, 1952 [13]: This device is designed on the principle of the falling too. In order to increase the speed of the striking-off action, a prestressed pressing spring and a falling weight are provided. The toolholder is supported by a so-called break-pin, having dimensions that suffice for the combined load formed by the cutting force and by the prestressed spring. Again, under the action of the falling weight, the break-pin fails, and the summed effect of the cutting force, the spring force and the dynamic shock generated by the falling weight causes the toolholder and the tool to swivel downwards. In the paper by LOLADZE theoretic calculations based on geometric and kinematic relations are given in order to analyze the velocity and acceleration relations, and to find the time during which the tool ceases cutting. It seems that tool-root pictures obtained by the LOLADZE system closely approach real machining conditions. Only, the proper assembly of a 3 m long guide tube for the falling weight is rather inconvenient, and vibrations excited by the falling weight may exert some undesirable influence.

System SZAKÁCS, 1953 [14]: As the author explains, this device represents an improvement of the LOLADZE apparatus. As a fellow-worker of the Research Institute of the Iron Industry in Budapest SZAKÁCS carried out some simplifications. First, for the falling weight and the heavy tube, a striking hammer was substituted. With respect to the relatively small dynamic shearing force, the break pins are dimensioned strictly for the shearing limit. Anyhow, the hammer stroke is likely to excite troublesome vibrations.

After a thorough analytical study of the devices described afore, even of others made known by other scientific authorities, we decided to elaborate a new type of apparatus for the breaking up of chipping operation, namely, to create a device by which the break off does not excite vibrations, easy to operate, the kinematic processes being clearly determined, and by which cutting operations with relatively greater speeds can be broken off without troublesome effects.

III. Development of a new testing apparatus

This apparatus has been elaborated with a view to create a device that is suitable for application on a lathe type EU 500. Our apparatus can be mounted, after having removed the hand slide and the tool holder, directly onto the cross slide. For testing purposes, a free recessing operation was chosen as suitable for obtaining a regular chip-root formation. This choice is equally favourable in view of a simple design of the device and to ensure an easy removal of the chip-root from the workpiece.

In Fig. 2, the schematic diagram of the apparatus is shown.

The cutting tool *1* is fixed into the cradle type toolholder *2*. A pivot fulcrum axis, supported by ball bearings, serves to tilt the cradle downwards. A double coil spring *B*, mounted beneath the cradle and bearing up against the cradle frame, is arranged so as to increase the tilting speed. The supporting

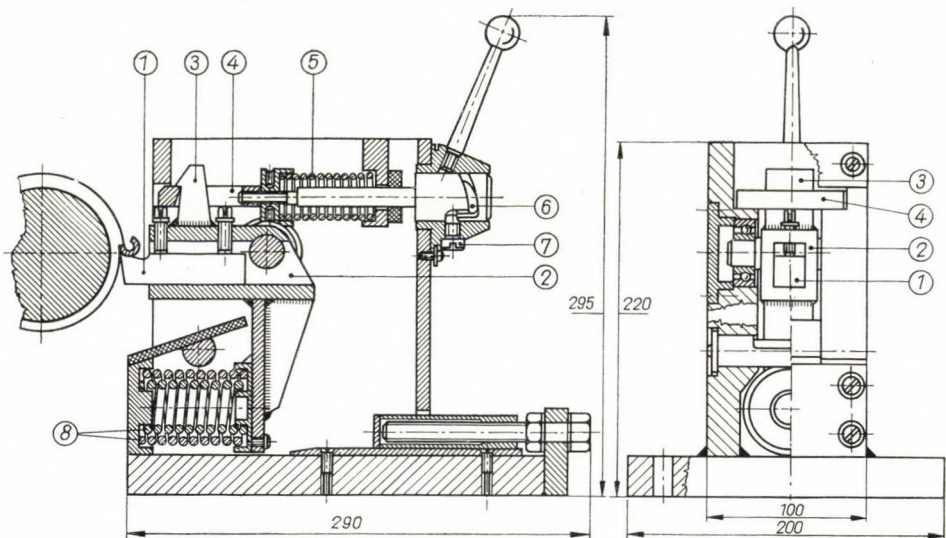


Fig. 2. New type of break off apparatus, developed at the Department of Technology of Machine Production, Technical University Budapest

effect is secured by the trigger 3, welded to the cradle and propped up by bridge 4, that acts against the cutting force and the spring. This bridge is smoothly guided by the side walls of the frame which are finished by lapping; thus, the bridge can easily be moved in feed direction to and fro. On the extension pin of the bridge a steering groove 6 is provided, with a steering screw — plug 7 mounted in a controlling rotatable ring. The steering mechanism is designed to control the movement of the bridge. At a given moment — determined by the position of the steering pin and the steering groove — the bridge (together with the steering groove) is suddenly pushed forwards by the coil spring 5. This coil is fixed by its rear end onto the crossbar in the main frame.

The whole device was built to carry out the following sequence of operations: in the upper position of the cradle, trigger 3 is kept in fixed position by the bridge. Thus, the machining operation can be done regularly. In order to break off the machining, a knob handle is mounted onto the rear wall of the device. By turning this handle, a tapered ring, in which the steering screwpin 7 is fixed, serves to turn the steering groove 6 round. At the very moment when the screw-plug reaches the axial straight portion of the steering groove, the pressing spring 5 is freed from compression and the whole bridge is pushed forward. By this motion trigger 3 is freed without the supporting surface and the cradle, together with the tool, tilts downwards because the supporting force was broken off, under the summed action of the cutting force and the force of spring 8. The tilting movement of the cradle is limited by a cylindric cross beam below the frame; a rubber sheet is arranged in order to absorb the energy of the falling cradle and to protect the frame from falling chips. In order to lift the cradle into its working position, a screw bolt is arranged at the rear side of the frame, the section of which is aided by a female screw that pushes the bracket. When tool 3 is lifted and reaches the necessary height, the knob handle is turned to the wanted position in which the steering groove gives way to the bridge for being pulled back into working position and to the steering screw plug for being brought into fastening position. Of course, during the following cutting operation, the tilting down of the cradle can be carried out by an appropriate turning of the knob handle.

The apparatus is designed for a cutting force of 150 kp; the prestressed spring (8) exerts a force of 250 kp.

IV. Investigation of the break off procedure

The usual estimation of the chip-root section alone does not suffice for the thorough functional analysis of the break off device. An additional investigation of the kinetic characteristics of the falling tool is most necessary. To this

end, mainly to find the basis for a well founded mathematical deduction, we had to develop the appropriate measuring method and the instruments, too, which would be the most suitable for control purposes.

At the very moment of break off, the tool begins to move from a zero velocity and it takes some time until it ceases cutting, whatever type of break off device is used. Practically, there is no possibility to ensure an instantaneous break off, however low the cutting speed may be. We can not but compromise by accepting the formation of chip-root with some minute deviation from the absolutely ideal case, depending on speed an acceleration of the tool during the break off.

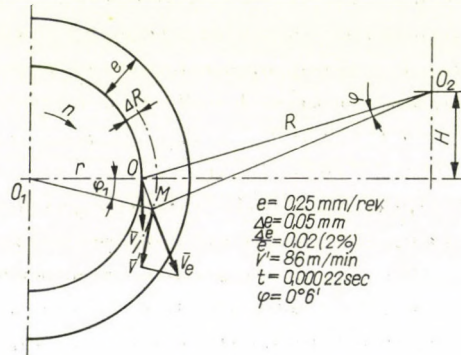


Fig. 3. Geometric relations of our break off apparatus

The device applied shall be considered as being the more satisfactory, the less the percentage deviation of the chip-root is.

Kinematical conditions of the break off procedure have been studied by LOLADZE [13]. For our purposes, we rely upon his line of thought. This can be followed by considering Fig. 3.

We denote the centre of rotation of the workpiece by O_1 , the fulcrum of the tool in the tilting device shall be O_2 and the point at which the edge of the tool is working at a given moment of operation, is denoted by O . Let the distance $\overline{OO_2}$ be R , the other distance $\overline{OO_1}$ be r . The radial feed of recessing is e .

Let the cutting speed be v , that is, of course, at the starting moment of tool tilting greater than the starting speed of tilting; the latter being zero. Consequently, at this very moment, the tool is pushed by the chip, i.e. the root is subject to some additional deformation.

Some point M is to be assumed in which the tool just reaches the cutting speed, and, of course, at points of a larger radius, this tool speed is greater than the cutting speed; the increase of tool speed being the result of tool

acceleration. Along the section Δe , i.e. in moving up to point M , the tool is in contact with the chip. Assuming a given cutting speed, the additional specific deformation of the root is the less, the less the ratio of $\Delta e/e$ is.

To start with, it shall be assumed that at point O , the tool is under the action of a constant cutting force and of a constant spring force. Only, the spring force decreases during the tilting, proportionally to spring elongation. Nevertheless, during this very small displacement of the tool, i.e. when it ceases cutting, when the angular displacement takes only 5–6 minutes, the spring force may be taken as constant. As far as the cutting force is concerned, conditions are more complicated. Namely, the movement of the toolholder is subject to the action of the cutting force as long as the falling speed of the tool (v_e) has a component coinciding with the direction of the surface speed of the workpiece, this being equal to surface speed measured at the same point M , i.e. $\bar{v}' = \bar{v}$ or, in scalar quantities:

$$v = v_e \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi + \alpha).$$

Bearing in mind that the rotary movement of toolholder, when tilting down around the fulcrum O_2 , is characterized by a uniform acceleration, this movement can be determined by the differential equation of the rotary movement:

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_0,$$

where

Θ is the axial moment of inertia of the toolholder for the axis of rotation O_2 ;
 $d^2\varphi/dt^2$ is the angular acceleration of the body; and
 M_0 is the applied moment having arm R and acting on the toolholder.

From the differential equation, as above, the falling time of the tool for an angular displacement φ :

$$t = \sqrt{\frac{2 \varphi \Theta}{M_0}}$$

and the falling velocity:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 R^2 \varphi \cdot M_0}{\Theta}},$$

where φ equals the angular displacement during the time t .

With due consideration of a given deviation Δe , the angle φ can be determined:

$$\varphi = \sqrt{\frac{r^2 R^2 + 2(R^2 + r^2) \cdot (R^2 - H^2) r \cdot \Delta e - rR}{R^2 + r \sqrt{R^2 - H^2}}}.$$

(All symbols are in compliance with Fig. 3.)

It is obvious, from the preceding line of thinking that we can determine, from the geometrical and mechanical characteristics of the device, the speed at point M , i.e. the limit of the cutting speed, up to which the apparatus works with a given deviation Δe , when only the ratio of $\Delta e/e$, namely, the allowed specific additional deformation of the root as a percentage of the cutting feed is predetermined.

As has already been stated, in order to ensure a break off with a root deformation within a given limit, it is indispensable for the toolholder to have a falling speed of v_e that has a component tangential to the workpiece surface at point M which equals the surface speed v' at the same point.

According to these statements, we obtain, when establishing the calculation for a given case, the following results: we assume a feed $e = 0,25$ mm/rev, and a deviation limit $\Delta e/e \cdot 100 = 2\%$ (in other words, taken from point O , the length along which the tool is in contact with the chip-root, is equal to 0,005 mm), and from these the period of time of break off is $t = 0,00022$ sec, the angular displacement during break off is $\varphi = 0^\circ 11'$ and the speed limit is $v' = 86$ m/min.

Alternatively, with an allowed deviation of 4%, (i.e. $\Delta e/e \cdot 100 = 4\%$, or $\Delta e = 0,01$ mm) we obtain: $t = 0,00029$ sec, $\varphi = 0^\circ 11'$ and $v' = 118$ m/min.

For a thorough investigation of the break off procedure we are compelled to make further studies in order to disclose the possibilities of two kinds of deviations.

One of the possible deviations may occur in connection with the constant radial feed of the tool. As is understandable, the feed speed v_s remains the same horizontally radial vector after the break off as before it was. Then according to former stipulations, the vertical velocity component tangential to the workpiece surface of the falling tool results from the peripheral velocity v_e of the rotary movement round the fulcrum O_2 and the horizontal feed speed v_s . In the critical position at point M , the resultant tangential component should equal the cutting speed v' at the same point. Let us now put the question how the feed speed v_s could have a bearing on conditions of break off and on the computable results.

Another possible deviation originates from the variation of the grinding angles of the tool during the tilting of the toolholder. More precisely, these variations occur when the tool is tilting downwards and ceases being in the horizontal position; namely, along the portion of displacement (Δe) during which the contact between tool and piece continues, the true rake angle varies. Thus, we ought to know how this variation may influence the procedure of machining and especially the formation of the chip-root. (Here we have to remark that in the case of experiments carried out by KAZINCZY [4], the above mentioned two possible deviations are not supposed to have observed by him.)

It can easily be understood that for both possibilities of deviations the

critical point is at M . This is obvious because, according to our fundamental definitions, the position of point M , or, in other words, the value of the critical speed, has to be calculated on the basis of the resultant speed vector, that is determined by the vectors v_e and v_s . Of course, the maximum deformation of the grinding angles will occur at point M , this being the very last moment of contact between tool and piece. We will here determine this deviation for the formerly cited numerical examples.

In order to find the effective velocity of the tool motion, we have to determine the resultant vector of the effective tilting speed of the tool v_e and of the feed speed v_s , with the following equations:

$$v_e = \frac{2 R^2 \varphi M_0}{\Theta}$$

and

$$v_s = \frac{n \cdot e}{1000},$$

where n denotes the number of revolutions of the workpiece. For v_e , the knowledge of the geometric parameters of the device suffices. For the value of v_s , we have to make some assumptions, viz: the radius of the workpiece $r = 100$ mm; feed/rev. $e = 0,25$ thus for an allowed critical deviation percentage we obtain $v_s = 0,034$ m/min, and for a percentage deviation of 4% we obtain: $v_s = 0,047$ m/min. With these components, the resultant deviation of the velocity v' from the critical value as calculated in the given examples, is less than 0,01 mm.

Based on the relations given in Fig. 3, the effective true rake angle can be calculated. In machining position, the basic plane is determined by the horizontal through $\overline{O_1O}$ and the tool point is at point O . In the critical position of break off, the basic plane is turned into $\overline{O_1M}$ and the tool point is displaced into M . Thus, the deviation of the true rake angle as well as that of the relief angle is equal to the sum of $\varphi + \varphi_1$, precisely the new value of the effective true rake angle is: $\gamma_m = \gamma - (\varphi + \varphi_1)$, and the effective relief angle is: $\alpha_m = \alpha + (\varphi + \varphi_1)$. We obtain the value of φ by using the equation as given above for v_e ; again for φ_1 the following equation can be used:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{[2 R \sin \varphi / 2] \cdot \left[\sin \left(90^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \arcsin \frac{H}{R} \right]}{r + \Delta e}.$$

When making use of the numeric examples as quoted above, the maximum deviations of the angles are the following: with an allowed root form deviation $\Delta e = 2\%$, the angle deviation is $0^\circ 12'$, and for $\Delta e = 4\%$, the angle deviation

is $0^{\circ} 21'$, as compared to the original grinding angles of the tool. It is to be remarked, these deviations are within the tool grinding tolerances.

Our calculations are made with some suppositions and neglections. Since we have no informations on experiments that might be carried out by making use of control records, so the more we intend to make these control measurements.

V. Measurements on the apparatus designed for chip-root examinations

For measuring purposes, a measuring block was attached to the break off apparatus. This block is mounted in the place of one bearing cup of the main frame. The block is fastened onto the shaft of the toolholder; when the tool-

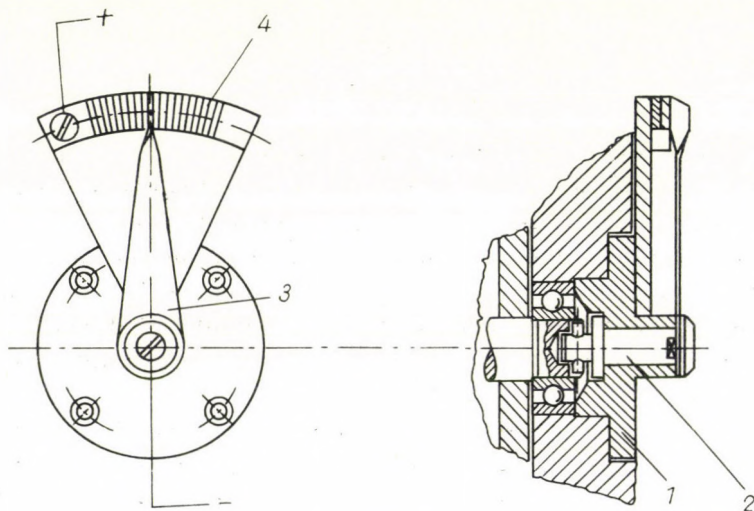


Fig. 4. Measuring block

holder is tilting downwards, the block turns away, together with the shaft. The angular velocity of this turning motion is the same as that of the tool-tilting. By measuring the angular velocity of the block, the tilting velocity of the tool is given and thus the kinematical calculation is made possible.

Fig. 4 shows the schematic diagram of the measuring block. A flange type cover 1 serves to fasten the block onto the main frame. The block shaft 2 is fixed as an extension to the pivoting shaft of apparatus. The pointer 3 turns away at the same angle as the tilting angle of the pivoting shaft. For measuring purposes, instead of an arc scale, the block bears an arc piece 4 which is composed of conductive and insulating elementary segments that are mounted alternately with each other, the conductive elements forming

an integral copper unit. By connecting the pointer to one pole, and the copper arc piece to the other pole of an electric circuit, we obtain a system in which the movement of the pointer along the copper arc closes or breaks off the circuit. Thus, electric impulses are excited, and by making use of an oscillograph the whole procedure of the tool movement can be analyzed.

This measuring block serves to calibrate the whole apparatus, in position when not machining and during machining as well. Of course, both methods of calibration should be carried out with an apparatus fixed to the lathe in its true position.

Fig. 5 shows the measuring scheme. The testing apparatus 1 is mounted onto the lathe. A low tension current is connected to the terminals of the measuring block 2 and the signals produced are lead into the loop oscillograph 3.

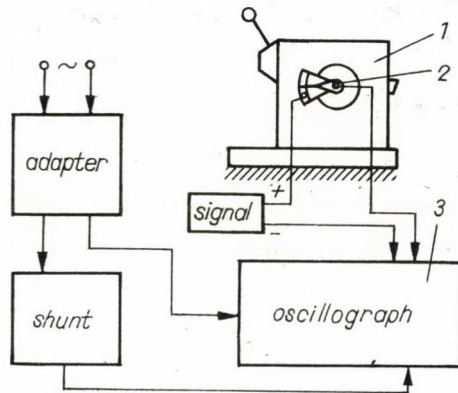


Fig. 5. Scheme of the complex measuring aggregate

This oscillograph is operated, having inserted switch resistances, by a main current. In Fig. 6, the photo of the assembled apparatus is illustrated. In this figure, 1 denotes the tilting apparatus together with the measuring block, and 2 denotes the recording oscillograph.

In Fig. 7 we have a calibrating oscillogram. On the left, the signals on scale *a* represent the frequency metering scale (corresponding to 500 Hz). The signal distance is equal to 0,002 sec. The graph *b* is the oscillogram taken from the measuring block. Points of the current breaks off are denoted by Arabic figures. The decreasing trend of the distances between these points is the proof of the acceleration of the falling tool; the signals clearly show that the whole movement of the tool lasts 0,005 sec.

The curves of velocity and acceleration of the tool point can be plotted with the aid of the oscillogram. Fig. 8 shows the velocity curve, and Fig. 9 shows the acceleration curve. Both refer to calibration without cutting operation.

The velocity diagram serves as a reliable basis for the assessment of the suitability of the break off apparatus. As can be seen from this diagram, — although, as already mentioned, it refers to a calibration procedure without machining — velocity values are remarkable enough, already at the beginning period of the break off action. In tests carried out with machining, probably greater velocity values could be observed, but these are although if they could

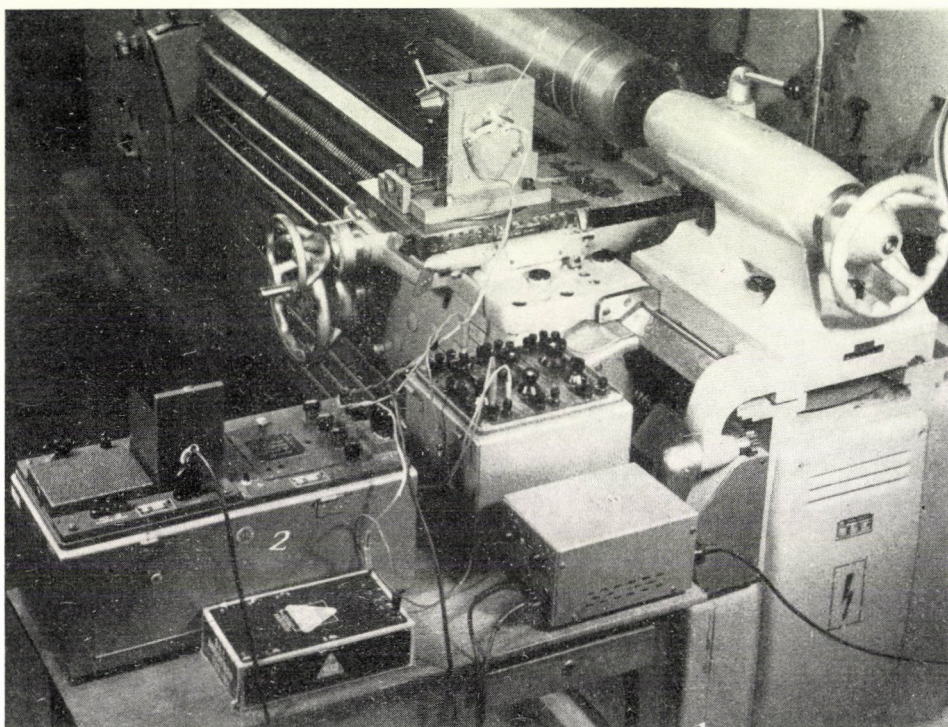


Fig. 6. Photoprint of the whole assembly
1 Measuring block mounted on the break off apparatus; 2 oscillograph

be considered as more favourable, highly dependent on cutting conditions; this is the reason why we are not in the position to take these results as decisive for the assessment of the fitness of the apparatus.

We quote here, only for the sake of some useful information, the following numerical results: with a tilting of the toolholder at an angle of $1,5^\circ$, the velocity of the tool point is 262 m/min, its acceleration is 5000 m/sec^2 , without machining. With machining, both values are probably somewhat higher.

As has already been mentioned, measurements were carried out for the purpose of checking — through experimental results — the validity of

theoretic calculations. Based on the obtained measurements, we proceeded to calculate the effective additional specific deformation for the case when the assumed parameters are feed $e = 0,25$ mm/rev, additional root-deformation

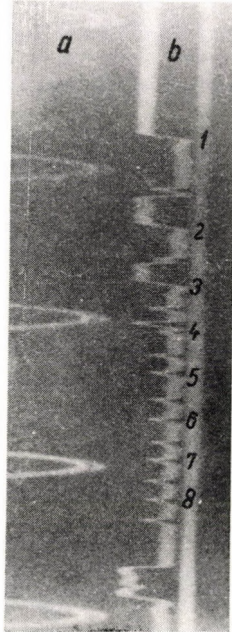


Fig. 7. Oscillogram of a break off process, made without machining

a) Time recording frequency signals (distance between two peaks equals 0,002 sec); b) break off process signals

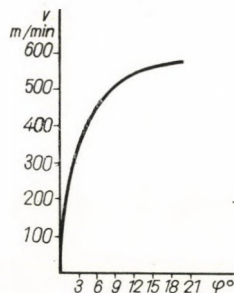


Fig. 8. Velocity diagram of the break off process

v velocity; φ tilting angle of the toolholder

$\Delta e/e = 2\%$, and with a cutting speed of 86 m/min as was previously determined. By our calculations from actual results this speed is reached, without machining, at an angular displacement of $0^\circ 10'$, and accordingly, the additional specific deformation is abt. 4%, that is to say that for this assumed

example, the contact between tool and chip exists, after the moment of break off, at a length of abt. 0,01 mm. It is to be noted that this value in itself is to be considered as the most favourable, but it is greater than the theoretic one.

As a matter of fact, results obtained by the usual theoretic calculations are exaggerated values. Without dealing with the errors that are surely to be found in starting assumptions of the theoretic calculations and in the neglections, we feel compelled to declare that theoretic calculations unquestionably call for a checking by experiments. Although, the control testing

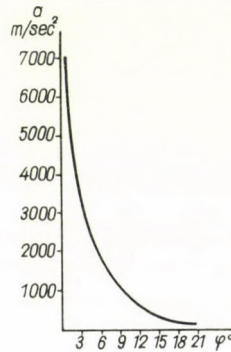


Fig. 9. Acceleration diagram of the break off process
 a acceleration; φ tilting angle of the toolholder

methods are not free from possible errors, mainly because the transient processes after break off cannot be precisely observed and determined, nevertheless, experimental results and measurements can be considered as a better approximation of actual relations than the theoretic calculations.

VI. Review of results

When reviewing the testing methods of chip-formation, special importance has to be ascribed to ground micro-sections. By means of these, we are able to reveal the changes that occur on the chip-root.

As was stated above, it is the most difficult task, when trying to get a true picture of chip-root formation, to carry out a really instantaneous break off. We have seen, in what was stated in the introduction, that all the previously developed methods and devices involve a more or less after-deformation of the chip-root.

Just this statement has lead us to develop a new apparatus for the realization of break off, that allows to prepare chip-roots of a greater accuracy.

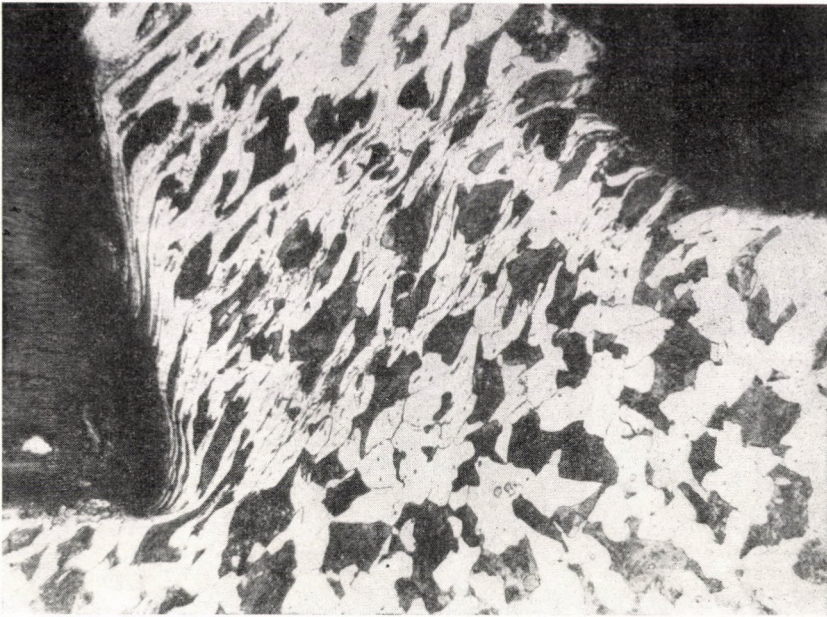


Fig. 10. Chip-root micro-section of steel "C35"

Feed $e = 0,25$ mm rev; cut depth $f = 3$ mm; cutting speed $v = 63$ m/min; magnification $100 \times$

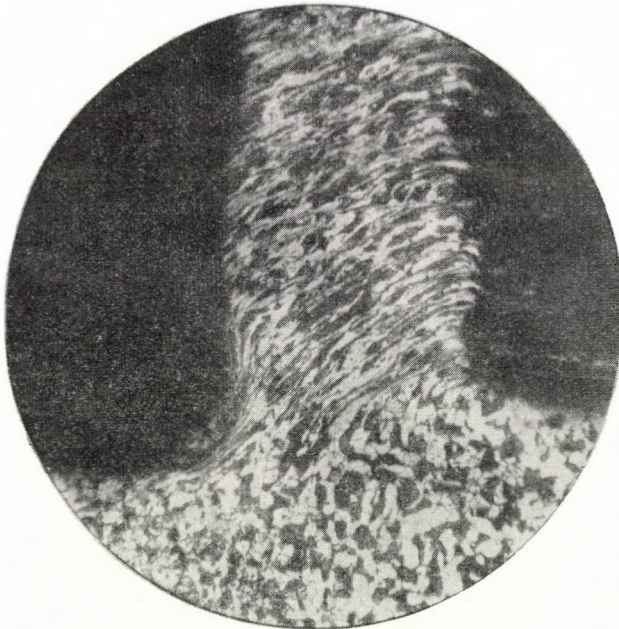


Fig. 11. Chip-root micro-section of steel "C35"

Feed $e = 0,25$ mm rev; cut depth $f = 3$ mm; cutting speed $v = 50$ m/min; magnification $100 \times$

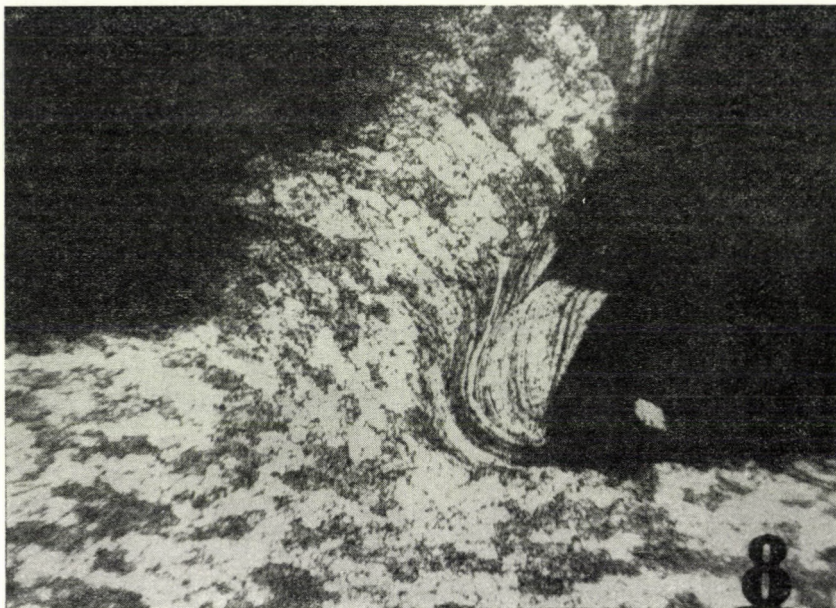


Fig. 12. Chip root micro-section of aluminium alloy
Feed $e = 0,3$ mm rev; cut depth $f = 3$ mm; cutting speed $v = 32,5$ m/min; magnification $63 \times$



Fig. 13. Chip root micro-section of aluminium alloy
Feed $e = 0,3$ mm rev; cut depth $f = 3$ mm; cutting speed $v = 45$ m/min; magnification $63 \times$

The error or deviation that occurs when the chip-root is prepared at a given cutting speed, can be determined with the aid of our elaborated calculating method, on the basis of a theoretic deduction.

The calibration method, elaborated on the basis of electric recording, is — as can be inferred from scientific informations — the first to be on the track of the whole break off process.

Thus, this apparatus is suitable for the purpose of reproducible, controllable series of measurements with an accuracy to be obtained in laboratories just in this central problem of machining research: investigation of chip-root.

Without trying to evaluate the chip-root pictures, we shall draw the attention to some micro-sections, that have been prepared, by means of the described apparatus, from free cutting steel, and aluminium alloy under the same machining conditions, by cutting a 3 mm thick chip.

Tests on a steel "C35", true rake angle of the tool $\gamma = 14^\circ$: Figs 10 and 11.

Tests on an aluminium-alloy (Cu 2,8%, HB = 61 kp/mm²), true rake angle of the tool $\gamma = 30^\circ$: Figs 12 and 13.

From simple visual observation one can easily state, how the chip formation is different, on the one hand, when the machined material is steel, and on the other, when aluminium alloy is machined; other kinds of deviations are obvious when comparing various machining parameters: values of speed and cut depth. The respective values are given in the figures quoted.

REFERENCES

1. TIME, J. A.: Mémoire sur le rabotage des métaux. St. Pétersbourg 1877.
2. SZAKÁCS, GY.—KRAUSZ, S.: A fémforgácsolási folyamat mechanikája (Machining of metals as a mechanical procedure). *Gép* (1955), 431.
3. MERCHANT, M. E.: Mechanics of the Metal Cutting Process, I. *Journal of Applied Physics* (1945), Nr. 5.
4. KAZINCZY, L.: Az acél esztergálása közben a forgácsleben létesülő alakváltozások vizsgálata (Investigation of chip-root deformations during steel machining on a lathe). Műszaki doktori értekezés, Budapest 1939.
6. COKER, E. G.—FILON, N.: A Treatise on Photo-Elasticity. Cambridge 1957.
7. SCHWERD, F.: Neue Untersuchungen zur Schnitt-Theorie und Bearbeitbarkeit. *Stahl u. Eisen* (1931), 481.
8. USSATCHEV, G.: Yavleniya proishodyaytchiye pri rezanyiy metallov. Petrograd, 1915. (See in Russkyie Utchenye, Osnovopolozhnyiki nauki o rezanyiy metallov. Mashgiz, Moscow 1952.)
9. PÁTKAY, S.: Bearbeitbarkeit und Bohrarbeit. *Werkstattechnik* (1928), 677.
10. WALLICHS, A.—OPITZ, H.: Spanentstehung und Oberflächengüte. *Z. VDI* (1933), 924.
11. BORCHERS, H.—NEUMANN, S.: Untersuchungen über die Zerspanbarkeit von Leichtmetall-Automaten Legierungen. *Aluminium-Arch.* (1940), 1.
12. ISSAYEV, A. I.: A felületi rétegeképződés folyamata a fémek forgácsolása során (Hungarian translation from the Russian original. "Surface layer formation on machined metals"). Akadémiai Kiadó, Budapest 1953.
13. LOLADZE, T. N.: Struzhko-obrazovanye pri rezanyiy metallov. Mashgiz, Moscow 1952.
14. SZAKÁCS, GY.: Forgácső vizsgálathoz készülék (Chip-root testing device, MS). Gépipari technológiai intézet, Budapest 1954. Kézirat.

EINIGE FRAGEN DER SPANWURZEL-UNTERSUCHUNG

Á. KARDOS und P. STAHL

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Abhandlung besprechen die Verfasser die Herstellung von Mikroschliffen an der Spanwurzel, um dadurch zur besseren Einsicht in die Zerspanungsvorgänge zu gelangen. Nach Übersicht der bisher bekannten Methoden der Unterbrechung der Spanbildung wird hier eine neue Bauart eines Unterbrecherapparates, seiner Funktionsweise und auch eine elektrisch betriebene Registriervorrichtung zur Kalibrierung des Apparates besprochen. Die Untersuchungsergebnisse zeugen dafür, daß wir hier mit einem Apparat und einem Verfahren zu tun haben, mit deren Hilfe verläßliche Meßergebnisse mit der üblichen Laboratoriumsgenauigkeit erzielt werden können.

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A L'EXAMEN DE LA BASE DES COPEAUX

Á. KARDOS et P. STAHL

RÉSUMÉ

L'article étudie la production de micropolissures permettant l'étude du processus de formation des copeaux. Les principales méthodes d'interruption de la coupe sont examinées par les auteurs, qui décrivent aussi un nouvel appareil interrupteur, en analysent le fonctionnement et font connaître le dispositif d'enregistrement servant à l'étalonnage de l'appareil. Les données obtenues permettent de conclure que l'appareil se prête aussi à des mesures en série d'une précision de laboratoire.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОРНЯ СТРУЖКИ

А. КАРДОШ и П. СТАЛЬ

РЕЗЮМЕ

Статья посвящена одному из методов исследования корня стружки в процессе ее образования, а именно изготовлению микрошлифов. Рассматриваются важнейшие методы прерывания снятия стружки. Описывается новое устройство для прерывания снятия стружки. Дается анализ процессов движения приспособления. Излагается метод, разработанный для выверки с регистрацией приспособления. На основе полученных данных можно установить, что приспособление пригодно также для выполнения серийных измерений лабораторной точности.

THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG DER BILDSAMEN STAUCHUNG VON PRISMEN MIT RECHTECKIGER BASIS

J. GULYÁS

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 18. Mai, 1964]

Bei der Stauchung rechteckiger Prismen mit ungleich langen Seiten zwischen parallelen Druckflächen kann die Analyse der auftretenden Spannungen und Formänderungen nur auf Grund einer räumlichen Betrachtung erfolgen. Die Zusammenhänge zwischen Spannungen und Formänderungen in gegebenen Punkten des verformten Körpers werden vom Verfasser versuchsmäßig nachgewiesen. Auf Grund der versuchsmäßig festgelegten Zusammenhänge werden weiter die Spannungen und Formänderungen in Abhängigkeit von den Raumkoordinaten des Probekörpers und den äußeren Umständen unter Annahme gewisser Vereinfachungen bestimmt.

Bezeichnungen

h	Höhenmaß des Probekörpers in irgendeinem Zeitpunkt, mm;
k_f	Verformungsfestigkeit, kg/mm ² ;
n	= x_0/y_0 , Verhältniszahl der Seitenkanten des rechteckigen Prismas;
R	} Polynome Funktionen der Raumkoordinaten und des Reibungskoeffizienten;
S	
T	
x_0	Ausgangsmaß des Probekörpers in Richtung der x -Achse (Länge), mm;
y_0	Ausgangsmaß des Probekörpers in Richtung der y -Achse (Breite), mm;
z_0	Ausgangsmaß des Probekörpers in Richtung der z -Achse (Höhe), mm;
x	x -Koordinate der Punkte auf der Oberfläche des Körpers;
y	y -Koordinate der Punkte auf der Oberfläche des Körpers;
z	z -Koordinate der Punkte auf der Oberfläche des Körpers;
α	Winkel zwischen x -Achse und der Verschiebung eines gegebenen Punktes auf der Oberfläche des Probekörpers;
μ	Reibungskoeffizient zwischen den Druckplatten und den Flächen des gestauchten Körpers;
ε_i	beliebig gerichtete Formänderung;
ε_x	} Formänderungen des aus dem Probekörper geschnittenen elementaren Prismas mit quadratischer Basis in Richtung der x -, y -, z -Achse;
ε_y	
ε_z	
$\dot{\varepsilon}_x$	} Geschwindigkeit der Formänderungen in Richtung der x -, y -, z -Achse;
$\dot{\varepsilon}_y$	
$\dot{\varepsilon}_z$	
σ_i	beliebig gerichtete Spannung;
σ_x	Spannung im Probekörper in Richtung der x -Achse, kg/mm ² ;
σ_y	Spannung im Probekörper in Richtung der y -Achse, kg/mm ² ;
σ_z	Spannung im Probekörper in Richtung der z -Achse, kg/mm ² ;
σ_m	mittlere Spannung in irgendeinem Punkt des Probekörpers;
τ_x	äußere Schubspannung auf der Oberfläche des Probekörpers in Richtung der x -Achse, kg/mm ² ;
τ_y	äußere Schubspannung auf der Oberfläche des Probekörpers in Richtung der y -Achse, kg/mm ² ;
λ_x	Dehnung des Probekörpers in der x -Richtung, mm;
λ_y	Dehnung des Probekörpers in der y -Richtung, mm.

I. Einleitung

Die Erscheinungen bei der Stauchung zwischen parallelen Platten, d. h. die dabei auftretenden Spannungen und Formänderungen lassen sich im Vergleich zu den übrigen Formungsmethoden am einfachsten darstellen. Der Grund für diese Einfachheit und Übersichtlichkeit besteht darin, daß während der Formung in einem gegebenen Zeitpunkt die in Richtung der Stauchung wirkende Hauptformänderung, auf den ganzen Rauminhalt bezogen, nahezu konstant bleibt.

Dieser Tatsache ist es zuzuschreiben, daß die Erscheinungen bei der Stauchung zwischen parallelen Platten sehr viele theoretische Lösungen gefunden haben, die durch ausgiebige Versuchsergebnisse belegt sind [1, 2, 3, 7].

Die bisherigen Ansätze gingen immer von einem zweidimensionalen Formänderungszustand aus und können dementsprechend die Wirklichkeit nur bei der Stauchung kreissymmetrischer Körper oder dann darstellen, wenn sich irgendeine der Hauptdimensionen des gestauchten Körpers während der Stauchung nur in einem vernachlässigbaren Maße oder überhaupt nicht ändert. Bekanntermaßen ist der letztere Fall dann gegeben, wenn die beiden Abmessungen des gestauchten Körpers, die normal zur Stauchrichtung sind, voneinander wesentlich abweichen.

Bei Körpern mit anderen Verhältnissen ergeben die auf Grund zweidimensionaler Formänderungszustände abgeleiteten Ansätze gewisse Abweichungen von den tatsächlichen Verhältnissen.

In letzter Zeit befaßten sich hauptsächlich sowjetische Forscher mit der Untersuchung der Erscheinungen bei der Stauchung elliptischer oder prismatischer Körper. Diese Untersuchungen waren jedoch darauf gerichtet, die Körper, von zweidimensionalen Formänderungszuständen ausgehend, in Teile mit zweidimensionalen Formänderungen zu zerlegen, und auf diese Weise Ansätze für die gegebenen Fragen zu finden [2, 8].

Obwohl diese Ansätze gegenüber der einseitigen zweidimensionalen Betrachtung eine Annäherung an die Wirklichkeit bedeuten, weisen sie nicht auf den gegenseitigen Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen hin. Dementsprechend sind sie auch nicht geeignet, die Wirkungen der äußeren Umstände (Reibung) in einen organischen physischen Zusammenhang mit der Formänderung und den auftretenden Spannungen zu bringen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine Analyse der Erscheinungen bei der bildsamen Stauchung von Prismen mit rechteckiger Basis, bei verschiedenen Verhältnissen der Kanten, zwischen parallelen Platten, im Hinblick auf die räumlichen Formänderungen und die angenäherte Darstellung der räumlichen Formänderungen und Spannungen bei konkreten äußeren geometrischen und technologischen Bedingungen.

Die annähernden Ansätze der vorliegenden Arbeit ergeben zwar keine exakten Resultate, sind aber geeignet, die wahren Verhältnisse übersichtlich darzustellen. Zugleich weisen sie den Weg für eine dreidimensionale Analyse anderer, komplizierter Formungsverfahren.

II. Grundlegende Zusammenhänge zwischen dreidimensionalem Spannungs- und Formänderungszustand

Bei der bildsamen Stauchung prismatischer Körper mit rechteckiger Basis, bei denen die Verhältniszahl der Seitenkanten des Rechtecks zwischen 5 und 1 liegt, ist zur Bestimmung der Verteilung der Spannungen die Kenntnis der Formänderungen unerlässlich. Bei der Stauchung solcher Körper zwischen parallelen Platten ergibt sich die spezifische Kraft aus der Summe der zur Fläche normalen Spannungen. Falls die Stauchung zwischen vollkommen glatten Oberflächen erfolgt, entsteht im Körper ein einachsiger Spannungszustand, und die Formänderungen in den spannungsfreien Richtungen sind einander gleich, wie es von NÁDAI [5] nachgewiesen worden ist.

Wenn die Formänderungen mit ε_x , ε_y , ε_z bezeichnet und die Achsen in der Symmetrieachse angenommen werden, ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y. \quad (1)$$

Demnach ist die gesamte Dehnung in den einzelnen Seitenrichtungen

$$\lambda_x = \varepsilon_x x_0,$$

$$\lambda_y = \varepsilon_y y_0$$

und dementsprechend das Verhältnis der Dehnungen

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{x_0}{y_0}. \quad (2)$$

Das bedeutet, daß die Grenzlinien des Rechtecks auch weiterhin Gerade bleiben müssen (Bild 1).

Eine Reibung entsteht aber auch bei den am besten bearbeiteten Flächen, und der Reibungskoeffizient erhöht sich mit der Verschlechterung der Oberflächengüte. Durch den Einfluß der Reibung entstehen in Richtung der x - und y -Achsen Spannungen, die mit den oberflächlichen Reibungskräften im Gleichgewicht stehen. Die Spannungen wiederum bewirken, daß der Werkstoff in den einzelnen Richtungen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit

fließt. Das heißt, daß nach einer gewissen Zeit auch die Formänderungen in den einzelnen Richtungen verschieden sein werden.

Der Zusammenhang zwischen Formänderungen und Spannungen läßt sich durch das Gesetz von Mises ausdrücken:

$$\varepsilon_i = \int^t \lambda(\sigma_i - \sigma_m) dt + C, \quad (3)$$

worin der Faktor λ eine vom Ort und von der Zeit abhängige Proportionalitätskonstante und die Konstante C die Formänderung vor der Zeit t ist [7].

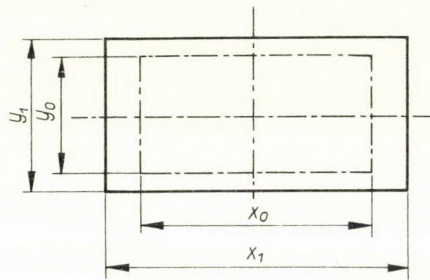


Bild 1

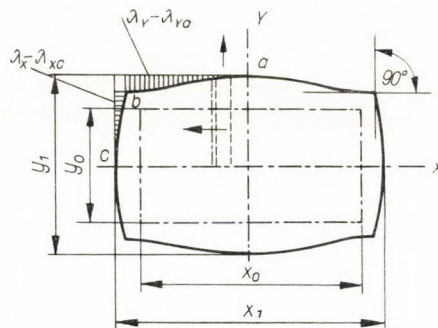


Bild 2

Daraus folgt, daß jedem Punkt des bildsam gestauchten prismatischen Körpers ein vom Spannungszustand abhängiger Formänderungszustand zugeordnet ist. So ergibt sich im Grundriß die bekannte ausgebauchte Form des Probekörpers (Bild 2). Wenn man die axial gerichtete Formänderungen eines elementaren Stoffprismas an der y -Achse untersucht, findet man, daß der größte Teil des Werkstoffes in Richtung der y -Achse fließt, ein anderer, geringerer Teil verschiebt sich in Richtung der x -Achse. Je mehr man sich von der y -Achse entfernt, um so mehr verringert sich die Dehnung in der y -Richtung, während sich offenbar die Verschiebung in der x -Achse

vergrößern muß, da sich ja der Rauminhalt des bildsamen Körpers nicht ändert. Die Form der Seitenkante zwischen den Punkten $a - b$ läßt sich nur auf diese Weise erklären. Daraus ersieht man, daß die Form der Seitenkante mittelbar vom dreidimensionalen Spannungszustand bestimmt wird.

Ein beliebiger Punkt des gestauchten Körpers erreicht den bildsamen Zustand unter der Bedingung, daß die zweite Invariante des Deviator-Spannungstensors größer wird als der Wert der Plastizitätsschwelle des einachsigen Spannungszustandes [6]:

$$3 \bar{\Phi}_d \bar{\Phi}_d - 8 \tau_{\max}^2 \geq 0 . \tag{4}$$

In Komponenten zerlegt und gemäß den Hauptspannungsrichtungen aufgeschrieben, ergibt sich daraus das Plastizitätskriterium nach HUBER—MISES—HENCKY:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \geq 8 \tau_{\max}^2 . \tag{5}$$

Dieses Plastizitätskriterium setzt die Kenntnis der Reihenfolge der Spannungen nicht voraus, demnach ist seine Anwendung bei der Feststellung eines dreiachsigen Formänderungszustandes im allgemeinen günstiger [6].

Die Bestimmung der Spannungen erfolgt durch Lösung des Plastizitätskriteriums, der Gleichgewichtsbedingungen und der Kontinuitäts-(Inkompatibilitäts-)Gleichungen. Beim Ansatz der Gleichgewichtsgleichungen setzt man voraus, daß sich die Spannungen σ_x , σ_y und σ_z in Richtung der Z-Achse, d. h. in Richtung des Höhenmaßes der Körper nicht ändern. Diese Voraussetzung ist bei verhältnismäßig niedrigen Probekörpern erfüllt.

Aus dem Bilde der Grundfläche des verformten Körpers (Bild 2) ersieht man, daß der Körper in der $x - y$ Achse zwei Symmetrieachsen hat. Im weiteren genügt es also, die Analyse an einem Viertel des Körpers durchzuführen. Wenn man irgendwo im Körper einen durch die Koordinaten x , y festgelegten Punkt annimmt, ist dieser Punkt der Mittelpunkt eines elementaren Prismas mit der Kantenlänge a (Bild 3). Auf die obere Fläche des Prismas wirkt die Spannung σ_z . Die momentane Verschiebung des Mittelpunktes des Prismas schließt mit der x -Achse den Winkel α ein. In dieser Richtung wirkt eine oberflächliche Reibungsspannung $\mu \sigma_z$. Ihre Komponente in Richtung x ist

$$\tau_x = \mu \sigma_z \cos \alpha , \tag{6}$$

die Komponente in Richtung y :

$$\tau_y = \mu \sigma_z \sin \alpha . \tag{7}$$

Wenn man die mittleren Gleichgewichtsgleichungen für die x -, y -gerichteten Seiten des Prismas aufschreibt:

$$h\sigma_x = 2 \int_0^x \mu\sigma_z \cos \alpha \, dx \quad (8)$$

und

$$h\sigma_y = 2 \int_0^y \mu\sigma_z \sin \alpha \, dy \quad (9)$$

ergibt sich eine Möglichkeit zur Bestimmung der Spannungen [1].

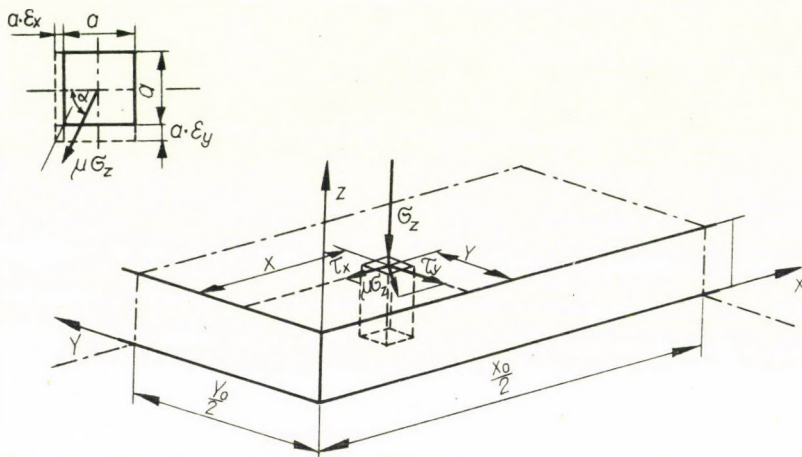


Bild 3

Der Winkel α in Gleichungen (8) und (9) ist irgendeine Funktion des Spannungszustandes. Er weist auf die Verschiebungsrichtung der Punkte auf der Oberfläche des Körpers hin. Die Verschiebung eines gegebenen Punktes auf der Oberfläche des Körpers hängt nach Gleichung (3) mit den Spannungszustand zusammen.

Wenn man aus dem Viertel des prismatischen Körpers nach Bild 3 in dem durch die Koordinaten x , y bestimmten Punkt ein Prisma mit quadratischer Basis der Kantenlänge a und Höhe h ausschneidet, kann man mit Hilfe des Werkstoff-Flusses die Größe des Richtungswinkels untersuchen. Aus dem Bild ersieht man, daß

$$\tan \alpha = \frac{a\epsilon_y}{a\epsilon_x} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (10)$$

Nach dem Mises-Kriterium (3) ist

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_m &= \lambda \dot{\epsilon}_y, \\ \sigma_x - \sigma_m &= \lambda \dot{\epsilon}_x. \end{aligned}$$

Der Quotient der beiden Gleichungen ergibt das Verhältnis der Formänderungsgeschwindigkeiten:

$$\frac{\sigma_y - \sigma_m}{\sigma_x - \sigma_m} = \frac{\dot{\varepsilon}_y}{\dot{\varepsilon}_x}. \quad (11)$$

Anstelle der Formänderungsgeschwindigkeiten darf man, wenn es sich um kleine Formänderungen handelt, auch schreiben:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_y}{\dot{\varepsilon}_x} = \frac{\Delta\varepsilon_y}{\Delta\varepsilon_x} \approx \tan \alpha.$$

Demnach kann man Gleichung (11) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\sigma_y - \sigma_m}{\sigma_x - \sigma_m} = \tan \alpha. \quad (12)$$

Auf Grund der Gleichungen (5), (8), (9) und (12) kann man die Spannungen und die Formänderung des Probekörpers bestimmen.

III. Versuchsmässige Bestimmung der beim Stauchen auftretenden Kräfte und Formänderungen

Der wichtigste Zweck der Versuche bestand in der Festlegung der auftretenden Kräfte und der Formänderungen in den beiden Hauptrichtungen bei der Stauchung von Probekörpern mit gleichem Rauminhalt und gleicher Höhe, aber verschiedenem Verhältnis der Kantenlängen.

Eine andere Versuchsserie bezweckte die Bestimmung der Komponenten der oberflächlichen Reibungskraft in Richtung der x - und y -Achse, gleichfalls bei Probekörpern mit wechselndem Kantenverhältnis. Diese Versuchsserie gibt Auskunft über den Richtungswinkel α der Reibungskraft (T_s) und den Wert des mittleren Reibungskoeffizienten (Bild 4).

Zum Nachweis der Wirkung des Reibungskoeffizienten wurde ein ergänzender Versuch mit verringertem Reibungskoeffizienten bei einem Wert nahezu gleich 0 durchgeführt.

Der Werkstoff der Probekörper war weiches Hüttenblei.

Das Blei hat bei 20° C eine genügend große Rekrystallisationsgeschwindigkeit und demnach bei kontinuierlicher Verformung eine genügend geringe Aufhärtung, d. h. die Richtungstangente der Berührenden der Kurve $\sigma' - \varepsilon$ ist gering, so daß seine Eigenschaften denen des vollständig bildsamen Körpers nahestehen.

Im Verlaufe der Versuche wurden Probekörper mit fünf verschiedenen Kantenverhältnissen eingesetzt. Die Meßzahl des Kantenverhältnisses ist

$$n = \frac{y_0}{x_0}.$$

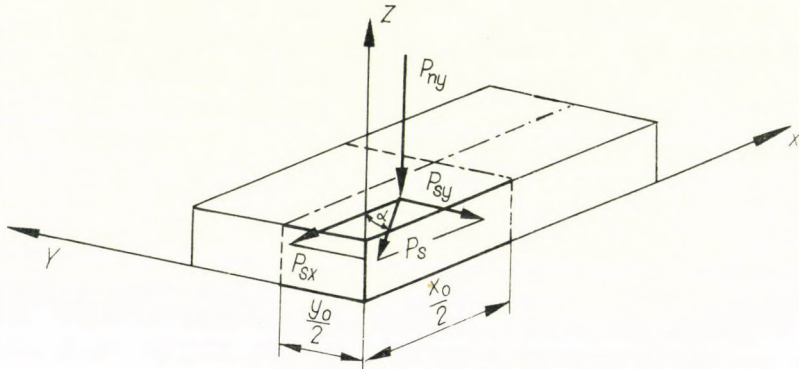


Bild 4

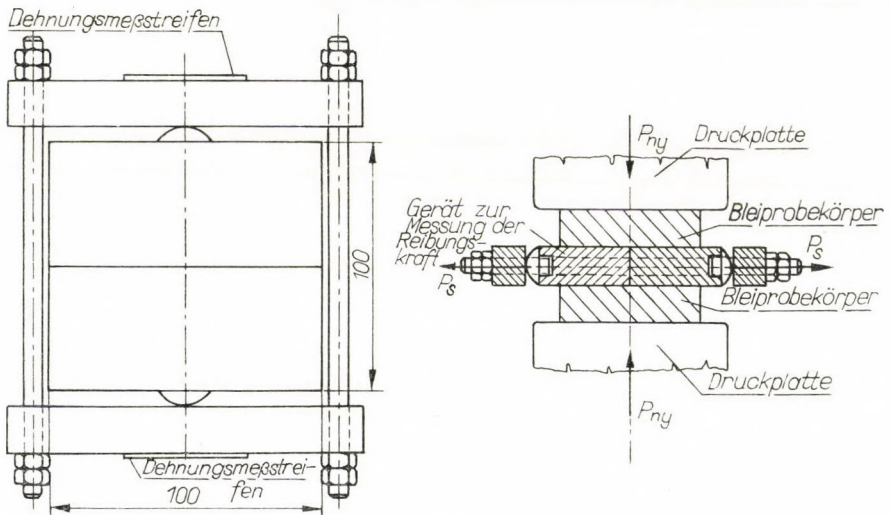


Bild 5

Das Kantenverhältnis der Probekörper betrug der Reihe nach $n = 1; 1,4; 2; 2,72; 3,56$.

Die Höhe der Probekörper war 20 mm, die Fläche der Basis 1800 mm².

Die Versuche wurden auf einer 35 t hydraulischen, universellen Zerreißmaschine, Fabrikat Amsler, durchgeführt. Die Formänderungsgeschwindigkeit bei der Stauchung betrug $\dot{\epsilon}_z = 0,0270/s$. Die Kraft bei der Stauchung

wurde durch die Schreibvorrichtung der Zerreißmaschine in Funktion der Höhenverminderung aufgetragen. Die größte Höhenverminderung betrug bei der Versuchsserie $\Delta h = 6$ mm.

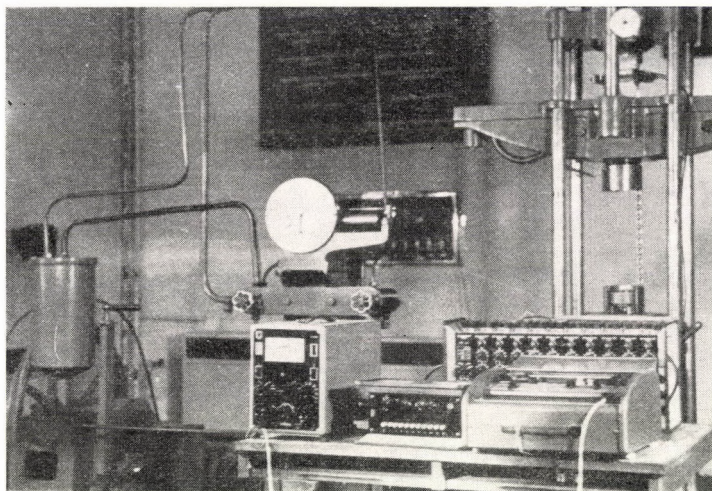
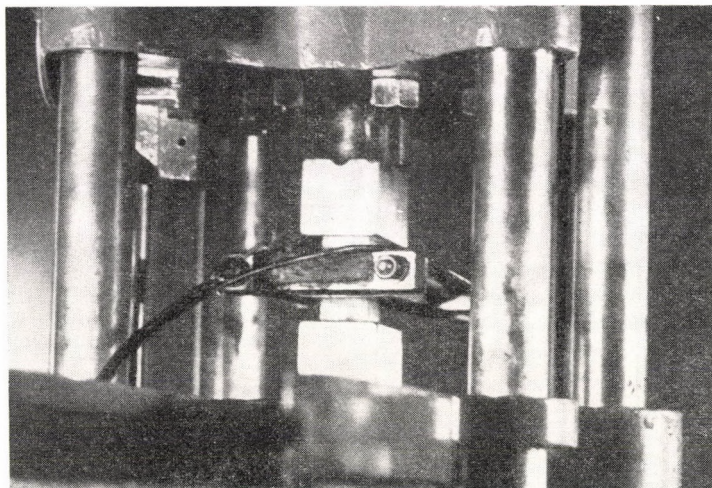


Bild 6

Die erste Versuchsserie wurde an Probekörpern mit den Kantenverhältnissen $n = 1, 2, 3,56$ vorgenommen.

Die Messung der oberflächlichen Reibungskraft erfolgte mit einem verhältnismäßig einfachen Apparat (Bild 5). Der Apparat bestand im Wesen aus einem Stahlblech, dessen Fläche mit den Druckplatten identisch geschliffen,

in der Mitte in zwei Hälften geschnitten und sorgfältig lückenlos zusammengepaßt wurde. Die aus zwei Hälften bestehende Stahlplatte wird durch ein Joch verbunden, dessen beide Stützbügel als Biegemesskörper ausgebildet sind.

Im Verlaufe der Stauchung werden die zwei Flächen des zwischen zwei Probekörpern untergebrachten Apparates durch die Wirkung einer Komponente der oberflächlichen Reibungskräfte auseinandergeschoben. Die Schubkräfte werden mit Meßstreifen gemessen, welche auf die Meßkörper geklebt

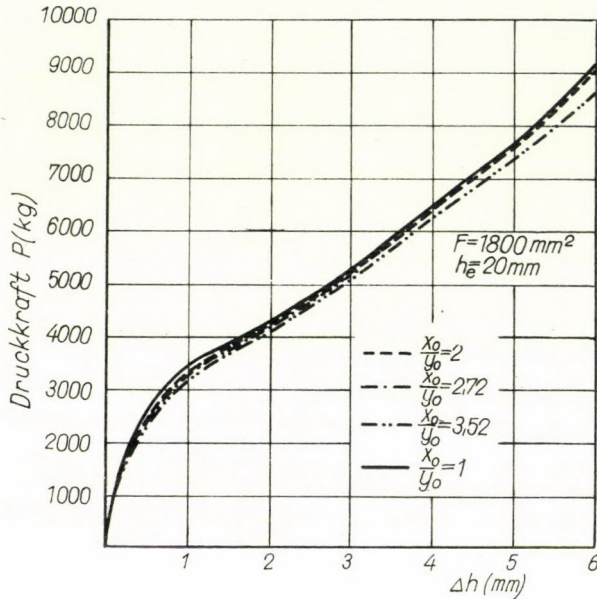


Bild 7

sind. Wenn man den Apparat zwischen zwei Probekörpern in Richtung der anderen Symmetrieachse anbringt, kann man damit die in der anderen Richtung wirkende Komponente der Reibungskräfte messen. Im Verlaufe des Stauchvorganges wurde die Druckkraft in Funktion der Höhenverminderung Δh gemessen, während die Reibungskraft in Funktion der Zeit festgelegt wurde. Die Versuchsanordnung zur Bestimmung der Reibungskräfte, die Instrumente und die Zerreißmaschine sind im Bild 6 zu sehen.

Der Einfluß der Reibung auf die Formänderung wurde bei der Stauchung von Bleikörpern, die auf beiden Oberflächen mit Bienenwachs geschmiert waren, untersucht.

Die Ergebnisse der so durchgeführten Versuche bestätigten die Voraussetzungen des Abschnittes II über den dreidimensionalen Formänderungs- und Spannungszustand.

Im Bild 7 ist die Änderung der Druckkraft in Funktion der Höhenverminderung und der Änderung des Kantenverhältnisses zu sehen. Aus diesem Diagramm ersieht man klar, daß bei konstanter Fläche die auftretende Kraft mit der Verringerung des Kantenverhältnisses, d. h. mit Erhöhung der Breite des Probekörpers zunimmt. Diese Zunahme erfolgt jedoch nicht in dem Masse, wie es bei einer zweidimensionalen Formänderung zu erwarten wäre.

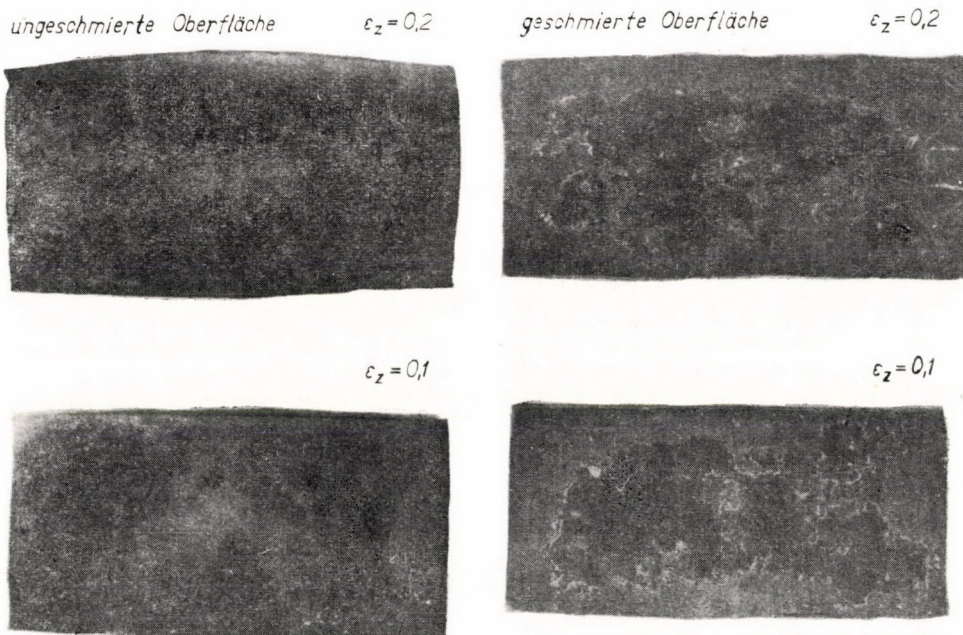


Bild 8

Die Dehnungen in Richtung der beiden Symmetrieachsen (x, y) ersieht man im Bild 8 an den Photographien der gestauchten Proben des Types c ($n = 2$) ohne Schmierung und bei Schmierung mit Bienenwachs.

Das Bild zeigt die Formen von Probekörpern bei Verformung mit verschiedenen Höhenverminderungen. Die Seitenumrisse der Proben mit trockener Oberfläche haben eine ovale Form und zeigen deutlich, daß die Dehnungen in Richtung der kürzeren Symmetrieachse mit der Entfernung vom Mittelpunkt monoton abnehmen, d. h., daß auch in diesem Abschnitt ein Fließen des Werkstoffes in Richtung der längeren Achse eintritt. Demgegenüber blieben die Umriss der geschmierten Proben gerade und die Formänderungen waren in beiden Richtungen nahezu gleich. Daraus folgt, daß im Falle eines niedrigen Reibungsbeiwertes bis zu einer gegebenen Verformung die Zusammenhänge laut Gleichungen (1) und (2) gültig sind. Dem-

nach sind die hiervon abweichenden Formen ein Ergebnis des infolge der oberflächlichen Reibung aufgetretenen dreiachsigen Spannungszustandes.

Die gemessenen Mittelwerte der oberflächlichen Reibungskräfte und der zugeordneten Druckkräfte sind in Tafel I in Funktion des Kantenverhältnisses und der Höhenverminderung angegeben. Diese Versuchsserie zeigt eindeutig, daß mit der Zunahme des Kantenverhältnisses die Reibungskraft in Richtung der kürzeren Achse, verglichen mit den Reibungskräften in Richtung der längeren Achse, zunimmt. Das bedeutet, daß der Richtungswinkel α der resultierenden Reibungskraft einen Wert annimmt, der 45° immer überschreitet (Bild 9).

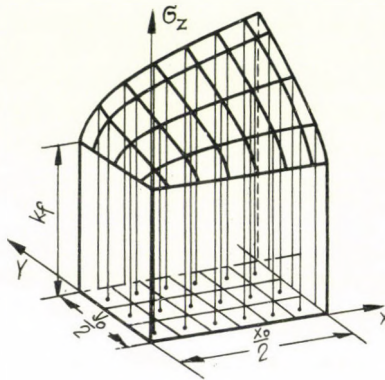


Bild 9

In Tafel I sind die Tangenten der mittleren Richtungswinkel (α_m) der aus den Reibungskräften ermittelten oberflächlichen Reibspannungen angegeben. In der gleichen Tabelle findet man die aus den Druckkräften und den Reibungskräften berechneten Reibungsbeiwerte. Man ersieht, daß der Reibungsbeiwert von der Form des Probekörpers unabhängig ist und am Anfang der Stauchung schneller, später langsam zunimmt. Die letztere Erscheinung ist verständlich, da am Anfang der Stauchung wegen der mikroskopischen Unebenheit der Oberfläche nicht die ganze Oberfläche aufliegt, und so zur plastischen Verformung der herausragenden Teile eine geringere Kraft notwendig ist. Mit dem Fortschritt der Stauchung verschwinden die Unebenheiten, das Metall liegt mit seiner ganzen Oberfläche auf den Unebenheiten des Werkzeuges auf, die Geschwindigkeit des Fließens nimmt zu, und — da es sich um ein weiches Metall handelt — es treten örtliche Verschweißungen auf [4]. Dementsprechend erhöht sich der Reibungsbeiwert. Als Grundlage der folgenden Berechnungen dient der aus den Ergebnissen ermittelte Reibungsbeiwert $\mu = 0,211$. Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Versuche zur Feststellung des Reibungsbeiwertes bei Blei und ähnlicher Oberflächengüte [9].

Tafel I

Typ des Probe- körpers	$n = 1,4$					$n = 2$					$n = 2,72$				
	0,5	1	1,5	2	2,5	0,5	1	1,5	2	2,5	0,5	1	1,5	2	2,5
P_{RZ} [kg]	195	395	540	620	750	185	380	520	620	725	170	280	395	500	585
P_{RZ} [kg]	180	390	570	720	830	250	510	710	870	980	165	400	590	735	880
P_{druck} [kg]	2630	3270	3750	4280	4810	2585	3240	3760	4280	4710	2690	3275	3875	4325	4825
μ	0,101	0,170	0,21	0,222	0,233	0,12	0,196	0,234	0,250	0,26	0,09	0,15	0,185	0,206	0,22
$\tan \alpha$	0,927	0,994	1,094	1,160	1,104	1,351	1,343	1,359	1,400	1,351	0,972	1,428	1,491	1,461	1,491
α°	42°50'	44°50'	46°35'	49°15'	47°50'	53°30'	53°20'	53°40'	54°25'	53°30'	44°10'	55°0'	56°10'	55°40'	56°20'
α_{mittel}	46,8°					53,7°					55,8°				
μ_{mittel}	0,211														

Für die im weiteren mitgeteilten Berechnungen wurde die Verformungsfestigkeit von Blei bis 25% Verformung experimentell ermittelt.

Mit den versuchsmäßig erhaltenen Zahlenergebnissen (Kraft-Formänderung) wurde die Richtigkeit der im nächsten Kapitel angegebenen Formeln kontrolliert.

IV. Theoretische Ermittlung der Kennzeichen des räumlichen Spannungs- und Formänderungszustandes

Die Spannungen und Formänderungen während der Stauchung sollen unter nachstehenden Voraussetzungen bestimmt werden:

- a) Das Metall ist ein vollkommen plastischer Werkstoff;
- b) der gestauchte Körper haftet an keiner Stelle am Werkzeug, d. h., das Kriterium $\mu\sigma_z > K_f$ ist für die ganze Oberfläche gültig;
- c) die Hauptspannungsrichtungen fallen mit den Symmetrieachsen des Körpers zusammen;
- d) bei Vernachlässigung der Änderungen der Spannungen (σ_x , σ_y , σ_z) in Richtung der Koordinate z bilden ihre mittleren Werte die Grundlage der Berechnungen;

e) in jedem beliebigen Zustand der Stauchung ist die Plastizitätsschwelle (τ_{\max}) des Werkstoffes im ganzen Rauminhalt gleich der halben Verformungsfestigkeit ($\tau_{\max} = k_f/2$).

Die Ermittlung der Spannungen kann in zwei Stufen erfolgen. Mit Hilfe der Gleichungen (5), (8) und (9) werden die drei Spannungen in Funktion der Koordinaten x , y , des Festigkeitskoeffizienten und der geometrischen Abmessungen des Werkstückes berechnet. Sodann kann man mit Hilfe der Spannungen und Gleichung (12) in jedem Punkt des Körpers den die Richtung der Verschiebung bestimmenden Winkel α ermitteln.

Wenn man aus den Gleichgewichtsgleichungen (8) und (9) die Integrale der Druckspannungen mit folgenden linearen Funktionen ersetzt

$$\int_0^x \sigma_z dx = \frac{\sigma_z + k_f}{2} x,$$

$$\int_0^y \sigma_z dy = \frac{\sigma_z + k_f}{2} y$$

erhält man die folgenden zwei mittleren Gleichgewichtsgleichungen:

$$\sigma_x = \frac{\mu}{h} \cos \alpha \cdot x \sigma_z + \frac{\mu}{h} \cos \alpha \cdot x k_f, \quad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{\mu}{h} \sin \alpha \cdot y \sigma_z + \frac{\mu}{h} \sin \alpha \cdot y k_f. \quad (14)$$

Wenn man Gleichung (13) und (14) in Gleichung (5) einsetzt, erhält man für die Druckspannung folgenden Ausdruck:

$$\sigma_z = -\frac{S}{2R} + \sqrt{\left(\frac{S}{2R}\right)^2 - \frac{T}{R}}, \quad (15)$$

wo

$$R = f_1(\mu, x, y, \alpha, h),$$

$$S = f_2(\mu, x, y, \alpha, h),$$

$$T = f_3(\mu, x, y, \alpha, h).$$

Die Funktion (15) kann durch eine einfache Hyperbel angenähert werden, wenn man beim Einsetzen in Gleichung (5) die Glieder ersten Grades durch mittlere Konstanten ersetzt. Diese Annäherungsfunktion ist die folgende:

$$\sigma_z = k_f \frac{1,25 + (\mu/h)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{1,25 - (\mu/h)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (16)$$

Wenn man dies in Gleichung (13) und (14) einsetzt, erhält man die Gleichungen der beiden anderen Spannungen:

$$\sigma_x = k_f \frac{2,5 (\mu/h) x \cos \alpha}{1,25 - (\mu/h)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad (17)$$

$$\sigma_y = k_f \frac{2,5 \cdot (\mu/h) y \sin \alpha}{1,25 - (\mu/h)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (18)$$

Die mittlere Spannung kann aus Gleichungen (16), (17) und (18) ermittelt werden:

$$\sigma_m = k_f \frac{0,41 + 1,16 (\mu/h)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{1,25 - (\mu/h)(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (19)$$

Wenn man zur Bestimmung des bisher unbekanntes Winkels α die Gleichungen (17), (18) und (19) in die Funktion (12) einsetzt, erhält man:

$$\frac{1,34 (\mu/h) y \sin \alpha + 1,16 (\mu/h) x \cos \alpha - 0,41}{1,34 (\mu/h) x \cos \alpha - 1,16 (\mu/h) y \sin \alpha - 0,41} = \tan \alpha. \quad (20)$$

Gleichung (20) ergibt für jede Winkelfunktion des Winkels α eine gemischte Gleichung vierten Grades, deren Wurzeln aus sehr verwickelten Ausdrücken berechnet werden können. Die Separierung der Werte der einzelnen Wurzeln nach einer Cardano-Lösung scheint fast unmöglich. Zur Vermeidung dieses

Problems wurde ein verhältnismäßig einfacher Quotient aus Winkelfunktionen gebildet:

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha/2} \approx 2,15,$$

wo $\alpha < 45^\circ$ ist. Dieser Zusammenhang ist bis 45° mit einem Fehler von 10% gültig. Wenn man die Winkelfunktionen der Gleichung (20) in Funktionen von $\tan \alpha$ und $\tan \alpha/2$ verwandelt, erhält man eine einfache Lösung für den Winkel α :

$$\alpha = \arctan \left[\frac{1,34 \mu(x-y) - 0,47 h}{2,32 \mu y} + \frac{\sqrt{\left[\frac{1,34 \mu(x-y) - 0,47 h}{1,16 \mu y} \right]^2 + 4 \frac{1,16 \mu x + 0,47 h}{1,16 \mu y}}}{2} \right]. \quad (21)$$

Die Funktion (21) erlaubt, für jeden Punkt der Oberfläche des Körpers die Richtung der Verschiebung in der Ebene $x - y$ während der Stauchung zu bestimmen. Nach dem Einsetzen dieser Werte des Winkels α in Funktion (16) läßt sich die Verteilung der Druckspannungen entlang der gedrückten Fläche ermitteln. Im Bild 9 ist auf einem Viertel der Oberfläche eines Körpers mit dem Kantenverhältnis $n = 2$ die Oberfläche der berechneten Druckspannungen dargestellt.

Bei Untersuchung der Formel (21) sieht man, daß der Wert von $\tan \alpha$ nur in geringem Maße von der Höhe des Probekörpers abhängt. Mit abnehmender Höhe verschiebt sich der Wert des Winkels α entlang der längeren Seite gegen 90° . Daraus folgt, daß der zweidimensionale Formänderungszustand um so eher angenähert wird, je kleiner die Höhe des Probekörpers im Verhältnis zu den Kennzahlen der Breite wird. Der Einfluß des Reibungsbeiwertes wird eindeutig durch Gleichung (20) angegeben.

Wenn der Wert von μ gegen 0 konvergiert, nimmt Gleichung (20) folgende Form an:

$$\tan \alpha = 1.$$

Demnach ist der Richtungswinkel α in einem einachsigen Spannungszustand in jedem Punkt 45° , d. h., die Formänderung in beiden Richtungen ($\varepsilon_x, \varepsilon_y$) ist gleichförmig [Gleichung (1) und (2)]. Bei einem Reibungsbeiwert größer als 0 ändert sich der Wert von $\tan \alpha$ in der Ebene $x - y$ von Punkt zu Punkt nach Gleichung (21). Im Bild 10 sieht man auf der gedrückten Fläche eines Körpers mit dem Kantenverhältnis $n = 2$ die aus Gleichung (21) berechneten Verschiebungsrichtungen. Aus der Abbildung ersieht man, daß entlang der

Geraden, die aus den Eckpunkten des Probekörpers unter 45° ausgehen, die Verschiebungen mit der x -, y -Achse einen Winkel von 45° einschließen; links davon sind die Werte des Winkels α kleiner als 45° , rechts davon, gegen die Mitte des Probekörpers zu, werden sie größer.

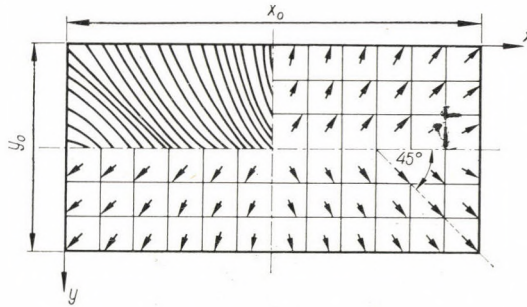


Bild 10

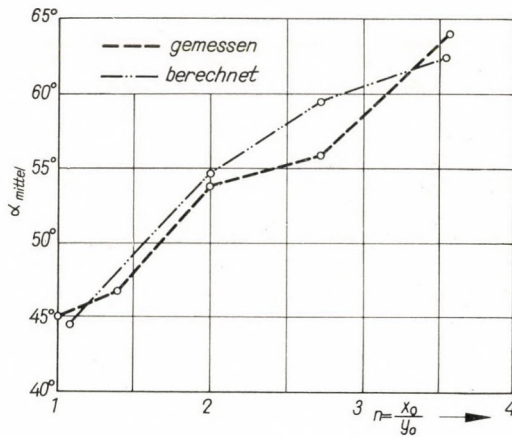


Bild 11

Die Mittelwerte der die Verschiebungsrichtung der Punkte der Oberfläche bezeichnenden Winkel α fallen in die Richtung der Resultierenden der auf die Oberfläche wirkenden Reibungskräfte. Im Bild 11 sieht man die versuchsmäßig ermittelten und berechneten Mittelwerte der Winkel α bei Probekörpern mit verschiedenen Kantenverhältnissen.

Die Formänderung der gestauchten Proben kann in Kenntnis der Richtungswinkel α relativ einfach bestimmt werden. Auf Grund der Gleichung (10) und der Konstanz des Rauminhaltes lassen sich die Formänderungen

in einem gegebenen Punkt des Probekörpers folgendermaßen ausdrücken:

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \tan \alpha}{2 \tan \alpha} + \sqrt{\left(\frac{1 + \tan \alpha}{2 \tan \alpha}\right)^2 + \frac{\varepsilon_z}{(1 + \varepsilon_z) \tan \alpha}}, \quad (22)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x \cdot \tan \alpha. \quad (23)$$

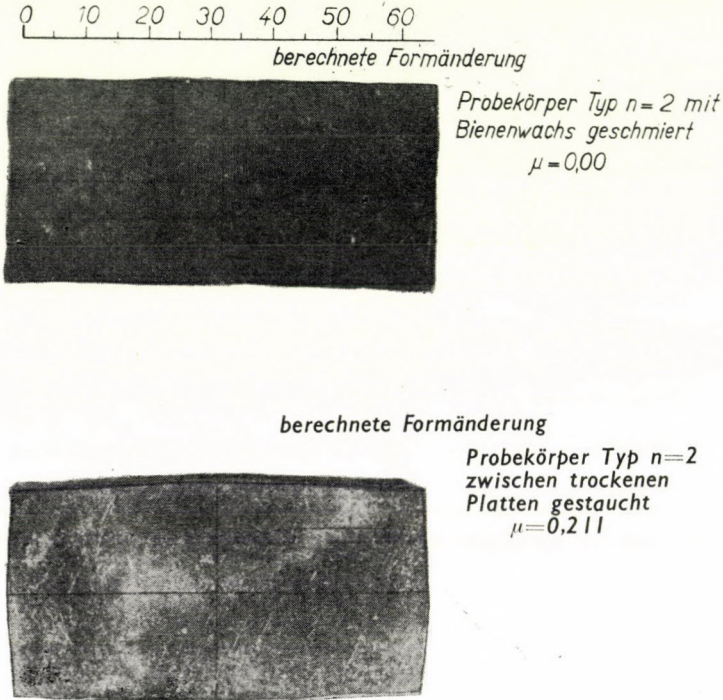


Bild 12

Wenn man die Fläche eines gegebenen Körpers in der $x - y$ Ebene in kleine Quadrate zerlegt, können mit Hilfe der Gleichungen (22) und (23) die Dehnungen dieser kleinen Teile in den Richtungen x , y bestimmt werden.

Durch Summierung der elementaren Dehnungen in den Richtungen x , y kann man die Umrißlinien des gestauchten Körpers in der Ebene $x - y$ ermitteln. Im Bild 12 ist der Vergleich der tatsächlichen Formen der Probekörper nach der Stauchung mit den durch Berechnung erhaltenen Umrißlinien dargestellt.

Die berechnete Linie folgt der Randlinie des gestauchten Probekörpers recht gut, wodurch die in dieser Studie vorausgesetzten Vorstellungen über die räumlichen Formänderungen unterstützt werden.

Die auf die Oberfläche wirkende Druckkraft kann durch Summierung der auf die Fläche wirkenden Druckspannungen (σ_z) ermittelt werden. Die für verschiedene Probekörpertypen berechneten Kräfte und die versuchsmäßig gefundenen Werte sind im Bild 13 dargestellt. Die berechneten Werte weisen eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten auf.

Auf Grund der vorausgehenden Ausführungen darf man feststellen, daß einzelne verwickelte Aufgaben aus dem Gebiete der bildsamen Formung

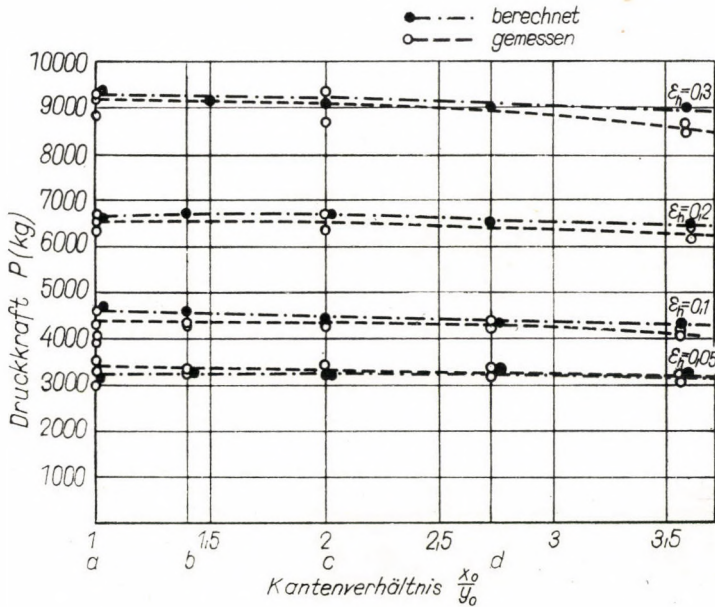


Bild 13

mit entsprechenden Annäherungen verhältnismäßig leicht zu lösen sind, falls man den Anspruch auf eine exakte mathematische Lösung aufgibt, die mit dem derzeit verfügbaren mathematischen Apparat restlos nicht erreichbar ist.

SCHRIFTTUM

1. GELEJI, A.: Bildsamen Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie Verlag, Berlin 1960.
2. Губкин, С. И.: Пластическая деформация металлов. Metallurgizdat, Москва 1961.
3. HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford 1950.
4. KRAGELSZKI, I. V.—VINOGRAĐOVA, J. E.: A súrlódási tényező (Reibungsfaktor). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1961.
5. NÁDAI: Plasticity. McGraw-Hill Co. Inc., New-York 1931.
6. REUSS, E.: A képlékenységtan módszerei (Methoden der bildsamen Formungslehre). Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1962.
7. SZOKOLOVSZKI, V. V.: A képlékenységtan elmélete (Theorie der bildsamen Formung). Akadémiai Kiadó, Budapest 1953.

8. UNKSZOV: Újdonságok a süllyesztékes kovácsolás területén (Neues auf dem Gebiete des Gesenkschmiedens). Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó Vállalat, Budapest 1952.
9. TÓTH LAJOS: Az alakítási ellenállás számítása prizmatikus testeknek párhuzamos nyomólapok között történő összenyomásakor (Berechnung des Verformungswiderstandes bei der Stauchung von prismatischen Körpern zwischen parallelen Druckflächen) *Műsz. Tud. Oszt. Közleményei*, 1964.

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION
OF THE PLASTIC SWELLING OF PRISMS WITH RECTANGULAR BASES

J. GULYÁS

SUMMARY

The investigation of the stresses and strains arising during the swelling of rectangular prisms between parallel plates is possible only on the basis of special considerations. The relations between the stresses and the strains in a given point of the body are experimentally proved by the author. On the basis of the experimentally proved relations the author then determines the stresses and the strains as functions of the coordinates and of external conditions, using simplifying assumptions.

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE
DU GONFLEMENT PLASTIQUE DES PRISMES RECTANGULAIRES

J. GULYÁS

RÉSUMÉ

Au gonflement plastique entre plaques parallèles des prismes rectangulaires, l'examen des tensions et déformations produites ne peut se faire que sur la base de considérations spatiales. Les rapports des tensions et déformations dans certains points données du corps sont démontrés expérimentalement par l'auteur. Sur la base des relations démontrées par voie expérimentale, l'auteur détermine aussi les tensions et déformations en fonction des coordonnées de position et des conditions extérieures, en admettant des conditions de simplification dans son calcul.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ПЛАСТИЧНОЙ РАЗДАЧИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

И. ГУЯШ

РЕЗЮМЕ

Исследование напряжений и деформаций, возникающих при раздаче неравнобоких четырехугольных призм, зажатых между параллельными плитами, возможно только на основе пространственных соображений. Автор экспериментальным порядком доказывает зависимость напряжений и деформаций в заданных точках тела. На основе экспериментально установленных зависимостей автор в дальнейшем определяет напряжения и деформации в функции местных координат тела и наружных условий при упрощающих условиях.

GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN ZUR HERSTELLUNG EINER WILDHABER—NOWIKOW-VERZÄHNUNG AUF DER FORSTER-WÄLZFRÄSMASCHINE

I. DRAHOS

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 23. Mai, 1964]

Die auf der Forster-Wälzfräsmaschine erzeugten Stirnräder sind durch Eingriffsverhältnisse gekennzeichnet, die der Eingriffsweise der nach dem vereinigten Theorem von WILDHABER—NOWIKOW gefertigten Räder ähnlich sind. In diesem Falle entsprechen die Werkzeugflächen je einer Rotations-Kreisringfläche, die sich entlang eines Rotationskreises berühren. Auch können die Zahnflanken ebenso mit kreisprofilierten Topfscheiben fertiggeschliffen werden. Der Verfasser behandelt noch die Fragen des Eingriffswinkels, die Krümmungsverhältnisse der Stirnprofile, die Eingriffslinie und die Bedingungen eines kontinuierlichen Eingriffs.

Es kann festgestellt werden, daß die Nowikow-Verzahnung an der »Internationalen Konferenz Zahnräder und Zahnradgetriebe« 1960 in Essen erstmals Gegenstand einer internationalen Wertung war [7, 18, 24]. Auch wurden diesmal — mit Rücksicht auf eine der NOWIKOWSchen ähnliche, von WILDHABER bereits früher als Patent angemeldete Verzahnung [12, 28] — die beiden Verzahnungsarten gemeinsam als »WN-Verzahnung« erwähnt und behandelt.

Durch die Wildhabersche Konstruktion [29] wurde die Möglichkeit einer zylindrischen Verzahnung erwiesen, in welcher einerseits die Normalprofilkurven der in Eingriff stehenden Zahnflanken aus Kreisbögen bestehen, andererseits die arbeitenden Zahnflanken, entlang je eines Normalprofilkreises (und kontinuierlich jeweils entlang eines anderen Normalprofilkreises), miteinander in augenblicklicher Berührung sind.

Weiters wurde durch die Nowikowsche Konstruktion [2, 13, 14] die Möglichkeit erwiesen, eine zylindrische Verzahnung zu bauen, in welcher stets eine Zahnflanke von konvexem Profil mit der anderen von konkavem Profil in punktförmiger Berührung in Eingriff ist.

Man hatte die Idee von WILDHABER in der Zähneerzeugung nicht angewendet; sie fand aber eine gute Verwendung beim Bau von Schraubenspumpen [26], da sich hier die Berührungslinie der Zahnflanken als verlässliche Absperrung des Liefervolumens bewährt hat.

Ferner wird in der Literatur darüber berichtet [8, 18, 27], daß die Zahnräderpaare der Nowikow-Verzahnung sich mit einem günstigen Tragbild, mit einer höheren Oberflächenfestigkeit, mit einem günstigen Schmiereffekt

und einer im Vergleich zu evolventverzahnten Rädern vielfachen Belastbarkeit auszeichnen. Immerhin kann man es nicht unbemerkt lassen, daß die Informationen einander oft widersprechen. Da aber die nach diesem Prinzip ausgeführten Bauarten als erfolgreich anzusehen sind, muß man die Richtigkeit dieses Leitprinzips annehmen. Ungeachtet der eventuell fehlerhaften Konstruktionen, sind die Ursachen der Versager in den technologischen Erzeugungs- und Montage-Schwierigkeiten zu suchen, die meistens infolge der strengeren Einbaubedingungen entstehen.

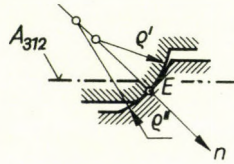


Bild 1

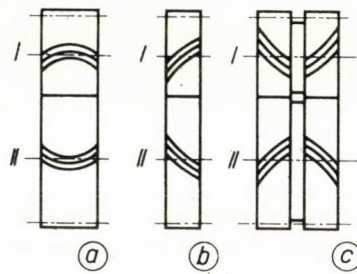


Bild 2

Als Zusammenfassung beider Prinzipien kann festgestellt werden, daß es möglich ist, eine zylindrische Verzahnung herzustellen, in welcher die Normalprofilkurven der zur Erzeugung von miteinander arbeitenden Zahnflanken benötigten Bezug Zahnstange (Bild 1) aus sich berührenden, auf derselben Seite der gemeinsamen Tangenten liegenden Kreisbögen bestehen. Diese geometrische Form soll im folgenden als Merkmal des gemeinsamen Wildhaber—Nowikowschen Prinzip gelten.

Mit Rücksicht auf die Erzeugungsschwierigkeiten der bisher bekannten Bauarten, die auf Grund des oben aufgestellten Prinzips gebaut worden sind, drängt sich sozusagen von selbst die Idee auf, ein Verzahnungsverfahren gleichfalls nach dem Wildhaber—Nowikowschen Prinzip zu finden, welche eine einfachere Technologie, eine bessere Qualität und eine ausgiebigere Produktion sichert.

Mit Hilfe der Forster-Wälzfräsmaschine [22] kann man im Wege einer entsprechenden Modifizierung des Messerkopfes eine neue Verzahnung ver-

wirklichen, die dem WILDHABER—NOWIKOWSchen Prinzip entspricht. Es folgt aus dem Aufbau der Forster-Maschine, daß die Flankenlinie der Bezugszahnstange ein Kreis ist. Wenn man also im Messerkopf Messer mit einem entsprechenden Kreisprofil anbringt, so erhält man als Werkzeugfläche eine Rotations-Kreisringfläche [4].

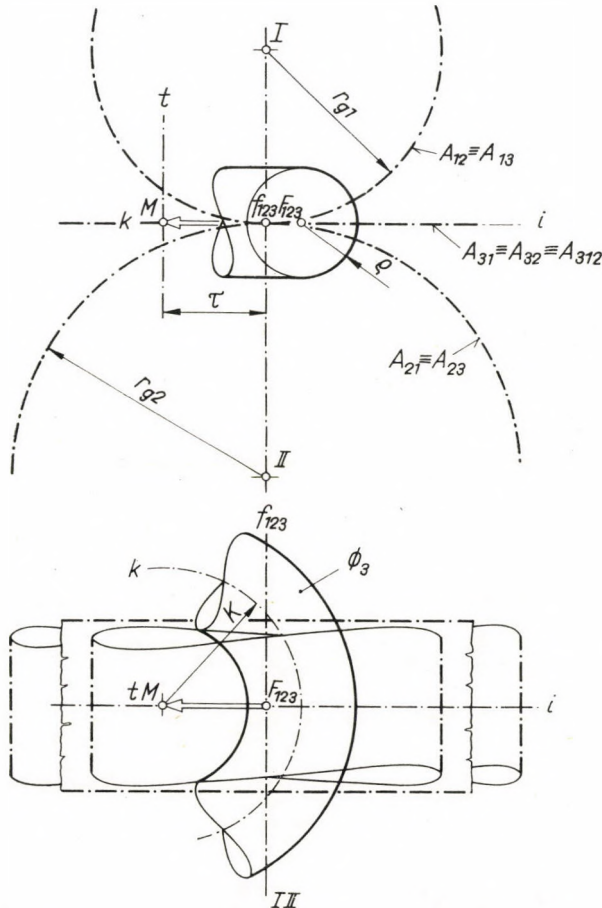


Bild 3

Im Vergleich mit der bekannten Nowikow-Verzahnung, bietet diese Bauart den Vorteil, daß man die Zahnflanken im Abwälzverfahren mit Hilfe von kreisprofilierten Topfscheiben fertigschleifen kann. Ein Nachteil, daß die miteinander arbeitenden Zahnräder nicht mittels einfacher, axialer Verschiebung entkoppelt werden können. Der Zahnradkörper kann symmetrisch (Bild 2a), asymmetrisch (Bild 2b), oder aus zwei asymmetrischen Hälften zusammengesetzt wieder symmetrisch (Bild 2c) ausgeführt sein.

die relative Verschiebung $\tau = \overline{F_{123}M}$ der Zahnstange gegenüber der Hauptgeraden f_{123} bestimmt. Im Falle $\tau = 0$ ist Punkt M der Ebene A_{312} mit dem Punkt F_{123} identisch.

Ist $|\tau| < K$, so hat der Mittelkreis k der Zahnfläche Φ_3 mit der Hauptgeraden f_{123} zwei Punkte (Bild 4) gemein. Diese Schnittpunkte 1 und 2 sind zugleich Mittelpunkte der Normalprofilkreise e und e^* der Zahnfläche Φ_3 , wobei diese Kreislinien die gemeinsamen augenblicklichen Berührungslinien der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 , andererseits zugleich Linien der Eingriffs-

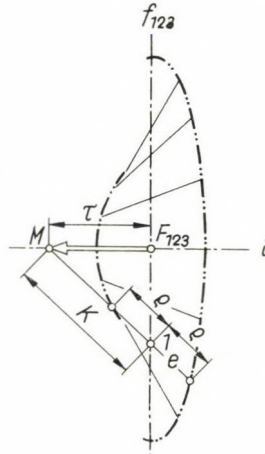


Bild 5

fläche von Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 sind, und auch als Normalprofilkreise von Φ_1 und Φ_2 gelten. Es sind nämlich die Halbmesser der Kreise e und e^* einerseits Normalen zur Zahnfläche Φ_3 , andererseits bilden sie Schnittpunkte mit der Hauptgeraden f_{123} , d. h. sie sind die gemeinsamen augenblicklichen Eingriffsnormalen der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 [9]. Im Falle $|\tau| = K$ fallen die Kreise e und e^* (in dem Hauptprofilkreis in einer zu f_{123} normalen Ebene) zusammen, und wenn $|\tau| > K$, so verschwinden sie beide.

Während des Abwälzens der Bezug Zahnstange wandert der Punkt M , mit der Änderung von τ , entlang der Geraden i , welche in der Ebene A_{312} durch F_{123} zur f_{123} normal liegt. Gleichzeitig gleiten die Punkte 1 und 2 entlang der Geraden f_{123} (Bild 5), und die Kreise e und e^* verschieben sich auf der Eingriffsfläche. Die Punkte des Kreises e beschreiben, allgemein, eine Ellipse [5]. Für die Konturellipsen in der Ebene A_{312} gelten die großen Halbmesser $K + \rho$ bzw. $K - \rho$, und der gemeinsame kleine Halbmesser ρ . Zwei Punkte des Kreises e , in einem Abstand gleich ρ von der Ebene A_{312} , beschreiben je eine gerade Strecke von der Länge $2K$. Zur Eingriffsfläche gelten als Symmetrie-Ebenen die Ebene A_{312} und jene zu A_{312} normalen Ebenen, die durch f_{123} bzw. i gehen.

Mit der Zahnfläche Φ_3 bildet die Symmetrie-Ebene der Radkörper zwei Schnittlinien, nämlich zwei Hauptprofilkreise. In der von der Symmetrie-Ebene in einem Abstand $b/2$ befindlichen Stirnebene B entsteht eine sogenannte Cassini-Kurve vierter Ordnung [10], als Schnitt der Zahnfläche Φ_3 (Bild 6).

Der Eingriffswinkel α_b des Stirnprofils zum allgemeinen Punkte E der Zahnfläche Φ_3 in der Stirnebene B läßt sich folgenderweise bestimmen. Der mit dem Hauptprofilkreis gebildete Schnittpunkt des durch den Punkt E gelegten Rotationskreises q vom Halbmesser Q ist $[E]$. Die Hauptprofilnormale $[n]$ durch $[E]$ geht durch den Mittelpunkt 3 des Hauptprofilkreises, und hat mit der Achse t von Φ_3 den Schnittpunkt 4. Der Winkel $\alpha = \arccos [(Q - K)/\varrho]$ zwischen der Geraden $[n]$ und der Ebene A_{312} ist zugleich der Eingriffswinkel des Hauptprofilkreises in $[E]$. Die Gerade n durch E und 4 ist zugleich die Normale zur Fläche Φ_3 im Punkte E . Die Normalprojektion ν der Geraden n auf Ebene B ist zugleich die Normale des Stirnprofils im Punkte E . Mit Rücksicht auf

$$\sqrt{Q^2 - (b/2)^2} \cdot \tan \alpha_b = Q \tan \alpha,$$

gilt für den Eingriffswinkel des Stirnprofils

$$\alpha_b = \arctan (2Q \tan \alpha / \sqrt{4Q^2 - b^2}). \quad (1)$$

Die Tangente η des Stirnprofils im Punkt E liegt normal zur Geraden ν in der Ebene B .

Der Krümmungshalbmesser ϱ_b des Stirnprofils im Punkt E läßt sich folgenderweise bestimmen: Die Normalprofilebene läßt sich als eine Hauptkrümmungsebene der Fläche Φ_3 durch den Punkt E legen, und als zweite Hauptkrümmungsebene gilt eine, durch die Normale n gelegte, zur ersten Hauptkrümmungsebene normale Ebene [21]. Als erster Hauptkrümmungskreis gilt der Normalprofilkreis; der Mittelpunkt des zweiten Hauptkrümmungskreises ist — im Sinne des Meusnierschen Satzes [21] — der Schnittpunkt 4 der Normalen n mit der Achse t . Die zugehörigen Krümmungshalbmesser sind also

$$\varrho_I = Q/\cos \alpha$$

und

$$\varrho_{II} = \varrho.$$

(Zur richtigen Wahrnehmung der Krümmungsverhältnisse im Punkte E dient die Indikatrix von DUPIN [6, 10, 17, 21]. Diese Kurve ist im Bild 6 derart dargestellt, daß man die Berührungsebene zu Punkt E in eine zur

Ebene A_{312} parallele Lage umlegt. Um diese Berührungsebene in diese parallele Lage umzulegen, bedienen wir uns jener Geraden als Schwenkachse, welche einerseits durch den Schnittpunkt 5 der zu E gehörenden Tangenten des

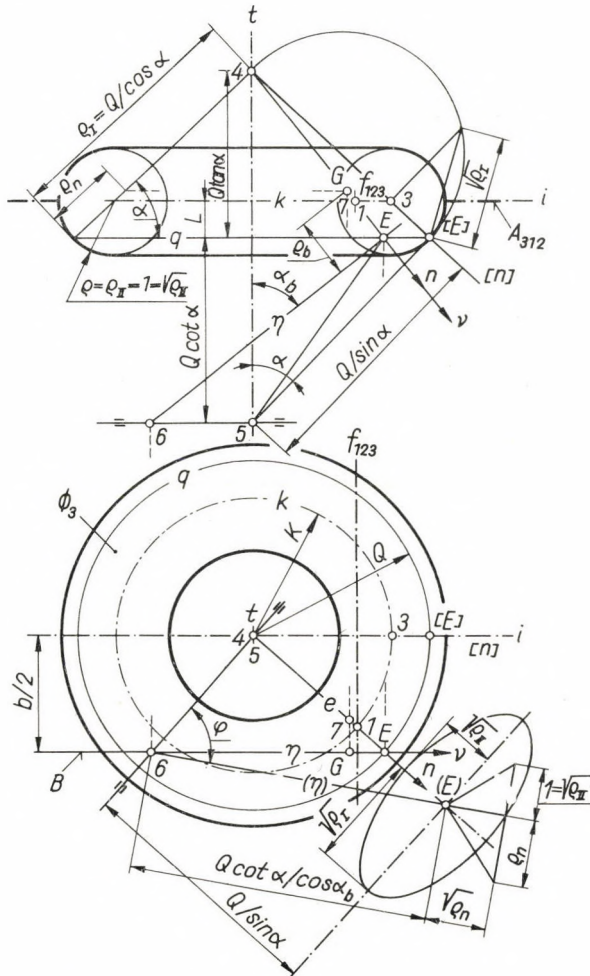


Bild 6

Normalprofilkreises mit der Achse t durchgeht, und andererseits mit der zu E gehörenden Tangenten des Kreises q parallel liegt. Diese Schwenkachse hat mit der Geraden η in 6 einen Schnittpunkt. Da der Punkt E einen elliptischen Punkt der Fläche Φ_3 darstellt, so ist in diesem Falle die gesuchte Indikatrix eine Ellipse. Es sei ϱ als Maßeinheit für die Indikatrix gewählt, so ist der kleine Halbmesser der Ellipse $\sqrt{\varrho_{11}} = 1 = \varrho$, und der große Halb-

messer der Ellipse: $\sqrt{\varrho_I} = \varrho \sqrt{\varrho_{II}}$. Die Wurzel von ϱ_I läßt sich durch eine geometrische Konstruktion bestimmen [4, 15].)

Wenn man durch die Fläche Φ_3 den Schnitt mit einer Ebene bildet, welche die Geraden n und η enthält, so läßt sich in diesem Schnitt der Krümmungshalbmesser ϱ_n mit Hilfe der Eulerschen Gleichung [21] bestimmen:

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_I} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_{II}},$$

wo φ den Winkel zwischen der Geraden η und der zum Kreis q im Punkte E gezogenen Tangenten bedeutet. Aus dem Dreieck der Punkte E , 5 und 6 erhält man:

$$\sin \varphi = \frac{Q/\sin \alpha}{Q \cot \alpha / \cos \alpha_b} = \cos \alpha_b / \cos \alpha.$$

So sind die gesuchten Krümmungshalbmesser

$$\varrho_I = Q/\cos \alpha \quad \text{und} \quad \varrho_{II} = \varrho.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$Q - \varrho \cos \alpha = K$$

und

$$\sin \varphi = \cos \alpha_b / \cos \alpha$$

erhält man aus der Eulerschen Gleichung:

$$\varrho_n = \frac{Q \varrho \cos^2 \alpha}{K \cos^2 \alpha_b + \varrho \cos^3 \alpha}.$$

(Für die Indikatrix läßt sich der Halbmesser auf der Geraden (η) als $\sqrt{\varrho_n}$ anschreiben. Hierhin kann man ϱ_n mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion bestimmen [15].)

Nun wollen wir die Größe ϱ_n — in dem richtigen Sinn — auf die Gerade n vom Punkte E aus auftragen, und den gewonnenen Punkt 7 auf die Gerade ν in rechtem Winkel projizieren. Der gewonnene Punkt G ist im Sinne des Meusnierschen Satzes der Krümmungsmittelpunkt des Stirnprofils, und der Abstand $\varrho_b = \overline{EG}$ ist der Krümmungshalbmesser des Stirnprofils im Punkte E . Da nun

$$\varrho_I : \varrho_n = (\varrho_I \sin \alpha / \sin \alpha_b) : \varrho_b,$$

d. h.

$$\varrho_b = \varrho_n \sin \alpha / \sin \alpha_b$$

ist, so gilt für den Krümmungshalbmesser:

$$\varrho_b = \frac{Q \varrho \cos^2 \alpha \sin \alpha}{(K \cos^2 \alpha_b + \varrho \cos^3 \alpha) \sin \alpha_b} \quad (2)$$

Die Stirnprofilkurven der Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 sind in der Ebene B mit der Stirnprofilkurve der Zahnfläche Φ_3 im Eingriff. Also besteht der Eingriff zwischen dem Punkte E des Stirnprofils Φ_3 und dem Punkte E_1

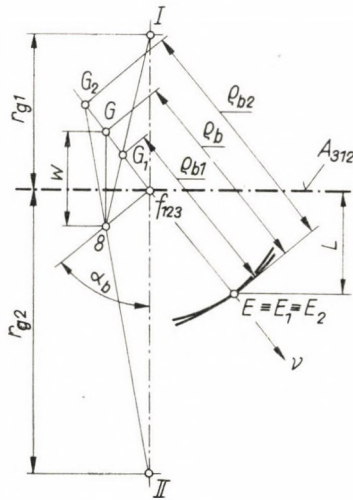


Bild 7

des Stirnprofils Φ_1 bzw. dem Punkte E_2 des Stirnprofils Φ_2 in jenem Zeitpunkt, wenn die zum Punkte E gehörende Gerade ν die Hauptgerade f_{123} schneidet [3, 25] (Bild 7). In diesem Augenblick ist die Gerade ν die momentane Normale aller drei Stirnprofile, und auf dieser Geraden befinden sich die Krümmungsmittelpunkte G (für Punkt E), G_1 (für Punkt E_1) und G_2 (für Punkt E_2). Mit Rücksicht auf die Identität $E \equiv E_1 \equiv E_2$ und in Kenntnis der Lage des Punktes G kann man die Punkte G_1 und G_2 mit Hilfe der Konstruktionsmethode von EULER—SAVARY bestimmen [3, 11, 23].

Der Schnittpunkt des aus dem Punkte G auf die Ebene A_{312} gefallenen Lotes mit der zur Geraden ν normalen und durch die Gerade f_{123} gelegenen Ebene ist Punkt δ . Die von dem Punkte δ auf die Achse I normal gezogene Gerade bildet mit der Geraden ν den Schnittpunkt G_1 , und von demselben Punkt auf die Achse II normal gezogene Gerade bildet den Schnittpunkt G_2 . Aus der Abbildung ergeben sich für die Krümmungshalbmesser:

$$\varrho_{b1} = \overline{E_1 G_1} \quad \text{und} \quad \varrho_{b2} = \overline{E_2 G_2}$$

folgende Formeln:

$$w : r_{g1} = (\varrho_b - \varrho_{b1}) : (\varrho_{b1} - L/\sin \alpha_b),$$

und

$$w : r_{g2} = (\varrho_{b2} - \varrho_b) : (\varrho_{b2} - L/\sin \alpha_b);$$

ferner

$$\varrho_b = w \sin \alpha_b + L/\sin \alpha_b,$$

wobei noch aus Bild 6 die Gleichung hervorgeht:

$$L = \sqrt{\varrho^2 - (Q - K)^2}.$$

Nach Durchführung der angedeuteten Operationen erhalten wir zum Punkte E_1 der Zahnfläche Φ_1 als Krümmungshalbmesser des Stirnprofils:

$$\varrho_{b1} = \frac{r_{g1} \varrho_b \sin^3 \alpha_b + L \varrho_b \sin \alpha_b - L^2}{r_{g1} \sin^3 \alpha_b + \varrho_b \sin^2 \alpha_b - L \sin \alpha_b} \quad (3)$$

und für den Punkt E_2 in der Zahnfläche Φ_2

$$\varrho_{b2} = \frac{r_{g2} \varrho_b \sin^3 \alpha_b - L \varrho_b \sin \alpha_b + L^2}{r_{g2} \sin^3 \alpha_b - \varrho_b \sin^2 \alpha_b + L \sin \alpha_b}. \quad (4)$$

(Zur richtigen Versinnbildlichung der Krümmungsverhältnisse der Zahnflächen Φ_1 bzw. Φ_2 in dem Punkte E_1 bzw. E_2 kann man die entsprechenden Dupin-Indikatrices konstruieren. Für den Fall von Φ_1 zeigt Bild 8 die bereits beschriebene geometrische Konstruktion. In der umgekehrten Reihenfolge als vorher angedeutet, kann man aus ϱ_{b1} die Größen ϱ_{n1} und $\sqrt{\varrho_{n1}}$ bestimmen. In dem identischen Punkte $E \equiv E_1$ haben die Indikatrices für Φ_3 und Φ_1 einen gemeinsamen kleinen Halbmesser, da die Normalprofilkreise auch identisch sind, d. h., die ersten Hauptkrümmungsebenen und darin die Hauptkrümmungshalbmesser sind die gleichen [6]. In Kenntnis des kleinen Halbmessers und des Halbmessers $\sqrt{\varrho_{n1}}$ kann man für Fläche Φ_1 die Indikatrix im Punkte E_1 auf geometrischem Wege bestimmen [5, 30].)

In den Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 sind die Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho_{I11} \equiv \varrho_{I12} \equiv \varrho_{II} \equiv \varrho$ identisch. Mit Rücksicht auf die Zusammenhänge:

$$\varrho_{n1} = \varrho_{b1} \sin \alpha_b / \sin \alpha \quad \text{bzw.} \quad \varrho_{n2} = \varrho_{b2} \sin \alpha_b / \sin \alpha$$

kann man die Hauptkrümmungsradien ϱ_{I1} und ϱ_{I2} mit Hilfe der Eulerschen Gleichung errechnen:

$$\frac{1}{\varrho_{n1}} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_{I1}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_{II}},$$

$$\frac{1}{\varrho_{n2}} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_{I2}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_{II}}.$$

Unter Benützung der Formeln:

$$\sin \varphi = \cos \alpha_b / \cos \alpha$$

und

$$\varrho_{111} = \varrho_{112} = \varrho,$$

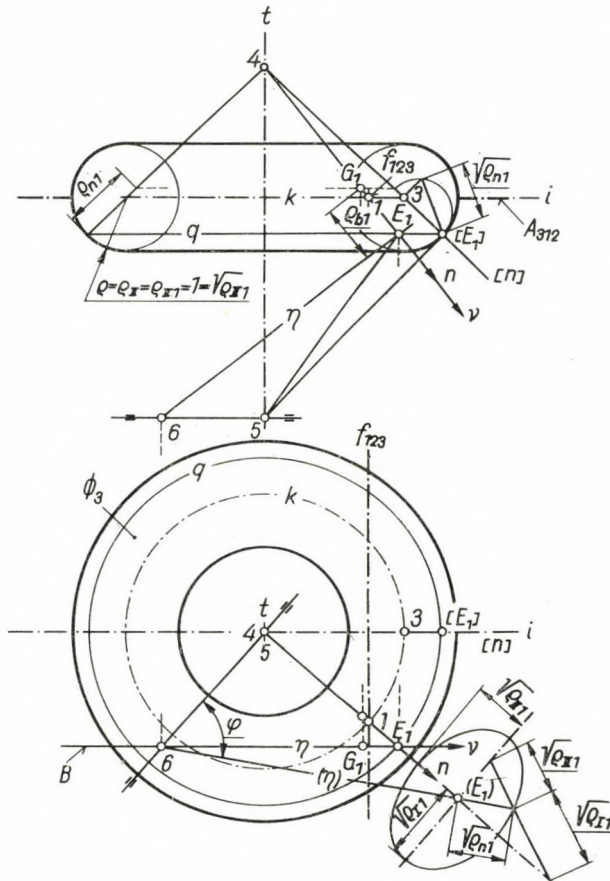


Bild 8

erhält man:

$$\varrho_{11} = \frac{\varrho \cdot \varrho_{n1} (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_b)}{\varrho \cdot \cos^2 \alpha - \varrho_{n1} \cos^2 \alpha_b},$$

$$\varrho_{12} = \frac{\varrho \cdot \varrho_{n2} (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_b)}{\varrho \cos^2 \alpha - \varrho_{n2} \cos^2 \alpha_b}.$$

2. Wir erhalten eine Lösung, in welcher die Prinzipien von WILDHABER und NOWIKOW zugleich geltend gemacht werden, indem wir zur

Erzeugung der Zahnfläche Φ_1 bzw. der Zahnfläche Φ_2 je eine Rotations-Kreisringfläche Φ'_3 , bzw. Φ''_3 als Abwälzwerkzeug verwenden, welche die Zahnfläche Φ_3 entlang des Rotationskreises q berühren (Bild 9), und für welche die Normalprofilhalbmesser ρ' und ρ'' voneinander abweichen. Allgemein ist $\rho'' > \rho'$, d. h., man wählt zweckmäßigerweise für das kleine Rad eine konvexe, für das große Rad eine konkave Zahnfläche, uzw. in Überein-

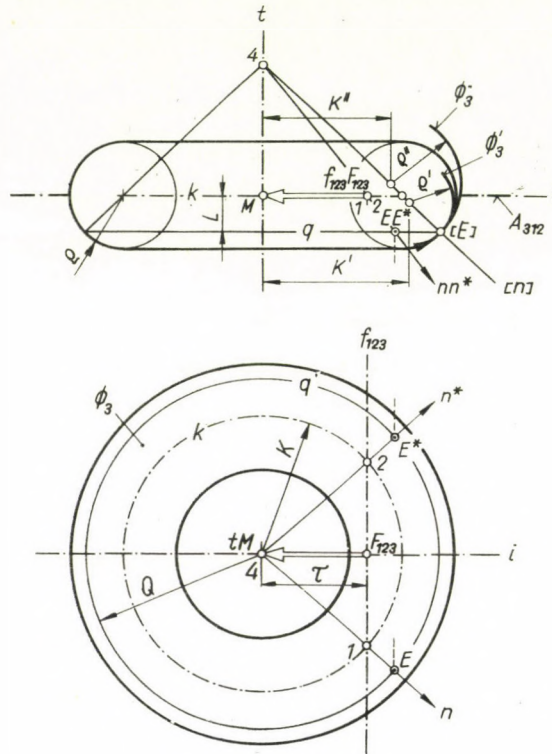


Bild 9

stimmung mit der bekannten Nowikow-Verzahnung [20]. Man kann eine der Flächen von Φ'_3 und Φ''_3 mit Φ_3 identisch annehmen, also kann auch der entsprechende Krümmungshalbmesser ρ' oder ρ'' gleich ρ sein.

Der Mittelkreis k der »theoretischen« Zahnfläche Φ_3 schneidet die Hauptgerade f_{123} — im Falle $|\tau| < K$ — in zwei Punkten. Diese Schnittpunkte 1 und 2 sind zugleich Mittelpunkte von Normalprofilkreisen der Zahnfläche Φ_3 , wobei diese Normalprofilkreise mit dem Kreise q die Schnittpunkte E und E^* , zugleich als gemeinsame, augenblickliche Berührungspunkte der Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 , Φ'_3 , Φ''_3 und Φ_3 bilden.

Die Normalen n (zwischen den Punkten E und 1) und n^* (zwischen den Punkten E^* und 2) haben mit der Achse t den gemeinsamen Schnittpunkt 4.

In der augenblicklichen Lage gibt es für die Zahnflächen Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_3'' und Φ_3 , außer den erwähnten Normalen n und n^* , keine andere gemeinsame Normale, welche die Hauptgerade f_{123} schneiden würde. So ist also die Berührung zwischen Φ_1 und Φ_2 als punktförmige erwiesen. Im Falle von $|\tau| = K$ sind die Punkte E und E^* miteinander identisch und fallen mit dem in der Symmetrieebene der Radkörper liegenden Punkte des Kreises q zusammen. Im Falle $|\tau| > K$ kommen E und E^* zum Verschwinden.

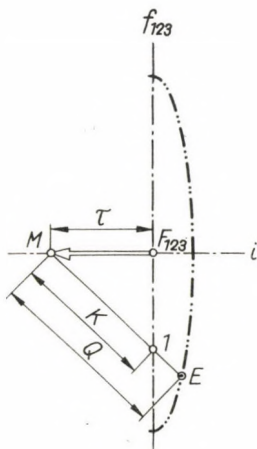


Bild 10

Während der Abwälzbewegung bewegt sich der Punkt M — bei gleichzeitiger Änderung des Abstandes τ — entlang der Geraden i , wobei der Punkt I (und auch 2) entlang der Hauptgeraden f_{123} weitergleitet (Bild 10), auch wird zugleich durch den Punkt E (bzw. E^*) die Eingriffslinie der Zahnfläche Φ_1 (bzw. Φ_2) beschrieben. Die Eingriffslinie ist eine Ellipse [5], mit dem kleinen Halbmesser gleich $Q - K$ und dem großen Halbmesser Q .

Für den Eingriffswinkel der Stirnprofile gilt auch diesmal die unter (1) abgeleitete Gleichung, jedoch mit der Einschränkung, daß infolge der punktförmigen Berührung sinngemäß nur ein einziger Wert dem Eingriffswinkel zugeschrieben werden kann, nämlich für einen bestimmten Wert $Q = \text{konstant}$. Auch sollen die Krümmungshalbmesser ρ'_{b1} bzw. ρ''_{b2} der Stirnprofile der Zahnflächen Φ_1 und Φ_2 nur bei $Q = \text{konstant}$, d. h. in einem einzigen Berührungspunkt bestimmt werden (Bild 11). Nach entsprechender Umformung der Gleichungen (2, 3 und 4) erhält man:

$$\rho'_{b1} = \frac{r_{g1} \rho'_b \sin^3 \alpha_b + L \rho'_b \sin \alpha_b - L^2}{r_{g1} \sin^3 \alpha_b + \rho'_b \sin^2 \alpha_b - L \sin \alpha_b},$$

$$\rho''_{b2} = \frac{r_{g2} \rho''_b \sin^3 \alpha_b - L \rho''_b \sin \alpha_b + L^2}{r_{g2} \sin^3 \alpha_b - \rho''_b \sin^2 \alpha_b + L \sin \alpha_b}.$$

Hierin haben wir für die Krümmungshalbmesser ρ'_b und ρ''_b der Flächen Φ'_3 und Φ''_3 die Formeln:

$$\rho'_b = \frac{Q\rho' \cos^2 \alpha \sin \alpha}{(K' \cos^2 \alpha_b + \rho' \cos^3 \alpha) \sin \alpha_b},$$

$$\rho''_b = \frac{Q\rho'' \cos^2 \alpha \sin \alpha}{(K'' \cos^2 \alpha_b + \rho'' \cos^3 \alpha) \sin \alpha_b};$$

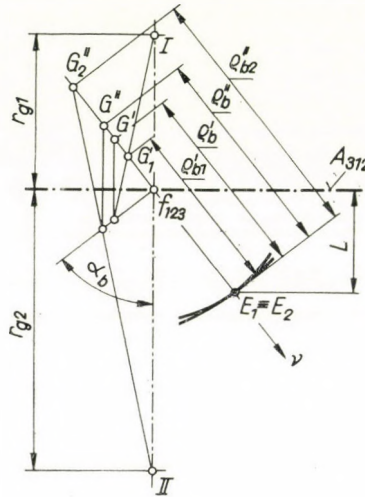


Bild 11

wofür den Halbmesser des Mittelkreises von Φ'_3 die Gleichung

$$K' = Q - \rho' \cos \alpha,$$

und für den Halbmesser des Mittelkreises von Φ''_3 die Gleichung

$$K'' = Q - \rho'' \cos \alpha$$

gelten (Bild 9).

Nun wollen wir gemäß der Bild 12 die Bedingungen eines kontinuierlichen Eingriffs bestimmen. Es seien die zum Mittelkreis k_1 koordinierten Austrittspunkte (Berührungspunkte) am Rande des Radkörpers E und E^* , so ist die Differenz

$$K - \tau_1 = K(1 - \cos \varepsilon),$$

und die Radbreite ist $b = 2Q \sin \varepsilon$.

Um einen kontinuierlichen Eingriff zu erzielen, muß man erreichen, daß in dem Augenblick, wo die zu den Schnittpunkten 11 und 12 der Kreislinie k_1 mit der Hauptgeraden f_{123} koordinierten Punkte E und E^* austreten, vom Mittelkreis k_2 der nächsten Zahnfläche bereits mit der Hauptgeraden f_{123} die Schnittpunkte 21 und 22 erzeugt werden sollen. Der Abstand zwischen den Kreismittelpunkten M_1 und M_2 (zu k_1 und k_2) ist gleich der Stirnteilung t_h . Wenn also

$$K [1 - \sqrt{1 - b^2/(4Q^2)}] > t_h,$$

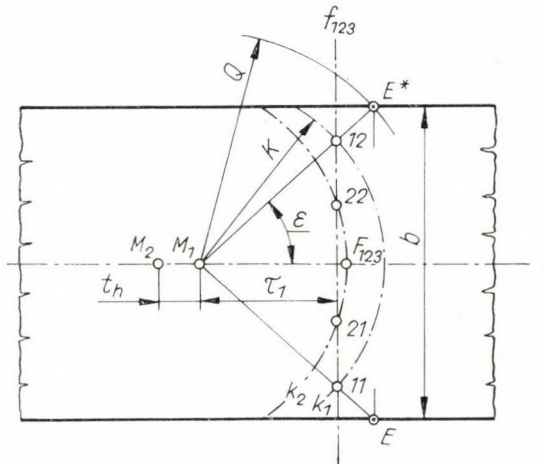


Bild 12

so haben wir einen kontinuierlichen Eingriff. Ist sogar

$$K [1 - \sqrt{1 - b^2/(4Q^2)}] \geq z \cdot t_h,$$

so sind gleichzeitig z Zähne im Eingriff.

SCHRIFTTUM

1. BEYER, R.: Technische Raumkinematik. Springer, Berlin 1963.
2. Федякин, Р. В.—Чесноков, В. А.: Зубчатые передачи с зацеплением М. Л. Новикова. Вестник Машиностроения 38 (1958); 4, 3—11.
3. НОНЕНБЕРГ, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. Springer, Wien 1961.
4. KÁRTESZI, F.: Ábrázoló geometria (Darstellende Geometrie). Tankönyvkiadó, Budapest 1957.
5. KRAMES, J. L.: Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Deuticke, Wien 1952.
6. KRUPPA, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer, Wien 1957.
7. KRÜGER, A. K.: Internationale Konferenz für Zahnräder und Zahnradgetriebe, Essen 1960. Konstruktion 3 (1961), 41—54.
8. Литвин, Ф. Л.: Теория зубчатых зацеплений. Физматгиз, Москва 1960.

9. MAROS, D.: A fogazás legáltalánosabb törvénye (Das allgemeinste Grundgesetz der Verzahnung). A III. nemzetközi „Mechanizmusok és hajtóművek” tudományos ülészak előadásainak kivonata. Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc 1963.
10. MÜLLER, E.—KRUPPA, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Springer, Wien 1948.
11. MÜLLER, H. R.: Kinematik. Walter De Gruyter, Berlin 1963.
12. NIEMANN, G.: Novikov-Verzahnung und andere Sonderverzahnungen für hohe Tragfähigkeit. *VDI Berichte* 1961, 47—512.
13. NOWIKOW, M. L.: Patent Nr. 109113 der Sowjetunion.
14. Новиков, М. Л.: Основные вопросы геометрической теории точечного зацепления, предназначенного для зубчатых передач большой мощности. Диссертация, Москва 1955.
15. PETRICH, G.: Elemi geometriai szerkesztések (Elementare geometrische Konstruktionen). Pattantyús, Gépész- és Villamosmérnökök Kézikönyve, I. kötet; 251—253. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1959.
16. PRUDHOMME, R.—LEMASSON, G.: Cinématique. Dunod, Paris 1955.
17. RADOS, G.: Analízis és geometria (Analyse und Geometrie). Franklin, Budapest 1920.
18. RITTER, R.: Getriebe mit Kreisbogen-Zahnformen. *Technische Rundschau* (1961), Nr. 22.
19. SÁLYI, I.: Műszaki mechanika, I.: A kinematika elemei (Technische Mechanik, I.: Elemente der Kinematik). Tankönyvkiadó, Budapest 1960.
20. ŠEJVL, M.: Ozubení Novikovovo ve A. BOLEK a kolektiv: Části stroju, Díl 2. (Novikov-Verzahnung, in A. BOLEK u. Aut. Koll.: Maschinenelemente, 2. Bd.). Praha 1963, 297—305.
21. STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie, III. Theorie der Flächenkrümmung. De Gruyter, Berlin 1959.
22. TEN BOSCH, M.: Gépelemek (Maschinenelemente, ung. Übersetzung). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1957.
23. TERPLÁN, Z.: Mechanizmusok (Mechanisms). Tankönyvkiadó, Budapest 1962.
24. *VDI Berichte* (1961), Nr. 47.
25. VÖRÖS, I.: Gépelemek, III.: Fogaskerekek (Maschinenelemente, III. Zahnräder). Tankönyvkiadó, Budapest 1956.
26. WALKER, H.: A Critical Look at the Novikov Gear. *The Engineer* **209** (1960), 725—729.
27. WELLS, C. F.—SHOTTER, B. A.: The Development of Circarc Gearing. *Machinery* **101** (1962), 134—138.
28. WILDHABER, E.: Patent USA, Nr. 1601750.
29. WILDHABER, E.: Eine Kreisbogenverzahnung, ähnlich der Novikov-Verzahnung. *VDI Berichte* (1961); 41, 19—21.
30. ZIGÁNY, F.: Ábrázoló geometria (Darstellende Geometrie). Tankönyvkiadó, Budapest 1962.

THE BASES OF THE GEOMETRY OF WILDHABER—NOVIKOV GEARING
WHICH CAN BE MANUFACTURED ON FORSTER-TYPE MACHINES

I. DRAHOS

SUMMARY

On a Forster-type machine a pair of spur gears can be manufactured the switching of which is similar to that of a pair of gears with Wildhaber—Novikov gearing. The tooth surfaces of the generating racks are surfaces of circular annuli, which are in contact along their rotational circles. It is also possible to machine the teeth by generating with a cup wheel having a circular section. The paper deals with the examination of the pressure angle, the curvature of the normal profiles, the line of thrust and the conditions for continuous engagement.

FONDEMENTS GÉOMÉTRIQUES DE L'USINAGE DE DENTURES
WILDHABER—NOVIKOV SUR LES MACHINES DE TYPE FORSTER

I. DRAHOS

RÉSUMÉ

Sur les machines de type Forster, on peut faire des couples d'engrenages cylindriques dont l'engrènement est celui des roues produites selon le théorème de Wildhaber—Novikov. Les surfaces des dents des outils crémaillères générateurs correspondent alors à des surfaces d'anneaux circulaires de rotation, qui viennent en contact le long de leur cercle de rotation. Les dents peuvent aussi être usinées par meulage à développante au moyen de meules boisseaux de profil circulaire. L'article étudie encore les problèmes de l'angle de pression, de la courbure des profils frontaux, de la ligne d'action et des conditions de l'engrènement permanent.

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ВИЛЬДГАБЕРА—НОВИКОВА,
ИЗГОТОВЛЯЕМОГО НА СТАНКЕ ТИПА ФОРСТЕР

И. ДРАХОШ

РЕЗЮМЕ

На станке типа Форстера можно изготовить такую пару цилиндрических зубчатых колес, сцепление которой аналогично сцеплению пары зубчатых колес зацепления Вильдгабера—Новикова. Поверхности зубьев двух обрабатывающих реек в этом случае имеют поверхность кольца вращения, которые соприкасаются друг с другом по кругу вращения. Зубья можно обработать также путем шлифования обкаткой кругом круглого профиля. Статья занимается исследованием угла сцепления, кривизны лобовых профилей, линий зацепления и условий непрерывного сцепления.

ПРЕДЕЛ НАГРУЗКИ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ СТАНОВ ТРИО И ДУО С РЕГУЛЯТОРАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Д. ТЕВАН

КАФЕДРА ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЯЖЕЛОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ, Г. МИШКОЛЬЦ

[Поступило 10-го июня 1964 г.]

В статье рассматривается вопрос максимальной нагрузки стана трио, приводимого асинхронным двигателем с регулируемым скольжением, с учетом того условия, что в плане пропусков указаны не данные времени пропуска, а длины заготовок после прокатки. При исследовании максимальной нагрузки ильгнерного привода с регулируемым скольжением в работе учитывается также действие, оказываемое снижением числа оборотов генератора постоянного тока на число оборотов серводвигателя прокатного стана. Дается приближенное, сравнительно легко доступное решение дифференциального уравнения проблемы. Приведенный метод пригоден не только для проверки осуществимости заданного плана пропусков при помощи имеющегося электропривода, но может быть использован также при проектировании электрического привода.

1. Электропривод стана трио с регулятором скольжения

В данном случае стан трио приводится от асинхронного двигателя с контактными кольцами. Регулятор вводит в цепь ротора добавочное сопротивление, обеспечивающее номинальную величину тока в двигателе (или, по временам, меньше номинального). Положительная или отрицательная разница между моментом нагрузки и постоянным моментом двигателя компенсируется массой маховых частей (двигатель, валки + маховик). Эта компенсация возможна именно из-за введения сопротивления ротора, или из-за отключения его, так как при этом снижается, или возрастает число оборотов. Внутреннее сопротивление ротора не может быть отключено и поэтому регулятор после достижения внутреннего сопротивления уже не обеспечивает постоянства величины тока. Этот случай наблюдается при прокатке тогда, когда между двумя пропусками число оборотов асинхронного двигателя превышает номинальное значение. Такое же положение в промежутке времени между выдачей одной полосы и задачей следующей.

Для ускорения процесса прокатки новую полосу можно задавать уже в момент достижения агрегатом номинального числа оборотов; кроме этого так как задачей является определение предела нагрузки, принимается такая нагрузка, которая полностью использует двигатель и, таким образом, даже между пропусками число оборотов не превышает номинального значения. Итак, двигатель будет всегда развивать номинальный момент, если только

временем регулирования можно пренебречь по сравнению с временем пропусков, и регулирование астатическое. (Последнее справедливо в случае регуляторов *Thoma*.) В случае периодической прокатки, при изложенных выше условиях, может быть вычерчен график момента двигателя для одного периода, показанный на рис. 1.

Ввиду того, что результирующий динамический момент (разность между моментом двигателя M_m и моментом нагрузки M_t) постоянен по участкам, угловая скорость на каждом участке является линейной функцией времени.

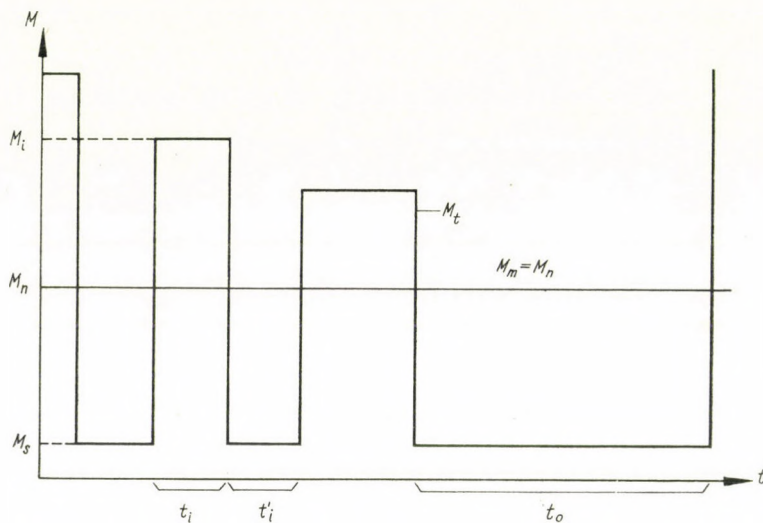


Рис. 1

В начальный и конечный моменты периода угловая скорость равна номинальной угловой скорости асинхронного двигателя (как следствие изложенного), и таким образом, если известен момент инерции на валу двигателя, изменение угловой скорости во времени может быть рассчитано и изображено на графике (рис. 2). Достаточно определить точки вершин углов графика функции, имеющей форму ломаной линии.

Применяя обозначения рис. 1 и 2 имеем:

$$M_i - M_n = \Theta \frac{\omega_{2i-1} - \omega_{2i}}{t_i} \quad (1)$$

и

$$M_n - M_s = \Theta \frac{\omega_{2i+1} - \omega_{2i}}{t_i'} \quad (2)$$

Время пропусков, однако, зависит от угловой скорости, так как из расчета программы прокатки могут быть получены длины полосы после отдельных

пропусков. Обозначив эту длину через l_i , передаточное число между двигателем и валками через a , радиус валка — через r ; имеем

$$\frac{1}{a} r \frac{\omega_{2i-1} + \omega_{2i}}{2} = \frac{l_i}{t_i},$$

и подставив это в (1):

$$M_i - M_n = \frac{\Theta \cdot r}{2 l_i a} (\omega_{2i-1}^2 - \omega_{2i}^2),$$

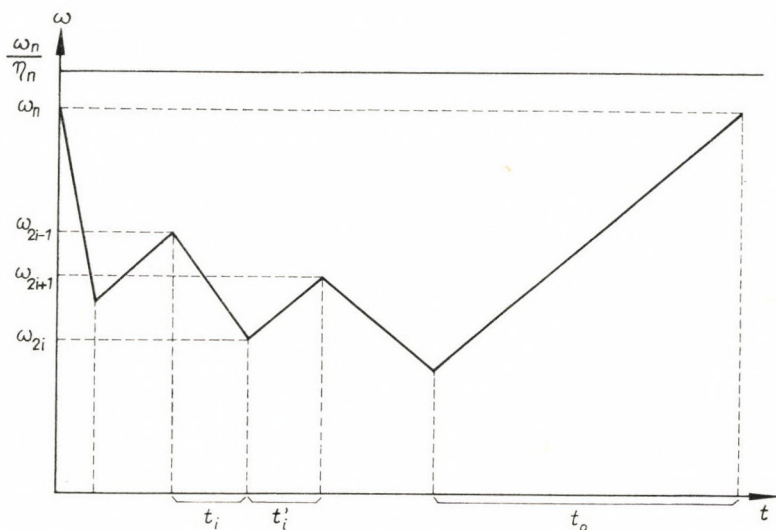


Рис. 2

откуда:

$$\omega_{2i} = \sqrt{\omega_{2i-1}^2 - \frac{2 l_i a}{\Theta r} (M_i - M_n)} \quad (3a)$$

и из (2):

$$\omega_{2i+1} = \omega_{2i} + \frac{t'_i}{\Theta} (M_n - M_s). \quad (3б)$$

Из уравнений (3а) и (3б) последовательно можно рассчитать угловые скорости в начале и в конце участков; исходным значением является $\omega_1 = \omega_n$. Если число пропусков принять равным σ , то время, обозначенное на графике через t_0 , будет:

$$t_0 = \frac{\Theta(\omega_n - \omega_{2\sigma})}{M_n - M_s}. \quad (4)$$

При расчете диаграммы угловых скоростей для заданной программы прокатки необходимо провести следующие исследования:

1. Если под знаком корня в (3а), для какого-нибудь промежутка времени прокатки получается отрицательное значение, то заданная программа не выполнима на данном стане: двигатель останавливается.

2. Если случай 1 и не имеет места, то резкое снижение угловой скорости является вредным ввиду роста времени прокатки.

3. Замедление хода агрегата снижает коэффициент полезного действия.

Для подтверждения последнего примем во внимание, что мощность, забираемая из сети, постоянна и значение ее

$$P_0 = \frac{P_h}{\eta} = \frac{P_{hn}}{\eta_n} = \frac{M_n \omega_n}{\eta_n},$$

где η_n — номинальный коэффициент полезного действия двигателя при выключенном сопротивлении. Полезная мощность в любое время будет:

$$P_h = M_n \omega,$$

и, таким образом, коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_h}{P_0} = \eta_n \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\left(\frac{\omega_n}{\eta_n}\right)}. \quad (5)$$

На рис. 2 нанесено значение ω_n/η_n , а отнесенное к нему значение ω дает коэффициент полезного действия. На основе соображений 2. и 3., принимая во внимание экономичность, в каждом конкретном случае необходимо исследовать целесообразность проведения прокатки на данном стане.

Если в задание входит проектирование электропривода, то маховик, — после определения мощности двигателя в соответствии с потребностью наиболее жесткой программы прокатки и учета прописанное время прокатки, — рассчитывается таким образом, что при различных значениях Θ , для наиболее жесткой программы вышеизложенным способом определяется диаграмма угловой скорости в функции времени, и выбирается подходящий вариант. При малом Θ затраты на маховик малы, однако, ввиду снижения значения ω возрастают время между пропусками и потери в цепи ротора. При большом Θ потери меньше, однако увеличиваются затраты на маховик.

II. Привод Ильгнера с регулятором скольжения

Принципиальная схема показана на рис. 3. К регулятору скольжения и агрегату, состоящему из асинхронного двигателя и генератора постоянного тока, здесь проявляются те же условия, что и в случае I. Таким

образом двигатель забирает от сети постоянную мощность, и развивает постоянный момент, который соответствует номинальному току асинхронного двигателя. Итак, предполагается нагрузка, полностью использующая асинхронный двигатель. (При проектировании номинальную мощность асинхронного двигателя следует выбирать в соответствии с наиболее жесткой программой прокатки с учетом необходимого перерыва между полосами.)

Изменение угловой скорости приводного двигателя прокатного стана Ω принимаем линейным; в этом случае момент двигателя, являющийся суммой постоянного по участкам момента прокатки и значения $\Theta_m \cdot d\Omega/dt$ постоянного по участкам в соответствии с изложенным выше, также будет

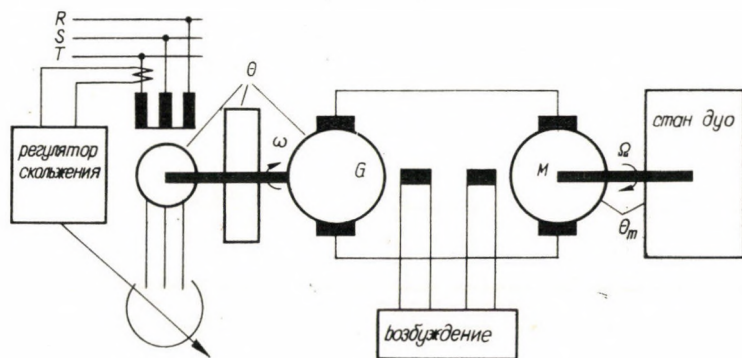


Рис. 3

постоянным по участкам. Данное предположение может быть сделано потому, что посредством возбуждения генератора всегда можно обеспечить равномерное ускорение, замедление и реверсирование. Если в приводе имеется также и токовая отсечка, то на участках ограниченного тока ток якоря, а при постоянном возбуждении и момент его постоянны, и на этом участке приведенное выше условие выполняется автоматикой. На основе средне-квадратичного значения момента двигателя можно решить, перегружает ли работа по данной программе (которая содержит и прописанное изменение числа оборотов) двигатель и генератор или нет. Если на двигателе применяется и ослабление поля, то для двигателя решающим становится средне-квадратичное значение фиктивного момента, т. е. момента, увеличенного пропорционально ослаблению поля. При расчетах номинальный момент приводного двигателя и главного генератора определяется средне-квадратичным значением (фиктивного) момента двигателя для наиболее тяжелой программы прокатки.

Таким образом, момент приводного двигателя прокатного стана во время прокатки может рассматриваться как постоянный по участкам, угловая же скорость его — линейно-переменной; отсюда и полезная мощ-

ность его является линейной функцией времени по участкам. По участкам ток двигателя постоянен (изменяется в крайнем случае при ослаблении поля), поэтому потери двигателя и генератора по участкам могут приниматься приблизительно постоянными. Таким образом необходимая для привода главного генератора мощность во времени по участкам меняется линейно:

$$P_g = P_k + (P_v - P_k) \frac{t - t_k}{t_v - t_k} = At + B, \quad (6a)$$

где P_k принадлежащее началу участка $t = t_k$, а P_v принадлежащее конечному моменту участка $t = t_v$ значение мощности, и

$$A = \frac{P_v - P_k}{t_v - t_k}, \quad (6б)$$

$$B = P_k + (P_k - P_v) \frac{t_k}{t_v - t_k} = \frac{P_k t_v - P_v t_k}{t_v - t_k}. \quad (6в)$$

Кроме мощности по (6а), введенной в генератор, полезной мощности двигателя, необходимо подавать и мощность на ускорение масс:

$$P_{hm} = P_g + \Theta \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Поскольку $P_{hm} = M_n \omega$, где M_n — номинальный момент асинхронного двигателя (это значение момента асинхронного двигателя поддерживается регулятором скольжения), то

$$\Theta \omega \frac{d\omega}{dt} = M_n \omega - P_g;$$

подставив (6а) получим:

$$\Theta \omega \frac{d\omega}{dt} = M_n \omega - B - At. \quad (7)$$

Решение этого дифференциального уравнения при $t = t_k$, $\omega = \omega_k$ даст изменение угловой скорости агрегата асинхронный двигатель — главный генератор на соответствующем участке. На первом участке начальное значение угловой скорости будет номинальным ω_n , на каждом же последующем участке начальное значение определяется угловой скоростью конца предыдущего участка. После выхода готовой полосы для восстановления номинальной угловой скорости требуется время t_0 . Это значение t_0 и сейчас рассчитывается по (4), с той лишь разницей, что M_s теперь не момент трения

стана, а момент трения агрегата асинхронный двигатель — маховик — генератор, вместо же $\omega_{2\sigma}$ подставляется значение угловой скорости конца последнего участка.

Дифференциальное уравнение (7) хотя и может быть решено в замкнутой форме, однако при этом получается трудная и неявно выраженная функциональная зависимость между угловой скоростью и временем. Поэтому применяется следующее приближенное решение.

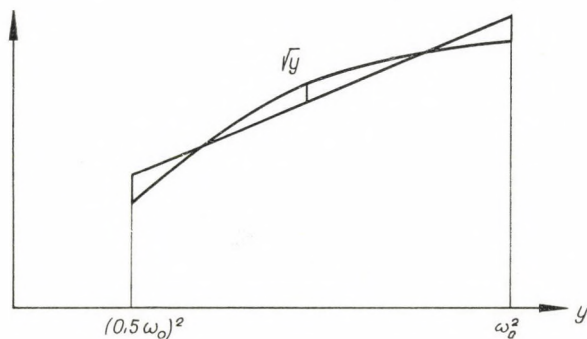


Рис. 4

Введем в начале новую переменную

$$\omega^2 = y. \tag{8}$$

Подставив в (7), получим

$$\frac{\Theta}{2} \frac{dy}{dt} - M_n \sqrt{y} = -B - At. \tag{9}$$

Значение \sqrt{y} может быть приближенно определено посредством такой линейной функции, относительная погрешность приближения которой равна по обоим краям участка от

$$y = (0,5 \omega_0)^2 \text{ до } y = \omega_0^2,$$

причем эта относительная погрешность равна и противоположна по знаку крайнему значению относительной погрешности, принятой для этого участка (на практике с уверенностью можно утверждать, что скольжение никогда не достигает 50%-ов, обычно максимум скольжения равен 20%-ам; Рис. 4). Здесь ω_0 представляет синхронную скорость вращения. По расчетам, не приведенным со всеми подробностями, эта линейная функция будет:

$$\frac{4(3 - 2\sqrt{2})}{\omega_0} \left(y + \frac{1}{2} \omega_0^2 \right) = 0,6864 \left(\frac{y}{\omega_0} + 0,5 \omega_0 \right).$$

Таким образом

$$\sqrt{y} \simeq \frac{0,6864}{\omega_0} y + 0,3432 \omega_0. \quad (10)$$

Наибольшее значение относительной погрешности равно 2,96%. Подставив приближенное значение (10) в (9), получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\Theta}{2} \frac{dy}{dt} - \frac{0,6864 M_n}{\omega_0} y = 0,3432 M_n \omega_0 - B - At. \quad (11)$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет форму $y_p = C + Dt$, подставив которое имеем:

$$\frac{\Theta}{2} D - \frac{0,6864 M_n}{\omega_0} C - \frac{0,6864 M_n}{\omega_0} Dt = 0,3432 M_n \omega_0 - B - At,$$

откуда

$$D = \frac{A \omega_0}{0,6864 M_n}, \quad \text{и} \quad C = \frac{B - 0,3432 M_n \omega_0}{0,6864 M_n} \omega_0 + \\ + \frac{\Theta \omega_0}{2 \cdot 0,6864 M_n} D = -\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{B \omega_0}{0,6864 M_n} + \frac{\Theta \omega_0^2}{2} \frac{A}{(0,6864 M_n)^2}$$

и таким образом

$$y_p = C + Dt = \frac{\omega_0}{0,6864 M_n} \left(B + A \frac{\Theta \omega_0}{2 \cdot 0,6864 M_n} + At \right) - \frac{\omega_0^2}{2}.$$

Подставив значения (6б) и (6в) получим:

$$y_p = \frac{\omega_0}{0,6864 M_n} \left[\frac{P_k t_v - P_v t_k}{t_v - t_k} + \frac{P_v - P_k}{t_v - t_k} \left(t + \frac{\Theta \omega_0}{2 \cdot 0,6864 M_n} \right) \right] - \frac{\omega_0^2}{2}. \quad (12)$$

Решение однородной части (11), при введении обозначения

$$\frac{\Theta \omega_0}{2 \cdot 0,6864 M_n} = T \quad (13)$$

будет:

$$y_n = K e^{t/T}. \quad (14)$$

Таким образом $y = y_h + y_p$, а также на основе (8), (12), (13) и (14):

$$\omega^2 = K e^{t/T} + \frac{2T}{\Theta} \left[\frac{P_k t_v - P_v t_k}{t_v - t_k} + \frac{P_v - P_k}{t_v - t_k} (t + T) \right] - \frac{\omega_0^2}{2}.$$

Так как при $t = t_k$, $\omega = \omega_k$ (значение угловой скорости в начале участка), то

$$Ke^{t_k/T} = \omega_k^2 + \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{2T}{\Theta} \left(P_k + \frac{P_v - P_k}{t_v - t_k} T \right);$$

произведя обратную подстановку в предыдущее выражение ω^2 :

$$\omega = \sqrt{\left[\omega_k^2 + \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{2T}{\Theta} \left(P_k + \frac{P_v - P_k}{t_v - t_k} T \right) \right] e^{(t-t_k)/T} + \frac{2T}{\Theta} \left[\frac{P_k t_v - P_v t_k}{t_v - t_k} + \frac{P_v - P_k}{t_v - t_k} (t + T) \right] - \frac{\omega_0^2}{2}}. \quad (15)$$

Функция угловая скорость-время, таким образом, по участкам представляет из себя корень квадратный, извлеченный из суммы линейного и экспоненциального членов. Изобразить ее просто: нужно сложить прямую с экспоненциальной кривой, построенной по шаблону, а из этой суммы определить квадратный корень. Подчеркиваем, что уравнение (15) дает правильный результат лишь в том случае, если регулятор скольжения действует, т. е. если асинхронный двигатель не ускоряется сверх номинальной угловой скорости. Если же регулятор скольжения уже не действует, то мощность, отданная двигателем, будет не $M_n \omega$, а $M_n \omega_n (\omega_0 - \omega) / (\omega_0 - \omega_n)$.

Дифференциальное уравнение для этого случая может быть разрешено подобным же способом. Здесь не останавливаемся подробнее на этом, так как в основу анализа нагружаемости следует брать такую программу прокатки, которая обеспечивает полное использование оборудования, а регулятор скольжения действует постоянно.

Предположим, что программа прокатки, взятая в основу исследования не перегружает приводной двигатель прокатного стана и генератор. Асинхронный двигатель не перегружается, так как этому препятствует регулятор скольжения. Может, однако, выдаться такой случай, когда угловая скорость асинхронного двигателя резко снизится. Это может оказаться вредным с двух точек зрения:

а) снижается коэффициент полезного действия;

б) в отдельных случаях становится невозможным достижение предписанной программой прокатки числа оборотов, так как главный генератор, ввиду снижения числа оборотов, не может обеспечить нужного напряжения. Что касается а), то укажем лишь на зависимость (5), которая действительно и в этом случае. Имеет ли место случай б), или нет, можно заключить из следующего ниже. Если пренебречь падением напряжения, э. д. с. приводного двигателя стана и генератора одинаковы:

$$C_g \Phi_g \omega \cong C_m \Phi_m \Omega.$$

Предписанные $\Omega = \Omega(t)$ и, следующее отсюда, $\omega = \omega(t)$ соблюдается в том случае, если

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{C_g \Phi_g}{C_m \Phi_m} \leq \frac{C_g \Phi_{g\text{макс.}}}{C_m \Phi_{m\text{мин.}}},$$

где $\Phi_{g\text{макс.}}$ — наибольший поток генератора, $\Phi_{m\text{мин.}}$ же — наименьший допустимый поток двигателя. Приведенное выше условие может быть записано и в виде следующего неравенства, которое, таким образом, должно удовлетворяться за все время прокатки:

$$\omega \geq \frac{C_m \Phi_{m\text{мин.}}}{C_g \Phi_{g\text{макс.}}} \Omega. \quad (16)$$

Это можно проверить посредством графического изображения функций

$$\omega = \omega(t)$$

и

$$\frac{C_m \Phi_{m\text{мин.}} \Omega(t)}{C_g \Phi_{g\text{макс.}}},$$

причем последняя имеет только прямолинейные участки. Функции изображаются в одной системе координат. Если две кривые пересекаются, программа прокатки неосуществима. Если заданием является проектирование маховичка, то, построив кривую $\omega = \omega(t)$ для разных значений Θ , следует выбрать кривую наиболее близко расположенную к кривой

$$\frac{C_m \Phi_{m\text{мин.}} \Omega(t)}{C_g \Phi_{g\text{макс.}}}$$

но не пересекающую ее, и принадлежащее к этой кривой Θ . Наиболее близко расположенная кривая обеспечит наименьшие затраты на маховик. Однако, если при этом значении Θ коэффициент полезного действия очень малый, то необходимо выбрать большое значение Θ , принимая во внимание экономичность.

ЛИТЕРАТУРА

1. SZEGHESYI, Á.: Die Dimensionierung von Ilgnerantrieben. *Acta Techn. Hung.* **24** (1959), 45—83.
2. РОПОВ, В. К.: Villamoshajtások tervezése (Попов, В. К.: Основы электроприводов; Перевод с русского) 1953.
3. CSELJUSZTKIN, A. B.—ROSENMAN, JE. A.: Hengerművek önműködő vezérlése és szabályozása (А. В. Челюсткин—Е. А. Розенман: Автоматическое управление и регулирование прокатных станов; Перевод с русского) 1954.

THE LOAD-CARRYING CAPACITY
OF TWO-HIGH AND THREE-HIGH SLIP-REGULATED MILL DRIVES

GY. TEVAN

SUMMARY

The paper deals with the load carrying capacity of a three-high rolling mill driven by a slip-regulated asynchronous motor, taking into consideration that in the rolling schedule are given not the rolling times, but the length of the workpieces after rolling-out. When investigating the load carrying capacity of the slip-regulated Ilgner drive, in the relatively easily treated approximate solution of the differential equation of the problem the influence of the speed drop of the d.c. generator on the r.p.m. of the roll drive motor is taken into account. The method is suitable not only for checking the possibility of realizing a given rolling plan with an existing electric drive, but it can also be used for the design of an electric drive.

DIE BELASTBARKEIT VON ANTRIEBEN
FÜR TRIO- UND DUOSTRASSEN MIT SCHLUPFREGULIERUNG

GY. TEVAN

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird die Belastbarkeit der von einem schlupfgeregelten Asynchronmotor angetriebenen Triostraße behandelt und zwar für den Fall, daß im Stichplan nicht die Stichzeiten, sondern die Längen der Stücke nach dem Auswalzen angegeben sind. Bei der Untersuchung der Belastbarkeit des Ilgner-Antriebs mit Schlupfregulierung berücksichtigt die Arbeit, vermittels einer relativ leicht lösbaren Näherungslösung der Differenzialgleichung des Problems, die Wirkung der Drehzahlverringerung des Gleichstromgenerators auf die Drehzahl des Walzstraßenantriebs. Das angegebene Verfahren ist nicht nur geeignet, die Verwirklichbarkeit eines gegebenen Stichplans mit einem gegebenen elektrischen Antrieb zu untersuchen, sondern es kann auch bei der Konstruktion des elektrischen Antriebs benützt werden.

CAPACITÉ DE CHARGE DE L'ENTRAÎNEMENT DES TRAINS TRIO ET DUO
A RÉGULATEUR DE GLISSEMENT

GY. TEVAN

RÉSUMÉ

La limite de charge des trains trio entraînés par des moteurs asynchrones à régulateur de glissement est examinée en tenant compte de ce que le projet de passage comporte les longueurs après laminage des pièces, au lieu des temps de passage. A l'examen de la capacité de charge de l'entraînement Ilgner à régulateur de glissement, l'étude tient compte aussi de l'effet de la réduction de la vitesse du générateur à courant continu sur le nombre de tours du moteur d'entraînement du train de laminoir, au moyen d'une solution approchée relativement simple de l'équation différentielle du problème. La solution présentée permet non seulement d'examiner la possibilité de réalisation d'un projet de passage donné avec un entraînement électrique existant, mais peut s'appliquer aussi lors de la construction de l'entraînement électrique.



RECHENMETHODE ZUR ANGENÄHERTEN BESTIMMUNG VON MASSENTRÄGHEITSMOMENTEN

I. THAMM

Die Berechnung von Massenträgheitsmomenten bei den Massen eines Drehschwingungen ausführenden Massensystems ist meistens eine schwierige und langwierige Arbeit, und sind die zu der Berechnung nötigen Angaben lückenhaft, so ist die genaue Berechnung überhaupt nicht möglich. Die im Aufsatz entwickelte Rechenmethode schafft insofern eine Erleichterung, da sie aus verhältnismäßig wenigen Angaben die Berechnung von oberen und unteren Schrankenwerten der gesuchten Trägheitsmomente ermöglicht. Zu der Berechnung der Schrankenwerte ist ein Hüllkörper zu wählen, welcher die vorliegende Masse möglichst gut umschließt und dabei eine geometrisch möglichst einfache Gestalt besitzt. Die Schrankenwerte werden nun als Trägheitsmomente dieses Hüllkörpers bei einfach anzugebenden Massenverteilungen berechnet. Bei der Berechnung wird eine Hilfsfunktion Ψ verwendet, welche nur von den die Massenverteilung kennzeichnenden zwei dimensionslosen Parametern abhängt und durch die Wahl des Hüllkörpers bestimmt ist. Anhand von Zahlenbeispielen wird gezeigt, daß bei der Berechnung der Schrankenwerte Fehler von unter 1% erreichbar sind.

I. Einführung

Bei der Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Massensystemen, welche Drehschwingungen ausführen, müssen die Trägheitsmomente der Massen des jeweiligen Systems bekannt sein. Sind die als Massen wirkenden Objekte, wie Schwungräder, Schiffspropeller, ew. ganze Maschinen in Zeichnungen angegeben, die Gewichtsdaten sowie die spez. Gewichte der eingebauten Materialien bekannt, so sind die benötigten Trägheitsmomente berechenbar. Bei zusammengesetzteren Gebilden dieser Art kann aber die genaue Berechnung zuweilen sehr langwierige Rechenarbeiten benötigen.

Teilweise aus diesem Grunde, teilweise aber, weil solche Berechnungen meistens dann auszuführen sind, wenn die Disposition des Schwingungssystems noch nicht endgültig festliegt, demzufolge also außer einigen Gewichtsangaben, Umrißzeichnungen sowie Schwerpunktskoordinaten und Schwerachrichtungen, weitere ausführlichere Angaben noch fehlen, scheint das Ausarbeiten einer Näherungsrechnung wünschenswert, welche aus den vorhandenen — zur genauen Rechnung nicht ausreichenden — Angaben wenigstens Näherungs- bzw. Schrankenwerte der benötigten Trägheitsmomente zu berechnen gestattet.

Ein solches Rechenverfahren, welches in einem früheren Aufsatz [1] schon veröffentlicht wurde, besteht darin, daß man zu der jeweiligen schwin-

genden Masse einen Hüllkörper möglichst einfacher Form aufsucht, dessen Schwerlinien dieselben sind, wie die der schwingenden Masse. Die Trägheitsmomente dieses Hüllkörpers werden nun aus zwei, die Materialverteilung betreffenden Annahmen berechnet. U. zw. wird erstens angenommen, daß das Material der schwingenden Masse den Hüllkörper bei gleichmäßiger Verteilung ausfüllt. Das so erhaltene Trägheitsmoment wird nach den Ausführungen des früheren Aufsatzes ein unterer Schrankenwert für das gesuchte genaue Trägheitsmoment der jeweiligen schwingenden Masse.

Zweitens wird angenommen, daß im Hüllkörper ein koaxialer Hohlraum vorhanden ist, dessen äußere Begrenzung dem Hüllkörper geometrisch ähnlich ist. Das Material der schwingenden Masse füllt jetzt nur den Rauminhalt zwischen der äußeren Begrenzung des Hüllkörpers und dem Hohlraume aus, bei ebenfalls gleichmäßiger Verteilung. Nach den Feststellungen des früheren Aufsatzes wird das aus letzterer Annahme berechnete Trägheitsmoment des Hüllkörpers eine obere Schranke des unbekanntes genauen Wertes.

Zweck vorliegender Arbeit ist die Überprüfung der früheren Ergebnisse; insbesondere soll untersucht werden, unter welchen Einschränkungen die auf die angedeutete Weise erhaltenen Rechenergebnisse für die benötigten Trägheitsmomente wirklich Schrankenwerte liefern, und wie gut die erreichte Annäherung ausfallen kann.

II. Die grundlegenden Zusammenhänge der Näherungsrechnung

Es sei das Gewicht der schwingenden Masse (Maschinenteil, komplette Maschine usw.), deren auf eine gegebene Schwerlinie bezogenes Trägheitsmoment gesucht wird, mit Q [kp] bezeichnet. Das darin enthaltene Material habe die Wichte von γ_a [kp/m³]. Das Volum, welches das Material der Masse lückenlos und hohlraumfrei bei Wichte γ_a ausfüllen würde, sei V_0 [m³], der Rauminhalt des entsprechend gewählten Hüllkörpers werde mit V [m³] bezeichnet. Da in den Maschinen und Maschinenteilen usw. meistens eingeschlossene Hohlräume vorhanden sind, und darüber hinaus der Hüllkörper die schwingende Masse auch nicht lückenlos bedecken wird, so wird offenbar

$$V_0 < V.$$

Es sei die scheinbare Wichte, mit welcher bei gleichmäßiger Verteilung das Material — also das Gewicht Q — den Inhalt V des Hüllkörpers ausfüllen würde, γ_s [kp/m³], so wird

$$Q = V_0 \gamma_a = V \gamma_s \quad (1)$$

und daraus:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\gamma_s}{\gamma_a} = \nu. \quad (1a)$$

Die dimensionslose Verhältniszahl ν wird bei den folgenden Rechnungen als Hilfsvariable herangezogen.

Nach obigem wird das auf die gegebene Schwerlinie der schwingenden Masse bezogene Trägheitsmoment des mit Material von der Wichte γ_s ausgefüllten Volumens V eine untere Schranke des unbekanntes genauen Trägheitsmomentes sein.

Zur Berechnung des oberen Schrankenwertes werden vorerst die linearen Abmessungen und der Inhalt des dem Volum V geometrisch ähnlichen Hohlraums V_h benötigt, welcher im Innern des Hüllkörpers angenommen wird. Die Verhältniszahl zwischen den linearen Abmessungen des Hohlraums V_h und denen des Hüllkörpers V sei μ , also

$$\frac{V_h}{V} = \mu^3.$$

Für diese kann nach der zitierten Arbeit geschrieben werden:

$$\mu = \sqrt[3]{1 - \frac{Q}{V\gamma_a}} = \sqrt[3]{1 - \frac{\gamma_s}{\gamma_a}} = \sqrt[3]{1 - \nu} = (1 - \nu)^{1/3}. \quad (2)$$

Wie ersichtlich, ist die letztere Verhältniszahl μ nur vom Gewicht Q der schwingenden Masse und vom Volum des gewählten Hüllkörpers bzw. nur von dem Parameter ν abhängig, ist also durch die Wahl von V eindeutig bestimmt.

Bei der Berechnung des oberen Schrankenwertes wird noch angenommen, daß das Material — vom Gewicht Q — welches jetzt den Zwischenraum zwischen der äußeren Begrenzung des Hüllkörpers und dem inneren Hohlraum gleichmäßig ausfüllt, ebenfalls die Wichte γ_a hat.

Wird die geometrische Form des Hüllkörpers möglichst einfach gewählt, so kann der untere Schrankenwert des Trägheitsmomentes mit Hilfe der in den Hand- und Taschenbüchern enthaltenen Formelsammlungen meistens leicht berechnet werden. Wird dieser untere Schrankenwert mit J_u bezeichnet, so ergibt sich der obere Schrankenwert J_0 nach den Ausführungen der schon oben zitierten früheren Arbeit [1] wie folgt:

$$J_0 = J_u \frac{1 - \mu^5}{1 - \mu^3} = \psi J_u. \quad (3)$$

Danach ist also J_0 verhältnisgleich mit J_u , und die Verhältniszahl ψ ist nur vom Parameter μ , d. h. nur von vom Wichteverhältnis $\nu = \gamma_s/\gamma_a$ abhängig.

Es kann gezeigt werden, daß der Wertebereich des Parameters $\psi = (1 - \mu^5)/(1 - \mu^3)$ beschränkt ist, insofern zu $\nu = 1$ der Wert $\psi_{\min} = 1$, und zu $\nu = 0$ der Wert $\psi_{\max} = 1,6667$ zugeordnet ist. Dies bedeutet aber, daß

der unbekannte genaue Wert des Trägheitsmomentes nach der zitierten Rechnungsweise jederzeit zwischen zwei endlichen und von einander nicht weit entfernten Schrankenwerten eingeschlossen ist.

In der Praxis wird man bemüht sein, diese Schranken möglichst nahe zusammenzubringen. Die Möglichkeit dazu ist bei der Wahl des Hüllkörpers gegeben. Wenn es nämlich gelingt, einen Hüllkörper zu finden, bei welchem

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\gamma_s}{\gamma_a} \geq 0,875 ; \\ \mu &\leq 0,5 , \\ \text{und} \quad \psi &\leq 1,11 . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Danach werden also die Schrankenwerte nur höchstens um 11% verschieden sein.

Die angegebenen Werte der Verhältniszahlen sind erreichbar, wenn das Volum des Hüllkörpers, unter Benützung der in [2] angegebenen Zusammenhänge, wie folgt, gewählt wird:

Bei Grauguß

$$V \leq \frac{Q}{6400} [\text{m}^3]; \quad (5)$$

und bei Stahlguß

$$V \leq \frac{Q}{6900} [\text{m}^3] .$$

Bei Bronze und Kupferlegierungen

$$V \leq \frac{Q}{7600} [\text{m}^3];$$

bei Aluminium

$$V \leq \frac{Q}{2450} [\text{m}^3] .$$

Es soll dabei noch bemerkt werden, daß der Inhalt des Hüllkörpers auch einen unteren Schrankenwert besitzt. Dieser kann nämlich nur größer als $V_0 = Q/\gamma_a$ sein. Dies kann wie folgt begründet werden. Das Volum der schwingenden Masse, für deren Trägheitsmoment ein Näherungswert gesucht wird, ist offensichtlich selbst größer als das sich so ergebende V_0 . Und da der Hüllkörper die schwingende Masse wirklich einhüllen muß, und herausragen dürfen keine, insbesondere von der jeweiligen Schwerlinie entfernt liegenden Teile (welche zum Trägheitsmoment ev. größere Beiträge liefern würden), so ist es verständlich, daß nur

$$V > \frac{Q}{\gamma_a} \quad (5a)$$

gewählt werden kann.

III. Die Gültigkeitsgrenzen der mit Hilfe der angegebenen Methode berechneten Schrankenwerte für das Trägheitsmoment

Vor den weiteren Erörterungen soll darauf hingewiesen werden, daß die Güte der Annäherung der durch obiges Verfahren berechneten Schrankenwerte in erster Linie von der richtigen Wahl des Hüllkörpers abhängt. Der Hüllkörper muß die schwingende Masse gut umschließen, ohne daß Massenteile von Belang unverhüllt, also außen bleiben. Dabei ist es auch wichtig, daß keine vermeidbaren Lufträume mit eingeschlossen werden, da dadurch die Wahl eines möglichst kleinen Hüllvolumens behindert würde. Nur die durch wiederholte Anwendung des Verfahrens erreichte Übung kann das richtige Vorgehen sichern.

Ganz unabhängig von der vorangegangenen Bemerkung scheint es nötig zu sein, zu untersuchen, ob die auf dem gegebenen Wege erhaltenen Schrankenwerte ihre Eigenschaften als obere und untere Schranke unter allen Umständen beibehalten.

Über die obere Schranke läßt sich diese Frage verhältnismäßig leicht beantworten. Diese obere Schranke ergibt sich — wie oben gezeigt — dadurch, daß man das Material der schwingenden Masse im Hüllkörper nahe den äußeren Begrenzungsflächen in gleichmäßiger Verteilung angeordnet annimmt. Da der Hüllkörper die schwingende Masse nicht überall genau decken wird, so daß stellenweise (kleinere) Lufträume mit eingeschlossen werden, welche jetzt mit Material ausgefüllt gedacht sind, und bei der Berechnung des Trägheitsmomentes — infolge ihrer Entfernung von der jeweiligen Schwerlinie — ew. beträchtliche Beiträge liefern, so ist es verständlich, daß *die so berechnete Schranke jederzeit ein größeres Trägheitsmoment liefern wird wie die schwingende Masse selbst.*

Bei dem unteren Schrankenwert ist die Frage nicht so leicht zu klären. Bei den möglichen Materialverteilungen der schwingenden Masse können ew. auch solche vorkommen, bei welchen *der genaue Wert des Trägheitsmomentes unter die — laut obigem — berechnete untere Schranke zu liegen kommt.* Die Richtigkeit dieser Behauptung kann auf folgende Weise plausibel gemacht werden. Denkbar ist auch eine solche Materialverteilung der schwingenden Masse, bei welcher das Material hauptsächlich in der Nähe der Schwerlinie konzentriert ist, und die äußere Begrenzung nur von einer dünnen Schicht von Material geliefert wird, welche von den übrigen Materialteilen durch eine dickere Luftschicht abgetrennt ist. In solchen Fällen muß es als möglich angesehen werden, daß der Hüllkörper, mit etwas größerem Inhalt als der der schwingenden Masse, bei gleichmäßiger Materialverteilung ein größeres Trägheitsmoment ergibt, als dieses bei der schwingenden Masse durch genaues Ausrechnen gefunden würde.

Die vielerlei möglichen Materialverteilungen bei der schwingenden Masse mathematisch einfach »abzubilden«, ist natürlich nicht möglich. Deshalb muß

als Grundlage der weiteren Untersuchungen eine solche gedachte bzw. »idealisierte« Materialverteilung dienen, welche als ein gedachter möglicher Grenzfall anzusehen ist, dabei eine mathematische Behandlung erlaubt und so zur Klärung der hier aufgeworfenen Fragen beitragen kann.

Diese »idealisierte« Materialverteilung kann wie folgt beschrieben werden. Wie bei der Berechnung des oberen Schrankenwertes angenommen wurde, daß das in der schwingenden Masse enthaltene Material nur in der Nähe der äußeren Grenzflächen des Hüllkörpers angeordnet ist, und im Innern ein koaxialer Hohlraum entsteht, so soll jetzt — in Vertretung gewisser extremer Materialverteilungen — angenommen werden, daß ein durch die Verhältniszahl φ ($0 \leq \varphi \leq 1$) gekennzeichneter Teil des Materials der schwingenden Masse in der Nähe der jeweiligen Schwerlinie so angeordnet ist, daß dieser einen dem Hüllkörper geometrisch ähnlichen und ebenfalls koaxialen Raum bei gleichmäßiger Verteilung mit der Wichte γ_a kp/m^3 ausfüllt. Das übrige Material — also das durch die Verhältniszahl $(1 - \varphi)$ bestimmte Gewicht — soll in der selben Weise angeordnet sein, wie bei der oberen Schranke angenommen, d. h. in der Nähe der Außenflächen des Hüllkörpers. Es erscheint naheliegend, daß mit der Verhältniszahl φ nicht nur die obenerwähnten extremen, sondern auch diesen nahestehende Fälle der Materialverteilung mathematisch gekennzeichnet bzw. behandelt werden können.

Die weitere Untersuchung wird nun darin bestehen, daß das Trägheitsmoment des Hüllkörpers bei der letzt beschriebenen »idealisierten« Massenverteilung auf Grund der im öfter zitierten Aufsatz beschriebenen Methode berechnet und mit dem für die untere Schranke erhaltenen Ergebnis verglichen wird.

Es sei nun eine Hauptabmessung der äußeren Begrenzung des gewählten Hüllkörpers a_0 , dann kann das Volum V offenbar geschrieben werden:

$$V = k_1 a_0^3. \quad (6)$$

Hier bedeutet k_1 einen dimensionslosen Faktor, welcher nur die Verhältniszahlen der übrigen Abmessungen des Hüllkörpers enthält. Der Faktor k_1 ist nur von der geometrischen Form abhängig und ist für geometrisch ähnliche Volumina gleich groß.

Wenn laut obigem vorgeschrieben wird, daß ein durch die Verhältniszahl $(1 - \varphi)$ festgesetzter Anteil des in der schwingenden Masse (mit dem Gewicht Q) enthaltenen Materials in der Nähe der äußeren Begrenzung des Hüllkörpers bei Wichte γ_a so verteilt wird, daß ein geometrisch ähnlicher Hohlraum V_1 — mit der gleichartig orientierten Hauptabmessung a_1 entsteht, dann wird erhalten:

$$(V - V_1)\gamma_a = k_1(a_0^3 - a_1^3)\gamma = (1 - \varphi)Q.$$

Andererseits folgt aus der geometrischen Ähnlichkeit des Hohlraums

$$a_1 = \mu_1 \cdot a_0$$

und

$$V_1 = \mu_1^3 \cdot V,$$

wo μ_1 ein noch zu bestimmender Proportionalitätsfaktor ist. Mit diesem ergibt sich

$$V(1 - \mu_1^3)\gamma_a = (1 - \varphi)Q.$$

Daraus folgt bei Verwendung des unter 1. angegebenen Zusammenhanges:

$$\mu_1 = \left[1 - (1 - \varphi) \frac{\gamma_s}{\gamma_a} \right]^{1/3} = [1 - (1 - \varphi)\nu]^{1/3}. \quad (7)$$

Ähnlicherweise kann das Volum V_2 des in der Nähe der Schwerlinie angebracht gedachten—, durch die Verhältniszahl φ festgesetzten Materialanteils ausgedrückt werden. Da laut obigem auch V_2 dem Hüllkörper geometr. ähnliche Gestalt haben soll, so wird mit der zu a_0 gleich orientierten Hauptabmessung a_2 :

$$V_2 \gamma_a = k_1 a_2^3 \gamma_a = \varphi Q.$$

Die geometrische Ähnlichkeit wird hier mit dem Proportionalitätsfaktor μ_2 wie folgt angegeben:

$$a_2 = \mu_2 a_0.$$

Damit wird

$$\mu_2^3 = \frac{\varphi Q}{k_1 a_0^3 \cdot \gamma_a}.$$

Laut Gl. (6) kann statt $k_1 a_0^3 : V$ und statt Q laut Gl. (1) $V\gamma_s$ geschrieben werden, so daß

$$\mu_2 = \left(\varphi \frac{\gamma_s}{\gamma_a} \right)^{1/3} = (\varphi\nu)^{1/3}. \quad (8)$$

Auf diese Weise konnten μ_1 und μ_2 durch die Verhältniszahlen ν und φ ausgedrückt werden. Mit Hilfe dieser Faktoren wird es nun ermöglicht, das Trägheitsmoment des auf angegebener Weise mit Material belegten Hüllkörpers — bezogen auf die angegebene Schwerlinie — zu berechnen.

Dazu kann man folgenderweise vorgehen. Wenn ein Körper von gegebenem Inhalt und geometr. Form mit Material von der Wichte γ gleichmäßig ausgefüllt gegeben ist, und eine karakt. Hauptabmessung — wie oben — mit

a_0 bezeichnet wird, so kann das Trägheitsmoment J — bezogen auf eine gegebene Schwerlinie — wie folgt geschrieben werden:

$$J = \frac{\gamma}{g} k_2 a_0^5. \quad (9)$$

Hier bedeutet g die Schwerebeschleunigung, und k_2 ist ein zweiter, ebenfalls dimensionsloser Faktor, welcher nur von der Form des Körpers und von der Richtung der gegebenen Schwerlinie abhängt und die Verhältniszahlen der linearen Abmessungen des Körpers enthält.

Im vorliegenden Falle ist ein Volum V bestimmter geometrischer Form gegeben, in welchem Material erstens zwischen den äußeren Begrenzungsflächen und dem geometrisch ähnlichen und coaxialen Hohlraum V_1 und zweitens in dem inneren, ebenfalls coaxialen und geometrisch ähnlichen Raum V_2 bei gleichmäßiger Verteilung und Wichte γ_a angeordnet ist. Wenn die geometrisch gleich orientierten Hauptabmessungen dieser drei Räume — wie oben — mit a_0 , a_1 und a_2 bezeichnet werden, dann kann das Trägheitsmoment J_k des auf beschriebene Weise mit Material belegten Körpers geschrieben werden:

$$J_k = \frac{\gamma_a}{g} k_2 a_0^5 - \frac{\gamma_a}{g} k_2 a_1^5 + \frac{\gamma_a}{g} k_2 a_2^5 = \frac{\gamma_a}{g} k_2 (a_0^5 - a_1^5 + a_2^5). \quad (10)$$

Bei Verwendung der unter (7) und (8) angegebenen Verhältniszahlen μ_1 und μ_2 für a_1 und a_2 ergibt sich:

$$J_k = \frac{\gamma_a}{g} k_2 a_0^5 (1 - \mu_1^5 + \mu_2^5)$$

und weiter:

$$J_k = \frac{\gamma_a}{g} k_2 a_0^5 \{1 - [1 - (1 - \varphi)v]^{5/3} + (\varphi v)^{5/3}\}. \quad (10a)$$

Das oben als untere Schranke definierte Trägheitsmoment J_u des jetzt aber mit Material von der Wichte γ_s gleichmäßig ausgefüllt gedachten Volumens V für dieselbe Schwerlinie kann geschrieben werden:

$$J_u = \frac{\gamma_s}{g} k_2 a_0^5. \quad (11)$$

Bei Verwendung letzterer Gleichung kann aus Gl. (10a) der Faktor k_2 eliminiert werden und es wird so für J_k erhalten:

$$J_k = J_u \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \{1 - [1 - (1 - \varphi)v]^{5/3} + (\varphi \cdot v)^{5/3}\}. \quad (10b)$$

Wie ersichtlich, ist auch J_k mit J_u verhältnisgleich. Der Proportionalitätsfaktor, der im weiteren mit Ψ bezeichnet werden soll, kann geschrieben werden:

$$\Psi = \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \{1 - [1 - (1 - \varphi)\nu]^{5/3} + (\varphi\nu)^{5/3}\} = \frac{1}{\nu} \{1 - [1 - (1 - \varphi)\nu]^{5/3} + (\varphi\nu)^{5/3}\}. \quad (12)$$

Die oben aufgeworfene Frage kann nun vermittelt einer Untersuchung des Wertebereiches von Ψ erledigt werden. Wenn Ψ als Funktion von ν und φ auch Werte unter 1 annehmen kann, dann ist es offenbar möglich, daß

$$J_k < J_u$$

wird. In diesem Falle wird also J_u nichtmehr eine untere, sondern eine obere Schranke, und die Rolle einer unteren Schranke wird von J_k übernommen.

Der Untersuchung des Wertebereiches der Funktion Ψ wird aber zweckmäßig eine Kontrolle der Formel (12) vorangehen. Eine erste Kontrolle ergibt sich daraus, daß im Falle von $\varphi = 0$ — wenn also im Innern des Hüllkörpers kein Material als Kern vorhanden ist — sich das unter (3) angegebene Ergebnis herausstellen muß. In diesem Falle vereinfacht sich Ψ wie folgt:

$$\Psi_{(\varphi=0)} = \frac{\gamma_a}{\gamma_s} [1 - (1 - \nu)^{5/3}] = \frac{1}{\nu} [1 - (1 - \nu)^{5/3}]. \quad (13)$$

Nach Einsetzen der unter (2) angegebenen Substitution wird aus (13):

$$\Psi_{(\varphi=0)} = \frac{\gamma_a}{\gamma_s} (1 - \mu^5).$$

Aus (2) folgt aber noch weiter, daß

$$\frac{\gamma_a}{\gamma_s} = \frac{1}{1 - \mu^3},$$

also

$$\Psi_{(\varphi=0)} = \frac{1 - \mu^5}{1 - \mu^3}. \quad (13a)$$

ist. Das ist tatsächlich das unter (3) als Formel des Faktors ψ angegebene Ergebnis, wie es sein muß.

Im zweiten Grenzfall, wenn $\varphi = 1$ wird, d. h. das Material gänzlich im inneren Kern angeordnet ist, kann die Kontrolle wie folgt durchgeführt werden.

Dieser Grenzfall ist im übrigen dadurch gekennzeichnet, daß das Material bei gleichmäßiger Verteilung und Wichte γ_a bei der gegebenen Form des Hüllkörpers die möglichst nahe Anordnung zur Schwerlinie erhält.

Die Formel (12) für Ψ vereinfacht sich im Falle $\varphi = 1$; bei Verwendung von (1a) wird nämlich

$$\Psi_{(\varphi=1)} = \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \nu^{5/3} = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_a} \right)^{2/3} = \nu^{2/3}. \quad (14)$$

Bei dieser Anordnung des Materials vom Gewicht Q kann aber das Trägheitsmoment nach Analogie von (10) geschrieben werden:

$$[J_k]_{(\varphi=1)} = \frac{\gamma_a}{g} k_2 [a_{(\varphi=1)}]^5.$$

Hier bedeutet $a_{(\varphi=1)}$ die lineare Hauptabmessung bei der beschriebenen Materialanordnung, welche sich wie folgt ergibt:

$$Q = \gamma_a k_1 [a_{(\varphi=1)}]^3 = \gamma_s k_1 a_0^3$$

und daraus

$$a_{(\varphi=1)} = a_0 \cdot \nu^{1/3}.$$

Andererseits wird die untere Schranke des Trägheitsmomentes im Sinne der Formeln (9) und (11)

$$J_u = \frac{\gamma_s}{g} k_2 a_0^5.$$

Nach den möglichen Substitutionen ergibt sich aus obigem:

$$[J_k]_{(\varphi=1)} = J_u \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_a} \right)^{2/3} = J_u \nu^{2/3}. \quad (14a)$$

Dieses Ergebnis bestätigt also die in (14) erhaltene Formel für $\Psi_{(\varphi=1)}$.

Aus der Formel (14a) läßt sich sogleich folgern, da im allgemeinen

$$\gamma_s < \gamma_a,$$

daß

$$[J_k]_{(\varphi=1)} < J_u$$

ist.

Unsere obige Annahme, daß J_k auch kleinere Werte als J_u annehmen kann, ist also für den Grenzfall von $\varphi = 1$ bestätigt.

Bezüglich der Funktion Ψ können weitere Aufschlüsse dadurch erhalten werden, daß man deren Werte im Falle $\nu = 0$ berechnet. Dieser Grenzfall hat

natürlich keine praktische Bedeutung, da dies einen Hüllkörper mit Material von der Wichte $\gamma_s = 0$ ausgefüllt, d. h. ohne Material bedeuten würde. Trotzdem ergeben sich auf diesem Wege weitere Kenntnisse über den Wertebereich von Ψ .

Aus der zweiten Formel für Ψ in (12) ergibt diese Funktion bei $\nu = 0$ den unbestimmten Ausdruck $0/0$. Der Zähler und der Nenner der Formel separat nach ν differenziert und die erhaltenen Ausdrücke wieder als Zähler und Nenner eines Bruches genommen, ergibt

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Psi_{\nu \rightarrow 0} = \frac{5}{3} (1 - \varphi), \tag{15}$$

woraus für den Grenzfall $\nu = 0$ sich die Zahlenwerte in Tafel I ergeben.

Tafel I

$\varphi = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,5	0,3	0,9	1,0
$\Psi_{(\nu=0)} = 1,6667$	1,5	1,3333	1,1666	1,0	0,8333	0,6666	0,5	0,3333	0,1666	0

Wie ersichtlich, sinkt der Wert von Ψ bei $\varphi > 0,4$ unter die Einheit. Dieses Ergebnis wird streng genommen nur bei den gemachten Annahmen, d. h. einem geometrisch ähnlichen Kern in Hüllkörper richtig sein. Als Annäherung wird es aber auch für weniger regelmäßige Kerne gelten können.

Im übrigen soll bemerkt werden, daß bei realisierbaren Werten der Verhältniszahlen ν und φ ein Wert von $\Psi = 1$ auch soviel bedeutet, daß der nach der Vorschrift des schon zitierten Aufsatzes berechnete untere Schrankenwert seine diesbezügliche Eigenschaft verlieren kann, und es wird von den übrigen Umständen abhängen, ob dieser als unterer oder als oberer Schrankenwert zu gebrauchen sein wird.

Weitere Aufschlüsse über den Wertebereich der Funktion $\Psi(\nu, \varphi)$ ergibt das Bild 1, in welcher die durch die Funktion bestimmte Fläche axonometrisch dargestellt ist. Die Schnittkurven der Fläche mit den Ebenen $\nu = \text{konst.}$ und $\varphi = \text{konst.}$ sind eingezeichnet. Dargestellt ist außerdem noch (durch den mit Kreisen unterbrochenen Linienzug: $-\circ-\circ-\circ-$) die Schnittlinie der Fläche mit der zur horizontalen Koordinatenebene (ν, φ) parallelen und um die Einheit höher liegenden Ebene. Diese Schnittlinie verläuft gänzlich zwischen den Linien $\varphi = 0,4$ und $\varphi = 0,5$, woraus zu ersehen ist, daß Ψ bei $\varphi > 0,5$ sicher kleinere Werte als 1 annimmt.

Dies bedeutet aber, daß bei $\varphi > 0,5$ das mit $\Psi = 1$ berechnete Trägheitsmoment sicher *eine obere Schranke* ergeben wird. Als untere Schranke werden in diesen Fällen nach Aussage dem Bild 1 die mit den zu $\varphi = 1$ gehörigen Funktionswerten berechneten Trägheitsmomente zu gebrauchen sein.

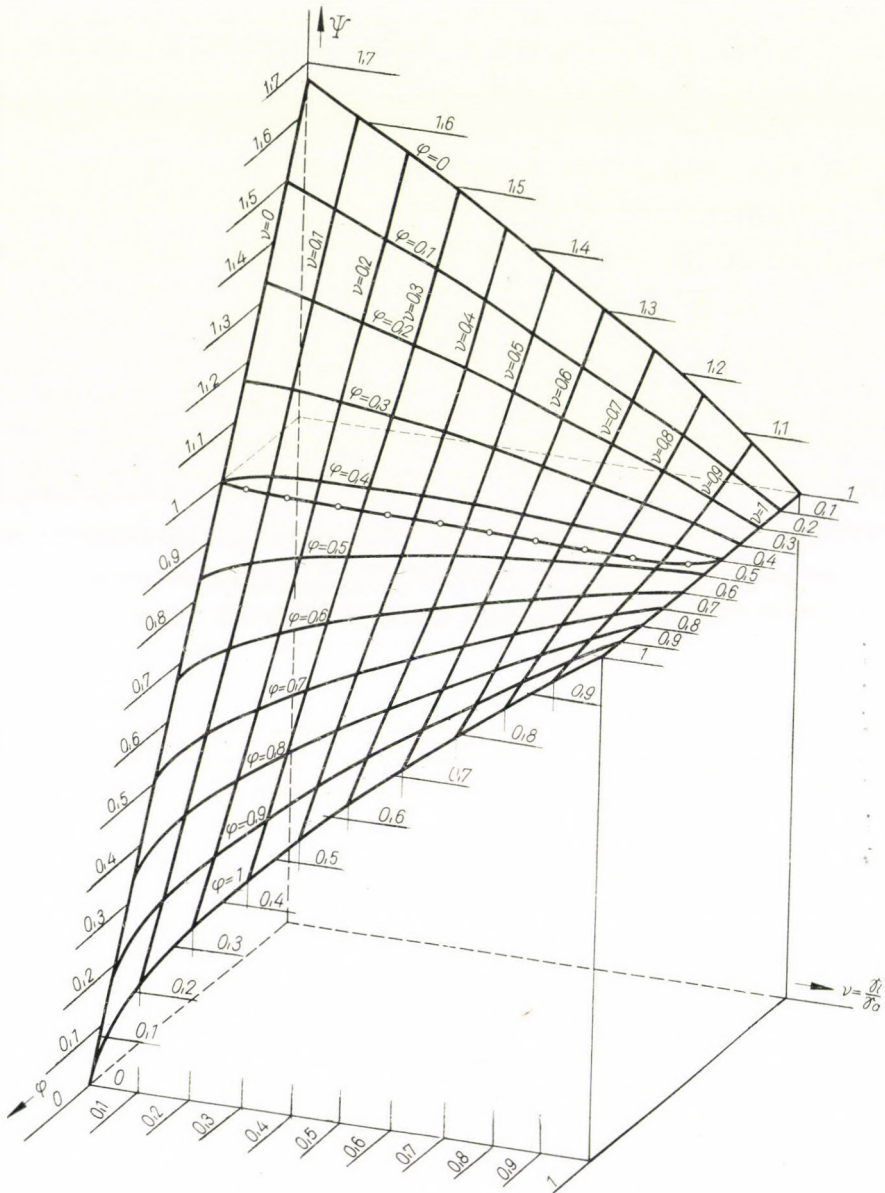


Bild 1

Laut obigem entspricht der Verhältniszahl $\varphi = 1$ eine solche Materialanordnung, bei welcher die Masse des schwingenden Körpers — für dessen Trägheitsmoment ein Näherungswert gesucht wird — in gleichmäßiger Verteilung bei Wichte γ_a in einem dem gewählten Hüllkörper ähnlichen coaxialen kleineren Raum untergebracht ist. Bei gegebener Hüllkörperform und gegebener

ner Wichte γ_a ergibt sich auf diese Weise das möglichst kleinste Trägheitsmoment. Dieses wird also sicherlich einen *unteren Schrankenwert* darstellen.

Zusammenfassend kann also folgendes festgestellt werden. Die zu $\varphi = 0$ gehörigen Werte der Funktion Ψ werden Trägheitsmomente berechnen lassen, welche jederzeit als *sichere obere Schrankenwerte* angesehen werden können.

Die sich mit $\Psi = 1$ berechneten Trägheitsmomente — welche in der mehrmals zitierten Arbeit als untere Schranken bezeichnet wurden — werden diese Eigenschaft laut obigen Ausführungen nur dann beibehalten, wenn das Material des schwingenden Körpers sich nicht in der Nähe der jeweiligen Schwerlinie anhäuft. Wird die Massenverteilung mit der Verhältniszahl φ gekennzeichnet, so muß

$$\varphi < 0,4$$

bleiben, damit das mit $\Psi = 1$ berechnete Trägheitsmoment des Hüllkörpers tatsächlich eine untere Schranke abgeben kann. Bei einer Materialverteilung, bei welcher $\varphi > 0,5$ wird, ergibt sich statt einer unteren eine obere Schranke.

Eine sichere untere Schranke bleibt schließlich das Trägheitsmoment des Hüllkörpers, welches mit zu $\varphi = 1$ gehörigen Ψ -Werten berechnet worden ist.

Die zu den Werten von $\varphi = 0$ und $\varphi = 1$ gehörigen Funktionswerte von Ψ , in Abhängigkeit von der anderen unabhängigen Variablen ν , enthält die Zusammenstellung in Tafel II.

Tafel II

ν	$\Psi_{(\varphi=0)}$	$\Psi_{(\varphi=1)}$
0	1,6666	0
0,1	1,6105	0,2154
0,2	1,5529	0,3420
0,3	1,4939	0,4480
0,4	1,4329	0,5429
0,5	1,3702	0,6300
0,6	1,3047	0,7113
0,7	1,2365	0,7883
0,8	1,1645	0,8618
0,9	1,0872	0,9321
1,0	1,0	1,0

Um auch Zwischenwerte leichter abgreifen zu können, wurden die $\varphi = \text{konst.}$ Kurven der Funktion Ψ , in einer Ebene eingezeichnet, im Bild 2 angegeben. Aus letzterer ist unter anderem ersichtlich, daß bei zweckent-

sprechend angenommener Hüllkörperform, wenn es z. B. gelingt, nach (4) die Verhältniszahl $\nu < 0,875$ zu erreichen, die Werte von Ψ — in Abhängigkeit von der für die Materialverteilung charakteristischen Verhältniszahl φ — zwischen den Grenzen von 0,915 und 1,1 verbleiben.

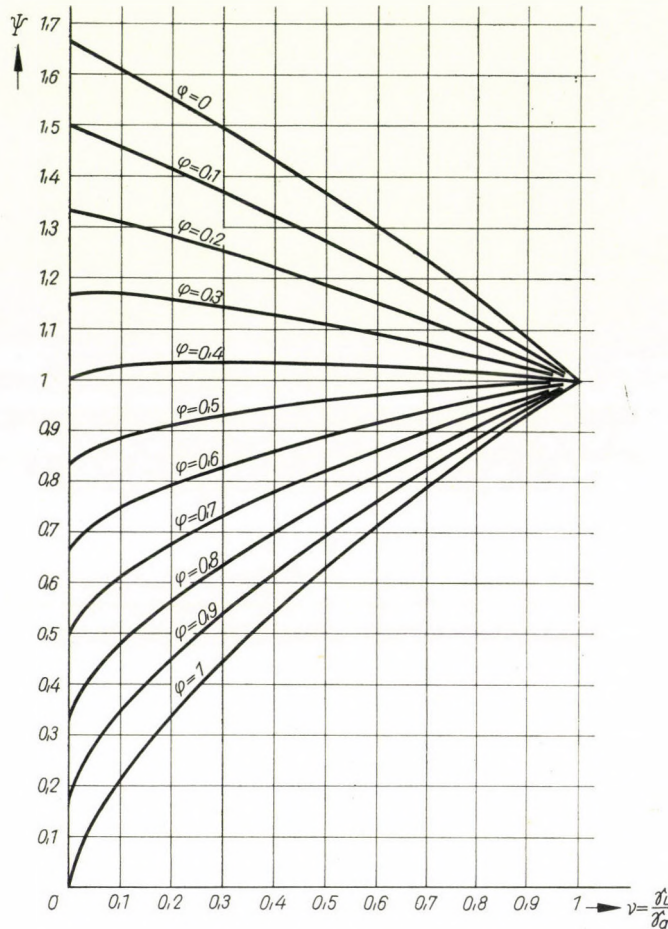


Bild 2

Auf Grund obiger Ausführungen wird, wenn ein Trägheitsmoment mit der beschriebenen Annäherung berechnet werden soll, der erste Schritt zweckmäßigerweise darin bestehen, daß man sich Klarheit über die die Materialverteilung des betreffenden Objektes (Maschinenteil, oder ein Aggregat usw.) kennzeichnende Verhältniszahl verschafft. In den meisten praktischen Fällen — wie auch in den w. u. folgenden Beispielen — ist diese Zahl entweder genau oder wenigstens annähernd berechenbar.

In den Fällen, wo es sich um ganze Maschinen oder Aggregate handelt, wird die Bestimmung von φ schon etwas schwieriger. In solchen Fällen weiß man aber im voraus, daß diese Zahl — infolge der im Hüllkörper unvermeidbaren Lufträume — im allgemeinen klein ausfallen wird. Ausnahmen können sich in dieser Hinsicht ew. bei elektrischen Maschinen (Dynamos und Motoren) gedrungener Bauweise ergeben.

Nach der Größe der berechneten oder geschätzten Verhältniszahl φ wird man nun als obere Schranke entweder das mit dem zu $\varphi = 0$ gehörigen Ψ -Wert berechnete Trägheitsmoment oder das mit $\Psi = 1$ berechnete nehmen, je nach dem, ob

$$\varphi \cong 0,4 \sim 0,5 \quad (16)$$

ist. Als untere Schranke wird im ersten Falle das sich mit $\Psi = 1$ ergebende, im zweiten Falle dagegen das mit dem zu $\varphi = 1$ gehörigen Ψ -Wert berechnete Trägheitsmoment zu verwenden sein.

Die errechneten Schrankenwerte können gleich als Näherungswerte benützt werden, oder man wird richtiger den algebraischen Mittelwert der beiden Schranken als Näherungswert verwenden. Bei einigermaßen richtig angenommener Hüllkörperform und Inhalt wird der letztere Mittelwert dem unbekanntem genauen Wert des Trägheitsmomentes am nächsten kommen.

IV. Beispiele zur angenäherten Berechnung von Massenträgheitsmomenten

Als praktische Anwendung der obigen Ausführungen soll im folgenden die Berechnung des Trägheitsmomentes eines Schwungrades und eines Schiffspropellers mitgeteilt werden. Diese zwei Beispiele wurden schon in der zitierten früheren Arbeit herangezogen. Im Vergleich zu den dortigen Angaben ist jetzt insofern ein Unterschied vorhanden, da diesmal die Schrankenwerte mit Hilfe der Funktion Ψ berechnet werden.

1. Das als *erstes Beispiel* dienende Schwungrad ist aus Bild 3 ersichtlich, die Maße sind darin eingetragen. Die genaue Berechnung des Gewichtes und des auf die Drehachse bezogenen Trägheitsmomentes ist im Werk [2] enthalten. Danach ist bei $\gamma_a = 7300$ [kp/m³] Wichte das Gesamtgewicht $Q = 4262$ [kp]; der mit Material ausgefüllte Raum berechnet sich zu $V_0 = Q/\gamma_a = 0,5838$ [m³], und der genaue Werte des Trägheitsmomentes ergab sich zu $J = 729,477$ [kp m sec²] bzw. [kg m²].

Als Hüllkörper werden die im Bild 4 gezeigten beiden — durch je zwei parallele Ebenen und zwei Zylinderflächen gebildeten — Ringe gewählt. Bei dem äußeren wird vorgeschrieben, daß dessen Außendurchmesser und die Breite die gleichen sind, wie beim Kranz des Schwungrades. Der Rauminhalt des äußeren Ringes wird etwas größer angenommen wie der des Schwungradkranzes. Beim inneren Ring wird bei gleicher Nabenbreite und innerer Bohrung der Rauminhalt zur Berücksichtigung der Radspeichen so gewählt, daß das Gesamtvolumen der beiden Ringe den obigen Bedingungen (5) und (5a) entspricht.

Mit den in den Abbildungen eingetragenen Bezeichnungen und Abmessungen wird:

$$V_1 = \frac{3,08^2 - 2,8^2}{4} \pi \cdot 0,36 = 0,46552 \text{ [m}^3\text{]},$$

$$V_2 = \frac{0,8^2 - 0,22^2}{4} \pi \cdot 0,34 = 0,15798 \text{ [m}^3\text{]};$$

also

$$V_1 + V_2 = 0,62345 \text{ [m}^3\text{]} .$$

Dies entspricht offenbar den Bedingungen unter (5) und (5a), da

$$V_0 = 0,5838 < 0,62345 < Q/6400 = 0,667 \text{ [m}^3\text{]} \text{ ist.}$$

Zu dem gewählten Hüllkörpervolumen ergibt sich die Verhältniszahl v :

$$v = \frac{V_0}{V_1 + V_2} = \frac{0,5838}{0,62345} = 0,9364 .$$

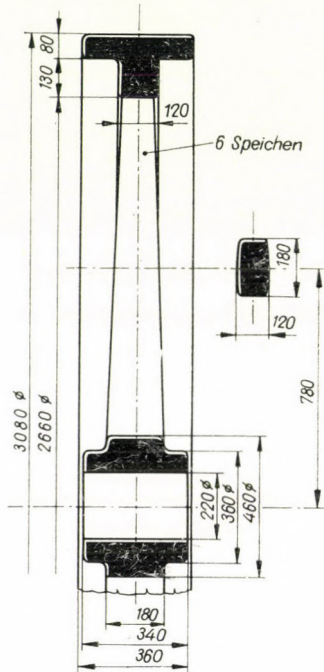


Bild 3

Aus diesem zu 1 naheliegenden Werte kann schon gefolgert werden, daß die beiden zu berechnenden Schrankenwerte nur wenig verschieden sein werden.

Die die Materialverteilung kennzeichnende Verhältniszahl φ kann hier sowohl für das Schwungrad wie für den Hüllkörper leicht berechnet werden. Für den Hüllkörper ergibt sich:

$$\varphi_h = \frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{0,15798}{0,62345} = 0,253 .$$

Beim Schwungrad ergibt sich ein noch kleinerer Wert. Mit den Abmessungen auf Bild 3 gerechnet wird der Rauminhalt der Schwungradnabe, welche jetzt als Kernstück anzusehen ist:

$$V_n = 3,3276 \cdot 10^{-2} \text{ [m}^3\text{]} .$$

Damit ergibt sich mit $V_0 = 0,5838 \text{ [m}^3\text{]}$ als Gesamtvolumen des Schwungrades:

$$\varphi_r = \frac{3,3276 \cdot 10^{-2}}{0,5838} = 0,057.$$

Beide errechneten φ -Werte bleiben unter 0,4. Daraus folgt, daß die obere Schranke des Trägheitsmomentes mit dem Wert $\Psi_{(\varphi=0)}$, die untere Schranke mit $\Psi = 1$ zu berechnen sein wird; letztere wird also das Trägheitsmoment J_u des Hüllkörpers bei gleichmäßiger Massenverteilung.

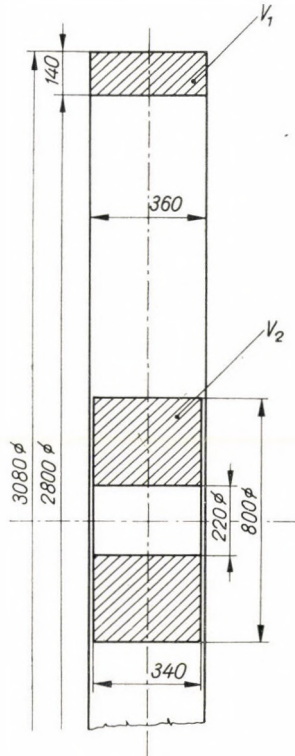


Bild 4

Zu der Berechnung von J_u werden noch benötigt:

$$\gamma'_s = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{4262}{0,62345} = 6835,7 \text{ [kp/m}^3\text{]},$$

$$\frac{\gamma'_s}{g} = \frac{6835,7}{9,81} = 696,81 \text{ [kg/m}^3\text{]}.$$

Mit diesen, unter Verwendung bekannter Formeln, ergibt sich:

$$J_u = \frac{\gamma'_s}{g} \left\{ \frac{V_1}{2} \left[\left(\frac{3,08}{2} \right)^2 + \left(\frac{2,8}{2} \right)^2 \right] + \frac{V_2}{2} \left[\left(\frac{0,8}{2} \right)^2 + \left(\frac{0,22}{2} \right)^2 \right] \right\} = 710,26 \text{ [kg/m}^2\text{]}.$$

Der zu $\nu = 0,9364$ gehörige Wert von $\Psi_{(\varphi=0)}$ errechnet sich nach der Formel (13):

$$\Psi_{(\varphi=0)} = \frac{1}{\nu} \{1 - (1 - \nu)^{5/3}\} = \frac{1}{0,9364} \{1 - [1 - 0,9364]^{5/3}\} = 1,05687.$$

Damit wird als obere Schranke erhalten:

$$J_0 = \Psi_{(\varphi=0)} \cdot J_u = 1,05687 \cdot 710,26 = 750,65 \text{ [kg m}^2\text{]}.$$

Der Mittelwert der beiden Schranken wird schließlich:

$$\frac{J_u + J_0}{2} = \frac{710,26 + 750,65}{2} = 730,45 \text{ [kg m}^2\text{]}.$$

Dies ist ein sehr guter Näherungswert, da er zum genauen Wert von $729,477 \text{ [kg m}^2\text{]}$ nur einen Fehler von $1,33\%$ aufweist.

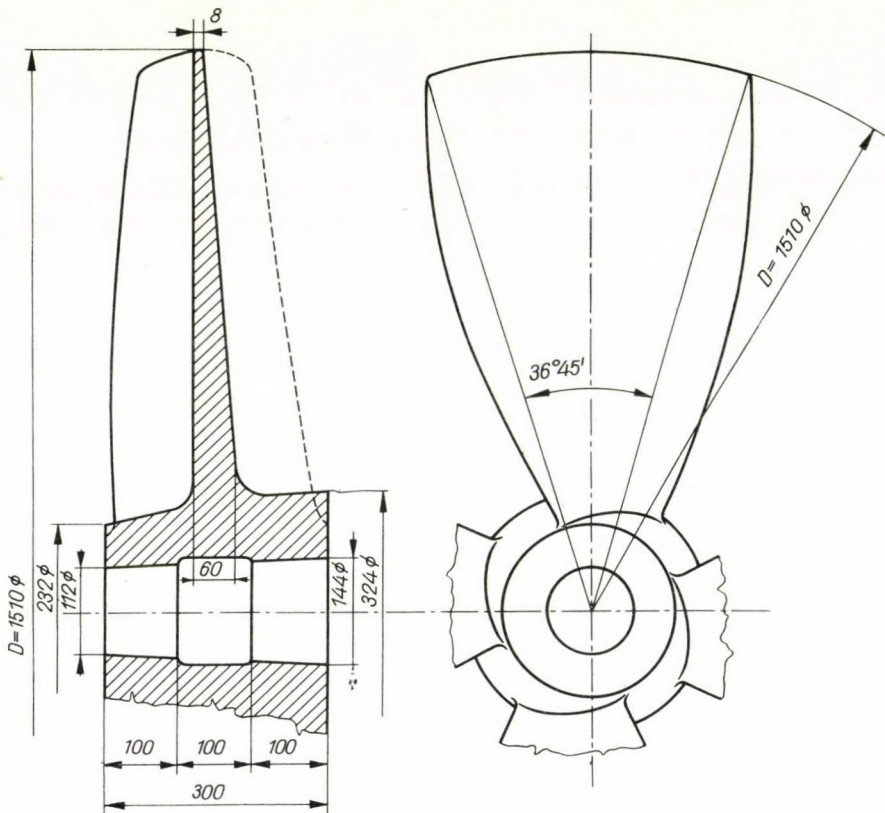


Bild 5

2. Als *zweites Beispiel* soll der im Bild 5 dargestellte Schiffspropeller herangezogen werden; sein Trägheitsmoment auf die Drehachse bezogen ist bekannt, nämlich $J = 3,96 \text{ [kg m}^2\text{]}$. Bemerkenswert ist hier die von Beispiel 1 ganz verschiedene Materialverteilung. Das Material des Propellers ist Sondermessingguß mit $\gamma_a = 8400 \text{ [kp/m}^3\text{]}$ Wichte. Das gemessene Gewicht beträgt $Q = 336 \text{ [kp]}$.

Als Hüllkörper wird hier der im Bild 6 im Meridianschnitt gezeigte Umdrehungskörper gewählt. Dieser setzt sich erstens aus zwei mit den Bodenflächen gegeneinander gestellten Kegelstümpfen und einer dazwischenliegenden dünnen Kreisscheibe, zweitens aus einem die Nabe vertretenden mit koaxialer Bohrung versehenem Zylinder zusammen.

Die Abmessungen des Hüllkörpers ergaben sich auf Grund folgender Betrachtungen. An der äußeren Begrenzungslinie der Propellerflügel mußte nach Möglichkeit dieselbe Materialverteilung hergestellt werden wie beim Propeller selbst. Da die Dicke der Flügel am äußeren Rand 8 mm beträgt und zum äußeren Bogen des Flügels der Zentriwinkel $36^\circ 45'$ gehört, so würde sich bei am ganzen Umfang verteiltem Material als Randdicke des Hüllkörpers beim vierflügeligen Propeller

$$8 \cdot \frac{36^\circ 45'}{90^\circ} = 3,26 \text{ [mm]}$$

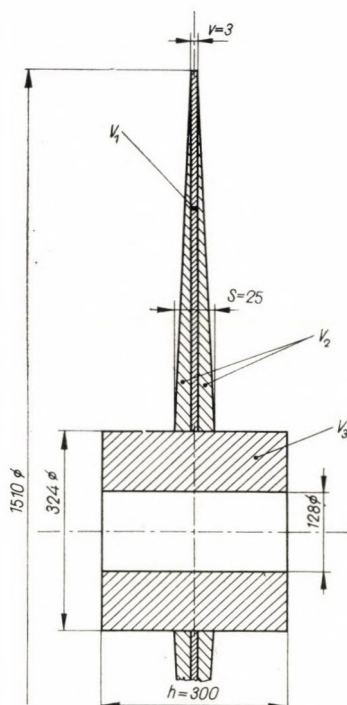


Bild 6

ergeben. Da aber die Flügel aus der zur Drehachse rechtwinkliggestellten Ebene zur Erreichung der Steigung herausgedreht sind, und außerdem die Flügelränder etwas abgeschärft sind, so wird statt 3,26 [mm] der nach unten abgerundete Wert von 3 [mm] genommen.

Die sich beim Anschluß der beiden Kegelstümpfe des Hüllkörpers an den die Nabe vertretenden Zylinder ergebende Abmessung s wurde auf Grund folgender Betrachtung berechnet. Der Anschlußquerschnitt der Propellerflügel zu der Nabe beträgt im Zylinderschnitt vom Halbmesser 151 [mm] laut Detailzeichnungen 122,4 [cm²]. An dieser Stelle wurde der Zentriwinkel der Flügel in der zur Drehachse normalen Ebene zu 58° gemessen. Die größte Länge des Anschlußquerschnittes ist laut Zeichnung 300 mm = 30 [cm], also ergibt sich als mittlere Dicke

$$\frac{122,4}{30} = 4,08 \text{ [cm]}.$$

Diese Dicke soll auch gleichmäßig auf den ganzen Viertelkreis verteilt werden, also wird wie oben:

$$4,08 \frac{58^\circ}{90^\circ} = 2,63 \text{ [cm]} .$$

Aus dem gleichen Grunde — wie oben — wird auch hier nach unten abgerundet, d. h., es wird $s = 2,5 \text{ [cm]} = 25 \text{ [mm]}$ genommen.

Für den an Stelle der Nabe in Betracht gezogenen Zylinder werden solche Abmessungen gewählt, daß dieser die Nabe vollständig einhüllt. Die darin angebrachte Bohrung — als am wenigsten wichtige Abmessung — wird mit dem Mittelwert der tatsächlich konischen Bohrungen der Nabe in Rechnung gestellt.

Der so berechnete Rauminhalt des Hüllkörpers muß auch hier die unter (5) und (5a) gestellten Bedingungen erfüllen.

Die im Bild 6 angegebenen Teilinhalte berechnen sich nun wie folgt:

$$V_1 = \frac{1,51^2 - 0,324^2}{4} \cdot \pi \cdot 0,003 = 0,005125 \text{ [m}^3\text{]} ,$$

$$V_2 = \frac{\pi(0,025 - 0,003)}{3} \left[\left(\frac{1,51}{2} \right)^2 + \frac{1,51 \cdot 0,324}{4} - 2 \left(\frac{0,324}{2} \right)^2 \right] = 0,014741 \text{ [m}^3\text{]} ,$$

$$V_3 = \frac{0,324^2 - 0,128^2}{4} \cdot \pi \cdot 0,3 = 0,020874 \text{ [m}^3\text{]} .$$

Also ist $\Sigma V = V_1 + V_2 + V_3 = 0,04074 \text{ [m}^3\text{]} .$

Da jetzt $V_0 = Q/\gamma_a = 336/8400 = 0,04 \text{ [m}^3\text{]}$ und nach der Bedingung unter (5)

$$\frac{Q}{7600} = 0,4421 \text{ [m}^3\text{]}$$

st, so sind die Bedingungen (5) und (5a) gleichzeitig befriedigt, da

$$0,4 < \Sigma V = 0,04074 < 0,4421$$

ist.

Mit den erhaltenen Zahlenwerten ergeben sich weiter

$$\gamma_s = \frac{336}{0,04074} = 8247,42 \text{ [kp/m}^3\text{]} ,$$

$$v = \frac{\gamma_s}{\gamma_a} = \frac{8247,42}{8400} = 0,9818 .$$

Für den Propeller errechnet sich die Verhältniszahl φ mit dem separat berechneten Nabengewicht von 133,27 [kp] zu

$$\varphi_{pr} = \frac{133,27}{336} \cong 0,4 .$$

Für den Hüllkörper kann dieselbe Verhältniszahl mit den errechneten Teilinhalten erhalten werden:

$$\varphi_h = \frac{V_3}{\Sigma V} = \frac{0,020874}{0,04074} \cong 0,512 .$$

Die letzten beiden Zahlenwerte lassen darauf schließen, daß für den ins Auge gefaßten Propeller, bei der in der Zeichnung angegebenen Materialverteilung, das zu dem Werte $\Psi = 1$ gehörige Trägheitsmoment J_0 des Hüllkörpers nicht unbedingt ein unterer Schrankenwert sein wird. Wenn noch

$$\frac{\gamma_s}{g} = \frac{8247,42}{9 \cdot 81} = 840,716 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

berechnet wird, und die im zitierten vorangegangenen Aufsatz angegebene Formel zur Berechnung des Trägheitsmomentes des Hüllkörpers verwendet wird, so ergibt sich J_0 zu

$$J_0 = 840,716 \left\{ \frac{V_1}{2} (0,755^2 + 0,162^2) + \pi \cdot (0,025 - 0,003) \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{0,755^5 - 0,162^5}{0,755 - 0,162} - \frac{0,162^4}{2} \right) + \frac{V_3}{2} (0,162^2 + 0,064^2) \right\} = 3,9336 \text{ [kg m}^2\text{]} .$$

Wie ersichtlich, liegt dieser Wert dem genauen Trägheitsmoment des Propellers von 3,96 [kg · m²] schon ziemlich nahe und könnte als gute Annäherung verwendet werden. Da aber bei der normalen Verwendung der Näherungsrechnung der genaue Wert offensichtlich nicht bekannt sein wird, also man nicht wissen kann, wie nahe der berechnete J_0 -Wert dem genauen Wert zu stehen kommt, so wird offenbar das richtige Vorgehen darin bestehen, daß man die zu der jeweiligen Verhältniszahl ν gehörige $\Psi_{(\varphi=0)}$ und $\Psi_{(\varphi=1)}$ Werte und mit diesen den jetzt gültigen oberen Näherungswert

$$J_{ob} = J_0 \cdot \Psi_{(\varphi=0)} ,$$

sowie den jetzt sicheren unteren Näherungswert

$$J_{unt} = J_0 \cdot \Psi_{(\varphi=1)}$$

berechnet.

Nach Formel (13) errechnet sich hier:

$$\Psi_{(\varphi=0)} = \frac{1}{\nu} \{1 - [1 - \nu]^{5/3}\} = \frac{1}{0,9818} \{1 - [1 - 0,9818]^{5/3}\} = 1,0172$$

und nach Formel (14):

$$\Psi_{(\varphi=1)} = \nu^{2/3} = 0,9818^{2/3} = 0,98785 .$$

Mit diesen beiden Werten wird erhalten:

$$J_{ob} = 3,9336 \cdot 1,0172 = 4,00125 \text{ [kg m}^2\text{]} ,$$

$$J_{unt} = 3,9336 \cdot 0,98785 = 3,8858 \text{ [kgm}^2\text{]} .$$

Der Mittelwert dieser beiden wird schließlich

$$\frac{J_{ob} + J_{unt}}{2} = \frac{4,00125 + 3,8858}{2} = 3,9435 \text{ [kg m}^2\text{]} .$$

Im gegebenen Falle muß letzterer Wert als der durch die Näherungsrechnung gelieferte beste Wert angesehen werden. Die erreichte Annäherung ist auch hier gut, da der prozentuale Fehler nur

$$\frac{3,96 - 3,9435}{3,96} \cdot 100 = 0,417\% = 4,17\%_{00}$$

beträgt. Also auch hier genügt die erreichte Annäherung den Anforderungen der schwingungstechnischen Aufgaben.

V. Schlußfolgerungen

Die durchgerechneten Beispiele dürften bewiesen haben, daß das oben mitgeteilte Näherungsverfahren bei Berechnung von Massenträgheitsmomenten für die Praxis sehr wohl brauchbare Näherungswerte liefern kann. Es muß aber auch diesmal noch darauf hingewiesen werden, daß die erreichbare Genauigkeit bzw. die Güte der Annäherung an den unbekanntem genauen

Wert sehr stark von der richtigen Wahl des Hüllkörpers abhängt. Sicherlich ist dazu eine gewisse Praxis nötig, diese kann aber verhältnismäßig leicht erworben werden. In den aufgeführten Beispielen waren wir bemüht, die Gesichtspunkte hervortreten zu lassen, nach welchen die Wahl der Hüllkörperform zu erfolgen hat.

Es darf natürlich nicht verschwiegen werden, daß die erreichte Genauigkeit des Verfahrens nicht immer so gut sein wird, wie bei den angeführten Beispielen. Je komplizierter die räumliche Anordnung und Materialverteilung der jeweils ins Auge gefaßten schwingenden Masse ist, um so schwieriger wird es sein, gute Näherungswerte zu erhalten. Es soll aber darauf hingewiesen werden, daß in solchen schwierigen Fällen eben nur das beschriebene Verfahren irgendwelche annehmbare Näherungswerte in kürzerer Zeit und mit nicht zu großem Rechenaufwand liefern kann.

SCHRIFTTUM

1. THAMM, ST.: Ein Beitrag zur angenäherten Berechnung von Massenträgheitsmomenten. *Schiff und Hafen* 15 (1963), Heft 8.
2. MUTTNYÁNSZKY, A.: Kinematik und Kinetik (in ungarischer Sprache), Budapest 1957; 259.

A METHOD FOR THE APPROXIMATE DETERMINATION OF MASS MOMENTS OF INERTIA

I. THAMM

SUMMARY

The calculation of the moments of inertia of individual masses, in systems of masses carrying out torsional vibration which occur in applied mechanical engineering, is mostly a very awkward, and very fastidious task for less simple shapes. If the data are incomplete sometimes it is even impossible to carry out these calculations. The method presented in the paper — which is the further development of an approximate method published in *Schiff und Hafen* 15 (1963), No. 8 — aids for overcoming these difficulties, inasmuch as from relatively few data the lower and the upper limits of the required moment of inertia can be calculated. In order to determine the limit values an enveloping body must be chosen which envelopes the body in question to the greatest possible, this having as simple a shape as possible. The limit values are the moments of inertia of this enveloping body for different distributions of material which can easily be defined. In the calculations an auxiliary function is used which depends only on two dimensionless parameters characterizing the distribution of matter and which is determined according to the selection of the enveloping body. The author also presents three numerical examples which show that the error committed by calculating and using the limit values, can be below 1% with respect to the exact value of the moment of inertia.

UNE MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION APPROCHÉE
DES MOMENTS D'INERTIE DE MASSE

I. THAMM

RÉSUMÉ

Les systèmes de masses faisant des oscillations de torsion, assez fréquents dans la pratique de l'ingénieur, nécessitent, pour le calcul des moments d'inertie des masses individuelles, un travail qui est la plupart du temps compliqué et devient fastidieux quand il s'agit de figures géométriques moins simples, voire même impossible quand les données sont incomplètes. La méthode présentée — qui n'est que le développement d'un calcul approché publié dans la revue *Schiff und Hafen* 15 (1963), No. 8 — permet de surmonter ces difficultés en tant qu'elle rend possible de calculer les limites supérieure et inférieure du moment d'inertie cherché, à partir de données relativement peu nombreuses. Pour calculer les valeurs limites, il faut choisir un corps enveloppant qui entoure aussi bien que possible la masse en question et dont la forme est simple. Des valeurs limites sont calculées comme les moments d'inertie de ce corps enveloppant pour différentes distributions de la matière, lesquelles peuvent être définies de façon simple. Au cours du calcul, on utilise une fonction auxiliaire Ψ , qui ne dépend que de deux paramètres sans dimensions caractérisant la distribution de la matière, et qui se trouve définie par le choix du corps enveloppant. L'auteur présente aussi trois exemples numériques, qui montrent que l'erreur commise par le calcul et l'utilisation des valeurs limites peut être inférieure à 1% par rapport à la valeur exacte du moment d'inertie.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ МОМЕНТОВ
ИНЕРЦИИ МАССЫ

И. ТАММ

РЕЗЮМЕ

В практике инженера-механика расчёт моментов инерции при вращательных колебаниях отдельных масс, в большинстве своем сложной геометрической формы, является очень длительным процессом, а в отдельных случаях при отсутствии некоторых данных и невыполнимым. Показанный в работе метод, — который уже ранее был опубликован в журнале «Шифф унд Хафен» за 1963 г. № 15 и давал дальнейшее развитие приближенного расчёта, — с точки зрения затронутых трудностей облегчает задачу расчёта тем, что при сравнительно малом количестве данных для получения величины момента инерции, дает значение ее верхних и нижних границ. В целях определения верхней и нижней границ значения момента инерции необходимо выбрать такой эквивалент массы, размеры которого хорошо охватывают размеры испытуемого тела и в то же время являются простыми по форме. Ограничивающие значения момента инерции эквивалента массы получаем из определения момента инерции при имеющем место в данном случае простом распределении материала. При расчете пользуются вспомогательной кривой, которая выражает зависимость между двумя безразмерными параметрами, показывающими распределение материала, и определяется при выборе эквивалента массы. В работе представлены три примера расчета, которые показывают, что ошибка при расчете и применении ограничивающих значений момента инерции эквивалента массы по отношению к точному значению момента инерции испытуемой массы может быть ниже 1 %.

WINDKANALVENTILATION IN ORTSVORTRIEBEN WARMER BERGWERKE

I. TARJÁN

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 28. Juli, 1964]

In der Abhandlung werden die thermischen Bedingungen der Windkanalventilation mit blasender und saugender Wetterführung erörtert. Es wird ein für praktische Zwecke geeignetes Berechnungsverfahren entwickelt, mit dessen Hilfe die Erwärmung des Windes ermittelt werden kann und das auch dem Umstand Rechnung trägt, daß die Ventilationsdauer der Strecke von der Ortsvortriebsgeschwindigkeit und Streckenlänge abhängt. Aus den Untersuchungen ging die bedeutsame Feststellung hervor, daß bei größeren Ventilationswindmengen und längeren Strecken die klimatischen Bedingungen im Bergwerk am Streckenende annähernd gleich bleiben, wenn die zugeführte Windmenge der Streckenverlängerung direkt proportional erhöht wird. Als ein weiteres, wesentliches Ergebnis der Untersuchung konnte der Beweis geführt werden, daß am Streckenende in den praktisch vorkommenden Fällen bei saugender Wetterführung im Windkanal die Windtemperatur höher als bei blasender Wetterführung liegt.

I. Einführung

Die Lüftung von Ortstvortrieben warmer Bergwerke stellt ein wesentliches klimatisches Problem unserer Zeit dar. Bei richtig gewählter Wettermenge oder unter Einsatz künstlicher Klimaanlage lassen sich durch die Windkanalventilation günstige klimatische Bedingungen schaffen. Die auf dem Gebiet der Windkanalventilation durchgeführten Forschungsarbeiten haben gezeigt, daß das Problem durch Anwendung der blasenden Wetterführung im Luftkanal wirtschaftlich gelöst werden kann [1], doch ist aus Gründen der Bergsicherheit oft nur die saugend wirkende Ventilation zulässig [2].

Bei blasender Wetterführung im Windkanal gelangt der Wind über den Windkanal an den Ort und zieht entlang der Strecke wieder ab. Der Wind wird im Laufe seiner Rückströmung von der Wärme, die vom Gestein aus in das Streckeninnere hineinströmt, erhitzt. Der über die Strecke dahinströmende wärmere Wind und die von der Gesteinswand in Richtung Windkanal ausgestrahlte Wärme wird den sich im Windkanal fortbewegenden Wind über die Windkanalwand, in folge von Wärmedurchgang, erwärmen. Bei Saugventilation ist die Strömungsrichtung der vorangehend geschilderten entgegengesetzt.

Durch diese komplexe Wärmeübertragung wird die rechnerische Erfassung des Vorgangs wesentlich erschwert. Dennoch gelang es, das Problem unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen zu lösen [3, 4].

Bei der Berechnung der gegenseitigen thermischen Wirkungen, die der im Windkanal und entlang der Strecke dahinströmende Wind aufeinander ausüben, braucht man für die Aufstellung des Wärmedurchgangsfaktors die Wärmeleitung, die in der Wand des Windkanals vor sich geht, nicht zu berücksichtigen; es wird ferner angenommen, daß die Temperatur der Streckenwand und die des entlang der Strecke dahinströmenden Windes einander gleich sind; zur Berechnung der thermischen Verhältnisse im Windkanalinnern wird nur der Wärmedurchgangsfaktor der aufgezwungenen Strömung, für die der Außenfläche des Windkanals nur der der spontan vor sich gehenden Aufwärts-

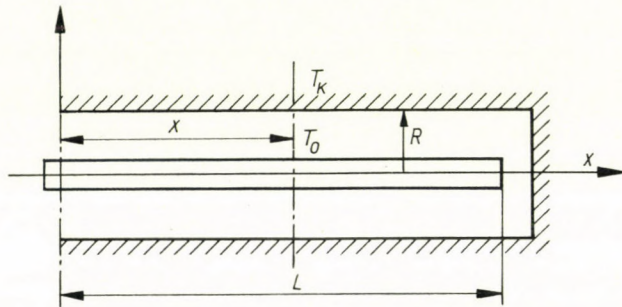


Bild 1

strömung herangezogen. Messungsergebnisse [3, 5] sowie theoretische Überlegungen [6] haben gezeigt, daß in Bezug auf diese Vernachlässigungen keine Bedenken zu bestehen brauchen, für diese sprechen aber auch die auf diese Weise erhaltenen relativ einfachen Zusammenhänge.

Eine weitere Vereinfachung erfuhr die Berechnung der Windkanalventilation im Ortsvortrieb dadurch, daß bei der Ermittlung der Wärme, die vom Gestein aus in die Strecke einströmt, die Zeitdauer der Ventilation (das Alter der Strecke) mit einem konstanten Durchschnittswert berücksichtigt wurde. Diese Vernachlässigung konnte aber nicht gerechtfertigt werden. Mit fortschreitendem Vortrieb wird am Streckenende die Zeitdauer der Ventilation $t = 0$ betragen und die Lebensdauer des Anfangsabschnitts der Strecke von der Geschwindigkeit des Ortsvortriebs (v) und der Länge der Strecke (L) abhängig sein:

$$t = \frac{L}{v} .$$

In einem beliebigen Punkt der Strecke, wie ihn die Koordinate x kennzeichnet (Bild 1), wird also die Zeitdauer der Ventilation bei gleichbleibender Ortsvortriebsgeschwindigkeit

$$\Delta t = \frac{L - x}{v} = t - \frac{x}{v} .$$

betragen. In einem beliebigen Punkt der Strecke hängt also die Zeitdauer, das Alter der Ventilation, von der Geschwindigkeit des Ortsvortriebs und der Zeit ab, die seit Beginn des Ortsvortriebs verstrichen ist.

Unter der Annahme, daß der Wärmeübertragungsfaktor zwischen dem entlang der Strecke dahinströmenden Wind und der Streckenwand unendlich ist, und die längsgerichtete Wärmeströmung in der Streckenwand außer acht gelassen wird [1, 3, 5], kann die Wärmemenge [7], welche von den umgebenden Gestein aus in eine Streckenabschnittseinheit einströmt, mit Hilfe der Gleichung

$$q = \lambda F(\psi)(T_K - T_0)$$

erfaßt werden, wo T_K [°C] die Ausgangstemperatur des Gesteins um die Strecke, λ [kcal/m, h, °C] der Wärmeleitungsfaktor des Gesteins und

$$F(\psi) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\psi\beta^2}}{I_0^2(\beta) + Y_0^2(\beta)} \cdot \frac{d\beta}{\beta}$$

ein dimensionsloses Integral ist, in dem $\psi = a \cdot \Delta t / R^2$ die Fourier-Zahl, a [m²/h] der Temperaturleitungsfaktor des Gesteins, Δt [h] die Ventilationsdauer irgendeines beliebigen Punktes der Strecke und R [m] den Radius der Strecke darstellt. Die Funktion $F(\psi)$, in welcher I_0 und Y_0 Bessel-Funktionen erster und zweiter Art und 0-ter Ordnung, β die Variante des Integrals sind, sind tabellarisch zusammengefaßt [7].

Über die Fourier-Zahl ist die Wirksamkeit der in Warmbergwerken angewandten Windkanalventilation von der Geschwindigkeit des Streckenvortriebs abhängig. Die Klärung der auch ansonsten verwickelten thermischen Umstände, wie sie bei windkanalbelüfteten Streckenvortrieben von Bergwerken mit klimatischen Schwierigkeiten obwalten, wird durch diesen neuen, bisher unbeachteten Faktor noch zusätzlich erschwert. Zwecks der relativ einfacheren Lösungsmöglichkeit wird das Zeitalter der Strecke mit der Länge L mit der Hälfte des Wertes berücksichtigt, der man auf Grund der Streckenvortriebsgeschwindigkeit ermittelt worden ist; ferner wird angenommen, daß der auf diese Weise begangene Fehler vernachlässigt werden kann. In diesem Fall ist

$$\Delta t_{\text{Durchsch.}} \cong \frac{t}{2} = \frac{L}{2v}$$

Die Fourier-Zahl kann somit folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\psi = \frac{aL}{2vR^2}$$

Im Bild 2 ist für verschiedene Streckenvortriebsgeschwindigkeiten die Funktion $F(\psi)$ in Abhängigkeit von der Streckenlänge bzw. dem durchschnittlichen Streckenzeitalter dargestellt. Im Bild 2 ist der Temperaturleitfaktor $a = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$, der Radius der Strecke $R = 1 \text{ m}$. Aus dem Diagramm geht klar hervor, daß bei Geschwindigkeiten, wie sie im Bergbau vorkommen, $F(\psi)$ für Strecken, deren Länge über 200 m liegt, zwischen 3 und 6 variiert, handelt es sich hingegen um Strecken, die kürzer als 200 m sind, unterliegt $F(\psi)$ größeren Schwankungen.

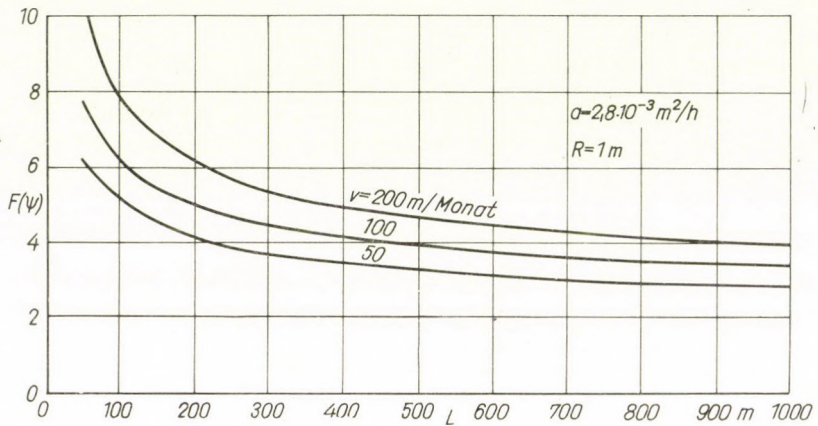


Bild 2

Nun soll unter den vorangehend geschilderten Umständen der von der Windkanalventilation auf die Lüftung von Streckenvortrieben in Heißbergwerken ausgeübte Einfluß untersucht werden.

Die zu erarbeitenden Resultate lassen auch Schlüsse in Bezug auf die in dieser Abhandlung nicht angeschnittenen Probleme der künstlichen Kühlung zu.

II. Windkanalventilation mit blasender Wetterführung

Nach den Bezeichnungen auf Bild 3 strömt im Luftkanal mit der Länge L und dem Halbmesser r die Windmenge V . Der den Windkanal betretende Wind hat die Temperatur T_{l_0} , diese erhöht sich auf dem Wege zur Austrittsstelle des Windes und beträgt dort T_L . Die Endtemperatur des über die Strecke zurückströmenden Windes beträgt T_{00} . Die ursprüngliche Temperatur des Gesteins, das die Strecke umgibt, beträgt T_K . Einfachheitshalber wird angenommen, daß der Windkanal konzentrisch zur Strecke liegt, die ein Kreisprofil hat.

ab. Selbstverständlich erfaßt der Wärmedurchgangsfaktor h die Wärmestrahlung nicht, sie läßt sich mit Hilfe der folgenden Gleichung berechnen:

$$h = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Der in der Strecke in Rückströmung begriffene Wind wird durch die vom Gestein aus in die Strecke hineinströmende Wärme erhitzt. Diese berechnet sich mit der Gleichung:

$$dq = \lambda \cdot F(\psi)(T_K - T_0) dx. \quad (4)$$

Die Wärmemenge, die den entlang des Windkanals dahinströmenden Wind erwärmt, beträgt:

$$dq - dq_0 = -c_p \gamma V \cdot dT_0. \quad (5)$$

(Die Strömungsrichtung des sich über die Strecke hin bewegenden Windes ist der positiven Richtung der Achse x entgegengesetzt, daher das negative Vorzeichen.)

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{c_p \gamma V}{2 \pi r k} \cdot \frac{dT_l}{dx} + T_l = T_0, \quad (6)$$

während aus den Gleichungen (3), (4) und (5) unter Heranziehung der Bezeichnungen

$$a = \frac{c_p \gamma}{2 \pi r k}$$

und

$$b = \frac{\lambda F(\psi)}{2 \pi r}$$

die Relation

$$a \frac{k}{h} V \frac{dT_0}{dx} - T_0 \left(1 + \frac{b}{h}\right) + T_l = -\frac{b}{h} T_K \quad (7)$$

hervorgeht.

Durch Elimination von T_0 aus den Gleichungen (6) und (7) erhält man die folgende inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 T_l}{dx^2} - \frac{m-n}{V} \frac{dT_l}{dx} - \frac{m \cdot n}{V^2} T_l = -\frac{m \cdot n}{V^2} T_K. \quad (8)$$

In der Gleichung (8) wurden die folgenden Bezeichnungen angewandt:

$$m = \frac{b + h - k}{2ak} \left[\sqrt{1 + \frac{4bk}{(b+h-k)^2}} + 1 \right],$$

$$n = \frac{b + h - k}{2ak} \left[\sqrt{1 + \frac{4bk}{(b+h-k)^2}} - 1 \right].$$

Die charakteristische Gleichung des homogenen Teils der Gleichung (8) ist, wie folgt:

$$\varrho^2 - \frac{m-n}{V} \varrho - \frac{m \cdot n}{V^2} = 0.$$

Die Lösung der Gleichung zweiten Grades lautet:

$$\varrho_1 = \frac{m}{V} \quad ; \quad \varrho_2 = -\frac{n}{V}.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist:

$$T_l = T_K.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8) ist also:

$$T_K - T_l = A e^{\varrho_1 x} + B_2 e^{\varrho_2 x} = A \exp(mx/V) + B \exp(-nx/V).$$

Die Temperatur des über die Strecke dahinströmenden Windes kann also auf Grund der Gleichung (6) aus der folgenden Relation berechnet werden:

$$T_K - T_0 = A(1 + ma) \exp(mx/V) + B(1 - na) \exp(-nx/V).$$

Die Integrationskonstanten A und B werden unter der Bedingung ermittelt, daß an der Stelle, wo $x = L$ ist, also am Ende des Windkanals, die Temperatur des sich im Windkanal und die des in der Strecke bewegenden Windes einander gleich sind:

$$T_l(L) = T_0(L) = T_L$$

$T_l(x)$, d. h. die Temperatur des Windes im Windkanal, kann also aus der Gleichung

$$\frac{T_K - T_l(x)}{T_K - T_L} = \frac{m n}{m + n} \left(\frac{\exp[m(x-L)/V]}{m} + \frac{\exp[-n(x-L)/V]}{n} \right); \quad (9)$$

$T_0(x)$, die Temperatur des Windes in der Strecke, aus der Gleichung

$$\frac{T_K - T_0(x)}{T_K - T_L} = \frac{m n}{m + n} \left(\frac{1 + ma}{m} \exp[m(x - L)/V] + \right. \quad (10)$$

$$\left. + \frac{1 - na}{n} \exp[-n(x - L)/V] \right)$$

für jede beliebige Stelle ermittelt werden.

Meistens ist die Temperatur $T_0(0) = T_{00}$ des an der Stelle $x = 0$ den Windkanal betretenden Windes bekannt, und es wird die Temperatur gesucht, die am Streckenende herrscht. Die Ermittlung dieses Wertes erfolgt beispielsweise, wenn T_{l_0} bekannt ist, unter Heranziehung der Gleichung (9) auf Grund der folgenden Relation:

$$\frac{T_K - T_L}{T_K - T_{l_0}} = \frac{m + n}{m \cdot n} \frac{1}{\frac{\exp(-mL/V)}{m} + \frac{\exp(nL/V)}{n}} \quad (11)$$

Die Temperatur T_{00} des in der Strecke rückströmenden Windes läßt sich unter Verwendung der Gleichungen (9) und (10) mit Hilfe der folgenden Relation berechnen:

$$\frac{T_K - T_{00}}{T_K - T_{l_0}} = \frac{\frac{1 + ma}{m} \exp(-mL/V) + \frac{1 - na}{n} \exp(nL/V)}{\frac{1}{m} \exp(-mL/V) + \frac{1}{n} \exp(nL/V)} \quad (12)$$

III. Windkanalventilation mit saugender Wetterführung

Bei der Windkanalventilation mit saugender Wetterführung, wie sie das Bild 4 darstellt, ist die Strömungsrichtung des am Streckeneingang eintretenden Windes überall der der Windkanalventilation mit blasender Wetterführung entgegengesetzt.

Der Wind, der den Windkanal durchströmt, gibt an die Strecke die Wärmemenge

$$dq_l = 2\pi r \cdot dx \cdot k(T_l - T_0) \quad (13)$$

ab. Das über die bei der blasenden Wetterführung angewandten Bezeichnungen Gesagte hat auch hier Gültigkeit.

Die Gleichungen (18) und (19) lassen sich durch Elimination von T_0 in eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung umformen:

$$\frac{d^2 T_l}{dx^2} + \frac{m-n}{V} \cdot \frac{dT_l}{dx} - \frac{m \cdot n}{V^2} T_l = -\frac{m \cdot n}{V^2} T_K. \quad (20)$$

Die Größen m und n in den Gleichungen können mittels den Relationen errechnet werden, die anhand der Darlegung der Ventilation mit blasender Wetterführung aufgestellt worden sind.

Die charakteristische Gleichung des homogenen Teils der Gleichung (20) ist wie folgt:

$$\omega^2 + \frac{m-n}{V} \omega - \frac{m \cdot n}{V^2} = 0.$$

Die Lösung der Differentialgleichung zweiten Grades lautet:

$$\omega_1 = \frac{n}{V}, \quad \omega_2 = -\frac{m}{V}.$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist:

$$T_l = T_K.$$

Unter Einsetzung der Werte ω_1 und ω_2 sowie Beachtung der Bedingung, daß an der Stelle $x = L$, $T_1(L) = T_0(L) = T_L$ ist, ergibt sich für die Windkanalventilation mit saugender Wetterführung die Temperatur des den Windkanal durchströmenden Windes zu

$$\frac{T_K - T_l(x)}{T_K - T_L} = \frac{m \cdot n}{m + n} \left(\frac{\exp[-m(x-L)/V]}{m} + \frac{\exp[n(x-L)/V]}{n} \right). \quad (21)$$

Die Temperatur des über die Strecke dahinströmenden Windes kann für jede beliebige Stelle mittels der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{T_K - T_0(x)}{T_K - T_L} = & \frac{m \cdot n}{m + n} \left\{ \frac{1 + ma}{m} \exp[-m(x-L)/V] + \right. \\ & \left. + \frac{1 - na}{n} \exp[n(x-L)/V] \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

ermittelt werden.

In Kenntnis der Temperatur T_{00} des Windes, der die Strecke betritt, kann die Temperatur T_L am Streckenende auf Grund der folgenden Gleichung ermittelt werden:

$$\frac{T_K - T_L}{T_K - T_{00}} = \frac{m + n}{m \cdot n} \cdot \frac{1}{\frac{1 + ma}{m} \exp(mL/V) + \frac{1 - na}{n} \exp(-nL/V)} \quad (23)$$

Die Temperatur des im Windkanal rückströmenden Windes läßt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{T_K - T_{l_0}}{T_K - T_{00}} = \frac{\frac{1}{m} \exp(mL/V) + \frac{1}{n} \exp(-nL/V)}{\frac{1 + ma}{m} \exp(mL/V) + \frac{1 - na}{n} \exp(-nL/V)} \quad (24)$$

berechnen.

IV. Bestimmung der erforderlichen Menge an Ventilationswind für die Windkanalventilation mit blasender und saugender Wetterführung

Anhand der Ermittlung der Ventilationsdauer wurde festgestellt, daß in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Streckenvortriebs und der Streckenlänge der Umstand annähernd berücksichtigt werden kann, daß mit fortschreitenden Ortsarbeiten die Ventilationsdauer an jeder Stelle unterschiedlich ist; mit anderen Worten ausgedrückt, variiert die zur gleichen Zeit vom Gestein aus in die Strecke gelangende Wärmemenge von einem Streckenabschnitt zum anderen.

Bei der Berechnung der Erwärmung des in der Strecke bzw. im Windkanal dahinströmenden Windes im Fall, daß $F(\psi) = f(v, L)$ bekannt ist, können m und n für einen gegebenen Streckenhalbmesser und Temperaturleitungsfaktor bestimmt werden.

Wenn der Radius des Windkanals $r = 0,2$ m und der Wärmeleitungs-koeffizient des Gesteins $\lambda = 1,7$ kcal/m h °C ist, werden die Wärmedurchgangsfaktoren innerhalb der Wertgrenzen $h = 1$ bis 2 kcal/m² h °C und $k = 4$ bis 6 kcal/m² h °C liegen [4, 6]. Für diesen Fall sind die Funktionen $m = m[F(\psi)]$ und $n = n[F(\psi)]$ aus dem Bild 5 ersichtlich. Aus den Bildern 2 und 5 geht hervor, daß sich die Funktion $n[F(\psi)]$ in Abhängigkeit von der Ventilationsdauer, daß heißt der Geschwindigkeit des Streckenvortriebs, kaum ändert; den hauptsächlichsten Einfluß auf sie übt der Wärmedurchgangsfaktor aus; die Änderung von $m[F(\psi)]$ als Funktion von $F(\psi)$ kann mit guter Approximation als linear angesehen werden, von den Wärmedurchgangsfaktoren ist sie jedoch nur in geringem Maße abhängig. Die durch die

Geschwindigkeit des Streckenvortriebs und der Ventilationskanallänge bestimmte Ventilationsdauer übt daher bei der Windkanalventilation über die Funktion $m = m[F(\psi)]$ Einfluß auf die Erwärmung des Windes aus.

Wenn die Streckenvortriebsgeschwindigkeit, geometrischen Dimensionen und geothermischen Daten gegeben sind, kann auf Grund der Bilder 2 und 5 die Temperatur des Ortes oder die Temperatur an einer beliebigen Stelle der Strecke als Funktion der Streckenlänge ermittelt werden.

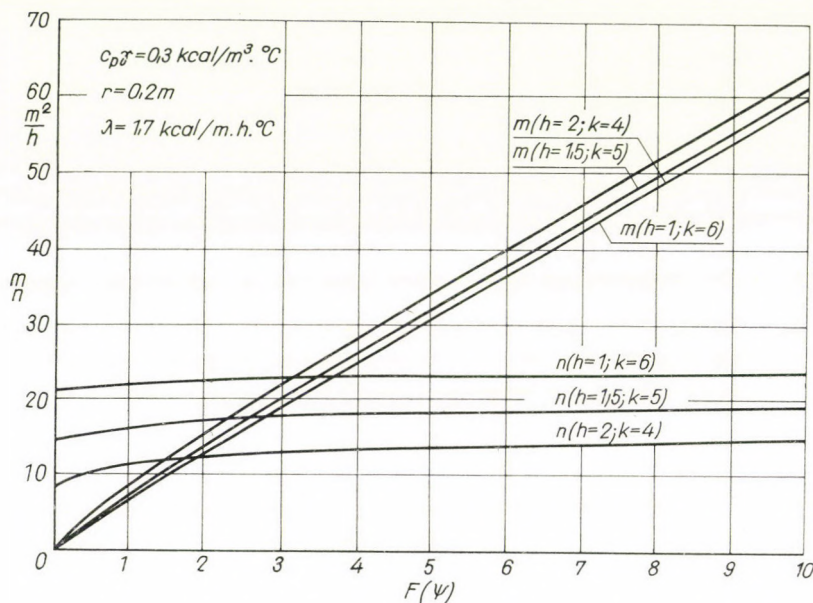


Bild 5

Zwecks Anwendung der vorangehend geschilderten Berechnungsmethode werden für die Streckenvortriebsgeschwindigkeit $v = 100 \text{ m/Monat}$ unter Heranziehung der Gleichungen (11) und (23) die Funktionen

$$V_{bl} = V_{bl} \left(L, \frac{T_K - T_L}{T_K - T_{10}} \right)$$

und

$$V_s = V_s \left(L, \frac{T_K - T_L}{T_K - T_{00}} \right)$$

bestimmt (Bild 6 und 7), wobei V_{bl} und V_s die für die Windkanalventilation mit blasender bzw. saugender Wetterführung erforderlichen Windmengen bezeichnen.

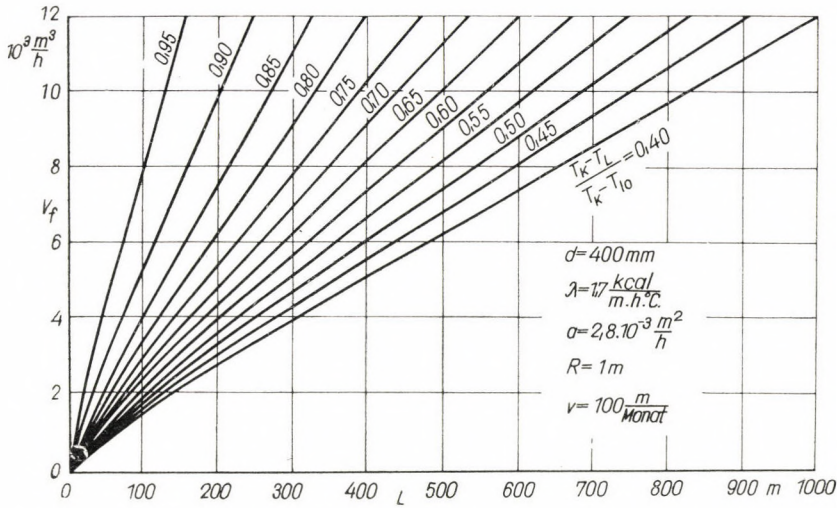


Bild 6

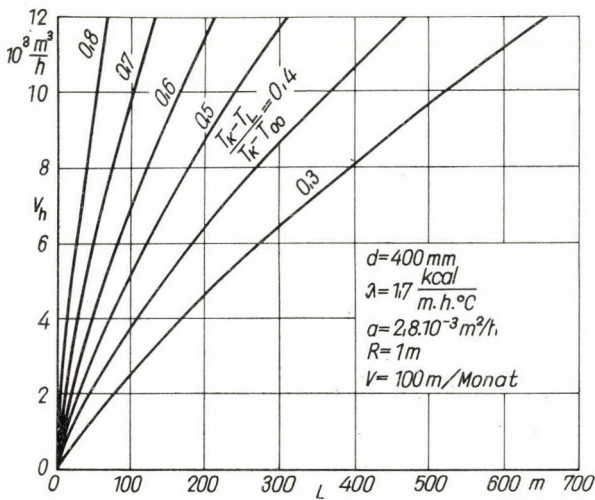


Bild 7

Wie aus dem Bild 6 ersichtlich ist, kann die dargestellte Funktion für Windkanalventilation bei besonders großen Streckenlängen und Ventilationswindmengen in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$\frac{V_{bl}}{L} = g_{bl} \left(\frac{T_K - T_L}{T_K - T_{lo}} \right).$$

Dieselbe Feststellung trifft auch für die auf dem Bild 7 dargestellte Windkanalventilation mit saugender Wetterführung zu, wo

$$\frac{V_s}{L} = g_s \left(\frac{T_K - T_L}{T_K - T_{00}} \right)$$

ist.

Im allgemeinen dürfte dies auch aus der Tatsache hervorgehen, daß sich m und n in den Gleichungen (11) und (23) bei großen Windmengen und Streckenlängen kaum ändern, somit kommen die Größen V und L nicht gesondert, sondern nur in Form des Quotienten V/L vor.

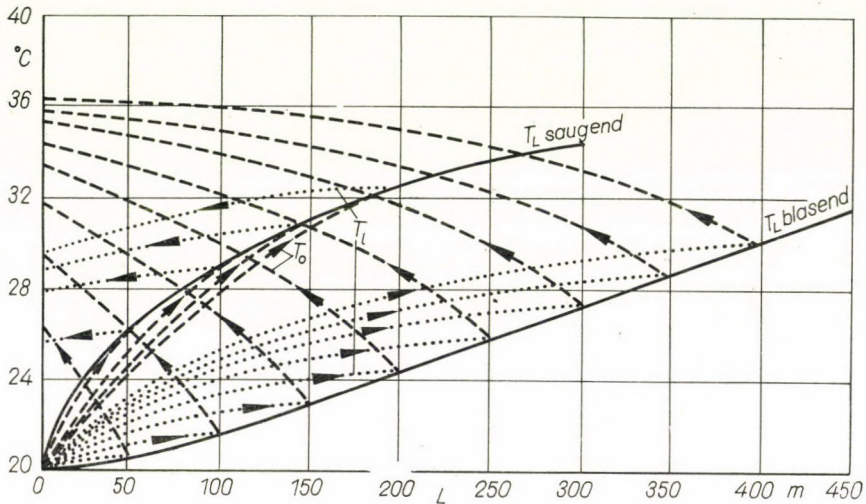


Bild 8

Es kann also das bedeutsame Resultat festgestellt werden, daß besonders bei größeren Windmengen, bei wachsender Streckenlänge die klimatischen Bedingungen im Bergwerk am Streckenende so gut wie unverändert bleiben, wenn die Ventilationswindmenge der Streckenlänge direkt proportional erhöht wird.

Aus den Bildern (6) und (7) geht hervor, daß bei einer zulässigen Höchsttemperatur des Ortes $T_L = 28^\circ\text{C}$, einer ursprünglichen Gesteinstemperatur $T_K = 40^\circ\text{C}$ und wenn die Temperatur des eingeblasenen bzw. eingesaugten Windes $T_{lobl} = T_{00s} = 20^\circ\text{C}$ ist, für eine Streckenlänge von $L = 400\text{ m}$ in blasender Wetterführung im Windkanal die Windmenge $V = 7400\text{ m}^3/\text{h}$ erforderlich wäre, wird hingegen saugende Wetterführung verwendet, so läßt sich die Aufgabe durch Erhöhung der Windmenge rational gar nicht mehr lösen, denn die nötige Windmenge V würde in diesem Fall mehr als $20\,000\text{ m}^3/\text{h}$ sein.

Auf Bild 8 wurde die Veränderung der Temperaturen $T_{10}(x)$ und $T_{00}(x)$ entlang des Windkanals bzw. der Streckenlänge für den Fall eingezeichnet,

daß die beförderte Windmenge $V = 6000 \text{ m}^3/\text{h}$, die Temperatur des zugeführten Windes 20°C und die ursprüngliche Gesteinstemperatur $T_K = 40^\circ\text{C}$ betrug. Die punktierten Linien zeigen die Temperaturen des im Windkanal, die gestrichelten die des entlang der Strecke dahinströmenden Windes an; die kontinuierliche Linie stellt die Temperaturen dar, die sich am Streckenende bei der Ventilation mit blasender bzw. saugender Wetterführung einstellen.

Der Schluß, der sich hieraus ziehen läßt, hat für den geschilderten Fall und auch im allgemeinen Gültigkeit: bei einer Windkanalventilation mit

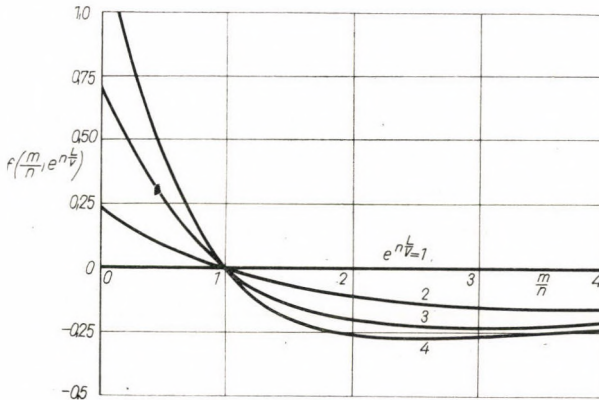


Bild 9

saugender Wetterführung liegt die Windtemperatur am Streckenende in den praktisch vorkommenden Fällen höher als bei blasender Wetterführung. Diese Feststellung kann auch durch Dividieren der Gleichungen (11) und (23) belegt werden. Sind nämlich die Temperaturen des in blasender bzw. saugender Wetterführung eingeblasenen Windes einander gleich ($T_{tbl} = T_{00s}$), so kann die folgende Ungleichung aufgestellt werden:

$$\frac{T_K - T_{Ltbl}}{T_L - T_{Ls}} = \frac{\frac{1+ma}{m} \exp(mL/V) + \frac{1-na}{n} \exp(-nL/V)}{\frac{1}{m} \exp(-mL/V) + \frac{1}{n} \exp(nL/V)} > 1. \quad (25)$$

Die Ungleichung (25) läßt sich folgendermaßen umformen:

$$na > \frac{\exp(nL/V) - \exp(-nL/V)}{\exp(mL/V) - \exp(-nL/V)} - \frac{n}{m} \frac{\exp(mL/V) - \exp(-mL/V)}{\exp(mL/V) - \exp(-nL/V)} = f\left(\frac{m}{n} \exp(nL/V)\right). \quad (26)$$

Auf Bild 9 ist die auf der rechten Seite der Ungleichung (26) befindliche Funktion $f(m/n, e^{n \cdot L/V})$ für verschiedene Werte von $e^{n \cdot L/V}$ im Intervall $1 < e^{n \cdot L/V} < 4$ in Abhängigkeit von m/n eingezeichnet. In den Fällen, wo $m/n \geq 1$ ist — diese kommen in der Praxis am häufigsten vor — hat die Funktion den Wert $f(m/n, e^{n \cdot L/V}) \leq 0$, dann erfüllt sich also die Ungleichung, weil der links stehende Ausdruck positiv ist. In dem praktisch seltenen Fall, daß $0 < m/n < 1$ ist, geht die Erfüllung der Ungleichung aus Bild 9 hervor.

SCHRIFTTUM

1. BOLDIZSÁR, T.: Ventilation und Kühlung des Streckenvortiebs in Tiefbergwerken. Schlußbericht der Forschungsanstalt für Bergbau, Budapest 1960.
2. ESZTÓ, M.: Saugende oder blasende Wetterführung in der Ventilation von Orten mit Schlagwettergefahr. *Bányászati Lapok* (1952), 3.
3. JONES, C.—SHUTTLEWORTH, SH. E. H.: Air Temperature at the Discharge End of a Leakless, Forcing Ventilation Duct During the Driving of a Heading. *N. C. B., M. R. E. Report* No. 2162, 1960.
4. TARJÁN, I.: Windkanalventilation in Warmbergwerken. *Bányászati Lapok* (1962), 12.
5. HITCHCOCK, J. A.—JONES, C.—TEALE, R.: Studies in an Air-Conditioned Heading at Snow-down Colliery. *N. C. B., M. R. E. Report* No. 2060, 1957.
6. TARJÁN, I.—GÓZON, J.: Die Rolle der Wärmeübertragung und Wärmestrahlung in der Windkanalventilation von Warmbergwerken. *Fremdsprachige Mitteilungen der Technischen Universität für die Schwerindustrie Miskolc*, 1963.
7. BOLDIZSÁR, T.: Einfluß des Temperaturfeldes der Erdrinde auf die Erwärmung der Luft in Tiefbergwerken. *Bányászati Lapok* (1956), 9—10.

VENTILATION OF AIR CHANNELS FOR DRIFTS IN HOT MINES

I. TARJÁN

SUMMARY

Thermic conditions prevailing in drift advances of hot mines having forcing ventilation duct are investigated. A method suitable for the practical purposes of determining air heating is worked out taking that fact into consideration, that the time needed for ventilation is both a function of the velocity the heating is driven with and the length of the heading as well. The investigations carried out lead to the important result, that with a higher ventilation air rate and longer headings climatic conditions prevailing at the end of the coal face keep approximately constant, if the air rate fed in is enlarged proportionately to the length of the heading. Another important result that emerged from the investigations was that it could be proved; ventilation with suction air supply in cases relevant for practical work is able to guarantee higher air temperature at the dean than one working with a blowing air supply.

VENTILATION PAR CONDUITES D'AIR DANS LES EXPLOITATIONS PAR TAILLE EN ATMOSPHÈRE CHAUDE

I. TARJÁN

RÉSUMÉ

L'étude examine les conditions thermiques de l'aérage par soufflage et par aspiration au creusement des galeries en atmosphère chaude. Elle propose une méthode de calcul rapide permettant de déterminer l'échauffement de l'air, compte tenu du fait que la durée d'aérage

de la galerie est fonction de la vitesse de l'avancement et de la longueur de la galerie. L'examen aboutit à une constatation importante, à savoir qu'en cas d'un débit d'air frais et d'une longueur de galerie plus grands, les conditions climatiques restent approximativement identiques au fond de la galerie, si l'augmentation du débit d'air est directement proportionnelle à celle de la longueur de galerie. Un autre résultat essentiel de l'étude a été de démontrer qu'au fond de la galerie la température de l'air est supérieure, dans les cas pratiques, en cas de ventilation aspirante, à celle observée en cas d'aérage soufflant.

ВЕНТИЛЯЦИЯ ВОЗДУШНЫМИ КАНАЛАМИ ПРИ ПРОХОДКЕ ШТРЕКОВ НА ШАХТАХ С ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

И. ТАРЬЯН

РЕЗЮМЕ

В работе исследуются термические условия вытяжной и нагнетательной вентиляции по вентиляционным каналам при проходке штреков в шахтах с высокой температурой. Приводится метод, пригодный для выполнения практических расчетов по определению температуры воздуха, учитывая при этом также и то обстоятельство, что продолжительность вентиляции штрека является функцией скорости проходки штрека и длины штрека. В результате проведенного исследования сделан важный вывод, что при значительных количествах вентилирующего воздуха и длине штрека в рабочем месте, в конце штрека климатические условия шахты остаются приближенно одинаковым, если с увеличением длины штрека прямо пропорционально увеличивается количество вентиляционного воздуха. Другим существенным результатом данной работы является доказательство того, что при вентиляции вентиляционным каналом вытяжной системы в конце штрека, во встречающихся в практике случаях, температура воздуха является более высокой, чем при вентиляции по нагнетательной системе.

INDEX

- Huszthy, L.*: An Approximation for Computing the Sag of Involute Teeth — Annähernde Berechnung der Durchbiegung von Evolventenzahnen — Calcul approché du fléchissement des dentures à développante — Хустти, Л.: Приближенный расчет прогиба эвольвентных зубьев 3
- Lévai, Z.*: Analytische Untersuchung komplexer Planetengetriebe — Analytical Investigation of Complex Planetary Gears — Examen analytique d'engrenages planétaires complexes — Левай, З.: Аналитическое исследование комплексных планетарных механизмов 17
- Welesz, R.*: Die im Laufe der Sinterung auftretende flüssige Phase und das Kristallitgefüge des Sintermetalls — The Liquid Phase Appearing during Sintering and the Crystallite Structure of the Sintered Metal — La phase liquide produite au cours du frittage et la structure des cristallites du métal fritté — Велес, Р.: Жидкая фаза, возникающая в процессе спекания, и кристаллитные образования синтерного металла 59
- Kalászi, I.*: A Corrected Method for the Determination of Flank Wear on the Single Point Cutting Tool on Turning Steel — Eine korrigierte Methode für die Bestimmung des Freiflächenverschleisses beim Drehen mit einem einschneidigen Werkzeug — Méthode rectifiée pour déterminer l'usure dorsale au tournage avec outil à un tranchant — Каласи, И.: Скорректированный метод определения износа затылка при токарной обработке стали простым инструментом 73
- Varga, J.—Sebestyén, Gy.*: Determination of the Frequencies of Wakes Shedding from Circular Cylinders — Bestimmung der Frequenz der sich von einem Kreiszyylinder ablösenden Wirbel — Détermination de la fréquence des tourbillons se décollant d'un cylindre circulaire — Варга, И.—Шебештьен, Д.: Определение частот вихрей, отделяющихся от цилиндров 91
- Horváth, F.*: Berechnung der Zahnwurzelstärke an der durch Trochoiden begrenzten Zahnwurzel — Calculation of Tooth-Thickness at the Root Portion between Trochoids — Calcul de l'épaisseur des pieds de dent limités par des trochoïdes — Хорват, Ф.: Расчет толщины зубьев, ограниченных трохоидами 109
- Сейман, Ш.*: Анализ сплава RC 49 растворенным способом спектральной рентгенофлуоресценции — Szeiman, S.: X-Ray Fluorescence Spectrochemical Analysis of RC 49 Alloy by the Solution Method — Eine Methode für die Analyse in Lösung der Legierung RC 49 mittels Röntgenfluoreszenz — La méthode d'analyse en solution de l'alliage RC 49 par fluorescence des rayons X 127
- Terplán, Z.*: Bestimmung des ausgeglichenen relativen Gleitens der Planetengetriebe mit Doppeleingriff des einstufigen Planetenrades — The Compensated Sliding of Planetary Spur Gear Trains with Double Engagement — Glissement compensé des engrenages planétaires à engrènement binaire — Терплан, З.: Уравненное скольжение шестеренчатых планетарных механизмов с двойным зацеплением 139

<i>Stvrteczky, F.—Szabó, Á.</i> : Influence of Manufacturing Inaccuracies on the Characteristics of Pumps — Einfluß der Fertigungsungenauigkeit auf die Pumpencharakteristik — L'effet des défauts de fabrication sur les caractéristiques de la pompe — Штвр-тецки, Ф.—Сабо, А.: Влияние дефектов обработки на показатели насосов	153
<i>Kardos, Á.—Stahl, P.</i> : Particular Problems in Chip-Root Research — Einige Fragen der Spanwurzel-Untersuchung — Quelques problèmes relatifs à l'examen de la base des coreaux — Кардош, А.—Сталь, П.: Некоторые вопросы исследования корня стружки	165
<i>Gulyás, J.</i> : Theoretische und experimentelle Untersuchung der bildsamen Stauchung von Prismen mit rechteckiger Basis — Theoretical and Experimental Investigation of the Plastic Swelling of Prisms with Rectangular Bases — Étude théorique et expérimentale du gonflement plastique des prismes rectangulaires — Гуяш, Й.: Теоретическое и экспериментальное исследование пластичной раздачи параллелепипедов	183
<i>Drahos, I.</i> : Geometrische Grundlagen zur Herstellung einer Wildhaber—Nowikow-Verzahnung auf der Forster-Wälzfräsmaschine — The Bases of the Geometry of Wildhaber—Novikov Gearing which can be Manufactured on Forster-Type Machines — Fondements géométriques de l'usinage de dentures Wildhaber—Novikov sur les machines de type Forster — Драхош, И.: Основы геометрии зацепления Вильдгабера—Новикова, изготовляемого на станке типа Форстер	203
<i>Tevan, D.</i> : Предел нагрузки электроприводов станов трио и дуо с регуляторами скольжения — Tevan, Gy.: The Load-Carrying Capacity of Two-High and Three-High Slip-Regulated Mill Drives — Die Belastbarkeit von Antrieben für Trio- und Duostrassen mit Schlupfregulierung — Capacité de charge de l'entraînement des trains trio et duo à regulateur de glissement	221
<i>Thamm, J.</i> : Rechenmethode zur angenäherten Bestimmung von Massenträgheitsmomenten — A Method for the Approximate Determination of Mass Moments of Inertia — Une méthode pour la détermination approchée des moments d'inertie de masse Тамм, И.: Метод определения приблизительного значения моментов инерции массы	233
<i>Tarján, I.</i> : Windkanalventilation in Ortsvortrieben warmer Bergwerke — Ventilation of Air Channels for Drifts in Hot Mines — Ventilation par conduites d'air dans les exploitations par taille en atmosphère chaude — Тарьян, И.: Вентиляция воздушными каналами при проходке штреков на шахтах с высокой температурой	257

Printed in Hungary

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

All the reviews of the Hungarian Academy of Sciences may be obtained among others from the following bookshops:

- ALBANIA**
Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana
- AUSTRALIA**
A. Keesing
Box 4886, GPO
Sidney
- AUSTRIA**
Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I.
- BELGIUM**
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles
- BULGARIA**
Raznoiznos
1Tzar Assen
Sofia
- CANADA**
Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.
- CHINA**
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. Nr. 88.
- CZECHOSLOVAKIA**
Artia A. G.
Ve Smeckách 30
Praha II.
Poštova Novinova Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Poštova Novinova Služba
Dovoz tlače
Leningradská 14
Bratislava
- DENMARK**
Ejnar Munksgaard
Nørregade 6
Kopenhagen
- FINLAND**
Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki
- FRANCE**
Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5
- GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC**
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16.
Leipzig C. I.
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62.
Berlin N. W.
- GERMAN FEDERAL REPUBLIC**
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.
- GREAT BRITAIN**
Collet's' Subscription Dept.
44—45 Museum Street
London W. C. I.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford
- HOLLAND**
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague
- INDIA**
Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
Head Office:
India House OPP.
GPO Post Box 1374
Bombay I.
- ITALY**
Santo Vanasia
71 Via M. Macchi
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze
- JAPAN**
Nauka Ltd.
2 Kanada-Zimbocho 2-chome
Chiyoda-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo
- Far Eastern Booksellers
Kanada P. O. Box 72
Tokyo
- KOREA**
Chulpanmul
Korejskoje Obshchestvo po Exportu i
Importu Proizvedenij Pechati
Phenjan
- NORWAY**
Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo
- POLAND**
Export and Import Unternehmen
RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa
- ROUMANIA**
Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18.
Bucuresti
- SOVIET UNION**
Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow
G—200
- SWEDEN**
Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm
- USA**
Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York 3 N. Y.
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York 3. N. Y.
- VIETNAM**
Xunhasaba
Service d'Export et d'Import des Livres
et Périodiques
19, Tran Quoc Toan
Hanoi
- YUGOSLAVIA**
Forum
Vojvode Misica broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Kniga
Terazije 27.
Beograd

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
T. MILLNER, K. SZÉCHY

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 53

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1966

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

A PRACTICAL DETERMINATION METHOD FOR BENDING MOMENTS IN STRAIGHT BARS UNDER COMBINED BENDING AND COMPRESSION

J. SZIDAROVSKY
MINISTRY OF COMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received December 9, 1960]

One of the methods used to determine bending moments arising in a laterally loaded compressed bar, calculates the bending moments in the non-compressed bar and multiplies the so obtained result with an increasing factor.

This method was proved in the past for bars of constant section only. This study proves this method for bars having a variable section and, to evaluate the increasing factor, proposes a numerical method presenting more exact results.

1.0 Introduction

A frequent problem in engineering practice is to design bars under combined compression and bending.

There exists a mathematical and practical solution for bars of constant section under simple loading (e.g. in Hungarian Specifications for Highway Bridges). For a variable section or an unusual loading, the designing engineer has to apply some approximative method [2], [3].

One of these approximative methods is that by Vianello, with the basic formula of

$$M = M_g + P \cdot y_g \quad (1.1)$$

where M_g and y_g are the bending moment and the deflection resp., due to transverse loading, and P the compression.

Another, widely applied method is to determine the bending moment in an uncompressed bar and multiply it by a coefficient

$$\alpha = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} \quad (1.2)$$

Here P is the compressive force, and P_{cr} the first, least critical force. Application of this method is verified only for bars of constant section [5]. Below, its validity to bars of variable section will be demonstrated and a simple method for refining it will be presented.

2.0 Increasing the bending moment

In a bar of straight axis between supports, the bending moment due to the transverse load is (Fig. 1)

$$M = M_l + \frac{M_r - M_l}{l} x + M_s$$

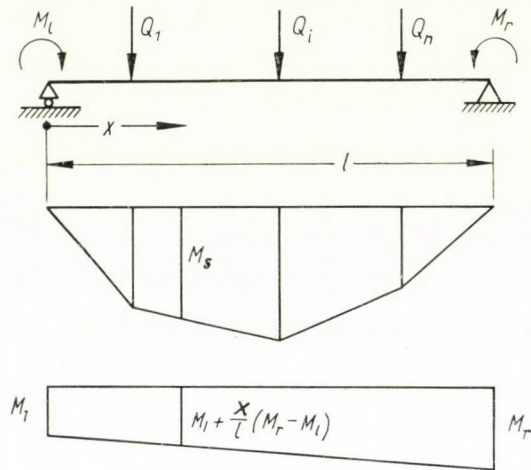


Fig. 1

where M_l and M_r are moments at the left-side and right-side supports resp., M_s is a simple beam moment due to lateral load, and l is the span. This bar may be a member of a continuous girder or a framework. Acted upon by an axial compressive force P , its moment will increase to (Fig. 2)

$$M = M_l + \frac{M_r - M_l}{l} x + M_s + P \cdot y,$$

where y is the deflection. Since

$$M = -EI \cdot y''$$

and introducing symbol

$$M_g = \frac{M_r - M_l}{l} x + M_l + M_s,$$

differential equation

$$y'' + \frac{P}{EI} \cdot y = - \frac{M_g}{EI} \tag{2,1}$$

or

$$M'' + \frac{P}{EI} \cdot M = M_g'' \tag{2,2}$$

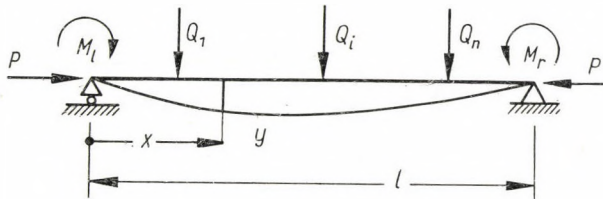


Fig. 2

is obtained. If no transversal load is acting, twice differentiating (2,1) and (2,2), leads to differential equations

$$\frac{d^2}{dx^2} y_i'' + P_i \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{EI} y_i = 0 \tag{2,1a}$$

or

$$M_i'' + \frac{P_i}{EI} M_i = 0 \tag{2,1b}$$

appropriate to determine the critical force.

If second derivative of the bending moment due to the transverse load is affined to the product of compressive force P by the i -th buckling moment m_i and by the inverted product of flexural rigidity, we obtain

$$M_g'' = - \frac{P \cdot m_i}{EI} \tag{2,3}$$

Substituting this relation into (2,2), relationship

$$M_i'' + \frac{P}{EI} (M_i + m_i) = 0 \tag{2,4}$$

can be deduced. Comparing (2,4) and (2,1b) leads to the identity

$$P_i \cdot M_i = P(M_i + m_i)$$

to give

$$M_i = \frac{P}{P_i - P} m_i$$

or

$$M_i + m_i = \frac{P_i}{P_i - P} \cdot m_i.$$

Substituting this relationship into (2,4), expression

$$M_i'' = - \frac{P_i \cdot P}{P_i - P} \cdot \frac{m_i}{EI}$$

can be deduced for the bending moment increased by compression. Comparing this relationship to (2,3) leads to

$$M_i'' = \frac{P_i}{P_i - P} \cdot M_g''$$

or, integrating twice, to

$$M_i = \frac{P_i}{P_i - P} \cdot M_g = \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \cdot M_g \quad (2,5)$$

formula of increased bending moment, with

$$\nu_i = \frac{P_i}{P} \quad (2,6)$$

as safety, against the i -th critical force.

Expanding into series moment M_g in an uncompressed bar with respect to the i -th buckling moments, we obtain:

$$M_g = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \quad (2,7)$$

and

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} m_i. \quad (2,8)$$

Compressive force P causes initial bending moment M_g to increase to its κ fold, that is

$$M = \kappa \cdot M_g = \kappa \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m_i.$$

These two relationships give

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} . \quad (2,9)$$

Theoretically Eq. (2,9) accurately determines the multiplying coefficient, unfortunately, however, it does not lend itself to practical computation, requiring knowledge of critical forces and of buckling shapes on one hand, these being tedious to compute, and expanding moment M_g into series with respect to moments pertaining to the critical force, a laborious process, on the other hand. Therefore, in what follows, a more practical and simple approximative formula will be deduced, rather than to theoretically express the multiplying coefficient.

3.0 Another term for the multiplying coefficient

Multiplying coefficient α can be written as:

$$\alpha = \frac{\nu_1 + \beta}{\nu_1 - 1} . \quad (3,1)$$

In this formula, the unknown β is a coefficient depending on both the transverse load and the compressive force. In usual approximative computations, the β value is zeroed (see Eq. (1,2)).

Comparing (2,9) and (3,1) leads to

$$\nu_1 + \beta = (\nu_1 - 1) \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (\nu_1 - 1) \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i}$$

giving

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\nu_1 - 1}{\nu_i - 1} \cdot \nu_i - \nu_1 \right] m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = - \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\nu_i - \nu_1}{\nu_i - 1} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} . \quad (3,2)$$

Substituting for magnitudes β in Eq. (3,2) the relevant terms under (2,6), expression

$$\beta = - \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_i - P_1}{P_i - P} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} \quad (3,3)$$

is obtained.

4.0 The β value in special cases

From relationship (3,3) it clearly appears that member β in the multiplying coefficient as expressed in (3,1), depends on the form of moment M_g , on the given section on the flexural rigidity of the bar and on the compressive force, so it is not a constant.

Expression (3,3) gives an exact value for β , but it is not a practical formula.

Term in (3,2) for β leads to the expression

$$\beta = - \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_i}\right) m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \bar{m}_i,$$

with

$$\bar{m}_i = \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_i}\right) \frac{m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = \frac{P_i - P_1}{P_i} \frac{m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i}$$

a dimensionless magnitude of moment character.

Denoting by β_0 the β value for $P = 0$, on the basis of the above relationships it is

$$\beta_0 = - \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_i - P_1}{P_i} m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_1}{P_i} m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} - 1. \quad (4,1)$$

By comparing the two expressions above

$$\beta_0 = \sum_{i=2}^{\infty} \bar{m}_i$$

is obtained and this is the moment developing in an uncompressed bar. In its expression expanded into series of buckling moments the first is absent; β is the value of this moment increased by the compressive force.

Moment

$$\beta_0 = \sum_{i=2}^{\infty} \bar{m}_i$$

lacking the first buckling moment, will be but slightly increased by a compressive force significantly lower than the first critical force. Therefore – with some reservations to be discussed later – a sufficiently accurate result will be obtained by taking β_0 instead of β .

A matter of importance is that β_0 can be determined without expanding the moment into series with respect to the buckling moment.

Relationship for straight-axed bars can be written as

$$EI \cdot y_i'' = - m_i$$

which, when substituted into (2,1a) gives

$$-\frac{d^2}{dx^2} \frac{m_i}{EI} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{P_i}{EI} \cdot y_i = 0$$

and thus

$$\frac{P_1}{P_i} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \cdot m_i = \frac{d^2}{dx^2} P_1 \cdot y_i = - P_1 \cdot \frac{m_i}{EI} \quad (4,2)$$

Differentiating twice and applying principle of superposition, yealds identity

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_1}{P_i} \cdot m_i = - P_1 \iint \frac{m_i}{EI} dx dx = P_1 \cdot y_g, \quad (4,3)$$

where y_g denotes fictitious deflection due to moment

$$M_g = \sum_{i=1}^{\infty} m_i.$$

This is by no means a real deflection, since at integration, both integration constants are to be determined from the boundary conditions of the flexural moment, instead of from those of the deflection. That is, the bending moment

is to be determined from Eq. (4,3), due to m_i/EI distributed loads. Substituting (4,3) into (4,1) the expression

$$\beta_0 = \frac{P_1 \cdot y_g}{M_g} - 1 \quad (4,4)$$

is obtained for.

Let us determine now value of difference $\beta - \beta_0$. From (3,3) and (4,1) we obtain

$$\Delta\beta = \beta - \beta_0 = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{P_i - P_1}{P_i - P} - \frac{P_i - P_1}{P_i} \right] m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_1(P_i - P_1)}{P_i(P_i - P)} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} \quad (4,5)$$

Denoting value of $\Delta\beta$ for $P = P_1$ by $\Delta\beta_1$, it is

$$\Delta\beta_1 = - \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_1}{P_i} m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = \frac{m_1}{M_g} - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_1}{P_i} m_i}{M_g} \quad (4,6)$$

Or else, from (4,3)

$$\Delta\beta_1 = \frac{m_1}{M_g} - \frac{P_1 \cdot y_g}{M_g}$$

Hence, for $P = P_1$

$$\beta_1 = \beta_0 + \Delta\beta_1 = \frac{m_1}{M_g} - 1 \quad (4,7)$$

The value β_1 can also be expressed from (3,2) ($P_1 = P$) as

$$\beta_1 = - \frac{\sum_{i=2}^{\infty} m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} m_i} = \frac{m_1}{M_g} - 1$$

the same as (4,7).

According to (4,6), $\Delta\beta$ is an increment of moment β_0 due to the compressive force. This moment increment monotonously increases with increase of the compressive force. Thus, the values β range from β_0 to β_1 , since $0 \leq P \leq P_1$. Hence it is

$$|\beta_0| \leq |\beta| \leq |\beta_1| \quad (4,8)$$

where β_1 can be determined from (4,6) or (4,7).

5.0 Approximation of the multiplying coefficient

From term for β_1 in (4,6) it appears that, if in the form of M_g , expanded into series with respect to the buckling moments, the first buckling moment is predominating, then the value $\Delta\beta$ is a low one. Namely, in the expression (4,6) the numerator does not include the first buckling moment, while those of a higher order have to divide by ever increasing denominators. Therefore, in this case $\Delta\beta$ is small and can be neglected as compared to buckling safety ν_1 in the form to (3,1) of the multiplying coefficient. If therefore such a transversal load causes a deformation, in which the first buckling moment predominates, practically accurate results are met by the approximative method where β_0 is taken for β .

In what follows, method in (1,1) and (1,2) will be compared with the discussed one.

1. From Eq. (1,1):

$$M = M_g + P \cdot y_g. \quad (5,1)$$

Thus

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M}{M_g} = 1 + \frac{P \cdot y_g}{M_g} = 1 + \frac{P}{P_1} \left(\frac{P_1 \cdot y_g}{M_g} \right) = 1 + \frac{1}{\nu_1} (1 + \beta_0) = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1 + \beta_0}{\nu_1} \right) (\nu_1 - 1)}{\nu_1 - 1} = \frac{\nu_1 + \beta_0 - \frac{1 + \beta_0}{\nu_1}}{\nu_1 - 1}. \end{aligned} \quad (5,2)$$

2. From Eq. (1,2):

$$\alpha = \frac{\nu_1}{\nu_1 - 1} \quad (5,3)$$

and

$$M = \frac{\nu_1}{\nu_1 - 1} M_g,$$

or, in another form

$$M = M_g + \frac{1}{\nu_1 - 1} \cdot M_g. \quad (5,4)$$

3.

$$\alpha = \frac{\nu_1 + \beta_0}{\nu_1 - 1} \quad (5,5)$$

or

$$M = \varkappa M_g = \frac{\nu_1 + \beta_0}{\nu_1 - 1} M_g = \frac{\nu_1 + \frac{P_1 \cdot y_g}{M_g} - 1}{\nu_1 - 1} M_g =$$

$$= M_g + \frac{1}{\nu_1 - 1} \frac{P_1}{P} P \cdot y_g,$$

to give

$$M = M_g + \frac{\nu_1}{\nu_1 - 1} P \cdot y_g. \quad (5,6)$$

4.

$$\varkappa = \frac{\nu_1 + \beta_1}{\nu_1 - 1} \quad (5,7)$$

and

$$M = \varkappa M_g = \frac{\nu_1 + \beta_1}{\nu_1 - 1} M_g = \frac{\nu_1 + \frac{m_1}{M_g} - 1}{\nu_1 - 1} M_g,$$

thus

$$M = M_g + \frac{1}{\nu_1 - 1} m_1. \quad (5,8)$$

As to the first method, comparison of (5,2) to (5,5) and (5,7) clearly shows that with increasing force P , the formula loses accuracy.

As to the second method, comparison of (5,4) with (5,8) demonstrates that instead of the total bending moment, only part of it, including the first buckling moment, has to increase.

Comparison of (5,1) with (5,6) clearly shows the difference between the first method [Eq. (1,1)] and the proposed one, to consist in the fact that this latter takes into consideration the buckling according to the second method multiplied by the multiplying coefficient suggested in the first method [Eq. (1,2)].

6.0 Examples

6.1 Assume an axially compressed two-hinged bar of constant section acted upon in the middle by transversal force $Q = 1$ t.

This problem could be solved more simply than to be described here, but by this occasion illustration and comparison will be aimed at.

Buckling shape is a sine curve, hence moment expanded into Fourier-series will be

$$M_g = \frac{2l}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^2} + \dots \right).$$

The moment at middle, at $x = l/2$ is

$$M_g \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{2l}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{2l}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{l}{4}. \quad (6,1)$$

Or the same, written in decimals

$$\begin{aligned} M_g \left(\frac{l}{2} \right) &= \frac{2l}{\pi^2} \left(1,00000 + 0,11111 + 0,40000 + 0,02041 + 0,01235 + 0,00826 + \right. \\ &+ 0,00592 + 0,00444 + 0,00346 + 0,00277 + 0,00227 + \dots \left. \right) = \\ &= \frac{2l}{\pi^2} 1,23370 = 0,25 l. \end{aligned} \quad (6,2)$$

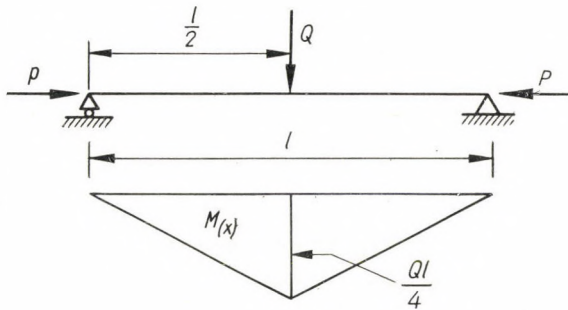


Fig. 3

And the deflection at the same spot:

$$\begin{aligned} y_g \left(\frac{l}{2} \right) &= \iint \frac{M}{EI} dx dx = \frac{2l^3}{EI \pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \\ &= \frac{2l^3}{EI \pi^4} \frac{\pi^4}{96} = \frac{l^3}{48 EI}. \end{aligned}$$

Moment increased by the effect of axial force P is

$$M \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{2l}{\pi^2} \left(\frac{\nu_1}{\nu_1 - 1} + \frac{\nu_3}{3^2 (\nu_3 - 1)} + \frac{\nu_5}{5^2 (\nu_5 - 1)} + \dots \right). \quad (6,3)$$

The first critical force

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

From (4,4) and (4,8) resp.,

$$\beta_0 = \frac{P_1 \cdot y_g}{M_g} - 1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{\frac{l^3}{48 EI}}{\frac{l}{4}} - 1 = \frac{\pi^2}{12} - 1 = -0,178,$$

and

$$\beta_1 = \frac{m_1}{M_g} - 1 = \frac{\frac{2l}{\pi^2}}{\frac{l}{4}} - 1 = \frac{8}{\pi^2} - 1 = -0,189.$$

Thus

$$0,178 \leq -\beta \leq 0,189.$$

From (3,1) is calculated the increased value of moment for $P = 0,5P_1$, i.e. $v_1 = 2$

$$\frac{2 - 0,178}{2 - 1} \frac{l}{4} > M > \frac{2 - 0,189}{2 - 1} \frac{l}{4},$$

$$1,822 \frac{l}{4} > M > 1,811 \frac{l}{4}.$$

Proportional difference between moments computed with β_0 and β_1 resp. is

$$100 \frac{1,822 - 1,811}{1,811} = 0,61 \%$$

i.e. less than 1 per cent.

Critical forces in a bar of constant section increase as squares of integer numbers, i.e.:

$$v_1 = 2; v_2 = 2 \cdot 2^2 = 8; v_3 = 2 \cdot 3^2 = 18; \dots$$

and from (6,3) the increased moment is

$$\begin{aligned} M\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{3l}{\pi^2} \left(\frac{2}{2-1} + \frac{18}{3^2(18-1)} + \frac{50}{5^2(50-1)} + \dots \right) = \\ &= \frac{2l}{\pi^2} \left(\frac{1}{1-0,5} + \frac{1}{3^2-0,5} + \frac{1}{5^2-0,5} + \dots \right) = \\ &= \frac{2l}{\pi^2} \left(2,00000 + 0,11765 + 0,04082 + 0,02062 + 0,01242 + \right. \\ &\quad \left. + 0,00830 + 0,00593 + 0,00445 + 0,00345 + 0,00277 + \right. \\ &\quad \left. + 0,00227 + \dots \right) = \frac{2l}{\pi^2} 2,24142 = 0,4542 l. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Expressions (6,2) and (6,4) show how markedly the increase of higher harmonics slows down, so that their effect may be neglected.

(6,2) and (6,4) give exact value for the multiplying coefficient as

$$\alpha = \frac{0,4542}{0,25} = 1,817$$

showing a proportional difference of

$$100 \frac{1,822 - 1,817}{1,817} = 0,28 \%$$

hence taking β_0 for an exact value β produces an error less than 0,3%.

Multiplying coefficient computed by formula (1,1), is, on the basis of Eq. (5,2):

$$\kappa = 1 + \frac{1}{\nu_1} (1 + \beta_0) = 1 + \frac{1 - 0,178}{2} = 1,411$$

i nstead of 1,817, leading to an error percentage of:

$$- 100 \frac{1,411 - 1,817}{1,817} = 22,3 \%$$

From formula (1,2), the multiplying coefficient will be:

$$\kappa = \frac{2}{2 - 1} = 2,$$

causing an error of

$$100 \frac{2 - 1,817}{1,817} = 10 \%$$

6.2 Determine moment at midspan in the same bar acted upon by end moment $M = 1$ (Fig. 4).

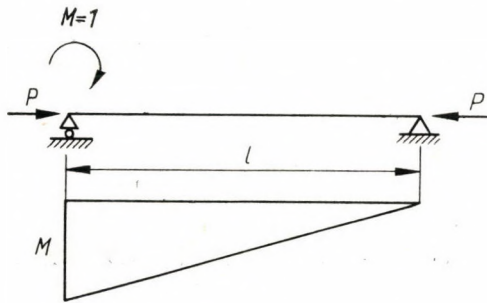


Fig. 4

In this case the moment shape will be quite different from the first buckling shape. Moment developing in the uncompressed beam is

$$M_g(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\sin \frac{2\pi x}{l}}{2} + \dots \right).$$

Moment and deflection at middle are

$$\begin{aligned} M_g\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-1)^k}{2k+1} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}, \\ y_g\left(\frac{l}{2}\right) &= \iint \frac{M}{EI} dx dx = \frac{2l^2}{EI \pi^3} \left[1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots\right] = \\ &= \frac{2l^2}{EI \pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{2l^2}{EI \pi^3} \frac{\pi^3}{2^5} = \frac{l^2}{16 EI}. \end{aligned}$$

(4,4) and (4,7) resp., give

$$\beta_0 = \frac{2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{l^2}{16 EI}}{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0,234,$$

$$\beta_1 = \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{4}{\pi} - 1 = 0,273.$$

Hence, from (4,8)

$$0,234 \leq \beta \leq 0,273.$$

Again, let the compressive force be half the critical force, then assuming $\nu_1 = 2$, and the multiplying coefficient computed with β_0 and β_1 is respectively

$$\kappa_0 = \frac{2 + 0,234}{2 - 1} = 2,234$$

and

$$\kappa_1 = \frac{2 + 0,273}{2 - 1} = 2,273.$$

Difference percentage will again be as low as

$$100 \frac{2,273 - 2,234}{2,234} = 1,75 \%.$$

This coefficient, computed from (1,1), and applying (5,2), will be

$$\kappa = 1 + \frac{1 + \beta_0}{\nu_1} = 1 + \frac{1 + 0,234}{2} = 1,617$$

leading to a difference of

$$100 \frac{2,234 - 1,617}{2,234} = 28,6 \%.$$

Computing with (1,2)

$$\kappa = \frac{2}{2 - 1} = 2,0$$

leading to an error percentage of

$$100 \frac{2,234 - 2,0}{2,234} = 10,5 \%.$$

6.3 Let us determine midspan moment of a beam of horizontal axis, spanning $l = 800$ cm, acted upon by uniformly distributed vertical load $q = 250$ t/m, and by a horizontal central

compressive force $P = 30$ t (Fig. 5). The left-side 300 cm length of the beam is of a rigidity $EI = 4,055 \cdot 10^6$ Mp cm² and the right-side 500 cm length is $EI = 8,632 \cdot 10^6$ Mp cm². This numerical example, giving a numerical result of

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = M(400) = 2,85 M_p m \tag{6,5}$$

has been discussed in references [2] and [3].

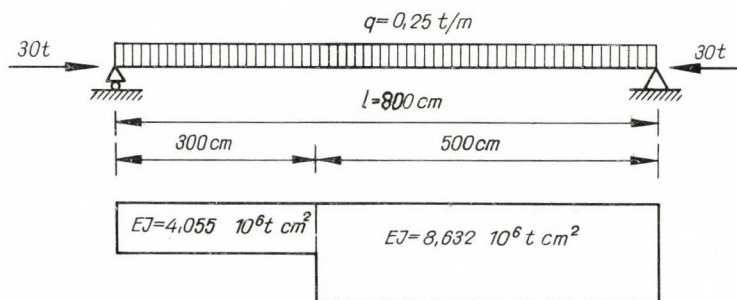


Fig. 5

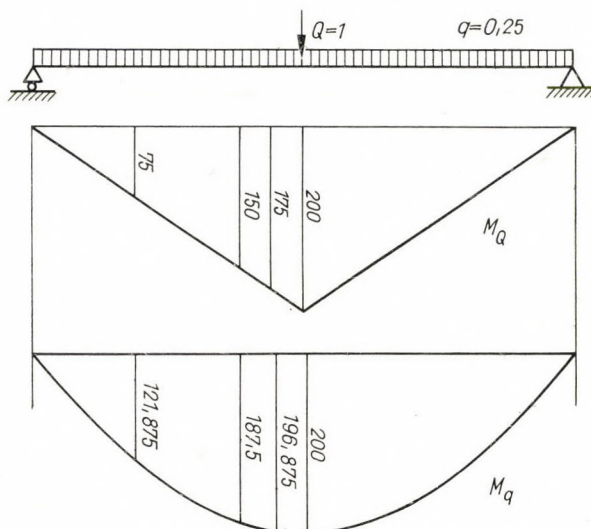


Fig. 6

In the uncompressed bar there is a moment diagram as

$$M_g(x) = \frac{q}{2} x(l-x) = \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2,$$

and in the middle

$$M_g(400) = \frac{q}{2} \frac{l^2}{2} - \frac{q}{2} \frac{l^2}{4} = \frac{ql^2}{8} = \frac{0,25 \cdot 8^2}{8} = 2,0 \text{ Mp m} = 200 \text{ Mp cm}.$$

Deflection at midspan due to a virtual force $Q = 1 \text{ t}$ acting at midspan will be determined by means of principle of virtual works (Fig. 6):

$$M_Q = \frac{Q}{2} x \quad \text{for} \quad x \leq \frac{l}{2},$$

$$M_Q = \frac{Q}{2} (l - x) \quad \text{for} \quad x \geq \frac{l}{2},$$

$$\begin{aligned} y_g(x) &= \int \frac{M_Q \cdot M_g}{EI} dx = \frac{1}{4,055 \cdot 10^6} \int_0^{300} \frac{Q}{2} x \cdot \frac{q}{2} x(l-x) dx + \\ &+ \frac{1}{8,632 \cdot 10^6} \int_{300}^{400} \frac{Q}{2} x \cdot \frac{q}{2} x(l-x) dx + \frac{1}{8,632 \cdot 10^6} \int_{400}^{800} \frac{Q}{2} (l-x) \cdot \frac{q}{2} x(l-x) dx = \\ &= \frac{1}{4,055 \cdot 10^6} 3,2344 \cdot 10^6 + \frac{1}{8,632 \cdot 10^6} (3,4323 \cdot 10^6 + 6,6667 \cdot 10^6) = \\ &= 0,7976 + 1,1699 = 1,968 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Critical force can be determined from equation [4]

$$\frac{c_2}{c_1} \tan c_1 \cdot a_1 + \tan c_2 \cdot a_2 = 0$$

with

$$a_1 = 300 \text{ cm, } a_2 = 500 \text{ cm.}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{P_{cr}}{4,055}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{P_{cr}}{8,632}}, \quad \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{4,055}{8,632}} = 0,6854,$$

$$c_2 a_2 = 0,6854 c_1 a_2 = 0,6854 \frac{500}{300} c_1 a_1 = 1,1423 c_1 a_1,$$

and so

$$0,685 \tan c_1 \cdot a_1 = - \tan 1,1423 c_1 a_1.$$

Its first root will be

$$c_1 a_1 = 1,4851,$$

hence

$$c_1 = 0,495 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

and the first critical force

$$P_1 = c_1^2 \cdot EI = 0,495^2 \cdot 10^{-4} \cdot 4,055 \cdot 10^6 = 0,9752 \cdot 10^2 = 97,52 \text{ Mp.}$$

Thus

$$v_1 = \frac{97,52}{30} = 3,256$$

from (4,4)

$$\beta_0 = 97,52 \frac{1,968}{200} - 1 = 0,9596 - 1 = -0,040.$$

Thereby the increased moment at the middle will be about

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\nu_1 + \beta_0}{\nu_1 - 1} \cdot M_g\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3,256 - 0,040}{3,256 - 1,0} = 2,855 \text{ Mpm}$$

in close agreement with the value at (6,5).

6.4 Determine flexural moments at midspan and at both ends resp., in a beam fixed at both ends, acted upon by a uniformly distributed load (Fig. 7).

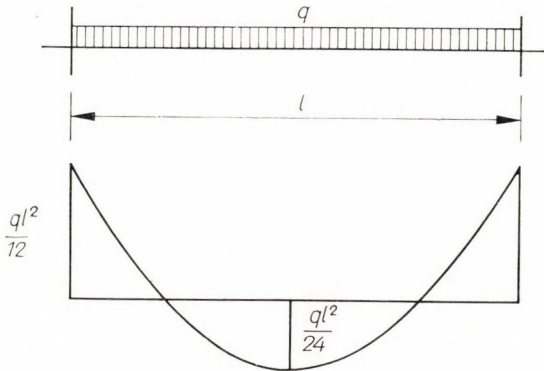


Fig. 7

The flexural moment will be [4]

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{24} \frac{6(\mu - \sin \mu')}{\mu^2 \cdot \sin \mu}$$

and

$$M(0) = -\frac{ql^2}{12} \frac{3(\tan \mu - \mu)}{\mu^2 \cdot \tan \mu}$$

where

$$\mu = \pi \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

For

$$\frac{P_{cr}}{P} = 4, \tag{6,6}$$

$$\mu = \frac{\pi}{2},$$

and

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = 1,388 \frac{ql^2}{24}, \tag{6,7}$$

$$M(0) = -1,216 \frac{ql^2}{12}. \tag{6,8}$$

Moment in the uncompressed bar will be (6)

$$M_g = -\frac{ql^2}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Thus

$$M_g \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{24}, \quad M_g(0) = -\frac{ql^2}{12},$$

$$y_g(x) = \frac{1}{EI} \iint M_g(x) \cdot dx \cdot dx = \frac{l^2}{EI} \frac{ql^2}{12} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} + c_1 x + c_2 \right).$$

Because of symmetry, $c_1 = 0$. If y_g is assumed to be a moment, then

$$\int_0^l \frac{y_g}{EI} dx = 0.$$

Hence

$$\int_0^l \frac{y_g}{EI} dx = \left(\frac{l}{EI} \right)^2 \frac{ql^2}{24} \left(\frac{x^3}{3l^3} - \frac{x^4}{2l^4} + \frac{x^5}{5l^5} + c_2 \cdot x \right)$$

to give

$$c_2 = -\frac{1}{30},$$

thus

$$y_g(0) = -\frac{ql^2}{24} \frac{l^2}{EI} \frac{1}{30} = -\frac{ql^2}{12} \frac{l^2}{EI} \frac{1}{60},$$

$$y_g \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{24} \frac{l^2}{EI} \frac{7}{240},$$

Since

$$P_1 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

$$\beta_0 \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{P_1 \cdot y_g \left(\frac{l}{2} \right)}{M_g \left(\frac{l}{2} \right)} - 1 = \frac{7\pi^2}{60} - 1 = 1,1515 - 1 = 0,1515,$$

$$\beta_0(0) = \frac{P_1 \cdot y_g(0)}{M_g(0)} - 1 = \frac{4\pi^2}{60} - 1 = 0,6580 - 1 = -0,3420,$$

From (6,6)

$$r_1 = \frac{P_1}{P} = 4,$$

and so we obtain

$$\varkappa \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{r_1 + \beta}{r_1 - 1} = \frac{4 + 0,1515}{4 - 1} = 1,384,$$

$$\varkappa(0) = \frac{r_1 + \beta}{r_1 - 1} = \frac{4 - 0,3420}{4 - 1} = 1,219.$$

Comparing these values with (6,7) and (6,8) resp., a difference less than 3% will appear.
For (1,1) there is a multiplying coefficient of

$$\alpha = 1 + \frac{P \cdot y_g}{M_g} = 1 + \frac{1}{\nu_1} \frac{P_1 \cdot y_g}{M_g}.$$

According to (6)

$$y_g(x) = -\frac{ql^2}{24} \frac{l^2}{EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right).$$

At

$$x = \frac{l}{2}, \quad M_g \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{24}, \quad y_g \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{24} \frac{l^2}{EI} \frac{1}{16},$$

$$\alpha \left(\frac{l}{2} \right) = 1 + \frac{1}{4} \frac{\frac{4\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{ql^2}{24} \cdot \frac{l^2}{EI} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{ql^2}{24}} = 1 + \frac{\pi^2}{16} = 1,617,$$

leading to an error of 16,5%.

At $x = 0$ there is $y_g = 0$, hence

$$\alpha(0) = 1 + 0 = 1.$$

There is a deviation of 17,5%.

In the case of (1,2), there is

$$\alpha = \frac{\nu_1}{\nu_1 - 1} = \frac{4}{3} = 1,33$$

leading to an error of 4% and 9,5% resp.

REFERENCES

1. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1949.
2. SZIDAROVSKY, J.: Eine praktische Methode zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten. *Acta Technica Hung.* 24 (1959), Fasc. 1-2.
3. SZIDAROVSKY, J.: Die Beanspruchung von Stäben mit veränderlichem Querschnitt auf Biegung bei gleichzeitigem Druck. *Acta Technica Hung.* 31
4. TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability. Mc Graw-Hill, New York 1936
5. DISHINGER, FR.: Verformung und Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. *Bauingenieur* (1937), 487
6. *Hütte des Ingenieurs Taschenbuch* Vol. I (Auflage 28), Berlin 1955.

EIN PRAKTISCHES VERFAHREN FÜR DIE BESTIMMUNG
DES BIEGEMOMENTS IN EINEM GLEICHZEITIG AUF BIEGUNG UND
DRUCK BEANSPRUCHTEN GERADEN STAB

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Bei einem der praktischen Verfahren für Bestimmung des Moments, welches in einem gleichzeitig auf Biegung und Druck beanspruchten Stab entsteht, wird das Moment für den nicht gedrückten Stab bestimmt, und das Ergebnis wird mit einem Vergrößerungsfaktor multipliziert. Die Richtigkeit des Verfahrens wurde bis jetzt bloß für Stäbe von konstantem Querschnitt bewiesen. Die Arbeit beweist die Richtigkeit dieser Methode für den allgemeinen Fall und empfiehlt für die Bestimmung des Vergrößerungsfaktors ein wesentlich genaueres Berechnungsverfahren.

MÉTHODE PRATIQUE POUR LA DÉTERMINATION DES MOMENTS
FLÉCHISSANTS DE BARRES DROITES SOUMISES A DES
FLEXIONS ET COMPRESSIONS SIMULTANÉES

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

Pour la détermination du moment produit dans une barre soumise à des flexions et à des compressions simultanées, on dispose d'une méthode pratique donnant le moment pour la barre non comprimée et multipliant le résultat obtenu par un facteur de majoration. La justesse de cette méthode n'avait été vérifiée que pour une section constante. L'étude actuelle la démontre également pour un cas général et propose, pour déterminer le facteur de majoration, une méthode de calcul garantissant des résultats bien plus précis.

ПРАКТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ,
ОБРАЗУЮЩИХСЯ В ПОДВЕРГНУТОМ ОДНОВРЕМЕННО ИЗГИБУ И
СЖАТИЮ ПРЯМООСНОМ СТЕРЖНЕ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

Один из практических методов, служащих для определения моментов, образующихся в подвергнутом одновременно изгибу и сжатию стержне, определяет момент для не сжатого стержня и полученный результат умножает на увеличивающий коэффициент. Правильность этого метода доказана лишь для неизменного сечения. Работа дает доказательство для общего случая и предлагает более точную методику расчета увеличивающего коэффициента.

NEW METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE LIMIT BEARING FORCE BY USING THE PROBABILITY CALCULUS

E. MISTÉTH

PLANING INSTITUTE OF HYDRAULIC CONSTRUCTIONS, BUDAPEST

[Manuscript received May 6, 1963]

The value of the ultimate bearing forces to be expected can always be produced by a function-connection. The independent variables are the ultimate stresses and geometric data of the cross section; the most reliable values of same and their mean errors can always be elaborated. With the aid of the theorem referring to the mean error of the function-value, the mean error of the ultimate bearing force to be expected can always be determined. However, the theorem in question should be completed, as for different elements the mean errors might even exceed 20%. Knowing the mean error of the ultimate bearing force and the accepted risk, the lower threshold-value of the former, i.e., the limit bearing force can be computed.

Depending on the joint magnitudes of the direct and the engendered damage the value of the optimum risk might be computed.

The idea that the limit bearing force can also be determined by forming the cross sectional dimensions and constituting the lower threshold-value of the ultimate stress in compliance with the acceptance of the specified risk, then substituting these values into the formula of the ultimate bearing force, is erroneous. The so obtained value does not supply the limit bearing force, but gives, in general, a lower value.

The relation of the mean error of the ultimate bearing force does not merely supply the measure of same but also gives information on those elements, the inaccuracy of which is the source of the mean error.

An economic and appropriate increase of the limit bearing force could be achieved, not so much by the use of better materials but rather by applying more reliable ones.

I. Introduction

When designing an engineering structure, the designed dimensions have to satisfy the following inequality:

$$\varrho (vY_d + \Sigma Y_{\text{con}} + \Sigma n\psi Y_p) \leq Y_L. \quad (1)$$

The left-hand side of the above relation denotes the competent bearing force, while the right-hand side the limit bearing force. As is well-known, the above letter symbols denote:

- Y_d the bearing force computed from dead load,
- Y_{con} the bearing force computed from constant loads,
- Y_p the bearing force computed from occasional loads,
- Y_L the limit bearing force,
- ψ the dynamic factor,
- n the safety factor,
- v the factor of dispersion,
- ϱ the factor of destination.

In the present paper the factors ν and n of the competent bearing force standing on the left-hand side of inequality (1) will not be dealt with, and solely the limit bearing force standing on the right-hand side of same will be determined.

First of all the notion of the limit bearing force is to be explained.

That ultimate bearing force, which in the case of the most disadvantageous grouping of all factors influencing the bearing force might come into being, and *at an afore given probability* might conduce to the collapse of the structure, is called *limit bearing force*.

If there is a possibility, then the best way for the determination of the limit bearing force is testing. In this respect precise specifications can be found in any mathematical or statistical hand-book.

In the case of numerous tests it might be assumed that the measuring results already give a normal distribution and then the average value of the ultimate bearing force is given by the formula:

$$Y_u = \frac{\sum Y_i}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

The mean error or dispersion, respectively, of one measurement is

$$\mu_y = \sqrt{\frac{\sum (Y_u - Y_i)^2}{N - 1}}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

and the lower threshold value being at the same time also the limit bearing force is

$$Y_L = Y_u - m \cdot \mu_y. \quad (4)$$

Letter symbols figuring in formulae (2)–(4) denote:

- Y_u the value of the ultimate bearing force to be expected,
- Y_i one measuring result,
- $N \geq 30$ the number of measurements,
- μ_y the mean error of one measurement,
- Y_L the limit bearing force,
- m the factor depending on the accepted risk.

Risk $1/r$:	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
m :	1,65	2,32	3,09	3,72	4,26	4,75

The degree of risk should be specified by different standards, its magnitude should depend on the total amount of the direct and indirect damage occurring on the collapse of the structure. E.g., in the Soviet Union the lowest risk referring to hydraulic constructions is $4 \cdot 10^{-4}$, the value of m belonging to same is $m = 3,35$ [3].

II. Economically most favourable risk

If the risk were not precisely stipulated, the value of same could be determined by the following, merely economical consideration.

If the reconstructional cost of the structure (structural part) at a risk of $1/r$ is $p(r)$; and Q the damage occurring owing to the failure of the structure (structural part), then the total cost E can be expressed by the relation

$$E = p(r) + \frac{1}{r} [p(r) + Q] + Q.$$

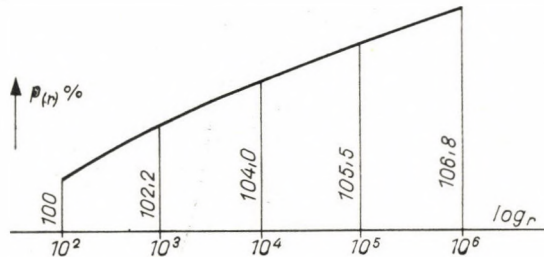


Fig. 1

The minimal cost can only arise at the point, where the value of the first differential quotient of the cost-function according to r equals zero, thus:

$$\frac{dE}{dr} = p'(r) - \frac{1}{r^2} [p(r) + Q] + \frac{1}{r} p'(r).$$

After reduction, multiplication by r^2 and setting equal to zero, the above relation takes the form

$$r^2 p'(r) + rp'(r) - p(r) = Q. \quad (5)$$

The solution of equation (5) gives the most economical risk; as the second differential quotient is negative, the extreme value is minimum.

r is generally greater than 100, consequently, the value of term r can be disregarded beside that of r^2 . In this case

$$r \cong \sqrt{\frac{p(r) + Q}{p'(r)}}. \quad (5a)$$

Assuming that the percentile increase of $p(r)$ complies with that shown in Fig. 1, relations

$$p(r) = V(c_0 + c \log r)$$

and

$$p'(r) = V \frac{c_1 \cdot \log e}{r}$$

hold with good approximation. Here V is the value of the structure at a risk of 10^{-2} , c_0 and c_1 are constants, the values of which depend on the structure itself and on internal forces which are the basis of dimensioning. (E.g., in the case shown in Fig. 1 $c_0 = 0,96$, $c_1 = 0,02$)

Replacing the above expressions into equation (5) the equation

$$r = \frac{\log r}{\log e} = \frac{Q}{V} \cdot \frac{1}{c_1 \cdot \log e} + c_0 \frac{1}{c_1 \cdot \log e} - 1$$

holds.

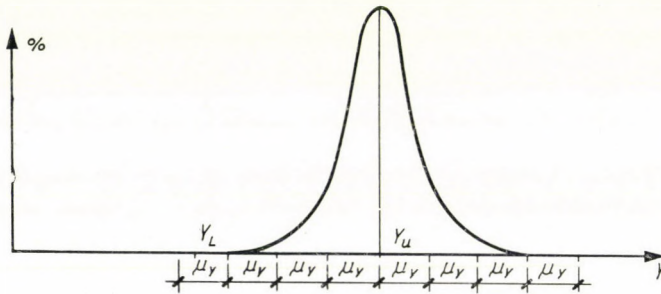


Fig. 2

The value of the above equation varies, as a rule, between 100 and 1000, thus

$$\frac{\log r}{\log e} \sim 6.$$

If the value of c_0 is taken as being 0,95, then with good approximation for r the relation

$$r = \frac{2,31}{c_1} \left(\frac{Q}{V} + 1 \right) \quad (5b)$$

is obtained. The value of r_{\max} which can be computed from equation (5b) is

$$r_{\max} \simeq 1000.$$

In the Probability Calculus [7] those occurrences, the probability of which is smaller than $0,00135 = 1/740$ are regarded as to be practically impossible. The factor m belonging to same is $m = 3$, from here issues the establishment of the Theory of Errors that the maximal error is 3μ , consequently the threefold of the mean error.

The well-known bell-curve is to be seen in Fig. 2. The measuring results are plotted on the abscissa, while the percentile frequency of measuring results is plotted on the ordinate. In the cases in question this bell-curve is only exceptionally symmetric, because it does not contain, in general, the disadvantageous values belonging to materials (structures) which has not been accepted.

III. The mean error of the ultimate bearing force

However, the aforementioned direct test series referring to the ultimate bearing force can be carried out very rarely, and merely with manufactured precast members. Indirect tests, on the other hand, are not only possible, but a great number of tests of this kind had already been carried out so far. The ultimate bearing force is, in general, always computable, the value of same depends on the ultimate stress and the dimensions of the cross section. The value of the ultimate bearing force to be expected should be

$$Y_u = G(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6)$$

where x_1, x_2, \dots, x_n are variable quantities determining the ultimate bearing force. The most reliable values l_1, l_2, \dots, l_n of same and the mean errors $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ of the latter should be given.

Referring to the quantity x_i the most reliable values l_i and the mean errors μ_i of the latter can be determined on the base of measurements carried out on hitherto finished structures. This had already been done by Dr. Imre KORÁNYI referring to the yield point, ultimate tensional strength and elongation of steel A 36.24. The elaboration of the same data referring to structural steels having other strength is also in progress.

In addition, on the base of tests carried out up till now, the ultimate strength, the lower and upper limit of the ultimate elongation belonging to concretes of different qualities should also be determined, as well as the ultimate strength, yield point and ultimate elongation of different steels used for reinforcement and stressing wires. Thereafter, the establishment of the stress-elongation diagram $f = f(\epsilon)$ pertaining to both materials will be possible.

Simultaneously to the elaboration of tests, the mean errors of the quantities in question can also be determined. Until the measuring results have not yet been elaborated, instead of mean errors referring to the dimensions the tolerances of same might also be taken into consideration. Namely, the tolerance is always greater than the mean error, i.e.,

$$\mu < t \quad (7)$$

This follows from the nature of the tolerance, because if the tolerance is not observed, the acceptance of the respective dimension or material has to be

refused. The same measurements have to be carried out referring to timber, stones and bricks as building materials, furthermore, in respect to soils, too.

The following conditions should be assumed:

a) The function Y_u given in (6) is continuous and can be differentiated, and the differential quotients of same are also continuous.

b) The most reliable values l_1, l_2, \dots, l_n of quantities x_1, x_2, \dots, x_n constituting the ultimate bearing force are independent of each other, as well as the measuring errors of same.

c) The measuring results contain only irregular errors, the mean value of which equals zero, i.e., if the value of one error is ε_i , then $\sum \varepsilon_i = 0$.

d) The errors of quantities x_1, x_2, \dots, x_n give a normal distribution, i.e., $\sum \varepsilon_i^{(2n+1)} = 0$, and $\overline{\varepsilon_i^4} = 3\mu_i^4$.

e) The mean errors $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ are small, thus the higher powers of same can be neglected.

f) The investigation refers to the failure of structures, thus in the case of statically determined structures an uninterrupted cross section must fail, not only a part of same, e.g., a current meter.

g) In the case of statically redundant structures the failure of same is inseparable from the simultaneous failure of more than one cross section (plasticity).

As the investigation refers to the state immediately before failure, condition g) should always be taken into account. E.g., in the intermediate field of a continuous beam three cross sections must fail so as to cause the collapse of the beam.

If conditions a)–g) are satisfied, then the mean error Y_u of the ultimate bearing force is given by the following equation:

$$\mu_y^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ (G_i \mu_i)^2 + \frac{3}{4} (G_{ii} \mu_i^2)^2 + (G_{ij} \mu_i \mu_j)^2 + G_{ii} G_{jj} \mu_i^2 \mu_j^2 \right\} \quad (8)$$

where

$$G_i = \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad \begin{array}{l} x_1 = l_1 \\ x_2 = l_2 \\ \dots \\ x_n = l_n \end{array} \quad i \neq j$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$G_{ii} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} \quad \begin{array}{l} x_1 = l_1 \\ x_2 = l_2 \\ \dots \\ x_n = l_n \end{array}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \quad \begin{array}{l} x_1 = l_1 \\ x_2 = l_2 \\ \dots \\ x_n = l_n \end{array}$$

$$i \neq j$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

If the mean errors μ_i are smaller than 20%, then the second, third and fourth term of relation (8) can be neglected. The first term is the formula used in geodesy, which is well-known under the name, the mean error of the function-value [4].

The determination of the second, third and fourth term can be achieved in such a way that on deducing the mean error of the function-value the second term of the Taylor-series is also taken into consideration.

The proof of relation (8):

The most reliable values of the independent variables of function $Y_u = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ should be l_1, l_2, \dots, l_n and the mean errors of the latter $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$; the value of the function should be L_u , the errors made in one measurement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. If ε_y is the error which occurred when determining the value of the function, then

$$L_u + \varepsilon_y = G(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \dots, l_n + \varepsilon_n), \quad (6a)$$

Expanding function Y_u at $x_i = l_i$ into a Taylor-series:

$$\begin{aligned} L_u + \varepsilon_y = & G(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial G}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial G}{\partial x_n} \varepsilon_n + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} \varepsilon_1^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} \varepsilon_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 G}{\partial x_n^2} \varepsilon_n^2 \right] + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \\ & + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_3} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \dots + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_n} \varepsilon_1 \varepsilon_n + \dots + \frac{\partial^2 G}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n + M. \end{aligned} \quad (6b)$$

If condition e) is satisfied, $M = 0$.

Using notations introduced previously

$$\varepsilon_y = \sum_{i=1}^n G_i \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_{ii} \varepsilon_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^n G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + \dots \quad (7a)$$

Turning from ε_y to the mean error, $\mu_y^2 = \bar{\varepsilon}_y^2$ and $\mu_i^2 = \bar{\varepsilon}_i^2$:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_y^2 = & \sum_{i=1}^n G_i^2 \bar{\varepsilon}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n G_i G_j \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n G_{ii}^2 \bar{\varepsilon}_i^4 + \\ & + \sum_{j=1}^n G_j G_{ii} \bar{\varepsilon}_j \bar{\varepsilon}_i^2 + \sum_{i=1}^n G_{ii} G_{jj} \bar{\varepsilon}_i^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \sum_{i=1}^n G_{ij}^2 \bar{\varepsilon}_i^2 \bar{\varepsilon}_j^2 + \\ & + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^n G_k G_{ij} \bar{\varepsilon}_k \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^n G_{kk} G_{ij} \bar{\varepsilon}_k^2 \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j + \\ & + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1 \\ h=1}}^n G_{ij} G_{kh} \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j \bar{\varepsilon}_k \bar{\varepsilon}_h + \dots \end{aligned} \quad (7b)$$

The previous relation was set up by applying the conditions 1. the mean value of a sum is equal to the sum of the mean values of the addable sums, 2. the mean value of a product is equal to the product of the mean values of its factors — provided the factors are independent of each other.

Satisfying conditions c) and d):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n G_i G_j \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j &= 0, \\ \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n G_j G_{ii} \bar{\varepsilon}_j \bar{\varepsilon}_i^2 &= 0, \\ \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^n G_k G_{ij} \bar{\varepsilon}_k \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j &= 0, \\ \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1}}^n G_{kk} G_{ij} \bar{\varepsilon}_k^2 \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j &= 0, \\ \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ k=1 \\ h=1}}^n G_{ij} G_{kh} \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j \bar{\varepsilon}_k \bar{\varepsilon}_h &= 0. \end{aligned}$$

Satisfying condition d):

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n G_{ii}^2 \bar{\varepsilon}_i^4 = \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n G_{ii}^2 \mu_i^4,$$

thus, relation (7b) takes the form

$$\mu_y^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ [G_i \mu_i]^2 + \frac{3}{4} [G_{ii} \mu_i^2]^2 + G_{ii} G_{jj} \mu_i^2 \mu_j^2 + [G_{ij} \mu_i \mu_j]^2 \right\},$$

or

$$\mu_y^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ [G_i \mu_i]^2 + G_{ij} G_{ij} \mu_i^2 \mu_j^2 - \left[G_{ii} \frac{\mu_i^2}{2} \right]^2 \right\}. \quad (8)$$

Relation (8) does not give only the magnitude of the mean error pertaining to the ultimate bearing force, but also gives information on those elements the inaccuracy of which is the source of the mean error, thus, which structural element or part of the structure should be carried out more carefully.

Formulae (3), (6) and (8) clearly indicate that the increase of the limit bearing force can be achieved not only by using better materials, but it is far more desirable to lessen the values of μ_y , i.e., to use more reliable materials. G. KAZINCZY was the first, who applied the theorem of the mean error of the function value for determining safety.

IV. Application to a poststressed concrete structure

— The following principal establishments will be elucidated by a number of numerical examples referring to various already finished structures. First the precast poststressed girders of the road bridge over the inundation area of the river Tisza at Szolnok, will be investigated. In the cross section of the bridge in question eight girders were placed, these can be seen in Fig. 3.

The bridge consists of 15 fields, each spanning 15,70 m. If the specified risk of the bridge in question is 10^{-4} , then the risk referring to one field consisting of eight simply supported girders is $10^{-4}/15$, because the 8 girders in the transversal direction are stressed to each other, thus, they have to be treated as an integrated cross section. For the same reason the limit moment of the cross section shown in Fig. 3 should also be computed on the base of a risk $10^{-4}/15$, the coefficient m belonging to this risk is $m = 4,36$.

The values taken over from the statical calculation of the bridge are the following:

Competent moment $M_{com} = 209,3$ Mpm,

moment without taking increasing factors into consideration $M = 151,6$ Mpm.

The limit moment computed on the base of the Hungarian Code of Road Bridges is $M_L = 206,5$ Mpm. The two test girders failed at a moment of 400 and 440 Mpm, respectively, the moment $M_{gra} = 250$ Mpm causing the cracking of the girder, was also greater than the limit moment. In the case of one of the two test girders it was also established that in spite of a not quite perfectly successful injecting of the cable casings, at failure the girder behaved in the same way as a prestressed girder with a reinforcement bound to the concrete. From the view-point of the ultimate moment foreign Codes do not make any difference between pre- and poststressed girders.

The limit moment of the girder the cross section of which is shown in Fig. 3 should be determined by the afore-described method. It should be assumed that *Bernoulli-Navier's* hypothesis is valid, i.e., that at failure the cross sections also remain plane (Fig. 4).

According to the Fig.:

$$\frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_c} = \frac{h' - x}{x}, \quad \varepsilon_s = \varepsilon''_s + \varepsilon_c \left(\frac{h'}{x} - 1 \right), \quad \varepsilon''_s = \frac{f_{re}}{E_s} \quad (9)$$

f_{re} is the stress which remains after stressing.

Fig. 5 shows the diagram $f_s = f(\varepsilon_s)$ of the steel wire 150 · 50 KBX, while Fig. 6 the diagram $f_c = g(\varepsilon_c)$ of the concrete C. 400.

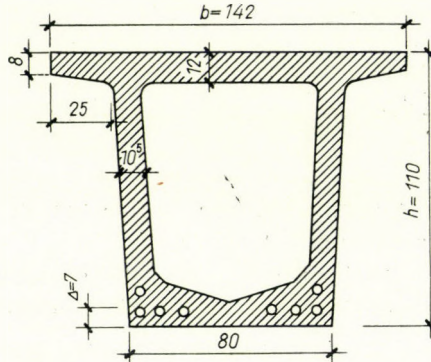


Fig. 3

The stressing wires are made of steel 150,50 KBX
 The area of the reinforcement is $A_s = 28,22 \text{ cm}^2$
 The quality of the concrete is C 400
 The useful depth of the girder is $h' = h - \Delta = 103 \text{ cm}$

According to Fig. 5:

$$\begin{aligned} f_{s1} &= E' \cdot \varepsilon_s \text{ Mp/cm}^2 \text{ if } \varepsilon_s \leq 8^0/_{00}, \\ f_{s2} &= A + a \cdot \varepsilon_s \text{ Mp/cm}^2 \text{ if } 8 \leq \varepsilon_s \leq 32^0/_{00}, \\ f_{s3} &= f_u \text{ Mp/cm}^2 \text{ if } \varepsilon_s > 32^0/_{00} \end{aligned} \quad (10)$$

(f_u denotes the ultimate stress.)

Thus, the diagram $f_s = f(\varepsilon_s)$ is approached by three straight lines. In the present case $A = 10,2$, $a = 0,15$, $E' = 1,425$ and $f_u = 15,0$, all expressed in Mp/cm^2 .

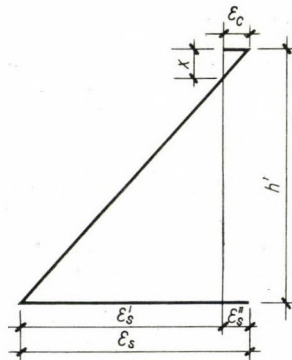


Fig. 4

The diagram $f_c = f(\varepsilon_c)$ was plotted according to JÄGER [2]. The first section of the diagram presented in Fig. 6 is assumed to be a parabola of the third order, while the second section is a horizontal straight line, this representing the section of the plastic compression of concrete. In reminiscence of steels, this section with increasing strength shows a decreasing tendency.

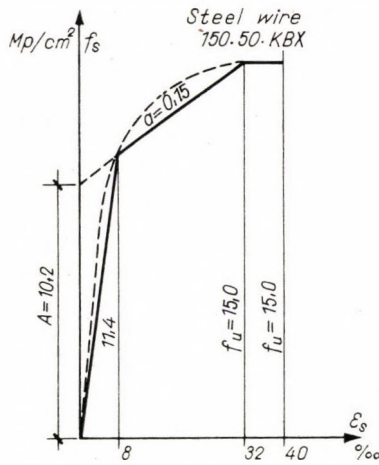


Fig. 5

Transforming Jäger's formulae:

$$\begin{aligned} \epsilon_c &= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{f_c}}, \\ \kappa &= \frac{\epsilon'_c}{\epsilon_c} = 2 f_c. \end{aligned} \tag{11}$$

In the present case $\epsilon_0 = 2$.

According to the Hungarian Standard MSZ 4715 the prism-strength referring to concrete is

$$f_{cp} = \frac{3}{4} f_c.$$

In compliance with the diagram $f_c = g(\epsilon_c)$, the stress distribution developing in the concrete at the very moment of failure consists of a constant section and another shaped according to a parabola of the third order.

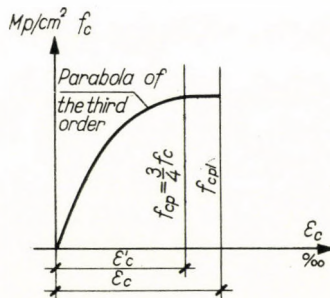


Fig. 6

The compressive force developing in the concrete is (Fig. 7):

$$N = N' + N'' = \frac{3}{4} f_c \cdot b x (1 - 0,5 f_c).$$

The distance of the compressive force from the compressed edge is

$$y = \frac{0,2 f_c^2 - 0,5 f_c + 0,5}{1 - 0,5 f_c}.$$

The tensional force developing in the cables is:

$$H = A_s \left\{ A + a \left[\varepsilon_s'' + \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{f_c}} \left(\frac{h'}{x} - 1 \right) \right] \right\}.$$

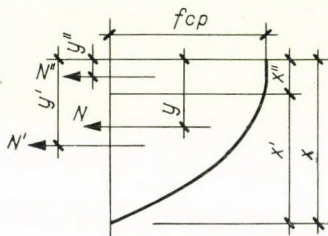


Fig. 7

The above relation is based on the assumption that the ultimate elongation of steel is $8 \leq \varepsilon_s \leq 32$. If the elongation of steel depending on its percentage is $\varepsilon_s \leq 8$ or $\varepsilon_s \leq 32$, respectively, then the values of the tensional force to be taken into consideration are

$$H' = A_s E' \left[\varepsilon_s'' + \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{f_c}} \left(\frac{h'}{x} - 1 \right) \right]$$

or

$$H'' = A_s f_{su},$$

respectively. The percentages of steel can be computed in advance, but the present paper does not wish to deal with this question.

On the base of what has been said the ultimate moment can be determined from the following formula:

$$\left. \begin{aligned} M_u &= \frac{A_s h'}{2} (B + \sqrt{B^2 + C}) - \frac{A_s^2 f(f_c)}{b} \left(B^2 + \frac{C}{2} + B \sqrt{B^2 + C} \right) \\ \text{where} \quad B &= A + a \left(\varepsilon_s'' - \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{f_c}} \right), \\ C &= \frac{3 \varepsilon_0 a b h \sqrt{f_c} (1 - 0,5 f_c)}{A_s}, \\ f(f_c) &= \frac{2 (0,2 f_c^2 - 0,5 f_c + 0,5)}{3 f_c (1 - 0,5 f_c)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

The rather complicated relation (12) of the ultimate moment is essentially nothing else but MÖRSCH'S ultimate moment. In the case of the bridge over the inundation area of the

river Tisza at Szolnok the elements constituting the ultimate moment and the mean errors belonging to same are the following:

d	= 0,5	cm	μ_d	= 0,005	Hung. Stand. MSZ 5720
n	= 144	items	μ_n	= 2	
A	= 10,2	Mp/cm ²	μ_A	= 0,3	
a	= 0,15	Mp/cm ²	μ_a	= 0,03	
ε_s''	= 3,9	⁰ / ₁₀₀	$\mu_{\varepsilon_s''}$	= 0,2	
h	= 110	cm	μ_h	= 1,4	Hung. Code of Road Bridges Chapter K
Δ	= 7	cm	μ_{Δ}	= 1,0	" " J
b	= 142	cm	μ_b	= 1,6	" " K
f_c	= 0,4	Mp/cm ²	μ_{f_c}	= 0,06	Hung. Stand. MSZ 4715
ε_0	= 2	⁰ / ₁₀	μ_{ε_0}	= 0,2	

From the above 10 variables four can be unified into 2:

$$\text{from } n \text{ and } dA_s = n \frac{3 \cdot 14 \cdot d^2}{4} = 28,22 \text{ cm}^2 \quad \mu_{A_s} = 0,686$$

$$\text{from } h \text{ and } \Delta h' = h - \Delta = 103 \text{ cm} \quad \mu_{h'} = 1,72$$

The mean errors belonging to the above 8 variables were taken either as being identical with tolerances given in the Codes, or they are assumed values. It was also assumed that from the 144 wires to be placed into the 8 cables, by chance the slipping in of two items were forgotten. A onefold mean error of values A and a might cause a decrease of the ultimate strength by 1,26 Mp/cm².

On the base of the above data the numerical values are the following. The value of the ultimate moment to be expected is $M_p = 39\,900$ Mpcm. This value is smaller than that computed on the base of the actually measured strength data of stressing wires used for the test girders of the bridge over the inundation area at Szolnok. This computation made by the Second Department of Bridge Construction of the Technical University of Architecture, Building, Civil and Transport Engineering in Budapest, gave for the ultimate moment the value of 42 000 Mpcm.

The squares of mean errors computed on the base of formula (8) taking only the first term into consideration are compiled in the following table.

Thus, the limit moment is even greater by 3% than that computed according to the Hungarian Standard MSZ 15 026 valid for prestressed structures.

A good view on the magnitude of the second, third and fourth terms figuring in formula (8) could be obtained by constituting that part of those members of the mean error which appear in the greatest percentage and are to be found in the second, third and fourth terms of formula (8):

$$\frac{3}{4} \left[\frac{\partial^2 M_u}{\partial a^2} \mu_a^2 \right]^2 = 13\,590,$$

$$\frac{3}{4} \left[\frac{\partial^2 M_u}{\partial (h')^2} \mu_{h'}^2 \right]^2 = 14,$$

$$\left[\frac{\partial^2 M_u}{\partial h' \partial a} \mu_{h'} \mu_a \right]^2 = 2385.$$

As can be seen the 64 expressions figuring in the second, third and fourth terms of formula (8) amount to $64 \cdot 2000 = 128\,000$, this increases the square of the above mean error at most by 2,2%, while the amount of the mean error itself by not more than ~1%. Accepting the limit moment of 295 Mpm the girder in question would even be adequate to bridge a span of 19,0 m.

Lessening the cube strength of the concrete to C 280, the ultimate moment will be $M_u = 379,4$ Mmp, while the mean error $\mu_L = 22,00$ Mpm and the limit moment $M_L = 283,4$ Mpm.

Table of Mean Errors

$\frac{\partial M_u}{\partial x_i}$		μ_i	$\left(\frac{\partial M_u}{\partial x_i} \mu_i\right)^2$	%	
$\frac{\partial M_u}{\partial A_s}$	1042	0,686	510 000	9,20	} 69,20
$\frac{\partial M_u}{\partial A}$	2045	0,30	376 000	6,78	
$\frac{\partial M_u}{\partial a}$	57384	0,03	2 950 000	53,15	
$\frac{M_u}{\partial \varepsilon_s'}$	307	0,20	3 800	0,07	
$\frac{\partial M_u}{\partial f_c}$	11026	0,06	436 000	7,88	} 17,68
$\frac{\partial M_u}{\partial \varepsilon_0}$	3687	0,20	544 000	9,80	
$\frac{\partial M_u}{\partial h'}$	491	1,72	715 000	12,80	} 13,12
$\frac{\partial M_u}{\partial b}$	73	1,60	13 600	0,32	
			5 548 400	100,00	100,00

$\mu_M = \sqrt{5\,548\,400} = 2355 \text{ Mpcm}$
 $M_L = 397,7 - 4,36 \cdot 23,55 = 295 \text{ Mpm}$

V. Application to a manufactured prestressed structure

The following example refers to the investigation of a manufactured prestressed concrete flooring plank, the cross section of which can be seen in Fig. 8. The cost of the flooring plank in question amounts, at a risk of 10^{-2} to 1470 Ft, while at a risk of 10^{-3} to 1502 Ft. The failure of a plank is followed by an expense of 10 000 Ft.

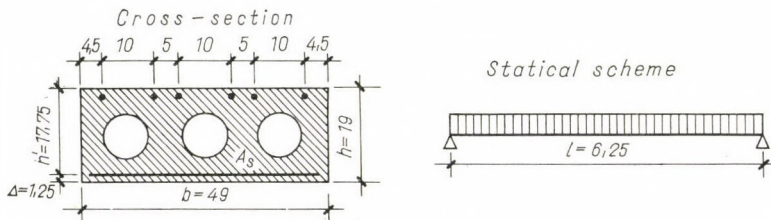


Fig. 8

The floor of the storehouse is designed to bear a load of $2,0 \text{ Mp/m}^2$, the competent moment belonging to same is $M_{com} = 7,10 \text{ Mpm}$. The structure was designed to be made of concrete C 400, the quality of the steel wires is $150 \cdot 50 \text{ KB}$, the area of the bottom wires is $A_s = 24 \varnothing 5 = 4,70 \text{ cm}^2$, that of the top ones is $A'_s = 7 \varnothing 5 = 1,37 \text{ cm}^2$. The limit moment according to the Hungarian Standard MSZ 15 026 $M_L = 7,30 \text{ Mpm}$.

According to formula (5a):

$$p(r) = \frac{1470 + 1502}{2} = 1486 \text{ Ft},$$

$$p'(r) = \frac{1502 - 1470}{900} = \frac{1}{28,1},$$

$$Q = 10\,000 \text{ Ft},$$

$$r = \sqrt{\frac{1486 + 10\,000}{28,1}} = 568,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{568} = 1,77 \cdot 10^{-3}.$$

The value m pertaining to the most favourable risk of $1,77 \cdot 10^{-3}$ is $m = 2,92$.

The ultimate moment can be determined on the base of formula (12), the value of same is $M_u = 8,905 \text{ Mpm}$. The computed mean error of the ultimate moment is $\mu_u = 0,585 \text{ Mp}$. Herefrom the limit moment:

$$M_L = 8,905 - 2,92 \cdot 0,585 = 7,095 \text{ Mpm}.$$

VI. Application to a reinforced concrete cantilever

The third example refers to the investigation of an insitu made reinforced concrete balcony-cantilever. (Protrusion $L = 1,15 \text{ m}$, span $l = 1,05 \cdot 1,15 = 1,21 \text{ m}$). The cross section is presented in Fig. 9. The specified risk should be 10^{-3} .

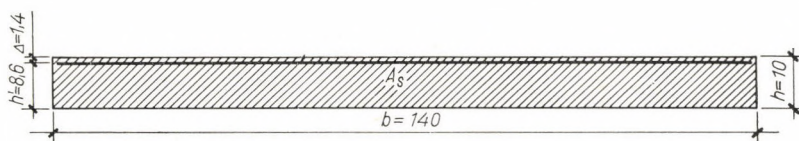


Fig. 9

The competent load is given by the following data:

$$g = 1,10 \cdot 0,35 = 0,385 \text{ Mp/m}^2, \quad p = 1,30 \cdot 0,40 = 0,52 \text{ Mp/m}^2,$$

$$M_{com} = (0,385 + 0,52) \cdot 1,40 \cdot 1,21^2/2 = 0,924 \text{ Mpm}.$$

The strength data of the structure are: concrete C 140, round steel B 60,40 $\cdot A_s = 13 \varnothing 8 = 6,50 \text{ cm}^2$. The uncertainty in placing of the reinforcement is now taken into consideration only with a third of the specified tolerance because otherwise the value obtained for the limit moment would be quite impossible, thus $\mu = 2,0/3 = 0,7 \text{ cm}$.

The ultimate moment can be computed on the base of formula (12), merely the auxiliary quantity B is somewhat different, namely

$$B = A - \frac{\varepsilon_0 \cdot a}{\sqrt{f_c}}$$

The $f_s = f(\varepsilon_s)$ diagram belonging to the used steel bars is given in Fig. 10. The elements constituting the ultimate moment and the mean errors belonging to same are:

$$d = 0,8 \text{ cm and } \mu_d = 0,05, \text{ herefrom } \mu_s = 0,82,$$

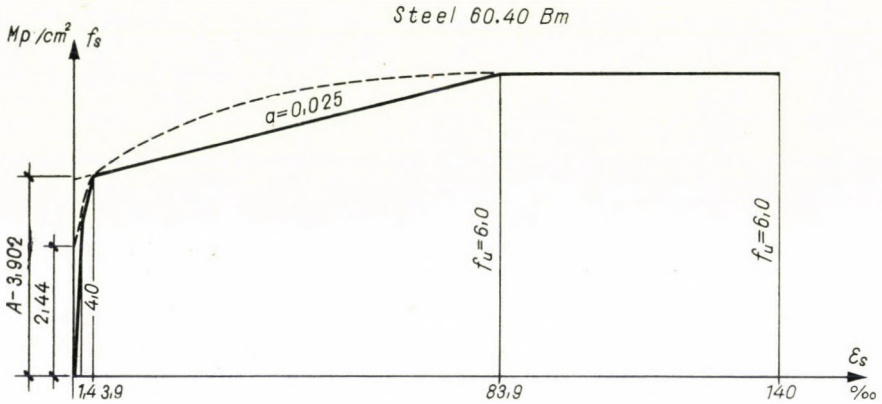


Fig. 10

furthermore,

$A_s = 6,50 \text{ cm}^2$	$\mu_s = 0,82$	
$A = 3,902 \text{ Mp/cm}^2$	$\mu_A = 0,3$	
$a = 0,025 \text{ Mp/cm}^2$	$\mu_a = 0,005$	
$f_c = 0,140 \text{ Mp/cm}^2$	$\mu_{f_c} = 0,025$	
$\varepsilon_0 = 2\text{‰}$	$\mu_{\varepsilon_0} = 0,2$	
$h = 10 \text{ cm}$	} $h' = 8,6 \text{ cm}$ $\mu_{h'} = 0,7$ } $\mu_{h'} = 0,99$	
$\Delta = 1,4 \text{ cm}$		$\mu_{\Delta} = 0,7$
$b = 140 \text{ cm}$		$\mu_b = 1,63$

On the base of the above 7 variables the value of the ultimate moment is $M_u = 2,154 \text{ Mpm}$.

$$\mu_M^2 = 1607,0$$

$$\mu_M = \sqrt{1607,0} = 0,401 \text{ Mpm}$$

$$M_L = 2,154 - 3,09 \cdot 0,401 = 0,915 \text{ Mpm} = 91,5 \text{ Mpcm}$$

According to the Hungarian Standard MSZ 15 022:

$$M_L = 6,5 \cdot 3,2 \left(6,6 - \frac{1,49}{2} \right) = 122,0 \text{ Mpcm}$$

As can be seen the latter value is by 34% greater than that computed according to the here presented method.

This means that the design according to the at present valid Standard conduces to an underdimensioning. This might be one of the very reasons why so many collapsed balconies are to be found in Budapest. The here presented dimensioning method implies a risk of not more than 1%.

Table of Mean Errors

$\frac{\partial M_u}{\partial x_i}$		μ_i	$\left[\frac{\partial M_u}{\partial x_i} \mu_i \right]^2$	%	
$\frac{\partial M_u}{\partial A_s} =$	27,10	0,82	494,0	30,74	} 39,75
$\frac{\partial M_u}{\partial A} =$	38,66	0,3	134,0	8,34	
$\frac{\partial M_u}{\partial a} =$	653,0	0,005	10,7	0,67	
$\frac{\partial M_u}{\partial f_c} =$	276,0	0,025	47,5	2,95	} 3,12
$\frac{\partial M_u}{\partial \varepsilon_0} =$	8,2	0,2	2,7	0,17	
$\frac{\partial M_u}{\partial h'} =$	30,6	0,99	917,7	57,11	} 57,13
$\frac{\partial M_u}{\partial b} =$	0,35	1,63	0,4	0,02	
Sum			1607,0	100,00	100,00

VII. Application to steel structures

In the fourth example continuous steel beams having 10 fields are to be investigated. The first structure made of steel A 37.12 (F 22) S should be a crane-track girder of a machine house, the second made of steel 36.24. S a stringer of a railway-bridge (Fig. 11).

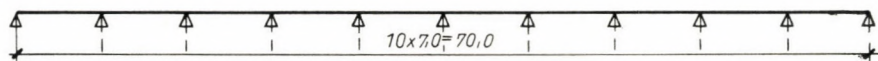


Fig. 11

The risk referring to the structure should be 10^{-3} , smaller than for reinforced concrete girders, because in a steel girder stresses higher than the yield point might also develop, as a steel girder does not even then fail if subjected to the yield stress.

Assuming that the cross section in the field is independent of that at the support, then the probability of failure referring to a cross section lying in the outermost field is $(2/2,2) \cdot 10^{-3} = 0,5 \cdot 10^{-3}$. The same referring to a cross section lying in one of the intermediate fields is $(3/2,8) \cdot 10^{-3} = 0,188 \cdot 10^{-3}$, while the value of the factor m belonging to this risk is $m = 3,56$.

Furthermore, it should also be assumed that the steel stress developing in the outermost fibre of the web of the cross section reaches the lower threshold-value of the yield point, thus the flange plate is subjected to a stress corresponding to the yield point.

The value of the ultimate moment is:

$$M_u = f_y \cdot b \cdot v(h + v) + \alpha \cdot f_y \cdot h^2 g \quad (13)$$

In the case of the crane-track girder in a machine house corrosion is not taken into consideration, because the girder is located in a roofed room. The mean error referring to the dimension of the profile is taken as being equal to the dimensional tolerance, which assumption serves the benefit of safety. The yield point is assumed as to be equal to the warranted value of same, i.e., $f_y = 2,2 \text{ Mp/cm}^2$ with a mean error of $\mu_{f_y} = 0,15 \text{ Mp/cm}^2$.

The geometrical dimensions and strength characteristics of the profile in question are the following (Fig. 12):

$$\begin{aligned} h &= 70 \text{ cm} & \mu_h &= 0,7 \\ g &= 1,2 \text{ cm} & \mu_g &= 0,06 \\ b &= 25 \text{ cm} & \mu_b &= 0,4 \\ v &= 2 \text{ cm} & \mu_v &= 0,1 \\ \alpha &= 0,23 & \mu_\alpha &= 0,02 \\ f_y &= 2,2 \text{ Mp/cm}^2 & \mu_{f_y} &= 0,15 \\ M_u &= 108,9 \text{ Mpm} \end{aligned}$$

Table of Mean Errors

$\frac{\partial M_u}{\partial x_i}$			μ_i	$\left(\frac{\partial M_u}{\partial x_i} \cdot \mu_i\right)^2$		%
$\frac{\partial M_u}{\partial f_y}$	$\frac{M_u}{f_y}$	4950	0,15	551 000	65,50	73,42
$\frac{\partial M_u}{\partial \alpha}$	$f_y h^2 g$	12930	0,02	66 500	7,92	
$\frac{\partial M_u}{\partial h}$	$f_y(bv + 2agh)$	195,3	0,70	18 700	2,23	26,58
$\frac{\partial M_u}{\partial g}$	$f_y a h^2$	2480	0,06	22 150	2,64	
$\frac{\partial M_u}{\partial b}$	$f_y v(h + v)$	317	0,40	16 050	1,91	
$\frac{\partial M_u}{\partial v}$	$f_y b(h + 2v)$	4070	0,10	166 100	19,80	
				840 500	100,00	100,00

$$\mu_M = \sqrt{840 500} = 917 \text{ Mpcm}$$

$$M_u = 108,9 - 3,56 \cdot 9,17 = 76,3 \text{ Mpm}$$

The computed section modulus is $K = 4430 \text{ cm}^3$, while the stress computed from the limit bearing force is $f = 7630/4430 = 1,725 \text{ Mp/cm}^2$.

As can be seen the assumed value of the limit stress, i.e., $f_L = 1950 \text{ Kp/cm}^2$ does not conduce to satisfactory dimensions. The mean error of the ultimate moment computed on the base of the dimensional tolerance of the profile has an effect of 26,58%.

Thereafter, the structure having the same scheme should be assumed as being the stringer of a railway-bridge made of steel 36,24 S.

According to KORÁNYI's data [5] referring to the material manufactured before 1948:

$$f_y = 2,805 \text{ Mp/cm}^2, \quad \mu_f = 0,175.$$

The lack of maintenance is taken into consideration by assuming a corrosion which is

equal to the dimensional tolerance of the profile.

The value of the ultimate moment to be expected is $M_u = 138,8$ Mpm.

The stress determined on the base of the computed section modulus ($K = 4430$ cm³) is $f = 2,125$ Mp/cm².

According to KORÁNYI's data [6] referring to materials manufactured after 1948

$$f_y = 2,868 \text{ Mp/cm}^2, \quad \mu_f = 0,260 .$$

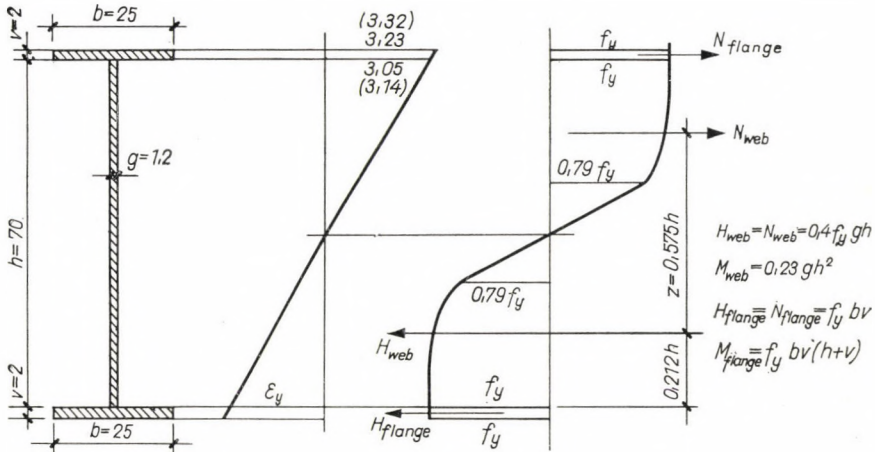


Fig. 12

Table of Mean Errors

$\frac{\partial M_u}{\partial x_i}$			$\left[\frac{\partial M_u}{\partial x_i} \mu_i \right]^2$	%	
$\frac{\partial M_u}{\partial f_y}$	4950	0,175	747 000	47,29	} 54,12
$\frac{\partial M_u}{\partial \alpha}$	16500	0,02	108 000	6,83	
$\frac{\partial M_u}{\partial g}$	3160	0,06	36 000	4,55	} 45,88
$\frac{\partial M_u}{\partial h}$	249	0,7	30 500	3,86	
$\frac{\partial M_u}{\partial b}$	404	0,4	26 200	3,32	
$\frac{\partial M_u}{\partial v}$	5195	0,1	269 500	34,15	
			1 579 400	100,00	100,00

$$\mu_M = \sqrt{1\ 579\ 400} = 1258 \text{ Mpcm}$$

$$M_L = 138,8 - 3,56 \cdot 12,58 = 94,00 \text{ Mpm} .$$

Table of Square Mean Errors
(Second, third and fourth terms)

$\frac{\partial^2 M_u}{\partial x_i \partial x_j}$			μ_i	μ_j	$\frac{3}{4} \left(\frac{\partial^2 M_u}{\partial x_i^2} \mu_i^2 \right)^2$	$\left(\frac{\partial^2 M_u}{\partial x_i \partial x_j} \mu_i \mu_j \right)^2$	$\frac{\partial^2 M_u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 M_u}{\partial x_j^2} \mu_i^2 \mu_j^2$
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial f_y^2}$	—	—	0,26	—	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial a^2}$	—	—	0,02	—	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial h^2}$	$2f_y a g$	1,578	0,7	—	0,5	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial g^2}$	—	—	0,06	—	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial b^2}$	—	—	0,4	—	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial v^2}$	$2f_y b$	143,4	0,1	—	1,5	—	1,1
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial f_y \partial a}$	$h^2 g$	5860	0,260	0,02	—	$1/2 \times 465,0$	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial f_y \partial h}$	$2ahg$	38,7	0,260	0,7	—	49,3	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial f_y \partial g}$	ah^2	1125	0,260	0,06	—	306,0	—
$\frac{\partial^2 M_u}{df_y db}$	$v(h + v)$	144	0,260	0,4	—	224,0	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial f_y \partial v}$	$b(h + 2v)$	1850	0,260	0,1	—	2310,0	—

$\frac{\partial^2 M_u}{\partial a \partial h}$	$2f_y h g$	482	0,02	0,7	—	45,5	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial a \partial g}$	$f_y h^2$	14070	0,02	0,06	—	285,0	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial a \partial b}$	—	—	0,02	0,4	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial a \partial v}$	—	—	0,02	0,1	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial a \partial g}$	$2f_y a h$	92,4	0,7	0,06	—	15,0	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial h \partial b}$	$f_y v$	5,74	0,7	0,4	—	2,6	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial h \partial v}$	$f_y b$	71,6	0,7	0,1	—	25,1	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial g \partial b}$	—	—	0,06	0,4	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial g \partial v}$	—	—	0,06	0,1	—	—	—
$\frac{\partial^2 M_u}{\partial b \partial v}$	$f_y (h + 2v)$	212,5	0,4	0,1	—	72,2	—
					2,0	3799,7	1,1

The lack of maintenance is now taken into consideration as in the previous example, i.e., by assuming the corrosion as being equivalent to the dimensional tolerance of the profile.

The value of the ultimate moment to be expected is $M_y = 141,9$ Mpm.

Taking the second, third and fourth terms of the mean error into account

$$\mu_M^2 = 2\,529\,606,$$

$$\mu_M = 15,82 \text{ Mpm},$$

$$M_L = 141,9 - 3,56 \cdot 15,82 = 85,60 \text{ Mpm}.$$

The second, third and fourth terms of the mean error, to be considered are compiled in the following table.

Profile-tolerance and corrosion together:

$$(2,0 + 3799,7 + 1,1) \cdot 2 = 7606.$$

The above value is not more than 3‰ of the square of the entire mean value $\mu_M^2 = 2\,529\,606$.

As can be seen, it is sufficient merely to take the first term of mean error of the function-value into account.

Referring to investigations of steels it has to be established, if according to the elaboration of material tests between steels A 37.12 S and 36.24 S differences would be observed which have also to be expressed in the limit stress, then the limit stress of steel A 37.12 S should be lowered.

VIII. Criticism of methods used for the determination of the limit bearing force

It is an erroneous idea that in the calculation of the limit moment the mean error belonging to each factor which influences this moment, should be taken with its most disadvantageous value, into account (e.g., with an error-value of 1‰).

Namely, in this case the most disadvantageous grouping of errors occurring at a probability of 1‰, still depending on the number of variables, is only possible at a lesser probability, thus, the actual probability will, in general, be less than 1‰. This establishment is valid for engineering structures made of whatever material. The above deliberation complies with KAZINCZY's earlier establishments [8].

All mean errors figuring in the example previously dealt with referring to a steel structure should now be multiplied by $m = 3,09$. Computing the new profile constituted on the base of these to the 3,09-fold increased mean errors and the limit moment belonging to this new profile, the following results are obtained:

$$f_y = 2,2 - 3,09 \cdot 0,15 = 1,737 \text{ Mp/cm}^2,$$

$$a = 0,23 - 3,09 \cdot 0,02 = 0,168 \text{ Mp/cm}^2,$$

$$h = 70,0 - 3,09 \cdot 0,7 = 67,84 \text{ cm}$$

$$g = 1,2 - 3,09 \cdot 0,06 = 1,015 \text{ cm}$$

$$b = 25,0 - 3,09 \cdot 0,4 = 23,76 \text{ cm}$$

$$v = 2,0 - 3,09 \cdot 0,1 = 1,691 \text{ cm}$$

$$M'_L = 1,737 [23,76 \cdot 1,691(67,84 + 1,691) + 0,168 \cdot 1,015 \cdot 67,84^2] = 61,90 \text{ Mpm.}$$

$$m' = \frac{M_u - M'_L}{M} = \frac{108,90 - 61,90}{9,17} = 5,12,$$

while the risk belonging to this value is $0,15 \cdot 10^{-6}$.

It can be proved, in general, that if the number of variables is n , then relation

$$1 \leq \frac{m'}{m} < \sqrt{n}$$

holds.

Here, KORÁNYI's statement [6] that the diagram of the actual distribution of errors is steeper than that of the normal distribution, should also be mentioned. This means that the limit bearing force determined on the base of deductions dealt with in this paper still involves an additional safety; in the case of an m -times subtracted mean error the risk is smaller than that which can be determined on the base of the normal distribution of errors.

Proof of relation (15):

Subtracting the m -fold of all assumed mean errors from measuring results, the inaccurate limit bearing force will be:

$$Y'_L = G(l_1 - m\mu_1, l_2 - m\mu_2, \dots, l_n - m\mu_n).$$

Expanding function G at $i = 1, 2, \dots, n$ into a series:

$$Y'_L = G(l_1, l_2, \dots, l_n) - m \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i} \mu_i + \frac{1}{2} m^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} \mu_i^2 +$$

$$+ m^2 \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \mu_i \mu_j + M.$$

The values of the m -fold mean errors are small in comparison to l_i , therefore, the third and higher powers of $m \cdot \mu_i$ can already be neglected, thus $M = 0$.

$$m' = \frac{Y_u - Y'_L}{\mu_y},$$

but

$$Y_u = G(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

and

$$\mu_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\{ [G_i \mu_i]^2 + \frac{3}{4} [G_{ii} \mu_i^2]^2 + G_{ii} G_{jj} \mu_i^2 \mu_j^2 + [G_{ij} \mu_i \mu_j]^2 \right\}}$$

$i \neq j$ $\neq j$

therefore

$$\frac{m'}{m} = \frac{A}{B}$$

where

$$A = \sum G_i \mu_i - \frac{1}{2} m \sum G_{ii} \mu_i^2 - m \sum G_{ij} \mu_i \mu_j$$

$$B = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\{ [G_i \mu_i]^2 + \frac{3}{4} [G_{ii} \mu_i^2]^2 + G_{ii} G_{jj} \mu_i^2 \mu_j^2 + [G_{ij} \mu_i \mu_j]^2 \right\}}$$

$i \neq j$ $i \neq j$

The upper threshold of the above relation is

$$\frac{m'}{m} < \sqrt{n}$$

because the relation m'/m has an extreme value (maximum) if

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$$

and

$$G_1 = G_2 = \dots = G_n = G'$$

In addition, if in the numerator of fraction m'/m terms to be neglected, and in the denominator of same terms to be added, are disregarded, then this fraction takes the form

$$\frac{m'}{m} = \frac{nG' \mu}{\sqrt{n [G' \mu]^2}} = \sqrt{n}$$

The lower threshold-value of the above relation m'/m is generally 1. Assuming that $\mu_1 = \mu$ and $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n \cong 0$, then

$$\frac{m'}{m} = \frac{G_1 \mu - \frac{1}{2} m G_{11} \mu^2}{\sqrt{[G_1 \mu]^2 + \frac{3}{4} [G_{11} \mu^2]^2}}$$

but as according to assumption μ^4 can be neglected

$$\frac{m'}{m} = 1 - \frac{1}{2} m \frac{G_{11}}{G_1} \mu \sim 1,$$

i.e., in general

$$1 \leq \frac{m'}{m} < \sqrt{n}.$$

It should be mentioned that in the case of one single variable, if same is not a linear function of the ultimate bearing force, and at the same time the value of the mean error is high, then it might even occur that

$$m' < m.$$

This means that when computing the limit moment in such a way that in respect to the one single variable the most disadvantageous value ($i - m\mu$) is considered in advance, furthermore, if this variable is not a linear function of the ultimate bearing force, then the so obtained limit moment implies an error to the detriment of safety. Thus, the numerical example presented in this paragraph on page 318 by all means conduces to a faulty limit bearing force.

IX. Conclusions

From the introduced four examples the following conclusions having general validity can be drawn.

1) Examples referring to stressed and reinforced concrete alike indicate that the magnitude of the mean error of the ultimate moment depends first of all on all strength characteristics and geometrical dimensions of steel by more than 50%. Consequently, in respect to steel *first of all mean errors of dimensions should be lessened*, furthermore, for the purpose of reinforcement steel bars having a *more reliable yield point and ultimate strength* are required.

2) The second and astonishing result is, that in the case of bent beams the strength and reliability of concrete plays a much smaller role — maximum by 15% — as had previously been assumed.

3) The increase of concrete strength — exceeding that of C 400 — for bent beams is in essential superfluous, as according to JÄGER for a concrete C 500 the plastic deformation of concrete taking place during failure already vanishes ($\alpha = 2f_c = 1$ if the cube strength of concrete is 0,5 Mp/cm²). However, if only a smaller structural depth is available, or if for aesthetic reasons the depth of a beam should be lessened, then the increase of concrete strength might be expedient.

4) In respect to the mean error of concrete cube strength *it is sufficient to observe a dispersion of 15% as specified in the Hungarian Standard MSz 4715*. This is the very reason why hitherto a decrease in concrete cube strength or a dispersion of same within certain limits did not cause serious trouble.

5) Of course, the application of concretes having a lower strength is followed by a decrease of the limit moment, but the latter is rather insignificant. However, in such a case the importance of the reliability of concrete strength increases. E.g., if the girders of the bridge over the inundation area at Szolnok shown in Fig. 3 were designed to be made of concrete C 280, the probable decrease in the value of the limit moment would not have been more than 4%. Owing to this fact, the test beams of the bridge in question, the concrete strength of which was only 340–380 Kp/cm², still gave a good value for the ultimate moment.

6) A further increase of the accuracy of concrete dimensions is only necessary for small depths. The width has hardly any importance. On the other hand, the mean error due to an inaccurate observation of the beam depth is important, therefore, items the depth of which is less than 20 cm should be prefabricated.

7) Examples taken from the fields of steel structures, reinforced concrete, stressed concrete indicate that for different materials the risk is not the same. Engineering structures made of steel are designed by taking a risk of more than 1⁰/₁₀₀ into consideration. On the other hand, the risk considered for reinforced concrete and stressed concrete structures — provided the depth of same exceeds 1,0 m — is even less than 1⁰/₁₀₀. It might be desirable to eliminate this slight contradiction existing between Codes. The Code of Foundation Engineering also involves a greater precaution than that which is absolutely necessary.

On the base of the above principles the limit bearing capacity can be determined for engineering structures made of whatever material. This relatively complicated calculation implies much less subjective factors than the hitherto used method. Thus, it is particularly appropriate to be used for larger engineering structures. In such a case when the determination of the competent bearing force requires a computation extending to more than 100–200 pages, it makes no difference, whether the determination of limit bearing forces extends over 5 or 20 pages.

The limit bearing forces of manufactured precast members and structural dimensions of standardized designs should also be determined on the base of considerations expounded in this paper.

Of course, for smaller and less important engineering structures limit bearing forces could expediently be determined on the base of the hitherto used methods according to Codes, but limit stresses and dimensional tolerances to be applied should be modified according to the previously outlined principles.

The effect of inaccuracies occasionally occurring in statical calculations might be eliminated by approaching all $f_s = f(\varepsilon_s)$ diagrams by broken straight lines, this meaning an additional safety of 2–3% when determining the ultimate bearing force. The inaccuracy involved in calculations is generally less than the aforementioned value.

Finally, it should again be emphasized, that the expounded establishments refer only to the limit bearing force. However, the same considerations might also be applied to the determination of the competent bearing force standing on the left-hand side of equation (1).

It is impossible that a safety factor of 1,4 used in the calculation of a simply supported beam should also be applied to the calculation of a sectionwise loaded continuous beam over 4 or even more supports. Finally, if on the left-hand side of equation (1) the dead load is calculated by using a dispersion factor resulting from the increase of dimensions and specific weight, then it seems impossible to assume the contrary in respect to the right-hand side.

REFERENCES

- [1] SALIGER, R.: Die neue Theorie der Stahlbetone auf Grund der Bildsamkeit im Bruchzustand. Wien, 1947. Franz Deuticke Verlag.
- [2] JÄGER, K.: Festigkeitsnachweise im Stahlbetonbau. Wien, 1948. Manzsche Verlagsbuchhandlung.
- [3] HUNG. INST. FOR BUILDING RESEARCH (ÉTI), GÁBORY, P.—MENYHÁRD, I.—RÓZSA, M.: Vasbeton szerkezetek új méretezési módja. New Designing Method of Reinforced Concrete Structures. Budapest, 1951. Építőipari Könyv- és Lapkiadó.
- [4] OLTAY, K.: Geodézia, Budapest, 1951. Tankönyvkiadó.
- [5] KORÁNYI, I.: Analyse der Grenzspannung bei Stahl St. 37. *Acta Techn. Hung.* 26 p. 135.
- [6] KORÁNYI, I.: A szerkezeti acélok minőségének statisztikai ellenőrzése (Statistical Control of the Quality of Structural Steels). Budapest, *Építés és Közlekedéstudományi Közlemények*, 1959.
- [7] MEDGYESSY, P.—TAKÁCS, L.: Valószínűségszámítás (Probability Calculus). Budapest, 1957, Tankönyvkiadó.
- [8] KAZINCZY, G.: Az anyagok képlékenységének jelentősége a tartószerkezetek teherbírása szempontjából (The Importance of Plasticity of Materials from the View-Point of the Load Bearing Capacity of Structures). Budapest, 1942. Egyetemi Nyomda.

NEUE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER GRENZBEANSPRUCHUNGEN UNTER ANWENDUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

E. MISTÉTH

ZUSAMMENFASSUNG

Der zu erwartende Wert der Bruchbeanspruchung kann mit Hilfe einer Funktionsverbindung jederzeit gebildet werden. Als unabhängige Veränderliche fungieren die Bruchspannungen und die geometrischen Dimensionen des Querschnittes, deren verlässlichste Werte und ihre Mittelfehler mit Hilfe des statistischen Sammelns der Angaben aufgearbeitet werden können. Mit Hilfe des Satzes vom Mittelfehler des Funktionwertes kann der zu erwartende Mittelfehler des Wertes der Bruchspannung ebenfalls bestimmt werden. Der Satz bedarf aber der Ergänzung, da die Mittelfehler der verschiedenen Elemente sogar 20% über-

steigen können. In Kenntnis des Mittelfehlers der Bruchspannung und des eingegangenen Risikos kann der Wert der unteren Schranke der ersteren, d. h., die Grenzbeanspruchung berechnet werden.

Der Wert des vorteilhaftesten Risikos kann in der Abhängigkeit von der Gesamtgröße des unmittelbaren und des verursachten Schadens berechnet werden.

Die Anschauung, daß die Grenzbeanspruchung auch so bestimmt werden kann, daß man der Übernahme des vorgeschriebenen Risikos entsprechend die Querschnittsabmessungen und den Wert der unteren Schranke der Bruchspannung bildet und diese Werte dann in die Formel der Bruchbeanspruchung einsetzt, ist irrtümlich. Dieser Wert liefert nicht die Grenzbeanspruchung, sondern im allgemeinen einen kleineren Wert.

Es können allgemeine Schlüsse gezogen werden, da der Zusammenhang des Mittelfehlers der Bruchbeanspruchung nicht bloß dessen Maß liefert, sondern auch bezüglich der Größen Aufklärung gibt, deren Ungenauigkeiten den Mittelfehler ergeben.

Bezüglich der Art und Weise der Steigerung der Grenzbeanspruchung sei festgestellt, daß diese ökonomisch und richtig eher durch die Verwendung zuverlässigerer als besserer Baustoffe erreicht werden soll.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE DÉTERMINATION DES SOLLICITATIONS LIMITÉS PAR APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

E. MISTÉTH

RÉSUMÉ

La valeur probable de la sollicitation à la rupture peut être toujours obtenue par une relation fonctionnelle, les variables indépendantes étant: les contraintes de rupture et les dimensions géométriques de la section; les valeurs les plus sûres et les erreurs moyennes de celles-ci peuvent être déterminées par une étude statistique.

A l'aide du théorème de l'erreur moyenne des valeurs d'une fonction, on peut aussi déterminer l'erreur moyenne probable de la sollicitation à la rupture. Le théorème a besoin d'être complété, car les erreurs moyennes peuvent dépasser 20% pour les différents éléments. En connaissance de l'erreur moyenne de la sollicitation à la rupture et si on connaît le risque admis, il est possible de calculer la valeur limitée inférieure de celui-ci, qui est la sollicitation limitée.

En fonction de la valeur d'ensemble de la détérioration directe et indirecte, on peut calculer la valeur du risque optimal.

Il est erroné de croire que la sollicitation limitée peut être déterminée en calculant les valeurs limitées inférieures des dimensions sectionnelles et de la sollicitation à la rupture conformément au risque prescrit, et en substituant ces valeurs dans la formule de la sollicitation à la rupture. Le résultat ainsi obtenu est une valeur généralement inférieure à la sollicitation limitée.

La relation de l'erreur moyenne de la sollicitation à la rupture donne non seulement la valeur de cette erreur moyenne, mais renseigne aussi sur les quantités, dont l'inexactitude produit l'erreur moyenne.

L'augmentation de la sollicitation limitée devient plus économique par l'emploi non pas tant de matériaux de plus haute qualité, mais de matériaux offrant une chance de sécurité plus grande.

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ НАГРУЗОК С ПОМОЩЬЮ
РАСЧЕТА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Э. МИШТЕТ

РЕЗЮМЕ

Ожидаемое значение дробящей нагрузки всегда может быть представлено функциональной зависимостью. Независимые переменные: дробящие напряжения и геометрические размеры сечения; наиболее верные значения их и средние погрешности могут быть обработаны путем статистического подбора данных.

С помощью теоремы средней погрешности значения функции можно определить и среднюю погрешность ожидаемого значения дробящей нагрузки. Теорема требует дополнения, так как для различных элементов средние погрешности могут превысить также 20 %. Если известны средняя погрешность дробящей нагрузки, а также принятый риск, можно определить нижнее крайнее значение его, которое и будет предельной нагрузкой.

На основе зависимости от общей величины непосредственных и причиненных потерь, можно рассчитать значение оптимального риска.

Неправильным является взгляд, что предельная нагрузка может быть рассчитана также путем преобразования размеров поперечного сечения и нижнего предельного значения дробящей нагрузки соответственно предписанному риску, и подстановки этих значений в формулу дробящей нагрузки. Это действие даст не предельную нагрузку, а вообще некоторое меньшее значение.

Зависимость средней погрешности дробящей нагрузки позволяет получить не только размер ее, а освещает также и то, что от неточности каких именно данных происходит средняя погрешность.

Метод повышения предельных нагрузок правильно может быть выбран не в направлении применения лучших материалов, а по пути использования более надежных материалов, что и будет более экономичным и правильным.

MODÈLES ÉLECTRIQUES ANALOGUES POUR LE CALCUL DES OSSATURES

M. RÓZSA

CANDIDAT DES SCIENCES TECHNIQUES
INSTITUT SCIENTIFIQUE DU BÂTIMENT, BUDAPEST

[Manuscrit reçu le 26 décembre 1963]

L'étude fait connaître deux modèles électriques analogues de structures hyperstatiques formées de barres droites. Dans le premier système, les analogues des moments fléchissants sont des tensions électriques, ceux des angles de rotation et des déplacements sont des intensités de courant, enfin ceux des raideurs de barres sont des résistances ohmiques. Dans le second système, les moments fléchissants ont pour analogues des intensités de courant, les angles de rotation et les déplacements des tensions et les raideurs de barres des conductivités électriques.

Introduction

Le calcul des structures hyperstatiques est long et fastidieux, car la détermination des forces internes nécessite la solution d'un système d'équations linéaires à plusieurs inconnues. Les calculs se prolongent encore du fait que les dimensions des sections doivent être choisies d'abord empiriquement. Si ces dimensions ne conviennent pas selon le calcul, elles doivent être modifiées et tout le calcul doit être repris.

Pour déterminer les forces internes, on peut aussi se servir de modèles électriques analogues remplaçant le calcul. Ces installations fonctionnent sur le principe suivant: on établit un système de circuits électriques dans lequel les quantités électriques présentent entre elles une relation identique à celle qui existe entre les quantités mécaniques du problème original. De cette manière, le problème est reproduit par le modèle analogue et les quantités inconnues peuvent être déterminées par des mesures électriques.

Le présent travail fait connaître des modèles électriques analogues dont le montage s'effectue selon des règles bien simples, en partant de la forme géométrique de l'ossature. Pour établir les caractéristiques électriques des modèles (résistances, tensions, rapports de transformateurs), il ne faut déterminer que les quantités servant de point de départ au calcul statique (raideur des barres, moments d'encastrement parfait, etc.).

Le premier chapitre de l'étude fait connaître les équations fondamentales des modèles électriques. Le second chapitre présente deux systèmes duels d'ana-

logies électriques. Les troisième et quatrième chapitres offrent enfin une description détaillée des modèles basés sur ces analogies.*

1. Les équations servant de base aux analogies électriques

Lors de la déduction des équations relatives aux ossatures, les déformations axiales et celles dues aux efforts tranchants sont négligées, et l'on ne tient compte que des seules déformations produites par les moments fléchissants. La section des barres peut être variable.

Les points d'intersection des axes de deux ou plusieurs barres et les points d'appui sont considérés comme des *noeuds*. Imaginons les noeuds ainsi définis remplacés par des *articulations* reliant les barres ensemble ou aux appuis fixes. Le système de barres ainsi obtenu, que nous nommerons par la suite *ossature à noeuds articulés*, peut être *cinématiquement déterminé ou indéterminé*.

Si l'ossature à noeuds articulés est cinématiquement indéterminée, on introduit — en principe arbitrairement — le plus petit nombre de barres supplémentaires fictives, nécessaire pour la rendre cinématiquement déterminée. Par l'introduction des barres supplémentaires, l'ossature à noeuds articulés devient isostatique.

Lors de l'établissement des analogies électriques, il est utile d'introduire la notion de *longueur fictive des barres*. Cette longueur fictive se définit de la façon suivante. Au cas d'un raccourcissement Δ_k de la barre supplémentaire k , la barre UV reliant les articulations U et V de l'ossature à noeuds articulés tourne d'un angle ψ_{uv}^k . Cet angle de rotation est considéré comme positif si le sens de rotation correspond à celui des aiguilles d'une montre. Le rapport

$$\frac{\Delta_k}{\psi_{uv}^k} = l_{uv}^k \quad (1)$$

est nommé *longueur fictive* de la barre UV rapportée à la barre supplémentaire k . La longueur fictive d'une barre, rapportée à l'une des barres supplémentaires, est donc la réciproque de l'angle de rotation de cette barre, produit par le raccourcissement unitaire de la barre supplémentaire en question.

Après l'introduction de la notion de longueur fictive des barres, on peut passer à l'établissement des équations. Celles-ci expriment les conditions d'équilibre par des déformations.

* Ces dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés, à l'étranger, aux modèles électriques analogues des ossatures. Le couplage en étoile servant de base à tous ces modèles a été décrit pour la première fois par l'auteur en 1948 [4]. La présente étude contient l'essentiel de sa thèse de candidature présentée le 18 octobre 1955 et soutenue le 22 mai 1958, dont le manuscrit se trouve déposé à la Bibliothèque de l'Académie des Sciences de Hongrie.

Les moments agissant sur les extrémités de la barre UV sous l'effet de la charge extérieure peuvent être calculés à l'aide des formules connues:

$$\begin{aligned} X_{uv} &= M_{uv} - a_{uv} \beta_{uv} - b_{uv} \beta_{vu}, \\ X_{vu} &= M_{vu} - a_{vu} \beta_{vu} - b_{uv} \beta_{uv}, \end{aligned} \tag{2}$$

où

- X_{uv}, X_{vu} — sont les moments d'extrémité de la barre UV aux points resp. U et V . Le moment est positif s'il tend à faire tourner le noeud dans le sens horlogique;
- M_{uv}, M_{vu} — les moments d'encastrement aux points resp. U et V de la barre UV considérée comme une poutre à deux appuis parfaitement encastree à ses deux extrémités et soumise à la charge extérieure donnée;
- β_{uv}, β_{vu} — les angles d'inclinaison que la tangente à l'axe de la barre UV forme aux points resp. U et V , avec la droite reliant les points U et V (Fig. 1). L'angle β est positif si la tangente tourne dans le sens horlogique par rapport à la droite UV .
- a_{uv} — est le moment au point U de la poutre à deux appuis non chargée, supposée encastree à son point V , moment qui provoque, au point U , la rotation négative unitaire de la tangente à l'axe de la barre;
- a_{vu} — le même moment rapporté au point V
- b_{uv} — le moment agissant au point V de la poutre à deux appuis non chargée, supposée encastree à son point U , quand il existe, au point U , un moment a_{uv} provoquant la rotation négative unitaire de la tangente à l'axe de la barre. En vertu du théorème de Maxwell, $b_{uv} = b_{vu}$.

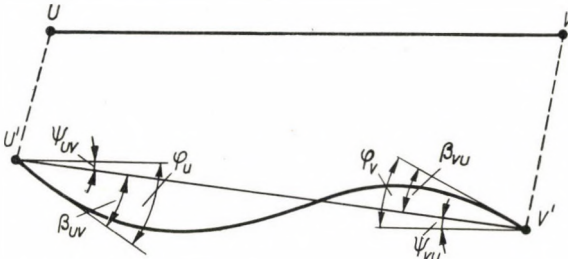


Fig. 1. Axe d'une barre après déformation

Si une barre est articulée à l'une des extrémités, alors les équations (2) des moments d'extrémités de la barre se modifient. Supposons que la barre UV est articulée au point V , c'est-à-dire

$$X_{vu} = 0.$$

En introduisant les notations

$$M'_{uv} = M_{uv} - \frac{b_{uv}}{a_{vu}} M_{vu}$$

et

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{b_{uv}^2}{a_{vu}},$$

on reçoit:

$$X_{uv} = M'_{uv} - a'_{uv} \beta_{uv}. \quad (2a)$$

En cas de *barres de section constante*, les équations (2), resp. (2a) peuvent s'écrire sous une forme plus simple. En effet, chez les barres de section constante

$$a_{uv} = a_{vu} = \frac{4 I_{uv} E}{l_{uv}}; \quad b_{uv} = \frac{2 I_{uv} E}{l_{uv}}$$

où

l_{uv} — est la longueur effective de la barre UV ;
 I_{uv} — le moment d'inertie de la section de la barre UV ;
 E — le module d'élasticité du matériau de la barre.

En introduisant les notations $m_{uv} = I_{uv}/l_{uv}$, $\beta' = 2E\beta$, les moments agissant sur les extrémités aux noeuds rigides de la barre de section constante seront:

$$\begin{aligned} X_{uv} &= M_{uv} - m_{uv} (2\beta'_{uv} + \beta'_{vu}), \\ X_{vu} &= M_{vu} - m_{uv} (2\beta'_{vu} + \beta'_{uv}). \end{aligned} \quad (2b)$$

Chez la barre UV de section constante, à noeud *articulé* au point V

$$\begin{aligned} X_{uv} &= M'_{uv} - 1,5 m_{uv} \beta'_{uv}, \\ X_{vu} &= 0, \end{aligned} \quad (2c)$$

ou

$$M'_{uv} = M_{uv} - 0,5 M_{vu}.$$

De l'équilibre des noeuds de l'ossature il s'ensuit que la somme algébrique des moments d'extrémité des barres concourant à un même noeud est zéro. En n'importe quel noeud:

$$\sum_N X_{UN} = 0, \quad (3)$$

où

N — est le nombre des barres concourant au noeud U .

Entre les moments d'extrémité de la barre, d'autres relations nous sont fournies par la condition que les forces d'appui agissant sur les barres supplémentaires imaginaires sont égales à zéro:

$$P_k + \sum_r \frac{X_{uv} + X_{vu}}{l_{uv}^k} = 0, \quad (4)$$

où

P_k — est la *force d'appui*, que les forces extérieures données agissant sur l'ossature à noeuds articulés produisent dans la barre supplémentaire « k »; le signe de P_k est positif si une traction se produit dans cette barre supplémentaire;
 r — est le nombre total des barres de l'ossature.

Les angles β figurant dans les formules (2) des moments d'extrémités des barres peuvent être exprimés par les angles de rotation des noeuds et les raccourcissements des barres supplémentaires. On suppose que, sous l'effet de la charge, la barre UV occupe une position $U'V'$ (fig. 1). De la figure, il ressort que

$$\beta_{uv} = \varphi_u - \psi_{uv},$$

$$\beta_{vu} = \varphi_v - \psi_{uv},$$

où

φ_u et φ_v — sont les angles de rotation des noeuds U , resp. V ,
 ψ_{uv} — l'angle de rotation de la droite reliant les points U et V .

L'angle de rotation ψ_{uv} est la somme des rotations

$$\psi_{uv}^k = \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k}$$

produites par les raccourcissements Δ_k des barres supplémentaires. Si nous désignons par m le nombre total des barres supplémentaires de l'ossature, nous avons:

$$\psi_{uv} = \sum_{k=1}^m \psi_{uv}^k = \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k}.$$

En y substituant la valeur ci-dessus de ψ_{uv} :

$$\beta_{uv} = \varphi_u - \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k}, \tag{5}$$

$$\beta_{vu} = \varphi_v - \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k}.$$

On substitue maintenant ces valeurs de β_{uv} et β_{vu} en (2), et l'on reçoit:

$$X_{uv} = M_{uv} - a_{uv}\varphi_u - b_{uv}\varphi_v + (a_{uv} + b_{uv}) \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k}, \tag{6}$$

$$X_{vu} = M_{vu} - a_{vu}\varphi_v - b_{vu}\varphi_u + (a_{vu} + b_{vu}) \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k}.$$

En écrivant les équations (3) pour p noeuds, et les équations (4) pour m barres supplémentaires, on obtient au total $p + m$ équations. En substituant les valeurs selon (6) de X_{uv} , X_{vu} ... dans ces équations, on aura $(p + m)$ inconnues ($\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$) dans les $(p + m)$ équations. En résolvant ce système d'équations à $(p + m)$ inconnues et substituant les valeurs de celles-ci dans les équations (6), on reçoit les moments aux noeuds X_{uv} cherchés.

2. Les deux systèmes d'analogies électriques

Les modèles électriques que nous allons décrire se basent sur *deux* systèmes d'analogies, que nous appellerons *analogies «A» et «B»*. Dans ces systèmes analogues, aux quantités mécaniques correspondent les quantités électriques suivantes:

Quantité mécanique	Quantité électrique	
	Analogie «A»	Analogie «B»
Moment ; Force	Tension	Intensité
Déplacement ; Rotation	Intensité	Tension
Raideur de barre	Résistance	Conductivité

Ainsi qu'il ressort de ce tableau, l'analogie «B» est le dual de l'analogie «A», dont elle ne diffère que par le changement de rôle de l'intensité et de la tension.

Par la suite, les quantités électriques seront désignées par les mêmes symboles que les quantités mécaniques analogues. Une quantité électrique et une quantité mécanique analogue seront appelées égales quand elles présentent des valeurs numériques égales dans un système d'unités de mesures quelconque.

3. Les modèles d'ossatures basés sur l'analogie «A»

Dans le modèle basé sur l'analogie «A», à n'importe quelle barre UV de section variable correspond un *quadripôle actif* selon la figure 2a, que nous appellerons le *bloc analogue* de la barre UV . Le bloc est formé par les résistances ohmiques b_{uv} , $a_{uv} - b_{uv}$, $a_{vu} - b_{uv}$ couplées en étoile, et les forces électromotrices M_{uv} , M_{vu} . Sur le côté U du bloc, la tension aux bornes est désignée par X_{uv} , et le courant d'entrée, resp. de sortie par β_{uv} . De même, sur le côté V , la tension aux bornes est désignée par X_{vu} , et le courant d'entrée, resp. de sortie par β_{vu} . Les courants, tensions et forces électromotrices seront considérés comme positifs dans la direction marquée sur la figure par une flèche. Pour

le circuit du côté U , resp. V , les relations suivantes peuvent être écrites en vertu de la loi de Kirchhoff:

$$X_{uv} = M_{uv} - a_{uv} \beta_{uv} - b_{uv} \beta_{vu},$$

$$X_{vu} = M_{vu} = a_{vu} \beta_{vu} - b_{uv} \beta_{uv}.$$

Les équations ci-dessus sont identiques aux équations (2), donc le quadripôle selon la figure 2a est un modèle analogue de la barre UV . Les tensions aux bornes X_{uv} , X_{vu} sont les analogues électriques des moments d'extrémités de barre X_{uv} , X_{vu} , les résistances a_{uv} , a_{vu} , b_{uv} sont les analogues des raideurs de barres, enfin les intensités de courant β_{uv} , β_{vu} correspondent aux angles de rotation β_{uv} , β_{vu} .

Si l'une des extrémités de la barre UV , par ex. le point V , est articulée, on obtient un quadripôle analogue plus simple en intercalant sur le côté U la force électromotrice $M'_{uv} = M_{uv} - (b_{uv}/a_{vu}) M_{vu}$ et la résistance $a'_{uv} = a_{uv} - (b_{uv}^2/a_{vu})$ (figure 2b). Dans le circuit du côté U , la relation (2a) est alors valable en vertu de la loi de Kirchhoff, donc ce montage est bien l'analogue électrique de la barre UV articulée au point V .

L'analogue d'une barre UV de section constante, à noeuds rigides aux deux extrémités, est le quadripôle selon la figure 2c, dont les quantités électriques satisfont l'équation (2b). Ainsi qu'il apparaît sur la figure, les trois résistances montées en étoile sont égales, aussi leur réglage peut-il se faire simultanément.

Si l'une des extrémités de la barre UV de section constante, le point V par exemple, est articulée, il faut utiliser le schéma selon la figure 2d correspondant à l'équation (2c).

Passons maintenant aux analogues électriques des noeuds. L'analogue électrique de n'importe quel noeud U peut être obtenu si on connecte en série des sorties U des blocs analogues des barres $U1, U2, \dots, UV, \dots, UN$ aboutissant au noeud U (figure 3). Le circuit fermé produit par le couplage en série est l'analogue électrique du noeud. Dans ce circuit, selon la loi de Kirchhoff:

$$\sum_N X_{UN} = 0.$$

Cette équation est identique avec l'équation (3), qui exprime la condition d'équilibre des moments agissant sur le noeud U , donc ici encore, l'analogie existe entre la tension aux bornes des blocs et les moments d'extrémités des barres. L'intensité du courant traversant le circuit analogue du noeud U est — comme nous le démontrerons plus loin — l'analogue de l'angle de rotation φ_u du noeud.

A une barre supplémentaire «k» quelconque de l'ossature correspond le circuit selon la figure 4, que nous appellerons donc l'analogue électrique de la

barre supplémentaire «k». Ce circuit sera établi de la manière suivante. Aux sorties des blocs analogues des barres de nombre r on relie, de chaque côté, l'enroulement primaire d'un transformateur idéal ayant un rapport de tension

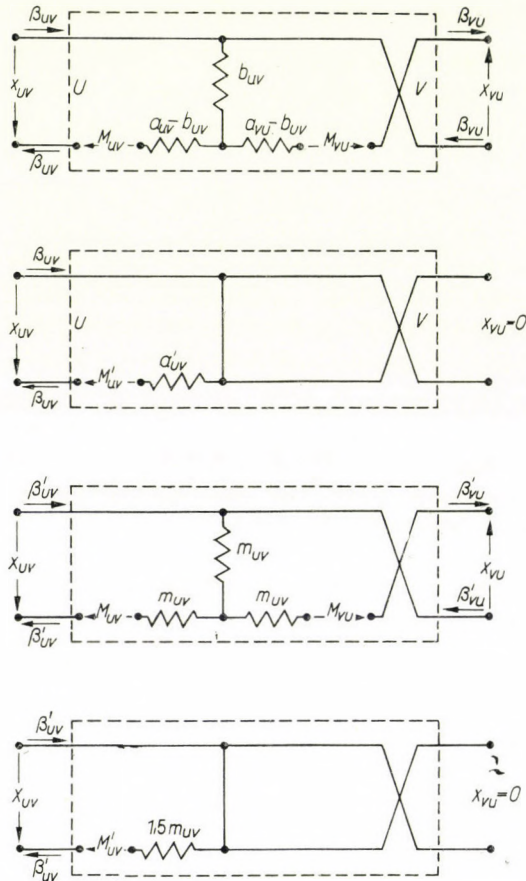


Fig. 2a. L'analogue A d'une barre de section variable
 Fig. 2b. L'analogue A d'une barre de section variable, articulée au point V
 Fig. 2c. L'analogue A d'une barre de section constante
 Fig. 2d. L'analogue A d'une barre de section constante, articulée au point V

$l_{uv}^k : 1$. Les enroulements secondaires de ces mêmes transformateurs sont connectés en série entre eux et avec la force électromotrice P_k , qui est l'analogue de la force d'appui P_k agissant sur la barre supplémentaire «k».

En appliquant la loi de Kirchhoff au circuit de la force électromotrice P_k , on reçoit l'équation suivante:

$$P_k + \sum_r \frac{X_{uv} + X_{vu}}{l_{uv}^k} = 0.$$

Cette équation est identique à l'équation (4) écrite pour la barre supplémentaire «k», donc le circuit représenté sur la figure 4 est bien l'analogue électrique de la barre supplémentaire «k».

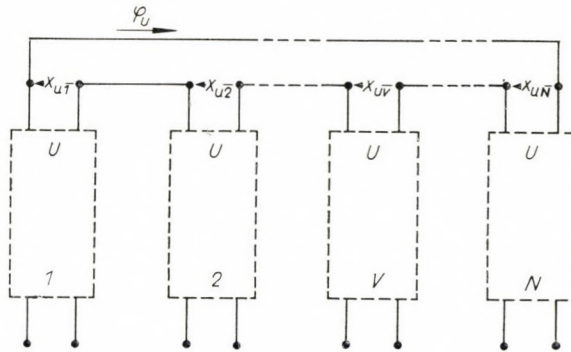


Fig. 3. L'analogue A d'un noeud

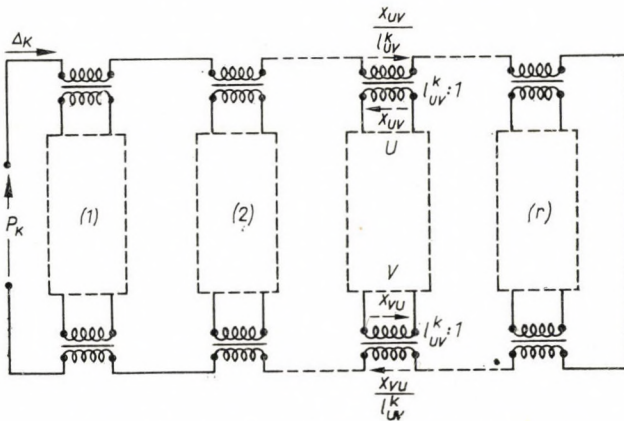


Fig. 4. L'analogue A d'une barre supplémentaire

Aux sorties des blocs il faut, de chaque côté, connecter en parallèle les primaires d'autant de transformateurs qu'il fallait de barres supplémentaires pour produire, par leur raccourcissement, la rotation de la barre correspondant au bloc. Donc si la rotation de la barre UV est due au raccourcissement de «m» barres supplémentaires, il faudra connecter «m» transformateurs aux sorties de chaque côté du bloc analogue de la barre UV .

En désignant par Δ_k le courant dans le circuit analogue de la barre supplémentaire «k», on a :

$$\beta_{uv} = \varphi_u - \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k},$$

$$\beta_{vu} = \varphi_v - \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_k}{l_{uv}^k}.$$

Ces équations sont identiques avec les équations (5), donc les intensités de courant φ_u, φ_v correspondent aux angles de rotation φ_u, φ_v des noeuds U, V , et l'intensité Δ_k est l'analogie du raccourcissement Δ_k de la barre supplémentaire «k».

Si aucun raccourcissement de barre supplémentaire ne fait tourner la barre UV , il ne faut pas relier de transformateurs idéaux aux sorties des côtés U et V du bloc analogue. Chez les modèles électriques des ossatures à noeuds sans déplacement il n'est donc pas besoin d'employer des transformateurs idéaux.

Nous avons démontré que les quantités électriques du montage ci-dessus décrit satisfont les équations déduites pour les quantités statiques des ossatures, donc ce montage est bien l'analogie électrique de ces derniers.

Exemples. Nous présentons ci-après les modèles électriques de deux ossatures. Le schéma à l'intérieur des blocs représentés par des traits discontinus est visible sur les figures 2a—d.

A l'ossature à noeuds articulés du portique à déplacement horizontal, représenté figure 5a, appartient la barre supplémentaire I soumise à l'action d'une force d'appui H_I . Sur le modèle électrique visible figure 5b, aux blocs analogues des montants 1—4, 2—5 et 3—6 sont reliés, de chaque côté, des transformateurs d'un rapport de tension égale à la valeur réciproque des longueurs de barres correspondantes. Les poutres 1—2, 2—3 ne tournent pas à la suite de raccourcissements de la barre supplémentaire, aussi ne relie-t-on pas de transformateurs aux sorties de leurs blocs analogues. Les circuits correspondant aux noeuds 4, 5, 6 sont coupés conformément à l'encastrement parfait des montants. Le barre supplémentaire I a pour analogue le circuit électrique I traversé par un courant Δ_I .

Le modèle analogue de l'ossature de la figure 6a est représenté sur la figure 6b.

4. Modèles d'ossatures basés sur l'analogie «B»

Lors de l'établissement des modèles statiques basés sur l'analogie B, les équations (1), (3), (4), (5) sont utilisées sans aucune modification, mais les équations (2) doivent être transformées. Dans ce but, résolvons le système d'équations (2) pour β_{uv} et β_{vu} :

$$\beta_{uv} = \frac{a_{vu} M_{uv} - b_{uv} M_{vu}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2} - \frac{a_{vu}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2} X_{uv} + \frac{b_{uv}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2} X_{vu},$$

$$\beta_{vu} = \frac{a_{uv} M_{vu} - b_{uv} M_{uv}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2} - \frac{a_{uv}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2} X_{vu} + \frac{b_{uv}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2} X_{uv}.$$

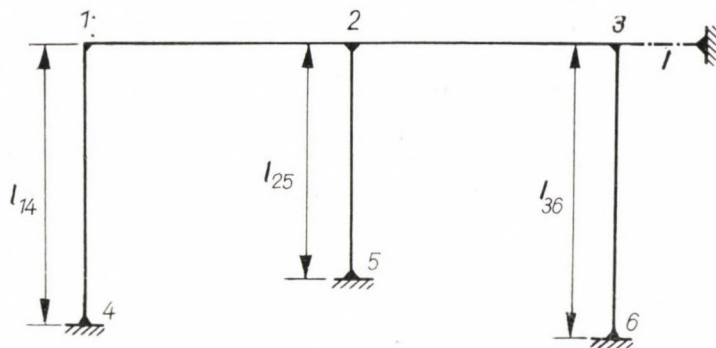


Fig. 5a. Portique à deux travées

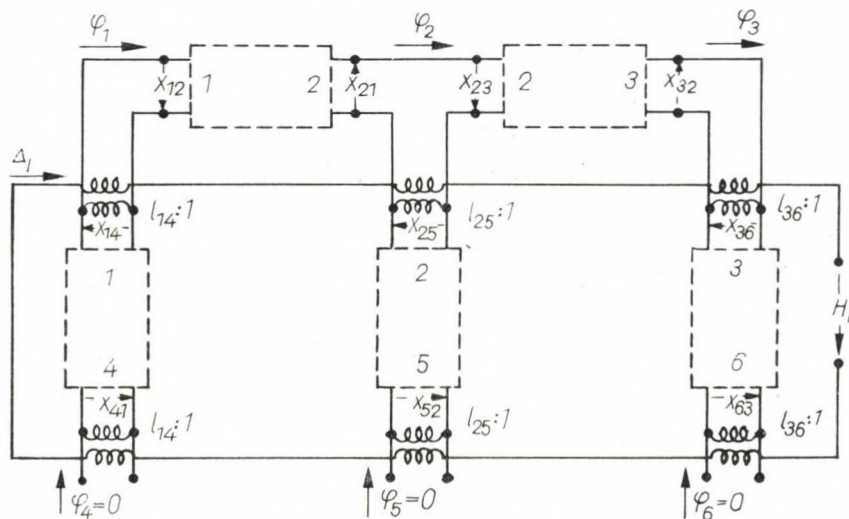


Fig. 5b. L'analogie A du portique de la fig. 5a

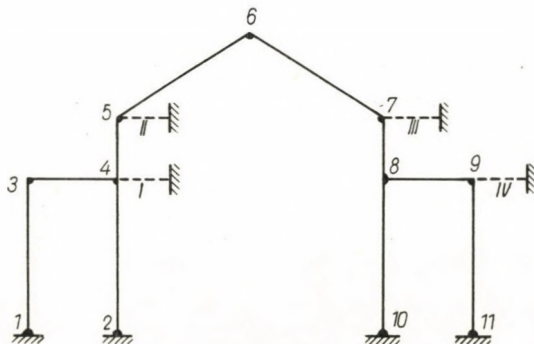


Fig. 6a Portique à trois travées

On introduit les notations suivantes:

$$\gamma_{uv} = \frac{a_{vu} M_{uv} - b_{uv} M_{vu}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2}; \quad \gamma_{vu} = \frac{a_{uv} M_{vu} - b_{uv} M_{uv}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2};$$

$$c_{uv} = \frac{a_{vu}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2}; \quad c_{vu} = \frac{a_{uv}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2}; \quad d_{uv} = \frac{b_{uv}}{a_{uv} a_{vu} - b_{uv}^2}.$$

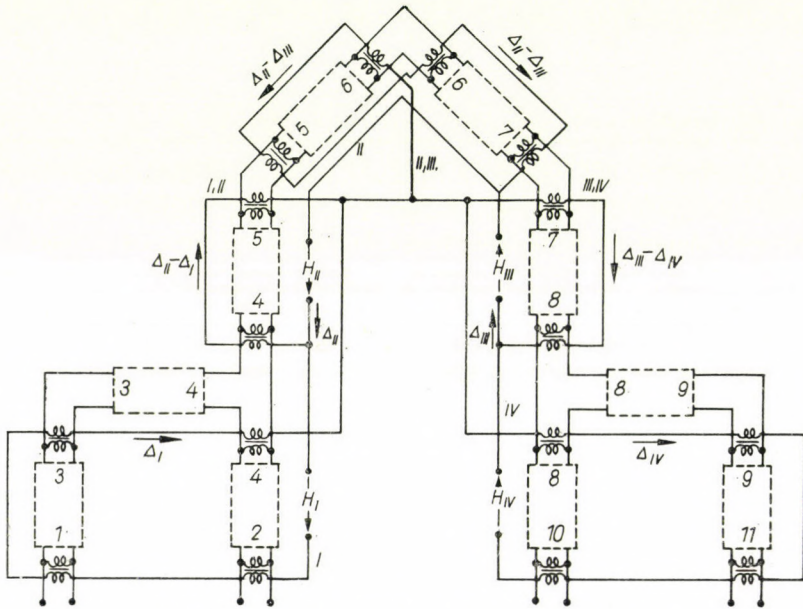


Fig. 6b L'analogie A du portique de la fig. 6a

Avec ces notations, les équations ci-dessus pourront s'écrire:

$$\begin{aligned} \beta_{uv} &= \gamma_{uv} - c_{uv} X_{uv} + d_{uv} X_{vu}, \\ \beta_{vu} &= \gamma_{vu} - c_{vu} X_{vu} + d_{uv} X_{uv}. \end{aligned} \quad (7)$$

Un modèle de barre UV de section variable, basé sur l'analogie «B», est représenté sur la figure 7. Ce montage sera appelé *bloc analogue* de la barre UV . A la différence des blocs de l'analogie «A», le bloc comprend ici le transformateur idéal faisant partie du circuit électrique analogue de la barre supplémentaire, aussi aura-t-il six sorties au total, y comprises les deux sorties du transformateur. Les quantités électriques sont désignées suivant la figure. En vertu de la loi de Kirchhoff, la tension entre les point 0 et A , resp. 0 et B sera:

$$\begin{aligned} \beta_{uv} &= \gamma_{uv} - c_{uv} X_{uv} + d_{uv} X_{vu}, \\ \beta_{vu} &= \gamma_{vu} - c_{vu} X_{vu} + d_{uv} X_{uv}, \end{aligned}$$

où

- c_{uv}, c_{vu}, d_{uv} — sont les résistances ohmiques,
- γ_{uv}, γ_{vu} — les forces électromotrices,
- X_{uv}, X_{vu} — l'intensité du courant au côté U , resp. V du bloc.

Si l'une des extrémités de la barre UV est articulée, le circuit doit être coupé sur le côté correspondant du bloc. En cas d'encastrement parfait, on court-circuite le côté correspondant.

Le rapport de la tension secondaire Δ_k et de la tension primaire ψ_{uv} du transformateur idéal appartenant au bloc est:

$$\frac{\Delta_k}{\psi_{uv}} = I_{uv}^k.$$

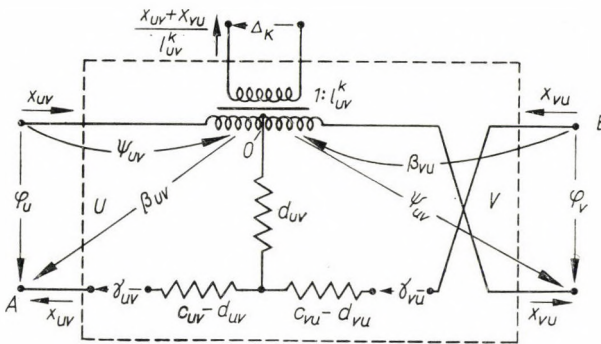


Fig. 7. L'analogie B d'une barre de section variable

Entre les tensions β_{uv}, β_{vu} et les tensions aux bornes φ_u, φ_v du côté U , resp. V du bloc existent les relations suivantes:

$$\beta_{uv} = \varphi_u - \frac{\Delta_k}{I_{uv}^k},$$

$$\beta_{vu} = \varphi_v - \frac{\Delta_k}{I_{uv}^k}.$$

A n'importe quel noeud U correspond le montage en parallèle des sorties, au côté U , des blocs analogues des barres aboutissant à ce noeud (figure 8). La somme algébrique des courants étant zéro aux points de dérivation,

$$\sum_N X_{UN} = 0.$$

A une barre supplémentaire «k» quelconque de l'ossature à noeuds articulés correspond le schéma selon la figure 9. La tension Δ_k est déterminée par

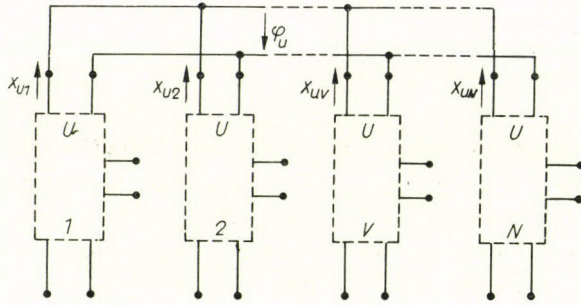


Fig. 8. L'analogie B d'un noeud

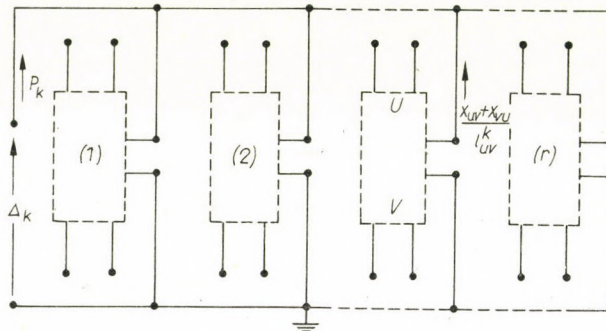


Fig. 9. L'analogie B d'une barre supplémentaire

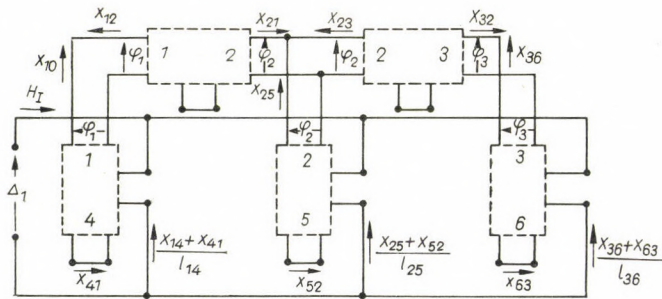


Fig. 10. L'analogie B du portique de la fig. 5a

la condition, qu'il faut alimenter une intensité P_k donnée, qui est l'analogie de la force d'appui de la barre supplémentaire. Compte tenu de ce que le courant fourni par le secondaire du transformateur du bloc UV est (figure 7):

$$\frac{X_{uv} + X_{vu}}{l_{uv}^k}$$

on a, en vertu de la loi de Kirchhoff:

$$P_k + \sum_r \frac{X_{uv} + X_{vu}}{l_{uv}^k} = 0.$$

Les équations ci-dessus décrites pour les quantités électriques sont identiques à celles qui existent entre les quantités mécaniques des ossatures.

Exemple. Le modèle de l'ossature de la figure 5a, basé sur l'analogie «B», est représenté figure 10. Les secondaires des transformateurs des blocs 1—2 et 2—3 étant court-circuités, ces deux transformateurs sont inutiles dans ce montage. On n'a besoin en tout que de trois transformateurs, à l'encontre du montage selon la figure 5b, basé sur l'analogie «A», qui en nécessite six.

LITTÉRATURE

1. BUSH, V.: Structural Analysis by Electric Circuit Analogies. *Journal of the Franklin Institute*, **217** (1934), 289, 329.
2. KRON, G.: Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures. *Journal of the Franklin Institute* **239** (1944), 399—442.
3. ГУТЕНМАХЕР, Л. И.: Электрические модели (Modèles électriques). 1948.
4. RÓZSA, M.: Tartószerkezetek megoldása elektromos analógián alapuló mérésekkel. (Calcul des ossatures par mesures basées sur l'analogie électrique.) *Építéstudományi Közlemények* (1948), 8—13.
5. MC CANN, G. D.—MAC NEAL, R. H.: Beam Vibration Analysis with the Electric Analog Computer. *Journal of Applied Mechanics* **17** (1950), 13—26.
6. RÓZSA, M.: A többtámaszú tartók nyomatékainak meghatározása analóg villamos modelleken végzett mérésekkel. (Détermination des moments de poutres continues par mesures effectuées sur des modèles électriques analogues.) *Elektrotechnika* **45** (1952), 41—45.
7. RUSSEL, W. T.—MAC NEAL, R. H.: An Improved Electrical Analogy for the Analysis of Beams in Bending. *Journal of Applied Mechanics* **20** (1953), 349—354.
8. RYDER, F. L.: Electrical Analogs of Statically Loaded Structures. *Proceeding A.S.C.E.* (1953). Separate No. 376.
9. RÓZSA, M.: Módszer statikailag határozatlan keret nyomatékainak számítására. (Méthode pour le calcul des cadres hyperstatiques.) *Mélyépítéstudományi Szemle*, (1953) 438—445.
10. KÖHLER, K.: Mit Querkraft beanspruchte ebene und vielgeschossige Einfeldrahmen symmetrischen Aufbaus. *Der Stahlbau*, **22** (1953) 274—276.
11. KUROS, GH. R.: Ein elektrotechnisches Experimentalverfahren zur Ermittlung der Biegemomente statisch unbestimmter Stabwerke. *Der Bauingenieur*, **29** (1954) 10—15.
12. RÓZSA, M.: Kétoszlopos szimmetrikus eltolható csomópontú keretek és párhuzamos övű Vierendeel tartók elektromos modellje. (Modèle électrique d'ossatures symétriques à deux piliers avec noeuds à déplacement horizontal, et de poutres Vierendeel avec membrures parallèles.) *Építéstudományi Intézet. Tudományos Közlemények.* (1955) No. 7. 10—18.

ELECTRICAL ANALOGY FOR BAR STRUCTURES

M. RÓZSA

SUMMARY

This paper has been concerned with two systems of electrical analogs for hyperstatical structures composed of straight bars. In the first system, analogs of flexural moments are electric tensions, those of angular rotations and of displacements current intensities, and of bar rigidities ohmic resistances. In the second system, analogs of flexural moments are current intensities, those of angular rotations and of displacements tensions, and of bar rigidities electrical conductivities.

ELEKTRISCHE ANALOGMODELLE FÜR STABWERKE

M. RÓZSA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befaßt sich mit zwei Systemen der elektrischen Analogmodelle für statisch unbestimmte Stabwerke aus geradachsigen Stäben. Im ersten System sind die Analogen der Biegemomente elektrische Spannungen, die der Winkelverdrehungen und der Verschiebungen Stromstärken und der Stabsteifigkeiten ohmsche Widerstände. Im zweiten System sind die Analogen der Biegemomente Stromstärken, die der Winkelverdrehungen und der Verschiebungen Spannungen und die der Stabsteifigkeiten elektrische Leitfähigkeiten.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГОВЫЕ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

M. РОЖА

РЕЗЮМЕ

В работе излагается две различных системы электрических аналоговых моделей статически неопределенных конструкций, собранных из прямоосных стержней. По первой системе аналогами изгибающих моментов являются электрические напряжения, аналогами угловых поворотов и смещений — силы тока, аналогами же жесткости стержней — омические сопротивления. По второй системе аналогами изгибающих моментов являются — силы токов, аналогами угловых поворотов и смещений — электрические напряжения, а аналогами жесткости стержней — электрические проводимости.

NICHTLINEARE BIEGUNGSTHEORIE VON SANDWICH-PLATTEN*

TEIL I. DIE SANDWICH-PLATTE MIT SEHR DÜNNEN AUSSENSCHICHTEN

V. DUNDOVÁ — V. KOVÁRIK — P. SLAPÁK

PRAG

[Eingegangen am 1. Juli 1964]

Im vorliegenden Teil I. dieser Arbeit beschäftigen wir uns speziell mit einer Rechteckplatte mit dünnen äußeren Schichten, wobei der Kern als nachgiebig betrachtet wird. Alle Schichten werden als isotrop vorausgesetzt. Die Theorie geht von den Laméschen Gleichungen für räumliche Körper aus. Die nichtlinearen geometrischen Beziehungen werden nur bei den äußeren Schichten angewandt. Durch geeignete Umwandlungen ist es gelungen, die Nichtlinearität nur auf die Randbedingungen zu beschränken, während die Grundgleichungen linear bleiben. Die Auflösung wird durch schrittweise Annäherung durchgeführt, wobei die Zwischenergebnisse eine bestimmte physikalische Bedeutung haben.

1. Formulierung des Problems

In diesem Teil unserer Arbeit führen wir eine annähernde Theorie ein, deren Benützung auf die Sandwich-Platten mit leichtem Kern und dünnen Außenschichten begrenzt ist. Der Ursprung der Beschränkung liegt darin, daß im Kerne nur lineare Beziehungen betrachtet werden. Von dem mathematischen Standpunkt aus führt die Voraussetzung von der Gültigkeit der kleinen bzw. großen Durchbiegungen zu einem Widerspruch, dessen Charakter geometrisch ist: Im Kerne nimmt man lineare Beziehungen zwischen Verschiebungs- und Deformationskomponenten, während die analogen Gleichungen in den Außenschichten nichtlineare Form haben. In Hinsicht darauf, daß die Theorie für Sandwich-Platten mit verhältnismäßig leichtem Kern, von dem vor allem Schubspannungen übernommen werden, zusammengestellt ist, kann man die gegebene Voraussetzung als annehmbar und den Widerspruch als unwesentlich bezeichnen.

Die grundlegenden Bezeichnungen sind aus Bild I. 1 zu ersehen.

* In der vorliegenden Arbeit knüpfen wir an die lineare Theorie der Sandwich-Platten, welche wir in den vorhergehenden Jahren bearbeitet und an verschiedenen Stellen veröffentlicht haben [1–3].

Unsere Arbeit gliedert sich in drei Teile, von welchen hier der erste mitgeteilt wird. Die weiteren Teile werden in nachfolgenden Heften dieser Zeitschrift erscheinen.

In allen drei Teilen dieser Arbeit wird dasselbe Zahlenbeispiel berechnet, wodurch die Möglichkeit geschaffen wird, interessante Vergleiche zu machen.

Das Gleichgewicht eines Kernelementes läßt sich auf Grund der bekannten Beziehungen der Elastizitätstheorie durch die Laméschen Gleichungen

$$\begin{aligned} L_0 u + L_1 v + L_3 w &= 0, \\ L_1 u + L_2 v + L_5 w &= 0, \\ L_3 u + L_5 v + L_4 w &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

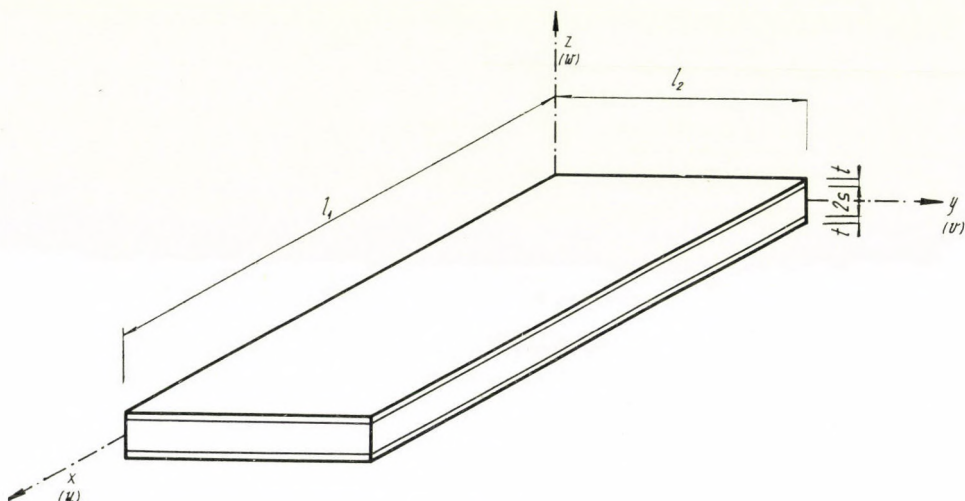


Bild 1

ausdrücken, wo L_i die linearen Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{G}{a - G} \nabla^2, \\ L_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, & L_2 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{G}{a - G} \nabla^2, \\ L_5 &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, & L_4 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{G}{a - G} \nabla^2 \end{aligned} \quad (2)$$

bedeuten und u, v, w die Komponenten des Verschiebungsvektors (Bild 1) sind.

Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen kann das Gleichgewicht der äußeren Schichten für die ganze Schichtdicke t angeführt werden (Bild 2). Das Koordinatensystem setzen wir verbunden mit einem Element der äußeren Schicht voraus.

Für $z = \pm s$ gilt

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= \pm (\sigma_{1x}^{H(D)} + \tau_{12y}^{H(D)}) t \pm p_1^{H(D)}, \\ \tau_{23} &= \pm (\sigma_{2y}^{H(D)} + \tau_{12x}^{H(D)}) t \pm p_2^{H(D)}, \\ \sigma_3 &= \pm p_3^{H(D)} \pm t(\sigma_1^{H(D)} w_{xx} + 2\tau_{12}^{H(D)} w_{xy} + \sigma_2^{H(D)} w_{yy}), \end{aligned} \tag{3}$$

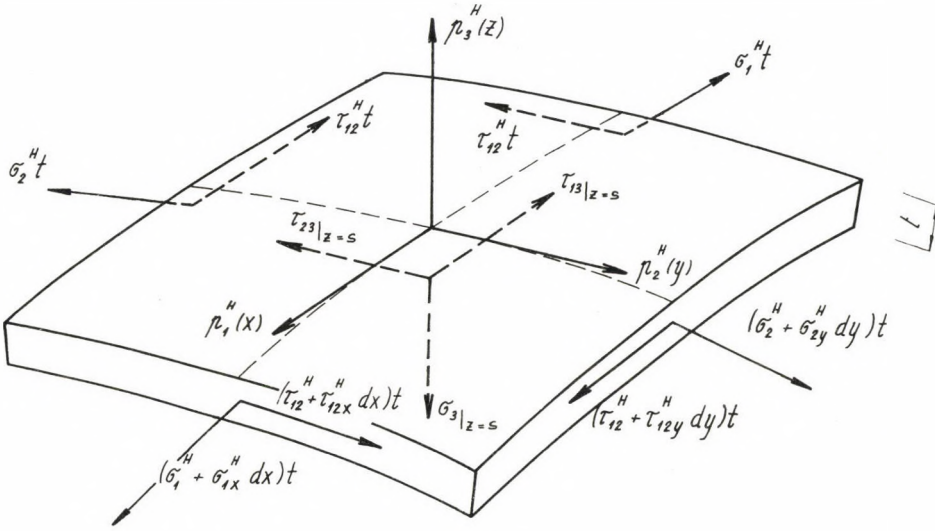


Bild 2

wo p_i^H, p_i^D ($i = 1, 2, 3$) die Lastkomponenten in der Richtung der Achse x, y, z bedeuten.

Die oberen Indizes H oder D zeigen an, daß der Wert zur oberen oder unteren Schicht gehört. Die Werte ohne Indizes beziehen sich auf den Kern der Platte. Mit dem unteren Index x, y, z bezeichnen wir die partielle Derivation nach den Veränderlichen x, y, z .

Die Bedingungen an den Schichtengrenzen für $z = \pm s$ schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned} u &= u^{H(D)}, & v &= v^{H(D)}, & w &= w^{H(D)}, \\ \sigma_3 &= \sigma_3^{H(D)}, & \tau_{13} &= \tau_{13}^{H(D)}, & \tau_{23} &= \tau_{23}^{H(D)} \end{aligned} \tag{4}$$

an.

Auf Grunde der Gleichungen (4) und der geometrischen und physikalischen Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \bar{a}w_z + \bar{b}(u_x + v_y), \\ \tau_{13} &= \bar{G}(u_z + w_x), \\ \tau_{23} &= \bar{G}(v_z + v_y)\end{aligned}$$

lassen sich die Spannungskomponenten in den äußeren Schichten durch die entsprechenden Verschiebungskomponenten des Kernes ausdrücken. Die Gleichungen (3), welche für $z = \pm s$ gelten, werden nach Einsetzen folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned}G(u_z + w_x) \mp t[\bar{a}u_{xx} + \bar{b}v_{xy} + \bar{G}(u_{yy} + v_{xy}) + \bar{a}w_x w_{xx} + \bar{b}w_y w_{xy} + \\ + \bar{G}(w_y w_{xy} + w_x w_{yy})] &= \pm p_1^{H(D)}, \\ G(v_z + w_y) \mp t[\bar{a}v_{yy} + \bar{b}u_{xy} + \bar{G}(v_{xx} + u_{xy}) + \bar{a}w_y w_{yy} + \bar{b}w_x w_{xy} + \\ + \bar{G}(w_x w_{xy} + w_y w_{xx})] &= \pm p_2^{H(D)}, \\ aw_z + b(u_x + v_y) \mp t[(\bar{a}u_x + \bar{b}v_y)w_{xx} + 2\bar{G}(u_y + v_x)w_{xy} + \\ + (\bar{b}u_x + \bar{a}v_y)w_{yy}] &= \pm p_3^{H(D)}.\end{aligned}\tag{5}$$

Hier bedeuten a, b , bzw. \bar{a}, \bar{b} Materialkonstanten des Kernes bzw. der äußeren Schichten, welche durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}a &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, & b &= \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \\ \bar{a} &= \frac{\bar{E}}{1-\bar{\mu}^2}, & \bar{b} &= \frac{\bar{E}\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}^2}\end{aligned}$$

gegeben sind. Weiter bedeuten E, G, μ bzw. $\bar{E}, \bar{G}, \bar{\mu}$ Elastizitätsmoduln, Schubmoduln, Poissonsche Zahlen ($\mu < 1/2$) des Kernes bzw. der äußeren Schichten.

Die Gleichungen (5) kann man als Randbedingungen des Systems (1) für $z = \pm s$ auffassen.

Nun ist es nötig, die Randbedingungen für die Ebenen $x = 0, x = l_1$ und $y = 0, y = l_2$ zu definieren. Bei der gewöhnlichen konstruktiven Ausbildung der Sandwich-Platten entscheidet über den Charakter der Auflagerung

die Befestigung der Ränder der äußeren Schichten. In dem Bild 3 ist die Verbindung der Ränder $x = 0, x = l_1$ entweder durch Vermittlung von Tangentialkräften $N_{s1}^{H(D)}, \tilde{N}_{s1}^{H(D)}$ oder durch Normalkräfte $N_{n1}^{H(D)}, \tilde{N}_{n1}^{H(D)}$ angedeutet. Die positive Richtung dieser Kräfte sei gleich der, der Achsen x, y, z . Ähnlich kann man die Verbindung der Ränder $y = 0, y = l_2$ mittels der Kräfte $N_{s2}^{H(D)}, \tilde{N}_{s2}^{H(D)}$ bzw. $N_{n2}^{H(D)}, \tilde{N}_{n2}^{H(D)}$ annehmen. Mit Rücksicht auf die Voraussetzung

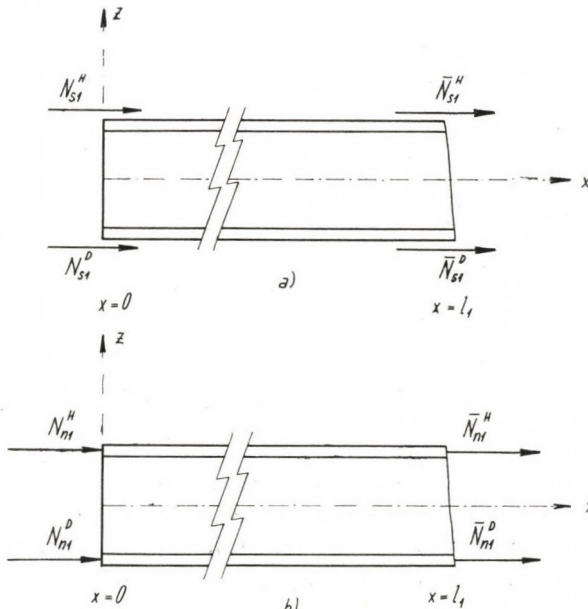


Bild 3

$t \rightarrow 0$ ist es nicht nötig, die Wirkung der Kräfte $N_{si}^{H(D)}$ von $N_{ni}^{H(D)}$ bzw. $\tilde{N}_{si}^{H(D)}$ von $\tilde{N}_{ni}^{H(D)}$ zu unterscheiden, und darum werden wir weiter nur die Bezeichnung $N_i^{H(D)}, \tilde{N}_i^{H(D)}$ benutzen und wir gliedern es in das Symbol für äußere Belastung $P_i^{H(D)}$ ($i = 1, 2$) ein.

Die verschiedenen Arten der Auflagerung für $x = 0$ bzw. $y = 0$ unterscheiden sich durch die Größe der Komponenten $N_i^{H(D)}$. Im Falle freier Auflagerung $N^H = N_i^D = 0$, im Falle elastischer Einspannung $N^H = -N_i^D, 2N_i^S = M_i$, im Falle vollkommener Einspannung folgt die Größe der Kräfte $N_1^{H(D)}$ bzw. $N_2^{H(D)}$ aus den Bedingungen $u^{H(D)} = 0$ für $x = 0$ bzw. $v^{H(D)} = 0$ für $y = 0$. Ähnliche Zusammenhänge lassen sich für die Ränder $x = l_1$ und $y = l_2$ für die Kräfte $\tilde{N}_i^{H(D)}$ anschreiben.

Die Randbedingungen definieren wir dann für die betrachteten Arten der Auflagerung mit den Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ \sigma_1 &= 0, \quad \sigma_1^H = 0, \quad \sigma_1^D = 0 \end{aligned} \right\}, \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l_1 \quad (6)$$

und ähnlich

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ \sigma_2 &= 0, \quad \sigma_2^H = 0, \quad \sigma_2^D = 0 \end{aligned} \right\}, \text{ für } y = 0 \text{ und } y = l_2. \quad (7)$$

Wenn wir die Bedingungen mittels der Verschiebungskomponenten ausdrücken, erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ au_x + b(v_y + w_z) &= 0, \end{aligned} \right\}, \text{ für } x = 0, x = l_1, \quad (8)$$

$$\bar{a} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) + \bar{b} \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right) = 0, \text{ für } x = 0, x = l_1 \text{ und } z = \pm s,$$

ähnlich erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ av_y + b(u_x + w_z) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ für } y = 0, y = l_2, \quad (9)$$

$$\bar{a} \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right) + \bar{b} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) = 0, \text{ für } y = 0, y = l_1 \text{ und } z = \pm s.$$

Die Beanspruchung und die Verformung einer rechteckigen Sandwich-Platte mit verschiedenen Auflagerbedingungen mit sehr dünnen Außenschichten läßt sich also durch Auflösung eines Systems linearer Differentialgleichungen (1) angeben, wobei die Randbedingungen durch die gewöhnlich nicht-linearen Differentialgleichungen (5), (8) und (9) gegeben sind.

2. Lösung

Die Aufgabe lösen wir durch schrittweise Annäherung. Als erste Annäherung betrachten wir die Lösung des linearen Problems. Wir bestimmen also zunächst die Lösung des Systems (1) unter Vernachlässigung der nicht-linearen Glieder in den Randbedingungen (5), (8) und (9). Diese Lösung suchen wir in der Form

$$u = \sum_{m,n} u_{mn}, \quad v = \sum_{m,n} v_{mn}, \quad w = \sum_{m,n} w_{mn}, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

wo

$$\begin{aligned} u_{mn} &= Z_{1mn}(z) \cos \lambda_m x \sin \omega_n y, \\ v_{mn} &= Z_{2mn}(z) \sin \lambda_m x \cos \omega_n y, \\ w_{mn} &= Z_{3mn}(z) \sin \lambda_m x \sin \omega_n y \end{aligned} \quad (11)$$

ist und weiter

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l_1}, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l_2}. \quad (12)$$

Die Funktion (11) erfüllt augenscheinlich die Randbedingungen der linearen Aufgabe für $x = 0$, $x = l_1$ und $y = 0$, $y = l_2$ und nach Einführung dieser Ausdrücke in (1) erhalten wir ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Funktionen Z_{1mn} , Z_{2mn} , Z_{3mn} ($m, n = 0, 1, 2 \dots$). Die Auflösung dieses Systems wird die Form

$$\begin{aligned} Z_{1mn} &= (U_{1mn} + U_{3mn} z) e^{\varrho_{mn} z} + (U_{2mn} + U_{4mn} z) e^{-\varrho_{mn} z}, \\ Z_{2mn} &= (V_{1mn} + V_{3mn} z) e^{\varrho_{mn} z} + (V_{2mn} + V_{4mn} z) e^{-\varrho_{mn} z}, \\ Z_{3mn} &= (W_{1mn} + W_{3mn} z) e^{\varrho_{mn} z} + (W_{2mn} + W_{4mn} z) e^{-\varrho_{mn} z}. \end{aligned} \quad (13)$$

haben, wo

$$\varrho_{mn} = \left| \sqrt{\lambda_m^2 + \omega_n^2} \right| \quad (14)$$

ist und wobei U_{imn} , V_{imn} , W_{imn} ($i = 1$ bis 4) gewisse Konstanten sind, die wir aus dem System (1) unter Randbedingungen (5) bestimmen.

Nach Einführung von (13) in (1) erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} U_{3mn} &= \frac{\lambda_m}{\varrho_{mn}} W_{3mn}, \\ V_{3mn} &= \frac{\omega_n}{\varrho_{mn}} W_{3mn}, \\ W_{3mn} &= \frac{a - G}{a + G} (\lambda_m U_{1mn} + \omega_n V_{1mn} - \varrho_{mn} W_{1mn}), \end{aligned} \quad (15)$$

und

$$\begin{aligned} U_{4mn} &= -\frac{\lambda_m}{\varrho_{mn}} W_{4mn}, \\ V_{4mn} &= -\frac{\omega_n}{\varrho_{mn}} W_{4mn}, \\ W_{4mn} &= \frac{a - G}{a + G} (\lambda_m U_{2mn} + \omega_n V_{2mn} + \varrho_{mn} W_{2mn}). \end{aligned} \quad (16)$$

Nach Einführung in (5) entwickeln wir die Funktion $p_i^{H(D)}$ in doppeltrigonometrische Reihe¹ mit Hilfe von orthogonalen, in dem Intervall $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ vollen Systemen von Funktionen [4]

$$\begin{aligned} p_1^{H(D)} &= \sum_{m,n} p_{1mn}^{H(D)} \cos \lambda_m x \sin \omega_n y, \\ p_2^{H(D)} &= \sum_{m,n} p_{2mn}^{H(D)} \sin \lambda_m x \cos \omega_n y, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (17) \\ p_3^{H(D)} &= \sum_{m,n} p_{3mn}^{H(D)} \sin \lambda_m x \sin \omega_n y. \end{aligned}$$

Wir erhalten für $z = \pm s$

$$\begin{aligned} G(Z'_{1mn} + \lambda_m Z_{3mn}) \pm t [(\bar{a} \lambda_m^2 + \bar{G} \omega_n^2) Z_{1mn} + (\bar{a} - \bar{G}) \lambda_m \omega_n Z_{2mn}] &= \pm p_{1mn}^{H(D)}, \\ G(Z'_{2mn} + \omega_n Z_{3mn}) \pm t [(\bar{a} \omega_n^2 + \bar{G} \lambda_m^2) Z_{2mn} + (\bar{a} - \bar{G}) \omega_n \lambda_m Z_{1mn}] &= \pm p_{2mn}^{H(D)}, \\ a Z'_{3mn} - b(\lambda_m Z_{1mn} + \omega_n Z_{2mn}) &= \pm p_{3mn}^{H(D)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Wenn wir die Bezeichnung

$$\begin{aligned} C_{1mn} &= \lambda_m U_{1mn} + \omega_n V_{1mn}, \\ C_{2mn} &= \lambda_m U_{2mn} + \omega_n V_{2mn}, \\ C_{3mn} &= \frac{1}{\lambda_m} U_{1mn} - \frac{1}{\omega_n} V_{1mn}, \\ C_{4mn} &= \frac{1}{\lambda_m} U_{2mn} - \frac{1}{\omega_n} V_{2mn} \end{aligned} \quad (19)$$

einführen, können wir statt (18) ein einfacheres System algebraischer Gleichungen anschreiben (siehe Tabelle I) und aus ihnen

$$\begin{aligned} U_{1mn} &= (C_{1mn} + \omega_n^2 C_{3mn}) \frac{\lambda_m}{\varrho_{mn}^2}, \\ V_{1mn} &= (C_{1mn} - \lambda_m^2 C_{3mn}) \frac{\omega_n}{\varrho_{mn}^2}, \\ U_{2mn} &= (C_{2mn} + \omega_n^2 C_{4mn}) \frac{\lambda_m}{\varrho_{mn}^2}, \\ V_{2mn} &= (C_{2mn} - \lambda_m^2 C_{4mn}) \frac{\omega_n}{\varrho_{mn}^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

bestimmen.

¹ Siehe Anhang

Tafel I

$$(C_3 - C_4) \left[\left(1 + t \varrho \frac{\bar{G}}{G} \right) e^{\varrho s} + \left(1 - t \varrho \frac{\bar{G}}{G} \right) e^{-\varrho s} \right] = \frac{1}{G \varrho} \left[\frac{1}{\lambda} (P_{1mn}^H - P_{1mn}^D) - \frac{1}{\omega} (P_{2mn}^H - P_{2mn}^D) \right]$$

$$(C_3 + C_4) \left[\left(1 + t \varrho \frac{\bar{G}}{G} \right) e^{\varrho s} - \left(1 - t \varrho \frac{\bar{G}}{G} \right) e^{-\varrho s} \right] = \frac{1}{G \varrho} \left[\frac{1}{\lambda} (P_{1n}^H + P_{1mn}^D) - \frac{1}{\omega} (P_{mn}^H + P_{2mn}^D) \right]$$

	linke Seite erstes Glied (C ₁ + C ₂) · Koeffizient	linke Seite zweites Glied (W ₁ - W ₂)ϱ · Koeffizient	rechte Seite
Koeffizienten	$[G + \varrho s(a - G)]e^{\varrho s} + [G - \varrho s(a - G)]e^{-\varrho s}$	$[a - \varrho s(a - G)]e^{\varrho s} + [a + \varrho s(a - G)]e^{-\varrho s}$	$(P_{3mn}^H - P_{3mn}^D) \frac{a + G}{2G}$
	$[2aG + t\varrho\bar{a}(a + G) + (a - G)(2G + t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{\varrho s} - [2aG - t\varrho\bar{a}(a + G) - (a - G)(2G - t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{-\varrho s}$	$[2G^2 - (a - G)(2G + t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{\varrho s} - [2G^2 + (a - G)(2G - t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{-\varrho s}$	$[\lambda(P_{1mn}^H + P_{1mu}^D) + \omega(P_{2mn}^H + P_{2mn}^D)] \frac{a + G}{\varrho}$
	linke Seite erste Glied (C ₁ - C ₂) · Koeffizient	linke Seite zweites Glied (W ₁ + W ₂)ϱ · Koeffizient	rechte Seite
Koeffizienten	$[G + \varrho s(a - G)]e^{\varrho s} - [G - \varrho s(a - G)]e^{-\varrho s}$	$[a - \varrho s(a - G)]e^{\varrho s} - [a + \varrho s(a - G)]e^{-\varrho s}$	$(P_{3mn}^H + P_{3mn}^D) \frac{a + G}{2G}$
	$[2aG + t\varrho\bar{a}(a + G) + (a - G)(2G + t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{\varrho s} + [2aG - t\varrho\bar{a}(a + G) - (a - G)(2G - t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{-\varrho s}$	$[2G^2 - (a - G)(2G + t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{\varrho s} + [2G^2 + (a - G)(2G - t\varrho\bar{a})\varrho s]e^{-\varrho s}$	$[\lambda(P_{1mn}^H - P_{1mn}^D) + \omega(P_{2mn}^H - P_{2mn}^D)] \frac{a + G}{\varrho}$

Bei den Konstanten C_i, W_i, λ, ω, ϱ sind zur Übersichtlichkeit die Indizes m, n weggelassen

Auf diese Art haben wir die Verschiebung in erster Annäherung (nach der linearen Theorie) bestimmt. In zweiter Annäherung führen wir die so erhaltenen Werte in vollständiger Form in die Randbedingungen ein. Diese Bedingungen werden nicht erfüllt sein. Die Verschiebungen, welche in erster Annäherung berechnet wurden, entsprechen im allgemeinen den Belastungen $p_i^{H(D)} + \Delta p_i^{H(D)}$ und einer gewissen Einspannung der Außenschichten durch die Kräfte $\Delta N_i^{H(D)}$ bzw. $\Delta \tilde{N}_i^{H(D)}$. Hier bedeuten Δp_i die Unterschiede der Belastung $p_i^{H(D)}$ nach Gleichung (5) die Größe der Kräfte $\Delta N_i^{H(D)}$ bzw. $\Delta \tilde{N}_i^{H(D)}$ ergibt sich aus den Bedingungen (8) und (9).

Wenn wir die Berechnung ausführen, erhalten wir für $z = \pm s$

$$\begin{aligned} \Delta p_1^{H(D)} &= \sum_{m,n} -t \{ Z_{3mn}^2 [-\bar{a} \lambda_m^3 \cos \lambda_m x \sin \lambda_m x \sin^2 \omega_n y + \\ &\quad + \bar{b} \lambda_m \omega_n^2 \sin \lambda_m x \cos \lambda_m x \cos^2 \omega_n y + \\ &\quad + \bar{G} \lambda_m \omega_n^2 (\sin \lambda_m x \cos \lambda_m x \cos^2 \omega_n y - \sin \lambda_m x \cos \lambda_m x \sin^2 \omega_n y)] \}, \\ \Delta p_2^{H(D)} &= \sum_{m,n} -t \{ Z_{3mn}^2 [-\bar{a} \omega_n^3 \sin^2 \lambda_m x \sin \omega_n y \cos \omega_n y + \\ &\quad + \bar{b} \lambda_m^2 \omega_n \cos^2 \lambda_m x \cdot \sin \omega_n y \cos \omega_n y + \\ &\quad + \bar{G} \lambda_m^2 \omega_n (\cos^2 \lambda_m x \sin \omega_n y \cos \omega_n y - \sin^2 \lambda_m x \sin \omega_n y \cos \omega_n y)] \}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta p_3^{H(D)} &= \sum_{m,n} -t \{ Z_{3mn} [(\bar{a} Z_{1mn} \lambda_m + \bar{b} Z_{2mn} \omega_n) \lambda_m^2 \sin^2 \lambda_m x \sin^2 \omega_n y + \\ &\quad + 2\bar{G} (\omega_n Z_{1mn} + \lambda_m Z_{2mn}) \lambda_m \omega_n \cos^2 \lambda_m x \cos^2 \omega_n y + \\ &\quad + (\bar{b} Z_{1mn} \lambda_m + \bar{a} Z_{2mn} \omega_n) \omega_n^2 \sin^2 \lambda_m x \sin^2 \omega_n y] \}; \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta N_1^{H(D)} &= - \sum_{m,n} \frac{1}{2} t Z_{3mn}^2 \bar{a} \lambda_m^2 \sin^2 \omega_n y, \\ \Delta N_2^{H(D)} &= - \sum_{m,n} \frac{1}{2} t Z_{3mn}^2 \bar{a} \omega_n^2 \sin^2 \lambda_m x, \quad (m, = n 0, 1, 2, \dots). \quad (22) \\ \Delta \tilde{N}_1^{H(D)} &= \sum_{m,n} \frac{1}{2} t Z_{3mn}^2 \bar{a} \lambda_m^2 \sin^2 \omega_n y, \\ \Delta \tilde{N}_2^{H(D)} &= \sum_{m,n} \frac{1}{2} t Z_{3mn}^2 \bar{a} \omega_n^2 \sin^2 \lambda_m x, \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Voraussetzung $t \rightarrow 0$ nehmen wir in nachstehender Berechnung die Normalkräfte $\Delta N_i^{H(D)}$ und $\Delta \tilde{N}_i^{H(D)}$ als äußere Belastung an und um die Konvergenz zu beschleunigen, rechnen wir nicht mit einer Linien-

belastung, sondern mit der Belastung $\Delta N_i^{H(D)}$, welche auf der Fläche von der Breite γl_i wirkt, also mit

$$\begin{aligned} \Delta n_i^{H(D)} &= \frac{\Delta N_i^{H(D)}}{\gamma l_i} && \text{mit dem Intervall } \langle 0, \gamma l_i \rangle, \\ \Delta n_i^{H(D)} &= 0 && \text{mit dem Intervall } \langle \gamma l_i, l_i(1 - \gamma) \rangle, \quad (i = 1, 2) \\ \Delta n_i^{H(D)} &= \frac{\Delta \tilde{N}_i^{H(D)}}{\gamma l_i} && \text{mit dem Intervall } \langle l_i(1 - \gamma), l_i \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Die Verschiebungen in der zweiten Annäherung berechnen wir nach der linearen Theorie für die Belastung¹

$${}^{(2)}p_i^{H(D)} = p_i^{H(D)} - {}^{(1)}p_i^{H(D)} - \frac{1}{\Delta} n_i^{H(D)} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Mit einer neuerlichen Wiederholung des Vorganges bekommen wir die dritte Annäherung

$${}^{(3)}p_i^{H(D)} = p_i^{H(D)} - {}^{(2)}p_i^{H(D)} - \frac{1}{\Delta} n_i^{H(D)} \quad (25)$$

usw.

Der obere Zahlenindex bedeutet hier die Zahl der Schritte zur Annäherung. Gewöhnlich genügt es jedoch, den Vorgang nur einmal zu wiederholen. Weil es nötig ist, die Belastung ${}^{(j)}p_i^{H(D)}$ wieder in Fourier-reihenentwicklung zu benützen, sind im Nachtrag außer den Koeffizienten für $p_i^{H(D)}$ auch die Entwicklungen für $\Delta p_i^{H(D)}$ und $\Delta n_i^{H(D)}$ angegeben.

3. Nachtrag

Die Koeffizienten der Fourierreihen sind:

$$\left. \begin{aligned} p_{1mn}^{H(D)} &= \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p_1^{H(D)} \cos \lambda_m x \sin \omega_n y \, dx \, dy, && \text{für } m \neq 0 \\ p_{10n}^{H(D)} &= \frac{2}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p_1^{H(D)} \sin \omega_n y \, dx \, dy, \\ p_{2mn}^{H(D)} &= \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p_2^{H(D)} \sin \lambda_m x \cos \omega_m y \, dx \, dy, && \text{für } n \neq 0 \\ p_{2m0}^{H(D)} &= \frac{2}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p_2^{H(D)} \sin \lambda_m x \, dx \, dy, \\ p_{3mn}^{H(D)} &= \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p_3^{H(D)} \sin \lambda_m x \sin \omega_n y \, dx \, dy; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

¹ mit Bezeichnung $\Delta n_3^{H(D)} \equiv 0$

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_1^{H(D)} &= \sum_{M,N} \Delta p_{1MN}^{H(D)} \cos \lambda_M x \sin \omega_N y, \\ \Delta p_2^{H(D)} &= \sum_{M,N} \Delta p_{2MN}^{H(D)} \sin \lambda_M x \cos \omega_N y, \\ \Delta p_3^{H(D)} &= \sum_{M,N} \Delta p_{3MN}^{H(D)} \sin \lambda_M x \sin \omega_N y, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta n_1^{H(D)} &= \sum_{M,N} \Delta n_{1MN}^{H(D)} \cos \lambda_M x \sin \omega_N y, \\ \Delta n_2^{H(D)} &= \sum_{M,N} \Delta n_{2MN}^{H(D)} \sin \lambda_M x \cos \omega_N y \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(M, N = 1, 3, 5, ...);

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_{1MN}^{H(D)} &= -\frac{4t}{l_1 l_2} \sum_{m,n=0,1,2,\dots} Z_{3mn}^2 \Big|_{\substack{z=s \\ (z=-s)}} [-\bar{a} \lambda_m^3 I_{1mnMN} + \\ &+ \bar{b} \lambda_m \omega_n^2 I_{2mnMN} + \bar{G} \lambda_m \omega_n^2 (I_{2mn\bar{M}N} - I_{1mnMN})], \\ \Delta p_{2MN}^{H(D)} &= -\frac{4t}{l_1 l_2} \sum_{m,n=0,1,2,\dots} Z_{3mn}^2 \Big|_{\substack{z=s \\ (z=-s)}} [-\bar{a} \omega_m^3 I_{3mnMN} + \\ &+ \bar{b} \lambda_m^2 \omega_n I_{4mnMN} + \bar{G} \lambda_m^2 \omega_n (I_{4mnMN} - I_{3mnMN})], \\ \Delta p_{3MN}^{H(D)} &= -\frac{4t}{l_1 l_2} \sum_{m,n=0,1,2,\dots} Z_{3mn} \Big|_{\substack{z=s \\ (z=-s)}} \{ [\bar{a} Z_{1mn} \lambda_m + \\ &+ \bar{b} Z_{2mn} \omega_n] \lambda_m^2 + [\bar{b} Z_{1mn} \lambda_m + \bar{a} Z_{2mn} \omega_n] \omega_n^2 \Big|_{\substack{z=s \\ (z=-s)}} \\ &\cdot I_{5mnMN} + 2\bar{G} (\omega_n Z_{1mn} + \lambda_m Z_{2mn}) \lambda_m \omega_n \Big|_{\substack{z=s \\ (z=-s)}} I_{6mnMN} \}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Hier bedeuten

$$\begin{aligned} I_{1mnMN} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \cos \lambda_m x \sin \lambda_m x \sin^2 \omega_n y \cos \lambda_M x \sin \omega_N y \, dx \, dy = \\ &= -\frac{2Mm}{4m^2 - M^2} \frac{4n^2}{N^2 - 4n^2} \frac{1}{\lambda_M \omega_N}, \\ I_{2mnMN} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \sin \lambda_m x \cos \lambda_m x \cos^2 \omega_n y \cos \lambda_M x \sin \omega_N y \, dx \, dy = \\ &= \frac{2Mm}{4m^2 - M^2} \left(1 - \frac{N^2}{4n^2 - N^2} \right) \frac{1}{\lambda_M \omega_N}, \\ I_{3mnMN} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \sin^2 \lambda_m x \sin \omega_n y \cos \omega_n y \sin \lambda_M x \cos \omega_N y \, dx \, dy = \\ &= -\frac{4m^2}{M^2 - 4m^2} \frac{2Nn}{4n^2 - N^2} \frac{1}{\lambda_M \omega_N}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 I_{4mnMN} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \cos^2 \lambda_m x \sin \omega_n y \cos \omega_n y \sin \lambda_M x \cos \omega_N y \, dx \, dy = \\
 &= \left(1 - \frac{M^2}{4m^2 - M^2} \right) \frac{2Nn}{4n^2 - N^2} \frac{1}{\lambda_M \omega_N}, \\
 I_{5mnMN} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \sin^2 \lambda_m x \sin^2 \omega_n y \sin \lambda_M x \sin \omega_N y \, dx \, dy = \\
 &= \frac{4m^2}{M^2 - 4m^2} \frac{4n^2}{N^2 - 4n^2} \frac{1}{\lambda_M \omega_N},
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 I_{6mnMN} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \cos^2 \lambda_m x \cos^2 \omega_n y \sin \lambda_M x \sin \omega_N y \, dx \, dy = \\
 &= \left(1 - \frac{M^2}{4m^2 - M^2} \right) \left(1 - \frac{N^2}{4n^2 - N^2} \right) \frac{1}{\lambda_M \omega_N},
 \end{aligned}$$

für ungerade M und ungerade N (für gerade M oder gerade N $I_{imnMN} = 0$).

$$\begin{aligned}
 \Delta n_{1MN}^{H(D)} &= - \frac{1}{\gamma l_1} \frac{2}{l_1 l_2} \bar{t} \bar{a} \sum_{m,n=0,1,2,\dots} Z_{3mn}^2 \Big|_{\substack{z=s \\ (z=-s)}} \lambda_m^2 I_{7nMN}, \\
 \Delta n_{2MN}^{H(D)} &= - \frac{1}{\gamma l_2} \frac{2}{l_1 l_2} \bar{t} \bar{a} \sum_{m,n=0,1,2,\dots} Z_{3mn}^2 \Big|_{\substack{z=s \\ (z=-s)}} \omega_n^2 I_{8mMN},
 \end{aligned} \tag{31}$$

Hier bedeuten

$$\begin{aligned}
 I_{7nMN} &= \int_0^{l_2} \sin^2 \omega_n y \sin \omega_N y \, dy \left[\int_0^{\gamma l_1} \cos \lambda_M x \, dx - \int_{l_1(1-\gamma)}^{l_1} \cos \lambda_M x \, dx \right] = \\
 &= \frac{8n^2}{(N^2 - 4n^2)} \frac{1}{\lambda_M \omega_N} \sin \lambda_M \gamma l_1, \\
 I_{8mMN} &= \int_0^{l_1} \sin^2 \lambda_m x \sin \lambda_M x \, dx \left[\int_0^{\gamma l_2} \cos \omega_N y \, dy - \int_{l_2(1-\gamma)}^{l_2} \cos \omega_N y \, dy \right] = \\
 &= \frac{8m^2}{(M^2 - 4m^2)} \frac{1}{\lambda_M \omega_N} \sin \omega_N \gamma l_2
 \end{aligned} \tag{32}$$

für ungerade M und ungerade N (für gerade M oder gerade N $I_{imnMN} = 0$).

4. Zahlenbeispiel

Rechteckige, frei gelagerte Sandwich-Platte mit isotropen Schichten, mit Oberflächenbelastung

$$p_3^H = \sin \lambda_1 x \sin \omega_1 y.$$

Geometrische und physikalische Charakteristiken der Platte:

$$\begin{aligned} l_1 &= 200 \text{ cm}, & l_2 &= 100 \text{ cm}, \\ t &= 0,04 \text{ cm}, & s &= 5,0 \text{ cm}, \\ \bar{E} &= 7 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2, & \bar{G} &= \frac{1}{2,6} \bar{E}, \quad \bar{\mu} = 0,3, & \bar{a} &= 7,6923 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2, \\ & & & & \bar{b} &= 2,3077 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2, \\ E &= 104 \text{ kp/cm}^2, & G &= \frac{1}{2,6} E, \quad \mu = 0,3, & a &= 140 \text{ kp/cm}^2, \\ & & & & b &= 60 \text{ kp/cm}^2. \end{aligned}$$

Wir suchen die Lösung nach Absatz 2. Zuerst bestimmen wir als erste Annäherung die Verschiebung nach der linearen Theorie, das ist mit Vernachlässigung der nichtlinearen Glieder in den Beziehungen (5), (8) und (9). Zum Vergleich bestimmen wir außer den Maximalwerten der Durchbiegungen auch die Maximalwerte der Normalspannungen für $p_{3,11}^H = 1 \text{ kp/cm}^2$. Die Durchbiegungsfläche und die Normalspannungen in der Ober- bzw. Unterschicht sind durch

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{m,n} Z_{3mn}^{H(D)} \sin \lambda_m x \sin \omega_n y, \\ \sigma_2^{H(D)} &= - \sum_{m,n} (\bar{b} \lambda_m Z_{1mn}^{H(D)} + \bar{a} \omega_n Z_{2mn}^{H(D)}) \sin \lambda_m x \sin \omega_n y \end{aligned} \right\} (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (33)$$

gegeben, wo Z_{imn} ($i = 1, 2, 3$) die Funktionen sind, die durch (13) definiert und von den Konstanten U_{imn} , V_{imn} , W_{imn} ($i = 1, 2, 3, 4$) abhängig sind. Im gegebenen Beispiel bekommen wir als Ergebniss der linearen Theorie für $x = l_1/2$, $y = l_2/2$, $z = \pm s$

$$\begin{aligned} \max w &= w^H = 2,467 \text{ cm}, \\ \max \sigma &= \sigma_2^H = 1703 \text{ kp/cm}^2, \\ \min \sigma &= \sigma_2^D = -1746 \text{ kp/cm}^2. \end{aligned}$$

Diese Werte fassen wir als erste Näherung der genaueren Theorie auf.

Durch Einführung der Funktionen $Z_{i,11}^{H(D)}$ in (21) bis (32) bekommen wir neue Belastungswerte ${}^{(2)}p_i^{H(D)}$.

In der zweiten Annäherung bestimmen wir die Funktionen $Z_{i,mn}^{H(D)}$ für ${}^{(2)}p_{i,mn}^{H(D)}$. Mit Rücksicht auf die lineare Abhängigkeit und den sich wiederholenden Algorithmus für verschiedene m, n Kombinationen ist es nützlich, ein Programm für einen Rechenautomaten zu benutzen.

Durch Einführung der Funktion $Z_{imn}^{H(D)}$ in (33) bekommen wir in der zweiten Annäherung für $x = l_1/2$, $y = l_2/2$, $z = \pm s$.

$$\begin{aligned} \max w &= w^H = 2,465 \text{ cm}, \\ \max \sigma^H &= \sigma_2^H = 1859 \text{ kp/cm}^2, \\ \min \sigma^D &= \sigma_2^D = -1609 \text{ kp/cm}^2. \end{aligned}$$

In den weiteren Annäherungen (wenn eine genügende Zahl von Kombinationen von m, n benutzt wurde), ändern sich diese Werte praktisch nicht mehr.

NON-LINEAR BENDING THEORY OF SANDWICH PLATES. I.

V. DUNĐROVÁ, V. KOVARIK, P. SLAPÁK

SUMMARY

This paper consists of three parts, each of them containing a separate finite-deflection theory of sandwich plates. These theories differ not only by their structure and manner of derivation, but also by the possibility of their application.

In Part I, the problem of bending of a rectangular plate with isotropic core and very thin transversally isotropic faces is formulated, finite-deflection relations being considered in the faces only. In this formulation basic equations are linear while some of the boundary conditions show to be non-linear ones. The solution is sought by means of the method of successive approximations.

THÉORIE DE LA FLEXION DES PLAQUES SANDWICH. I.

V. DUNĐROVÁ, V. KOVARIK, P. SLAPÁK

RÉSUMÉ

L'ouvrage est divisé en trois chapitres. Chaque chapitre contient une théorie originale des plaques de type «sandwich», considérant les grandes déformations. La différence entre ces théories ne porte pas uniquement sur le procédé de leur construction, mais aussi sur les possibilités d'application qu'elles comportent.

Le premier chapitre contient la définition du problème et la solution du cas de la plaque rectangulaire à cellule isotropique. Les couches fines extérieures — isotropiques aussi —, présentent de grandes déformations. Les équations fondamentales du problème sont linéaires, tandis que les conditions au contour sont définies par l'intermédiaire de relations non-linéaires. La solution est obtenue par la méthode des approximations successives.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА SANDWICH-PLATES I.

В. ДУНДРОВА, В. КОВАРИК, П. ШЛАПАК

РЕЗЮМЕ

Настоящая работа состоит из трех частей, каждая из которых содержит самостоятельную теорию трехслойных пластинок с большим прогибом. Отличие этих теорий заключается не только в способе их вывода, но и в возможности их применения.

В первой части сформулирована и решена проблема изгиба прямоугольной пластинки с изотропным наполнителем и очень тонкими трансверсально-изотропными внешними слоями. Конечные прогибы учитываются только в этих внешних слоях. В формулировке проблемы основные дифференциальные уравнения являются линейными, но некоторые из краевых условий нелинейны. Решение ищется методом последовательного приближения.

STABILITY ANALYSIS OF THIN ANNULAR PLATES COMPRESSED ALONG THE OUTER OR INNER EDGE BY UNIFORMLY DISTRIBUTED RADIAL FORCES

M. RÓZSA

CAND. OF TECHN. SC.

BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received July 8, 1964]

The problem of lateral buckling of thin annular plates compressed by uniformly distributed radial forces along the outer or inner edge has been reduced to the eigenvalue problem of a series of integrodifferential equations. The calculated values of the critical compressive forces are shown in tables and in diagrams.

Introduction

There are two kinds of buckling for annular plates under uniformly distributed radial load: buckling may occur either laterally or in the plane of the plate. The first case of buckling occurs for thin annular plates. The second case of buckling may occur for annular plates thick in the axial direction.

Here the stability analysis of annular plates thin in axial direction will be dealt with, therefore only the risk of lateral buckling is taken into consideration. The first part of this paper deals with the stability analysis of annular plates under radial compression along the outer edge, with free inner edge, and its second part with stability analysis of annular plates under radial compression along the inner edge, with free outer edge.

Stability problem of annular plates compressed by uniformly distributed *equal* radial forces along the outer *and* inner edges has been dealt with by W. R. DEAN [1] and N. YAMAKI [2]. YAMAKI gave the critical values of the compressive forces for all possible cases of edge conditions in tables and charts. Hence this stability problem has been fully solved, it is needless to resume it.

Stability of annular plates radially compressed at the outer (clamped or simply supported) edge and free from load at the inner free boundary was studied by E. MEISSNER [3]. His calculations were based on the assumption that the buckled surface of the annular plate is a surface of revolution. Nevertheless this assumption is not always correct for plates clamped at the outer boundary, as was already assumed by TIMOSHENKO ([4], pp. 391 to 392). Namely, after having presented the result of MEISSNER's calculation, TIMOSHENKO states in his book:

"It must be noted, however, that in this discussion buckling symmetrical with respect to the center of the plate is assumed while for b/a (b — radius of the inner boundary, a — radius of the outer boundary) approaching unity the conditions for a compressed ring with outer boundary clamped are analogous to those of a long compressed rectangular plate clamped along one side and free along the other. Such a plate buckles in many waves (see p. 364); we should expect that in the case of a narrow ring also several waves along the circumference would be formed during buckling and that the values of k obtained on the assumption of symmetrical buckling would give exaggerated values for $(N)_{cr}$."

This assumption of TIMOSHENKO has fully been supported by calculations presented in this paper. The assumption of MEISSNER is only correct if $b/a < 0,46$. For $b/a > 0,46$, the buckled surface of the plate is not a surface of revolution, because the inner edge of the annular plate buckles into a sine curve of one or more waves. With the increasing ratio b/a the number of waves increases, the difference between the critical value of the compressive forces and the values presented by MEISSNER becoming even greater.

For a simply supported outer boundary compressed by uniformly distributed radial forces the case is different. Namely, in this case the limit process of TIMOSHENKO referring to the above citation turns an elementary plate sector into a long rectangle in longitudinal compression, with one side parallel to the compressive forces simply supported, and the other side free. Such a plate will always buckle in one half-wave, independent of the side ratio (see e.g. p. 362 of [4]). Hence the buckled surface of annular plates simply supported at the outer boundary, compressed by uniformly distributed radial forces, is always a surface of revolution, thus the assumption of MEISSNER is justified. Therefore, stability analysis of simply supported annular plates will not be dealt with here.

Up to now no paper on the stability of annular plates compressed at the inner boundary and free from radial forces at the outer boundary has been published, except for the special case of a plate with an infinite outer diameter [5].

I. Buckling of annular plates compressed by uniformly distributed radial forces along the outer boundary

1. Derivation of the integrodifferential equations of the buckled surface of annular plates

The outer boundary of radius a of the annular plate is loaded by uniformly distributed radial compressive forces N (Fig. 1). This boundary is assumed to be clamped against lateral buckling. The inner boundary of radius b of the annular plate is not supported and free from radial forces. For the sake of simplicity it is assumed that $a = 1$.

Radial stresses σ_r and hoop stresses σ_φ in a plate subjected to radial compressive forces are given by the LAMÉ formulae:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{N}{h} \cdot \frac{1}{1-b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\varphi &= -\frac{N}{h} \cdot \frac{1}{1-b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

where

h plate thickness;
 r distance from the center of the annular plate.

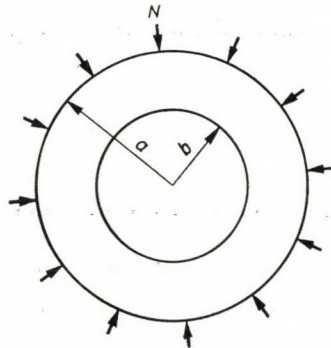


Fig. 1. Annular plate compressed along the outer boundary

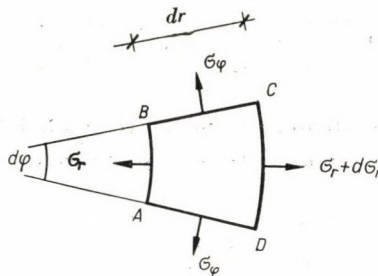


Fig. 2. Elementary sector of an annular plate

To derive the equation of the buckled surface, first we have to consider the equilibrium conditions for the element ABCD of the plate (Fig. 2). The deflection of the plate from its original plane is denoted by z . The components of the normal forces acting on sections CD and AB in the direction of the normal to the original plane are:

$$\left(h \sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r+dr} d\varphi - \left(h \sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r}\right)_r d\varphi = h \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r}\right) dr \cdot d\varphi.$$

Similarly, for sections BD and AC:

$$\left(h \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_{\varphi+d\varphi} dr - \left(h \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\varphi dr = h \frac{\sigma_\varphi}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} dr d\varphi.$$

Summing up both expressions and dividing the sum by the area of the element $r d\varphi \cdot dr$, we obtain the intensity of fictive load q acting on the buckled plate:

$$q = \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r r \frac{\partial z}{\partial r} \right) + \frac{h}{r^2} \sigma_\varphi \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}. \quad (2)$$

The equilibrium condition for the radial components of the forces acting on element ABCD is:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) = \sigma_\varphi.$$

Substituting this expression into the formula above we obtain:

$$q = h \left[\sigma_r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \sigma_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (2^*)$$

We substitute expressions (1) of stresses σ_r and σ_φ into (2*):

$$q = - \frac{N}{1-b^2} \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (3)$$

The equilibrium condition of the plate loaded by fictive load q is expressed by the plate equation written in polar coordinates:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) = \\ & = - \frac{N}{D(1-b^2)} \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

where $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ — bending stiffness of the plate.¹

Hence each N eigenvalue and the pertaining $z(r, \varphi)$ function must satisfy differential equation (4); of course $z(r, \varphi)$ has to satisfy boundary conditions too.

Let us assume that the plate buckles in n waves, such as:

$$z = w_n(r) \cos n\varphi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

¹ This equation had been deduced in other form in a paper by MEISSNER [3].

Substituting this expression into (3) and introducing notation

$$P_n = -\frac{N}{1-b^2} \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) \right], \quad (6)$$

we obtain:

$$q = P_n \cos n\varphi. \quad (7)$$

According to (7), fictive load q is always the same function of angle φ as deflection z .

Substituting expression (5) into (4) and taking into account (6), we obtain:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right]^2 \cdot w_n = \frac{P_n}{D}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (8)$$

or in detail:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_n}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w_n}{dr^3} - \frac{1+2n^2}{r^2} \cdot \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1+2n^2}{r^3} \cdot \frac{dw_n}{dr} + \\ + \frac{n^4 - 4n^2}{r^4} w_n = -\frac{N_n}{D(1-b^2)} \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) \right]. \end{aligned} \quad (8^*)$$

Functions w_n satisfy ordinary differential equations (8) and the following boundary conditions:

clamped edge at $r = 1$:

$$(w_n)_{r=1} = 0, \quad (a)$$

$$\left(\frac{dw_n}{dr} \right)_{r=1} = 0; \quad (b)$$

free edge at $r = b$:

radial moment equals zero, i. e.

$$\left[\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) \right]_{r=b} = 0, \quad (c)$$

shearing force equals zero:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} (\Delta z) + \frac{1-\mu}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \right]_{r=b} = 0.$$

Substituting expression (5) and executing involved operations we obtain:

$$\left[\frac{d^3 w_n}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 w_n}{dr^2} - (1 + 2n^2 - \mu n^2) \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dw_n}{dr} + (3n^2 - \mu n^2) \frac{1}{r^3} w_n \right]_{r=b} = 0. \quad (d)$$

In the further calculations the value of $\mu = 1/3$ is taken, corresponding to what taken by MEISSNER [3].

Differential equations (8), together with boundary conditions (a) through (d) constitute *eigenvalue problems* concerning "deflection-amplitude" functions $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$. To each eigenvalue problem belongs some eigenvalue $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$. The actual buckling always occurs at the compressive force N_i (in form of i sine waves) which is the least among $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$ for the given ratio b/a .

Now N_i is to be determined.

The presented eigenvalue problems are first to be demonstrated to be *self-adjoint*. To this aim differential equation (8) will be multiplied by r to put it to the form:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left(r \frac{d^2 w_n}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{1 + 2n^2}{r} \cdot \frac{dw_n}{dr} \right) + \frac{n^4 - 4n^2}{r^3} w_n = \\ = - \frac{N_n}{D(1 - b^2)} \cdot \frac{d}{dr} \left[\left(r - \frac{b^2}{r} \right) \frac{dw_n}{dr} \right]. \end{aligned}$$

All terms in this equation are self-adjoint [6, 7], hence these eigenvalue problems are also self-adjoint.

In self-adjoint eigenvalue problems the least eigenvalue can be determined by means of the *iteration method* [7]. If this method would be applied to the problem given by differential equations (8) and conditions (a) through (d), then for each step of iteration one inhomogeneous Euler differential equation of the fourth order could be solved. It is known that the solution of an inhomogeneous linear differential equation can be reduced by the method of varying the constants to the solution of a homogeneous equation. However, for this problem this method would lead to very cumbersome calculations, still further complicated by the necessity of solving a system of linear equations in four unknown constants of integration for each step of iteration.

The here treated eigenvalue problem can be reduced to the eigenvalue problem of a homogeneous Fredholm integral equation of the second kind. However, from the point of view of solution this Fredholm integral equation

is not advantageous, except for the case of symmetrical buckling ($n = 0$). The mentioned integral equation for $n = 0$ is derived in the Appendix.

Here this eigenvalue problem will be reduced by means of the *influence function* (Green's function) of the deflection amplitude, to the eigenvalue problem of an *integrodifferential equation*, which can be advantageously solved by the method of iteration.

Before deriving this integrodifferential equation, the influence functions of deflection-amplitude $w_n(\varrho, r) \equiv K_n(\varrho, r)$ are to be determined. (r = radius of the circle at which the load is applied; ϱ = radius of the circle at which the deflection is calculated.) Influence functions, as is known from the theory of the Green functions, satisfy the following conditions:

I. Except for point $\varrho = r$, they satisfy the homogeneous equation corresponding to differential equations (8):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} \right]^2 K_n(\varrho, r) = 0, \quad (9)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

II. At $\varrho = 1$ and $\varrho = b$ they satisfy homogeneous boundary conditions (a), (b), (c), (d) written down for w_n .

III. At $\varrho = r$ the influence functions and their first two derivatives with respect to ϱ are continuous, their third derivative is discontinuous, corresponding to the concentrated load $p_n = 1$. In particular:

$$[K_n(\varrho, r)]_{\varrho=r-0} = [K_n(\varrho, r)]_{\varrho=r+0}, \quad (e)$$

$$\left[\frac{\partial K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=r-0} = \left[\frac{\partial K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=r+0}, \quad (f)$$

$$\left[\frac{\partial^2 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^2} \right]_{\varrho=r-0} = \left[\frac{\partial^2 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^2} \right]_{\varrho=r+0}, \quad (g)$$

$$\left[\frac{\partial^3 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^3} \right]_{\varrho=r-0} + \frac{1}{D} = \left[\frac{\partial^3 K_n(\varrho, r)}{\partial \varrho^3} \right]_{\varrho=r+0}. \quad (h)$$

To calculate the influence functions, general solutions of the homogeneous Euler differential equations (9) will be written:

for $n = 0$

$$K_0(\varrho, r) = A_0(r) + B_0(r) \varrho^2 + C_0(r) \varrho^2 \ln \varrho + D_0(r) \ln \varrho;$$

for $n = 1$

$$K_1(\varrho, r) = A_1(r) \varrho + B_1(r) \frac{1}{\varrho} + C_1(r) \varrho^3 + D_1(r) \varrho \ln \varrho; \quad (10)$$

for $n > 1$

$$K_n(\varrho, r) = A_n(r) \varrho^n + B_n(r) \varrho^{-n} + C_n(r) \varrho^{n+2} + D_n(r) \varrho^{-n+2}.$$

Boundary conditions for sections $b \leq \varrho \leq r$ and $r \leq \varrho \leq 1$ resp., being different, constants A, B, C, D are also different for these sections. Thus two different expressions will be obtained for $K(\varrho, r)$, for $\varrho \leq r$ and for $r \leq \varrho$ resp. The eight constants are determined by a system of linear equations derived from conditions (a) through (h). By solving these systems of equations for values $n = 0, n = 1$ and $n > 1$, and substituting the obtained values of the constants into eqs. (10), the expressions for the influence functions will be as follows:

For $n = 0$:

a) $\varrho \leq r$

$$K_0(\varrho, r) = \frac{r}{D(8 + 16b^2)} \left[(1 + 4b^2) + (-1 - 4b^2)r^2 + (2 + 4b^2)r^2 \ln r + \right. \\ \left. + 4b^2 \ln r + (1 - r^2 + 2 \ln r)\varrho^2 + (4b^2 - 4b^2 r^2 + 8b^2 \ln r) \ln \varrho \right]; \quad (11a)$$

b) $\varrho \geq r$

$$K_0(\varrho, r) = \frac{r}{D(8 + 16b^2)} \left[(1 + 4b^2) + r^2 + 4b^2 \ln r - \right. \\ \left. - (1 + 4b^2 + r^2 + 4b^2 \ln r)\varrho^2 + (2 + 4b^2)\varrho^2 \ln \varrho + \right. \\ \left. + (4b^2 - 2r^2 + 8b^2 \ln r) \ln \varrho \right].$$

For $n = 1$:

a) $\varrho \geq r$

$$K_1(\varrho, r) = \frac{r}{D(16 + 80b^4)} \left\{ \left[(-2 + 10b^4)r - 10b^4 \cdot \frac{1}{r} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2r^3 - (4 + 20b^4)r \ln r \right] \varrho + \left(-10b^4 r + 5b^4 \frac{1}{r} + 5b^4 r^3 \right) \frac{1}{\varrho} + \right. \\ \left. + \left(2r - \frac{1}{r} - r^3 \right) \varrho^3 \right\}; \quad (11b)$$

b) $\varrho \geq r$

$$K_1(\varrho, r) = \frac{r}{D(16 + 80b^4)} \left\{ \left[(-2 + 10b^4)r - 10b^4 \frac{1}{r} + 2r^3 \right] \varrho + \right. \\ \left. + \left(-10b^4 r + 5b^4 \frac{1}{r} - r^3 \right) \frac{1}{\varrho} + \right. \\ \left. + \left(2r + 5b^4 \frac{1}{r} - r^3 \right) \varrho^3 - (4 + 20b^4)r\varrho \ln \varrho \right\}.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n} b^2 - \frac{5}{n(n+1)} b^{-2n+2} \right) r^{n+2} - \\
& - \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{2n+2}) + \left(\frac{n^2 + 24}{n^2(n+1)} b^4 + \frac{5}{n+1} b^{2n+2} \right) r^{-n} \Big] \varrho^{-n} + \\
& + \left[\frac{1}{n} (b^2 + 5b^{-2n+2}) r^n - \frac{1}{n+1} (1 + 5b^{-2n+2}) r^{n+2} + \right. \\
& + (1 - b^2) r^{-n+2} + \left. \left(-\frac{n-1}{n} b^2 + \frac{n^2 + 24}{n(n+1)} b^4 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{5}{n(n+1)} b^{2n+2} \right) r^{-n} \right] \varrho^{n+2} + \left[\left(-\frac{n+1}{n} b^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{n^2 + 24}{n(n-1)} b^4 + \frac{5}{n(n-1)} b^{-2n+2} \right) r^n + (1 - b^2) r^{n+2} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{n-1} (1 + 5b^{2n+2}) r^{-n+2} - \frac{1}{n} (b^2 + 5b^{2n+2}) r^{-n} \right] \varrho^{-n+2} \Big\}.
\end{aligned}$$

We shall prove now that

$$K_n(\varrho, r) \frac{1}{r}$$

is a symmetrical function of variables ϱ and r . Namely the work done by load $q = 1 \cdot \cos n\varphi$ acting at radius ϱ due to the deflection $z = K_n(\varrho, r) \cos n\varphi$ produced by the load $q = 1 \cdot \cos n\varphi$ acting at radius r is:

$$M_\varrho = \int_{\varphi=0}^{2\pi} z \cdot q \cdot \varrho \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} [K_n(\varrho, r) \cos n\varphi] (1 \cos n\varphi) \varrho \, d\varphi = \pi K_n(\varrho, r) \varrho.$$

Similarly, the work done by load $q = 1 \cdot \cos n\varphi$ acting at radius r due to the deflection $z = K_n(r, \varrho) \cos n\varphi$ produced by the load $q = 1 \cdot \cos n\varphi$ acting at radius r is:

$$M_r = \pi K_n(r, \varrho) \cdot r.$$

According to Betti's theorem, $M_r = M_\varrho$, hence:

$$K_n(\varrho, r) \cdot \frac{1}{r} = K_n(r, \varrho) \frac{1}{\varrho}. \quad (12)$$

Thereby symmetry of the above mentioned influence function has been proved.

Functions (11), calculated independently of each other, satisfy condition (12), thereby proving the correctness of the calculations.

By means of the influence function $K_n(\varrho, r)$ the deflection-amplitude $w_n(\varrho)$ for buckling in n waves can be written as:

$$w_n(\varrho) = \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) p_n(r) dr. \quad (13)$$

Substituting expression (6) of the fictive load $p_n(r)$ into eq. (13) we obtain:

$$\begin{aligned} w_n(\varrho) = & -\frac{N_n}{1-b^2} \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \frac{d^2 w_n(r)}{dr^2} + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{dw_n(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n(r) \right) \right] dr, \\ & (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (13^*)$$

The eigenvalue problem written in the form of homogeneous integro-differential equations (13*) is identical to the eigenvalue problem defined by differential equations (8*) and by the boundary conditions (a) through (d). In eq. (13*) the boundary conditions are implicitly given by the influence functions.

2. Solution of the integrodifferential equations

The least eigenvalue of integrodifferential equations (13*) was determined by iteration [7]. Iteration was executed by means of the recursive formula:

$$\begin{aligned} w_n^{(i)}(\varrho) = & -\frac{D}{1-b^2} \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \frac{d^2}{dr^2} w_n^{(i-1)}(r) + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} w_n^{(i-1)}(r) - \frac{n^2}{r^2} w_n^{(i-1)}(r) \right) \right] dr; \\ & (n = 0, 1, 2, 3, \dots), (i = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

The initial function $w_n^{(0)}(r)$ can be arbitrarily assumed, with the limitation that it cannot be orthogonal to the first eigenfunction. For the buckling of an annular plate of diameter $a = 1$ in n waves the least eigenvalue N_n is given by the following formula:

$$N_n = D \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_n^{(i-1)}(b)}{w_n^{(i)}(b)}.$$

It is easy to prove that in the general case where $a \neq 1$, the above formula assumes the form:

$$N_n = k_n \cdot \frac{D}{a^2}, \quad (15)$$

where

$$k_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{w_n^{(i-1)}(b)}{w_n^{(i)}(b)}. \quad (16)$$

Coefficient k_n was determined for cases $n = 0, 1, 2, 3$ and for different values of $\beta = b/a$. To shorten the calculations, function $w_n^{(0)}(r)$ has been so assumed as to make the pertaining fictive load be equal to unity that is:

$$-\frac{D}{1-b^2} \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \frac{d^2}{dr^2} w_n^{(0)}(r) + \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} w_n^{(0)}(r) - \frac{n^2}{r^2} w_n^{(0)}(r) \right) \right] = 1.$$

By this assumption formula (14) takes the following simpler form for the first step of iteration:

$$w_n^{(1)}(\varrho) = \int_{r=b}^1 K_n(\varrho, r) \cdot dr.$$

The convergence of the iteration being rapid, we obtained after the second iterative step ($i = 2$) a good approximation for k , hence iteration was not continued.

The values of k_n obtained after the second iterative step in function of $\beta = b/a$ are given in Tables I, II, III, IV. In diagrams of Fig. 3 the more illustrative $k(1 - \beta)$ values have been plotted instead of k . Table I and Fig. 3 also show values calculated by MEISSNER [3] for $n = 0$ (symmetrical buckling). Deviation between the above iterative values and those given by MEISSNER is throughout less than ~ 1 per cent.

(Note, however, that MEISSNER determined the value of k_0 but for certain irrational β values, so that here the MEISSNER values are only approximations obtained by interpolation.

For an annular plate with a small ratio of width to radius, ($\beta \approx 1$) according to TIMOSHENKO's consideration mentioned previously, calculation of the critical force can be reduced to the stability analysis of an elongated, rectangular plate, with one of the sides, parallel to the compressive force, clamped, the other one which is parallel free. (Edge conditions along the other two sides do not influence the value of the critical force due to the highly

elongated form of the plate). Under these conditions buckling occurs in a great number of waves ($n \rightarrow \infty$). Value of the critical compressive force P_∞ perpendicular to the radius can easily be computed from a transcendental equation given in the literature ([4] p. 363):

$$P_\infty = k' \pi^2 \frac{D}{(a - b)^2} .$$

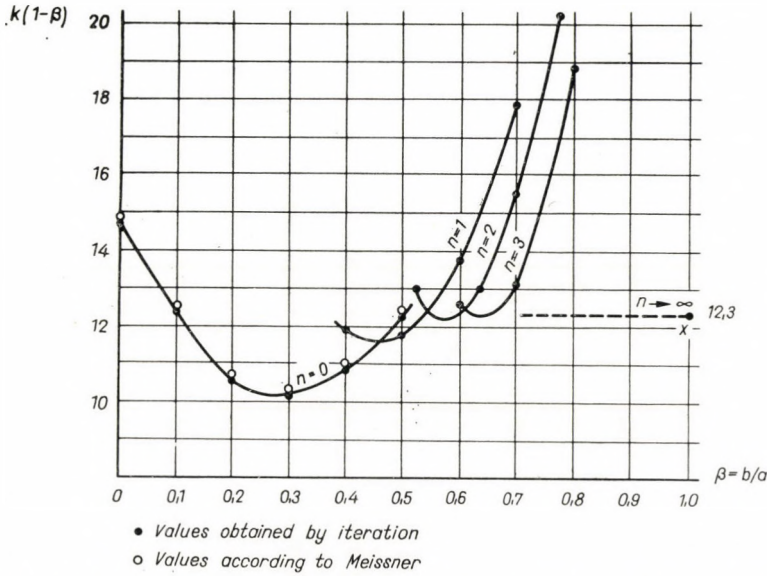


Fig. 3. Diagram for the determination of the critical value of the compressive forces acting along the outer boundary of an annular plate

From the transcendental equation for $\mu = 1/3$ a value of $k' = 1,25$ is obtained, i.e.:

$$P_\infty = 12,3 \frac{D}{(a - b)^2} .$$

From the equilibrium condition the critical value of the radial compressive force acting along radius a is:

$$N_\infty = P_\infty \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{12,3}{1-\beta} \cdot \frac{D}{a^2}$$

or, to the analogy of (15):

$$N_\infty = k_\infty \cdot \frac{D}{a^2}$$

where

$$k_{\infty} (1 - \beta) = 12,3.$$

Thus in Fig. 3 to the value $\beta \approx 1$ the point denoted by X of the ordinate $k_{\infty} (1 - \beta) = 12,3$ will pertain.

The straight line parallel to the abscissa axis passing through point X , as can be seen, nearly coincides with the horizontal tangent to the curve k_3 corresponding to $n = 3$. Evidently, the minimum values of the functions k

Table I

Values of coefficient k_0 ($n = 0$)

β	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
k_0	14,7	13,8	13,3	14,6	18,1	24,3
k_0 (according to MEISSNER)	14,7	13,9	13,4	14,7	18,3	24,8

Table II

Values of coefficient k_1 ($n = 1$)

β	0.4	0.5	0.6	0.7
k_1	19,8	23,6	34,2	59,7

Table III

Values of coefficient k_2 ($n = 2$)

β	0.547	0.632	0.707	0.775
k_2	28,8	35,5	53,1	90,3

Note : To shorten calculations, for $n = 2$, the values of k_2 have been determined for $\beta^2 = 0,3, 0,4, 0,5$ and $0,6$.

Table IV

Values of coefficient k_3 ($n = 3$)

β	0.6	0.7	0.8
k_3	31,4	43,6	94,2

pertaining to $n > 3$ also lie nearly on this straight line, in other words this straight line is the envelope of the curves k of the order $n = 3, 4, 5 \dots$. With increasing n , these curves being ever nearer to each other, the formula $k = 12,3/(1 - \beta)$ with increasing β approaches the effective value of k . This fact makes calculation of k curves for $n > 3$ superfluous.

II. Buckling of annular plates compressed by uniformly distributed radial forces along the inner boundary

The inner boundary of radius a of the annular plate is acted upon by uniformly distributed radial compressive forces N (Fig. 4). This boundary is

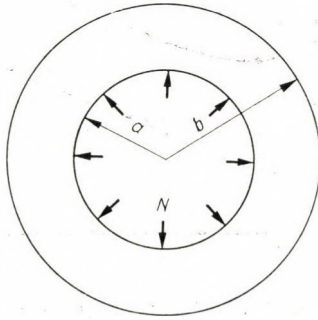


Fig. 4. Annular plate compressed along the inner boundary

assumed to be clamped against lateral buckling. The outer boundary of radius b of the annular plate is unsupported, and free from radial forces. For the sake of simplicity — similarly to annular plates loaded at the outer edge — it is assumed that $a = 1$.

It is easy to demonstrate that, using notations as before, the LAMÉ equations (1), differential equations (8), boundary conditions (a) through (d) and integrodifferential equations (13*) are valid in their unchanged form. Therefore, the critical compressive force was determined by means of the recursion formula (14) applied above. Here also, iteration has only been continued up to the second step.

In spite of the identity of the formulae, annular plates compressed at the inner boundary, contrarily to those compressed at the outer boundary, always buckle *symmetrically* with respect to the center of the plate. Namely, in annular plates compressed at the inner boundary, according to (1), the hoop stress σ_φ is tension, since $b > 1$. In case of buckling in one or more waves, this tensile stress would produce a fictive load tending to counteract buckling. Therefore here buckled surface is always symmetrical ($n = 0$).

For $n = 0$, values of the coefficient k in formula (15) as a function of $\beta = b/a$ are given in Table V. Figure 5, similarly to Fig. 3 for annular plates compressed along the outer boundary shows values of $k(\beta - 1)$. As is to be seen, if β approaches unity, the value of k increases beyond all limits. Of course, in reality the value of the critical force will not increase to infinity, the described method of calculation being valid in the elastic range only. Besides

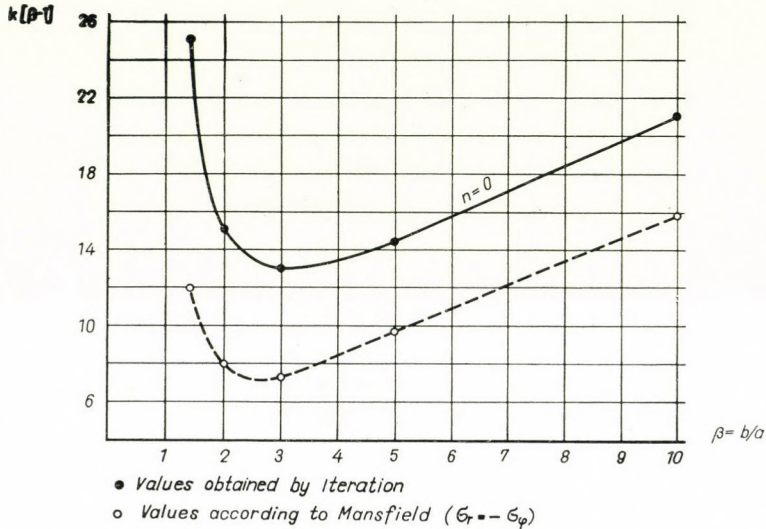


Fig. 5. Diagram for the determination of the critical value of the compressive forces acting along the inner boundary of an annular plate

for $\beta \approx 1$, buckling in the plane of the annular plate may occur instead of lateral buckling.

Up to now no paper analysing the stability of annular plates under radial compression along the inner, clamped boundary, and free from radial forces along the free boundary has been published. A somewhat related problem has been treated by MANSFIELD [5], the case of the annular plate under radial compression along its inner clamped boundary of radius a , and under

Table V
Values of coefficient k for $\beta > 1$ ($n = 0$)

β	1,4	2,0	3,0	5,0	10,0
k	63,0	15,0	6,56	3,63	2,33
k (Mansfield)	30	8,0	3,8	2,5	1,75
k (Mansfield)/ k	0,47	0,53	0,58	0,69	0,75

radial compression $N(a/b)^2$ along its outer free boundary of radius b . Then, according to LAMÉ's formula, in all points of the plate it is $\sigma_r = -\sigma_\varphi$. The values of k obtained by MANSFIELD are shown in Table V, while the values of $k(\beta - 1)$ are plotted with dotted lines in Fig. 5. Due to the compressive forces acting along the outer boundary, the value of the critical force is significantly lower than for an outer boundary free from compressive forces. With the increase of the outer diameter of the annular plate, the compressive forces $N(a/b)^2$ acting along the outer boundary continuously decrease, and therefore the obtained values approach those for an outer boundary free from compressive forces, (see last row of Table V). For an infinite outer diameter the difference would decrease to zero.

APPENDIX

**Integral equation of the symmetrical buckled surface
of an annular plate under radial compression along one boundary**

For symmetrical buckling ($n = 0$), according to eqs. (5) and (7) it is:

$$z \equiv w \quad \text{and} \quad q \equiv p.$$

The intensity of the fictive load is, according to (2):

$$p(r) = \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left(\sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr.$$

Introducing this expression into (13):

$$w(\varrho) = h \int_{r=b}^1 K_0(\varrho, r) \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(\sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr.$$

According to (12), term

$$K_0(\varrho, r) \frac{1}{r}$$

is a symmetrical function of variables ϱ and r . We introduce notation

$$L(\varrho, r) = K_0(\varrho, r) \frac{1}{r}$$

hence

$$w(\varrho) = h \int_{r=b}^1 L(\varrho, r) \frac{d}{dr} \left(\sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr$$

Differentiating the equation with respect to ϱ :

$$\frac{dw(\varrho)}{d\varrho} = h \int_{r=b}^1 \frac{\partial L(\varrho, r)}{\partial \varrho} \frac{d}{dr} \left(\sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right) dr.$$

Partially integrating:

$$\frac{dw(\varrho)}{d\varrho} = \left[h \frac{\partial L(\varrho, r)}{\partial \varrho} \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} \right]_{r=b}^1 - h \int_{r=b}^1 \frac{\partial^2 L(\varrho, r)}{\partial \varrho \partial r} \sigma_r r \frac{dw(r)}{dr} dr.$$

Since at $r = b$ it is $\sigma_r = 0$ (free boundary), while at $r = 1$, due to the restraint, $dw/dr = 0$, the first term on the right-hand side vanishes. Substituting expression (1) of the stress σ_r , we obtain:

$$\frac{dw(\varrho)}{d\varrho} = \frac{N}{1-b^2} \int_{r=b}^1 \frac{\partial^2 L(\varrho, r)}{\partial \varrho \partial r} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) r \frac{dw(r)}{dr} dr.$$

Let us introduce function

$$\eta(r) = \frac{dw(r)}{dr} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) r.$$

By this means we can write the above equation as:

$$\eta(\varrho) = \frac{N}{1-b^2} \int_{r=b}^1 \frac{\partial^2 L(\varrho, r)}{\partial \varrho \partial r} \sqrt{\left(\varrho - \frac{b^2}{\varrho} \right) \left(r - \frac{b^2}{r} \right)} \eta(r) dr.$$

This is a homogeneous Fredholm integral equation with a symmetrical core. It can be proved that for $b < 1$ and $b > 1$ the integral equation is always a positive definite one, thus symmetrical buckling can only occur for positive values of N .

REFERENCES

1. DEAN, W. R.: The Elastic Stability of an Annular Plate. Proc. Royal Soc. London ser. A. **106** (1924) 268—284.
2. YAMAKI, N.: Buckling of a Thin Annular Plate under Uniform Compression. *Journ. Applied Mechanics* **25** (1958), 267—273.
3. MEISSNER, E.: Über des Knicken kreisförmiger Scheiben. *Schweiz. Bauzeitung*, **101** (1933), 87—89.
4. TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M.: Theory of elastic stability (1961).
5. MANSFIELD, E. H.: On the Buckling of an Annular Plate. *Quart. Journ. of Mechanics and Appl. Mathematics* **13** (1960), 16—23.
6. KAMKE, E.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (1951). 236.
7. COLLATZ, L.: *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen* (1949).

STABILITÄTSUNTERSUCHUNG DER AM ÄUßEREN ODER INNEREN RAND
IN RADIALER RICHTUNG DREHSYMMETRISCH GEDRÜCKTEN
RINGPLATTEN

M. RÓZSA

ZUSAMMENFASSUNG

Das Problem der Ausbeulung der am Außen- oder Innenrand in radialer Richtung drehsymmetrisch gedrückten dünnen Ringplatten wird auf die Eigenwertbestimmung einer Reihe von Integrodifferentialgleichungen zurückgeführt. Die berechneten kritischen Werte der Druckkräfte sind in Tabellen und Diagrammen zusammengestellt.

ANALYSE DE LA STABILITÉ DES PLAQUES MINCES ANNULAIRES SOUS CHARGE
RADIALE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE AGISSANT SUR LE BORD EXTÉRIEUR
OU INTÉRIEUR

M. RÓZSA

RÉSUMÉ

Le problème du flambement latéral des plaques annulaires minces sous charge radiale uniformément répartie agissant sur le bord intérieur ou extérieur, est réduit à la détermination des valeurs propres d'une série d'équations intégro-différentielles. Les valeurs critiques des forces compressives sont données dans des tableaux et des diagrammes.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ ПЛАСТИН,
СЖАТЫХ ЦЕНТРАЛЬНОСИММЕТРИЧНО ПО НАРУЖНОМУ ИЛИ
ВНУТРЕННЕМУ КРАЮ

M. РОЖА

РЕЗЮМЕ

В работе проблема прогиба перпендикулярного плоскостям кольцеобразных пластин, сжатых центральносимметрично по наружному или внутреннему краю, сводится к определению собственного значения серии интегрально-дифференциальных уравнений. Результаты расчетов, полученные для критической силы сжатия, сведены в таблицы и диаграммы.

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE PLAQUES ENCASTRÉES SUR DEUX CÔTÉS OPPOSÉS ET REPOSANT LIBREMENT SUR LES DEUX AUTRES CÔTÉS

K. SZMODITS

DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES
INSTITUT SCIENTIFIQUE DU BÂTIMENT, BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 5. août 1964]

La méthode présentée est basée sur l'extension aux fonctions nodales du théorème de Goursat. Par l'emploi de ce théorème et la superposition de deux solutions connues, on peut obtenir la solution d'une plaque parfaitement encadrée le long d'un bord et reposant librement sur les bords voisins. La satisfaction des conditions d'encastrement du côté situé en face du côté encadré se fait par une itération rapidement convergente, en superposant des solutions déjà connues.

1. Introduction

L'équation biharmonique déterminant l'état de contraintes d'une plaque rectangulaire reposant librement sur son pourtour peut être décomposée, comme on sait, en deux équations harmoniques inhomogènes dont la résolution est aisément obtenue par relaxation. En cas de plaques encadrées en bordure, la décomposition n'est pas possible. Dans ce cas, la méthode numérique nécessite la résolution d'équations différentielles compliquées, remplaçant l'équation biharmonique, les avantages de la résolution par relaxation ne pouvant pas être mis à profit.

Par la méthode qui va être présentée, la détermination de la surface élastique d'une plaque rectangulaire reposant librement sur deux côtés opposés et encadrée sur les deux autres côtés, est ramenée à la résolution d'équations potentielles inhomogènes. De cette manière, le problème peut se résoudre par relaxation.

2. Application du théorème de Goursat aux fonctions nodales

Au cours du calcul, on utilise l'extension du théorème de Goursat (1) aux fonctions nodales. Selon ce théorème, si $w(x, y)$ est une fonction harmonique, c'est-à-dire $\Delta w = 0$, alors xw est une fonction biharmonique, c'est-à-dire $\Delta\Delta(xw) = 0$.

Le théorème de Goursat est valable non seulement pour la fonction continue $w(x, y)$, mais aussi pour la fonction nodale $w(x_n, y_m)$ définie dans les

noeuds n, m d'un réseau quadratique. Pour le démontrer, partons de l'expression écrite avec des différences finies (figure 1):

$$\begin{aligned} d^4 \Delta \Delta w \cong & w_s + w_g + w_k + w_0 - 4w_i + \\ & + w_g + w_v + w_r + w_k - 4w_n + \\ & + w_k + w_r + w_p + w_t - 4w_l + \\ & + w_k + w_0 + w_p + w_u - 4w_m - \\ & - 4w_n - 4w_i - 4w_l - 4w_m + 16w_k. \end{aligned}$$

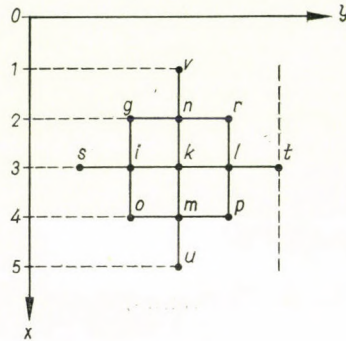


Fig. 1

Si l'axe des abscisses est choisi de façon telle que le point v se situe au lieu $x = 1$, et le point n au lieu $x = 2$, les équations ci-dessus s'écriront dans ce système de coordonnées sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} d^4 \Delta \Delta(xw) = & 3w_s + 2w_g + 3w_k + 4w_0 - 12w_i + \\ & + 2w_g + w_v + 2w_r + 3w_k - 8w_n + \\ & + 3w_k + 2w_r + 3w_t + 4w_p - 12w_l + \\ & + 3w_k + 4w_0 + 4w_p + 5w_u - 16w_m - \\ & - 8w_n - 12w_i + 12w_l - 16w_m + 48w_k. \end{aligned}$$

Étant donné que $\Delta w = 0$, en supprimant les expressions écrites avec des différences finies, on obtient:

$$\begin{aligned} d^4 \Delta \Delta(xw) = & w_s + w_k + 2w_0 - 4w_i + \\ & + w_g + w_r + 2w_k - 4w_n + \\ & + w_k + w_t + 2w_p - 4w_l + \\ & + w_0 + w_p + 2w_u - 4w_m - \\ & - 4w_i - 4w_l - 8w_m + 16w_k. \end{aligned}$$

Comme les sommes des valeurs w de chaque ligne disparaissent en raison de la condition $\Delta w = 0$, on trouve que dans le système de coordonnées ci-dessus, $\Delta \Delta(xw) = 0$.

Mais il est évident que la démonstration précédente est indépendante du choix de l'origine du système de coordonnées, car si l'origine se trouve à une distance c du point 0 ci-dessus, alors

$$\Delta\Delta[(c+x)w] = \Delta\Delta cw + \Delta\Delta(xw) = \Delta[c(\Delta w)] + \Delta\Delta(xw) = 0.$$

Par là, le théorème est démontré.

3. Solution du problème

La solution consiste essentiellement à déterminer, pour une charge donnée, la surface élastique w de la plaque reposant librement sur son pourtour, et à satisfaire la condition au contour des côtés encastres en faisant la somme de cette fonction w et des fonctions nodales biharmoniques, produites à l'aide du théorème ci-dessus.

La fonction nodale caractérisant la surface élastique de la plaque librement appuyée se calcule en décomposant, de la manière connue, l'équation de plaque $\Delta\Delta w = p/K$ en $\Delta M = -p$ et $\Delta w = -M/K$. La solution numérique de ces deux dernières équations est obtenue par combinaison linéaire des fonctions nodales — déterminées selon 2 — des membranes chargées en certains points.

Afin de tenir compte de l'encastrement, on détermine une par une les fonctions nodales R_k relatives aux valeurs au contour A_k dans les points extérieurs $x = -1$ et $y = 1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$, voisins du contour du rectangle donné. Cette fois encore, on fait usage de la méthode [2]. Donc si les côtés de la base rectangulaire donnée sont $a = md$, $b = nd$, où $d = 1$ est l'intervalle de division de notre réseau quadratique, les côtés du rectangle correspondant aux valeurs au contour seront:

$$a = (m + 1)d; \quad b = nd.$$

Des fonctions nodales harmoniques R_k , les fonctions nodales biharmoniques $O_k = xR_k$ sont formées suivant le théorème ci-dessus (figure 2).

Au cours de la multiplication par x , les conditions au contour de l'appui libre ne se modifient pas aux lieux $y = 0$ et $y = b$. Quant aux conditions au contour de l'encastrement, elles sont déterminées aux points $x = 0$, $y = k$, resp. $x = a$, $y = 0$, par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} A_k - A_k^0 + \sum_n \bar{A}_n \gamma_n^k &= A_k^0 + \sum_n A_n \alpha_n^k + \sum_n \bar{A}_n \beta_n^k, \\ \bar{A}_k - \bar{A}_k^0 + \sum_n A_n \gamma_n^k &= \bar{A}_k^0 + \sum_n \bar{A}_n \alpha_n^k + \sum_n A_n \beta_n^k. \end{aligned} \quad (1)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots)$$

où A_k^0 resp. \bar{A}_k^0 sont les valeurs des fonctions nodales de la plaque librement appuyée, aux lieux $x = 1, y = k$, resp. $x = m, y = k$, A_n , resp. \bar{A}_n étant les valeurs au contour aux lieux $x = -1, y = n$, resp. $x = m + 1$. Les équations (1) expriment que les valeurs nodales — sommes de plusieurs solutions — qui encadrent la valeur nulle des côtés encastrés, sont identiques.

Les équations (1) déterminent, d'une façon univoque, les valeurs au contour inconnues A_n, \bar{A}_n . Dans ces équations, les coefficients des termes

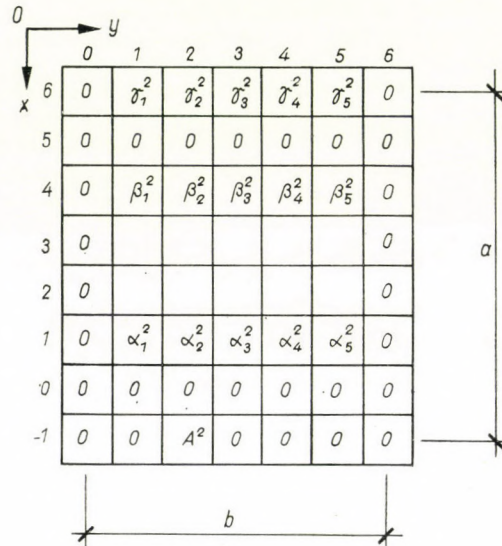


Fig. 2

diagonaux ont une valeur nettement supérieure à celles des autres coefficients, de sorte que les équations peuvent être résolues rapidement par itération. La fonction nodale cherchée est la somme de l'équation de la plaque librement appuyée et des fonctions nodales correspondant aux différentes valeurs au contour.

4. Exemple numérique

Déterminons la fonction nodale de la surface élastique d'une plaque quadrangulaire de côté $a = 5d$, encastrée sur ses côtés horizontaux, reposant librement sur ses côtés verticaux et soumise à l'action d'une charge unitaire s'exerçant en quatre noeuds intérieurs symétriques.

En déterminant par relaxation la fonction nodale de la membrane, correspondant à la valeur encadrée sur le tableau ci-dessous, on reçoit:

0	0	0	0	0	0	0	6
0	3,27589	4,92671	4,84248	3,63997	1,91011	0	5
0	8,17689	11,58846	10,80325	7,80731	4,00045	0	4
0	17,84320	22,44701	18,97475	12,78557	6,28438	0	3
0	40,70489	41,38161	29,86316	18,07584	8,35151	0	2
0	103,77087	72,46736	41,02043	21,30312	9,04625	0	1
0	301,86716	103,69654	40,44809	17,07037	6,53511	0	0
0	1000,00000	0	0	0	0	0	-1

7 De là, on peut obtenir par la méthode (2) les fonctions nodales de nouvelles valeur au contour:

0	0	0	0	0	0	0	6
0	4,92671	8,11837	8,56668	6,75259	3,63997	0	5
0	11,58846	18,98014	19,39577	14,80370	7,80731	0	4
0	22,44701	36,81795	35,23258	25,25913	12,78557	0	3
0	41,38161	70,56805	59,45745	38,21467	18,07584	0	2
0	72,46736	144,79130	93,77048	50,06668	21,30312	0	1
0	103,69654	342,31525	120,76691	46,98320	17,07037	0	0
0	0	1000,00000	0	0	0	0	-1

0	0	0	0	0	0	0	6
0	4,84248	8,56668	10,02848	8,56668	4,84248	0	5
0	10,80325	19,39577	22,98059	19,39577	10,80325	0	4
0	18,97475	35,23258	43,10233	35,23258	18,97475	0	3
0	29,86316	59,45745	78,91956	59,45745	29,86316	0	2
0	41,02043	93,77048	153,83755	93,77048	41,02043	0	1
0	40,44809	120,76691	348,85036	120,76691	40,44809	0	0
0	0	0	1000,00000	0	0	0	-1

Si on détermine, de ces solutions, la fonction nodale de la surface de la membrane chargée en ses quatre points intérieurs encadrés, et si on considère cette fonction nodale comme la somme des moments $m_x + m_y = M$ de la plaque élastique, on a alors, pour la plaque élastique: $\Delta w = -M/k$. En résolvant cette équation par les calculs ci-dessus de la membrane chargée en certains points, on obtient pour la surface élastique w de la plaque:

0	0	0	0	0	0	0	$\frac{pd^4}{K}$
0	0,28125	0,5000	0,56250	0,5000	0,28125	0	
0	0,50000	0,90625	1,00000	0,90625	0,5000	0	
0	0,56250	1,0000	1,12500	1,0000	0,56250	0	
0	0,50000	0,90625	1,0000	0,90625	0,50000	0	
0	0,28125	0,50000	0,5625	0,5000	0,28125	0	
0	0	0	0	0	0	0	

Le long des côtés de plaques reposant librement sur leur pourtour, les valeurs des points intérieurs et extérieurs encadrant les points au contour $w = 0$ sont identiques, mais des signes contraires. Pour les côtés librement appuyés, nous n'avons pas fait figurer les valeurs situées au delà du contour sur les tableaux des fonctions nodales.

Vu la double symétrie, les fonctions nodales biharmoniques sont obtenues par sommation des fonctions nodales symétriques. Ces fonctions doublement symétriques sont les suivantes:

0	-1036,3020	-59,96676	-67,79472	-59,96676	-1036,3020	0	x_1
0	0	0	0	0	0	0	
0	138,74712	136,60388	130,46566	136,60388	138,74712	0	
0	146,82216	196,49798	205,87864	196,49798	146,82216	0	
0	144,76548	211,39548	227,6970	211,39548	144,76548	0	
0	146,82216	196,49798	205,8786	196,49798	146,82216	0	
0	138,74712	136,60388	130,46566	136,60388	138,74712	0	
0	0	0	0	0	0	0	
0	-1036,3020	-59,96676	-67,79472	-59,96676	-1036,3020	0	

0	-59,96676	-1104,09672	-119,93352	-1104,09672	-59,96676	0	x_2
0	0	0	0	0	0	0	
0	136,60388	269,21278	273,20776	269,21278	136,60388	0	
0	196,49798	352,70080	392,99596	352,70080	196,49798	0	
0	211,39548	372,46248	422,79096	372,46248	211,39548	0	
0	196,49798	352,70080	392,99596	352,70080	196,49798	0	
0	136,60388	269,21278	273,20776	269,21278	136,60388	0	
0	0	0	0	0	0	0	
0	-59,96676	-1104,09672	-119,93352	-1104,09672	-59,96676	0	

0	-33,89736	-59,96676	-1070,19936	-59,96676	-33,89736	0	x_3
0	0	0	0	0	0	0	
0	65,23283	136,60388	203,97995	136,60388	65,23283	0	
0	102,93932	196,49798	249,76148	196,49798	102,93932	0	
0	113,84850	211,39548	258,61398	211,39548	113,84850	0	
0	102,93932	196,49798	249,76148	196,49798	102,93932	0	
0	65,23283	136,60388	203,97995	136,60388	65,23283	0	
0	0	0	0	0	0	0	
0	-33,89736	-59,96676	-1070,19936	-59,96676	-33,89736	0	

Compte tenu des trois tableaux précédents, les équations exprimant les conditions d'encastrement seront:

$$1175,04912 x_1 + 196,57064 x_2 + 99,13019 x_3 + 0,5625 = 0$$

$$196,57064 x_1 + 1373,30950 x_2 + 196,57064 x_3 + 1,0000 = 0$$

$$198,26038 x_1 + 393,14128 x_2 + 1274,17931 x_3 + 1,1250 = 0$$

D'où l'on reçoit, par itération:

$$x_1 = -3,25360 \cdot 10^{-4}; x_2 = -5,88452 \cdot 10^{-4}; x_3 = -6,50639 \cdot 10^{-4}$$

En multipliant par x_1 , x_2 , x_3 les fonctions nodales précédentes, et en les additionnant à celle de la plaque reposant librement sur son pourtour, on obtient:

0	0,11327	0,20825	0,22655	0,20825	0,11327	0	$\frac{pd^4}{K}$
0	0	0	0	0	0	0	
0	0,11327	0,20825	0,22655	0,20825	0,11327	0	
0	0,27027	0,50691	0,53923	0,50691	0,27027	0	
0	0,31693	0,57449	0,63384	0,57449	0,31693	0	
0	0,27027	0,50691	0,53923	0,50691	0,27027	0	
0	0,11327	0,20825	0,22655	0,20825	0,11327	0	
0	0	0	0	0	0	0	
0	0,11327	0,20825	0,22655	0,20825	0,11327	0	

Par là, le problème est résolu.

LITTÉRATURE

1. SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil III, 2 p. 162. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1955.
2. SZMODITS, K.: Examen numérique de membranes construites sur une base rectangulaire. Acta Techn. Hung. 50 (1965), 371—376.

NUMERICAL INVESTIGATION OF A PLATE FIXED ON TWO OPPOSITE SIDES AND SIMPLY SUPPORTED ON THE TWO OTHER SIDES

K. SZMODITS

SUMMARY

The method presented by the author is based on the generalization of the GOURSAT theorem to lattices functions. By applying this theorem and summarizing two known solutions, the solution for a plate perfectly fixed on one side and simply supported on the two neighbouring sides can be worked out. The conditions of constraint for the side opposite to the fixed one can be satisfied by the quickly converging iteration of the summation of known solutions.

NUMERISCHE UNTERSUCHUNG EINER AUF ZWEI GEGENÜBERLIEGENDEN SEITEN EINGESPANNTEN, AUF DEN ZWEI ANDEREN SEITEN FREI AUF LIEGENDEN PLATTE

K. SZMODITS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Methode beruht auf der Verallgemeinerung für Gitterfunktionen eines Satzes von GOURSAT. Mittels Anwendung dieses Satzes und der Summierung von zwei bekannten Lösungen kann die Lösung für eine einseitig vollkommen eingespannte, an den anderen Seiten frei aufliegende Platte dargestellt werden. Den Einspannbedingungen für die der eingespannten Plattenkante gegenüberliegende Seite wird durch rasch konvergierende Iteration der Summierung von bekannten Lösungen Genüge getan.

ЧИСЛОВОЙ АНАЛИЗ ПЛАСТИНЫ, ДВЕ ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СТОРОНЫ
КОТОРОЙ ЗАЖАТЫ И ДВЕ ДРУГИЕ СТОРОНЫ КОТОРОЙ СВОБОДНО
ОПЕРТЫ

К. СМОДИЧ

РЕЗЮМЕ

Продемонстрированный метод основывается на обобщении теоремы Гурсат на решетчатые функции. Применением этой теоремы и сложением двух известных решений можно получить решение пластины, в совершенстве зажатой вдоль одного края, а вдоль смежных краев свободно опертой. Удовлетворение условий зажатия стороны, противоположной зажатой стороне, производится быстро конвергирующей итерацией, выполняемой суммированием известных решений.

THEORIE DER DÜNNWANDIGEN AUF ELASTISCHER UNTERLAGE GEBETTETEN STÄBE

V. PANC

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR THEORETISCHE UND ANGEWANDTE MECHANIK
DER TSCHECHOSLOWAKISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, PRAG

[Eingegangen am 7. August 1964]

Es wird eine allgemeine Theorie der dünnwandigen, prismatischen, elastisch gebetteten Stäbe mit starren, hinsichtlich der vertikalen Achse symmetrischen Querschnitten entwickelt. Im Vergleich mit der klassischen Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage ist in der angeführten Grundgleichung des gestellten Problems noch ein Glied enthalten, das den in der Mittelfläche auftretenden Schubverzerrungen entspricht. Aus den gewonnenen Formeln folgt, daß bei dünnwandigen Konstruktionen der untersuchte Einfluß keineswegs vernachlässigt werden kann.

1. Einleitung

In der vorliegenden Abhandlung wird eine allgemeine Theorie des Spannungs- und Verformungszustandes von dünnwandigen prismatischen Konstruktionen mit starren, hinsichtlich der vertikalen Achse symmetrischen Querschnitten entwickelt, die uns instand setzt, verschiedene dünnwandige, elastisch gebettete Träger mit offenem oder geschlossenem Querschnitt, Tragwände und Rohrleitungen auf beliebige, in der vertikalen Symmetrieebene der Konstruktion einwirkende Belastung zu untersuchen.

In der Monographie [1] ist gezeigt worden, daß bei der Lösung von dünnwandigen, auf zusammengesetzte Biegung und Abscherung beanspruchten Konstruktionen der Einfluß der in der Mittelfläche auftretenden Schubverzerrungen eine wichtige Rolle spielt. Da in der klassischen Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage [2] nur die Biegungsverformungen beachtet werden, eignet sich diese Theorie im allgemeinen Fall keineswegs zur Berechnung der dünnwandigen, elastisch gebetteten Konstruktionen.

Um eine verschärfte Theorie des gestellten Problems zu entwickeln, muß allerdings zusammengesetzte Biegung und Abscherung betrachtet werden, womit die gewonnene Grundgleichung, die dann eine Verallgemeinerung der klassischen vorstellt, noch ein den Schubverzerrungen entsprechendes Glied annimmt. Aus den theoretischen Untersuchungen von einigen allgemeinen Problemen folgt, daß die Anwendung der klassischen Theorie auf die Lösung der dünnwandigen, elastisch gebetteten Konstruktionen zu ziemlich großen Fehlern führen kann.

2. Bezeichnungen

z, s	Koordinaten eines beliebigen Punktes \bar{M} der Mittelfläche,
z	Koordinate eines Querschnittes des Stabes,
s	Krummlinige Koordinate einer Erzeugenden der Mittelfläche,
Ox, Oy	Hauptträgheitsachsen des Querschnittes; Achse Oy sei die vertikale Symmetrieachse des Querschnittes,
$x(s), y(s)$	Koordinaten des Punktes \bar{M} im Koordinatensystem Oxy ,
$\delta(s)$	Wanddicke,
F	sämtliche Querschnittsfläche der Konstruktion,
$S(s)$	statisches Moment des Querschnittsteiles an einer Seite des Punktes \bar{M} in bezug auf die Achse Ox ,
I	Hauptträgheitsmoment des Querschnittes zur Achse Ox ,
$\eta(z)$	elastische Verschiebung des Schwerpunktes O in Richtung der Achse Oy ,
$\eta_\sigma(z), \eta_\tau(z)$	der Biegung und Abscherung entsprechende Komponenten der Verschiebung η ,
$\varphi(z)$	Querschnittsverdrehung um die Achse Ox ,
$\mu(z, s), v(z, s)$	elastische Verschiebungskomponenten des Punktes \bar{M} in Richtung der Achse Oz und der Tangente zur Querschnittsmittellinie,
$\sigma(z, s)$	Normalspannung in Richtung der Achse Oz ,
$\sigma_\sigma(z, s), \sigma_\tau(z, s)$	Komponenten der Spannung σ , die der reinen Biegung und den in der Mittelfläche auftretenden Schubverzerrungen entsprechen,
$\tau(z, s)$	Schubspannung,
$q(z), m(z)$	stetige Quer- und Momentenbelastung, die in der Symmetrieebene Oyz der Konstruktion einwirkt,
$p(z)$	Widerstand der elastischen Unterlage,
$M(z), Q(z)$	Biegemoment und Querkraft in der Ebene Oyz ,
β	Schubkoeffizient für die Verformung in der Ebene Oyz ,
$\Phi(s)$	Funktion der Querschnittswölbung,
E, G	Zug- und Schubmodul,
ν	Querdehnungszahl,
k	Bettungsziffer gültig für die gegebene Konstruktion,
$r = \sqrt[4]{4EI/k}$	Parameter von Dimension der Länge,
$\zeta = z/r$	dimensionslose Koordinate des Querschnittes,
$\varkappa = \beta\sqrt{kEI}/GF$	dimensionsloser Parameter.

3. Grundgleichungen des Spannungs- und Verformungszustandes

Als eine Ausgangshypothese der vorliegenden Theorie soll die Wlassowsche Annahme der starren Querschnitte [3] benutzt werden. Wenn wir dann vom Superpositionsprinzip Gebrauch machen, so gilt für das gestellte, zur Oyz Ebene symmetrische Problem

$$\eta = \eta_\sigma + \eta_\tau, \quad \sigma = \sigma_\sigma + \sigma_\tau, \quad u = u_\sigma + u_\tau, \quad v = v_\sigma + v_\tau = \eta \, dy/ds, \quad (1)$$

wobei die Spannungskomponente σ_σ und die Verschiebungskomponente η_σ durch folgende bekannte Beziehungen definiert werden

$$\sigma_\sigma = E \frac{\partial \mu_\sigma}{\partial z} = \frac{M}{I} y, \quad \eta_\sigma'' = - \frac{M}{EI}. \quad (2)$$

Diesen Formeln entsprechen allerdings Nullwerte von Schubverzerrungen.

Die Normalspannungen σ sind mit den Schubspannungen τ durch die Gleichgewichtsbedingung eines abgetrennten Elementes der Wand

$$\delta \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial s} (\tau \delta) = 0 \quad (3)$$

verbunden. Wählen wir den positiven Sinn der statischen Größen M und Q nach Bild 1, so folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen eines abgetrennten Elementes der Konstruktion

$$Q' = p - q, \quad M' = Q + m. \quad (4)$$

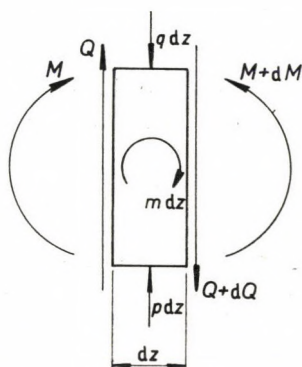


Bild 1. Belastung eines abgetrennten Elementes des Trägers

Die Schubspannung τ ergibt sich dann nach den Formeln (2) bis (4) in der Form

$$\tau \delta = - \frac{M'}{I} S = - \frac{Q + m}{I} S, \quad (5)$$

wobei mit $S = S(s)$ die Querschnittsfunktion

$$S = \int_{s=0}^s y \delta ds \quad (6)$$

bezeichnet wird. Anfangspunkt \bar{M}_0 ($s = 0$) dieser Funktion soll in einem Punkte der Querschnittsmittellinie gewählt werden, wo gilt $\tau = 0$, d. i. entweder in einer freien Konstruktionskante bei den offenen Querschnitten oder in einem Schnittpunkte der Symmetrieachse Oy mit der geschlossenen Querschnittsmittellinie.

Durch die Schubspannung (5) wird die Querschnittswölbung

$$u_\tau = u_{\tau_0} - \frac{M'}{GI} \int_{s=0}^s S \frac{ds}{\delta} - \eta'_\tau (y - y_0) \quad (7)$$

hervorgerufen, der die zusätzliche Normalspannung

$$\sigma_{\tau} = E \left[\mu'_{\tau 0} - \frac{M''}{GI} \int_{s=0}^s S \frac{ds}{\delta} - \eta''_{\tau} (y - y_0) \right] \quad (8)$$

entspricht. In den Beziehungen (7) und (8) bedeutet $u_{\tau 0} = u_{\tau 0}(z)$ die zusätzliche Verschiebung des Anfangspunktes \bar{M}_0 , und y_0 ist seine Hauptkoordinate. Da die Gleichgewichtsbedingungen eines abgetrennten Konstruktionselementes schon durch die Spannungen (2) befriedigt werden, muß die Spannung (8) den Bedingungen

$$\int_F \sigma_{\tau} dF \equiv 0, \quad \int_F \sigma_{\tau} y dF \equiv 0 \quad (9)$$

genügen, in den die angezeigten Integrationen mit dem Index F auf die gesamte Querschnittsfläche bezogen werden. Bezeichnet man mit β den Beiwert

$$\beta = - \frac{F}{I^2} \int_F y dF \int_{s=0}^s S \frac{ds}{\delta} = \frac{F}{I^2} \int_F S^2 \frac{ds}{\delta}, \quad (10)$$

so führt die zweite Bedingung (9) nach Einsetzen von (8) zu der Grundgleichung für die durch Schubverzerrungen hervorgerufene Verformung

$$\eta''_{\tau} = \frac{\beta}{GF} M'', \quad (11)$$

wobei die erste Bedingung (9) gibt

$$u'_{\tau 0} = \frac{M''}{GF} \left(\frac{1}{I} \int_F dF \int_{s=0}^s S \frac{ds}{\delta} - \beta y_0 \right). \quad (12)$$

Nach den Beziehungen (8), (10) und (12) können wir also die Funktion $\Phi(s)$ der Querschnittswölbung in der Form

$$\Phi = \frac{1}{I} \left(F \int_{s=0}^s S \frac{ds}{\delta} - \int_F dF \int_{s=0}^s S \frac{ds}{\delta} \right) + \beta y \quad (13)$$

anschreiben und für die resultierende Normalspannung danach gilt

$$\sigma = \frac{M}{I} y - 2(1 + \nu) \frac{M''}{F} \Phi. \quad (14)$$

Wenn auf eine dünnwandige Konstruktion nur eine stetige Querbelastung q einwirkt, so rufen die Schubverzerrungen in der Mittelfläche eine zusätzliche Normalspannung hervor, die nach den Formeln (4) und (14) folgende Werte annimmt:

$$\sigma_{\tau} = 2(1 + \nu) \frac{q - P}{F} \Phi.$$

Bei Belastung durch Einzellasten P_i ersetzen wir die in der Formel (14) enthaltene zweite Ableitung der Funktion $M(z)$ durch den Ausdruck

$$\max M_i'' = -\frac{P_i}{\Delta z_i},$$

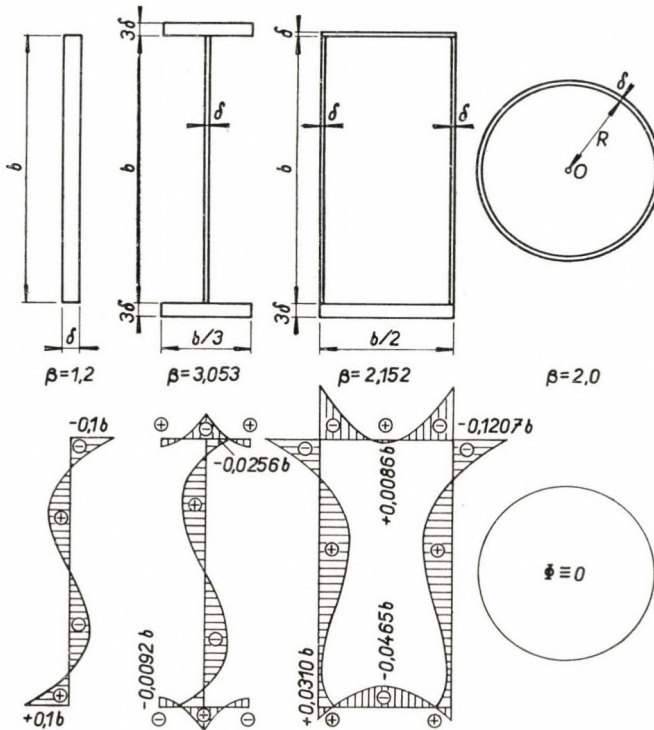


Bild 2. Schubkoeffizienten und Verlauf der Wölbung für verschiedene dünnwandige Querschnitte

so daß die zusätzliche Normalspannung im Querschnitte z_i aus der Formel

$$\sigma_\tau = 2(1 + \nu) \frac{P_i}{F \Delta z_i} \Phi$$

folgt. Hier bedeutet Δz_i die Verteilungslänge der Einzellast P_i . Die durch Einzellasten hervorgerufenen zusätzlichen Normalspannungen können im Vergleich mit dem ersten Glied der Formel (14) ziemlich bedeutende Werte annehmen, so daß sie immer beachtet werden sollen.

Bild 2 gibt die Werte von Schubkoeffizienten und den Verlauf von Funktionen $\Phi(s)$ für verschiedene dünnwandige Querschnitte an.

4. Grundgleichungen eines dünnwandigen, elastisch gebetteten Trägers

Wir betrachten einen geraden waagerechten, elastisch gebetteten Träger unter der gegebenen, in der Symmetrieebene Oyz einwirkenden Belastung (Bild 3). Die Verformung des Trägers wird durch die Funktion $\eta(z)$ der elastischen Durchbiegung nach der ersten Beziehung (1) und durch die Funktion $\varphi(z)$ der Verdrehung von Querschnitten um die Achse Ox gekennzeichnet, wobei offenbar gilt¹

$$\varphi(z) = \eta'_\sigma(z). \quad (15)$$

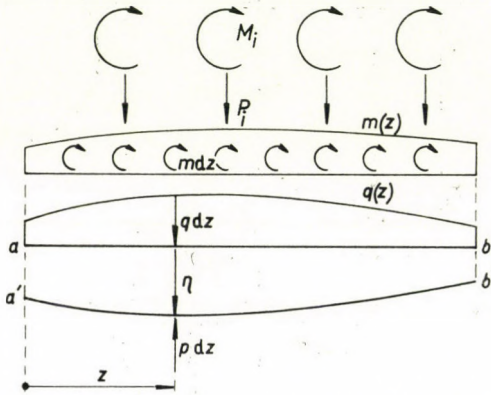


Bild 3. Belastung eines elastisch gebetteten Trägers

Mit Anwendung derselben Voraussetzungen wie in der klassischen Theorie [2] wird für den Widerstand $p(z)$ der elastischen Unterlage folgende vereinfachte Beziehung eingeführt

$$p = k\eta = k(\eta_\sigma + \eta_\tau). \quad (16)$$

¹ Die Verdrehung φ wird durch die Formel

$$\varphi = -\frac{1}{J} \int_F u y dF$$

definiert. Nach den Beziehungen (2), (11) und (14) gilt

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\eta''_\sigma y - \frac{1}{\beta} \eta''_\tau \Phi.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (10) und (13) ergibt sich

$$\int_F \Phi y dF = 0,$$

so daß der differentiale Zusammenhang zwischen den Funktionen φ , η_σ und η_τ die folgende einfache Form annimmt:

$$\varphi' = \eta''_\sigma = \Rightarrow \varphi = \eta'_\sigma + C.$$

Man kann sich überzeugen [1], daß eine von Null verschiedene Integrationskonstante C ausschließlich dem Fall eines durch Randbiegemomente beanspruchten Stabes entspricht, der auf elastischer Unterlage und außerdem noch auf einzelnen Stützen gelagert ist.

Aus den Formeln (2), (4), (11) und (16) folgt dann die Grundgleichung des gegebenen Problems in der Form:

$$M^{IV} - \frac{\beta k}{GF} M'' + \frac{k}{EJ} M = -q'' + m''' . \quad (17)$$

Nach Einführung des dimensionslosen Parameters

$$\varkappa = \frac{\beta}{GF} (k EJ)^{\frac{1}{2}} = \frac{\beta k r^2}{2GF} \quad (18)$$

kann man mit der neuen dimensionslosen Variablen ζ

$$\zeta = \frac{z}{r}, \quad r = \left(\frac{4 EJ}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

die Grundgleichung (17) für eine nur durch Randbelastung beanspruchte Konstruktion in der folgenden Form anschreiben

$$\frac{d^4 M}{d \zeta^4} - 2\varkappa \frac{d^2 M}{d \zeta^2} + 4M = 0 . \quad (20)$$

Diese Beziehung unterscheidet sich also von der Grundgleichung der klassischen Theorie dadurch, daß hier auch die zweite Ableitung der Funktion $M(\zeta)$ mit dem Beiwerte $2\varkappa$ enthalten ist. Durch dieses Glied wird der Einfluß von Schubverzerrungen gekennzeichnet, dessen Bedeutung mit wachsendem Wert des Parameters \varkappa zunimmt. Aus der Formel (18) folgt, daß der Parameter \varkappa einen beliebigen nichtnegativen Wert annehmen kann, so daß es keineswegs möglich ist, die Voraussetzung $\varkappa = 0$ der klassischen Theorie im allgemeinen Fall anzuwenden. Bei genügend großem Wert des Parameters \varkappa kann im Gegenteil das erste, der Biegung der Konstruktion entsprechende Glied der Gleichung (20) vernachlässigt werden. Gemäß der Formel (18) wächst der Einfluß von Schubverzerrungen mit zunehmendem Wert des Schubkoeffizienten β und mit wachsenden Quotienten \sqrt{I}/F , \sqrt{kE}/G .

5. Allgemeine Lösung des Problems

Die Form der allgemeinen Lösung der homogenen Grundgleichung (20) hängt allerdings vom numerischen Wert des Parameters \varkappa ab. Wenn $\varkappa < 2$, dann sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die der

Differentialgleichung (20) entspricht, paarweise konjugiert-komplex und mit Bezeichnungen a, b der reellen Konstanten

$$a = \left(\frac{2 + \kappa}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \left(\frac{2 - \kappa}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

kann das allgemeine Integral der Grundgleichung (20) in der folgenden Form dargestellt werden

$$M = \sum_{n=1}^4 C_n e^{\pm(a \pm bi)\zeta}, \quad (22)$$

wobei C_1 bis C_4 Integrationskonstanten bedeuten. Für $\kappa = 0$ ($a = b = 1$) verbleibt allerdings nur die klassische Lösung.

Für $\kappa = 2$ nimmt dann die Lösung der Grundgleichung (20) die Form²

$$M = \sum_{n=1}^2 C_n e^{\pm a_1 \zeta} + \zeta \sum_{n=3}^4 C_n e^{\pm a_1 \zeta}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (23)$$

an, und für $\kappa > 2$ haben alle vier Wurzeln der charakteristischen Gleichung reelle Werte, so daß der Gleichung (20) die Funktion

$$M = \sum_{n=1}^2 C_n e^{\pm a_2 \zeta} + \sum_{n=3}^4 C_n e^{\pm b_2 \zeta} \quad (24)$$

mit den Integrationskonstanten C_1 bis C_4 genügt. Hier a_2 und b_2 bedeuten reelle Konstanten

$$a_2 = [\kappa + (\kappa^2 - 4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}, \quad b_2 = [\kappa - (\kappa^2 - 4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Zur weiteren Lösung des gestellten Problems werden wir die Anfangswertmethode nach [1] und [3] benutzen.³ Ersetzen wir die in den Beziehungen

² Die Fälle $\kappa \geq 2$ finden ihre praktische Anwendung z. B. bei der Untersuchung von dünnwandigen Stahlkonstruktionen, die auf Beton oder Felsen gelagert sind.

³ Für $\kappa < 2$ kann die allgemeine Lösung (22) auch in der Form

$$M = A_1 \sinh a\zeta \sin b\zeta + A_2 \sinh a\zeta \cos b\zeta + A_3 \cosh a\zeta \sin b\zeta + A_4 \cosh a\zeta \cos b\zeta.$$

(22) bis (24) enthaltenen beliebigen Konstanten C_n durch die Anfangswerte η_0 , φ_0 , M_0 und Q_0 der gesuchten Funktionen $\eta(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$, $M(\zeta)$ und $Q(\zeta)$, so erhalten wir für $\kappa < 2$

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \left(\cosh a\zeta \cos b\zeta + \frac{\kappa}{2ab} \sinh a\zeta \sin b\zeta \right) + \frac{r}{2ab} \varphi_0 (a \cosh a\zeta \sin b\zeta + \\ &\quad + b \sinh a\zeta \cos b\zeta) - \frac{2}{abk r^2} M_0 \sinh a\zeta \sin b\zeta - \\ &\quad - \frac{1}{kr} Q_0 \left(\frac{1-\kappa}{b} \cosh a\zeta \sin b\zeta - \frac{1+\kappa}{a} \sinh a\zeta \cos b\zeta \right), \\ \varphi &= -\frac{1}{abr} \eta_0 (a \cosh a\zeta \sin b\zeta - b \sinh a\zeta \cos b\zeta) + \\ &\quad + \varphi_0 \left(\cosh a\zeta \cos b\zeta - \frac{\kappa}{2ab} \sinh a\zeta \sin b\zeta \right) - \\ &\quad - \frac{2}{kr^3} M_0 \left(\frac{1-\kappa}{b} \cosh a\zeta \sin b\zeta + \frac{1+\kappa}{a} \sinh a\zeta \cos b\zeta \right) - \\ &\quad - \frac{2}{abkr^2} Q_0 \sinh a\zeta \sin b\zeta, \end{aligned} \quad (26a)$$

mit reellen Konstanten A_1 bis A_4 angeschrieben werden. Aus den Beziehungen (2), (4) und (16) folgt dann:

$$\begin{aligned} Q = M' &= \frac{1}{r} [(-A_2 b + A_3 a) \sinh a\zeta \sin b\zeta + (A_1 b + A_4 a) \sinh a\zeta \cos b\zeta + \\ &\quad + (A_1 a - A_4 b) \cosh a\zeta \sin b\zeta + (A_2 a + A_3 b) \cosh a\zeta \cos b\zeta], \\ p = k\eta = Q' &= \frac{1}{r^2} [(A_1 \kappa - A_4 \sqrt{4 - \kappa^2}) \sinh a\zeta \sin b\zeta + (A_2 \kappa + \\ &\quad + A_3 \sqrt{4 - \kappa^2}) \sinh a\zeta \cos b\zeta + (A_3 \kappa - A_2 \sqrt{4 - \kappa^2}) \cosh a\zeta \sin b\zeta + \\ &\quad + (A_4 \kappa + A_1 \sqrt{4 - \kappa^2}) \cosh a\zeta \cos b\zeta], \\ \eta'_\sigma = \varphi &= -\frac{r}{2EJ} [(A_3 a + A_2 b) \sinh a\zeta \sin b\zeta + (A_4 a - A_1 b) \sinh a\zeta \cos b\zeta + \\ &\quad + (A_1 a + A_4 b) \cosh a\zeta \sin b\zeta + (A_2 a - A_3 b) \cosh a\zeta \cos b\zeta]. \end{aligned}$$

Für $\zeta = 0$ ergeben sich also die folgenden Zusammenhänge zwischen den Anfangswerten und Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} M_0 &= A_4, & Q_0 &= \frac{1}{r} (A_2 a + A_3 b), \\ \eta_0 &= \frac{1}{kr^2} (A_4 \kappa + A_1 \sqrt{4 - \kappa^2}), & \varphi_0 &= -\frac{r}{2EJ} (A_2 a - A_3 b). \end{aligned}$$

Analoge Beziehungen können allerdings auch für $\kappa \geq 2$ hergeleitet werden.

$$M = \frac{kr^2}{2ab} \eta_0 \sinh a\zeta \sin b\zeta + \frac{kr^3}{4ab} \varphi_0 (a \cosh a\zeta \sin b\zeta - b \sinh a\zeta \cos b\zeta) + M_0 \left(\cosh a\zeta \cos b\zeta - \frac{\varkappa}{2ab} \sinh a\zeta \sin b\zeta \right) + \frac{r}{2ab} Q_0 (a \cosh a\zeta \sin b\zeta + b \sinh a\zeta \cos b\zeta),$$

$$Q = \frac{kr}{2ab} \eta_0 (a \cosh a\zeta \sin b\zeta + b \sinh a\zeta \cos b\zeta) + \frac{kr^2}{2ab} \varphi_0 \sinh a\zeta \sin b\zeta - \frac{1}{abr} M_0 (a \cosh a\zeta \sin b\zeta - b \sinh a\zeta \cos b\zeta) + Q_0 \left(\cosh a\zeta \cos b\zeta + \frac{\varkappa}{2ab} \sinh a\zeta \sin b\zeta \right),$$

für $\varkappa = 2$

$$\eta = \eta_0 \left(\cosh a_1 \zeta + \frac{1}{2} a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta \right) + \frac{r}{2a_1} \varphi_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta + \sinh a_1 \zeta) - \frac{1}{kr^2} M_0 a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta + \frac{1}{a_1 kr} Q_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta + 3 \sinh a_1 \zeta),$$

$$\varphi = -\frac{1}{a_1 r} \eta_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta - \sinh a_1 \zeta) + \varphi_0 \left(\cosh a_1 \zeta - \frac{1}{2} a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta \right) + \frac{a_1}{kr^3} M_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta - 3 \sinh a_1 \zeta) - \frac{1}{kr^2} Q_0 a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta, \quad (26b)$$

$$M = \frac{kr^2}{4} \eta_0 a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta + \frac{kr^3}{4a_1} \varphi_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta - \sinh a_1 \zeta) + M_0 \left(\cosh a_1 \zeta - \frac{1}{2} a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta \right) + \frac{r}{2a_1} Q_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta + \sinh a_1 \zeta),$$

$$Q = \frac{kr}{2a_1} \eta_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta + \sinh a_1 \zeta) + \frac{kr^2}{4} \varphi_0 a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta - \frac{1}{a_1 r} M_0 (a_1 \zeta \cosh a_1 \zeta - \sinh a_1 \zeta) + Q_0 \left(\cosh a_1 \zeta + \frac{1}{2} a_1 \zeta \sinh a_1 \zeta \right)$$

und für $\nu > 2$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{a_2^2 - b_2^2} \eta_0 (a_2^2 \cosh a_2 \zeta - b_2^2 \cosh b_2 \zeta) + \frac{r}{a_2^2 - b_2^2} \varphi_0 (a_2 \sinh a_2 \zeta - \\ &\quad - b_2 \sinh b_2 \zeta) - \frac{4}{(a_2^2 - b_2^2) kr^2} M_0 (\cosh a_2 \zeta - \cosh b_2 \zeta) + \\ &\quad + \frac{1}{(a_2^2 - b_2^2) kr} Q_0 (a_2^3 \sinh a_2 \zeta - b_2^3 \sinh b_2 \zeta), \\ \varphi &= - \frac{2}{(a_2^2 - b_2^2) r} \eta_0 (b_2 \sinh a_2 \zeta - a_2 \sinh b_2 \zeta) + \frac{1}{a_2^2 - b_2^2} \varphi_0 (a_2^2 \cosh b_2 \zeta - \\ &\quad - b_2^2 \cosh a_2 \zeta) + \frac{2}{(a_2^2 - b_2^2) kr^3} M_0 (b_2^3 \sinh a_2 \zeta - a_2^3 \sinh b_2 \zeta) - \\ &\quad - \frac{4}{(a_2^2 - b_2^2) kr^2} Q_0 (\cosh a_2 \zeta - \cosh b_2 \zeta), \end{aligned} \quad (26c)$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{kr^2}{a_2^2 - b_2^2} \eta_0 (\cosh a_2 \zeta - \cosh b_2 \zeta) + \frac{kr^3}{2(a_2^2 - b_2^2)} \varphi_0 (b_2 \sinh a_2 \zeta - \\ &\quad - a_2 \sinh b_2 \zeta) + \frac{1}{a_2^2 - b_2^2} M_0 (a_2^2 \cosh b_2 \zeta - b_2^2 \cosh a_2 \zeta) + \\ &\quad + \frac{r}{a_2^2 - b_2^2} Q_0 (a_2 \sinh a_2 \zeta - b_2 \sinh b_2 \zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{kr}{a_2^2 - b_2^2} \eta_0 (a_2 \sinh a_2 \zeta - b_2 \sinh b_2 \zeta) + \frac{kr^2}{a_2^2 - b_2^2} \varphi_0 (\cosh a_2 \zeta - \\ &\quad - \cosh b_2 \zeta) - \frac{2}{(a_2^2 - b_2^2) r} M_0 (b_2 \sinh a_2 \zeta - a_2 \sinh b_2 \zeta) + \\ &\quad + \frac{1}{a_2^2 - b_2^2} Q_0 (a_2^2 \cosh a_2 \zeta - b_2^2 \cosh b_2 \zeta). \end{aligned}$$

In diesen Beziehungen spielen die Anfangswerte η_0 , φ_0 , M_0 und Q_0 die Rolle von willkürlichen Konstanten. Kinematische Größen sind dabei die Durchbiegung η_0 und die Verdrehung φ_0 des Anfangsquerschnittes $\zeta = 0$, statische Größen sind die Anfangswerte M_0 des Biegemomentes und Q_0 der Querkraft. Die Formeln (26) gestatten es, alle gesuchten Funktionen im beliebigen Querschnitte ζ der Konstruktion zu bestimmen, die nur im Anfangsquerschnitte belastet wird. Wenn auf die Konstruktion im Schnitt $\zeta = \zeta_1$ eine weitere Belastung einwirkt, dann gelten die Formeln (26) nur für $0 \leq \zeta \leq \zeta_1$.

Wird die untersuchte Konstruktion in ihren Querschnitten ζ_i ($i = 1, 2, \dots$) durch Biegemomente M_i und Einzellasten P_i belastet, so ist es nötig, bei $\varkappa < 2$ die Funktionen (26a) für $\zeta \geq \zeta_1$ durch folgende Ausdrücke zu ergänzen

$$\begin{aligned}
 \eta_{MP} &= -\frac{2}{abkr^2} \sum_{i=n}^n M_i \sinh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i) + \\
 &+ \frac{1}{kr} \sum_{i=1}^n P_i \left[\frac{1-\varkappa}{b} \cosh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i) - \right. \\
 &\left. - \frac{1+\varkappa}{a} \sinh a(\zeta - \zeta_i) \cos b(\zeta - \zeta_i) \right], \\
 \varphi_{MP} &= -\frac{2}{kr^3} \sum_{i=1}^n M_i \left[\frac{1-\varkappa}{b} \cosh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1+\varkappa}{a} \sinh a(\zeta - \zeta_i) \cos b(\zeta - \zeta_i) \right] + \\
 &+ \frac{2}{abkr^2} \sum_{i=1}^n P_i \sinh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i), \\
 M_{MP} &= \sum_{i=1}^n M_i \left[\cosh a(\zeta - \zeta_i) \cos b(\zeta - \zeta_i) - \right. \\
 &\left. - \frac{\varkappa}{2ab} \sinh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i) \right] - \\
 &- \frac{r}{2ab} \sum_{i=1}^n P_i \left[a \cosh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i) + \right. \\
 &+ \left. b \sinh a(\zeta - \zeta_i) \cos b(\zeta - \zeta_i) \right], \\
 Q_{MP} &= -\frac{1}{abr} \sum_{i=1}^n M_i \left[a \cosh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i) - \right. \\
 &\left. - b \sinh a(\zeta - \zeta_i) \cos b(\zeta - \zeta_i) \right] - \\
 &- \sum_{i=1}^n P_i \left[\cosh a(\zeta - \zeta_i) \cos b(\zeta - \zeta_i) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\varkappa}{2ab} \sinh a(\zeta - \zeta_i) \sin b(\zeta - \zeta_i) \right]
 \end{aligned} \tag{27}$$

und analoge Beziehungen lassen sich auch für $\varkappa \geq 2$ anschreiben. Die in den Formeln (27) angezeigten Summationen beziehen sich natürlich auf sämtliche Biegemomente M_i und Einzellasten P_i , die links vom untersuchten Querschnitt $\zeta \geq \zeta_n$ angreifen. Die Einflußfunktionen der Lastgrößen M_i und P_i

ergeben sich dabei aus den Einflußfunktionen der Anfangsparameter M_0 und Q_0 , und da der Konstruktionsteil $\zeta = 0$, ζ betrachtet wird, auf den die Anfangsquerkraft Q_0 und die Einzellasten P_i im umgekehrten Sinn angreifen, haben die Einflußfunktionen der Größen Q_0 und M_i gegenseitig umgekehrte Vorzeichen.

Die in den Formeln (27) enthaltenen Einflußfunktionen gestatten es, die Konstruktion auch für beliebige stetige Quer- und Momentenbelastung zu berechnen. Wenn auf die untersuchte Konstruktion zwischen ihren Querschnitten ζ_j und ζ_k stetige Momentenbelastung $m(\zeta) = m(t)$ und Querbelastung $q(\zeta) = q(t)$ einwirkt, wobei t eine neue dimensionslose Variable bedeutet, so müssen bei $\nu < 2$ die Funktionen (26a) für $\zeta_j \geq \zeta \geq \zeta_k$ durch die folgenden Ausdrücke ergänzt werden

$$\begin{aligned}
 \eta_{mq} &= -\frac{2}{abkr} \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} m(t) \sinh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) dt + \\
 &+ \frac{1}{k} \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} q(t) \left[\frac{1-\nu}{b} \cosh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) - \right. \\
 &\left. - \frac{1+\nu}{a} \sinh a(\zeta - t) \cos b(\zeta - t) \right] dt, \\
 \varphi_{mq} &= -\frac{2}{kr^2} \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} m(t) \left[\frac{1-\nu}{b} \cosh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1+\nu}{a} \sinh a(\zeta - t) \cos b(\zeta - t) \right] dt + \\
 &+ \frac{2}{abkr} \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} q(t) \sinh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) dt, \quad (28) \\
 M_{mq} &= r \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} m(t) \left[\cosh a(\zeta - t) \cos b(\zeta - t) - \right. \\
 &\left. - \frac{\nu}{2ab} \sinh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) \right] dt - \\
 &- \frac{r^2}{2ab} \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} q(t) [a \cosh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) + \\
 &+ b \sinh a(\zeta - t) \cos b(\zeta - t)] dt, \\
 Q_{mq} &= -\frac{1}{ab} \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} m(t) [a \cosh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) - \\
 &- b \sinh a(\zeta - t) \cos b(\zeta - t)] dt - r \int_{t=\zeta_j}^{t=\zeta} q(t) \left[\cosh a(\zeta - t) \cos b(\zeta - t) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\nu}{2ab} \sinh a(\zeta - t) \sin b(\zeta - t) \right] dt,
 \end{aligned}$$

die aus den Formeln (27) folgen. Für $\zeta \geq \zeta_k$ sollen dann die Ausdrücke (28) mit der konstanten oberen Integrationsgrenze $t = \zeta_k$ angewandt werden.

Die in den Funktionen (26) enthaltenen Anfangsparameter müssen aus den Randbedingungen an den Enden der Konstruktion bestimmt werden, wobei für jedes Ende gewöhnlich zwei Bedingungen vorgeschrieben sind. Zwei von den vier gesuchten Parametern ergeben sich dann unmittelbar aus den für den Anfangsquerschnitt vorgeschriebenen Bedingungen, und die übrigen beiden Parameter findet man aus den Randbedingungen, die am anderen Ende der Konstruktion gegeben sind.

6. Beispiel

Als Beispiel betrachten wir einen unbegrenzten, elastisch gebetteten Träger unter dem Angriff von Einzellast P im beliebigen Querschnitt, der als Anfangsquerschnitt $\zeta = 0$ gewählt wird. Wegen der bestehenden Symmetrie des gegebenen Problems hinsichtlich der Ebene $\zeta = 0$ muß gelten

$$\varphi_0 = 0, \quad Q_0 = -P/2. \quad (29)$$

Die übrigen Parameter η_0 und M_0 ergeben sich dann aus den Bedingungen $\eta = 0, \varphi = 0, M = 0$ und $Q = 0$ für $\zeta \rightarrow \infty$ in der Form

$$\eta_0 = \frac{1 + \varkappa}{kr[2(2 + \varkappa)]^{\frac{1}{2}}} P, \quad M_0 = \frac{r}{2[2(2 + \varkappa)]^{\frac{1}{2}}} P \quad (30)$$

für jeden Wert des Parameters \varkappa .

Setzen wir die Größen (29) und (30) in die Formeln (26) ein, so erhalten wir für $\varkappa < 2$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2kr} Pe^{-a\zeta} \left(\frac{1 + \varkappa}{a} \cos b\zeta + \frac{1 - \varkappa}{b} \sin b\zeta \right), \\ \varphi &= - \frac{1}{abkr^2} Pe^{-a\zeta} \sin b\zeta, \\ M &= \frac{r}{4ab} Pe^{-a\zeta} (b \cos b\zeta - a \sin b\zeta), \\ Q &= - \frac{1}{2} Pe^{-a\zeta} \left(\cos b\zeta - \frac{\varkappa}{2ab} \sin b\zeta \right), \end{aligned} \quad (31a)$$

für $\varkappa = 2$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2a_1 kr} Pe^{-a_1\zeta} (3 - a_1\zeta), \\ \varphi &= - \frac{1}{a_1 kr^2} P\zeta e^{-a_1\zeta}, \end{aligned}$$

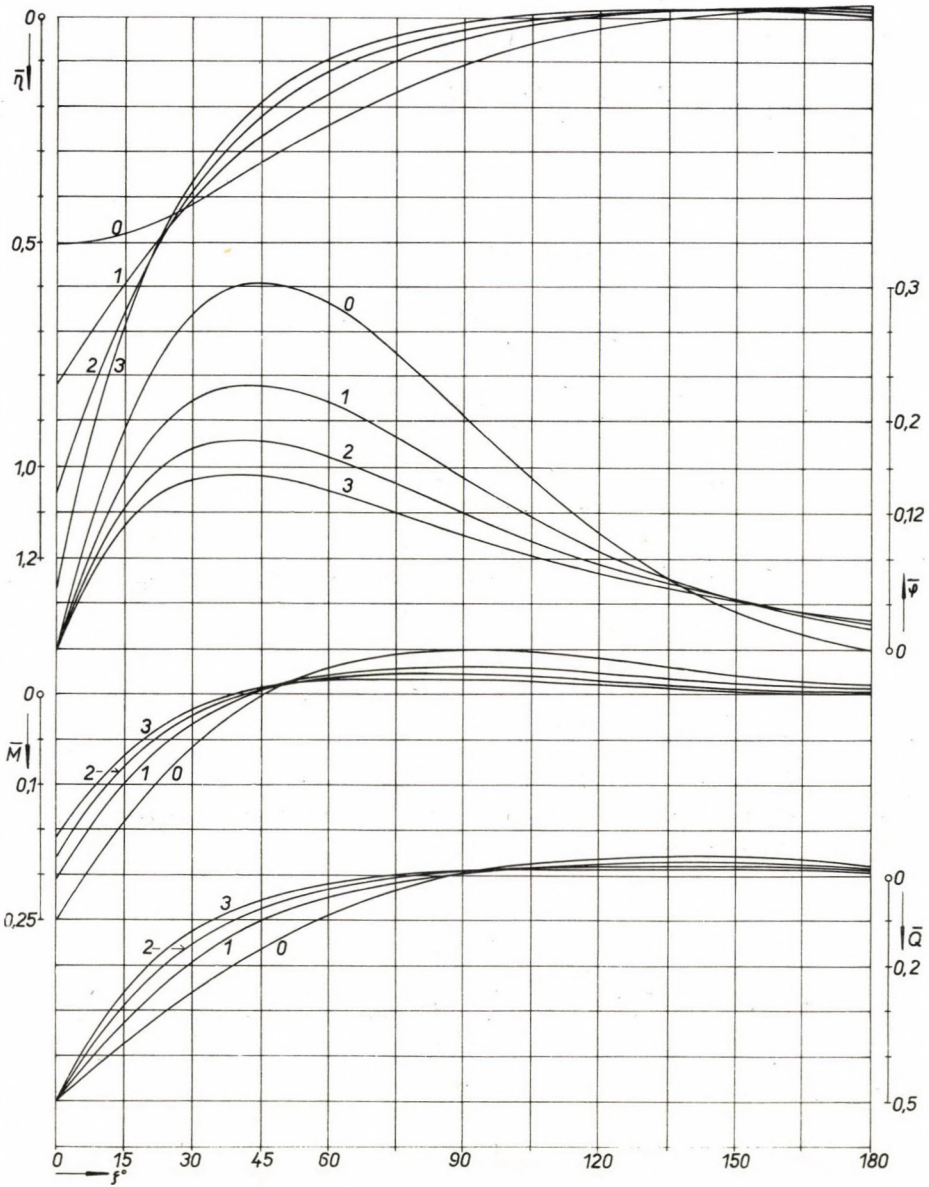


Bild 4. Verlauf der gesuchten Funktionen auf einem unbegrenzten, elastisch gebetteten Träger unter dem Angriff von Einzellast für $\kappa = 0$ (klassische Lösung) und für $\kappa = 1, 2, 3$. (Die Abszisse ζ ist hier in Graden angegeben)

$$M = \frac{r}{4a_1} P e^{-a_1 \zeta} (1 - a_1 \zeta),$$

$$Q = -\frac{1}{4} P e^{-a_1 \zeta} (2 - a_1 \zeta) \quad (31b)$$

und für $\nu > 2$

$$\eta = \frac{1}{2(a_2^2 - b_2^2) kr} P(a_2^3 e^{-a_2 \zeta} - b_2^3 e^{-b_2 \zeta}),$$

$$\varphi = -\frac{2}{(a_2^2 - b_2^2) kr^2} P(e^{-b_2 \zeta} - e^{-a_2 \zeta}),$$

$$M = \frac{r}{2(a_2^2 - b_2^2)} P(a_2 e^{-a_2 \zeta} - b_2 e^{-b_2 \zeta}),$$

$$Q = -\frac{1}{2(a_2^2 - b_2^2)} P(a_2^2 e^{-a_2 \zeta} - b_2^2 e^{-b_2 \zeta}). \quad (31c)$$

Im Bild 4 ist der Verlauf der aus den Formeln (31) folgenden dimensionslosen Funktionen

$$\bar{\eta} = \frac{kr}{P} \eta, \quad \bar{\varphi} = -\frac{kr^2}{P} \varphi, \quad \bar{M} = \frac{1}{Pr} M, \quad \bar{Q} = -\frac{1}{P} Q$$

für $\nu = 0$ (klassische Lösung) und für $\nu = 1, 2, 3$ angegeben. Die angeführte Abbildung dokumentiert den bedeutenden Einfluß der in der Mittelfläche auftretenden Schubverzerrungen.

SCHRIFTTUM

1. PANC, V.: Statik der dünnwandigen Stäbe und Konstruktionen (tschechisch). Prag, 1959.
2. HAYASHI, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin, 1921.
3. WLASSOW, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe (russisch). Moskau, 1959.

THEORY OF THIN-WALLED BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

V. PANC

SUMMARY

The paper contains a general theory of thin-walled, prismatic, elastically supported beams with rigid cross sections symmetrical to the vertical axis. As compared to the classical theory of the elastically supported beam, the basic equation of the problem contains one more member corresponding to the shear strains in the middle plane. The worked out formulae prove that for thin-walled structures the influence which is investigated by the author cannot be neglected.

THÉORIE DES BARRES A PAROIS MINCES SUR FONDATION ÉLASTIQUE

V. PANC

RÉSUMÉ

L'auteur expose une théorie générale des barres prismatiques à parois minces reposant sur des fondations élastiques, dont les sections rigides sont symétriques par rapport à l'axe vertical. En comparaison avec la théorie classique des poutres sur fondation élastique, l'équation fondamentale du problème posé contient un membre supplémentaire, qui correspond à la rupture de cisaillement se produisant dans la superficie moyenne. Des formules obtenues il ressort que dans les constructions à parois minces, l'influence cherchée ne saurait être négligée en aucun cas.

ТЕОРИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В. ПАНЦ

РЕЗЮМЕ

Приводится общая теория тонкостенных призматических стержней, лежащих на упругом основании и являющихся жесткими и симметричными по отношению к вертикальной оси. В сравнении с классической теорией балки на упругом основании в приведенном основном уравнении содержится еще один член данной проблемы, который соответствует искажению деформации, возникающей в средней плоскости. Из полученных формул вытекает, что в случае тонкостенных конструкций исследованное воздействие ни в коем случае не следует упускать из виду.

BERECHNUNG VON SEILTRÄGERNETZEN

I. TEIL*

B. ROLLER

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAU- UND VERKEHRSWESEN, BUDAPEST

[Eingelangt am 14. September 1964]

Die Steifigkeit eines Seilträgernetzes ist bedeutend grösser als die eines gewöhnlichen Kabeldaches und es benötigt eine kräftigere Abtrummung nur an den kürzeren Seiten des Grundrisses; doch das benötigte Baumaterial ist wesentlich weniger als bei einem Trägerrost, da das Trägernetz auf Biegung beanspruchten Bauelemente nur in einer Richtung enthält.

Zur Berechnung gilt ausser den bei Kabelbrücken üblichen Annahmen noch die Voraussetzung, dass die versteifende Trägerschar aus unendlich viel Gliedern besteht. Als zufällige Last wird eine totale, gleichmässige oder nur halbseitig wirkende Schneelast, oder eine einfach oder doppelt antimetrische gleichmässige Windlast beziehungsweise eine Kombination der letzteren angenommen.

Allgemein erfolgt die Berechnung der Aufgabe mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine. Das Programm der Berechnungsoperationen für die Gleichgewichtsbedingungen kann aus fertigen Subrutineinheiten, die zu jeder in der Praxis bereits verbreiteten Maschine mitgeliefert werden, zusammengestellt werden. Prinzipiell ist die Lösung der Verträglichkeitsgleichungen eine Verallgemeinerung des für die Kabelbrücken entwickelten Rechenganges.

I. Einleitung: Voraussetzungen zum Rechengang

Wir wollen uns mit der statischen Berechnung von Hängedächern von viereckigem Grundriss befassen, an denen als Hauptträger verankerte Kabel, und als Querträger geradachsige Balken angeordnet sind. Die Verankerung der Kabel kann entweder an den geraden Rändern selbst, oder aber an über diese hindurchgeführten Kabeln beiderseitig an dem Bauterrain, eventuell am Unterbau angeordnet werden. Die beiden Enden der Querträger werden an dem bogenförmigen Oberteil der Stirnwände abgestützt (Bild 1.). Alle Trägerelemente sind gleichmässig verordnet.

Wir gehen aus den folgenden Voraussetzungen aus:

1. Die Verbindungen zwischen Längskabeln und Querträgern sind derart ausgeführt, dass nur vertikale (doch aufwärts wie abwärts gerichtete) Kräfte übertragen werden, dass also die Querträger von einer Saugwirkung nicht abgehoben werden können.

2. Die Querträger liegen auf der Stirnwand frei aufgestützt, mit einer Verbindung, die gleichfalls nur vertikale Kräfte überträgt.

3. Die Randträger sind vollkommen steif.

* Das Schrifttumsverzeichnis, sowie die englische, französische und russische Zusammenfassungen sind am Ende des II. Teiles zu finden.

4. Der Kabelquerschnitt bzw. das Trägheitsmoment der Querträger ist konstant und für alle Elemente gleich.

5. Auf die Kabel wirken nur Zugkräfte.

6. Die Kabel liegen in sanft ansteigender Lage, also gelten hier die für flache Bögen zugelassenen geometrischen Annäherungen.

7. Die Richtung der Kabel stimmt mit der Längsrichtung des Grundrisses überein, d. h., die Anzahl der Querbalken ist bedeutend grösser als die der Kabel; dabei wollen wir — aus Berechnungsgründen — die Zahl der

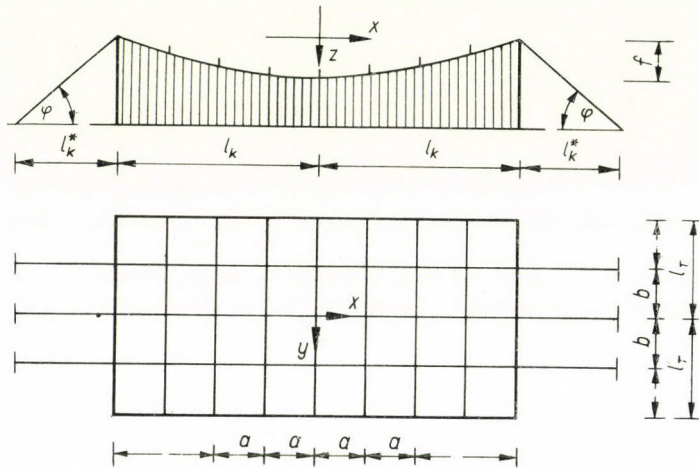


Bild 1

Balken als unendlich annehmen. Unser Modell ist nun ein zylindrisches Kontinuum, durch wenige, dazwischen gelegte Kabel unterstützt, und zwar gegen Biegung nur in den vertikalen Ebenen der Erzeugenden steif ausgeführt, nicht aber in den vertikalen Ebenen der Leitkurven. Auch besitzt unser Modell keine Drillsteifigkeit.

8. Im Grundriss gesehen, ist die totale und auch die partielle Lastverteilung gleichmässig. Nach unserer Vorstellung sind die lastübertragenden Deckenelemente an den vier Ecken abgestützt, und demzufolge fassen wir die Gesamtheit der Belastungselemente als eine in der Kabelebene konzentrierte, auf das Kabel an einer Kante verteilt wirkende Last auf.

9. Die ständige Last soll — ähnlich den für die Kabelbrücken allgemein angenommenen theoretischen Voraussetzungen — allein von den Kabeln aufgenommen werden. Die Kabel nehmen dadurch die Gestalt einer Parabel zweiten Grades an.

10. Die zufällige Last wird durch die Balken auf die Kabel übertragen.

11. Der Baustoff ist durch lineare Elastizität gekennzeichnet.

2. Bezeichnungen

- g Intensität der ständigen Belastung
 p Intensität der zufälligen Belastung
 p_s Intensität der Schnee-Last
 p_w Intensität der Wind-Last

Die Intensitätsgrößen sind als mit den statutenmässig festgesetzten Faktoren multipliziert zu verstehen, mit der Dimension Mp/m^2 .

- $2l_T$ Trägerlänge
 $2l_K$ Spannweite der Kabel
 l_k^* horizontale Projektion der verankerten Kabelstrecke
 a Abstand der Querträger im Grundriss
 b Abstand der Kabel
 f Pfeilhöhe des Kabels unter Einwirkung der ständigen Last
 H_g^g horizontale Projektion der Kabelkraft unter Einwirkung der ständigen Last
 H_n horizontale Projektion der Kabelkraft an dem n -ten Kabel unter Einwirkung der Vollast
 E_T Elastizitätsmodul eines Querträgers
 E_K Elastizitätsmodul eines Kabels
 J_T Trägheitsmoment des Querträgers
 F_K Querschnittsfläche des Kabels
 α_K Wärmedehnungskoeffizient des Kabelmaterials
 t° Temperaturänderung

Für die Bezeichnung der Spaltenvektoren verwenden wir kleine, fette Buchstaben und für die (quadratischen) Matrixe grosse, fette Buchstaben.

- E** Einheitsmatrix r -ter Ordnung
e r -dimensionaler Spaltenvektor aus Einheits-elementen
m Spaltenvektor der Stützpunktmomente eines Trägerstreifens mit Einheitsbreite
w Spaltenvektor der Stützpunktverschiebungen.

3. Gleichgewichtsbedingungen

3.1 Einwirkung der ständigen Last auf die Kabel

Durch die ständige Last bedingte Formgleichung der Kabel ist

$$z = f \left(1 - \frac{x^2}{l_k^2} \right), \quad (1)$$

wobei

$$f = \frac{gbl_k^2}{2H_g}. \quad (2)$$

Daraus lässt sich H_g errechnen; dieser Wert ist für jedes einzelne Kabel derselbe.

3.2 Einwirkung der veränderlichen Last auf die Querträger. Bestimmung des Verbindungs-Kräfte-systems.

Unter Einwirkung der veränderlichen Last wirken die Querträger als kontinuierliche Träger mit verschiebbaren inneren Stützpunkten. Diese Verschiebungen sind elastisch, jedoch der Last nicht proportional.

Um die Gleichgewichtsbedingungen ableiten zu können, wollen wir vorerst die Gleichung des Zusammenhanges zwischen den Stützpunkt-Momenten einzelner Querträger und den Durchbiegungen dieser Punkte anschreiben. Dieser Ausdruck ist in der bekannten Clapeyronschen Gleichung gegeben (Bild 2.); im Sinne unserer oben angeführten Voraussetzungen enthält die rechte Seite dieser Gleichung nur die aus den Stützpunkt-Verschiebungen stammenden Verdrehungen. Ferner, in Übereinstimmung mit der Vorstellung eines »gleichmässig verteilten Trägerwerkes« stehen für die Momente eben

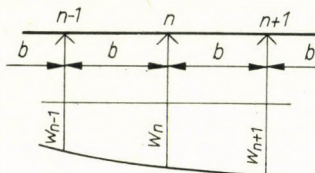


Bild 2

spezifische Werte von der Dimension Mpm/m , und für die Biegesteifigkeit steht $E_T J_T / a$.

$$m_{n-1} + 4m_n + m_{n+1} = -6 \frac{E_T J_T}{ab^2} (w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}). \quad (3)$$

Die Matrizenform des mittels (3) hergeleiteten linearen Gleichungssystems ist:

$$\mathbf{Mm} = -6 \frac{E_T J_T}{ab^2} \mathbf{Cw}, \quad (4)$$

worin

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

wobei \mathbf{m} der Spaltenvektor der Stützpunkt-Momente bedeutet, und \mathbf{w} ist der Spaltenvektor der Stützpunkt-Verschiebungen aus r Elementen (r ist die Anzahl der inneren Stützpunkte.)

Mit Rücksicht auf

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} + 6\mathbf{E} \quad (6)$$

erhalten wir aus (4)

$$\mathbf{m} = -6 \frac{E_T J_T}{ab^2} (\mathbf{C} + 6\mathbf{E})^{-1} \mathbf{Cw}. \quad (7)$$

Aus der Matrizen-Gleichung (7) kann man die Stützpunktmomente aus den angegebenen Verschiebungswerten errechnen; unter [2] haben wir die erste ungarische Quelle für (7) angeführt.

Mit einem Hinweis auf Bild 3. erhalten wir den Zusammenhang zwischen den (ebenfalls spezifischen) Auflager-Zwangskräften und Momenten, und zwar mit Hilfe der Momentengleichungen für das Grundsystem bzw. im Wege der Errechnung und Summierung der auf den gemeinsamen Auflagern des Grundsystems auftretenden Teil-Reaktionen.

An der n -ten Angriffskante haben wir:

$$q_n = q_n^* + q_n^{**} = \frac{1}{b} (m_{n-1} - 2m_n + m_{n+1}) + p_n. \quad (8)$$

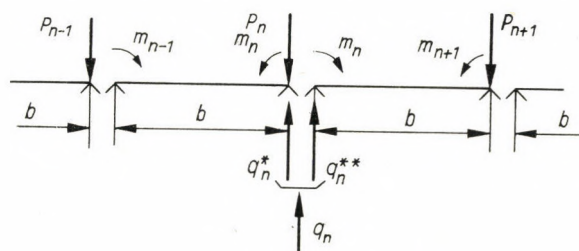


Bild 3

Die für die Fälle $n = 1, 2, \dots, r$ gültigen Gleichungen lauten in Matrizen-schreibweise

$$\mathbf{q} = \frac{1}{b} \mathbf{C} \mathbf{m} + \mathbf{p}. \quad (9)$$

Hier ist \mathbf{q} der Spaltenvektor der Intensität der Auflager-Kantkräfte und \mathbf{p} der Spaltenvektor der Intensität der äusseren Kräfte (der zufälligen Lasten), Ihre Elemente haben die Dimension Mp/m . Vorderhand setzen wir nicht voraus, dass die Elemente von \mathbf{p} untereinander gleich sind.

Nach Einführung der Bezeichnung

$$\mathbf{C}(\mathbf{C} + 6\mathbf{E})^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{K} \quad (10)$$

und nach Einsetzen der rechten Seite von (7) in die Matrixgleichung (9), erhalten wir

$$\mathbf{q} = -6 \frac{E_T J_T}{ab^3} \mathbf{K} \mathbf{w} + \mathbf{p} \quad (11)$$

als Ausdruck des Zusammenhanges zwischen Auflagerkräften und Verschiebungen. (Siehe z. B. [10]).

3.3. Die Wirkung der zufälligen Last auf die Kabel. Grundgleichung des Gleichgewichts

Nun wollen wir uns mit der Bestimmung der Gleichgewichtsgestalt der Kabel, die unter der Wirkung der zufälligen Lasten entsteht, befassen.

Bezeichnen wir den Durchhang des n -ten Kabels mit $w_n(x)$. Dies gleicht der Verschiebung des n -ten Zwischenstützpunktes eines Querträgers, dessen Achse durch die Veränderliche x angezeigt wird. Die Gleichgewichtsbedingung am Kabel wird durch die folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$(z + w_n)'' = - \frac{gb + q_n(x)}{H_n}, \quad (12)$$

oder

$$w_n'' + \frac{q_n}{H_n} = - \frac{gb}{H_n} - z''. \quad (13)$$

Mit Rücksicht auf

$$z'' = - 2 \frac{f}{l_k^2} \quad \text{und} \quad H_g z'' = - gb \quad (14)$$

und durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (13):

$$w_n'' + \frac{q_n}{H_n} = \frac{2f}{l_k^2} \left(1 - \frac{H_g}{H_n} \right). \quad (15)$$

Diese Gleichung behält dieselbe Form durch Änderung des Indizes » n « von 1 bis r , für sämtliche Kabel. In Matrixschreibweise lautet sie folgendermassen:

$$\mathbf{w}'' + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{q} = 2 \frac{f}{l_k^2} (\mathbf{E} - H_g \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{e}, \quad (16)$$

wobei

$$\mathbf{H}^{-1} = \left\langle \frac{1}{H_1} \quad \dots \quad \frac{1}{H_n} \quad \dots \quad \frac{1}{H_r} \right\rangle. \quad (17)$$

Unter Einbeziehung von (11), und gleichzeitiger Umstellung der Störfunktion auf die rechte Seite:

$$\mathbf{w}''(x) - 6 \frac{E_T J_T}{ab^3} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{w}(x) = 2 \frac{f}{l_k^2} (\mathbf{E} - H_g \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{e} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{p}. \quad (18)$$

Die Matrizen-Gleichung (18) ist der Ausdruck für die deformierte Gestalt der Kabel und ist zugleich die Gleichgewichtsbedingung des hängenden Dach-

werks. Nach ihrer Lösung erhalten wir mit Hilfe von (7) die Momentendiagramme der einzelnen Träger, und durch Einbeziehung von (9) wird es möglich, auch das System der Verbindungskräfte (der Auflager-Reaktionen) bzw. die Querkraftsdiagramme der einzelnen Querträger zu bestimmen.

Da die Ränder als steif angenommen sind, gilt für (18) als Randbedingung:

$$\mathbf{w}(l_k) = \mathbf{w}(-l_k) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Ähnlicherweise wie bei der Melanschen Differentialgleichung der Kabelbrücken [6], und bei der Formgleichungen der doppeltgekrümmten Kabeldächer [7], [11], [12], ist auch das System [18] an und für sich statisch unbestimmt, da sowohl die Funktion $\mathbf{w}(x)$, wie auch die Elemente der für die Kabelkräfte kennzeichnenden Matrix \mathbf{H} unbekannt sind.

4. Verträglichkeitsbedingungen

Um die Unbestimmtheit aufzulösen, müssen die Verträglichkeitsbedingungen der Kabel aufgestellt werden. Diese sind gleichbedeutend mit der Feststellung, dass die Summe der Projektionen in Richtung x der elastischen Längenänderungen für jedes einzelne Kabel gleich Null ist, da die zwei Endpunkte eines Kabels an je ein steifes Bauelement verankert sind.

Man verwendet bei der Berechnung der Kabelbrücken Verträglichkeitsgleichungen ähnlicher Art. Solche wurden in verschiedener Form veröffentlicht: der Unterschied besteht in der Wahl ihrer geometrischen Vereinfachungen bzw. Vernachlässigungen. Hier soll die Verträglichkeitsgleichung der Theorie von MELAN—LIE angewendet werden [6].

Nun gilt es für das n -te Kabel

$$\begin{aligned} & \frac{H_n - H_g}{E_k F_k} \left[l_k \left(1 + 2 \frac{f^2}{l_k^2} \right) + \frac{l_k^*}{\cos^3 \varphi} \right] \pm \\ & \pm \alpha_k t^\circ \left[l_k \left(1 + \frac{4}{3} \frac{f^2}{l_k^2} \right) + \frac{l_k^*}{\cos^2 \varphi} \right] - \\ & - \frac{f}{l_k^2} \int_{-l_k}^{l_k} w_n(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

(wobei für φ das Bild 1 massgebend ist).

Führen wir folgende vereinfachende Ausdrücke ein:

$$\begin{aligned} & \left[l_k \left(1 + 2 \frac{f^2}{l_k^2} \right) + \frac{l_k^*}{\cos^3 \varphi} \right] = l_{(\varepsilon)}, \\ & \left[l_k \left(1 + \frac{4}{3} \frac{f^2}{l_k^2} \right) + \frac{l_k^*}{\cos^2 \varphi} \right] = l_{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Zugleich sollen aus (20) die Temperaturänderungen ausgedrückt werden:

$$\pm t^\circ = \frac{f}{\alpha_k l_k^2 l_{(\alpha)}} \int_{-l_k}^{l_k} w_n(x) dx - \frac{(H_n - H_g) l_{(\epsilon)}}{\alpha_k E_k F_k l_{(\alpha)}} \quad (22)$$

Für den Sonderfall von $t^\circ = 0$, gilt:

$$H_n = H_g + \frac{E_k F_k}{l_{(\epsilon)}} \frac{f}{l_k^2} \int_{-l_k}^{l_k} w_n(x) dx. \quad (23)$$

Aus den letzten zwei Formeln lässt sich auf folgende Folgerungen schliessen: falls die Fläche im Deformationsdiagramm des Kabels infolge der bestehenden Antimetrie gleich Null ist, so kann man (allenfalls innerhalb der Einschränkungen, die infolge der geometrischen Vernachlässigung in der angewendeten Verträglichkeitsbedingung geboten sind) den Wert H_n bei gegebener Temperaturänderung im voraus, von den Gleichgewichtsbedingungen ganz unabhängig, errechnen. Ist aber eine Temperaturänderung nicht vorhanden, so ist $H_n = H_g$. Also entsteht auch unter Einwirkung der zufälligen Last in dem Kabel keine Spannungsänderung.

Die Gleichungen (22) und (23) können für jedes einzelne Kabel durch Änderung des Indexes n von 1 bis r in derselben Form aufgestellt werden, also lassen sich alle Verträglichkeitsbedingungen in einer einzigen Matrizen-Gleichung vereinigen.

Nach Einführung der Kurzzeichen:

$$\frac{2f}{\alpha_k l_k^2 l_{(\alpha)}} = \vartheta; \quad \frac{l_{(\epsilon)}}{\alpha_k E_k F_k l_{(\alpha)}} = \chi; \quad \frac{2E_k F_k f}{l_k^2 l_{(\epsilon)}} = \omega \quad (24)$$

erhält man gemäss (22)

$$\pm t^\circ \mathbf{e} = \frac{\vartheta}{2} \int_{-l_k}^{l_k} \mathbf{w}(x) dx - \chi(\mathbf{h} - H_g \mathbf{e}), \quad (25)$$

bzw. gemäss (23)

$$\mathbf{h} = H_g \mathbf{e} + \frac{\omega}{2} \int_{-l_k}^{l_k} \mathbf{w}(x) dx, \quad (26)$$

wo \mathbf{h} den Spaltenvektor der Kabelkraftprojektionen bedeutet.

Die Matrixgleichungen (25) und (26) stellen die Verträglichkeitsbedingung der Trägernetze dar, und enthalten dieselben unbekanntenen Skalargrößen wie (18). Die Unbestimmtheit ist hiedurch aufgelöst; das Verbundsystem ent-

hält $2r$ Skalargleichungen. Demgegenüber ist die Zahl der unbekanntenen Verschiebungs-Funktionen bzw. der unbekanntenen Kabelkraftprojektionen eben $2r$. Es soll betont werden, dass mit im voraus bestimmten H_n -Werten die Matrizen-Gleichung (18) an und für sich linear ist, (25) und (26) sind aber allgemein nicht linear.

Das gesamte System ist selbstredend auch nicht linear, doch kann die Aufgabe im Sinne des Vorhergesagtes durch lineare Superposition gelöst werden, falls die zufällige Last an den Kabeln antimetrisch ist.

Zusätzlich kann noch berechtigterweise zu der veränderlichen Last eine weitere, jedenfalls eine antimetrische Last aufgehäuft werden.

Die weiteren Aufgaben sind die folgenden: die Lösung von (18), unter der Voraussetzung von bekannten Werten für H_n ; die hieraus abgeleitete Errechnung der Integrale in den Gleichungen (25) und (26); die Lösung der Matrixgleichung (26) für die richtigen Grössen von H_n ; die endgültige Bestimmung der Durchbiegungen durch Rückeinsetzung derselben in die Formel (18).

THEORETISCHE UNTERSUCHUNGSMETHODEN DER IM ERDBODEN ENTSTEHENDEN PLASTIZITÄTSBEREICHE

L. RÉTHÁTI

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAU- UND VERKEHRSWESSEN BUDAPEST

[Eingegangen am 15. Oktober 1964]

Man kann eine allgemein gefaßte Gleichung (4) der Spannungen, die Plastizitätsbereiche verschiedener Ausbreitung hervorrufen, auch in Analogie zu der für die Bruchtragfähigkeit von BUISMAN—SCHULTZE aufgestellten Formel anschreiben. Nachweisbar sind die in üblicher Weise definierten Tragfähigkeitsfaktoren nur von dem Reibungswinkel φ abhängig. Der Verfasser weist nach, daß in Bezug auf die Bruchbelastung im Falle $\varphi = 0$ mit der sogenannten »kritischen Spannung« nur ein Sicherheitsgrad ν gleich 1.64 erreicht wird, und für tiefere Fundamente ist $\nu < 1.64$. Im Falle $\varphi = 0$ wird die Bruchbedingung bei Spannungen, die einen bestimmten kritischen Wert übertreffen, entlang von zwei konjugierten Kreisbögen erfüllt, die leicht zu konstruieren sind.

Einleitung

Bei Betrachtung der Berechnungsmethoden der zulässigen Bodenpressung kann man nach BALLA [1] drei Gruppen unterscheiden.

— 1. Die Anhänger des Plastizitätsprinzips bauen auf die Voraussetzung, daß die Bruchbedingung in jedem Punkt der lasttragenden Bodenmasse erfüllt ist, daß also in jedem Punkt zwei Flächen übereinander rutschen. Es gibt aber nur drei spezielle Fälle, für welche eine einwandfreie Lösung zu finden ist; diese sind: die ebene Rutschfläche (RANKINE, 1856), die hypothetisch gewichtslose Masse (PRANDTL, 1920) und der vollkommen plastischer Boden (JÁKY, 1948).

— 2. Die auf der Grundlage der Prüfung der rutschenden Masse ausgearbeiteten Methoden sind an gewisse Vorbedingungen betreffs Gestalt der Gleitfläche gebunden, und es wird dabei das Gleichgewicht der auf die rutschende Erdmasse als einen einheitlichen Körper wirkenden Kräfte geprüft (TERZAGHI, MIZUNO, MEYERHOF, BALLA usw.).

— 3. Die Anhänger der dritten Methode betrachten das Problem unter Verknüpfung der Prinzipien der Elastizitätslehre und der Plastizitätslehre: die Spannungen werden im Sinne der Elastizitätstheorie aus der Michellschen Formel abgeleitet, und die erhaltenen Werte werden in die Coulombschen Bruchbedingungen eingesetzt; die Untersuchungen dienen der Bestimmung der Vorbedingungen, die notwendig sind, um in den einzelnen Massenpunkten des Bodens den Grenzzustand des Bruches zu erreichen, und um die Plastizi-

tätsbereiche zu bilden (FRÖHLICH, MAAG, PUSIRJEWSKIJ, MASLOW, JAROPOLSKIJ, SCHELJAPIN).

Die »Dimensionierung auf Grund des ersten Grenzzustandes« besteht darin, daß die horizontalen Dimensionen des Grundkörpers mit Hilfe der im Wege einer der drei oben erwähnten Methoden errechneten »zulässigen Beanspruchung« bestimmt werden. — Man kann aber, dank der Weiterentwicklung der theoretischen Bodenmechanik bzw. der durchgeführten Experimente und Beobachtungen die »Dimensionierung auf Grund des zweiten Grenzzustandes« stufenweise einführen, indem jene Bodenbeanspruchung bzw. jene Kombination derselben als zulässig betrachtet wird, durch welche die Formänderungen im Oberbau eines Bauobjektes unter einem bestimmten kritischen Wert bleiben. Dieses Prinzip wird auch in den Statuten der Sowjetischen Bauverordnung befolgt [3].

Es unterliegt keinem Zweifel, daß der Versuch eine Dimensionierungsmethode auf Grund des zweiten Grenzzustandes anzuwenden noch viele ungelöste Probleme aufwirft. Daraus läßt es sich erklären, daß die erwähnten Berechnungsmethoden derzeit noch in bedeutendem Maße für die Berechnung bzw. Dimensionierung der Fundamente verwendet werden. In der sowjetischen Bauverordnung finden wir hierzu ein interessantes Beispiel: im Sinne der Statuten kann die Berechnung der Setzung auf Grund des zweiten Grenzzustandes nur dann nach den Prinzipien der Elastizitätslehre erfolgen, wenn die effektive Sohlspannung unter jenem bestimmten Wert bleibt, welcher mit Hilfe einer in der dritten (kombinierten) Methode gegebenen Formel errechnet wird. Es wird von manchen Forschern die durch Anwendung eines kombinierten Verfahrens erhaltene Spannung als zulässige Bodenpressung angenommen.

Die Voraussetzung bzw. Arbeitshypothese, nach welcher durch die auf Grund der Michell-Coulombschen Sätze aufgestellten theoretischen Formeln die Grenze der linearen Formänderung bestimmt wird, ist geeignet, die Anwendung dieser Methode auszudehnen. (Diese Frage gewinnt eine gewisse Aktualität, da in der derzeit in Bearbeitung gezogenen Norm der R.G.W. vermutlich diese Hypothese anempfohlen werden dürfte.) Nach einer kurzen Übersicht der bekannten theoretischen Anschauungen wollen wir die Zusammenhänge mit den Bruchtheorien prüfen, das Verhältnis der mit Hilfe dieser theoretischen Voraussetzungen errechneten Spannungswerte zu den Bruchspannungen ermitteln und den Spezialfall $\varphi = 0$ behandeln.

1. Beziehungen zwischen den Theorien einzelner Forscher

Die Grundformel beruht auf den folgenden Voraussetzungen:

a) unsere Betrachtung betrifft ein unendlich langes Streifenfundament mit der Breite $2b$;

- b) die Sohlspannung ist gleichmäßig verteilt, mit einer der verteilten äußeren Belastung q gleichwertigen Intensität;
 c) die Hauptspannungen sind aus der Michellschen Formel errechenbar;
 d) die Eigengewichtsspannungen sind hydrostatischer Natur und können nach dem Prinzip der Superposition den Hauptspannungen zugefügt werden;
 e) für das Verhältnis der Hauptspannungen ist die Coulomb-Rankine-sche Bruchbedingung maßgebend.

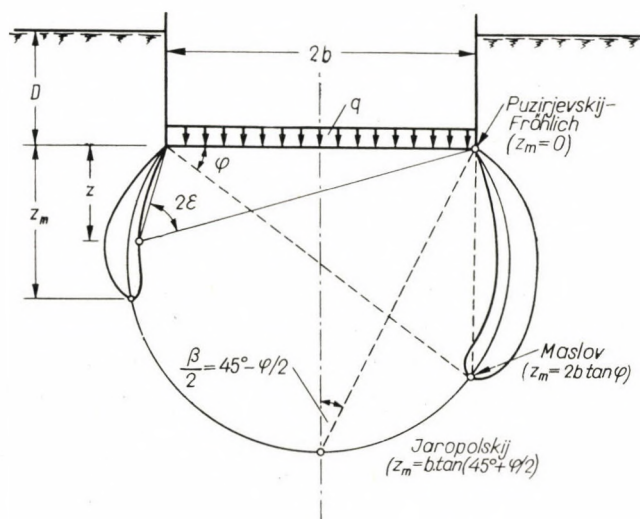


Bild 1. Entscheidende Größe der Plastizitätsbereiche nach Auslegung einzelner Autoren

Die Hauptspannungen in einer beliebigen Tiefe z lassen sich mit den Bezeichnungen des Bildes 1 folgendermaßen ausdrücken:

$$\sigma_{1,2} = \frac{q - D}{\pi} (2\epsilon \pm \sin 2\epsilon) + (D + z)\gamma. \quad (1)$$

Im Sinne des Coulomb-Rankineschen Satzes gilt:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \sin \varphi. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir für z

$$z = \frac{q - D\gamma}{\pi \cdot \gamma} \left[\frac{\sin 2\epsilon}{\sin \varphi} - 2\epsilon \right] - D - \frac{c \cot \varphi}{\gamma}, \quad (3)$$

wobei das letzte Glied als Ausdruck der sogenannten »Ersatztiefe der Kohäsion« bekannt ist.

In den verschiedenen theoretischen Betrachtungen wird die Ausdehnung eines Plastizitätsbereiches durch die Ordinate (z_m) des tiefsten Punktes gekenn-

zeichnet. Dies ergibt sich aus der Differenzierung der Gl. (3) nach ε bei Rücksetzung des erhaltenen Wertes von ε .

Es läßt sich leicht beweisen, daß diese Tiefpunkte an einem Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel $2\varepsilon = 90^\circ - \varphi$ liegen; hieraus ergibt es sich für q :

$$q = \frac{(D\gamma + z_m \gamma + c \cdot \cot \varphi) \pi}{\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + D\gamma. \quad (4)$$

Das ist also der Ausdruck einer verteilten Belastung q , wenn die Gründungstiefe D , der Reibungswinkel φ , die Kohäsion c und das Raumgewicht γ bekannt sind, wobei die Plastizitätsbereiche sich bis zu einer Tiefe z_m ausbilden. Gl. (3) ist ein Ausdruck des Zusammenhanges zwischen den drei Größen q , z und ε ; d.h., wenn hievon zwei bekannt sind, kann die dritte errechnet werden.

Mit Hilfe der Formel (4) haben PUSIRJEWSKIJ [9] und FRÖHLICH [5] jenen Wert der Belastung errechnet, bei welchem die Bruchbedingung nur in den zwei Eckpunkten des Streifenfundaments erfüllt ist ($z_m = 0$). Man kann nachweisen [10], daß in den Formeln anderer Forscher nur die ersten zwei Glieder im Zähler von denen der Gl. (4) abweichen. In diesem Sinne wurde Tafel I zusammengestellt. Die richtige Wertung der »Grenztiefe« ist aus Bild I ersichtlich.

Für den Ausdruck der kritischen Belastung hatte JÁKY [6] einen anderen Weg eingeschlagen. Seine Formel lautet:

$$q = \frac{\pi}{2} \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi - (\pi/2 - \varphi) \sin \varphi} \cdot \sigma_d + D\gamma \quad (5)$$

wo σ_d die Druckfestigkeit bedeutet.

Nach der Beweisführung von VARGA [10] ist Formel (5) mit der obigen Gl. (4) gleichwertig, mit dem einzigen Unterschied, daß die Summe $D\gamma + z_m \gamma$ im Zähler der Gl. (4) konkret vorkommt, hingegen fehlt sie im Zähler in Gl. (5) (s. Tafel I). Dies rührt daher, daß bei JÁKY die Eigengewichtsspannung vernachlässigt ist.

Tafel I

Die ersten zwei Glieder im Zähler der Formel (4) nach den verschiedenen Autoren

Autor	Wert des Ausdruckes $D\gamma + z_m \gamma$
JÁKY	0
PUSIRJEWSKIJ, FRÖHLICH	$D \cdot \gamma$
MASLOW	$D\gamma + 2 b \tan \varphi$
JAROPOLSKIJ	$D\gamma + b \tan (45^\circ + \varphi/2)$

Erwähnenswert ist noch die Formel von SCHELJAPIN; dies gilt für den Fall, wo sich die Plastizitätsbereiche überschneiden; für die entsprechende kritische Belastung gilt:

$$q = \frac{[D\gamma + b\gamma \cot(\beta/2) + c \cdot \cot \varphi] \pi}{\sin \beta / \sin \varphi - \beta} + D\gamma. \quad (6)$$

Hier bedeutet β den Winkel, der von den Verbindungsgeraden zwischen einem Eckpunkt der Grundfläche und je einem Schnittpunkt der Grenzkurven gebildet ist.

Aus der Gl. (6) von SCHELJAPIN läßt sich die Formel von JAROPOLSKIJ leicht ableiten. Für diesen Fall ist nämlich $\beta = 90^\circ - \varphi$ (Bild 1), und der Nenner auf der rechten Seite in Gl. (6) läßt sich folgenderweise anschreiben:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} - \beta = \frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2};$$

ferner ist die Kreisfunktion im 2-ten Glied des Zählers (bei SCHELJAPIN) identisch mit dem entsprechenden Glied in der Formel von JAROPOLSKIJ, nämlich $\tan [45^\circ - \varphi/2]$.

Es steht also fest, daß die von den verschiedenen Autoren in den letzten 40 Jahren mitgeteilten Formeln alle auf eine und dieselbe Grundformel zurückzuführen sind; es kann zwischen diesen Darstellungen keine prinzipielle Abweichung entdeckt werden. Nur entsteht hier die Frage: wie steht es um die Übereinstimmung der Theorie mit der Wirklichkeit? In einer Arbeit [4] behauptet FLORIN unter Berufung auf ein Zahlenbeispiel, daß man mit der Voraussetzung der hydrostatischen Natur der Eigengewichtsspannungen keinen großen Fehler begeht. Doch ist diese Behauptung für die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Sohlspannung nicht mehr stichhältig. Bekannterweise gilt dies nur in Ausnahmefällen; allgemein kann die Abweichung bedeutend sein.

2. Zusammenhang zwischen der die Plastizitätsbereiche hervorrufenden Spannung und der Bruchspannung

Unabhängig davon, ob die aus Gl. (4) erhaltenen Werte in gewissem Sinne als die zulässige Belastung des Bodens aufgefaßt werden oder nicht, ist es jedenfalls interessant, den Zusammenhang zu erforschen, welcher zwischen diesen q -Werten und den aus den Bruchtheorien abgeleiteten kritischen Belastungswerten bestehen dürfte.

In der Mehrzahl der Bruchtheorien läßt sich die Bruchtragfähigkeit mit Hilfe der allgemeinen Formel (nach BUISMAN—SCHULTZE) ausdrücken, u.zw.

$$p_t = b\gamma N_\gamma + D\gamma N_q + c N_c. \quad (7)$$

Nach Annahme der Bezeichnung

$$N = \frac{\pi}{\cot \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} \quad (8)$$

läßt sich Gl. (4) in folgender Form anschreiben:

$$q = z_m \gamma N + D\gamma(N + 1) + c \cdot \cot \varphi \cdot N, \quad (9)$$

d. h., die einzelnen Tragfähigkeitsfaktoren sind:

$$N_\gamma = \frac{z_m}{b} N, \quad (10a)$$

$$N_q = N + 1, \quad (10b)$$

$$N_c = N \cdot \cot \varphi. \quad (10c)$$

Wenn man es vor Augen hält, daß die Größe z_m bei den zitierten Autoren (PUSIRJEWSKIJ—FRÖHLICH, MASLOW und JAROPOLSKIJ) gleichsam als eine lineare Funktion von b erscheint, so ist es klar, daß der Ausdruck N_γ von der Breite b des Fundamentkörpers unabhängig ist. Also ist jeder einzelne der drei Tragfähigkeitsfaktoren nur von dem Reibungswinkel abhängig, in voller Übereinstimmung mit den theoretischen Bruchbedingungen.

Die drei erwähnten theoretischen Bedingungen unterscheiden sich voneinander nur in dem Ausdrücke von N_γ :

nach PUSIRJEWSKIJ—FRÖHLICH:	$N_\gamma = 0,$
nach MASLOW:	$N_\gamma = 2 \tan \varphi \cdot N,$
nach JAROPOLSKIJ:	$N_\gamma = \tan [45^\circ + \varphi/2]N,$
nach JÁKY:	$N_\gamma = 0, N_q = 1.$

Die Funktionskurven $N = f(\varphi)$ sind in dem Bild 2 dargestellt.

Interessant ist noch, die einzelnen Faktoren der Belastungsfähigkeit miteinander zu vergleichen. Aus (10b) und (10c) erhält man:

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi. \quad (11)$$

Nach Einsetzung (in die Gl. 10a) der Werte z_m laut der Annahme von MASLOW bzw. von JAROPOLSKIJ, erhält man für N_γ :

(MASLOW): $N_\gamma^M = 2 \tan \varphi \cdot N,$

(JAROPOLSKIJ): $N_\gamma^J = \tan [45^\circ + \varphi/2]N.$

Ist $\varphi = 0$, so gilt $N = 0$ (Gl. 8), und daher ist:

$$N_{\gamma}^{M,J} = N_q^{M,J} - 1 \tag{12}$$

(im Falle MASLOW ist diese Gleichheit auch bei $\varphi = 26^{\circ}33'$ gültig).

Die Ausdrücke laut Gl. (11) und (12) entsprechen den bekannten Zusammenhängen, die sich aus den als theoretisch richtig anerkannten Bruch-

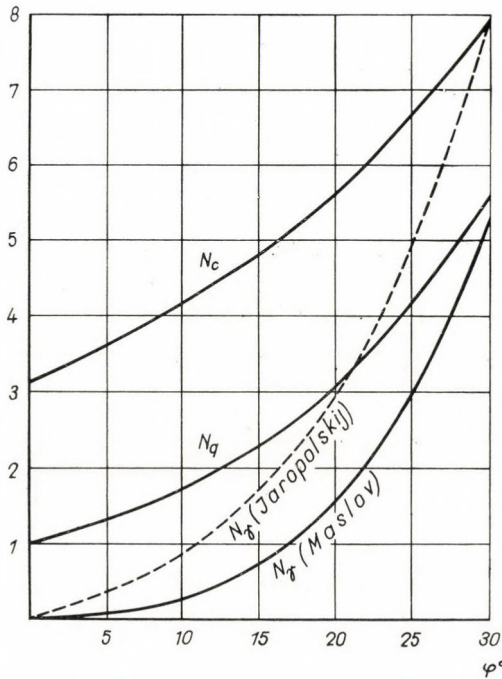


Bild 2. Tragfähigkeitsfaktoren als Funktion des Reibungswinkels

bedingungen nach PRANDTL—CAQUOT bzw. aus der von JÁKY ausgearbeiteten Plastizitätsmethode für $\varphi = 0$ ableiten lassen. Daraus, daß die Gl. (12) nicht nur für $\varphi = 0$ sondern — im Sinne der Verhältnisse im Bild 2 — annäherungsweise auch für den Bereich $\varphi \neq 0$ gültig ist, kann man die Grundbedingung von BRINCH-HANSEN [2] gewissermaßen als begründet betrachten, und auch die daraus abgeleitete folgende Gleichung der Bruchbelastung anerkennen:

$$p_t = (b\gamma + c \cot \varphi) (N_q - 1) + D\gamma N_q. \tag{13}$$

3. Das Problem der Sicherheit gegen Grundbruch

Die Frage des Sicherheitsgrades gegen Grundbruch bei richtiger Wertung der aus Gl. (4) errechneten kritischen Belastung wartet sozusagen immer noch

auf Beantwortung. Die Antwort fällt nicht leicht, da uns der genaue Wert der Bruchbelastung unbekannt ist.

Es gibt nur einen einzigen Fall, für welchen die Sicherheit numerisch festgestellt werden kann. Für $\varphi = 0$ steht nämlich die lückenlose theoretische Lösung fest, nach welcher die Formel der Bruchtragfähigkeit folgenderweise angeschrieben werden kann:

$$p_t = (\pi + 2)c + D\gamma. \quad (14)$$

Durch Vergleich dieser Größe mit dem Wert aus Gl. (4) für den Fall $\varphi = 0$, erhält man den gesuchten Sicherheitsgrad.

Wenn man den Zähler und den Nenner in Gl. (4) durch $\cot \varphi$ dividiert, erhält man:

$$q = \frac{\frac{\pi D\gamma}{\cot \varphi} + \frac{\pi z_m \gamma}{\cot \varphi} + \pi \cdot c}{1 + \frac{\varphi}{\cot \varphi} - \frac{\pi}{2 \cot \varphi}} + D\gamma.$$

Für $\varphi = 0$ nehmen die zwei ersten Glieder im Zähler den Wert Null an, u. zw. für jeden beliebigen Wert von z_m ; dies folgt aus den folgenden Grenzwertgleichungen:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot 2b \cdot \tan \varphi}{\cot \varphi} = 2\pi b \cdot \lim_{\varphi \rightarrow 0} \tan^2 \varphi = 0, \text{ und}$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot b \cdot \tan(45^\circ + \varphi/2)}{\cot \varphi} = \pi b \cdot \lim_{\varphi \rightarrow 0} \tan(45^\circ + \varphi/2) \cdot \tan \varphi = 0.$$

Auch das 2. und 3. Glied im Nenner ist gleich Null. (Für das zweite Glied ist dies auf Grund des l'Hospital'schen Satzes nachweisbar.) So ist für $\varphi = 0$ die »kritische Belastung«:

$$q = \pi c + D\gamma, \quad (15)$$

und der gesuchte Sicherheitsgrad:

$$\nu = \frac{(\pi + 2)c + D\gamma}{\pi c + D\gamma}, \quad (16)$$

d. h., bei einer Gründung an der Oberfläche ist $\nu = 1,64$, und für $D > 0$ ist $\nu < 1,64$. Diese Sicherheitswerte sind überraschend niedrig.

4. Nähere Prüfung des Falles $\varphi = 0$

Der Sinn der Gleichung (15) steht mit den aus dem Plastizitätsprinzip abgeleiteten theoretischen Bruchbedingungen insofern im Einklang, daß die kritische Belastung von der Breite des Grundkörpers unabhängig ist.

Nun ist aber laut Gl. (15) überraschend, daß der Wert q auch vom Tiefenmaß z_m , also auch von der Plastizitätsbereiche unabhängig ist. Diese paradoxe Erscheinung erheischt eine tiefergehende Prüfung der Zusammenhänge.

Da die Formel (15) eigentlich nur einen Grenzübergang des allgemeinen Falles $\varphi \neq 0$ darstellt, ist es nicht unvorstellbar, daß die Funktion allgemeiner Natur bei $\varphi = 0$ einen singulären Punkt aufweist. Um uns hievon überzeugen zu können, wollen wir die Ausgangsbedingung dem Falle $\varphi = 0$ entsprechend abändern. So will also die Bruchbedingung an Stelle der Gl. (2) die folgende Form annehmen:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = c. \tag{17}$$

In diesem Sinne erhalten wir unter Verwendung der Gl. (1) als Hälfte der Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ (die dabei c gleichgestellt wird):

$$\frac{q - D\gamma}{\pi} \sin 2\varepsilon = c$$

bzw.

$$q = \frac{c \pi}{\sin 2\varepsilon} + D\gamma. \tag{18}$$

Diese Formel korrespondiert eigentlich der Gl. (4) mit der entscheidenden Abweichung, daß in Gl. (4) auch die Größe z vorkommt, in Formel (18) aber nicht.

Wenn wir die Formeln (18) und (15) miteinander vergleichen, so können wir für diese für $2\varepsilon = 90^\circ$ die Identität feststellen. Nun fragt es sich, ob die Belastung bei diesem Winkelwert als die kritische Größe erkannt werden kann? Bei näherer Betrachtung der Gl. (18) läßt sich die Antwort hierauf finden. Es ist nämlich ohne Weiteres offenkundig, daß die Funktion $q = f(\varepsilon)$ an der Stelle $2\varepsilon = 90^\circ$ einen extremen Wert, u. zw. ein Minimum aufweist. So entspricht also der Wert laut Gl. (15) der minimalen Belastung, durch welche bereits Plastizitätsbereiche hervorgerufen werden. Während aber für den Fall $\varphi \neq 0$ das zuerst entstehende Plastizitätsbereich nur einen einzigen Punkt darstellt, ist dasselbe für den Fall $\varphi = 0$ ein Halbkreis, nachdem die Bruchbedingung im Sinne der Gl. (18) für einen bestimmten q -Wert entlang eines Halbkreisumfangs erfüllt wird.

Während einer Steigerung der Belastung beginnt eine Ausbreitung des eindimensionalen plastischen Bereiches. Die Bruchbedingung ist an je zwei Halbkreislinien erfüllt, für welche die Summe der Peripherie-Winkel 180°

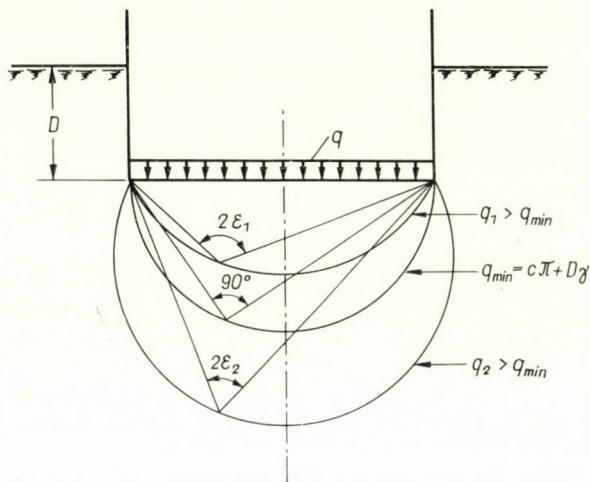


Bild 3. Bildung der plastischen Bereiche für den Fall $\varphi = 0$

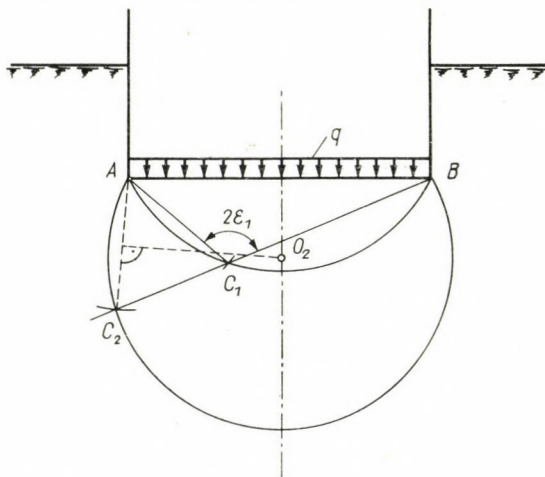


Bild 4. Konjugierte Kreise im Falle $\varphi = 0$

beträgt, wobei der eine Halbkreis oberhalb, der andere unterhalb des kritischen Halbkreises liegt (Bild 3).

Das Auffinden der konjugierten Kreise ist einfach. Es sei ein gegebener Kreisbogen einem gewissen Belastungswert q zugeordnet, dessen Peripherie-Winkel gleich $2\epsilon_1$ ist (s. Gl. 18). Unter Annahme eines beliebigen Punktes

C_1 soll der Schenkel $\overline{BC_1}$ des aufgezeichneten Winkels $\sphericalangle AC_1B = 2\varepsilon_1$ verlängert, und entlang dieses Schenkels der Abstand $\overline{AC_1}$ aufgetragen werden (Bild 4). Da nun $\sphericalangle AC_2C_1 = 180^\circ - 2\varepsilon_1$ ist, so liegt Punkt C_2 an jenem Kreisbogen, entlang dessen — für denselben Belastungswert q — die Bruchbedingung erfüllt ist. Die Ausbreitung der Plastizitätsbereiche ist verschiedener Natur in den Fällen $\varphi \neq 0$ einerseits und $\varphi = 0$ andererseits. Hiedurch ist aber die Tatsache, daß die Gl. (18) effektiv den Wert der kritischen Belastung bestimmt, überhaupt nicht berührt. Also kann man den in dem vorangehenden Abschnitt errechneten Sicherheitsgrad mit Recht als eine für die hier analysierten theoretischen Bedingungen spezifische Kennzahl in der Umgebung $\varphi = 0$ betrachten.

5. Schlußfolgerungen

Um die unter dem Einfluß der Belastung im Boden entstehenden Plastizitätsbereiche zu bestimmen, verfügen wir derzeit über theoretische Bedingungen für die Elastizitätslehre und das Plastizitätsprinzip als kombinierte Grundlage verwendet werden. Alle Formeln zur Bestimmung der Größe des Bereiches, in welchem die Bruchbedingung erfüllt ist, lassen sich in einer gemeinsamen Form (Gl. 4.) anschreiben; eine Abweichung besteht in der Bewertung von zwei — bzw. wenn man von der Formel Jáky, in welcher das Eigengewicht vernachlässigt wird, absieht — von nur einem additiven Glied (Tafel I).

Obwohl dieses sogenannte »kombinierte« Verfahren bedeutend von den auf Grund einer Gleitfläche bzw. Gleitflächenschar aufgebauten Methoden abweicht, besteht zwischen den beiden ein enger, formaler Zusammenhang. Dieser manifestiert sich einerseits darin, daß man die »kritische Spannung«, durch welche die Plastizitätsbereiche hervorgerufen werden, jeweils als eine Funktion anschreiben läßt, für deren Ausdruck immer dieselben — und nur von dem Reibungswinkel abhängigen — Belastungsparameter (b, D, c) dienen (Gl. 7., Bild 2), andererseits auch darin, daß der Zusammenhang zwischen diesen Parametern als Tragfähigkeitsfaktoren im Falle $\varphi = 0$ derselbe bleibt (Gl. 11 und 12.). Dieser Umstand trägt viel dazu bei, die Arbeitshypothese einzelner Forscher als eine reelle Grundlage anzuerkennen, laut welcher irgendein Grenzwert der kritischen Spannung als zulässige Bodenpressung betrachtet werden kann.

Der Unterschied zwischen den hier behandelten Fällen besteht darin, daß die Ausbreitung des Plastizitätsbereiches bei $\varphi \neq 0$ nur ein Punkt ist, und für $\varphi = 0$ ist es ein Kreisbogen mit dem Peripherie-Winkel $2\varepsilon = 90^\circ$. Nachweisbar entspricht diese Feststellung dem singulären Punkt der allgemeinen Formel in mathematischem und auch in physikalischem Sinne. Wenn im Falle $\varphi = 0$ die Belastung gesteigert wird, so entsteht — von dem Falle

$\varphi \neq 0$ abweichend — sofort ein zusammenhängendes Plastizitätsbereich (Bild 3). Auch kann nachgewiesen werden, daß im Falle $\varphi = 0$, ähnlich dem Prinzip der Bruchbedingung, die kritische Spannung von der Breite des Fundamentes unabhängig ist; ferner steht noch — für den Fall $\varphi = 0$ — fest, daß im Verhältnis zu dem klassisch berechneten Wert der Bruchspannung der Sicherheitsfaktor der kritischen Spannung $\nu \leq 1,64$ ist, jenachdem der Wert $D \geq 0$ ist.

Allerdings sind die hier beschriebenen Verfahren nicht ohne gewisse Mängel, die selbstredend aus den Grundvoraussetzungen folgen. In der Wirklichkeit ist kein Fundament unendlich lang, auch ist die Verteilung der Sohlspannung niemals gleichmäßig, und die Eigengewichtsspannungen sind nicht von hydrostatischer Natur. Auch ist die Coulomb-Rankinesche theoretische Bruchbedingung — insbesondere bei festen Bodenarten — keine reelle Darstellung der Schererscheinungen; dieser Satz ist eher eine Annäherung ohne die gewünschte Eindeutigkeit. Immerhin sind wir bereits in der Lage, für gewisse Fälle die Fragen der Bildung der Plastizitätsbereiche im Wege einer genaueren Festlegung der prinzipiellen Voraussetzungen lösen zu können.

SCHRIFTTUM

1. BALLA, Á.: Talajok törőfeszültségének új elmélete. (Eine neue Theorie der Bruchtragfähigkeit des Bodens.) Dissertation. Budapest 1962.
2. BRINCH HANSEN, J.—LUNDGREN, H.: Hauptprobleme der Bodenmechanik. Springer Verlag. Berlin 1960.
3. Основания зданий и сооружений. Нормы проектирования. СНИП II—В. 1—62. Госстройиздат, Москва, 1962.
4. Флорин, В. А.: Основы механики грунтов. Госстройиздат. Москва, 1959.
5. FRÖHLICH, O. K.: Druckverteilung im Baugrunde. Wien 1934.
6. JÁKY, J.: Sur la stabilité des masses de terre complètement plastiques. *Műegyetemi Közlemények*, 1948.
7. Яропольский, И. В.: О применимости теории упругости к расчеты естественных оснований. Сборник ЛИИПС, вып. ХСІХ. 1929.
8. Маслов, Н. Н.: Прикладная механика грунтов. Машстройиздат, 1949.
9. Пузыревский, Н. П.: Расчеты фундаментов. Издание Института путей сообщения, 1923. Теория напряженности земляных грунтов. Сборник ЛИИПС, вып. ХСІХ. 1929.
10. VARGA, L.: Über die zuzufolge der Vergrößerung der plastischen Bereiche zulässige Bodenpressung. *Acta Techn. Hung.* 18 (1957).

ON THE THEORETICAL METHODS OF ANALYZIS OF PLASTICITY ZONES IN THE SOIL

L. RÉTHÁTI

SUMMARY

The general equation of the stresses creating plasticity zones of varying extent can be established also as an analogy to the Buisman—Schultze formula, for the stresses causing fracture in the soil. It can be proved that the usual load carrying factors depend only on the angle of friction (φ). The author shows that the “critical stress” gives for $\varphi = 0$ only 1.64 safety

against breaking; for deepened foundations the safety is still lower. For $\varphi = 0$ and for values greater than a certain critical stress the condition of fracture is satisfied along two conjugated arcs of circle which can be traced by a simple method.

DES MÉTHODES D'EXAMEN THÉORIQUE DES ZONES PLASTIQUES SE FORMANT DANS LE SOL

L. RÉTHÁTI

RÉSUMÉ

L'équation générale des contraintes provoquant l'extension des zones plastiques peut aussi s'écrire sur l'analogie de la formule de *Buisman—Schultze*, établie pour les contraintes provoquant la rupture à l'intérieur du sol. Il peut être démontré que les facteurs influant sur la force portante, définis de la façon usuelle, ne dépendent que de l'angle de frottement (φ). L'auteur démontre que pour le cas $\varphi=0$, la «contrainte critique» ne représente qu'une sécurité contre la rupture égale à 1,64 et une valeur encore moindre quand il s'agit de fondations profondes. Dans le cas de $\varphi = 0$, la condition de la rupture se trouve satisfaite, pour les valeurs dépassant une certaine contrainte critique, le long de deux arcs de cercle conjugués faciles à construire.

О МЕТОДЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГРУНТЕ

Л. РЕТХАТИ

РЕЗЮМЕ

Общее уравнение напряжений, создающих распространение пластических зон, различных размеров можно вывести также по аналогии формулы *Buisman—Schultze* напряжений, создающих в грунте излом. Можно доказать, что факторы допускаемой нагрузки, определяемые обычным образом, являются функцией угла трения (φ). Автор в дальнейшем показывает, что «критическое напряжение» в случае $\varphi = 0$ дает запас прочности по отношению к излому только порядка 1,64, а для случая углубленного фундамента запас прочности получается еще меньшим. В случае $\varphi = 0$ при значении, превышающем определенное критическое напряжение, условие излома удовлетворено вдоль двух конъюгированных дуг, которые можно построить просто.



SETZUNGSVORHERSAGE AUS ZEIT-SETZUNGSMESSUNGEN

Dr. rer. nat. H.-J. SCHÄFFNER

FORSCHUNGSANSTALT FÜR SCHIFFFAHRT, WASSER- UND GRUNDBAU BERLIN*

[Eingegangen am 10. Dezember 1964]

Es wird das Problem der Extrapolation von empirischen Zeitsetzungskurven behandelt. Voraussetzung dazu ist die Vorgabe eines analytischen Ausdruckes für den Zeitsetzungsverlauf, der durch die Beziehung $\varepsilon = A - B \exp(-\alpha t^\beta)$ beschrieben werden soll. Extrapolationen durch numerische Verfahren sind möglich, aber aufwendig, wie an einem Beispiel gezeigt wird. Der Aufwand erscheint ungerechtfertigt, wenn man die Ungenauigkeit der Ausgangsdaten berücksichtigt. Für die Praxis werden zwei einfache Abschätzverfahren vorgeschlagen, die eine Eingrenzung des gesuchten Grenzwertes $E = \lim \varepsilon$ für $t \rightarrow \infty$ gestatten und hinreichend zuverlässige Extrapolationen für endliche Zeitintervalle ermöglichen.

1. Einleitung

Der Praktiker wird häufig vor die Aufgabe gestellt, aus empirisch gewonnenen Zeitsetzungskurven Vorhersagen für den weiteren Setzungsverlauf zu treffen. Beispiele liefern Setzungsmessungen an Bauwerken und Dämmen, sowie die Ergebnisse von Retardationsversuchen an Materialproben verschiedenster Art, wozu auch die Konsolidierungstests in der Bodenmechanik gehören.

Die Problematik solcher Extrapolationen wird offenkundig, wenn man die Vorgänge der sogenannten Sekundärkonsolidierung betrachtet, für die häufig eine Beziehung der Form $\varepsilon = A + B \ln t$ angegeben wird. Wie bereits in [2] und [6] festgestellt wurde, ist diese Beziehung für Extrapolationszwecke schlecht geeignet, da in diesem Fall

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \infty$$

folgt.

Setzt man hingegen

$$\varepsilon = A - B \exp(-\alpha t^\beta)$$

an, so ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = E \hat{=} A.$$

* 1017 Berlin, Alt-Stralau 44/45.

Beispiele für die vielseitige Verwendbarkeit dieser Funktion sind in [4] für das Verhalten von rolligen Erdstoffen bei dynamischer Belastung, in [3] für das Verhalten von Betonproben bei statischer und dynamischer Verdichtung und in [1], [7] und [9] für das Gebiet der Materialprüfung chemischer Produkte enthalten. Fragen der Auswertung und zugeordnete rheologische Modelle werden in [5] und [6] behandelt. Eine Reihe von Beispielen auf dem Gebiet des Grundbaues enthält [8].

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Brauchbarkeit verschiedener Verfahren zur Abschätzung des Grenzwertes E zu untersuchen.

2. Berechnung des Grundwertes E durch Näherungsverfahren

2.1 Theorie

Es sei vorausgesetzt, daß der Setzungsverlauf der Funktion

$$\varepsilon = A - B \exp(-\alpha t^\beta)$$

folgt und im Bereich $t_1 < t_2 < t_3$ als Meßkurve vorliege. Die Größen α , β und $A \hat{=} E$ sind unbekannt. Weiter soll $A = B$ gelten; der allgemeinere Fall $A \neq B$ wird in [6] diskutiert. Um die Meßkurve durch eine Gerade der Form $Y = \beta X + \ln \alpha$ mit $Y = \ln[-\ln(1 - \varepsilon/E)]$ und $X = \ln t$ approximieren zu können (vergl. [4]), muß E vorgegeben werden.

Wir benutzen zur Bestimmung von E das Gleichungssystem

$$Z_n = \ln(1 - \varepsilon_n/E) = -\alpha t_n^\beta, \quad n = 1; 2; 3$$

aus dem die Größen α und β eliminiert werden können. Man erhält:

$$Z_1/Z_2 = (t_1/t_2)^\beta$$

und

$$Z_1/Z_3 = (t_1/t_3)^\beta.$$

Nach Division der logarithmierten Beziehungen folgt mit

$$C = \ln t_1 - \ln t_2 \quad \text{und} \quad D = \ln t_1 - \ln t_3$$

$$C \cdot \ln(Z_1/Z_3) = D \cdot \ln(Z_1/Z_2),$$

bzw.

$$(Z_1/Z_3)^C = (Z_1/Z_2)^D.$$

Um diese Gleichung lösen zu können, erinnern wir uns, daß $\varepsilon = \varepsilon(t)$ im Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_3$ bekannt sein soll; t_2 ist innerhalb dieses Bereichs frei wählbar.

Setzt man $D/C = 2$, so ergibt sich $Z_1 \cdot Z_3 = Z_2^2$, wobei t_2 aus der Bedingung

$$t_2 = (t_1 \cdot t_3)^{1/2}$$

zu ermitteln ist. Die Größe E kann aus der gewonnenen transzendenten Gleichung

$$f(E) = Z_1(E) \cdot Z_3(E) - [Z_2(E)]^2 = 0,$$

z. B. mittels linearer Interpolation (regula falsi) bestimmt werden. Man erhält in erster Näherung für die Größe E den Wert

$$\tilde{E}_1 = a - f(a) \cdot \frac{a - b}{f(a) - f(b)},$$

wenn a und b so gewählt wurden, daß E zwischen diesen angenommenen Größen liegt.

2.2 Beispiel

Ausgangsdaten (Tafel I):

Tafel I

n	t_n	E_n
1	10^2	0,0995
2	$7 \cdot 10^3$	0,80262
3	$4,9 \cdot 10^5$	5,03415

(Die Meßwerte ε_n wurden aus $\varepsilon = E[1 - \exp(-\alpha t^\beta)]$ mit $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 0.5$ und $E = 10$ berechnet.)

Gesucht: E .

Annahmen für a und b und Ergebnisse (Tafel II).

Tafel II

m	a	$f(a)$	b	$-f(b) \cdot 10^3$	\tilde{E}_m
1	8	$2,341 \cdot 10^{-4}$	12	4,97	11,2995
2			\tilde{E}_1	4,01	10,8170
3			\tilde{E}_2	2,96	10,5008
4			\tilde{E}_3	2,03	10,3012
5			\tilde{E}_4	1,31	10,1793

2.3 Diskussion

Wie aus Tafel II hervorgeht, bewirkt die Ersetzung von E durch a bzw. b in der Funktion $f(E) = 0$ nur geringe Abweichungen von Null. ($f(b) = 5 \cdot 10^{-5}$ für $b = 1,2 E$.)

Damit entfällt die Möglichkeit, die Beziehung

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 \cdot Z_3}$$

graphisch mit genügender Genauigkeit auszuwerten und E als Schnitt der Funktion $Z_2 = f(\varepsilon)$ und $Z_1 \cdot Z_3 = g(\varepsilon)$ zu ermitteln, wozu die Möglichkeit, $g(\varepsilon)$ als geometrisches Mittel von Z_1 u. Z_3 zu konstruieren, formalen Anreiz liefert.

Hierzu kommt, daß die Ausgangsdaten ε_n auch nach Ausgleichung vorliegender Meßdaten nicht mit der Genauigkeit angegeben werden können, die zur zuverlässigen Ermittlung des Endwertes E notwendig sind. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die resultierende Genauigkeit von der Breite des zur Verfügung stehenden Zeitintervalls $t_3 - t_1$ und vom Verhältnis ε_3/E abhängt. Aus diesen Gründen erscheint es zweckmäßig, gegebenenfalls auf leicht durchzuführende Abschätzungen zurückzugreifen, die im folgenden dargestellt werden.

3. Eingrenzung von E durch graphische Verfahren

3.1 Wendepunktmethode

Wir benutzen die übliche halblogarithmische Darstellung $\varepsilon = \varepsilon(\ln t)$ und schreiben

$$U = \varepsilon/E = \{1 - \exp[-(\exp x)^\beta]\}.$$

Dabei ist

$$x = \ln t', \quad t' = \alpha^{1/\beta} \cdot t.$$

Differenziert wird

$$dU/dx = \beta \exp[-\exp \beta x + \beta x]$$

und $d^2U/dx^2 = \beta^2 (1 - \exp \beta x) \exp(-\exp \beta x + \beta x)$.

Am Wendepunkt gilt

$$d^2U/dx^2 = (1 - t'^{-\beta}) = 0 \quad \text{und} \quad t' = 1 \quad \text{für alle } \beta.$$

Eingesetzt folgt

$$U_w = 0,6321.$$

Damit wird es möglich, ohne vorherige Kenntnis der Kurvenparameter α und β abzuschätzen, welchen Mindestwert E etwa erreichen wird, indem man die Lage des Wendepunktes ε_w abschätzt und $E = \varepsilon_w/0,6321$ berechnet. Das Verfahren versagt bei kleinen β -Werten, für die näherungsweise $\varepsilon = A + B \cdot \lg t$ gilt (Vergl. [6]), sowie in den Fällen, wo der Kurvenlauf vor Erreichen des Wendepunktes abbricht.

3.2 Graphische Eingrenzung des Wertes E

Wir bilden $-\lg(1 - \varepsilon/E) = F(t)$ mit willkürlich vorgegebenen E und tragen diese Funktion auf doppeltlogarithmischem Papier auf (Vergl. Abschnitt 2.1).

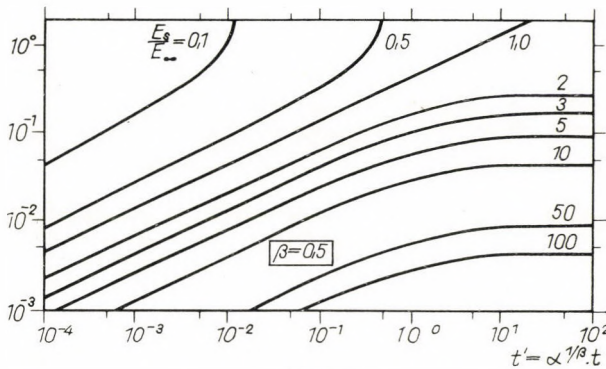


Bild 1

Dabei wird vorausgesetzt, daß unsere Meßwerte durch die behandelte Exponentialfunktion dargestellt werden können. Als Ergebnis erhält man beispielsweise eine der im Bild 1 dargestellten Kurven, die dem Gesetz

$$\varepsilon = (1 - \exp(-t'^{0,5}))$$

genügen, jedoch unter falschen Annahmen E_s statt $E = 1$ aufgetragen wurden. Charakteristische Merkmale aller Kurven mit E_s/E als Kurvenparameter sind:

- a) Die Steigung strebt mit kürzer werdenden Zeiten asymptotisch dem Wert $\beta = \tan \varphi = 0,5$ zu.
- b) Mit zunehmenden Zeiten wächst die Steigung, wenn $E_s < E$ gilt und nimmt ab, wenn $E_s > E$ angenommen wurde.

Punkt a beschreibt die Möglichkeit, den Wert β zu erfassen, während Punkt b zur Eingrenzung von E durch $E_{s,1} < E < E_{s,2}$ und zur Festlegung von β benutzt werden kann.

Tafel III

$t[s]$	$2,1 \cdot 10^6$	8,4	$1,4 \cdot 10^7$	1,7	2,1	2,4
$\varepsilon[mm]$	0	3,6	7,5	8,1	10,5	13,2

Wie aus Bild 1 hervorgeht, kann β im Quadranten $X < -1, Y < -1$ für alle Fehlannahmen zwischen $0,1 < E_s/E < 100$ mit hinreichender Sicherheit ermittelt werden. Daraus folgt, daß bei sehr früh vor Erreichen des Endbetrages E abgebrochenen Meßkurven auch bei größeren Fehleinschätzungen bezüglich E der β -Wert angegeben werden kann. Die Fehleinschätzung des Wertes E wirkt sich im bezeichneten Quadranten fast ausschließlich in der Größe α aus.

Gelingt es, aus theoretischen Erwägungen oder empirischen Vergleichsdaten, den vermutlichen Betrag von α abzuschätzen, so wird auf Grund der festgestellten Kopplung zwischen α und E zugleich E festgelegt.

Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die Möglichkeit,

$$\alpha = \tau^{-\beta}$$

zu setzen (vergl. [1], um z. B. auf thermodynamische Relationen $\tau = \tau(U)$ (U — Aktivierungsenergie) als zusätzliche Bestimmungsstücke zurückgreifen zu können.

3.3 Beispiel

Setzungsmessungen am Bunkerschwerbau eines Kraftwerkes (vergl. Beispiel 1 in [8]) ergaben die in Tafel III zusammengestellten Werte.

Aus der halblogarithmischen Auftragung findet man $\varepsilon_w \approx 19$ mm. Daraus folgt nach Abschnitt 3.1 der Wert $E \approx 30$ mm.

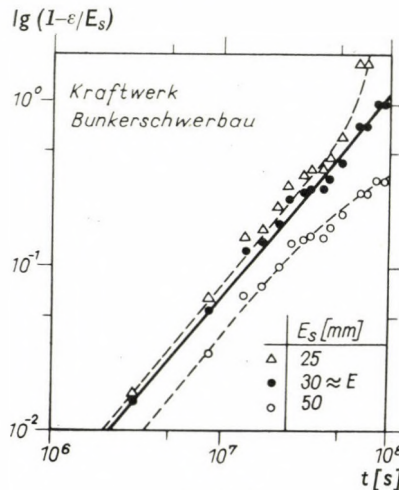


Bild. 2

3,0	3,2	3,9	4,2	5,0	6,4	7,0	8,4	9,0 · 10 ⁷
14,4	15	15	16,5	19,2	24,3	24,3	27	27

Trägt man die Meßwerte entsprechend Abschnitt 3.2 in der Form $-\ln(1 - \varepsilon/30) = F(t)$ auf doppeltlogarithmischem Papier auf (Bild. 2), dann läßt sich eine Ausgleichsgerade zeichnen, die die gesuchten Parameter α u. β des zugrundegelegten Exponentialansatzes liefert. Auftragungen mit anderen E -Werten liefern charakteristisch gekrümmte Kurven ähnlich Bild 1 und bestätigen die Brauchbarkeit der zuerst getroffenen Annahme $E = 30$ mm.

Für die praktische Begutachtung ergibt sich der Schluß, daß im diskutierten Fall bei gleichbleibenden äußeren Bedingungen (statische u. dynamische Last) keine wesentlichen Setzungen mehr zu erwarten sind.

4. Zusammenfassung

Die Berechnung des zeitlichen Endwertes von Retardationskurven ist mittels des vielfach erprobten Ansatzes

$$\varepsilon = A - B(\exp -\alpha t^\beta)$$

durch sukzessive Näherung theoretisch möglich, scheidet jedoch in der Praxis infolge der Ungenauigkeit der Meßdaten. Als Näherungsverfahren kommen in betracht:

a) die Wendepunktmethode mit der Relation $E = \varepsilon_w/0,6321$ falls in der Auftragung $\varepsilon = \varepsilon(\ln t)$ ein Wendepunkt lokalisiert werden kann.

b) die graphische Eingrenzung des Wertes E mittels der doppeltlogarithmischen Auftragung der Funktion $-\lg(1 - \varepsilon/E) = F(t)$, wobei anstelle von E zwei Werte a und b ($a < E < b$) einzusetzen sind. Das Verfahren liefert die Größe β auch in ungünstigen Fällen, bei denen zur Festlegung von E eine Hilfsannahme für α notwendig wird.

SCHRIFTTUM

1. LEADERMAN, H. u. a.: Rheology of Polyisobutylene II. *Journ. Polym. Sc.* **14** (1954), 47—80.
2. LO, K. Y.: Secondary Compression of Clays. *Proc. ASCE*, **87** (1961) No SM 4, 61—87.
3. RIHA, J.: Klassifizierung der Verdichtungsvorgänge. Ref. Conf. Vibr.-Compact. Technics, Budapest (1963) S. 225—244.
4. SCHÄFFNER, H. J.: Zeitlicher Verlauf und Klassifizierung dynamischer Verdichtungsvorgänge im Hinblick auf bodenmechanische und baupraktische Probleme. *Mitt. Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser- und Grundbau*. Berlin, Heft 13 (1964), 25—87.
5. SCHÄFFNER, H. J.: Zur rheologischen Beschreibung von Zeitsetzungsvorgängen. Felsmechanik u. Ingenieurgeologie, Wien (in Vorbereitung).
6. SCHÄFFNER, H. J.: Rationelle analytische Darstellung von Zeitsetzungsvorgängen. *Bau-technik*, Berlin **42** (1965), 273—275.
7. SCHÄFFNER, H. J.: Interpretation von Retardationsmessungen. *Plaste u. Kautschuk* **12** (1965), 651—653.
8. SCHÄFFNER, H. J.: Vergleichende Bewertung des Zeitsetzungsverhaltens von Fundamenten bei statischer u. dynamischer Last in praktischen Beispielen. *Der Bauingenieur* **41** (1966).
9. SIPPEL, A.—HEIM, E.: Eine neue Verteilungsfunktion und ihre Anwendung auf verschiedene Wissensgebiete. *Angew. Chemie* **74** (1962) **15**, 58—63.

THE FORECASTING OF SETTLING BASED ON THE PROGRESS OF SETTLING
WITH TIME

H. J. SCHÄFFNER

SUMMARY

The problem of the extrapolation of empirical progress of settling graphs is treated. A condition for the method is the assumption of an analytic expression for the settling process, which is supposed to obey the law $\varepsilon = A - B \exp(-\alpha t^\beta)$. Extrapolations by numeric methods are possible but laborious; as is shown by an example. The amount of work appears to be unjustified if the errors of the initial data are considered. For practical purposes two simple estimation methods are proposed which permit to limit the sought for limit value $E = \lim \varepsilon \triangleright$ and which permit sufficiently reliable extrapolation for finite time intervals.

ÉVALUATION PRÉLIMINAIRE DES TASSEMENTS A PARTIR
DE MESURES DE TASSEMENT EN FONCTION DU TEMPS

H. J. SCHÄFFNER

RÉSUMÉ

Le problème de l'extrapolation des courbes de tassement empiriques relevées en fonction du temps est examiné par l'auteur. La condition de l'extrapolation est la possession d'une expression analytique pour le processus de tassement, qui peut s'exprimer par la relation $\varepsilon = A - B \exp(-\alpha t^\beta)$. Des extrapolations sont bien possibles par l'emploi de procédés numériques, mais elles sont laborieuses, comme le démontre l'auteur par un exemple présenté dans l'étude. Leur utilisation paraît injustifiée si l'on considère les erreurs des données initiales. Pour la pratique, l'auteur propose deux méthodes d'évaluation bien simples, qui permettent de délimiter la valeur limite $E = \lim \varepsilon \triangleleft$ cherchée et rendent possible d'obtenir des extrapolations assez satisfaisantes pour des intervalles de temps finis.

ПРОГНОЗ ОСАЖДЕНИЯ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ОСАЖДЕНИЯ В
ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ

Х. И. ШЕФФНЕР

РЕЗЮМЕ

Обсуждается проблема экстраполяции эмпирических кривых время-осаждение. Условием этого является наличие заданного аналитического выражения для хода осаждения по времени, которое должно быть описано функцией $\varepsilon = A - B \exp(-dt^\beta)$. Возможна экстраполяция посредством числовых методов, однако, таковые весьма сложны, как это и показано на примере. Сложность кажется неоправданной, если принять во внимание неточность исходных данных. Для практического применения предлагается два метода оценки, позволяющих ограничить предельные значения в рамках $E = \lim \varepsilon \triangleright$, и дающих возможность проводить достаточно точную экстраполяцию для конечных интервалов времени.

DIE STABILITÄT DER BAUWERKE MIT HOCHLIEGENDEM SCHWERPUNKT

E. DULÁCSKA*

ENTWURFSBUREAU DER STADT BUDAPEST

[Eingegangen am 7. Jänner 1965]

Diese Arbeit befaßt sich mit dem Stabilitätsproblem der Bauwerke mit hochliegendem Schwerpunkt. Der Boden wird durch einen elastischen Halbraum ersetzt. Die Formänderung des Bauwerkes wird angenähert berechnet, und so ergibt sich eine geschlossene Formel für den kritischen Wert der Horizontalkraft.

1. Einleitung

Es fehlte bis jetzt eine hinreichende Behandlung des Stabilitätsproblems der Bauwerke mit hochliegendem Schwerpunkt. Dieser Mangel erklärt sich einerseits dadurch, daß man den Winkel der durch das Drehmoment hervorgerufenen Schiefstellung des Grundkörpers nicht berechnen konnte, andererseits dadurch, daß die strenge mathematische Behandlung des Problems zu einer Differentialgleichung führt, die mit einer verwickelten Randwertaufgabe verknüpft ist.

Da die Ausführung von Hochhäuser eine zeitgemäße Bauaufgabe ist, lohnt es sich der Mühe, daß wir uns mit dem Stabilitätsproblem dieser Bauwerke beschäftigen. Im Ungarn gewinnt dieses Problem eine besondere Bedeutung, denn wir haben oft mit weichen Boden (Schlamm- und Tonerde) zu tun.

Beim ausmittig belasteten Grundkörper, gemäß der ungarischen Bauvorschriften, darf die Exzentrizität der resultierenden Kraft nicht größer sein als ein Drittel der Breite der Grundfläche, und die Kantenpressung darf nicht größer sein als der um 30% vergrößerte Wert der Grenzspannung. Diese Vorschrift gewährt im allgemeinen die nötige Sicherheit im Falle von nicht-hohen Bauwerken, aber im Falle von turmartigen Bauwerken erfüllt sie nicht die Sicherheitsanforderung gegen das Umkippen, denn in diesem Falle dürfen die sekundären Formänderungen nicht vernachlässigt werden.

2. Bezeichnungen

P die Resultierende der Horizontalkräfte,
 G die Resultierende der Vertikalkräfte,
 f der von der Bodenfläche gemessene Arm der Kraft P ,

* *Dulácska Endre*, XII. Ráth György u. 64, Budapest, Ungarn.

- h der von der Bodenfläche gemessene Abstand des Mittelpunktes der Vertikalkräfte,
 B die Breite der Grundfläche,
 L die Länge der Grundfläche,
 a_0 die Anfangsexzentrizität der Kraft G ,
 a_1 die durch die horizontale Kraftwirkung und Formänderung hervorgerufene Zunahme der Exzentrizität der Kraft G ,
 e die gänzliche Exzentrizität der Kraft G nach der Formänderung des Bodens,
 s die Breite der gedrückten Grundfläche,
 φ der Winkel der durch das Drehmoment hervorgerufene Schiefstellung des Grundkörpers,
 σ_B die Kantenpressung des Bodens,
 σ_{BG} die Grenzspannung des Bodens,
 E_B der Elastizitätsmodul des Bodens.

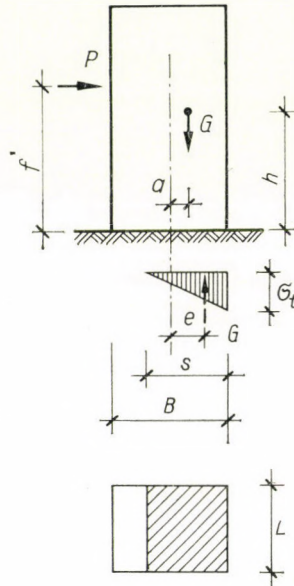


Bild 1

3. Grundlegende Beziehungen

Als Ausgang dient die Differentialgleichung

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -q(l-x) \frac{dy}{dx} - p(l-x) + N \frac{dy}{dx}, \quad (1)$$

wobei $p = \text{Konst.}$ und $q = \text{Konst.}$ sind. Die Bezeichnungen sind gemäß des Bildes 2 zu verstehen. Als Randbedingungen sind

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \text{für } x = l,$$

$$y = 0, \quad \text{für } x = 0,$$

$$K \frac{dy}{dx} = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \text{für } x = 0$$

zu erfüllen. Der hier vorkommende Wert $K = K(N, q, y)$ ist jenes Drehmoment, welches den Verdrehungswinkel l des Grundkörpers hervorruft.

Die Lösung ist dadurch erschwert, daß man den wirklichen Wert von K nicht bestimmen kann. K hängt nämlich nicht nur von den Bodenkonstanten ab, sondern auch von der vertikalen Last und von der gesuchten Verschiebung y . Da ein Wert von K , der bei der Berechnung benützt wird, wegen der unsicheren Annahme der Bodenkonstanten, bis auf 50% fehlerhaft sein kann, verzichten wir auf die strenge Lösung und begnügen wir uns mit der Vorführung eines angenäherten Verfahrens.

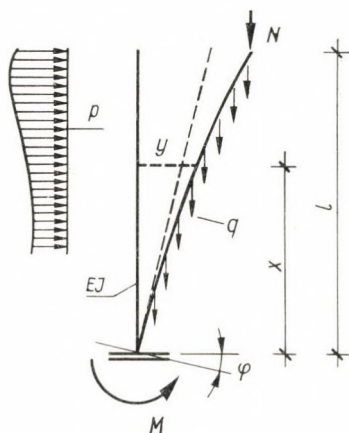


Bild 2

4. Voraussetzungen

1. Es wird vorausgesetzt, daß der Boden ein elastischer Halbraum ist.
2. In der ersten Annäherung wird es vorausgesetzt, daß das turmartige Bauwerk vollkommen starr ist. Die Benützung dieser Annäherung scheint zweckmäßig zu sein, da die primäre Formänderung als Anfangsexzentrizität in dieser Weise in die Rechnung eingeführt werden kann. Dann kann man durch schrittweise Annäherungen die Formänderung des Bauwerkes beliebig genau berechnen.
3. Es wird vorausgesetzt, daß die Grundfläche des Bauwerkes ein Rechteck ist.
4. Es wird vorausgesetzt, daß die Exzentrizität der Resultante größer als das Kernmaß der Grundfläche ist.
5. Es wird vorausgesetzt, daß die Spannungsverteilung über dem wirksamen Teil der Grundfläche linear ist.

5. Die Herleitung der Berechnungsformeln

Der Grundkörper, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, stützt sich auf die Oberfläche des elastischen Halbraumes. Wirkt auf ihn ein Drehmoment M , so erfährt er eine Verdrehung [1, 2]

$$\varphi = \frac{12}{\varrho} \cdot \frac{M}{E_B L s^2} \quad (2)$$

Dabei ist M auf den Schwerpunkt des wirksamen Teiles der Grundfläche bezogen. ϱ ist gemäß der Formel

$$\varrho = 3,14 + 1,09 \frac{s}{L} \quad (3)$$

u berechnen [3]. Die Formel

$$M = \frac{\sigma_B}{2} \cdot \frac{s^2 L}{6}$$

gibt das Drehmoment M als Funktion der Kantenpressung σ_B an. Wird diese in (2) eingeführt, so ergibt sich die Formel

$$\varphi = \frac{\sigma_B}{\varrho E_B} \quad (4)$$

Eine Gleichgewichtsbetrachtung (Bild 1) liefert die Momentengleichung

$$-Ge + Pf + Ga + \varphi hG = 0. \quad (5)$$

Nachher setzen wir den Ausdruck

$$\sigma_B = \frac{2G}{3L \left(\frac{B}{2} - e \right)} \quad (6)$$

in die Formel (4) ein. Den erhaltenen Wert von φ führen wir in (5) ein, und so gelangen wir zu einer Gleichung, woraus P sich berechnen läßt. Die Berechnung führt zum Wert

$$P = \frac{G}{f} \left[e - a - \frac{2hG}{3LE_B \left(\frac{B}{2} - e \right) \varrho} \right] \quad (7)$$

Damit erscheint P als eine Funktion von e . Berechnet man den Wert von P an mehreren Stellen des Intervalls $B/6 < e < B/2$, so sieht man, daß P in diesem Intervall ein Maximum besitzt. Dieses Maximum ist die kritische

Kraft P_{cr} . Die Exzentrizität e_{cr} wird daher aus der Extremumbedingung

$$\frac{dP}{de} = 0 \quad (8)$$

berechnet. So ergibt sich

$$e_{cr} = \frac{B}{2} - \sqrt{\frac{2HG}{3LE_B \varrho}}. \quad (9)$$

Wird (9) in (7) eingesetzt, so wird

$$P_{cr} = \frac{G}{f} \left(\frac{B}{2} - a - 2 \sqrt{\frac{2hG}{3LE_B \varrho}} \right). \quad (10)$$

Damit haben wir die Formel für die kritische Kraft erhalten.

Wenn die Exzentrizität ihren kritischen Wert e_{cr} erreicht, so erreicht auch die Kantenspannung ihren kritischen Wert $\bar{\sigma}_B$. Bei der statischen Berechnung müssen zwei Fälle unterschieden werden.

Der Fall I ist dadurch gekennzeichnet, daß der berechnete Wert $\bar{\sigma}_B$ nicht größer als der gegebene Wert σ_{BG} ist. In diesem Falle ist die *Stabilitätsbedingung* maßgebend. Aus den Gleichungen (6) und (9) wird jene Kantenspannung berechnet, welche beim Erreichen der kritischen Exzentrizität entsteht. Diese Berechnung liefert die Formel

$$\bar{\sigma}_B = \sqrt{\frac{2GE_B \varrho}{3Lh}}. \quad (11)$$

Die kritische Breite B_{cr} der Grundfläche wird aus (10) berechnet, indem dort $B = B_{cr}$ geschrieben wird. Somit ist

$$B_{cr} = 2 \left[\frac{2f}{G} + a + 2 \sqrt{\frac{2hG}{3LE_B \varrho}} \right]. \quad (12)$$

Der Fall II ist dadurch gekennzeichnet, daß der berechnete Wert $\bar{\sigma}_B$ größer als der gegebene Wert σ_{BG} ist. In diesem Falle ist der *Grenzspannungszustand* maßgebend. Dieser Zustand tritt ein, wenn die Kraft P den Wert P_G annimmt, für welchen σ_B zu σ_{BG} wird. P_G wird also aus (6) und (7) berechnet. Da jetzt $P_G < P_{cr}$ ist, benötigen wir nicht P_G , sondern die hierzu gehörende Grenzbreite B_G der Grundfläche. So ergibt sich

$$B_G = 2 \left[\frac{2G}{3L\sigma_{BG}} + \frac{Pf}{G} + a + \frac{h\sigma_{BG}}{E_B \varrho} \right]. \quad (13)$$

Die Breite B der Grundfläche soll daher so gewählt werden, daß die Bedingung $B \geq B_G$ erfüllt sei.

SCHRIFTTUM

1. J. WÜNSCH: Das starre Fundament und der elastische Halbraum. Verlag Prometheus, Prag, 1947.
2. K. OPLADEN: Über den Einspanngrad einer Stütze im Fundament. *Beton und Stahlbetonbau*, **55** (1960), 35 und **56** (1961), 202.
3. B. GOSCHY und GY. BALÁZS: Beitrag zur elastischen Stützung von Bauwerken. *Beton und Stahlbetonbau*. **56** (1961), 10.

THE STABILITY OF STRUCTURES WITH HIGH CENTER OF GRAVITY

E. DULÁCSKA

SUMMARY

The paper deals with the questions of stability of structures having a high center of gravity. The soil is replaced by an elastic half-space and the deformation of the structure itself is taken into consideration by approximation. Thus a closed formula can be deduced for the critical value of the horizontal force.

STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS A CENTRE DE GRAVITÉ ÉLEVÉ

E. DULÁCSKA

RÉSUMÉ

L'étude traite des problèmes de stabilité des constructions à centre de gravité élevé. Elle remplace le sol par un demi-espace élastique et considère la déformation propre de la construction d'une façon approchée. Par cette méthode, une formule fermée peut être déduite pour la valeur critique de la force horizontale.

СТАБИЛЬНОСТЬ ПОСТРОЕК С ВЫСОКИМ ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ

Э. ДУЛАЧКА

РЕЗЮМЕ

Работа занимается вопросом стабильности построек с высоким центром тяжести. Грунт замещается упругим условием и собственная деформация постройки учитывается приближенно. В такой форме представляется возможным вывести замкнутую формулу для критического значения горизонтального усилия.

TORSIONAL BUCKLING OF STRAIGHT-AXED BARS WITH CIRCULAR CROSS-SECTION

P. CSONKA

DOCTOR OF TECHN. SC.
WORKING COMMUNITY FOR BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY
OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received October 18, 1965]

This problem has been solved using simple equilibrium considerations by taking exact values for distortion of the bar axis, instead of the approximative formula found in the literature. It is demonstrated that if the bar was in an elastic state before buckling, the state of equilibrium of the bar remains indifferent with increasing buckling, as long as the bar undergoes no plastic deformation.

The paper is completed with diagrams permitting the direct determination of critical values of twisting couple and of specific angle of distortion.

1. Introduction

It is known [1—3] that for some characteristic values of the twisting couple M acting on the ends of a straight-axed bar, the state of equilibrium becomes unstable. Thereupon the originally straight bar axis may assume a helical curvature, giving rise to flexural normal stresses, in addition to torsional shearing stresses in the bar sections.

Helical distortion — the so called *buckling* — of the bar proceeds differently, depending on whether immediately before buckling the bar was completely in the elastic range or in some bar parts plastic deformations have already developed. In the literature only the first of these two cases has been treated, while the second one not yet. Below, both cases of buckling will be dealt with and the critical value of the twisting couple will be determined for both cases by help of simple equilibrium considerations. The applied method of treatment makes it unnecessary to set up the differential equation of the distorted axis line, and to solve it approximately. This method deserves attention also because the examined problem is perhaps the only case of buckling where the so-called theory of the third order results in a closed solution.

2. Assumptions, notations

The following considerations refer to a straight-axed circular bar loaded according to Fig. 1. Its length is denoted by l , and the radius of its section by a . Bar material is considered to be elasto-plastic, and it is assumed that the plastic range is reached when the Huber-Mises yield condition is met with.

It is assumed that the vectors of the twisting couples acting on the bar ends keep their original directions throughout the whole buckling process. It is further assumed that bar ends are restrained so as not to inhibit bar axis to hold an oblique position, neither do they restrain the bar ends from approaching each other.

Helically distorted bar axis is shown in Fig. 2. For the sake of illustration, here the helical line is traced together with the circular cylinder that can be

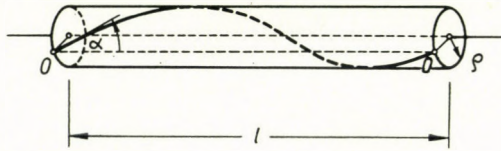


Fig. 1. Bar under torsion

laid across it. This figure presents the simplest case of buckling, that is the case where the distorted axis line includes only a single thread. In general cases the distorted axis line may consist of several complete threads.

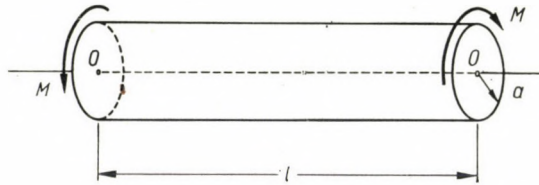


Fig. 2. Distorted bar axis

Angle included between the tangents of the distorted bar axis and the original axis direction $O-O$ will be denoted by α , elasticity constants of the bar material by E and G , respectively, and specific angle of distortion by ϑ . Magnitudes α , ϑ and M will be taken as positive in the cases presented in Figs. 1 and 2.

3. State of the bar immediately before buckling

Twisting couple M produces shearing stresses in bar sections. Their values increase together with the twisting moment but cannot exceed the value τ_F producing yield. The very moment producing the shearing stress τ_F at the section edge can be computed from the well-known structural formula:

$$M_E = \frac{\pi a^3}{2} \tau_F \quad (1)$$

For $M \leq M_E$, shearing stresses developing in bar sections, at distance r from the bar axis, are

$$\tau = \frac{M}{2J_a} r, \quad \left(J_a = \frac{\pi a^4}{4} \right), \quad (2)$$

and the specific angle of distortion is:

$$\vartheta = \frac{\tau}{rG} = \frac{M}{2GJ_a}. \quad (3)$$

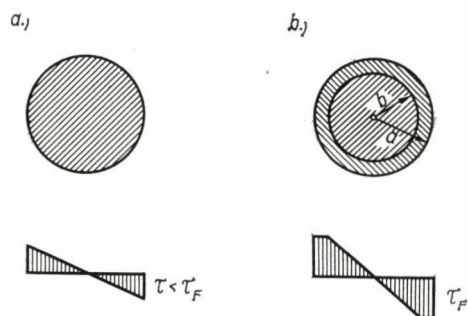


Fig. 3. Stresses in bar sections before buckling

- a) for $M \leq M_E$
b) for $M > M_E$

For $M \geq M_E$, only section parts within a circle of radius $r \leq b$ are in elastic state before buckling (Fig. 3). Then:

$$\tau = \begin{cases} \tau_F & , \text{ for } r \geq b, \\ \frac{r}{b} \tau_F, & \text{ for } r \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

Radius b of the circle separating section parts in elastic range from those in plastic range, can be computed from equation

$$M = \int_{(A)} \tau r dA = \frac{\pi}{6} (4a^3 - b^3) \tau_F$$

expressing equality between moments produced by external and internal forces. Hence

$$b = \sqrt[3]{4a^3 - \frac{6M}{\pi\tau_F}}. \quad (5)$$

Knowing this, the specific angle of distortion can be determined from the formula

$$\vartheta = \frac{\tau F}{bG}. \quad (6)$$

Of course, equilibrium is only possible so long as $b \geq 0$. Value of couple M for limiting state $b = 0$ is:

$$M_F = \frac{2\pi a^3}{3} \tau_F = \frac{4}{3} M_E. \quad (7)$$

For $M = M_F$, the entire cross-section is in plastic state. This is the possible upper limit of the load bearing capacity of the bar. Here theoretically $\vartheta = \infty$.

4. State of the bar in the initial moment of buckling

Let us examine now, whether or not equilibrium may exist if the axis line of the bar is helically distorted according to Fig. 4, while external forces acting on the bar, further the specific distortion of the bar, and the arc length of its axis line remain invariable. In this case curvature of the bar axis will be (Fig. 4)

$$k = \frac{\sin^2 \alpha}{\rho}, \quad (8)$$

and components of the external couple M in the cross-sectional planes and normally to them are:

$$M_t = M \cos \alpha, \quad (9)$$

$$M_n = M \sin \alpha.$$

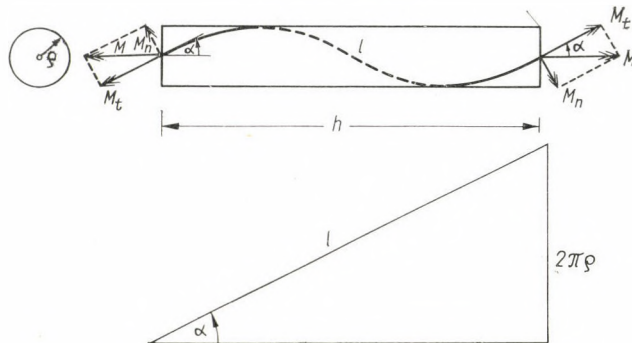


Fig. 4. Developed view of the distorted bar axis and of the cylinder laid across it

Of course, equilibrium can only exist, if couples M_n and M_t equal couples M' and M'' , produced by stresses τ and σ respectively, acting in the cross-sections:

$$M' = M_t, \quad (10)$$

$$M'' = M_n.$$

Confining our examinations to the initial moment of buckling, Eq. (9) can be replaced by

$$M_t \cong M,$$

accordingly, first condition in (10) can be rewritten as:

$$M' = M.$$

In our case, evidently, this condition is established, and only the second one in (10) has to be examined. This condition can be formulated, taking into account (9), as:

$$M'' = M \sin \alpha. \quad (11)$$

Denoting the flexural resistance of the bar (moment of couple producing unit curvature) by EJ ,

$$M'' = k EJ,$$

or, taking into account relationship (8):

$$M'' = \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho} EJ.$$

Substituting this value into (11), equilibrium condition will be expressed by the formula:

$$M = \frac{\sin \alpha}{\varrho} EJ.$$

$\sin \alpha$ can assume different values, depending on how many threads are to be found in the helically distorted bar axis between its end points. Accordingly, the distorted bar may have several equilibrium states. Among them, we are only interested in the case corresponding to the least value M . This is the case where the helicoid formed by the bar axis has only a single thread. Then

$$\sin \alpha = \frac{2\pi\varrho}{l}, \quad (12)$$

accordingly, critical value of the couple M is:

$$M_{cr} = \frac{2\pi EJ}{l}. \quad (13)$$

The value EJ in (13), as it was stated formerly, is the flexural resistance of the bar in the moment of buckling. Of course, only those parts of the bar sections are involved in the flexural resistance which are in elastic state at the moment of buckling, namely in plastic state of the bar section no further

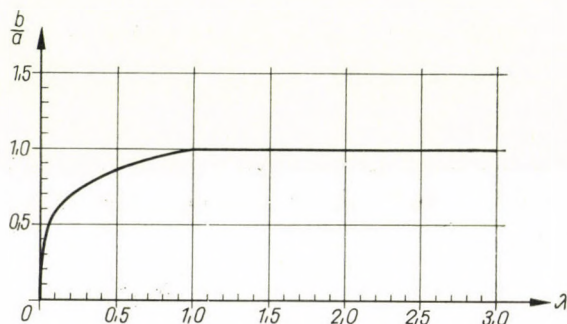


Fig. 5. Diagram serving to establish plasticity degree of sections

stresses can develop during buckling. Accordingly, in cases, where immediately before buckling, the bar was in a perfectly elastic state,

$$EJ = EJ_a = E \frac{\pi a^4}{4}, \quad (14)$$

while in cases where bar parts outside a cylinder of radius $r = b$ were in the plastic range already before buckling,

$$EJ = EJ_b = E \frac{\pi b^4}{4}. \quad (15)$$

In order to clear up, whether or not, a twisting couple — not greater than M — may produce buckling first of all the radius b of the elastic cylinder is to be determined using formula (5). Then, the value EJ is to be computed from (14) or (15) depending on whether $b \geq a$ or $b \leq a$. Finally, the value M_{cr} is to be determined from (13) and compared with the given value M . There is a risk of buckling if

$$M \geq M_{cr},$$

because then the successive load increments may finally lead to a state where the torque just equals M_{cr} .

In this treatment, the ration b/a characterizing plasticity rate a of the section, in function of the parameter

$$\lambda = \frac{\tau F}{\pi E} \frac{l}{a} \quad (16)$$

can be determined either by means of formula (5) or from the diagram in Fig. 5. The curvilinear part of the diagram section is expressed by the implicit equation:

$$\lambda = \frac{3 b^4/a^4}{4 - b^3/a^3}, \quad \lambda \leq 1.$$

To determine magnitude of couple M_{cr} able to produce buckling according to the deduced formulae, diagram in Fig. 6 can be applied. This graph is expressed by:

$$\frac{M}{a^3 \tau_F} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \left(4 - \frac{b^3}{a^3} \right), & \lambda \leq 1; \\ \frac{\pi^2 E}{2\tau_F} \cdot \frac{1}{l/a} & \lambda \geq 1. \end{cases}$$

On the other hand, value of the specific distortion angle, that is the critical value ϑ_{cr} can be directly found from diagram in Fig. 7. Equation of this graph is:

$$\frac{IG}{\pi E} \vartheta_{cr} = \begin{cases} \frac{3b^3/a^3}{4 - b^3/a^3}, & \lambda \leq 1; \\ 1 & \lambda \geq 1. \end{cases}$$

5. State of the bar in case of an increased buckling

In the chapter before, the first condition in (10), that is the approximation $M_t = M$ had been used, hence the involved statements are valid only to the initial moment of buckling. However, with increased buckling, this approximation loses its validity, and the exact formulae (9) are to be applied instead.

In our relevant examinations only the case of elastic buckling will be considered, i.e. only the case will be dealt with where all points of the bar are in elastic state before buckling. With increased buckling, this case passes into the case of *elasto-plastic buckling*. In the limiting state between both, a plastic

state develops only at two boundary points, farthest from the neutral axis of bending of the bar section. Namely, the shearing stresses are proportional to their spacing r from the bar axis, and normal stresses to their distances from

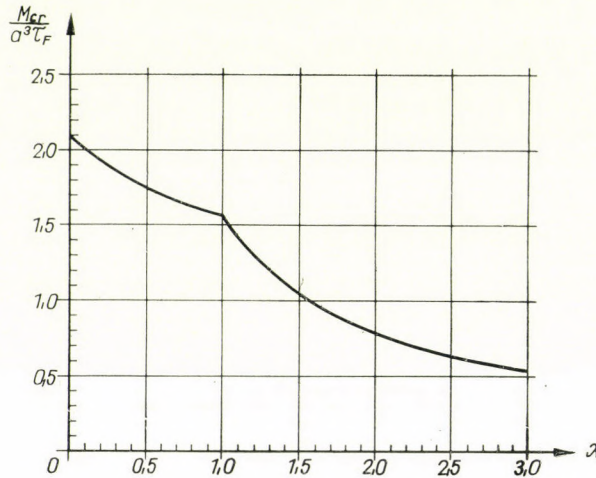


Fig. 6. Graph for determining M_{cr}

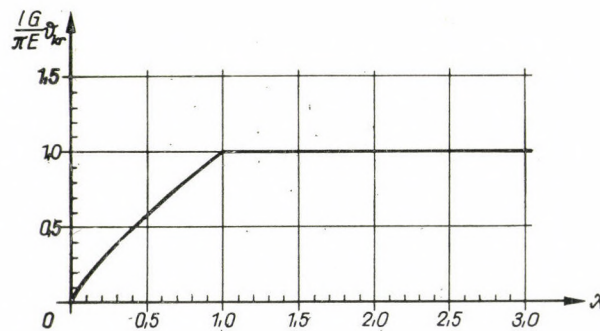


Fig. 7. Graph for determining ϑ_{cr}

the neutral axis (Figs. 6 and 7). In both points, farthest from the neutral axis of bending, the stress components are

$$\sigma_E = \frac{M_n}{J} a = \frac{M \sin \alpha}{J} a,$$

$$\tau_E = \frac{M_t}{2J} a = \frac{M \cos \alpha}{2J} a,$$

or, taking into consideration (12) and (13),

$$\sigma_E = \frac{4\pi^2 E \varrho a}{l^2}, \quad (17)$$

$$\tau_E = \frac{\pi E a}{l} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \varrho^2}{l^2}}. \quad (18)$$

Substituting these latter into equation

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = 3\tau_F^2 \quad (19)$$

expressing the Huber-Mises yield condition, the radius of buckling cylinder in the limiting state of elastic buckling is expressed by

$$\varrho_E = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} l \sqrt{\frac{\tau_F^2 l^2}{\pi^2 E^2 a^2} - 1},$$

or in other terms, in view of those in (16):

$$\varrho_E = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} l \sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

For such a buckling rate, the stress maxima in the bar sections will be:

$$\sigma_E = 2\sqrt{3} \tau_F \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}, \quad (20)$$

$$\tau_E = 2\tau_F \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{3}{4}}. \quad (21)$$

It should be noted that τ_E is not identical to the maximum shearing stress acting in the initial moment of buckling. This one can be computed from formula (18) by substituting $\varrho = 0$, to give

$$\tau_{\max} = \frac{\pi E a}{l},$$

or, taking into consideration relationship (16):

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_F}{\lambda}. \quad (22)$$

Comparing values in (21) to those in (22), it can be concluded that with increasing buckling, the values of the shearing stresses decrease.

It should be pointed out that in case of elastic buckling, formula (13) remains valid not only in the initial moment of buckling, but also at its increase. In other words, couple M which is to be applied on the bar ends, is

constant, independent of the buckling rate, hence, the distortion of the bar axis may increase without modifying the value of the external couple. Then, as long as the bar undergoes no plastic deformation, it is in an *indifferent* state of equilibrium. After plastic deformations has set in, this condition becomes *unstable*.

REFERENCES

1. FÖPPL, A.: Vorlesungen ü. Technische Mechanik. Teubner, Leipzig und Berlin 1922.
2. GEIGER, H.—SCHEEL, K.: Handbuch d. Physik. Vol. 6: Mechanik der elastischen Körper. J. Springer, Berlin 1928.
3. GRAMMEL, R.: Drillmoment von Wellen. *Zeitschrift f. Angewandte Mathematik u. Mechanik* 3 (1923), 262—271.

AUSKNICKEN EINES AUF VERDREHEN BEANSPRUCHTEN
GERADACHSIGEN RUNDSTABES

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Aufgabe wird auf Grund einfacher Gleichgewichtsüberlegungen gelöst, und zwar derartig, daß die Verkrümmung der Stabachse, anstatt der in der Literatur üblichen Annäherungsformel, mit einem exakten Wert angenommen wird. War der Stab vor dem Ausknicken in einem rein elastischen Zustand, so bleibt der Gleichgewichtszustand des ausgeknickten Stabes indifferent solange, bis der Stab keiner plastischen Verformung untergeht.

Der Aufsatz ist mit Schaubildern ergänzt, die ermöglichen, den kritischen Wert des Drillungsmomentes bzw. des spezifischen Verdrehungswinkels unmittelbar abzulesen.

LE FLAMBAGE DÛ A LA TORSION DE BARRES DROITES
DE SECTION CIRCULAIRE

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'auteur partant de considérations d'équilibre bien simples, résout le problème en utilisant la valeur exacte de la courbure de la barre, au lieu de la formule d'approximation connue de la littérature. Il démontre que dans les cas où la barre était élastique avant le flambage, l'état d'équilibre de la barre reste indifférent pendant l'accroissement du flambage jusqu'au moment où la barre subit une déformation plastique.

L'étude est complétée par des diagrammes, à l'aide desquels le couple de torsion, resp. la valeur critique de l'angle de torsion spécifique peuvent se lire directement.

ПРОГИБ ПРЯМООСНОГО СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ ОТ КРУЧЕНИЯ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Автор решает эту задачу при помощи простых равновесных соображений так, что кривизна оси стержня учитывается вместо используемой в литературе приближенной формулы точными величинами. Показано, что в таких случаях, когда стержень перед прогибом находился в упругом состоянии, равновесное состояние стержня при росте прогиба остается индифферентным до тех пор, пока стержень не претерпевает пластичной деформации.

Работа дополняется диаграммами, при помощи которых представляется возможным непосредственно отсчитать данные крутящей силовой пары, соотв. критическое значение удельного угла кручения для различных значений отношения наименьшего и наибольшего диаметров стержня.

GÁBOR KAZINCZY

1889—1964

Gábor KAZINCZY, der Begründer des modernen Traglastverfahrens wurde am 19. Januar 1889 in Szeged (Ungarn) geboren. Seine Studien hat er an der Technischen Universität in Budapest absolviert und dort 1911 das Ingenieurdiplom erworben. Als junger Ingenieur trat er in den Dienst der Hauptstadt und es war seine wichtigste Aufgabe, die statischen Berechnungen der Budapester Neubauten zu kontrollieren. 1931 erwarb Kazinczy auf der Technischen Universität Budapest den Titel eines Doktors und 1939 wurde er zum Privatdozent ernannt. Am 26. Mai 1964 starb er in Motala in Schweden, im 75. Lebensjahr.

Seine wissenschaftliche Tätigkeit ist auf zahlreichen Gebieten der Theorie der Tragkonstruktionen von grundlegender Bedeutung. Seine erste, 1912 im dreiundzwanzigsten Lebensjahr geschaffene wissenschaftliche Arbeit galt der Berechnung elastisch gelagerter durchlaufender Träger. Sein Verfahren gibt eine stufenweise Annäherung der Aufgabe an, und die gesuchte Lösung wird als Grenzwert der einzelnen Berechnungsstufen gewonnen.

Noch im gleichen Jahr kam er im Verlauf der Auswertung einer amtlichen Probelastung zu der beachtlichen Feststellung, daß die Tragfähigkeit eingespannter Walzträger beim Erreichen der Fließgrenze noch nicht erschöpft ist. Diese interessante Feststellung veröffentlichte er in den Nummern 4, 5 und 6 der ungarischen Fachzeitschrift *Betonszemle* von 1914 und gab auch gleichzeitig die Erklärung für diese Erscheinung. Er vertrat die Ansicht, daß in den Querschnitten des Trägers, in denen durch die Belastung die Fließgrenze erreicht wurde, ein sogenanntes *plastisches Gelenk* entsteht. Die Belastung des Trägers wird solange nicht erschöpft, bis er sich durch die stufenweise entstehenden Gelenke in eine gelenkige Stabkette verwandelt. Durch diese Erkenntnis und durch seine damit verbundene Erklärung wurde Dr. KAZINCZY der Begründer eines Wissenszweiges, des Traglastverfahrens, das seitdem stark entwickelt wurde. Seine Initiative, hauptsächlich nach N. J. J. HOFFS diesbezüglicher Veröffentlichung (An Evaluation of Plastic Analysis as Applied to Structural Design. *The Welding Journal Research Supplement*, January 1954) wird auch im Ausland allgemein anerkannt und gewürdigt.

Dr. KAZINCZY verallgemeinerte seine ursprünglich nur für eingespannte Träger entwickelte Theorie auch auf sonstige statisch unbestimmte Konstruktionen. Er erklärte seine diesbezüglichen Forschungsergebnisse zum ersten Mal vor der internationalen Öffentlichkeit auf dem Wiener Kongreß 1929, wo er Versuchsergebnisse des Stuttgarter Professors MAIER—LEIBNITZ über durchgehende Träger bekannt gab, bei denen von der Elastizitätslehre abweichende Ergebnisse erzielt wurden. Von da an, in erster Linie seit dem Kongreß in Liège 1930, auf dem in Bezug auf das Traglastverfahren eine für Dr. KAZINCZY günstig endende Diskussion geführt wurde, beschäftigten sich Fachkreise immer intensiver mit der Bestimmung der Tragfähigkeit statisch unbestimmter Träger auf Grund der Kazinczyschen Theorien.

Sehr beachtlich ist auch Dr. KAZINCZYS ganz und gar neue Feststellung, daß das Traglastverfahren nicht nur für Stahlträger, sondern auch für Stahlbetonträger angewendet werden kann. Über seine diesbezüglichen Versuchsergebnissen berichtete er zuerst auf dem Pariser Kongreß 1931 und dann 1933 in den Spalten der Zeitschrift *Beton und Eisen*. Es ist geradezu verwunderlich, daß das plastische Verhalten des Stahlbetons als Material bis dahin vor den Fachkreisen ungeklärt blieb, obgleich mit Stahlbetonkonstruktionen in allen Teilen der Welt zahlreiche und eingehende Versuche angestellt wurden.

Dr. KAZINCZY leistete auf dem Gebiet der Bestimmung der Belastbarkeit durchgehender Träger mit wechselnder Belastung Pionierarbeit, er veröffentlichte seine Untersuchungsergebnisse im Jahrgang 1931 der ungarischen Zeitschrift *Technika*.

Er hat auch eingehende Untersuchungen angestellt, um zu entscheiden, ob das Traglastverfahren auch zur Berechnung genieteter Fachwerkträger angewendet werden kann. Über seine hierauf bezüglichen Untersuchungen berichtet er im Jahrgang 1938 der Zeitschrift *Der Bauingenieur*.

Auch die Feststellungen Dr. KAZINCZYS über die Sicherheit der Konstruktionen und im allgemeinen über die Definition der Sicherheit sind sehr bedeutend. Wohl befaßte er sich in den Jahren des ersten Weltkrieges mit der Frage der Sicherheit, seine Erkenntnisse hat er aber zum ersten Mal auf dem Wiener Kongreß 1929 mitgeteilt. Diese Frage hat er in mehreren Arbeiten, unter anderen in den unter dem Titel »Sicherheit der Tragkonstruktionen« als Privatdozent gehaltenen Vorlesungen ausführlicher geklärt. Das Material seiner Vorträge ist auch in Buchform erschienen. Mit der gleichen Frage befaßte sich sein 1952 auf dem Cambridge-London-Kongreß gehaltener Vortrag.

Unter den zahlreichen Arbeiten Dr. KAZINCZYS verdient seine Studie über die Berechnung der Kreiszyinderschalen eine ganz besondere Aufmerksamkeit, die in der schwedischen Zeitschrift *Betong* erschienen ist und in der er gleichzeitig mit LUNDGREN das Verhalten der Kreiszyinderschalen behandelte, unter der Voraussetzung, daß der Beton keine Zugfestigkeit aufnehmen kann.

Seine letzte Arbeit ist in der *Bautechnik* erschienen. Er gibt darin ein verhältnismäßig einfaches Verfahren zur Berechnung von Stahlbetonquerschnitten an, die auf schiefe Biegung beansprucht sind.

Dr. Gábor KAZINCZY war einer jener ungarischen Ingenieure, die auf zahlreichen Gebieten und mit ganz und gar neuen Feststellungen die Ingenieurwissenschaft bereicherten. Der Erfolg seiner Arbeit war außer seiner Erfindungsgabe vor allem dem glücklichen Umstand zu verdanken, daß sich ihm infolge seiner beruflichen Einteilung häufig die Gelegenheit bot, das Verhalten der Tragwerke bei mannigfachen Probelastungen gründlich kennenzulernen. Trotz des von ihm eingeschlagenen neuen Weges sicherten ihm die Erkenntnisse dieser Versuche die Realität und den bleibenden Wert seiner Feststellungen. Wir blicken auf seine Tätigkeit mit Ehrfurcht zurück und betrachten seine Erfolge immer mit Stolz als die unsrigen.

Die Redaktion

Dr. Gábor Kazinczys literarische Tätigkeit

1. A hengerelt I-tartók felfekvő hosszúsága (Auflagelänge gewalzter I-Träger). *Építőipar-Építőművészet* **36** (1912), 329—330
2. A Pohl-féle födém (Die Pohlsche Decke). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 568
3. A felhőkarcoló tűzveszélyessége (Feuergefahr der Wolkenkratzer). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 16—17
4. A salakbeton (Der Schlackenbeton). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 103—104
5. A vasbeton kísérletek (Versuche mit Stahlbeton). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 115
6. A teherhordó épület szerkezete (Konstruktion lasttragender Bauten). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 163—195
7. Egy vasbeton födém leszakadása (Einsturz einer Stahlbetondecke). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 210
8. Mi a vasbeton? (Was ist Stahlbeton?) *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 211
9. Schubwiderstand und Verbund in Eisenbetonbalken. *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 221
10. Egy vasúti híd leszakadása (Einsturz einer Eisenbahnbrücke). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 219—220
11. Svájc legnagyobb vasbetonhídja (Die größte Stahlbetonbrücke der Schweiz). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 311
12. A legolcsóbb vasgerendás födém (Die billigste Stahlträger-Deckenkonstruktion). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 312
13. A vas rozsdásodása a falban (Verrosten des Eisens in Mauern). *Építőipar-Építőművészet* **37** (1913), 363—364
14. Többtámaszú tartók méretezése, rugalmas süllyedő alátámasztásokkal (Bemessung durchlaufender Träger mit elastisch nachgiebigen Unterlagen). *A Magyar Mérnök- és Építész Egylet Közleményei* **47** (1913), 322—328
15. A gőznyomás hatása a betonra (Wirkung des Dampfdruckes auf den Beton). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 18
16. A vas és beton rugalmassági tényezőjének viszonyszáma (Das Verhältnis des Elastizitätsmoduls von Stahl und Beton). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 101
17. Falazatok szilárdsága (Festigkeit von Mauern). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 130—132, 140—142
18. Falazatokban levő kémények (Schornsteine in Mauern). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 156
19. Vasbeton mennyezet tűzállósága (Feuersicherheit von Stahlbetondecken). *Építőipar-Építőművészet*, **38** (1914), 189

20. Szélesöví vastartók (Breitflanschträger). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 201
21. Vízermű az assuani gátnál (Wasserkraftwerk am Damm von Assuan). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 201
22. Vasbeton építés (Stahlbetonbau). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 218
23. „Reform” vasbetonpalló (Stahlbetondiele „Reform“). *Építőipar-Építőművészet* **38** (1914), 274
24. Kísérletek befalazott tartókkal (Versuche mit eingemauerten Trägern). *Betonszemle* **2** (1914), 68—71, 83—87, 101—104
25. A vasbetétes betonszerkezetek (Betonkonstruktionen mit Stahleinlagen). *Műszaki Naptár* (1914), 188—190
26. A vasbeton hidak (Stahlbetonbrücken). *Műszaki Naptár* (1914), 310—315
27. A betonkocka szilárdsága (Festigkeit des Betonwürfels). *Építőipar-Építőművészet* **39** (1915), 14—15
28. A Putiloff-művek (Die Putiloffwerke). *Építőipar-Építőművészet* **39** (1915), 34
29. Hideg-meleg okozta kiterjedések (Über Wärme-Ausdehnungen). *Építőipar-Építőművészet* **39** (1915), 34
30. A hengerelt vastartók méretezése (Bemessung gewalzter Stahlträger). *Építőipar-Építőművészet* **39** (1915), 92
31. A cement meghatározása lekötött betonban (Bestimmung des Zementgehaltes im gebundenen Beton). *Építőipar-Építőművészet* **39** (1915), 290
32. Röntgen fényképezés és a vasbeton építés (Röntgenfotografie und Stahlbetonbau). *Építőipar-Építőművészet* **40** (1916), 22
33. A német új vasbetonszabályzat (Neue deutsche Stahlbetonnorm). *Építőipar-Építőművészet* **40** (1916), 190—191, 197—198, 210—211, 215—216, 220—221, 234
34. Az építkezés olcsóbbá tétele és a lakásbérek (Verbilligung des Bauens und die Wohnungsmieten). *Építőipar-Építőművészet* **41** (1917), 33
35. Az építkezések fellendítése (Aufschwung der Bautätigkeit). *Építőipar-Építőművészet* **41** (1917), 56—57
36. Az építkezések olcsóbbá tétele (Verbilligung des Bauens). *Építőipar-Építőművészet* **41** (1917), 62—63
37. A téglafalazat anyagainak mely tulajdonságai mértékadók a falazat szilárdságára (Welche Eigenschaften der Stoffe von Ziegelmauern bestimmen ihre Festigkeit). *Anyagvizsgálók Közölnye* **4** (1917), 115
38. Kísérletek vasbeton medence sarkokkal (Versuche mit Ecken von Stahlbetonbecken). *A Magyar Mérnök- és Építész Egylet Közölnye* **51** (1917), 78—83
39. Néhány adat a téglaméret kérdéséhez (Einige Daten zur Frage der Ziegelabmessungen). *Építőipar-Építőművészet* **42** (1918), 131, 139, 147, 155—156, 163
40. A biztonság fokáról (Über den Sicherheitsgrad). *Építőipar-Építőművészet* **44** (1921), 78—79, 86—87
41. Logaritmus számolóécek használata, könyv és papírlogarléc (Benutzung logarithmischer Rechenschieber, Buch- und Papierrechenschieber). Németh József Könyvkiadó. Budapest 1921
42. Még egyszer a téglaméretről (Nochmals Ziegelabmessungen). *Építőipar-Építőművészet* **45** (1922), 3—4
43. Jelentés a Székesfőváros polgármesteréhez: a lakáskérdés Németországban 1922 év első feléig (Meldung an den Bürgermeister der Hauptstadt: Die Wohnungsfrage in Deutschland bis zur ersten Hälfte 1922). Steindruck, 92 Seiten
44. Javaslatok az építkezés biztonságosabb tételére és a balesetek elkerülésére (Vorschläge zur Erhöhung der Sicherheit und zur Vermeidung von Unfällen beim Bauen). *Vállalkozók Lapja* **49** (1928), 21—28
45. Jobbat olcsóbban (Besser aber billiger). *Építőipari Szemle* **1** (1928), 259—260, 291—293
46. Hozzászólás Gehler előadásához: (Beitrag zum Vortrag Gehlers) Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, Schlußbericht. Wien, 1928
47. Bemessung von statisch unbestimmten Konstruktionen unter Berücksichtigung der bleibenden Formänderungen. Vortrag auf dem Kongreß Lüttich, 1930
48. A végeiken részlegesen befogott kéttámaszú födém tartók méretszámítása (Bemessung der an beiden Enden teilweise eingespannten Deckenbalken). *Építőipari Szemle* **5** (1931), 7—8
49. A végeiken befalazott hengerelt kéttámaszú vasfödémgerendák méretezése a maradó alakváltozások figyelembevételével (Berechnung von gewalzten Stahlträgern, die an beiden Enden eingemauert sind, unter Berücksichtigung bleibender Verformungen). Dissertation, Budapest 1931

50. Statisch unbestimmte Tragwerke unter Berücksichtigung der Plastizität. *Der Stahlbau* 4 (1931), 5—8
51. Beitrag zum Vortrag SPINDEL über den Feinheitsmodul, auf dem in Zürich 1931 abgehaltenen internationalen Kongreß über Materialprüfung, Band II. 476
52. Beitrag zum Vortrag Gehler auf dem gleichen Kongreß wie oben: Über die Plastizität von Stahlbeton, Band I. 1169
53. A nedvesség káros hatása a betonra (Schädliche Wirkung der Feuchtigkeit auf den Beton). *Építőipar-Építőművészet* 55 (1931), 159—160
54. Die Weiterentwicklung der Plastizitätslehre. *Technika* 12 (1931), 168—172
55. Stahlbetondecken an Walzträgern. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, *Pariser Kongreß* 1932, *Schlußbericht* 564
56. Statikai értelemben határozatlan szerkezetek méretezése a maradó alakváltozások figyelembevételével (Bemessung statisch unbestimmter Konstruktionen unter Berücksichtigung bleibender Formänderungen). *A Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye* 66 (1932), 41—45, 57—61
57. Profilträger, kombiniert mit Beton oder Eisenbeton, auf Biegung beansprucht. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, *Kongreß London 1932. Schlußbericht*, 564
58. Jelentés a bauxitcementtel végzett kísérletek eredményeiről és az építkezésnél tett megfigyelésekről (Meldung über die Ergebnisse von mit Bauxitcement angestellten Versuchen und über die während des Bauens gewonnenen Erfahrungen). Steindruck, Budapest 1932
59. Vasbeton koszorúgerendába befalazott vastartók méretezésre szolgáló képletek (Berechnungsformeln für in Stahlbetonringträger eingespannte Stahlträger). M. kir. József Műegyetem, 1932
60. Beszámoló az Anyagvizsgálók Nemzetközi Szövetségének 1931-ben Zürichben tartott kongresszusáról (Bericht über den vom Internationalen Verband der Materialprüfer 1931 in Zürich abgehaltenen Kongreß). *Anyagvizsgálók Közlönye* II (1933), 141—159
61. Die Plastizität des Eisenbetons. *Beton und Eisen* 32 (1933), 74—80
62. Die Bemessung unvollkommen eingespannter Stahl »I«-Deckenträger unter Berücksichtigung der plastischen Formänderungen. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau »Abhandlungen« 2 (1933—34), 249—256
63. Laboratóriumi próbák soklyukú téglákkal (Laboratoriumsversuche mit Wabenziegeln). *Építőipari Szemle* 7 (1934), 2—11
64. Über die neuen ungarischen Vorschriften für geschweißte Stahlhochbauten (als Mitarbeiter mit Dr. CSONKA und Dr. ZORKÓCZY). *Der Stahlbau* 7 (1934), 8
65. A „Citadur” védjegyű bauxitcement gyakorlati alkalmazásának feltételei (Die praktischen Anwendungsbedingungen von Bauxitcement der Schutzmarke »Citadur«). *Vállalkozók Lapja* 55 (1934), 6
66. Bebetonozott vastartók (Einbetonierte Stahlträger). *Építőgyakorlat* 1 (1935), 27
67. Az építményekre ható szélterhelés SCHOEMAKER és WOUTERS alapján (Auf Bauwerke wirkende Windbelastung nach SCHOEMAKER und WOUTERS). *Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye* 69 (1935), 333—338
68. Kritische Betrachtungen zur Plastizitätstheorie. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Berlin 1936. *Schlußbericht*, 56—69
69. The Modular Ratio. *Concrete and Constructional Engineering* 42 (1937), 489
70. A biztonság fokának értelmezése és pontos meghatározása épületszerkezetekben (Definition und genaue Bestimmung des Sicherheitsgrades von Baukonstruktionen). *Technika* 18 (1937), 98—100
71. A vasbetontartó méretezésének alapvető kérdései (Grundlegende Fragen der Bemessung von Stahlbetonträgern). *Anyagvizsgálók Közlönye* 16 (1938), 55—96
72. Teherbírásszámítás (Tragfähigkeitsberechnung). MÖLLER K. *Építési Zsebkönyv* 2. Aufl. Band I. (1938), 293—305
73. Versuche mit innerlich statisch unbestimmten Fachwerken. *Der Bauingenieur* 19 (1938), 236—245
74. Négyzet- és körkeresztmetszetű vasak folyási határának meghatározása az építkezés helyszínen (Bestimmung der Fließgrenze von Vierkant- und Rundeisen an der Baustelle). *Budapesti Építőmesterek Ipartestületének Évkönyve* II (1939), Budapest
75. Kísérletek „Sigma” csavartvasal szerelt vasbetongerendákkal (Versuche mit Stahlbetonbalken, die mit dem tordierten Stahl »Sigma« armiert sind). *Budapesti Építőmesterek Ipartestülete*, 1939
76. Test on Beams Reinforced with High-Tensile and Mild Steel. *Concrete and Constructional Engineering* 45 (1940), 223

77. A lakóházak légoltalma (Luftschutz der Wohnhäuser). Mérnöki Továbbképző Intézet (1941), Band 3. Heft 16 S. 27
78. Determining the Yield Point of Steel Bars on the Site. *Concrete and Constructional Engineering* **46** (1941), 123
79. Az anyagok képlékenységeinek jelentősége a tartószerkezetek teherbírása szempontjából (Bedeutung der Plastizität der Stoffe vom Standpunkt der Tragfähigkeit der Tragkonstruktionen). Mérnöki Továbbképző Kiad. (1942), Band III. Heft 13. 107 (1944), Band XIX. Heft 49. 44
80. Die Berechnung der Faltwerke nach dem Traglastverfahren. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Kongreß 1948 Lüttich. Schlußbericht, 613—621
81. Beräkning av cylindriska skal med hänsyn till den armerade betongens egenskaper (Berechnung der Kreiszyinderschalen mit Rücksicht auf die Eigenschaften des Stahlbetons). *Betong* **34** (1949), 239—261
82. Zulässigkeit der Anwendung des Traglastverfahrens bei Stahlbeton. Internationale Vereinigung für Brückenbau. Schlußbericht, London 1952. 135
83. Berechnung rechteckiger Stahlbeton-Querschnitte bei zweiachsiger Biegung, mit oder ohne Längskraft, nach dem Traglast-Verfahren. *Bauplanung-Bautechnik* **11** (1958), 254—258
84. Bemessung von Stahlbeton-Querschnitten bei schiefer Biegung. *Die Bautechnik* **36** (1959), 138—143

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG —
COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

W. Nowacki:

THEORIE DES KRIECHENS. LINEARE VISCOELASTIZITÄT
(THEORY OF CREEP, LINEAR VISCOELASTICITY).

Franz Deuticke, Wien 1965, p. 224, Fig. 63, Table 1.

This book was originally published in 1964 under the title *Teoria Pelzania* in the Polish language. In the mean time, it was also edited in the French language. The introduction to the present German edition was written by Prof. H. PARKUS.

The book deals with a special chapter of rheology, the problems of linear viscoelasticity. While rheology examines the dependence on the time factor of the physical properties of structural materials, the theory of linear viscoelasticity is only concerned with phenomena conform to the *Boltzmann* principle of superposition. That means, it only treats cases in which the resultant of deformations caused by two or more load systems is identical with the deformation caused by the resultant of the same loads.

Linear viscoelasticity is gradually becoming more and more significant by the ever greater popularity of different new (mainly synthetic) structural materials. It has also great importance in the theory of concrete and reinforced concrete structures. This is why it seemed necessary to summarize all the results of viscoelasticity research, published in the columns of different reviews, in a comprehensive scientific book. The illustrious author of this book, Professor NOWACKI, ordinary member of the Polish Academy of Sciences, meant his work to serve this purpose.

The book is divided into six chapters. The first of these deals with the fundamental properties of linearly viscoelastic bodies and gives the mathematical models appropriate for their description. The second chapter deduces the basic equations of the mathematical models appropriate for their description. The second chapter deduces the basic equations of the theory of elasticity and those of linear viscoelasticity, as well as the so-called elastic-viscoelastic analogy. The third chapter treats the quasi-statical problems of the theory of viscoelasticity. These are: the problem of beams and plates made of viscoelastic material subjected to bending forces, and the problem of viscoelastic rods subjected to excentric compression. The subject of the fourth chapter are the stationary and instationary vibration phenomena of beams, plates and rods. Chapter five analyzes some spatial problems of the theory of linear viscoelasticity, while chapter six expounds the behaviour of viscoelastic bodies exposed to the impact of heat.

The Appendix of the book offers a short introduction to the theory of Laplace's transformation, indispensable in the course of the discussions. It gives a detailed table of the transformation formulae to be applied in the calculations. The unit-functions used in the discussions of the book are also presented in the Appendix.

Even this short summary proves that Professor NOWACKI's book comprises all the problems of linear viscoelasticity which have any significance for engineering practice. All these problems are dealt with in a masterly way, more than once with higher mathematical pretensions, but always with a very clear train of thought, easy to follow. It means a special value of this work that a considerable part of the tasks it deals with were resolved by Professor NOWACKI himself and are being published for the first time on these pages.

In consequence, there is no doubt that Professor NOWACKI's book, owing to its subject, as well as to its concise and clear style, will be indispensable for all those who wish to study viscoelasticity on a scientific level.

P. Csonka

K. Szmodits:

STATIK DER SCHALENKONSTRUKTIONEN

B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. Akadémiai Kiadó, Budapest 1966; 455 Seiten, 136 Abbildungen, zahlreiche Tabellen.

Zur Überdachung großer Räume, zur Herstellung von Stützmauern und Behältern, sowie auch zu anderen Zwecken werden in dem modernen Ingenieurbau Schalenkonstruktionen in ständig zunehmendem Maße verwendet. Die Konstruktion und Berechnung dieser wirft zahlreiche Probleme auf, die von der Alltagspraxis der Statiker vielfach abweichen und deren Lösung die Erwerbung besonderer, die üblichen statischen Kenntnisse übertreffender Fachkenntnisse erfordert.

Das Buch von K. SZMODITS versucht in dieser Hinsicht dem Konstrukteur von Schalenkonstruktionen Hilfe zu leisten.

Der *einführende Teil* des Buches macht den Leser auf 47 Seiten mit den Grundbegriffen der Schalenstatik und den Grundgleichungen der Schalentheorie bekannt. Der Verfasser fängt die Erläuterung mit der Angabe der allgemeinen Gestalt der Grundgleichungen an. Zuerst schreibt er sie in einem Flächenkoordinatensystem, gebildet von den Hauptkrümmungslinien, auf, nachher stellt er sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar, die ausführliche Ableitung beiseitelassend. Zwar ermöglicht diese Art der Behandlung — nämlich das Voraus-schicken des allgemeinen Falles und die Herleitung der Sonderfälle aus diesem — eine kurzgefaßte, einheitliche Darstellung ohne Wiederholungen, doch wäre es unserer Ansicht nach zweckmäßiger gewesen, die gutbewährte Methode der Lehrbücher zu befolgen, das heißt, aus den einfacheren Fällen ausgehend zum Allgemeinfall fortzuschreiten. Den Ansprüchen des Anfängers hätte diese Behandlungsart jedenfalls besser entsprochen.

Das Buch widmet 92 Seiten dem Problem der *Zylinderschalen*, nämlich der Darstellung der Membrantheorie und Biegungstheorie dieser Schalen. Es bringt mehrere Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung der Biegungstheorie von Kreiszyinderschalen; nachher wird die Lösung der homogenen Differentialgleichung angegeben für den Fall, in welchem die geraden bzw. die gebogenen Schalenränder belastet sind. Diese Methoden sind, wie bekannt, zu kompliziert für die Praxis. Aus diesem Grunde wurden von verschiedenen Verfassern Tabellen zur Lösung dieser Aufgabe aufgestellt. Sehr richtiger Weise, lenkt das Buch die Aufmerksamkeit des Lesers auf diese Tabellen und gibt auf Grund von einigen, der Praxis entnommenen, Zahlenbeispielen eine Erklärung zur Anwendung der weitgehend verbreiteten Randwerttabellen von RÜDIGER—URBAN bzw. Manuel ASCE. Sehr interessant und nützlich sind die Ausführungen des Buches, die sich auf die Berechnung der durch Randbalken gestützten Tonnenschalen aus Stahlbeton beziehen. Diese ermöglichen eine bedeutende Vereinfachung der sonst sehr umständlichen Berechnungen.

Die Frage der *zylindrischen Behälter* wird vom Buch auf 20 Seiten erörtert. Hier gelangt außer dem Fall von Behältern mit konstanter Wanddicke auch der Fall von Behältern mit linear veränderlicher Wanddicke zur Behandlung. All dies wird ergänzt durch die Angabe der Berechnungsmethode der Silowände, sowie der Berücksichtigung der auf die Wände der zylindrischen Behälter wirkenden Windbelastung.

Das Problem der *Rotationsschalen* wird auf 134 Seiten des Buches behandelt. Von diesen letzteren befassen sich 64 mit der Membrantheorie. Außer dem Fall der kreissymmetrischen Belastung erstreckt sich die Erörterung auch auf den Fall der periodisch verteilten Belastung. Erwähnt wird auch der Fall der an vereinzeltten Punkten gestützten Kugelschale, sowie das Problem der nach einer Ringfläche mit waagrechter Achse geformten Schalen, ein Typ, der sich zur Vorfertigung besonders eignet. Die Berechnung dieser letzten wird durch Zahlenbeispiele erläutert. — Auch mit der Biegetheorie der Rotationsschalen befaßt sich das Buch ausführlich und ganz besonders mit dem Problem der an ihrem Rand kreissymmetrisch belasteten Kugelschale. Da die Lösung dieses Problems die Summierung äußerst langsam konvergierender Reihen erfordert, bringt das Buch zur Erleichterung der Berechnung Tabellen, die mit Hilfe von Rechenmaschinen ausgearbeitet wurden. Es befaßt sich auch eindringlich mit den Vereinfachungen, die im Fall von steilen, bzw. flachen Kugelschalen zulässig sind. Ein besseres Verständnis des Vorgetragenen wird durch ein reiches Beispielmaterial befördert.

Die Frage der *Schalen von allgemeiner Form* wird im Buch auf 73 Seiten behandelt, und zwar durch die Puchersche Projektionsmethode. Hier werden mehrere Verfahren zur Lösung des Problems der über einem Rechteckgrundiβ konstruierten elliptischen Paraboloid-schale behandelt. Von diesen dürften die Auseinandersetzungen bezüglich der Frage der Ecksingularität besonderes Interesse beanspruchen. Auch das Problem der über einen Rechteckgrundiβ konstruierten Sattelschale, bzw. windschiefen Viereckschale wird behandelt. Die

Erörterung wird durch die Darlegung der Wlassowschen Theorie der flachen Schalen ergänzt. Als praktisches Beispiel dient die Berechnung der über einen Rechteckgrundriß konstruierten elliptischen Paraboloidschale, und der über eine Ellipse konstruierten elliptischen bzw. hyperbolischen Paraboloidschale. Diese und die, die Anwendung der Differenzenmethode erläuterten Aufgaben bieten dem Ingenieur der Praxis eine nützliche Hilfeleistung.

Außer dem Erwähnten werden im Buch auch die *Stabilitätsprobleme* der Schalen, sowie die Frage der *Faltwerke* und *Hängedächer* kurz behandelt. All diese Aufgaben besitzen vom Gesichtspunkt der Praxis aus große Wichtigkeit, folglich ist ihre Behandlung äußerst gerechtfertigt.

Aus dieser kurzgefaßten Besprechung geht bereits hervor, daß das Buch von K. SZMODITS ein, das ganze Gebiet der Schalenstatik umfassendes Fachwerk ist, das zahlreiche Fragen behandelt, die bisher in den allgemein benützten Fachbüchern nicht erörtert wurden. Leider gestattete der enge Rahmen des Buches keine Möglichkeit, jede der aufgeworfenen Fragen in ihren sämtlichen Einzelheiten klar darzulegen, und so mußte sich der Verfasser damit begnügen, die Probleme bloß in wenigen Worten zu skizzieren, anstatt sie ausführlich auseinanderzusetzen. Darum wäre es zweckmäßig gewesen, sich von Fall zu Fall darauf zu berufen, wo eine ausführliche Darlegung der bezüglichen Probleme zu finden ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das Buch von K. SZMODITS durch seinen Aufbau und seine Behandlungsweise als ein Fachbuch betrachtet werden kann, das hauptsächlich diejenigen mit Gewinn lesen können, die bereits über Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Schalenstatik verfügen. Diese letzteren erhalten mit dem Buch von K. SZMODITS ein gut geschriebenes, schön ausgestattetes, die aktuellen Probleme der Praxis umfassendes Werk, das eine vorzügliche Hilfe zur Vertiefung ihrer theoretischen Kenntnisse bietet und gleichzeitig zur fachgemäßen Lösung der sich in der Praxis ergebenden verschiedenen Aufgaben beiträgt.

P. Csonka

INDEX

- Szidarovszky, J.*: A Practical Determination Method for Bending Moments in Straight Bars under Combined Bending and Compression — Ein praktisches Verfahren für die Bestimmung des Biegemoments in einem gleichzeitig auf Biegung und Druck beanspruchten geraden Stab — Méthode pratique pour la détermination des moments fléchissants de barres droites soumises à des flexions et compressions simultanées — *Сидаровски, Я.*: Практический метод определения изгибающих моментов, образующихся в подвергнутом одновременно изгибу и сжатию прямоосном стержне. 277
- Mistéth, E.*: New Method for the Determination of the Limit Bearing Force by Using the Probability Calculus — Neue Methode zur Bestimmung der Grenzbeanspruchungen unter Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung — Une nouvelle méthode de détermination des sollicitations limites per application du calcul des probabilités — *Миштем, Э.*: Новый метод определения граничных нагрузок с помощью расчета по теории вероятности 297
- Rózsa, M.*: Modèles électriques analogues pour le calcul des ossatures — Electrical Analogy for Bar Structures — Elektrische Analogmodelle für Stabwerke — *Рожа, М.*: Электрические аналоговые модели стержневых конструкций 327
- Dundrová, V. — Kovarik, V. — Slapák, P.*: Nichtlineare Biegungstheorie von Sandwich-Platten, I. — Non-Linear Bending Theory of Sandwich Plates, I. — Théorie de la flexion des plaques sandwich, I. — *Дундрова, В., Коварик, В., Шлапак, П.*: Нелинейная теория изгиба Sandwich-Platten, I. 343
- Rózsa, M.*: Stability Analysis of Thin Annular Plates Compressed Along the Outer or Inner Edge by Uniformly Distributed Radial Forces — Stabilitätsuntersuchung der am äußeren oder inneren Rand in radialer Richtung dreh-symmetrisch gedrückten Ringplatten — Analyse de la stabilité des plaques minces annulaires sous charge radiale uniformément répartie agissant sur le bord extérieur ou intérieur — *Рожа, М.*: Исследование устойчивости кольцеобразных пластин, сжатых центральносимметрично по наружной или внутренней краю 359
- Szmodits, K.*: Étude numérique de plaques encastrées sur deux côtés opposés et reposant librement sur les deux autres côtés — Numerical Investigation of a Plate Fixed on Two Opposite Sides and Simply Supported on the Two Other Sides — Numerische Untersuchung einer auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannten, auf den zwei anderen Seiten frei aufliegenden Platte — *Смодич, К.*: Числовой анализ пластины, две противоположные стороны которой зажаты, и две другие стороны которой свободно оперты 379
- Panc, V.*: Theorie der dünnwandigen auf elastischer Unterlage gebetteten Stäbe — Theory of Thin-Walled Beams on Elastic Foundation — Théorie des barres à parois minces sur fondation élastique — *Панц, В.*: Теория тонкостенных стержней, лежащих на упругом основании 389
- Roller, B.*: Berechnung von Seilträgernetzen, I. — Combination of Cable Roofs with Stiffening Girders, I. — Calcul de toits suspendus raidis par des poutres, I. — *Роллер, Б.*: Расчет цилиндрических высячич крыш, с балками жесткости, I. 407

<i>Rétháti, L.</i> : Theoretische Untersuchungsmethoden der im Erdboden entstehenden Plastizitätsbereiche — On the Theoretical Methods of Analysis of Plasticity Zones in the Soil — Des méthodes d'examen théorique des zones plastiques se formant dans le sol — <i>Петхаму, Л.</i> : О методе теоретического исследования пластических зон, возникающих в грунте	417
<i>Schäffner, H. J.</i> : Setzungsvorhersage aus Zeit-Setzungsmessungen — The Forecasting of Settling Based on the Progress of Settling with Time — Evaluation préliminaire des tassements à partir de mesures de tassement en fonction du temps — <i>Шеффнер, Х. Й.</i> : Прогноз осадения по данным измерений осадения в функции времени	431
<i>Dulácska, E.</i> : Die Stabilität der Bauwerke mit hochliegendem Schwerpunkt — The Stability of Structures with High Center of Gravity — Stabilité des constructions à centre de gravité élevé — <i>Дулачка, Э.</i> : Стабильность построек с высоким центром тяжести	439
<i>Csonka, P.</i> : Torsional Buckling of Straight-Axed Bars with Circular Cross-Section — Ausknicken eines auf Verdrehen beanspruchten geradachsigen Rundstabes — Le flambage dû à la torsion de barres droites de section circulaire — <i>Чонка, П.</i> : Прогиб прямоосного стержня круглого сечения от кручения	445
Gábor Kazinczy 1889—1964 — Габор Казинци 1889—1964	455
<i>Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг</i>	
W. Nowacki: Theorie des Kriechens. Lineare Viscoelastizität — <i>P. Csonka</i>	461
K. Szmodits: Statik der Schalenkonstruktionen — <i>P. Csonka</i>	462

L. MOHÁCSY

CONTEMPORARY FORMING METHODS

*In English • 321 pages • 393 figures and 28 tables
17×24 cm • Cloth*

The author deals with a wide-variety of building materials and methods for forming concrete surfaces, regainable and permanent shuttering, various cavity-forming materials and supporting structures, by shoring and centering. The various systems of climbing, continuously moving, suspended travelling forms, the lift-slab, tilt-up methods equipment used throughout Europe and America are covered. Chemical and physical interaction between concrete surfaces and forms is dealt with. The author analyses the various methods of calculating concrete pressure affecting the shuttering, and the architectural effects of the formation of the concrete surface.

GY. RUDNAI

LEICHTBETONBAUKONSTRUKTIONEN

In German • Approx. 200 pages • 170 figures • 10 tables • Cloth

Joint edition with Werner Verlag G. m. b. H. Düsseldorf

The author discusses the physical and mechanical characteristics of light concrete, and the use of aerated concrete and concrete aggregates in building structures. He analyses in detail and with many illustrations the structural, technological and shuttering problems of small and large load-bearing partitions, of shell-concrete walls, and of ceilings and floors. He also deals with heat insulation calculations for light concrete walls and floors.

AKADÉMIAI KIADÓ

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences
Budapest V. Alkotmány utca 21

Distributors: KULTURA Budapest 62. P.O.B. 149

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat a nyomdába érkezett: 1965. XII. 22. — Terjedelem: 16,75 (A/5) ív, 62 ábra

66.61743 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

All the reviews of the Hungarian Academy of Sciences may be obtained among others from the following bookshops:

ALBANIA

Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sidney

AUSTRIA

Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I.

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Raznoiznos
1Tzar Assen
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2 Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. Nr. 88.

CZECHOSLOVAKIA

Artia A. G.
Ve Smekách 30
Praha II.
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tisku
Vinohradska 46
Praha 2
Postova Novinova Sluzba
Dovoz tlace
Leningradska 14
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nørregade 6
Kopenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16.
Leipzig C. I.
Zeitungsvertriebsamt
Clara Zetkin Straße 62.
Berlin N. W.

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Collet's Subscription Dept.
44-45 Museum Street
London W. C. I.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471-487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
Head Office:
India House OPP.
GPO Post Box 1374
Bombay I.

ITALY

Santo Vanasia
71 Via M. Macchi
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Nauka Ltd.
2 Kanada-Zimbocho 2-chome
Chiyoda-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo

Far Eastern Booksellers

Kanada P. O. Box 72
Tokyo

KOREA

Chulpanmul
Korejskoje Obshchestvo po Exportui
Importu Proizvedenij Pechati
Phenjan

NORWAY

Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND

Export und Import Unternehmen
RUCH
ul. Wilcza 46.
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14-18.
Bucuresti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaja Kniga
Moscow
G-200

SWEDEN

Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA

Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York 3 N. Y.
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York 3. N. Y.

VIETNAM

Xunhasaba
Service d'Export et d'Import des Livres
et Périodiques
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Misica broj 1.
Novi Sad
Jugoslovenska Kniga
Terazije 27.
Beograd