

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJTI

TOMUS 52

FASCICULI 1-2

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA

TOMUS 6 FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1965

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

TOMUS 52

Series Geodaetica et Geophysica

TOMUS 6

INDEX

<i>Arnold, K.</i> : Geodätische Punktbestimmung mittels der Beobachtung künstlicher Erdsatelliten — Geodetical Point Determination by Means of Observations of Artificial Satellites — Détermination géodésique de points par l'observation de satellites artificiels — <i>Арнольд, К.</i> : Геодезическое определение пунктов по данным наблюдений искусственных спутников Земли	101
<i>Arnold, K.</i> : Neuerungen zur Theorie des Geoids — Innovations to the Theory of the Geoids — Innovations à la théorie du géoïde — <i>Арнольд, К.</i> : Новые соображения по теории геоида	121
<i>Arnold, K.</i> : Zur Genauigkeit der Formel für das gravimetrische Zusatzglied — On the Precision of the Formula for the Gravimetric Correction Term — Sur la précision de la formule du terme de correction gravimétrique — <i>Арнольд, К.</i> : О точности формулы для определения гравиметрического дополнительного члена	243
<i>Asszonyi, Cs.—Richter, R.</i> : General Solution for the Determination of the Adjusting Straight Line — Eine allgemeine Lösung für die Bestimmung der Ausgleichs- bzw. Schmiegungsgeraden — Solution générale pour la détermination de la droite de compensation — <i>Ассони, Ч.—Рихтер, Р.</i> : Обобщенное решение определения выравнивающей или сглаживающей прямой	93
<i>Böhm, J.</i> : Messung von vertikalen Erdkrustenbewegungen im Lichte der Fehlertheorie — The Measuring of Vertical Motions of the Earth's Crust in the Light of the Theory of Errors — Mesurages des mouvements verticaux de la croûte terrestre à lumière de la théorie des erreurs — <i>Бем, Й.</i> : Измерение вертикальных движений земной коры с учетом теории погрешности	251
<i>Buchheim, W.</i> : Über das Verhältnis der stochastischen Behandlung von Setzungs- bewegungen in Lockermassen nach J. Litwiniszyn zur Lückendiffusions-Theorie — On the Relation of the Stochastic Treatment of the Settling of Loose Rock Masses According to J. Litwiniszyn, to the Interspace Diffusion Theory — Sur la relation du traitement stochastique, selon J. Litwiniszyn, de la sédimentation de masses de roches friables avec la théorie de la diffusion interspatiale— <i>Бухгейм, В.</i> : Об отношении стохастической обработки процессов оседания рыхлых масс по методу Й. Литвинисына к теории щелевой диффузии	261
<i>Egyed, L.</i> : The Change of Ellipticity of an Expanding Earth — Die Veränderung der Abplattung der sich ausdehnenden Erde — La variation de l'ellipticité en cas d'une Terre en dilatation — <i>Эдьед, Л.</i> : Изменение сжатия Земли в случае расширяющейся Земли	273
<i>Ertel, H.</i> : Dynamische Morphologie der Schildvulkane — Dynamic Morphology of Shield Volcanoes — Morphologie dynamique des volcans en bouclier — <i>Эртель, Х.</i> : Динамическая морфология щитовых вулканов	277
<i>Fanslau, G.</i> : Zur Frage nach der Realität des geomagnetischen Außenfeldes — On the Problem of Reality of the External Geomagnetic Field — Sur le problème de la réalité du champ géomagnétique extérieur — <i>Фанзлау, Г.</i> : К вопросу о реальности внешнего геомагнитного поля	281
<i>Hazay, I.</i> : Die Bedeutung der Tissot-Indikatrix — The Significance of Tissot's Indicatrices — La signification des indicatrices de Tissot — <i>Хазай, И.</i> : О значении индикатрис Тиссо	171

<i>Halmos, F.</i> : Die Bestimmung der Genauigkeit von Meßergebnissen — Determination of the Accuracy of Measuring Results — Détermination de la précision des observations — <i>Хальмош, Ф.</i> : Определение точности результата измерений	45
<i>Halmos, F.</i> : Theory and Practice of the Evaluation of Measurement Results — Theorie und Praxis der Auswertung von Meßergebnissen — Théorie et pratique de l'évaluation des résultats de mesurages — <i>Хальмош, Ф.</i> : О теории и практике интерпретации результатов измерений	77
<i>Halmos, F.</i> : Die Bestimmung der Verschiebung einzelner Punkte durch Messen, Kriterien der Lagebeständigkeit — Determination of the Displacement of Certain Points by Measurements, the Criteria of their Stability — Détermination par mesurages du déplacement des points et critères de leur stabilité — <i>Хальмош, Ф.</i> : Об определении смещений пунктов посредством измерений и о критериях устойчивости пунктов	203
<i>Hristov, V. K.</i> : Ausgleichung korrelierter Beobachtungen nach Bedingungen bei singularer Korrelationsmatrix — Adjustment of Correlated Conditional Observations in Case of a Singular Correlation Matrix — La compensation d'observations conditionnelles corrélées en cas de matrice de corrélation singulière — <i>Христов, В. К.</i> : Выравнивание прокоррелированных наблюдений при наличии сингулярной корреляционной матрицы	295
<i>Hoványi, L.</i> : Genauigkeitsfragen bei der Bestimmung von horizontalen Punktverschiebungen durch wiederholtes Rückwärtseinschneiden — Accuracy Problems in the Determination of Horizontal Point Displacements by Repeated Resections — Problèmes de précision dans la détermination par relèvements du déplacement horizontal de points — <i>Ховани, Л.</i> : Вопросы о точности определения горизонтального смещения пунктов при помощи повторных обратных засечек	35
<i>Hönyi, E.</i> : Exakte Ausgleichung einiger Fälle von durch Messung verbundenen Polygonlinien — Exact Adjustment of Certain Cases of Polygon Lines Connected by Measurements — Compensation précise de quelques cas de cheminements polygonaux reliés par mesurages — <i>Хёнц, Э.</i> : Точное выравнивание некоторых случаев полигональных содов, увязанных измерениями	131
<i>Kamela, Cz.</i> : Die Perspektiven der Modernisierung der klassischen Triangulation — The Perspectives of a Modernization of Classical Triangulation — Perspectives de modernisation de la triangulation classique — <i>Камела, Ц.</i> : О перспективах модернизации классической триангуляции	305
<i>Ledersteger, K.</i> : Das Normalsphäroid der Erde und die dynamische Bestimmung seiner geometrischen Parameter — The Normal Spheroid of the Earth and the Dynamical Determination of its Geometric Parameters — Le sphéroïde normal de la terre et la détermination dynamique de ses paramètres géométriques — <i>Ледерштегер, К.</i> : Нормальный сфероид Земли и определение его геометрических параметров	311
<i>Lucke, O.</i> : Zur Bestimmung der Dichte des Neutralgases in der hohen Atmosphäre aus Satellitenbeobachtungen — On the Determination of the Density of Neutral Gas in the upper Atmosphere according to Satellite Observations — Détermination de la densité du gaz neutre dans l'atmosphère supérieure par observations de satellites — <i>Луке, О.</i> : К вопросу об определении плотности нейтральных газов в высоких слоях атмосферы по наблюдениям искусственных спутников	323
<i>März, F.</i> : Über die neueren Ergebnisse der Untersuchungen der Spitzenströme — On Recent Results in the Investigations of Peak Discharge Currents — Nouveaux résultats des recherches sur les courants de décharge de crête — <i>Мэрц, Ф.</i> : Новые результаты изучения пиковых разрядных токов	143
<i>März, F.</i> : Der Zusammenhang des lufterlektrischen Potentialgradienten mit den meteorologischen Elementen in den Beobachtungen des Geophysikalischen Observatoriums bei Nagycenk — The Relations between the Potential Gradient of the Atmospheric Electricity and the Meteorological Elements in the Observations of the Geophysical Observatory at Nagycenk — Relations entre la gradient de potentiel de l'électricité atmosphérique et les éléments météorologiques dans les observations de l'Observatoire Géophysique de Nagycenk — <i>Мэрц, Ф.</i> : О связи градиента аэроэлектрического потенциала с метеорологическими элементами по данным наблюдениям, проведенных в геофизической обсерватории при с. Надьценк	157
<i>Meißer, O.</i> : Praktischer Einsatz der modernen Ingenieurgeophysik — Practical Applications of Modern Engineering Geophysics — L'application pratique de la géophysique d'ingénieur — <i>Мейсер, О.</i> : Практическое применение современной инженерной геофизики	341

<i>Milasovszky, B.:</i> To the Problem of the Optimal Star Program in the Meridian Method — Zur Frage des optimalen Sternprogrammes der Meridian-Methode — Du programme sidéral optimum dans la méthode méridienne — <i>Милашовски, Б.:</i> К вопросу оптимальной звездной программы меридианного метода	3
<i>Peschel, H.:</i> Die internationale geodätische Bibliographie — The International Geodetic Bibliography — La bibliographie géodésique internationale — <i>Пешел, Х.:</i> Международная библиография по геодезии	345
<i>Porstendorfer, E.—Porstendorfer, G.:</i> Modelle zur Deutung des anomalen Verhaltens geomagnetischer Variationen über großen zylindrischen Sedimentbecken — Models for the Interpretation of the Anomalous Behaviour of Geomagnetic Variations over Large Cylindrical Sedimental Basins — Modèles pour l'interprétation du comportement irrégulier des variations géomagnétiques au-dessus des grands bassins sédimentaires cylindriques — <i>Порстендорфер, Э. — Порстендорфер, Г.:</i> Модели для выяснения аномального поведения геомагнитных вариаций над крупными цилиндрическими осадочными бассейнами	351
<i>Ramsayer, K.:</i> Über die Genauigkeit der Bestimmung der astronomischen Refraktion — On the Accuracy of the Determination of the Astronomical Refraction — Sur la précision de la détermination de la réfraction astronomique — <i>Рамзайер, К.:</i> О точности определения астрономической рефракции	361
<i>Rinner, K.:</i> Die räumliche Drehstreckung — Linear Conformal Transformation in Space — La transformation linéaire dans l'espace — <i>Риннер, К.:</i> Конформная линейная трансформация в пространстве	373
<i>Rüger, W.:</i> Betrachtungen zur Paßpunktbestimmung durch Meßtischphotogrammetrie bei terrestrisch-photogrammetrischen Aufnahmen von Braunkohlentagebauen — Considerations on the Determination of Minor Control Points by Way of Plane-Table Photogrammetry in Terrestrial-Photogrammetrical Surveying in Brown Coal Surface Mining Works — L'exécution du canevas de restitution avec photogrammétrie par intersection dans les levés terrestres photogrammétriques des mines de charbon à ciel ouvert — <i>Рюгер, В.:</i> Некоторые соображения по определению связующих точек мензульно-фотограмметрическим методом при наземной фотограмметрической съемке открытой разработки бурых углей	393
<i>Sandig, H. U.:</i> Die Bestimmung der Lotabweichung η für Potsdam aus Sternbedeckungen — The Determination of the Potsdam Deflection of the Plumbline η from Star Occultations by the Moon — Détermination de la déviation de la verticale η de Potsdam, sur la base de l'occultation d'étoiles — <i>Сандиг, Х. У.:</i> Определение отклонения отвеса η для Потсдама по покрытиям звезд	405
<i>Schädlich, M.:</i> Bemerkungen zu A. Tárczy-Hornoch und G. Alpár: Zur genauen Bestimmung kleiner Neigungswinkel mittels Sekundenlibellen — Remarks to the Paper „On the Determination of Small Slope Angles by Using a Second-Spirit Level” by A. Tárczy-Hornoch and G. Alpár — Remarques sur l'article de A. Tárczy-Hornoch et G. Alpár, intitulé: „De la détermination exacte de petits angles d'inclinaison au moyen de niveaux de haute précision — <i>Шедлик, М.:</i> Примечания к статье А. Тарци-Горнох и Д. Альпар «К точному определению небольших углов наклона с помощью уровня с отвесом, имеющим секундное деление»	221
<i>Spickernagel, H.:</i> Über marksheiderische Meßergebnisse zur Feststellung der durch bergmännischen Abbau verursachten Gebirgsbewegungen — On the Results of Underground Surveys for the Determination of Rock Displacements due to Mining Operation — Mesurages géométriques souterrains pour la détermination des mouvements de roches produits par les opérations minières — <i>Шпикернагель, Х.:</i> О результатах маркшейдерских работ по определению смещений грунта, связанных с горными работами	413
<i>Stiller, H.:</i> Zur Deutung differentialthermoanalytischer Untersuchungen an Titanomagnetiten bei Verwendung von unmagnetischem und magnetischem Vergleichsmaterial — On the Interpretation of Differential Thermal Analytical Investigations of Titanomagnetites under the Application of Non-Magnetic and Magnetic Comparison Materials — Sur l'interprétation des recherches thermoanalytiques différentielles de titanomagnétites avec application de matériaux non magnétiques et magnétiques — <i>Штиллер, Х.:</i> Об интерпретации дифференциально-термического анализа титаномагнетитов с применением немагнитного и магнитного сравнительных материалов	429
<i>Tárczy-Hornoch, A.—Alpár, Gy.:</i> Zur Bestimmung und Genauigkeit der mit den Sekundenlibellen gemessenen Neigungswinkel — On the Determination of Slope Angles Measured by One-Second Levels, and on its Accuracy — De la détermination exacte	

	des angles d'inclinaises mesurés au moyen de niveaux de haute précision — <i>Тарци-Горнох, А.—Альпар, Д.</i> : Об определении углов наклона с помощью уровней, имеющих секундное деление, и о точности этих определений	225
<i>Verő, J.</i> :	A Possibility of the Determination of the Telluric Tensor — Eine Möglichkeit der Bestimmung des tellurischen Tensors — Une possibilité de détermination du tenseur tellurique — <i>Верё, И.</i> : О дополнительной возможности определения теллурического тензора	65
<i>Wolf, H.</i> :	Der Einfluß von Korrelationen auf die Unbekannten einer Ausgleichung — The Influence of Correlations upon the Unknowns of an Adjustment — Influence des corrélations sur les inconnues d'une compensation — <i>Вольф, Х.</i> : О влиянии корреляций на неизвестные уравнивания	441
<i>Zill, W.</i> :	Die Anwendung von Näherungsformeln bei der Absteckung von Kreisbögen — Application of Approximation Formulas in the Setting out of Arcs of Circles — Application des formules d'approximation dans le jalonnement d'arcs de cercles — <i>Цилл, В.</i> : Применение приближенных формул для разбивки окружности на дуги	447

RECENSIO

<i>Walter Großmann</i> :	Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung (A. Tarczy-Hornoch)	237
<i>Tarczy-Hornoch, A.</i> :	Markscheiderische Studien (K. Neubert)	457

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 52

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA

TOMUS 6



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1965

ACTA TECHN. HUNG.

TO THE PROBLEM OF THE OPTIMAL STAR PROGRAM IN THE MERIDIAN METHOD

B. MILASOVSKY

DR. ENG. SC.

TECHNICAL UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC

[Manuscript received February 8, 1963]

The time determinations on the Laplace stations of the prime triangulation network in Hungary is carried out on the basis of the observation of the meridian transit times of so-called "time stars". Besides these, also "circumpolar stars" are observed, in order to ensure the determination of the azimuth constant. The aim of the present investigations is to settle the question, which of the formulas (7) and (36) should serve as a basis for the selection of the time stars. According to the author's opinion, the latter of the two principles ensures a higher degree of reliability of the time determinations.

By time determination, the determination of the "local time" θ corresponding to the meridian of the own station in a certain clock instant U is understood, according to the relation

$$\theta = U + \Delta U \quad (1)$$

where ΔU is the "clock correction" of the station clock. This can be both positive or negative, according to whether the clock is fast or slow in relation to the local time θ .

In order to determine θ , the clock correction ΔU must be known.

According to the method defined in the title of this study, the point of departure is that the local sidereal time instant θ of the station, in the moment of the upper culmination (meridian transit) of a certain star, is identical with the right ascension α of the star in question, i. e.:

$$\theta = U + \Delta U = \alpha. \quad (2)$$

Thus, in the knowledge of U and α , the clock correction of the station can be computed from the relation

$$\Delta U = \alpha - U. \quad (3)$$

In practice, of course, the most probable correction of the station clock will be derived not from the time transit of a single star but from the instants U_1, U_2, \dots, U_n of the meridian transits of several stars. Now the question is, how to select the stars to be used for the solution of this task.

*

The point of departure is that the approximate geographical longitude and latitude of the Laplace station can be assumed as known in Europe, at least with a cartographical accuracy. In the possession of the approximate longitude λ_0 , reckoned from *Greenwich*, the similarly approximate local sidereal time Θ'_λ of the station can be calculated for any universal time instant U. T. given, from the relation

$$\text{U. T.} + \tau + \lambda_0 + \Theta_0 = \Theta'_\lambda. \quad (4)$$

This local sidereal time is needed to select, by comparing it to the right ascension column (A. R. column) of the Yearbook, the stars passing through the meridian after darkening, and the transit times of which do not coincide with the time of reception of the radio time signals, the latter being indispensably necessary, on the other hand, for the determination of the *exact* longitude λ of the station. In formula (4), τ is the conversion factor from mean time to universal time, and Θ_0 is the sidereal time instant valid in universal time instant O_h . Both factors τ and Θ_0 can be taken from the Yearbook. Finally, the geographical latitude φ of the station will be needed for the calculation of the azimuth factors K of the stars.

The international astronomical yearbook *Apparent Places of Fundamental Stars*, as known, contains the apparent α and δ coordinates of 1535 so-called fundamental stars, thus, a sufficient choice of stars for time determinations based on meridian transits stand at disposal for any geographical latitude.

Among the different points of view to be considered in the selection of stars, the directive one is, as a matter of fact, always the same, namely the safeguarding of the greatest possible accuracy of time determination.

Keeping in view the method of observation of the meridian transit time of the selected stars, in general use abroad as well as in Hungary, an investigation of the problem in this sense will be attempted on the basis of the most general relations.

Preceding this, however, it can be stated that the question of star program has been repeatedly taken up in the literature. For instance, in the longitude determinations of the *Preussische Geodätische Kommission* around 1870, two star groups, namely one group of "time stars" and another group of "circumpolar stars" were combined [1]. In the earlier investigations of the author [2], discussing in detail the meridian transit times of the so-called time stars in short northern and southern meridian-zenith distances are destined to ensure the determination of the clock correction sought for and of its proper weight, meanwhile the so-called circumpolar stars around the Pole, characterised by large declinations, i.e. observed at considerably more northern meridian-zenith distances, are suited for the determination of the azimuth constant, in the first place, and of its proper weight. Also in [2],

the basic relations of the time determination method treated here, which are now referred to, were discussed (Fig. 1).

The programs of the former mentioned *Prussian Geodetic Institute* were however, altered since 1900 and later time stars around the zenith were used for the determination of the clock correction. The azimuth constant, on the other hand, was derived from the combination of time stars and circumpolar stars [3].

From the point of view of selecting stars serving as time determinations were thoroughly discussed in 1927 by the *Baltische Geodätische Kommission* in the interests of determining the longitude ring of the Baltic countries [4]. It was suggested by SCHNAUDER that the average declination of the star group should correspond to the half value of the geographical longitude of the station:

$$\frac{[\delta]}{n} = \frac{\varphi}{2} . \quad (5)$$

According to his opinion, such an extension of the group in southern direction advantageously reduces the influence of right ascension errors upon the longitudes.

SCHUMANN [5] similarly does not approve of an exclusive use of circumzenith stars. In his opinion, although the effect of the azimuth constant upon the clock correction actually decreases as an advantage of the circumzenithal program, on the other hand, however, the influence of the inclination of the horizontal axis increases.

During the 1935 session of the *Baltic Commission* in question, partly N. E. NÖRLUND, partly Bengt AURELL lectured on the problems of the star programs of time determinations.

In fact, both of them simplify the problem in the sense that they divide the star program into two parts and, in the frame of these, take, for a basis, an average zenith distance, resp. average declination partly for the group of circumpolar stars, partly for the group of time stars. Assuming one of the groups for fixed, for given, they examine the question: under which average zenith or declination must the other star group, resp. star observed so as to obtain a maximal weight of the clock correction, resp. of the azimuth constant. Both investigations are illustrated by instructive diagrams.

The statements of NÖRLUND are: 1. at any latitude, the small zenith distance time stars are more advantageous, 2. one of the star groups is to be chosen to the south of the zenith, the other to the north of it.

AURELL assumes the group of the time stars as given, and examines the question in which way does the weight of both the clock correction and the azimuth constant change by the inclusion of a single circumpolar star and by the variation of its declination. He is interested in the preconditions

of the simultaneous weight maximum, since in Sweden the azimuth constant is also used for the determination of the azimuth of the triangle sides in such a way that 2 mirae each are placed in the northern, resp. southern branch of the meridian, and the horizontal angle between the mirae and the triangulation point is measured. According to AURELL's suggestion, the time stars should be evenly divided to the north and to the south of the zenith, and the azimuth star observed in lower culmination at $60 \div 65^\circ$ declination. Also he thinks the time stars around the zenith as the best.

In the selection of the star programs of the *Schweizerische Geodätische Kommission*, world-known on account of their operations, the ruling principle inclusively until 1933 was the algebraic sum of the azimuth factors K of the stars should approach zero:

$$[K] \cong 0, \quad (6)$$

i.e., taking the weights p into consideration,

$$[pK] \cong 0. \quad (7)$$

By the way, these principles prevail, since decades in other foreign countries [7] and in Hungary, too.

The real weights of the "individual" clock correction values

$$l_1 = (a_1 - U_1); l_2 = (a_2 - U_2); \dots l_n = (a_n - U_n) \quad (8)$$

as fictitious observations obtainable on the base of the meridian time transits $U_1, U_2, \dots U_n$ and of the apparent right ascensions $a_1, a_2, \dots a_n$ of the observed stars can be well approximated by the weight expressions [8]

$$p_1 = \cos^2 \delta_1; p_2 = \cos^2 \delta_2; \dots p_n = \cos^2 \delta_n. \quad (9)$$

The "azimuth factors" $K_1, K_2 \dots K_n$, on the other hand, figuring in (6) and (7) as factors depending from the geographical latitude of the station and from the declinations $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ of the stars in question will be met within (15) and (16).

In 1934, Th. NIETHAMMER made known, at the session of the *Swiss Geodetic Commission*, his new star program which was accepted by the Commission [9]. In their time determinations from 1934 until 1946 inclusively, the program of NIETHAMMER was used. Although this program requires circumpolar stars for the ensuring of the azimuth as before, because of the mean value of the zenith distances of the time stars, however, a positive (south) value of $+5^\circ \sim +10^\circ$, instead of zero, is held as decisive. If the average zenith distance z_p of n_p number of circumpolar stars are treated as constant, then, according to NIETHAMMER the minimal mean error of the clock correction will

appear at the mean zenith distance z_i of the time star group of n_i members as follows:

$$\tan z_i = - \frac{n_p \tan z_p}{n_i + (n_i + n_p) \tan^2 z_p} \quad (10)$$

Consequently, on the mean latitude of 47° of Switzerland, the selection of the time stars can be made up to -8° to the north and $+22^\circ$ to the south of the zenith.

After NIETHAMMER's death in 1947, however, this principle (10) was immediately given up. Beginning from 1947, no circumpolar stars were observed and the selection of time stars was again made taking into consideration the $[pK] \cong 0$ principle in the zenith distance sector $-20^\circ < z < +20^\circ$. During the 1948 session of the Commission, M. SCHÜRER drew the attention to the correctness of the principle $[z] = 0$, which will be taken up again later.

*

The differences in the opinion, outlined here are not really surprising, considering that a group of 12 . . . 20 stars may be set up, for the same station, in several different ways and still meeting the reliability requirements.

It is known that with an increase of the zenith distance the lateral refraction increases, too. Consequently, for tasks requiring a high degree of exactness, no time stars of zenith angles exceeding $10 \div 15^\circ$ are readily selected. Circumpolar stars of much larger zenith distances are given a role preferably only in the checking of the azimuth constant and, to a lesser measure, in the forming of the clock correction. The stars selected should pass the meridian at intervals not less than 3 . . . 5 minutes in order to provide sufficient time for the accomplishment of the different phases of work. On the other hand, the observation of the entire program should not last too long, with regard to the occurrence of systematic error possibilities. Even the brightness of the stars is not indifferent: too bright and too weak stars equally diminish the outlooks of optimum results.

*

The rate of the observation clock used at the station is generally a finite value differing from zero. Consequently, the clock correction sought for is, in itself, similarly a function of time. If the mean value E of the meridian transit time instants U of the observed time stars are accepted as a reference instant in the form

$$E = \frac{[U_i]}{n}, \quad \text{resp.} \quad E = \frac{[pU_i]}{[p]} \quad (11)$$

as is usual here, it is advisable to denote the clock correction valid for the "mean epoch" E , thus obtained, by ΔE .

As has already been written in study [2] in formula (20), clock correction ΔE and azimuth constant k can be obtained as a result of an exact adjustment computation from the following two normal equations:

$$\begin{aligned} [pKK]k + [pK]\Delta E - [pKl] &= 0, \\ [pK]k + [p]\Delta E - [pl] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Consequently, the weights of ΔE and k can be calculated from the expressions

$$p_{\Delta E} = [p] - \frac{[pK]^2}{[pKK]}, \quad (13)$$

$$p_k = [pKK] - \frac{[pK]^2}{[p]}. \quad (14)$$

Next, the basic problem will be, by which star program will these two weight expressions attain their optimum, i.e. their maximum value. It must be kept in view that groups of $10 \div 20$ stars are in question, meaning that the extreme values of such (13) and (14) functions are sought which contain $10 \div 20$ independent variables.

It is evident that such complicated problems are mere idealizations, that is, they can be elucidated only by approximations and neglects. According to the assumed fundamentals, further to the character, mode and degree of idealization, more or less different results and at the same time different conclusions are possible. This is the reason for the differences of opinion in this question. The idealizations were already referred to in the investigations of NÖRLUND, AURELL and NIETHAMMER, who operated with the average declinations of two star groups.

The examination of the weight expressions (13) and (14) cautions to reach, in the interests of maximal weights, the greatest possible $[p]$ and $[pKK]$ and the smallest possible $[pK]$. Hence, the criterion $[pK] \cong 0$ of the optimal star program in (7), simplifying, in the special case of equal $p = 1$ observation weights, into $[K] \cong 0$ as in (6). According to the formulas

$$K_f = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} = \frac{\sin z}{\cos \delta} \quad (\text{valid in upper culmination}) \quad (15)$$

and

$$K_a = \frac{\sin(180^\circ - \varphi - \delta)}{\cos \delta} = + \frac{\sin z}{\cos \delta} \quad (\text{valid in lower culmination}) \quad (16)$$

of the azimuth factors, in case of a star group in the zenith, i.e. characterized by $z = 0$, the volume of k is indifferent from the point of view of the clock correction value.

According to the formula (37) in [2], namely, the value of clock correction ΔE is influenced by azimuth constant k as follows from the relation

$$\Delta E = \frac{[pl]}{[p]} - k \frac{[pK]}{[p]} \quad (17)$$

The fictitious observations l were already met within (8).

The main point is, however, not to eliminate entirely the influence of the azimuth constant on the clock correction, — in fact attained, by placing the center of gravity of the time star group in the zenith, — but to keep the influence of the uncertainty of the azimuth on the clock correction as small as possible. This latter question is closely related to the selection of the star program.

*

Let us now pass on to the examination of the case of the optimal star program in merit.

It is evident from the weight expression $p = \cos^2 \delta$ in (9) that every member of the weight expressions (13) and (14) depends on the declination of the stars.

In the selection of stars, however, it is advisable to keep their zenith distances instead of the declinations, in view, since, with regard to refraction anomalies, certain limits are set in this respect. For this reason it seems to be advisable, when seeking the criteria of the optimal star program, to transform weight expressions (13) and (14) of the adjusted clock correction and azimuth, in the sense that not the declinations but the zenith distances should figure in them as independent variables. This is easily attained, since the relations

$$\delta + z = \varphi \quad \text{in upper culmination,} \quad (18)$$

$$\delta + z = 180^\circ - \varphi \quad \text{in lower culmination,} \quad (19)$$

are valid for the meridian distance of any star. Here, φ means the geographical latitude of the station.

For any star group observed in upper culmination, therefore, the sum of the observation weights in (9) is:

$$\begin{aligned} [p] &= [\cos^2 \delta] = [\cos^2(\varphi - z)] = [\cos \varphi \cdot \cos z + \sin \varphi \cdot \sin z]^2 = \\ &= \cos^2 \varphi [\cos^2 z] + 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] + \sin^2 \varphi [\sin^2 z]. \end{aligned} \quad (20)$$

Similarly, the azimuth factor of any star observed in upper culmination, according to (15):

$$K = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} = \frac{\sin z}{\cos \delta} \quad (21)$$

And if weighted:

$$pK = \cos^2 \delta \frac{\sin z}{\cos \delta} = \cos \delta \cdot \sin z,$$

$$pK = \cos(\varphi - z) \cdot \sin z = (\cos \varphi \cdot \cos z + \sin \varphi \cdot \sin z) \sin z.$$

The algebraic sum of the weighted azimuth factors of the upper culmination star group will then be:

$$[pk] = \cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] + \sin \varphi [\sin^2 z]. \quad (22)$$

Its square:

$$[pK]^2 = \cos^2 \varphi [\sin z \cdot \cos z]^2 + 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] [\sin^2 z] + \sin^2 \varphi [\sin^2 z]^2. \quad (23)$$

Consistently, however, the square sum $[pkk]$ has also to be expressed as a function of zenith distances. The square of any weighted K value will take the form

$$pK^2 = \cos^2 \delta \frac{\sin^2 z}{\cos^2 \delta} = \sin^2 z.$$

Consequently, their sum is simply

$$[pKK] = [\sin^2 z]. \quad (24)$$

If now the values (20), (23) and (24) are substituted into the relation of the clock correction as written in (13),

$$p_{AE} = [p] - \frac{[pK]^2}{[pKK]},$$

then, on account of their opposite signs, the members

$$2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] [\sin^2 z], \quad \text{on the one hand,} \quad (25)$$

$$\sin^2 \varphi [\sin^2 z]^2, \quad \text{on the other hand,} \quad (26)$$

will be reduced so that the weight expression (13) of the clock correction becomes simplified into the following form:

$$p_{AE} = \cos^2 \varphi \left([\cos^2 z] - \frac{[\sin z \cdot \cos z]^2}{[\sin^2 z]} \right), \quad (27)$$

or,

$$p_{AE} = \cos^2 \varphi \left([\cos^2 z] - \frac{1}{4} \frac{[\sin 2z]^2}{[\sin^2 z]} \right). \quad (28)$$

Since, in case of n number of stars,

$$\cos^2 z_1 + \sin^2 z_1 = 1; \cos^2 z_2 + \sin^2 z_2 = 1; \cos^2 z_n + \sin^2 z_n = 1,$$

their sum is evidently

$$[\cos^2 z] + [\sin^2 z] = n,$$

respectively

$$[\cos^2 z] = n - [\sin^2 z], \quad (29)$$

consequently, weight expression (27) can also be written:

$$p_{AE} = \cos^2 \varphi \left\{ n - [\sin^2 z] - \frac{[\sin z \cdot \cos z]^2}{[\sin^2 z]} \right\}. \quad (30)$$

In the investigation of the criteria of the optimal program, this last relation (30) can suitably be taken as a base.

Until now, however, exclusively stars observed in upper culmination have been assumed in the set-out. In case of a lower culmination star group, the derivation is modified as much as the declination must be eliminated, according to (19), by the substitution

$$\delta = 180^\circ - (\varphi + z).$$

The sum of the observation weights is then

$$[p] = [\cos^2 \delta] = [\cos^2 \{180^\circ - (\varphi + z)\}] = [\{-\cos(\varphi + z)\}^2], \quad (31)$$

$$[p] = \cos^2 \varphi [\cos^2 z] - 2 \sin \varphi \cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] + \sin^2 \varphi [\sin^2 z].$$

For a star observed in lower culmination, the value of the azimuth factor is, according to (16):

$$K = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos \delta} = \frac{+\sin z}{\cos \delta}. \quad (32)$$

Weighted,

$$pK = \cos^2 \delta \frac{\sin z}{\cos \delta} = \cos \delta \cdot \sin z,$$

$$pK = \cos \{180^\circ - (\varphi + z)\} \sin z = -\cos(\varphi + z) \sin z,$$

$$pK = - \{ (\cos \varphi \cdot \cos z - \sin \varphi \cdot \sin z) \sin z \}.$$

The sum of the members:

$$[pK] = -\cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] + \sin \varphi [\sin^2 z]. \quad (33)$$

The square of the sum:

$$[pK]^2 = \cos^2 \varphi [\sin z \cdot \cos z]^2 - 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] [\sin^2 z] + \sin^2 \varphi [\sin^2 z]. \quad (34)$$

And so (24) evidently remains unchanged. If now the derivations for the upper, resp. for the lower culmination star group are compared, it appears that only the sign of the right side second members, partly in the $[p]$, partly in the $[pK]^2$ expressions, have changed in the two different culminations.

In this way, the members (25) and (26) will again be shortened after substitution into the expression (13); consequently, in case of a star group observed in lower culmination, the weight formula of the clock correction as written in (27) will remain valid, i.e.:

$$p_{AE} = \cos^2 \varphi \left([\cos^2 z] - \frac{[\sin z \cdot \cos z]^2}{[\sin^2 z]} \right),$$

which is, as has already been seen, more illustrative in the form (30).

Let us examine the value of this expression in the following extreme cases of merely theoretical value:

a) All stars were observed in the same zenith distance, that is

$$z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n = z.$$

In this case,

$$\frac{[\sin z \cdot \cos z]^2}{[\sin^2 z]} = \frac{n^2 \sin^2 z \cdot \cos^2 z}{n \sin^2 z} = n \cdot \cos^2 z,$$

consequently $p_{AE} = \cos^2 \varphi (n - n \sin^2 z - n \cos^2 z) = \cos^2 \varphi (n - n) = 0$.

The star group observed at the same zenith distance different from zero furnishes zero weight, i.e. an infinitely large mean error for the clock correction. Hence, this program cannot be applied for time determination, just as the resection in plane or the intersection could not be solved if the locating points, continuously approaching each other, finally coincided.

b) A special case of the previous fictitious program would be, when the meridian-zenith distance of all stars were zero, i.e. the observed stars culminated in the zenith of the station. In this case,

$$[\sin z \cdot \cos z] = \frac{1}{2} [\sin 2z] = 0 \quad \text{and} \quad [\sin^2 z] = 0,$$

i.e.

$$p_{\Delta E} = \cos^2 \varphi \left(n - 0 - \frac{0}{0} \right),$$

for the weight of the clock correction, an indeterminate value would be obtained, corresponding to the critical circle of plane resection.

c) Since, accordingly, the $[\sin^2 z]$ member of the weight formula, in order to avoid an indeterminate weight for ΔE has always to be greater than zero.

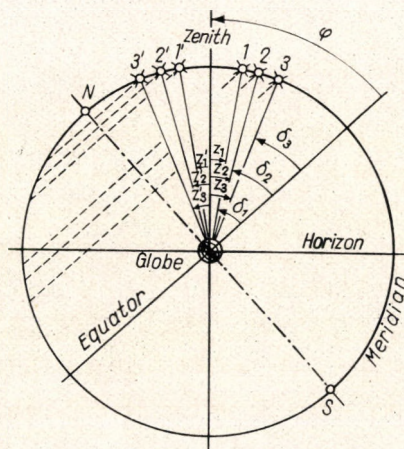


Fig. 1

It follows, then, on the other hand, that the weight of the clock correction can never in fact reach the value $n \cos^2 \varphi$, but can be only smaller. It is possible, then, to write that in practice

$$p_{\Delta E} < n \cdot \cos^2 \varphi.$$

d) The stars of the program lie entirely symmetrically to the zenith of the station, in the sense that to the positive meridian-zenith distance of each star a negative zenith distance of the same absolute order of magnitude belongs. That is, $|z_1| = |z'_1|$, $|z_2| = |z'_2|$, $|z_3| = |z'_3|$, according to Fig. 1. In consequence, formula (30) simplifies into

$$p_{\Delta E} = \cos^2 \varphi (n - [\sin^2 z]). \quad (35)$$

Comparing (30) with (35), the criteria for the star program yielding the optimal clock correction can be determined:

1. The selected stars should possibly lie symmetrically around the zenith so that the value of the $[\sin z \cdot \cos z]$ member, diminishing the weight of the clock correction, should approach zero as near as possible.

2. The sum $[\sin^2 z]$ of the zenith distances of the stars should be considerably less than the n number of the stars, for otherwise $[\sin^2 z]$ as the subtrahend second member of the expression in brackets would appreciably diminish the weight of the clock correction. On the other hand, it must be, at the same time, considerably larger than the sum $[\sin z \cdot \cos z]$, in order to keep also the third member of the weight expression to be subtracted, as small as possible. These requirements can be summed up in symbols in this way:

$$\begin{aligned} [\sin z \cdot \cos z] &\rightarrow 0 \\ n &\gg [\sin^2 z] \gg \sin z \cdot \cos z. \end{aligned} \quad (36)$$

It also appears from (30) that the maximal value of the clock correction, at a given geographical latitude and at a fixed number of stars, can only approach $n \cos^2 \varphi$, but can never in practice reach it, i.e.:

$$p_{\Delta E} < n \cos^2 \varphi. \quad (37)$$

Because, even if it were possible (in practice, of course, this cannot be realized), no star program would be allowed to be set up where $[\sin^2 z] = 0$, since in this case, although one of the subtrahend members of (30) would become zero, the other member to be subtracted $[\sin 2z]$ would make at 0 the whole weight expression $p_{\Delta E}$ indeterminate. On the other hand, the requirement

$$[\sin^2 z] \gg 0,$$

according to what follows, is absolutely necessary, also in order to ensure the proper weight of the azimuth constant.

*

In the special case of a program of exclusively time stars, formula (30) can be brought to a particularly simple practical form, if, in consideration of the lateral refraction, only zenith distances smaller than $12 \dots 14^\circ$ are allowed. Since, at $z = 14^\circ$, $\sin 14^\circ = 0.242$, $z = (14 : 57.3) = 0.244$ and $\cos 14^\circ = 0.97$. Accepting the approximations

$$\sin z \approx z \text{ and } \cos z \approx 1,$$

a maximal error of 0.7% in $\sin z$ and 3% in $\cos z$ were allowed. That is, the relation (30) can be written approximately as follows:

$$p_{\Delta E} \approx \cos^2 \varphi \left(n - [zz] - \frac{[z]^2}{[zz]} \right). \quad (38)$$

Consequently, if care is taken to keep $[z] \rightarrow 0$ in the selection of the program, the last member of (38) will approach zero, and in this case

$$p_{\Delta E} \approx \cos^2 \varphi (n - [zz]). \quad (39)$$

In the last two expressions, each z has to be given in radians. Any zenith distance z expressed in grades must be still divided by $\varrho = 57.2958$, any square sum $[zz]^\circ$, by $\varrho^2 = 3282.81$, that is

$$p_{\Delta E} \approx \cos^2 \varphi \left(n - \frac{[zz]^\circ}{3282.81} \right). \quad (39a)$$

Accordingly, at the suggestion of the author who was at that time the collaborator of the astrogeodetic group of the *Hungarian State Geodetical Survey* already in 1943, selected the star groups of the Laplace stations, as regards the time stars, basing on the approximative practical criteria:

$$[z]_i \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad z_i < \pm 14^\circ, \quad (40)$$

observing additionally, however, 2...4 circumpolar stars in the interests of the azimuth, within each time determination of the evening program. Latter, however, played no immediate part in the forming of the clock correction. The principle $[z]_i \rightarrow 0$ of "zenith balance", moreover, is in accordance with the statements of SCHÜRER [10] made in 1948.

*

The star program of the numerical example used in the following discussion is built on the approximation criteria $[z]_i \rightarrow 0$ and $z_i < \pm 14^\circ$. In the fourth column of Table II, the zenith distances of the 11 time stars observed are grouped. Their sum, as visible, is only $[z] = -0^\circ 17'$, i.e. it almost ideally approximates the criterion of zenith balance. The individual sum members of the weight formula (30)

$$p_{\Delta E} = \cos^2 \varphi \left(n - [\sin^2 z] - \frac{[\sin z \cdot \cos z]^2}{[\sin^2 z]} \right) = \cos^2 \varphi \cdot \Sigma$$

were numerically formed. These correspond with the requirements

$$\begin{aligned} [\sin z \cdot \cos z] &\rightarrow 0 \\ n &\gg [\sin^2 z] \gg [\sin z \cdot \cos z] \end{aligned}$$

made in (36), to a considerable measure. Namely, according to Table II,

$$[\sin^2 z] = +0.23170 \ll 11$$

$$[\sin z \cdot \cos z] = -0.0088 \ll 0.2317,$$

i.e.

$$[\sin z \cdot \cos z]^2 = +0.00007744,$$

and

$$\frac{[\sin z \cdot \cos z]^2}{[\sin^2 z]} = +0.00035.$$

From weight formula (30), with these,

$$p_{\Delta E} = 0.473833 (11 - 0.23170 - 0.00035) = 5.10223,$$

necessarily agreeing also with the numerical value of the identical weight relation written in (13),

$$p_{\Delta E} = [p] - \frac{[pK]^2}{[PKK]}.$$

Table I

The common group of circumpolar stars of both programs
 $\varphi = 46^\circ 30'$

Serial number	$\sin^2 z$	$\sin z$	z	$\cos z$	$\sin z \cdot \cos z$
300 <i>l</i> *	0.74184	-0.8613	$-59^\circ 28'$	+0.5080	-0.43754
770 <i>u</i> *	0.22477	-0.4741	$-28^\circ 18'$	+0.8805	-0.41745
372 <i>l</i>	0.75620	-0.8696	$-60^\circ 25'$	+0.4937	-0.42932
851 <i>u</i>	0.20494	-0.4527	$-26^\circ 55'$	+0.8917	-0.40367
	1.92775				-1.68798

* *l* = lower culmination; *u* = upper culmination.

Of course the criterion $[z] \rightarrow 0$, does not concern the circumpolar stars used in practice up till now but for the formation of the azimuth constant. Their part, in a geodetical sense, could be compared not with the role of the determinative directions of the new point, but with that of its long-extension orientation directions.

*

Therefore, now let us pass on to the transformation of the azimuth constant formula (14)

$$p_k = [pKK] - \frac{[pK]^2}{[p]}$$

in such a way that it should appear not as a function of the declinations but as that of the zenith distances. Since, on the one hand, the azimuth as compared with the clock correction plays only a secondary role and, on the other hand, the concerning exact expressions are less illustrative than those of the clock correction, such time stars of smaller zenith distances are also assumed here, at which the approximations

$$\sin z \approx z \text{ and } \cos z \approx 1$$

are still permissible. Therefore, instead of the strict relations (20), (23) and (24), their simplified forms

$$[p] \approx n \cos^2 \varphi + 2 [z] \sin \varphi \cdot \cos \varphi + [zz] \sin^2 \varphi, \quad (20')$$

$$[pK] \approx [z] \cos \varphi + [zz] \sin \varphi, \quad (23')$$

$$[pKK] \approx [zz] \quad (24')$$

will be substituted into the above-mentioned relation of p_k . In this case, the members

$$2 [z] [zz] \sin \varphi \cdot \cos \varphi \text{ and } [zz]^2 \sin^2 \varphi, \quad (41)$$

occurring twice, but with opposite signs, will be reduced, giving the following expression, according to (14), for the azimuth weight as for a function of zenith distances:

$$p'_k = \frac{(n [zz] - [z]^2) \cos^2 \varphi}{n \cos^2 \varphi \pm 2 [z] \sin \varphi \cdot \cos \varphi + [zz] \sin^2 \varphi}, \quad (42)$$

or after division by $\cos^2 \varphi$:

$$p'_k = \frac{n [zz] - [z]^2}{n \pm 2 [z] \tan \varphi + [zz] \tan^2 \varphi}. \quad (43)$$

If the star program meets the practical criterion $[z] \rightarrow 0$, contained in (40), the much more illustrative form would be:

$$p'_k = \frac{[zz]}{1 + \frac{[zz] \tan^2 \varphi}{n}}. \quad (44)$$

Since, at Middle-European latitudes and under the assumption of $n > 10$ for the number n of the stars, the second member of the denominator will be considerably smaller than $[zz]$, it follows that, opposite to the requirements of the clock correction, the largest possible $[zz]$, i.e. stars of large zenith distances should be aimed at in the selection of the program, in order to obtain a large weight for the azimuth constant. It was customary, in the mentioned Hungarian operations, to meet the opposed requirements by including besides the small zenith distance time stars, also some circumpolar stars in the program. The latter, however, in defence against refraction anomalies, are not necessarily given a part in the determination of the clock correction. In case of exact adjustment by means of all stars, still the weighting $\cos^2 \delta$ must be used in defense against an overestimation of the significance of circumpolar stars.

*

General points of view followed in the investigations

In the pertinent literature, the earlier investigations concerning star programs took, as has already been mentioned, idealized, simplified programs for base, generally partly substituting the group of time stars, partly the group of circumpolar stars by a fictitious star each. Opposite to this, the author wishes now to depart from programs actually observed and used for time determinations.

Let us consider the well-known weight formulas of exact adjustment with two unknowns,

$$p_{\Delta E} = [\cos^2 \delta] - \frac{[\cos \delta \cdot \sin(\varphi - \delta)]^2}{[\sin^2(\varphi - \delta)]}, \quad (45)$$

$$p_k = [\sin^2(\varphi - \delta)] - \frac{[\cos \delta \cdot \sin(\varphi - \delta)]^2}{[\cos^2 \delta]}, \quad (46)$$

written in (13) and (14), valid for upper culminations. According to (18), $\varphi - \delta = z$. In case of lower culmination, on the other hand, according to (19), $z = 180^\circ - (\varphi + \delta)$ is valid.

Now if, on a given station, i.e. on a given geographical latitude φ , n number of independent variables $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ were assumed according to the n number of observed stars, the extreme values of the multivariable functions $p_{\Delta E}$ and p_k should be sought for. That is, one would be compelled to have recourse to idealizations again.

Instead of this, a course will be taken to maintain the star program fixed for a certain station according to certain basic principles without change, but the geographical latitude φ in formulas (45) and (46) will be changed, as if the station point were shifted, passing to N and S along the meridian, to different places, leaving the program unchanged.

Following such a method, on the other hand, this investigation must be extended to a larger number of star groups for selecting an optimal program. Here, however, besides avoiding prolixity, the sole aim can be an elucidation of the train of thought, being contented, therefore, with altogether six alternatives of two characteristic programs. This may be done all the more, since even the weight function (30) itself gives basic support concerning the requirements of the program.

*

Both programs to be studied include a group of 11 time stars and the same 4-member group of circumpolar stars in both cases. In the frame of each program, three different alternatives present themselves, namely by taking the observed time transits 1. of all, i.e. 15 stars, 2. only of the 11 time stars, 3. only of the 4 circumpolar stars.

The programs and the function weights $p_{\Delta E}$ and p_k , obtained through the former, will be studied on tables and figures. The necessary data of the 4 circumpolar stars forming the common part of both programs can be found in Table I. In the full program containing the time stars and the circumpolar stars, the order of the individual stars is evidently determined by their right ascensions. Accordingly, their sequence corresponding to their serial number in the Yearbook, is: 740, 300 P, 758, 1535, 770 P, 782, 807, 1568, 813, 821, 372 P, 835, 844, 851 P, 858 (in case of the program discussed first).

*Investigation of the principle $[z] \rightarrow 0$ of the zenith balance
Weight curves of the clock correction*

The group of time stars in Table II, as can be seen, approaches the approximation principle of zenith balance to $z = -0^\circ 17'$, i.e. as written in (40). The computation of the weights $p_{\Delta E}$ and p_k of both the clock correction and the azimuth constant is illustrated, for this case, on a latitude of $46^\circ 30'$ of the station, by Table II itself, while the variations of these same function weights in the function of the geographical latitude are shown partly by the left a) part of the comparative Table III, partly separately by Fig. 2.

Now the three curves of the clock correction weight in Fig. 2. are taken one by one, each of their ordinates having been computed according to formulas (13), resp. (45) in such a way that the geographical latitude φ is substituted, treating the declinations δ of the selected stars as constant values, by values ranging from zero to 90° .

1. The weight curve ΔE_{15} of the all-star program containing 15 stars appears as a thick full line in the figure. The ordinate of the curve obtained on the basis of the observation weights $\cos^2 \delta$, corresponding to $\varphi = 0$ in the Equator, is $p_{\Delta E} = 2.610$. Gradually climbing from this point, the curve finally culminates with $p_{\Delta E} = 5.5242$ at the station $\varphi = 44^\circ$, while the weight

Table II

Computation of the weight of ΔE and k
 $\varphi = 46^\circ 30'$; $\cos \varphi = 0.688355$; $\cos^2 \varphi = 0.473833$
 a) Zenith balance program : $[z] \rightarrow 0$.

Serial number of time star	$\sin^2 z$ +	$\sin z$	z	$\cos z$ +	$\sin z \cdot \cos z$	
					-	+
740	0.02592	+0.1610	+ 9°16'	0.9870		0.1589
758	2965	- 1722	- 9°55'	9851	0.1696	
1535	3147	+ 1774	+10°13'	9841		0.1746
782	3576	- 1891	-10°54'	9820	0.1857	
807	1	+ 32	+ 0°11'	1.0000		32
1568	39	+ 198	+ 1°08'	0.9998		198
813	3489	- 1868	-10°46'	9824	0.1835	
821	203	- 451	- 2°35'	9990	451	
835	5504	+ 2346	+13°34'	9721		2281
844	914	- 956	- 5°29'	9954	952	
858	740	+ 860	+ 4°56'	9963		857
			+39°19' -39°36'			
	+0.23170		$[z] = - 0^\circ 17'$		$\sin z \cdot \cos z = -0.0088$	
					$[\sin z \cdot \cos z]^2 = +0.000\ 077\ 44$	
					-0.6791	$+0.6703$

The formation of the clock correction according to formula (30):

n	=	11.00000	
$-[\sin^2 z]$	=	- 0.23170	
$-\frac{[\sin z \cos z]^2}{[\sin^2 z]}$	=	- 0.00035	
Σ	=	10.76795	
			$P_{\Delta E} = \cos^2 \varphi \cdot \Sigma$
			$= \cos^2 \varphi \cdot 10.767\ 95$
			$= 5.102\ 23$

Formation of the azimuth weight

$$P_k \cong \frac{[zz]}{1 + \frac{[zz]}{n} \tan^2 \varphi} = \frac{0.234\ 494}{1.023\ 673} = 0.2291 \quad \text{by the approximating formula (44)}$$

$$P_k = [pKK] - \frac{[pK]^2}{[p]} = 0.2267 \quad \text{by the strict formula (14)}$$

Table III

Weights of clock correction ΔE and azimuth constant k in the function of geographical latitude φ , according to Formulas (45) and (46)

a) Zenith balance time star program: $[z] \rightarrow 0$ (Fig. 2)							b) azimuth balance time star program: $[pK] \rightarrow 0$ (Fig. 3)						
All stars		11 time stars only		4 polar stars only		Geographical latitude φ	All stars		11 time stars only		4 polar stars only		
$[p] = 5.526$		$[p] = 5.215$		$[p] = 0.311$			$[p] = 5.244$		$[p] = 4.933$		$[p] = 0.311$		
$P_{\Delta E}$	P_k	$P_{\Delta E}$	P_k	$P_{\Delta E}$	P_k		$P_{\Delta E}$	P_k	$P_{\Delta E}$	P_k	$P_{\Delta E}$	P_k	
2.6100	4.4747	0.4170	0.4625	0.3110	3.6890		0°	2.4644	4.5844	0.4416	0.5429		
3.9233	3.9391	0.9629	0.4180	0.3066	3.2380	20.5°	3.6325	4.0120	0.9114	0.4632			
4.3759	3.6279	1.3135	0.3853			26°	4.0667	3.7166	1.2737	0.4505			
4.7203	3.3689	1.7189	0.3581	0.3013	2.7689	30°	4.3795	3.4462	1.6282	0.4188			
5.3399	2.7915	3.3357	0.2974			38°	4.9927	2.8598	2.9587	0.3478			
5.5242	2.3256	5.1124	0.2477			44°	5.2401	2.3826	4.5998	0.2898			
5.5089	2.2472	5.2107	0.2391			45°	5.2436	2.3023	4.7982	0.2798			
5.4528	2.1291	5.1022	0.2267			46.5°	5.2205	2.1768	4.9336	0.2662			
5.1542	1.8568	3.8188	0.1978	0.2758	1.5258	50°	5.0145	1.9023	4.2465	0.2313			
3.1503	1.1227	0.7764	0.1195	0.2459	0.9226	60°	3.2248	1.1500	0.9795	0.1397			
1.4286	0.6297	0.2084	0.0656	0.2030	0.5190	68°	1.4927	0.6453	0.2586	0.0772			
0.1872	0.1309	0.0146	0.0097	0.0830	0.1115	80°	0.1949	0.1344	0.0189	0.0123			

as at $[z] \rightarrow 0$

as at $[z] \rightarrow 0$

Table IV

Calculation of the weight of ΔE and k
 $\varphi = 46^\circ 30'$; $\cos \varphi = 0.688\ 355$; $\cos^2 \varphi = 0.473\ 833$
 b) Azimuth balance program : $[pK] \rightarrow 0$.

Serial number of time star	$\sin^2 z$ +	$\sin z$	z	$\cos z$	$\sin z \cdot \cos z$	
					-	+
740	0.02592	+0.1610	+ 9°16'	0.9870		0.1589
758	2965	- 1722	- 9°55'	9851	0.1696	
1535	3147	+ 1774	+10°13'	9841		1746
782	3576	- 1891	-10°54'	9820	1857	
807	1	+ 32	+ 0°11'	1.0000		32
1568	39	+ 198	+ 1°08'	0.9998		198
813	3489	- 1868	-10°46'	9824	1835	
821	203	- 451	- 2°35'	9990	451	
835	5504	+ 2346	+13°34'	9721		2281
844	914	- 956	- 5°29'	9954	952	
847	4088	- 2022	-11°40'	9793	1980	
	0.26518		+34°22'		0.8771	0.5846
			-51°19'		$[\sin z \cos z] = -0.2925$	
			$[z] = -16^\circ 57'$		$[\sin z \cos z]^2 = +0.085\ 556$	

Formation of the weight of the clock correction according to formula (30).

n	=	11.00000	
$-\sin^2 z$	=	-0.26518	$p_{\Delta E} = \cos^2 \varphi \cdot \Sigma$
$\frac{-[\sin z \cos z]^2}{[\sin^2 z]}$	=	-0.32263	$= \cos^2 \varphi \cdot 10.412\ 19$
			$= 4.933\ 64$
Σ	=	10.41219	

Formation of the azimuth weight:

$$p_k \cong \frac{[zz]^\circ}{\varrho^2} = \frac{871.802}{3282.81} = 0.2656 \quad \text{by the approximative formula (64')}$$

$$p_k = [pKK] - \frac{[pK]^2}{[p]} = 0.2662 \quad \text{by the strict formula (14)}$$

ordinate at $\varphi = 46^\circ 30'$ will be only $p_{\Delta E} = 5.4528$. At still higher latitudes, the ΔE weight furnished by our program rapidly sinks, while this and any other program of meridian time transits are unusable at the North Pole, since they yield zero weight, i.e. an indefinitely large mean error for the clock correction. Relation (45), namely, when substituting $\varphi = 90^\circ$, takes the form

$$p_{\Delta E} = [\cos^2 \delta] - \frac{[\cos \delta \cdot \sin(90^\circ - \delta)]^2}{[\sin^2(90^\circ - \delta)]} = [\cos^2 \delta] - \frac{[\cos^2 \delta]^2}{[\cos^2 \delta]} = 0. \quad (47)$$

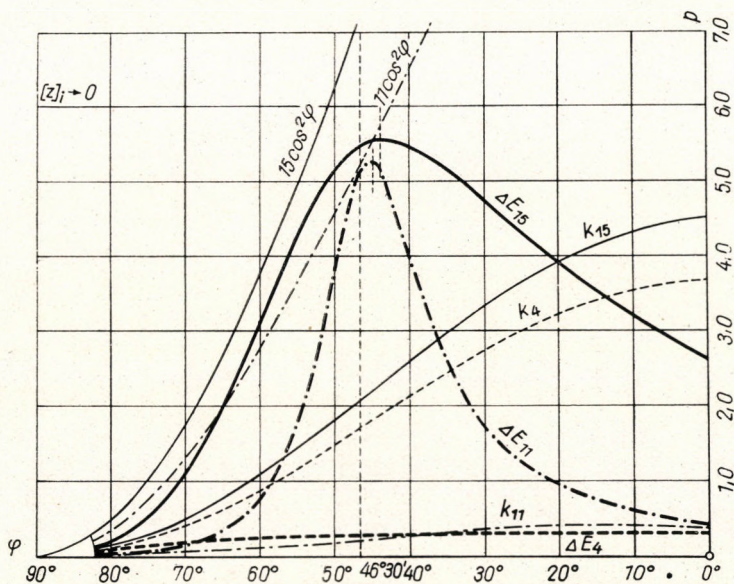


Fig. 2

2. The weight curve of the program of time stars exclusively (11 stars), denoted by ΔE_{11} , is represented by a thick dash-and-dot line in Fig. 2. A program selected for the approximation condition $[z] \rightarrow 0$ with validity on the latitude $\varphi = 46^\circ 30'$ and not for the strict condition (36) would furnish, by substitution of $\varphi = 0$, an unusually small ΔE weight in comparison to the corresponding curve of program 1, i.e. 0.4170 according to Table IIIa. With an increasing φ , however, the usability of the program rapidly grows, reaching its optimum at $\varphi = 45^\circ 00'$ that is: $p_{\Delta E} = 5.2107$. On the station where this program was actually employed, the weight is somewhat smaller, since at $\varphi = 46^\circ 30'$, $p_{\Delta E} = 5.1022$ is shown by the table. A remarkable feature is the sharp peak of the curve at $\varphi = 45^\circ$. From there, the value of this program with surprising rapidity deteriorates with increasing latitudes. Around $\varphi = 64^\circ$, it would yield about the same value as on the Equator: 0.4019, while at 80° it gives a weight of 0.0146 only for the clock correction.

An inspection of Fig. 2 makes the weight law ΔE , furnished by the all-star program, appear more advantageous, it may be said more "quiet" in comparison to that of the group of mere time stars. The larger ΔE -weight (5.5089) on the latitude around $\varphi = 45^\circ$, — where the curves ΔE_{15} and ΔE_{11} reach their culminations, — furnished by the 15 stars, as compared with the weight given by the 11 time stars (5.2107) is natural in itself. A striking difference is shown, however, at other latitudes. While, for example, at $\varphi = 20^\circ 30'$, the time star group gives a ΔE weight of only 0.9629, the full star program yields 3.9233, i.e. a fourfold weight at the same place according to Table IIIa.

The comparison of the two ΔE curves proves that the all-star program is less sensitive to the variations of geographical latitude. Indirectly, this also means that the clock correction weight of mere time stars is more strongly influenced by the loss of one of the star transits than the weights furnished by the combined program are.

In practice, however, all this is not disquieting because one is not bound to the program examined here, but there is a way, on a station of any latitude, to select the star program according to the approximation criterion $[z] \rightarrow 0$ of zenith balance, with culmination of the weight curve ΔE at least in the neighbourhood of the geographical point in question. The weight ordinate of the culmination locality, on the other hand, can be increased more efficiently — according to observation weights of the form $\cos^2 \delta$ — by an augmentation of the number of smaller declination time stars than by that of large declination circumpolar stars.

The decisive role of circumpolar stars as to the reliability of the azimuth constant has already been sufficiently emphasized. Now from Fig. 2 it is visible that even their advantageous influence on the clock correction cannot be underestimated formula-like. Another question is, in what measure do the refraction anomalies, not expressed in the formula, actually spoil the surplus weight provided by the circumpolar stars, here appearing numerically. Sultry days, followed by cloudless and calm summer nights, ensuring an unimpeded observation, are much more disquieting from the point of view of refraction anomalies than the somewhat cloudy and breezy periods.

Let it be remarked here that the branches of the diagrams, between $\varphi = 0^\circ$ and $\varphi = +17^\circ$, related with circumpolar stars, are, in part, of fictitious character only, since the lower culminations of the polar stars 300 and 272 could not be seen from a station at a latitude lower than $(90^\circ - \delta)$. The precondition of the circumpolar character of any star is, namely:

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi, \quad \text{resp.} \quad \varphi \geq 90^\circ - \delta. \quad (48)$$

3. The clock correction curve ΔE_4 of the program of exclusively circumpolar stars (4 stars) is a thick dotted line. Of course, this curve has a principle

characteristic only, because the solution of merely polar stars would yield, according to the table and the diagram, obviously small weights; consequently extremely high mean errors for the adjusted clock correction. The curve flattens, so to say, into a slightly sloping straight line, without any protrusion, hardly sensitive to the variations of geographical latitude. It is interesting that the four circumpolar stars give a weight (0.3110), on a station on the Equator, not much smaller than the 11 time stars (0.4170).

The $n \cos^2 \varphi$ -curves of the maximal clock correction weight

When analysing the weight formula (30), it was found that the maximal value of the clock correction weight in principle is $n \cos^2 \varphi$, but the inequality

$$p_{AE} < n \cos^2 \varphi \quad (49)$$

is always valid in reality. In Fig. 2 the ordinates

$$15 \cos^2 \varphi \quad \text{and} \quad 11 \cos^2 \varphi$$

were also plotted as abscissae as a function of geographical latitudes. In fact, it is to be seen that every ordinate of the ΔE_{15} curve is less than the ordinates of the $15 \cos^2 \varphi$ curve, and the $11 \cos^2 \varphi$ curve is nowhere attained by the ΔE_{11} curve, although latter approach each other in the neighbourhood of the culmination point of ΔE_{11} .

*

The weight curves of the azimuth constant in the zenith balance program

Let us pass on now to the *analysis of the curves of the azimuth weights* obtained according to relation (46) (Table IIIa and Fig. 2).

It is generally characteristic of the azimuth weight curves that they have no culmination points nor sharp bends, but are S-shaped having very gentle curvatures. This points to the fact that the selection of circumpolar stars is a question of secondary importance even from the point of view of the azimuth. The main point is that it is advisable to observe large zenith distance stars too. The weight ordinates of the azimuth curves decrease nearly linearly at $\pm 20^\circ$ to the N and S of the zenith balance latitude ($46^\circ 30'$), i.e. in a latitude sector of 40° , as a function of the geographical latitude φ , while they result in zero weight, i.e. in an infinitely large mean error at $\varphi = 90^\circ$, that is at the North Pole, in a way identical with the ΔE curves.

Substituting, namely, $\varphi = 90^\circ$ into (46),

$$p_k = [\sin^2(90^\circ - \delta)] - \frac{[\cos \delta \cdot \sin(90^\circ - \delta)]^2}{[\cos^2 \delta]} = [\cos^2 \delta] - \frac{[\cos^2 \delta]^2}{[\cos^2 \delta]} = 0, \quad (50)$$

in the same ways as was seen with (47). The weight curves of the azimuth all attain their maximum ordinates at the station on the Equator. This fact is in accordance with the approximative formula of azimuth weight (43), reaching its highest value at an equatorial latitude, i.e. at $\varphi = 0$:

$$p_k^\circ = [zz] - \frac{[z]^2}{n}. \quad (51)$$

This itself cautions to select the program, in order to increase the reliability of the azimuth, from stars of large zenith distances and symmetrical to the zenith. The criterion $[z] \rightarrow 0$ of symmetry, as seen in (38), is in accordance with the reliability of the clock correction, but the size of the zenith distances is opposite to it.

It is natural that the ordinates of the azimuth curve are the highest in the case of the 15 star program. It is interesting, however, that the curve of the theoretical program of altogether 4 circumpolar stars is only 18% lower. At the same time, the curve of the 11 small zenith distance stars yields entirely insignificant azimuth weights. The ordinates of the latter roughly make up a tenth of the ordinates of the all-star curve.

The diagram shows, in general, that the group of the large zenith distance stars in itself would provide unusually small weights for the clock correction, — that of the small zenith distance stars, the same as for the azimuth.

The origin of the principle $[pK] \rightarrow 0$ of azimuth balance

It has already been remarked that the basic principle of program selection in several countries as also in Hungary, is that the algebraic sum of the azimuth factors should approach zero (6), i.e. $[K] \rightarrow 0$, assuming all $(a - U)$ values of observation character as of unit weight. If departing, however, from the weighting $p = \cos^2 \delta$, then this principle, in stricter formulation, has to be set up in the form (7): $[pK] \rightarrow 0$, possibly calling it the principle of "weighted azimuth balance". Treating the member $[p] = [\cos^2 \delta]$ in formula (13), resp. (45) of the clock correction as constant, one could really conclude to a maximum value of the clock correction weight at $[pK] = 0$.

Still more plausible may seem the principle $[K] \rightarrow 0$ of the simple azimuth balance, since, in case of unit weight observations the clock correction weight reaches its maximal value n , according to the weight formula simplifying into the form

$$p_{\Delta E} = n - \frac{[K]^2}{[KK]}$$

at $[K] = 0$. Above, however, also the $n \cdot \cos^2 \varphi$ curves of Fig. 2 were discussed.

It is evident from these that it is always the inequality

$$p_{\Delta E} < n \cos^2 \varphi$$

alone, which can exist in reality. In practice, then, the clock correction weight cannot even reach the value $n \cos^2 \varphi$, and far less the value n .

The misunderstanding about the principle of the azimuth balance arises from the fact that, during the investigation of the extreme values of $p_{\Delta E}$, $[p]$ cannot be treated as a constant, but in all three members of the right side of (45), either the declinations or the zenith distances of the stars to be selected are figuring as independent variables, as was seen in the weight relations (45) or, for example (27). The δ -s or z -s of the first member of the right side are evidently to be treated for variables just as the same δ and z values in the negative second member.

Investigation of the principle of azimuth balance

The trend of the clock correction weight in the azimuth balance program. Comparison of the clock correction of the two different programs

Having elucidated the ways of the origin of the principle $[pK] \rightarrow 0$, now the author wants to prove that the ΔE weight of the star program built upon the principle $[\sin z \cdot \cos z] \rightarrow 0$ of zenith balance (36) is larger, hence more favourable as against the ΔE weight of the program with the $[pK] \rightarrow 0$ principle of azimuth balance.

Let us refer here to the relations (22) and (33). If these relations will be made equal to zero according to the investigated criterion $[pK] = 0$, then

$$\left. \begin{aligned} -\cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] &= \sin \varphi [\sin^2 z] \text{ upper} \\ +\cos \varphi [\sin z \cdot \cos z] &= \sin \varphi [\sin^2 z] \text{ lower} \end{aligned} \right\} \text{culm.} \quad (52)$$

Or bringing both sides to a square, it unequivocally follows from the last two relations:

$$\frac{\cos^2 \varphi [\sin z \cdot \cos z]^2}{[\sin^2 z]} = \sin^2 \varphi [\sin^2 z]. \quad (53)$$

In case of $[pK] = 0$, on the other hand, the third member of the right side of formula (30) is formed after (53):

$$\begin{aligned} p_{\Delta E} &= n \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi [\sin^2 z] - \sin^2 \varphi [\sin^2 z], \\ p_{\Delta E} &= n \cos^2 \varphi - (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) [\sin^2 z], \end{aligned}$$

consequently

$$p_{\Delta E} = n \cos^2 \varphi - [\sin^2 z]. \quad (54)$$

This will be the expression of the clock correction weight in case of the so-called "azimuth balance" program set up according to the principle $[pK]=0$.

Whereas the clock correction of the "zenith balance" program satisfying the principle $[\sin z \cdot \cos z] = 0$ is, on the basis of (30):

$$p_{\Delta E} = n \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi [\sin^2 z]. \quad (55)$$

The comparison of the last two formulas shows that, in case of equality of the $[\sin^2 z]$ square sums of both programs, the subtrahend member of the $[pK] = 0$ program will be larger, hence the weight of its clock correction smaller than that of the $[\sin z \cdot \cos z] = 0$ program. That is, in the case of the clock correction, the weight relation of the zenith balance (55) is more favourable than the weight formula (54) of the azimuth balance.

As to the square sum $[\sin^2 z]$ of the two different programs, it was made clear that possibly it should be a small value in any program. The program $[\sin z \cdot \cos z] = 0$ represents a more symmetrical arrangement of stars, while the program $[pK] = 0$, a less symmetrical one. The lower value of $[\sin^2 z]$ can be realized more easily in the former and less easily in the latter, laying a still stronger emphasis on the inequality

$$p_{\Delta E} (\text{zenith balance}) > p_{\Delta E} (\text{azimuth balance}).$$

*

These conditions can be elucidated on the basis of Tables II. and IV. The actually observed experimental program extended, in effect, to the observation of not 11 but 12 time stars. Latter were selected so that, leaving out star 847, the group of the remaining 11 time stars suited the approximation principle $[z] \rightarrow 0$ of zenith balance, while leaving out star 858, they met the principle $[pK] \rightarrow 0$ of azimuth balance. In the latter case, the $[pK] \rightarrow 0$ criterion of principle could really be approximated to $[pK] = 0.0086$. At the same time, the sum of zenith distances was:

$$\begin{aligned} [z] &= -0^{\circ}17' && \text{in the zenith balance program,} \\ [z] &= -16^{\circ}57' && \text{in the azimuth balance program.} \end{aligned} \quad (56)$$

Consequently, in the second program, the substitution of the southern star 858 by the northern star 847 resulted in a considerable negative $[z]$ sum, namely $-16^{\circ}57'$.

Function weights $p_{\Delta E}$ and p_k originating from the zenith balance program are shown on the left a) side, those from the azimuth balance program on the

right *b*) side of Table III. The numerical formation of the $[\sin^2 z]$ sum mentioned, further of the clock corrections according to the strict formula (30) in the programs is as follows:

	$[\sin^2 z]$	$p_{\Delta E}$	
$[z] \rightarrow 0$ program	0.23170	5.10223	(zenith balance)
$[pK] \rightarrow 0$ program	0.26518	4.93364	(azimuth balance)

According to formula (54) valid for azimuth balance programs:

$$p_{\Delta E} = n \cos^2 \varphi - [\sin^2 z] = 5.21216 - 0.26518 = 4.94698, \quad (58)$$

the latter not exactly agreeing with the strict result 4.93364 noted down above, since now $[pK] = 0.0086$, that is, the requirement $[pK] = 0$ was realized not with full strictness but only by a good approximation.

Comparison between the azimuth constants furnished by the two different programs

In the following, only the question is to be investigated, which of the star programs of the two different principles is more favourable as regards the accuracy of azimuth constant k .

Since the question of azimuth is of secondary importance, on the one hand, and the exact relations here are less easy to sum up, on the other, let us be satisfied, also now, with the approximative relations coming from (22) and (23) and already used in (23'). According to the criterion $[pK] = 0$ of azimuth balance, these will be made equal to zero. Then, dividing by $\cos \varphi$:

$$[z] \pm [zz] \tan \varphi = 0. \quad (59)$$

After squaring:

$$[z]^2 \pm 2 [z] [zz] \tan \varphi + [zz]^2 \tan^2 \varphi = 0, \quad (60)$$

or in a different sequence of members:

$$\pm 2 [z] [zz] \tan \varphi + [zz]^2 \tan^2 \varphi = -[z]^2 \quad (61)$$

and dividing by $[zz]$:

$$\pm 2 [z] \tan \varphi + [zz] \cdot \tan^2 \varphi = - \frac{[z]^2}{[zz]}. \quad (62)$$

In case of $[pK] = 0$, (62) can be applied in the denominator of the approximative formula (43) of general validity:

$$p'_k = \frac{n [zz] - [z]^2}{n - \frac{[z]^2}{[zz]}} = \frac{n [zz] - [z]^2}{n [zz] - [z]^2} [zz]. \quad (63)$$

The approximative azimuth weight formula valid at $[pK] = 0$ is consequently rather simple, namely:

$$p_k \cong [zz], \quad (64)$$

where the zenith distance must be substituted into radians or, if $[zz]^\circ$ in degrees,

$$p'_k = \frac{[zz]^\circ}{3282,81}. \quad (65)$$

Since the denominator of (44) is definitely larger than 1, it follows that — assuming the square sums $[zz]$ of the two different star programs to be equal — the azimuth balance program will furnish the higher (64), and the zenith balance program the lower (44) value for the weight of the adjusted azimuth constant. As to the relation of the square sums $[zz]$, those mentioned above according to (55) are also valid here, namely that — on account of the asymmetry of its stars — it is the azimuth balance program in which a higher square sum $[zz]$ is to be expected, thus increasing still more the advantage of (64) against (44).

This is confirmed by the numerical data of the tables II. and IV, according to which $[zz]$ for the "zenith" program, in absolute value, is 0.2345, while for the "azimuth" program it is 0.2656. That is, the situation is, as regards the goodness of the two different programs, just the opposite to what was experienced in the case of the clock correction: in respect of the accuracy of the azimuth constant, the azimuth balance program is better and the zenith balance program is less good. This advantage is, however, not by far decisive, because in the last resort, the emphasis lies on the goodness not of the azimuth constant but on that of the clock correction. The clock correction and its goodness can only be indirectly influenced by the azimuth namely, according to relation (17), the multiplication factor of k making up a mere fraction of the unit. Tables II. and IV. also show the weight of the azimuth at the station of $\varphi = 46^\circ 30'$ for the programs of both principles. Moreover, not only according to (44) and (64), but also according to the strict formula (14). In this way, 0.2291 is the approximate value and 0.2267 the strict value for the "zenith" program. For the "azimuth" program: 0.2656 is the approximate value and 0.2662 the strict value. According to these, the approximative values are well utilisable, since the differences do not exceed 1‰.

The weight curves of the azimuth balance program $[pK] \rightarrow 0$

In the case of star programs, the star groups of which satisfied the principle of azimuth balance on the latitude $\varphi = 46^\circ 30'$, the numerical values of clock correction ΔE and azimuth constant k were similarly computed for different geographical latitudes φ , based on the formulas (13) and (14). The $p_{\Delta E}$ and p_k data obtained were summed up as the right side alternative *b*) of Table III, with the heading: Azimuth balance star program. The data of this Table

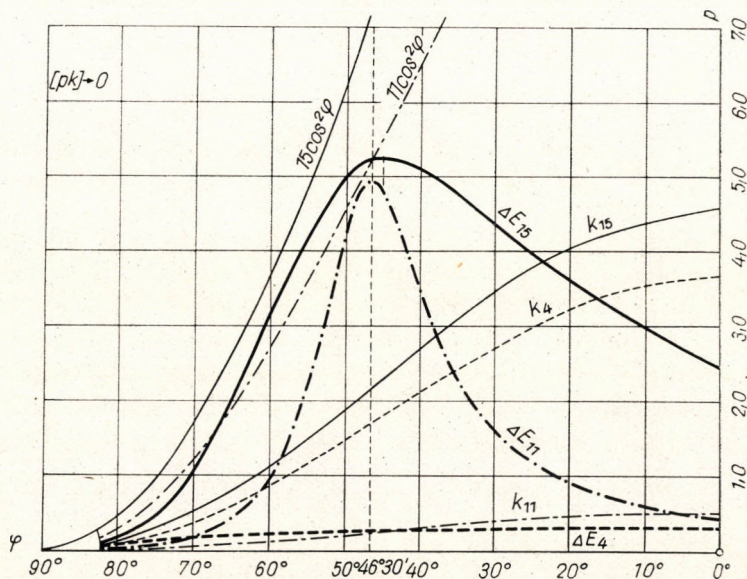


Fig. 3

IIIb are illustrated by the diagrams of Fig. 3. Besides, Table III permits a comparison also between the weight results of both kinds of time star groups.

It was mentioned that a single member of the zenith balance program, the southern star 858, had to be substituted by the northern star 847, from which the azimuth balance group was already produced with the latter, $[pK]$ was $+0.0086$, practically well approximating the condition $[pK] \rightarrow 0$. As a consequence of the exchange of the stars, the weight curves of both the all-star program and the merely time star group, obtainable according to (13) and (14), will be altered though to a minor degree.

According to Fig. 3, the culmination point of the ΔE weight curve in the azimuth balance program descended from 5.5242 to 5.2436 . At the same time, the φ of the culmination point shifted from 44° to 45° . Similarly, the peak of the ΔE weight curve of the merely time star group decreased, namely from 5.2107 to 4.9336 and the point of culmination appears, instead of 45° , at $\varphi = 46^\circ 30'$,

just around the actual station point. The character of the weight curves of the azimuth remained unchanged, only they pass somewhat higher, since the azimuth balance program is, as was seen, somewhat less advantageous for the clock correction, but slightly more advantageous for the azimuth. All this also appears from the numerical data of Table III.

In the programs of both principles, the same 4 circumpolar stars were employed. Consequently their weight curves remain unchanged in Figs. 2 and 3.

Evidently also the $n \cos^2 \varphi$ curves of maximal clock correction weight remain the same in both cases. The characteristic points of both figures are those in which the ΔE and k weight curves of the identical star programs intersect. Such a point of intersection is shown by Fig. 2 at the geographical latitude $\varphi = 20.5^\circ$, where the $p_{\Delta E} = 392.33$ and $p_k = 393.91$ values of the all-star program are nearly the same. This program, hence, provides the same accuracy in a breadth of 20.5° for both the clock correction and the azimuth. As mentioned, such programs were paid special attention during the triangulation of Sweden.

In Fig. 3, this point of intersection appears around $\varphi = 23^\circ$. If the azimuth constant were meant for the determination of the azimuth of main triangulation network sides also in Hungary, as in Sweden, then the intention would be to set up a program in which this point of intersection would appear on the latitude of the Hungarian station.

REFERENCES

1. Publication des Kg. Preussischen Geodätischen Institutes. Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1870. S. 1; 1876. S. 3.
2. MILASOVSKY, B.: Clock correction and azimuth constant in astronomical time determination (*A Bányamérnöki és Földmérőmérnöki Karok Közleményei*, XIX (1956).
3. ALBRECHT, TH.: Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig, 1908. IV. Auflage.
4. Verhandlungen der Baltischen Geodätischen Kommission. III-te Tagung in Riga, 1927. Helsinki, 1928. S. 73, 136.
5. Gerland's Beiträge zur Geophysik, Band 24, S. 385, 438.
6. Verhandlungen der Baltischen Geodätischen Kommission, VIII-te Tagung in Tallin und Tartu, 1935. Helsinki, 1936, S. 100—108, 109—121.
7. U. S. Coast and Geodetic Survey, 1952. Special Publication No. 237.
8. NIETHAMMER, TH.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. Verlag Birkhäuser, Basel, 1947, S. 90.
9. Procès Verbal de la 80^{me} Séance de la Commission Géodésique Suisse. Bern, 1934.
10. Procès Verbal de la 92^{me} Séance de la Commission Géodésique Suisse. Bern, 1948.

ZUR FRAGE DES OPTIMALEN STERNPROGRAMMES DER MERIDIAN-METHODE

B. MILASOVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Auf den Laplace-Punkten des Triangulationshauptnetzes von Ungarn erfolgt die Zeitbestimmung auf Grund der Beobachtung der Meridiandurchgangszeiten von »Zeitsternen«. Ergänzungsweise, zur Sicherung des Instrumentazimuths, werden auch einige »Polsterne« beobachtet. Den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet die Frage, welche der in

den Formeln (7) bzw. (36) festgesetzten Prinzipie als Grundlage für die Auswahl der Zeitsterne dienen soll. Der Verfasser ist der Meinung, daß letzteres Prinzip eine größere Zuverlässigkeit der Zeitbestimmung sichert.

DU PROGRAMME SIDÉRAL OPTIMUM DANS LA MÉTHODE MÉRIDIENTE

B. MILASOVSKY

RÉSUMÉ

La détermination de temps sur les points Laplace du système primordial de triangulation s'effectue en Hongrie, depuis des dizaines d'années, sur la base de l'observation des temps de passage méridien des «étoiles horaires». En plus, on observe aussi quelques «étoiles polaires» pour assurer la constante d'azimut. L'étude se propose d'examiner, lequel des deux principes établis par les formules (7), resp. (36) doit présider au choix des étoiles horaires. L'auteur est d'avis que le second principe garantit une sûreté plus grande pour la détermination de temps.

К ВОПРОСУ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗВЕЗДНОЙ ПРОГРАММЫ МЕРИДИАННОГО МЕТОДА

Б. МИЛАШОВСКИ

РЕЗЮМЕ

В точках Лапласа венгерской базисной триангуляционной сети определение времени производится путем наблюдения моментов перехода через меридиан 10—16-ти звезд определения времени. Дополнительно производится также и наблюдение некоторых полярных звезд — для обеспечения азимута инструментов. В данной работе рассматривается вопрос, следует ли выбирать звезды для определения времени по принципам, устанавливаемым формулами (7) или (36). По мнению автора принцип выбора, определяемый формулой (36), дает большую надежность правильного определения времени.

GENAUIGKEITSFRAGEN BEI DER BESTIMMUNG VON HORIZONTALEN PUNKTVERSCHIEBUNGEN DURCH WIEDERHOLTES RÜCKWÄRTSEINSCHNEIDEN

L. HOVÁNYI

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN, LEHRSTUHL FÜR GEODÄSIE
UND MARKSCHEIDEKUNDE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT
FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 10. April 1963]

Horizontale Punktverschiebungen infolge der Bergbauoperationen können in einzälen Fällen durch Vorwärtseinschneiden oder Rückwärtseinschneiden bestimmt werden. Der Aufsatz beschäftigt sich mit den Genauigkeitsfragen der Bestimmung durch wiederholtes Rückwärtseinschneiden. Dabei wird der Begriff des Fehlerkreises, gezeichnet mit der großen Achse der Fehlerellipse, eingeführt. Damit gibt der Verfasser schnell behandelbare und die praktischen Genauigkeits-Anforderungen befriedigende Zusammenhänge die im Falle unüberschreitbarer Koordinatenfehler zur Bestimmung der Genauigkeit der Winkelmessungen, beziehungsweise in Kenntnis dieser letzteren, zur Bestimmung der Punkt-Koordinatenfehler dienen.

Bei der Feststellung der messungsbedingten Fehler von horizontalen Punktverschiebungen, entstanden durch die Wirkung von Bergbauoperationen, geht man zweckmäßigerweise aus den Genauigkeitsanforderungen aus. Unter gegebenen Meßbedingungen müssen die Meßmethoden, die Meßinstrumente und selbstverständlich die mit diesen einzuhaltenden Genauigkeitswerte dementsprechend gewählt werden.

Die mehrmalige Feststellung der horizontalen Punktverschiebungen oder die Einmessung der Lage der äußeren und Kreuzungspunkte kann in einzälen Fällen durch Vorwärtseinschneiden oder Rückwärtseinschneiden erfolgen. Es scheint also zweckmäßig zu sein, solche, schnell gebrauchbaren annähernden Zusammenhänge für die Genauigkeit der Winkelmessungen des Vorwärtseinschneidens und Rückwärtseinschneidens sowie für Bestimmung der zulässigen Koordinatenfehler abzuleiten, die den praktischen Anforderungen entsprechen.

Im Falle eines unüberschreitbaren mittleren Koordinatenfehlers e_p des durch Vorwärtseinschneiden bestimmten Punktes ist eine einfache Lösung für Bestimmung der unüberschreitbaren mittleren Fehler der Winkel α und β , gemessen an den Bestimmungspunkten, bekannt.

Wenn, nach Bild 1, Punkt P aus den gegebenen Punkten A und B mit den Winkeln α und β vorwärtseingeschnitten ist, entsteht in Punkt P , infolge der mittleren Winkelfehler $\pm \mu_\alpha$ und $\pm \mu_\beta$, ein Fehlerviereck. Mit Rücksicht darauf, daß die mittleren Fehler der gemessenen Winkel nur Sekundenwerte sind, darf das Viereck um Punkt P als ein Parallelogramm betrachtet werden.

Es ist aus Bild 2 ersichtlich, daß die Größe des mittleren Fehlers in Richtung normal zur Tangente der Fehlerellipse durch die tangentialnormale Entfernung gegeben wird. Aus den Eigenschaften der Ellipse folgt es weiter, daß die halbe große Achse a die größte ist.

Wenn also die halbe große Achse der Fehlerellipse als Genauigkeitsanforderung gewählt wird, dann wird diese Anforderung in allen anderen

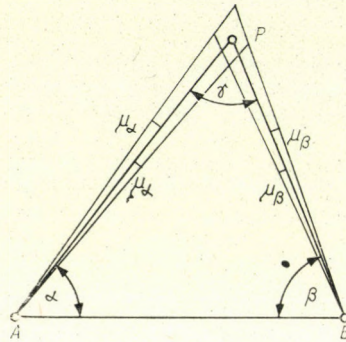


Bild. 1

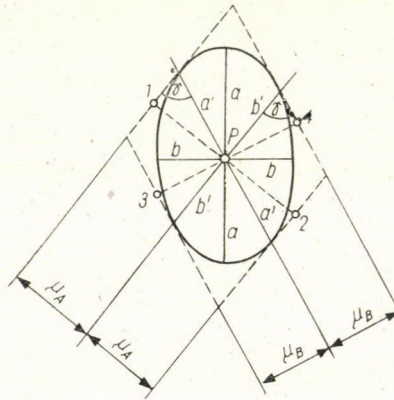


Bild. 2

Richtungen (innerhalb des Kreises, gezeichnet mit dem Radius a) befriedigt. Für den unüberschreitbaren mittleren Koordinatenfehler $a = e_P$ können die unüberschreitbaren mittleren Fehler der Winkel α und β , gemessen in den Bestimmungspunkten, mit sehr einfachen Zusammenhängen berechnet werden [1, 2]. Wenn $\gamma < 90^\circ$:

$$\mu''_\alpha = \pm \varrho'' \frac{e_P \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{AP}; \quad \mu''_\beta = \pm \varrho'' \frac{e_P \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{BP}. \quad (1)$$

Wenn $\gamma > 90^\circ$:

$$\mu''_\alpha = \pm \varrho'' \frac{e_P \sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{AP}; \quad \mu''_\beta = \pm \varrho'' \frac{e_P \sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{BP}. \quad (2)$$

Die unüberschreitbaren mittleren Winkelfehler können also, in Kenntnis des mittleren Koordinatenfehlers, in jedem Fall berechnet werden. Selbstverständlich kann man in Funktion von e, γ , ferner der Vorwärtseinschnittslängen eine einfache Tabelle oder ein Diagramm konstruieren.

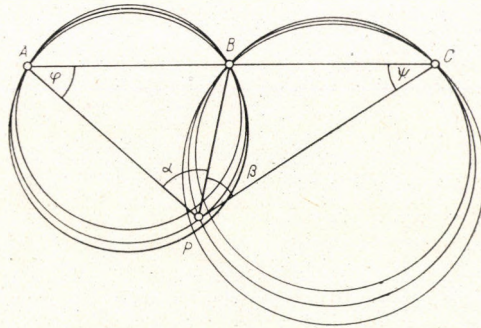


Bild. 3

Demnach erscheint es als zweckmäßig, die unüberschreitbaren mittleren Fehler der Winkel α und β im Falle eines unüberschreitbaren mittleren Koordinatenfehlers $a = e_P$ auch beim Rückwärtseinschneiden zu bestimmen.

Beim Rückwärtseinschneiden (Bild 3) bedeuten die mittleren Fehler $\pm \mu_\alpha$ und $\pm \mu_\beta$ der gemessenen Winkel α und β , daß der eine, dem Winkel α entsprechende und durch die gegebenen Punkte A, B durchgehende Kreis, sowie der andere, dem Winkel β entsprechende und durch Punkte B, C durchgehende Kreis sich etwas nach innen bzw. nach außen verschieben. Die Kreisbögen können in der Nähe des Punktes P als gerade und die den einzelnen Winkeln angehörenden als parallel betrachtet werden. Nach Bild 4 bildet die Tangente T_α des Kreisbogens (mit der Seite \overline{AP}) im Punkte P einen Winkel $\alpha + \varphi$.

Nach ähnlichen Überlegungen bildet die Tangente des dem Winkel β angehörenden Kreises einen Winkel mit der Seite \overline{CP} $\beta + \psi$.

Im folgenden sollen beide konjugierten Halbmesser des dem Rückwärtseinschneiden zugehörenden Parallelogramms bestimmt werden. Da

$$\overline{AP} = -\frac{s_\alpha}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \varphi), \quad (3)$$

Nach Addierung und Subtrahierung beider Gleichungen sowie nach Wurzelziehen erhält man:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b = \frac{|\sqrt{\mu_{d_A}^2 + \mu_{d_C}^2 + 2\mu_{d_A}\mu_{d_C}\sin(\varphi + \psi)}|}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad (8)$$

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b = \frac{|\sqrt{\mu_{d_A}^2 + \mu_{d_C}^2 - 2\mu_{d_A}\mu_{d_C}\sin(\varphi + \psi)}|}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Durch Addieren der Gleichungen (8) ergibt sich für den Wert der halben grossen Achse der folgende Zusammenhang:

$$a = \frac{M}{2 \sin(\varphi + \psi)},$$

wo

$$M = \left| \sqrt{\mu_{d_A}^2 + \mu_{d_C}^2 + 2\mu_{d_A}\mu_{d_C}\sin(\varphi + \psi)} \right| + \left| \sqrt{\mu_{d_A}^2 + \mu_{d_C}^2 - 2\mu_{d_A}\mu_{d_C}\sin(\varphi + \psi)} \right|. \quad (9)$$

Nach entsprechendem Ordnen sowie nach Einsetzen von $\cos^2(\varphi + \psi) = 1 - \sin^2(\varphi + \psi)$ kann für das Quadrat der halben grossen Achse aufgeschrieben werden:

$$a^2 = \frac{\mu_{d_A}^2 + \mu_{d_C}^2 + \left| \sqrt{\mu_{d_A}^4 + \mu_{d_C}^4 - 2\mu_{d_A}^2\mu_{d_C}^2 + 4\mu_{d_A}^2\mu_{d_C}^2 \cdot \cos^2(\varphi + \psi)} \right|}{2 \sin^2(\varphi + \psi)}. \quad (10)$$

Wenn beide konjugierten Halbmesser für gleich genommen werden,

$$\mu_{d_A} = \mu_{d_C} = \mu,$$

vereinfacht sich der früher für a^2 aufgeschriebene Zusammenhang auf die folgende Form:

$$a^2 = \frac{2\mu^2 \cos(\varphi + \psi)}{2 \sin^2(\varphi + \psi)} = \frac{\mu^2 [1 \pm \cos(\varphi + \psi)]}{\sin^2(\varphi + \psi)}. \quad (11)$$

Es folgt aus dem vorherigen, daß wenn $\varphi + \psi < 90^\circ$, dann ist

$$a = \frac{\mu \sqrt{1 + \cos(\varphi + \psi)}}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{\mu \sqrt{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}}. \quad (12)$$

Wenn aber $\varphi + \psi > 90^\circ$, dann ist

$$a = \frac{\mu \sqrt{1 - \cos(\varphi + \psi)}}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{\mu \sqrt{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}}. \quad (13)$$

Nebenbei sei es bemerkt, daß man zu dem gleichen Ergebnis gelangt, wenn man nach TÁRCZY—HORNOCH [3] die halbe große Achse der Fehlerellipse aus der Quadratsumme der Projektionen beider einander gleich genommenen konjugierten Halbmesser, senkrecht zur großen Achse, berechnet.

Wenn beide konjugierten Halbmesser gleich sind, liegt die halbe große Achse bei $\varphi + \psi < 90^\circ$ in der Richtung der Winkelhalbierenden $(\varphi/2 + \psi/2)$, bei $\varphi + \psi > 90^\circ$ aber in der Richtung der Winkelhalbierenden $90^\circ - (\varphi/2 + \psi/2)$. Nach Bild 5 ist $\varphi + \psi > 90^\circ$, dementsprechend liegt die halbe große Achse in der Richtung der Winkelhalbierenden $90^\circ - (\varphi/2 + \psi/2)$. Aus der Quadratsumme der zur großen Achse normalen Projektionen beider konjugierten Halbmesser ist also

$$a = \pm \sqrt{(a')^2 \sin^2 \frac{\varphi + \psi}{2} + (b')^2 \sin^2 \frac{\varphi + \psi}{2}}. \quad (14)$$

Mit der Einführung der Bezeichnung $\mu_{d_A} = \mu_{d_C} = \mu$ und unter Anwendung der Zusammenhänge (6):

$$a = \frac{\sqrt{2} \mu \sin \frac{\varphi + \psi}{2}}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{\mu}{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}}. \quad (15)$$

Es ist ersichtlich also, daß man nach der Methode von TÁRCZY—HORNOCH in einer sehr einfachen Weise gleich den Zusammenhang (13) erhält. Im Falle $\varphi + \psi < 90^\circ$ würde man zu dem Zusammenhang (12) gelangen.

Die erste Ableitung lehnt sich aber an bekanntere Sätze an, darum scheint es notwendig, auch diese zu beschreiben.

Nach ähnlichem Prinzip kann auch die Ableitung der Zusammenhänge (1) und (2) (beim Vorwärtseinschneiden) vereinfacht werden.

Zurückkehrend auf die Zusammenhänge (12) und (13), bei einem unüberschreitbaren mittleren Koordinatenfehler $a = e_p$ ist der unüberschreitbare Fehler

$$\mu = e_p \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi + \psi}{2},$$

beziehungsweise

$$\mu = e_P \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2}. \quad (16)$$

Die unüberschreitbaren mittleren Fehler der Winkel α und β , gemessen im Punkte P , sind, im Sinne der Zusammenhänge (4) und (5), wenn $\varphi + \psi < 90^\circ$:

$$\mu''_\alpha = \pm \frac{\varrho'' e_P \overline{AB} \cdot \sqrt{2}}{AP \cdot BP} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}; \quad (17)$$

$$\mu''_\beta = \pm \frac{\varrho'' e_P \overline{BC} \cdot \sqrt{2}}{CP \cdot BP} \sin \frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Wenn $\varphi + \psi > 90^\circ$, dann sind

$$\mu''_\alpha = \pm \frac{\varrho'' e_P \overline{AB} \cdot \sqrt{2}}{AP \cdot BP} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}; \quad (18)$$

$$\mu''_\beta = \pm \frac{\varrho'' e_P \overline{BC} \cdot \sqrt{2}}{CP \cdot BP} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Die unüberschreitbaren mittleren Winkelfehler werden also in Kenntnis der unüberschreitbaren mittleren Koordinatenfehler in jedem einzelnen Falle mit Rechenschieber ausgerechnet. Wenn die Seitenlängen in einer Kilometer-Größenordnung in die Zusammenhänge eingesetzt werden, wird e_P in Zentimeter ausgedrückt, und ist $\varrho = 2,06$.

Im folgenden sei ein zahlenmäßiges Beispiel vorgeführt (Bild 6). Der unüberschreitbare mittlere Koordinatenfehler ist $e_P = 1$ cm. Die Rechnungs- bzw. der Karte entnommenen Angaben (Genauigkeit von einigen Metern bzw. von Grade genügen). sind die folgenden:

$\overline{AP} = 305$ m	$\alpha = 80^\circ$
$\overline{BP} = 509$ m	$\beta = 120^\circ$
$\overline{CP} = 401$ m	$\varphi = 66^\circ$
$\overline{AB} = 549$ m	$\psi = 34^\circ$
$\overline{BC} = 795$ m	

Nach den Zusammenhängen (17):

$$\mu''_\alpha = \frac{\varrho'' e_P \overline{AB} \cdot \sqrt{2}}{AP \cdot BP} \cos \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{2,06 \cdot 1 \cdot 0,549 \cdot 1,41}{0,305 \cdot 0,509} 0,643 = \pm 6,6'',$$

$$\mu''_\beta = \frac{\varrho'' e_P \overline{BC} \cdot \sqrt{2}}{CP \cdot BP} \cos \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{2,06 \cdot 1 \cdot 0,795 \cdot 1,41}{0,401 \cdot 0,509} 0,643 = \pm 7,2''.$$

Wenn also Punkt P mit einem unüberschreitbaren mittleren Koordinatenfehler $e_P = \pm 1$ cm bestimmt werden soll, muß das Messen der Winkel α und β im Punkte P so viele Male wiederholt werden, bis man innerhalb der mittleren Winkelfehler $\mu''_\alpha = 6,6''$ und $\mu''_\beta = 7,2''$ bleibt.

Wenn die mittleren Winkelfehler bekannt sind, können die e_P Werte aus den Zusammenhängen (17) und (18) bestimmt werden. Von je zwei Werten wählt man natürlich immer den größeren.

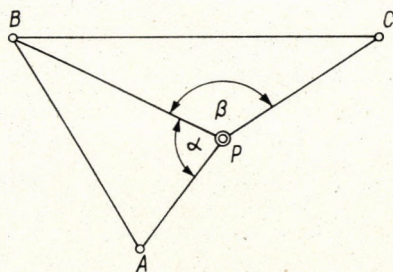


Bild. 6

Es war unser Ziel, in diesem kurzen Aufsatz schnell verwendbare, die praktischen Genauigkeitsanforderungen befriedigende Zusammenhänge für die Genauigkeit der Winkelmessungen bzw. in deren Kenntnis zur Bestimmung der unüberschreitbaren Punkt-Koordinatenfehler beim Rückwärtseinscheiden zu geben.

SCHRIFTTUM

1. KONRAD, Ö.: Richtlinien für die Beobachtung von bergbaulich bedingten Gesteinsbewegungen mit markscheiderischen Verfahren (ungarisch), *Bányászati Lapok*, 1959.
2. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Berechnung der mittleren Fehler-ellipse bei einfachem Vortwärtseinscheiden (ungarisch), *VI. Oszt. Köz. XXIV* (1959).
3. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Eine einfache Konstruktion der Fußpunkt-Kurve der mittleren Fehler-ellipse (ungarisch). *Geodézia és Kartográfia*, 1960.

ACCURACY PROBLEMS IN THE DETERMINATION OF HORIZONTAL POINT DISPLACEMENTS BY REPEATED RESECTIONS

L. HOVÁNYI

SUMMARY

Horizontal point displacements produced by mining operations can be determined, from case to case, by intersection or by a three-point resection. The present study deals with the accuracy problems of repeated resectional determinations. The concept of error circle drawn with the great axis of the error ellipse is introduced. In this way promptly manageable relations satisfying practical accuracy requirements are furnished, in case of coordinate errors not to be exceeded, for the accuracy of angle measurements, respectively — in the knowledge of these — for the determination of the point coordinate errors.

PROBLÈMES DE PRÉCISION DANS LA DÉTERMINATION PAR RELEVEMENTS
DU DÉPLACEMENT HORIZONTAL DE POINTS

L. HOVÁNYI

RÉSUMÉ

Les déplacements horizontaux de points dus aux opérations minières peuvent être déterminés, suivant le cas, par intersection ou par relèvement. L'auteur traite des problèmes de la précision dans la détermination par relevements réitérés, et introduit la notion du cercle d'erreur tracé avec l'axe principal de l'ellipse d'erreurs. Il donne ainsi des relations faciles à manier et satisfaisant les exigences de précision posées par la pratique, soit pour la précision des mesures des angles, en cas d'erreurs limitées des coordonnées, soit pour la détermination des erreurs de coordonnées des points, quand la précision des mesures des angles est connue.

ВОПРОСЫ О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ
РЕПЕРОВ ПРИ ПОМОЩИ ПОВТОРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАСЕЧЕК

Л. ХОВАНИ

РЕЗЮМЕ

Горизонтальные смещения пунктов от горных работ определяются прямой или обратной засечкой. В работе рассматриваются вопросы о точности определения смещения пунктов при применении повторных обратных засечек. Вводится понятие об окружности погрешности, проводимой по длинной оси эллипса погрешности. При этом получаются удобные для применения и отвечающие требованиям по точности соотношения для определения точности измерения углов при наличии недопускаемых координатных погрешностей, а при известных величинах последних — для определения погрешностей координат пунктов.

DIE BESTIMMUNG DER GENAUIGKEIT VON MESSERGEBNISSEN

F. HALMOS

GEODÄTISCHES FORSCHUNGLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 26. August 1963]

Verfasser untersucht die auf Grund des Gauß'schen Fehlergesetzes berechenbaren Genauigkeitszahlen sowie die der Student'schen Fehlerverteilung entsprechenden Vertrauens- (Konfidenz-) Intervalle. Er beweist, daß bei einer Wahrscheinlichkeit $P = 0,683$ das Vertrauensintervall mit dem mittleren Fehler und mit dem mittleren Fehler des mittleren Fehlers ableitbar ist. Die Untersuchungen werden auf die Bestimmung der Genauigkeit der ausgeglichenen Werte, deren Funktionen sowie auf den entsprechenden mittleren Fehler erweitert. Die auf Grund des Prinzips der kleinsten Quadrate berechneten mittleren Fehler überschätzen die Genauigkeit der Beobachtungen. Die mit dem mittleren Fehler des mittleren Fehlers ergänzte Genauigkeitsmeßzahl liefert theoretisch und auch praktisch eher annehmbare Werte. Bei geringer überschüssiger Meßzahl und größerer Wahrscheinlichkeit sind die durch Fehlerverteilungsfunktionen gewonnenen Ergebnisse auch nicht zufriedenstellend. Es werden weiter die vom Verfasser abgeleiteten, dem Vertrauens-Intervall und den Erfahrungen entsprechenden Fehlergrenzen angegeben. Die Untersuchungen werden mit Rechenbeispielen ergänzt.

Die von GAUSS begründete und von HELMERT wesentlich weiterentwickelte Ausgleichung setzt eine unendliche Zahl der Beobachtungen voraus. Dies kann in der Praxis sowohl in der Geodäsie als auch bei anderen technischen oder physikalischen Messungen nie erreicht werden. Zur Erhöhung der Genauigkeit ist es also wesentlich, die höchste Zahl der Messungen ganz bis zur Grenze der Zweckmäßigkeit durchzuführen. Es ist wichtig, daß bei deren fehlertheoretischer Aufarbeitung in den entsprechenden Zusammenhängen die Untersuchung sich auf sämtliche zweckdienliche Messungen erstreckt, denn es können nur auf diese Weise beruhigendere maßgebende Daten über die Genauigkeit der vollführten Beobachtungen und zur Untersuchung der einzelnen Fehlerarten erzielt werden ([1]; S. 66—70).

Die Zahl unserer überschüssigen Messungen ist aber meistens ziemlich klein (im Vergleich zum Unendlichen), so daß die den klassischen Voraussetzungen entsprechende normale Fehlerverteilung nicht immer vollständig gesichert ist. Es ist eben deshalb zweckdienlich, im Falle solcher Beobachtungen mit Hilfe der modernen Thesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik unsere Ergebnisse auch von einem anderen Gesichtspunkt aus zu untersuchen. Neuerlich werden die durch Ausgleichung gewonnenen Genauigkeitszahlen an mehreren Stellen einer Kritik unterzogen, weil sie die Genauigkeit der Messungen überschätzen. Eben deshalb werden in der letzten Zeit in mehreren Büchern und Abhandlungen neue Richtlinien zur Bestimmung der Genauigkeitszahlen angegeben ([2, 3, 4, 5, 6] usw.).

A) Die Untersuchung der direkten Beobachtungen

Es ist allgemein bekannt, daß die Verteilung der Beobachtungsfehler nur im Falle unendlich vieler zufälliger Fehlerelemente und unendlich vieler Versuche der normalen Verteilung entspricht. Sie wird eben deshalb Gauß'sche Fehlerverteilung oder Fehlergesetz genannt. Die Fehlerverteilungsfunktion der normalen Verteilung ist bekanntlich:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right], \quad (1)$$

wo σ der Parameter, die Streuung der normalen Verteilung, a der wahre Wert, x der durch unsere Messungen abgeleitete Wert, also $x - a$ der wahre Fehler ist. Der Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ ergibt sich aus der Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ der Wahrscheinlichkeitsdichte-funktion gleich 1 sei, jedoch ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right] d(x-a) = \sqrt{2\pi}. \quad (2)$$

Der normalen Verteilung entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, daß $|x - a| < \Delta x$ die folgende [4; S. 87. Gl. (15)]:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt = P(x - t\mu_x < a < x + t\mu_x), \quad (3)$$

wo, falls $\mu_x = \sqrt{[p\bar{v}v]/[P](n-1)}$

$$t = \frac{\Delta x}{\mu_x} = \frac{a-x}{\mu_x}, \quad a = x \pm t\mu_x = x \pm \Delta x \quad (4)$$

ist (auf der rechten Seite der Gleichung (3) ist das in Klammern gesetzte Glied nach P als Index zu verstehen).

Aus Gl. (3) ist es klar, daß die Werte t und P voneinander abhängig und von der Meßzahl (n) unabhängig sind, weil die normale Verteilung eine unendliche Zahl der Beobachtungen voraussetzt. Der mittlere Fehler μ_x ist hier also als Fehlerschranke zu betrachten, und es kann festgestellt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit (P) der ausgeglichene Wert (x) innerhalb der $x \pm \mu_x$ Grenzen liegt. Im entgegengesetzten Falle kann es bestimmt werden, daß bei einer gewissen gegebenen Wahrscheinlichkeit die Fehlerschranke das wievielfache des Wertes des mittleren Fehlers ist (diesen Faktor bedeutet t). Dem obi-

gen entsprechend liegt der ausgeglichene x - Wert innerhalb der Fehler-schranke $x \pm \mu_x$ ungefähr mit einer 68,3%-igen Wahrscheinlichkeit. Innerhalb den Grenzen $x \pm 2 \mu_x$ liegen 95,4%, innerhalb den Grenzen $x \pm 3 \mu_x$ 99,7% der Messungen. Der mit t multiplizierte \pm Wert des mittleren Fehlers wird meistens Vertrauensintervall genannt, bei der t die Funktion der Wahrscheinlichkeit und der überschüssigen Messungen ist. Weiter ist bekannt, daß bei einer Wahrscheinlichkeit $P = 50\% = 0,50$ das Vertrauensintervall für den ausgeglichenen Wert nach der Methode der kleinsten Quadrate $\pm 0,647 \mu_x$ ist.

Die auf der mathematischen Statistik beruhenden Untersuchungen haben aber erwiesen, daß das Vertrauensintervall eine Funktion der Anzahl der Messungen ist: Je größer diese Anzahl, desto wahrscheinlicher ist es, daß die ausgeglichenen Werte innerhalb der Fehlergrenzen liegen. So kann der Gauß'sche mittlere Fehler wahrlich die Genauigkeit der Messungen verfälschen, hauptsächlich wenn wir die Zahl der überschüssigen Messungen eigenwillig verringern (z. B. durch fiktive Beobachtungen).

Bereits im Zusammenhang (3) taucht die Frage auf, daß zu einem wahren Wert a die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht wird, daß es innerhalb der gegebenen Grenzen liegt, bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit der berechnete x und das dazu gehörende Vertrauensintervall den wahren Wert des unbekanntes a enthält. Das Vertrauensintervall ist auch als Konfidenz-Intervall bekannt [6, 7], während HRISTOW in seiner bereits erwähnten Untersuchung [2] und in seinem Buche [4] die Benennung »fiduziarisches Intervall« gebraucht. Die deutsche Fachliteratur wendet die Benennung »Vertrauens-Intervall« an [8].

Zur näheren Erörterung des Vertrauens-Intervalls soll der Zusammenhang (4) in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$t = \frac{a - x}{\mu_x} = \frac{\varepsilon_x}{\mu_x} = \frac{\varepsilon_x}{\sqrt{\frac{[pvv]}{f}}}, \quad (5)$$

wo ε_x der wahre Fehler des aus der Ausgleichung gewonnenen verlässlichsten Wertes x ist, der manchmal auch wahrscheinlichster Wert genannt wird (da die Gauß'sche Fehlerverteilung an die Summe des Quadratminimums der Verbesserungen beruht, scheint in diesem Sinne das Attribut »verlässlichst« für angebracht), μ_x aber, als bereits erwähnt, der mittlere Fehler, v die Verbesserung der einzelnen Beobachtungen, p deren Gewicht, f die Zahl der überschüssigen Beobachtungen bedeutet. Der Zähler des Ausdruckes ist ein Wahrscheinlichkeitswert mit normaler Verteilung, in dem Nenner ist die Quadratwurzel der Quadratsumme der Wahrscheinlichkeits-Veränderlichen zu finden. Diese Art der Verteilung ist als t - oder Student'sche Verteilung bekannt. Im Falle unendlich vieler Beobachtungen geht letztere in eine normale Verteilung

lung über. Die Verteilungsfunktion ist [4; S. 101.]:

$$P(-t\mu_x < a - x < +t\mu_x) = \frac{2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt = f(t) \quad (6)$$

wo laut den bereits bekannten Bezeichnungen Γ das Zeichen der Gamma-Funktion (Zeichen dafür, daß die faktoriellen Größen auf nicht ganze Glieder ausgedehnt wurden). Bei einer bestimmten Wahrscheinlichkeit P wird der berechnete (ausgeglichene) Wert innerhalb folgendes Vertrauensintervalls liegen:

$$x \pm t\mu_x = x \pm \varepsilon_x \quad \text{wo} \quad t = \frac{\varepsilon_x}{\mu_x}. \quad (7)$$

Zu den verschiedenen Wahrscheinlichkeiten P können die zu den veränderlichen $n-1=f$ überschüssigen Meßzahlen gehörenden t -Koeffizienten (Multiplikatoren) laut Gl(6) bestimmt werden, von welchen einige in Tafel I. zu finden sind [4].

Ähnlicherweise kann das Vertrauens-Intervall des berechneten mittleren Fehlers ermittelt werden:

$$P(\mu_x - \varepsilon_{\mu_x} < \sigma < \mu + \varepsilon_{\mu_x}) = \frac{1}{2^{\frac{f-2}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_{x_1}^{x_2} x^{f-1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (8)$$

wo $f = n - 1$ wieder die Zahl der überschüssigen Beobachtungen, μ_x den berechneten mittleren Fehler, σ dessen wahrscheinlichen Wert, ε_{μ_x} aber den wahren Fehler des mittleren Fehlers (Vertrauens-Intervalls) bedeutet. Die Integrations-grenzen sind:

$$x_1 = \frac{\sqrt{f}}{1+q} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\sqrt{f}}{1-q} \quad (9)$$

wo

$$q = \frac{\varepsilon_{\mu_x}}{\mu_x} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{\mu_x} = q \cdot \mu_x. \quad (10)$$

Zu ähnlichen Zusammenhängen gelangen wir, wenn das Vertrauens-Intervall des mittleren Fehlers einer Beobachtung mit Gewichtseinheit oder einer Funktion $F = F(\sigma + v)$ gesucht wird. Dementsprechend ist:

$$\begin{aligned} \sigma_0 = \bar{\mu}_0 &= \pm \mu_0 \pm \varepsilon_{\mu_0} = \pm \mu_0 \pm q \cdot \mu_0 = \pm \mu_0 (1 \pm q) \\ \sigma_x = \bar{\mu}_x &= \pm \mu_x \pm \varepsilon_{\mu_x} = \pm \mu_x \pm q \cdot \mu_x = \pm \mu_x (1 \pm q) \end{aligned} \quad (11)$$

und

$$\sigma_F = \bar{\mu}_F = \pm \mu_F \pm \varepsilon_{\mu_F} = \pm \mu_F \pm q\mu_F = \pm \mu_F (1 \pm q).$$

Wenn aber das Vertrauens-Intervall einer Funktion F berechnet werden soll, so ist auf Grund von

$$P(F - \varepsilon_F < \bar{F} < F + \varepsilon_F) = f_F(t) \quad (12)$$

$$\bar{F} = F \pm \varepsilon_F = F \pm t\mu_F.$$

In diesem Sinne also, falls nur mit dem mittleren Fehler der Funktion gerechnet wird, bekommen wir bei der Genauigkeitsabschätzung unter allen Umständen günstigere als die wahren Werte.

Gemäß der Funktionsform (8) können die zu einer jeden überschüssigen Beobachtungszahl und zur beliebigen Wahrscheinlichkeit gehörenden Multiplikatoren q bestimmt werden [4], (I. u. II Tafeln).

Tafel I

$f \backslash P$	0,683 = 68,3%	0,90 = 90%	0,95 = 95%	0,99 = 99%
1	1,824	6,314	12,706	63,657
2	1,318	2,920	4,303	9,925
3	1,195	2,353	3,182	5,841
5	1,109	2,015	2,571	4,032
10	1,052	1,812	2,228	3,169
20	1,025	1,725	2,086	2,845
60	1,008	1,671	2,000	2,660
120	1,004	1,658	1,980	2,617
∞	1,000	1,645	1,960	2,576

Tafel II

$f \backslash P$	0,683 = 68,3%	0,95 = 95%
1	1,445	14,947
2	0,625	3,415
3	0,455	1,914
5	0,334	1,091
10	0,230	0,593
20	0,162	0,358
60	0,090	0,186
120	0,063	0,130
∞	0,000	0,000

Es sei hier erwähnt, daß erfahrungsgemäß bei wenig überschüssigen Messungen der mittlere Fehler als Genauigkeits-kennzahl nicht ohne weiteres angenommen werden kann. In solchen Fällen ist es beinahe zweckmäßiger, auf Grund der früheren zahlreicheren Beobachtungen den entsprechenden mittleren Fehler des Meßverfahrens, der Meßgeräte und Beobachtungsumstände zu erfassen und die Abweichung zwischen dem letzteren und dem berechneten mittleren Fehler zu bestimmen, die innerhalb einer gewissen Grenze liegen muß. Falls wir die zu großen Wahrscheinlichkeiten ($P > 0,90 = 90\%$) gehörenden t - und q -Multiplikatoren der Studentischen Verteilung ins Auge fassen, sehen wir, daß diese aus meßtechnischen Gründen praktisch unannehmbare Intervalle liefern, obgleich Fehler mit beliebigen Größen vorausgesetzt werden. Einen anschaulichen Beweis gab hierfür der Fall, bei dem von den

Tafel III

	$P = 0,683 = 68,3\%$	$P = 0,95 = 95\%$	$P = 0,99 = 99\%$
$\varepsilon_x = t \mu_x$ ($f=1$)	$1,824 \cdot 2 = \pm 3,65$ mm	$12,706 \cdot 2 = \pm 25,4$ mm	$63,7 \cdot 2 = \pm 127,4$ mm
$\varepsilon_{\mu_x} = q \cdot \mu_x$ ($f=1$)	$1,445 \cdot 2 = \pm 2,89$ mm	$14,947 \cdot 2 = \pm 30,0$ mm	$72,4 \cdot 2 = \pm 144,8$ mm

Hin- und Rückmessungen (d. h. aus einer überschüssigen Beobachtung) ausgegangen wurde (z. B. bei den Längenmessungen oder beim Nivellement) und die zu den großen Wahrscheinlichkeiten gehörenden Vertrauens-Intervalle bestimmt werden. Es sei z. B. der mittlere Fehler einer Nivellierung ± 2 mm/km, so bekommen wir der Student'schen Verteilung entsprechend die Werte der Tafel III. Aus den errechneten Werten ist es gleich ersichtlich, daß das Vertrauens-Intervall des ausgeglichenen Wertes gemäß der normalen Verteilung bei zweifacher Sicherheit, d. h. bei $t_{\text{nor.}} = 2$ ungefähr das 13-fache des mittleren Fehlers, im Falle einer dreifachen Sicherheit ungefähr das 64-fache ist. Es ist aus praktischen Erwägungen bekannt, daß ein Intervall von $\pm 26,0$ mm schon als ein grober Fehler betrachtet wird und kann aus Genauigkeitsgründen nicht angenommen werden. Dieselbe Lage besteht betreffs des Vertrauens-Intervalls des mittleren Fehlers [5].

Ähnlicher Fall liegt vor, wenn wir von einer mit einem ± 2 mm mittleren Fehler behafteten doppelten Längenmessung ausgehen ($P = 0,99 = 99\%$; $\varepsilon_x = \pm 127$ mm).

Es kann also festgestellt werden, daß die ermittelten Intervalle aus praktischen Gründen nicht annehmbar sind. Hier kann außerdem auch bewiesen werden, daß bei der Zusammenfassung der Beobachtungen (durch Bildung der fiktiven Beobachtungen) sowie der willkürlichen Verminderung der Zahl der überschüssigen Beobachtungen die Genauigkeitsschätzung zu unrichtigen

Ergebnissen führt. Auf die Frage, wie verlässlichere Genauigkeitszahlen bestimmt werden können, werden wir noch zurückkehren.

Die Bestimmung des Vertrauens-Intervalls mit Hilfe der mathematischen Statistik ist ziemlich kompliziert [2, 6]. Durch gewisse Annäherungen können auch einfachere Zusammenhänge ermittelt werden, doch sind die auf diesem Wege gewonnen Werte meistens nicht von allgemeiner Gültigkeit. Da das Hauptziel die Ermittlung solcher Genauigkeitszahlen ist, in denen neben der Wahrscheinlichkeit auch die Zahl der überschüssigen Messungen zum Ausdruck gelangt, stellt sich die Frage, ob dies auch mit Hilfe der in der klassischen Fehlertheorie bekannten Begriffe erfolgen könne. Laut der Gauß'schen Fehlertheorie, die sich auf die normale Verteilung der Fehler und auf eine unendlich große Zahl von Beobachtungen stützt, kann es abgeleitet werden, ob mit der Ausdehnung dieses mittleren Fehlers eine Kennzahl gefunden werden kann, in der diese Daten einbezogen werden.

Betrachten wir zuerst den mittleren Fehler des mittleren Fehlers als die Meßzahl der Verlässlichkeit des mittleren Fehlers. Vollständigkeits- und Durchsichtigkeitshalber wollen wir die Grundlinien der in der Fachliteratur an mehreren Stellen behandelten Frage kurz zusammenfassen, um später unsere ausführlicheren Erörterungen vorführen zu können. Falls von den wahren Fehlern (ε) der Messung ausgegangen wird, ist die Verteilung deren Quadrate (ε^2) nicht mehr normal, sondern sie folgt der Helmert—Pearson'schen bekannten Verteilungsfunktion für die Quadrate der normalverteilten Veränderlichen [4, 7, 9]. Das Quadrat des mittleren Fehlers (Streungsquadrat) einer Wahrscheinlichkeitsveränderlichen ε^2 ist gleich der Differenz des zu erwartenden Wertes von ε^4 und des Quadrats des zu erwartenden Wertes ε^2 ([7]; S. 298.), also unseren Bezeichnungen entsprechend:

$$\mu_{(\varepsilon^2)}^2 = M(\varepsilon^4) - (M(\varepsilon^2))^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]^2}{n} - \left(\frac{[\varepsilon]^2}{n}\right)^2 \quad (13)$$

wo $\mu_{(\varepsilon^2)}^2$ das Quadrat des mittleren Fehlers der ε^2 — Wahrscheinlichkeits-Veränderlichen, M das Zeichen des zu erwartenden Wertes, in unserem Falle der Bildung des wahrscheinlichen Wertes ist (es leitet sich ab vom lateinischen Wort *mediam* = mittlerer Wert). Der zu erwartende Wert der n -ten Potenz der Wahrscheinlichkeitsveränderlichen ε ist:

$$M(\varepsilon^n) = \frac{2}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varepsilon^n \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\mu^2}\right) d\varepsilon. \quad (14)$$

Substituiert in Gl(13):

$$\mu_{(\varepsilon^2)}^2 = \frac{2}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varepsilon^4 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\mu^2}\right) d\varepsilon - \left(\frac{2}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varepsilon^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\mu^2}\right) d\varepsilon\right)^2. \quad (15)$$

Nach der Integration:

$$\mu_{(\varepsilon^2)}^2 = \frac{4 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \mu^4 - \mu^4 = 2 \mu^4, \quad (16)$$

d. h.

$$\mu_{(\varepsilon^2)} = \mu^2 \sqrt{2}. \quad (17)$$

Nachdem es bekannt ist, daß:

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \text{ ist,} \quad (18)$$

kann nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz der Wert:

$$\mu_{\mu^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 (\mu_{(\varepsilon_1^2)}^2 + \mu_{(\varepsilon_2^2)}^2 + \dots + \mu_{(\varepsilon_n^2)}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \mu_{(\varepsilon^2)}^2} \quad (19)$$

berechnet werden, wo $\mu_{(\varepsilon_1^2)} = \mu_{(\varepsilon_2^2)} = \dots = \mu_{(\varepsilon_n^2)}$ ist. In Gl(17) substituiert ergibt sich:

$$\mu_{\mu^2} = \mu^2 \sqrt{\frac{2}{n}}. \quad (20)$$

Da $\mu = \sqrt{\mu^2}$ ist, wird:

$$\mu_{\mu}^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu^2}}\right)^2 \mu_{\mu^2}^2 \quad (21)$$

bzw.

$$\mu_{\mu} = \frac{1}{2\mu} \mu_{\mu^2}. \quad (22)$$

Es ergibt sich also folgender Zusammenhang für den mittleren Fehler des mittleren Fehlers [8; S. 143]:

$$\mu_{\mu} = \frac{1}{2\mu} \mu^2 \sqrt{\frac{2}{n}} = \mu \sqrt{\frac{1}{2n}} = \frac{0,7071}{\sqrt{n}} \mu. \quad (23)$$

Vom wahren Wert auf den durch Ausgleich gewonnenen wahrscheinlichsten Wert übergehend, ist der mittlere Fehler des mittleren Fehlers:

$$\mu_{\mu} = \mu \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}} = \frac{0,7071}{\sqrt{f}} \mu = \frac{1}{\sqrt{2f}} \mu \quad (24)$$

bzw. im Falle von r Unbekannten:

$$\mu_{\mu} = \mu \sqrt{\frac{1}{2(n-r)}} = \frac{1}{\sqrt{2f}} \mu, = \frac{0,7071}{\sqrt{f}} \mu \quad (25)$$

wo f in jedem Falle die Zahl der überschüssigen Beobachtungen ist.

Derselbe Zusammenhang kann auch in dem Falle abgeleitet werden, wenn von der Helmert—Pearson'schen χ^2 (Chi-Quadrat) Verteilung ausgegangen wird:

$$\chi^2 = (n - 1) \frac{\sigma^2}{\mu^2} = f \frac{\sigma^2}{\mu^2}, \quad (26)$$

wo σ die auf Grund der wahren Fehler berechenbare Streuung (wahrscheinlicher Wert des mittleren Fehlers) ist. Die Dichtefunktion der Verteilung ist:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \left(\frac{f}{2\sigma^2}\right)^{f/2} \varepsilon^{f/2-1} e^{-f\varepsilon^2/2\sigma^2}. \quad (27)$$

Für den zu erwartenden Wert von χ^2 ergibt sich:

$$M(\chi^2) = f \quad (28)$$

und für das Quadrat der Streuung:

$$D^2(\chi^2) = \mu_{\chi^2}^2 = 2f \quad (29)$$

Für das Quadrat des mittleren Fehlers des mittleren Fehlerquadrats:

$$\mu_{\mu^2}^2 = \frac{2}{f} \mu^4 \quad (30)$$

und aus diesem laut dem vorherigen ergibt sich der mittlere Fehler des mittleren Fehlers zu

$$\mu_{\mu} = \mu \sqrt{\frac{1}{2f}}. \quad (31)$$

Es ergeben sich ähnliche Zusammenhänge für den mittleren Fehler des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, wenn die einzelnen Beobachtungen nicht das gleiche Gewicht haben.

Es kann der mittlere Fehler des mittleren Fehlers der ausgeglichenen Werte der unmittelbaren Beobachtungen ebenfalls ermittelt werden. In diesem Falle ist:

$$\mu_x^2 = \frac{\mu^2}{n} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}. \quad (32)$$

Im Sinne des Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

$$\mu_{\mu_x^2}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mu_{\mu^2}^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2}{n} \mu^4 = \frac{2}{n^3} \mu^4. \quad (33)$$

Gleichfalls kann abgeleitet werden, daß:

$$\mu_{\mu_x} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\mu_x^2}} \mu_{\mu_x^2}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\frac{\mu}{\sqrt{2}}}\right)^2 \frac{2}{n^3} \mu^4} = \frac{\mu}{\sqrt{2}n^2} = \frac{\mu_x}{\sqrt{2}n} \text{ ist.} \quad (34)$$

Wenn nicht von wahren Fehlern, sondern von Verbesserungen ausgegangen wird, so:

$$\mu_{\mu_x} = \pm \frac{\mu_x}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm \frac{\mu_x}{\sqrt{2f}}. \quad (35)$$

Wenn Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten vorkommen:

$$\mu_x^2 = \frac{\mu^2}{p_x} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{p_x \cdot n}. \quad (36)$$

Dem vorherigen entsprechend:

$$\mu_{\mu_x^2}^2 = \left(\frac{1}{p_x \cdot n}\right)^2 \cdot n \mu_{(\varepsilon^2)}^2 = \frac{1}{p_x^2} \cdot \frac{1}{n} \mu_{(\varepsilon^2)}^2 = \frac{1}{p_x^2} \cdot \frac{2}{n} \mu^4. \quad (37)$$

Das mittlere Fehlerquadrat des mittleren Fehlers der Unbekannten:

$$\mu_{\mu_x}^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu_x^2}}\right)^2 \mu_{\mu_x^2}^2 = \frac{1}{4\mu_x^2} \cdot \frac{2}{p_x^2 \cdot n} \mu^4 = \frac{1}{2p_x \cdot n} \mu^2 \quad (38)$$

bzw.:

$$\mu_{\mu_x} = \frac{1}{\sqrt{2p_x \cdot n}} \mu = \frac{\mu_x}{\sqrt{2n}}. \quad (39)$$

Von den wahren Werten auf die durch die Ausgleichung gewonnenen wahrscheinlichsten Werte übergend:

$$\mu_{\mu_x} = \frac{\mu_x}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{\mu_x}{\sqrt{2f}}. \quad (40)$$

Der in (40) vorkommende Wert:

$$\frac{1}{\sqrt{2f}} = f' \quad (41)$$

kann sogar in eine Tabelle zusammengefaßt werden.

Laut dem bisherigen sind die verlässlichsten Grenzen der berechneten oder ausgeglichenen Werte die folgenden:

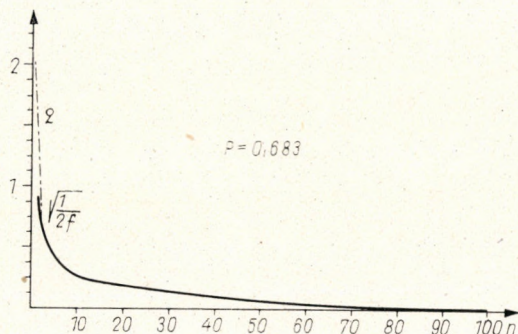
a) Der mittlere Fehler der Beobachtung der Gewichtseinheit:

$$\bar{\mu}_0 = \pm \mu_0 \pm \frac{\mu_0}{\sqrt{2f}} = \pm \mu_0 \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2f}} \right), \quad (42)$$

wo μ_0 der durch Ausgleichung gewonnene mittlere Fehler der Beobachtung der Gewichtseinheit ist.

b) Die verlässlichsten Werte des mittleren Fehlers des ausgeglichenen Wertes:

$$\bar{\mu}_x = \pm \mu_x \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2f}} \right). \quad (43)$$



c) Der mittlere Fehler der Funktion des ausgeglichenen Wertes:

$$\bar{\mu}_F = \pm \mu_F \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2f}} \right) \quad (44)$$

sind. Wenn wir der Student'schen Verteilung entsprechend die in (10) errechneten q Werte mit dem mittleren Fehler des mittleren Fehlers vergleichen, d. h. bei einer Wahrscheinlichkeit $P = 68,3\% = 0,683$ die zu den verschiedenen (f) überschüssigen Meßzahlen gehörenden q Werte errechnen und mit dem $1/\sqrt{2f}$ -Werten vergleichen, ergibt sich, daß im Falle von $f \geq 2$:

$$q \doteq \frac{1}{\sqrt{2f}} \text{ ist.} \quad (45)$$

Die Gl(45) ist in Abb. 1. veranschaulicht. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß bei $f = 2$ die auf zwei verschiedenen Wegen ermittelten Ergebnisse nur

gut annähernd, bei $f > 2$ aber praktisch absolut übereinstimmend sind. Dies ist auch aus den in Gl(29) erwiesenen Gleichheiten ersichtlich. Die Übereinstimmung hat aber auch ihre aus der Ausgleichsrechnung stammende Erklärung, da bereits im mittleren Fehler des mittleren Fehlers die Zahl der überschüssigen Beobachtungen zum Ausdruck kommt. Darauf wies schon die Erörterung [11] hin. Dies war übrigens die Voraussetzung für die Bestimmung des Vertrauens-Intervalls [10], [11]. So konnte der Zusammenhang zwischen dem Vertrauens-Intervall und dem mittleren Fehler des mittleren Fehlers (bei $P = 0,683$) bewiesen werden. Übrigens falls der um den mittleren Fehler des mittleren Fehlers vergrößerte Wert mit dem durch die Ausgleichung gewonnenen mittleren Fehler verglichen wird, ist es feststellbar, daß letzterer bei $f = 5$ überschüssigen Beobachtungen ungefähr um 32%, bei $f = 50$ um 10% und bei $f = 100$ um 2% fehlerhaft ist (Tafel IV).

Tafel IV

f	1	2	3	5	8	10	15	20	50	100
Abweichung in μ , %	71	50	41	32	25	22	18	16	10	2,2

Um die zu den berechneten oder ausgeglichenen Werten gehörende Genauigkeitszahl, d. h. den mittleren Fehler richtig ermitteln zu können, ist die Bestimmung des mittleren Fehlers des mittleren Fehlers unbedingt notwendig, weiter muß bei der Berechnung des mittleren Fehlers, direkt oder indirekt unbedingt auf die ursprünglichen Beobachtungen zurückgegangen werden [12, 13]. Letztere beruhen auf den tatsächlich bestehenden überschüssigen Beobachtungen (ihre Zahl ist wesentlich größer als die der zusammengezogenen), folglich wird die Verlässlichkeit des berechneten mittleren Fehlers wesentlich größer sein. Das oben Abgeleitete kann auf beliebige Ausgleichungsgruppen ausgedehnt werden.

Falls in (45) auch die Verlässlichkeit des mittleren Fehlers des mittleren Fehlers in Betracht gezogen wird, ist die Übereinstimmung auch im Falle $f < 2$ noch besser. Auf diese Frage wollen wir aber später noch zurückkehren.

In Gl(7) wurde bewiesen, daß das Vertrauens-Intervall der ausgeglichenen Werte sowie deren Funktionen folgendermaßen aufschreibbar sind:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \pm t\mu_x \\ \varepsilon_F &= \pm t\mu_F\end{aligned}\quad (46)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \pm \varepsilon_x = x \pm t\mu_x \\ \bar{F} &= F \pm \varepsilon_F = F \pm t\mu_F\end{aligned}\quad (47)$$

wo also t wieder auf Grund der Student'schen Verteilung, bei gegebener Wahrscheinlichkeit P und f überschüssiger Beobachtungszahl berechenbar ist. Das Vertrauens-Intervall für die ausgeglichenen Werte kann auch folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\pm \varepsilon_x = \pm t \mu_x = \pm (1 + t') \mu_x = \pm \mu_x + t' \mu_x, \quad (48)$$

wo $t = 1 + t'$ ist. Gleich dem vorherigen ist es aufschreibbar, da die zu erwartende Streuung der Summe der Quadrate $\sqrt{2n}$ ist, daß:

$$t' \mu_x = \frac{q}{\sqrt{2n}} \mu_x = \frac{\mu_x}{2\sqrt{nf}} = \frac{\mu_{\mu_x}}{\sqrt{2n}}. \quad (49)$$

Folglich:

$$t' = \frac{q}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{2\sqrt{nf}} = \frac{1}{\sqrt{4nf}}. \quad (50)$$

Falls von wahren Fehlern wieder auf Verbesserungen übergegangen wird, muß in Gl(50) anstatt n , $n - r = f$ geschrieben werden. Im Sinne des vorherigen ist das Vertrauens-Intervall der ausgeglichenen Werte bei $P = 0,683 = 68,3\%$ Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \pm \varepsilon_x &= \pm (1 + t') \mu_x = \pm \mu_x \pm \frac{\mu_{\mu_x}}{\sqrt{2f}} \\ \pm \varepsilon_F &= \pm (1 + t') \mu_F = \pm \mu_F \pm \frac{\mu_{\mu_F}}{\sqrt{2f}} \end{aligned} \quad (51)$$

D. h. samt den ausgeglichenen Werten:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \pm \left(\mu_x \pm \frac{\mu_{\mu_x}}{\sqrt{2f}} \right) = x \pm \mu_x \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2f} \cdot 2f} \right) = x \pm \mu_x \left(1 \pm \frac{1}{2f} \right) \\ \bar{F} &= F \pm \left(\mu_F \pm \frac{\mu_{\mu_F}}{\sqrt{2f}} \right) = F \pm \mu_F \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2f} \cdot 2f} \right) = F \pm \mu_F \left(1 \pm \frac{1}{2f} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Laut dem vorstehenden können die Vertrauens-Intervalle bei $P = 68,3\% = 0,683$ durch die in der Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung bisher bereits bekannten Begriffen bestimmt werden. Unsere Ableitungen beweisen also in jeder Hinsicht, daß der mittlere Fehler nicht selbstständig betrachtet werden kann, sondern man muß dessen Verlässlichkeit mittleren Fehler in Betracht ziehen, in dem dann auch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen zum Ausdruck kommt. Je größer die letztere, desto verlässlicher ist der mittlere Fehler des mittleren Fehlers. Theoretisch hat der mittlere Fehler des mittleren

Fehlers auch eine Verlässlichkeit, aber dessen hiesige Erörterung würde das Ziel unserer Studie überschreiten.

Unsere Ableitungen können auf einen jeglichen in der Geodäsie vorkommenden Fall ausgedehnt werden, und haben u. a. eine sehr große Bedeutung bei der Genauigkeitsbestimmung der auf verschiedenen Wege vollführten Punkteinschaltungen. Sie spielen eine wichtige Rolle bei der Verarbeitung von einer großen Zahl von Meßergebnissen (z. B. bei den zur Bestimmung der Genauigkeit geodätischer Instrumente vollführten Beobachtungen, bei der Bestimmung deren Annehmbarkeit, und Streuungsgrenzen). Auf diese wird aber jetzt hier nicht eingegangen [1]. Es kann auch bei der Auswertung solcher Beobachtungen, deren Ziel die Untersuchung der Bewegungen einer technischen Anlage ist, wesentlich sein, da es hier eine wichtige Rolle spielt, ob die Abweichung der beobachteten Werte von der Ungenauigkeit des Meßverfahrens oder aber von den tatsächlichen Bewegungen verursacht wird. Naturgemäß hat die genaue Untersuchung der Frage auch unzählige oder mindestens viele Kriterien [1,5].

Nun erhebt sich die Frage, welche Grenzen für die Größe der mittleren Fehler gestellt werden können. Erfahrungsgemäß können mit dem mittleren Fehler und dessen mittleren Fehler (in dem also die Zahl der überschüssigen Beobachtungen zum Ausdruck gelangt) folgende Streuungsgrenzen bestimmt werden:

bei

$$\begin{aligned}
 P = 0,683 = 68,3\% & \quad \mu_{\text{Grenze}} \geq \bar{\mu} \pm \mu_{\bar{\mu}} \\
 P = 0,95 = 95\% & \quad \mu_{\text{Grenze}} \geq 2 (\bar{\mu} \pm \mu_{\bar{\mu}}) \\
 P = 0,997 = 99,7\% & \quad \mu_{\text{Grenze}} \geq 3 (\bar{\mu} \pm \mu_{\bar{\mu}})
 \end{aligned} \tag{53}$$

wo $\bar{\mu}$ der auf Grund vieler Beobachtungen abgeleitete mittlere Fehler, $\mu_{\bar{\mu}}$ aber der zur gegebenen Anzahl der Messungen gehörende mittlere Fehler des mittleren Fehlers $\bar{\mu}$ ist.

Falls wir z. B. mit einem optischen Entfernungsmeßgerät auf Grund zahlreicher Beobachtungen den ermittelbaren mittleren Fehler abgeleitet haben, ergab sich:

$$\bar{\mu} = \pm 20 \text{ mm}/100 \text{ m}.$$

Mit Hilfe einer Versuchs-Meßserie wurde bestimmt, daß $\mu = \pm 35 \text{ mm}/100 \text{ m}$ ist, wo die Zahl der Beobachtungen $n = 16$ war. Bei $P = 68,3\%$ -igen Wahrscheinlichkeit soll untersucht werden, ob unsere Beobachtungen innerhalb des erlaubten Grenzwertes liegen:

$$\mu_{\bar{\mu}} = \frac{20}{\sqrt{2 \cdot 15}} = \pm 3,65 \text{ mm}.$$

Folglich

$$\mu_{\text{Grenze}} = \pm \bar{\mu} \pm \mu_{\bar{\mu}} = \pm 20,0 \pm 3,65 = (23,7 \text{ mm}/100 \text{ m}) .$$

Laut dem vorstehenden haben wir mit rund 11 mm die erlaubte Grenze überschritten; die Beobachtungen gehören daher in eine Kategorie der weniger verlässlichen Reihen.

Ähnlicherweise können unsere mit dem Theodolit durchgeführten Versuchswinkelmessungen, die mit Meßband oder Längenmeßgerät vollführten Entfernungsmessungen (Längenmessungen), Nivellierungen, Instrumentenuntersuchungen und andere Messungen ausgewertet werden. Falls die Beobachtungsserien betreffs des mittleren Fehlers die zulässigen Grenzen überschreiten, ist es laut der Fischer'schen Verteilung bestimmbar, inwiefern die Überschreitung annehmbar ist, oder aber unbedingt ein Unterschied zwischen der Genauigkeit der verschiedenen Meßserien getroffen werden muß ([1]; S. 112—115). Auch unsere Meßergebnisse werden nach irgendwelcher Verteilungs-Funktion untersucht, geben sie im Falle einer großen Wahrscheinlichkeit und bei wenigen überschüssigen Messungen praktisch keine annehmbaren Streuungsgrenzen. So bleibt uns in diesen Fällen nichts anderes übrig, als den nach den ursprünglichen Beobachtungen berechneten mittleren Fehler sowie dessen mittleren Fehler für eine $P = 68,3\%$ Wahrscheinlichkeit anzunehmen, weiter nach Gl(53) die zu der Wahrscheinlichkeit gehörenden Streuungsgrenzen empirisch zu berechnen. Andererorts wird noch auf die Frage zurückgekehrt, wie in gegebenen Fällen die verschiedenen Meßfehler bei der Auswertung von Meßreihen bestimmt werden können.

Es ist also offensichtlich, daß bei wenigen überschüssigen Beobachtungen auf die Bestimmung der Genauigkeitsmeßzahlen der ausgeglichenen oder berechneten Werte sehr geachtet werden muß. Die Gauß'sche Fehlerverteilung bezieht sich auf eine überaus große Zahl von Beobachtungen, und so gelangen wir durch mechanische, oft schablonmäßige Anwendung der klassischen Zusammenhänge oft zu irreführenden Genauigkeitsangaben. Man darf aber die durch die mathematische Statistik bzw. durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung gebotenen Grenzwerte nicht überschätzen, weil hierdurch oft die Genauigkeit der beobachteten oder ausgeglichenen Werte geringgeachtet werden. Die mit den Vertrauensintervallen nachweisbaren Werte und die mit dem mittleren Fehler des mittleren Fehlers abgeleiteten sind nur im Falle von mehr als zwei überschüssigen Messungen übereinstimmend (bei $f = 2$ ist die Übereinstimmung annähernd). Wir halten eher die mit dem mittleren Fehler des mittleren Fehlers nachweisbaren Werte, auch für $f = 1$ und $f = 2$ für annehmbar. Die neueren Ergebnisse der mathematischen Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung können bei unseren Untersuchungen verwendet werden, aber die erhaltenen Ergebnisse müssen nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch ausgewertet werden, weil wir ohnedies ebenfalls zu irreführenden

Ergebnissen gelangen. In dieser Beziehung sind die obigen Untersuchungen nicht nur theoretisch, sondern auch von praktischen Gesichtspunkten aus betrachtet wesentlich, weil sie eben bei den letzteren beruhigendere Ergebnisse zur Beurteilung der Annehmbarkeit und Genauigkeit der Messungen bieten. Man muß sich aber auch von dem realen Inhalt der nachgewiesenen Ergebnisse überzeugen.

B) Die Untersuchung des Falles der vermittelnden und bedingten Beobachtungen

Im Falle der vermittelnden und bedingten Beobachtungen können die mittleren Fehler der Unbekannten und deren F -Funktionen mit folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \mu_0 \sqrt{Q_{xx}} \\ \mu_F &= \mu_0 \sqrt{Q_{FF}},\end{aligned}\tag{54}$$

wo Q_{xx} der durch Ausgleichung gewonnene Gewichtskoeffizient der Unbekannten x (bei der Lösung der Normalgleichungen kann er in tabellarischer Form gewonnen werden), Q_{FF} der auf die Funktion F bezogene Gewichtskoeffizient (wird in Funktion der ausgeglichenen Werte bestimmt) und μ_0 der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-r}},\tag{55}$$

wo bekannterweise p das Gewicht der einzelnen Beobachtungen, v die Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen, n die Zahl der Beobachtungen, und r die Zahl der Unbekannten ist.

Da nach [5; S. 212. Gl. 52] der Quotient:

$$\frac{x - a}{\sqrt{\frac{[pvv]}{n-r} \cdot Q_{xx}}} = t\tag{56}$$

von Student'scher Verteilung ist, wo t der Multiplikationsfaktor zur Berechnung des Vertrauens-Intervalls des unbekanntes x -Wertes ist, der eine Funktion der (P) Wahrscheinlichkeit und der $(n - r)$ überschüssigen Beobachtungen ist (a ist der wahre Wert der Unbekannten x). Ähnlich der Beweisführung in Gl.(48) bzw. (49) ist:

$$\pm \varepsilon_x = \pm t \mu_x = \pm (1 + t') \mu_x = \pm \mu_x \pm t' \mu_x\tag{57}$$

und

$$t' \mu_x = \frac{\mu_{\mu_x}}{\sqrt{2f}}. \quad (58)$$

Durch Anwendung des obigen kann der ausgeglichene Wert und dessen Vertrauens-Intervall mit dem mittleren Fehler des mittleren Fehlers folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\bar{x} = x \pm \left(\mu_x \pm \frac{\mu_{\mu_x}}{\sqrt{2f}} = x \pm \mu_x \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2f}} \right) \right). \quad (59)$$

Ein ähnliches Ergebnis erhalten wir bei den Berechnungen bezüglich der Funktionswerte:

$$\bar{F} = F \pm \left(\mu_F \pm \frac{\mu_{\mu_F}}{\sqrt{2f}} \right) = F \pm \mu_F \left(1 \pm \frac{1}{2f} \right). \quad (60)$$

Gleichfalls sinngemäß gelangt man für den Fall der bedingten Beobachtungen oder für deren gewisse Funktionen zu dem Vertrauens-Intervall.

Ähnlich wie bei den unmittelbaren Beobachtungen ist auch die Bestimmung der Verlässlichkeit der berechneten Fehler. In diesem Falle kann auch der mittlere Fehler des mittleren Fehlers anstatt des Vertrauens-Multiplikators eingeführt werden.

In meisten Fällen der Ausgleichung von vermittelnden oder bedingten Beobachtungen ist die Zahl der überschüssigen Beobachtungen relativ sehr gering (z. B. Punktausgleichung, Netzausgleichungen); es ist daher laut dem Erörterten von äußerster Wichtigkeit, daß bei der Bestimmung der Genauigkeitszahlen gewissenhaft vorgegangen wird. Die mit unrichtigen mittleren Fehlern durchgeführten weiteren Genauigkeitsuntersuchungen führen auch zu fehlerhaften Ergebnissen. Hier gilt auch die in dem vorherigen bereits erwähnte These, daß bei der Bestimmung der ausgeglichenen Werte bzw. der Verlässlichkeit gewisser Funktionen außer der Verlässlichkeit der mittleren Fehler auch die ursprünglichen Beobachtungen in Betracht gezogen werden müssen [1].

SCHRIFTTUM

1. HALMOS, F.: Mérési eredmények kiértékelésével kapcsolatos gazdaságossági és pontossági vizsgálatok. (Genauigkeits- und Wirtschaftlichkeits-Untersuchungen bei Auswertung der Beobachtungsergebnisse). Dissertation. 1962.
2. HRISTOW, W. K.: Klassische und moderne Genauigkeitsabschätzungen in einigen Ausgleichungsfällen. *Acta Techn. Hung.* XXIII (1959), 16–43.
3. BÖHM, J.: Verteilung der Fehlerwahrscheinlichkeiten in ungleichartigen Kollektiven. *Studia Geophysica et Geodaetica* 1958/2.

4. HRISTOW, W. K.: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematischen Statistik und Methode der kleinsten Quadrate. Berlin (1961). Einleitung.
5. BÖHM, J.: Die Fehlerinterwellschätzungen in der Geodäsie. *Vermessungstechnik* 1961/4.
6. L'AUNÉ, O.: Megbízhatóság becslése kis mérésszámnál. (Abschätzung der Genauigkeit bei kleiner Anzahl der Messungen) *Geodézia és Kartográfia* 1958/3-4.
7. RÉNYI, A.: Valószínűségsszámítás (Wahrscheinlichkeitsrechnung) Tankönyvkiadó 1954.
8. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Auflage, Leipzig, Berlin 1907.
9. ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. (3. Auflage, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961).
10. ARNOLD, K.: Diskussion zum Vortrag Dr. Hristow's: Klassische und moderne Genauigkeitsabschätzungen in einigen Ausgleichungsfällen. *Acta Techn. Hung.* XXIII (1959), 44.
11. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Diskussion zum Vortrag Dr. Hristow's (Compte rendu du premier symposium international sur les calculs géodésiques) Cracovie, 1961. S. 176.
12. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Eine weitere Ausgleichsgruppe. *A Soproni Műszaki Egyetem Bányá- és Kohómérnöki Karának Közleményei*, XVIII. (1948-49) 325-332.
13. HALMOS, F.: Bestimmung des mittleren Fehlers durch Verbesserungen der Beobachtungsergebnisse. *Acta Techn. Hung.* XXIII (1959), 341-355.

DETERMINATION OF THE ACCURACY OF MEASURING RESULTS

F. HALMOS

SUMMARY

Author investigates the measuring numbers of accuracy which can be computed on the base of GAUSS' law of errors, furthermore, the intervals of confidence complying with STUDENT'S distribution. He proves that assuming a probability of $P = 0,683$ the interval of confidence can be deduced on the base of the mean error and its own mean error. Author extends his investigations to the adjusted values, the functions of same, as well as to the accuracy of the determination of the corresponding mean errors. Mean errors computed on the base of the method of the least squares result in an overestimation of the accuracy of measuring results. The measuring number of accuracy obtained by increasing the mean error with the mean error of itself gives more acceptable results theoretically and practically. In the case of only few redundant measurements and great probability, results obtained on the base of the functions of distribution are not satisfactory either. Therefore, author deduces error limits deducible on the base of intervals of confidence which he himself deduced, and complies with results gained by experience. The investigations are completed with numerical examples.

DÉTERMINATION DE LA PRÉCISION DES OBSERVATIONS

F. HALMOS

RÉSUMÉ

L'auteur examine les valeurs caractérisant la précision, calculables selon la loi de GAUSS, et les intervalles fiduciaires correspondant à la distribution selon STUDENT. Il prouve qu'en cas d'une probabilité de $P = 0,683$, l'intervalle fiduciaire peut être déduit de l'erreur moyenne et de l'erreur moyenne de cette dernière. Il étend aussi ses examens à la détermination de la précision des valeurs compensées, de leurs fonctions et des erreurs moyennes correspondantes. Les erreurs moyennes calculées selon le principe des moindres carrés surestiment la précision des observations. La valeur caractérisant la précision, augmentée de l'erreur moyenne de l'erreur moyenne, donne des résultats théoriquement et pratiquement meilleurs. En cas d'un nombre peu élevé d'observations surabondantes, les résultats obtenus des fonctions de distribution n'étant pas non plus satisfaisants, l'auteur déduit des limites d'erreurs correspondant aux résultats pratiques et déterminables par les intervalles fiduciaires calculés. Plusieurs exemples numériques complètent l'étude.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Ф. ХАЛЬМОШ

РЕЗЮМЕ

Автор на основе закона ошибок Гаусса анализирует расчетные показатели точности, а также промежутки надежности (конфиденция, фидуциария), соответствующие распределению Стюдента. Доказывается, что при вероятности $P = 0,683$ промежуток надежности можно вывести по средней ошибке и по средней погрешности этой средней ошибки. Исследования распространяются на определение точности уравненных значений, их функций, а также соответствующих средних ошибок. Средние ошибки, определенные на основе принципа наименьших квадратов, завышают точность данных измерений. Показатель точности, увеличенный средней погрешностью средней ошибки, дает результаты, которые более приемлемы теоретически и практически. Результаты, полученные при помощи функций распределения при небольшом избыточном числе измерений и большой вероятности, также неудовлетворительны, поэтому автор выводит пределы ошибок, которые можно вывести при помощи выведенных автором промежутков надежности и удовлетворяющие также опытным данным. Исследования дополняются числовыми примерами.

A POSSIBILITY OF THE DETERMINATION OF THE TELLURIC TENSOR

J. VERÓ

GEOPHYSICAL RESEARCH LABORATORY OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SOPRON

(Manuscript received November 2, 1963)

For the evaluation of telluric measurements, a method is suggested where, instead of a circle as in the relative ellipse method the sides of a square are used for the reduction of the vectors on the base-station. Accordingly, the end-points of the vectors on the moving station lie on the sides of a parallelogram. The advantages of the method are illustrated in several examples.

In the course of the telluric survey, the total or the relative ellipse method is used most frequently for the interpretation. The latter is, from a certain point of view, more advantageous, because it illustrates better the relation between the base-station and the moving station. On the other hand, also several difficulties arise in its application. In order to understand this, let us recall shortly, the basis of this method (for details, see [1, 2, 3]).

Between the corresponding telluric components of the telluric stations B and M , as known, the following relation exists (see Fig. 1; the symbol Δ will be henceforward omitted):

$$\begin{aligned}x_M &= ax_B + by_B \\y_M &= cx_B + dy_B.\end{aligned}\tag{1}$$

Here, x_M, y_M , resp. x_B, y_B are the read-off variations of the field intensity; a, b, c, d are the coefficients of the linear vector-function to be determined. From these, the relative area can be calculated:

$$t_R = ad - bc.\tag{2}$$

In the relative ellipse method, the related x and y values are to be reduced. The value of the resultant

$$\sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

on the base-station is taken as unit. Thus, the end-point of the base-vector lies on a circle. If the vector components of the moving station are reduced in the same measure, their end-points describe an ellipse, the so-called relative ellipse. The course of the computations is then, that the resultants

$$\sqrt{x_B^2 + y_B^2} \quad \text{and} \quad \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$$

are computed (or constructed), the ratio of the two, i.e.

$$\sqrt{x_M^2 + y_M^2} / \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

is formed and this is plotted in the direction of the moving station's vector. In this way, a point of the ellipse is obtained. This procedure has to be continued as long as a sufficient number of points are obtained for constructing the ellipse.

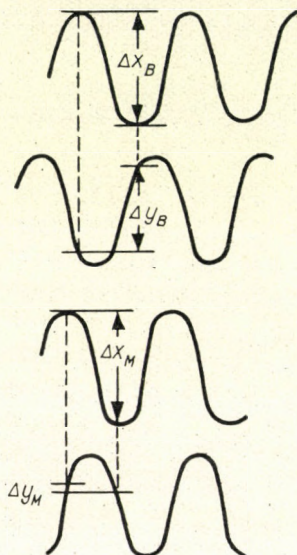


Fig. 1. Reading of telluric variations: the directional error of the vector on station *M* can be considerable

In practice, the following objections arise against the so constructed ellipse:

1. The ellipse is a geometric figure not easy to construct; no definite notions based merely on inspection about the way of continuation of an arc of ellipse exist. One can easily draw an inconsistent continuation to an arc of ellipse, especially in case of elongated ellipses, where the length of the great axis cannot be properly estimated.

2. Another difficulty arises from the character of the reading errors. The points for the construction of the relative ellipse are generally chosen in such a way that, in the time instants of the extremum values of one component, also the variations of the other components are read, too. In these time instants, generally there are no extremum values in the other component, but a more or less swift variation (Fig. 1). The latter, i.e. the absolute values

of the Y component in the figure is relatively small, its error, on the other hand, large. Accordingly, the value of the resultant can be fairly precisely determined, its direction, however, much less so. The directional errors make the determination of the great axis particularly difficult, since there are equally shorter vectors both on the right and the left side of the direction on the great axis, therefore the points with directional errors, falling into the direction of the great axis, are all shorter than the actual length of the great axis, thus seemingly — though to a smaller extent — shortening it.



Fig. 2. The part of the arc of ellipse around the small axis does not determine the great axis

3. The uncertainty of the small axis is caused mostly by the circumstance that — since the probability of the vector end-point staying in a certain direction is proportional to the square of the radius to be drawn in the corresponding direction until the circumference of the ellipse, — the variations in this direction are few and even these are small.

4. In the case of an extremely prolate ellipse, the relative ellipse method becomes entirely unusable, mainly on account of the errors mentioned under 3., further of the effect of the directional errors (for excentricities $A/B \geq 5$).

For the elimination of the first error-possibility it seems evident to determine for the moving station, instead of the ellipse, some other geometric figure which is easier to construct. In our case, the easiest one to be handled is the parallelogram. The points on the base-station can be reduced the most suitably to the sides of a square; the sides of this square are the straight lines $x_B = \pm 1$, resp. $y_B = \pm 1$. Since the sides of the square continue beyond the vertices into the infinite, opposite to the circle which is a closed geometric figure, it can be foreseen that this will imply, besides a higher degree of accuracy of construction, certain other advantages, too.

On the moving station, the following straight lines will correspond to the straight lines assumed above:

$$\begin{aligned} x_M^I &= a + by_B^I & (3A) \\ y_M^I &= c + dy_B^I \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_M^{II} &= ax_B^{II} + b & (3B) \\ y_M^{II} &= cx_B^{II} + d \end{aligned}$$

The moving station straight lines of the negative side are obtained by a change in the signs of y_B^I and x_B^{II} . In practice, these straight lines are obtained by dividing the moving station components first by x_B , then by y_B . Thus, the points of the straight lines 3A and 3B are determined. The equations of the straight lines come from 3A, resp. 3B, after the elimination of the parameters:

$$\begin{aligned} y_M^I &= \frac{dx_M^I - t_R}{b} & (4A) \\ y_M^{II} &= \frac{cx_M^{II} + t_R}{a} & (4B) \\ y_M^{III} &= \frac{dx_M^{III} + t_R}{b} & (4C) \\ y_M^{IV} &= \frac{cx_M^{IV} - t_R}{a} & (4D) \end{aligned}$$

The straight lines *A* and *C*, further *B* and *D* are parallel in pairs, and they intersect the coordinate axes on opposite sides but at the same distance from the origo.

The point of intersection of the straight lines 4A and 4B is:

$$X_1 = a + b, \quad Y_1 = c + d \quad (5)$$

That of the straight lines 4A and 4D:

$$X_2 = a - b, \quad Y_2 = c - d. \quad (6)$$

From the point of intersection of the straight lines, then, the coefficients a, b, c, d can be determined:

$$a = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad b = \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad c = \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \quad d = \frac{Y_1 - Y_2}{2}. \quad (7)$$

If the area on the base-station is made equal to the area of the triangle (0.0), (1.1), (-1.1), i.e. to the unit, then the area of the triangle (0.0), ($X_1 Y_1$), ($X_2 Y_2$) on the moving station will provide the relative area (Fig. 3):

$$t_R = X_1 Y_2 - X_2 Y_1. \quad (8)$$

According to these, the areal ratio can be obtained by first determining the straight lines given in equ. 4A — 4D, then finding their point of intersection and from these, computing the t_R values according to equation (8). Besides, it is very easy to determine the coefficients a, b, c, d , that is, also the linear vector function itself. In the relative ellipse method, there is no direct way for determining the latter; the only way is also to determine the directional distortion of a vector separately. Because of this, the relative ellipses cannot be reduced from one base to another. In the parallelogram method, this possibility is, however, given, since the only thing to do is to express the components of the first base in the vector-function between the moving station and the first base by the components of the second base ($a_R - d_R$, resp. $a'_R - d'_R$ are the components of the tensor between the moving station and the first basis, resp. between the two bases):

$$\begin{aligned} x_M &= (a_R a'_R + b_R c'_R) x_B + (a_R b'_R + b_R d'_R) y_B, \\ y_M &= (c_R a'_R + d_R c'_R) x_B + (c_R b'_R + d_R d'_R) y_B. \end{aligned} \tag{9}$$

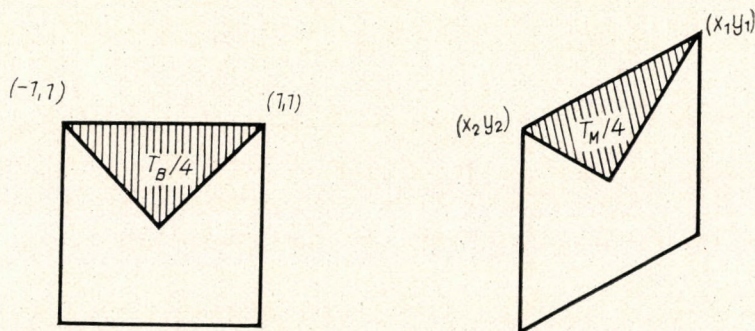


Fig. 3. The quarter-parallelogram used for the calculation of the areal ratio

In other words, this means that it is possible to draw the relative ellipse, of an area however large, related to a single base and to study the direction of the telluric currents on this basis.

If, for the sake of clearness, even the ellipse itself is to be determined, there is a very simple possibility for this: namely the drawn straight lines are tangents to the relative ellipse, since the sides of the square on the base-station were tangents to the base-circle, and in linear transformation, tangents remain tangents. The points of tangency are transformations of the points $(0, \pm 1)$, resp. $(\pm 1, 0)$, i.e. the points $(\pm b, \pm d)$ and $(\pm a, \pm c)$.

In order to introduce the course of the determination and the advantages of the method, the relative ellipses of some points measured in the course of the regional telluric survey of the *Geophysical Laboratory of the Hungarian Academy of Sciences*, and their tensors determined with the method discussed, are presented.

First, the computations related to the point measured near the locality *Hegykö* as a station of a nearly circular relative ellipse, that is, of a subsoil homogeneous as compared to the base-station (the observatory at Nagycenk) are introduced (Fig. 4). The variations read and multiplied by the sensitivities are the following:

No.	x_B	y_B	x_M	y_M	x_M/x_B	y_M/y_B	x_M/y_B	y_M/x_B
1.	-54	-99	-89	-139	+1,64	+2,58	+0,90	+1,40
2.	+56	+50	+89	+71	+1,58	+1,26	+1,78	+1,42
3.	+63	+46	+104	+56	+1,65	+0,88	+2,26	+1,22
4.	+43	+27	+73	+14	+1,70	+0,63	+2,70	+0,52
5.	+38	+167	+33	+222	+0,87	+5,90	+0,20	+1,32
6.	-7	-46	+86	-67	+12,3	-9,6	-1,87	+1,46
7.	-11	+29	-21	+44	+1,90	-4,00	-0,72	+1,52
8.	+14	-21	+23	-28	+1,65	-2,00	-1,10	+1,34
9.	+72	-43	+99	-69	+1,37	-0,96	-2,30	+1,60
10.	-56	+91	-107	+132	+1,91	-2,36	-1,18	+1,46

In the second half of the table, the points necessary for the construction of the straight lines are presented. The last two points (9 and 10) were additionally inserted for the purpose of determining the direction of the straight lines better. The ellipses obtained as the result of the two method (ellipse and parallelogram) naturally agree with each other. Here, a practical rule, very important in the construction of the straight lines, is mentioned: the axial section of the straight lines must be determined from points lying near the axis, — its direction, however, from the distant points. The most appropriate procedure is first to determine the direction of the straight line with the aid of a transparent rule, then to shift this, parallel with itself, so long till it fits the points near the axis the best.

At the same time, this also furnishes the distribution of points which is best for the proper application of the method. Slight variations of x_M , resp. y_M , together with the large values of the other component, determine the axial section, — the similar vectors lying in the direction of one of the axes, on the other hand, prescribe the direction of the straight lines.

In the above case, no special advantage of the parallelogram method is noticeable; even the example itself was used only to introduce the course of computations. The volume of the computations corresponds, on the whole, to that of the computations in the relative ellipse method. In the relative ellipse method, namely, the computations are the following:

twofold calculation of the resultants with the aid of the formula $\sqrt{x^2 + y^2}$
or by construction,

calculation of the ratio of the two resultants,

drawing of the ratio in a given direction.

In the parallelogram method:

twofold calculation of two ratios each (two by each slide-rule setting),

drawing of two points.

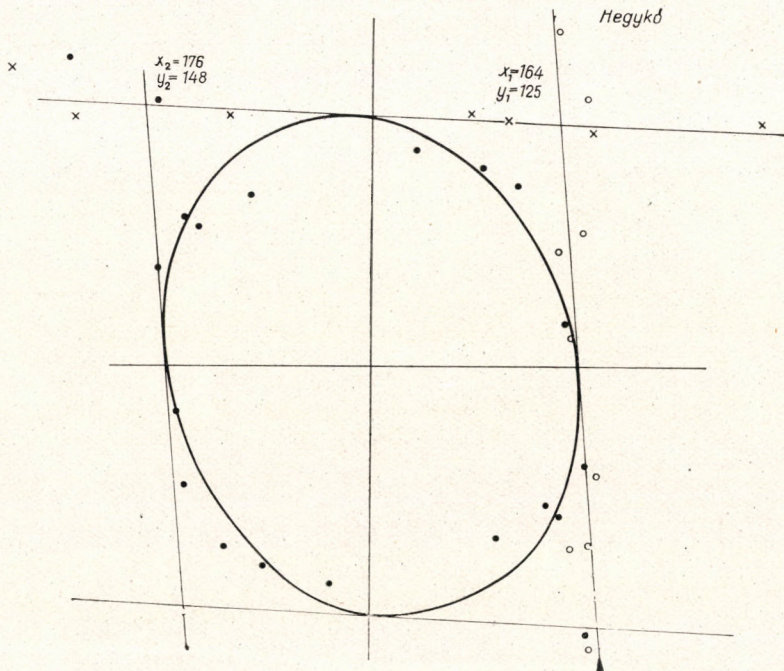


Fig. 4. Construction of the point "Hegykö"

As visible from this short set-up, the two kinds of computational work on the whole agree quite well.

It should also be mentioned that, in this example, the points lying too distant from the origo were not utilized; they will be discussed again later in connection with another example.

The second example is an ellipse recorded in *Tamási*, much more elongated, with variations of 10 sec periods (Fig. 5). Here, the course of the computations is already omitted, only the points of the relative ellipse and the corresponding square and the ellipse constructed with the parallelogram method are presented. In the parallelogram method, the dispersion of the points is rather large, but in spite of this, the direction of the straight lines is still fairly definite. The great axis of the ellipse determined with the latter method is longer by about

10% than the one drawn according to the relative points, and this can be precisely the effect of the sources of error enumerated in the first part of this study. Accordingly, the areal ratio would be computed, on the basis of the relative ellipse method, for different of about 10%.

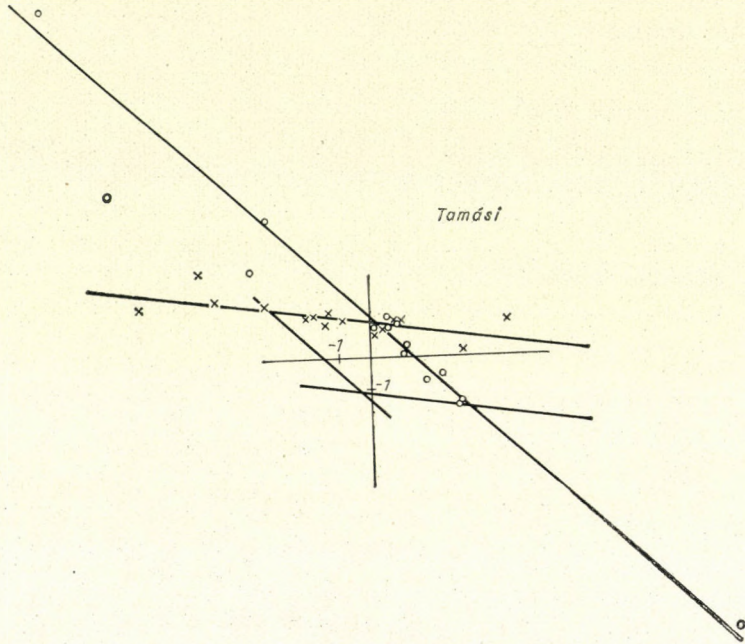
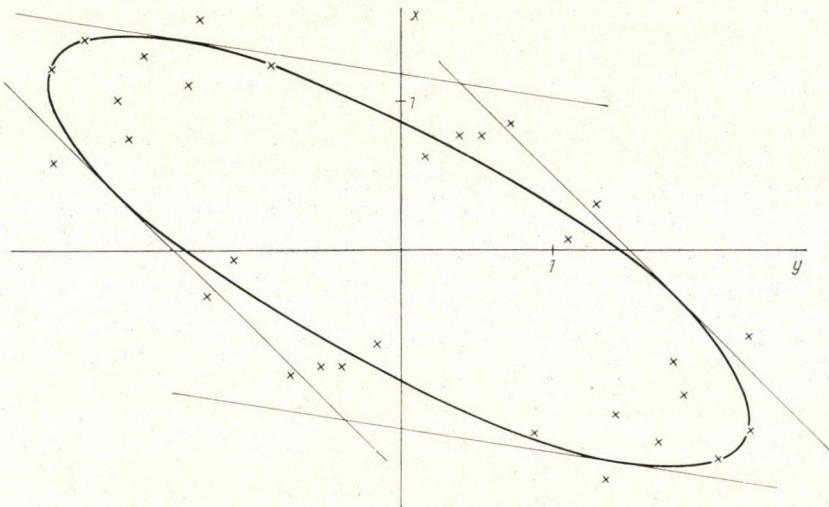
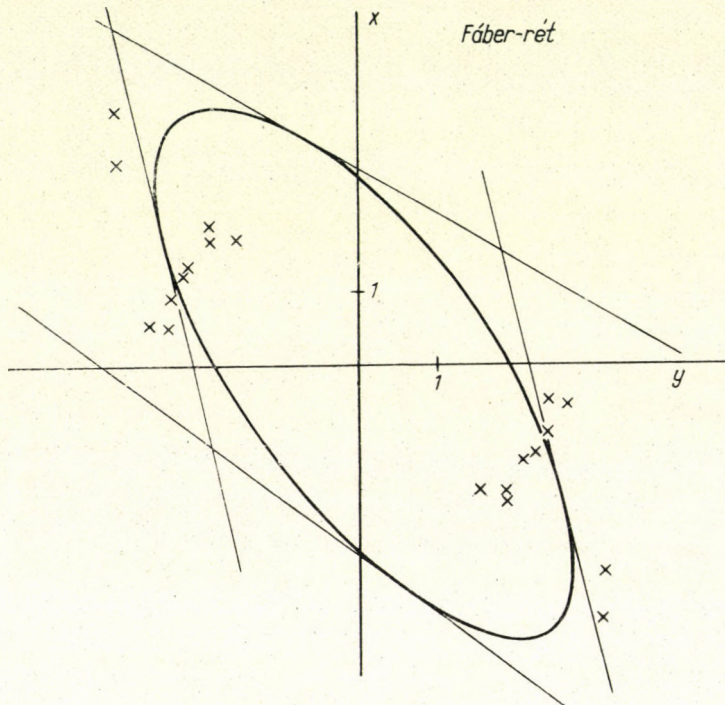


Fig. 5. Construction of the point "Tamási"
A) Construction of the parallelogram



B) The relative ellipse

(In the values divided by y_B , there is no peculiarity, these are of normal arrangement.) Assuming equal absolute errors, i.e. ± 2 units, in the reading, evidently this influences to a very great extent x_B in comparison to the other values. In this way, the corresponding point 1 will move away from its place considerably, but in the direction of its own radius-vector. Since, in comparison to the distance between point 1 and the origo, the adjusting straight line



B) The relative ellipse

intersects the x -axis at a small distance, the straight line and the radius-vector are nearly parallel, that is, the moving away of point 1 on account of the error in x_B will hardly influence its position in relation to the straight line. In an extreme case, if one of the components on the base-station is 0, this means that the adjusting straight line has, in the direction of the radius-vector corresponding to the unreduced read-off x_M, y_M values of the point in question, a point lying in the infinite, i.e. the straight line is parallel with its direction. If now, in the course of the interpretation, such points are sought for, for which one of the components on the base-station is 0, then the direction of the adjusting straight line will be determined by the radius-vector of the corresponding

moving point — of course within certain limits of error. Such a point is point 2 on the *Fáber-rét* ($x_B = 0, y_B = +48, x_M = -175, y_M = +196$). Accordingly the straight line sought for is nearly parallel to the radius-vector of the point $(-175, +196)$.

Finally, let us see on the basis of the examples discussed above, which of the disadvantages of the relative ellipse method — and to what extent — are eliminated by the parallelogram method.

1. Straight lines belong to the simplest geometric figures, therefore, here the first disadvantage falls out entirely.

2. The already mentioned uncertainty of the great axis of the relative ellipse is presumably eliminated by this method, since here every point is utilized for the determination of the great axis (when drawing the adjusting straight line).

This peculiarity of the parallelogram method is connected with the two factors which have already been mentioned: one of them is that, in this method, the figure used for projection is not closed but of infinite extension, therefore even points lying in the infinite and convenient for determining can be sought for; the other is that every point is used twice: once related to x_B , once to y_B , that is, also the direction of the base-vector is made use of, while in the relative ellipse method only the resultant $\sqrt{x_B^2 + y_B^2}$ figures in further computations; the direction of the vector is at most used for checking. The result of this is also that while the $a - d$ constants cannot be read from the relative ellipse, they can be read from the parallelogram.

3. The uncertainty of the small axis cannot be eliminated by this method either, although what was said above is valid, i.e. in this method, also the small axis is determined from the whole quantity of points. It is still to be mentioned that, in the determination of the straight lines, the middle section around the axis can generally be well fixed, the slope angle of the straight line, on the other hand, is less certain. The result of this is that a and d are more accurate, b and c being less so. (After all, the mean error of b and c , even in the strict adjustment of the *Fáber-rét* point, is twice as much as the mean error of a and d .) Since the areal formula $t = ad - bc$ includes the product $b \cdot c$, these, however, are smaller than a and d , the areal ratio is only slightly influenced by the larger error.

4. The method gives, even in the case of prolate ellipses (see *Fáber-rét*), satisfying results, far better than the relative ellipse method, provided that the base-station lies on a not too inhomogeneous site. In such a case, namely, it is possible to seek out variations where x_B and y_B are different — in a very favourable case, one of them can be even zero without the other being too small — and thus a sufficiently accurate construction of the straight lines, respectively — in the latter case — a reliable determination of their direction, can be ensured.

According to these, the method has important advantages as against the relative ellipse method; among its disadvantages, perhaps the most important one is that the meaning of the parallelogram is not so illustrative as that of the relative ellipse. If only the areal ratios were needed, this disadvantage might be not essential. On the other hand, if the directivity characteristics have to be utilized, the disadvantage is balanced by the possibility of reducing the ellipses measured for different bases to a common base.

REFERENCES

1. PORSTENDORFER, G.: Tellurik. *Freiberger Forschungshefte*, C 107 (1961).
2. KUNETZ, G.: Anwendung statistischer Eigenschaften der Erdströme in der praktischen Geophysik. *Freiberger Forschungshefte*, C 37 (1957), 1—15.
3. VERŐ, J.: Die Bestimmung der tellurischer Stationsellipsen. *Gerlands Beiträge*, 69 (1960), 257—268.

EINE MÖGLICHKEIT DER BESTIMMUNG DES TELLURISCHEN TENSORS

J. VERŐ

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird, an Stelle der Methode der relativen Ellipsen, eine neue Methode zur Auswertung tellurischer Messungen vorgeschlagen, bei der die Vektoren der Basisstation nicht auf einen Kreis, sondern auf die Seiten eines Quadrates reduziert werden, und dementsprechend bilden die Endpunkte der Vektoren der Feldstationen Seiten eines Parallelogramms. Die Vorteile dieser Methode werden durch Beispiele erörtert.

UNE POSSIBILITÉ DE DÉTERMINATION DU TENSEUR TELLURIQUE

J. VERŐ

RÉSUMÉ

Au lieu de la méthode des ellipses relatives, une nouvelle méthode est proposée par l'auteur, où les vecteurs de la station de base ne sont pas réduits sur un cercle, mais sur les côtés d'un carré, et les points finaux des vecteurs de la station mobile viennent sur les côtés d'un parallélogramme. Les avantages de cette méthode sont illustrés sur quelques exemples.

О ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕТЛУРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА

И. ВЕРŐ

РЕЗЮМЕ

Вместо метода относительных эллипсов, применяемого при измерениях теллурических токов, автором предлагается новый метод, в котором в базисном пункте векторы относятся не к окружности, а к граням квадрата, в связи с чем конечные пункты векторов подвижного пункта располагаются на сторонах параллелограмма. Возможности применения предлагаемого метода иллюстрируются на примерах.

THEORY AND PRACTICE OF THE EVALUATION OF MEASUREMENT RESULTS

F. HALMOS

GEODETICAL RESEARCH LABORATORY OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES SOPRON

[Manuscript received November 28, 1963]

The author analyses the accuracy of measurement results on the basis of different measurement series. It is established that, in the adjustment of fictitious values obtained with the reduction of observations, the non-consideration of the original observations always leads to erroneous accuracy estimation. Considerable deviations may exist between the mean errors derivable in several ways, and the most reliable result is furnished by the mean error based upon every observation. All the others are relative, suitable for the establishment of the inner concordance only.

The examination comprises the determination methods of accidental and systematic error influence. Also the relations of the numerical determination of the systematic error are derived. The evaluation based upon all the observations is regarded as justified also from the point of view of a better assertion of the Gauss principle.

Further on, the analysis of measurement results according to mathematical statistics is presented. Empirically followable error limits are derived, since the measurement accuracy is overestimated by the mean error of Gauss and underestimated by the reliability interval of Student. The author takes also the mean error of the mean error into consideration.

Finally the different methods of the determination of systematic errors are summarized, then a few remarks are made as to the determination of the weight number on the basis of the mean errors.

It is stated that the possibilities offered by up-to-date surveying instruments and computing devices can be utilized only when completed by technically and mathematically well-founded evaluation procedures established on up-to-date bases.

On account of numerous elementary sources of error, arising from instrument deficiencies, from the individual disposition of the observer and from the effects of the outer atmosphere, our measurements and observations are pregnant with major or minor errors. The adjustment computation, i.e. the error theory in agreement with the method of least squares, established at the beginning of the last century, is used to determine these errors and to take them into consideration in the course of the evaluation. In the least squares method, established by GAUSS and essentially amended by HELMERT, an infinite number of observations are assumed. In practice this is nearly never fulfilled, not only in geodesy but also in other technical or physical measurements. It is important, therefore, to execute — until the limits of practicability — as many observations as possible. It is important that the accuracy investigations should be extended to all measurements made in the interests of the aim in the corresponding relations during their error theory treatment. Only in this way can more reassuring qualificative numerical data be obtained for

the reliability of the observations, and also the analysis of the individual kinds of errors is better prepared.

In the evaluation and adjustment of the measurement results, usually the functions of the observations are directly involved in the computations much rather than the observations themselves. This is done in order to divide the preliminary computations in several groups and to make them more rationable to execute. According to the way in which the mutual dependence of the results obtained through the preliminary computations is taken into consideration, distinction is made between strict (exact) and approximating solutions.

In the subsequent adjustment of the already adjusted, so-called fictitious observations, the simplest case is when the functional relation between the measured and fictitious (derived) values is linear, and the independence of the so computed values can be ensured. In such cases, the adjustment by groups and the uniting of these results in a single group is decidedly advantageous, since the computation work, very tedious in itself, is distributed over several groups, can be reduced to smaller units, and this renders the control more favourable. As a very essential point, it should be emphasized that, owing to the independence, the same values are furnished, after all, for the unknowns by the usual mathematical-adjustment solutions, as in the course of an adjustment in a whole. The computation work, however, is not yet finished here, since the task is not only to achieve a direct or indirect derivation of the most probable value on the basis of the observation results (according to the Gauss principle), but to furnish also numerical data characteristic of their accuracy.

In the case of direct observations of different weights, if the measurements are made to determine a single unknown, the most probable value is

$$x = \frac{[p]_I o_I + [p]_{II} o_{II} + \dots + [p]_s o_s}{[p]_I + [p]_{II} + \dots + [p]_s} = \frac{[po]}{[p]} \quad (1)$$

where σ the value of the individual observations, p their weight, $O_I = [po]_I/[p]_I$, \dots are the fictitious values derived according to the measurements of the individual groups,

$[p]_I$, $[p]_{II}$ the weight of the observations in the individual groups (the Roman index refers to the group number).

By the consideration of all the observations, the mean error of x is obtained as follows:

$$\mu_{x_1}^N = \sqrt{\frac{[pvv]_I^s + [p\bar{v}\bar{v}]_I^s}{[p](N-1)}} \quad (2)$$

where P the total weight of the observations figuring in the individual groups, $v_I = x - o_I \dots$ is the difference of the most probable value and of the individual reduced fictitious observations (correction of the fictitious observations to the most probable value).

$v_1 = o_I - o_1 \dots$ are the corrections of the individual measurements related to the arithmetical mean of the group, within the individual groups,

N = the total of observations made for the determination of the unknown.

If it is found necessary to introduce a further unknown in each group, then, inspite of $(N - 1)$, $(N - s)$ has to be written in the denominator of (2), where s denotes the number of groups.

According to the computation method employed until now, only the first member under the root-sign was considered, that is, the mean error of the computed value was determined merely on the basis of the corrections of the fictitious observations. In the denominator of the mean-error formula, of course, $(s - 1)$ stands for $(N - 1)$, whereas s denotes the number of measurement groups. It is obvious that the relation under (2) does not agree numerically with the above-described one unless the changes in the numerator and in the denominator compensate one another. Since this occurs only in exceptional cases, in the above case introduced with the reduction of the measurement results, the non-consideration of the original observations always leads to erroneous accuracy estimates, while with due consideration of the weight numbers the same values are obtained for the unknowns, as in a computation made in a whole. A significant deviation may exist between the mean errors computable in different ways, whence it is not indifferent, even for further accuracy investigations, which one is employed. The situation is the same, if the computations are made according to the adjustment of intermediary or conditional observations. Apart from the detailed derivations, in a general case, the unit weight mean error may be computed, considering all the observations, with the following relation

$$\mu_{01}^N = \sqrt{\frac{f_I \mu_{0I}^2 + f_{II} \mu_{0II}^2 + \dots + [PVV]}{f_I + f_{II} + \dots + f}} \quad (3)$$

where $f_I, f_{II} \dots$ the number of excess measurements of the previous group adjustments,

$\mu_{0I}, \mu_{0II} \dots$ = the corresponding unit weight mean errors,

$[PVV]$ = the square sum of the weighted correction of the main adjustment,

f = the number of excess observations of the main adjustment.

It is evident also from relation (3) that the mean error computed according to corrections deriving from only the main adjustment will be a

mean error containing an inner-accuracy qualificative figure, characteristic of the main adjustment, which refers to a small part of all conditions satisfied, and therefore cannot be of an over-all validity. Besides this, the number of observations to be considered in the mean error computations is arbitrarily diminished, deteriorating the reliability of the mean error. Here the detailed investigation of certain problems, and the presentation of numerical examples are disregarded [1, 2, 3, 4].

*

Assuming the individual error elements as known, let us examine how the purely accidental errors can be distinguished from the systematic ones on an error theory basis. In this connection an examination of measuring procedures neutralizing the systematic error is essential both for the determination of the efficiency data of geodetic instruments and for the performance of the practical observations. The way of protection against the influence of accidental errors, on the other hand, lies in their minimization by means of repeated observations.

Let us assume again that a total N of observations has been made for the determination of the unknown X in s groups. Let the systematic error of the first group be α_I , that of the second one $\alpha_{II} \dots$ etc. These constitute the accidental part of the systematic influence, while the observations should be charged, in addition to this, even by a constant error α_0 occurring in every measurement [5]. Then the fictitious values derivable according to the measurements in the individual groups will be the following:

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \frac{p_1(o'_1 + \alpha_I + \alpha_0) + p_2(o'_2 + \alpha_I + \alpha_0) + \dots}{[p]_I} = \frac{[p\alpha']_I}{[p]_I} + \alpha_I + \alpha_0 \\ \sigma_{II} &= \frac{p_k(o'_{k+1} + \alpha_{II} + \alpha_0) + p_{k+1}(o'_{k+1} + \alpha_{II} + \alpha_0) + \dots}{[p]_{II}} = \frac{[p\alpha']_{II}}{[p]_{II}} + \alpha_{II} + \alpha_0\end{aligned}\quad (4)$$

and the unknown wanted:

$$x = \frac{[P_i O]_I^s}{[P_i]_I^s} + \frac{[P_i \alpha_i]_I^s}{[P_i]_I^s} + \alpha_0 \quad (5)$$

where P_i denotes the sum of weights belonging to each group, while — preserving the former denotations — α'_i signifies the observation charged by purely accidental errors ($\alpha_i = \alpha'_i + \alpha_I + \alpha_0$).

Hence the conclusion may be drawn that *the more varied the circumstances are under which the observations of the individual groups are made, the easier it is to neutralize the part of the systematic error, varying by groups, in the computed values; the constant error, however, continues to charge x with its full value.*

Let us examine next, how to compute the mean error and how to separate the individual error elements. Let us assume an evaluation where all the observations are relied upon, i.e. it is taken into account also in the mean error computations. It is known that the corrections of the individual observations (e.g. the first observation of the first group) are:

$$v_{I,1} = X - o_{I,1} = \varepsilon_{I,1} - \varepsilon_x = \varepsilon'_{I,1} - \varepsilon'_x + \alpha_I + \alpha_0 - \frac{[P_i \alpha_i]_I^s}{[P_i]} - \alpha_0, \quad (6)$$

where ε denotes the actual errors, ε' , only its part charged by only accidental errors. This may be written also in this way:

$$v_{I,1} = v'_{I,1} + \alpha_I - \frac{[P_i \alpha_i]_I^s}{[P_i]} = v'_{I,1} - \left(\frac{[P_i \alpha_i]_I^s}{[P_i]} - \alpha_I \right). \quad (7)$$

where $v'_{I,1} = \varepsilon'_{I,1} - \varepsilon'_x$ is the correction charged only by accidental errors. Passing over to correction square sums [5]:

$$[pvvb]_I^N = [pv'v']_I^N + \frac{[P]^2 - [P^2]}{[P]} \mu_a^2, \quad (8)$$

where μ_a is the mean systematic error introduced according to the accidental parts of the systematic error. As can be seen, the individual corrections are not charged by the constant part of the systematic error. Consequently, since it is expressed in x , a misleading value is obtained already in the determination of the mean error of the latter. On the basis of the correction square sums, passing over to the mean errors, the following relation is obtained:

$$\mu_x^2 = \mu_x'^2 + \frac{[P]^2 - [P^2]}{(N-1)[P]^2} \mu_a^2, \quad (9)$$

where μ_x is the mean full mean error of the computed unknown, computed under consideration of all the observations.

$$\mu_x^2 = \frac{[pvvb]_I^N}{[P](N-1)}, \quad (10)$$

and μ_x' is the mean error charged only by accidental errors. Since the corrections v' charged by accidental errors are not known, their determination involves certain difficulties. These can be surmounted by examining the corrections of the individual observations, as related to the arithmetic mean belonging to their group:

$$v'_{I,1} = O_I - o_{I,1} = \varepsilon_{\sigma I,1} - \varepsilon_{\sigma I} = \varepsilon'_{\sigma I,1} - \varepsilon'_{\sigma I} + \alpha_I + \alpha_0 - \alpha_I - \alpha_0 = \varepsilon'_{\sigma I,1} - \varepsilon'_{\sigma I}. \quad (11)$$

It is obvious that, if the mean error computations are made with correction square sums related to the mean of each group, values free of systematic errors are obtained:

$$\mu_{x_1(s)}'^{2N} = \frac{[p^{vv}]_{i(s)}^N}{[P](N-s)}. \quad (12)$$

Accordingly, if the numerically computable values of (10) and (12) are substituted in (9), the mean systematic error will be determinable:

$$\mu_a^2 = \frac{[P]^2(N-1)}{[P]^2 - [P^2]} (\mu_{x_1}^2 - \mu_{x_1(s)}'^{2N}). \quad (13)$$

In this way, then, the corresponding errors can be separated. The presence of systematic errors have other criteria, too, to be discussed briefly later. No reliable results are furnished if, in the calculation of the mean full mean error μ_x , are proceed from the corrections $x_I = x - o_I \dots$ because, according to (2)

$$[p^{vv}]_i^N = [P^V V]_i^s + [p^{vv}]_i^s = [P^V V]_i^s + [p^{vv}]_{i(s)}^N \quad (14)$$

and thus

$$[p^{vv}]_i^N > [P^V V]_i^s. \quad (15)$$

According to the suggestion by BÖHM, it is advisable to compute the measuring weights, after the determination of the systematic errors with due regard to these, since this is the way — under the strict observation of the error theory — to obtain the most probable value, well approximating the real value. According to the above, this is easily done, since the mean systematic error is known. The relations referring to the observations of equal accuracy, i.e. of equal weight, logically follow from the above considerations.

By supplying the mean full mean error related to all the observations the number of values taken into account is not diminished arbitrarily, that is, the Gauss principle prevails. In addition to this, the so computed mean error is not only a number, obtained by satisfying the last conditions, characteristic of the inner accordance, but also an accuracy qualifying number obtainable by satisfying every conditions. If the mean error of the definitive arithmetic mean were written down, according to the law of error spreading [4; p. 63], then the mean accidental error of the individual observations would decrease in proportion to the square root of the number of measurements; the mean systematic error is diminished proportionally to the root of the number of series, while the constant error exerts its influence in full measure. Among these, according to the above, the first two computed mean errors are fully expressed in our relations. In order to moderate the third member it is advisable to repeat the observations in circumstances as varying as possible; in this way,

namely, the systematic errors will be mostly varying according to groups and thus they appear with a mean systematic character. Another way of determining the systematic errors will be discussed shortly later [6, 4].

The above said will be presented directly by means of a short example. In three series, 141 observations were made for the determination of an instrument constant. The results obtained are shown in Table 1. The most probable value of the constant is

$$x = 0^{\circ}02'05.5'' \quad (16)$$

As for the mean systematic error, the following numerical value was obtained:

$$\mu_a^2 = \frac{(N-1)[P]}{[P]^2 - [P^2]} (\mu_{01}^{2N} - \mu_{01(a)}^{2N}) = 84.8; \mu_a = \pm 9.2'', \quad (17)$$

where the mean errors employed in the calculations refer to the unit weight observation. As can be seen, the mean systematic error is considerable, therefore its value must be taken into consideration by all means in the case of possible further error calculations.

Similarly an error formula considering all the observations must be employed also in different triangulation, polygonation and other computations. If, for example, the mean error of the point in a given network has to be determined on the basis of the computed mean errors, it is not sufficient to take the corrections obtainable through satisfying the conditions of the main adjustment, but also the previous dispersions must be considered.

*

For the evaluation of measured values, recently the employment of probability and mathematical statistical investigations, relying on a modern basis, has recently gained wider grounds. The concept of the true value, as applied in error theory and in adjustment computation, exists in the physical world but can usually not be attained by the measurements. This is so partly because these are charged by errors originating from the observer and the instruments, partly because even the value to be measured cannot be always defined exactly (e.g. not mathematical points but measuring marks are pointed at), moreover also the physical factors undergo certain changes, their constancy being assumable only for very short periods (e.g. refraction, temperature, crustal motions, etc.). According to all this, unvarying circumstances in the individual measurements of a measurement series may not — or only approximately — be assumed; therefore the true value is only approximated by the measured values. The adjusted values of measurements are referred to as the most probable value. According to the above interpretation, however, this is true in approximation only. With a great number of measurements, the deviation between the true and the most probable values is small, but in

every case the mean error of the latter is given as an accuracy index, expressing the degree of reliability of the value obtained. The question arises, to what extent the Gauss' mean error yields a satisfactory reliability value for the mean error, if the surplus observations are few. According to investigations based on mathematical statistics, the result is satisfactory only in the case of repetitions exceeding 30. Recently HRISTOV and BÖHM, in their studies [7] and [8], have observed empirically that the accuracy index determined in the classical way, the mean error, is smaller than the actual error, i.e. the accuracy of observations is generally overestimated. Without going into the details of the fundamentals of probability theory and of mathematical statistical problems here, let us examine the problem concerning the possibility of obtaining more reliable qualification indices.

Generally the measurement errors are composed of several accidental error elements, the oscillation of which is fairly small, but their number is large. Their oscillation follows the normal distribution of Gauss fairly well, and thus the most probable value derivable according to the measurements is the arithmetic mean value of the observations. It is a known fact, however, that reliability factors of the mean error value derived according to the normal distribution, belonging to different probabilities, leave the number of excess measurements disregarded [9, 10]. According to investigations based on probability computation, it can be demonstrated that the reliability interval is a function of the number of excess measurements. Consequently the omission is especially manifest if the measurement results are reduced in fictitious observations, since in this way the number of excess measurements is arbitrarily decreased; at the same time the dispersions of the original measurements are not expressed in the weight values, merely the repetition number of the measurement is. The number of the excess measurements is expressed in the reliability interval calculation corresponding to the Student distribution. *It must be remarked, however, that while the measurement accuracy is overestimated by the mean error computable in the classical way, it is strongly underestimated by the values computed according to the Student distribution; especially the small number of excess measurements and the reliability intervals belonging to high probabilities are not acceptable* [10]. If, for example, the kilometer mean error is $\mu_{\overline{v_m}} = \pm 2.0$ mm, then, according to the Student distribution, the reliability interval at $P = 95\%$ must be raised to the 13-fold of the mean error (according to GAUSS, to the twofold); at $P = 99.7\%$ to its 64-fold (according to GAUSS, to its threefold). From the practical point of view, these are regarded as gross errors, not acceptable as accuracy indices. The problem appears in a weighted measure especially at a small number of measurements, yet this is a very frequent case in practice. According to the investigations made, the reliability interval of Student for a probability case of $P = 68.3\%$ is derivable if the mean error and its mean error [10] are known. The reliability

interval of the computed x value is

$$\varepsilon_x = \pm t\mu_x = \pm \left(\mu_x + \frac{\mu_{\mu_x}}{\sqrt{2n}} \right); \quad (18)$$

i.e. the reliability interval of the computed mean error:

$$\varepsilon_{\mu_x} = \pm q\mu_x = \pm \frac{\mu_x}{\sqrt{2(n-r)}} = \pm \mu_{\mu_x}. \quad (19)$$

Accordingly, the probable mean error is

$$\bar{\mu}_x = \pm (\mu_x + q\mu_x) = \pm (\mu_x + \mu_{\mu_x}). \quad (20)$$

Thus, *in order to obtain the most suitable mean error of the measurements it is indispensable, in its computation, to take also the mean error of the mean error into consideration, further in every case the corrections of the original observations must be taken into account.*

Similar considerations apply to the functions of the adjusted or computed values, too.

The above deduced are applicable for every geodetical measurement. They have special importance in accuracy examinations of triangulations, tying of points, traverses and other geodetical measurements or in the evaluation of measurements carried out for the determination of efficiency data of new geodetical instruments, in the establishment of their acceptability and of dispersion limits. It is important to take them into account in the elaboration of geodetical measurements carried out for the sake of motion investigations of technical establishments. Here it is of importance to decide whether the deviation of the values obtained originates from the inaccuracy of the measurement or from actual displacements. For these limits, in cases of different probabilities, empirical error formulae have been established:

$$\begin{aligned} P = 0.683 = 68.3\% & \quad \mu_{\text{perm.}} \geq \pm (\bar{\mu} + \mu_{\bar{\mu}}) \\ P = 0.95 = 95\% & \quad \mu_{\text{perm.}} \geq \pm 2(\bar{\mu} + \mu_{\bar{\mu}}) \\ P = 0.997 = 99.7\% & \quad \mu_{\text{perm.}} \geq \pm 3(\bar{\mu} + \mu_{\bar{\mu}}). \end{aligned} \quad (21)$$

If the part computed according to the right side of the equation is smaller than the mean error allowed, the measurement is acceptable.

*

Similar problems arise in the determination of the mean error ellipse, i.e. of the base-point curve in the case of point adjustment. The method of the determination of the little and great axes of the ellipse may not be indifferent

in respect to further accuracy evaluation. As well as in the other mean error computation methods, it is important, also here, to compute them with corrections related to the original observations and not to diminish arbitrarily the number of excess observations. In the weighted arithmetic means and in their corrections, namely, the dispersions of the individual measurement are not expressed, and thus they might exert a disadvantageous influence upon the mean error and so upon the sizes of the ellipses. Beyond this, also the mean error of the mean error must be taken into consideration, since it may be considerable if the number of excess measurements is small (this being general in such cases). At different probabilities the empirical error limits presented in (21) can be accepted. By considering the above:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{\max} &= \pm \mu_{\max} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2f}} \right) = \bar{A}, \\ \bar{\mu}_{\min} &= \pm \mu_{\min} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2f}} \right) = \bar{B}.\end{aligned}\tag{22}$$

The x, y values wanted and their reliability interval:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= X \pm \mu_x \left(1 + \frac{\mu_{\mu_x}}{\sqrt{2f}} \right), \\ \bar{Y} &= Y \pm \mu_y \left(1 + \frac{\mu_{\mu_y}}{\sqrt{2f}} \right).\end{aligned}\tag{23}$$

These may be similarly considered in the determination of the average or direction-bound point mean error, too [11, 12, 13]. Also the determination of the factors of reliability intervals (Fisher distribution) can be carried out as strictly corresponding to probability computation, but also here, like in the previous cases, unacceptable sizes are furnished at high probability and small number of excess measurements. The error ellipses, i.e. base-point curves belonging to a certain point determination, computable in different ways, are contained in Fig. 1. The author suggests, also in the present case, to accept the result obtained under consideration of the mean error of the mean error, further of all the observations.

For a simple construction of the pedal curve an illustrative rapid method is presented in [17], beside the known procedures [14, 15, 16].

*

Now the method of the determination of systematic errors in connection with the evaluation of measurement series will be given in brief. Since the actual errors of the measurements, apart from certain exceptions (triangle closure, closure of levelling circle) are not known, the influence of systematic

and accidental errors must be determined in most cases, provided the mean errors are known. Generally, if several series of observations are carried out in order to determine a certain unknown, provided the mean values of the individual series show a deviation larger than the absolute value of their verified mean error, unquestionably the influence of systematic errors is to be suspected:

$$X_I - X_{II} > |\mu_x|. \quad (24)$$

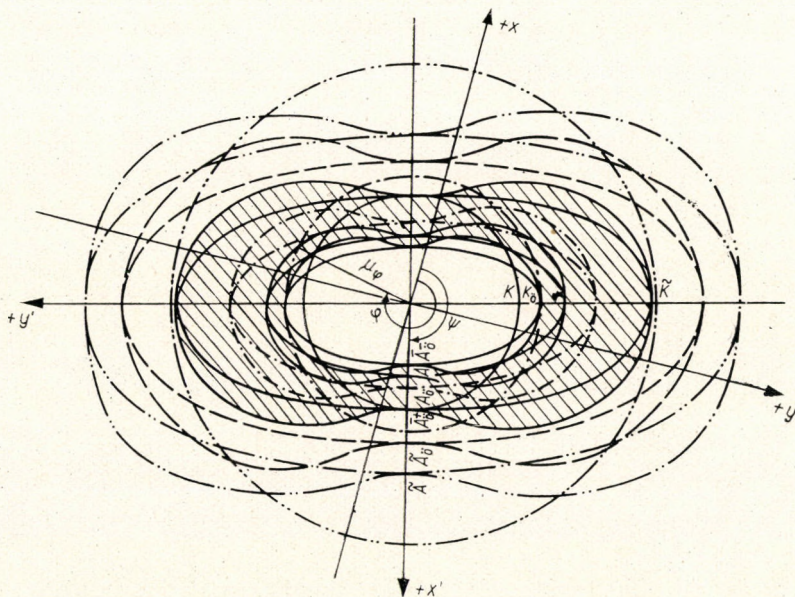


Fig. 1

Different ways of representing the mean error and of its base-point curve.

- A_δ = the great axis of the mean error ellipse computed by considering all the observations
- $\bar{A}_\delta^{(+)}$ = axis value computed by considering the reliability, i.e. mean error of the mean error
- \tilde{A}_δ = axis value computed according to Fisher's distribution under consideration of all the observations
- \hat{A} = axis value computed according to Fisher's distribution under consideration of the fictitious observations only
- x, y = the axes of the original system of co-ordinates
- x', y' = the direction of the main axes of the mean error ellipse (with a rotation angle of ψ)
- K = direction-bound average point mean error
- μ_φ = point uncertainty in the direction φ under consideration of all the observations

The examination of the measurement results on the basis of Fischer's distribution according to mathematical statistics reveals whether the results obtained are really charged by systematic errors. The quotient of two mean errors computed under consideration of all the measurements and with corrections

applied to the group means may not exceed, in the case of a given probability and of a given number of excess measurements, a certain critical limiting value:

$$K = \frac{\mu_{01}^{2N}}{\mu_{01(s)}^{2N}} < K_k. \quad (25)$$

For the value of K_k , again, tables may be constructed as a function of the probability and of the number of excess measurements. It should be noted however, that K_k values obtained at higher probability and small number of excess measurement (which is a frequent case) are practically unacceptable. This means that the empirical data established according to (21) are more acceptable even in this case.

α) One way of determining the actual value of the systematic error is the group-like elaboration of measurement groups according to the relation (13).

β) Another method present itself on the basis of the reliability intervals, when

$$|\mu_0| > \left| \mu'_0 \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2f}} \right) \right| \quad (p = 0,683). \quad (26)$$

If the observations are made in several series, the computations may be carried out again according to the previously discussed relations, considering however, the reliability of the mean error, that is the mean error of the mean error. The computations, of course, will be simpler if the observations are of equal weight [4].

γ) As a third method, the forming of differences, shortly mentioned in (24), may be underlined [4].

δ) Finally the systematic error can be determined from the adjustment by treating it as an unknown not measured. In this case also the reliability, the mean error of the systematic error can be obtained directly from the adjustment. The measure of the mean error will decide the acceptability of the computed systematic error.

For further investigations, the consideration of correct weight numbers cannot be indifferent. If, for example, the mean error of one of two observations is $\sqrt{3}$ -fold the other, and these are not considered when forming the weighted mean value, then a worse result will be furnished by the adjusted value and its mean error than by the mere acceptance of the more reliable value [4]. Since the mean error and the weight number are mutually dependent values, it cannot be indifferent what assumptions, what kind of mean error computation are relied upon in the determination of the weight numbers. A weight number chosen incorrectly may spoil the labour of the further accuracy examinations or adjustment.

*

In surveying practice, besides the unknowns to be determined on the basis of the observations, also the calculation of their reliable accuracy indices is of great importance. It is the surveyor's task to employ such a method in the course of the measurements and of their assessment as meets the accuracy and economy requirements. In all this, considerable assistance is provided by accuracy examinations on an up-to-date mathematical basis. The efficiency of the instruments employed in the measurements is increased to such an extent that a considerable part of the measuring errors consists of systematic errors. This is exactly why a great importance has to be attached to the determination of these on the basis of the assessment of the measurement results. The formerly wide-spread opinion, according to which he who calculates much thinks little, is more and more pushed aside by the employment of up-to-date computing techniques. Today this may be completed with the statement that he who calculates little, makes too much allowance, in a given case, at the expense of accuracy and does not make use, in several cases, of the possibilities offered by way of measurement results. The possibilities presented by modern instruments and computing equipments can be exploited only by completing these by technically and mathematically well-founded evaluation procedures relying on up-to-date bases.

Table I

Observation group	Derived mean value $\frac{[o]}{n}$	Repeti- tion number n	Weight P	Weight of the individual observa- tions, p	Unit weight mean error of the group μ_a^N	Mean full mean error $\mu_{0,}^N$	Mean acci- dental mean error, $\mu_{01(a)}^N$	
I.	0°02'15"	28	28	1 1	± 20.9"			
II.	0°02'09"	66	66	1 1	± 17.4"	± 18.4"	± 16.9"	$x = 0°02'05.5"$
III.	0°01'55"	47	47	1 1	± 12.3"			$\mu_a = \pm 9.2"$

LITERATURE

1. TÁRCZY—HORNOCH, A.: On the mean square error computation with the aid of measurement corrections, and on the use of correction equations belonging to the function of observed values (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1958/2.
2. HALMOS, F.: Mean square error determination on the basis of the corrections of measurement results (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1958/2.
3. HAZAY, I.: The computation of mean square errors in connection with the fictitious measurement results (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1963/2.
4. HALMOS, F.: Economy and accuracy investigations in connection with the evaluation of measurement results (In Hungarian). Dissertation of candidature. 1962.
5. БЕМ, И.: Групповая обработка результатов измерений. *Известия Высших учебных заведений, раздел Геодезия и Аэрофотосъемка*, 1961/3.
6. TÁRCZY—HORNOCH, A.: Über die Verwendung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten in Genauigkeitsuntersuchungen. *Freiberger Forschungshefte*, 1963, A. 275: (In Hungarian: *Geodézia és Kartográfia*, 1963/4).
7. HRISTOW, W. K.: Klassische und moderne Genauigkeitsabschätzungen in einigen Ausgleichs-fällen, *Acta Techn. Hung.* XXIII (1959).

8. BÖHM, J.: Die Fehlerintervallschätzungen in der Geodäsie. *Vermessungstechnik*, 1961/4.
9. L'AUNÉ, O.: The estimation of reliability at a small number of measurements (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1958/3—4.
10. HALMOS, F.: Determination of the accuracy of measurement results (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1964/1. (Acte Techn. Hung. 52 (1965).
11. TÁRCZY—HORNOCH, A.: Zur Berechnung der mittleren Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschnitt. *Z. f. Vermessungswesen*, 1957/11, resp. in Hungarian: *MTA VI. Osz. Közl. XXIV.*
12. HOMORÓDI, L.: The error ellipse and the point error (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1956/1.
13. VINCZE, V.: The optimal sizes of independent triangular networks (In Hungarian). Dissertation of candidature, 1955.
14. TÁRCZY—HORNOCH, A.: A simple construction of the base-point curve of the mean error ellipse (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1960/3.
15. GOTTHARD, E.: Geometrische Konstruktion zur Fehlerellipse, *Z. f. Vermessungswesen* 1943.
16. MILASOVSKY, B.: The error ellipse and the circular diagram substituting the former's base-point curve (In Hungarian), *MTA VI. Osz. Közl. XXIX* (1961).
17. HALMOS, F.: Construction of the base-point curve of the mean error ellipse in case of a simple arc-intersection (In Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1963, 2. special issue; resp. in German, *Acta Techn. Hung.* 47, (1964).

THEORIE UND PRAXIS DER AUSWERTUNG VON MEßERGEBNISSEN

F. HALMOS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Genauigkeit von Meßergebnissen wird in diesem Aufsatz auf Grund verschiedener Maßreihen untersucht. Es wird festgestellt, daß man bei der Ausgleichung von fiktiven Werten, erhalten durch Zusammenfassung der Messungen, immer zu falschen Genauigkeitsschätzungen gelangt, wenn die ursprünglichen Beobachtungen außer Acht gelassen werden. Wesentliche Abweichungen können zwischen den verschiedenweise ableitbaren mittleren Fehlern bestehen und das zuverlässigste Resultat wird durch den mittleren Fehler geliefert, der sich auf die gesamten Beobachtungen stützt. All die anderen sind nur relativ, für die Feststellung der inneren Übereinstimmung geeignet.

Es werden die Bestimmungsmethoden der zufälligen und systematischen Fehlerwirkungen untersucht. Auch der Zusammenhang für die zahlenmäßige Bestimmung des systematischen Fehlers ist abgeleitet. Eine Auswertung, die auf allen Beobachtungen basiert, ist auch vom Standpunkt einer besseren Geltung des Gaußschen Prinzips für begründet gehalten.

Im weiteren wird eine mathematisch-statistische Untersuchung der Meßergebnisse vorgeführt. Empirisch folgbare Fehlergrenzen werden abgeleitet, da die Meßgenauigkeit von dem Gauß'schen mittleren Fehler überschätzt, von dem Studentschen Zuverlässigkeits-Intervall aber stark unterschätzt wird. Hier wird auch der mittlere Fehler des mittleren Fehlers in Acht genommen.

Endlich werden die verschiedenen Methoden für die Bestimmung der systematischen Fehler zusammengefaßt; dann werden einige Bemerkungen betreffs Bestimmung der Gewichtszahl auf Grund der mittleren Fehler gemacht.

Es wird festgestellt, daß die durch zeitgemäße Instrumente und Rechenanlagen gebotenen Möglichkeiten nur mit auf zeitgemäßen Grundlagen ruhenden, technisch und mathematisch gut begründeten Auswertungsverfahren ergänzt ausgenutzt werden können.

THÉORIE ET PRATIQUE DE L'ÉVALUATION DES RÉSULTATS DE MESURAGES

F. HALMOS

RÉSUMÉ

L'auteur examine la précision des résultats de mesurages sur la base de différentes séries de mesures. Il constate que dans la compensation des valeurs fictives obtenues par la réduction des mesurages, on est amené à faire des évaluations erronées si on néglige les observations originelles. Des écarts considérables peuvent se produire entre les erreurs moyennes calculées de différentes manières. Le résultat le plus sûr est fourni par l'erreur moyenne s'appuyant sur la totalité des observations, les autres n'ayant qu'une valeur relative, convenant tout au plus pour établir l'accord intérieur.

L'auteur examine les méthodes permettant de déterminer l'influence des erreurs accidentelles et systématiques, et développe une relation pour la détermination chiffrée de l'erreur systématique. L'évaluation s'appuyant sur toutes les observations lui paraît d'autant plus motivée qu'elle répond mieux au principe de Gauss.

Par la suite, l'auteur présente une analyse des résultats de mesurages, basée sur la statistique mathématique. Il déduit des limites d'erreurs pouvant être suivies empiriquement, la précision des mesurages étant surestimée par l'erreur moyenne de Gauss et fortement sous-estimée par l'intervalle fiduciaire de Student. L'erreur moyenne de l'erreur moyenne est ici également considérée.

On trouve enfin une récapitulation des différentes méthodes de détermination des erreurs systématiques, suivie de quelques remarques concernant la détermination des indices de poids sur la base des erreurs moyennes.

L'auteur constate que les possibilités offertes par les instruments et calculatrices à programmation modernes ne peuvent être mises à profit que conjointement avec des méthodes d'évaluation modernes, reposant sur une base technique et mathématique bien établie.

О ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Ф. ХАЛЬМОШ

РЕЗЮМЕ

По различным сериям измерений в работе рассматривается точность результатов измерений. Делается вывод о том, что выравнивание фиктивных значений, получаемых путем подытоживания измерений, без учета первоначальных данных наблюдений, приводит всегда к неправильной оценке точности. Между средними погрешностями, выводимыми с применением различных приемов, могут встречаться значительные отклонения; наиболее достоверные результаты получаются при определении средней погрешности с учетом всех наблюдений. Все остальные приемы являются лишь относительными и определяют только внутреннее согласие результатов.

Обсуждаются методы определения случайных и систематических погрешностей и выводится соотношение для количественного определения систематических ошибок. Применение интерпретации по всем данным наблюдений обосновывается и преобладанием в этом случае принципа Гаусса.

В дальнейшем приводится рассмотрение результатов измерений по математической статистике. Выводятся предельные ошибки, прослеживаемые эмпирическим приемом, учитывая, что средняя погрешность по Гауссу дает преувеличение, а интервал надежности Стюдента — недооценку точности измерений. Здесь учитывается и средняя погрешность средней погрешности.

В заключение рассматриваются различные методы определения погрешностей систематического характера и приводятся некоторые замечания по определению веса по средним погрешностям.

В конечном итоге автор приходит к заключению, что возможности, представляемые современными измерительными приборами и счетно-решающими машинами, могут быть использованы при применении технически и математически хорошо обоснованных методов интерпретации.

GENERAL SOLUTION FOR THE DETERMINATION OF THE ADJUSTING STRAIGHT LINE

CS. ASSZONYI

COAL MINING TRUST OF TATABÁNYA, TATABÁNYA, HUNGARY

and

R. RICHTER

DEPARTMENT OF MINE EXPLOITATION, TECHNICAL UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRIES
MISKOLC, HUNGARY

[Manuscript received on November 28th, 1963]

An adjusting or adherent straight line based on the principle of the minimum of the square sum of residuals, which is to be attached to a set points of which are in a discrete, approached or given functional relation, can always be determined from formulae having identical forms. Therefore, relations (3) and (4) represent the *general solution* of the adjusting or adherent straight line. The internal sense of symbols figuring in these formulae is to be interpreted according to the character of the respective data.

The necessity for the best determining an adjusting straight line adhering to a set of discrete points arises in geodesy [5], in the analysis of mine exploitation [7, 8, 10] as well as in the other fields of engineering sciences [1, 3]. Mathematically analogous problems are the determination of the main direction of inertia in mechanics and the determination of the major and minor axes of the telluric station ellipse in geophysics [9]. In numerous fields of technical practice the adjusting straight line is utilized for the approximate analytic establishment of empirical functions [1, 3].

In their present paper based on their so far achieved results authors deal with the generalization of the determination of the adjusting straight line [1, 2, 3].

It is well known that under an adjusting straight line attached to a given system of isolated points such a straight line is to be understood, in reference to which the square sum of perpendicular residuals is minimum (Fig. 1).

In the related literature as solution of the aforementioned problem generally the minimum of the function

$$S(a; l) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i \cos a + y_i \sin a - l)^2 \quad (1)$$

is sought for (of course in relation (1) instead of the pole angle the bearing could also appear). In the literature related to this subject, as a result either the tangent of the double angle [5, 6, 10]:

$$\tan 2a = \frac{2D(x; y)}{D(y; y) - D(x; x)}, \quad (2)$$

or the tangent of the onefold angle [2]:

$$\tan \alpha = \frac{\lambda - D(x; x)}{D(x; y)}, \quad (3)$$

$$\tan \alpha = \frac{D(x; y)}{\lambda - D(y; y)}, \quad (4)$$

is deduced, where

$$D(x; x) \equiv \sum_{i=1}^n x_i x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \sum_{i=1}^n x_i x_i - n x_s^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_i, \quad (5)$$

$$D(y; y) \equiv \sum_{i=1}^n y_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n y_i}{n} = \sum_{i=1}^n y_i y_i - n y_s^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i \eta_i, \quad (6)$$

$$D(x; y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n x_s y_s = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \quad (7)$$

and

$$\lambda = \text{Min} \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right) = \frac{1}{2} [D(y; y) + D(x; x)] - \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} [D(y; y) - D(x; x)] \right\}^2 + D^2(x; y)}. \quad (8)$$

The result obtained from relation (2) is ambiguous, therefore it is more expedient to use relation (3) or (4). The bearing of the straight line is to be computed from formula

$$\tan \varphi = \frac{\lambda + D(x; x)}{D(x; y)}, \quad (9)$$

$$\tan \varphi = \frac{D(x; y)}{\lambda + D(y; y)}. \quad (10)$$

From relations (5), (6) and (7) that well-known *theorem* can also be read that an adjusting straight line, which satisfies the principle referring to the minimum of the square sum of residuals, runs through the centre of gravity x_s, y_s of the point system. Consequently, knowing the centre of gravity of a point system the unambiguous determination of the adjusting straight line requires merely the knowledge of the bearing or pole angle pertaining to same. This can be understood for the very reason, that knowing the pole angle the

pole distance l can be computed:

$$l = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cos \alpha + \sum_{i=1}^n y_i \sin \alpha}{n} = x_s \cos \alpha + y_s \sin \alpha. \quad (11)$$

*

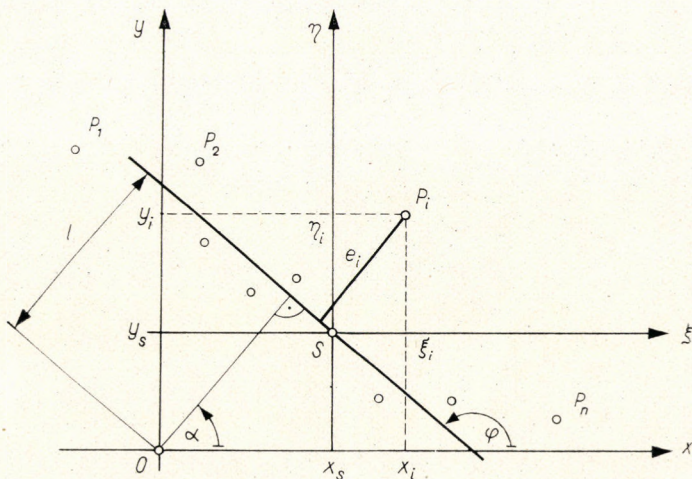


Fig. 1

A problem frequently arising in engineering practice consists in the determination of an adjusting straight line, which is not be attached to a discrete point system but to a continuous row of points.

It is often necessary to find an approximate analytic relation expressing a function given by a table (which contains observations, measuring results etc). The same necessity might also arise in the case of an analytically given function, if the functional relation is too complicated or not appropriate for utilizing from the view-point of certain aims.

In the first case there is a discrete value system, this however, does not represent the process as required. Therefore, a continuous function is to be laid through this system and the task is the determination of an analytic formula approaching the aforementioned continuous function as well as possible. In the second case a continuous function is given and for the simplification of same and adjusting function is to be sought for.

To make the utilization of relations to be found in this paper for the production of the aforementioned approximate analytic function possible, it is not quite necessary for this function to be a linear one. Namely, it is well-known that using an appropriate transformation simpler function types

can be linearized, and so they present themselves during the computation as linear functions.

Authors proved in their paper [3] that in the case of an adjusting straight line attached to a continuous row of points (not to a discrete one) the previously given formula of $\tan \alpha$ and $\tan \varphi$, which were deduced for a discrete point

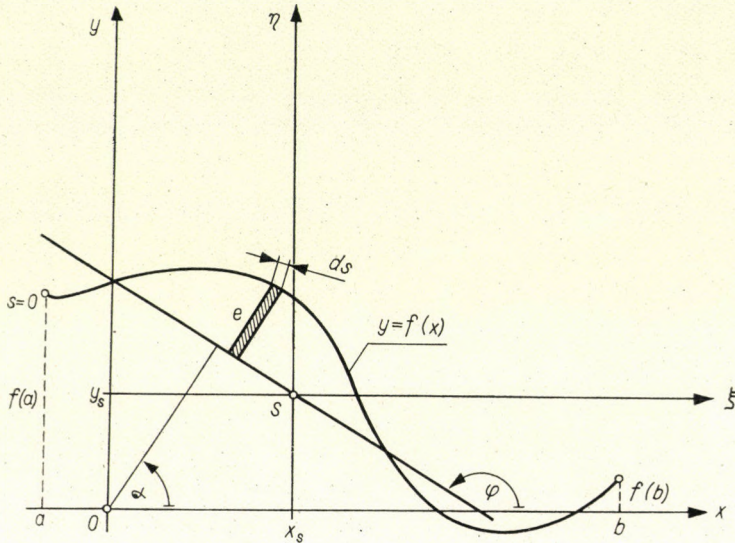


Fig. 2

system, might also be applied, merely the symbols figuring in these formulae have to be adequately interpreted.

In this case the square sum of residuals (Fig. 2) is characterized by the relation

$$S(a, l) = \int_{s=0}^{s=s_0} e^2 ds = \int_{s=0}^{s=s_0} [x \cos \alpha + f(x) \sin \alpha - l]^2 ds. \quad (12)$$

The adjusting straight now runs through the centre of gravity, too, the coordinates of which are expressed by the relations

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\int_{x=a}^{x=b} x ds(x)}{\int_{x=a}^{x=b} ds(x)} = \frac{\int_{y=f(a)}^{y=f(b)} x(y) ds(y)}{\int_{y=f(a)}^{y=f(b)} ds(y)}, \\ y_s &= \frac{\int_{x=a}^{x=b} f(x) ds(x)}{\int_{x=a}^{x=b} ds(x)} = \frac{\int_{y=f(a)}^{y=f(b)} y ds(y)}{\int_{y=f(a)}^{y=f(b)} ds(y)}, \end{aligned} \quad (13)$$

where $x = x(y)$ denotes the form of the function $y = f(x)$ solved according to x .

From the comparison of formulae (1) and (12) the following results are formally obtained:

$$D(x; x) \equiv \int_0^{s_0} x^2 ds - \frac{\int_0^{s_0} x ds \cdot \int_0^{s_0} x ds}{\int_0^{s_0} ds} = \int_0^{s_0} x^2 ds - x_s^2 \int_0^{s_0} ds = \int_0^{s_0} \xi^2 ds. \quad (14)$$

$$D(y; y) \equiv \int_0^{s_0} y^2 ds - \frac{\int_0^{s_0} y ds \cdot \int_0^{s_0} y ds}{\int_0^{s_0} ds} = \int_0^{s_0} y^2 ds - y_s^2 \int_0^{s_0} ds = \int_0^{s_0} \eta^2 ds, \quad (15)$$

$$D(x; y) \equiv \int_0^{s_0} xy ds - \frac{\int_0^{s_0} x ds \cdot \int_0^{s_0} y ds}{\int_0^{s_0} ds} = \int_0^{s_0} xy ds - x_s y_s \int_0^{s_0} ds = \int_0^{s_0} \xi \eta ds \quad (16)$$

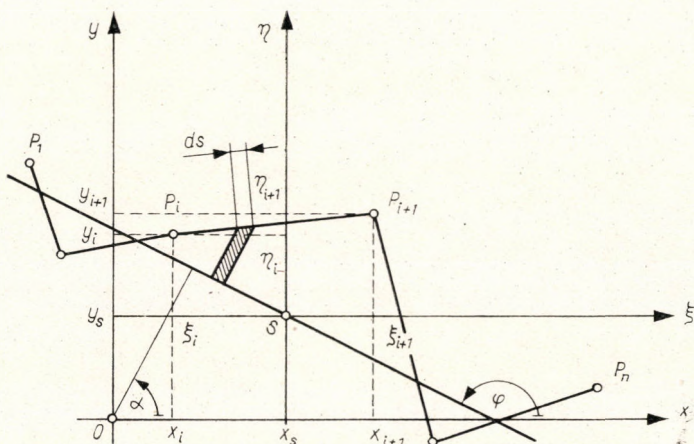


Fig. 3

where ξ and η are obtained by the transformation

$$\xi = x - x_s, \quad \eta = y - y_s. \quad (17)$$

The described problem also appears in mining practice, e.g. in the location of the axis line of level drifts. The drift at the height z_0 above the mean sea level is given by several of its discrete points, and one of its possible forms is obtained by connecting the points with straight lines. The demand related to the drift to be located is, that it should adhere to the corner points of this given polygon as well as possible (Fig. 3).

In this case the problem also consists in attaching an adjusting function to a continuous row of points, but as the curve to be approached consists of linear sections, the integration can be simply performed.

The degree of adherence is expressed by the function

$$\begin{aligned}
 S(a, l) &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t=0}^{t=1} e_i^2(t) dt = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} l_i \int_{t=0}^{t=1} \{ [x_{i+1} + t(x_{i+1} - x_i)] \cos a + [y_i + t(y_{i+1} - \\
 &\quad - y_i)] \sin a - l \}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{18}$$

The minimum of the above function occurs at the angle a which is determined on the base of formulae (3) and (4) if [3]:

$$\begin{aligned}
 D(x; x) &\equiv \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i \int_0^1 X_i^2(t) dt}{\sum_{i=1}^{n-1} l_i} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 X_i(t) dt \sum_{i=1}^n l_i \int_0^1 X_i(t) dt}{\sum_{i=1}^{n-1} l_i} = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} l_i \int_0^1 X_i^2(t) dt - x_s^2 \sum_{i=1}^{n-1} l_i = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \int_0^1 \Xi^2(t) dt,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 D(y; y) &\equiv \frac{\sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 Y_i^2(t) dt}{\sum_{i=0}^{n-1} l_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i \int_0^1 Y_i(t) dt \sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 Y_i(t) dt}{\sum_{i=0}^{n-1} l_i} = \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 Y_i^2(t) dt - y_s^2 \sum_{i=1}^{n-1} l_i = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \int_0^1 H^2(t) dt,
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 D(x; y) &\equiv \frac{\sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 X_i(t) Y_i(t) dt}{\sum_{i=0}^{n-1} l_i} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 X_i(t) dt \int_0^1 Y_i(t) dt}{\sum_{i=0}^{n-1} l_i} = \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 X_i(t) Y_i(t) dt - x_s y_s \sum_{i=0}^{n-1} l_i = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \int_0^1 \Xi(t) H(t) dt,
 \end{aligned} \tag{21}$$

where

$$\begin{aligned}
 X_i(t) &= x_i + t(x_{i+1} - x_i) = x_i + t\Delta x_i, & 0 \leq t \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
 Y_i(t) &= y_i + t(y_{i+1} - y_i) = y_i + t\Delta y_i, & 0 \leq t \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
 \Xi(t) &= \xi_i + t(\xi_{i+1} - \xi_i) = \xi_i + t\Delta \xi_i, & 0 \leq t \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
 H(t) &= \eta_i + t(\eta_{i+1} - \eta_i) = \eta_i + t\Delta \eta_i, & 0 \leq t \leq 1, & (i = 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned}$$

The values ξ_i and η_i are interpreted on the base of relations

$$\xi_i = x_i - x_s, \quad \eta_i = y_i - y_s \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

The coordinates x_s, y_s of the centre of gravity of the polygon in question are:

$$x_s = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i (x_{i+1} + x_i)}{\sum_{i=1}^n l_i}, \quad y_s = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i (y_{i+1} + y_i)}{\sum_{i=1}^n l_i}. \quad (23)$$

After substitutions and integrations the following results are obtained

$$D(x; x) = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \left[\xi_i^2 + \xi_i \Delta \xi_i + \frac{1}{3} (\Delta \xi_i)^2 \right], \quad (24)$$

$$D(y; y) = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \left[\eta_i^2 + \eta_i \Delta \eta_i + \frac{1}{3} (\Delta \eta_i)^2 \right]; \quad (25)$$

$$D(x; y) = \sum_{i=1}^{n-1} l_i \left[\xi_i \eta_i + \frac{1}{2} \xi_i \Delta \eta_i + \frac{1}{2} \eta_i \Delta \xi_i + \frac{1}{3} (\Delta \xi_i)^2 (\Delta \eta_i)^2 \right]. \quad (26)$$

REFERENCES

1. ASSZONYI, Cs.: Adjustment of a Discrete Value System by a Linear Function. *Acta Techn. Hung.* **47**. (1964).
2. ASSZONYI, Cs.: Contribution to the Determination of the Tangent of the Bearing Belonging to an Adjusting Straight Line Satisfying the Principle $\sum p e^2 = \min$. *Acta Techn. Hung.* **47** (1964).
3. ASSZONYI, Cs. — RICHTER, R.: Über die Schmiegungsgerade. *Bergbauwissenschaften*. In print.
4. FORRAI, S.: Simple and Direct Determination of the Tangent of the Bearing of an Adjusting Straight Line which Satisfies the Condition $\sum p e^2 = \min$! *Acta Techn. Hung.* **47** (1964).
5. MILASOVSKY, B.: Über die exakte Bestimmung der ausgleichenden Geraden. Kgl. Ung. Palatin — Joseph Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften, Fakultät für Berg-, Hütten- und Forstwesen zu Sopron. *Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung* (1943).
6. MILASOVSKY, B.: The Theoretical Problems of Level Drift Location. *Acta Techn. Hung.* **38** (1962).
7. RICHTER, R.: Comments on J. Sütty's Study: "The Determination of the Azimuth of Level Drifts." (In Hungarian.) *Bányászati Lapok*, (1960).
8. SÜTTI, J.: The Determination of the Azimuth of Level Drifts. (In Hungarian.) *Bányászati Lapok*, (1960).
9. TÁRCZY — HORNOCH, A.: A több pont közötti kiegyenlítő egyenes, illetve a tellurikus állomás-ellipszis kis- és nagytengelyének meghatározásáról. (On the Determination of the Adjusting Straight Line within Several Points, and the Major and Minor Axes of the Telluric Station Ellipse, in Hungarian). *MTA VI. Oszt. Közl.* **32** (1963).
10. ZAMBÓ, J.: The Location of Level Drifts. (In Hungarian.) *Bányászati Lapok*, (1957).

EINE ALLGEMEINE LÖSUNG FÜR DIE BESTIMMUNG DER AUSGLEICHS-, BZW. SCHMIEGUNGSGERADEN

CS. ASSZONYI—R. RICHTER

ZUSAMMENFASSUNG

Bei diskreten bzw. angenäherten oder in einer gegebenen Funktionsbeziehung stehenden stetigen Punkthaufen läßt sich der Polwinkel, der die auf dem Minimumprinzip der Quadratsumme aus den senkrechten Abweichungen beruhende Ausgleichsgerade charakterisiert, durch Formeln von der gleichen Form bestimmen. Dementsprechend bedeuten die Beziehungen (3) oder (4) eine allgemeine und eindeutige Lösung der Schmiegungsgeraden. Der innere Inhalt der in den Formeln vorkommenden Symbole ändert sich nach dem Charakter der Angaben.

SOLUTION GÉNÉRALE POUR LA DÉTERMINATION DE LA DROITE DE COMPENSATION

CS. ASSZONYI—R. RICHTER

RÉSUMÉ

Pour une multitude de points en relation fonctionnelle discrète, respectivement approchée ou donnée, l'angle polaire qui caractérise la ligne de compensation basée sur le principe de minimum de la somme quadratique des déviations perpendiculaires peut être déterminé par des formules de forme identique. Pour cette raison, les relations (3) et (4) représentent une solution générale et univoque de la droite osculatrice. Le contenu des symboles figurant dans les formules est à interpréter suivant la nature des données.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫРАВНИВАЮЩЕЙ ИЛИ СГЛАЖИВАЮЩЕЙ ПРЯМОЙ

Ч. АССОНИ—Р. РИХТЕР

РЕЗЮМЕ

Для случая непрерывного множества пунктов, связанных между собой дискретной, приближенной или заданной функциональной зависимостью, полюсные углы, — характерные для выравнивающей прямой, основывающейся на принципе минимума суммы квадратов перпендикулярных отклонений, — определяются формулами аналогичной формы. Поэтому соотношения (3) или (4) представляют собой *обобщенное* и *однозначное* решение сглаживающей прямой. Внутреннее содержание символов, входящих в формулы, изменяется в зависимости от характера данных.

GEODÄTISCHE PUNKTBESTIMMUNG MITTELS DER BEOBACHTUNG KÜNSTLICHER ERDSATELLITEN*

K. ARNOLD

GEODÄTISCHES INSTITUT POTSDAM

Die Beobachtungen der künstlichen Erdsatelliten gestatten eine wesentlich bessere geodätische Punktgenauigkeit zu erhalten, als prinzipiell ähnliche Methoden, bei denen Beobachtungen des Mondes eingeführt werden.

Schwierigkeiten entstehen durch die Störungswirkungen der noch unbekanntem Teile des Schwerefeldes der Erde; durch sie wird die Position des Satelliten im Raum mit einer Unsicherheit von etwa ± 70 m bis 100 m behaftet.

Wenn Distanzen von nur wenigen tausend Kilometern geodätisch überbrückt werden, dann können diese durch die Bahnstörungen verursachten Schwierigkeiten bei der Verwendung der »Bahnmethode« gemindert werden.

Völlig frei von den gravimetrischen Störungen ist man bei Simultanbeobachtungen der Satelliten. Sie lassen eine Punktgenauigkeit von ± 10 bis ± 20 Metern auf der Erdoberfläche erwarten.

Eine weitere Genauigkeitssteigerung ist möglich, wenn man berücksichtigt, daß in Richtung senkrecht zur Satellitenspur die Ausmessgenauigkeit in der photographischen Aufnahme wesentlich besser ist als in Richtung der Spur.

Bei der Beobachtung eines Blitzlicht-Satelliten hat man nicht die Schwierigkeiten, die sonst wegen der hohen Anforderungen an die Zeitmessgenauigkeit zu überwinden sind.

In wenigen Jahren ist die wissenschaftliche Nutzung der optischen Satellitenbeobachtungen zu einem der wichtigsten Forschungsgebiete der Geodäsie geworden.

An zahlreichen Beobachtungsstationen auf der Erde werden die Positionen der Satelliten mit der höchsten Genauigkeit beobachtet, wie es für geodätische Anwendungen gefordert wird. Hervorzuheben sind auch die 12 Baker-Nunn-Stationen, die recht gleichmäßig über die ganze Erde verteilt sind und die Beobachtung selbst sehr lichtschwacher Satelliten gestatten. Der erste geodätische Satellit, der Blitzlicht-Satellit ANNA — I B, leitete neue Möglichkeiten ein. Weitere Blitzlicht-Satelliten werden in den nächsten Jahren folgen. Auch die Simultanbeobachtungen der beiden Ballon-Satelliten Echo I und Echo II haben sich als für geodätische Zwecke sehr nützlich erwiesen. Seit einigen Jahren besteht eine enge Zusammenarbeit zwischen den osteuropäischen Ländern bei der wissenschaftlichen Auswertung der Satellitenbeobachtungen. In Westeuropa ist eine ähnliche Organisation im Stadium des Aufbaus. Bei der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG) wurde eine Kommission für Satellitengeodäsie eingerichtet. Die IAG veranstaltete kürzlich in Athen

* Nach einem Vortrag, der gehalten wurde im Rahmen des Geod. und Kartographischen Vereins in Budapest und Sopron, Oktober 1963.

ihr zweites Symposium über Satellitengeodäsie; sie hat kürzlich auch ein besonderes Internationales Büro für Satellitengeodäsie eingerichtet.

Mit diesen Sätzen wollte ich umreißen, welche erhebliche Bedeutung die Satelliten für die Geodäsie erlangt haben.

Gewiß, die Beobachtung der Planeten und vor allem des Mondes für geodätische Zwecke ist nicht grundsätzlich neu.

Die Beobachtung der Verfinsterung der Jupiter-Monde hat man früher bei der Zeitbestimmung auf hoher See herangezogen.

Ähnlichen Zwecken diene die Beobachtung der Mondstrecken, also der Entfernungen der Fixsterne vom Mond.

Aus den Störungen der Mondbewegung versuchte man die Erdabplattung zu bestimmen.

Photographische, spektroskopische und fotoelektrische Beobachtungen von Sonnenfinsternissen sollten ebenso wie die Beobachtungen des Mondes mittels der Markowitz-Kamera geozentrische Positionen von geodätischen Punkten liefern.

Diese Methoden alle werden heute kaum noch verfolgt, bzw. sie werden bestenfalls nur noch mit sehr gedämpftem Optimismus verfolgt, wegen der sehr mäßigen Genauigkeit der zu erwartenden Resultate. Das kommt daher, weil der Mond sehr weit von der Erde entfernt ist (300 000 km). Ein Winkelfehler von $\pm 1''$ bei der Beobachtung des Mondes relativ zu den Sternen kommt einer Verschiebung um 1,5 km auf der Erdoberfläche gleich.

Die Mondscheibe ist ferner nicht in mathematischer Strenge ein Kreis, die Beobachtungen am Mondrand werden durch die Topographie des Mondes erheblich beeinflusst.

Um Beobachtungen des Mondes für geodätische Zwecke verwenden zu können, müßte man sie auf etwa $\pm 0,01$ genau ausführen können; denn dann erreichte man etwa ± 10 bis 20 m für die Genauigkeiten der Positionen auf der Erdoberfläche, tatsächlich hat man die Genauigkeit aber kaum weiter als $0,1$ treiben können.

Solche Fehlerbetrachtungen sind in Bezug auf künstliche Erdsatelliten, die vielleicht 1000 bis 2000 km hoch fliegen, wesentlich günstiger. Beobachtet man nämlich die Richtung zum Satelliten innerhalb von $1''$ genau, so hat man die Position auf der Erdoberfläche auf etwa ± 7 m sicher.

Die mit der Unkenntnis der Topographie des Mondes verbundenen Schwierigkeiten entfallen natürlich bei Verwendung eines künstlichen Erdsatelliten sofort.

Diese genannten Vorteile bei der Benutzung künstlicher Erdsatelliten für geodätische Zwecke müssen freilich durch bestimmte Nachteile erkauft werden. Zu diesen Nachteilen gehören vor allem die sehr hohe scheinbare Bahngeschwindigkeit der künstlichen Erdsatelliten (bis zu 1° je Sek.) und die Beeinflussung der Satellitenbahn durch die ziemlich unbekanntes Schwere-

anomalien, das heißt, durch die Massenunregelmäßigkeiten in dem Erdkörper.

Wir werden darauf noch eingehend zu sprechen kommen.

Es liegt also das Problem vor, aus der Beobachtung der künstlichen Erdsatelliten gewisse Aussagen über geodätische Größen zu erhalten.

Die Beobachtungsmethoden selbst will ich nur kurz umreißen, um die für ihre Auswertung wichtigen Eigenschaften zu erläutern.

Für geodätische Zwecke kommen nur photographische Beobachtungen des Satelliten relativ zum Sternenhintergrund in Frage, wegen der hohen Genauigkeitsforderungen. Daraus kann man den räumlichen, dreidimensionalen Einheitsvektor ermitteln, der vom Beobachtungspunkt zum Satelliten weist.

Die Satelliten werden zur Zeit der Dämmerung beobachtet, wenn die Sonne sich also unter dem Horizont befindet und gleichzeitig noch den Satelliten beleuchtet.

Die Satelliten haben nur eine Größe von wenigen Metern, so daß nicht sehr viel Licht zum Beobachter reflektiert wird. Die meisten Satelliten sind nicht heller als Sterne von der 6. bis 8. Größenklasse. Darüberhinaus bewegen sie sich sehr schnell, was bei ihrer photographischen Beobachtung zusätzliche Schwierigkeiten hervorruft, nämlich einen Helligkeitsabfall von etwa 2^m Größenklassen. Die Nachführung der Kamera entsprechend der Bewegung des Satelliten ist wegen dessen hoher Geschwindigkeit schwierig und nur bei der Baker—Nunn—Kamera streng gelöst. Man ist also auf extrem lichtstarke Kameras mit einem Öffnungsverhältnis 1 : 1 bis 1 : 2 und Emulsionen höchster Empfindlichkeit (mehr als $25/10^\circ$ DIN) angewiesen. Auch sollte die Brennweite nicht zu groß sein, nicht mehr als 50 bis 75 cm.

Das Gesichtsfeld sollte sich wenigstens um 5° bis 10° öffnen, um eine größere Anzahl heller Sterne mit auf der Platte abgebildet zu haben.

Ein extrem rasch zu öffnender und zu schließender Verschuß ist Voraussetzung, wenn man die Zeitmarkierung auf einige tausendstel Sekunden sicher bekommen will.

Viele Beobachtungsstationen sind heute mit Fliegerkameras ausgerüstet. Die genannten Forderungen werden von ihnen kaum erreicht.

Spezialkameras für Satellitenbeobachtungen sind die Baker—Nunn—Schmidt-Kamera und eine bei Zeiss in Jena in der Entwicklung befindliche Einrichtung.

Mit dem Start eines Satelliten fängt es also an, und nach dem Brennschluß beginnt er seine nicht mehr durch Menschenhand beeinflusste Bahn um die Erde. Die Bahn des Satelliten ergibt sich dann aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen. Ist ϱ der Ortsvektor des Satelliten im Raum, er sei vom Schwerpunkt der Erde abgetragen, und V das Potential der Erde

$$V = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{a}{r} \right]^n P_{nm}(\sin \varphi) [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] \right\} \quad (1)$$

so wird für die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (2)$$

oder wenn wir den kugelsymmetrischen Teil im Potential abspalten

$$V = fM/r + \bar{V} \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} - fM \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{r} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4)$$

Wir haben also für die Bestimmung der Satellitenbahn ein System von 3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems enthält also 6 freie Parameter. Das sind die 6 Keplerschen Parameter der Schmiegungeellipse der Satellitenbahn. Sie ergeben sich als Funktionen der Zeit. Bei diesen 6 Keplerschen Parametern handelt es sich im einzelnen um folgende auf der Himmelskugel zu messende Größen:

1. Der Abstand des aufsteigenden Knotens vom Frühlingspunkt Ω .
 2. Der Abstand des Perigäums vom aufsteigenden Knoten, ω .
 3. Die Neigung der Satellitenbahn gegen die Äquatorebene i .
 4. Die Zeit des Durchgangs des Satelliten durch das Perigäum T .
- Ferner
5. Die große Halbachse a oder der Parameter p der Keplerschen Ellipse.
 6. Die Exzentrizität der Keplerschen Ellipse e .

Dies ist das geläufigste System der 6 Integrationsunbekannten. Ein anderes äquivalentes System von 6 Parametern, das enger mit der Erzeugung der Satellitenbahn durch eine angetriebene Rakete im Zusammenhang steht, ist das aus den 3 Komponenten des Ortsvektors und den 3 Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Rakete bei Brennschluß gebildete.

Die Lösung des obigen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung macht keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Es läßt sich mit bekannten Mitteln auf ein System von 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung transformieren. Es empfiehlt sich, in dieses System die 6 Keplerschen Elemente als abhängige Variable anstelle von x, y, z, x', y', z' einzuführen. Man hat dann nämlich sofort das gesuchte Ziel erreicht, nämlich diese 6 Keplerschen Variablen, durch die man ja die Bahn des Satelliten im Raum beschreiben will, hat man dann als Funktion der Zeit.

Das heißt, in den Differentialgleichungen treten die ersten Ableitungen der Keplerschen Parameter nach der Zeit auf. Diese sind zu eliminieren und dann ist noch über die Zeit zu integrieren.

Nach SHONGOLOVITSCH erhält man so für die Bewegung der Knotenlinie Ω während eines drakonitischen Umlaufs, das ist die Zeit zwischen einem Durchgang durch den Knotenpunkt bis zum nächsten Durchgang, folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \delta\Omega = & 3 \pi A_{20} \left[\frac{a}{p} \right]^2 \cos i + \\ & + \frac{35}{4} \pi A_{40} \left[\frac{a}{p} \right]^4 \cos i \left[\left(-\frac{6}{7} + \frac{3}{2} \sin^2 i \right) + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{9}{7} + \frac{9}{4} \sin^2 i \right) + \left(\frac{9}{14} - \frac{2}{3} \sin^2 i \right) e^2 \cos 2\omega \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei haben wir nur die von den zonalen Kugelfunktionen 2. und 4. Ordnung hervorgerufenen Störungen 1. Ordnung berücksichtigt. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \delta\Omega = \delta\Omega(A_{ik}, B_{ik}) & \quad 0, 1, 2 \dots \infty = i \\ \delta i = \delta i(A_{ik}, B_{ik}) & \quad 0, 1, 2 \dots \infty = k \\ \delta a = \delta a(A_{ik}, B_{ik}) & \quad 0, 1, 2 \dots \infty = k. \end{aligned} \quad (6)$$

In Strenge sind also alle 6 Keplerschen Elemente von den beiden ∞^2 fachen Mannigfaltigkeiten A_{ik} und B_{ik} abhängig.

In Bezug auf das Hauptglied in den Schwereanomalien, also auf die zonale Kugelfunktion 2. Ordnung, muß man sogar die Störung 2. Ordnung berücksichtigen.

Hat man die 6 Integrationskonstanten, das sind also die 6 Keplerschen Elemente, zu einem bestimmten Zeitpunkt durch Beobachtungen der Satellitenbahn bestimmt, so kann man mittels der obigen Ausdrücke für die zeitliche Änderung der Keplerschen Elemente diese 6 Parameter zu jedem anderen Zeitpunkt bestimmen. Damit könnte man dann auch die Position des Satelliten im Raum zu jeder Zeit angeben.

Bei diesem Vorgehen wird aber vorausgesetzt, daß die A_{ik} und B_{ik} alle bekannt sind. Anderenfalls lassen sich ja nicht die $\delta\Omega$, δi , δa bestimmen.

Diese Koeffizienten A_{ik} und B_{ik} kann man freilich auf unabhängigem Wege aus Schweremessungen an der Erdoberfläche bestimmen, man hat es auch getan. Doch müssen dabei die Schwereanomalien möglichst weitgehend auf der ganzen Erdoberfläche bekannt sein; ein Idealzustand, dem wir heute noch einigermaßen entfernt sind, wegen der noch fehlenden Schweremessungen auf der südlichen Hemisphäre.

In dem letzten Jahrzehnt hat man freilich versucht, aus Schwereanomalien die Stokesschen Konstanten zu bestimmen, man hat die Entwicklung bis zur 8. Ordnung getrieben (SHONGOLOWITSCH, KAULA), doch sind die Resultate

zu unsicher, um für die Bestimmung der Störungen der Satellitenbahnen in befriedigender Weise verwendet werden zu können.

Es wäre auch erforderlich, diese Entwicklungen, wie sie aus Schwereanomalien bestimmt worden sind, erheblich weiter auszudehnen bis in höhere Ordnungen als die achte.

Wenn wir also für die Bestimmung der geozentrischen Koordinaten aus Satellitenbeobachtungen, die genauen Positionen des Satelliten im Raum wissen müssen, so kann man diese nicht erhalten, indem man für einen bestimmten Zeitpunkt empirisch die momentanen Keplerschen Elemente bestimmt und ihre zeitliche Veränderung dann aus den Schwereanomalien ableitet.

So ist man zunächst gezwungen, den umgekehrten Weg zu gehen, den Satelliten möglichst während vieler Monate zu beobachten, um dann aus den beobachteten Positionen des Satelliten seine Keplerschen Elemente in ihrer zeitlichen Veränderung zu ermitteln. Die dann auf Grund der Beobachtungen ermittelten zeitlichen Variationen der Keplerschen Elemente sind nun Funktionen der Stokesschen Konstanten A_{ik} , B_{ik} wie ich es oben angegeben habe. Man löst also diese Gleichungen nicht von rechts nach links auf, sondern von links nach rechts und sucht die unbekanntes A_{ik} und B_{ik} als Funktionen der beobachteten $\delta\Omega$, δi , $\delta a \dots$ zu ermitteln, natürlich auf dem Wege einer Ausgleichung nach der Methode d. kl. Quadr. Sie erkennen sofort die hierbei auftretende prinzipielle Schwierigkeit, zwei ∞^2 -fache Mannigfaltigkeiten aus einer Ausgleichung zu ermitteln.

Man ist zu Kompromissen gezwungen und begnügt sich damit, etwa die A_{ik} und B_{ik} bis etwa zur 9. Ordnung mitzunehmen. Die Stokesschen Konstanten höherer Ordnung ist man dann genötigt, gleich null zu setzen, was freilich einige schwierig abzuschätzende Ungenauigkeiten mit sich bringt, wird doch die bis ins Unendliche ausgedehnte Summe der einzelnen Einflüsse der Stokesschen Konstanten höherer Ordnung einfach genähert gleich Null gesetzt.

Freilich weiß man, daß die A_{ik} und B_{ik} bei wachsendem i wenigstens wie $1/i$ gegen Null gehen, freilich erscheinen die A_{ik} , B_{ik} in den Formeln für die Variationen der Keplerschen Elemente nur in Verbindung mit dem Faktor $[a/\bar{a}]^i$, wenn a/\bar{a} das Verhältnis der großen Halbachse des mittleren Erdellipsoids zur großen Halbachse der Satellitenbahn ist, also ein Quotient, der immer kleiner als eins ist und daher bei wachsendem i ebenfalls gegen Null geht. An der Konvergenz der vernachlässigten Summe ist sicher nicht zu zweifeln, doch weiß man leider nicht genau, wie sehr sich die Werte der einzelnen Summanden durch die unendlich ausgedehnte Summation addierten.

Der geschilderte Weg hat sich trotz seiner Unvollkommenheiten jedenfalls in der Praxis als gangbar erwiesen.

Zur Erhöhung der Genauigkeit der Resultate wird man sich natürlich nicht mit der Ausgleichung der Beobachtungen eines einzigen Satelliten

begnügen, sondern mehrere Satelliten mit möglichst unterschiedlichen Bahnelementen gemeinsam bearbeiten.

Ein besonderer Gesichtspunkt entsteht noch aus der Tatsache, daß die Koeffizienten A_{ik} und B_{ik} nur zusammen mit den Faktoren $(a/\bar{a})^i$ auftreten, also z. B.

$$d\Omega = d\Omega \left[\left(\frac{a}{\bar{a}} \right)^i A_{ik}, \left(\frac{a}{\bar{a}} \right)^i B_{ik} \right] \quad (7)$$

$d\Omega$, die Bewegung der Knotenlinie, ist eine lineare Funktion von den in der Klammer erscheinenden Größen.

Beobachtet man also einen relativ niedrig fliegenden Satelliten, der die Höhe von 1000 km über der Erdoberfläche nicht übersteigt, so werden die Potenzen $(a/\bar{a})^i$ relativ groß sein und die Bahnstörungen werden wegen der Erdnähe des Satelliten relativ groß sein. Je größer aber die Auswirkungen der Stokesschen Konstanten auf die Bahn des Satelliten sind, desto besser und genauer wird man diese Stokesschen Konstanten bestimmen können, das heißt, man wird sie aus einem niedrig fliegenden Satelliten genauer ermitteln können als aus den Beobachtungen von relativ hoch fliegenden Satelliten von etwa 1500 bis 2000 km Höhe.

Man wird also die A_{ik} und B_{ik} aus den relativ niedrig fliegenden beobachteten Satelliten bestimmen, um mit ihnen dann die Bahnstörungen höher fliegender Satelliten relativ zuverlässig zu erhalten.

Bei einem 2000 km hoch fliegenden Satelliten klingt der Einfluß der Kugelfunktion höherer Ordnung rasch ab. Bei A_{5k} und B_{5k} beträgt er nur noch 20% der bei einem niedrigen Satelliten zu erwartenden Störungen.

Wegen der Bremswirkung der Atmosphäre empfiehlt es sich aber, für geodätische Zwecke einen Satelliten von wenigstens 700 km Höhe zu verwenden.

An den verschiedenen Satellitenbeobachtungsstationen beobachtet man also mehrere Satelliten während sie über dem Horizont ihre Bahn ziehen. Ist der beobachtete Bogen größer als 30° , so kann man mit angemessener Sicherheit aus diesen Beobachtungen die Keplerschen Elemente der Satellitenbahnen für die Mitten der Beobachtungszeiträume ableiten.

Man hat so schließlich die Keplerschen Elemente bestimmter Satelliten für möglichst viele Stellen eines zeitlichen Intervalls von der Ausdehnung einiger Wochen oder Monate. Dann analysiert man diese in Abhängigkeit von der Zeit gefundenen Elemente, indem man ihre Veränderung mit der Zeit durch die Einflüsse der Kugelfunktionen des Schwerefeldes der Erde darzustellen sucht. Die linken Seiten der Gleichungen (6) werden gewissermaßen beobachtet, die rechten aus der Störungsrechnung abgeleitet. So kommt man dazu, die Stokesschen Konstanten aus einer Ausgleichung zu bestimmen.

Auf dem geschilderten Wege haben verschiedene Autoren recht vorteilhafte Werte für die zonalen Kugelfunktionen niederer Ordnung im Erdschwerefeld gefunden.

Recht zuverlässige Ergebnisse sind wohl die von KOZAI vom Smithsonian Institution erhaltenen.

Er führte die Beobachtungen von 13 Satelliten in die Ausgleichung ein und kam zu folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned}
 A_{20} &= 1082,36 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,06 \\
 A_{30} &= -2,566 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,012 \\
 A_{40} &= -2,14 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,08 \\
 A_{50} &= -0,063 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,019 \\
 A_{60} &= +0,15 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,12 \\
 A_{70} &= -0,469 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,021 \\
 A_{80} &= -0,31 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,02 \\
 A_{90} &= +0,114 \cdot 10^{-6} \\
 &\pm 0,025
 \end{aligned} \tag{8}$$

Wie man sieht, liegt für die meisten Werte eine gute statistische Sicherheit vor. Neben der durch A_{20} zum Ausdruck gebrachten Gravitationswirkung des Äquatorwulstes treten vor allem die Werte A_{30} und A_{40} in den Vordergrund. Aus A_{30} leitet sich die sogenannte »Birneform« der Erde ab, indem der Krümmungsradius der Erde am Nordpol um etwa 10 Meter kleiner ist als am Südpol. Dieses Glied ist immerhin mit der erstaunlichen Genauigkeit von etwa 6 cm gesichert.

Man hat auch die anderen Stokesschen Konstanten bis zur 10. Ordnung zu bestimmen versucht, also die tesseralen und sektoriellen Kugelfunktionen, hat die Werte aber noch nicht mit einer annehmbaren statistischen Sicherheit finden können. Die Kenntnis der ersten 9 zonalen Kugelfunktionen erleichtert jedenfalls die Vorausbestimmung der Position eines Satelliten schon erheblich, vor allem die säkularen Störungen können so recht genau erfaßt werden, was sehr wichtig ist, vergrößert sich doch ihr Einfluß auf die Position des Satelliten linear mit der Zeit.

Die noch ziemlich unbekanntenen tesseralen und sektoriellen Kugelfunktionen bewirken dagegen Störungen periodischen Charakters, ihre Wirkung kann sich nicht mit der Zeit akkumulieren.

Es gilt also, nun die Frage zu beantworten, mit welcher Genauigkeit man die Position eines Satelliten im dreidimensionalen Raum bei der gegenwärtigen Kenntnis der Stokesschen Konstanten wird angeben können, bzw. wird vorausberechnen können.

Den säkularen Störungen brauchen wir uns dabei weniger zuzuwenden, weil sie sich einigermaßen gut bestimmen lassen. Die Genauigkeit der Bestimmung der periodischen Störungen ist das kritische Problem geworden.

Die Stokessche Konstante A_{ik} z. B. beeinflusst die Bewegung der Knotenlinie nach KAULA um Glieder der folgenden Form:

$$\Omega'_{ikpq} = \frac{F'_{ikp} G_{ipq} S_{ikpq}}{na^{i+3} \sqrt{(1-e^2)} \sin i} \quad (9)$$

hier ist über alle p und q zu summieren.

Wie man sieht, handelt es sich nicht mehr um sehr einfache Ausdrücke. Ihre Programmierung auf einer elektronischen Rechenmaschine ist sehr zweckmäßig.

Die F'_{ikp} sind komplizierte Funktionen von der Neigung des Satelliten, die G_{ipq} hängen im wesentlichen von der Exzentrizität der Bahnellipse ab.

Die uns interessierende Periode kommt durch den Ausdruck S_{ikpq} zum Ausdruck. Es ist

$$S_{ikpq} = \begin{cases} A_{ik} i - k & \text{gerade} \\ -B_{ik} i - k & \text{ungerade} \end{cases} \cos [(i-2p)\omega + (i-2p+q)M + k(\Omega - \Theta)] \quad (10)$$

ω ist der Abstand des Perigäums vom Knoten und hat eine relativ lange Periode; M die mittlere Anomalie des Satelliten; Ω die Länge des aufsteigenden Knotens; Θ die Sternzeit.

Die kürzesten Perioden werden durch den Ausdruck

$$(i - 2p + q) M$$

gebildet, bewegt sich doch ein Satellit in etwa 1,5 Stunden um die Erde.

p und q sind ganze Zahlen, p durchläuft den Bereich von 0 bis i , q den von $-\infty$ bis $+\infty$.

Bei einem Satelliten, der in etwa 1500 km über der Erde seine Bahn zieht, mit der Exzentrizität $e = 0,031$ und der Neigung $i = 78^\circ$ erhalten wir z. B. für eines der durch A_{41} und B_{41} verursachten periodischen Störungsglieder in der Knotenbewegung

$$\Omega'_{4120} = \kappa [A_{41} \sin(\Omega - \Theta) + B_{41} \cos(\Omega - \Theta)].$$

Dieser Ausdruck hat also im wesentlichen die Periode der Erdumdrehung.

Weil die Stokesschen Konstanten A_{41} , B_{41} nicht mit angemessener Genauigkeit bekannt sind, ist es nicht möglich, Ω'_{4120} mit obiger Formel zu ermitteln.

Wohl ist es aber möglich gewesen, die Größenordnung dieser Werte aus einer harmonischen Analyse der Schweremessungen auf der Erde zu bestimmen.

Zur Abschätzung des Einflusses der Stokesschen Konstanten auf die Positionen des Satelliten ist es daher möglich, in die Formeln für die periodischen Störungen die Werte größenordnungsmäßig einzusetzen.

Setzt man also beispielsweise die Stokesschen Konstanten größenordnungsmäßig in die Formel für die Störungen der Knotenbewegung ein und leitet die daraus resultierenden linearen Fehler in der Position des Satelliten ab, so wird man zu folgenden Werten geführt:

i	k	p	q	$\Delta\Omega$ meter
2	2	1	0	± 27
3	0	1,2	0	± 4
3	1	1	1	0
4	1	2	0	± 69
4	2	2	0	± 34
6	1	3	0	± 9

(11)

Variiert man also die i , k in ihrem ganzen Wertebereich und summiert über alle Glieder, so wird man zu Veränderungen in der Position des Satelliten um mehr als 100 m geführt. In Bezug auf die anderen Keplerschen Elemente gelten ähnliche Beziehungen.

Solange unsere Kenntnisse von den Werten der Stokesschen Konstanten nur auf die zonalen Kugelfunktionen bis zur 9. Ordnung beschränkt bleiben, und so lange die anderen zonalen und tesseralen und sektoriellen Kugelfunktionen unbekannt sind, wird man auch unter den günstigsten Bedingungen die Position eines Satelliten über mehrere seiner Erdumkreisungen hinweg nur mit Fehlern von einigen 100 Metern extrapolieren können.

Je höher der Satellit fliegt, umso geringer ist natürlich der Einfluß der Schwereanomalien auf die Position der Satelliten. Freilich muß man dann diesen Vorteil mit anderen zusätzlichen Schwierigkeiten erkaufen. Je höher der Satellit fliegt, umso lichtschwacher ist das Objekt und umso größer werden die Einflüsse der zufälligen Beobachtungsfehler auf die zu bestimmenden geozentrischen Positionen.

Wenn ich Ihnen soeben prinzipiell schilderte, wie aus den topozentrischen Beobachtungen der Satelliten die Bahnen der Satelliten bzw. die Stokesschen

Konstanten mittels einer Ausgleichung aller Beobachtungen gewonnen werden können, so habe ich dabei bewußt ein Problem unberührt gelassen, nämlich die Frage nach der genauen Position der Satellitenbeobachtungsstationen im Raum, muß man doch den vom Beobachtungspunkt zum Satelliten führenden Beobachtungsstrahlen nicht nur die ihnen zukommende Richtung, sondern auch die richtige Lage im Raum geben.

Man muß also von Erdmittelpunkt aus zunächst den Ortsvektor der Beobachtungsstation abtragen und in seinem Endpunkt dann den beobachteten und zum Satelliten weisenden Einheitsvektor errichten, um einwandfreie Voraussetzungen für die Durchführung der Ausgleichung zu haben.

Aber der absolute Ortsvektor der Beobachtungsstation ist ziemlich ungenau und nur auf vielleicht 100 m sicher bekannt.

Die klassischen geodätischen Methoden liefern ja nur relative Größen auf der Erdoberfläche, die nicht in direkter Beziehung zum Schwerpunkt der Erde stehen.

Freilich bieten uns die gravimetrischen Methoden die Möglichkeit, absolute Punktbestimmungen durchzuführen, und es ist auch sehr zu empfehlen, die absoluten geozentrischen Positionen der Beobachtungsstationen auf diesem Wege zu ermitteln. Wegen der vielen gravimetrisch noch nicht erfaßten Flächen der Erde ist diese gravimetrische Methode nur sehr beschränkt anwendbar.

Es wird ferner immer noch ein für alle Stationen gültiger Fehler in radialer Richtung von der Größe 10 bis 20 m verbleiben, wegen der Unsicherheit in der Kenntnis der großen Halbachse des mittleren Erdellipsoids.

Bisher ist es kaum gelungen, diese gravimetrischen Auswertungen in angemessener Genauigkeit durchzuführen, und wir müssen davon ausgehen, daß die geozentrischen Positionen der Beobachtungsstationen sowohl in radialer als auch in den beiden horizontalen Richtungen um etwa ± 100 m unsicher sind.

Führt man also in die Ausgleichung der Satellitenbeobachtungen nicht nur die Stokesschen Konstanten, sondern auch noch die Koordinaten-Tripel der geozentrischen Positionen der Beobachtungskameras ein, so entsteht die Möglichkeit, auch diese zuletzt genannten Größen zu ermitteln.

Bisher war diese Methode zur Bestimmung geozentrischer Koordinaten nicht von Erfolg gekrönt, ergaben doch in dieser Richtung angestellte Versuche die Positionen nicht genauer als auf ± 100 m, also mit der a priori gegebenen Genauigkeit, doch wurde in jüngster Zeit über erhebliche Fortschritte berichtet, die eine Genauigkeit von ± 30 m erwarten lassen.

Damit sind wir auch schon bei der direkten Erläuterung der einzelnen Methoden zur Bestimmung geozentrischer Koordinaten mittels Satellitenbeobachtungen angelangt, nachdem ich vorausschickte einige Ausführungen

über die Genauigkeit, mit der man die Position des Satelliten in seiner räumlichen Bahn angeben kann.

Wenn ich die verschiedenen Methoden zur Bestimmung geozentrischer Koordinaten aus Satellitenbeobachtungen schildern möchte, so kann man alle diese Verfahren letzten Endes als Varianten oder Spezialisierungen einer einzigen generellen Methode betrachten.

Diese grundlegende Methode besteht in folgendem:

Die Position des Satelliten im Raum sei in ihrer zeitlichen Abhängigkeit genügend genau bekannt.

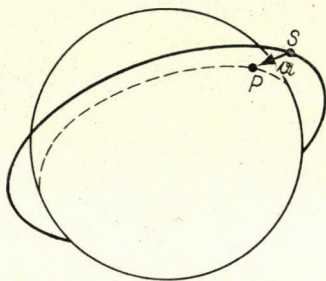


Bild 1. Projektion des Satelliten S auf die Erdoberfläche in den Beobachtungspunkt P durch den Beobachtungsvektor α

Aus der Beobachtung des Satelliten vor dem Sternenhintergrund hat man die Richtung des Vektors \overline{SP} mit angemessener Genauigkeit ermittelt (Bild 1):

$$\alpha^\circ = \frac{\overline{SP}}{SP}.$$

Trägt man nun von der momentanen Position des Satelliten ζ_s den Vektor α° ab, und verlängert ihn so lange, bis er die Erdoberfläche trifft, deren Kenntnis hier als genügend gesichert angenommen werde, so hat man damit den Beobachtungspunkt $P\zeta_p$ als Durchstoßpunkt des verlängerten Vektors α° durch die Erdoberfläche gefunden.

Die Bahn des Satelliten ist nach dem ersten Keplerschen Gesetz auf den Schwerpunkt der Erde bezogen, damit erhalten wir automatisch geozentrische Koordinaten ζ_p .

Würde man die räumliche Position des Satelliten auf wenige Meter genau kennen, und würden die große Halbachse und die Geoidundulationen mit der gleichen Genauigkeit a priori bekannt sein, so könnte auf diesem Wege die geozentrische Position innerhalb von etwa 10 m bestimmt werden, die Richtung des Vektors α° kann man ja auf $\pm 1''$ genau beobachten. Das wäre für die Geodäsie eine wunderbare Methode.

Tatsächlich können wir die Position des Satelliten im Raum a priori bestenfalls auf etwa ± 100 m angeben, so daß bei Beobachtung im Zenit die Punktgenauigkeit in der Horizontalebene ebenfalls ± 100 m betragen wird. Das kann höchstens in geodätisch unerschlossenen Gebieten gelegentlich von Nutzen sein.

Bei der Punktgenauigkeit in radialer oder vertikaler Richtung überlagern sich die Fehler in der großen Achse des mittleren Erdellipsoids und die Unsicherheit in den Geoidundulationen, so daß auch hier mit einer Unsicherheit von ± 70 bis 100 m gerechnet werden kann. Natürlich empfiehlt es sich, im Zenit zu beobachten, um »schiefe Schnitte« mit der Erdoberfläche zu vermeiden, was zu ungünstigen Fehlerfortpflanzungen führen könnte. Die Zenitdistanzen sollten also recht klein sein.

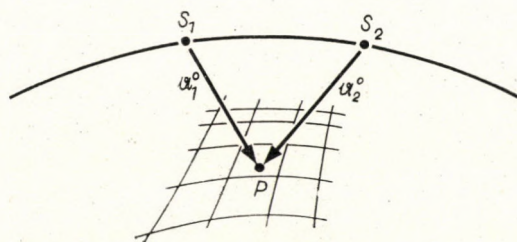


Bild 2. Bestimmung des geodätischen Punktes P durch einen räumlichen Vorwärtseinschnitt von zwei Satellitenpositionen S_1 und S_2 aus

Die Fehler dieser grundlegenden aber ohne sonstige Einschränkungen anwendbaren Methode sind also noch zu groß. Erst wenn die Satellitenbahnen genauer berechnet werden können, kann dieses Verfahren bei der Konkurrenz anderer geodätischer Methoden bestehen.

Mittels astronomischer Positionsbestimmungen in Verbindung mit gravimetrischen Bestimmungen der Lotabweichungen kommt man bekanntlich in verschiedenen Fällen schon zu einer Genauigkeit von ± 30 bis ± 60 m in horizontaler Richtung.

Setzt man eine sehr gut bekannte Bahn des Satelliten voraus, so kann man sich von den in vertikaler Richtung wirkenden Unsicherheiten in den Geoidundulationen und in der großen Achse des Erdellipsoids dadurch befreien, daß man den Satelliten an wenigstens zwei möglichst weit voneinander entfernten Punkten beobachtet. Man hat dann zwei Ortsvektoren α_1^0 und α_2^0 im Raum. Im Schnittpunkt ihrer Verlängerung befindet sich der Punkt P (Bild 2).

Bereits bei der Verwendung von 2 Vektoren liegt eine Überbestimmung vor, wollen wir doch aus 4 Richtungswinkeln 3 Koordinaten bestimmen. Die beiden Vektoren sind nämlich insofern nicht unabhängig, als sie sich im Raum schneiden müssen.

Solange, wie man die Satellitenpositionen nur mit Fehlern von mehr als 100 m kennt, ist natürlich auch diese Methode wenig vorteilhaft. Um die mit der Bestimmung genauer Satellitenpositionen verbundenen Schwierigkeiten zu umgehen oder um sie wenigstens zu mildern, hat man folgendes Verfahren vorgeschlagen:

Zwei Beobachtungsstationen P_1 und P_2 mögen dem gleichen geodätischen System angehören (Bild 3). Man braucht für sie also nicht geozentrische Koordinaten zu kennen. Die Bahn des Satelliten sei a priori nur genähert auf einige hundert Meter bekannt.

Der Satellit werde nun von den beiden Stationen P_1 und P_2 simultan innerhalb von wenigen tausendstel Sekunden beobachtet, also im Raum vorwärtseingeschnitten. Bei einer sehr guten Beobachtungskamera kann man auf

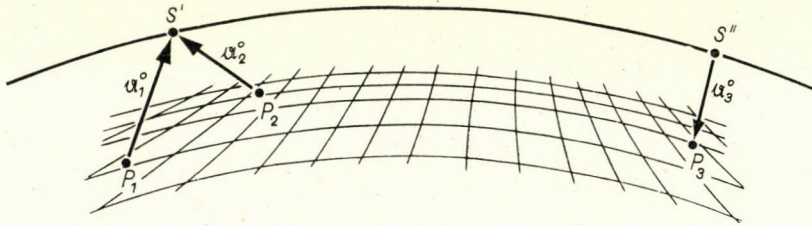


Bild 3. Die »Bahnmethode« zur geodätischen Punktbestimmung

diese Weise die Positionen des Satelliten auf etwa 30 m erhalten, oder — anders ausgedrückt —, man kann so gewisse während des Zeitraums der simultanen Beobachtung konstante und systematische Fehler in der errechneten Bahn des Satelliten bestimmen.

Aus den Vorwärtseinschnitten des Satelliten lassen sich also die Keplerschen Elemente seiner Bahn für einen bestimmten Zeitpunkt, sagen wir für den Moment des letzten Vorwärtseinschnittes bestimmen.

Kennt man nun die Stokesschen Konstanten genügend genau, und fliegt der Satellit nicht zu niedrig, so hofft man, für die nächsten 10 bis 15 min die Störungen des Satelliten, also die Änderungen der Keplerschen Elemente während dieses Zeitintervalles, mit befriedigender Genauigkeit, also auf 10 m bis 30 m bestimmen zu können; denn während dieser wenigen Minuten, während denen der Satellit allerdings etwa 5000 km weiterfliegt, werden sich die Keplerschen Elemente nur um geringe Beträge ändern, und diese kleinen Beträge dürften sich mit angemessener Genauigkeit bestimmen lassen, so argumentiert man.

Man hofft die Position des Satelliten im Raum auch noch in etwa 5000 km Entfernung von den Punkten P_1 und P_2 mit genügend hoher Genauigkeit erhalten zu können, um den Satelliten dann in einen der Lage nach unbekann-

ten Punkt P_3 zu projizieren, mittels des Beobachtungsvektors a_3^0 . Ist die Satellitenposition S'' nun so weit von S' entfernt, daß der Vektor a_3^0 genähert senkrecht steht, so hat man eine vorteilhafte geometrische Konfiguration, werden doch ungünstige Schnittwinkel vermieden.

Freilich hat man inzwischen erkannt, daß die von mir früher genannten kurzperiodischen Störungen in der Bahn des Satelliten schon nach 10 Minuten einen Fehler von nahezu 100 m erreichen können, weil die tesseralen und sektoriellen Kugelfunktionen noch zu wenig bekannt sind und die durch sie verursachten kurzperiodischen Störungen nicht berücksichtigt werden können.

Je kürzer nun das zeitliche Intervall ist, für das man die Keplerschen Elemente extrapolieren muß, umso günstiger wird natürlich die Situation.

Diese Vorteile in Bezug auf die Genauigkeit der Kenntnis der Position des Satelliten muß aber durch einen anderen schwerwiegenden Nachteil erkauft werden. Nähert sich nämlich der Satellitenpunkt S'' dem Punkt S' und sind die Punkte P_1, P_2, P_3 auf der Erde unveränderlich, so weicht der Beobachtungsstrahl a_3^0 immer mehr vom Zenit ab, wir werden also zu ungünstigen Schnittwinkeln und damit zu einer unvorteilhaften Fehlerfortpflanzung geführt. Die Vorteile in Bezug auf die Genauigkeit in der Position des Satelliten werden also paralysiert.

Ist der Punkt P_3 aber nicht zu weit von den Basispunkten P_1 und P_2 entfernt, und fliegt der Satellit in angemessener Höhe, so kann man auch noch dann zu einer annehmbaren geometrischen Konfiguration unserer Figur gelangen, wenn der Satellitenpunkt S'' mit dem Satellitenpunkt S' zusammenfällt. So wird man zur Methode der Bestimmung von Neupunkten mittels Simultanbeobachtungen geführt.

Die Punkte P_1 und P_2 seien also als Basispunkte oder Fixpunkte in einem geodätischen System gegeben (Bild 4). Durch einen Vorwärtseinschnitt im Raum bestimmen wir die Position des Satelliten. Bei hochwertigen Kameras und Zeitmeßeinrichtungen, die eine Winkelgenauigkeit von $\pm 1''$ bis $2''$ und Zeitgenauigkeit von $\pm 0,002$ sec bis $\pm 0,001$ sec garantieren, läßt sich so die räumliche Lage des Satelliten auf etwa 30 m bestimmen.

Im gleichen Zeit Augenblick beobachtet man auch im Neupunkt P_3 den Satelliten und kann so den Vektor a_3^0 bestimmen. Trägt man diesen Vektor dann an die Position des Satelliten an und verlängert ihn bis zu seinem Durchstoßpunkt durch die Erdoberfläche, so lassen sich die horizontalen Koordinaten von P_3 auf vielleicht 30 m günstigstenfalls bestimmen, wenn wir von den zusätzlichen fehlerhaften Einflüssen der Geoidhöhen und der Unsicherheit in der großen Halbachse des mittleren Erdellipsoids absehen.

Ist der Neupunkt P_3 sehr weit vom Subsattellitenpunkt entfernt, hat man also für seine Bestimmung einen ungünstigen Schnittwinkel, indem a_3^0 erheblich von der Zenitrichtung sich entfernt, dann können die zuletzt genannten Fehlerinflüsse sehr erheblich sein.

Von den Einflüssen der Geoidhöhen und bei geozentrischen Koordinaten von der Unsicherheit der großen Halbachse des mittleren Erdellipsoids kann man sich dadurch befreien, daß man die Simultanbeobachtungen des Satelliten nicht für einen einzigen Zeitpunkt, sondern auch für wenigstens einen zweiten Punkt S' , der von S möglichst weit entfernt ist, durchführt. Treibt man die Beobachtungsgenauigkeit auf das äußerste so hofft man, den Neupunkt auf etwa ± 30 m bestimmen, und damit bei der Lösung bestimmter Problemstellungen mit anderen geodätischen Methoden konkurrieren zu können. Man ist bei der Methode der Simultanbeobachtungen jedenfalls frei von den Unsicherheiten in der Position des Satelliten.

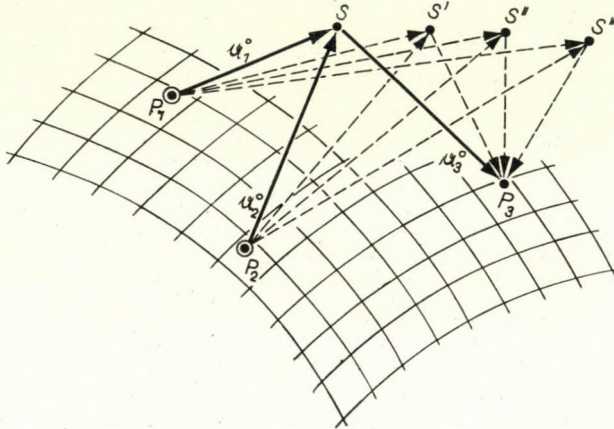


Bild 4. Simultanbeobachtungen eines Satelliten (S, S', S'', S''') von den bekannten Punkten P_1 und P_2 und dem Neupunkt P_3 aus (Kosmische Triangulation)

Fliegt der Satellit aber nicht sehr hoch, und sind die Basispunkte einerseits und der Neupunkt andererseits im Vergleich mit der Flughöhe des Satelliten sehr weit voneinander entfernt, so wird man zu ungünstigen geometrischen Konfigurationen geführt, und die Genauigkeit der Ergebnisse wird kaum annehmbar sein.

Die Zeitbestimmung für den Moment des Öffnens und Schließens des Verschlusses und die damit in enger Verbindung stehende Ausmessung der Satellitenspur in der photographischen Platte in Richtung der Satellitenbewegung macht nun wegen der hohen Anforderungen einige Schwierigkeit. Der Satellit bewegt sich nämlich sehr schnell über die Platte ($0,1$ bis 1° pro Sekunde), selbst bei Verschlüssen, die sich extrem schnell schließen und öffnen, ist so die Satellitenspur bei den Unterbrechungsstellen immer etwas ausgefranst, die Unterbrechungen haben nicht die nötige Schärfe (Bild 5).

Die Ausmessung der Platte kann man also gewissermaßen in zwei Komponenten zerlegen, eine senkrecht zur Satellitenspur und eine in Richtung der Satellitenspur. Beide Komponenten ergeben die beiden räumlichen Rich-

tungswinkel der Vektoren α_i° , also z. B. ihre topozentrische Rektaszension α und Deklination δ .

Weil die erste Komponente sich etwa dreimal genauer ermitteln läßt als die zweite, hat man auch vorgeschlagen, nur die erste zu verwenden. Man bestimmt dann nicht mehr einen Strahl α° im Raum, sondern eine Ebene, die den Beobachtungspunkt P auf der Erde, die Position des Satelliten im Raum S und ein Bogenelement an die Satellitenbahn im Raum enthält. Diese Ebene wird also durch den topozentrischen Ortsvektor des Satelliten und die Tangente an die Satellitenbahn aufgespannt (Bild 6).

Kennt man die genaue Position des Satelliten im Raum, z. B. aus seinen Bahnelementen, und ist es wegen der technischen Voraussetzungen nicht

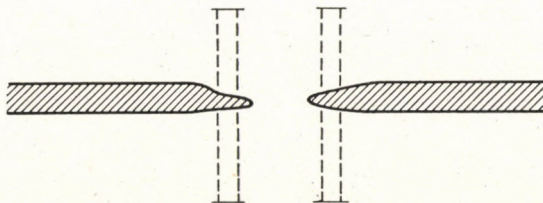


Bild 5. Zur Ausmessung einer Unterbrechung der Satellitenspur

möglich, die Zeit mit angemessener Genauigkeit zu bestimmen, so kann man die genannte Ebene im Raum errichten und mit der Erdoberfläche zum Schnitt bringen. In der Schnittlinie erhält man dann eine Positionslinie für die Lage des gesuchten Punktes auf der Erdoberfläche. Wiederholt man dieses Experiment später mit dem gleichen oder einem anderen Satelliten, so erhält man die genaue Lage des Beobachtungspunktes auf der Erdoberfläche, auch ohne genaue Zeitmessung.

Die Theorie dieser Positionslinie ist aber auch dann von Interesse, wenn genaue Zeitmessungen bei der Beobachtung der Satelliten vorgenommen werden, hat man doch damit ein Mittel in der Hand, den Charakter der durch den Beobachtungsvorgang verursachten Verteilung der Fehler des Neupunktes zu studieren. Man kann diesen Gedanken noch weiter entwickeln, doch sei vorher noch folgendes gesagt:

Bestimmt man die räumliche Position eines Satelliten aus einem räumlichen Vorwärtseinschnitt von zwei Festpunkten aus, so geht es also darum, für einen bestimmten Zeitmoment die 3 Koordinaten des Satelliten zu bestimmen. Bei den Simultanbeobachtungen führt man aber in jedem der beiden Fixpunkte eine Zeitbestimmung und die Bestimmung der topozentrischen Rektaszension und Deklination durch. Es werden also neben zwei Zeitmomenten insgesamt 4 Parameter beobachtet. Offenbar liegt eine Überbestimmung vor: die beiden räumlichen Bestimmungsstrahlen dürfen im Raum nämlich nicht windschief zueinander verlaufen.

Führt man nun nur in einem der beiden Fixpunkte P_1 präzise Beobachtungen von Zeit, Rektaszension und Deklination durch und verzichtet im anderen Punkt P_2 auf die genaue Zeitbestimmung, sondern mißt nur die photographische Platte senkrecht zur Spur des Satelliten aus, so hat man folgende beiden gerade ausreichenden Bestimmungsstücke für die Position des Satelliten im Raum:

Den Vektor α_1^0 vom Punkt P_1 zum Satelliten S und eine den Punkt P_2 und den Satelliten S enthaltende Ebene im Raum. Im Schnittpunkt dieser Ebene und des genannten Strahles befindet sich der Satellit zu dem in dem Punkt P_1 ermittelten Beobachtungsmoment.

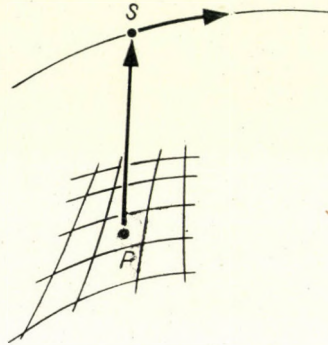


Bild 6. Der Beobachtungsstrahl und die Tangente an die Satellitenbahn bestimmen eine projizierende Ebene im Raum

Schließlich soll noch auf ein Verfahren eingegangen werden, aus den Beobachtungen von Satelliten sehr genaue Laplace-Azimute zwischen zwei weit voneinander entfernten Stationen — mit vielleicht 3000 km Entfernung — zu bestimmen.

Wir stellen dazu 2 Beobachtungskameras so auf, daß sie nicht mehr als 20 bis 30 km außerhalb der momentanen Bahnebene des Satelliten sich befinden. Ihre gegenseitige Entfernung kann etwa dreimal so groß sein wie die Höhe des Satelliten. Wenn der Satellit sich etwa mittig zwischen den beiden Punkten befindet, führt man Simultanbeobachtungen durch. Es ist dabei nur eine wenig anspruchsvolle Zeitgenauigkeit von etwa 0,01 sec gefordert.

Aus der Ausmessung der Platten nur senkrecht zur Satellitenspur und aus innerhalb von ± 100 m gesicherten Näherungspositionen für den Satelliten dürfte man das Laplace-Azimut auf $\pm 0,2''$ bestimmen können.

Die Ungenauigkeit in der Position des Satelliten geht dabei nur in seinem hundertsten Teil als Querverschiebung in das Laplace-Azimut ein, sie beträgt also nicht mehr als 1 m. Der Einfluß der Ungenauigkeiten in der Position des Satelliten wird praktisch eliminiert. Der zufällige Fehler in der gegenseitigen Querverschiebung der beiden Punkte wird etwa ± 3 m erreichen.

Es sei schließlich noch erwähnt, daß man hofft, manche Schwierigkeiten, die mit der genauen Zeitbestimmung auf 0,001 sec und mit der präzisen Ausmessung der Platten in Zusammenhang stehen, dadurch Herr werden zu können, daß man einen künstlichen Lichtblitze ausstrahlenden Satelliten auf eine geeignete Bahn bringt. Ich erinnere hier an das ANNA-Projekt für einen geodätischen Satelliten.

Sie sehen, daß die geometrischen Probleme der Satellitengeodäsie auf typisch geodätische Weise gelöst werden.

Durch schrittweise Annäherung, zum Teil mit Iterationsprozessen, bemüht man sich, eine nach den theoretischen und praktischen Gegebenheiten vorteilhafte Lösung zu erhalten. Dabei gilt es, zur richtigen Zeit den richtigen Schritt zu tun.

Charakteristisch ist auch das Auftreten sowohl physikalischer als auch geometrischer Gesichtspunkte, die beide zum Teil getrennt, zum Teil in völliger Verschmelzung zu behandeln sind.

GEODETICAL POINT DETERMINATION BY MEANS OF OBSERVATIONS OF ARTIFICIAL SATELLITES

K. ARNOLD

SUMMARY

The observation of artificial satellites makes a considerably higher accuracy of geodetical points possible than methods of similar principle, using moon observations.

Difficulties arise on account of disturbational influences of still unknown parts of the earth's gravitational field; these produce uncertainties in the position of the satellite of about ± 70 to 100 m.

If distances of merely a few thousands of kilometres spanned geodetically, these difficulties, caused by perturbations of the orbit, can be diminished by the application of the "orbit method".

A full freedom from gravimetric perturbations can be attained by simultaneous observations of satellites. By these, a point accuracy of ± 10 to 20 m may be expected on the earth's surface.

A further increase in accuracy can be reached by considering the fact that the measuring accuracy of the photographic record is considerably better in the perpendicular direction to the satellite trace than in the direction of the trace.

When observing a flash-satellite, the difficulties otherwise to be surmounted on account of the high requirements as to the accuracy of time-determination are absent.

DÉTERMINATION GÉODÉSIQUE DE POINTS PAR L'OBSERVATION DE SATELLITES ARTIFICIELS

K. ARNOLD

RÉSUMÉ

L'observation de satellites artificiels permet d'obtenir une précision de points bien meilleure que les méthodes, similaires par leur principe, qui utilisent des observations de la lune.

Certaines difficultés dues à l'influence perturbatrice de parties encore inconnues du champ de gravitation terrestre sont causées d'une incertitude de ± 70 à 100 m environ de la position du satellite dans l'espace.

S'il s'agit de distances de quelques milliers de kilomètres seulement, ces difficultés dues aux perturbations de l'orbite peuvent être diminuées par l'emploi de la «méthode de l'orbite».

On se soustrait entièrement à l'effet des perturbations par les observations simultanées des satellites. Celles-ci permettent d'obtenir une précision de points de ± 10 à 20 m sur la surface de la terre.

Un nouvel accroissement de la précision peut être réalisé du fait qu'en direction normale à la trace du satellite, la précision de mesurage des enregistrements photographiques est nettement plus grande qu'en direction de la trace.

L'observation d'un satellite «flash» ne comporte pas les difficultés qui sont à surmonter autrement en raison des hautes exigences relatives à la précision des mesurages de temps.

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУНКТОВ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

К. АРНОЛЬД

РЕЗЮМЕ

Наблюдения искусственных спутников Земли позволяют достигнуть более высокой точности определения пунктов, чем аналогичные в принципе методы, основывающиеся на наблюдении Луны.

Затруднения возникают за счет искажений, связанных с пока еще неизвестной частью поля силы тяжести Земли, вследствие чего положение спутника в пространстве определяется с неточностью равной $\pm 70-100$ м.

Если преодолеваемые геодезическими методами расстояние составляет лишь несколько тысяч километров, эти затруднения, вызванные искажениями орбиты, могут быть уменьшены путем применения «метода орбиты».

Полное исключение гравиметрических искажений достигается при одновременных наблюдениях нескольких спутников. При этом ожидаемая точность определения пунктов на поверхности Земли колеблется в пределах от ± 10 до ± 20 м.

Дальнейшее повышение точности возможно, если учесть, что в направлении, перпендикулярном орбите спутника, точность измерений в фотографической съемке гораздо лучше, чем по направлению орбиты.

При наблюдениях над спутниками, испускающими мигающий свет, отпадают затруднения, связанные в прочих условиях с высокими требованиями к точности измерения времени.

NEUERUNGEN ZUR THEORIE DES GEOIDS*

K. ARNOLD

GEODÄTISCHES INSTITUT POTSDAM

Nachdem man die Schweremessungen an der Erdoberfläche mit einer Genauigkeit von besser als ± 1 mgal durchführen kann, und nachdem man zeigen konnte, daß die klassischen Reduktionsmethoden Unsicherheiten von 10 mgal und mehr in sich tragen können, wurde es notwendig, die klassische Stokes'sche Theorie zu revidieren.

Die neue Theorie geht von den Schwerewerten an der Erdoberfläche aus, unterwirft sie keiner Reduktion, sondern führt sie direkt in den der Theorie zugrunde gelegten Potentialausdruck ein, mag man nun auf einer Integralgleichung, dem Green'schen Satz oder einer anderen Beziehung aufbauen.

Wie sich aus den Deduktionen ergibt, erhält man das Störpotential und die Lotabweichungen an der Erdoberfläche, nachdem man im Stokes'schen Integral zu den Freiluftanomalien gewisse Ergänzungen hinzugefügt hat.

Nach dem Superpositionsprinzip läßt sich schließlich zeigen, daß auch die klassischen Reduktionsverfahren in Wirklichkeit frei sind von geologischen Dichteabschätzungen, wenn sie nur folgerichtig angewandt werden.

Seit etwa 10 Jahren hat sich eine recht intensive Diskussion über die sogenannte »Neue Theorie« der gravimetrischen Geodäsie entfaltet. Auf den Tagungen und Symposien der Internationalen Ass. f. Geodäsie wird das Thema »Geoid« in erheblichem Maße im Hinblick auf diese neuen Entwicklungen behandelt.

Nun, über das Geoid werden Sie alle wohl eine wohlfundierte Meinung haben. Es ist, um es noch einmal festzustellen, eine bestimmte Niveaufläche des durch die Gravitationswirkung und die Rotationsbewegung der Erde hervorgerufenen Potentials. Nämlich die Niveaufläche, von der die Oberfläche des ruhenden Meeres ein Teil ist.

Man hat damit eine mathematisch eindeutig definierte Fläche zu bestimmen.

Gegen dieses Geoid ist allerdings auch in der Vergangenheit manchmal polemisiert worden. Die geodätischen Messungen werden an der Erdoberfläche nun einmal ausgeführt und nicht am Geoid. Das Zusammenfallen der Meeresoberfläche mit dem Geoid sei wenig wichtig; denn auf den Ozeanen könne man ja keinen Theodoliten aufstellen, noch irgendwelche anderen Präzisionsinstrumente, die während des Messungsvorganges nach dem Lot zu orientieren sind.

* Vortrag gehalten im Rahmen des Geod. u. Kartographischen Vereins in Budapest und Sopron, Oktober 1963.

Das Geoid sei eben nicht direkt zugänglich, es sei lediglich eine Fiktion. Darum solle man es aufgeben, das Geoid zu bestimmen. Ferner heißt es: Wenn man zur Bestimmung der Geoidundulationen N und Lotabweichungen ξ , η mit dem Integral von STOKES bzw. von VENING—MEINESZ arbeite

$$T_{\text{geoid}} = \frac{R}{4\pi} \iint_{\Sigma} S_T(\psi) \Delta g_F d_{\Sigma}$$

$$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\}_{\text{geoid}} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} v_M(\psi) \Delta g_F \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d_{\Sigma}$$

so sei die Anwendung dieser Formeln kaum berechtigt (Bild 1).

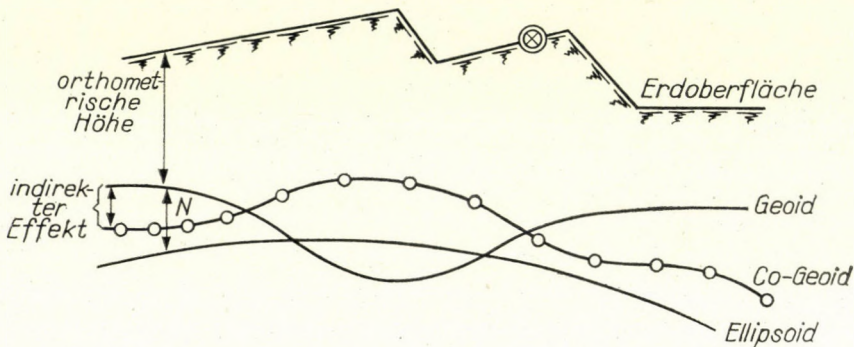


Bild 1

Bei der Ableitung dieser mathematischen Formeln setzt man nämlich voraus, die Erdoberfläche sei genau kugelförmig, was ja bekanntlich nicht zutreffend ist. Um die Voraussetzungen dieser Theorie zu erfüllen, werden die außerhalb des Geoids gelegenen Erdmassen ideel fortgeschafft und nach dieser oder jener Methode in das Erdinnere transportiert. Bei der Kondensationsmethode werden sie dann als Flächenbelegung auf der Geoidfläche verteilt, bei der isostatischen Methode als Kompensationsmassen zwischen dem Geoid und der isostatischen Ausgleichsschicht gelagert, nach BOUGUER werden die äußeren Erdmassen fortgenommen und dann nicht mehr im Erdinnern verteilt.

Bei allen diesen Massentransporten verändern sich nun weiter die Niveaulächen, wegen der Gravitationswirkung der transportierten Massen, und man muß den sogenannten indirekten Effekt berücksichtigen, das ist der vertikale Abstand des neuen Geoids, des Co-Geoids vom Geoid.

Um die durch diese Massentransporte hervorgerufenen Änderungen der Schwereintensität berücksichtigen zu können, muß man aber die Dichte der wegtransportierten Massen kennen. Liegt eine Schwerstation in 500 m Höhe auf einer Hochebene, so ist die Gravitationswirkung einer unendlichen

Platte von 500 m Stärke gleich

$$\kappa \vartheta H \simeq 0,1 H_{\text{meter}} = \Delta g_{\text{mgal}}$$

wenn κ eine fehlerfreie Konstante, ϑ die Dichte der Massen und H die topographische Höhe ist.

Die Dichte ist im Mittel etwa gleich $\vartheta = 2,67$ gr, so wird bei einer Höhe von 500 m durch das Wegnehmen dieser Platte die Schwere um 50 mgal verändert. Nun kann aber die Dichte der Platte sich von dem Standardwert durchaus um etwa 10% unterscheiden. Das ändert auch die Gravitationswirkung dieser Platte um 5 mgal, während man doch heute die Schwere mühelos auf ± 1 mgal bestimmen kann.

Hat man dann die äußeren Massen entfernt, so muß der Aufpunkt von der Erdoberfläche auf das Meeresniveau herabgesetzt werden. Dazu braucht man den Vertikalgradienten der Schwere, also die sogenannte Freiluftreduktion.

$$2 \frac{g}{R} H = 0,3 H_{\text{meter}} = \Delta g_{\text{mgal}}$$

Hierbei benutzt man den sogenannten »normalen« Freiluftgradienten, indem man für R den mittleren Erdradius wählt, während richtigerweise hier die Krümmung der Niveauflächen nach dem Entfernen der äußeren Massen zu setzen wäre. Daraus ergeben sich Änderungen in der Freiluftreduktion um etwa

$$gH \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right),$$

wenn $\partial \xi / \partial x$ und $\partial \eta / \partial y$ die horizontalen Änderungen der Lotabweichungen nach dem Entfernen der äußeren Massen sind, 5" je 10 km sind durchaus plausible Werte. Bei einer Meereshöhe von 1 km erhält man dann 3 mgal als Fehler in der »normalen« Freiluftreduktion, also wieder ein Wert; der erheblich außerhalb der Beobachtungsgenauigkeit liegt.

Fassen wir also die an der »klassischen« Theorie geübte Kritik zusammen: Man erhält Werte, die sich auf das Niveau des Geoids beziehen, und durch die Regularisierung der Erde, wie sie dabei vorgenommen wird, können die Schwereanomalien um mehr als 5 mgal entstellt werden, also um einen Wert, der erheblich außerhalb der Genauigkeit der modernen Schwerenetze liegt.

Mit der nun zu besprechenden »Neuen Theorie« ist man bemüht, die Mängel der alten Theorie zu beheben und allen modernen Anforderungen gerecht zu werden.

Grundsätzlich werden keine ideellen Massentransporte vorgenommen, die mathematische Formelentwicklung geht aus von der wirklichen nicht

regularisierten Erdoberfläche. Es wird das Störpotential für Oberflächenpunkte untersucht in seiner Abhängigkeit von den Schwerewerten an der Erdoberfläche.

Wir behandeln also das Neumannsche Randwertproblem in Bezug auf die physische Erdoberfläche als Randfläche ohne Regularisierung der Erde. Eine vorteilhafte Ausgangsbasis ist da die sogenannte zweite Identität von GREEN, der sogenannte Greensche Satz (Bild 2).

$$(T)_{P_1} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial n} (d\sigma)_{P_2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} T \frac{\partial(1/r)}{\partial n} (d\sigma)_{P_2}.$$

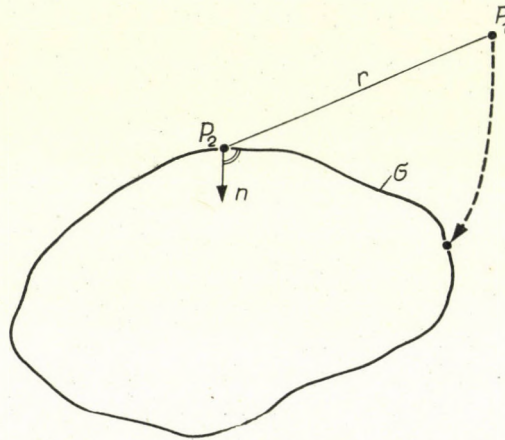


Bild 2

Der Außenraum der Fläche σ sei frei von gravitierenden Massen, das sei also der Außenraum der Erde. P_1 liegt im Außenraum der Erde, auf ihn bezieht sich als Aufpunkt des Störpotentials T linker Hand. In den Integranden ist T und $\partial T/\partial n$ das Störpotential und dessen vertikale Ableitung an der Erdoberfläche, $d\sigma$ das Flächenelement, r der geradlinige Abstand der beiden Punkte P_1 und P_2 . Senken wir nun den Aufpunkt P_1 auf die Erdoberfläche σ herab und berücksichtigen wir dabei die im Integral

$$\iint T \frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\sigma$$

entstehende Singularität, so wird

$$T_{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} T \frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\sigma$$

$\partial T/\partial n$ ergibt sich aus den Schweremessungen. Die Richtung von dn ist dabei nicht die des Lotes, also der Lotrichtung, es handelt sich vielmehr um die Richtung des Normalvektors der Erdoberfläche (Bild 3).

Wendet man also den Greenschen Satz auf die Erdoberfläche σ an, so erscheinen dort $\partial T/\partial n$, T und r ; alles Werte, die sich auf die tatsächlichen, nicht reduzierten Verhältnisse an der Erdoberfläche σ beziehen.

Wir wollen uns noch nicht gleich der strengen Auflösung dieser Gleichung zuwenden, wir wollen uns vielmehr noch eine vereinfachendere sphärische Betrachtungsweise heranziehen. Sicher sind die Unterschiedlichkeiten der Kugel und der topographischen Erdoberfläche vorhanden, im Vergleich zum Erdradius sind sie aber nicht sehr groß. Projizieren wir daher die Punkte P_1, P_2 normal auf die Erdkugel, so werden ihnen die Punkte P_1° und P_2° zugeordnet. Ihre Entfernung ist nicht mehr r , sondern r_\circ .

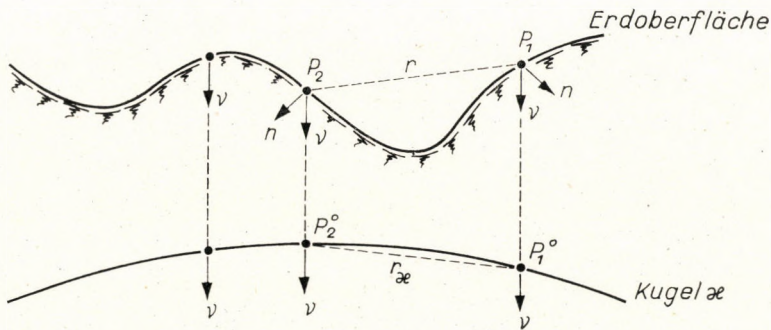


Bild 3

Ordnet man den Punkten P_2° und P_1° die gleichen Werte für T und $\partial T/\partial n$ zu, die für die Punkte P_2 und P_1 gültig sind, und führt die ganze Situation in den nunmehr auf die Kugel angewandten Stokesschen Satz ein, so folgt

$$T\sigma \cong \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{1}{r_x} \frac{\partial T\sigma}{\partial v} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} T\sigma \frac{\partial(1/r_x)}{\partial v} d\sigma$$

wobei v die Normale der Kugelfläche ist. $\partial T/\partial v$ ergibt sich nun aus den Schweremessungen.

$$T = W - U$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v}$$

Das Störpotential ist ja die Differenz vom tatsächlichen Potential und normalen Potential.

$\partial W/\partial v$ ist die Schwere im Aufpunkt P_2 an der Erdoberfläche, $\partial U/\partial v$ ist die normale Schwereintensität in dem gleichen Punkt und ergibt sich aus der Formel für die Normalschwere am Ellipsoid.

Das normale äußere Schwerefeld ist genauestens bekannt, es läßt sich mathematisch einwandfrei berechnen, ohne irgendwelche Annahmen und Annäherungen (Bild 4).

Die normale Schwere γ_e im Punkte P_2° ist auf 0,1 und auch auf 0,01 mgal genau bekannt, also allen Anforderungen entsprechend. Die normale Schwere γ_σ in P_2 ergibt sich aus γ_e auf einfache Weise mittels des normalen Schweregradienten, der ebenfalls genauestens bekannt ist.

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right)_{\text{mgal}} = -0,3086$$

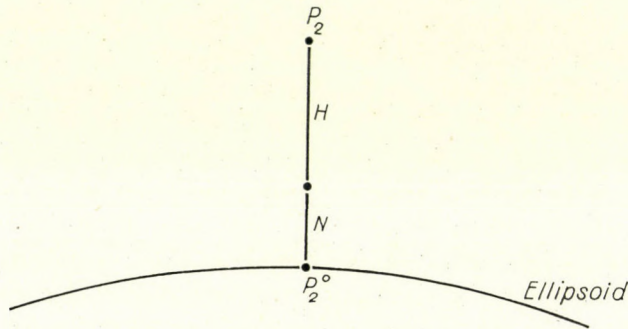


Bild 4

denn der Außenraum des Ellipsoids ist ja frei von gravitierenden Massen. Also

$$\gamma_\sigma = \gamma_e - 0,3086 (H + N).$$

Die normale Schwere an der Erdoberfläche σ läßt sich also mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Daher wegen

$$\frac{\partial W}{\partial v} = g_\sigma, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = \gamma_\sigma$$

folgt

$$\frac{\partial T}{\partial v} = g_\sigma - \gamma_\sigma = g_\sigma - \gamma_\sigma + 0,3086 H + 0,3086 N.$$

Es tritt also noch in $\partial T/\partial v$ die Geoidundulation N auf, diese steht dem Störpotential an der Erdoberfläche σ sehr nahe.

Auf der rechten Seite des Integrals für T tritt also in beiden Integralen die gesuchte Größe T impliziert auf. Der Greensche Satz gibt nicht direkt eine explizierte Gleichung für das Störpotential. Wir müssen vielmehr noch langwierige Umformungen vornehmen, bis wir zu dem gewünschten Ziel einer bequemen expliziten Lösung für T_σ gelangt sind.

Es würde den Rahmen dieser Ausführungen sprengen, auf alle diese Umformungen einzugehen. Ich will Ihnen lediglich das Ergebnis angeben.

$$T_v \cong -\frac{R}{4\pi} \iint_{\kappa} S_T(\psi) \Delta g_F d\kappa$$

$$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} \cong -\frac{1}{2\pi} \iint_{\kappa} V_M(\psi) \Delta g_F \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\kappa$$

also ein Ausdruck, der rein äußerlich die gleiche Struktur hat, wie die Ergebnisse der klassischen Theorie. Auf der linken Seite stehen nicht mehr explizit die Werte, die nicht auf das Geoid, sondern auf die Erdoberfläche beziehen, und bei der Ableitung aus dem Greenschen Satz tauchen keine geologischen Betrachtungen über die Dichte der Erdkruste und den wahren Vertikalgradienten der Schwere auf.

Während man bei der klassischen Betrachtungsweise den Aufpunkt mit der tatsächlichen Schwere herabsenkt auf das Geoid ist es hier umgekehrt, der Punkt mit der normalen Schwere γ auf dem Ellipsoid wird vertikal nach oben bis an die Erdoberfläche gehoben. Während der erste Vorgang geologische Hypothesen notwendig macht, wegen des Vorhandenseins der äußeren Massen, ist der zweite Vorgang ein solcher im massenfreien Außenraum des normalen Potentials. Die Bedingungen sind grundsätzlich verschieden. Während dort dieser Vorgang nur approximativ möglich ist, ist er hier in Strenge möglich.

Bei der Projektion der Punkte P_2 und P_1 von der Erdoberfläche auf die Kugel treten freilich Verzerrungen der Größen r auf.

Eine modernen Ansprüchen genügende Auflösung unseres Problems wird daher von der Erdoberfläche ausgehen müssen und die topographischen Unregelmäßigkeiten berücksichtigen müssen. Wenn ich soeben im Zusammenhang mit dem Greenschen Satz von einer Abbildung der Erdoberfläche auf die Kugel κ sprach, so nur, um Ihnen eine erste Näherungslösung für den Greenschen Satz plausibel zu machen. Die strenge Behandlung des Greenschen Satzes kann ich hier nicht in extenso bringen, aber ich will das Ergebnis kurz angeben.

Man kommt nämlich zu dem Ergebnis, daß man zu den Freiluftanomalien nur den Betrag

$$g \cdot h(\xi_x + \eta_y) = -\frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^r \frac{\Delta g_F - \Delta g_{F.0}}{r^2} dr$$

hinzuzufügen hat, um von der sphärischen Lösung zu der auf die Erdoberfläche bezogenen überzugehen.

h ist der Höhenunterschied gegenüber dem Aufpunkt P_1 . Diese Korrektion ist im Flachland unbedeutend, in hügeligem und gebirgigem Gelände

kann sie 10 bis 20 mgal betragen, in extremen Fällen 50 mgal und mehr.

Fassen wir also zusammen: Führt man in der klassischen Stokesschen und Vening-Meineszschenschen Formel die Korrektur

$$g^h(\xi_g + \eta_v)$$

zu den Freiluftanomalien ein, so macht man sich von den Unsicherheiten in der Kenntnis der Dichte der Erdkruste und des wahren Vertikalgradienten der Schwere frei und erhält das Störpotential und die Lotabweichungen an der Erdoberfläche und nicht am Geoid.

SCHRIFTTUM

- ARNOLD, K.: Zur Bestimmung der Geoidundulationen aus Freiluftanomalien. Schwerewerte in großen Höhen über der Erdoberfläche. *Veröff. Nr. 12. Geodät. Inst. Potsdam b. d. Dt. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1958.
- ARNOLD, K.: Strenge Theorie der absoluten Lotabweichungen als Funktionen der Freiluftanomalien der Schwere. *Veröff. Nr. 13. d. Geodät. Inst. Potsdam b. d. Dt. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1959.
- ARNOLD, K.: Die Randbedingungen von Cauchy und die Hauptaufgabe der physikalischen Geodäsie. . . *Gerl. Beitr. Geophys.* **68** (1959), 1–14.
- ARNOLD, K.: Eine Weiterentwicklung der Theorie der Niveaulflächen des Erdschwerfeldes. *Mber. Dtsch. Akad. d. Wiss. zu Berlin* **3** (1961), 92–97.
- ARNOLD, K.: Die Methoden der Freiluftreduktion und der isostatischen Reduktion in ihren gegenseitigen Beziehungen. *Gerl. Beitr. Geophys.* **70** (1960), 131–136.
- MOLODENSKY, M. S., und Mitarb.: Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth (Übers. a. d. Russ.), Jerusalem 1962.

INNOVATIONS TO THE THEORY OF THE GEOID

K. ARNOLD

SUMMARY

After the gravity-measurements on the surface of the earth yield a precision of better than 1 mgal and after it has been proved, that the classical reduction-methods involve uncertainties of possibly more than 10 mgal, it came out, that the classical Stokes-theory must be revised.

The new theory of gravimetrical geodesy deals with unreduced gravity-values at the surface of the earth. They are introduced directly into the potential-formula, this may be an integral-expression, the formula of Green or an other convenient formula.

By the mathematical treatments it comes out, that we receive the disturbance-potential and the deflections of the vertical at the surface of the earth, if we add a supplementary term to the free-air anomalies in the Stokes-integral.

It can be proved by a certain superposition-method, that the classical reduction-methods are in reality free of any hypothesis on the density of the earth crust.

INNOVATIONS A LA THÉORIE DU GÉOÏDE

K. ARNOLD

RÉSUMÉ

Étant donné que les mesures de pesanteur à la surface de la terre peuvent être exécutées avec une précision supérieure à ± 1 mgal, et comme d'autre part il a été démontré que les méthodes classiques de réduction peuvent présenter des incertitudes de 10 mgal et plus, il est devenu nécessaire de réviser la théorie classique de STOKES.

La nouvelle théorie part des valeurs gravitationnelles de la surface et, sans leur faire subir aucune réduction, les introduit directement dans l'expression du potentiel qui sert de base à la théorie, qu'on se fonde sur une équation intégrale, sur le théorème de GREEN ou sur un autre rapport.

Il s'ensuit des déductions qu'on obtient le potentiel de perturbation et les déviations de la verticale sur la surface de la terre après avoir apporté quelques compléments aux anomalies free-air dans l'intégrale de STOKES.

Suivant le principe de superposition, on peut enfin démontrer que même les procédés classiques de réduction sont exempts d'estimations géologiques de la densité, à condition d'être utilisés de façon conséquente.

НОВЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ГЕОИДА

К. АРНОЛЬД

РЕЗЮМЕ

Вследствие возможности измерения силы тяжести на поверхности Земли с точностью лучше ± 1 *мгал* и поскольку выяснено, что при классических методах редукции могут иметься неуверенности в размере 10 *мгал* и больше, возникла необходимость проверить классическую теорию Стокса.

Предлагаемая новая теория исходит из величин силы тяжести, определенных на поверхности Земли, причем эти величины не подвергаются редукции, а вводятся непосредственно в выражение потенциала, лежащее в основе теории, которое выводится на базе интегрального уравнения, теоремы Грина или некоторой другой зависимости.

Выводы показывают, что возмущающий потенциал и отклонения отвеса получаются при введении в свободные аномалии в интегралах Стокса определенных дополнений.

Из принципа накладки следует, что классические методы редукции также независимы от геологических оценок плотности, если применять их последовательно.



EXAKTE AUSGLEICHUNG EINIGER FÄLLE VON DURCH MESSUNG VERBUNDENEN POLYGONLINIEN

E. HÓNYI

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN. TECHNISCHE UNIVERSITÄT
FÜR BAUINDUSTRIE UND VERKEHRSWESEN
BUDAPEST

[Eingegangen am 12. Februar 1964]

Mit der Verbreitung der elektrooptischen Entfernungsmessung rückt die Anwendung der langseitigen Polygonierung für Basispunkt-Verdichtung immer mehr in den Vordergrund. In der Praxis werden, zwecks Versehung jedes Gebietes mit Basispunkten, im allgemeinen mehrere Polygonlinien gemessen. Zwischen diesen zweifach orientierten Polygonlinien-Punkten können — für deren Versteifung — Richtungs- oder Längenmessungen, eventuell Richtungs- und Längenmessungen ausgeführt werden. Durch die Verbindungsmessungen als Überzahlmessungen wird eine Möglichkeit für eine gemeinsame Ausgleichung der übrigens selbstständig berechenbaren Polygonlinien gegeben. Der Aufsatz gibt die aus der Verbindung berechenbare Bedingungsgleichung an, durch die, angeknüpft an die für die zweifach orientierten Polygonlinien aufschreibbaren je 3 Gleichungen, die Polygonlinien exakt ausgeglichen werden können. Im Aufsatz beschäftigt sich der Verfasser mit den Bedingungsgleichungen, die in den verschiedenen Fällen von Richtungs- und Längenmessungen zwischen den zwei Polygonlinien sowie von Messungen von einem Polygon-Zwischenpunkt auf einen bekannten äußeren Punkt sich ergeben.

Die Anwendung der langseitigen Polygonierung kommt, mit der Verbreitung der elektrooptischen Entfernungsmessung, immer mehr in den Vordergrund. Wenn man von einem bekannten Basispunkt ausgeht und die Polygonlinie an einen bekannten Basispunkt anschließt, können die Koordinaten der Zwischenpunkte der Polygonlinie, nach Messung der Orientations- und Brechungswinkel, bzw. der Längen, mit exakter Ausgleichung bestimmt werden. Die Ausgleichsrechnung kann entweder mit einer direkten Anwendung der 3 Bedingungsgleichungen (1 Winkelbedingung und 2 Projektionsbedingungen) oder mit dem Eggertschen Verfahren ausgeführt werden. Diese sind allgemein bekannte Lösungen.

In der Praxis werden, zwecks Versehung jedes Gebietes mit Basispunkten, im allgemeinen mehrere Polygonlinien gemessen. Die Frage taucht auf, welche Verbindung zwischen diesen Polygonlinien zur Versteifung der Polygonlinien dienen könnte.

Wir wollen im Rahmen dieser Untersuchung von den einfachsten Fällen ausgehen und in Richtung nach den komplizierteren fortschreiten, dessen bewußt, daß wir die Möglichkeiten bei weitem nicht ausschöpfen.

A) Wir wollen voraussetzen, daß zwei Polygonlinien (I und II) in der Nähe von einander geführt, und je ein Punkt der zwei Polygonlinien mit einer auf elektrooptischem oder auf einem anderen Wege gemessenen Strecke verbunden werden, zwischen den so verbundenen Punkten aber keine

Richtungsmessung ausgeführt wird (Bild 1). Seien die durch Polygonlinien I und II verbundenen je zwei bekannten Basispunkte K_1-Z_1 . Aus diesen Punkten wird eine Orientations-Richtungsmessung auf einen der bekannten Basispunkte E, F, G und H durchgeführt. Die Längen und Brechungswinkel beider Polygonlinien werden gemessen. Für die Polygonlinien I und II, als zweifach orientierte Polygonlinien, kann, außer den je 3 bekannten Bedingungsgleichungen, noch eine Bedingungsgleichung auf Grund der zwischen den Punkten A_2 und B_2 nach Bild 1 gemessenen Seite, als einer Überzahlmessung, aufgeschrieben werden. Diese Gleichung gibt eine Möglichkeit dazu, daß die Ausgleichung der zwei Polygonlinien verknüpft, und gleichzeitig die Aufgabe gelöst werde. Die Ausgleichung wird der Ausgleichsgruppe III, der Korrelatenausgleichung gemäß durchgeführt.

Bei der Beschreibung der auf die Verbindungsstrecke bezogenen Bedingungsgleichung kann man folgenderweise verfahren: aus den Koordinaten der bekannten Punkten K_1 und K_2 werden die vorläufigen Koordinaten der Punkte A_2 und B_2 mit Hilfe der Meßresultate (t) und (β) berechnet. (Die gemessenen Winkel, Längen und die vorläufigen Koordinaten sind in Klammern gesetzt, die ausgeglichenen Winkel, Längen und die endgültigen Koordinaten bleiben ohne Klammern).

$$\begin{aligned}
 (y_{A_2}) &= y_{K_1} + (t_1) \sin (\delta_{EK_1} + (\beta_0) - 180^\circ) + \\
 &\quad + (t_2) \sin (\delta_{EK_1} + (\beta_0) + (\beta_1) - 360^\circ) \\
 (x_{A_2}) &= x_{K_1} + (t_1) \cos (\delta_{EK_1} + (\beta_0) - 180^\circ) + \\
 &\quad + (t_2) \cos (\delta_{EK_1} + (\beta_0) + (\beta_1) - 360^\circ) \\
 (y_{B_2}) &= y_{K_2} + (t'_1) \sin (\delta_{FK_2} + (\beta'_0) - 180^\circ) + \\
 &\quad + (t'_2) \sin (\delta_{FK_2} + (\beta'_0) + (\beta'_1) - 360^\circ) \\
 (x_{B_2}) &= x_{K_2} + (t'_1) \cos (\delta_{FK_2} + (\beta'_0) - 180^\circ) + \\
 &\quad + (t'_2) \cos (\delta_{FK_2} + (\beta'_0) + (\beta'_1) - 360^\circ)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Im Kenntnis dieser vorläufigen Koordinaten ist der vorläufige Wert der Entfernung zwischen den Punkten $A_2 - B_2$:

$$(t_{A_2B_2}) = \sqrt{[(y_{B_2}) - (y_{A_2})]^2 + [(x_{B_2}) - (x_{A_2})]^2}. \tag{2}$$

Der ausgeglichene Meßwert und die aus den ausgeglichenen Koordinaten berechnete Entfernung müssen identisch sein, also

$$t = \sqrt{(y_{B_2} - y_{A_2})^2 + (x_{B_2} - x_{A_2})^2}. \tag{3}$$

Diese Gleichung wird die Bedingungsgleichung sein. Wenn man in die rechte Seite der Gleichung den Koordinatenwert in (1), in die linke Seite dann das Meßresultat einsetzt und die Gleichung an der Messungsstelle in Reihen entwickelt, so gelangt man, nach den ausführbaren Umstellungen, zur folgenden linearen Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 & - \cos(\delta_{A_2B_2} - \delta_{K_1A_1}) \lambda_1 - \cos(\delta_{A_2B_2} - \delta_{A_1A_2}) \lambda_2 + \\
 & + \cos(\delta_{A_2B_1} - \delta_{K_2B_1}) \lambda'_1 + \cos(\delta_{A_2B_2} - \delta_{B_1A_2}) \lambda'_2 - \\
 & - \lambda_1 \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{K_1A_1})(t_1) + \sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{A_1A_2})(t_2)}{\varrho''} v_{\beta_0} - \\
 & - \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{A_1A_2})(t_2)}{\varrho''} v_{\beta_1} + \\
 & + \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{K_2B_1})(t'_1) + \sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{B_1B_2})(t'_2)}{\varrho''} v'_{\beta_0} + \\
 & + \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{B_1B_2})(t'_2)}{\varrho''} v'_{\beta_1} + [(t_{A_2B_2}) - (t)] = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

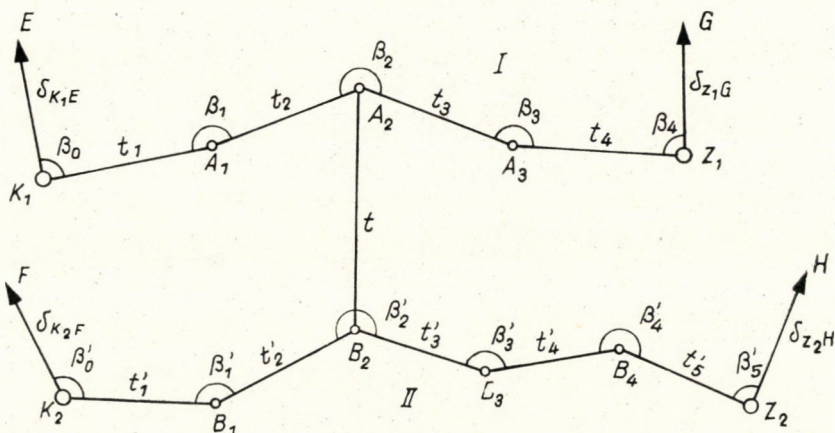


Bild 1. Verbindung zweier Polygonlinien durch Längenmessung

wo, den Indexen entsprechend, mit δ die aus den vorläufigen Koordinaten berechneten Richtungswinkel, mit λ die Korrektur der gemessenen Länge (t), mit v die Korrektur des gemessenen Brechungswinkels (β) bezeichnet sind. Das reine Glied der Gleichung wird in der Weise erhalten, daß die zwischen den Punkten A_2 und B_2 gemessene Länge (t) von der Entfernung ($t_{A_2B_2}$), berechnet aus den vorläufigen Koordinaten der Punkte A_2 und B_2 , abgezogen wird. Diese Gleichung mit den je 3, insgesamt 6 Bedingungsgleichungen der zwei Polygonlinien verbunden, werden die so gewonnenen 7 Bedingungsgleichungen zusammen ausgeglichen.

Wenn mehrere Verbindungsseiten zwischen den zwei Polygonlinien gemessen wurden, müssen so viele, der Gleichung (4) entsprechende Gleichungen aufgestellt werden, als Verbindungsseiten gemessen wurden.

B) Wenn eine Richtungsmessung von irgendeinem Punkt einer der zwei nebeneinander geführten Polygonlinien auf einen Punkt der anderen Linie zu ausgeführt wird, wird die Möglichkeit zum Aufschreiben der verbindenden Bedingungsgleichung auch durch diese Messung gegeben (Bild 2). Die Bezeichnungen der Angaben der Polygonlinien sollen identisch mit der Bezeichnungen der im Falle A) untersuchten Polygonlinie sein. Es sei vorausgesetzt, daß eine

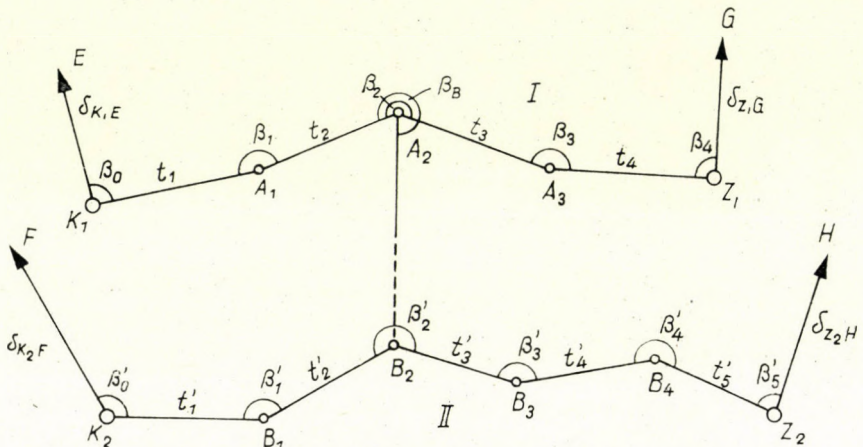


Bild 2. Verbindung zweier Polygonlinien durch Richtungsmessung

Richtungsmessung von dem Punkt A_2 auf den Punkt B_2 der anderen Polygonlinie zu durchgeführt wurde. Es sei der Unterschied zwischen den auf die Punkte A_1 und B_2 zu gemessenen Richtungswerte, der Brechungswinkel mit β_B bezeichnet. Durch diese Messung als Überzahlmessung wird die Möglichkeit zum Aufschreiben der Bedingungsgleichung auf Grund der Überlegung gegeben, daß die Richtungswinkel $\delta_{A_2B_2}$, ableitbar einerseits aus den ausgeglichenen Werten der Meßresultate und berechenbar andererseits aus den endgültigen Koordinaten der Punkte A_2 und B_2 der Polygonlinien, identisch seien. Den Bezeichnungen dem Bild 2 gemäß:

$$\delta_{EK1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_B - n \cdot 180^\circ = \arctan \frac{y_{B2} - y_{A2}}{x_{B2} - x_{A2}} \quad (5)$$

Es seien in die linke Seite der Gleichung die gemessenen Brechungswinkel, in die rechte Seite dann die der Formel (1) entsprechenden vorläufigen Koordinaten substituiert und die Funktion an der Messungsstelle in Reihen entwickelt, dann gelangt man, nach den ausführbaren Vereinfachungen, zur folgenden

linearen Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{K_1A_1})\varrho''}{(t_{A_2B_2})} \lambda_1 + \\
 & + \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{A_1A_2})\varrho''}{(t_{A_2B_2})} \lambda_2 - \\
 & - \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{K_2B_1})\varrho''}{(t_{A_2B_2})} \lambda'_1 - \\
 & - \frac{\sin(\delta_{A_2B_2} - \delta_{B_1B_2})\varrho''}{(t_{A_2B_2})} \lambda'_2 - \\
 & - \left\{ 1 + \frac{\cos \delta_{A_2B_2} [(x_{A_2}) - x_{K_1}] + \sin \delta_{A_2B_2} [(y_{A_2}) - y_{K_1}]}{(t_{A_2B_2})} \right\} v_{\beta_0} - \\
 & - \left\{ 1 + \frac{\cos \delta_{A_2B_2} [(x_{A_2}) - (x_{A_1})] + \sin \delta_{A_2B_2} [(y_{A_2}) - (y_{A_1})]}{(t_{A_2B_3})} \right\} v_{\beta_1} + \\
 & + \frac{\cos \delta_{A_2B_2} [(x_{B_2}) - x_{K_2}] + \sin \delta_{A_2B_2} [(y_{B_2}) - y_{K_2}]}{(t_{A_2B_2})} v_{\beta_0} + \\
 & + \frac{\cos \delta_{A_2B_2} [(x_{B_2}) - (x_{B_1})] + \sin \delta_{A_2B_2} [(y_{B_2}) - (y_{B_1})]}{(t_{A_2B_2})} v'_{\beta_1} - \\
 & - v_{\beta_B} + [\delta_{A_2B_2} - \delta_{EK_1} - (\beta_0) - (\beta_1) - (\beta_B) + n \cdot 180^\circ] = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Die Gleichung kann, auch neben ihrer scheinbaren Kompliziertheit, verhältnismäßig einfach behandelt werden, weil die Koeffizienten aus den Angaben, die aus der vorherigen Berechnung der Polygonlinien schon zu Verfügung stehen bzw. aus den Werten der vorläufigen Richtungswinkel und der Entfernungen, bezogen auf die Verbindungsrichtung A_2B_2 , bestimmt werden können.

Die Einführung von ϱ'' in die Gleichungen (4) und (6) wurde durch die Forderung der Übereinstimmung der Dimensionen nötig gemacht. In dieser Weise sind alle Glieder in der Dimension des reinen Glieds, die Korrekturen aber in Längen oder in Sekunden ausgedrückt.

Wenn mehrere Verbindungsrichtungen gemessen werden, kann eine ihnen entsprechende Anzahl von Bedingungsgleichungen aufgeschrieben werden.

C) Es sei nun der Fall untersucht, wenn zwischen den Punkten A_2 und B_2 der Polygonlinie nicht nur eine Entfernung oder eine Richtung, sondern z. B. eine Entfernung und auch eine Richtung von dem Punkte A_2 einer der Polygonlinien auf den Punkt B_2 zu gemessen wurden. In diesem Fall ergeben sich sogar zwei Möglichkeiten für die Lösung der Aufgabe.

1. Die Koordinate des Punktes B_2 kann mit der Hilfe der von dem Punkt K_1 ausgehenden Polygonlinie und auch durch eine von dem Punkt K_2 ausgehenden Polygonlinie ausgedrückt werden (Bild 3). Aus den Angaben der von dem Punkt K_1 ausgehenden Polygonlinie I berechnet:

$$\begin{aligned} (y_{B_2}^I) &= y_{K_1} + (t_1) \sin(\delta_{EK_1} + (\beta_0) - 180^\circ) + \\ &+ (t_2) \sin(\delta_{EK_1} + (\beta_0) + (\beta_1) - 360^\circ) + \\ &+ (t) \sin(\delta_{EK_1} + (\beta_0) + (\beta_1) + (\beta_B) - 540^\circ) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (x_{B_2}^I) &= x_{K_1} + (t_1) \cos(\delta_{EK_1} + (\beta_0) - 180^\circ) + \\ &+ (t_2) \cos(\delta_{EK_1} + (\beta_0) + (\beta_1) - 360^\circ) + \\ &+ (t) \cos(\delta_{EK_1} + (\beta_0) + (\beta_1) + (\beta_B) - 540^\circ). \end{aligned}$$

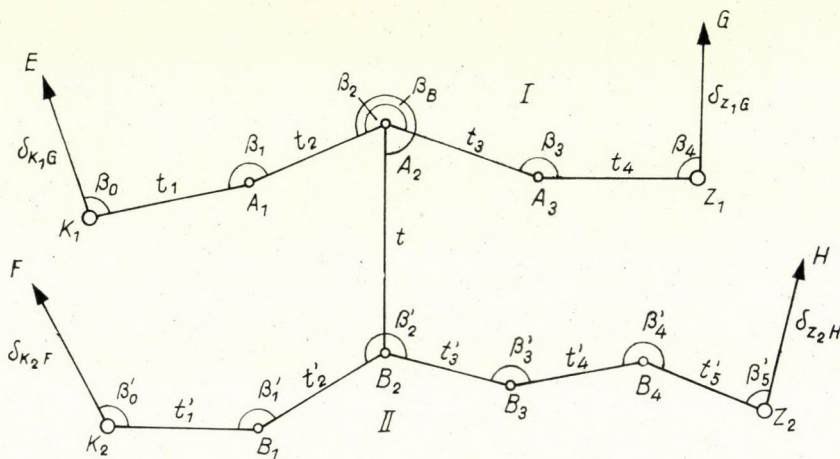


Bild 3. Verbindung zweier Polygonlinien durch Längen- und Richtungsmessung

Aus den Angaben der von dem Punkt K_2 ausgehenden Polygonlinie berechnet:

$$\begin{aligned} (y_{B_2}^{II}) &= y_{K_2} + (t'_1) \sin(\delta_{FK_2} + (\beta'_0) - 180^\circ) + \\ &+ (t'_2) \sin(\delta_{FK_2} + (\beta'_0) + (\beta'_1) - 360^\circ). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (x_{B_2}^{II}) &= x_{K_2} + (t'_1) \cos(\delta_{FK_2} + (\beta'_0) - 180^\circ) + \\ &+ (t'_2) \cos(\delta_{FK_2} + (\beta'_0) + (\beta'_1) - 360^\circ). \end{aligned}$$

Die vorläufigen Koordinaten $(y_{B_2}^I)$ und $(y_{B_2}^{II})$ bzw. $(x_{B_2}^I)$ und $(x_{B_2}^{II})$ müssen nach der Ausgleichung identisch sein. Nach Aufschreiben der Identität

und nach Entwickeln in Reihen an der Messungsstelle gelangt man, mit Hilfe der Gleichungen (7) und (8), zu den folgenden zwei Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \sin \delta_{K_1 A_1} \lambda_1 + \sin \delta_{A_1 A_2} \lambda_2 + \sin \delta_{A_2 B_2} \lambda_2 - \\
 & - \sin \delta_{K_2 B_1} \lambda'_1 - \sin \delta_{B_1 B_2} \lambda'_2 + \\
 & + \frac{(x_{B_2}) - x_{K_1}}{q''} v_{\beta 0} + \frac{(x_{B_2}) - (x_{A_1})}{q''} v_{\beta 1} + \\
 & + \frac{(x_{B_2}) - (x_{A_2})}{q''} v_{\beta B} - \frac{(x_{B_2}) - x_{K_2}}{q''} v'_{\beta 0} - \\
 & - \frac{(x_{B_2}) - (x_{B_1})}{q''} v'_{\beta 1} + ((y'_{B_2}) - (y''_{B_2})) = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \cos \delta_{K_1 A_1} \lambda_1 + \cos \delta_{A_1 A_2} \lambda_2 + \cos \delta_{A_2 B_2} \lambda_2 - \\
 & - \cos \delta_{K_2 B_1} \lambda'_1 - \cos \delta_{B_1 B_2} \lambda'_2 - \\
 & - \frac{(y_{B_2}) - y_{K_1}}{q''} v_{\beta 0} - \frac{(y_{B_2}) - (y_{A_1})}{q''} v_{\beta 1} - \\
 & - \frac{(y_{B_2}) - (y_{A_2})}{q''} v_{\beta B} + \frac{(y_{B_2}) - y_{K_2}}{q''} v'_{\beta 0} + \\
 & + \frac{(y_{B_2}) - (y_{B_1})}{q''} v'_{\beta 1} + ((x'_B) - (x''_{B_2})) = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

2. Diese Untersuchung kann auch so durchgeführt werden, daß die 2 Bedingungsgleichungen, aufschreibbar entsprechend den Fällen A) und B), an die ursprünglichen Bedingungsgleichungen der Polygonlinien angeschlossen werden. Das Ergebnis der Ausgleichung wird natürlich das gleiche sein, ob die Bedingungsgleichungen für die Gleichheit der Koordinaten oder für die gemessenen Verbindungs-Richtung und Länge ausgeschrieben sind. Auf Grund der Gleichheit der Koordinaten kann man aber in einfacher Weise zu den Koeffizienten der Bedingungsgleichungen gelangen. Bei dieser Lösung bedeutet die Berechnung des reinen Glieds etwas Mehrarbeit, da auch die Koordinaten des Verbindungspunktes der Polygonlinie II aus den ursprünglichen Messungen der Polygonlinie I, ferner aus den vom Verbindungspunkt ausgeführten Messungen bestimmt werden müssen. Diese Arbeit bedeutet aber eigentlich nur eine Ergänzung der vorigen Polygonlinien-Rechnungen aus den Meßergebnissen für den Zweck der Ausgleichung.

D) Auch der Fall ist möglich, daß eine Richtungsmessung von dem Punkt A_2 auf den Punkt B_2 und von dem Punkt B_2 auf den Punkt A_2 gemacht

wurde, das heißt, die Verbindungsrichtung in beiden Punkten gemessen wurde (Bild 4). Zwei Bedingungsgleichungen können aufgeschrieben werden:

$$\delta_{EK1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_B - n \cdot 180^\circ = \arctan \frac{y_{B2} - y_{A2}}{x_{B2} - x_{A2}} \quad (11)$$

und

$$\delta_{FK2} + \beta'_0 + \beta'_1 + \beta_A - n \cdot 180^\circ = \arctan \frac{y_{A2} - y_{B2}}{x_{A2} - x_{B2}} \quad (12)$$

Gleichung (11) ist identisch mit Gleichung (6), auch der Aufbau von Gleichung (12) ist ähnlich dem der Gleichung (6). Wenn die Meßergebnisse in Gleichung (12) eingesetzt werden (die Koordinaten auf der rechten Seite der Gleichung mit Hilfe der Formel (1) ausdrückend) und die Entwicklung in Reihen durchgeführt wird, erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} & - \frac{\sin(\delta_{B2A2} - \delta_{K1A1}) \varrho''}{(t_{A2B2})} \lambda_1 - \frac{\sin(\delta_{B2A2} - \delta_{A1A2}) \varrho''}{(t_{A2B2})} \lambda_2 + \\ & + \frac{\sin(\delta_{B2A2} - \delta_{K2B1}) \varrho''}{(t_{A2B2})} \lambda'_1 + \frac{\sin(\delta_{B2A2} - \delta_{B1B2}) \varrho''}{(t_{A2B2})} \lambda'_2 + \\ & + \frac{\cos \delta_{B2A2} ((x_{A2}) - x_{K1}) + \sin \delta_{B2A2} ((y_{A2}) - y_{K1})}{(t_{A2B2})} v_{\beta_0} + \\ & + \frac{\cos \delta_{B2A2} ((x_{A2}) - (x_{A1})) + \sin \delta_{B2A2} ((y_{A2}) - (y_{A1}))}{(t_{A2B2})} v_{\beta_1} - \\ & - \left(1 + \frac{\cos \delta_{B2A2} ((x_{B2}) - x_{K2}) + \sin \delta_{B2A2} ((y_{B2}) - y_{K2})}{(t_{A2B2})} \right) v'_{\beta_0} - \\ & - \left(1 + \frac{\cos \delta_{B2A2} ((x_{B2}) - (x_{B1})) + \sin \delta_{B2A2} ((y_{B2}) - (y_{B1}))}{(t_{A2B2})} \right) v'_{\beta_1} - \\ & - v_{\beta_A} + \delta_{B2A2} - \delta_{FK2} - (\beta'_0) - (\beta'_1) - (\beta_A) + n \cdot 180^\circ = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

In diesem Fall werden also die aufschreibbaren Bedingungsgleichungen durch Gleichungen (6) und (13) gegeben.

E) Es kommt häufig vor, daß, zwecks Versteifung der Polygonlinie, eine Orientierungsrichtung auch in einem zwischenliegenden Polygonpunkte auf einen (Triangulations- oder Polygonierung-) Punkt J von bekannten Koordinaten gemessen wird (Bild 5). Auch jetzt kann man von der für die Richtungswinkel aufschreibbaren Voraussetzung ausgehen:

$$\delta_{EK1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_J - n \cdot 180^\circ = \arctan \frac{y_J - y_{A2}}{x_J - x_{A2}} \quad (14)$$

Wenn die Koordinate des Punktes A_2 aus den Meßergebnissen der Polygonlinie ausgedrückt wird (Formel (1)), erhält man, nach der Entwicklung der Funktion in Reihen an der Messungsstelle, einen der Formel (6) ähnlichen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sin(\delta_{A_2J} - \delta_{K_1A_1}) \varrho''}{(t_{A_2J})} \lambda_1 + \frac{\sin(\delta_{A_2J} - \delta_{A_1A_2}) \varrho''}{(t_{A_2J})} \lambda_2 - \\
 & - \left(1 + \frac{\cos \delta_{A_2J} ((x_{A_2}) - x_{K_1}) + \sin \delta_{A_2J} ((y_{A_2}) - y_{K_1})}{(t_{A_2J})} \right) v_{\beta_0} - \\
 & - \left(1 - \frac{\cos \delta_{A_2J} ((x_{A_2}) - (x_{A_1})) + \sin \delta_{A_2J} ((y_{A_2}) - (y_{A_1}))}{(t_{A_2J})} \right) v_{\beta_1} - \\
 & - v_{\beta_J} + (\delta_{A_2J} - \delta_{EK_1} - (\beta_0) - (\beta_1) - (\beta_J) + n \cdot 180^\circ) = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

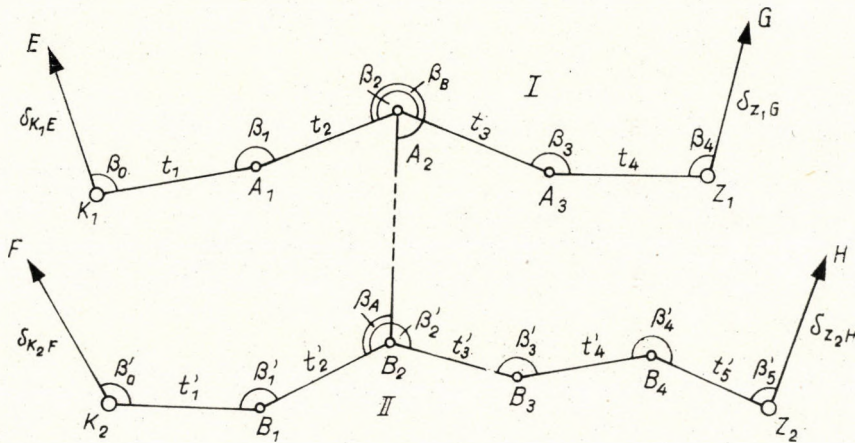


Bild 4. Verbindung zweier Polygonlinien durch Richtungsmessung in beiden Richtungen

F) Wenn von einem Zwischenpunkt der Polygonlinie auf einen Punkt J von bekannten Koordinaten eine Entfernung zwecks Versteifung der Polygonlinie gemessen wird, kann der gesuchte Zusammenhang aus der Bedingung abgeleitet werden (Bild 6), die für den gemessenen bzw. berechneten Wert der Entfernung zwischen den zwei Punkten aufgeschrieben werden kann. Dem Bild entsprechend:

$$t = \sqrt{(y_J - y_{A_2})^2 + (x_J - x_{A_2})^2}. \tag{16}$$

Wenn die Koordinaten des Punktes A_2 auf der rechten Seite der Gleichung durch die Formel (1) ausgedrückt, und die Funktion an der Messungsstelle

in Reihen entwickelt wird, erscheint die Bedingungsgleichung in der Gestalt

$$\begin{aligned}
 & - \cos(\delta_{A_2J} - \delta_{K_1A_1})\lambda_1 - \cos(\delta_{A_2J} - \delta_{A_1A_2})\lambda_2 - \\
 & - \frac{\sin(\delta_{A_2J} - \delta_{K_1A_1})(t_1) + \sin(\delta_{A_2J} - \delta_{A_1A_2})(t_2)}{\rho''} v_{\beta_0} \\
 & - \frac{\sin(\delta_{A_2J} - \delta_{A_1A_2})(t_2)}{\rho''} v_{\beta_1} - \lambda_1 + ((t_{A_2J}) - (t)) = 0.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Bei den früher betrachteten Aufgaben waren die Verbindungsmessungen auf den zweiten Punkt der Polygonlinie oder -linien bezogen. Natürlich ist eine sinngemäße Erweiterung oder Verengung der Formel nötig, wenn die Lage der Verbindungspunkte verschieden ist, wenn die Messung von einem näheren oder entfernteren Punkte oder auf einen solchen Punkt ausgeführt wurde.

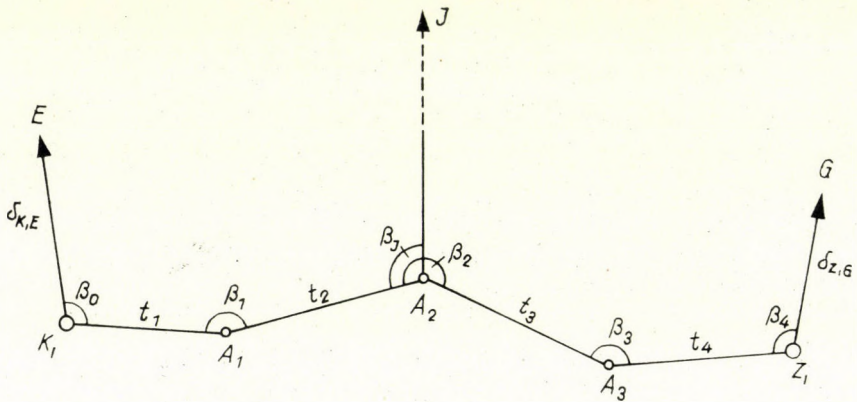


Bild 5. Richtungsmessung von einem Polygonzwischenpunkte auf einen bekannten Punkt

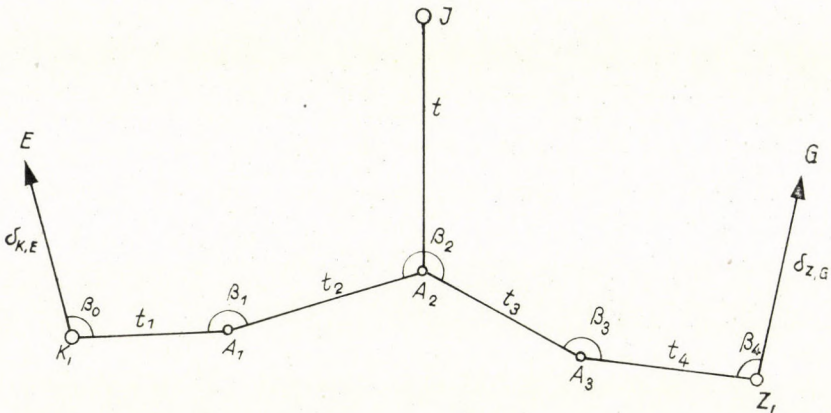


Bild 6. Längenmessung von einem Polygonzwischenpunkte auf einen bekannten Punkt

Insofern eine Richtungsmessung nicht nur vom Punkt A_2 auf Punkt B_2 sondern auch vom Punkt B_2 auf Punkt A_2 erfolgte, und außerdem auch die Entfernung der zwei Punkte gemessen wurde, können diesen drei Überzahlmessungen gemäß drei Bedingungsgleichungen aufgestellt werden. Diese drei Bedingungsgleichungen können, unter Anwendung der gemessenen Entfernungs- und Richtungswerte zwischen den Punkten A_2 und B_2 , eine Winkelgleichung und zwei Projektionsgleichungen, bezogen auf die zwischen den Punkten K_1 und K_2 oder K_1 und Z_2 oder K_2 und Z_1 geführte Polygonlinie, sein, also von einem Charakter ähnlich den Bedingungsgleichungen der Polygonlinien zwischen den Punkten K_1 und Z_1 bzw. K_2 und Z_2 . Diese Messungen führen schon zur Ausbildung der Knotenpunktsysteme, deren Berechnung mit der von I. HAZAY [1] vorgeschlagenen Methode, mit Hilfe der fiktiven Meßergebnisse, unmittelbar gemessen oder aus den Polygonlinien ableitbar, in der dort veröffentlichten Weise durchgeführt werden kann. Wenn man eine noch größere Exaktheit anstrebt, können die fiktiven Meßergebnisse durch die von D. CSATKAI [2] ausgearbeitete, auf die langseitige Polygonierung bezogene Gewichtsformel in der Ausgleichung beachtet werden.

SCHRIFTTUM

1. HAZAY, I.: Sokszögelési csomópont számítása fiktív iránymérési eredményekből (Berechnung eines Polygonierungs-Knotenpunktes aus den Ergebnissen von fiktiven Richtungsmessungen). *Geodézia és Kartográfia*, 1958.
2. CSATKAI, D.: A súlyozás a sokszög vonal-hálózatok kiegyenlítésében (Die Gewichtsformel in der Ausgleichung von Polygonlinien-Netzwerken). *Geodézia és Kartográfia*, 1963, Sondernummer No. 2.

EXACT ADJUSTMENT OF CERTAIN CASES OF POLYGON LINES CONNECTED BY MEASUREMENTS

E. HÖNYI

SUMMARY

With the propagation of electrooptical distance measuring, the application of long-side polygonation for base-point densification comes ever more into the foreground. In practice, generally several polygon lines are measured in order to provide each area with base-points. Between these doubly orientated polygon line points, — for their fixation — measurements of direction or/and length can be made. The connecting measurements as surplus measurements give a possibility to adjust the otherwise independently calculable polygon lines in common. The present study gives, for a few connection cases, the equation of condition, by attaching which of condition can be set up to the 3 equations, in each case, for the doubly orientated polygon lines, the polygon lines themselves can be submitted to a common exact adjustment. In his study, the author discusses the equations of condition presenting themselves in cases of direction and length measurements between the polygon lines, resp. of measurements from an intermediate polygon point to a known external point.

COMPENSATION PRÉCISE DE QUELQUES CAS DE CHEMINEMENTS POLYGONAUX
RELIÉS PAR MESURAGES

E. HÖNYI

RÉSUMÉ

Avec la généralisation des mesures électro-optiques des longueurs, l'utilisation de la polygonation primaire destinée à augmenter la densité du canevas passe de plus en plus au premier plan. En pratique, plusieurs polygonales sont mesurées pour équiper une zone en points d'appui. Entre ces sommets de la polygonale principale, des mesures d'angles par tours d'horizon ou des mesures de longueurs, éventuellement les unes et les autres peuvent être effectuées. Les mesurages de rattachement, en tant qu'observations surabondantes, donnent la possibilité d'une compensation commune des cheminements qui seraient à calculer autrement d'une façon indépendante. L'étude présente pour quelques cas de rattachement l'équation de conditions pouvant se calculer du rattachement. Avec les trois équations de conditions qui peuvent être écrites pour chaque polygonale principale, les cheminements peuvent être compensés ensemble avec précision. L'auteur traite aussi, dans son étude, des équations de conditions se présentant en cas de mesurages des directions et des longueurs entre les deux polygonales, ou en cas de mesurages à partir d'un sommet de polygonale intermédiaire vers un point extérieur connu.

ТОЧНОЕ ВЫРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЕВ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ
ХОДОВ, УВЯЗАННЫХ ИЗМЕРЕНИЯМИ

Э. ХЕНИ

РЕЗЮМЕ

По мере распространения электрооптического метода измерения расстояния все больше и больше используются длинные полигональные ходы для сгущения опорных пунктов. На практике, для создания опорных пунктов отдельных районов, как правило, проводится ряд полигональных ходов. Между этими пунктами с двойной ориентировкой, для их закрепления, выполняется измерение либо направления, либо расстояния, или же направления и расстояния. Увязки, представляющие собой избыточные измерения, позволяют проводить совместное и уравнивание полигональных ходов, вычисляемых в прочих условиях самостоятельно. В работе приводится уравнение условия, вычисляемое для отдельных случаев из увязки. Подставляя это уравнение в 3 уравнения условия, действительные для каждого полигонального хода с двойной ориентировкой, можно проводить точное совместное уравнивание полигональных ходов. В работе рассматриваются уравнения условий, получаемые при измерении между двумя полигональными ходами направления и расстояния, а также при проведении измерений с промежуточного полигонального пункта для известного внешнего пункта.

ÜBER DIE NEUEREN ERGEBNISSE DER UNTERSUCHUNGEN DER SPITZENSTRÖME

F. MÄRCZ

GEOPHYSIKALISCHES FORSCHUNGLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER
WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 18. April, 1964]

Das eingehende Studium der Eigenschaften von Spitzenströmen wurde durch die Auswertung dreijähriger Beobachtungen ermöglicht. Diese Untersuchungen bestätigten einen großen Teil der schon früher [1] festgestellten Eigenheiten der täglichen und jahreszeitlichen Änderung. Außerdem konnte der Zusammenhang zwischen den Spitzenströmen und anderen Vorgängen aufgezeigt werden. Die Verteilung der innerhalb einer Stunde gelieferten Ladungsmengen kann in zwei Normalverteilungen geteilt werden, wodurch gezeigt wird, daß sich die Häufigkeit, der in zwei Gruppen geteilten Ladungsmengen, in den verschiedenen Jahreszeiten verändert.

Einleitung

In der Station für Lufterktrizität des Geophysikalischen Observatoriums bei Nagycenk erfolgt seit dem Juli 1960 die Registrierung der Spitzenströme. Eine frühere Studie [1] führte das Registriergerät, die Art und Weise der Verarbeitung und ferner auf Grund der Untersuchung des Materials von einem Jahr den täglichen und jahreszeitlichen Verlauf der Spitzenströme vor. Jetzt, im Besitz von in zweijährigen Beobachtungen gewonnen weiteren Daten wurde die Vornahme genauerer und detaillierterer Untersuchungen möglich.

Einleitend und zur Information seien einige statistische Daten der Registrierung und der Häufigkeit der Spitzenströme mitgeteilt. Im Zeitraum zwischen Juli 1960 und Juni 1963 erfolgte in 23 410 Stunden die Registrierung, d.i. 89% der verflossenen Zeit. Die Registrierung wurde nur bei Stromausfall, bei einem Fehler im Instrument oder in der Meßspitze bzw. bei Instandhaltungsarbeiten unterbrochen. Im Laufe der erwähnten Zeitdauer wurden in 898 Stunden Spitzenströme beobachtet, auf jede 26. registrierte Stunde entfällt also eine Stunde mit Entladung.

Untersuchung der täglichen und jahreszeitlichen Änderung der Häufigkeit

Einen Überblick über den täglichen Verlauf der Häufigkeit ermöglicht Bild 1, das mit Hilfe sämtlicher Beobachtungen (898) konstruiert wurde. Am häufigsten hatten sich in den Nachmittagsstunden, am seltensten in den

zeitigen Morgenstunden Spitzenströme gezeigt. Sämtliche Fälle wurden dem Vorzeichen der Spitzenströme entsprechend in drei Gruppen geteilt:

In den untersuchten Stunden wurden

- a) positive und negative Spitzenströme gleicherweise beobachtet (482 Fälle),
- b) nur positive Spitzenströme beobachtet (226 Fälle),
- c) nur negative Spitzenströme beobachtet (190 Fälle).

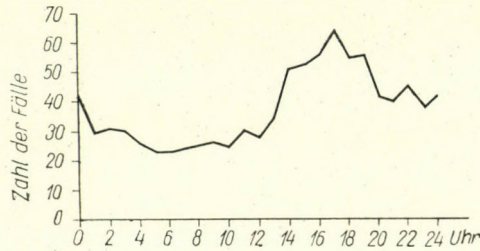


Bild 1. Täglicher Verlauf der Häufigkeit der Spitzenentladungen

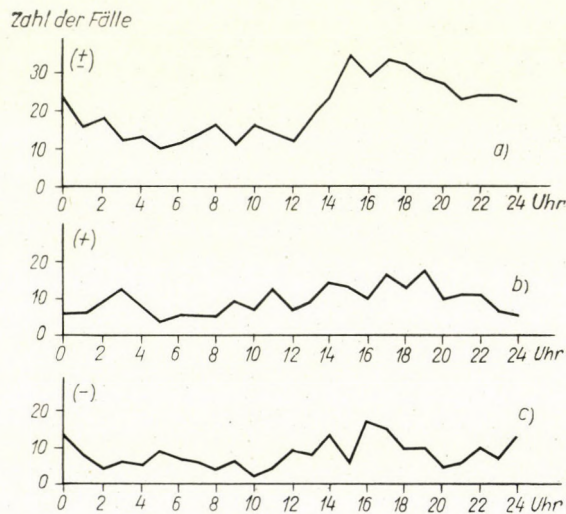


Bild 2. Täglicher Verlauf der Häufigkeit der Spitzenentladungen unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Ströme

Bild 2 veranschaulicht den täglichen Verlauf der Häufigkeit bei diesen drei Gruppen (a, b, c). Jede Kurve zeigt am Nachmittag ein Maximum, jedoch gleicht das Bild 2a, das ungefähr die Hälfte sämtlicher Angaben enthält, am ehesten der Kurve in Bild 1. Die Kurve, die die Verteilung des täglichen Ablaufes sämtlicher Fälle darstellt, wird also ausschlaggebend von der Änderung der Häufigkeit jener Stunden bestimmt, bei denen positive und negative Spitzenströme in gleicher Weise vorkommen.

Zur Untersuchung der jahreszeitlichen Änderungen wurde der in [1] beschriebene Quotient $T = N/n$ benutzt. ($N =$ Anzahl der Entladungsstunden innerhalb eines Monats ohne Berücksichtigung des Vorzeichens des Spitzenstromes; $n =$ Anzahl der Tage im untersuchten Monat, an denen Beobachtungen gemacht wurden). Dieser Quotient gibt an, wieviel Stunden auf einen Tag des beobachteten Monats entfallen, in denen Spitzenentladung festgestellt wurde. Dadurch ist die Häufigkeit der Spitzenströme pro Monat gekennzeichnet, und außerdem auch die Aktivität dieser Erscheinungen

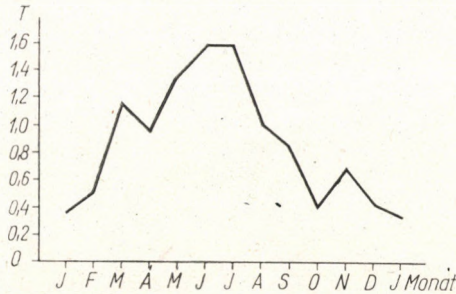


Bild 3. Jährlicher Verlauf der Häufigkeit der Spitzenentladungen auf Grund der Änderung des Quotienten T

ausgedrückt. Der Quotient T wurde für jeden Monat des untersuchten Zeitabschnittes bestimmt und der Durchschnitt der drei Werte, die zu demselben Monat je eines Jahres gehören, wurde gebildet. Die jährliche Änderung dieses Durchschnittes zeigt Bild 3, und man sieht, daß es im Sommer ein Maximum und im Winter ein Minimum gibt.

Der tägliche und jährliche Verlauf der durch die Spitzenströme gelieferten Ladungsmengen

Außer der Untersuchung der täglichen und jährlichen Änderung der Häufigkeit der Spitzenströme muß auch ihre Größe nach ähnlichen Gesichtspunkten untersucht werden. Es wird deshalb bei der Bearbeitung des Beobachtungsmaterials die positive und negative Ladungsmenge bestimmt, die von diesen Strömen innerhalb einer Stunde geliefert wurden [1]. Bild 4 zeigt den Mittelwert dieser Ladungsmengen für jede Stunde eines Tages, der aus den stündlichen Mittelwerten der 36 Monate berechnet wurde. (Die Zeit ist mitteleuropäische Zeit.) Der tägliche Verlauf der Mittelwerte der Ladungsmengen, die die Größe der Spitzenströme kennzeichnen, folgt der täglichen Änderung der Häufigkeit. Die Mittelwerte sowohl der positiven als auch der negativen Ladungsmengen sind nachmittags am größten und in den frühen Morgenstunden am kleinsten. Die dreijährigen Beobachtungen unterstützen also

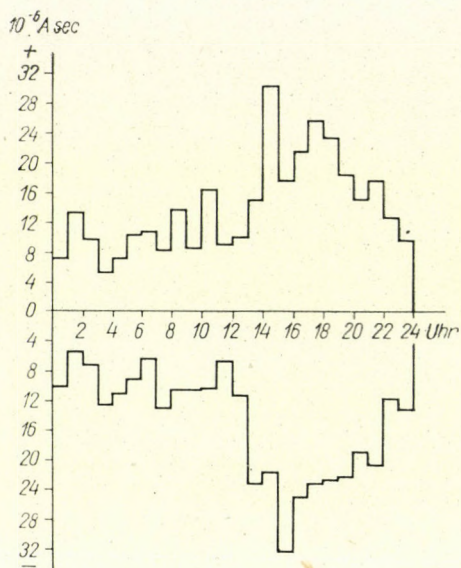


Bild 4. Tägliche Änderung der von den Spitzenströmen stündlich gelieferten durchschnittlichen Ladungsmengen

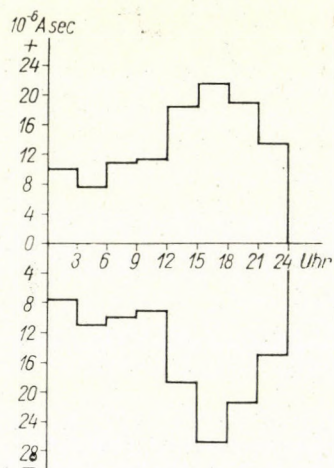


Bild 5. Tägliche Änderung des dreistündigen durchschnittlichen Wertes der von den Spitzenströmen gelieferten Ladungsmengen

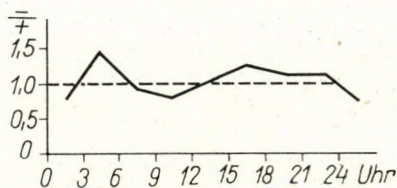


Bild 6. Tägliche Änderung des Verhältnisses der negativen und positiven Ladungsmengen, die aus den dreistündlichen Durchschnittswerten berechnet wurden

unsere früheren Erfahrungen ([1], Bild 2), die jedoch nur informativen Charakter hatten, weil sie sich bloß auf einjährige Beobachtungen bezogen. Die stündlichen Mittelwerte wurden dann zu Gruppen von je drei Stunden zusammengestellt, und die dreistündlichen Durchschnitte berechnet. Bild 5 zeigt diese dreistündlichen Durchschnitte, wobei der Unterschied der Ladungsmenge vor 12 h und nach 12 h auffällt. Auf Grund einjähriger Beobachtungen wurde schon erwähnt [1], daß die positiven Ladungsmengen das nachmittägliche Maximum stufenweise, während die negativen Ladungsmengen diesen Maximumwert sprunghaft erreichen. An Hand von dreijährigen Beobachtungen

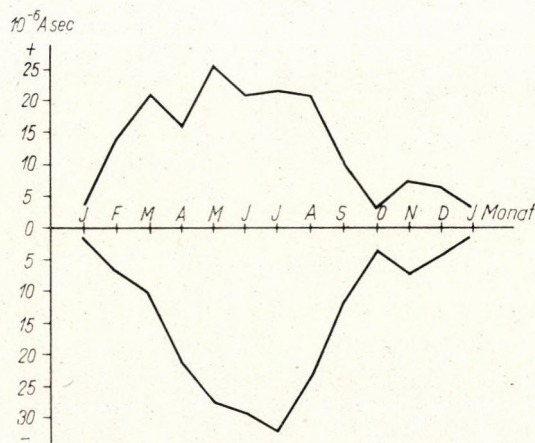


Bild 7. Jährliche Änderung der monatlichen stündlichen Durchschnittswerte der Ladungsmengen auf Grund dreijähriger Datensammlungen

sieht man in Bild 5, daß auch die positiven Ladungsmengen von einem in den Vormittagsstunden sich kaum ändernden Niveau nach 12 h plötzlich auf den nachmittäglichen Maximumwert anwachsen. In Bild 6 wurde das aus den dreistündlichen Durchschnittswerten der negativen und positiven Ladungsmengen berechnete Verhältnis der negativen zu den positiven Ladungsmengen dargestellt. Dieses Verhältnis bleibt von dem Bild 3c [1] abweichend nur zwischen 12—24 h dauernd über dem Wert 1, was bedeutet, daß das Übergewicht der negativen Ladungsmengen nicht während des ganzen Tages besteht.

Zwischen Juli 1960 und Juni 1963 wurde für jeden Monat aus den stündlichen Durchschnittswerten der monatliche stündliche Durchschnitt berechnet. Der monatliche stündliche Durchschnittswert der positiven und negativen Ladungsmengen kennzeichnet die Größe der Spitzenströme in den einzelnen Monaten. (Die Wirkung fehlender Beobachtungen ist bei den monatlichen Stundendurchschnitten nicht so störend wie bei den Summen der monatlichen Ladungsmengen.) Bild 7 zeigt für obigen Zeitabschnitt die Durchschnitts-

werte aus je drei Mittelwerten der gleichen Monate, die im Sommer einen Maximumwert und im Winter einen Minimumwert aufweisen. Die Größe der positiven und negativen Spitzenströme zeigt also nicht nur eine tägliche Änderung, sondern ändert sich auch mit den Jahreszeiten, wie es schon aus [1] entnehmbar war. Die Tendenz der jahreszeitlichen Änderung kann natürlich auf Grund längerer Beobachtungen zuverlässiger bestimmt werden.

Man kann feststellen, daß neben den durchschnittlichen Abläufen gewisse Abweichungen im jahreszeitlichen Verlauf der einzelnen Jahre vorkommen können. Bild 8 zeigt die Änderung des monatlichen stündlichen Durchschnittswertes der positiven und negativen Ladungsmengen vom Juli 1960 bis Juni

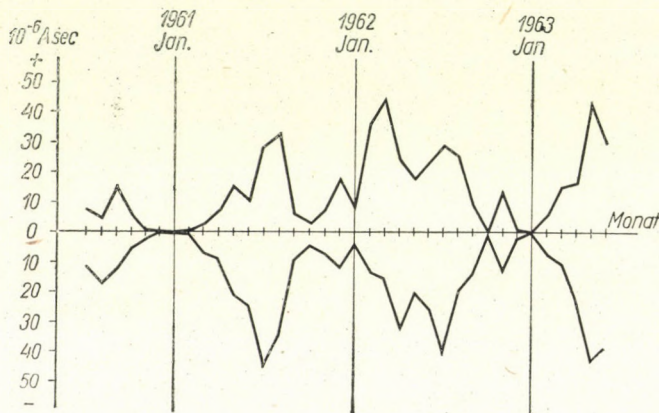


Bild 8. Jährliche Änderung der monatlichen stündlichen Durchschnittswerte der Ladungsmengen für jedes der drei Jahre

1963. Die Abweichung von den dreijährigen Durchschnittswerten ist am auffallendsten bei den positiven Werten, wobei besonders die Monate Februar und März 1962 bemerkenswerte Abweichungen dieser Werte zeigen. In beiden Monaten kam es in einigen Fällen bei Schneefall und Schneesturm vor, daß der Potentialgradient in positiver Richtung stark anwuchs, was positive Spitzenentladungen zur Folge hatte.

Die Verteilung der Ladungsmengen nach der Größe

Die im dreijährigen Zeitabschnitt beobachteten stündlichen Ladungsmengen wurden, unter Berücksichtigung des Vorzeichens, ihrer Größe entsprechend gruppiert. Der Wertbereich der einzelnen Gruppen betrug bis zu $\pm 2000 \cdot 10^{-6}$ As/h, $200 \cdot 10^{-6}$ As/h. Zwischen den erwähnten Grenzen und $\pm 3000 \cdot 10^{-6}$ As/h betrug der Wertbereich $500 \cdot 10^{-6}$ As/h und über $\pm 3000 \cdot 10^{-6}$ As/h wurden die Ladungsmengen in eine weitere Gruppe eingereiht.

Die Häufigkeit der verschiedenen Ladungsmengen innerhalb einer Gruppe zeigt Bild 9. Am häufigsten kamen jene Ladungsmengen vor, deren absoluter Wert kleiner war als $200 \cdot 10^{-6}$ As/h und die Häufigkeit nahm in Richtung der größeren Ladungsmengen ab.

Es wurde untersucht, ob die beobachteten Daten aus einer Normalverteilung stammen oder nicht. Zu diesem Zweck wurden die beobachteten

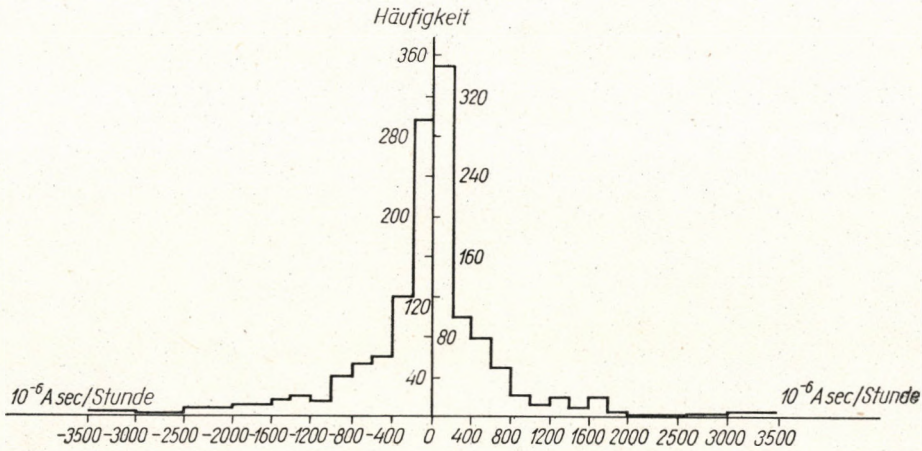


Bild 9. Häufigkeit der in einer Stunde gelieferten Ladungsmengen verschiedener Größe

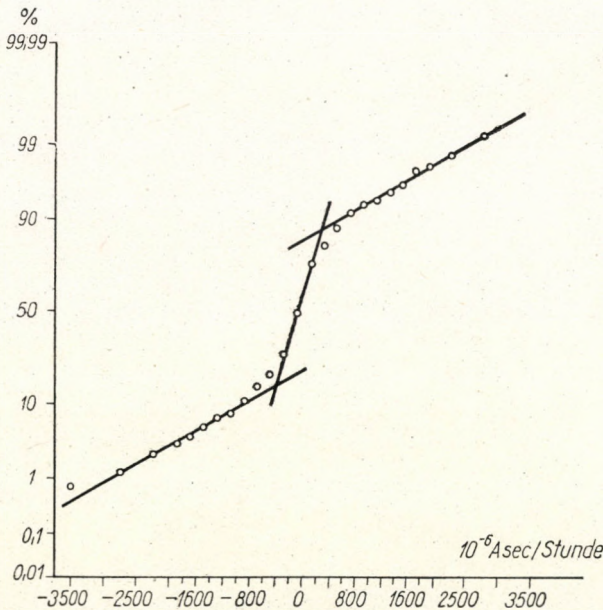


Bild 10. Verteilungsfunktion der in einer Stunde gelieferten Ladungsmengen verschiedener Größe im Wahrscheinlichkeitsmaßstab

Werte im Wahrscheinlichkeitsmaßstab dargestellt, in dem eine Gauß—Laplace'sche Normalverteilung eine Gerade ergibt. Bild 10 zeigt, daß die beobachteten Werte der praktischen Verteilung nicht auf eine Gerade fallen. Man sieht aber, daß diese Werte annähernd durch 3 Gerade gekennzeichnet werden können, von denen die beiden, zu großen Ladungsmengen gehörenden Geraden (über $-400 \cdot 10^{-6}$ und $+300 \cdot 10^{-6}$ As/h) annähernd parallel laufen. Daraus

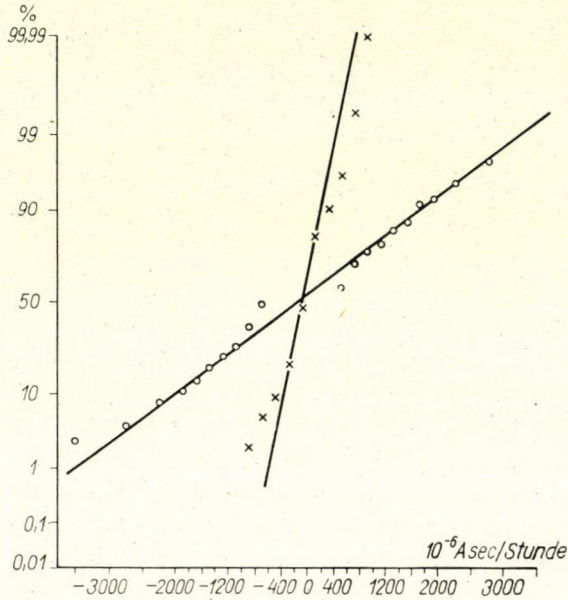


Bild 11. Beide Komponenten der Verteilungsfunktion im Wahrscheinlichkeitsmaßstab

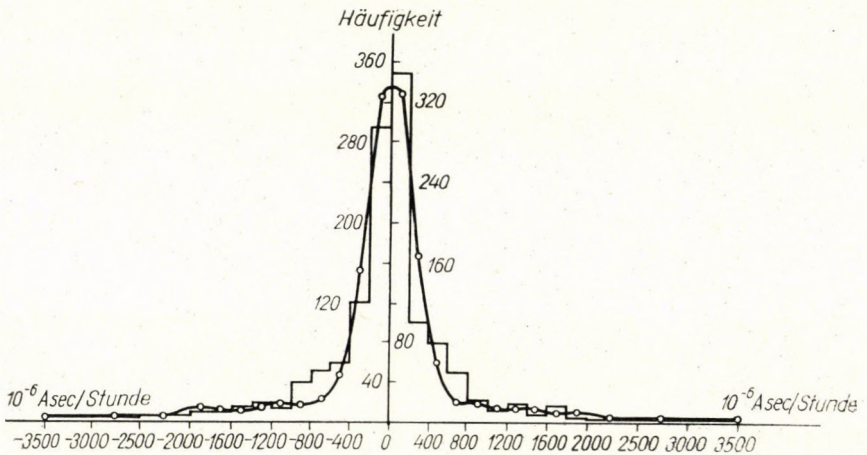


Bild 12. Histogramm der ursprünglichen Verteilung und die aus beiden Komponenten zusammengesetzte Dichtefunktion

kann man folgern, daß diese Ladungsmengen die gleiche Verteilung haben. Zwischen diesen liegt die dritte Gerade, die die Verteilung der kleinen Ladungsmengen kennzeichnet. Man nehme an, daß sich hier zwei Normalverteilungen überlagern, weshalb die praktische Verteilungsfunktion in zwei Komponenten zerlegt werden soll. Diese beiden Komponenten sind im Wahrscheinlichkeitsmaßstab im Bild 11 dargestellt. Wie man sieht, geben diese beiden Punktserien annähernd je eine Gerade, was auf das Vorhandensein von zwei Normalverteilungen hinweist. Auf Grund dieser Geraden wurde die resultierende Dichtefunktion der beiden Normalverteilungen im Bild 12 dargestellt. Zu Vergleichszwecken wurde im selben Bild auch das Hystogramm der ursprünglichen Verteilung eingetragen. Die beiden Verteilungen zeigen bei großen Werten gute Übereinstimmung, woraus gefolgert werden kann, daß die im Bild 11 gezeigte Verteilungsfunktion für die großen Werte wirklich eine Komponente der ursprünglichen Verteilung ist. Die größte Abweichung zwischen ursprünglicher und gebildeter Verteilung wird beim Übergang von den großen Werten zu den kleinen Werten im Bild 12 beobachtet. Wie man auch an Bild 11 sehen kann, wurden bei der Konstruierung der steilen Gerade solche Punkte mit größerem Gewicht in Betracht gezogen, die unter den Punkten der steilen Verteilungsfunktion die meisten Fälle enthalten und gleichzeitig den kleinsten Absolutwert (in 10^{-6} As/h) haben, als jene die im Übergangsabschnitt liegen und sich auf den kleineren Teil der Fälle beziehen. Es ist möglich, daß die Punkte dieses Übergangsabschnittes eine dritte Verteilungsfunktion kennzeichnen, und es ist sicher, daß man mit drei Komponenten eine noch bessere Übereinstimmung zwischen wirklicher und gebildeter Normalverteilung erhält. Die Bestimmung mehrerer Komponenten würde aber auf Kosten der Genauigkeit gehen, weil so zur Bestimmung je einer Komponente weniger Werte zur Verfügung stehen. Selbstverständlich kann auch der Fall eintreten, daß die Übergangswerte und die kleineren Werte nur aus einer der Normalverteilung ähnlichen Verteilung stammen.

Erklärungen und Folgerungen

Auf den Zusammenhang der täglichen und jahreszeitlichen Änderung der Spitzenströme mit der Gewittertätigkeit haben mehrere Veröffentlichungen hingewiesen [2, 3, 4]. Es wurde für den hier untersuchten Zeitabschnitt die Häufigkeit der Gewittertage zusammengestellt. Die Gewittertage wurden teilweise auf Grund der im Observatorium durchgeführten Beobachtungen, teilweise auf Grund der Beobachtungen der Meteorologischen Station in Sopron [5] ausgewählt. Tafel I enthält die Anzahl der Gewittertage in den verschiedenen Monaten.

Die Monate der untersuchten Zeitspanne wurden in zwei Gruppen geteilt u. z. a) Gewittermonate und b) gewitterlose Monate. Es wurden für beide

Tafel I
Anzahl der Gewittertage

	1960	1961	1962	1963
Januar		0	0	0
Februar		0	0	0
März		0	0	0
April		5	2	4
Mai		5	4	8
Juni		9	4	7
Juli	4	6	5	
August	7	3	3	
September	5	2	0	
Oktober	4	0	0	
November	0	0	0	
Dezember	0	0	0	

Gruppen aus den monatlichen Summen der Ladungsmengen (positive und negative Ladungen zusammen) die auf einen Monat bezogene durchschnittliche Ladungsmenge berechnet. Auf die Gewittermonate fällt eine durchschnittliche Ladungsmenge von $27,9 \cdot 10^{-3}$ Asec, während auf die gewitterlosen Monate durchschnittlich eine Ladungsmenge von $10,5 \cdot 10^{-3}$ Asec fällt. Von den Monaten der Gewitterperiode wurden die Summen der Ladungsmengen jener Tage ausgewählt, an denen örtliche Gewitter vorkamen, und nach Abzug dieser Ladungsmengen erhielt man einen durchschnittlichen Wert von $11,4 \cdot 10^{-3}$ Asec für die Gewittermonate. Die Differenz zwischen den monatlichen durchschnittlichen Ladungsmengen der zwei Zeitperioden wurde also dadurch gering und ihr Verhältnis fiel vom ursprünglichen Wert 2,66 auf 1,09. Man sieht also, daß in beiden Zeitperioden die durchschnittlichen monatlichen Ladungsmengen, die mit sonstigen Faktoren in Verbindung stehen, beinahe gleich groß sind.

In der Gestaltung des Maximums der jahreszeitlichen Änderung — das am meisten in den Frühlings- und Sommermonaten erscheint — spielen die lokalen Gewitter die größte Rolle. Es ist aber auch jener Ladungstransport der Spitzenströme bedeutend der nicht mit der Gewittertätigkeit verbunden ist.

Das Auftreten großer Spitzenentladungen in den Wintermonaten wird in erster Linie von Schneefällen und Schneestürmen begünstigt. Bild 13 zeigt z. B. den Potentialgradienten und die Spitzenströme, die bei dem Schneesturm am 16. März 1962 registriert wurden. Der Potentialgradient stieg zwischen 4—5 h plötzlich über den Wert von $+300$ V/m, wobei gleichzeitig die ersten

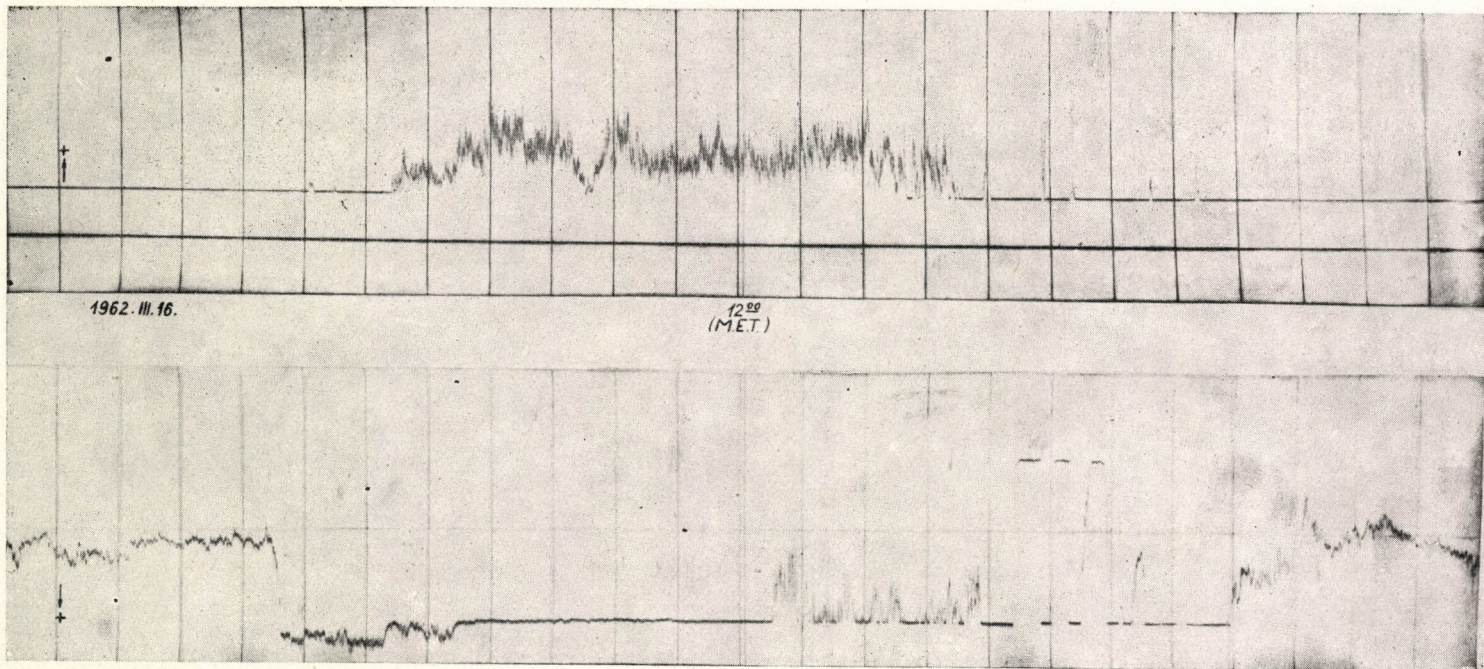


Bild 13. Änderung des Potentialgradienten und der Spitzenströme am 16. III. 1962

Anzeichen positiver Spitzenströme auftraten. Der Potentialgradient blieb beinahe den ganzen Tag auf diesen hohen Wert, was durch Sperrung des Meßgerätes angezeigt wird. (Das Gerät zur Messung des Potentialgradienten ist auf die Messung von Maximalwerten ± 300 V/m eingestellt und sperrt nach Überschreitung dieser Werte ab.) Nach J. SCHOLZ [6] kann der hohe Potentialgradient bei Schneesturm dadurch erklärt werden, daß die sehr feinen Teilchen durch Reibung Ladung erhalten. M. BARRÉ [7] und H. DOLEZALEK [8] beobachteten weiterhin, daß die Polarität wirbelnder Schneewolken so geschichtet sein kann, daß sich ihre horizontalen Trennflächen viele Stunden hindurch nicht in vertikaler Richtung verschieben. Bei eben erwähntem Schneesturm müssen sich ähnliche Verhältnisse ausgebildet haben, bei denen für längere Zeit ein Potentialgradient gleicher Polarität auftrat, und auch Spitzenentladungen verursacht wurden.

Für das Auftreten von Spitzenentladungen sind ferner Regenfälle ohne Gewitter von großer Bedeutung, weiterhin müssen Nebel, Staubsturm und örtliche atmosphärische Verunreinigungen auch erwähnt werden [4, 2].

Untersucht man die Verteilung der Größe der in einer Stunde gelieferten Ladungsmengen, so kann man feststellen, daß die Verteilung in zwei Normalverteilungen (oder dazu nahestehende Verteilungen) geteilt werden kann. Das kann aber bedeuten, daß verschiedene Mechanismen für das Zustandekommen der größtmäßig verschieden verteilten Ladungsmengen verantwortlich sind. Auf Grund der Knickpunkte der Verteilungsfunktionen des Bildes 10 wurden die Ladungsmengen, die zwischen die Grenzen $-400 \cdot 10^{-6}$ und $+300 \cdot 10^{-6}$ As/h fallen, von jenen, die außerhalb dieser Grenzen liegen, abgesondert. Diese Aufteilung in zwei Komponenten stellt natürlich nur eine Annäherung dar, weil in beiden Gruppen auch Übergangswerte vorkommen. Deshalb können beide Gruppen auch nicht scharf voneinander getrennt werden. Auf Grund sämtlicher Daten des dreijährigen Zeitabschnittes wurde bestimmt, in welchem Verhältnis die Häufigkeiten der Ladungsmengen in den verschiedenen Monaten auf beide Gruppen verteilt sind. In beiden Gruppen ist im Sommer die Häufigkeit größer als im Winter, jedoch ändert sich das Häufigkeitsverhältnis der beiden durch die Knickpunkte bestimmten Gruppen im Laufe des Jahres. Im Bild 14 sieht man, daß die durch den Spitzenstrom in einer Stunde gelieferten kleinen Ladungsmengen zwischen $-400 \cdot 10^{-6}$ und $+300 \cdot 10^{-6}$ As/h, den größten Teil der Fälle im Herbst und besonders im Winter darstellen, und nur im September und im Februar Abweichungen beobachtbar sind. In den Frühlings- und Sommermonaten sind auch schon die großen Werte (außerhalb obiger Grenzen) in großer Zahl vertreten. Der größere Stundendurchschnittswert in diesen Monaten (siehe Bild 7) ist deshalb nicht nur eine Folge der größeren Häufigkeit, sondern ist auch darauf zurückzuführen, daß im Gegensatz zu den Herbst- und Wintermonaten in diesen Jahreszeiten öfters größere Ladungsmengen beobachtet werden können. Im Frühling und im Sommer

hängen die größeren Ladungsmengen hauptsächlich mit Gewittern zusammen, in den Wintermonaten jedoch mit Schneefall und Schneestürmen. Die durch den Spitzenstrom gelieferten kleineren Ladungsmengen hängen mit anderen schon erwähnten Faktoren zusammen. Selbstverständlich sei es bemerkt, daß hier von statistisch verteilten Beobachtungen die Rede ist. Die Aufteilung der Ladungsmengenwerte in zwei Komponenten, die sich der Größe nach

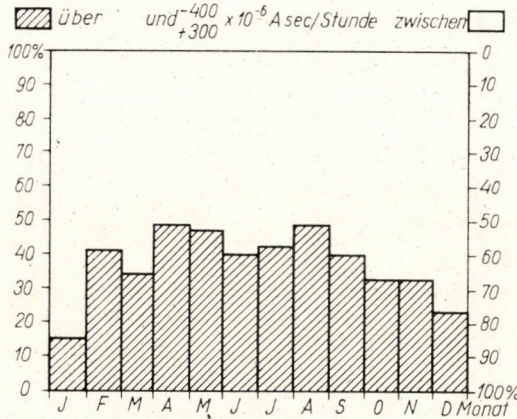


Bild 14. Jährliche Änderung der Häufigkeit der in einer Stunde gelieferten Ladungsmengen für beide Komponenten

unterscheiden, zeigt also, daß das Auftreten der Spitzenentladungen und die jahreszeitlichen Änderungen neben der Hauptwirkung der Gewittertätigkeit auch noch auf andere Faktoren zurückzuführen sind.

SCHRIFTTUM

1. BENCZE, P.—MÄRCZ, F.: A csúcskisülési áramok vizsgálatáról (Untersuchung der Spitzenströme). *MTA VI. Oszt. Közl.* **32** (1963), 137—144.
2. WHIPPLE, F. J. W.—SCRASE, F. J.: Point Discharge in the Electric Field of the Earth *Meteorological Office Geophysical Memoirs*, **68** (1936).
3. BENCZE, P.: The Distribution of the Quantities of Charge Transported by Point Discharge. *Acta Techn. Hung.* **43** (1963), 289—291.
4. LUTZ, C. W.: Über den Beitrag der Spitzenentladung zur Aufrechterhaltung der negativen Erdladung. *Gerlands Beiträge zur Geophysik* **60** (1943), 9.
5. Országos Meteorológiai Intézet: Időjárási napijelentés Wetter-Tagesmeldung **73, 74, 75, 76**.
6. SCHOLZ, J.: Luftelektrische Messungen auf Franz—Josefs-Land während des II. Internationalen Polarjahres 1932/1933. *Transact. of the Arctic Institute of USSR* **16** (1935), 5—169.
7. BARRÉ, M.: Propriétés électriques du Blizzard. Reports scientifiques des expeditions polaires francaises S. IV. 1. *Ann. d. Geophys.* **9** (1952), 164—183.
8. DOLEZALEK, H.: Remarks on the Electrical Conditions during Disturbed Weather. *Techn. Note* **12**. Contract AF **61/514—640**, 1957.

ON RECENT RESULTS IN THE INVESTIGATIONS OF POINT DISCHARGE CURRENTS

F. MÁRCZ

SUMMARY

A more detailed study of the properties of point discharge currents have been made possible by the elaboration of observations which lasted for 3 years. By these investigations, a large part of the peculiarities in the diurnal and seasonal variations, already previously revealed [1], have been confirmed, further the relations of point discharge currents to other phenomena pointed out. The magnitude distribution of charge quantities delivered in 1 hour can be divided into two normal (or nearly so) distributions. The frequency of charge quantities divided accordingly into two groups shows a seasonal variation.

NOUVEAUX RÉSULTATS DES RECHERCHES SUR LES COURANTS DE DÉCHARGE DE CRÊTE

F. MÁRCZ

RÉSUMÉ

Une étude plus approfondie des propriétés des courants de décharge de crête a été rendue possible par l'analyse des observations de trois années. Les examens ont confirmé une grande partie des phénomènes particuliers des variations diurnes et saisonnières constatés dans un travail antérieur [1]. Ils ont également indiqué l'existence des relations des courants de décharge de crête avec certains autres phénomènes. La distribution suivant la grandeur des quantités de charges observées en une heure peut être divisée en deux distributions normales (ou approchantes). La fréquence des quantités de charges divisées en deux groupes montre une variation saisonnière.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПИКОВЫХ РАЗРЯДНЫХ ТОКОВ

Ф. МЭРЦ

РЕЗЮМЕ

Более подробное изучение особенностей пиковых разрядных токов стало возможным на основе обработки данных наблюдений за 3 года. Проведенные исследования подтвердили большинство уже ранее выявленных особенностей суточных и сезонных вариаций, при чем были выявлены и связи пиковых разрядных токов с другими явлениями. Заряды за 1 час распределяются по величине по двум нормальным (или близким к нормальной) группам. Для частоты количеств зарядов, разделенных таким образом на две группы, характерна вариация по временам года.

DER ZUSAMMENHANG DES LUFTELEKTRISCHEN POTENTIALGRADIENTEN MIT DEN METEOROLOGISCHEN ELEMENTEN IN DEN BEOBACHTUNGEN DES GEOPHYSIKALISCHEN OBSERVATORIUMS BEI NAGYCENK

F. MÁRCZ

GEOPHYSIKALISCHES FORSCHUNGLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER
WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 18. April 1964]

Um die Zusammenhänge der luftelektrischen Erscheinungen mit den meteorologischen Elementen zu untersuchen, wurden die im Zeitabschnitt September 1961 — Dezember 1962 gemessenen Werte des luftelektrischen Potentialgradienten und die Angaben der meteorologischen Beobachtungen verglichen. Die stündlichen Durchschnittswerte des Potentialgradienten, zwischen 06 00—07 00, 13 00—14 00 und 20 00—21 00 Uhr, sind nach den in den Zeitpunkten der Terminbeobachtungen bestimmten Werten der ausgewählten meteorologischen Elemente geordnet und die Mittelwerte dieser Gruppen berechnet worden. Die ausgewählten meteorologischen Elemente waren: Windrichtung, Windstärke, Bewölkung, ferner auch die in der Beilage des Täglichen Wetterberichtes des OMI veröffentlichten Angaben des Luftmassen — Kalenders. Auf Grund der gerechneten Mittelwerte des Potentialgradienten konnte man erfahren, daß — statistisch — mit der Zunahme der Windstärke und der Bewölkung der Potentialgradient abnimmt. Die Änderung des Potentialgradienten mit der Windrichtung ist durch lokale Einflüsse zu erklären. An Hand von den Untersuchungen kann ein gewisser Zusammenhang des Potentialgradienten mit den Änderungen der Luftmassen angenommen werden.

I. Einführung

In der luftelektrischen Station des Geophysikalischen Observatoriums bei Nagycenk werden die Messungen des luftelektrischen Potentialgradienten zur Untersuchung des Zusammenhanges der Luftelektrizität mit dem elektromagnetischen Feld der Erde durchgeführt. In der Gestaltung der luftelektrischen Vorgänge spielen unter anderem auch die Änderungen der meteorologischen Elemente eine große Rolle, wofür man auch die Zusammenhänge der luftelektrischen und der meteorologischen Änderungen überblicken muß. Die Kenntnis dieser Beziehungen könnte unsere auf die Erklärung des obgenannten Zusammenhanges gerichtete Arbeit erleichtern.

Die Verhältnisse der Messungen und die lokalen Umstände können an den einzelnen Stationen sehr verschieden sein, deswegen müssen die aus der Fachliteratur schon bekannten und aufgeklärten Zusammenhänge an jeder Station auch individuell untersucht werden. Zuerst wird kurz die zur Messung des luftelektrischen Potentialgradienten verwendete Anlage beschrieben, weiter wird über die von September 1961 bis Dezember 1962 durchgeführten Untersuchungen berichtet, in welchen die Ergebnisse der Messungen des luftelektrischen Potentialgradienten und die Angaben der meteorologischen Beobachtungen verglichen worden sind.

2. Die Beschreibung der zur Messung des luftelektrischen Potentialgradienten verwendeten Anlage

Die Messung des luftelektrischen Potentialgradienten wird mit Hilfe eines in 1 m Höhe über der Erdoberfläche montierten radioaktiven Kollektors durchgeführt. Der Kollektor ist — wie auch bei den von der Firma Stange und Wolfrum erzeugten Potentialsonden — ein Radiumpräparat mit einer Aktivität von 20μ Curie und mit einer Halbwertszeit von 1680 Jahren. Die durch den Kollektor ermittelten Spannungsänderungen sind auf die Anode einer in Anodensteuerung arbeitenden Elektronenröhre gebracht und steuern damit den Gitterstrom der Röhre. Dieser Meßfühler ist durch Kabel mit dem im Gebäude der luftelektrischen Station untergebrachten Photoregistrierapparat zusammengeschaltet. In der Photoregistrieranlage befindet sich ein flüssigkeitsgedämpftes Galvanometer (Typ Schlumberger — Picard), das mit entsprechender Empfindlichkeit den aus dem Meßfühler stammenden Gitterstromänderungen folgt (auf der Registrierschleife ist $1 \text{ mm} \approx 10 \text{ V/m}$). Der Vorschub des Registrierfilmes ist 2 cm/Stunde , die Registrierungen versieht die Hauptuhr der Station in jeder Stunde mit Zeitmarken.

3. Die Ausführung der Untersuchungen

Die meteorologischen Beobachtungen werden in dem Geophysikalischen Observatorium bei Nagycenk im Rahmen der Klimaforschung des OMI (Staatliches Meteorologisches Institut) täglich um 06 53, 13 53 und 21 53 Uhr (MEZ) durchgeführt. Einerseits wurden zu unseren Untersuchungen die in diesen Zeitpunkten beobachteten Werte der Windstärke, der Windrichtung und der Bewölkung, ferner die Angaben des in der Beilage des Täglichen Wetterberichtes des OMI veröffentlichten Luftmassen-Kalenders benutzt, andererseits sind die stündlichen Durchschnittswerte des Potentialgradienten zwischen $06 \text{ 00} \div 07 \text{ 00}$, $13 \text{ 00} \div 14 \text{ 00}$ und $20 \text{ 00} \div 21 \text{ 00}$ Uhr verwendet worden. So konnte man aus den einzelnen meteorologischen Elementen und aus dem Potentialgradienten täglich drei Proben nehmen, wodurch die Ausführung einer statistischen Untersuchung ermöglicht wurde.

Die Fachliteratur hat schon darüber mehrmals berichtet, wie die luftelektrischen Meßangaben zu einer statistischen Bearbeitung ausgewählt werden sollen. In der letzteren Zeit kam der Standpunkt, wonach zu den Untersuchungen nur die bei »Schönwetter« gemessenen Werte benutzt werden dürfen, immer mehr in den Hintergrund. Aus unserer Bearbeitung sind auch nur die bei einem zweifellos gestörten Feld gemessenen Werte (größer als $\pm 300 \text{ V/m}$ und oft mit wechselndem Vorzeichen) ausgeschlossen. (Das Material — ohne diese gestörten Werte — ist mit dem Index 1 gekennzeichnet.) Ferner wurden die Untersuchungen auch so durchgeführt, daß die an Tagen mit Niederschlag

gemessenen Werte — laut der in [1] dargelegten Gedanken — nicht berücksichtigt waren, womit man ein weiteres meteorologisches Element in die Untersuchungen einführen konnte. (Die an niederschlagsfreien Tagen gemessenen Werte bekamen den Index 2.)

Zur Untersuchung des Zusammenhanges des luftelektrischen Potentialgradienten mit dem Wind sind die zur Verfügung stehenden Angaben des Potentialgradienten in zwei Gruppen verteilt: Durchschnittswerte *a*) bei Windstille und *b*) bei Winden. Für beide Gruppen sind drei gesonderte Mittelwerte, aus den — um die Zeitpunkte (06 00 ÷ 07 00, 13 00 ÷ 14 00, 20 00 ÷ 21 00) der meteorologischen Beobachtungen bestimmten — stündlichen Durchschnittswerten berechnet worden; um den täglichen Gang zu eliminieren, wurden aus ihnen durch eine wiederholte Mittelbildung die in Tabelle I eingeführten Werte erhalten. (Die Zuverlässigkeit dieser Werte ist mit ihrer Streuung angegeben.)

Tabelle I

P_1	P_2
<i>a</i>) $95 \pm 2,7$	$105 \pm 3,3$
<i>b</i>) $77 \pm 1,7$	$85 \pm 2,0$

P_1 = Mittelwert des Potentialgradienten aus dem gesamten Material berechnet (in V/m).

P_2 = Mittelwert des Potentialgradienten aus den Angaben der niederschlagsfreien Tage berechnet (in V/m).

Zwischen den Mittelwerten des Potentialgradienten bei Windstille und bei windigem Wetter gibt es in beiden Fällen (P_1 und P_2) einen Unterschied von etwa 20 V/m, der Einfluß des Windes äußert sich also in der Herabsetzung des Mittelwertes. Natürlich gilt diese Regelmäßigkeit nicht in jedem einzelnen Fall, aber in der Mehrzahl der Fälle ist der Wert des Potentialgradienten bei Windstille größer als bei windigem Wetter.

Die Angaben der Gruppe *b*) wurden nach der Windstärke noch weiter klassifiziert, wobei drei Klassen aufgestellt wurden: schwache (1–2), mäßige (3–4) und starke (5–6–7) Winde. (Zur Bestimmung der Windstärke diente bei den Beobachtungen eine Windfahne.) Die Mittelwerte des Potentialgradienten enthält als Funktion der Windstärke die Tabelle II. (Hier sind die Mittelwerte wie oben berechnet, und auch die Streuungen angegeben.)

Die Änderung der Mittelwerte des Potentialgradienten mit der Windstärke ist in graphischer Darstellung in Bild 1 zu sehen. (Ausgezogen = aus dem gesamten Material (1) berechnet; gestrichelt = aus Angaben der niederschlagsfreien Tagen (2) berechnet.)

Man kann feststellen, daß diese Ergebnisse — wenn auch die Änderung klein ist — mit den aus der Fachliteratur [1, 2, 5] bekannten übereinstimmen.

Mit zunehmender Windstärke nimmt der Mittelwert des Potentialgradienten ab. Davon bildet nur ein Wert eine Ausnahme. (In den P_2 -Angaben bei starken Winden.)

Es wurden die Mittelwerte des Potentialgradienten auch in Abhängigkeit von der Windrichtung berechnet und untersucht. Diese Werte samt ihrer

Tabelle II

Windstärke (B°)	P_1	n_1	P_2	n_2
0	$95 \pm 2,7$	28,6	$105 \pm 3,3$	27,1
1-2	$78 \pm 2,1$	47,4	$85 \pm 2,5$	48,8
3-4	$75 \pm 3,7$	14,6	$84 \pm 4,3$	16,0
5-6-7	$74 \pm 4,7$	9,4	$87 \pm 6,1$	8,1

P_1 und P_2 wie oben,

n_1 = Anzahl der Fälle in % (gesamtes Material).

n_2 = Anzahl der Fälle in % (aus Angaben der niederschlagsfreien Tage).

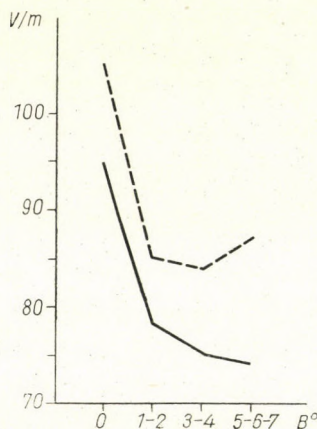


Bild 1. Die Mittelwerte des Potentialgradienten in Abhängigkeit von der Windstärke

Streuung (in V/m) und die Anzahl der Fälle (in %) sind in Tabelle III. nach Windrichtungen geordnet.

Die mit der Windrichtung verbundene Änderung der Mittelwerte des Potentialgradienten kann man im Bild 2 a) und b) gut überblicken. Auf Grund der Tabelle III. und Bild 2. ist folgendes festzustellen:

1. Der Mittelwert des Potentialgradienten ist bei jeder Windrichtung kleiner als bei Windstille.

2. Im geprüften Zeitabschnitt war der NW-Wind überwiegend häufig und verursachte eine etwa 10 prozentige Verminderung in dem Mittelwert

des Potentialgradienten im Vergleich mit dem Stand bei Windstille. (Die Unsicherheit des Mittelwertes beträgt auf Grund der Streuung etwa 3%.)

3. Bei gewissen Windrichtungen nimmt der Mittelwert nur unbedeutend ab. z. B. bei N – Wind: in P_1 5%, in P_2 1%. Da ist aber die Streuung ziemlich groß (etwa 7%).

4. Größere Verminderung (20–30%) kann man bei den aus dem SE–SW Sektor eintreffenden Winden wahrnehmen. (Die Streuung ist 7–8%).

Tabelle III

Windrichtung	P_1	n_1	P_2	n_2
N	90 ± 5,9	5,9	104 ± 7,6	5,2
NE	86 ± 8,7	2,7	103 ± 10,6	2,6
E	87 ± 11,4	1,6	78 ± 12,9	1,8
SE	66 ± 4,7	9,4	71 ± 5,4	10,4
S	62 ± 4,4	10,8	68 ± 4,9	12,5
SW	78 ± 4,6	10,0	81 ± 5,5	9,8
W	80 ± 7,7	3,5	86 ± 9,0	3,6
NW	81 ± 2,7	27,5	96 ± 3,3	27,0
–O	95 ± 2,7	28,6	105 ± 3,3	27,1

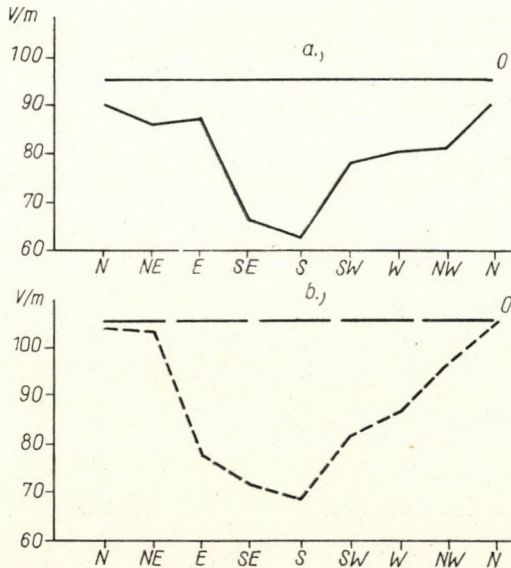


Bild 2. Die Mittelwerte des Potentialgradienten in Abhängigkeit von der Windrichtung

5. Im Vergleich mit dem Niveau bei Windstille tritt bei S-Winden die größte Abnahme im Mittelwert auf (35%). Das ist sogar auch neben 7 prozentiger Streuung wesentlich.

Tabelle IV

Gruppe	Bewölkung	P_1	n_1	P_2	n_2
I.	0	$92 \pm 3,4$	18,5	$93 \pm 3,5$	24,4
II.	1—2	$88 \pm 4,0$	13,5	$90 \pm 4,3$	16,5
III.	3—4	$88 \pm 4,2$	12,1	$88 \pm 4,9$	12,8
IV.	5—6	$77 \pm 4,8$	9,3	$82 \pm 5,7$	9,4
V.	7—8	$79 \pm 3,9$	13,9	$84 \pm 5,0$	12,5
VI.	9—10	$67 \pm 2,5$	32,7	$81 \pm 3,5$	24,4

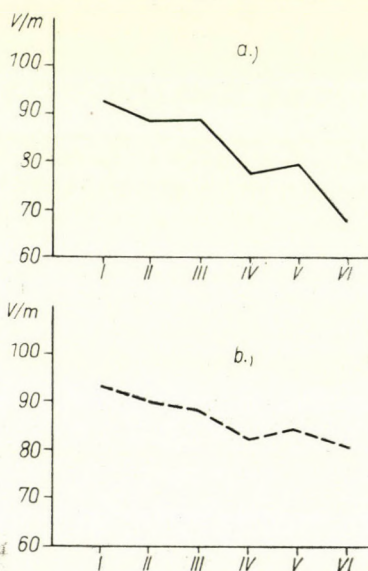


Bild 3. Die Mittelwerte des Potentialgradienten in Abhängigkeit von der Bewölkung

6. Die Mittelwerte bei den Windrichtungen NE und E wurden aus wenigen Angaben berechnet, und deshalb sind sie auch unsicher.

All das bedeutet, daß die wächselsnde Windrichtung in dem Mittelwert des Potentialgradienten Änderungen verursacht, die auf lokale Einflüsse hinweisen.

Ähnlich der bis jetzt verwendeten Methode untersuchte man auch die Änderungen des Mittelwertes des luftelektrischen Potentialgradienten als Funktion der Bewölkung. Auf Grund der Bewölkungsmenge wurden die Durchschnittswerte des Potentialgradienten in 6 Klassen geteilt, und für jede Klasse — in der oben schon erwähnten Weise — Mittelwerte bestimmt. Die

Bewölkungsgrade, die Mittelwerte des Potentialgradienten (in V/m) und die Anzahl der Fälle (in %) sind für die einzelnen Klassen in Tabelle IV. zusammengefaßt.

Im Bild 3 a) und b) kommt die Abnahme des Mittelwertes des Potentialgradienten mit zunehmender Bewölkung gut zum Ausdruck. Die Ergebnisse anderer Stationen [1, 2, 4] stimmen mit unseren Erfahrungen überein.

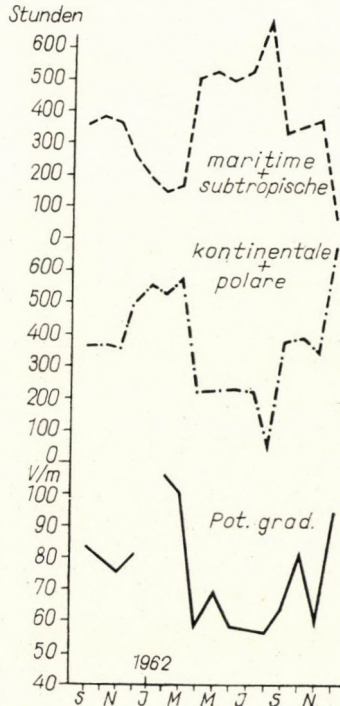


Bild 4. Der Jahresgang des Potentialgradienten und die jahreszeitliche Änderung der Häufigkeit der Luftmassen

Die Untersuchungen haben sich auch auf die Bestimmung der Zusammenhänge des Potentialgradienten mit den Luftmassen erstreckt. In der Beilage des Täglichen Wetterberichtes (herausgegeben von OMI) befindet sich ein Luftmassen-Kalender, der 8 Arten der Luftmassen unterscheidet. Diese Klassifikation diente als Grund zur Verteilung der Durchschnittswerte des Potentialgradienten nach Luftmassen. Für jede der 8 Gruppen sind in den Zeitpunkten der meteorologischen Beobachtungen drei Mittelwerte und aus diesen ein täglicher Mittelwert berechnet worden. Die letzteren Werte und die prozentuale Verteilung der Angaben über die einzelnen Gruppen enthält die Tabelle V.

Die Tabelle zeigt, daß mit kontinentalen Luftmassen größere Mittelwerte des Potentialgradienten verbunden sind als mit maritimen. Bei polarer

Tabelle V

Luftmasse	P_1	n_1	P_2	n_2
cK	$99 \pm 3,5$	16,4	$103 \pm 4,0$	18,5
cM	$88 \pm 3,4$	17,4	$95 \pm 4,0$	18,5
cW	$96 \pm 9,8$	2,1	$96 \pm 10,0$	2,9
mK	$61 \pm 5,4$	7,1	$67 \pm 6,8$	6,4
mM	$64 \pm 3,2$	20,1	$72 \pm 4,4$	15,6
mW	$68 \pm 6,2$	5,4	$74 \pm 7,2$	5,8
aK	$95 \pm 3,5$	16,4	$97 \pm 3,9$	19,1
tM	$73 \pm 3,7$	15,1	$78 \pm 4,7$	13,2

cK = kontinentale kalte
 cM = „ mäßige
 cW = „ warme
 aK = polare kalte
 mK = maritime kalte
 mM = „ mäßige
 mW = „ milde
 tM = subtropische

Luft ist der Mittelwert dem kontinentalen Wert ähnlich und bei subtropischer Luft ist der Mittelwert des Potentialgradienten ungefähr so groß wie bei den maritimen Luftmassen. (Die maximale Unsicherheit in den Mittelwerten ist — nach den Streuungen — 10%.)

4. Folgerungen aus den Untersuchungen

Aus den Untersuchungen kann man feststellen, daß die aus den Angaben der niederschlagsfreien Tage berechneten Mittelwerte des Potentialgradienten (in überwiegender Mehrheit) größer sind als die aus dem gesamten Material berechneten, entsprechenden Werte. Das ist dadurch zu erklären, daß der Potentialgradient gleichzeitig bei ruhigem sog. Landregen oft negativ (umgekehrte Schönwetterrichtung) ist; wenn also aus den Untersuchungen die Angaben der Tage mit Niederschlag ausgeschlossen sind, dann werden auch diese negative Werte weggelassen, und so sind die Mittelwerte größer als die aus dem gesamten Material berechneten.

Die mit den Änderungen der meteorologischen Elemente verbundenen Potentialgradientenschwankungen kommen meistens durch die Änderungen des Suspensionsgehaltes bzw. der Anzahl der Kondensationskerne zustande. Die in der Luft befindlichen Suspensionen bzw. Kondensationskerne spielen die Rolle der Transmission zwischen den Änderungen der meteorologischen und luftelektrischen Elemente [1, 3].

Unter Berücksichtigung der vorerwähnten Gedanken, konnte der in den Mittelwerten des Potentialgradienten zum Ausdruck gebrachte Windeinfluß

folgenderweise erklärt werden: bei Windstille ist der Vertikalaustausch der Luftmassen kleiner als bei windigem Wetter, so daß der Suspensionsgehalt der unteren Luftschichten relativ groß bleibt; damit ist der spezifische Widerstand der Luft und infolgedessen auch das Potentialgefälle groß. Bei Auftreten der Winde nimmt der Vertikalaustausch zu und der Suspensionsgehalt vermindert sich in Bodennähe, was die Herabsetzung des spezifischen Widerstandes der Luft und dadurch auch des Potentialgefälles zur Folge hat [1]. Deswegen sind in unseren Untersuchungen die aus Angaben der windstillen Tage berechneten Mittelwerte des Potentialgradienten größer als die der windigen Tage. Bei zunehmender Windstärke vergrößert sich die vertikale Durchmischung der Luft, und so wird auch der Mittelwert des Potentialgradienten immer mehr

Tabelle VI

Windrichtung Windstärke		Windrichtung								
		N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	-0
a)	1-2	4,2	2,6	1,4	7,3	7,8	8,3	3,2	12,6	28,6
	3-4	1,1	0,1	0,2	1,7	2,7	1,3	0,2	7,3	
	5-6-7	0,6	—	—	0,4	0,3	0,4	0,1	7,6	
b)	1-2	3,4	2,5	1,6	7,9	9,1	8,4	3,6	12,3	27,1
	3-4	1,4	0,1	0,2	2,1	3,3	1,0	—	7,9	
	5-6-7	0,4	—	—	0,4	0,1	0,4	—	6,8	

herabgesetzt. Diese fallende Tendenz ist bei schwachen und bei mäßigen Winden auch in unseren Ergebnissen bemerkbar, aber im Falle der starken Winde wächst wieder der Mittelwert des Potentialgradienten (P_2 Angaben); darin spielen die bei NW-Winden relativ größeren Werte des Potentialgradienten eine Rolle, weil in der Klasse der starken Winde meist NW-Winde auftreten, aus den übrigen Richtungen wehen seltener starke Winde. (Siehe in Tabelle VI. die Verteilung der Windstärke und — Richtung in prozentualer Darstellung; a = gesamtes Material, b = Angaben der niederschlagsfreien Tage.)

Es ist noch unbedingt zu bemerken, daß bei Potentialsonden, die mit radioaktivem Kollektor arbeiten, der gelieferte Spannungswert gewissermaßen immer eine Funktion der von der Sonde entfernten Ionenmenge, d. h. der Windstärke ist.

Nach aus der Fachliteratur bekannten Erfahrungen kann die Abhängigkeit des Mittelwertes des Potentialgradienten von der Windrichtung mit lokalen Einflüssen erklärt werden [1, 2, 5]. Meistens determiniert die relative Lage der Station zu den Suspensionsquellen die mit der Änderung der Windrichtung verbundenen Schwankungen. Unsere Untersuchungen erzielten diesbezüglich ähnliche Ergebnisse.

Der zwischen den Mittelwerten des Potentialgradienten bei windstillem und windigem Wetter erscheinende Unterschied von ungefähr 20 V/m wurde ohne Beachtung der Windrichtung bestimmt. Nach den P_2 -Angaben der Tabelle III unterscheiden sich die Mittelwerte des Potentialgradienten bei Winden aus N-, W- und NW-Richtungen um weniger als 20 V/m, bei SE-, S- und SW-Winden um mehr als 20 V/m von dem Mittelwert bei Windstille. (Die Mittelwerte bei NE- und E-Winden sind wegen ihrer Unsicherheit außer Acht gelassen.) Wenn in der Gruppe SE, S und SW die mäßigen und starken Winde in einem größeren Verhältnis vertreten wären als in den erwähnten drei anderen Richtungen, dann könnte man die größeren Mittelwerte bei Winden aus N, W und NW Richtungen zum Teil auch durch das kleinere Maß der Abnahme des Potentialgradienten mit der Windstärke erklären. Das ist aber nicht der Fall, weil es eben der NW-Wind in dieser Gruppe ist, der meistens, im Vergleich mit allen anderen Winden, als mäßiger und starker Wind auftritt. Demnach dürfte die Erscheinung so begründet werden, daß zwar der im Vergleich mit dem windstillen Zustand größere Vertikalaustausch auch bei N-, W- und NW-Winden zustandekommt, aber dieser kann nur teilweise den Suspensionsgehalt in Bodennähe vermindern, weil aus den erwähnten Richtungen der Wind wahrscheinlich immer neue Suspensionen liefert. Annäherungsweise sind in diesen Richtungen die zum Observatorium nächstgelegenen Siedlungen und der Neusiedler See, die man als Suspensionsquellen betrachten kann; so scheint die Annahme bestätigt zu sein. Bei N-, W- und NW-Winden dürfte also am Meßort der Suspensionsgehalt größer sein als bei Winden aus dem SE—SW Sektor. (Die endgültige Lösung der Frage wäre durch die Messung der Kondensations—Kernzahl möglich.) In dem SE—SW Sektor sind die Siedlungen in einer größeren Entfernung vom Meßort, und zwischen ihnen und dem Observatorium liegen Wälder und landwirtschaftliche Gebiete. So ist der Suspensionsgehalt der aus diesen Richtungen stammenden Luft vermutlich kleiner, das heißt, die SE-, S- und SW-Winde können die durch den Vertikalaustausch in die Höhe gehobenen Suspensionen nicht ersetzen; demnach ergeben sich bei größerer Verminderung des Kerngehaltes der unteren Luftschichten auch kleinere Potentialgradientwerte. Den kleinsten Mittelwert bei S-Winden kann ausßerdem noch erklären, daß mäßige Winde innerhalb des SE—SW Sektors meistens aus dieser Richtung wehen.

Bild 3 b) zeigt die aus Angaben der niederschlagsfreien Tage berechneten Mittelwerte des Potentialgradienten in Abhängigkeit von der Bewölkungsmenge. Die Mittelwerte nehmen mit zunehmender Bewölkung ab. Die geschlossene Bewölkung bildet eine Decke über dem Meßort, die den Vertikalaustausch behindert, und deshalb könnte man auf die Vergrößerung des Potentialgradienten folgern. Die Messungen mehrerer Stationen und auch unsere Untersuchungen gaben dennoch das Ergebnis, daß bei Bewölkung der Potentialgradient abnimmt. Nach [1] weist dieses Resultat auf die Wirkung einer in der Wolken-

decke gebildeten entsprechenden Raumladung hin, die das Feld vermindert. Als eine andere Möglichkeit ist in [1], auf Grund der nachstehenden Formel

$$E = \frac{r}{R} V,$$

wo E die Feldstärke, r den spezifischen Widerstand der Luft am Meßort, R den Säulenwiderstand, V die Potentialdifferenz zwischen der luftelektrischen Ausgleichsschicht und der Erdoberfläche bedeuten, folgendes erwähnt: bei einer Bewölkung großer vertikaler Mächtigkeit wächst R über der Station, aber r und V bleiben heinahe konstant, und so ergibt der größere Säulenwiderstand eine kleinere Feldstärke.

Diese Annahmen sind geeignet die feldvermindernde Wirkung der Bewölkung zu erklären.

Über die Änderungen der Mittelwerte des Potentialgradienten mit dem Luftmassentausch kann nach Tabelle V. folgendes bemerkt werden: Im allgemeinen, wenn die kleineren Abweichungen außer Acht gelassen werden, gehören zu kontinentalen und polaren Luftmassen große, zu maritimen und subtropischen Luftmassen kleine Mittelwerte des Potentialgradienten. Im Jahresgang des Potentialgradienten erscheinen — wie allbekannt — die größten Werte im Winter und die kleinsten im Sommer. Im geprüften Zeitabschnitt zeigt Bild 4. für jeden Monat die gemeinsame Zeitdauer der Anwesenheit der kontinentalen und polaren bzw. maritimen und subtropischen Luft, ferner den Jahresgang des Potentialgradienten (aus den Durchschnittswerten des gesamten Beobachtungsmaterials). Es fällt sofort auf, daß der Jahresgang des Potentialgradienten mit dem Lauf der Häufigkeit der kontinentalen und polaren Luftmassen übereinstimmt und im Vergleich mit dem der maritimen und subtropischen Luftmassen entgegengesetzt ist. (Im Januar 1962 konnte der Wert des luftelektrischen Potentialgradienten wegen des oftmaligen Ausfalles der Registrierung zuverlässig nicht bestimmt werden.) Die Mittelwerte des Potentialgradienten sind also bei den kontinentalen und polaren Luftmassen deswegen groß, weil unter ihnen überwiegend die der Winterzeit entsprechenden großen Werte vorkommen; zur Rechnung der bei den maritimen und subtropischen Luftmassen beobachteten kleinen Mittelwerte waren aber hauptsächlich aus den Sommermonaten Proben genommen, in welchen die Potentialgradientenwerte klein sind. Die Frage kann aber auch so gestellt werden, ob nicht eben eine mit der jahreszeitlichen Änderung der Luftmassen verbundene Wirkung in dem Jahresgang des Potentialgradienten sich widerspiegelt? Hier kann man auch die bekannte Vorstellung erwähnen wonach in der Ausbildung des Jahresganges des luftelektrischen Potentialgradienten zwei Einflüsse eine Rolle spielen: eine weltweite und eine lokale Wirkung. Die erste tritt auf der ganzen Erde gleichzeitig auf, die zweite ist mit den Jahreszeiten verbunden. Demnach darf angenommen werden, daß neben anderen Faktoren auch

die Änderung der Luftmassen im mit den Jahreszeiten verbundenen lokalen Einfluß mitwirkt. Natürlich ist das mit dem Gang der Kurven noch nicht ganz bestätigt. Ferner gelten nach [7] auch zwischen dem Kondensationskerngehalt und den Luftmassen Zusammenhänge; die große Rolle der Kondensationskerne im Rahmen der Lufterlektrizität ist aber schon allbekannt.

Als nächste Aufgabe ist die Untersuchung der Zusammenhänge der lufterlektrischen Unruhe mit den meteorologischen Elementen vorgesehen.

SCHRIFTTUM

1. ISRAËL, H.: Atmosphärische Elektrizität (Teil II.)
2. ISRAËL, H.: Die Unruhe des elektrischen Feldes. *Meteorologische Zeitschrift* **60** Heft 2.
3. ISRAËL, H.: Kondensationskerne im Rahmen der Lufterlektrizität. *Geofisica pura e applicata* **36** (1957).
4. BROWN, J. G.: The effect of overcast sky upon the local diurnal variation of the earth's electric field. *Terr. Magn. and Atm. Electr.* **42** (1937).
5. BROWN, J. G.: The effect of wind upon the earth's electric field at the surface. *Terr. Magn. and Atm. Electr.* **41** (1936).
6. BROWN, J. G.: The local variation of the earth's electric field. *Terr. Magn. and Atm. Electr.* **40** (1935).
7. LANDSBERG, H.: Atmospheric Condensation Nuclei. *Ergebnisse der Kosmischen Physik* Bd. 3. 1938.

THE RELATIONS BETWEEN THE POTENTIAL GRADIENT OF THE ATMOSPHERIC ELECTRICITY AND THE METEOROLOGICAL ELEMENTS IN THE OBSERVATIONS OF THE GEOPHYSICAL OBSERVATORY AT NAGYCENK

F. MÁRCZ

SUMMARY

In order to study the relationship between the atmospheric electrical, resp. meteorological elements, the results of potential gradient measurements and the data of meteorological observations in the period between September 1961 and December 1962 were compared. The average values of the potential gradient during the hours 6⁰⁰—7⁰⁰, 13⁰⁰—14⁰⁰ and 20⁰⁰—21⁰⁰ had been grouped according to the values of the chosen meteorological elements observed in the time of term observations, and the mean value of each group was determined. The chosen meteorological elements were: direction and intensity of wind; sky-cover. Also the data of the air-mass calendar published in the supplement of the "Diurnal meteorological report" were utilized. On the basis of the computed mean values of the potential gradient it has been experienced that the potential gradient statistically decreases with the increase of wind intensity and sky-cover. The variations of the potential gradient with the direction of wind may be brought into relation with local effects. According to the investigations, a certain relation between the potential gradient and changes of different types of air may be assumed.

RELATIONS ENTRE LE GRADIENT DE POTENTIEL DE L'ÉLECTRICITÉ
ATMOSPHÉRIQUE ET LES ÉLÉMENTS MÉTÉOROLOGIQUES DANS LES
OBSERVATIONS DE L'OBSERVATOIRE GÉOPHYSIQUE DE NAGYCENK

F. MÁRCZ

RÉSUMÉ

Pour étudier les rapports entre les éléments de l'électricité atmosphérique et les éléments météorologiques, l'auteur compare les résultats de mesures du gradient de potentiel et les données des observations météorologiques pour la période allant de septembre 1961 à décembre 1962. Les valeurs moyennes du gradient de potentiel entre 6⁰⁰—7⁰⁰, 13⁰⁰—14⁰⁰ et 20⁰⁰—21⁰⁰ heures ont été groupées suivant les valeurs des éléments météorologiques choisis, relevées au moment des observations, après quoi on a déterminé les valeurs moyennes de chaque groupe individuel. Les éléments météorologiques choisis étaient la direction et l'intensité du vent et la nébulosité; l'auteur a utilisé en outre les données relatives aux masses d'air, publiées dans le supplément des bulletins météorologiques journaliers. Sur la base des valeurs moyennes ainsi calculées du gradient de potentiel, l'auteur a constaté qu'avec l'augmentation de l'intensité du vent et de la nébulosité, le gradient de potentiel montre une diminution statistique. Les variations du gradient selon la direction du vent peuvent s'expliquer par des influences locales. Selon les recherches, l'existence d'un certain rapport entre le gradient de potentiel et les changements des différentes sortes d'air serait également à envisager.

О СВЯЗИ ГРАДИЕНТА АЭРОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА С
МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ,
ПРОВЕДЕННЫХ В ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ ПРИ С. НАДЫЦЕНК

Ф. МЭРЦ

РЕЗЮМЕ

Для изучения связей аэроэлектрических и метеорологических элементов, результаты измерений потенциального градиента за период с сентября 1961 г. по декабрь 1962 г. сопоставлялись с данными метеорологических наблюдений. Средние величины потенциального градиента для интервалов 6⁰⁰—7⁰⁰, 13⁰⁰—14⁰⁰ и 20⁰⁰—21⁰⁰ час распределялись по группам величин метеорологических элементов, наблюдаемых во время терминальных наблюдений, после чего определялись средние величины для отдельных групп. В качестве метеорологических элементов избирались направление и интенсивность ветра, а также облачность. Кроме того, были использованы и данные календаря воздушных масс, опубликованного в приложении к «Ежедневному отчету по погоде» (Идеяраши напийелентеш»). Вычисленные средние величины потенциального градиента показывают, что с увеличением интенсивности ветра и облачности потенциальный градиент статистически снижается. Изменение потенциального градиента в зависимости от направления ветров связано с локальными воздействиями. По проведенным исследованиям можно предполагать наличие зависимости потенциального градиента от изменения различных видов воздушных масс.

DIE BEDEUTUNG DER TISSOT-INDIKATRIX

Prof. I. HAZAY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR HÖHERE GEODÄSIE DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT FÜR BAU- UND
VERKEHRSWESEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 12 Juni 1964]

Die Verzerrungsverhältnisse in einem beliebigen Punkte irgendeiner Projektion lassen sich mit Hilfe der Tissotschen Indikatrix feststellen. Diese kann aus den Abbildungsfunktionen für irgendeinen Punkt der Projektion bestimmt werden. Nachdem sich die Indikatrix auf derselben Projektion von Punkt zu Punkte ändert, jedoch die zu demselben Originalflächenpunkt gehörende Indikatrix auf den verschiedenen Projektionen immer anders ist, kann man die Tissotsche Indikatrix als Kennwert der Projektion betrachten. Diese Eigenschaft läßt sich bei der zweckmäßigsten Bestimmung der Abbildung der verschiedenartigen Karten mit Erfolg anwenden. Verfasser teilt diesbezüglich Untersuchungen mit, zeigt die Gestaltung der Indikatrix auf einigen verschiedenartigen Projektionen, vergleicht die Verzerrungsverhältnisse und gibt abschließend seine Schlußfolgerungen bekannt.

I.

Wenn man die Ergebnisse der auf der Erdoberfläche ausgeführten sogenannten Lagemessungen auf einer plangelegten Karte darstellen will, muß man bekanntlich das Aufnahmenetz der annähernd als Rotationsellipsoid oder kugelförmig angenommenen Erde, die Eckpunkte der Grenzlinie der Konfigurationen am Gelände usw. auf eine Ebene oder eine Planarfläche (Zylinder oder Kegel) projizieren. Im geodätischen und geographischen Sinne versteht man im allgemeinen unter Projektion nicht die wortwörtlich genommene Projektion, sondern jenes Verfahren, welches zwischen den entsprechenden Punkten zweier Oberflächen (der Original- und Bildfläche) mittels mathematischer Beziehungen, den Abbildungsfunktionen, den Zusammenhang bestimmt. Das Prinzip der sogenannten perspektivischen Abbildungen ist zwar die Projektion mit Projektionsstrahlen, dieses Prinzip wird jedoch praktisch nur dazu angewandt, die Abbildungsfunktionen im geometrischen Gesichtspunkt aufzustellen. Es ist nämlich unausführlich, daß man von dem die Erdkugel ersetzenden Ellipsoid oder von der Kugel die Punkte mit effektiven Projektionsstrahlen auf die Bildfläche überträgt.

Welche mathematische Beziehung man auch immer zwischen Original- und Bildfläche aufstellt, *die Projektion wir immer verzerrt*; Winkel, Längen und Flächen verzerren sich im allgemeinen. Es gibt zwar Abbildungen, wo sich die Winkel, und solche, wo sich die Flächen nicht verzerren (im Falle winkeltreuer bzw. flächentreuer Projektionen); Projektionen hingegen, bei denen — einzelne Richtungen oder Richtungsgruppen ausgenommen — die Längen

keine Verzerrung aufweisen, gibt es überhaupt nicht. Bei winkeltreuen Projektionen verzerren sich die Flächen stärker, bei flächentreuen Projektionen die Winkel. Aus diesem Grunde werden bei geographischen Abbildungen häufig Projektionen mit allgemeinen Verzerrungen angewandt, bei denen zwar alle drei geodätische Elemente Verzerrungen erleiden, jedes jedoch in verhältnismäßig geringem Maße.

Die Geodäsie hat sich heute ausschließlich für die winkeltreuen Projektionen entschieden. Eine der wichtigsten Bedingungen bei der Auswahl der geographischen Projektionen ist — wenn nur nicht eine ganz besondere Bedingung vorliegt, wie z. B., daß die kürzeste Entfernung der einzelnen Punkte von einem Ausgangspunkt oder von der Gerade direkt von der Karte abzumessen sei, oder daß die kürzesten Linien der Kugel auf der Ebene durch Geraden dargestellt werden (beide Bedingungen sind bei der Fernschiffahrt und Aeronautik von Bedeutung) — daß *die Übereinstimmung zwischen Original- und Bildflächenzeichnung der darzustellenden Fläche je besser sei*. Der Zweck der Karte beeinflußt die Wahl der Projektionsart bedeutend. Es gibt Aufgaben, wo die Flächentreue, und solche, wo die Winkeltreue erforderlich ist. In vielen Fällen entspricht irgendeine Projektion mit allgemeinen Verzerrungen am besten.

Hat man sich schon von den drei Verzerrungsgruppen (winkeltreuen, flächentreuen oder allgemeinen) für irgendwelche entschieden, so spielt in der weiteren Auswahl von den Projektionen die Form, Ausdehnung und geographische Lage der abzubildenden Fläche eine bedeutende Rolle. Ich wünsche nicht, die verschiedenen weiteren Gesichtspunkte hier anzuführen. Nach Erwägung der Gesichtspunkte in den einzelnen Fällen kommt jedoch gewöhnlich nicht eine, sondern es kommen mehrere Projektionsarten in Frage. Aller Wahrscheinlichkeit nach wird schließlich *jene Art benutzt werden, deren Verzerrungsverhältnisse auf der abzubildenden Fläche am günstigsten sind*.

Zur endgültigen Entscheidung sollen demnach die Verzerrungsverhältnisse an den verschiedenen Stellen der abzubildenden Fläche untersucht werden, besonders dort, wo voraussichtlich die größten Verzerrungen zu erwarten sind.

Die Untersuchung der Verzerrungsverhältnisse erfolgt vorteilhaft auf Grund der *Tissotschen Indikatrix*. Die Indikatrix ist das Bild eines unendlich kleinen Kreises auf der Bildfläche in irgendeinem Punkte der Originalfläche. Dieses Bild ist im allgemeinen eine Ellipse, weshalb man auch die Indikatrix eine *Verzerrungsellipse* nennt. (Zur Abbildung im endlichen Maße wird als Längeneinheit der Radius des unendlich kleinen Kreises gewählt).

Werden bei irgendeiner beliebigen Projektion Punkte bezeichnet, die nicht auf der sogenannten Linie gleicher Verzerrung liegen, so ergibt sich, daß hier die Indikatrix im allgemeinen immer andere Formen und andere Maße aufweist und im Verhältnis zum Meridian immer eine andere Lage annimmt. (Nur auf den winkeltreuen Projektionen bewahrt die Indikatrix immer die

gleiche Form, u. zw. einen Extremfall der Ellipse: den Kreis; das Maß dieser Kreise jedoch ändert sich auch in jedem Punkte. Es gibt aber auch solche Projektionen, wo die Lage der Indikatrix im Verhältnis zum Meridian in jedem Punkte identisch ist.) Untersucht man nun denselben Originalflächenpunkt, jedoch auf verschiedenen Projektionen, so erhält man wiederum immer andere Indikatrix-Bilder. Demnach können wir also *die Tissotsche Indikatrix tatsächlich als Kennwert der Verzerrungen betrachten.*

II.

Es soll nun ein kurzer Überblick gegeben werden, was alles uns die Indikatrix sagen kann. Wie bereits erwähnt, ist das Bild irgendeines unendlich kleinen Kreises auf der Originalfläche eine unendlich kleine Ellipse auf der Bildfläche, deren Mittelpunkt dem Mittelpunkt des Originalflächenkreises entspricht. Ist der Radius des unendlich kleinen Kreises der Originalfläche die Längeneinheit, so bezeichnen wir die Länge der großen Halbachse der Ellipse mit a und die der kleinen Halbachse mit b . Auf Grund der Ellipse können wir dann in der unendlich kleinen Umgebung des betreffenden Punktes die Kennwerte der Verzerrungen, die sogenannten Moduln bestimmen.

Der Kennwert der Längenverzerrung ist *der Linearmodul* (die Geographen nennen ihn auch *Längenverhältnis*), der das Verhältnis zwischen dem unendlich kleinen Streckenstück ds der Originalfläche und deren Bildlänge dt in der Weise ausdrückt, daß der Linearmodul l

$$l = \frac{dt}{ds} \quad (1)$$

ist.

Der höchste Wert des Linearmoduls beträgt a , der kleinste Wert b . Die Extremwerte erhalten wir demnach aus den Halbachsen der Indikatrix, ihre Richtungen aus den Achsen der Indikatrix. Jene Richtungen, in denen der Linearmodul der größte und der kleinste ist, d. h. die Richtungen der Indikatrixachsen, nennen wir *Hauptrichtungen der Projektion* (oder Verzerrung); kennzeichnend ist für diese, daß sie sowohl auf der Original- als auch auf der Bildfläche aufeinander senkrecht sind. In jedem Punkte gibt es — die winkeltreuen Projektionen ausgenommen — nur ein einziges solches Richtungspaar, vom verzerrungsfreien Punkte oder von den auf die eventuell verzerrungsfreie Linie fallenden Punkten abgesehen. (Nachdem bei einer winkeltreuen Projektion sämtlichen rechtwinkligen Richtungspaaren der Originalfläche auch auf der Bildfläche rechtwinklige Richtungspaare entsprechen, wird auf einer solchen Projektion die Lage der Hauptrichtungen unbestimmt, ja ihr Begriff sogar sinnlos.)

In jeder beliebigen, durch den untersuchten Punkt gehenden Richtung ist der Linearmodul gleich dem in die entsprechende Richtung der Bild-

fläche fallenden Radiusvektor der Indikatrix; wenn die Richtung auf der Originalfläche mit jener Hauptrichtung, in welcher der Linearmodul am größten ist (I. Projektionshauptrichtung), einen Winkel ω einschließt (man nenne diesen Winkel die *Richtungsneigung* der Originalfläche), so beträgt in dieser Richtung das Quadrat des Linearmoduls:

$$l^2 = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega . \quad (2)$$

Da auf winkeltreuen Projektionen die Indikatrix ein Kreis ist (d. h. $a = b$), ist der Linearmodul in jeder Richtung ebenfalls gleich a .

Der Kennwert der Richtungsverzerrung ist der *Richtungsmodul*; er wird mit dem Verhältnis der Tangente der Richtungsneigung ω der Originalfläche zu der Tangente der Richtungsneigung ω' der Bildfläche irgendeiner Richtung ausgedrückt. Auf Grund der Indikatrix läßt sich beweisen, daß dieser Wert in irgendeinem Punkte in jeder Richtung gleich ist, und zwar ist er identisch mit dem Quotienten der kleinen und großen Halbachse der Indikatrix d. h. der Richtungsmodul beträgt:

$$i = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{b}{a} . \quad (3)$$

Auf einer winkeltreuen Projektion ist auf Grund von (3), aber auch nach dem vorhergehendem verständlich: $i = 1$.

Der Kennwert der Flächenverzerrung ist das Flächenverhältnis (Flächenverzerrungsmodul) τ , welches das Verhältnis zwischen der Oberfläche dF der unendlich kleinen Figur in der unendlich kleinen Umgebung des untersuchten Punktes und der Oberfläche dT des Gegenstückes auf der Bildfläche ist, u. zw. so, daß

$$\tau = \frac{dT}{dF} \quad (4)$$

ist.

Nachdem auch die Indikatrix eine unendlich kleine Figur ist (das Bild eines unendlich kleinen Kreises), ergibt der Quotient der Indikatrixfläche $dT = ab \pi$ und der Fläche π des unendlich kleinen Kreises (der Radius des Kreises ist nämlich: $r = 1$) ebenfalls das Flächenverhältnis:

$$\tau = ab . \quad (5)$$

Auf einer flächentreuen Projektion gibt es keine Flächenverzerrung. In dieser Gruppe der Projektionen ergibt sich demnach

$$\tau = ab = 1 \quad \text{und} \quad a = \frac{1}{b}, \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{1}{a} . \quad (6)$$

Mit Hilfe der Tissotschen Indikatrix erfahren wir, wohin die Projektion vom Standpunkt der Verzerrung aus gehört. Wenn bezüglich irgendeines, vom verzerrungsfreien Punkt der Projektion abweichenden, bzw. auf die eventuell verzerrungsfreie Linie (oder Linien) nicht fallenden Punktes

$$a = b \quad (7)$$

ist, dann ist die Projektion *winkeltreu*; wenn

$$a = \frac{1}{b} \quad (8)$$

beträgt, so ist die Projektion *flächentreu*; wenn hingegen

$$a \neq b \quad \text{und} \quad a \neq \frac{1}{b} \quad (9)$$

ist, dann ist die Projektion *allgemein verzerrt*.

Die Indikatrix bestimmt im untersuchten Punkte auch *die größte Richtungs-*, bzw. *Winkelverzerrung*. Die Differenz zwischen der Richtungsneigung der Original- und der Bildfläche, d. h. der Höchstwert der Richtungsveränderung läßt sich aus der Formel

$$\sin(\omega - \omega')_{\max} = \frac{a - b}{a + b} \quad (10)$$

berechnen. *Die größte Winkelverzerrung* (die wir mit Δ bezeichnen werden) ergibt sich in dem Falle, wenn die beiden Winkelarme zur I. Projektionshauptrichtung symmetrisch liegen und mit der größten Richtungsveränderung belastet sind. (Sind nämlich die Absolutwerte der Richtungsneigungen zweier Richtungen identisch, d. h. sind die zwei Richtungen symmetrisch zur Hauptrichtung, so haben sie eine gleiche Richtungsveränderung.) Die maximale Winkelverzerrung ist also gleich dem zweifachen Wert der maximalen Richtungsverzerrung:

$$\Delta = 2(\omega - \omega')_{\max} \quad (11)$$

Auf einer winkeltreuen Projektion gibt es selbstverständlich weder eine Richtungs-, noch eine Winkelverzerrung.

Ist die Lage der großen Halbachse der Indikatrix im Verhältnis zum Meridian bekannt, d. h. kennt man die Richtungsneigung ω_m der Originalfläche des Meridians, so kann man aus Formel (3) auch die Richtungsneigung ω'_m der Bildfläche des Meridians bestimmen. Und da die Richtungsneigung

des Parallelkreises auf der Originalfläche

$$\omega_p = \omega_m + 90^\circ \quad (12)$$

ist, kann auch ω'_p durch Formel (3) und auf Grund dieser auch der vom Meridian- und Parallelkreisbild geschlossene Winkel bestimmt werden. Wird deren Abweichung von 90° , bzw. die *Verzerrung des von dem Meridian und dem Parallelkreis auf der Originalfläche gebildeten rechten Winkels* mit Θ bezeichnet, so ist

$$\Theta = 90^\circ - (\omega'_p - \omega'_m). \quad (13)$$

Ist uns wiederum die Lage der großen Halbachse der Indikatrix im Verhältnis zum Meridianbild bekannt (d. h. ω'_m), dann kann mit entsprechender Anwendung von (3) der Wert ω_m berechnet werden, womit die Aufgabe auf das Vorhergehende zurückgeführt worden ist.

Kennen wir die Richtungsneigung des Meridians und des Parallelkreises, so können mit Formel (2) die Linearmoduln in Richtung des Meridians l_m und des Parallelkreises l_p berechnet werden. Zwischen diesen und den Halbachsen, bzw. zwischen dem Flächenverhältnis und der Winkelverzerrung Θ besteht folgende Beziehung:

$$\tau = ab = l_m l_p \cos \Theta. \quad (14)$$

Die im obigen in der möglichst kürzesten Weise erwähnten Kennwerte lassen sich jedoch nur dann aus der Indikatrix ermitteln, wenn die Indikatrix selbst bekannt ist. Wir betrachten daher jetzt kurz auch die Art der Bestimmung der Indikatrix. Die betreffenden Ableitungen werden selbstverständlich ebenfalls vermieden.

Bezeichnet man auf der Originalfläche die geographischen Koordinaten mit φ (geographische Breite) und λ (geographische Länge), und im orthogonalen Koordinatensystem der Bildfläche die Koordinaten mit x und y , so ergibt sich als allgemeine Form der Projektionsgleichungen:

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \quad y = f_2(\varphi, \lambda). \quad (15)$$

Man differenziere nun diese partiell nach φ bzw. λ , d. h., man bilde die Werte

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \lambda} \text{ sowie } \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}. \quad (16)$$

Mit ihrer Anwendung beträgt der Meridian- und Parallelkreislinearmodul:

$$l_m = \frac{1}{M} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}, \quad l_p = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}, \quad (17)$$

wobei M der zum untersuchten Punkt gehörende Meridiankrümmungshalbmesser auf der Originalfläche und r der Halbmesser des durch den untersuchten Punkt gehenden Parallelkreises ist. Auf einem Ellipsoid beträgt

$$r = N \cos \varphi, \quad (18)$$

wo N der Querkrümmungshalbmesser ist. Auf einer Kugel mit dem Halbmesser R ist

$$M = R \quad \text{und} \quad r = R \cos \varphi. \quad (19)$$

Zur Bestimmung der Halbachsen der Indikatrix dient das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \left(\frac{1}{M} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{M} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2, \\ (a - b)^2 &= \left(\frac{1}{M} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{M} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Richtungsneigung der Meridiane auf der Originalfläche läßt sich aus der Formel

$$\sin \omega_m = \sqrt{\frac{a^2 - l_m^2}{a^2 - b^2}} \quad (21)$$

berechnen.

Die Richtungsneigung des Meridianbildes auf der Bildfläche kann noch außer der Beziehung (3) mit den Formeln

$$\cos \omega'_m = \frac{a}{l_m} \cos \omega_m \quad \text{und} \quad \sin \omega'_m = \frac{b}{l_m} \sin \omega_m \quad (22)$$

bestimmt werden.

Nach Bestimmung der Halbachsen a und b sowie von ω'_m ist die zum untersuchten Punkt gehörende Indikatrix in Bezug auf Form, Abmessung und Lage bekannt und läßt sich in einem geeigneten Maßstab abbilden. Obwohl man mit Hilfe der Differentialquotienten (16) auch das Flächenverhältnis τ und den Winkel Θ berechnen und somit auch auf analytischem Weg sämtliche Verzerrungsfaktoren kennenlernen kann, ist es zum Vergleich mit den in der Umgebung anderer Punkte auftretenden bzw. den auf anderen Abbildungen auftretenden Verzerrungsverhältnissen dennoch zweckmäßig, die Indikatrixen (selbstverständlich im gleichen Maßstabe) darzustellen.

Es kann sich ergeben, daß sich in den Abbildungsfunktionen anstelle der geographischen Breite die Poldistanz β vorkommt, d. h.

$$x = f_1(\beta, \lambda), \quad y = f_2(\beta, \lambda). \quad (23)$$

In einem solchen Falle sind — der indirekten Differentiationsregel entsprechend — die partiellen Differentialquotienten (16) aufzustellen, z. B.:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\varphi}. \quad (24)$$

Nachdem hier die Poldistanz den Ergänzungswinkel der geographischen Breite bildet, d. h.

$$\beta = (90^\circ - \varphi), \quad (25)$$

beträgt der Differentialquotient laut:

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = -1, \quad (26)$$

und dementsprechend ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial y}{\partial \beta}. \quad (27)$$

Im Zusammenhang mit den Beziehungen (15) — (27) haben wir angenommen, daß in den Abbildungsfunktionen die wahre geographische Breite φ (bzw. die Poldistanz β) und die wahre geographische Länge λ die Koordinaten der Originalfläche bilden. In den Gleichungen der schiefachsigen und transversalen (also nicht normalen) Projektionen der Kugel stehen nicht die wahren, sondern die sogenannten geographischen Hilfskoordinaten φ' und λ' . (Normal ist die Ebeneprojektion — die Azimutalprojektion — wenn ihr Anfangspunkt mit irgendeinem Pol identisch ist; die Zylinder- und die Kegelprojektionen sind normal, wenn die Zylinder- oder Kegelachse mit dem die Rotationsachse der Erde darstellenden Kugeldurchmesser bzw. mit der kleinen Halbachse des Ellipsoides zusammenfällt. Befindet sich der Anfangspunkt am Äquator, bzw. die Zylinder- oder Kegelachse in der Äquatorebene, dann ist die Projektion transversal. Alle anderen Lagen nennen wir schiefachsige.) Der Anfangspunkt der nicht normalen direkten ebenen Projektion, bzw. der Durchschnittspunkt der Zylinder- und Kegelachse ist auf der Kugelfläche irgendein vom Pol abweichender anderer Kugelflächenpunkt P' . (Die linke Seite vom Bild 1 stellt die Begriffe des wahren Gradnetzes dar, die rechte Seite die Hilfsgradnetzverhältnisse.) Diesen Punkt bezeichnen wir als Hilfspol; die über den zugehörigen Durchmesser gelegten Ebenen schneiden die Hilfsmeridiane, die zum Durchmesser senkrecht fallenden Ebenen den Hilfsäquator und die Hilfsparallelkreise aus der Kugelfläche aus. Im Hilfsgradnetzsystem bestimmen die geographischen Hilfskoordinaten φ' (bzw. β') und λ' die Punkte. Ihre Zusammenhänge mit den wahren geographischen Koordinaten bestimmt jenes

sphärisches Polardreieck, dessen Polpunkte der Pol P , der Hilfspol P' und Punkt A sind, dessen Koordinaten untersucht werden (mittlere Zeichnung vom Bild 1). Der Hilfsmeridian, der auch über den Pol durchgeht, ist gleichzeitig auch ein wahrer Meridian; sowohl die wahre geographische Länge als auch die geographische Hilfslänge wird von hier berechnet. Folgende Beziehungen ergeben sich aus dem Polardreieck:

$$\begin{aligned} \sin \varphi' &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda, \\ \sin \chi' &= \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi'}. \end{aligned} \quad (28)$$

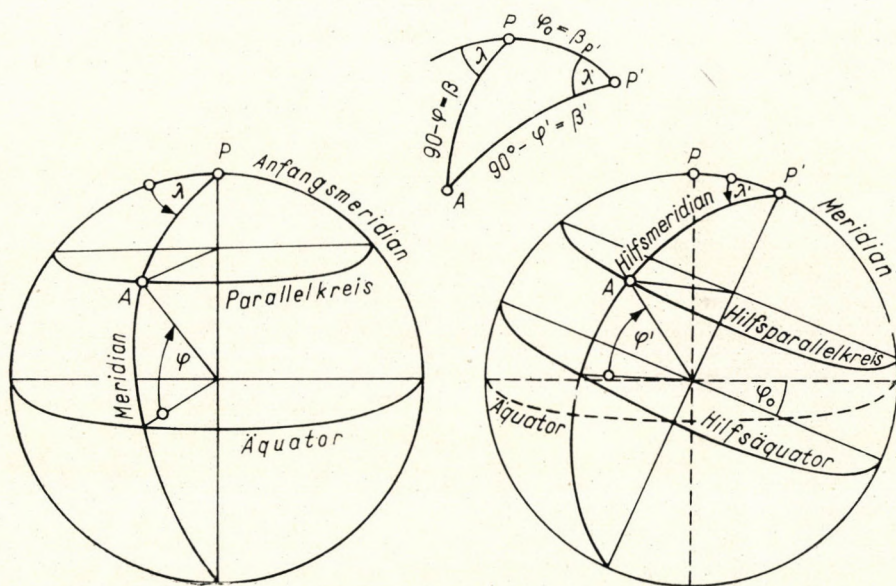


Bild 1. Die geographischen Wahren- und Hilfskoordinaten

In der Formel stellt φ_0 den Neigungswinkel der Hilfsäquatorialebene zur Ebene des wahren Äquators dar, φ und λ sind die wahren geographischen Koordinaten des untersuchten Punktes, φ' und λ' dessen geographische Hilfskoordinaten. Der Winkel φ_0 ist mit der wahren Poldistanz des Hilfspoles identisch. Rechnet man anstelle der geographischen Breiten mit den Poldistanzen, so müssen in den Gleichungen (28) die Werte

$$\sin \varphi_i = \cos \beta_i \quad \text{und} \quad \cos \varphi_i = \sin \beta_i \quad (29)$$

eingesetzt werden.

Sind also in den Abbildungsfunktionen die geographischen Hilfskoordinaten als Originalflächenkoordinaten angegeben, d. h.

$$x = f_1(\varphi', \lambda'), \quad y = f_2(\varphi', \lambda'), \quad (30)$$

dann ergibt die sinngemäße Anwendung der Formeln (16)–(22), bzw. die Verwendung der Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi'}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda'}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi'}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda'} \quad (31)$$

die zum Hilfsgradnetz angepaßten Verzerrungsverhältnisse. So erhalten wir z. B. aus den Formeln (17) die Linearmoduln zur Richtung des Hilfsmeridians und Hilfsparallelkreises, während Formel (21) die Richtungsneigung der Originalfläche des Hilfsmeridians darstellt. Wir wünschen jedoch im allgemeinen auch in solchen Fällen die zum wahren Gradnetz ins Verhältnis gestellten Verzerrungen kennenzulernen, daher müssen wir auch aus den Abbildungsfunktionen (30) die unter (16) angeschriebenen Differentialquotienten bilden. Gemäß der indirekten Differentiationsregeln sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (32)$$

Selbstverständlich muß sich für die Werte a , b und τ das selbe Resultat ergeben, ob die Berechnung nun im Verhältnis zum echten Gradnetz oder zum Hilfsgradnetz erfolgte.

Der indirekten Differenzierung entsprechend müssen die Differentialquotienten (16) auch dann gebildet werden, wenn in den Gleichungen irgendeines Bildes die sogenannte *modifizierte geographische Breite*, bzw. *modifizierte geographische Länge* (oder alle beide) vorkommen. Als Beispiel seien hier die Gleichungen der allgemein bekannten *Mollweide-Projektion* angegeben:

$$x = \sqrt{2} R \sin \varphi', \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \lambda \cos \varphi', \quad (33)$$

wo der Zusammenhang zwischen der modifizierten geographischen Breite φ' und der wahren geographischen Breite φ durch Gleichung

$$2\varphi' + \sin 2\varphi' = \pi \sin \varphi \quad (34)$$

bestimmt wird.

Bevor wir uns noch mit der Untersuchung der Verzerrungsverhältnisse einiger Projektionen und mit ihren Vergleichen befassen, wollen wir überlegen, was sich mit den Indikatrixen mit bloßer Besichtigung bzw. mit der Abmessung der Länge der Halbachsen feststellen läßt.

Wo die Indikatrix ein Kreis ist, tritt keine Winkelverzerrung auf. Wenn die Indikatrix auch in dem Punkte ein Kreis ist, der vom verzerrungsfreien Punkt abweicht, oder nicht auf die eventuell verzerrungsfreie Linie fällt, dann ist die Projektion winkeltreu. Ist jedoch die Indikatrix eine Ellipse, so entsteht auch eine Winkelverzerrung und die Projektion kann nicht winkeltreu sein.

Je mehr sich die Form der Indikatrix dem Kreise nähert, desto kleiner sind die Winkelverzerrungen und somit natürlich auch die maximale Winkelverzerrung. Und je abgeplatteter die Ellipse ist (d. h. je größer der Unterschied zwischen der Länge der großen und kleinen Halbachse ist), um so größer sind auch die Winkelverzerrungen und deren Höchstwert.

Wo das Produkt aus den Längen der Halbachsen gleich 1 ist (bzw. wo der Zahlenwert der Indikatrixfläche π ist), gibt es keine Flächenverzerrung. Ist die diese Bedingung befriedigende Indikatrix ellipsenförmig, so ist die Projektion flächentreu. Je größer die Abweichung des Produktes der Halbachsen von der Einheit (d. h. der Fläche von π) ist, um so größer ist auch die Flächenverzerrung. Wenn das Produkt kleiner als 1 ist, wird die Flächenverzerrung als eine Verminderung, wenn es größer als 1 ist, dann wird die Flächenverzerrung als eine Vergrößerung auftreten.

In jener Bildflächenrichtung, in der der Halbmesservektor gleich der Einheit ist, findet man keine Längenverzerrung. Je größer die Abweichung von der Einheit ist, um so größer ist auch die Längenverzerrung. Sollte der Halbmesservektor kleiner sein als die Einheit, tritt eine Längenverkürzung auf, ist er größer, ergibt sich eine Längenvergrößerung. Je kleiner die Abweichung des Produktes aus den Meridian- und Parallelkreisradiusvektoren vom Produkt aus den Halbachsen ist, um so kleiner wird die Verzerrung des rechten Winkels, welcher auf der Originalfläche von Meridian und Parallelkreis gebildet wird. Je größer diese Abweichung ist, um so spitziger wird der Winkel, in dem sich das Meridianbild und das Parallelkreisbild schneiden.

III.

Untersuchen wir vor allem drei allgemein bekannte *Azimutalprojektionen*, und zwar *in normaler Lage*. Auf den normalen azimutalen Projektionen bilden die Meridianbilder ein durch das Polbild durchgehendes Strahlenbüschel

und die Strahlen schließen miteinander einen Winkel ein, der mit der geographischen Längendifferenz der entsprechenden Meridiane übereinstimmt; die Parallelkreisbilder wiederum sind konzentrische Kreise, deren Mittelpunkt das Bild des Poles ist. Die sogenannte Halbmesserfunktion

$$p = f(\beta) \quad (35)$$

bestimmt den Halbmesser der Kreise. Ein anderer Determinant des auf irgendeinem Parallelkreis liegenden Punktes ist die sogenannte *Halbmesserneigung*, die nichts anderes ist als der Neigungswinkel des durch den Punkt durchgehenden Meridianbildes zu einem beliebigen Anfangsmeridianbild. Die Halbmesserneigung ist, dem Obengesagten entsprechend:

$$\gamma = \lambda. \quad (36)$$

Bei den normalen Azimutalprojektionen sind die Richtungen der Meridiane und Parallelkreise die Hauptrichtungen, da diese sowohl auf der Originalfläche als auch auf der Bildfläche einen rechten Winkel bilden. Demgemäß weist die eine Achse der Indikatrix, der Richtung des Meridianbildes folgend, immer in die Richtung des Polbildes hin, während die andere Achse in die Richtung des Parallelkreises fällt. (Die Indikatrix ist in Wirklichkeit unendlich klein, und es muß infolge ihrer Darstellung mit endlichen Größen die Achse in Richtung des Parallelkreises durch die im Bild des untersuchten Punktes an den Parallelkreis gezogene Tangente angegeben werden.) Bei der normalen Azimutalprojektion sind die Verzerrungsverhältnisse in sämtlichen Punkten je eines Parallelkreises die gleichen, es sind demnach auch die Indikatrixen gleich, bloß ihre Lage ändert sich je nach der Richtung des Meridianbildes. Die allgemeine Form der Abbildungsfunktionen bezüglich eines Ebenenkoordinatensystems, dessen Anfangspunkt das Polbild und x -Achse das Bild des ausgewählten Anfangsmeridians ist:

$$x = p \cos \gamma, \quad y = p \sin \gamma. \quad (37)$$

1. Eine in der Geodäsie recht häufig angewandte azimutale Projektion ist die *stereographische Projektion*. (Auch die ungarische Geodäsie benutzt sie, jedoch in schiefachsiger Anordnung.) Ihre Halbmesserfunktion ist

$$p = 2 R \tan \frac{\beta}{2}. \quad (38)$$

Und dem, sowie (36) entsprechend betragen die Abbildungsfunktionen:

$$x = + 2 R \tan \frac{\beta}{2} \cos \lambda, \quad y = - 2 R \tan \frac{\beta}{2} \sin \lambda. \quad (39)$$

(Die Vorzeichen ergeben sich dadurch, daß wir die geographische Länge vom Anfangsmeridian nach Osten zu als positiv betrachten und die positive x -Achse des Ebenenkoordinatensystems nach Süden, die positive y -Achse wiederum nach Westen zeigt.) Die partiellen Differentialquotienten nach φ und λ der Abbildungsfunktionen unter Beachtung der Beziehungen (27) sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -R \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \cos \lambda, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= +R \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \sin \lambda, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -2R \tan \frac{\beta}{2} \sin \lambda, & \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= -2R \tan \frac{\beta}{2} \cos \lambda. \end{aligned} \quad (40)$$

Unter Anwendung der Formeln (17):

$$l_m = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}, \quad l_p = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (41)$$

(Beim Bilden des Linearmoduls in Richtung des Parallelkreises wurde die Beziehung

$$r = R \sin \beta = 2R \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad (42)$$

verwendet.) Nachdem der Wert des Linearmoduls in den beiden Hauptrichtungen der gleiche ist, erweist sich auch die Projektion als winkeltreu:

$$l_m = l_p = a = b. \quad (43)$$

2. Sehr verbreitet ist in der geographischen Darstellung die *Lambertsche flächentreue Azimutalprojektion*, deren Halbmesserfunktion:

$$p = 2R \sin \frac{\beta}{2} \quad (44)$$

ist, und ihre Abbildungsfunktionen sind:

$$x = +2R \sin \frac{\beta}{2} \cos \lambda, \quad y = -2R \sin \frac{\beta}{2} \sin \lambda. \quad (45)$$

Die Differentialquotienten nach φ und λ sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -R \cos \frac{\beta}{2} \cos \lambda, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= +R \cos \frac{\beta}{2} \sin \lambda, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -2R \sin \frac{\beta}{2} \sin \lambda, & \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= -2R \sin \frac{\beta}{2} \cos \lambda. \end{aligned} \quad (46)$$

Auf diesem Grund und (42) erneut angewandt:

$$l_m = \cos \frac{\beta}{2}, \quad l_p = \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}}. \quad (47)$$

Die in den Hauptrichtungen genommenen Längenverhältnisse bestätigen die Flächentreue der Projektion. Die Halbachsen der Indikatrix, da von den Werten (47) l_p der größere ist, sind:

$$a = l_p, \quad b = l_m. \quad (48)$$

Die große Achse fällt also in die Richtung des Parallelkreises.

3. Die *gnomonische Projektion* wird vor allem bei den Karten für den Langstreckenverkehr (Seefahrt, Aeronautik) angewandt, da es ihre äußerst wichtige Eigenschaft ist, daß auf dieser (und ausschließlich nur auf dieser Projektion) die Bilder sämtlicher größten Kugelkreise (Orthodromen) gerade Linie sind; auf diese Weise gibt das die zwei Punkte verbindende Geradenstück auf der Karte die kürzeste Entfernung zwischen den zwei Punkten an. Diese Eigenschaft ergibt sich daraus, daß die gnomonische Projektion eine perspektivische Projektion ist, deren perspektivisches Zentrum der Mittelpunkt der Kugel ist, infolgedessen liegt das perspektivische Zentrum in der Ebene irgendeines größten Kugelkreises. Die Halbmesserfunktion der Projektion ist

$$p = R \tan \beta, \quad (49)$$

und die Abbildungsfunktionen:

$$x = + R \tan \beta \cos \lambda, \quad y = -R \tan \beta \sin \lambda, \quad (50)$$

während die Differentialquotienten nach φ und λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -R \frac{1}{\cos^2 \beta} \cos \lambda, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= +R \frac{1}{\cos^2 \beta} \sin \lambda, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -R \tan \beta \sin \lambda, & \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= -R \tan \beta \cos \lambda. \end{aligned} \quad (51)$$

Auf Grund dessen ergibt sich:

$$l_m = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \quad l_p = \frac{1}{\cos \beta}. \quad (52)$$

Nachdem von den beiden l_m der größere ist, beträgt

$$a = l_m, \quad b = l_p. \quad (53)$$

Die Großachse der Indikatrix liegt demnach in der Richtung des Meridians. Die Projektion weist eine allgemeine Verzerrung auf.

*

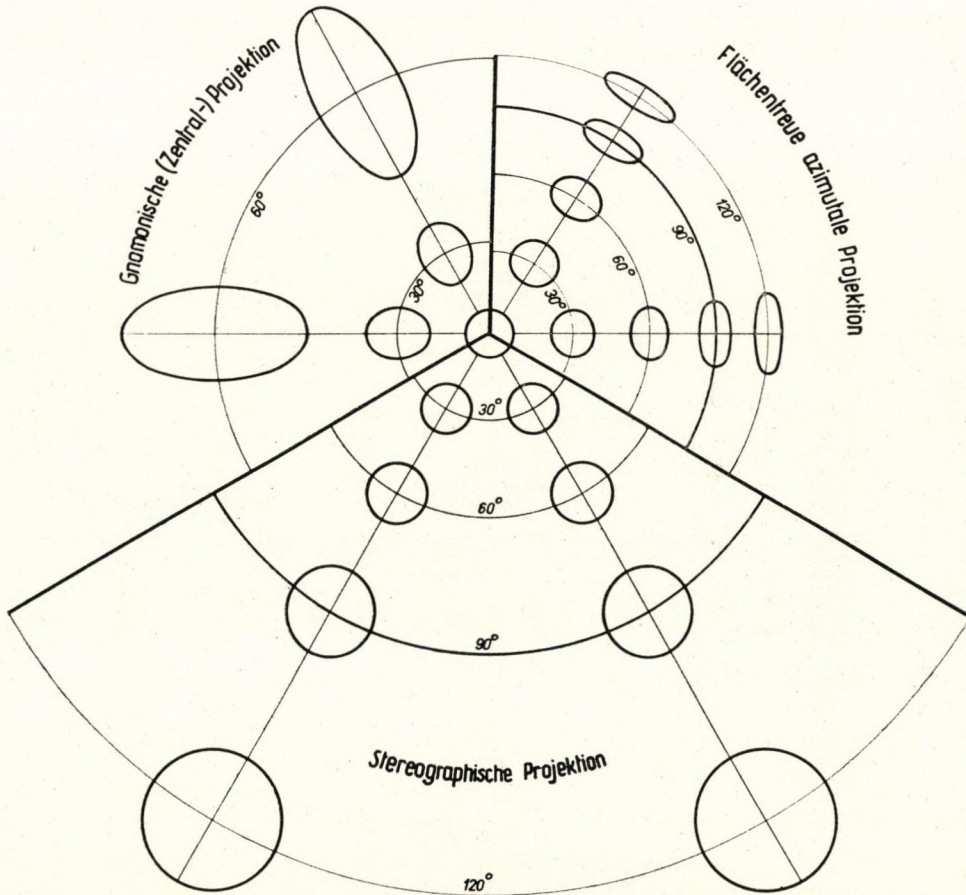


Bild 2. Stereographische, Lambertsche und gnomonische Projektion (azimutale Projektionen)

Im Bild 2 wurde die Bildflächenebene in drei Segmente gleicher Breite aufgeteilt. In dem einen werden die Indikatrices der *stereographischen Projektion* in Poldistanz $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (Äquator) und 120° ; in dem anderen die Indikatrices der *Lambertschen flächentreuen Projektion* in den oben angegebenen Poldistanzen; in dem dritten Segment wiederum die Indikatrices der *gnomonischen Projektion* in den Poldistanzen $\beta = 0^\circ, 30^\circ$ und 60° darge-

stellt. (In der Bildflächenebene der gnomonischen Projektion fällt die Poldistanz $\beta = 90^\circ$ bereits ins Unendliche.) Im gemeinsamen Anfangspunkt aller drei Projektionsbilder, am Pol, verursacht keine der untersuchten Projektionen eine Verzerrung, so daß in diesem Punkte die Indikatrix bezüglich aller drei Projektionen ein Kreis mit Einheitsradius ist. Die auf die Indikatrix bezogene Längeneinheit der Abbildung ist also der Halbmesser des um das Polbild gezeichneten Kreises. Die Längeneinheit bezüglich des Bildes der Gradnetzlinien wird dadurch bestimmt, daß auf der Lambertschen Projektion der Halbmesser des Parallelkreisbildes mit dem Polabstand von $\beta = 60^\circ$ gleich dem Kugelhalbmesser R (d. h. $p_{60^\circ} = R$) ist. Auf der stereographischen Projektion wiederum ist der Halbmesser des Äquatorbildes gleich dem Durchmesser der Kugel (d. h. $p_{90^\circ} = 2R$). (Der auf der Abbildung nicht eingetragene Halbmesser des Parallelkreisbildes mit der Poldistanz $\beta = 45^\circ$ der gnomonischen Projektion ist dem Halbmesser der Kugel gleich (d. h. $p_{45^\circ} = R$).

Die Kennwerte wurden in Tafel I auch numerisch angegeben. Der Halbmesser des Parallelkreisbildes, d. h. der Wert der Halbmesserfunktion p wurde in Kugelradiuseinheiten angeführt ($R = 1$). (Den Maximalwert der Winkelverzerrung haben wir — wie bereits erwähnt — mit Δ bezeichnet (11).)

Wirft man einen Blick auf die dargestellten Indikatrixen, so kann man feststellen, daß auf der stereographischen Projektion, wenn man sich vom Anfangspunkt der Projektion (vom Pol) entfernt, die Längenverzerrung sowie die Flächenverzerrung ziemlich stark zunimmt, wobei beide Arten von Verzerrungen immer eine Vergrößerung verursachen. Eine Winkelverzerrung gibt es überhaupt nicht.

Auf der flächentreuen Lambertschen Projektion nimmt die Längenverzerrung — wenn man sich vom Pol entfernt — in der Richtung des Parallelkreises zu, in der Richtung des Meridians hingegen ab. Die Abweichung der Indikatrixhalbachsen von der Einheit ist überall kleiner als auf der stereographischen Projektion. Nachdem sich die Ellipsen mehr und mehr abgeplattet sind, kann festgestellt werden, daß die Winkelverzerrungen fortlaufend ungünstiger werden. Die Fläche der Indikatrix ist in jedem beliebigem Punkte der Projektion π , d. h. $ab = l_m l_p = 1$, es gibt also keine Flächenverzerrung.

Auf der gnomonischen Projektion verursacht die Längenverzerrung in jeder Richtung einen Längenzuwachs, und auch die Flächenverzerrung verursacht eine Vergrößerung. Sowohl die Längen- als auch die Flächenverzerrung nimmt mit der Entfernung vom Pol rapid zu. Auch die Ellipsen werden mehr und mehr abgeplattet, demzufolge steigt auch die Winkelverzerrung sehr schnell. Die Verzerrungsverhältnisse sind im allgemeinen ungünstig. Ein bloßer Blick auf die Indikatrix der gnomonischen Projektion genügt, um festzustellen: die Anwendung der Projektion hat nur in dem Falle einen Sinn, wenn die kürzesten Linien auf der Karte am einfachsten dargestellt werden sollen.

Tafel I

		Stereographische	Lambertsche	Gnomonische
		Azimutalprojektion		
0°	<i>p</i>	0	0	0
	<i>a</i>	1	1	1
	<i>b</i>	1	1	1
	τ	1	1	1
	Δ	0	0	0
30°	<i>p</i>	0,535 90	0,517 64	0,577 35
	<i>a</i>	1,072	1,035	1,333
	<i>b</i>	1,072	0,966	1,155
	τ	1,149	1	1,540
	Δ	0	3°58'	8°14'
60°	<i>p</i>	1,154 70	1,000 000	1,732 05
	<i>a</i>	1,333	1,155	4,000
	<i>b</i>	1,333	0,866	2,000
	τ	1,778	1	8,000
	Δ	0	16°26'	38°56'
90°	<i>p</i>	2,000 00	1,414 21	∞
	<i>a</i>	2,000	1,414	
	<i>b</i>	2,000	0,707	
	τ	4,000	1	
	Δ	0	38°57'	
120°	<i>p</i>	3,464 10	1,732 06	
	<i>a</i>	3,000	2,000	
	<i>b</i>	3,000	0,500	
	τ	9,000	1	
	Δ	0	60°2'	

Ist der Anfangspunkt der Azimutalprojektionen *nicht der Pol*, dann bezieht sich das Bild auf Bild 2 — genau wie die Daten der Tafel I — auf das zum Anfangspunkt der Projektion als *Hilfspol* gehörende *Hilfsgradnetz*. Die vom Anfangspunkt ausgehenden Geraden sind demnach die Bilder der Hilfsmeridiane, die konzentrischen Kreise die Bilder der Hilfsparallelkreise, während die Achsen der Indikatrices in deren Richtung liegen. (Unter den Werten β der Tafel versteht man auch die *Hilfspoldistanzen*.) Die Bilder der wahren Meridiane und Parallelkreise auf den nicht normalen Projektionen sind im allgemeinen verschiedene krumme Linien.

IV.

Es sollen nun einige Projektionen untersucht werden, bei denen der Anfangspunkt des Ebenenkoordinatensystems am Äquator liegt, seine x -Achse das als Gerade auftretende Bild des je nach Belieben gewählten Anfangsmeridians, seine y -Achse wiederum das als Gerade erscheinende Bild des Äquators ist.

4. Das Bild, das sich auf das Hilfsgradnetz *der transversal angeordneten stereographischen Projektion* (der unter 1. erörterten Projektion in transversaler Lage) bezieht, stimmt mit dem betreffenden Segment im Bild 2 überein. Unsere Untersuchungen sollen jedoch zum wahren Gradnetz ausgeführt werden. Wenn auf Grund der den Hilfspol betreffenden Halbmesserfunktion und Halbmesserneigung

$$p' = 2R \tan \frac{\beta'}{2}, \quad \gamma = \lambda', \quad (54)$$

die Abbildungsfunktionen

$$x = 2R \tan \frac{\beta'}{2} \cos \lambda', \quad y = 2R \tan \frac{\beta'}{2} \sin \lambda' \quad (55)$$

aufgezeichnet und den Beziehungen (28) und (29) entsprechend umgeformt werden, dann sind die Abbildungsfunktionen, die die Beziehung zwischen Ebenenkoordinaten und wahren geographischen Koordinaten ausdrücken (ein nördlich orientiertes Ebenenkoordinatensystem voraussetzend):

$$x = 2R \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}, \quad y = 2R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}. \quad (56)$$

Die Differentialquotienten nach φ und λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= +2R \frac{\cos \varphi + \cos \lambda}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -2R \frac{\sin \varphi \sin \lambda}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= +2R \frac{\sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2}, & \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= +2R \frac{\cos \varphi (\cos \varphi + \cos \lambda)}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Demnach lautet gemäß (17) und nach entsprechender goniometrischer Umformung:

$$l_m = \frac{2}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}, \quad l_p = \frac{2}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}, \quad (58)$$

und gemäß (20):

$$a + b = \frac{4}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}, \quad a - b = 0, \quad (59)$$

5. Auf Grund der auf das Hilfsgradnetz bezogene Halbmesserfunktion und Halbmesserneigung

$$p' = 2R \sin \frac{\beta'}{2}, \quad \gamma = \lambda' \quad (61)$$

der transversalen, flächentreuen Lambertschen Azimutalprojektion (der transversalen Form der unter 2. erörterten Projektion) lassen sich als Beziehung zwischen den Ebenenkoordinaten und wahren geographischen Koordinaten folgende Abbildungsfunktionen aufschreiben:

$$x = R\sqrt{2} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}, \quad y = R\sqrt{2} \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}} \quad (62)$$

Die partiellen Differentialquotienten lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= + \frac{R}{\sqrt{2}(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^{3/2}} [\cos \varphi (2 + \cos \varphi \cos \lambda) + \cos \lambda], \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= + \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{2}(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^{3/2}} \sin \varphi \sin \lambda, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= - \frac{R \sin \varphi \sin \lambda}{\sqrt{2}(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^{3/2}} [2 + \cos \varphi \cos \lambda], \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= + \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{2}(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^{3/2}} [2 \cos \lambda + \cos^2 \lambda \cos \varphi + \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (63)$$

Aus diesen sind die Größen der Indikatrixhalbachsen:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}, \quad b = \frac{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}}{\sqrt{2}} \quad (64)$$

Das Verhältnis zwischen a und b beweist auch in diesem Falle, daß die Projektion tatsächlich flächentreu ist. Die Meridian- und Parallelkreisbilder wurden im Zusammenhang mit dem Bild 3 angegeben und die betreffenden Indikatrixen sind im Bild 4 eingezeichnet.

6. Abbildungsfunktionen der Sansonschen unechten Zylinderprojektion sind:

$$x = R\varphi, \quad y = R\lambda \cos \varphi \quad (65)$$

Wie aus den Abbildungsfunktionen ersichtlich ist, sind der Anfangsmeridian und sämtliche Parallelkreise längentreu. Die Differentialquotienten

der Abbildungsfunktionen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= +R, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -R \lambda \sin \varphi, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= +R \cos \varphi. \end{aligned} \quad (66)$$

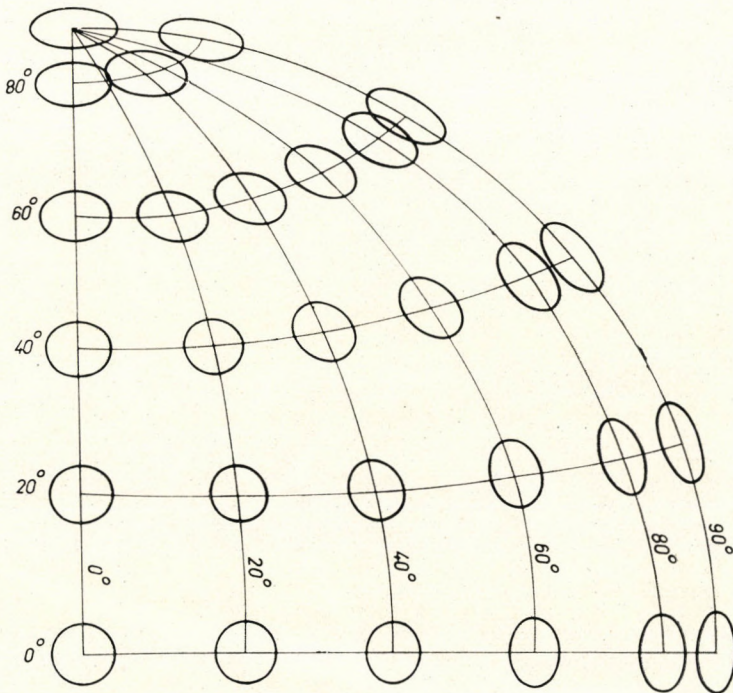


Bild 4. Transversale flächentreue azimutale (Lambertsche) Projektion

Demgemäß sind

$$\begin{aligned} l_m &= \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi}, & l_p &= 1, \\ a &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{4}} + \frac{\lambda \sin \varphi}{2}, \\ b &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{4}} - \frac{\lambda \sin \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Der Umstand, daß

$$ab = 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{4} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{4} = 1, \quad (68)$$

ist ein Beweis dafür, daß die Projektion flächentreu ist. Auf die Projektion bezieht sich Bild 5.

Die Verzerrungswerte des Pols auf den unechten Projektionen sind im allgemeinen nicht eindeutig; sie hängen davon ab, an welchem Meridian der Pol angenähert wird, d. h. mit welchem Wert λ gerechnet wird. (Dieser Umstand läßt sich z. B. auch aus den Beziehungen (67) feststellen.) Auf unseren betref-

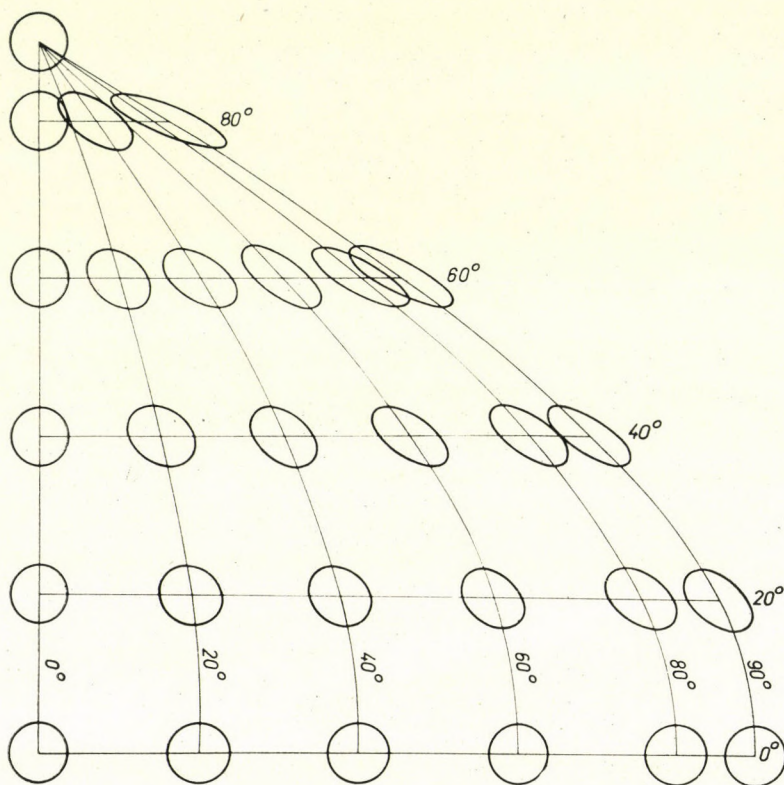


Bild 5. Sansonsche Projektion

fenden Abbildungen ist die zum Anfangsmeridian gehörende Indikatritz des Pols eingezeichnet.

7. Abbildungsfunktionen der Hammerschen unechten Projektion :

$$x = \frac{R \sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}}, \quad y = \frac{R 2 \sqrt{2} \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}}. \quad (69)$$

Die Differentialquotienten sind:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \varphi} &= + \frac{R \sqrt{2}}{2 \left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right)^{3/2}} \left[\cos \varphi \left(2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right) + \cos \frac{\lambda}{2} \right], \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= + \frac{R \sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{4 \left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= - \frac{R \sqrt{2} \sin \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right)^{3/2}} \left(2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right), \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= + \frac{R \sqrt{2} \cos \varphi}{2 \left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right)^{3/2}} \left[\cos \frac{\lambda}{2} \left(2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}\right) + \cos \varphi \right].\end{aligned}\tag{70}$$

Die Formel $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$ wäre sehr kompliziert. Das Verfahren, wonach für jene Punkte, für die die Indikatrix zu bestimmen war, die numerischen Werte der Differentialquotienten (70) berechnet und diese in die weiteren Formeln eingesetzt wurden, schien einfacher zu sein. Die für die Halbachsen a und b erhaltenen numerischen Werte zeigten in sämtlichen ausgewählten Punkten, daß

$$a = \frac{1}{b} \quad \text{bzw.} \quad ab = 1\tag{71}$$

ist.

So z. B. ist in dem mit den Koordinaten $\varphi = 40^\circ$ und $\lambda = 20^\circ$ gegebenen Punkte:

$$a = 1,1085, \quad b = 0,9022, \quad ab = 1$$

und in dem Punkte mit den Koordinaten $\varphi = 80^\circ$ und $\lambda = 60^\circ$:

$$a = 1,7402, \quad b = 0,5746, \quad ab = 1.$$

Das Gradnetzbild der Hammerschen Projektion und ihre Indikatrixen sind im Bild 6 ersichtlich.

8. Die bedeutendste der unechten Zylinderprojektionen, die rhombusförmige Meridianbilder erzeugen, ist die *Collignon'sche Projektion*. (Je zwei zum Anfangsmeridian symmetrische Meridianbilder formen die Rhomben; bei der Collignonschen Projektion sind die beiden, mit dem Anfangsmeridian die

geographische Länge von 90° einschließenden Meridiane, also das Bild des die Halbkugel begrenzenden Meridianpaares, ein Quadrat.) Die Gleichungen der Projektion lauten folgendermaßen:

$$x = R \sqrt{\pi} \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2} \right), \quad y = R 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \sin \frac{\beta}{2}. \quad (72)$$

Die Differentialquotienten nach φ und λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= + \frac{R \sqrt{2\pi}}{2} \cos \frac{\beta}{2}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= - R \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \cos \frac{\beta}{2}, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= + R 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \quad (73)$$

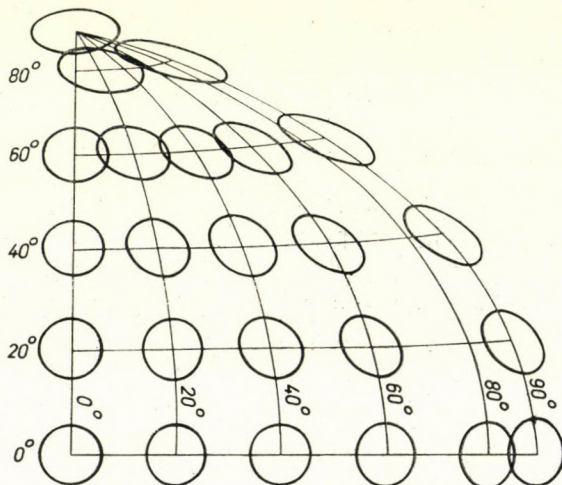


Bild 6. Hammersche Projektion

Die Längenverhältnisse in Richtung des Meridians und Parallelkreises sind:

$$l_m = \sqrt{(1 + \sin \varphi) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda^2}{\pi} \right)}, \quad l_p = \frac{2}{\sqrt{\pi(1 + \sin \varphi)}}. \quad (74)$$

Aus diesen Gleichungen — beide gleich 1 gesetzt — läßt sich der interessante Umstand feststellen, daß der verzerrungsfreie Punkt am Anfangsmeridian sich auf der geographischen Breite

$$\varphi = \arcsin \frac{4 - \pi}{\pi} = 15^\circ 51' 25,666 \dots'' \quad (75)$$

befindet. Längs des Anfangsmeridians sind nämlich auf den unechten Abbildungen der Anfangsmeridian und die Parallelkreise die Haupttrichtungen, da das Bild des Anfangsmeridians das Bild der Parallelkreise, das als miteinander parallele Geraden erscheint, im rechten Winkel schneidet.

Die weiteren Rechnungen werden mit den numerischen Werten der Differentialquotienten (73) ausgeführt. Bezüglich sämtlicher Punkte steht fest, daß

$$a = \frac{1}{b} \quad \text{bzw.} \quad ab = 1 \quad (76)$$

ist.

Die Projektion ist demnach flächentreu. Das Bild des Gradnetzes und die Indikatrixen sind im Bild 7 dargestellt.

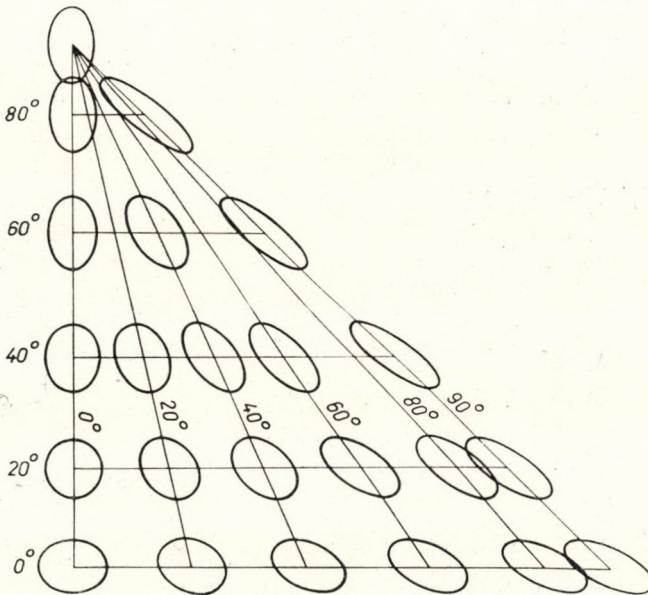


Bild 7. Collignonsche Projektion

V.

Abschließend betrachten wir auch zwei Kegelprojektionen.

9. Die Abbildungsfunktionen der normalen wahren Kegelprojektion, die die Kugel berührt und auf der die Meridiane längentreu sind (Ptolemäische Kegelprojektion; gewöhnliche oder einfache Kegelprojektion), sind

$$\begin{aligned} x &= R \tan \beta_0 - [R(\tan \beta_0 + \beta - \beta_0)] \cos (\lambda \cos \beta_0), \\ y &= [R(\tan \beta_0 + \beta - \beta_0)] \sin (\lambda \cos \beta_0), \end{aligned} \quad (77)$$

wo β_0 die Poldistanz des Berührungsparellkreises und β die des untersuchten Punktes ist. Die x -Achse des rechtwinkligen Ebenenkoordinatensystems ist das Bild des Anfangsmeridians, seine y -Achse die Tangente des Berührungsparellkreises im Schnittpunkt mit dem Bild des Anfangsmeridians. Die Differentialquotienten nach φ und λ sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= + R \cos(\lambda \cos \beta_0), & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= - R \sin(\lambda \cos \beta_0), \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= + R \cos \beta_0 [\tan \beta_0 + \beta - \beta_0] \sin(\lambda \cos \beta_0), & & (78) \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= + R \cos \beta_0 [\tan \beta_0 + \beta - \beta_0] \cos(\lambda \cos \beta_0). \end{aligned}$$

Auf den wahren Kegelpjektionen sind die Hauptrichtungen die Richtung des Meridians und die des Parallelkreises. Aus diesem Umstand und den

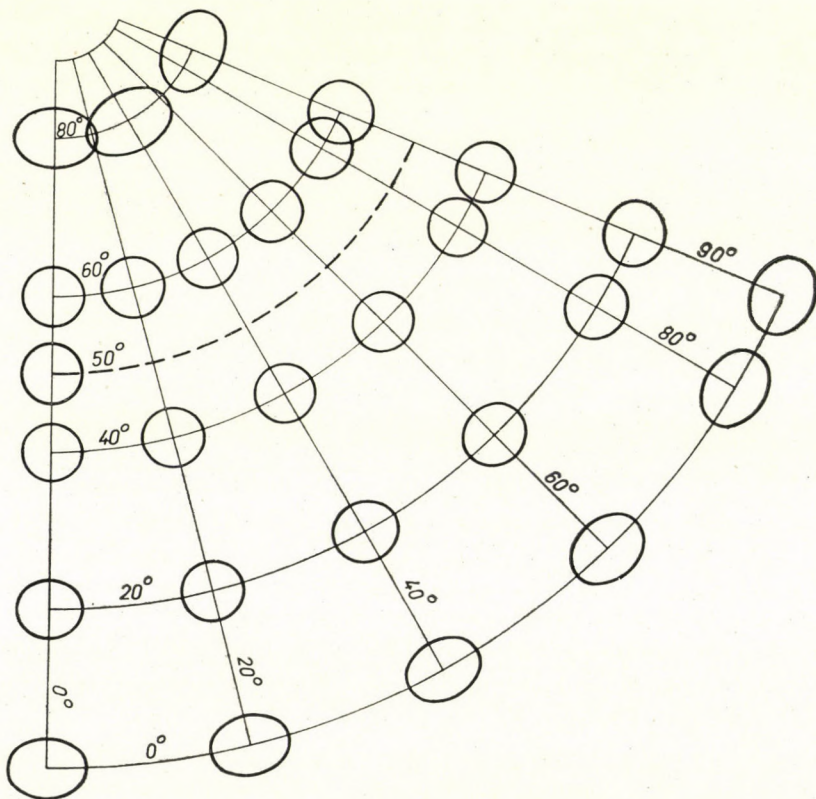


Bild 8. Ptolemäische (einfache) Kegelpjektion. $\varphi_0 = 50^\circ$, $\beta_0 = 40^\circ$

Ausdrücken (78) ergibt sich:

$$a = \frac{\cos \beta_0}{\sin \beta} (\tan \beta_0 + \beta - \beta_0) = l_p, \quad b = 1 = l_m. \quad (79)$$

Die Projektion, zu dem Bild 8 gehört, weist eine allgemeine Verzerrung auf. Der Berührungskreis der auf der Abbildung dargestellten Kegelprojektion ist der Parallelkreis mit der geographischen Breite von 50° .

10. Die auf den Nordpol als Anfangspunkt bezügliche Halbmesserfunktion und Halbmesserneigung der *Wernerschen unechten Kegelprojektion* sind

$$p = R \beta, \quad \gamma = \frac{\sin \beta}{\beta} \lambda. \quad (80)$$

Wenn die x -Achse des Ebenenkoordinatensystems das Bild des Anfangsmeridians ist, sein Anfangspunkt das Bild des Nordpols, dann sind die Abbildungsfunktionen:

$$x = + R \beta \cos \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right), \quad y = - R \beta \sin \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right). \quad (81)$$

Die partiellen Differentialquotienten nach φ und λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= - R \left[\cos \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right) - \beta \sin \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right) \frac{\beta \lambda \cos \beta - \lambda \sin \beta}{\beta^2} \right], \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= - R \sin \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right) \sin \beta, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= - R \left[\sin \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right) + \beta \cos \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right) \frac{\beta \lambda \cos \beta - \lambda \sin \beta}{\beta^2} \right], \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= - R \cos \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \lambda \right) \sin \beta. \end{aligned} \quad (82)$$

Die weiteren Berechnungen wurden mit den numerischen Werten von (82) ausgeführt. Bezüglich sämtlicher Punkte ist

$$a = \frac{1}{b} \quad \text{bzw.} \quad ab = 1, \quad (83)$$

d. h., die Projektion ist flächentreu. Das Gradnetzbild der Wernerschen Projektion und ihre Indikatrixen wurden im Bild 9 für ein Viertel der gesamten Kugel konstruiert.

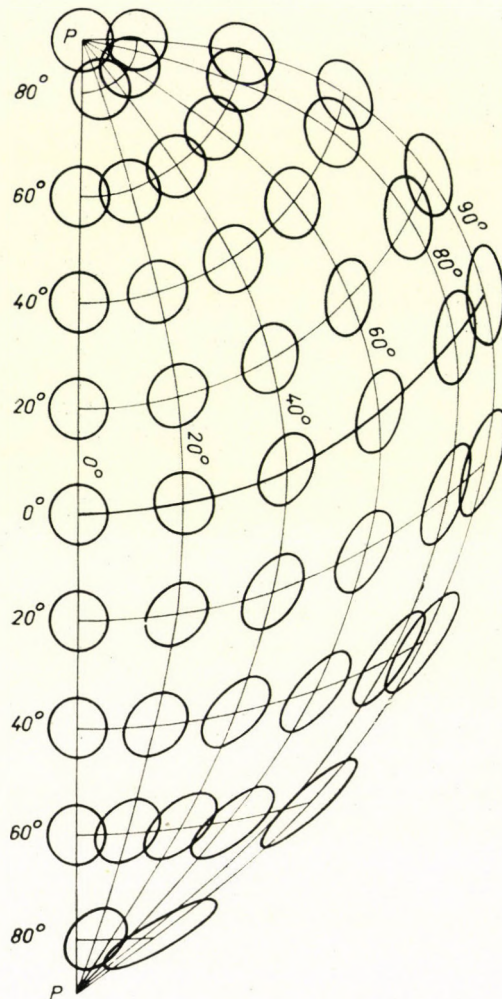


Bild 9. Wernersche Projektion

VI.

In den Bildern 3 ÷ 9 kann man die Verzerrungsverhältnisse je einer Projektion bezüglich der verschiedenen gelegenen Punkte der Kugel vergleichen. Um zu demselben Punkt der Kugelfläche die sich auf verschiedenen Projektionen ergebenden Verzerrungsverhältnisse auch unmittelbar vergleichen zu können, wurden Bild 10 und 11 angefertigt. Bild 10 stellt nacheinander (neben- und untereinander) die zum Schnittpunkt der Koordinaten $\varphi = 60^\circ$ und $\lambda = 60^\circ$ gehörende Indikatrix der Bilder 3–9, und Bild 11 die zum Schnittpunkt der Koordinaten $\varphi = 0^\circ$ und $\lambda = 90^\circ$ gehörende Indikatrix dar. Beide Bildern

wurden mit den entsprechenden Indikatrixen der normalen stereographischen, der Lambertschen flächentreuen azimutalen und gnomonischen Projektion ergänzt. (Die beiden letzteren Projektionen sind vorhergehend nicht erörtert worden). Die Neigung der Indikatrixachsen wurde auf das als Gerade auftretende Bild

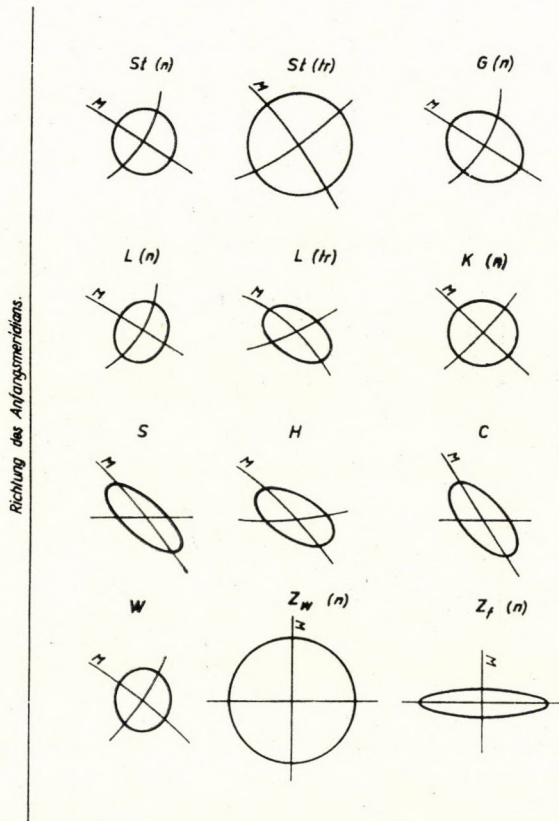


Bild 10. Die Indikatrixen des Kugelpunktes mit den Koordinaten $\varphi = 60^\circ$ und $\lambda = 60^\circ$ auf verschiedenen Projektionen

des Anfangsmeridians der betreffenden Projektion bezogen. (In den Bildern ist die stereographische Projektion mit *St*, die Lambertsche mit *L*, die gnomonische mit *G*, die Sansonsche mit *S*, die Hammersche mit *H*, die Collignonsche mit *C*, die Ptolemäische Kugelprojektion mit *K*, die Wernersche Projektion mit *W*, die winkeltreue Zylinderprojektion mit Hg_{st} und die flächentreue Zylinderprojektion mit Hg_{tt} bezeichnet. Die normale Lage ist mit *n*, die transversale mit *tr* angegeben. Bei sämtlichen Indikatrixen sind auch kleine Stücke des Meridian- und Parallelkreises eingezeichnet. Das Bild des Meridians ist mit *m* bezeichnet, das Bild des Parallelkreises ist ohne Buchstaben geblieben.

In den Bildern 10 und 11 gibt der Halbmesser der beiden Zylinderprojektions-Indikatrixkreise, die in Bild 11 zu sehen sind, die Einheit der Längenabmessungen der Indiktrixen an.

Unseres Erachtens erübrigt es sich zu den Bildern 3—11 eine textliche Auswertung hinzuzufügen, da die dargestellten Indiktrixen uns die Verzerrungs-

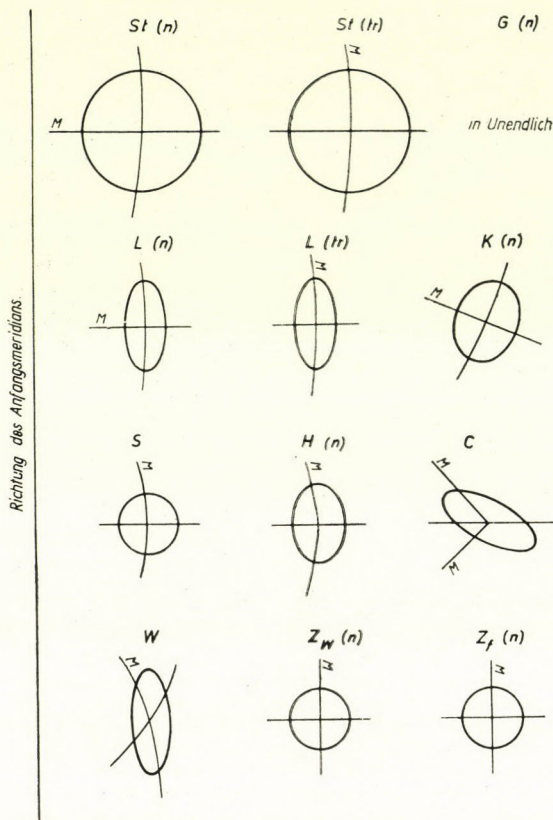


Bild 11. Die Indiktrixen des Kugelpunktes mit den Koordinaten $\varphi = 0^\circ$ und $\lambda = 90^\circ$ auf verschiedenen Projektionen

verhältnisse auf Grund der bisher mitgeteilten Untersuchungen übersichtlich darbieten und auch zwischen den einzelnen Projektionen einen entsprechenden Vergleich geben.

In unserer Abhandlung wurden die Verzerrungsverhältnisse nur einiger Projektionen angegeben, es ist selbstverständlich, daß wir uns nicht mit der großen Anzahl aller existierenden Projektionen befassen konnten. In der hier bekanntgegebenen Weise jedoch läßt sich jede beliebige Projektion verhältnismäßig leicht untersuchen.

SCHRIFTTUM

- ZÖPPRITZ, K.: Leitfaden der Kartenentwurfslehre, III. Ausgabe, Leipzig 1912.
DRIENCOURT, L.—LABORDE, J.: *Traité des projections des cartes géographiques.* (Handbuch der Projektionen geographischer Karten) Paris 1932.
WAGNER, K.: *Kartographische Netzentwürfe.* Leipzig 1949.
HAZAY, I.: *Földi vetületek.* (Kartenprojektionen.) Akadémiai Kiadó, Budapest 1954.

THE SIGNIFICANCE OF TISSOT'S INDICATRICES

I. HAZAY

SUMMARY

In any arbitrary point of a certain projection the conditions of distortion may be determined by Tissot's indicatrix. It is determinable from the equations of projection to every point of the projection. Since the indicatrix varies from point to point on the same projection, whereas the indicatrix belonging to the same point of original surface changes at the different projections, Tissot's indicatrix may be considered as the characteristics of the projection. This property is advantageous for the most adequate choice of projections of maps for different purposes. The study discusses examinations carried out in this respect, presents the formation of indicatrices on some different projection types, compares the conditions of distortion and draws the final conclusions.

LA SIGNIFICATION DES INDICATRICES DE TISSOT

I. HAZAY

RÉSUMÉ

Les conditions de distortion dans un point quelconque d'une projection peuvent être déterminées par l'indicatrice de Tissot. Celle-ci est déterminable au moyen des équations de projection pour tous les points de la projection. Étant donné que l'indicatrice varie de point en point sur la même projection tandis que l'indicatrice appartenant au même point de la surface origine varie suivant les différentes projections, on peut considérer les indicatrices de Tissot comme étant caractéristiques de ces dernières. Cette propriété peut être utilisée avec succès pour le choix le plus pratique des projections de cartes destinées à divers usages. L'étude montre la variation des indicatrices sur des projections de différents types, compare les conditions de distortion et tire les conclusions qui s'imposent.

О ЗНАЧЕНИИ ИНДИКАТРИС ТИССО

И. ХАЗАИ

РЕЗЮМЕ

При помощи индикатрисы Тиссо можно определить условия искажения в любом пункте определенной проекции. Эта индикатриса может быть определена по уравнениям проекции для каждого пункта проекции. Поскольку индикатриса в одной и той же проекции изменяется по каждому пункту, а в то же время индикатриса, относящаяся к пункту с одним и тем же основанием является различной в различных проекциях, индикатрисы Тиссо могут рассматриваться как характерные особенности проекции. Такое их свойство можно удобно использовать для правильного подбора проекции карт различного назначения. В статье излагаются проведенные исследования, описывается поведение индикатрис в проекциях различного типа, сопоставляются условия искажения и в заключение сделаны выводы.

DIE BESTIMMUNG DER VERSCHIEBUNG EINZELNER PUNKTE DURCH MESSEN, KRITERIEN DER LAGEBESTÄNDIGKEIT

F. HALMOS

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GEODÄTISCHES FORSCHUNGLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
SOPRON

[Eingegangen am 5. September 1964]

Verfasser bespricht Vermessungsverfahren über und unter Tage zur Analyse von Verschiebungen, die an Bauobjekten während der Errichtung entstehen. Die Abhandlung bezieht sich auf die Untersuchung einer richtigen Anordnung der Messungen und die mathematischen Probleme der Auswertung wiederholter Messungen. Es wird die Genauigkeit analysiert und Kriterien der Punktstabilität werden aufgestellt. Verfasser entwickelt eine einfache graphische Methode zur Bestimmung des durchschnittlichen Fehlers und der Verschiebung des Punktes in jeder hierzu gewählten Richtung. In bezug auf die Stabilitätskriterien sind die entscheidenden praktischen Mittel und Wege angedeutet. Auch unterliegen einer Untersuchung die Quellen der Meßfehler und es folgen noch gewisse Prinzipien bezüglich der Berechnung des mittleren Fehlers.

Bei einer Raumausbildung unter Tage, im Tiefbau, und allgemein beim Bau jeglicher Objekte wird die Gleichgewichtslage der Gesteine gestört und es treten infolgedessen über wie auch unter Tage Bewegungen und Formveränderungen auf. Dies alles wirkt sich auf die Objekte aus, sowohl auf unterirdische wie auch auf jene an der Erdoberfläche. Um Schadenfällen vorzubeugen, ist es unerläßlich, alle anderen, von der Gesteinverschiebung hervorgerufenen Bewegungserscheinungen zu untersuchen, insbesondere das Ausmaß und den zeitlichen Verlauf zu analysieren.

Der Bewegungsvektor eines Punktes P kann im rechtwinkligen Koordinatensystem in zwei Komponenten zerlegt werden: die erste ist die waagerechte Verschiebung, der sogenannte Schlupf, die zweite ist die senkrechte Verschiebung, das sogenannte Sinken ([1], S. 150). Also können diese Bewegungsvektoren durch zeitweise in horizontaler und vertikaler Richtung durchgeführte Messungen bestimmt werden. Größe und zeitlicher Verlauf der Verschiebungen über und unter Tage sind genau genommen Funktionen vieler Faktoren (Dimensionen des Bauobjektes, Gesteineigenschaften, Ausbreitung und Tiefe des im Grubenwerk abgebauten Gebietes, Festigkeitseigenschaften der Gesteine usw.), doch kann man in dieser Abhandlung auf diese Zusammenhänge nicht eingehen, obwohl bezüglich des Zeitpunktes, der räumlichen Anordnung und der Genauigkeit der Messungen die genannten Faktoren als maßgebend gelten. In der ungarischen Fachliteratur wurden betreffs Bestimmung solcher Verschiebungen im Wege geodätischer bzw. markscheiderischer Vermessungen bedeutende Untersuchungsarbeiten veröffentlicht [2, 3].

Allgemein werden die zur Bestimmung der Gesteinverschiebung abgesteckten Beobachtungspunkte in zwei Gruppen geteilt:

- a) Hauptpunkte,
- b) Zwischenpunkte.

Selbstredend bildet das Hauptpunktnetz die notwendige Grundlage zur erwünschten Untersuchung der Zwischenpunkte im zu prüfenden Gebiet. Hierzu werden folgende Arbeitsmethoden verwendet: Dreiecksvermessung, Neupunkteinschaltung, Präzisions Polygonometrie (horizontal), überaus präzises Nivellieren (vertikal). Die Gesamtheit der Vermessungsarbeit soll nach einem wohl überdachten Plan vor sich gehen; hierzu findet man wichtige und brauchbare Grundlagen in der Beobachtung der gesamten Umgebung, auch ohne Instrumente, des durch die Bewegungen gefährdeten Gebietes, der Eigenart des Bauobjekts usw. Es sollen jene Hauptpunkte, an welche die Messungen allenfalls anschließen sollen, in jenem Gebiet, das nicht von Verschiebungen und Formänderungen belastet ist, angesetzt werden; es werden die Verschiebungen im Raum und nach dem Zeitverlauf sämtlicher im gefährdeten Gebiet angenommener Zwischenpunkte stets auf die Hauptpunkte bezogen und bestimmt. Wenn nun die Verschiebungen der einzelnen Punkte einmal bekannt sind, so können die Parameter der die Verschiebungen bestimmenden Gleichungen berechnet werden; es ist ratsam und nützlich, hierzu noch in vergrößertem Maaßstab Diagramme aufzuzeichnen, in denen die räumliche Anordnung und der zeitliche Verlauf der Verschiebungen dargestellt ist.

Allgemein soll das Hauptpunktnetz auch bei einer zeitweisen Wiederholung der Messungen unverändert behalten werden. Auf diese Weise sichert man die Vereinfachung sämtlicher Rechengänge, sowohl bei der Auswertung der Ergebnisse wie auch für die Ausgleichungsarbeit; es bleibt nur übrig, gewisse ergänzende, den Änderungen entsprechende Rechenarbeiten durchzuführen. So z. B. wenn es sich um eine Ausgleichung handelt, so genügt es, die den reinen Gliedern der Gleichungen entsprechende Kolonne abzuwickeln. Alle Gewichtskoeffizienten, sowohl für die Unbekannten wie auch für die Funktionswerte bleiben in allen Rechengängen unverändert. Folglich genügt es, zur Berechnung der mittleren Fehler nach erfolgter Ausgleichung nur den für die neue Messung notwendigen mittleren Fehler mit dem Einheitsgewicht, also als eine Meßziffer zu bestimmen. Hierauf wollen wir später noch zurückkommen.

Im Falle von Neupunkteinschaltungen, wo überschüssige Beobachtungen zur Verfügung stehen — also im Falle einer einfacheren Ausgleichung — genügt es, (selbstredend) die volle Ausgleichung nur ein einzigesmal durchzuführen; es soll nämlich bei der Berechnung wiederholter Messungen, bei der Lösung der Normalgleichungen, ebenfalls die dem reinen Glied entsprechende Kolonne abgewickelt, und die Bestimmung der neuen unbekanntem Zuschläge durchgeführt werden. Auch die Genauigkeitsprüfung kann mit Hilfe der bei dem

ersten Rechengang erhaltenen Gewichtskoeffizienten erledigt werden. Ansonsten ist in diesem Fall die Bestimmung der reinen Glieder der Vermittlungsgleichungen sehr einfach (und insbesondere wenn man in jedem einzelnen Fall denselben Annäherungswert beibehält), es werden in einfacher Weise die Differenzen gebildet.

Es lassen sich auch die graphischen Verfahren mit Erfolg anwenden, uzv. beim Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von überschüssigen Messungen; es soll aber bemerkt werden, daß die Abwicklung des reinen Gliedes bei wiederholten Lösungen im Falle einer Ausglei chung keine bedeutsame Mehrarbeit verursacht, wenn man in Rechnung zieht, daß nebst der zeichnerischen Aufgabe einer graphischen Auswertung noch Nebenrechnungen durchzuführen sind. Dasselbe kann für die Fälle ohne überschüssige Messungen gesagt werden, vorausgesetzt, daß man mit Hilfe einer Reihenentwicklung des für die Koordinaten aufstellbaren Funktionswertes nur die der Änderung des Richtungswinkels entsprechende Koordinatenänderung ausdrückt; so z. B. für den Fall eines Vorwärtseinschnitts (Bild 1) kann bekannterweise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} a_{AP} \delta x + b_{AP} \delta y + l_{AP} &= 0 \\ a_{BP} \delta x + b_{BP} \delta y + l_{BP} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

wo

$$\begin{aligned} a_{AP} &= -\varrho \frac{y_{P_1} - y_A}{AP_1^2} = -\varrho \frac{\sin(AP_1)}{AP_1} \\ b_{AP} &= +\varrho \frac{x_{P_1} - x_A}{AP_1^2} = \varrho \frac{\cos(AP_1)}{AP_1} \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} l_{AB} &= (AP_1) - (AP_2) \\ &\vdots \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

In obigen Formeln ist P_1 der Wert der ersten Messung für Punkt P , und P_2 steht für P im zweiten Fall; (AP_1) und (AP_2) sind die entsprechenden Richtungswinkel. Man erhält auf Grund der Gleichungen (1):

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{b_{BP} l_{AP} - b_{AP} l_{BP}}{a_{AP} l_{BP} - a_{BP} l_{AP}} = \frac{b_{BP} l_{AP} - b_{AP} l_{BP}}{D} = b_j l_{AP} - b_i l_{AB} \\ \delta y &= \frac{a_{AP} l_{BP} - a_{BP} l_{AP}}{a_{AP} b_{BP} - a_{BP} b_{AP}} = \frac{a_{AP} l_{BP} - a_{BP} l_{AP}}{D} = a_i l_{BP} - a_j l_{AP}. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Rücksicht auf die Kleinheit der Änderungen genügt sogar die Berechnung mit dem Rechenstab. Im Falle $l_{AP} = l_{BP} = 0$ ist auch die Änderung der Koordinate gleich Null. Die Gleichungen (2) können — sinngemäß — auch bei einer Ausglei chung als geltend angenommen werden.

Im folgenden soll untersucht werden, welche Kriterien aufgestellt werden sollen, um im Falle einer wiederholten Bestimmung der Koordinaten die Frage entscheiden zu können, ob die Änderungen der Koordinaten aus tatsächlichen Verschiebungen entstanden sind, oder ob es sich einfach um die üblichen Streuungen infolge von Meßfehlern handelt.

Unabhängig von der zur Bestimmung der Koordinaten befolgten Methode, die berechneten Koordinaten sind, infolge der beim Meßverfahren unausweich-

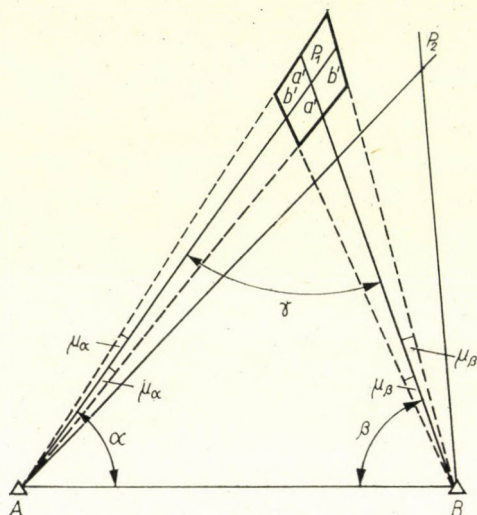


Bild 1

lichen Fehler, mit gewisser Unsicherheit behaftet. Die Verlässlichkeit der erhaltenen Koordinatenwerte läßt sich durch ihren mittleren Fehler kennzeichnen. Nun kann der mittlere Fehler sowohl bei einer Ausgleichung wie auch in den Fällen ohne überschüssige Messungen bestimmt werden [4]. Doch wird die Lage des Punktes in der Ebene weder von den mittleren Fehlern der Koordinaten, noch von der aus diesen durch Rechnen oder graphisches Konstruieren bestimmbar mittleren Fehlerellipse, sondern lediglich mit Hilfe der zu dieser Ellipse gehörenden Fußpunktkurve bestimmt. Es ist aber eine mühsame und langwierige Arbeit, die mittlere Fehlerellipse und die entsprechende Fußpunktkurve punktweise zu errechnen [4, 5]. Für den Fall der Bestimmung der mittleren Fehlerellipsen-Fußpunktkurve, ohne überschüssige Messungen, hatte TÁRCZY—HORNOCH eine einfache Konstruktionsmethode ausgearbeitet [6]. Unsererseits wurde in [7] ein Verfahren veröffentlicht, mit Hilfe dessen die Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse in Kenntnis von je 2 symmetrisch liegenden Punkten (z. B. mittlere Koordinatenfehler, oder, wenn überschüssige Messungen nicht vorhanden sind, die mittleren Fehler in den Einschnittsrichtungen) und dazu noch in Kenntnis der Richtung der

großen Achse der Ellipse (die wiederum gemäß [8, 9] einfach durch Konstruktion zu finden ist), oder aber unter Zuhilfenahme eines mittleren Fehlers in einer dritten Richtung bestimmt werden kann.

Diese Konstruktion wird folgenderweise durchgeführt: Fürs erste soll der Fall ohne überschüssige Messungen behandelt werden. Gemäß Bild 1 kann das Fehlerdiagramm, das Fehlerparallelogramm auf Grund der mittleren Fehler μ_α und μ_β der gemessenen Winkelwerte α und β konstruiert werden. Zwei symmetrische Achsen des Fehlerdiagramms (mit den Halbmessern a' und b') genügen, um zwei konjugierte Durchmesser der mittleren Fehlerellipse zu finden. Im Sinne der von TÁRCZY—HORNOCH gegebenen Beweisführung [6] kann die zur Kennzeichnung der Unsicherheit des Punktes geeignete Fehlerkurve mit Hilfe der konjugierten Halbmesser direkt konstruiert werden. Es ist nicht einmal notwendig, den Begriff der Fußpunktcurve einzuführen, da nämlich die oben bezeichneten konjugierten Halbmesser a' und b' voneinander unabhängig erhaltene mittlere Fehlerwerte (abgeleitet von dem mittleren Winkelfehler μ_α bzw. von dem anderen mittleren Winkelfehler μ_β , die voneinander ebenfalls unabhängig sind) darstellen, also kann die Unsicherheit als der mittlere Fehler des Punktes P in jeder gewünschten Richtung im Wege einer Zusammensetzung der auf die gegebene Richtung rechtwinklig projizierten Projektionen dieser Halbmesser erhalten werden. So erscheint z. B. in den zu den Schnittrichtungen normalen Richtungen die Projektion nur von einem konjugierten Durchmesser [6]:

$$\mu_A = a' \sin \gamma; \quad \mu_B = b' \sin \gamma; \quad (3)$$

So haben wir bereits die Punkte der Fehlerkurve 1, 2, 3 und 4, d. h. je 2 symmetrische Punkte der Fußpunktcurve bestimmt (Bild 2). Wenn man die Unsicherheit des Punktes noch in einer anderen Richtung, z. B. in Richtung ξ in Bezug auf a' [6; Gleichung 7] bestimmt, so geht das Konstruieren der Fehlerkurve einfach vor sich:

$$\mu_\xi^2 = \mu_{a', \xi}^2 + \mu_{b', \xi}^2 = (a' \cos \xi)^2 + [b' \cos (\gamma - \xi)]^2. \quad (4)$$

Durch Fortsetzung dieses Konstruktionsverfahrens erhalten wir die Punkte 5 und 6 (Bild 2). Zusammenfassend besitzen wir 3 Paar symmetrische Punkte der Fehlerkurve. Weiter unten soll bewiesen werden; daß die für die Unsicherheit des Punktes charakteristische Fehlerkurve, d. h. die Fußpunktcurve der mittleren Fehlerellipse in annehmbarer Annäherung durch zwei Kreise ersetzt werden kann, deren Mittelpunkte in der folgenden Weise bestimmt werden können: jeder zum Ersatz der Fußpunktcurve geeigneter Kreis ist durch je 3 Punkte der entsprechenden Kurvenhälfte bestimmt. Abgesehen von etwaigen Zeichenfehlern, wird der Kreismittelpunkt im Wege

des bekannten Dreipunktverfahrens als Schnittpunkt der Halbierungsnormalen der zwischen je 2 Punkten gezogenen Sehnen gefunden. Da bereits zwei Sehnen den Mittelpunkt ausreichend bestimmen, kann die Normale der dritten Sehne als Kontrollrichtung dienen. Die im Bild 2 gezeichneten Kreise als Annäherung der Fehlerkurve liefern einen Linienzug, dessen Punkte — in ihrer großen Mehrheit — mit den Punkten der Fußpunktcurve zusammenfallen. Zur Kontrolle, oder aber als Alternative, ist es annehmbar, nach der in [8]

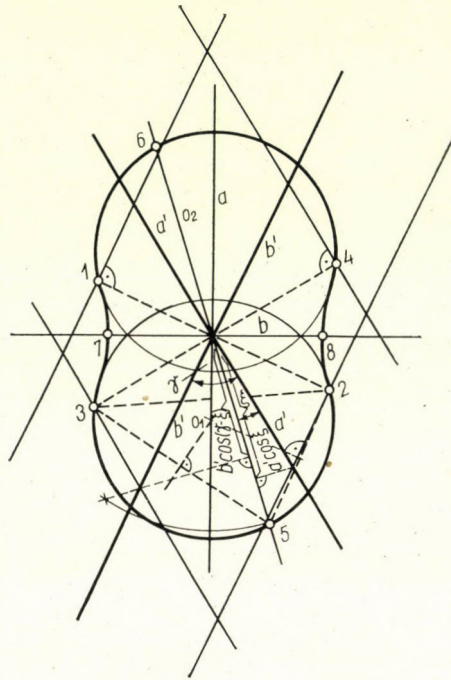


Bild 2

und [9] besprochenen Methode einfach die Richtung der grossen Achse zu bestimmen. Da nun die Kreismittelpunkte unbedingt auf der grossen Achse liegen müssen, so genügt es, je 2 symmetrische Peripheriepunkte zu bestimmen, um mit Hilfe der Halbierungsnormalen den Schnittpunkt auf der grossen Achse, d. h. den Kreismittelpunkt zu finden. Wie bereits angedeutet, genügt es in diesem Falle, je 2 Symmetriepunkte zu bestimmen, und man braucht die der Gleichung (4) entsprechenden Schritte nicht mehr ausführen. Nebenbei kann man bei Verfolgung der ersten Lösung die Richtung der grossen Achse leicht finden. Diese Achse ist nämlich identisch mit der die Kreismittelpunkte verbindenden Geraden, die dabei auf der Geraden, welche die 2 Schnittpunkte der zwei Kreise verbindet und zugleich die Richtung der kleinen Achse bestimmt, senkrecht steht. Bekanntermaßen liegt in der Richtung der grossen Achse

der Berührungspunkt der mittleren Fehlerellipse mit der Fußpunktcurve (als Fehlerkurve), d. h., die Achsen beider Kurven fallen zusammen, und so ist also auch die Länge der großen Achse unmittelbar gegeben. Es folgt die Bestimmung der Länge der kleinen Achse, da nämlich zwischen den zwei Kreisen beiderseits je ein Übergangsbogen liegt [10], welcher, gemäß unserer Analyse, ebenfalls — in annehmbarer Annäherung — als Kreisbogen aufgefaßt werden kann. In der praktischen Durchführung genügt es —, unter Berücksichtigung der Genauigkeitsansprüche und der statistischen Wahrscheinlichkeit, die Länge der kleinen Achse zu bestimmen und dazu den Übergangsbogen einzuzichnen. Hiezu führt die folgende Methode: bekannterweise beruht die Bestimmung der Fußpunktcurve unter anderen auf der Bedingung, daß in jeden beliebigen, zueinander normal gerichteten zwei Richtungen die Summe der Quadrate der bezüglichen mittleren Fehler Konstant ist:

$$a'^2 + \overline{P3^2} = b'^2 + \overline{P2^2} = a^2 + b^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 \quad (5)$$

in dieser Formel — um die bereits bekannten Zeichen nicht wiederholt zu erklären — bedeutet a die große, b die kleine Achse, und μ_x und μ_y sind die mittleren Fehler in Richtung der Koordinatenachsen x bzw. y . Diese Fehler lassen sich, wie dies aus dem Bild hervorgeht, wenn überschüssige Messungen nicht vorhanden sind, unmittelbar an dem Bild abmessen. Also sind die zu den 2 Koordinatenachsen gehörenden mittleren Fehler zugleich Punkte der Fehlerkurve. Im Sinne der Gleichung (5) läßt sich die kleine Achse leicht bestimmen; man stellt die Zirkelöffnung auf die Hypthenuse (den Abstand) zwischen den Endpunkten zweier, aufeinander rechtwinklig stehender Fehler ein, und man überträgt diesen Abstand vom Endpunkt der bekannten großen Achse auf die Richtung der kleinen Achse (Punkte 7 und 8). Die zu findende Fehlerkurve soll durch diese Punkte durchgehen. Um die Fehlerkurve, d. h. die Fußpunktcurve in annehmbarer Annäherung zu ergänzen, zieht man zwischen den 2 Kreisen an beiden Seiten je eine Übergangskurve als einen Kreisbogen, welcher durch je einen Endpunkt der kleinen Achse hindurchgeht. Bei der allgemein üblichen Genauigkeit ist diese Annäherung zugelassen. Nebenbei kann man laut (5) noch andere Punkte der Übergangskurve konstruieren. Diese Punkte lassen sich annäherungsweise mittels eines Kreisbogens verbinden, dessen Mittelpunkt auf der Verlängerung der kleinen Achse liegt. Die Inflexionspunkte können gleichfalls mitbestimmt werden.

Insofern die Koordinaten des Punktes mittels einer Ausgleichung bestimmt wurden, so ergeben sich, nach erfolgter Ausgleichung, die Werte μ_x und μ_y direkt. Wenn man also die in [8] bzw. [9] beschriebene Methode befolgt, so findet man die Lage und die Richtung der großen und der kleinen Achse (Bild 3), und es läßt sich auch der Mittelpunkt beider Kreise mit Hilfe der Halbierungsnormalen der Verbindungsgeraden der Endpunkte von μ_x und μ_y

als Schnittpunkt mit der großen Achse bestimmen. Die Lösung gestaltet sich in derselben Art und Weise wie zuvor.

Um die Annäherung der Fehlerkurve des Punktes durch Kreislinien einer Prüfung zu unterziehen, verwenden wir die Methode der kleinsten Quadrate. Wir haben vorerst die Angaben der mittleren Fehlerellipse eines durch Ausgleichung bestimmten Punktes im Wege der üblichen Rechenmethode bestimmt. Die hier folgende Gleichung

$$p^2 = \mu^2 = a^2 \cos^2 (\varphi - \psi) + b^2 \sin^2 (\varphi - \psi) = a^2 \cos^2 \delta + b^2 \sin^2 \delta; \quad (6)$$

$$\delta = \varphi - \psi$$

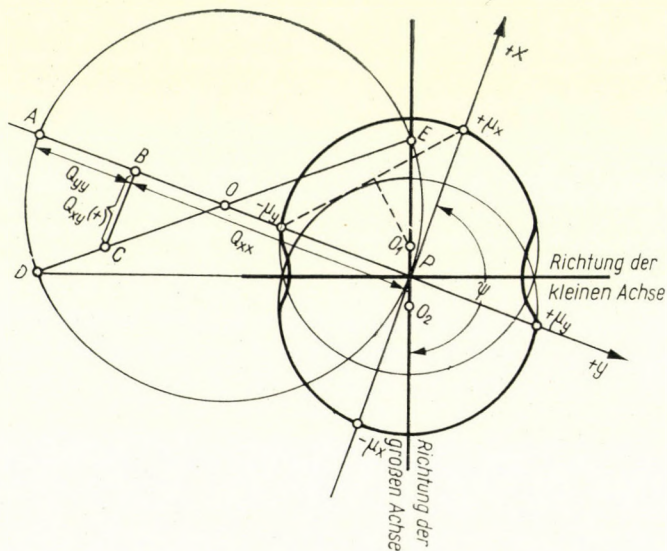


Bild 3

diente zur Berechnung des mittleren Fehlers eines Punktes in ungefähr 20 Richtungen; hier bedeutet ψ den Winkel zwischen der $+x$ Achse und den großen Achse der mittleren Fehlerellipse, und φ ist der Winkel zwischen der $+x$ Achse und der eben gegebenen Richtung. Ebenfalls wurden die rechtwinkligen Koordinaten (mit dem Ellipsenmittelpunkt als Anfangspunkt) des durch Polarkoordinaten gekennzeichneten Punktes bestimmt. Auch wurde die Punktschar, bis zu den vermutlichen Inflexionspunkten nach beiden Richtungen (ausgehend von der großen Achse) untersucht, obwohl es genügt hätte, nur Punkte eines einzigen Winkelviertels in Betracht zu ziehen. Mathematisch gesprochen handelt es sich nun um die Bestimmung des Halbmessers und der Mittelpunktkoordinaten, im gegebenen System, jenes Kreises, welcher sich am genauesten an die errechneten Punkte anpaßt. Wir haben aber mehr als

3 Punkte, und deshalb ergibt sich die Lösung durch Ausgleichung, ungeachtet dessen, daß hier streng genommen die Verbesserungen nicht zu gemessenen Werten zugeordnet werden:

$$\sqrt{(x - x_i) + (y - y_i)} = r \quad (7)$$

Nach erfolgter Reihenentwicklung:

$$\frac{x_0 - x_i}{r_0} \delta x + \frac{y_0 - y_i}{r_0} \delta y - \delta r + \left\{ \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} - r_0 \right\} = \Delta_i \quad (8)$$

wo x_0 und y_0 die Annäherungswerte der unbekanntenen Kreismittelpunkt-Koordinaten, r_0 der Annäherungswert des Halbmessers, und δx , δy , δr die durch die Ausgleichung gewonnenen Änderungen bedeuten. Der Teil in der Akkolade ist das reine Glied der Gleichung, Δ_i bedeutet die Abweichung der ausgeglichenen Werten von den mit Hilfe der laut (6) berechneten Koordinaten erhaltenen Werten. Die gesuchten Unbekannten müssen derart bestimmt werden, daß dabei die Quadratsumme der Δ_i -Werte das Minimum werde.

Die Untersuchungen wurden auf Grund verschiedener Versuchsergebnisse durchgeführt, indem das Verhältnis der großen zu der kleinen Achse geändert wurde. Es wurde eine Verhältniszahl nahezu 1 ($a = 20$ cm, $b = 18$ cm), eine andere (mit $a = 20$ cm, $b = 12$ cm) und eine extremere (mit $a = 20$ cm, $b = 2$ cm) angenommen. Zur Beurteilung der Brauchbarkeit des Verfahrens ist die Größenordnung der errechneten Δ_i -Werte, ferner das Maß der sogenannten mittleren Fehler

$$\mu_{\delta x} = \mu_x, \quad \mu_{\delta y} = \mu_y, \quad \mu_{\delta r} = \mu_r$$

entscheidend. Wir erhielten, für alle drei Achsenverhältniszahlen, Werte von Δ_i , welche einerseits weniger als 1% der großen Achse betragen, und im ungünstigsten Falle noch innerhalb einer 2%igen Fehlergrenze geblieben sind, wobei dies für eine Achsenlänge von 20 cm eine Abweichung von 4 mm bedeutet. Bei den gegebenen Achsenwerten liegen die Fehler durchschnittlich zwischen ± 1 mm. Ob gerechnet oder graphisch bestimmt, die ungünstigsten Lösungen ergeben sich, wenn die kleine und die große Achse der mittleren Fehlerellipse bzw. der Fußpunktcurve nahezu gleich sind. Die oben mitgeteilten Resultate beweisen gleichfalls, daß die durch Kreise ersetzte Fehlerkurve in jedem Fall innerhalb der hier erforderlichen, vernachlässigbaren Grenzen bleiben wird. Die Versuchsberechnungen kann man auch für den Übergangsbogen zwischen den Inflexionspunkten durchführen. Hier ergeben sich zwar perzentuell etwas größere Abweichungen, usw. deshalb, weil der zum Übergangsbogen gehörende Zentriwinkel sehr klein ist, doch bleiben sie noch immer

bequem innerhalb der allgemein zu erwartenden aus der Unsicherheit der Messungen entstandenen anderen Fehlergrenzen. Hier wollen wir auf andere Teilfragen des Hauptproblems und auf die mathematische Beweisführung nicht eingehen. Allenfalls ist die Richtigkeit der Anwendung des Prinzips durch die oben beschriebenen Untersuchungen erwiesen. Über die Anwendung an besondere Fälle berichten wir in der Abhandlung [7].

*

Es folgt nun hier die Analyse der Koordinaten und Fehlerkurven eines zweimal nacheinander bestimmten Punktes. Gemäß Bild 4 ist P_1 das Resultat

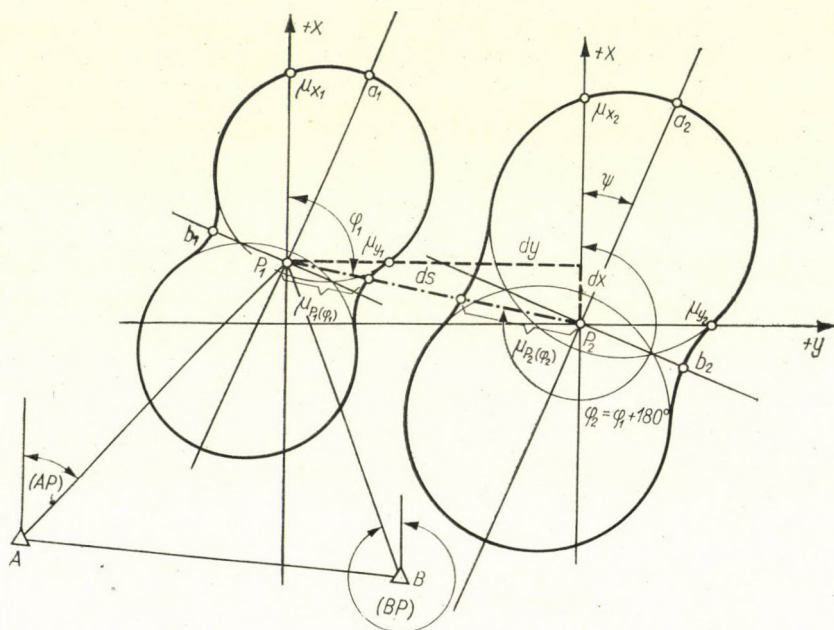


Bild 4

der ersten, P_2 das Resultat der zweiten Bestimmung des Punktes. dy und dx sind die Abweichungen der betreffenden Koordinaten, und die lineare Abweichung ist

$$\overline{P_1 P_2} = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (9)$$

Zugleich kann man in Abhängigkeit von den Meßfehlern den mittleren Fehler des Abstandes $\overline{P_1 P_2}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{P_1 P_2}} &= \sqrt{a_1^2 \cos^2(\varphi_1 - \psi_1) + b_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \psi_1) + a_2^2 \cos^2(\varphi_2 - \psi_2) + b_2^2 \sin^2(\varphi_2 - \psi_2)} = \\ &= \sqrt{\mu_{\varphi_1}^2 + \mu_{\varphi_2}^2} = \sqrt{\mu_{P_1(\varphi_1)}^2 + \mu_{P_2(\varphi_1 + 180^\circ)}^2} \end{aligned} \quad (10)$$

wo a_1, b_1 und a_2, b_2 die Achsenlängen der zweimal bestimmten mittleren Fehlerellipsen bedeuten, ψ_1 und ψ_2 sind die Winkel zwischen der $+x$ Achse und der betreffenden großen Achse, $\varphi_1 = \varphi_2 \pm 180^\circ$ ist der Winkel zwischen der $+x$ Achse und der Richtung $\overline{P_1P_2}$; $\mu_{\overline{P_1P_2}}$ ist der mittlere Fehler (die Unsicherheit) des Punktes in Richtung $\overline{P_1P_2}$. Wie dies aus Bild 4 ersichtlich ist, sind die zwei mittlere Fehlerwerte unmittelbar meßbar, und $\mu_{\overline{P_1P_2}}$ kann durch quadratische Zusammensetzung graphisch bestimmt werden, also kann man von einer langwierigen Rechnung absehen. Nun drängt sich die Frage auf, ob man zur Bestimmung der Punktverschiebung den aus den Koordinaten errechneten Abstand $\overline{P_1P_2} = ds$ und den aus den Meßfehlern erhaltenen Wert $\mu_{\overline{P_1P_2}}$ gleichzeitig anwenden kann, bzw. ob man die Kriterien finden kann, welche von den erhaltenen Resultaten befriedigt werden müßten, um die Frage zu entscheiden.

Als Grundlage unserer Berechnungen der mittleren Fehler gilt allgemein die Gaußsche Verteilung die nun unendlich viele Messungen, d. h. unendlich viele überschüssige Messungen voraussetzt. Nun fallen aber nur 68,3% der Messungen innerhalb der Grenzen des einfachen mittleren Fehlers. Anders ausgedrückt ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gewisses Meßresultat innerhalb der Grenzen des einfachen mittleren Fehlers fällt, gleich 68,3%. Wir wollen den einfachen mittleren Fehler in positivem wie in negativem Sinne verstehen ($a = x \pm 1\mu_x$). Es ist üblich den Bereich zwischen den beiden Grenzwerten als Vertrauensintervall bzw. Konfidenz-Intervall zu bezeichnen. Um zu erreichen, daß 90% der Meßresultate innerhalb der gegebenen Fehlergrenzen fallen, muß das Vertrauensintervall zu $\pm 1,64 \mu_x$, bei einer ähnlichen Forderung für 95% der Resultate muß das Intervall zu $\pm 1,96 \mu_x$, für 98% zu $\pm 2,33 \mu_x$ und schließlich für 99% der Resultate zu $\pm 2,58 \mu_x$ erweitert werden. Nun aber ist auch der mittlere Fehler mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, wobei man noch vor Augen halten soll, daß wir es nicht mit einer unendlichen, sondern mit einer endlichen Anzahl von Messungen zu tun haben, folglich müssen sich die angegebenen Grenzen für die angenommenen Wahrscheinlichkeits-Prozente als zu klein erweisen. In unserem Fall gibt es allgemein nur wenig überschüssige Messungen (besonders bei der Einschaltung von vielen Neupunkten), demzufolge wird durch die einer normalen Verteilung entsprechenden Vertrauensintervalle die Genauigkeit bzw. die Verlässlichkeit unsere Meßresultate überschätzt. So soll z. B. in dem gegebenen Fall für die Richtung der Punkte P_1P_2 mit $P=68,3\%$ der Resultate innerhalb der Grenzen des zu den Richtungen $\mu_{P_1\varphi_1}$ und $\mu_{P_2\varphi_2}$ gehörenden Punktfehlers fallen.

Unter Berücksichtigung der Anzahl der überschüssigen Messungen erhält man mit Hilfe der Studentschen Verteilung die Vertrauensgrenzen, innerhalb welcher die Meßresultate mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu finden sind, oder auch umgekehrt, man erhält jene Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Punkte sich innerhalb der Grenzen des mit dem Studentschen

Multiplikationsfaktoren:

für die Gaußsche Normal-Verteilung: $G_t \mu_x \doteq 1,96 \mu_x$

für die Studentsche Verteilung: $S_t \mu_x \doteq 12,71 \mu_x$

laut der empirischen Formel: $E_t \mu_x \doteq 2(\mu_x + 1/\sqrt{2}\mu_x) \doteq 3,54 \mu_x$

wo

$$\mu_{\mu_x} = \frac{\mu_x}{\sqrt{2} f}$$

und f = Anzahl der überschüssigen Messungen.

Wenn man die zum Punkte P in obiger Darstellung zugeordnete Fehlerkurve darauf untersucht, welcher prozentuale Anteil aller möglichen Lösungen in dem Bereich der Fehlerkurve liegt, so wird es einem noch klarer, wie übertrieben groß die Vertrauens-Intervalle sind, welche man lediglich durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhält. Zu dieser Analyse liefert uns die Fischersche Verteilung die Erkenntnis, daß die Fußpunktcurve der mittleren Fehlerellipse 39,3% der Messungen in sich schließt, da man die Kurvenfläche durch die gleichzeitige Befriedigung von zwei unabhängigen zufälligen Veränderlichen erhält. Aus diesen Ausführungen kann man darauf folgern, in welchem Maße die Achsen der Fehlerellipse verlängert werden sollten, um eine Fehlerkurve zu erhalten, deren Fläche eine bedeutend größere Anzahl der Messungen aufnehmen könnte.

Auf unser ursprüngliches Problem zurückkommend, steht es fest, daß man weder mit Hilfe der Gaußschen, noch der Student'schen Verteilung Multiplikationsfaktoren gewinnen kann, welche zur Aufstellung irgend eines Kriteriums bezüglich der Stabilität der Punkte geeignet wären. Für den Fall von einer kleinen Anzahl der überschüssigen Messungen wird die Meßgenauigkeit mit Hilfe der Gaußschen Faktoren überschätzt, und mittels der anderen allzu sehr unterschätzt. Deshalb empfehlen wir, die unter (11) bestimmten Fehlergrenzen als empirische Resultate vorzuziehen. Diese Werte ergeben sich z. B. für 2 überschüssige Messungen beim Vorwärtseinschnitt wie folgt:

$${}^{68,3\%} \overline{\mu_{P_1, P_2}} \leq \pm 1(\overline{\mu_{P_1, P_2}} + \mu_{\mu_{P_1, P_2}}) = \pm 1,5 \mu_{P_1, P_2} \quad (P = 68,3\%) \quad (13)$$

$${}^{99,5\%} \overline{\mu_{P_1, P_2}} \leq \pm 3,0(\overline{\mu_{P_1, P_2}} + \mu_{\mu_{P_1, P_2}}) = \pm 4,5 \mu_{P_1, P_2} \quad (P = 99,7\%).$$

Abschließend kann gesagt werden, daß wir als Kriterium die Erfüllung der folgenden Bedingung verlangen:

$${}^P t(\overline{\mu_{P_1, P_2}} + \mu_{\mu_{P_1, P_2}})_{emp} \geq ds. \quad (14)$$

Ist nämlich der aus den Koordinatenabweichungen errechnete Wert von ds im Sinne dieser Bedingung befriedigend (wobei der Wert ${}^P t_{emp}$, laut (11) den

verschiedenen Wahrscheinlichkeitswerten P entsprechend gebildet wird), so gilt die konstatierte Abweichung der Punktlage nicht als effektive Verschiebung, sondern nur als Ergebnis der Meßunsicherheiten. Wird aber dieser Grenzwert überschritten, so ist es wahrscheinlich, daß es sich hier um eine Verschiebung handelt. Nebenbei kann man dx , dy und ds gemäß Bild 4 in maßgerechter Skala graphisch ermitteln, und durch Auftragen der aus (13) erhaltenen Größe auf die Gerade von ds ist die Entscheidung graphisch sofort zu treffen.

Alle diese Überlegungen, sinngemäß angewendet, sind nicht nur für Punkteinschaltungen, sondern auch beim Polygonieren, beim Nivellieren und allen Messungen anderer Natur, gleichfalls gültig.

Die Frage steht noch offen, wie man den mittleren Fehler einer einmaligen Messung bzw. einer Messung vom Einheitsgewicht auf Grund der erhaltenen Meßresultate oder aber — gegebenenfalls — auf Grund der Ausgleichung bestimmen soll. Die Genauigkeit der mittleren Fehlerbestimmung ist nämlich von Belang sowohl für die fortgesetzte Fehleranalyse wie auch für die Verlässlichkeit einer Entscheidung über die Befriedigung des Kriteriums. Noch vor der Ausführung der Messungen ist es äußerst wichtig, vorteilhafte Umstände zu schaffen und die richtigen Meßeinrichtungen zu wählen, eben um die ansonst nicht leicht vermeidbaren regelmäßigen Fehlerquellen (Instrumentenfehler, Refraktionserscheinungen, Personalfehler des Beobachters usw.) auszuschalten. Wenn man z. B. zur Bestimmung desselben Punktes zwei Serien Winkelmessungen zu verschiedenen Zeitpunkten, doch unter ähnlichen Begleitumständen und mit Hilfe derselben Meßeinrichtung durchgeführt waren, und zwar bei n -facher Messung mit dem mittleren Meßfehler μ_I für den ersten Zeitpunkt bzw. μ_{II} für den zweiten Zeitpunkt, so liefert die Erfüllung der Bedingung:

$$\mu_I \doteq \mu_{II} \quad (15)$$

eine Berechtigung zur Voraussetzung, daß diesen Resultaten keine voneinander verschiedene systematische Fehler anhaften. Wenn die mittleren Winkelmeßfehler nahezu gleich sind, aber die errechneten Winkelmittelwerte von einander abweichen, so hängt es von dem Ausmaße der Abweichung ab, ob gegebenenfalls die Voraussetzung berechtigt sei, daß der zu bestimmende Punkt zwischen den zwei Zeitpunkten eine Verschiebung erlitt. Selbstredend, falls die Abweichung innerhalb der Grenzen des mittleren Fehlers liegt, so läßt sie sich auf Meßfehler zurückführen. Auch in diesem Falle dienen die Vertrauensintervalle zur Festlegung der sich auß Meßfehlern ergebenden zulässigen Winkelabweichungen für die Winkelmittelwerte:

$$\Delta\alpha = t\mu_I \sqrt{2} \quad (16)$$

wo $\Delta\alpha$ die zugelassene Winkelabweichung bedeutet, der Wert von t zweckmäßigerweise gleich 1 angenommen wird, und $\mu_I \doteq \mu_{II}$ der mittlere Fehler der

n -maligen Winkelmessung ist, der Multiplikator $\sqrt{2}$ ist notwendig und berechtigt, da in der Größe der errechneten Winkeldifferenz die Fehler beider Messungen mitspielen. Man kann nutzbringend auch Erfüllungsbedingungen mit anwenden, die sich auf die Winkelsumme eines Dreiecks oder irgend eines anderen Vielecks beziehen [11].

Wenn man nur eine einmalige mehrfach wiederholte Messung vornimmt, oder wenn man eine Beobachtung mit dem Einheitsgewicht durchführt, so muß man zur Bestimmung des mittleren Fehlers unbedingt alle Meßresultate mit in Rechnung ziehen. Unter Berücksichtigung der Anzahl der Wiederholung werden die Streuungen einzelner Messungen nicht in Betracht gezogen, und dies kann die Bildung der mittleren Fehler günstig beeinflussen [12]. Man soll sowohl im Falle einer Ausgleichung, wie auch in dem Falle ohne Ausgleichung zur Berechnung der mittleren Fehler immer die auf die ursprünglichen Messungen bezogenen Verbesserungen anbringen. Dies dient zu einer Verbesserung der Gültigkeit des Gaußschen Prinzips. Wenn wir nämlich an einem Instrumenten-Standpunkt die Messungen nacheinander sehr oft wiederholt durchführen und die Mittelwerte berechnen, und nachher noch das gesamte Meß- und Rechnungsverfahren öfters wiederholen, so müssen die Mittelwerte jeder einzelner Gruppe nahezu gleich sein, vorausgesetzt, daß keine systematische Abweichung (Meßfehler, oder Verschiebung) mitspielt. In einem solchen Fall, mit einer äußerst kleinen Abweichung der Mittelwerte voneinander, ergeben sich auch die besten mittleren Fehlerwerte. Wenn aber die Mittelwert-Abweichung größer ist, so folgt daraus das Vorhandensein von regelmäßigen Veränderungen. Für diese aber verliert die Gaußsche Verteilung ihre Geltung; zur Bestimmung der regelmäßigen Veränderungen muß ein anderer Weg eingeschlagen werden. Nach der in [11] besprochenen Methode sind wir in der Lage, im Wege einer globalen Auswertung der zeitweise wiederholten Messungen auch die mittleren systematischen Fehler der Winkelwerte zu bestimmen, aus welchen eine Vor-Information auf die Größe der mittleren Verschiebung der Punkte gewonnen werden kann.

Aus den oben Gesagten folgt, daß bei den auf die Bewegungs-Umstände (Verschiebungen) von Bauobjekten bezüglichen geodätischen und markscheiderrischen Untersuchungen eine Reihe von neuen Fragen zu lösen ist. Nicht gesprochen von der Notwendigkeit, die Meßoperationen räumlich und zeitlich mit besonderer Sorgfalt vorzubereiten, ist es unerlässlich, zur Bestimmung der Bewegungsparameter nur mathematisch auf sicherer Grundlage aufgebaute Auswertungsverfahren anzuwenden. Wenn solche Grundlagen nicht vorhanden sind, so können gegebenenfalls die daraus gezogenen Folgerungen zu irrtümlichen Resultaten führen.

SCHRIFTTUM

1. HOVÁNYI, L.: Bányaméréstan (Markscheidekunde) II. Egyetemi jegyzet. 1962.
2. KONRÁD, Ö.: Irányelvek a bányaműveletekkel kapcsolatos kőzetmozgások bányamérési eljárással történő megfigyelésére (Leitprinzipien zur Beobachtung von durch abbautechnische Ursachen hervorgerufenen Gesteinverschiebungen im Wege markscheiderischen Messungen). *Bányászati Lapok*, 1951/12.
3. HOVÁNYI, L.: Bányaműveletekkel kapcsolatos kőzetmozgások bányamérési eljárással történő megfigyelése (Beobachtung von durch abbautechnische Ursachen hervorgerufenen Gesteinverschiebungen im Wege markscheiderischen Messungen). *Bányászati Lapok*, 1959/12.
4. TÁRCZY—HORNOCH, A.: Zur Berechnung der mittleren Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschnitt. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1957/11 (bzw. in ung. Sprache, *MTA VI. Osz. Közl.*, XXIV (1959).
5. SÜTTI, J.: Kritérium na stabilnost' polohy bodov. *Geodetický a Kartografický obzor*, 1963/9.
6. TÁRCZY—HORNOCH, A.: A középhiba-ellipszis talpponti görbéjének egyszerű megszerkesztése (Einfache Methode zur Konstruktion der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse). *Geodézia és Kartográfia*, 1960/3.
7. HALMOS, F.: A középhibaellipszis talpponti görbéjének megszerkesztése egyszerű ívmetszésnél (Konstruktion der Fußkurve der mittleren Fehlerellipse beim einfachen Bogen-schnitt) *Geodézia és Kartográfia* 1963. 2. különszám und *Acta Techn. Hung.* 45 (1964).
8. MILASOVSKY, B.: A hibaellipszis és annak talpponti görbéjét helyettesítő kördiagram. (Kreisdiagramm als Substitution der Fehlerellipse und deren Fußkurve.) *MTA VI. Osz. Közl.* XXIX (1961).
9. GOTTHARD, E.: Geometrische Konstruktion zur Fehlerellipse. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1943.
10. HOMORÓDI, L.: A hibaellipszis és a ponthiba (Die Fehlerellipse und der Punktfehler). *Geodézia és Kartográfia*, 1956/1.
11. HALMOS, F.: Mérési eredmények kiértékelésének pontossági és gazdaságossági vizsgálata (Genauigkeits- und Wirtschaftlichkeits-analyse der Auswertung von Meßresultaten). 1962. Dissertation für Kandidatur.
12. TÁRCZY—HORNOCH, A.: A mérési javítások segítségével történő középhibaszámitásról és az észlelt értékek függvényéhez tartozó javítási egyenletek használatáról (Über die Berechnung des mittleren Fehlers mit Hilfe von Meßkorrekturen und die Anwendung der zu den Funktionen der beobachteten Werte gehörenden Verbesserungsgleichungen). *Geodézia és Kartográfia* 1958/2.

DETERMINATION OF THE DISPLACEMENT OF CERTAIN POINTS
BY MEASUREMENTS, THE CRITERIA OF THEIR STABILITY

F. HALMOS

SUMMARY

In this paper, the geodetic and subterranean surveying methods are dealt with, that serve to investigate displacements arising in the course of the construction of building works. In this scope of investigation are included the right arrangement of measurements, the mathematical problems of the evaluation of results when measurements are reproduced. An analysis of accuracy is given and criteria of the stability of the points are established. Author deduces a simple method to determine by graphical means the average error and the displacement of a point at any chosen direction. This method is proved as satisfactory on the basis of the theory of errors. In connection with the establishment of stability criteria, empirical ways and means are shown that are decisive for the problem of stability. Finally, the sources of measuring errors are examined and some principles are shown in relation to the calculation of the mean error.

DÉTERMINATION PAR MESURAGES DU DÉPLACEMENT DES POINTS
ET CRITÈRES DE LEUR STABILITÉ

F. HALMOS

RÉSUMÉ

L'auteur expose les méthodes de mesurages géodésiques et minières utilisées pour l'étude des déplacements produits au cours de la construction d'ouvrages techniques. Il étudie la disposition des mesurages et le problème de l'analyse mathématique des résultats de mesurages réitérés, effectue l'analyse de la précision et établit les critères de la stabilité des points. Il présente une méthode graphique simple pour la détermination de l'erreur moyenne et des déplacements du point en toute direction choisie. L'auteur donne ensuite les critères de la stabilité des points et déduit des relations empiriques permettant de déterminer cette dernière. Il étudie enfin les sources d'erreur à envisager et s'étend sur quelques points de vue importants du calcul de l'erreur moyenne.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СМЕЩЕНИЙ ПУНКТОВ ПОСРЕДСТВОМ ИЗМЕРЕНИЙ
И О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ПУНКТОВ

Ф. ХАЛЬМОШ

РЕЗЮМЕ

В статье описываются геодезические и горнотехнические методы изучения смещений технических сооружений. Рассматривается схема измерений, обсуждается вопрос математической обработки результатов повторных измерений, дается оценка точности измерений и определяются критерии устойчивости пунктов. Предлагается простой метод построения для определения средней погрешности пункта в любом направлении, следовательно и для определения смещения. Приводится подтверждение теории погрешности для данного метода. В дальнейшей части работы описываются критерии устойчивости пунктов и приводятся эмпирические соотношения для решения вопроса об устойчивости пункта. В заключение рассматриваются источники погрешностей измерений и обсуждаются некоторые основные вопросы по вычислению средних погрешностей.

BEMERKUNGEN ZU A. TÁRCZY-HORNOCH UND G. ALPÁR: ZUR GENAUEN BESTIMMUNG KLEINER NEIGUNGSWINKEL MITTELS SEKUNDENLIBELLEN

M. SCHÄDLICH

LEIPZIG

[Eingegangen am 15. Februar 1965]

Es wird die in [1] dargelegte Konzeption bezüglich der Eichung der Skalen von Sekundenlibellen mittels Hinweise auf grundsätzliche Gegebenheiten theoretischer und praktischer Natur widerlegt.

Im Heft 3—4/1964 der vorliegenden Zeitschrift [1] nahmen die beiden genannten Autoren zu einer von mir in [2] erschienenen zusammenfassenden Betrachtung über die Rolle der »Prüfung« von Sekundenlibellen in der geodätisch-astronomischen Ortbestimmung hoher Genauigkeit Stellung. Dabei wurde erneut das schon in den Arbeiten [3, 4] zum Ausdruck kommende Hauptanliegen der beiden Autoren betont, daß es die relativ wenigen, den Kriterien von Wanach [5] bezüglich Konstanz des Parswertes genügenden Sekundenlibellen nahelegen, die Einsatzfähigkeit der letzteren durch eine relativ aufwendige Skaleneichung zu erhöhen. Diese Konzeption stieß in [2] wegen der generellen Vernachlässigung der Benutzungsprinzipien für Sekundenlibellen bei genauen astronomischen Ortsbestimmungen und der Unterschiede zwischen den Feld- und Laborbedingungen (Temperaturgradienten) auf Widerspruch. Es wurde u. a. darauf hingewiesen, daß ein nennenswerter Genauigkeitsgewinn gegenüber dem bedeutend weniger aufwendigen Prüfverfahren von Brein [6] auch bei Benutzung von »mittelmäßigen« Libellen für die Ergebnisse der Orts- und Azimutbestimmung nicht zu erwarten ist. Da die Autoren von [1] den die Vorteile der Breinschen Methode unterstreichenden fehlertheoretischen Teil in [2] überhaupt nicht erwähnten, sei es erlaubt, die Sachlage an dieser Stelle mit wenigen Sätzen zu konkretisieren.

Ein Fehler der Neigung

$$i = \int_{l_0}^1 p(l) dl \quad (1)$$

der Index-, Horrebow- bzw. Hängelibelle eines Theodolits oder Passageinstruments hat den folgenden Einfluß auf die gemessene Zenitdistanz z , den Stundenwinkel t und das Azimut a :

$$dz(i) = di,$$

$$|dt(i)| = |i| \sec \delta \cos z > |i|, \quad (z < \delta)$$

$$|da(i)| = |i| \cot z \cong |i|, \quad (z \approx 90 - \varphi) \quad (2)$$

wenn p den zur Blasenlänge null gehörigen Parswert (Libellenangabe), l den Blasenausschlag (Abweichung der Blasenmitte vom Normalpunkt l_0 der Skala) und δ die Deklination des Gestirns bedeuten. Das »klassische« Verfahren der Approximation von (1) beinhaltet nun, daß es unter gewissen Voraussetzungen hinsichtlich der Krümmungsunterschiede der Blasenauflfläche genügt, die Funktion $p(l)$ durch eine geeignete, aus Messungen mit mittleren Blasenlängen abzuleitende Konstante \bar{p} zu ersetzen. Die hierzu gemachten Vorschläge, u. a. in [5, 6, 7], beinhalten alle den Ersatz des durch die endlichen Blasenlängen erhaltenen geglätteten Krümmungsverlaufs $p'(l)$ durch eine Gerade mittels Ausgleichung.

Daß bei genauen astronomischen Beobachtungen an die benutzten Libellen hohe Anforderungen zu stellen sind, ist aus (2) ersichtlich. WANACH versuchte deshalb die Libellen hinsichtlich ihrer Güte zu klassifizieren. Die Folge war, daß der größere Teil der geprüften Libellen »zur Rechnung mit durchschnittlichem Parswert ungeeignet« ist [1, S. 398]. Die Autoren von [1] meinen deshalb, das Problem variieren und die »Libellenprüfung« durch eine Skaleneichung ersetzen zu müssen. Wir werden nachstehend erläutern, daß hierzu (ganz abgesehen von den unkontrollierbaren thermischen Einflüssen) im allgemeinen kein Grund besteht, wenn man nur die »klassische« Konzeption hinsichtlich des Meßbereichs genügend modifiziert.

Innerhalb eines geeignet abzugrenzenden Intervalles ($-5 < l - l_0 < 5$) sei der zugehörige mittlere Parswert p_m nach dem Verfahren HIRVONEN oder BREIN approximiert (\bar{p}). Es gilt dann offenbar innerhalb des bezeichneten Intervalles

$$i \approx \bar{p} \int_{l_0}^l dl = \bar{p}(l - l_0) \quad (3)$$

bzw. für den Fehler in (3)

$$di \approx \bar{p}dl + (l - l_0)d\bar{p} = di_1 + di_2. \quad (4)$$

Gleichung (4) bildet die Grundlage für alle Betrachtungen, die mit der erforderlichen Qualität und der zweckmäßigen Anwendung einer Röhrenlibelle zusammenhängen. Sie besagt u. a., daß den möglichen Blasenstellungen ein mit steigenden Werten $l - l_0$ abnehmendes Gewicht zukommt, d. h. der Beobachter muß die Neigungen so klein wie möglich halten. Dieser einfache Tatbestand wurde u. W. im Zusammenhang mit unserem Problem nicht immer genügend beachtet.

Bezüglich (4) ist zu fordern, daß der Fehler di_2 den Einfluß di_1 des Fehlers der visuellen Ablesungen im Mittel nicht nennenswert überschreitet ($|di_1| = = 0'',1 - 0'',2$). Die daraus folgenden Werte für $l - l_0$ und $d\bar{p}$ bedeuten dann eine mittlere Amplitude der zulässigen Blasenausschläge bzw. eine mittlere zulässige Abweichung zwischen dem tatsächlichen und dem mittleren Pars-

wert innerhalb des bezeichneten Skalenintervalls. Bei sorgfältiger Libellenjustierung kann man einem geübten Beobachter (auch auf Feldstationen) zumuten, daß er mit »mittleren« Amplituden $|l - l_0| \lesssim 1$ Skaleneinheit arbeitet (siehe auch [8]). Daraus folgt

$$|d\bar{p}| \gtrsim 0'',1 \approx p/10. \quad (5)$$

Dem Zusammenhang zwischen den Krümmungsunregelmäßigkeiten und dem zulässigen Meßbereich trägt das Prüfverfahren von BREIN gegenüber den anderen Methoden noch am meisten Rechnung. Zu ergänzen wäre nur, daß der eingengegte Meßbereich wegen (4) möglichst symmetrisch zum Normalpunkt l_0 angeordnet wird. Es interessiert dann lediglich der (geglättete) Funktionsverlauf $p'(l)$ innerhalb dieses Intervalles, wie auch letzten Endes unter den formulierten Bedingungen allein der bei wiederholten Beobachtungen von z , t , a zu erwartende systematische Resteinfluß der di auf φ , λ und a von Interesse ist. Letzterer dürfte empirisch nur schwer nachweisbar sein. Dies bedeutet aber noch nicht, daß die Sekundenlibellen für genaue astronomische Orts- und Azimutbestimmungen grundsätzlich geeignet sind, da den Wanachschen Kriterien innerhalb des angegebenen Meßbereichs nach wie vor eine gewisse Bedeutung zukommt. Dagegen besagt die in [1], S. 397 gemachte Fehlerangabe $di = 1'',5$ nichts, solange nicht das zugehörige $l - l_0$ genannt wird. Damit verschwindet auch der angebliche »grundlegende Widerspruch« der Ausführungen in [2]. Ebenso nichtssagend ist die auf S. 399 gemachte Bemerkung, daß eine Parswertdifferenz von $0'',03$ »garnicht zu vernachlässigen ist«, solange nicht die Signifikanz dieses Wertes getestet und der Meßbereich abgegrenzt ist.

Die obigen Fehlerbetrachtungen sind natürlich unvollständig, sie machen aber den durch (4) gegebenen straffen Zusammenhang zwischen dem Fehler di und dem zweckmäßigen Gebrauch der Libelle deutlich. Bei letzterem bedeutet eine Skaleneichung im Sinne von TÁRCZY-HORNOCH einen kaum Gewinn versprechenden Aufwand, selbst wenn sich dafür eine fehlertheoretisch einwandfreie Methode formulieren ließe und die Temperatureffekte während der astronomischen Beobachtungen unbeachtet bleiben.

SCHRIFTTUM

1. TÁRCZY-HORNOCH, A. u. ALPÁR, GY.: Zur genauen Bestimmung kleiner Neigungswinkel mittels Sekundenlibellen. *Acta Techn. Hung.* 47 (1964), 397.
2. SCHÄDLICH, M.: Bemerkungen zur Messung kleiner Neigungen mittels Sekundenlibellen. *Verm.-Technik*, 1962, S. 212.
3. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Ergebnisse der mehrjährigen Prüfungen von Sekundenlibellen. *Annales Acad. Scient. Fennicae*, Serie A, III, Helsinki 1961.
4. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Messung mit Sekundenlibellen. *Verm.-Technik*, 1961, S. 363.
5. WANACH, B.: Untersuchungen von Sekundenlibellen. *Zeitschrift f. Instr. Kde*, 1926, S. 221.
6. BREIN, R.: Beitrag zur Libellenprüfung. *Veröffentlichung d. Deutschen Geod. Kommission, Reihe B, Heft 21*, Frankfurt (Main) 1954.
7. HIRVONEN, R. A.: Bestimmung der Libellenempfindlichkeit. . . *Zeitschr. f. Verm.-Wesen*, 1950, S. 137.
8. SIGL, R.: Über die Beobachtung genauer astronomischer Längen. *Veröffentlchg. der Deutschen Geod. Kommission, Reihe C, Heft 41, S. 8*, München 1960.

REMARKS TO THE PAPER "ON THE DETERMINATION OF SMALL SLOPE ANGLES BY USING A SECOND-SPIRIT LEVEL" BY A. TÁRCZY-HORNOCH AND G. ALPÁR

M. SCHÄDLICH

SUMMARY

The author — referring to fundamentals of principle and practice — disproves the correctness of the procedures published in the study [1] for the calibration of the division (scale) of one-second spirit levels.

REMARQUES SUR L'ARTICLE DE A. TÁRCZY-HORNOCH ET G. ALPÁR, INTITULÉ: «DE LA DÉTERMINATION EXACTE DE PETITS ANGLES D'INCLINAISON AU MOYEN DE NIVEAUX DE HAUTE PRÉCISION»

M. SCHÄDLICH

RÉSUMÉ

L'auteur se basant sur des données théoriques et pratiques fondamentales, conteste la justesse du procédé préconisé par l'étude [1] pour l'étalonnage de la division (graduation) des niveaux de haute précision.

ПРИМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ А. ТАРЦИ-ГОРНОХ И Г. АЛЬПАР «К ТОЧНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕБОЛЬШИХ УГЛОВ НАКЛОНА С ПОМОЩЬЮ УРОВНЯ С ОТВЕСОМ, ИМЕЮЩИМ СЕКУНДНОЕ ДЕЛЕНИЕ»

М. ШЕДЛИХ

РЕЗЮМЕ

Исходя из основных теоретических и практических соображений, автор опровергает правильность метода, предложенного в работе [1] для юстировки деления шкалы уровня с секундным делением.

ZUR BESTIMMUNG UND GENAUIGKEIT DER MIT DEN SEKUNDENLIBELLEN GEMESSENEN NEIGUNGSWINKEL

A. TÁRCZY-HORNOCH und GY. ALPÁR

[Eingegangen am 11. Mai 1965]

Unser in [3] vertretener und in der Geodäsie bestehender grundsätzlicher Standpunkt, daß man einen ausmerzbaeren größeren Fehler als der angestrebte auch dann eliminiert, wenn man andere noch nicht erfassen kann, wird in den Bemerkungen SCHÄDLICH [4] nicht behandelt und widerlegt. Wir beharren deshalb weiterhin darauf.

Die in den Schädlich'schen Bemerkungen angeführte Gl(4) gilt nur für differentiale Blasenbewegungen und nicht mehr für Blasenbewegungen auch von nur sehr wenig Parseinheiten, da in Bezug auf den durchschnittlichen Parswert des gewählten begrenzten Bereiches aus der Eigenschaft des Mittelwertes folgend die Abweichungen $d\bar{p}$ teils positiv, teils negativ sein müssen. Da SCHÄDLICH in Gl. (4) sogar bei einem Bereich von 10 Parseinheiten für $d\bar{p}$ das gleiche Vorzeichen annahm, hat seine auch in diesem Fall verwendete Gl. (4), die Grundlage aller seiner Betrachtungen, nicht zutreffende Voraussetzungen. Dies wird u. a. auch durch eigene konkrete Meßergebnisse bewiesen.

Nicht zutreffend ist auch jene Bemerkung, die unsere Eichung als relativ aufwendig bezeichnet, da eine angemessene Begrenzung des Meßbereiches wir bereits in [1; S. 370] empfohlen haben, und dies führt naturgemäß zu einer wesentlichen Herabsetzung der Rechenarbeit. Dabei ist unser Verfahren bis jetzt die erste und einzige, die die Berücksichtigung der Einflüsse der Krümmungsfehler der Sekundenlibellen auch bei verschiedenen Blasenlängen ermöglicht, wofür SCHÄDLICH keine Lösung angibt.

In Verbindung mit der Prüfung der Sekundenlibellen haben wir in der Studie [1] die Bestimmung der zu den einzelnen Teilstrichen gehörigen Winkelwerte vorgeschlagen. SCHÄDLICH (im folgenden kurz mit SCH. bezeichnet) empfiehlt in [2] auch weiterhin die durchschnittlichen Libellenparswerte zu verwenden. Auf diese Arbeit nimmt Bezug unsere Studie [3], worauf SCH. in seinen Bemerkungen [4] wieder gegen unsere Methode und gegen die auf der Verwendung von Eichkurven beruhenden Methoden allgemein Stellung nimmt und die Verwendung der einfacheren Brein'schen Methode empfiehlt. Auf die neueren SCH'schen Bemerkungen wollen wir im folgenden antworten, wobei wir die wichtigsten Fragen auch von anderen Seiten beleuchten wollen.

1. SCH. schrieb in seiner Studie [2] (S. 213) wörtlich folgendes: »Die nachstehenden zusammenfassenden Bemerkungen zum Gesamtproblem der Messung kleiner Neigungen mittels Sekundenlibellen sollen zeigen, daß aus verschiedenen Gründen, *die im wesentlichen mit der Wirkung der vernachlässigten Temperaturverteilung im Libellenkörper plus Metallfassung während der Beobachtungen zusammenhängen*, ein maximaler Aufwand bei der Eichung von Sekundenlibellen unter Laborbedingungen nicht vertretbar ist.« (Kursiv

von uns.) Auf die Behandlung der Temperatureinflüsse als Antwort darauf sind wir auf S. 400—404 unserer Abhandlung [3] ausführlicher eingegangen, nachdem zuvor schon auf S. 398 als unser grundsätzlicher Standpunkt festgestellt wurde: es kann jene Methode nicht richtig sein, welche einen größeren als bei der erforderlichen Genauigkeit noch tragbaren und dabei ausmerzba- ren Fehler nur deshalb beläßt, weil man andere Fehler noch nicht erfassen kann; wir berücksichtigen ja z. B. das Run bei den Mikroskopen auch dann, wenn man die (merklich größere) Seitenrefraktion nicht unschädlich machen kann. Wir können hierfür natürlich auch andere Beispiele anführen, wie die sehr genaue Berechnung der Aligment-, Neigungs- und Dehnungskorrek- tionen bei den Invardrähten, obwohl der Fehler in der Temperaturbestimmung merklich größere Fehler verursachen kann usw. Auch hier hat es mehrere Jahre gedauert, bis unser, gemeinsam mit ESZTÓ gemachter Vorschlag, den Einfluß des mit dem Höhenunterschied sich verkleinernden Kettenlinienpara- meters zu berücksichtigen, allgemein anerkannt wurde. Vor drei Jahren gab de- mentsprechend nunmehr auch das Institut für Angewandte Geodäsie in Frank- furt am Main Berichtigungstabellen zu dem Gigasschen Handbuch für die Verwendung von Invardrähten bei Grundlinienmessungen aus (Vgl. [11; S. 27]).

SCH. hat in seinen Bemerkungen [4] die Richtigkeit weder dieses grund- sätzlichen Standpunktes, noch jene unserer Erörterungen über die Temperatur- einflüsse angezweifelt (die ohne Beweise angeführte kurze Bemerkung im letzten Absatz ist keine Widerlegung!), obwohl darin auch auf zwei unrichtige Fest- stellungen in seiner Abhandlung [2] hingewiesen wurde (vgl. [3; S. 403 u. 404]). Wir können deshalb auf Grund der in [3] angegebenen und in [4] nicht angezweifelten Argumentation feststellen: *Bei der Winkelbestimmung mit Sekundenlibellen macht es die Vernachlässigung der vorläufig noch schwer bestimm- baren Temperatureinflüsse nicht gerechtfertigt, daß man die genau bestimm- baren Einflüsse der Krümmungsfehler, die größer als die durch die gewünschte Genauigkeit noch zulässigen sind, vernachlässigt.*

2. SCH. bemängelt in seinen Bemerkungen [4], daß wir in unserer Studie [3] seinen in [2] enthaltenen, auf die Winkelbestimmung mit Sekundenlibellen sich beziehenden fehlertheoretischen Teil überhaupt nicht erwähnt haben, aus dem er auf [2; S. 212] zu dem Ergebnis gelangte: »Die Blasenauerschläge l sind demnach möglichst klein zu halten.« Wir haben keinen Grund gehabt, gegen diese SCH.'sche Feststellung Stellung zu nehmen, zumal wir wohl aus anderen Gründen, aber jedenfalls noch vor SCH. gleichfalls festgestellt haben: »Um auch mit einfacheren Rechenhilfsmitteln die Berechnung zu beschleunigen, kann so vorgegangen werden, daß man den Meßbereich an der Libellenskale noch enger zieht.« und: »Durch die Verkleinerung des Anschmiegungsbereiches der mathematischen Funktion an die beobachteten bzw. hergeleiteten Werte wird übrigens auch die Genauigkeit der Anschmiegun- g gesteigert.« [1; S. 370.]

Wir wollen zuerst nur den Fall mit gleich lang bleibenden Blasen behandeln, weil SCH. nur diesen Fall untersuchte, obwohl sich die Blasenlänge bekanntlich während der Messung auch um einige Parseinheiten ändern kann.

Es sei zunächst hervorgehoben, daß die in [2] unter Gl. (5) bzw. in [4] unter Gl. (4) angegebene Fehlergleichung

$$di = \bar{p}dl + (l - l_0) d\bar{p}$$

— wobei di den Fehler in der Neigung, dl jenen in der Ablesung der Libelle und $d\bar{p}$ den Fehler des durchschnittlichen Parswertes (innerhalb des abgegrenzten Bereiches) bedeuten — nur für differentiale Blasenbewegung unbeschränkte Gültigkeit hat. Der größte Teil des Fehlers $d\bar{p}$ hat überhaupt nicht den Charakter eines zufälligen Fehlers, sondern er ist in Abhängigkeit von der in Frage stehenden Libelle an ganz bestimmten (und bestimmbaren) Stellen positiv und an anderen negativ. Wir können deshalb von fehlertheoretischem Standpunkt nur jene kleine Blasenbewegungen als differential betrachten, während welcher $d\bar{p}$ seine Größe, hauptsächlich aber sein Vorzeichen nicht ändert. Wir werden später sehen, daß selbst bei einer sehr guten Libelle schon innerhalb von einigen Parseinheiten die Größe von $d\bar{p}$ sich ganz bedeutend, bis 60% ändern kann. Daß sich das Vorzeichen auch bei einem enger abgegrenzten Bereich ändern muß, folgt aus dem Umstand, daß die Abweichungen von dessen durchschnittlichem Parswert zwangsläufig teils positiv, teils negativ sein müssen. Daraus folgt aber auch, daß man bei einem dem abgegrenzten Bereich entsprechenden Ausschlag — ganz unabhängig von dessen Größe — mit dem zu diesem Bereich gehörigen durchschnittlichen Parswert, den von den $d\bar{p}$ -Fehlern freien Neigungswinkel erhält. Es kann daher nicht richtig sein, daß SCH. innerhalb des von ihm mit 10 Parseinheiten abgegrenzten, zum Normalpunkt symmetrischen Bereich für alle $d\bar{p}$ -Fehler das gleiche Vorzeichen und die gleiche Größe voraussetzt. Mithin ist die von ihm als »Grundlage« seiner Betrachtungen genannte Beziehung in der von ihm in der angegebenen Weise benützten Form nicht verwendbar. Aus den erwähnten Gründen können die $d\bar{p}$ -Fehler auch als zufällige Meßfehler nicht behandelt und zusammengesetzt werden, weil der größere Teil davon ist es nicht, sondern sie sind von der Krümmung des Libellenkörpers und von der Blasenlänge gesetzmäßig abhängige regelmäßige Fehler mit bestimmbaren Vorzeichen. Ihre Zusammensetzung kann daher nur unter Berücksichtigung dieser bestimmbaren Gesetzmäßigkeiten erfolgen, und dies kann zur Folge haben, daß der Fehlereinfluß di mit zunehmenden Libellenausschlag ($l - l_0$) sich dem absoluten Werte nach auch verkleinern kann, wie wir dies in dem zahlenmäßigen Beispiel der Libelle 04 noch sehen werden.

So kann man mit der der SCH.'-schen Gl. (4) in [4] entsprechenden, hier vorher angeführten Gleichung auch die von SCH. daran angeknüpfte Behauptung

tung nicht rechtfertigen, wonach: »Sie (nämlich Gl. (4)) besagt u. a., daß den möglichen Blasenstellungen ein mit steigenden Werten $(l - l_0)$ abnehmendes Gewicht zukommt, d. h., der Beobachter muß die Neigungen so klein wie möglich halten.« Dies würde nur dann zutreffen, wenn die $d\bar{p}$ -Fehler zufällige Meßfehler wären, auf die das bekannte Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet werden könnte.* Aber die Anwendbarkeit des Fehlerfortpflanzungsgesetzes behauptet auch SCH. nicht.

* Die »zufälligen Fehler« bedeuten hier vornehmlich die Ablesefehler der Blase. Denn nicht nur die Krümmungsfehlereinflüsse, sondern auch die der Teilungsfehler haben bei demselben Intervall systematischen Charakter. Der Einfluß der Teilungsfehler ist dann in der Regel von untergeordneter Bedeutung.

Bei der Herleitung der Beziehungen für die Annahme von nur zufälligen Fehlern wollen wir zwei Fälle unterscheiden.

a) Wir bestimmen die einzelnen Parswerte des gewählten Bereiches *unabhängig* voneinander einzeln und bilden daraus den durchschnittlichen Parswert. Bei nur zufälligen Fehlern kann auch diese Methode gerechtfertigt erscheinen.

Bezeichnen wir den mittleren zufälligen Fehler der Bestimmung des Blasenendes mit $\pm \mu_b$, so wird bei Ablesung an beiden Enden der mittlere Fehler eines Parswertes $\mu_P = \pm \mu_b \sqrt{4}$ und in diesem Falle jener des arithmetischen Mittels aus n Parswerten:

$$\mu_P = \pm \frac{2 \mu_b}{\sqrt{n}}$$

Wird damit der mittlere Fehler eines Ausschlages von l Parseinheiten bestimmt, so erhalten wir hierfür (unter Berücksichtigung, daß im Neigungswinkel $N = pl$ der durchschnittliche Parswert p bei jeder Parseinheit eigene zufällige Fehler hat und daher es sich hier um eine l -malige *Addition* handelt):

$$\mu_N = \pm 2 \mu_b \sqrt{\frac{l}{n}}$$

b) Wird dagegen der durchschnittliche Parswert des Bereiches mit n Parseinheiten nur aus der ersten und letzten Ablesung der Blase bestimmt, so wird μ_P in diesem Falle:

$$\mu_P = \pm \frac{2 \mu_b}{n}$$

und so μ_N (da es sich hier nicht um die Addition der einzelnen Parswerte handelt):

$$\mu_N = \pm 2 \mu_b \frac{l}{n}$$

Der Unterschied zwischen beiden ähnelt dem Unterschied zwischen den mittleren Fehlern des Mittels der wiederholten Einzelwinkelmessungen und jenen der Repetitionswinkelmessung. Die zweite Methode ist günstiger.

Bei reinen zufälligen Messfehlern würde der mittlere Fehler der berechneten Neigung in beiden angenommenen Fällen wohl mit dem Ausschlag zunehmen, doch man erhielte hier den kleinsten mittleren Fehler beim *größtmöglich* gewählten Bereich, also beim *größtmöglichen* n für die Bestimmung des durchschnittlichen Parswertes. Wären daher keine Krümmungsfehler vorhanden, so müßte man zur Bestimmung des durchschnittlichen Parswertes die ganze Skala benützen, um den Einfluß der zufälligen Fehler bei der Bestimmung des Ausschlages zum kleinsten zu machen. Den Einfluß der Krümmungsfehler kann man daher anschaulich im Vergleich zu dem so ermittelten durchschnittlichen Parswert darstellen. Deshalb bezogen sich auch unsere in den früheren Veröffentlichungen angegebenen Krümmungsfehler auf diesen Bereich.

Erfahrungsgemäß überwiegen aber die regelmäßigen Fehler ganz bedeutend. In diesem Falle müssen entweder ihre Größen und Vorzeichen bestimmt werden und die Fehlerzusammensetzung kann nur mit deren Hilfe erfolgen, oder aber man bestimmt nach unserem Verfahren die den einzelnen Teilungsstrichen zukommenden Winkelwerte und rechnet unmittelbar mit diesen den Neigungswinkel, dessen mittlere Fehler nur eine Funktion der zur Berechnung verwendeten — allerdings voneinander nicht unabhängigen — Teilstrichwerte ist.

Der von SCH. durch die allzu enge Abgrenzung des Meßbereiches erhoffte Vorteil wird auch durch die Feststellung von BREIN in Frage gestellt, den SCH. — allerdings nicht in dieser Beziehung — wiederholt zitiert. Nach BREIN [5; S. 17]: »Die volle Größe der Abweichung Δy (d. h. die Abweichung der mit durchschnittlichem Parswert gerechneten Blasenlage von der wirklichen), mithin auch die des Krümmungsfehlers, wird in der Regel in einem Bereich von 2—5 Pars erreicht, d. h., daß bei Blasenwanderungen kleiner als 2 Pars der mittlere systematische Fehler kleiner, *bei großen bis zu den größtmöglichen Blasenwanderungen aber gleich einem mittleren Krümmungsfehler wird.*« (Die Kursive stammt von uns.) GIGAS schreibt bezüglich der differentialen Krümmungsfehler folgendes [6; S. 29]: »Es handelt sich dabei um Beträge von etwa 0,5—3,0 Sekunden und die Unregelmäßigkeiten erstrecken sich auf einen Bereich von etwa $4/100$ Pars.« Wir erwähnen nur noch WYSS, der in [7; S. 157] erklärte: »Der mittlere Fehler einer Schiefe ist daher *nicht abhängig von deren Größe* im Gegensatz zur Auswertung nach der Formel (1).« (Kursiv von uns.) Die fragliche Formel (1) von WYSS lautet (N = Neigungswinkel, l_1 und l_2 die den Blasenmitten entsprechenden Skalenwerte):

$$N = p(l_2 - l_1) .$$

Nachdem SCH. auf alle vorher erwähnten Publikationen (allerdings nicht auf die von uns zitierten Teile) in seinen Veröffentlichungen [2] und [4] sich berufen hat, so muß er diese Feststellungen kennen. Weil er aber in seinen erwähnten Arbeiten keinen Versuch gemacht hat, diese zu widerlegen, sondern diese — wenigstens stillschweigend — hinnahm, so erscheint seine im vorletzten Absatz von [4] gemachte Bemerkung als gekünstelter Einwand, wonach: »Dagegen besagt die in [1; S. 397] gemachte Fehlerangabe $di = 1,5''$ nichts, solange nicht das zugehörige $(l - l_0)$ genannt wird.« Ähnliches gilt für seine, zwei Zeilen weiter geschriebene Kritik: »Ebenso nichtssagend ist die auf S. 399 (der Studie [3]) gemachte Bemerkung, daß eine Parswertdifferenz von $0,03''$ garnicht zu vernachlässigen ist, solange nicht die Signifikanz dieses Wertes getestet und der Meßbereich abgegrenzt ist.« Diesbezüglich berufen wir uns wieder auf den von SCH. wiederholt anerkennend zitierten BREIN, der in [5; S. 18] den viel kleineren Unterschied von $0,008/\sqrt{2}$ Pars, also bei Sekundenlibellen etwa $0,013''$ zwischen den nach den Methoden von JORDAN und HIRVONEN berechneten Einflüssen der mittleren Krümmungsfehler bereits als »von Bedeutung« bezeichnet hat.

In den vorangehenden haben wir uns absichtlich zunächst auf von SCH. zitierte Autoren berufen. Wir selbst haben im Laufe unserer, seit mehr als 10 Jahren dauernden Libellenuntersuchungen natürlich auch unsere, mit den vorherigen ziemlich im Einklang stehenden eigenen Erfahrungen. Um nicht allzu lang zu sein, wollen wir von der in [1] bereits erwähnten und als die beste

bezeichneten Achsenlibelle 04 folgende paar Daten aus Mai 1959 mitteilen. Zu den vier aufeinander folgenden Parseinheiten von 2 mm in der Mitte der Libelle gehören aus den viermal wiederholten Originalmessungen berechnet folgende individuelle Parswerte (in Klammern stehen die durchschnittlichen Parswerte für diesen Bereich):

Bei der Blasenlänge von 40 Parseinheiten:

1,11", 1,25", 0,91", 1,46" (1,18"),

bei der Blasenlänge von 45 Parseinheiten:

1,11", 1,34", 1,11", 1,27" (1,21").

Wir ersehen daraus zunächst auch hier, daß die regelmäßige Winkelfehler verursachenden Krümmungsfehler selbst in so einem engen Meßbereich des Blasenmittelpunktes nicht vernachlässigt werden können, d. h., es erscheint nicht zulässig, den Neigungswinkel mit *einem* durchschnittlichen Parswert selbst eines engbegrenzten Bereiches zu berechnen, zumal es *einen* solchen bei der während der Messung sich ändernden Blasenlänge selbst für den gleichen Meßbereich nicht gibt. Die obigen konkreten Daten — und man könnte aus unseren Ergebnissen viele andere Beispiele anführen — zeigen auch, daß zwischen zwei nacheinander folgenden individuellen Parswerten auch ein Unterschied von 0,55", in bezug auf 0,91" also rund von 60% auftreten kann, und daß selbst in so einem, auf einige Parseinheiten begrenzten kleinen Bereich im Vergleich zum durchschnittlichen Parswert dieses Bereiches ein Unterschied von 0,28" besteht. Wenn somit die Messung mit dieser einen Parseinheit erfolgt, so wird die Neigung bei der Berechnung mit dem durchschnittlichen Parswert 1,18" mit einem regelmäßigen Fehler von 0,28" behaftet sein. Und es handelt sich dabei um die beste der untersuchten 26 Sekundenlibellen! *Dieser Betrag übersteigt aber ganz gewaltig die zulässige Grenze und weil er ausmerzbar ist, muß er ausgemerzt werden*, und zwar durch Verlassen der Berechnung mit durchschnittlichem Parswert. Interessanterweise entsteht hier bei der zweiten Blasenlänge nur ein Fehler von 0,06". Bei dieser Blasenlänge besteht aber bei der vorangehenden Parseinheit ein Unterschied von 0,23". Weil ähnliche Abweichungen bei dieser Libelle auch bei den anderen Eichungen festgestellt wurden, sind — von den zufälligen Fehlern der Ablesungen selbst abgesehen — alle diese die Einflüsse von physikalisch verkörperten Krümmungsfehlern.

Es mag bemerkt werden, daß auch die Abweichungen der übrigen individuellen Parswerte von den dazugehörigen durchschnittlichen Parswerten des Bereiches merklich sind: sie betragen bei den 8 individuellen Parswerten im Durchschnitt 0,13". Weil aber im vorliegenden Falle im Vergleich zu den

beiden durchschnittlichen Parswerten die individuellen Parswerte *abwechselnd* mit positiven und negativen \overline{dp} -Werten abweichen, werden die Fehler bei einem Bereich der beiden letzten Parseinheiten nur noch $0,04''$ bzw. $0,05''$, um bei einem Bereich aller vier Parseinheiten für beide Blasenlängen Null zu werden. (Im Sinne von [2; Gl. (5)] würden wir im letzten Falle nicht Null, sondern unzutreffend $4 \cdot 0,13 = 0,52''$ erhalten.) Wir ersehen, daß das in der Praxis oft angestrebte, auch von SCH. empfohlene, und wegen der möglichen Blasenlängenänderungen nicht sehr leicht einzuhaltende Verfahren, den Meßbereich der Blasenmitte auf eine Parseinheit einzuschränken — mit Rücksicht auf den regelmäßigen Charakter der auftretenden Fehler — fehlertheoretisch *nicht* begründet ist: Es soll vielmehr bei dieser Berechnungsmethode jener Meßbereich der Blasenmitte angestrebt werden, der der Bestimmung des durchschnittlichen Parswertes zugrunde liegt.

Wir werden im folgenden noch von einer anderen Seite her zeigen, daß die Ungenauigkeit der Winkelbestimmung mit der Sekundenlibelle mit der Größe des Ausschlages nicht gesetzmäßig zunimmt.

Das Problem und die Berücksichtigung der regelmäßigen Fehler der Winkelmessung mit Sekundenlibellen hat eine gewisse Ähnlichkeit mit den Teilkreisuntersuchungen, besonders der Meridiankreise, bei welchen man gleichfalls die speziellen Winkelwerte der Teilstriche bestimmt (vgl. z. B. [8; S. 53—58]). Weil es sich auch hier um regelmäßige Fehler handelt, wird auch hier nicht behauptet, daß dem damit gemessenen größeren Winkel eine kleinere Genauigkeit und ein kleineres Gewicht zukommt als dem kleineren Winkel. Wenn übrigens der mit dem Meridiankreis gemessene Winkel bei nicht ein spielender Libelle korrigiert werden muß, würde die durch die Bestimmung der speziellen Winkelwerte zu erzielende Genauigkeitssteigerung gefährdet sein, wenn man die Korrektur mit durchschnittlichem Parswert berechnete. Nachdem man auch mit den Sekundenlibellen Winkel mißt, gehört ihre Untersuchung in das Problem der Teilungsuntersuchungen, das wir in Zusammenhang mit den Komparierungsproblemen in dem Vortrag [9] behandelt haben und hier darauf nur kurz hinweisen.

Bei horizontalen Teilkreisen ist die Lage deshalb etwas anders, weil diese Teilkreise zur Herabsetzung der Teilungsfehler bekanntlich in verschiedenen Teilkreisstellungen verwendet werden können. Hier ist also selbst bei sehr großen Genauigkeitsforderungen nicht unbedingt erforderlich, die einzelnen Teilungsfehler zu bestimmen, sondern es genügt die Angabe von qualitativen Genauigkeitszahlen für die Teilungsfehler bzw. für die Intervalle, wie z. B. bei dem Heuvelink-Verfahren (vgl. [8; S. 58—66]). Wenn man diese Genauigkeitszahlen oft auch als »mittlere Fehler« bezeichnet, fiel es niemandem ein, den mittleren Fehler eines mit dem fraglichen Theodolit gemessenen Horizontalwinkels von der Anzahl der darin enthaltenen Teilkreiseinheiten, also von der Größe des Winkels in damit zunehmenden Sinne abhängig zu

machen. Dies auch dann nicht, wenn man die Winkel nur in einer Teilkreisstellung gemessen hätte, in welchem Falle die regelmäßigen Teilungsfehler nach ihren Gesetzen wirksam wären.

Bei unserem Verfahren selbst brauchen wir weder den Begriff des durchschnittlichen, noch jenen des individuellen Parswertes für die verschiedenen Blasenlängen, sondern es werden den einzelnen Teilstrichen — ähnlich wie beim Meridiankreis — Winkelwerte nach, in entsprechender Verteilung durchgeführten Eichmessungen durch Ausgleichung bestimmt. Diese berücksichtigen dann die durch die Krümmungsfehler verursachten regelmäßigen Fehler. Daraus geht unmittelbar hervor, daß die Entfernung der in der Winkelbestimmung vorkommenden Teilstriche voneinander die Genauigkeit des ermittelten Winkels — da ja auch mit der eichenden Libellenwaage die zur Ausgleichung dienenden Neigungswinkel mit zunehmender Neigung nicht ungenauer bestimmt werden — nicht beeinflußt. In den ermittelten Neigungswinkel gehen daher direkt *nur* die mittleren Fehler der hierfür abgelesenen Teilstriche ein, und man berechnet dessen mittleren Fehler; falls erforderlich strenger — aber bei unserem Verfahren erst recht ohne die Fehler der dazwischen liegenden Teilstriche — als den mittleren Fehler der in Frage stehenden Funktion der ausgeglichenen Strichwerte. Bei entsprechender Anordnung der Eichmessungen könnten die mittleren Fehler der Teilstriche auch zu sog. freien Funktionen gemacht werden, ähnlich wie sie bei der Ausgleichung der Stationsbeobachtungen sind.

3. Um die Rechenarbeit bei den den einzelnen Teilstrichen zugeordneten Winkelwerten und bei den durchschnittlichen Parswerten miteinander richtig vergleichen zu können, sei zunächst darauf hingewiesen, daß man im Falle, wo der Meßbereich der Blasenmitte auf eine Parseinheit und die Messung auf eine einzige Blasenlänge begrenzt würde, nach allen Libellenprüfmethoden bei gleichen Meß- und Rechenarbeiten dasselbe Ergebnis erhielte. Der Unterschied wächst mit der Vergrößerung des Meßbereiches und mit der Einführung von verschiedenen Blasenlängen. Wenn also SCH. — trotz der unter 2. enthaltenen Erörterungen — weiterhin auf eine ganz radikale Einschränkung des Meßbereiches bestünde (eine angemessene Einschränkung empfehlen wir in [1; S. 370] schon vor SCH.), so müßte diese Einschränkung in unserem Verfahren dementsprechend eine radikale Herabsetzung der Rechenarbeit zur Folge haben. Es entstünde so praktisch bei unserer Methode nur eine unbedeutende Rechenmehrarbeit, auf die die von SCH. in [4; erst. Abs.] hierfür verwendete Bezeichnung »relativ aufwendige Skaleneichung« nicht zutreffend ist. Und diese auch lediglich bei der Prüfung der Libelle. Bei den routinemäßigen laufenden Messungen und Berechnungen entsteht keine Mehrarbeit, und es ermöglicht unser Verfahren dennoch die Berücksichtigung der durch die Krümmungsfehler verursachten regelmäßigen Winkelfehler sowie die der Blasenlängenänderungen.

Die Einengung des Meßbereiches der Blasenmitte untersuchend erhebt sich von selbst die Frage, warum im Falle, wenn in der Praxis sehr wenige, ja sogar nur ein Parswert genügen, auch die bedeutendsten Instrumentenfabriken ihre Libellen *ausnahmslos* mit einem bedeutend größerem Meßbereich liefern, obwohl die Herstellungsschwierigkeiten und damit auch die Kosten der Sekundenlibellen mit deren Länge ganz bedeutend zunehmen. Wir können die Frage auch so aufwerfen: Was würden die Geodäten und Astronomen sagen, wenn die Instrumentenfabriken die Sekundenlibellen mit so einem engen Meßbereich lieferten, daß daran nur Blasenbewegungen von sehr wenig Parseinheiten beobachtet werden könnten? Wir sind sicher, daß die meisten Fachleute Sekundenlibellen mit dem jetzigen größeren Meßbereich fordern würden, und zwar aus zwei Gründen. Wir brauchen zunächst den entsprechend großen Meßbereich der Sekundenlibellen bei der Aufstellung der sehr genauen Instrumente, bei der Kontrolle und Bestimmung von Pfeilerbewegungen und in so manchen anderen Fällen. Andererseits ändert sich infolge der Temperaturänderungen und ein wenig auch infolge der Krümmungsfehler auch die Blasenlänge, welcher Umstand der allzu starken Einengung des Meßbereiches einen Riegel setzt. Es ist deshalb nahelegend und vorteilhaft, zunächst möglichst den ganzen zur Verfügung stehenden Meßbereich in die Prüfung einzubeziehen, um daraus dann die optimale Begrenzung feststellen zu können, wie darauf schon hingewiesen wurde (vgl. [5; S. 18] u. [1; S. 370]). Durch diese Art der Einschränkung sowohl des Skalenbereiches als auch der Blasenänderungen kann die Genauigkeit der ausgeglichenen Eichwerte infolge der Verminderung der Streuung trotz der Herabsetzung der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen ganz merklich gesteigert werden. Während man aber bei den Berechnungsmethoden mit Libellenparswerten mit Ausnahme einer Beziehung von KRASSOWSKIJ und DANILOW [10; S. 303. Gl. (193)] nicht einmal einen kurzen Hinweis findet, wie man *die bei verschiedenen Blasenlängen verschiedenen regelmäßigen Einflüsse der Krümmungsfehler überhaupt berücksichtigen könnte*, geben die in [7] angeregten, auf Eichkurven beruhenden und unsere in [1] ausgearbeiteten rechnerischen Methoden die Möglichkeit, auch diese Fehlerinflüsse entsprechend in Rechnung zu stellen. Bis jetzt ist die in [1] angegebene Methode das *einzig* Verfahren, das die Berücksichtigung der durch die Krümmungsfehler verursachten regelmäßigen Fehler auch bei verschiedenen Blasenlängen ermöglicht. Weil aber die verschiedenen Blasenlängen vornehmlich auf Temperatureinflüsse zurückzuführen sind, gibt unser Verfahren bereits die Möglichkeit zu deren Erfassung, vorausgesetzt, daß die Erwärmung gleichmäßig und ohne Asymmetrie in der Verteilung erfolgt ist. Ähnliches haben auch KRASSOWSKIJ und DANILOW vorausgesetzt [10; S. 303]. Die Forschung wird sicherlich auch weitere, an weniger Einschränkungen gebundene Methoden bringen. Durch die von uns bereits in [1; S. 370] empfohlene sinngemässe Einengung des Meßbereiches kann — wie erwähnt — auch die Rechenarbeit

wesentlich vereinfacht werden. Dieser Umstand ist allerdings im Zeitalter der elektronischen Rechenanlagen nicht von besonders maßgeblicher Bedeutung, vornehmlich dann nicht, wenn man im Vergleich dazu die bei den praktischen Messungen erforderlichen Zeiten in Betracht zieht.

4. Es ist auffallend, daß SCH. in Kenntnis der Abhandlungen [7] und [1] zur Lösung des Problems der verschiedenen Blasenlängen nichts zu sagen hat, obwohl allein durch den Vorteil unserer dies lösenden Methode die Mehrarbeit unserer Skaleneichung gerechtfertigt erscheint. Ohne einen Lösungsweg hierfür anzudeuten, und ohne seine Behauptungen bekräftigende zahlenmäßige Versuchsergebnisse anzuführen, erklärt SCH. dennoch im letzten Absatz von [4], daß eine Skaleneichung im Sinne von TÁRCZY-HORNOCH einen kaum Gewinn versprechenden Aufwand bedeute. Wir haben demgegenüber mit konkreten Meßergebnissen der besten der von uns untersuchten 26 Sekundenlibellen bewiesen, daß die Berücksichtigung der Einflüsse der Krümmungsfehler bei der SCH.'schen Fehlergrenze 0,1"—0,2" selbst bei einer auch von SCH. empfohlenen Einengung des Meßbereiches der Blasenmitte auf eine Parseinheit erforderlich ist. Wir behaupten nicht, daß unser Verfahren das beste Verfahren zur Berücksichtigung dieser Fehlereinflüsse bei — vornehmlich durch Temperatureinflüsse verursachten — verschiedenen Blasenlängen ist: die wissenschaftliche Forschung bringt überall neuere und neuere sowie bessere Lösungen. Eines aber soll festgestellt werden: wir haben hierfür nach unserem Wissen das erste und brauchbare Verfahren angegeben, ohne welches selbst die beste der von uns untersuchten Libellen der geforderten Genauigkeit nicht entsprechen würde. Dadurch wird bereits ein Teil der von SCH. so hervor gehobenen Temperatureinflüsse erfaßt. Daß dieses Verfahren auch anderwärts gewertet wird, beweist der Umstand, daß bis jetzt schon die amtlichen Stellen von zwei Staaten in der Frage der Libellenprüfung die Verbindung mit uns aufgenommen haben und sie befassen sich mit der Einführung unseres Verfahrens.

Auf Erklärungen in [4], die mit der grundsätzlichen Frage: eigene Eichwerte oder durchschnittlicher Parswert, nicht unmittelbar zusammenhängen, gehen wir aus Raummangel hier nicht ein.

SCHRIFTTUM

1. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Messung mit Sekundenlibellen. *Vermessungstechnik*, 1961. S. 363—370.
2. SCHÄDLICH, M.: Bemerkungen zur Messung kleiner Neigungen mittels Sekundenlibellen. *Vermessungstechnik*, 1962. S. 212—215.
3. TÁRCZY-HORNOCH, A. und ALPÁR, GY.: Zur genauen Bestimmung kleiner Neigungswinkel mittels Sekundenlibellen. *Acta Techn. Hung.* 47 (1964), 397—404.
4. SCHÄDLICH, M.: Bemerkungen zu A. Tarczy-Hornoch und Gy. Alpár: Zur genauen Bestimmung kleiner Neigungswinkel mittels Sekundenlibellen. *Acta Techn. Hung.* 52 (1965).
5. BREIN, R.: Beitrag zur Libellenprüfung. *Veröffentlichung d. Deutschen Geod. Kommission, Reihe B. Heft 21. Frankfurt a. Main 1954.*

6. GIGAS, E.: Interferenzmethode zur genauen Libellenuntersuchung. *Veröff. d. Deutschen Geod. Kommission*. Nr. A. 3. S. 25—31.
7. WYSS, N.: Neigungsbestimmungen mit Berücksichtigung systematischer Libellenfehler. *Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen, Kulturtechn. u. Photogrammetrie*, 1957. S. 153—164.
8. JORDAN—EGGERT: Handbuch der Vermessungskunde. III/1. Band. 9. Auflage.
9. ALPÁR, GY.: A komparálásról (Von der Komparierung). Vortrag gehalten auf der Geodätischen Konferenz des Jahres 1963 in Budapest (Im Erscheinen).
10. КРАСОВСКИЙ, Ф. Н. и ДАНИЛОВ, В. В.: Руководство по высшей геодезии. Часть I. Выпуск I. Москва 1938.
11. GERKE, K.: Basis München 1958. Die Invardrahtmessungen des Instituts für Angewandte Geodäsie. *Veröff. d. Deutsch. Geod. Kommission, Reihe B*. Heft 56, Teil II. Frankfurt a. Main. 1962.

ON THE DETERMINATION OF SLOPE ANGLES MEASURED BY ONE-SECOND LEVELS, AND ON ITS ACCURACY

A. TÁRCZY-HORNOCH—GY. ALPÁR

SUMMARY

The standpoint of principle, expressed in [3] and which is followed in geodesy, according to which an eliminable error larger than is desirable will be eliminated even if other errors cannot yet be found, is not discussed and not disproved by SCHÄDLICH in his notes published under [4] in the references quoted. Therefore this is still further maintained by the authors.

Equation (4) published by SCHÄDLICH in his notes is valid for differential bubble motions only, and not applicable even if the displacement is merely of a few pars units, since the $d\bar{p}$ deviations, related to the average pars value of the narrower measuring range chosen — which follows from it being a mean value — must be partly positive, partly negative. As SCHÄDLICH takes $d\bar{p}$, in his equation (4) as of the same sign even within a range of 10 pars units, his equation (4) and the basis of all his further investigations rest on incorrect conditions. Among other this is also proved by the authors with concrete measurement results.

Also that remark is not acceptable which qualifies the the calibration method adopted by the authors as relatively lengthy, since a suitable narrowing of the measuring range had already been suggested (v. [1], p. 370) and this naturally leads to a considerable reduction of computation work. Apart from this, the procedure suggested by the authors is the first and only one to make possible the taking of the curvature errors even for different bubble length, into consideration. For this, SCHÄDLICH gives no solution.

DE LA DÉTERMINATION EXACTE DES ANGLES D'INCLINAISON MESURÉS AU MOYEN DE NIVEAUX DE HAUTE PRÉCISION

A. TÁRCZY-HORNOCH—G. ALPÁR

RÉSUMÉ

Le principe exposé dans [3] et adopté en géodésie, en vertu duquel il faut éliminer une erreur déterminable dépassant celle admise même si d'autres erreurs ne peuvent pas encore être déterminées, n'a pas été discuté et réfuté par SCHÄDLICH dans ses remarques [4], aussi les auteurs continuent-ils à le soutenir.

L'équation (4) figurant dans les remarques de SCHÄDLICH n'est valable que pour des déplacements différentiels de la bulle et ne saurait être utilisée même quand ce déplacement est de quelques unités de division seulement, parce que les écarts $d\bar{p}$ rapportés à la valeur de graduation moyenne de la plus faible capacité choisie doivent être en partie positifs et en partie négatifs, vu qu'il s'agit de valeurs moyennes. Comme dans son équation (4) SCHÄDLICH considère $d\bar{p}$ comme étant de même signe jusque dans les domaines de 10 unités de division, son équation (4) et toutes ses recherches suivantes partent de conditions incorrectes. Des résultats de mesures concrets sont cités par les auteurs à l'appui de cette constatation.

La remarque de SCHÄDLICH qualifiant de relativement longue la méthode d'étalonnage adoptée par les auteurs est également refusée par ces derniers, qui ont déjà proposé une limitation convenable de l'étendue de mesure ([1], p. 370), qui abrégerait d'une façon notable les calculs. De plus, le procédé présenté par les auteurs est le premier et le seul qui permette de tenir compte des erreurs de courbure en cas de longueurs de bulle différentes, cas qui n'a pas été prévu par la solution de SCHÄDLICH.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УГЛОВ НАКЛОНА С ПОМОЩЬЮ УРОВНЕЙ,
ИМЕЮЩИХ СЕКУНДНОЕ ДЕЛЕНИЕ, И О ТОЧНОСТИ ЭТИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

А. ТАРЦИ-ГОРНОХ, — Д. АЛЬПАР

РЕЗЮМЕ

В геодезии соблюдается принцип, изложенный в работе (1), согласно которому погрешности с величиной, превышающей желательную, исключаются (если они могут быть исключены) даже в том случае, если при этом не охватываются другие погрешности. В своих примечаниях, опубликованных в статье (4), Шедлих не рассматривает и не опровергает такой позиции. Поэтому авторы придерживаются своего первоначального мнения.

Уравнение (4), приведенное в примечаниях Шедлиха, действительно только для дифференциальных перемещений пузырьков, но иначе оно неприменимо даже в том случае, когда перемещение составляет лишь несколько долей *парсек* поскольку по сравнению со средними величинами *парсек* подобранного узкого диапазона измерений, как это следует из особенностей средних значений — часть отклонений $d\bar{p}$ должна быть положительной, а другую часть — отрицательной. Ввиду того, что в уравнении (4) Шедлиха отклонения $d\bar{p}$ берутся с одинаковым знаком даже при диапазоне 10 *парсек* это уравнение, и все остальные рассуждения Шедлиха основываются на неправильных условиях. Авторы подтверждают такое заключение и по результатам фактических измерений.

Несостоятельным является применение Шедлиха об относительной длительности процесса юстировки, поскольку соответствующее сужение диапазона измерений уже предлагалось (см. стр. 370 работы 1), что приводит к значительному сокращению вычислительных работ. Кроме того, предлагаемый метод является первым и единственным до сих пор методом, позволяющим учитывать погрешность кривизны даже при различных длинах пузырьков. Шедлих не дает решения этого вопроса.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG —
COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

Walter Großmann:

GEODÄTISCHE RECHNUNGEN UND ABBILDUNGEN IN DER LANDESVERMESSUNG

Zweite, erweiterte Aufl. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 1964. 260 S mit 77 Abb. u. 12 Tafeln.

Es ist nicht leicht in knapp 260 Seiten so vieles so ausgezeichnet zu geben, wie wir dies in diesem Buche finden. Es enthält folgende Hauptabschnitte:

1. Die geometrischen Eigenschaften des Erdellipsoids
2. Sphärische Rechnungen und ebene Abbildungen der Kugel
3. Die geodätische Linie auf dem Umdrehungsellipsoid
4. Geographische Koordinaten auf dem Ellipsoid
5. Rechtwinklige Koordinaten auf dem Ellipsoid und ihre ordinatentreue Abbildung in der Ebene
6. Die Gaußsche konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene
7. Überblick über weitere konforme Abbildungen
8. Anlage der deutschen Landesvermessungen.

Das Buch umfaßt folglich Probleme der mathematischen Geodäsie und es ist deshalb folgerichtig und richtig, wenn hier auf meßtechnische Frage der Landesvermessung nicht eingegangen wird. Die seit der ersten Auflage neu aufgenommenen Paragraphen, wie die Behandlung ellipsoidischer Dreiecke, die Lösung der geodätischen Hauptaufgabe für sehr große Entfernungen usw., ferner der Umstand, daß an Stelle der logarithmischen Berechnungen jene mit der Rechenmaschine bevorzugt werden, erhöht die Brauchbarkeit dieses hervorragenden Buches. Die Aufnahme einiger Ergebnisse HAZAY's Untersuchungen hätten wir begrüßt, selbst dann, wenn dadurch sich der Umfang vergrößert hätte. Vielleicht kann dies in einem der sicherlich zu erwartenden nächsten Auflagen geschehen.

Zusammenfassend: Das neue Großmannsche Buch stellt eine wesentliche Bereicherung der internationalen geodätischen Literatur dar und wird ein ebenso wichtiges und viel gebrauchtes Nachschlagewerk, wie seine Ausgleichsrechnung.

A. Tárczy-Hornoch

ACTA TECHNICA

Tomus 52 Fasc. 1—2.

Series Geodaetica et Geophysica Tomus 6 Fasc. 1—2

INDEX

- Milasovszky, B.*: To the Problem of the Optimal Star Program in the Meridian Method — Zur Frage des optimalen Sternprogrammes der Meridian-Methode — Du programme sidéral optimum dans la méthode méridienne — *Милашовски, Б.*: К вопросу оптимальной звездной программы меридианного метода 3
- Hoványi, L.*: Genauigkeitsfragen bei der Bestimmung von horizontalen Punktverschiebungen durch wiederholtes Rückwärtseinschneiden — Accuracy Problems in the Determination of Horizontal Point Displacements by Repeated Resections — Problèmes de précision dans la détermination par relèvements du déplacement horizontal de points — *Ховани, Л.*: Вопросы о точности определения горизонтального смещения пунктов при помощи повторных обратных засечек 35
- Halmos, F.*: Die Bestimmung der Genauigkeit von Messergebnissen — Determination of the Accuracy of Measuring Results — Détermination de la précision des observations — *Хальмош, Ф.*: Определение точности результатов измерений 45
- Verő, J.*: A Possibility of the Determination of the Telluric Tensor — Eine Möglichkeit der Bestimmung des tellurischen Tensors — Une possibilité de détermination du tenseur tellurique — *Верэ, Й.*: О дополнительной возможности определения теллурического тензора 65
- Halmos, F.*: Theory and Practice of the Evaluation of Measurement Results — Theorie und Praxis der Auswertung von Meßergebnissen — Théorie et pratique de l'évaluation des résultats de mesurages — *Хальмош, Ф.*: О теории и практике интерпретации результатов измерений 77
- Asszonyi, Cs.—Richter, R.*: General Solution for the Determination of the Adjusting Straight Line — Eine allgemeine Lösung für die Bestimmung der Ausgleichs-, bzw. Schmiegungsgeraden — Solution générale pour la détermination de la droite de compensation — *Ассони, Ч.—Рихтер, Р.*: Обобщенное решение определения выравнивающей или сглаживающей прямой 93
- Arnold, K.*: Geodätische Punktbestimmung mittels der Beobachtung künstlicher Erdsatelliten — Geodetical Point Determination by Means of Observations of Artificial Satellites — Détermination géodésique de points par l'observation de satellites artificiels — *Арнольд, К.*: Геодезическое определение пунктов по данным наблюдений искусственных спутников Земли 101
- Arnold, K.*: Neuerungen zur Theorie des Geoids — Innovations to the Theory of the Geoid — Innovations à la théorie du géoïde — *Арнольд, К.*: Новые соображения по теории геоида 121
- Hónyi, E.*: Exakte Ausgleichung einiger Fälle von durch Messung verbundenen Polygonlinien — Exact Adjustment of Certain Cases of Polygon Lines Connected by Measurements — Compensation précise de quelques cas de cheminements polygonaux reliés par mesurages — *Хэни, Э.*: Точное выравнивание некоторых случаев полигональных ходов, увязанных измерениями 131

- Märcz, F.:** Über die neueren Ergebnisse der Untersuchungen der Spitzenströme — On Recent Results in the Investigations of Peak Discharge Currents — Nouveaux résultats des recherches sur les courants de décharge de crête — Мэри, Ф.: Новые результаты изучения пиковых разрядных токов 143
- Märcz, F.:** Der Zusammenhang des lufterlektrischen Potentialgradienten mit den meteorologischen Elementen in den Beobachtungen des Geophysikalischen Observatoriums bei Nagycenk — The Relations between the Potential Gradient of the Atmospheric Electricity and the Meteorological Elements in the Observations of the Geophysical Observatory at Nagycenk — Relations entre le gradient de potentiel de l'électricité atmosphérique et les éléments météorologiques dans les observations de l'Observatoire Géophysique de Nagycenk — Мэри, Ф.: О связи градиента аэроэлектрического потенциала с метеорологическими элементами по данным наблюдений, проведенных в геофизической обсерватории при с. Надьценк 157
- Hazay, I.:** Die Bedeutung der Tissot-Indikatritz — The Significance of Tissot's Indicatrices — La signification des indicatrices de Tissot — Хазаи, И.: О значении индикатрис Тиссо 171
- Halmos, F.:** Die Bestimmung der Verschiebung einzelner Punkte durch Messen, Kriterien der Lagebeständigkeit — Determination of the Displacement of Certain Points by Measurements, the Criteria of their Stability — Détermination par mesurages du déplacement des points et critères de leur stabilité — Хальмош, Ф.: Об определении смещений пунктов посредством измерений и о критериях устойчивости пунктов 203
- Schädlich, M.:** Bemerkungen zu A. Tarczy-Hornoch und G. Alpár: Zur genauen Bestimmung kleiner Neigungswinkel mittels Sekundenlibellen — Remarks to the Paper "On the Determination of Small Slope Angles by Using a Second-Spirit Level" by A. Tarczy-Hornoch and G. Alpár — Remarques sur l'article de A. Tarczy-Hornoch et G. Alpár, intitulé: »De la détermination exacte de petits angles d'inclinaison au moyen de niveaux de haute précision« — Шедлих, М.: Примечания к статье А. Тарци-Горнох и Д. Альпар «К точному определению небольших углов наклона с помощью уровня с отвесом, имеющим секундное деление» 221
- Tarczy-Hornoch, A.—Alpár, Gy.:** Zur Bestimmung und Genauigkeit der mit den Sekundenlibellen gemessenen Neigungswinkel — On the Determination of Slope Angles Measured by One-Second Levels, and on its Accuracy — De la détermination exacte des angles d'inclinaison mesurés au moyen de niveaux de haute précision — Тарци-Горнох, А.—Альпар, Д.: Об определении углов наклона с помощью уровней, имеющих секундное деление, и о точности этих определений 225
- Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг**
- Walter Großmann:** Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung (A. Tarczy-Hornoch) 237

MITTEILUNG

BEZÜGLICH DER OBSERVATORIUMSBERICHTE DES
GEOPHYSIKALISCHEN FORSCHUNGLABORATORIUMS DER
U. A. d. W.

Die zusammenfassenden Berichte über die Ergebnisse der im Observatorium des Geophysikalischen Forschungslaboratoriums der U. A. d. W. bei Nagycenk durchgeführten Beobachtungen wurden in den Jahren 1957–60 in dieser Zeitschrift veröffentlicht. Durch die Anhäufung der Beobachtungen hat sich der Umfang der Berichte vergrößert und wird deshalb von 1961 angefangen unter dem Titel »Observatoriumsberichte des Geophysikalischen Forschungslaboratoriums der Ungarischen Akademie der Wissenschaften«, in selbständigen Heften veröffentlicht. Der schon erschienene Bericht vom Jahr 1961, sowie die nachfolgenden können vom Forschungslaboratorium im Tauschweg bezogen werden. (Adresse: Sopron, Postfach 9.)

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1965. VIII. 5. — Terjedelem: 21,25 (A/5) ív, 71 ábra

65,61175 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

60,— Ft

Index: 26.025

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 52

FASCICULI 3-4

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA
TOMUS 6 FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1965

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

A. TÁRCZY-HORNOCH
MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
IS 65 YEARS OLD

A. TÁRCZY-HORNOCH
ORDENTLICHES MITGLIED
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
VOLLENDETE SEIN 65-STES LEBENSJAHR

A. TÁRCZY-HORNOCH,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE
A 65 ANS

A. ТАРЦИ-ХОРНОХ
ЧЛЕНУ ВЕНГЕРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
65 ЛЕТ

ZUR GENAUIGKEIT DER FORMEL FÜR DAS GRAVIMETRISCHE ZUSATZGLIED

K. ARNOLD, Potsdam

[Eingegangen am 16. März 1965]

Es wird gezeigt, daß die »nächste Iteration« keinen wesentlichen Einfluß auf das gravimetrische Zusatzglied nimmt.

Berechnet man aus den Freiluftanomalien Geoidundulationen oder das Störpotential an der Erdoberfläche nach der Formel von STOKES oder Lotabweichungen an der Erdoberfläche nach der Formel von VENING—MEINESZ, so ist es in gebirgigen Gebieten notwendig, den Freiluftanomalien noch das gravimetrische Zusatzglied $KG(\Delta g_F)$ hinzuzufügen.

Es wurde gesetzt: [1, 2, 3, 4],

$$KG(\Delta g_F) = -\frac{h}{2\pi} \iint \frac{\Delta g_F - \Delta g_{F \cdot O}}{r^3} d\kappa. \quad (1)$$

Hier ist h der Höhenunterschied gegenüber dem Aufpunkt, für den das Integral von STOKES oder VENING—MEINESZ berechnet werden soll, $\Delta g_{F \cdot O}$ die Freiluftanomalie in dem Punkt, für den das Zusatzglied ermittelt werden soll.

Bei den Untersuchungen, die schließlich zu dem gravimetrischen Zusatzglied in der oben angegebenen Form führten [1, 2, 3, 4], zeigte es sich, daß man eigentlich genauer setzen müßte

$$KG(\Delta g_F) = Gh \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \quad (2)$$

G ist hier ein globaler Mittelwert für die Schwereintensität, ξ bzw. η die Lotabweichung im Meridian bzw. im ersten Vertikal und $\partial \xi / \partial x$ bzw. $\partial \eta / \partial y$ deren Ableitung in Nord—Süd- bzw. Ost—West-Richtung.

Von Gleichung (2) gelangt man zur Gleichung (1), indem man in dem Integral von VENING—MEINESZ das gravimetrische Zusatzglied unberücksichtigt läßt und das Integral in der x - bzw. y -Richtung differenziert [5]. Es ergibt sich dann nämlich mit den eingeführten Vereinfachungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi G} \iint \frac{\Delta g_F - \Delta g_{F \cdot O}}{r^3} d\kappa. \quad (3)$$

Nimmt man aber in den Horizontalableitungen der Lotabweichungen ξ und η das gravimetrische Zusatzglied mit, so folgt für

$$G \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] = \frac{KG (\Delta g_F)}{h}$$

die folgende Korrektur

$$\delta = - \frac{1}{2 \pi G} \iint \frac{KG (\Delta g_F)}{r^3} dz. \quad (4)$$

Für $\Delta g_{F.O.}$, also für die Freiluftanomalie des Aufpunktes, verschwindet das gravimetrische Zusatzglied, weil dann $h = 0$.

Auch aus der Herleitung des gravimetrischen Zusatzgliedes aus der gravimetrischen Theorie von A. BJERHAMMAR [6, 8] ergibt sich die Berechtigung einer Korrektur der Form (4). In [6] Gleichung (12) muß es nämlich eigentlich genauer heißen

$$\Delta g^* = \Delta g_F - \frac{h}{2 \pi} \iint \frac{\Delta g^* - \Delta g_0^*}{r^3} dS \quad (5)$$

wobei Δg^* die unbekanntenen »korrigierten« Schwereanomalien sind. (5) ist eine Integralgleichung für Δg^* . Die erste Näherung ist

$$(\Delta g^*)_1 = \Delta g_F$$

und die zweite

$$(\Delta g^*)_2 = \Delta g_F - \frac{h}{2 \pi} \iint \frac{\Delta g_F - \Delta g_{F.O.}}{r^3} dS.$$

Sie ergibt also das gravimetrische Zusatzglied in der angegebenen Form (1).

Für die hier besonders interessierende dritte Näherung folgt

$$(\Delta g^*)_3 = (\Delta g^*)_2 - \frac{h}{2 \pi} \iint \frac{KG (\Delta g_F)}{r^3} dS$$

und damit wird Gleichung (4) bestätigt.

Die kürzlich durchgeführten numerischen Untersuchungen zum gravimetrischen Zusatzglied [7] im Gebiete des Oberharzes eröffnen nun auch die Möglichkeit, die Gleichung (4) numerisch zu untersuchen.

Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Werte des nach der Gleichung (1) berechneten gravimetrischen Zusatzgliedes $KG (\Delta g_F)$, genommen für den Brockengipfel (1142 m) als Aufpunkt. Im Aufpunkt selbst verschwindet das

Zusatzglied, weil $h = 0$. Die Radien der Kreise ergeben sich aus dem Kreis-Ring-Schema, das RICE [9] für die Berechnung gravimetrischer Lotabweichungen angegeben hat. Der kleinste Radius in den Abbildungen 1 bis 4 beträgt 0,554 km, dann folgen die Radien: 0,780; 1,099; 1,597; 1,836; 2,179; 2,586; 3,068 km.

Der Brockengipfel überragt seine Umgebung. Daher ist das Vorzeichen von $KG(\Delta g_F)$ in der näheren Umgebung des Aufpunktes immer das gleiche, nämlich negativ. Weil die nahen Zonen in Gleichung (4) mit besonders hohem Gewicht eingehen und weil in diesem Bereich das Vorzeichen von $KG(\Delta g_F)$ nicht alterniert, ist also für δ ein recht großer Betrag zu erwarten.

Der Anteil der einzelnen Kreis-Ring-Zonen vom Radius 0,554 km bis zum Radius 3,068 km beträgt

$$1,5; 1,4; 0,9; 0,3; 0,3; 0,2; 0,0; [\text{mgal km}^{-1}].$$

Man erkennt die gute Konvergenz der Summe. Diese beträgt, wenn man sie approximativ nur über die ersten sieben o. a. Summanden erstreckt

$$\delta = +4,7 [\text{mgal km}^{-1}].$$

Der Ausdruck

$$\frac{KG(\Delta g_F)}{h}$$

betrug am Brockengipfel

$$+70 [\text{mgal km}^{-1}].$$

Der durch δ verursachte relative Fehler erreicht daher nur 7%. Er kann allenfalls vernachlässigt werden.

Im übrigen läßt sich der Ausdruck

$$\frac{KG(\Delta g_F)}{h}$$

ohnehin nicht mit einem ökonomisch vertretbaren Aufwand genauer als auf etwa 10% bestimmen. Man muß ja die dem Aufpunkt eng benachbarten Schwereanomalien oder topographischen Höhen außerordentlich genau aus den betreffenden kartographischen Darstellungen entnehmen. Wir hatten in [7] diese Daten für ein sehr enges Gitter von 0,5 km Maschenweite entnommen und waren damit wohl der Grenze des ökonomisch Vertretbaren nahe gekommen.

Wegen der Unregelmäßigkeiten in den Geländeausformungen, die man für ein $0,5 \times 0,5$ km Quadrat im allgemeinen nicht als eben betrachten kann,

wird trotzdem der auf Grund des gewählten speziellen numerischen Integrationsverfahrens entstandene relative Fehler in

$$\frac{KG(\Delta g_F)}{h}$$

kaum weniger als 10% betragen.

Daher dürfte die Formulierung des gravimetrischen Zusatzgliedes, wie sie in Gleichung (1) zu finden ist, wohl allen praktischen Anforderungen gerecht werden.

Die nächste Iteration nach Gleichung (4) dürfte immer zu vernachlässigen sein.

SCHRIFTTUM

1. ARNOLD, K.: Zur Bestimmung der Geoidundulationen aus Freiluftanomalien. Veröff. Nr. 12 d. Geod. Inst. Potsdam, 1959, Berlin.
2. ARNOLD, K.: Strenge Theorie der absoluten Lotabweichungen als Funktionen der Freiluftanomalien der Schwere. Veröff. Nr. 13 d. Geod. Inst. Potsdam, 1959, Berlin.
3. ARNOLD, K.: Numerische Beispiele zur strengen Theorie der Figur der Erde. Veröff. Nr. 16 d. Geod. Inst. Potsdam, 1960, Berlin.
4. ARNOLD, K.: Zur strengen Theorie der Figur der Erde. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, **68** (1959), Heft 5.
5. ARNOLD, K.: Beiträge zur gravimetrischen Geodäsie. Veröff. Nr. 11 d. Geod. Inst. Potsdam, 1956, Berlin.
6. ARNOLD, K.: Eine einfache Ableitung für das gravimetrische Zusatzglied. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*. (Im Druck).
7. ARNOLD, K.: Numerische Untersuchungen zum gravimetrischen Zusatzglied. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*. (Im Druck).
8. BJERHAMMAR, A.: A new theory of gravimetric geodesy. Symposium d. Int. Ass. f. Geodäsie, Prag, 1964.
9. RICE, D. A.: Deflections of the vertical from gravity anomalies. *Bull.-géod.* 1952, S. 285.

ON THE PRECISION OF THE FORMULA FOR THE GRAVIMETRIC CORRECTION TERM

K. ARNOLD

SUMMARY

It is shown, that the "next iteration" takes a negligible influence on the gravimetric correction term.

SUR LA PRÉCISION DE LA FORMULE DU TERME DE CORRECTION
GRAVIMÉTRIQUE

K. ARNOLD

RÉSUMÉ

L'auteur démontre que «l'itération suivante» n'influe pas d'une façon décisive sur le terme de correction gravimétrique.

О ТОЧНОСТИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЧЛЕНА

К. АРНОЛЬД

РЕЗЮМЕ

Показано, что «последующая итерация» не оказывает существенного влияния на гравиметрический дополнительный член.

MESSUNG VON VERTIKALEN ERDKRUSTEN- BEWEGUNGEN IM LICHT DER FEHLERTHEORIE

J. BÖHM, Prag

[Eingegangen am 2. April 1965]

Bei der Messung der vertikalen Erdkrustenbewegungen mittels wiederholten genauen Nivellements treten außer den Meßfehlern auch andere (zumeist periodische) Bewegungen störend auf. Zu ihrer maximalen Elimination sollte man bei der zweiten Richtung der Nivellierung die Meßbedingungen womöglich wechseln, dagegen aber beim wiederholten Nivellement womöglich dieselben wählen.

Da der »aufgemessene« Wert der Höhenänderung ΔH außer der möglichen wirklichen Bewegung auch die Meßfehler enthält, ist es nötig, mittels des Vertrauensintervalls zuerst zu entscheiden, ob der gefundene Wert ΔH zu der Beweisführung einer vertikalen Bewegung überhaupt genügt. Dazu sollte der grundlegende mittlere Kilometerfehler nach der internationalen Formel (nach VIGNAL) und die Intervallbreite nach der Tafel der Studentschen Verteilung berechnet werden.

Es ist vorteilhaft, direkt die gemessenen Höhenänderungen auszugleichen und gleichzeitig die zugehörigen mittleren Fehler zu berechnen. Im Falle eines zwischen zwei festen Punkten eingelegten Nivellementsuges soll der mittlere Kilometerfehler nicht aus den Verbesserungen, sondern aus den Widersprüchen zwischen den doppelten Nivellierungen ermittelt werden.

Im Laufe der Jahre ist die Wissenschaft in eine eigenartige Situation gekommen. Während man in der kosmischen Forschung bedeutende Erfolge erzielt hat, fehlen uns noch immer die verlässlichen Angaben über die tieferen Schichten des oberen Erdmantels, obzwar dieser wirtschaftlich als Rohstoff und Energiequelle viel bedeutsamer erscheint. Es ist nötig, eine größere Aufmerksamkeit der Dynamik der Erdkruste zu widmen. Die inneren Kräfte und Umgruppierungen der Massen im Erdinneren rufen nämlich eine Reihe von Bewegungen der Erdkruste hervor, die nicht nur vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus interessant sind, sondern auch eine große praktische Bedeutung haben, besonders in Hinsicht auf die Anlage und den Bau größerer technischer Werke. Diese Bewegungen beeinflussen auch beträchtlich die Genauigkeit der geodätischen Messungen. Ihre tiefere Erkenntnis kann zur Steigerung der Genauigkeit geodätischer Netzsysteme führen und sichert auch die bessere Benützung der geodätischen Angaben auf längere Zeitepochen. Das Studium und Interpretation der Erdkrustenbewegungen ist ein gemeinsames Problem der Geodäsie, Geophysik, Geologie und Geomorphologie, was die Grenzen der Nationalstaaten überschreitet und als gemeinsames Weltproblem betrachtet werden muß. Diese Tatsache wurde schon anerkannt und im Rahmen der internationalen geodätischen Assoziation wurde eine spezielle Kommission für das Studium der rezenten Erdkrustenbewegungen errichtet.

1. Messung der vertikalen Erdkrustenbewegungen

Es wird sich da immer um eine relative Bewegung eines Punktes gegen den anderen handeln. Die passendste Methode ist das Nivellement von hoher Genauigkeit, das nach einer gewissen Zeit wiederholt wird.

Der Zahlenwert einer erhaltenen Höhenänderung kann ein gesamtes Produkt von verschiedenen Faktoren sein. Es sind diese:

1. Messungsfehler bei dem ersten und wiederholten Nivellement (die immer wirken).

2. Unstabilität der Höhenmarke (des tragenden Objektes).

3. Kurzperiodische Bewegungen (Schwingung) der Erdkruste (durch thermische Prozesse im Boden während des Tages, durch die Erdzeiten infolge der Bewegung des Mondes und der Sonne auf dem Himmel).

4. Langperiodische Bewegungen (Wellen) der Erdkruste (durch thermische Prozesse und sich ändernden Wasserinhalt im Boden, durch die Stellung der Himmelskörper während des Jahres).

5. Säkulare (langsame) Bewegung vorwiegend tektonischen Ursprungs, z. B. die langsame isostatische Ausgleichung, orogenetische Bewegungen u. ä.

6. Lokale Bewegungen (langsame), verursacht meist durch exogene Kräfte oder menschliche Tätigkeit (Solifluktion, Gletscher, Karst sowie auch Abbaugelände, Talsperren).

7. Seismische (plötzliche) Bewegungen, verursacht durch eine plötzliche Umgruppierung der Massen oder durch heftige Ausgleichung der Kräfte (tektonische u. vulkanische Beben).

8. Seismische Bewegungen lokalen Charakters, verursacht durch plötzliche Umgruppierung von kleineren Massen wie z. B. Einstürze u. ä. (Einsturzbeben).

Will man durch das wiederholte Nivellement die Existenz und Intensität einer von den angeführten sieben Bewegungen feststellen, wirken alle anderen als störende Einflüsse (systematische Fehler), die gemeinsam mit den Messungsfehlern nur eine ungenaue quantitative Feststellung und Schätzung der geprüften Bewegung ermöglichen, oder diese sogar unmöglich machen.

Alle angeführten sieben Bewegungen treten als gefährliche systematische Fehler bei der Einmessung und Ausgleichung eines Höhennetzes auf. Die säkularen und lokalen Bewegungen kommen besonders bei der zu langsam fortschreitenden Einmessung des Netzes zur Geltung.

Für technische Bauten und wissenschaftliche Informationen sind schon Millimeterbewegungen bedeutend (die säkularen tektonischen Bewegungen betragen üblich nur einige Millimeter pro Jahr). Es ist deswegen die höchst mögliche Messungsgenauigkeit und eine wissenschaftliche Analyse der Ergebnisse nötig, die oft zur Entdeckung der störenden Einflüsse führt und richtig das Vertrauensintervall für die gefundenen Angaben feststellt. Die Kenntnis der Fehlertheorie ist dabei unentbehrlich.

Die Technologie der verlässlichen Stabilisierung von Höhenpunkten des genauen Nivellements wurde schon manchmal in der Literatur behandelt. Zur Verminderung der Wirkung von gefährlichen systematischen Fehlern wurden eine symmetrische Anordnung der Lattenablesungen, Wechseln der Reihenfolge der Vorne- und Hinteneinmessung, häufige Komparation des Lattenmeters (auch im Felde), Meiden von langen und niedrigen Sichten, Abwechslung der atmosphärischen und anderen Bedingungen bei dem Nivellement in der zweiten Richtung und zuletzt die sog. Methode des unterbrochenen Nivellements vorgeschrieben.

Zu diesen Maßnahmen kann man folgende Bemerkung beifügen. Eine Abwechslung der äußeren Bedingungen bei der zweiten Richtung des Nivellements wird gewiß den Einfluß der systematischen Fehler vermindern und die Genauigkeit des Schlußergebnisses (Mittels) aus beiden Nivellierungen erhöhen. Der Einfluß eines systematischen Fehlers wird aber nie vollkommen eliminiert werden — er oszilliert um einen Nichtnullwert, der durch die Terrainkonfiguration, mittlere klimatische Bedingungen, überwiegend südliche Lage der Sonne und des Mondes, Tragfähigkeit des Terrains u. a. gegeben wird. Sollte man den Einfluß dieser *k o n s t a n t e n* (Mittel-) Komponenten der systematischen Fehler höchstens auf den *U n t e r s c h i e d* der Ergebnisse von zwei in der Zeit abgetrennten Nivellierungen vermindern, soll das spätere Nivellement womöglich *g l e i c h e* mittlere Bedingungen wie das frühere Nivellement haben. Es sind: ungefähr dieselbe Jahreszeit (dieselbe Stärke der Sonnenstrahlung, ähnliche Refraktionsbedingungen, annähernd gleicher, für die saisonmäßige Bodenbewegung entscheidender Wasserinhalt im Boden), bei derselben Mondphase, in derselben durchschnittlichen Tageszeit, mit denselben Instrumenten, mit derselben Methode und auf derselben Strecke. Beide Enden der von einer Station der Feldgruppe eingemessenen Nivellementsstrecke sollen womöglich den kleinsten Höhenunterschied haben. Nötig sind dieselben Schwerekorrekturen, empfehlenswert ist auch dieselbe Netzenkonfiguration und dieselben Ausgleichungsbedingungen.

2. Vertrauensintervall bei den aufgemessenen Höhenänderungen

Es ist wichtig, bei jedem Indikationspunkt individuell zu entscheiden, ob die »aufgemessene« Höhenänderung ΔH wirklich von einer vertikalen Bewegung zeugt oder nur das Produkt der unvermeidlichen Messungsfehler sein kann.

Als Kriterium wird da ein genügend breites Vertrauensintervall gewählt, z. B. in dem doppelten Werte des mittleren Fehlers $m_{\Delta H}$ der erhaltenen Höhenänderung ΔH , der aus einer genügend großen Zahl der überschüssigen Beobachtungen ($n' > 20$) berechnet wurde. In solchem Falle gilt die Normalverteilung für die möglichen wirklichen Fehlerwerte $\varepsilon_{\Delta H}$, die mit einer praktischen Sicher-

heit (mit Risiko nur $\alpha = 5\%$) nicht die angegebene kritische Grenze überschreiten. Deswegen kann bei der aufgemessenen Höhenänderung in dem Punkte P_i :

$$\Delta H_i > 2m_{\Delta H,i}$$

diese nicht mehr nur ein Produkt der Messungsfehler sein, und man ist mit praktischer Sicherheit überzeugt, daß es sich um eine wirklich vertikale Bewegung des Punktes handelt. Erst nach diesem positiven Test nehmen wir den aufgemessenen Bewegungswert als den verlässlichsten (wahrscheinlichsten) Wert der wirklichen Bewegung.

Bei der minderen Zahl der überschüssigen Beobachtungen ($n' < 20$) muß man ein breiteres Vertrauensintervall $\pm t_\alpha \cdot m_{\Delta H}$ nach der folgenden Tafel der Studentischen Verteilung feststellen (für $\alpha = 5\%$):

n'	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	60	∞
t_α	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,31	2,23	2,13	2,09	2,04	2,00	1,96

Die starke Zufälligkeit und mindere Verlässlichkeit des Wertes $m_{\Delta H}$ bei kleiner Zahl n' führt zu einem sehr breiten Vertrauensintervall, das deshalb zu sinnlosen kritischen Grenzen führt. Man soll also beachten, daß die Zahl der überschüssigen Beobachtungen nicht unter 3 sinkt.

Weiter ist zu bemerken, daß eine einzelne Messung nie eine absolute tektonische oder andere Stabilität bestätigt, denn die Messung kann nur eine genügend große Bewegung beweisen (wenn der gemessene Wert die kritische Intervallgrenze überschreitet). Kleinere Bewegungen kann man auch bei gemessenem Wert $\Delta H < 2m_{\Delta H}$, ja sogar beim zufälligen Wert $\Delta H = 0$ nicht ausschließen.

3. Genauigkeitsmaße

Zu der Schätzung des mittleren Fehlers $m_{\Delta H}$ in der aufgemessenen Höhenänderungen dient am besten der gesamte mittlere Kilometerfehler τ_L , der nach den internationalen Formeln (nach VIGNAL) berechnet wird. Er drückt den Einfluß sowohl der zufälligen wie auch der systematischen Fehler aus und berücksichtigt den wichtigen Umstand, daß mit wachsender Länge des Nivellementsuges L jeder systematische Fehler immer mehr seinen systematischen Charakter verliert (es wechselt sich immer mehr sein Mittelwert oder sogar auch das Vorzeichen). Nach der Überschreitung einer gewissen Grenze ($Z = 50$ km) wird sein Einfluß im Netze schon nach dem Fortpflanzungsgesetz der zufälligen Fehler zur Geltung kommen, da z. B. bei sehr langen Zügen die

atmosphärischen Verhältnisse oder der Lattenfehler schon zufällig auftreten. Sollte der mittlere Fehler m_h in dem gemessenen Höhenunterschied

$$m_h = \tau_L \sqrt{L} \tag{1}$$

der allgemeinen Formel des Gesetzes genügen, so muß der Kilometerwert τ_L mit der Zuglänge wachsen und zwar von dem Werte $\tau_0 = \eta$ (für $L < 1$ km) bis zu dem Grenzwert τ (für $L \geq Z$). Den Wert η (mittlerer zufälliger Kilometerfehler) bekommt man aus den Differenzen ϱ zwischen dem doppelten Nivellement

$$\eta^2 = \frac{1}{4n} \left[\frac{\varrho^2}{R} \right] \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4} \frac{[\varrho^2]}{[R]} \tag{2}$$

in den kurzen Abschnitten ($R < 1$ km), den Grenzwert τ aus den Polygonschlüssen oder aus der Netzausgleichung, wobei der durchschnittliche Polygonumfang $F_m > Z = 50$ km ist.

Es wird nicht empfohlen, den Wert τ aus Differenzen λ zwischen dem Doppelnivellement der langen Abschnitte ($L > Z$) zu berechnen. Größere Differenz kann da nämlich bei der absichtlichen Abwechslung der Meßbedingungen entstehen, was aber den kleineren Fehler im Mittel von beiden Nivelierungen bedeuten kann.

Den Wert τ_L bekommt man mittels einer exponentialen oder quadratischen Interpolation zwischen den Grenzwerten η und τ , z. B. (nach KRUIS):

$$\tau_L^2 = \eta^2 + (\tau^2 - \eta^2) \frac{2ZL - L^2}{Z^2} \tag{3}$$

Für $Z = 50$ km, $\eta = 0,4$ mm/km, $\tau = 1,0$ mm/km gilt folgende Tafel

L km	0	5	10	15	20	30	40	50	>50
τ_L mm	0,40	0,57	0,68	0,76	0,83	0,93	0,98	1,00	1,00

In den freien Zügen gilt als mittlerer Fehler der auf gemessenen Änderung Δh_i in dem Höhenunterschied h_i oder ΔH in der Meereshöhe H eines Punktes

$$m_{\Delta h} \quad \text{oder} \quad m_{\Delta H} = T_L \sqrt{L}, \quad T_L = \sqrt{\tau_L'^2 + \tau_L''^2} \tag{4}$$

wo L die Länge des Abschnittes oder der Entfernung eines Indikationspunktes vom Ausgangspunkte bedeutet, τ_L' und τ_L'' sind die gesamten mittleren Kilo-

meterfehler des ersten und des wiederholten Nivellements. In diesem Falle berechnet man das Vertrauensintervall zuerst abgetrennt für die zufällige η und für die systematische Komponente $\xi_L = \sqrt{\tau_L^2 - \eta^2}$ und dann rechnet man beide quadratisch zusammen in das endgültige Vertrauensintervall z. B. $I = t_a \cdot m_{\Delta H}$:

$$I^2 = t_a^2 m_{\Delta H}^2 = \{t^2 (\eta_I^2 + \eta_{II}^2) + t_I^2 (\tau_L^2 - \eta_I^2) + t_{II}^2 (\tau_L^2 - \eta_{II}^2)\} L. \quad (4a)$$

Zu dem gewählten Risiko α findet man t aus der Tafel der normalen Verteilung (da $n > 30$) und t_I, t_{II} aus der Tafel der Studentschen Verteilung zu dem Risiko α und zu den Zahlen von n_I, n_{II} Polygonen in dem ersten und dem zweiten Netze.

Beispiel: $n_I = 10, n_{II} = 6, \alpha = 5\%$, $\eta_I = 0,6$ mm, $\eta_{II} = 0,4$ mm, $\tau_L = 1,0$ mm, $\tau_L'' = 0,7$ mm. Dann $t = 2, t_I = 2,23; t_{II} = 2,45$ und $I^2 = 7,26 L, I = 2,7$ mm $\sqrt{L_{\text{km}}}$.

4. Fall des ausgeglichenen Netzes mit geschlossenen Polygonen

Es ist ökonomisch, direkt die aufgemessenen Änderungen der Höhenunterschiede Δh_i auszugleichen. Man berechnet die Polygonschlüsse $\omega = \Sigma \Delta h$ und wählt die Gewichte

$$p_i = k : m_i^2, \quad m_i^2 = \tau_L'^2 L_i' + \tau_L''^2 L_i'', \quad (5)$$

wo die Werte τ_L, L_i zu den beiden Nivellements gehören (bei der geänderten Netzkonfiguration bei dem zweiten Nivellement verbindet man die als Knotenpunkte gewählten Punkte durch fingierte Züge mit angeführten Gewichten).

Die ausgeglichenen Änderungen $\Delta h_i + v_i$ oder $\Delta H = \Sigma(\Delta h + v)$ sind jetzt korrelierte Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen, deren mittlere Fehler

$$M_{\Delta h_i} = m_0 \sqrt{[qFF]}, \quad M_{\Delta H} = m_0 \sqrt{[qFF]} \quad \text{oder} \quad m_0 \sqrt{Q_{ii}}, \quad (6)$$

wo der mittlere Einheitsfehler $m_0 = \sqrt{[pvv] : n'}$ ist. Die numerischen Werte $[qFF]$ oder Q_{ii} kann man gleichzeitig bei den Reduktionen der Normalgleichungen ausrechnen.

5. Fall des eingelegten Zuges zwischen zwei »festen« Punkten A, B

In diesem Falle wird es sich regelmäßig um vertikale Bewegungen innerhalb eines kleineren Gebietes handeln, z. B. um eine Talsperre oder ein Bergwerk. Die zwei festen Punkte werden genug weit vom Gebiet mit den vorausgesetzten Bewegungen entfernt und während der Zeit beider Nivellierungen

als stabil betrachtet. Der eingelegte Zug wird auf n kürzere Abschnitte durch die Höhenmarken geteilt.

Auch da ist es vorteilhaft, direkt mit den gemessenen Änderungen der Höhenunterschiede Δh in einzelnen Abschnitten des Zuges zu arbeiten. Der Widerspruch des eingelegten Zuges $w = \Sigma \Delta h$ wird nach der bekannten Regel auf die einzelnen Verbesserungen verteilt

$$v_i = -q_i \frac{w}{[q]}, \quad q_i = \frac{1}{p_i} = L_i. \quad (7)$$

Die ausgeglichenen Änderungen in den Meereshöhen der Punkte innerhalb des Zuges und ihre mittleren Fehler sind dann:

$$\Delta H_k = \sum_{i=1}^k (\Delta h_i + v_i), \quad M_k^2 = m_0^2 \frac{S' S''}{S},$$

wo

$$S = \sum_{i=1}^n q_i, \quad S' = \sum_{i=1}^k q_i, \quad S'' = \sum_{i=k+1}^n q_i. \quad (8)$$

Da es sich um Höhenänderungen handelt, kommen die mittleren Fehler in den Ausgangshöhen H_A, H_B nicht zur Geltung. Man kann aber nicht die Berechnung des mittleren Kilometerfehlers m_0 aus den Verbesserungen empfehlen:

$$m_0^2 = [p v v] = \frac{w^2}{[q]}. \quad (9)$$

Dabei wird der empirische Wert m_0 eigentlich nur aus dem zufälligen Wert eines einzigen Fehlers (Widerspruches w) berechnet. Seine Benützung würde nach der Studentischen Verteilung ($n - k = 1$) zu einem sehr breiten Vertrauensintervall bei den ausgeglichenen Änderungen ΔH führen (z. B. 13 M_k bei $\alpha = 5\%$), was manchmal die sichere Entscheidung über die Existenz einer wirklichen vertikalen Bewegung unmöglich macht. Es wird deswegen empfohlen, den mittleren Kilometerfehler m_0 verlässlicher aus den Differenzen der doppelten Nivellierungen

$$m_0^2 = m_0'^2 + m_0''^2 = \frac{1}{4n} \left\{ \left[\frac{dd}{L} \right]^I + \left[\frac{dd}{L} \right]^{II} \right\} \quad (10)$$

zu bestimmen.

SCHRIFTTUM

1. I. Internationales Symposium über rezente Erdkrustenbewegungen (Leipzig 1962), *Abhandl. der Deutschen Akademie der Wiss. zu Berlin*, 1962/Nr. 2.
2. Современные движения земной коры (Sammlung der Behandlungen), Geophys. Kommission bei der Akademie der Wiss. USSR, Moskau 1963.

THE MEASURING OF VERTICAL MOTIONS OF THE EARTH'S CRUST
IN THE LIGHT OF THE THEORY OF ERRORS

J. BÖHM

SUMMARY

In the course of measuring the vertical motions of the Earth's crust by way of reiterated precision levelings, besides the measurement errors, also other (mostly periodic) motions show themselves, exerting some disturbing influences. In order to eliminate these to a maximal extent, the measurement conditions should be varied in the second direction of the leveling, but for the repeated leveling possibly the same ought to be chosen.

Since the "measured" value of the change in level ΔH contains, besides the possible real displacement, also the measuring error, it is necessary to decide first, by means of the confidence interval, whether the value ΔH found is sufficient evidence of a vertical movement. Besides this, also the basic average kilometer-error according to the international formula (after VIGNAL) and the interval breadth according to Student' tables of distribution should be considered.

It is advantageous to directly adjust the level variations measured and at the same time, to calculate the respective mean errors. In case of a leveling line between two fixed points, the mean kilometer error should be determined not from the corrections but from the contradictions between the repeated levelings.

MESURAGES DES MOUVEMENTS VERTICAUX DE LA CROÛTE TERRESTRE
A LA LUMIÈRE DE LA THÉORIE DES ERREURS

J. BÖHM

RÉSUMÉ

Lors des mesurages des mouvements verticaux de la croûte terrestre par nivellements de précision réitérés, il faut compter, en plus des erreurs de mesurages, avec d'autres mouvements (pour la plupart périodiques) d'un effet perturbateur. En vue de leur élimination maximum, on doit autant que possible varier les conditions de mesurage dans la seconde direction de nivellement et maintenir, par contre, les mêmes conditions au moment des répétitions.

Comme la valeur «mesurée» du changement de niveau ΔH contient aussi, outre le mouvement réel possible, les erreurs de mesurage, il importe de trancher d'abord, au moyen de l'intervalle fiduciaire, si la valeur ΔH trouvée suffit pour démontrer un mouvement vertical. A cet effet, on doit tenir compte aussi de l'erreur moyenne basique au kilomètre, d'après la formule internationale (selon VIGNAL), et de la largeur de l'intervalle suivant les tables de distribution de Student.

Il est avantageux de compenser directement les changements de niveau, et calculer en même temps les erreurs moyennes correspondantes. En cas d'une ligne de nivellement établie entre deux points fixes, l'erreur moyenne au kilomètre doit être calculée non pas des corrections, mais des contradictions entre les deux nivellements réitérés.

ИЗМЕРЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ С УЧЕТОМ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТИ

И. БЕМ

РЕЗЮМЕ

При измерении вертикальных движений земной коры путем повторной точной нивелировки, помимо погрешностей наблюдений, мешающий эффект оказывают и другие (в большинстве случаев периодические) движения. Для максимального снижения этого эффекта при нивелировке во втором направлении следует по возможности изменить условия измерений, но в то же время при повторной нивелировке выбирать по мере возможности те же самые условия.

Поскольку измеренное изменение высоты ΔH содержит кроме возможного действительного движения и погрешности измерений, сначала необходимо определить по интервалу надежности, может ли вообще измеренная величина ΔH служить в качестве доказательства наличия некоторого вертикального движения. Для этого необходимо вычислить основную среднюю погрешность в километрах по международной формуле (Виньял), а также диапазон интервала по таблице распределения Стюдента.

Наблюдаемые изменения высот целесообразно непосредственно выравнить и одновременно определить соответствующие средние погрешности. При наличии нивелировочной линии между двумя зафиксированными пунктами, средняя погрешность должна определяться не по поправкам, а по разности двойной нивелировки.

ÜBER DAS VERHÄLTNISS DER STOCHASTISCHEN BEHANDLUNG VON SETZUNGSBEWEGUNGEN IN LOCKERMASSEN NACH J. LITWINISZYN ZUR LÜCKEN-DIFFUSIONS-THEORIE

W. BUCHHEIM, Freiberg/Sa.

[Eingegangen am 22. März 1965]

Es wird gezeigt, daß die von I. LITWINISZYN vorgeschlagene mathematische Behandlung von Setzungsvorgängen in Lockermassen einen Spezialfall einer allgemeineren, vom Autor angeregten Betrachtungsweise darstellt, bei der nicht die Einzelteilchen, sondern die Lücken, die sich frei lassen, einem Diffusionsprozeß unterworfen sind. Für zwei Grenzfälle werden Verschiebungen und Senkungslinien für eine waagerechte, unbegrenzte Strecke, die zusammenbricht, einander gegenübergestellt.

Die mathematische Behandlung und Beherrschung der Bewegungsvorgänge von Lockermassen und mehr oder minder zerklüftetem Felsgestein in natürlicher Lagerung auf der Basis einer wohlbegründeten mathematisch-physikalischen Theorie tritt in der Geomechanik und Gebirgsdruckforschung zumindest als anzustrebendes Ziel zunehmend in Erscheinung. Seit langem beschäftigt die Auflockerung des Gebirges in der Umgebung von unterirdischen, bergbaulich künstlich geschaffenen Hohlräumen und die damit verbundene Massenbewegung, die sich bis zur Erdoberfläche durchsetzen kann, den Bergmann, Markscheider, Geomechaniker und schließlich auch den Geodäten. Wie der Verfasser anderorts ausführte [1], können aber weder eine kontinuumsmechanische Behandlung noch eine rein stochastische Betrachtung dem komplizierten Verhalten des natürlichen Gebirges voll gerecht werden. Der erste Standpunkt ist nur dem ungestörten (unzerklüfteten) Fels, der zweite nur losem und hinreichend feinkörnigem Sand einigermaßen angemessen. Es ist das Verdienst von J. LITWINISZYN und Mitarbeitern, in einer Reihe von Arbeiten die stochastische Betrachtungsweise, ausgehend von sehr allgemeinen Postulaten und den Ideen von M. v. SMOLUCHOWSKI und A. KOLMOGOROW folgend, zunächst auf nicht notwendig homogenes und isotropes Lockergut angewendet und die Ergebnisse mit Resultaten von sorgfältig durchgeführten Modellversuchen verglichen zu haben [2, 3; hier auch weitere Literaturhinweise]. Dieses Vorgehen fußt im wesentlichen auf den folgenden vier Postulaten:

1. Die vertikale Absenkung $w(x, y, z_1; t_1)$ in der Horizontalebene $z = z_1$ zur Zeit $t = t_1$ bestimmt e i n d e u t i g die Absenkung $w(x, y, z_2; t_2)$ in einer beliebigen, darüber gelegenen Horizontalebene $z = z_2$ zur späteren Zeit $t_2 > t_1$. (Hierbei wird die »Absenkung« statistisch als das Volumen definiert, das durch eine (nicht zu kleine) Elementarfläche in der Horizontalebene hindurch-

gesunken ist, dividiert durch den Flächeninhalt.) Es gilt

$$w(x, y, z_2; t_2) = F \{w(x, y, z_1; t_1); z_1, t_1; z_2, t_2\},$$

wobei F einen Operator darstellt.

2. Die Operation F ist linear.
3. Die Operation F ist transitiv, d. h.

$$\begin{aligned} w(x, y, z_3; t_3) &= F \{F \{w(x, y, z_1; t_1); z_1, t_1; z_2, t_2\} z_2, t_2; z_3, t_3\} \\ &= F \{w(x, y, z_1; t_1); z_1, t_1; z_3, t_3\} \end{aligned}$$

4. Ist $w > 0$, so ist auch $F\{w\} > 0$, d. h. eine Absenkung eines Horizontes soll im Hangenden wiederum nur eine Absenkung zur Folge haben.

LITWINISZYN [4] hat nun gezeigt, daß aus 2. folgt, daß F ein linearer Integraloperator sein muß, der speziell im zweidimensionalen Falle zu einer quellenmäßigen Darstellung von $w(x, z; t)$ von der Form führt:

$$w(x, z; t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 w(x_0, z_a; t_0) \varphi_L(x_0, z_a, t_0; x, z, t), \quad (1)$$

$z = z_a$ bedeutet hier einen fest gewählten Horizont, auf dem für $t_0 = t_a$ die Anfangs-Absenkung $w_a = w(x, z_a, t_a)$ gegeben ist.

Damit für $t = t_0$ und $z = z_a$ die Integraltransformation (1) in die Identität übergehe, muß übrigens φ_L die Eigenschaft haben:

$$\varphi_L(x_0, z_a, t_0; x, z_a, t) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (2)$$

(δ die Diracsche Delta-Funktion).

Der Kern $\varphi_L(x_0, z_a, t_0; x, z, t)$ muß nach LITWINISZYN ferner folgender Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial \varphi_L}{\partial z} = A(z) \frac{\partial^2 \varphi_L}{\partial x^2} + B(z) \frac{\partial^2 \varphi_L}{\partial t^2} + C(z) \frac{\partial \varphi_L}{\partial t}. \quad (3)$$

Hierbei wird der Einfachheit halber angenommen, daß die physikalischen Eigenschaften des Lockermediums, die in den Koeffizienten A, B, C zur Geltung kommen, nur von der Tiefe z abhängen.

Eine gewisse Schwäche dieses geistreichen und mathematisch wohl-fundierten Verfahrens besteht darin, daß die physikalische Bedeutung der Koeffizienten A, B und C nicht evident ist. Der Verfasser hat daher den Versuch unternommen [5], durch ein relativ einfaches Modell der

Physik des Senkungsvorganges als eines stochastischen Prozesses näher zu kommen. Das Wesentliche dieser Konzeption besteht darin, daß nicht die Bewegung der Teilchen, sondern die Verschiebung der Lücken, die die Teilchen freilassen, einer stochastischen Betrachtung unterzogen wird. Dieses muß zwar im Endeffekt auf das Gleiche hinauslaufen, hat aber den Vorteil, daß die Konzentration der Teilchenlücken wesentlich schwächer als die der Teilchen selbst ist und daher eine lineare Näherung viel weiter reichen muß. Für eine solche Betrachtung läßt sich also die wohlbekanntete Theorie der Diffusion schwach konzentrierter Teilchen unter dem Einflusse eines homogenen Kraftfeldes in Anspruch nehmen.

Die wesentlichen Postulate dieses Modells sind die vier folgenden:

I. Alle Gesteinslücken weisen den gleichen Diffusionskoeffizienten D auf. Dies ist bestimmt weitgehend erfüllt, wenn das Medium aus nahezu gleichgroßen Teilchen besteht. Dann liegt das Volumen einer Lücke im Durchschnitt und mit nur geringer Streuung in der Nähe des Teilchenvolumens. \vec{D} stellt für ein anisotropes Material einen symmetrischen Tensor dar.

II. Da die Schwere eine Fallbewegung der wirklichen Teilchen nach unten bewirkt, haben die Lücken die Tendenz, nach oben zu steigen. Ihr »Auftrieb« ist wegen ihrer nahezu einheitlichen Größe nahezu gleich und folglich auch ihre mittlere Steiggeschwindigkeit. Dies führt zur Definition einer Lückenbeweglichkeit E (Proportionalitätskonstante zwischen mittlerer Steiggeschwindigkeit und Auftriebskraftdichte). Für an und für sich anisotropes Material stellt \vec{E} ebenfalls einen symmetrischen, mit \vec{D} koaxialen Tensor dar.

III. Unter der Voraussetzung I. ist der Massendichtedefekt $\delta\mu$ der Anzahl der Lücken pro Volumeneinheit proportional. Man kann daher einen Diffusionstensor \vec{D} und einen Beweglichkeitstensor \vec{E} für den Massendefekt definieren. Im allgemeinen hängen beide Tensoren von der Natur des ungestörten Mediums an und für sich, aber auch vom Dichtedefekt und vom Spannungszustand ab.

IV. Materialgrenzen sind durch Stetigkeit der Normalkomponente der Dichtedefektstromdichte charakterisiert. An der Erdoberfläche besteht keine Randbedingung, weil hier die Lücken gleichsam in den Außenraum »verdunsten«.

Hiermit ergibt sich für den Dichtedefekt $\delta\mu$ die fundamentale Diffusions-Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\mu = \{(\nabla \cdot \vec{D} \cdot \vec{\nabla}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot \vec{g}_0)\} \delta\mu, \quad (4)$$

wobei $\vec{\nabla}$ den symbolischen Gradientenvektor (Nabla-Operator) und \vec{g}_0 den Vektor der Erdbeschleunigung bedeuten. Falls \vec{D} und \vec{E} nicht von $\delta\mu$ abhängen, ist die Gleichung (4) linear in $\delta\mu$. In jedem Falle muß sie verträglich

sein mit der Erhaltung der Masse, die durch die Kontinuitätsgleichung des Mediums ausgedrückt wird

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu - \delta\mu) + \vec{\nabla} \cdot (\mu - \delta\mu) \vec{v} = 0. \quad (5)$$

μ bedeutet die Dichte des von Auflockerung noch nicht gestörten Materials, \vec{v} seine analog w (s.o.) definierte Verschiebungsgeschwindigkeit.

Die Bedingung der Verträglichkeit von (4) mit (5) lautet:

$$(\mu - \delta\mu) \vec{v} = ((\vec{D} \cdot \vec{\nabla}) + (\vec{E} \cdot \vec{g}_0)) \delta\mu + (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (6)$$

wobei \vec{A} einen beliebigen Vektor bedeutet, der zur Befriedigung von Randbedingungen benutzt werden kann. In Bereichen, wo $\delta\mu \ll \mu$, die Auflockerung also nur schwach ist, kann nach (6) \vec{v} wiederum linear durch $\delta\mu$ ausgedrückt werden:

$$\vec{v} = \frac{1}{\mu} ((\vec{D} \cdot \vec{\nabla}) + (\vec{E} \cdot \vec{g}_0)) \delta\mu. \quad (7)$$

Für ein an und für sich homogen-isotropes Material mit der konstanten Anfangsdichte μ_0 , der Diffusionskonstanten D_0 und der Beweglichkeit E_0 ergibt sich mit $\vec{A} = 0$ aus (4) und (7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\mu = (D_0 \Delta + E_0 (\vec{g}_0 \cdot \vec{\nabla})) \delta\mu \quad (8a)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\mu_0} (D_0 \vec{\nabla} + E_0 \vec{g}_0) \delta\mu. \quad (8b)$$

Sind die Verschiebungen \vec{r} innerhalb des Mediums infolge der Lückendiffusion oder des Teilchennachfalls nur klein, so kann näherungsweise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y, z; t) &= \int_0^t dt' \vec{v}(x, y, z; t') = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \int_0^t dt' (D_0 \vec{\nabla} + E_0 \vec{g}_0) \delta\mu(x, y, z; t') = \\ &= \frac{1}{\mu_0} (D_0 \vec{\nabla} + E_0 \vec{g}_0) \int_0^t dt' \delta\mu(x, y, z; t'). \end{aligned} \quad (9)$$

Wählt man als Zeitpunkt $t = 0$ einen solchen, in welchem im ganzen Medium abgesehen von einzelnen, etwa bergbaulich geschaffenen Hohlräumen oder

dgl. $\delta\mu = 0, \vec{v} = 0$ ist, so gilt wegen der dann möglichen Vertauschbarkeit aller Operationen miteinander und wegen (4)

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta - E_0 (\vec{g}_0 \cdot \vec{\nabla}) \right\} \vec{v} = \\ & = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta - E_0 (\vec{g}_0 \cdot \vec{\nabla}) \right\} \frac{1}{\mu_0} \{ D_0 \vec{v} + E_0 \vec{g}_0 \} \delta\mu = \quad (10a) \\ & = \frac{1}{\mu_0} \{ D_0 \vec{v} + E_0 \vec{g}_0 \} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta - E_0 (\vec{g}_0 \cdot \vec{\nabla}) \right\} \delta\mu = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta - E_0 (\vec{g}_0 \cdot \vec{\nabla}) \right\} \vec{r}(x, y, z; t) = \\ & = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta - E_0 (\vec{g}_0 \cdot \vec{\nabla}) \right\} \frac{1}{\mu_0} \{ D_0 \vec{v} + E_0 \vec{g}_0 \} \cdot \quad (10) \\ & \cdot \int_0^t dt' \delta\mu(x, y, z; t') = \frac{1}{\mu_0} \{ D_0 \vec{v} + E_0 \vec{g}_0 \} \int_0^t dt' \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} - \right. \\ & \left. - D_0 \Delta - E_0 (\vec{g}_0 \cdot \vec{\nabla}) \right\} \delta\mu(x, y, z; t') = 0. \end{aligned}$$

Die Komponenten $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ von v und die Komponenten u, v, w des Verschiebungsvektors r selbst genügen also ebenfalls der fundamentalen Diffusions-Differentialgleichung (4). Im zweidimensionalen Falle $\delta\mu = \delta\mu(x, z; t)$ und $w = w(x, z; t)$ lautet die Grundlösung von (4), die für $t = t_0$ in $\delta(x - x_0) \cdot \delta(t_0 - t_a) \cdot \delta(z - z_0)$ übergeht, für $\delta\mu$ z. B.

$$\varphi_{B, \delta\mu}^*(x_0, z_0, t_0; x, z, t) = \frac{\delta(t_0 - t_a)}{2\pi(t - t_0)D_0} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (z-z_0 + E_0 g_0(t-t_0))^2}{4D_0(t-t_0)}} \cdot * \quad (11)$$

Mit ähnlichen Kernen φ_B^* ist nun eine quellenmäßige Darstellung z. B. von $w(x, z; t)$ möglich:

$$w(x, z; t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_0^{+\infty} dz_0 w(x_0, z_0; t_0) \varphi_B^*(x_0, z_0, t_0; x, z, t) \cdot \quad (12)$$

In die gleiche Form läßt sich die Darstellung (1) von LITWINISZYN bringen, wenn wir schreiben

$$\varphi_L^*(x_0, z_0, t_0; x, z, t) = \delta(z_0 - z_a) \cdot \varphi_L(x_0, z_0, t_0; x, z, t) \cdot \quad (13)$$

* $t_a = t_a(x_0, z_0)$ bedeutet hierbei diejenige Zeit, für die im Punkte (x_0, z_0) eine Anfangsabsenkung vorgegeben wird.

Dann gilt

$$\begin{aligned} w(x, z; t) &= \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_0^{+\infty} dz_0 w(x_0, z_0; t_0) \varphi_L^*(x_0, z_0, t_0; x, z, t) = \\ &= \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 w(x_0, z_a; t_0) \varphi_L(x_0, z_a, t_0; x, z, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Die Formeln (12) und (14) lassen nun einen direkten Vergleich der stochastischen Theorie von LITWINISZYN mit dem Lückendiffusionsmodell zu. Die Differentialgleichung, der φ_B hinsichtlich x, z und t genügt, ist die Diffusionsgleichung (4), in skalarer Schreibweise

$$\frac{\partial \varphi_B^*}{\partial z} = -\frac{D_0}{E_0 g_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi_B^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_B^*}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{E_0 g_0} \frac{\partial \varphi_B^*}{\partial t}. \quad (15a)$$

Die nach (13) erklärte Kernfunktion φ_L^* der stochastischen Theorie von LITWINISZYN genügt hingegen der Differentialgleichung (3) mit $A = A_0 = \text{const.}$, $B = B_0 = \text{const.}$ und $C = C_0 = \text{const.}$

$$\frac{\partial \varphi_L^*}{\partial z} = A_0 \frac{\partial^2 \varphi_L^*}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi_L^*}{\partial t^2} + C_0 \frac{\partial \varphi_L^*}{\partial t}. \quad (15b)$$

Man ersieht hieraus, daß die stochastische Theorie mit dem Lückendiffusionsmodell übereinstimmt, wenn

$$A_0 = -\frac{D_0}{E_0 g_0} \quad B_0 = 0 \quad C_0 = \frac{1}{E_0 g_0} \quad (16)$$

gesetzt wird, aber in (15b) ein weiteres Glied $A_0 \partial^2 \varphi_L^* / \partial z^2$ hinzugefügt wird. Das Fehlen dieses Gliedes bedeutet offenbar eine Ausartung der Diffusions-Anisotropie der Lücken, indem die zur z -Richtung (Schwererichtung) gehörende Diffusionskonstante $D_{0z} = 0$ ist. Die (11) entsprechende Grundlösung für Diffusionsanisotropie mit den Hauptachsen x, y und z des Tensors \vec{D} und den beiden Haupt-Diffusionskonstanten D_{0x} und D_{0z} lautet nämlich:

$$\varphi_B^{**}(x_0, z_0, t_0; x, z, t) = \delta(t_0 - t_a) \cdot \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_{0x}(t-t_0)}}}{2\sqrt{\pi D_{0x}(t-t_0)}} \cdot \frac{e^{-\frac{(z-z_0+E_{0z}g_0(t-t_0))^2}{4D_{0z}(t-t_0)}}}{2\sqrt{\pi D_{0z}(t-t_0)}} \quad (17)$$

und dieser Ausdruck geht für $D_{0z} \rightarrow 0$ in die Grundlösung φ_L^* mit $B_0 = 0$ über, nämlich in

$$\varphi_L^*(x_0, z_0, t_0; x, z, t) = \begin{cases} \delta(t_0 - t_a) \delta(z_0 - z - E_{0z} g_0(t - t_0)) \cdot \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_{0x}(t-t_0)}}}{2\sqrt{\pi D_{0x}(t-t_0)}} & \text{für } t > t_0 \\ 0 & \text{für } t < t_0 \end{cases} \quad (18)$$

da für $D_{0z} \rightarrow 0$

$$\frac{e^{-\frac{(x-z_0 + E_{0z}g_0(t-t_0))^2}{4D_{0z}(t-t_0)}}}{2\sqrt{\pi D_{0z}(t-t_0)}} \rightarrow \delta(z_0 - z - E_{0z}g_0(t-t_0)) = \delta(z_0 - z_a). \tag{19}$$

Wir setzen nun im Folgenden

$$z + E_{0z}g_0(t-t_a) = z_a \tag{20}$$

gleich derjenigen Tiefe, für welche bei $t = t_0$ sich die Singularität der Grundlösung für die z -Richtung, d. h. für $t = t_a$ die Anfangsstörung vorfindet. Zur Lösung des stochastischen Problems (1), als Spezialfall der Lückendiffusionstheorie formuliert, geht man zweckmäßig von einer quellenmäßigen Darstellung von $\vec{v}(x, z; t)$ durch $\vec{v}(x_0, z_0; t_0)$ aus, um von der Voraussetzung verschwindender Anfangswerte außerhalb des Quellgebietes der Störung frei zu werden. Als Kern kann dann φ_L^* nach (18) verwendet werden, und wir erhalten

$$\vec{v}(x, z; t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_0^{+\infty} dz_0 \vec{v}(x_0, z_0; t_0) \cdot \delta(t_0 - t_a) \cdot \delta(z - z_0 + E_{0z}g_0(t-t_0)) \cdot K(x - x_0, t - t_0) \tag{21a}$$

oder

$$\vec{v}(x, z; t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \vec{v}(x_0, z + E_{0z}g_0(t-t_a); t_a) \cdot K(x - x_0, t - t_a) & \text{für } z \leq z_a \quad t \geq t_a \\ 0 & \text{für } z > z_a \quad \text{und } z \leq z_a, \quad t < t_a \end{cases} \tag{21b}$$

mit

$$K(x - x_0, t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D_{0x}(t-t_0)}}}{2\sqrt{\pi D_{0x}(t-t_0)}} & \text{für } t > t_0. \end{cases}$$

Wegen (9) ergibt sich

$$\vec{r}(x, z; t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \vec{v}(x_0, z + E_{0z}g_0(t_0 - t_a); t_a) K(x - x_0, t_0 - t_a) \tag{22a}$$

also speziell für die Absenkung $w(x, z; t)$, sofern sie schwach ist

$$w(x, z; t) = \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \dot{w}(x_0, z + E_{0z}g_0(t_0 - t_a); t_a) \cdot K(x - x_0, t_0 - t_a). \tag{22b}$$

Durch Differentiation nach t erkennt man sofort, daß (22b) für $t = t_a$ in die Identität für \dot{w} übergeht, wie zu verlangen ist. Die Entstehungszeit t_a der

Anfangsstörung kann übrigens noch von x_0 abhängen. Durch partielle Integration nach t_0 erhält man schließlich

$$w(x, z; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 w(x_0, z + E_{0z} g_0(t - t_a); t_a) K(x - x_0, t - t_a) - \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 w(x_0, z + E_{0z} g_0(t - t_a); t_0) \frac{\partial}{\partial t_0} K(x - x_0, t_0 - t_a) \tag{23a}$$

oder

$$w(x, z; t) = \left\{ \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 w(x_0, z + E_{0z} g_0(t - t_a), t_0) \left\{ \delta(t_0 - t) K(x - x_0, t_0 - t_a) - \frac{\partial}{\partial t_0} K(x - x_0, t_0 - t_a) \right\} \right. \tag{23b}$$

mit $(z + E_{0z} g_0)(t - t_a) = z_a$ für $z \leq z_a, t \geq t_a$

0 für $z > z_a$ und $z \leq z_a, t < t_a$.

Die Unterdrückung dieses Gliedes bedeutet physikalisch offenbar, daß ein Ausgleich der Auflockerung nur in horizontaler, aber nicht in vertikaler Richtung eintreten kann, wohingegen der nach oben hin wirkende Auftrieb der Lücken berücksichtigt bleibt. Dies dürfte auch genau dem Modell des

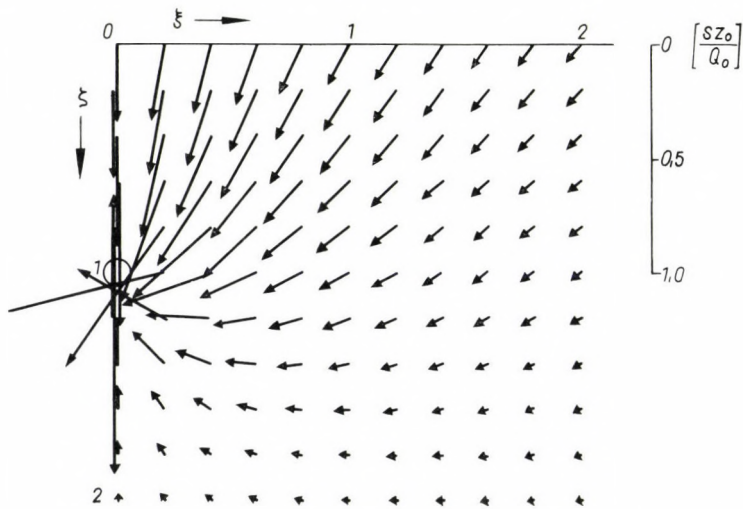


Abb. 1. Feld der definitiven Verschiebung \vec{s}_∞ für eine bei $x = 0, z = z_0$ aufgefahrene Strecke vom Querschnitt Q_0 bei isotroper Lückendiffusion $D_{0x} = D_{0z} = D_0$

$$\zeta = \frac{x}{z_0} \quad \zeta = \frac{z}{z_0} \quad a_0 = \frac{E_0 g_0 z_0}{D_0} = 1.$$

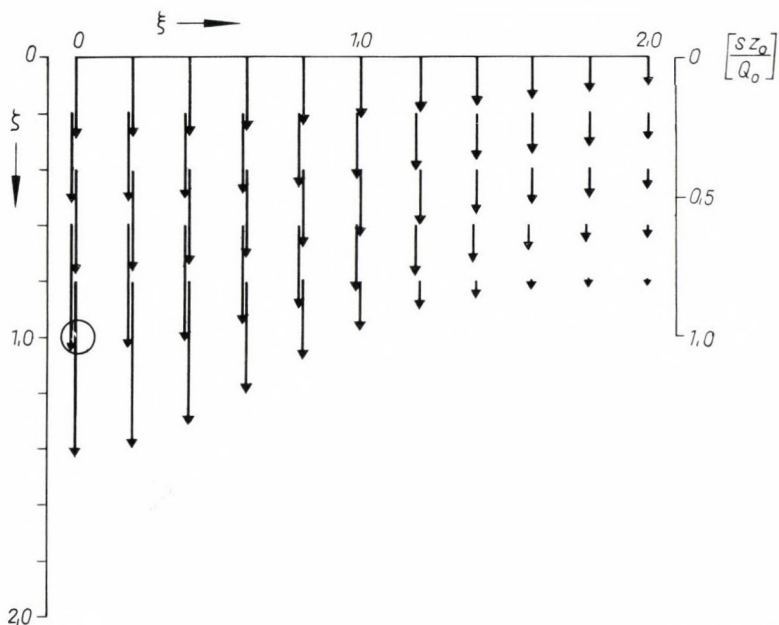


Abb. 2. Feld der definitiven Verschiebung \vec{s}_∞ für eine bei $x = 0, z = z_0$ aufgefahrene Strecke vom Querschnitt Q_0 bei extrem anisotroper Lückendiffusion $D_{0x} = D_{01} D_{0z} = 0$ (Bezeichnungen wie in Abb. 1)

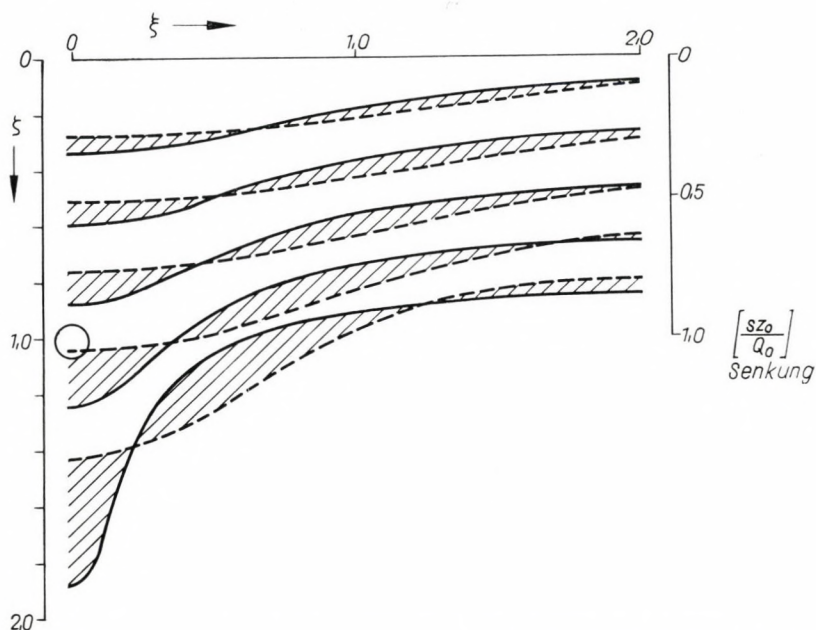


Abb. 3. Senkungslinien im Falle isotroper (ausgezogen) und extrem anisotroper (gestrichelt) Lückendiffusion

stochastischen Prozesses entsprechen, das LITWINISZYN selbst [6] seinen Gleichungen zugeordnet hat. Es fragt sich allerdings, bis zu welchem Grade die Unterdrückung des Ausgleiches in vertikaler Richtung, der sich dem Emporsteigen der Lücken infolge »Auftriebs« überlagert, statthaft ist. Hierüber können offenbar nur exakte Beobachtungen an natürlichen Lockermassen oder an Modellvorgängen, wie sie von LITWINISZYN und Mitarbeitern begonnen worden sind, Aufschluß geben. In Abbildung 1 ist die Gesamtverschiebung im homogen-isotropen Material dargestellt, die nach der Lückendiffusionstheorie eine punktförmige Auflockerung (Linienstrecke) an der Stelle $x = 0$, $z = z_0$ zur Zeit $t = t_0$ für $t \rightarrow \infty$ bei isotroper Lückendiffusion hinterläßt. Wie man sieht, sind auch Gebiete mit Hebung ($w < 0$) vorhanden. (Die Stromlinien ähneln im übrigen außerordentlich stark denjenigen, die O. JACOBI [7] bei Modellversuchen mit zähplastischem Plastilin fand.) Nach der stochastischen Theorie von J. LITWINISZYN dagegen ist eine Hebung des Materials, wie sie auf untertägigen Strecken z. B. als »Quellung der Sohle« in Erscheinung tritt, nicht möglich. In Abbildung 2 ist zum Vergleich das entsprechende Verschiebungsbild wiedergegeben, das sich nach (23b) bei stochastischer Behandlung, also bei extremer Anisotropie der Lückendiffusion ergibt.

Physikalisch betrachtet kann Anisotropie der Diffusion in einem an und für sich homogen-isotropen Material nur durch die Anisotropie des mechanischen Spannungszustandes bestimmt, also ein Effekt höherer Ordnung sein. Die isotrope Diffusion eines Dichtedefektes andererseits kann nur mit Mikroseismik, Lösungsvorgängen und anderen isotrop wirkenden Erscheinungen in Zusammenhang gebracht werden. Solche Phänomene werden also von der bisherigen stochastischen Theorie von J. LITWINISZYN offenbar nicht erfaßt. Dies dürfte jedoch nicht in der Methode selbst begründet sein, sondern nur darin, daß sie vielleicht noch einer Modifizierung bedarf.

Die technische Bedeutung unserer Kenntnisse von den Setzungsbewegungen von Lockermassen ist außerordentlich groß. Überall dort, wo es sich um Tiefbau unter einem losen Deckgebirge handelt, ist die rechnerische Behandlung des Senkungsvorganges auf Grund von zuverlässigen Bodenparametern für die Beurteilung der zu erwartenden Oberflächenveränderungen, aber auch von Verformungen und Druckerscheinungen im Hangenden und Liegenden unerlässlich. Sowohl die stochastische Behandlung dieser Vorgänge nach J. LITWINISZYN als auch unsere eigenen, etwas weiter ausgreifenden Betrachtungen stellen einen ersten Schritt dar, das Verhalten losen Deckgebirges zunächst rein statistisch auf einer exakten mathematischen Grundlage zu behandeln. Die empirische Nachprüfung der erhaltenen theoretischen Resultate kann sowohl im Modellversuch erfolgen als auch durch makroskopische oder markscheiderisch gestützte Beobachtungen am natürlichen Objekt. Wünschenswert wäre, wenn hierbei aufgeklärt werden könnte, inwieweit extrem

anisotrope Diffusion (stochastische Nachfallbewegung) oder total isotrope Diffusion der Lücken den realen Verhältnissen besser gerecht wird, bzw. ob selbst bei isotropem Ausgangsmaterial eine anisotrope Diffusion vorliegt. Wie die Figuren zeigen, sind die theoretischen Massenverschiebungen, die nach den beiden Annahmen errechnet werden können, besonders in der Nähe des Hohlraums recht unterschiedlich.

SCHRIFTTUM

1. BUCHHEIM, W.: Zur Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit in der Theorie des mechanischen Verhaltens der Gesteinsmassen. *Geologie und Bauwesen* **26** (1961), Heft 4.
2. LITWINISZYN, J.: Die Mechanik diskontinuierlicher Medien und ihre Anwendung in der Felsmechanik. *Felsmechanik und Ingenieurgeologie* **1** (1963), Heft 3/4, 196.
3. BODZIONY, J.—LITWINISZYN, J.—SMOLARSKI, A.: Neue Untersuchungen über das Verhalten des Gebirges auf Grund von Gleichungen über stochastische Vorgänge.
4. LITWINISZYN, J.: Time-Space Processes in Stochastic Media. *Bull. Acad. Polon. Sci., Série des sci. techn.* **6** (1958), 1 und **7** (1959), 319.
5. BUCHHEIM, W.: Die mathematische Behandlung von Setzungsvorgängen in Lockermassen als Diffusionsvorgang von Gesteinslücken. Symposium für Gebirgsmechanik, veranstaltet von der Polnischen Gesellschaft für theoretische und angewandte Mechanik in Krakow, Oktober 1963. (Im Druck).
6. LITWINISZYN, J.: The Model of Random Walk of Particles Adapted to Researches on Problems of Mechanics of Loose Media II. *Bull. Acad. Polon. Sci., Série des sci. techn.* **12** (1964), 281.
7. JACOBI, O.: Die Bewegungen im Gebirgsdruckmodell bei kreisförmigen Streckenquerschnitt ohne Ausbau. *Bergbau-Archiv* **13** (1952), 17.

ON THE RELATION OF THE STOCHASTIC TREATMENT OF THE SETTLING OF LOOSE ROCK MASSES ACCORDING TO J. LITWINISZYN, TO THE INTERSPACE DIFFUSION THEORY

W. BUCHHEIM

SUMMARY

The mathematical treatment of subsidence processes in loose masses, proposed by J. Litwiniszyn, is reported to be a special case of a more general conception stimulated by the author, in which the interstices between the single particles, but not the particles themselves, are subjected to a diffusion process. As regards two critical problems displacements and subsidence lines of a horizontal, unlimited gallery caving in are compared with.

SUR LA RELATION DU TRAITEMENT STOCHASTIQUE, SELON J. LITWINISZYN, DE LA SÉDIMENTATION DE MASSES DE ROCHES FRIABLES AVEC LA THÉORIE DE LA DIFFUSION INTERSPATIALE

W. BUCHHEIM

RÉSUMÉ

L'article montre que le traitement mathématique du processus de subsidence dans les masses meubles, proposé par J. Litwiniszyn, est un cas spécial d'une conception plus générale préconisée par l'auteur, selon laquelle les vides entre les particules détachées, mais non les particules elles-mêmes, sont soumis à un processus de diffusion. Pour deux problèmes singuliers, on compare les déplacements et lignes de subsidence d'une galerie horizontale illimitée s'éboulant.

ОБ ОТНОШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПРОЦЕССОВ
ОСЕДАНИЯ РЫХЛЫХ МАСС ПО МЕТОДУ Й. ЛИТВИНИСЫНА К ТЕОРИИ
ЩЕЛЕВОЙ ДИФфуЗИИ

В. БУХГЕЙМ

РЕЗЮМЕ

В статье показано, что предложенная Й. Литвинишиным математическая обработка осадочных процессов в рыхлых массах является специальным случаем более общей концепции, указанной автором, при которой подвергаются процессу диффузии не отдельные частицы, а пустоты между ними. Для граничных случаев сопоставляются перемещения и линии оседания горизонтального неограниченного штрека, который обваливается.

THE CHANGE OF ELLIPTICITY OF AN EXPANDING EARTH

L. EGYED

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received July 15, 1965]

It has been shown that the difference between the equilibrium ellipticity according to BULLARD and the actual ellipticity derived from artificial satellite observations may be explained on the basis of a Dirac-cosmology. The rate of deviation results in a viscosity of 10^{26} – 10^{27} poise for the interior of the Earth.

It is known that the ellipticity [1] of an Earth in hydrostatic equilibrium $(3,3632 \pm 0,0006) \cdot 10^{-3}$ is greater than that of the actual Earth $(3,3535 \pm 0,0003) \cdot 10^{-3}$ derived from high-precision satellite observations [2].

The purpose of this contribution is to show that if the gravity constant is inversely proportional to a time parameter comparable to the Earth age i.e. in the case of the Dirac-cosmology, then the observed ellipticity may be regarded as the ancient ellipticity of an Earth in hydrostatic equilibrium which is retained by its viscous inner part.

For the ellipticity the Clairaut-equation is valid

$$\varepsilon = {}^{3/2}J_2 + \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{7} \varepsilon m - \frac{4}{7} \lambda$$

where

$$J_2 = (C - A)/Ma^2$$

$$m = \omega^2 r^3/fM$$

M = mass of the Earth

A and C the moment of inertia

ω angular velocity

a equatorial radius

r_1 mean radius

λ a quantity of an order of magnitude of 10^{-8}

The gravity constant f in the case of the Dirac-cosmology is $f = \varkappa/t$ where \varkappa is a constant and t a time parameter comparable with the age of the Earth. The recent value of t can be taken as $4,5 \cdot 10^9$ years.

In the case of hydrostatic equilibrium

$$C - A = \frac{8\pi}{3} \int_0^a \varepsilon \varrho r^4 dr$$

(ε the ellipticity, ϱ the density as a function of radius)

Therefore, in the case of an Earth in hydrostatic equilibrium the following expression is valid for the unit time

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2Q}{\omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Q}{t} + \left(5Q + \frac{3\rho_0}{\rho_k} - 2 \right) \frac{\alpha}{a}$$

where

$$Q = \frac{m}{2\varepsilon} = 0,513$$

ρ_0 = the surface density

ρ_k = the mean density of the Earth

α = the yearly radius increase

The recent value of $d\omega/dt = 4,81 \cdot 10^{-22}$ radian $\text{sec}^{-2} = -1,44 \cdot 10^{-15}$ rad. $\text{sec}^{-1}/\text{year}$ [3]. $\delta\varepsilon = (2,9 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$ In the case of $t = 4,5 \cdot 10^9$ year the value $d\varepsilon/\varepsilon$ is positive only if $\alpha > 0$ i.e. in the case of an expanding Earth.

It was shown that the minimum rate of the expansion of the Earth amounts to $0,6 \pm 0,1$ mm/year [4].

In this case the yearly value of

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = 0,6 \cdot 10^{-10}$$

i.e. the value of $2,9 \cdot 10^{-3}$ may be obtained only in $4,8 \cdot 10^7$ years.

The maximum rate of expansion gives the radius of the Earth divided by its age. This is 1,4/mm a year, and the above relative change of ellipticity may occur during $0,9 \cdot 10^7$ years.

If the difference between the actual ellipticity and the equilibrium ellipticity can be ascribed to viscosity the obtained time interval can be regarded as the relaxation time of deformations retarded by viscosity. In the mantle the rigidity is always higher than $1 \cdot 10^{12}$ dyn cm^{-2} . Therefore, viscosity, according to the Maxwell relation is

$$\eta = \mu\tau \geq 3 \cdot 10^{26} \text{ poise}$$

and probably

$$> 7 \cdot 10^{26} \text{ poise}$$

NISKANEN [5] and recently CRITTENDEN [6] showed that the viscosity of the subcrustal material is smaller than $10^{21} - 2 \cdot 10^{22}$ poise, at least to a restricted depth. Therefore, the viscosity of the greater part of the mantle must exceed several times 10^{26} or 10^{27} poises. This excludes the existance of convection currents in the greater part of the mantle.

Some new investigations [7] made the value of the equilibrium-ellipticity determined by BULLARD doubtful and give the impression that there is no remarkable difference between the ellipticity of the actual Earth and that of a hydrostatic one. In this case the above consideration fails to support the expansion of the Earth. The only conclusion which can be drawn is, that in the case of the validity of a Dirac-cosmology and the expansion of the Earth, the recent ellipticity is increasing in time. However this supports HOLMBERG's suggestion [8] on the existence of an accelerating couple generated by solar radiation.

REFERENCES

1. BULLARD, E. C.: The figure of the Earth. *Monthly Notices, R.A.S. Geoph. Suppl.* **5** (1948), 186—192.
2. KING-HELLE, D. G.: The Earth's gravitational potential, deduced from the orbits of artificial satellites. *Geoph. Journ. R.A.S.* **4** (1961), 3—16.
3. MUNK, W. H. and MACDONALD, C. J. F.: The Rotation of the Earth. Cambridge (1960).
4. EGYED, L.: Determination of changes in the dimensions of the Earth. *Nature* **173** (1956), 534.
5. NISKANEN, E.: On the viscosity of the Earth's interior and crust. *Isost. Inst. Publ.* **20** (1948).
6. CRITTENDEN, M. D.: Effective viscosity of the Earth derived from isostatic loading of pleistocene Lake Bonneville. *J. Geoph. Research* **68** (1963), 5517—5530.
7. CAPUTO, M.: The minimum strenght of the Earth. *J. Geoph. Res.* **70** (1965), 955—963.
8. HOLMBERG, E.: Suggested explanation of the present value of the velocity of rotation of the Earth. *Monthly Notices, R.A.S. Geoph.*

DIE VERÄNDERUNG DER ABPLATTUNG DER SICH AUSDEHNENDEN ERDE

L. EGYED

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde gezeigt, daß der Unterschied zwischen der Gleichgewicht-Abplattung der Erde nach BULLARD und der tatsächlich bestimmten Abplattung auf Grund der Beobachtungen der künstlichen Satelliten, im Falle einer Dirac'schen Kosmologie erklärt werden kann. Der Unterschied zwischen den zwei Werten führt zu einer Viskosität von 10^{26} — 10^{27} Poise für das Innere der Erde.

LA VARIATION DE L'ELLIPTICITÉ EN CAS D'UNE TERRE EN DILATATION

L. EGYED

RÉSUMÉ

L'auteur montre que la différence entre l'ellipticité d'équilibre de la Terre selon BULLARD et l'ellipticité actuelle déterminée par les observations de satellites artificiels peut être expliquée sur la base d'une cosmologie de Dirac. Cette différence donne pour l'intérieur de la Terre une viscosité de 10^{26} — 10^{27} poise.

ИЗМЕНЕНИЕ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ В СЛУЧАЕ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛИ

Л. ЭДЬЕД

РЕЗЮМЕ

В работе показано, что расхождение между равновесным сжатием Земли, определенным Булардом, и фактическим сжатием, определенным по искусственным спутникам, истолковывается на основе космологии Дирака. Вязкость внутренней части Земли по расхождению получается равной $10^{26} - 10^{27}$ пуаз.

DYNAMISCHE MORPHOLOGIE DER SCHILDVULKANE

H. ERTEL, Berlin

[Eingegangen am 16. März 1965]

Es erweist sich als möglich, die Entwicklung der Schildvulkane als ein hydrodynamisches Problem anzusehen.

Die Entstehung der Schildvulkane durch das Übereinanderfließen zahlreicher dünnflüssiger Lavaströme aus einem zentralen Förderschlot beim Island-Typus oder aus lateralen Spalten beim Hawaii-Typus (vergl. z. B.: F. M. BULLARD [1], H. P. CORNELIUS [3], A. RITTMANN [6], N. THÉOBALD et A. GAMA [7], H. WEBER [8]) legt den Versuch nahe, die charakteristische, vom klassischen Vulkankonus abweichende Form der Schildvulkane hydrodynamisch aus der Quellenströmung einer nach und nach erstarrenden und damit ihre Beweglichkeit verlierenden Flüssigkeit (SiO_2 -arme Lava) zu erklären.

Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung setzen wir einen rotationssymmetrischen Vulkanapparat mit vertikalem Schlot voraus und damit nur einen Zentralkrater, von dem aus die Lava sich gleichmäßig nach allen Richtungen der Erdoberfläche ausbreiten möge. Die Achse des Vulkanschlots wählen wir als z -Achse, die in der Richtung zum Zenit positiv gezählt werde. Es sei r der horizontale Abstand von dieser Achse, so daß das rotationssymmetrische Profil des Vulkans zur Zeit t in der Form

$$z = z(r, t) \quad (1)$$

darstellbar ist.

Der Lavastrom muß der Kontinuitätsgleichung

$$2\pi r \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial F_r}{\partial r} \quad (2)$$

genügen, wenn F_r das Lavavolumen bedeutet, das in der Zeiteinheit die Koordinatenfläche $r = \text{const}$ (Zylindermantel) durchströmt. Für diesen Fluß F_r des Lavavolumens machen wir als Funktion des Profilverfalles $-\partial z/\partial r$ und des Abstandes r vom Vulkanschlot den Ansatz

$$F_r = - f(r) \frac{\partial z}{\partial r}, \quad (3)$$

mit der Bedingung, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0 \quad (4)$$

sein muß, da erfahrungsgemäß F_r mit wachsendem r schneller gegen Null konvergiert als das Profilgefälle. Eine einfache Funktion dieser Art ist

$$f(r) = \frac{\pi}{2} \mu \frac{1}{r}, \quad (5)$$

worin μ einen mit der Beweglichkeit der Lava zusammenhängenden, positiven Parameter bedeutet und der Faktor $\pi/2$ aus Zweckmäßigkeitsgründen beigelegt wurde; der Pol der Funktion (5) liegt im Vulkanschlot.

Aus (2), (3) und (5) resultiert mit der Abkürzung

$$R = r^2 \quad (6)$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial R^2} \quad (7)$$

des Vulkanprofils; sie ist vom Typus der eindimensionalen Wärmeleitungs- bzw. Diffusions-Gleichung, aber mit nichtlinearer Radialkoordinate R .

Als Integral der Differentialgleichung (7) wählen wir

$$z = \frac{2}{\pi} Q \sqrt{\frac{t}{\mu}} \cdot J_{\text{erfc}}^{(1)} \left(\frac{r^2}{2\sqrt{\mu t}} \right), \quad (8)$$

worin Q eine Konstante bedeutet und

$$J_{\text{erfc}}^{(1)}(x) = \int_x^\infty \text{erfc}(\xi) d\xi \quad (9)$$

den Spezialfall $n = 1$ der aus dem komplementären Fehlerintegral

$$\text{erfc}(x) = J_{\text{erfc}}^{(0)}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi \quad (10)$$

durch wiederholte Integration erhaltenen Funktionen

$$J_{\text{erfc}}^{(n)}(x) = \int_x^\infty J_{\text{erfc}}^{(n-1)}(\xi) d\xi \quad (11)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) darstellt (D. R. HARTREE [4], vergl. auch: H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER [2]).

Daß (8) ein Integral von (7) darstellt, ergibt sich sofort, wenn man beachtet, daß die Funktionen

$$(\sqrt{t})^n J_{\text{erfc}}^{(n)}\left(\frac{R}{2\sqrt{\mu t}}\right) \tag{12}$$

($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) der Differentialgleichung (7) genügen (HARTREE, l. c.).

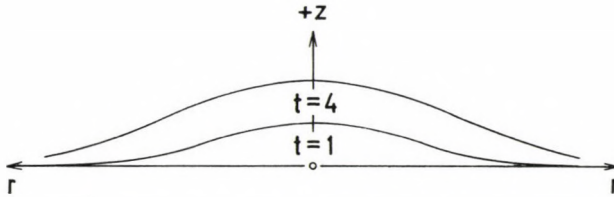


Abb. 1. Die Abbildung 1 zeigt die Entwicklung eines Schildvulkans für $t = 1$ und $t = 4$ (arbiträre) Zeiteinheiten. Die Ähnlichkeit der Profile mit dem idealen Profil eines Schildvulkans (vergl. z. B.: K. MIKOLASCHEK [5]) ist trotz der Vereinfachungen der Theorie bemerkenswert und beweist, daß die wesentlichen Faktoren einer dynamischen Morphologie der Schildvulkane in der Theorie berücksichtigt worden sind.

Zur Zeitvariablen t gehört in den vorstehenden Rechnungen ein beschränkter Variabilitätsbereich, da es keine effusive Dauertätigkeit mit konstanter Lavaförderung gibt.

Der physikalische Charakter der Lösung (8) und die Bedeutung von Q ergibt sich aus der Berechnung des insgesamt gefördertten Lavavolumens

$$\int_0^\infty 2\pi r z dr = 4 Q \cdot t \cdot J_{\text{erfc}}^{(2)}(0) = tQ, \tag{13}$$

wobei

$$J_{\text{erfc}}^{(2)}(0) = \frac{1}{4} \tag{14}$$

berücksichtigt wurde.

Das Integral (8) stellt also die räumlich-zeitliche Entwicklung eines Schildvulkans bei konstantem Fördervolumen (pro Zeiteinheit) dar und läßt erkennen, daß die Gipfelhöhe ($z_0 = z$ für $r = 0$) bei konstanter effusiver Tätigkeit proportional der Quadratwurzel aus der Zeit wachsen würde. Da

$$J_{\text{erfc}}^{(1)}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tag{15}$$

ist, ergibt (8):

$$z_0 = z(0, t) = \frac{2}{\pi} \cdot Q \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi\mu}}. \tag{16}$$

SCHRIFTTUM

1. BULLARD, F. M.: Volcanoes in History, in Theory, in Eruption. Austin 1962 (University of Texas Press), 214.
2. CARSLAW, H. S. and J. C. JAEGER: Conduction of Heat in Solids. Oxford 1948 (Reprinted), 371.
3. CORNELIUS, H. P.: Fundamentos de Geología general. Madrid 1955, 258.
4. HARTREE, D. R.: Some Properties and Applications of the Repeated Integrals of the Error Function. Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society, Vol. LXXX (1935-36), Manchester 1936, 85.
5. MIKOLASCHEK, K.: Vulkanismus. Wien und Leipzig 1934, 24 (Fig. 19 nach F. WOLFF).
6. RITTMANN, A.: Vulkane und ihre Tätigkeit. Zweite umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1960, 129.
7. THÉOBALD, N. et A. GAMA: Géologie générale et Pétrographie. Paris 1956, 216.
8. WEBER, H.: Die Oberflächenformen des festen Landes. Leipzig 1958, 37.

DYNAMIC MORPHOLOGY OF SHIELD VOLCANOES

H. ERTEL

SUMMARY

It is possible to regard the evolution of shield volcanoes as a problem of hydrodynamics.

MORPHOLOGIE DYNAMIQUE DES VOLCANS EN BOUCLIER

H. ERTEL

RÉSUMÉ

Il s'avère possible de considérer l'évolution des volcans en bouclier comme un problème hydrodynamique.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОРФОЛОГИЯ ЩИТОВЫХ ВУЛКАНОВ

Х. ЭРТЕЛЬ

РЕЗЮМЕ

Оказывается возможным рассматривать развитие щитовых вулканов, как вопрос гидродинамики.

ZUR FRAGE NACH DER REALITÄT DES GEOMAGNETISCHEN AUSSENFELDES

G. FANSELAU

MITTEILUNG AUS DEM GEOMAGNETISCHEN INSTITUT DER DAW, POTSDAM, NR. 191

[Eingegangen am 16. März 1965]

Es wird nachgewiesen, daß sich ein reales geomagnetisches Außenfeld aus Potentialentwicklungen nicht ableiten läßt. Zum Nachweis herangezogen werden die Energiedichten der Glieder der verschiedenen Ordnungen für das Außenfeld sowie die Verteilung zonalnaher und zonalferner Parameter in jeder Ordnung. Weder die Axialsymmetrie noch die Symmetrie zum Äquator tritt in Erscheinung, wie dies bei dem Ringstromfeld der Fall sein müßte. Physikalische Schlüsse, die gelegentlich in bezug auf das Außenfeld aus Potentialentwicklungen gezogen werden, sind demnach nicht signifikant.

Die geophysikalische Forschung ist in der Mehrzahl der Fälle bei der Deutung des empirisch gewonnenen Beobachtungsmaterials gezwungen, den Weg der sogenannten »inversen« Potentialtheorie zu beschreiten, d. h. jenen Weg, der versucht, aus dem Beobachtungsmaterial rückwärts auf die Lage, die geometrische Konfiguration und physikalische Wirksamkeit der Quellen zu schließen. Dieser Weg ist natürlich vieldeutig und birgt viele Schwierigkeiten in sich, besonders dann, wenn es sich darum handelt, die Wirkung verschiedener Quellen voneinander zu trennen. Diese Schwierigkeiten treten in fast allen Disziplinen der Geophysik auf, sei es beim Geomagnetismus, der Geoelektrizität, der Gravimetrie, den Spannungs- und Deformationsfeldern, Temperaturfeldern u. ä. m.

Die physikalische Deutung des geomagnetischen Beobachtungsmaterials im globalen Sinn geht im allgemeinen von einer numerischen Entwicklung des Potentials auf der Erdoberfläche in eine Reihe sphärisch-harmonischer Funktionen aus. Wenn auch die Methoden zur Ableitung der Zahlenkoeffizienten dieser Reihen aus dem ausgeglichenen Beobachtungsmaterial — benutzt werden gewöhnlich Weltkarten — voneinander verschieden sind, so führt doch jede dieser Methoden letzten Endes zu mehr oder weniger signifikanten Parametern des geomagnetischen Feldes. Es ist nicht leicht, die Signifikanz dieser Zahlenwerte exakt anzugeben, da sie von vielen Faktoren abhängig ist. Erst wenn es gelingt, die Zahlenwerte mit Sicherheit über einen statistischen Störpegel zu erheben, können sie zur physikalischen Deutung benutzt werden.

Der analytischen Darstellung des Potentials des geomagnetischen Feldes liegen die Entwicklungen der drei Komponenten X (Nord), Y (Ost) und Z (vertikal nach unten) zugrunde. Die getrennte Entwicklung dieser drei Kom-

ponenten gibt die Möglichkeit, zwei physikalische Fragen zu entscheiden. Die eine führt zur Feststellung eines potentiallosen Anteils im geomagnetischen Feld, der sich in dem Unterschied der Entwicklung der Nord- und Ostkomponente ausdrückt. Fernerhin ist es möglich, einen Außenanteil des weitgehend ausgeglichenen Feldes festzustellen, wenn man die Entwicklungen der Nord- und Vertikalkomponente miteinander verbindet. Beide Teilfelder, das potentiallose und das Außenfeld, haben sich, wie man auf Grund der bisher vorliegenden Rechnungen feststellen konnte, kaum als signifikant erwiesen. Die Potentialberechnung des Geomagnetischen Instituts zur Epoche 1945 [1, 2] hat gezeigt, daß sowohl die Parameter des potentiallosen Feldanteils wie auch jene des Außenfeldes im allgemeinen innerhalb des statistischen Störpegels liegen, also kaum Anspruch auf Signifikanz besitzen. Ist bei dem potentiallosen Anteil die Frage nach der Existenz heute mit ziemlicher Sicherheit als negativ entschieden zu betrachten, so trifft dies bei dem Außenfeld noch nicht zu. Auch wenn man bedenkt, daß bei der Zusammenfassung der geomagnetischen Teilvermessungen der einzelnen Länder zu einer Weltkarte eine weitgehende Ausgleichung stattfindet, wäre es vielleicht doch möglich, einen auf allen Teilen der Welt vorhandenen Außenanteil des geomagnetischen Feldes mit zu erfassen. Die Weltkarten werden für eine bestimmte Epoche gezeichnet; also müssen, da niemals die ganze Erdoberfläche zu einem bestimmten Zeitpunkt einheitlich vermessen vorliegt, die Teilvermessungen stets durch Säkularvariationsreduktionen miteinander vergleichbar gemacht werden. Wenn also ein Außenfeld physikalische Bedeutung haben soll, dann nur insoweit, daß es selbst über längere Zeiträume hinweg in den Messungen enthalten sein müßte.

Für die physikalische Deutung des geomagnetischen Außenfeldes muß man prinzipiell zwei Möglichkeiten ins Auge fassen, einmal die erdnah bedingten Außenfelder und dann jene, die in großer Entfernung von der Erdoberfläche erzeugt werden. Die in Erdnähe entstehenden Magnetfelder sind zeitlich stark variabel. Der Mittelwert dieser Magnetfelder wird sicher nicht im Jahresdurchschnitt und auch nicht im Durchschnitt einer 11jährigen Aktivitätsperiode streng verschwinden, aber doch von Jahr zu Jahr regellosen Schwankungen unterworfen sein. Anders verhält sich der in Erdferne erzeugte Anteil des geomagnetischen Außenfeldes. Er könnte durch kontinuierlich fließende sogenannte »Ringströme« erzeugt werden, die in den heute gut erforschten Van-Allenschen Gürteln physikalisch realisiert werden. Ein fester Bestandteil dieses Außenfeldes könnte bestehen. Er würde sich wahrscheinlich im großen und ganzen nach geomagnetischen Koordinaten richten und gewisse Symmetrie-Eigenschaften aufweisen müssen. Auf Grund der Axialsymmetrie zur geomagnetischen Achse dürften im allgemeinen nur zonale Glieder in der sphärisch-harmonischen Reihe auftreten. Wegen der Symmetrie zum geomagnetischen Äquator müßten außerdem die Glieder der ungeraden Ordnung für diesen Feldanteil überwiegen. Wegen des weltweiten Charakters müßten

die Glieder der ersten Ordnungen in der Reihenentwicklung gegenüber den Gliedern der höheren Ordnungen deutlich hervortreten. Es ist selbstverständlich ein sehr verlockendes Problem, aus den geomagnetischen Potentialberechnungen den Versuch zu unternehmen, Rückschlüsse nicht nur auf die Existenz, sondern auch auf die geometrische Konfiguration und Entfernung der Quellen, im vorliegenden Falle also der Van-Allenschen Gürtel, zu ziehen.

Bei solchen Überlegungen muß man sich vor Augen halten, daß der numerische Wert der Parameter, speziell auch der Wert Null, in weitestem Maße abhängig ist von dem der Rechnung zugrunde gelegten sphärischen Koordinatensystem. Nehmen wir die Koordinatensysteme der Einfachheit halber als zentriert im Mittelpunkt der Erde an, so ändern sich die Zahlenwerte der Parameter in Abhängigkeit von der Lage der Polachse des Systems. Man könnte also, theoretisch gesehen, so verfahren, daß man durch Koordinatentransformation die Parameter von dem geographischen Koordinatensystem auf andere Systeme umrechnet und das System auswählt, bei dem die eingangs beschriebenen Symmetriebedingungen des geomagnetischen Außenfeldes bestmöglichst erfüllt sind. Man muß also mehrere solcher Koordinatentransformationen durchführen und die Ergebnisse statistisch miteinander vergleichen. Nur wenn ein Koordinatensystem offensichtlich bevorzugt ist, d. h., daß die auf dieses System bezogenen Angaben über die gewünschten Eigenschaften der Parameter außerhalb der statistischen Schwankungen gelegen sind, liegt eine gesicherte Deutungsmöglichkeit vor.

Mathematisch gesehen sind die Dinge so: Das geomagnetische Potential drückt sich in einer sphärisch-harmonischen Reihe, wie folgt, aus:

$$V = V_e + V_i = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ [a_n^m \cos m\lambda + \beta_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\vartheta) \left(\frac{r}{a}\right)^n + [a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\vartheta) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right\} \quad (1)$$

In (1) beziehen sich die a_n^m , b_n^m auf den im Erdinnern erzeugten Feldanteil, die α_n^m , β_n^m entsprechend auf den außerhalb der Erde erzeugten Feldanteil. Will man nun im vorliegenden Fall etwas über die α_n^m , β_n^m , speziell also über die in diesen Zahlenwerten vorhandenen Symmetrie-Eigenschaften, wie sie oben erwähnt wurden, erfahren, so muß man sich ein Kriterium verschaffen, das ein Überwiegen der zonalnahen Parameter charakterisiert. In der in [1] zitierten Arbeit wurde zu diesem Zweck folgender Vorschlag gemacht. Statt der Parameter α_n^m und β_n^m wird die Größe γ_n^m den Betrachtungen zugrunde gelegt, wo

$$\gamma_n^{m^2} = \alpha_n^{m^2} + \beta_n^{m^2} \quad (2)$$

bedeutet. Auf diese Weise stehen für jede Ordnung n insgesamt $n + 1$ Zahlenwerte zur Verfügung. Man kann nun in erster Näherung diese Werte in zwei Gruppen einteilen, in die zonalnahen und die zonalfernen Parameter. Ist n eine ungerade Zahl, so steht eine gerade Zahl von Parametern zur Verfügung. Ist n dagegen eine gerade Zahl, so steht eine ungerade Zahl von Parametern zur Verfügung. Die Trennung beider Gruppen ist also ohne Schwierigkeiten durchzuführen. Bei einer Teilung in zwei Gruppen muß also der Zahlenwert des mittelsten Parameters zur Hälfte der zonalnahen und der zonalfernen Gruppe zugerechnet werden. Um die so erhaltenen Zahlenwerte für die einzelnen Gruppen miteinander vergleichen zu können, ist es notwendig, eine Normierung vorzunehmen. Dies geschieht, indem man den Zahlenwert für jede Gruppe stets durch die Summe aller γ_n^m -Werte für die betreffende Ordnung dividiert. Mathematisch ergibt sich also folgendes:

$$A_n = \begin{cases} \frac{\sum_{m=0}^{(n-1)/2} (\gamma_n^m)^2}{\sum_{m=0}^n (\gamma_n^m)^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{\sum_{m=0}^{n/2-1} \left[(\gamma_n^m)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_n^{n/2})^2 \right]}{\sum_{m=0}^n (\gamma_n^m)^2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (3)$$

Der Zahlenwert von A_n schwankt zwischen den Größen 0 und 1 für eine rein sektorielle und eine rein zonale Verteilung. Selbstverständlich ist es ausreichend, den Zahlenwert für eine Gruppe, z. B. die zonalnahe, zu berechnen, der Zahlenwert der anderen ist stets die Ergänzung zu 1.

Die Berechnung der Größe A_n muß nun zur Schaffung einer, wenn auch bescheidenen, statistischen Grundlage für einige Koordinatensysteme vorgenommen werden, falls nicht schon die numerischen Werte der Parameter selbst ein überzeugend klares Bild der geforderten Symmetrie-Eigenschaften ergeben. Zur Transformation der Parameter α_n^m, β_n^m auf ein Koordinatensystem $\{\vartheta, \lambda\}$, dessen Lage gegenüber dem ursprünglichen geographisch orientierten System $\{\vartheta, \lambda\}$ durch die Winkel ϑ_0 und λ_0 gemäß Abb. 1 charakterisiert wird, dienen die folgenden Ausdrücke [3]:

$$\alpha_n^p(\vartheta_0, \lambda_0) = \sum_{m=0}^n (\alpha_n^m \cos m\lambda_0 + \beta_n^m \sin m\lambda_0) A_n^{p,m}(\vartheta_0), \quad (4)$$

$$\beta_n^p(\vartheta_0, \lambda_0) = \sum_{m=0}^n (-\alpha_n^m \sin m\lambda_0 + \beta_n^m \cos m\lambda_0) B_n^{p,m}(\vartheta_0), \quad (5)$$

mit $A_n^{p,m}, B_n^{p,m}$ als bekannten Funktionen von ϑ_0 allein.

Es sei bemerkt, daß bei diesen Transformationen stets der Ausdruck

$$\sum_{m=0}^n [(\alpha_n^m)^2 + (\beta_n^m)^2] = \sum_{m=0}^n (\gamma_n^m)^2 \quad (6)$$

invariant bleibt. Diese Invarianz ist bemerkenswert, weil sie mit einer physikalischen Eigenschaft, des Magnetfeldes und zwar mit dem Mittelwert seiner Energiedichte für jede Ordnung n eng verbunden ist. Unabhängig von jeder Koordinatentransformation muß sich also eine der oben geforderten Symmetrie-

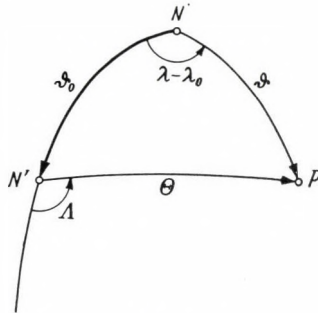


Abb. 1

$\vartheta_0 = 0^\circ; \varphi_0 = 0$ $\vartheta_0 = 11,4^\circ; \varphi_0 = 290,5^\circ$ $\vartheta_0 = 76,0^\circ; \varphi_0 = 153,6^\circ$

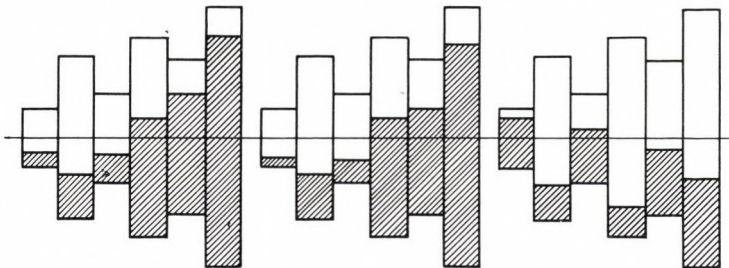


Abb. 2

Eigenschaften des Ringstromfeldes, seine Symmetrie zum Äquator, schon in dieser invarianten Größe ausdrücken.

Betrachtet man die Zahlen

$$E_n = \sum_{m=0}^n (\gamma_n^m)^2 \tag{7}$$

so hat man der mittleren Energiedichte jeder Ordnung proportionale Größen zur Verfügung. Die Zahlenwerte der E_n für die ersten 6 Ordnungen $n = 1 \dots 6$ der Potsdamer Potentialberechnung sind in Abb. 2 dargestellt. In der Abbildung sind die Größen E_n für die drei der Untersuchung zugrunde gelegten Koordinatensysteme dargestellt: für das geographische Koordinatensystem $\vartheta_0 = 0^\circ, \varphi_0 = 0^\circ$; für das geomagnetische Koordinatensystem $\vartheta_0 = 11,4^\circ,$

$\varphi_0 = 290,5^\circ$ und für die Polarachse, die den geometrischen Mittelpunkt der Erde mit dem geomagnetischen verbindet $\theta_0 = 76,0^\circ$, $\varphi_0 = 153,6^\circ$. Selbstverständlich haben die Koordinatentransformationen auf diese invarianten Größen E_n keinen Einfluß. Es läßt sich sofort erkennen, daß die ersten Glieder auf jeden Fall nicht gegenüber den höheren Gliedern überwiegen. Demnach fehlt der erwartete globale Anteil. Weiterhin ist ersichtlich, daß ein Überwiegen der ungeraden Ordnungen gegenüber den geraden nicht vorhanden ist; viel-

Tabelle I

Zahlenwerte der Parameter des äußeren Anteils nach Osipov [4] sowie die entsprechenden Zahlenwerte für die zonalnahen Anteile A_n und die der Energiedichte proportionalen Größen E_n

n	m	Analysen 7-19						Analysen 14 und 15			
		$\overline{\gamma_n^m}$	$\overline{\sigma_n^m}$	$\Delta\gamma_n^m$	$\Delta\sigma_n^m$	A_n	E_n	$\overline{\gamma_n^m}$	$\overline{\sigma_n^m}$	A_n	E_n
1	0	- 6,6		3,4		0,13	344	- 5,5		0,51	59,5
	1	- 9,5	- 14,5	4,1	6,4			- 4,5	- 3,0		
2	0	11,7		4,6		0,46	870	3,0		0,28	193
	1	10,8	- 3,2	3,9	7,9			2,5	5,5		
3	2	- 12,9	2,5	14,5	6,7			- 1,5	- 7,0		
	0	- 10,0		4,2		0,45	2388	- 2,5		0,44	213
4	1	- 15,2	5,3	13,5	15,9			0,5	- 5,0		
	2	- 8,2	- 1,2	4,1	5,3			- 3,5	4,0		
5	3	- 7,6	- 17,6	5,9	5,7			- 3,0	- 1,5		
	0	- 11,9		7,6		0,50	2004	3,5		0,66	167
6	1	3,6	4,0	3,8	4,5			2,0	- 1,5		
	2	11,7	4,3	7,2	7,5			- 4,0	- 1,5		
7	3	9,9	- 2,5	7,4	4,1			0,0	1,0		
	4	- 5,0	6,7	5,2	5,0			2,0	0,0		
8	0	- 3,4		4,9				- 1,0			

mehr zeigt sich ein umgekehrtes Verhalten. Die Zahlenwerte für die geraden Ordnungen sind allesamt merklich größer als die für die ungeraden. Daraus läßt sich schließen, das sich die für das Ringstromfeld zu fordernde äquatoriale Symmetrie aus den Parametern des geomagnetischen Außenfeldes nicht ableiten läßt.

Was die Axialsymmetrie anbelangt, so muß, wie oben bemerkt, innerhalb jeder Ordnung das Verhältnis der zonalnahen zu den zonalfernen Parametern untersucht werden. Die Zahlenwerte für die Größe A_n — vergleiche (3) — sind in der Abbildung 2 ebenfalls für jedes der drei nach der Potsdamer Potentialberechnung benutzten Koordinatensysteme mit veranschaulicht. Die zonalnahe Gruppe der Parameter ist von unten her innerhalb des für jede Ordnung gezeichneten Rechtecks eingetragen und durch Schraffieren gekennzeichnet.

In der Verteilung der Größe für die zonalnahen und zonalfernen Parameter müssen sich hier Unterschiede für die drei Koordinatensysteme ergeben. Das geomagnetische Koordinatensystem müßte eine ausgezeichnete Stellung einnehmen und das zahlenmäßige Überwiegen der zonalnahen Parameter den zonalfernen gegenüber am klarsten zum Ausdruck bringen, zumindest bei den ungeraden Ordnungen $n = 1, 3, 5$. Man kann sich leicht überzeugen, daß auch diese Symmetrie durchaus nicht klar zu erkennen ist, nur in wenigen Fällen wird der Wert 0,5 für die Größe A_n überschritten, obwohl auch dieser Wert erst ein Gleichgewicht zwischen beiden Gruppen bedeuten würde.

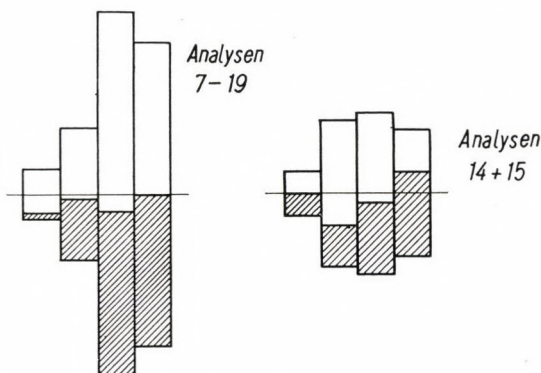


Abb. 3

Mit der Frage nach der Realität des aus geomagnetischen Potentialentwicklungen abgeleiteten Außenfeldes befaßt sich auch OSIPOV [4]. Zur Prüfung der Signifikanz der Parameter des Außenfeldes benutzt er 19 Potentialentwicklungen, die für verschiedene Epochen, nach verschiedenen Methoden und unter Verwendung verschiedenen Beobachtungsmaterials durchgeführt wurden. Als Argument für die Signifikanz der gewonnenen Parameter führt OSIPOV zwei Fakten an: einmal gleiche Größe eines Parameters unter Verwendung zeitlich verschieden gelegener Potentialentwicklungen bei gleicher Berechnungsmethode zum anderen gleiche Werte des Parameters für dieselbe Epoche unter Variation der anderen Fakten, die der Entwicklung zugrunde liegen: Berechnungsmethode und Beobachtungsmaterial. OSIPOV glaubt, daß die Werte γ_1^0 , γ_3^0 und γ_5^0 auf Grund der von ihm gewählten Kriterien eine Signifikanz besitzen, die sich durch geringe Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert zeigt. In Tabelle I sind die Mittelwerte der Parameter für das geomagnetische Außenfeld zusammengestellt, wie sie sich aus den von OSIPOV benutzten Potentialentwicklungen ergeben. Von den 19 Berechnungen sind zusammengefaßt die Werte für die Berechnungen 7—19 einerseits und die für die Berechnungen 14—15 andererseits. Neben den Mittelwerten der Parameter selbst sind auch die Streuungen für diese Mittelwerte verzeichnet. Man

Tabelle II

Zahlenwerte der Transformationsgröße $A_n^{p,m}(\vartheta_0)$ und $B_n^{p,m}(\vartheta_0)$ für $\vartheta_0 = 11,4^\circ$

$A_n^{p,m}$		0	1	2	P	3	4	5	6
1	0	0,980271	-0,197657						
	1	0,197657	0,980271						
2	0	0,941397	-0,335597	0,033834					
	1	0,335597	0,921863	-0,193757					
	2	0,033834	0,193757	0,980466					
3	0	0,884526	-0,460512	0,074163	-0,006105				
	1	0,460512	0,836654	-0,294209	0,037081				
	2	0,074163	0,294209	0,922824	-0,237350				
	3	0,006105	0,037081	0,237350	0,970696				
4	0	0,811334	-0,570823	0,125066	-0,015833	0,001129			
	1	0,570823	0,727436	-0,373553	0,073485	-0,007081			
	2	0,125066	0,373553	0,849067	-0,348325	0,050674			
	3	0,015833	0,073486	0,348325	0,894087	-0,271338			
	4	0,001129	0,007081	0,050674	0,271338	0,961122			
5	0	0,723968	-0,663912	0,184718	-0,030884	0,003319	-0,000212		
	1	0,663912	0,597781	-0,434004	0,115009	-0,016829	0,001355		
	2	0,184718	0,434005	0,761705	-0,433526	0,096260	-0,010367		
	3	0,030884	0,115009	0,433527	0,802565	-0,386931	0,063600		
	4	0,003319	0,016829	0,096260	0,386931	0,866312	-0,300374		
	5	0,000212	0,001355	0,010367	0,063600	0,300374	0,951642		
6	0	0,624974	-0,737392	0,250792	-0,051902	0,007246	-0,000688	0,000040	
	1	0,737396	0,451915	-0,474875	0,159852	-0,030665	0,003693	-0,000260	
	2	0,250790	0,474877	0,663701	-0,499161	0,146197	-0,023597	0,002081	
	3	0,051902	0,159854	0,499161	0,698737	-0,469547	0,116978	-0,013898	
	4	0,007246	0,030666	0,146197	0,469547	0,758713	-0,419156	0,076263	
	5	0,000688	0,003693	0,023597	0,116980	0,419155	0,838991	-0,325798	
	6	0,000040	0,000260	0,002081	0,013898	0,076263	0,325796	0,942252	

erkennt, daß in der Tat diese Streuung für die Werte γ_1^0 , γ_3^0 und γ_5^0 sehr gering ist, daß aber auch für andere Parameter solche geringen Werte auftreten, mithin also auch diese Parameter mit demselben Recht als signifikant angesehen werden müssen. Es handelt sich um γ_1^1 , γ_2^0 , γ_2^1 , γ_3^2 , also um Parameter, die wegen der für das Außenfeld geforderten Symmetrie-Eigenschaften eigentlich nicht auftreten sollten.

Tabelle II (Schluß):

$B_n^{p,m}$		p					
n	m	1	2	3	4	5	6
1	1	1,0					
2	1	0,980271	-0,197657				
	2	0,197657	0,980271				
3	1	0,951164	-0,306357	0,037827			
	2	0,306357	0,921863	-0,237303			
	3	0,037828	0,237303	0,970699			
4	1	0,913250	-0,400181	0,075994	-0,007223		
	2	0,400181	0,846228	-0,348112	0,050662		
	3	0,075993	0,348112	0,894101	-0,271339		
	4	0,007223	0,050662	0,271339	0,961122		
5	1	0,867266	-0,482593	0,121028	-0,017345	0,001382	
	2	0,482593	0,755214	-0,432884	0,096126	-0,010366	
	3	0,121028	0,432884	0,802618	-0,386933	0,063600	
	4	0,017345	0,096216	0,386933	0,866312	-0,300371	
	5	0,001382	0,010366	0,063600	0,300371	0,951641	
6	1	0,814851	-0,553764	0,171897	-0,032003	0,003798	-0,000266
	2	0,553764	0,651024	-0,497629	0,146052	-0,023587	0,002080
	3	0,171897	0,497629	0,698897	-0,469558	0,116980	-0,013897
	4	0,032000	0,146052	0,469560	0,758713	-0,419157	0,076262
	5	0,003798	0,023587	0,116980	0,419157	0,838992	-0,325796
	6	0,000265	0,002080	0,013896	0,076262	0,325796	0,942254

OSIPOV verwendet für weitergehende Rechnungen die Mittelwerte der Parameter des geomagnetischen Außenfeldes, abgeleitet aus den Potentialentwicklungen 14—15 (Epoche 1955), und zwar speziell die Werte für γ_1^0 , γ_3^0 und γ_5^0 . Es zeigt sich, daß diese Mittelwerte beträchtlich von den entsprechenden Mittelwerten für die Analysen 7—19 abweichen. In der Tabelle I sind außer den Mittelwerten γ_n^m , σ_n^m der einzelnen Parameter und deren Streuung auch noch die Größen A_n und E_n in derselben Weise berechnet wie für die Potsdamer Potentialentwicklung 1945. Zum Vergleich mit den in Abbildung 2 dargestellten Werten A_n und E_n für die Potsdamer Potentialentwicklung 1945 sind auch diese Werte in derselben Weise in der Abbildung 3 wiedergegeben. Es zeigt sich, daß auch hier ein klares Überwiegen der mittleren Energiebeträge für die ungeraden Ordnungen nicht zu erkennen ist, auch ein Überwiegen der Beträge für die zonalnahen Parameter ist nicht festzustellen, besonders auch nicht für die ungeraden Ordnungen. Man kann also mit Recht

Tabelle III

Zahlenwerte der Transformationsgröße $A_n^{p,m}(\vartheta_0)$ und $B_n^{p,m}(\vartheta_0)$ für $\vartheta_0 = 76,0^\circ$

$A_n^{p,m}$				p				
n	m	0	1	2	3	4	5	6
1	0	0,241922	-0,970296					
	1	0,970296	0,241922					
2	0	-0,412211	-0,406574	0,815340				
	1	0,406574	-0,882948	-0,234736				
	2	0,815340	0,234736	0,529263				
3	0	-0,327486	0,420306	0,441061	-0,722192			
	1	-0,420306	-0,612190	0,632402	0,220531			
	2	0,441061	-0,632402	-0,099723	-0,628958			
	3	0,722192	0,220531	0,628958	0,184981			
4	0	0,170512	0,480698	-0,310684	-0,462250	0,655482		
	1	-0,480698	0,378925	0,595932	-0,476943	-0,206724		
	2	-0,310684	-0,595932	0,336410	-0,025702	0,659172		
	3	0,462250	-0,476943	0,025702	-0,702680	-0,253832		
	4	0,655482	0,206724	0,659172	0,253832	0,169323		
5	0	0,336240	-0,118640	-0,481025	0,226071	0,475726	-0,603373	
	1	0,118640	0,664842	-0,224027	-0,564793	0,370150	0,194214	
	2	-0,481025	0,224027	0,483591	-0,173255	0,127485	-0,662041	
	3	-0,226071	-0,564793	0,173255	-0,236860	0,677110	0,292067	
	4	0,475726	-0,370150	0,127485	-0,677110	-0,307347	-0,259770	
	5	0,603373	0,194214	0,662041	0,292067	0,259770	0,084502	
6	0	0,007037	-0,451422	0,025395	0,471619	-0,156630	-0,484125	0,560526
	1	0,451422	-0,010488	-0,620258	0,110229	0,529605	-0,292017	-0,182982
	2	0,025395	0,620258	-0,078259	-0,363639	0,085048	-0,208575	0,652335
	3	-0,471619	0,110229	0,363639	-0,039706	0,389348	-0,617953	-0,313301
	4	-0,156630	-0,529605	0,085048	-0,389348	0,582644	0,303084	0,323769
	5	0,484125	-0,292017	0,208575	-0,617953	-0,303084	-0,378090	-0,142014
	6	0,560526	0,182982	0,652335	0,313301	0,323769	0,142014	0,060296

schließen, daß auch die Rechnungen und Überlegungen von OSIPOV mit Sicherheit nicht auf die reale Existenz des geomagnetischen Außenfeldes, abgeleitet aus Potentialentwicklungen, schließen lassen.

Man kann also wohl zusammenfassend feststellen, daß der statistische Störpegel solcher Potentialentwicklungen nicht geeignet erscheint, auf nähere

Tabelle III (Schluß):

$B_n^{p,m}$		p					
n	m	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	0,241922	-0,970296				
	2	0,970296	0,241922				
3	1	-0,176842	-0,371150	0,911578			
	2	0,371150	-0,882948	-0,287491			
	3	0,911578	0,287491	0,293895			
4	1	-0,156664	0,202509	0,451953	-0,854509		
	2	-0,202509	-0,555249	0,748268	0,301302		
	3	0,451953	-0,748268	-0,270545	-0,403284		
	4	0,854509	0,301302	0,403284	0,128040		
5	1	0,031571	0,256004	-0,180475	-0,506369	0,802798	
	2	-0,256004	0,198658	0,643013	-0,624465	-0,302613	
	3	-0,180475	-0,643013	0,544525	0,205260	0,464030	
	4	0,506369	-0,624465	-0,205260	-0,522412	-0,196436	
	5	0,802798	0,302613	0,464030	0,196436	0,100149	
6	1	0,101524	-0,011423	-0,318199	-0,140903	0,544394	-0,756368
	2	0,011423	0,403384	-0,132862	-0,679302	0,518777	0,298177
	3	-0,318199	0,132862	0,688098	-0,378307	-0,129346	-0,497766
	4	0,140903	-0,679302	0,378307	0,054725	0,559143	0,244831
	5	0,544394	-0,518777	-0,129346	-0,559143	-0,277138	-0,168311
	6	0,756368	0,298177	0,497766	0,244831	0,168311	0,054365

Einzelheiten über das Vorhandensein und die Konfiguration des geomagnetischen Außenfeldes zu schließen.

Ganz abgesehen davon aber muß noch bedacht werden, daß die Zahlenwerte der Parameter für das geomagnetische Außenfeld noch einer Korrektur wegen der Erdabplattung bedürfen. Man kann diese Korrektur hier nicht vernachlässigen, weil die numerischen Werte der Parameter an sich schon sehr klein sind. Wird diese Korrektur angebracht, so ergeben sich wesentlich andere Entfernungen des Ringstromes als die aus den nicht korrigierten Parametern berechneten.

Es sei darauf hingewiesen, daß in dieser Arbeit für die Potentialberechnung des geomagnetischen Feldes zur Epoche 1945 die Zahlenwerte der Parameter benutzt wurden, wie sie in der Arbeit [1] angegeben sind. Es erwies sich als notwendig, diese Parameter späterhin in ihrer endgültigen Form etwas gegenüber den in [1] veröffentlichten Werten zu verändern. Diese Werte sind

in [2] angegeben. Die Korrekturen sind nicht wesentlich, ändern also an den hier mitgeteilten Ergebnissen nichts.

Da die Benutzung verschiedener Koordinatensysteme bei der Verwendung sphärisch-harmonischer Reihen in der Geophysik ganz allgemein von erheblicher, vor allem statistischer Bedeutung ist, seien auch an dieser Stelle die Zahlenwerte der $A_n^{p,m}$ und $B_n^{p,m}$ für die beiden in dieser Arbeit benutzten Koordinatensysteme nach Berechnung von KAUTZLEBEN in Tabelle II und III mitgeteilt.

Es sei mir gestattet, Herrn Dip.-Phys. WOLF KRÄMER meinen besten Dank auszusprechen für die Hilfe, die er mir bei der Durchführung der Rechnungen und bei der graphischen Darstellung der Ergebnisse geleistet hat. Herrn Dr. KAUTZLEBEN danke ich für die Durchsicht des Manuskriptes.

SCHRIFTTUM

1. FANSELAU, G., KAUTZLEBEN, H.: *Geofis. pura e appl.* **41** (1958), 33.
2. FANSELAU, G. u. a.: *Pure Appl. Geophys.* **57** (1964), 5.
3. KAUTZLEBEN, H.: Formeln zur Transformation der Kugelfunktionen bei Drehung des Koordinatensystems. Jb. 57 Observ. Niemeck, Berlin 1960, S. 157
4. OSIPOV, N. K.: Über den äußeren Anteil des Hauptfeldes der Erde (russ.) *Geomagn. i Aeron.* **3** (1963), 354.

ON THE PROBLEM OF REALITY OF THE EXTERNAL GEOMAGNETIC FIELD

G. FANSELAU

SUMMARY

It is shown that it is impossible to derive a real external geomagnetic field by the development of the geomagnetic potential in spherical harmonics. As a proof of these densities of energy of the external geomagnetic field every order was used as well as the distribution of the parameters in every order in respect to their zonal character. Neither the symmetry to the geomagnetic axis nor the symmetry to the geomagnetic equator is to be seen as it should have been in the magnetic field produced by the ring current. Physical facts developed from the parameters of geomagnetic external field are therefore not significant.

SUR LE PROBLÈME DE LA RÉALITÉ DU CHAMP GÉOMAGNÉTIQUE EXTÉRIEUR

G. FANSELAU

RÉSUMÉ

L'auteur démontre qu'un champ géomagnétique extérieur ne se laisse pas déduire des développements du potentiel. Pour le prouver, il utilise les densités d'énergie du champ géomagnétique extérieur des différents ordres, ainsi que la distribution dans chaque ordre des paramètres selon leur caractère zonal. Ni la symétrie axiale, ni la symétrie à l'équateur géomagnétique ne sont observables comme il faudrait dans un champs magnétique produit par un courant circulaire. Par conséquent, les conclusions physiques pouvant être tirées éventuellement des développements du potentiel ne sont point significatives.

К ВОПРОСУ О РЕАЛЬНОСТИ ВНЕШНЕГО ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Г. ФАНЗЕЛАУ

РЕЗЮМЕ

Показана невозможность выведения реального внешнего геомагнитного поля из разложения потенциалов. В качестве доказательства применяется плотность энергии внешнего геомагнитного поля для каждого порядка, а также распределение параметров различного порядка с учетом их зонального характера. При этом не выявляется ни осевая симметрия, ни симметрия к экватору, как это должно было бы иметь место в магнитном поле, возбужденном циклическим током. Поэтому физические выводы, сделанные по параметрам внешнего геомагнитного поля, не имеют значимости.

AUSGLEICHUNG KORRELIERTER BEOBACHTUNGEN NACH BEDINGUNGEN BEI SINGULÄRER KORRELATIONSMTÄRIX

V. K. HRISTOV, Sofia

[Eingegangen am 23. Februar 1965]

Wenn man eine Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen teilweise durchgeführt hat, so sind die ausgeglichenen Werte korreliert und man kann die letzteren mit den übrigen Beobachtungen einer weiteren gemeinsamen Ausgleichung unterziehen, jedoch unter Anwendung des allgemeinen Prinzips der kleinsten Quadrate. Die Korrelationsmatrix ist in diesem Falle singular (deren Determinante ist Null). Trotzdem ist das Verfahren anwendbar und führt zu den gleichen Verbesserungen und den gleichen Gewichten, was an einem einfachen Beispiel erläutert ist.

Es seien n Beobachtungen l_i mit der Korrelationsmatrix

$$Q_{n,n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & \frac{\varrho_{12}}{\sqrt{g_1 g_2}} & \dots & \frac{\varrho_{1n}}{\sqrt{g_1 g_n}} \\ \frac{\varrho_{21}}{\sqrt{g_2 g_1}} & \frac{1}{g_2} & \dots & \frac{\varrho_{2n}}{\sqrt{g_2 g_n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varrho_{n1}}{\sqrt{g_n g_1}} & \frac{\varrho_{n2}}{\sqrt{g_n g_2}} & \dots & \frac{1}{g_n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

gegeben, wo g_i die Gewichte und ϱ_{jk} die Korrelationskoeffizienten bedeuten.

Wenn wir die n Verbesserungen v_i

$$v_{1,n}^* = ||v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n||, \quad (2)$$

die Koeffizientenmatrix der $r < n$ Bedingungsgleichungen

$$A_{r,n}^* = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

und die r Absolutglieder w_i

$$w_{1,r}^* = ||w_1 \ w_2 \ \dots \ w_r|| \quad (4)$$

einführen, so können wir die Bedingungsgleichungen wie folgt aufschreiben

$$A^* \begin{matrix} v \\ + \\ w \end{matrix} = 0. \quad (5)$$

r,n $n,1$ $r,1$ $r,1$

Das allgemeine Prinzip der kleinsten Quadrate lautet

$$v^* Q_l^{-1} v = \text{Min.} \quad (6)$$

$1,n$ n,n $n,1$

(S. W. K. HRISTOV, »Verallgemeinerung des Prinzips der kleinsten Quadrate auf korrelierte Beobachtungen«, *Iswestija des Zentrallaboratoriums für Geodäsie bei der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften*, Bd. V, Sofia, 1964, in bulgarischer Sprache.)

Mit der symmetrischen Matrix

$$N = A^* \begin{matrix} Q_l \\ A \end{matrix} \quad (7)$$

r,r r,n n,n n,r

bilden wir die Normalgleichungen

$$N \begin{matrix} k \\ + \\ w \end{matrix} = 0 \quad (8)$$

r,r $r,1$ $r,1$ $r,1$

für die sog. Korrelaten k_i

$$k^* = \|\|k_1 \ k_2 \ \dots \ k_r\|\|. \quad (9)$$

$1,r$

Die Verbesserungen v_i erhält man dann nach

$$v = Q_l \begin{matrix} A \\ k \end{matrix}. \quad (10)$$

$n,1$ n,n n,r $r,1$

Die Summe der kleinsten Quadrate kann man nach

$$v^* \begin{matrix} Q_l^{-1} \\ v \end{matrix} = - \begin{matrix} k^* \\ w \end{matrix} \quad (11)$$

$1\ n$ n,n $n,1$ $1,r$ $r,1$

auf zweifache Weise errechnen, und damit bekommt man den mittleren Fehler μ der Gewichtseinheit

$$\mu = \sqrt{\frac{v^* Q_l^{-1} v}{r}}. \quad (12)$$

Die Gewichtsmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen $l_i + v_i$ ist

$$Q_{l+v} = \begin{matrix} Q_l \\ - \\ Q_l \end{matrix} \begin{matrix} A \\ N^{-1} \\ A^* \end{matrix} \begin{matrix} Q_l \\ \\ Q_l \end{matrix}. \quad (13)$$

n,n n,n n,n n,r r,r r,n n,n

In der Hauptdiagonale haben wir gerade die reziproken Werte der Gewichte, so daß wir sofort den mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtungen berechnen können.

Es kann der Fall eintreten, daß die *Korrelationsmatrix singular* ist, d. h. deren *Determinante Null* ist, beispielsweise, wenn man ein Teilnetz vorerst ausgeglichen hat. *Auch in diesem Fall* kann die Methode angewandt werden.

Da die Beobachtungen im allgemeinen unkorreliert sind, d. h. die Korrelationskoeffizienten Null sind, geht einfach die Korrelationsmatrix Q in die inverse Gewichtsmatrix P über und umgekehrt — die inverse Korrelationsmatrix in die Gewichtsmatrix

$$Q_{n,n}^{-1} = P_{n,n}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{g_n} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$Q_{n,n}^{-1} = P_{n,n} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_n \end{pmatrix}. \tag{15}$$

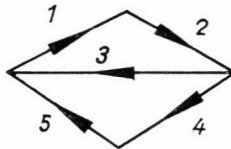


Abb. 1

Wir wollen das Verfahren am besten an einem einfachen Beispiel erläutern. Es sei ein Nivellierungsnetz aus zwei Schleifen gegeben (Abb. 1), wo die Strecken mit gleichem Gewicht gemessen sind, weshalb wir $g_i = 1$ setzen.

Die Bedingungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &+ w_1 = 0 \\ -v_3 + v_4 + v_5 + w_2 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

und damit

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

mit der Gewichtsmatrix

$$P = Q^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5,5 \\ 5,5 \end{matrix} & \end{matrix}, \quad (18)$$

also auch

$$P^{-1} = Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5,5 \\ 5,5 \end{matrix} & \end{matrix}. \quad (19)$$

Wir bekommen nach (7)

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2,2 \end{matrix} & \end{matrix} \quad (20)$$

und nach (8)

$$\begin{aligned} 3k_1 - k_2 + w_1 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + w_2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{3}{8}w_1 - \frac{1}{8}w_2 \\ k_2 &= -\frac{1}{8}w_1 - \frac{3}{8}w_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Damit errechnen wir nach (10)

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{3}{8}w_1 - \frac{1}{8}w_2 \\ v_2 &= -\frac{3}{8}w_1 - \frac{1}{8}w_2 \\ v_3 &= -\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{4}w_2 \\ v_4 &= -\frac{1}{8}w_1 - \frac{3}{8}w_2 \\ v_5 &= -\frac{1}{8}w_1 - \frac{3}{8}w_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Aus (11) folgt

$$[p v v] = - [k w] = \frac{3}{8} w_1^2 + \frac{1}{4} w_1 w_2 + \frac{3}{8} w_2^2 \quad (24)$$

und, da $r = 2$ ist, haben wir nach (12)

$$\mu^2 = \frac{3}{16} w_1^2 + \frac{1}{8} w_1 w_2 + \frac{3}{16} w_2^2. \quad (25)$$

Mit

$$N^{-1} = \begin{vmatrix} 3/8 & 1/8 \\ 1/8 & 3/8 \end{vmatrix} \quad (26)$$

errechnen wir

$$Q_l A \cdot N^{-1} \cdot A^* Q_l = \begin{vmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 3/8 & 3/8 \end{vmatrix} \quad (27)$$

und damit haben wir nach (13)

$$Q_{l+v} = Q_l - Q_l A N^{-1} A^* Q_l = \begin{vmatrix} 5/8 & -3/8 & -1/4 & -1/8 & -1/8 \\ -3/8 & 5/8 & -1/4 & -1/8 & -1/8 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1/8 & -1/8 & 1/4 & 5/8 & -3/8 \\ -1/8 & -1/8 & 1/4 & -3/8 & 5/8 \end{vmatrix} \quad (28)$$

Die Werte in der Hauptdiagonale $5/8, 5/8, 1/2, 5/8, 5/8$, sind gerade die reziproken Gewichte der ausgeglichenen Beobachtungen.

Jetzt gleichen wir nur die erste Schleife, also die erste Gleichung (16), aus

$$v'_1 + v'_2 + v'_3 + w_1 = 0. \quad (29)$$

Wir bekommen

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = -\frac{1}{3} w_1 \quad (30)$$

mit der Korrelationsmatrix (13) der ausgeglichenen Beobachtungen $l_i + v'_i$

$$Q_{l+v'} = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Wir verbinden nun diese ausgeglichenen Beobachtungen $l_1 + v'_1, l_2 + v'_2, l_3 + v'_3$ mit den Beobachtungen v_4, v_5 in *eine* Ausgleichung. Die betreffende Korrelationsmatrix nach (31) ist

$$Q_{l+v'} = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Seine Determinante ist jedoch gleich Null

$$|Q_{l+v'}|_{5,5} = 0, \quad (33)$$

also ist die Korrelationsmatrix singular.

Die Bedingungsgleichungen lauten jetzt

$$\begin{aligned} v''_1 + v''_2 + v''_3 &= 0 \\ -v''_3 + v_4 + v_5 + \frac{1}{3}w_1 + w_2 &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

wobei natürlich das Absolutglied in der ersten Gleichung verschwindet und das Absolutglied in der zweiten Gleichung wegen $l_3 + v'_3$ um $1/3 w_1$ verändert wird.

Für die Koeffizientenmatrix N erhalten wir aus (17) und (32) nach (7)

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{vmatrix}, \quad (35)$$

also lauten die Normalgleichungen (8)

$$\begin{aligned} 0 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 &+ 0 = 0 \\ 0 \cdot k_1 + \frac{8}{3} \cdot k_2 + \frac{1}{3}w_1 + w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \text{unbestimmt} \\
 k_2 &= -\frac{1}{8}w_1 - \frac{3}{8}w_2.
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Nach (10) erhalten wir jedoch für die Verbesserungen v_i'' ganz bestimmte Werte

$$v_{5,1}'' = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & -2/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{unbestimmt} \\ -\frac{1}{8}w_1 - \frac{3}{8}w_2 \end{pmatrix},
 \tag{38}$$

nämlich

$$\begin{aligned}
 v_1'' &= -\frac{1}{24}w_1 - \frac{1}{8}w_2 \\
 v_2'' &= -\frac{1}{24}w_1 - \frac{1}{8}w_2 \\
 v_3'' &= \frac{1}{12}w_1 + \frac{1}{4}w_2 \\
 v_4 &= -\frac{1}{8}w_1 - \frac{3}{8}w_2 \\
 v_5 &= -\frac{1}{8}w_1 - \frac{3}{8}w_2.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Wenn wir dazu noch (30) hinzufügen, so kommen wir gerade auf (23).

Die rechte Seite von (11) kann sofort berechnet werden. Wir haben mit (37) und (34)

$$\begin{aligned}
 -[kw] &= \text{unb.} \times 0 + \left(\frac{1}{8}w_1 + \frac{3}{8}w_2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}w_1 + w_2\right) = \\
 &= \frac{1}{24}w_1^2 + \frac{1}{4}w_1w_2 + \frac{3}{8}w_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Die linke Seite von (11) kann auch berechnet werden, jedoch durch einen Grenzprozeß.

Wenn wir zu (40) auch die Verbesserungen aus der ersten Ausgleichung (30) hinzufügen, so kommen wir gerade auf (24)

$$\begin{aligned}
 [pvv] &= 3 \times \frac{1}{9} w_1^2 + \left(\frac{1}{24} w_1^2 + \frac{1}{4} w_1 w_2 + \frac{3}{8} w_2^2 \right) = \\
 &= \frac{3}{8} w_1^2 + \frac{1}{4} w_1 w_2 + \frac{3}{8} w_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Durch einen Grenzprozeß können die reziproken Gewichte nach (13) leicht errechnet werden. Wir schreiben nämlich die Matrix (35) ein wenig modifiziert auf mit $\varepsilon \rightarrow 0$

$$N = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 8/3 \end{vmatrix}
 \tag{42}$$

und bekommen die inverse Matrix

$$N^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 3/8 \end{vmatrix}.
 \tag{43}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
 & Q_{t+v'} \underset{5,5}{A} \cdot \underset{5,2}{N}^{-1} \cdot \underset{2,2}{A}^* \underset{2,5}{Q}_{t+v'} = \\
 & = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & -2/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 3/8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} 1/24 & 1/24 & -1/12 & 1/8 & 1/8 \\ 1/24 & 1/24 & -1/12 & 1/8 & 1/8 \\ -1/12 & -1/12 & 1/6 & -1/4 & -1/4 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 3/8 & 3/8 \end{vmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Aus (32) und (44) haben wir nach (13)

$$\begin{aligned}
 Q_{l+v} &= Q_{l+v} - Q_{l+v} \cdot A N^{-1} A^* Q_{l+v} = \\
 &= \begin{pmatrix} 5/8 & -3/8 & -1/4 & -1/8 & -1/8 \\ -3/8 & 5/8 & -1/4 & -1/8 & -1/8 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1/8 & -1/8 & 1/4 & 5/8 & 3/8 \\ -1/8 & -1/8 & 1/4 & -3/8 & 5/8 \end{pmatrix}, \quad (45)
 \end{aligned}$$

was mit (28) vollkommen übereinstimmt.

Wie man sieht, kommt man, wenn man das verallgemeinerte Prinzip der kleinsten Quadrate anwendet, zu den gleichen Verbesserungen und den gleichen Gewichten, sogar wenn die *Korrelationsmatrix* *singulär* ist.

ADJUSTMENT OF CORRELATED CONDITIONAL OBSERVATIONS IN CASE OF A SINGULAR CORRELATION MATRIX

V. K. HRISTOV

SUMMARY

If an adjustment according to conditional observations is partly accomplished, the adjusted values will be correlate and can be subjected to a further common adjustment with the remaining observations, in any case under the application of the general principle of least squares. In this case, the correlation matrix is a singular one (the determinant is zero). In spite of this, the procedure is utilizable, leading to the same corrections and weight; this being illustrated by a simple example.

LA COMPENSATION D'OBSERVATIONS CONDITIONELLES CORRÉLÉES EN CAS DE MATRICE DE CORRÉLATION SINGULIÈRE

V. K. HRISTOV

RÉSUMÉ

Si la compensation d'observations conditionnelles est partiellement exécutée, les valeurs compensées sont corrélées et peuvent être soumises à une compensation commune avec les autres observations, à condition de l'application du principe général des moindres carrés. En ce cas, la matrice de corrélation est singulière (le déterminant est zéro). Le procédé est toutefois applicable et conduit aux mêmes corrections et poids, fait illustré par un exemple simple présenté par l'auteur.

УРАВНОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ СИНГУЛЯРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

В. К. ХРИСТОВ

РЕЗЮМЕ

При частичном выполнении выравнивания определенных наблюдений выравненные величины являются коррелированными и могут подвергаться дальнейшему выравниванию совместно с остальными наблюдениями, но с учетом общего принципа наименьших квадратов. В этом случае корреляционная матрица является сингулярной (определитель равен нулю). Несмотря на это рассматриваемый прием применим, и он приводит к одинаковым поправкам и одинаковым весам, что иллюстрируется на простом примере.

DIE PERSPEKTIVEN DER MODERNISIERUNG DER KLASSISCHEN TRIANGULATION

CZ. KAMELA, Warszawa

[Eingegangen am 5. April 1965]

Es wurden einige Aspekte der Modernisierung der klassischen Triangulation besprochen. Als ideales Netz wurde ein solches Netz mit Seitenlängen von $20 \div 50$ km angesehen, in dem mit großer Genauigkeit alle Winkel und Seiten gemessen sind, und welches nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen ausgeglichen wird. Aus den Koordinaten der Punkte können dann auf einer Referenzfläche die Dreieckseiten mit einer Länge von $200 \div 300$ km sowie alle Winkel in den großen Dreiecken errechnet werden. Hier ist die ungarische Methode von Prof. Dr. St. HAZAY, Prof. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH und Prof. Dr. E. REGŐCZI sowie die polnische Methode von Dr. T. KLUSS anzuwenden. Das so entstandene Netz wird hier Zwischen-Triangulationsnetz genannt. Die Punkte des Zwischen-Netzes sollten sich mit den Laplace-Punkten des klassischen Netzes decken. Diese Triangulation kann man mit den Messungen der astronomischen Triangulation (nach der Methode von Y. VÄISÄLÄ) sowie mit Radar-Messungen verstärken. Diese Zwischen-Triangulation könnte man schon mit der Welt-Satelliten-Triangulation von $1000 \div 3000$ km langen Dreieckseiten verbinden. Man kann folgende relative Genauigkeiten der Seitenbestimmung in den erwähnten Triangulationen erwarten:

- a) in der modernisierten klassischen Triangulation etwa $\pm 1/300\ 000$,
- b) in der Zwischen-Triangulation etwa $\pm 1/200\ 000$ bis $\pm 1/300\ 000$,
- c) in der Satelliten-Triangulation etwa $\pm 1/100\ 000$ bis $\pm 1/200\ 000$.

1. Die klassische Triangulation und die Triangulation mit künstlichen Trabanten

Die großen kontinentalen Gebiete unserer Erde besitzen die klassischen Flächen-Triangulationsnetze mit Seitenlängen von etwa $20-50$ km.

Die einzelnen kontinentalen Triangulationsnetze konnten bisher nicht mit genügender Genauigkeit über Ozeane verbunden werden. Mit der Entwicklung der Technik sind neuerlich neue Lösungsmethoden der Triangulation über Ozeane geschaffen worden, wie z. B. die Triangulation mit Hilfe der Beobachtungen von künstlichen Trabanten, wodurch man die ganze Erdoberfläche mit Dreiecken von etwa $1000 \div 3000$ km Seitenlängen bedecken kann.

Unter Verwendung von Radarwellen eventuell Laser-Strahlen erhält man ein Netz mit Seitenlängen von einigen zehn bis etwa einigen hundert und sogar tausend km.

Auch die astronomische Triangulationsmethode von Y. VÄISÄLÄ sowie die Hotinesche dreidimensionale Triangulation sollen hier erwähnt werden. In der Hotineschen Triangulationsmethode sollte man — meiner Meinung nach — die mit Refraktion belastete Messung der Zenitdistanzen durch elektromagnetische Entfernungsmessungen zwischen denselben Punkten ersetzen,

wodurch man die Genauigkeit der Koordinatenbestimmung der Punkte erhöhen kann.

Es ist selbstverständlich, daß man bei der Betrachtung des Weltnetz-Problems die Möglichkeit der Verbindung von Kontinentalnetzen mit verlangter Genauigkeit haben muß und außerdem müssen die bestehenden klassischen Haupt-Triangulationsnetze nach einer Modernisierung ausgenutzt werden.

Die Perspektiven einer solchen Modernisierung möchte ich hier skizzieren unter der Annahme, daß bei der Lösung der Aufgabe die bisherigen Errungenschaften hinsichtlich der Steigung der Genauigkeit klassischer Triangulation berücksichtigt werden sollen.

2. Übergang von klassischer Triangulation zur Triangulation mit künstlichen Trabanten

Es ist klar, daß man die klassische Triangulation mit Seitenlängen von 20—50 km, mit der Satelliten-Triangulation (Seitenlängen von 1000 ÷ 3000 km) unmittelbar nicht verbinden kann. Man sollte wenigstens noch eine Ordnung der Triangulation gründen, mit Seitenlängen von etwa 200 ÷ 300 km. Ich werde sie »Zwischen-Triangulation« nennen.

Man kann diese inmitten liegenden Seitenlängen von 200 ÷ 300 km auf verschiedenen Wegen erhalten, von denen ich einige noch später erwähne. Hier will ich noch einmal unterstreichen, daß der Anschluß beider Triangulationen in Hinsicht auf die Genauigkeit übereinstimmen muß. Die klassische Triangulation bezieht sich auf irgendein Referenzellipsoid, dagegen wird die Zwischen-Triangulation und die Satelliten-Triangulation fast immer eine dreidimensionale Triangulation. Der Übergang von einer klassischen zur dreidimensionalen Triangulation bietet keine Schwierigkeiten.

Ich habe schon erwähnt, daß man die Zwischen-Triangulation verschiedenartig erhalten kann, wie z. B. aus der Radar-Laser-Triangulation oder der Hotineschen Triangulation mit meiner Bemerkung über den Ersatz von Zenitdistanzmessung (wegen des Refraktionseinflusses) durch Radar-Entfernungsmessung.

Hier wird nur die Modernisierung klassischer Triangulation besprochen, so daß man aus ihr Elemente der Zwischen-Triangulation von hoher Genauigkeit erhalten kann.

3. Die Perspektiven der Modernisierung der klassischen Triangulation

Bei der Modernisierung der klassischen Triangulation mit Seitenlängen von 20 ÷ 50 km sollte man beachten, ein Flächennetz (das das ganze Kontinent mit anliegenden Dreiecken bedeckt) zu erhalten. In diesem Netz wäre erwünscht, alle Winkel mit einer höchstmöglichen Genauigkeit sowie alle Drei-

eckseiten mit annähernd derselben Genauigkeit zu bemessen; um die gegenseitigen Gewichtsverhältnisse der gemessenen Winkel und Seiten möglichst richtig bestimmen zu können. In einem solchen idealen Netz sollte man, wie in jedem astronomisch-geodätisch-gravimetrischen Netz, ziemlich dicht gelegene Laplace-Azimute messen und mit großer Genauigkeit die astronomischen Koordinaten der Laplace-Punkte bestimmen. Es wäre erwünscht, daß jeder Punkt der Zwischen-Triangulation ein Laplace-Punkt sei.

Zur Bestimmung der Lotabweichungen und der Geoidhöhen in bezug auf ein Referenzellipsoid sollte man nicht nur die astronomisch-geodätischen Messungen, sondern auch die entsprechenden gravimetrischen Daten ausnutzen. Nach der Durchführung entsprechender Reduktionen der auf der physischen Erdoberfläche gemessenen Größen zur Referenz-Fläche muß man das Netz nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen ausgleichen.

Aus den ausgeglichenen Koordinaten der Punkte klassischer Triangulation mit Seitenlängen von $20 \div 50$ km kann man die Dreieckseiten ($200 \div 300$ km) sowie die Winkel der Zwischen-Triangulation berechnen. Hier mögen einige Abarten des ungarischen Triangulierungsverfahrens (von Prof. Dr. ST. HAZAY, Prof. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH und Prof. Dr. E. REGŐCZI) sowie die polnische Methode der Berechnung langer Seiten und Winkel aus kleinen Dreiecken mit Erfolg angewandt werden.

Sind die Meereshöhen der Punkte bekannt, so können die obigerweise erhaltenen Dreieckseiten auf die räumliche Entfernungen zwischen diesen Punkten umgerechnet werden, die man weiterhin mit den Ergebnissen der astronomischen Triangulation nach Y. VÄISÄLÄ kombinieren kann, unter der Annahme, daß jeder Punkt der Zwischen-Triangulation gleichzeitig als Standpunkt für die astronomische Triangulation gilt. Wie ich schon bemerkt habe, wäre es gut, wenn der Punkt gleichzeitig auch ein Laplace-Punkt im klassischen Triangulationsnetz wäre.

Von diesen Punkten aus kann man synchron die räumlichen Entfernungen an die Flaren mit Hilfe von Radar bestimmen, und daraus ein kombiniertes, räumliches Zwischen-Netz erhalten. Das erhaltene Zwischen-Triangulationsnetz muß man nun an das Satelliten-Triangulationsnetz anschließen. Nimmt man die kontinentalen Punkte der Satelliten-Triangulation als Punkte der Zwischen-Triangulation, so ist der Anschluß beider Netze vereinfacht. Auf die Einzelheiten wollen wir hier nicht näher eingehen.

4. *Schlußbemerkungen*

Zum Schluß soll noch einiges über die Genauigkeitsfrage gesagt werden. Dies ist die Frage nach der gegenseitigen Übereinstimmung der Genauigkeiten der Messungen in den einzelnen Netzen sowie zwischen den Triangulationen. Wenn die klassische Triangulation Elemente hoher Genauigkeit für die Zwi-

schen-Triangulation liefern soll, so muß sie selbst sehr genau sein; das heißt, die Winkel- und Seitenmessungen sowie die astronomischen Bestimmungen müssen höchst genau durchgeführt werden, unter Berücksichtigung gravimetrischer Aufnahmen.

Man kann annehmen, daß in einem klassischen Triangulationsnetz höchster Genauigkeit die ausgeglichenen Seiten mit einer relativen Genauigkeit von etwa $\pm 1/300\ 000$ bestimmt sind. In der Zwischen-Triangulation dagegen, die durch Radar-Entfernungsmessungen und andere verstärkt wird, ist ein relativer Fehler der Längenbestimmung etwa $\pm 1/200\ 000 \div \pm 1/300\ 000$ zu erwarten.

Diese Genauigkeit kann vorläufig bei der Satellittriangulation nicht gesichert werden. Möglichkeiten zur Erhöhung der Genauigkeit des Satelliten-Netzes kann die Anwendung von speziellen geodätischen Trabanten geben. Wird die Satellitenbahn genau bekannt, so kann man unter Ausnutzung dynamischer Methoden für die Bestimmung des Schwerpunktes der Erde in naher Zukunft eine relative Genauigkeit der Bestimmung von 2000 km langen Seiten in Satelliten-Triangulation, von etwa $\pm 1/100\ 000$ bis $\pm 1/200\ 000$ erwarten.

Nach unserer Ansicht sind hier die neuen Errungenschaften der ungarischen Triangulation von Prof. Dr. ST. HAZAY, Prof. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH und Prof. Dr. E. REGŐCZI sowie der polnischen Triangulation von Prof. Dr. T. KLUSS mit Erfolg anzuwenden. Natürlich ist der hier skizzierte Artikel diskutierbar. Ich hoffe, daß die Diskussion des Artikels zur weiteren Vervollkommnung der Methode der Gründung des Weltnetzes führen wird. Dadurch ergeben sich weitere Möglichkeiten zur geometrischen Untersuchung der Figur der Erde.

THE PERSPECTIVES OF A MODERNIZATION OF CLASSICAL TRIANGULATION

CZ. KAMELA

SUMMARY

Certain aspects of a modernization of classical triangulation are discussed. As an ideal one, that network with side lengths of 20÷50 km are taken into regard in which all angles and sides are measured with the utmost precision, and which is adjusted according to the method of intermediary observations. In this case it is possible to compute, from the point coordinates, the triangle sides with a length of 200÷300 km and all angles of the major triangle on a reference plane. For this purpose, the Hungarian method of Prof. Dr. I. HAZAY, Prof. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH, Prof. Dr. E. REGŐCZI, further the Polish method of Dr. T. KLUSS are to be applied. The network developed in this way is termed as intermediary triangulation network. The points of the intermediary network should coincide with the Laplace-points of the classical network. This sort of triangulation can be corroborated by the measurements of astronomical triangulation (according to the method of Y. VÄSIÄLÄ), further by radar measurements. The intermediary triangulation can be then be connected to the world satellite triangulation with triangle sides of 1000÷3000 km. Following relative accuracy of the side-determinations may be expected from the triangulations mentioned:

- a) in the modernized classical triangulation: about $\pm 1/300\ 000$;
- b) in the intermediary triangulation: about $\pm 1/200\ 000 - \pm 1/300\ 000$;
- c) in satellite triangulation: about $\pm 1/100\ 000 - \pm 1/200\ 000$.

PERSPECTIVES DE MODERNISATION DE LA TRIANGULATION CLASSIQUE

CZ. KAMELA

RÉSUMÉ

Quelques aspects de la modernisation de la triangulation classique sont discutés. Comme réseau idéal, on admet un réseau à côtés de $20 \div 50$ km de longueur, dans lequel tous les angles et côtés sont mesurés avec une grande précision et qui est compensé selon la méthode des observations intermédiaires. Des coordonnées des points on peut calculer alors, sur une surface de référence, les côtés des triangles d'une longueur de $200 \div 300$ km, et tous les angles dans les grands triangles. On peut utiliser ici la méthode hongroise des Prof. Dr. I. HAZAY, A. TÁRCZY-HORNOCH et E. REGŐCZI, ainsi que la méthode polonaise du Dr. T. KLUSS. Le réseau établi de cette manière est nommé réseau de triangulation intermédiaire. Les points de ce réseau doivent coïncider avec les points Laplace du réseau classique. Cette triangulation peut être renforcée par les mesures de la triangulation astronomique selon la méthode de Y. VÄISÄLÄ et par des mesurages au radar. Cette triangulation intermédiaire peut être liée à la triangulation mondiale à satellites, avec des côtés de triangles d'une longueur de $1000 \div 3000$ km. Dans les triangulations mentionnées, on peut prévoir les précisions relatives suivantes pour la détermination des côtés:

- a) triangulation classique modernisée: $\pm 1/300\ 000$ environ;
- b) triangulation intermédiaire: $\pm 1/200\ 000 - \pm 1/300\ 000$ environ;
- c) triangulation à satellites: $\pm 1/100\ 000 - \pm 1/200\ 000$ environ.

О ПЕРСПЕКТИВАХ МОДЕРНИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Ц. КАМЕЛА

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются некоторые соображения по модернизации классической триангуляции. В качестве идеальной сети принимается сеть со сторонами длиной в $20-50$ км, в которой все углы и стороны замерены с высокой точностью и которая уравнивается методом промежуточных наблюдений. По координатам пунктов, на определенной поверхности приведения, можно вычислить стороны треугольников длиной около $200-300$ км, а также и все углы в большом треугольнике. При этом применяется венгерский метод проф. д-ра Хазаи, проф. д-ра А. Тарци-Хорнох и д-ра Э. Регеци, а также польский метод д-ра Т. Клусса. Созданная таким образом сеть называется «промежуточной сетью» триангуляции. Пункты промежуточной сети должны совпадать с пунктами Лапласа классической сети. Такая триангуляция может подтверждаться измерениями астрономической триангуляции (по методу Виззэ), а также радиолокаторными измерениями. Эта триангуляция уже может быть привязана ко всемирной триангуляции, проводящейся при помощи искусственных спутников с треугольниками с длиной сторон около $1000-3000$ км. В рассматриваемой триангуляции можно рассчитывать на следующие относительные точности определения сторон треугольников:

- a) при модернизированной классической триангуляции — около $\pm 1/300\ 000$;
- б) при промежуточной триангуляции — от $\pm 1/200\ 000$ до $\pm 1/300\ 000$;
- в) при триангуляции искусственными спутниками — от $\pm 1/100\ 000$ до $\pm 1/200\ 000$.

DAS NORMALSPHÄROID DER ERDE UND DIE DYNAMISCHE BESTIMMUNG SEINER GEOMETRISCHEN PARAMETER

K. LEDERSTEGER, Wien

[Eingegangen am 22. Februar 1965]

Es gibt keine Gleichgewichtsfigur, welche mit der wirklichen Erde die Rotationsgeschwindigkeit und die Trägheitsmomente gemeinsam hat. Unter Beachtung der Flutreibung erhält man jedoch die Gleichgewichtsfigur der Erde für einen um 10^{m31s} kürzeren Sterntag mit der Oberflächenabplattung 1 : 296. Für die heutige Rotationsgeschwindigkeit ergibt sich daraus das Normalsphäroid der Erde, welches keine Gleichgewichtsfigur mehr ist. Nur die Wasserhülle hat infolge der verminderten Fliehkraft die heutige Abplattung 1 : 298,3 angenommen, während die Abplattung der inneren Flächen gleicher Dichte zu groß und daher das Trägheitsmoment C etwas zu klein ist. Dieses Normalsphäroid unterscheidet sich vom Helmertschen Niveausphäroid nur dadurch, daß an Stelle der wirklichen Massefunktion J_4 das J_4 der Gleichgewichtsfigur der Erde tritt. Die einparametrische Figur [k^2E , ω , J_2 , γ_0] lehrt daß bei einer dynamischen Bestimmung der geometrischen Parameter der Normalfigur die Abplattung fast ausschließlich vom Fehler in J_2 abhängt, während die Hauptfehlerquelle für die Achse in der Unsicherheit von k^2E liegt. Die aus den künstlichen Satelliten abgeleitete Massefunktion $|J_4|$ ist viel zu klein.

Derzeit wird noch fast allgemein das Niveauellipsoid als generelle Bezugsfläche der Geodäsie betrachtet, wiewohl man längst weiß, daß es sich dabei um eine zwar mathematisch mögliche Lösung, jedoch um eine physikalische Fiktion handelt. Das Niveauellipsoid beruht nämlich auf einer physikalisch unberechtigten Wahl der Stokesschen Elemente, d. h. der Masse einer diese umschließenden äußeren Niveaufläche und der Rotationsgeschwindigkeit. Zu jedem physikalisch möglichen System dieser Elemente E , S und ω gehört stets nur eine einzige »wesentliche« Massenordnung, aus der alle übrigen, unendlich vielen zugehörigen Massenordnungen des berühmten Theorems von STOKES—POINCARÉ durch Verschiebungen in homogenen, konzentrischen und konfokalen Ellipsoidschalen hervorgehen, wenn man nur sphäroidische, rotations- und äquator-symmetrische Flächen heranzieht. Im Grenzfall können diese Verschiebungen natürlich auch in homogenen Kugelschalen mit dem Mittelpunkt im Schwerpunkt erfolgen. Der obige Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von der strengen Eindeutigkeit des Dichtegesetzes der Gleichgewichtsfiguren. Bei diesen ist die Gleichgewichtsordnung die wesentliche Massenordnung, während durch jede mögliche Massenverschiebung das Gleichgewicht zerstört wird.

Der Satz von STOKES—POINCARÉ erfährt aber insoferne eine bemerkenswerte Einschränkung, als die Elemente keineswegs frei wählbar sind. Vielmehr gibt es zu E und S entweder gar keine oder nur eine einzige Rotationsgeschwin-

digkeit oder schließlich einen unendlichen, beschränkten Wertevorrat in ω . Bei Beschränkung auf Gleichgewichtsanzordnungen gibt es für das Ellipsoid $S(a, e)$ nur die Homogenität und damit allein die Rotationsgeschwindigkeit des MacLaurinschen Ellipsoides. Für die größere Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist das allgemeine Niveauellipsoid physikalisch unmöglich. In Näherung 4.0. repräsentiert jede Fläche $S(a, e, f_4)$ bereits unendlich viele Gleichgewichtsfiguren, wobei das Minimum der Rotationsgeschwindigkeit der einparametrischen Gleichgewichtsfigur, das Maximum jedoch einer äußeren Niveaufläche eines kleineren MacLaurinschen Ellipsoides zugehört. Aber schon in Näherung 6.0. fallen für den Formparameter $f_6 = 0$ Maximum und Minimum der Rotationsgeschwindigkeit im Gleichgewichtsfalle wieder zusammen.

Damit sind die notwendigen Grundlagen für die Definition des Normalsphäroides der Erde geschaffen. Da die Erde erfahrungsgemäß recht nahe im hydrostatischen Gleichgewicht ist, liegt die Annahme nahe, daß dieses Gleichgewicht durch die Beseitigung der Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste oder durch deren Regularisierung, etwa nach einem geeigneten isostatischen Modell, hergestellt werden kann. Bei dieser Regularisierung müßte vor allem das Hauptträgheitsmoment C um die Rotationsachse erhalten bleiben, sofern man im Potentialausdruck lediglich die Eigengravitation und die Fliehkraft berücksichtigt. Denn dann liegt das in sich geschlossene Massensystem der Erde vor, für welches der Drehimpuls ωC und daher mit ω auch C erhalten bleiben muß. Ferner liegt es nahe zu fordern, daß nach der Regularisierung das äquatoriale Trägheitsmoment A des Normalsphäroides mit dem arithmetischen Mittel der beiden tatsächlichen Trägheitsmomente A und B zusammenfällt, deren Differenz $(B - A)$ bei der Regularisierung selbstverständlich verschwinden muß. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung der Erhaltung der statischen Abplattung $J_2 = [C - (A + B)/2] : Ea^2$.

Nun kann die statische Abplattung mit hoher Sicherheit aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten abgeleitet werden: $J_2 = 108\,310 \cdot 10^{-8}$, während die Präzessionskonstante die dynamische Abplattung $H = [C - (A + B)/2] : C$ liefert, wenn man das Massenverhältnis Erde-Mond kennt. BULLARD [1] fand:

$$E = 81,271 M; \quad H = (327\,236 \pm 59) \cdot 10^{-8}. \quad (1)$$

Mit den verwendeten Werten

$$E = 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad a = 6,37829 \cdot 10^8 \text{ cm} \quad (2)$$

folgt:

$$(C - A) = J_2 Ea^2 = 263,34 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \quad (3)$$

$$C = (C - A) : H = 80\,472,91 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2.$$

Unter der Voraussetzung des stetigen Dichtegesetzes der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren konnten früher [2] die drei Lösungen $[E, \omega, a, J_2]$, $[E, \omega, a, H]$ und $[E, \omega, a, C]$ berechnet werden, die der Reihe nach auf die Reziprokwerte der Abplattung führten: $e^{-1} = 298,25$; $297,38$ und $299,69$. Namentlich die sicher zu kleine Abplattung der letzten Lösung, die den richtigen Drehimpuls aufweist, ließ die hydrostatische Theorie als ungeeignet erscheinen. Demgegenüber liefert die erste Figur dank der Verwendung der Stokesschen Konstanten J_2 fast exakt die »tatsächliche« Abplattung der Erde, worunter wir natürlich die Abplattung des dem Geoid zugeordneten Helmert-schen Rotations-Niveausphäroides vierten Ranges zu verstehen haben.

Die Existenz des Weltmeeres, sowie die verschiedenen, auf seismischem Wege erschlossenen Unstetigkeitsflächen der Dichte beweisen aber, daß die Erde kein stetiges Dichtegesetz besitzt, und es ist daher klar, daß die drei obigen Gleichgewichtsfiguren unmöglich identisch sein können. Somit schien es nicht nur möglich, sondern sogar ziemlich wahrscheinlich, daß ein komplizierteres, vielparametrisches Modell existiert, das dem inneren Aufbau der Erde möglichst weitgehend gerecht wird und gleichzeitig die obige Definition des Normal-sphäroides befriedigt. So wurde zunächst unter Berücksichtigung des Welt-ozeans und der bekannten Tiefe der Kernoberfläche ($a_k = a - 2900$ km) ein sechsparametrisches Modell durchgerechnet. Nach Abhebung des Ozeans gemäß dem Prinzip der Entblätterung verblieb eine vierparametrische Festerde, bestehend aus einem heterogenen Mantel und einem heterogenen Kern. Mit den Daten $[E', \omega, a', a_k, J_2']$ ergeben sich begreiflicherweise noch ∞^2 Lösungen, deren Gültigkeitsbereich von vier Linien begrenzt ist. Von der Ecke A , dem einzig möglichen Wiechert-Modell, gehen zwei lineare Figurenreihen aus, die Reihe AF mit homogenem Kern und die Reihe AB mit homogenem Mantel. Die Ecke B ist mit dem einparametrischen Modell D durch die Reihe BD von Figuren mit verschwindendem Dichtesprung $\Delta\rho = 0$ verbunden. Den Abschluß bildet die Reihe DF von Figuren, für welche die Teilmasse E_1 zum Aufbau der Mantelfigur mit der Gesamtmasse E identisch ist. Im allgemeinen haben je unendlich viele Lösungen dasselbe Trägheitsmoment C . Das Maximum von C gehört zum Wiechert-Modell A , das Minimum zur Figur F und es gilt für die Gesamtfigur: $80\,631 \cdot 10^{40} \leq C \leq 81\,440 \cdot 10^{40}$ g cm², während der empirische Wert $80\,473 \cdot 10^{40}$ g cm² um $158 \cdot 10^{40}$ unter dem Minimum und um $292 \cdot 10^{40}$ g cm² unter dem Wert der Figur D liegt [loc. cit. 2), Seite 113—117].

Ein achtparametrisches Modell, bei dem zwischen dem Meeresboden und der Manteloberfläche noch eine homogene Kruste der Dichte 2,67 eingeschoben war, brachte nur eine geringfügige Verschiebung und Verdrehung des Gültigkeitsbereiches, verbunden mit einer kaum nennenswerten Änderung der Trägheitsmomente. Ein annähernd den herrschenden Vorstellungen der Geophysiker entsprechendes Modell hat ein Trägheitsmoment C , das um etwa $500 \cdot 10^{40}$ g cm² oder um 0,6% größer ist als der empirische Wert. Die erwähnten, gering-

fügigen Änderungen beim Übergang vom 6- zum 8-parametrischen Modell lassen kaum hoffen, daß mit noch komplizierteren Modellen die Diskrepanz zum Verschwinden gebracht werden kann. Um diese Frage noch näher zu untersuchen, kann man statt der statischen Abplattung das empirische Trägheitsmoment C festhalten. Dann ergibt sich, wie nur kurz angedeutet sei, aus $[E, \omega, a, C]$ eine einparametrische Lösung mit maximalem J_2 und aus $[E, \omega, a, a_k, C]$ ein Wiechert-Modell mit minimalem J_2 . Ganz allgemein wird sich bei vorgegebenem C die statische Abplattung J_2 analog verhalten wie das Trägheitsmoment C bei vorgegebenem J_2 . Es zeigt sich, daß das empirische J_2 beträchtlich größer ist als das berechnete Maximum und wir dürfen daher den definitiven Schluß ziehen, daß es überhaupt keine hydrostatische Gleichgewichtsfigur gibt, welche mit der wirklichen Erde die Elemente $[E, \omega, a, a_k, J_2, C]$ gemeinsam hat.

Wir sind somit gezwungen, von der statischen zu einer dynamischen Betrachtungsweise überzugehen und statt des Normalsphäroides die Gleichgewichtsfigur der Erde aufzusuchen. Dabei hätten wir vor allem zwei entgegengesetzt wirkende Erscheinungen in Betracht zu ziehen. Durch die Abkühlung der oberen Schichten wird eine Kontraktion der Erde und damit eine Verminderung des Trägheitsmomentes C bewirkt, welche wegen der Konstanz des Drehimpulses im geschlossenen System mit einer Vergrößerung der Rotationsgeschwindigkeit verbunden ist. Daneben resultiert aus dem Störpotential von Sonne und Mond die bekannte Erscheinung der Flutreibung, die eine säkulare Verlangsamung der Rotationsgeschwindigkeit zur Folge hat. Letztere kann mit mäßiger Genauigkeit aus der Diskussion alter Mondfinsternisse abgeleitet werden. Man schätzt, daß der Sterntag in etwa 120 000 Jahren um eine Sekunde zunimmt. Aber selbstverständlich darf dies nicht linear nach rückwärts extrapoliert werden. Überdies haben wir beide Erscheinungen zu trennen und wollen daher unter der »Gleichgewichtsfigur der Erde« ein acht-parametrisches hydrostatisches Modell verstehen, welches mit der wirklichen Erde die Elemente $[E, a, a_k, J_2, C]$ gemeinsam hat, jedoch eine größere Rotationsgeschwindigkeit besitzt. Die Ableitung dieser Figur überschreitet den Rahmen der vorliegenden Arbeit; sie muß daher einer gesonderten Untersuchung vorbehalten bleiben. Es sei bloß erwähnt, daß ein annähernd befriedigendes Resultat mit einer größeren Rotationsgeschwindigkeit ($\omega'^2 = 5,39624 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$), entsprechend einer Verkürzung des Tages um $10^m 31^s$, gefunden werden kann. Die Oberflächenabplattung dieses Modelles liegt jetzt bei ungefähr 1 : 296.

Die Deutung dieses Ergebnisses scheint nicht schwierig zu sein. Während sich das leicht bewegliche Meer jederzeit der Verringerung der Rotationsgeschwindigkeit anpassen kann und heute die Abplattung 1 : 298,25 besitzt, konnten die inneren Flächen gleicher Dichte nicht mehr vollständig der geänderten Fliehkraft folgen. Die Flächen gleicher Dichte fallen nicht mehr mit

den schwächer abgeplatteten Niveaulflächen zusammen und das Gleichgewicht ist gestört. Dementsprechend muß das Trägheitsmoment C hinter dem Trägheitsmoment der zugehörigen Gleichgewichtsfigur mit der heutigen Rotationsgeschwindigkeit zurückbleiben. Die Gleichgewichtsfigur der Erde gestattet auch noch die Berechnung der Massefunktion J_4 , welche sich nur ganz geringfügig von der Massefunktion J_4 des wirklichen Erdkörpers unterscheiden kann, und zwar nur infolge des Wegfallens des Einflusses der Massenstörungen in der Erdkruste.

Die Elemente $[E, \omega, a, J_2, J_4]$ ermöglichen aber bereits die eindeutige Auflösung des Helmerischen Gleichungssystems, völlig unabhängig vom Gleichgewicht. Das so definierte Normalsphäroid ist im Grunde auch gar keine Gleichgewichtsfigur und wird sich nur infolge der Massenstörungen vom Helmerischen Niveausphäroid 4. Ranges unterscheiden. Tatsächlich werden die Abplattungen dieser beiden Figuren sehr nahe gleich groß sein, da ja Δe bloß $+5/8 \Delta J_4$ ist. Auch das durch $[E, \omega, a, J_2]$ definierte einparametrische Normalsphäroid hat, wie wir wissen, nahezu die richtige Abplattung. Hingegen folgt aus der Relation

$$f_4 - \frac{35}{8} J_4 = \frac{7}{2} e^2 - \frac{5}{2} e \bar{e}, \quad (4)$$

daß die Differenz in J_4 mit mehr als dem vierfachen Betrag in f_4 eingeht, wobei diese Differenz jetzt größer sein kann als der alleinige Einfluß der Massenstörungen. Man erkennt daraus, daß eine möglichst exakte Bestimmung von J_4 gefordert werden muß, auch wenn die bisherigen Berechnungen gelehrt haben, daß die Abweichung des richtigen Wertes vom Wert des einparametrischen Modelles kaum $20 \cdot 10^{-8}$ übersteigen kann. Selbstverständlich könnte man die aus der verbesserten Lösung resultierende Fläche $S(a, e, f_4)$ auch als Näherung 4.0. einer mehrparametrischen Gleichgewichtsfigur auffassen. Gewonnen ist damit aber gar nichts, weil diese Gleichgewichtsfigur ebenso wie das frühere einparametrische Normalsphäroid ein zu großes Trägheitsmoment C besitzen muß.

Für die weiteren Betrachtungen versuchen wir zunächst das System der Ausgangsdaten zu verbessern. Bekanntlich kann die Erdmasse nicht unmittelbar bestimmt werden. Sie muß bei der Definition der Figuren entweder durch die Äquatorschwere γ_0 ersetzt werden, oder es muß die dynamisch bestimmbare Größe $k^2 E$ eingeführt werden. Für diese wichtige Konstante hat RABE [3] auf Grund des dritten Keplersgesetzes eine Neubestimmung vorgenommen. In der Formel

$$k^2 E = \frac{(1 + \beta)^3}{1 + \mu} n_{\text{G}}^2 a_{\text{G}}^3 \quad (5)$$

bedeuten n_{ζ} die mittlere Winkelbewegung und a_{ζ} die mittlere Distanz Erde — Mond, μ die Mondmasse in Einheiten der Erdmasse und β die Korrektur wegen des Einflusses der Sonne. Nach eingehender Erörterung der möglichen Fehlereinflüsse findet RABE:

$$k^2 E = (398\,620 \pm 8) \cdot 10^{15} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}. \quad (5a)$$

Demgegenüber führt W. KAULA [4] zehn neuere Bestimmungen, vorwiegend aus künstlichen Satelliten an, die das arithmetische Mittel

$$k^2 E = (398\,606,24 \pm 5,06) \cdot 10^{15} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \quad (5b)$$

ergeben. Für eine rein terrestrische Bestimmung von $k^2 E$ ergibt das Helmert-System [loc. cit. 2), Seite 55/6, (9)] leicht

$$k^2 E = \gamma_0 a^2 : \left(1 - \bar{\varepsilon} + \frac{3}{2} J_2 - \frac{15}{8} J_4 \right), \quad (5c)$$

wenn man aus der Gleichung für γ_0 die geometrische Abplattung mittels der Gleichung für J_2 eliminiert. Da der Wert (5a) mit dem früher verwendeten, offenbar noch zu großen Achsenwert $a = 6,37829 \cdot 10^8$ cm gut übereinstimmt, ist also zu erwarten, daß der Wert (5b) besser mit dem jüngsten Achsenwert von I. FISCHER [5]: $a = 6,378155 \cdot 10^8$ cm verträglich ist.

Der internationale Schwerewert im Äquator wurde bereits um 12 mgal vermindert ($\gamma_0 = 978,037$ gal), um den Fehler des Potsdamer Schweresystems zu tilgen; nach W. A. HEISKANEN [6] wäre eine weitere Verringerung bis zu 5 mgal zu erwarten. Auch die statische Abplattung ist etwas kleiner anzunehmen: $J_2 = 108\,279 \cdot 10^{-8}$. Schließlich sei die Gravitationskonstante mit $66,7 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ angesetzt. Mit den Ausgangsdaten:

$$k^2 E = 398\,606,24 \cdot 10^{15} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \quad \text{oder} \quad E = 5976,106 \cdot 10^{24} \text{ g};$$

$$\omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}; \quad a = 6,37818 \cdot 10^8 \text{ cm}; \quad J_2 = 108\,279 \cdot 10^{-8} \quad (6)$$

erhalten wir für das einparametrische Normalsphäroid nach den Formeln loc. cit. 2), Seite 65, (23)

$$\bar{e} = 346\,141,3 \cdot 10^{-8}; \quad e = 335\,244,9 \cdot 10^{-8} = 1 : 298,29;$$

$$\gamma_0 = 978,0355 \text{ gal}; \quad J_4 = -332,4 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = -421,6 \cdot 10^{-8}. \quad (7)$$

Zu einer streng dynamischen Bestimmung der geometrischen Parameter müssen die Figuren durch $[k^2 E, \omega, J_2, \gamma_0]$ definiert sein. Man variiert je ein

Bestimmungsstück e und berechnet die zugehörigen Änderungen von Achse a und Abplattung e . So findet man aus:

$$\begin{aligned} \Delta k^2 E &= +10 \cdot 10^{15}; \Delta a = +80,0 \text{ m}; \Delta e = + 2,0 \cdot 10^{-8} \\ J_2 &= +100 \cdot 10^{-8}; \quad + 4,9 \text{ m}; \quad +150,6 \cdot 10^{-8} \quad (8) \\ \gamma_0 &= +10 \text{ mgal}; \quad -32,3 \text{ m}; \quad - 2,6 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Die Werte von J_4 und f_4 bleiben fast unverändert; es ergibt sich der Reihe nach:

$$\begin{aligned} J_4 &= -332,4 \cdot 10^{-8}; f_4 = -421,6 \cdot 10^{-8} \\ &-332,7 \cdot 10^{-8} \quad -420,9 \cdot 10^{-8} \quad (9) \\ &-332,4 \cdot 10^{-8} \quad -421,5 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Die Abplattung hängt fast ausschließlich vom Fehler in J_2 ab; sie ergibt sich mit hoher Sicherheit, da der mittlere Fehler von J_2 bei etwa $\pm 20 \cdot 10^{-8}$ liegt. Auch die Unsicherheit in γ_0 ist verhältnismäßig harmlos. Eine Verringerung um weitere 2 mgal hätte eine Achsenvergrößerung um 6,5 m zur Folge. Somit bleibt als hauptsächliche Fehlerquelle für eine dynamische Bestimmung der geometrischen Parameter des Normalsphäroides die Unsicherheit in $k^2 E$.

Wegen der oben betonten Wichtigkeit der Massefunktion J_4 werde noch ihr aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten empirisch abgeleiteter Wert an seinen Folgerungen geprüft. Fügt man den aus (6) und (7) übernommenen Daten $[k^2 E, \omega, J_2, \gamma_0]$ noch $J_4 = -120 \cdot 10^{-8}$ hinzu, so kann abermals das Helmertsche Gleichungssystem aufgelöst werden und man findet völlig unabhängig vom Gleichgewicht aus:

$$\begin{aligned} 2e &= 3J_2 + \bar{e} + 2e^2 - 2e\bar{e} + \frac{5}{4}J_4 \\ a^2 &= \frac{k^2 E}{\gamma_0} \left[1 + e - \frac{3}{2}\bar{e} - e^2 + e\bar{e} - \frac{5}{2}J_4 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

in sukzessiver Approximation:

$$a = 6,3781674 \cdot 10^8 \text{ cm}; e = 335\,377,0 \cdot 10^{-8} = 1 : 298,17. \quad (11)$$

Achse und Abplattung ändern sich also nur geringfügig, während sich für den Formparameter ein beträchtlicher positiver Wert ergibt:

$$f_4 = \frac{7}{2}e^2 - \frac{5}{2}e\bar{e} + \frac{35}{8}J_4 = +509,5 \cdot 10^{-8}, \quad (11a)$$

was gänzlich unmöglich ist, solange man Massenkonzentration nach innen annimmt. Tatsächlich folgt mit $J_4 = -120 \cdot 10^{-8}$ und mit $J_2^2 = 117,24 \cdot 10^{-8}$

für die Funktion $F = |J_4| : J_2^2 = +1,02$, während für das homogene Ellipsoid $F_{\min} = 15/7$. Mithin ist das Minimum des Absolutbetrages von J_4 gleich $251,2 \cdot 10^{-8}$.

Hält man gemäß (6) die Daten $[E, \omega, a, J_2]$ fest, womit natürlich auch $\bar{\varepsilon} = 346\,141,3 \cdot 10^{-8}$ konstant ist, so liefert jede Wahl von J_4 nach der ersten Gleichung (10) die geometrische Abplattung e und sodann (4) den Formparameter f_4 . Das absolute Minimum von J_4 ist mit dem absoluten Minimum von f_4 gekoppelt: $f_4 = -65,4 \cdot 10^{-8}$. Es handelt sich dabei natürlich um die äußere Niveaulfläche eines MacLaurinschen Ellipsoides oder um ein Wiechert-sches Grenzmodell mit gerade verschwindender Manteldichte. Mit der einparametrischen Lösung (7), deren Abplattung bloß um $51 \cdot 10^{-8}$ kleiner ist, wird der Gültigkeitsbereich der Gleichgewichtsfiguren überschritten. Das einparametrische Normalsphäroid wäre also die Gleichgewichtsfigur mit den maximalen Absolutbeträgen von J_4 und f_4 .

Da wir aber J_4 der Gleichgewichtsfigur der Erde zu entnehmen haben, bestimmen wir zunächst die oberen Grenzen von $|J_4|$ und $|f_4|$ aus der einparametrischen Gleichgewichtsfigur der Rotationsgeschwindigkeit $\omega^2 = 5,39624 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$, für welche wir die übrigen Bestimmungsstücke E, a und J_2 abermals den Angaben (6) entnehmen. Man findet:

$$\begin{aligned} e &= 337\,796,3 \cdot 10^{-8} = 1 : 296,04; \quad J_4 = -336,5 \cdot 10^{-8}; \\ f_4 &= -444,7 \cdot 10^{-8}; \quad C = 80\,274,9 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Tatsächlich muß diese Gleichgewichtsfigur wegen der größeren Rotationsgeschwindigkeit in der Parabel $A = 0$ — siehe Fig. 6, loc. cit. 2), Seite 63 — etwas oberhalb der Figur (7) liegen; sie hat demnach einen etwas größeren F -Wert, was mit einer geringen Zunahme der Absolutbeträge von J_4 und f_4 verbunden ist. Beträchtlich größer wird aber die Zunahme des Minimalbetrages von $|J_4|$ sein, wenn wir die untere Grenze nicht mehr durch $F_{\min} = 15/7$, sondern durch das Wiechert-Modell mit der Kerntiefe 2900 km ($a_k = 3,47818 \cdot 10^8 \text{ cm}$) festlegen. Für dieses Wiechert-Modell $[E, \omega, a, a_k, J_2]$ finden wir:

$$\begin{aligned} E_1 &= 4550,328 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad E_M = 3811,361 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad E_k = \\ &= 2164,745 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad e = 337\,818 \cdot 10^{-8} = 1 : 296,02; \\ e_k &= 196\,269 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -299,7 \cdot 10^{-8}; \\ f_4 &= -283,6 \cdot 10^{-8}; \quad C = 80\,944,6 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Der Wert (6) für die statische Abplattung führt auf die Differenz der Trägheitsmomente $(C - A) = 263,24 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$, woraus mit dem Bullardschen Wert (1) für die dynamische Abplattung H das Trägheitsmoment $C =$

= $80\,444,2 \cdot 10^{40}$ g cm² des wirklichen Erdkörpers resultiert. Ohne daher das achtparametrische Modell der Gleichgewichtsfigur der Erde streng berechnen zu müssen, liefert lineare Interpolation zwischen die einparametrische Lösung (12) und das Wiechert-Modell (13) bereits mit sehr guter Annäherung die Massefunktion J_4 der Gleichgewichtsfigur der Erde: $J_4 = -327,1 \cdot 10^{-8}$.

Fügt man dieses J_4 den Ausgangsdaten (6) hinzu, so liefert das Helmert'sche Gleichungssystem das Normalsphäroid der Erde:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= 346\,141 \cdot 10^{-8} ; e = 335\,248,2 \cdot 10^{-8} = 1 : 298,29 ; \\ f_4 &= -398,4 \cdot 10^{-8} ; h_m = \frac{a}{4} f_4 = -6,35 \text{ m} ; \\ \gamma_0 &= 978,0354 \text{ gal} ; \\ \beta &= 530\,401,7 \cdot 10^{-8} ; \beta_4 = +3534,5 \cdot 10^{-8} ; \\ W_0 &= 62\,637,4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2} \end{aligned} \quad (14)$$

und die Formel für die theoretische Schwere lautet:

$$\gamma = 978,0354[1 + 0,0053\,0402 \sin^2 \varphi - 0,0000\,0884 \sin^2 2 \varphi] \text{ gal} . \quad (15)$$

Wiewohl sich diese Figur zahlenmäßig nur ganz geringfügig vom früheren einparametrischen Normalsphäroid unterscheidet, liegt dennoch ein sehr wesentlicher Unterschied vor. Bezeichnet man allgemein eine Massenverteilung, welche für eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit im hydrostatischen Gleichgewicht ist, als »Gleichgewichts-anordnung«, so können wir unser Resultat wie folgt formulieren. Das neue Normalsphäroid ist gar keine Gleichgewichtsfigur und wir können im Grunde bloß die Schar seiner äußeren Niveauflächen bestimmen; die Flächen gleicher Dichte der Gleichgewichts-anordnung der Erde sind keine Niveauflächen mehr. Weil sich jedoch die Wasserhülle der Gleichgewichtsfigur der Erde vollkommen der verringerten Fliehkraft angepaßt hat, fällt dennoch die Oberfläche des Normalsphäroides mit der Meeresoberfläche der regularisierten Erde zusammen.

Abschließend seien noch einige Bemerkungen hinsichtlich der Entwicklung der Erde gemacht. In der obigen Abschätzung, derzufolge sich der Tag in den letzten 120 000 Jahren um eine Sekunde verlängert hat, sind natürlich die entgegengesetzten Effekte von Kontraktion und Flutreibung vereinigt. Bei der Berechnung der Gleichgewichtsfigur der Erde wurde die Achse a als konstant angenommen, d. h. von der Kontraktion abstrahiert, wodurch sich der Zeitraum von 120 000 Jahren noch verkürzen müßte. Die Änderung des Tages um 631^s könnte somit höchstens auf 76 Millionen Jahre führen. Dieser für die Entwicklungsgeschichte der Erde befremdend kurze Zeitraum müßte sich noch weiter verringern, wenn man bedenkt, daß lineare Extrapolation gar nicht erlaubt ist. Denn selbstverständlich waren beide Effekte vormals

wesentlich stärker, der Effekt der Kontraktion wegen der geringeren Festigkeit des Erdkörpers, der Effekt der Flutreibung wegen der größeren Mondnähe. Hinsichtlich der hier allein betrachteten Flutreibung ändert sich das Bild aber sofort, wenn man die mit zunehmender Festigkeit der Erde verknüpfte Verringerung der Nachgiebigkeit berücksichtigt. Wäre die Erde bis auf die Wasserhülle starr, so wären die errechneten 631^s , um welche die Umdrehungszeit der Gleichgewichtsfigur der Erde kleiner ist als der heutige Sterntag, der reine Effekt der Flutreibung. Wäre umgekehrt die Erde eine ideale Flüssigkeit, so wäre sie auch heute noch im Gleichgewicht und der aus der Gleichgewichtsfigur nachweisbare Effekt der Flutreibung bestünde einzig in einer langsamen Verringerung der Abplattung, verbunden mit einer geringen Zunahme des Trägheitsmomentes C . Ist die Erde aber plastisch, so stellen die 631^s nur einen Bruchteil der tatsächlichen, durch die Flutreibung bewirkten Tagesverlängerung dar. Dieser Faktor ist 0 für die ideale Flüssigkeit und 1 für die starre Erde. Er muß zur Zeit, als der Mond der Erde am nächsten war, d. h. vor 2–4 Milliarden Jahren, am kleinsten gewesen sein.

SCHRIFTTUM

1. BULLARD, E. C.: The Figure of the Earth. *Monthly Not. Royal Ast. Soc., Suppl.* V, Nr. 6, 1948.
2. LEDERSTEGER, K.: Die Neubegründung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde. *Sonderheft 24 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen* (Hundertjahrfeier der ÖKIE, Oktober 1963), Wien 1964.
3. RABE, E.: Comparison of Terrestrial and Astronomical Results for GM in G. VEIS: The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Amsterdam 1963.
4. KAULA, W. M.: Determination of the Earth's Gravitational Field, *Reviews of Geophysics* I, Nr. 4, Richmond, Virg., 1963, Seite 507–51.
5. FISCHER, I.: An Astrogeodetic World Datum from Geoidal Heights Based on the Flattening $f = 1/298,3$, *Journ. Geophys. Res.* 65 (1960).
6. HEISKANEN, W. A.: Potentialities of Satellite Geodesy and Physical Geodesy, in The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Amsterdam 1963.

THE NORMAL SPHEROID OF THE EARTH AND THE DYNAMICAL DETERMINATION OF ITS GEOMETRIC PARAMETERS

K. LEDERSTEGER

SUMMARY

No equilibrium figure exists, which in common with the real earth has the rotation velocity and the moments of inertia. Considering the effect of the tidal friction we gain the "equilibrium figure of the earth" for a sidereal day shorter by $10^{10}31^s$ and for the flattening $1 : 296$. Therefrom we get the "normal spheroid of the earth" for the present rotation velocity, which is no longer an equilibrium figure. Only the water cover has obtained the present flattening $1 : 298,3$, whilst the flattening of the inner surfaces of constant density is too great and therefore the moment of inertia C is too small. This normal spheroid differs from Helmert's level spheroid only by the mass function J_4 , which must be taken from the equilibrium figure and not from the real earth. The one-parametric figure $[k^2E, \omega, J_2, \gamma_3]$ shows that with a dynamical determination of the geometric parameters of the normal figure the flattening nearly exclusively depends on an error in J_2 , whilst the main source of an error in the axis lies in the uncertainty of $k^2 E$. The mass-function $|J_4|$ derived from artificial satellites is much too small.

LE SPHÉROÏDE NORMAL DE LA TERRE ET LA DÉTERMINATION PRACTIQUE DE SES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES

K. LEDERSTEGER

RÉSUMÉ

Il n'y a aucune figure d'équilibre dont la vitesse de rotation et les moments d'inertie soient les mêmes que ceux de la Terre réelle. Compte tenu de l'influence de la friction de marée, on obtient la «figure d'équilibre de la Terre» pour un jour sidéral plus court de $10^m 31^s$ et pour un aplatissement de la surface de 1 : 296. Pour la vitesse de rotation actuelle, on obtient le sphéroïde normal de la Terre, qui n'est plus une figure d'équilibre. L'enveloppe d'eau est seule à présenter l'aplatissement actuel de 1 : 298,3, l'aplatissement des surfaces intérieures d'une densité constante est trop grand, et par là, le moment d'inertie C trop petit. Ce sphéroïde normal ne diffère du sphéroïde de niveau de Helmert que par sa fonction de masse J_4 , qui doit être prise de la figure d'équilibre au lieu de la Terre réelle. La figure à paramètre unique $(k^2E, \omega, J_2, \gamma_0)$ montre que dans la détermination dynamique des paramètres géométriques de la figure normale, l'aplatissement dépend quasi exclusivement de l'erreur J_2 , tandis que pour l'axe, la source d'erreur principale réside dans l'incertitude de k^2E . La fonction de masse $|J_4|$ développée à partir des satellites artificiels est trop réduite.

НОРМАЛЬНЫЙ СФЕРОИД ЗЕМЛИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

К. ЛЕДЕРШТЕГЕР

РЕЗЮМЕ

Не существует фигуры равновесия, которая имела бы общие с реальной Землей скорость вращения и момент инерции. С учетом эффекта приливного трения все же получается фигура Земли для звездных суток, которые короче на $10^m 31^c$, и с сжатием поверхности 1 : 296. Из этого для современной скорости вращения получается нормальный сфероид Земли, который уже не является фигурой равновесия. Только водный покров характеризуется современным сжатием 1 : 298,3, в то время, как сжатие внутренних поверхностей равной плотности завышено, а следовательно момент инерции C является заниженным. Этот нормальный сфероид отличается от сфероида уровня Гельмерта только по функции масс J_4 , которая должна выводиться из фигуры равновесия, а не из реальной Земли. Фигура с одним параметром $[k^2E, \omega, J_2, \gamma_0]$ показывает, что при динамическом определении геометрических параметров нормальной фигуры, сжатие зависит почти исключительно только от погрешности в J_2 , в то же время, как основной источник погрешностей для оси находится в неопределенности k^2E . Функция масс J_4 , выведенная по искусственным спутникам, является в значительной мере заниженной.

ZUR BESTIMMUNG DER DICHTE DES NEUTRALGASES IN DER HOHEN ATMOSPHERE AUS SATELLITEN- BEOBACHTUNGEN

O. LUCKE, Berlin

[Eingegangen am 16. März 1965]

Nach eingehenden Betrachtungen über die Fehlerquellen in den Konstanten der Bewegungsgleichungen eines fliegenden Satelliten werden die gegenwärtigen Methoden zur Bestimmung der Gasdichte in der hohen Atmosphäre und ihre Fehler diskutiert. Darauf wird ein neues Verfahren vorgeschlagen, das voraussetzt, daß außer der Position und der Zeit auch der Geschwindigkeitsvektor der Bahnkurve mit der relativen Genauigkeit 10^{-4} bekannt ist. Man könnte dann die Luftdichte auf Grund von aufeinanderfolgenden Durchgängen berechnen. Abschätzungen für kreisförmige und elliptische Bahnen scheinen ihre Brauchbarkeit zu erweisen. Eine Störungsrechnung, die verschiedene Einflüsse zu berücksichtigen gestattet, wird angedeutet.

I. Einleitung

Die Erforschung der Atmosphäre in den Höhen ≥ 200 km ist bekanntlich seit dem Start von künstlichen Erdsatelliten in eine Phase stürmischer Entwicklung getreten. Für die Bestimmung der Luftdichte in diesen Höhen, die in dem vorliegenden Aufsatz betrachtet werden soll, hat sich eine recht primitive Methode bewährt, nämlich die Abbremsung der Satelliten durch das Gas in dieser Sphäre.

Als es vor 25 Jahren zuerst gelang, Meßinstrumente mit Raketen in große Höhen zu bringen, trat auch sofort die Frage auf, wie dort der Luftdruck P , die Temperatur T , die Dichte ρ und das mittlere Molekulargewicht \bar{M} zu messen seien; vorausgesetzt, daß diese Begriffe überhaupt einen realen Sinn hätten. Wenn außerdem vorausgesetzt wird, daß auch die Zustandsgleichung für ideale Gase und die hydrostatische Gleichung gültig seien:

$$P = \rho \frac{TR}{\bar{M}} = \rho gH \quad \text{mit} \quad H = \frac{RT}{g\bar{M}} = \text{Skalenhöhe} \quad (1a)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \quad \text{mit den üblichen Bezeichnungen} \quad (1b)$$

würde es genügen, zwei der genannten Größen als Funktion der Höhe über dem Erdboden h experimentell zu bestimmen. Leider gewinnt man durch die erwähnte Methode nur $\rho(h)$. Die bisherigen Messungen des Druckes oder

besser der Temperatur oder des mittleren Molekulargewichtes sind noch unzureichend. Die schon weit gediehenen Kenntnisse von $\varrho(h)$ und seiner erstaunlichen Variationen sind aber mit vielen anderen Forschungen in der Thermosphäre verbunden, so daß es angebracht erscheint, die Auswertemethode kritisch zu betrachten und Vorschläge für ihre Verbesserung zu machen.

2. Die auf den fliegenden Satelliten wirkenden Kräfte

Wenn man die Kräfte, die auf einen fliegenden Satelliten der Masse m_s wirken, und die Genauigkeit, mit der sie erfaßt werden können, betrachtet, ergeben sich Grenzen für das »Auflösungsvermögen« der Abbremsungsmethode bei der Erfassung der Luftdichteschwankungen.

2.1 Beschreibung der Kräfte

Die genannten Kräfte lassen sich in solche mit Potential ($m_s \vec{F}_1$) und solche ohne Potential ($m_s \vec{F}_2$) einteilen. Die zuerst genannten werden im wesentlichen durch die Gravitationsfelder der Erde, der Sonne und des Mondes dargestellt.

$$\vec{F}_1 = \text{grad} (U + U_R), \quad (2a)$$

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos(m\varphi) + S_{nm} \sin(m\varphi)] \cdot P_{nm}(\cos \vartheta) \right\}. \quad (2b)$$

U ist das Potential der Schwerebeschleunigung durch die Erde (ohne Zentrifugalbeschleunigung), U_R dasjenige der übrigen Massen.

Die Kräfte ohne Potential bestehen aus den Impulsänderungen der mit dem Satelliten zusammenstoßenden Gas- bzw. Plasmateilchen und den daraus resultierenden Kräften sowie aus dem Strahlungsdruck der Sonne.

Die durch den Flug im Plasma der hohen Atmosphäre entstehenden elektromagnetischen Kräfte, die auf den Satelliten wirken, wurden noch vor einigen Jahren lebhaft diskutiert [1]. Dabei kann die Erregung magneto-hydrodynamischer Wellen vernachlässigt werden [2].

Elektromagnetische Kräfte kommen dadurch zustande, daß sich der Satellit im Flug durch das Plasma elektrisch aufladen kann, wodurch er eventuell seine Umgebung polarisiert und durch das Magnetfeld der Erde eine Lorentzbeschleunigung erhält. Es hat sich aber gezeigt, daß die elektrische Spannung zwischen dem Satelliten und seiner weiteren Umgebung wenige Volt nicht übertrifft. Die dadurch erzeugte Abbremsung des Satelliten mit nicht zu hohem Perigäum ($h_p \lesssim 1500$ km) beträgt nur wenige Prozent der durch das Neutralgas erzeugten Abbremsung [3].

Für den Widerstand des Neutralgases in der Thermosphäre ist das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Moleküle zu den linearen Abmessungen des Satelliten κ der kennzeichnende Parameter. Für die meisten Satelliten mit Perigäumshöhen $h_p \gtrsim 200$ km gilt $\kappa \gg 1$. Die Erfahrungen der Ballistik, für deren Verhältnisse $\kappa \ll 1$ gilt (hydrodynamischer Grenzfall), können nicht ohne weiteres benutzt werden.

Die von den Molekülstößen ausgeübten Kräfte hängen ab:

- a) Von der relativen Geschwindigkeit des Satelliten im Vergleich zur mittleren Molekulargeschwindigkeit,
- b) von der Temperatur der Satellitenoberfläche,
- c) von dem Reflexionsmechanismus bzw. dem Haftvermögen,
- d) von der bei der Reflexion entstehenden Dissoziation.

Die meisten dieser Größen können sich in weiten Grenzen ändern [4], ohne die Summe der ausgeübten Kräfte wesentlich zu beeinflussen. Daher kann diese Summe recht gut durch den aus der Punktmechanik bekannten Ansatz (nach NEWTON) für die Reibungskraft \vec{R} bei der Bewegung des Massenpunktes im kontinuierlichen, widerstrebenden Mittel dargestellt werden.

$$\vec{R} = -m_s \vec{W} = C_D A \frac{\rho}{2} v_r \vec{v}_r = -m_s w \rho v_r \vec{v}_r \quad (3)$$

mit

$$w = -C_D \frac{A}{2m_s}.$$

Allerdings ist C_D , der Widerstandsbeiwert (Drag-Coefficient), wesentlich größer als bei ballistischen Problemen. Im übrigen bedeutet \vec{v}_r den Geschwindigkeitsvektor relativ zur umgebenden Gasmasse und es gilt $|\vec{v}_r| = v_r$. \vec{W} ist die resultierende Widerstandsbeschleunigung, die der Relativgeschwindigkeit entgegengesetzt ist. A ist die Ansichtsfläche der Satelliten von der Bahntangente aus gesehen.

2.2 Abschätzung der Größenordnungen

Für Satelliten gewöhnlicher Gestalt ergeben theoretische Berechnungen $C_D = 2,1 \div 2,3$ in Übereinstimmung mit empirischen Ergebnissen. Das ist so zu erklären, daß bei $\kappa \gg 1$ die Wechselwirkung des Satelliten mit den Molekülen des Gases sich auf viel größere Entfernungen erstreckt als im hydrodynamischen Grenzfall mit $\kappa \ll 1$. Bei sehr tief fliegenden Satelliten können Übergangsfälle auftreten. Satelliten taumeln häufig um ihren Schwerpunkt, drehen sich wie Propeller oder überschlagen sich. Wenn die Winkel zwischen Satellitenachse und Bahntangente zufällig verteilt sind, ist das durchschnittliche A gleich einem Viertel der ganzen Oberfläche des Satelliten. Leider führen viele Satelliten teilweise geordnete Bewegungen aus. Sehr häufig kommen

Präzessionsdrehungen vor, die wohl von der Wechselwirkung der schwach magnetisierten Eisenteile der Satelliten mit dem erdmagnetischen Hauptfeld herrühren.

Wenn unter den Quasiperioden solche vorkommen, die größer als die Umlaufzeit des Satelliten sind, können Luftdichteschwankungen vorgetäuscht werden. Man eliminiert diese Fehler durch Vergleich mit den Ergebnissen von anderen Satelliten. Durch solche Bewegungen können die A -Werte bis auf 50% fehlerhaft sein. Nur bei kugelförmigen Satelliten ist A genau definiert.

Die absoluten Beträge der Beschleunigungen haben die folgenden Größenordnungen:

a) $\text{grad } (\mu/r) \approx 10 \text{ [m/s}^2\text{]}$. Der Term des Gravitationsfeldes mit der folgenden Größenordnung ist:

b) $3/2 \mu a_e^2/r^4 C_{20} \sin 2\vartheta \approx 3 \cdot 10^{-3} \sin 2\vartheta \text{ [m/s}^2\text{]}$, während die übrigen höchstens von der Größenordnung weniger 10^{-6} sind, insbesondere die Glieder mit C_{30} und C_{31} .

c) Der Betrag von \vec{W} in (3) ist kleiner als $10^{-5} \text{ [m/s}^2\text{]}$, wirkt sich aber durch die andauernd in eine Richtung wirkende Kraft bedeutend aus, besonders bei der Umlaufzeit.

d) Die Umlaufzeit ist für die Dichtebestimmungen die wichtigste Bahngröße. Daher spielen die meisten Glieder der Kugelfunktionsentwicklung von U nur eine geringe Rolle. Für die hier verfolgten Zwecke sind die folgenden Effekte wichtig:

Sowohl die Bahnebene als auch die Apsidenlinie (die Verbindungslinie von Perigäum und Apogäum) führen Rotationen aus. Die zuerst genannte kann die Winkelgeschwindigkeit $10^\circ/\text{Tag}$ nicht überschreiten. Beim Satelliten Vanguard I war dieser Betrag $3^\circ/\text{Tag}$, während sich in der Bahnebene das Perigäum um $4,4^\circ/\text{Tag}$ nach Osten drehte. Die Existenz der dritten Harmonischen C_{30} verursacht eine geringe Schwankung der Exzentrizität der Bahn. Diese ist $\varepsilon = 1/a_1 \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, wenn die Bahn durch eine Ellipse mit den Halbachsen a_1 und b_1 angesehen wird. Die Exzentrizität des Erdäquators hat auch einen sehr geringen Effekt bei der Rotation der Bahnebene.

e) Im Gegensatz zu diesen Kräften mit Potential spielt der Strahlungsdruck der Sonne (und der Erde [5]) bei exzentrischen Bahnen eine große Rolle. Dieser Effekt, der von der Größenordnung $10^{-7} A/m_s \text{ [m/s}^2\text{]}$ ist (das Giorgi-System der physikalischen Einheiten wird benutzt), ist ziemlich leicht zu erfassen [6]. Er wird in den folgenden Ausführungen nicht behandelt.

f) In Gleichung (3) kann oft \vec{v}_r durch \vec{v} , die Geschwindigkeit in einem Inertialsystem, ersetzt werden, sofern es sich um Berechnungen der Luftdichte handelt. Wir benutzen daher in den folgenden Berechnungen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \text{grad } U + \vec{W}. \quad (4)$$

Es ist ein glücklicher Umstand, daß in (4) die Koeffizienten von U meistens nur kurzperiodische Störungen der Kepler-Ellipse verursachen, die man für $\vec{W}=0$ und $U_0 = \mu/r$ beobachten würde im Gegensatz zu den »säkularen« Störungen durch \vec{W} . Übrigens können die meisten Koeffizienten in (2b) als bekannt angesehen werden.

Die Abbremsung eines Satelliten wirkt sich als Abnahme der großen Halbachse der Kepler-Ellipse aus und wegen des dritten Keplerschen Gesetzes auf die Umlaufzeit τ . τ ändert sich dabei höchstens um 1 s/Tag ($\approx 10^{-5}$ relativ).

Multipliziert man die Gleichung (4) skalar mit v und integriert zwischen den Bahnpunkten P_1 und P_2 , so erhält man die Energiegleichung. Mit $E = 1/2 v^2 - U$ und $\vec{W} = w_{\rho} \vec{v}$ (\vec{v} im Inertialsystem) erhält man

$$E_2 - E_1 = w \int_{P_1}^{P_2} \rho(r, \vartheta, \varphi) v^3 dt = \Delta E, \quad (5)$$

wobei r, ϑ, φ die Kugelkoordinaten bezeichnen.

Bei Satelliten mit nahezu elliptischen Bahnen mäßiger Exzentrizität $0,02 \leq \varepsilon \leq 0,15$ oder $0,2$ findet die Abbremsung im wesentlichen in der Umgebung des Perigäums statt. Dadurch schwingt sich der Satellit von Mal zu Mal weniger hoch in das Apogäum hinauf. Der Energieverlust geht zu Lasten der potentiellen Energie in der Umgebung dieses Punktes, während sich die Perigäumshöhe wenig ändert. ε wird kleiner und die Krümmungsradien r_k sowohl im Perigäum als auch im Apogäum nehmen zu. In beiden Punkten gilt

$$\frac{v_{a,p}^2}{r_{ka,p}} = g(r_{a,p})$$

und deshalb muß v^2 auch im Durchschnitt wachsen. Auf Kosten der potentiellen Energie wachsen nach (5) sowohl die kinetische Energie als auch die Energiedissipation durch Reibung. Da außerdem mit abnehmendem ε auch die Bogenlänge s_0 der Ellipse kleiner wird, nimmt auch die Umlaufzeit τ ab. Für Bahnen mäßiger Exzentrizität ergibt sich daraus, daß ΔE im wesentlichen proportional $\Delta \tau$ ist.

3. Die übliche Methode zur Berechnung der Dichteschwankungen

Es wird sich zeigen, daß man zur Bestimmung von ρ_p , dem Wert der Dichte im Perigäum, Angaben über $\Delta \tau$, τ , ε und andere Größen der Satellitenbahn braucht. Daher werden einige kurze Angaben über die Meßmethodik und die Bahnbestimmung gemacht.

3.1 Beobachtungsmethoden

Man hat zunächst die optisch-photographischen Methoden, die im allgemeinen die Positionswinkel zu einem bestimmten Zeitpunkt liefern, von den Methoden zu unterscheiden, die die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen vom Satelliten aus benutzen. Die Entfernung des Satelliten wird neuerdings mit Hilfe von Lichtimpulsen bestimmt, die von Lasern ausgesandt werden.

Winkelmessungen zu bestimmten Zeitpunkten mittels Präzisions-Satellitenkameras vom Typ Baker-Nunn [7] werden mit den Genauigkeiten 1" bis 2" im Winkel und 0,001 in der Zeit ausgeführt. Das entspricht einer Entfernungsgenauigkeit von 5 bis 10 m auf 1000 km.

Entfernungsmessungen mit Hilfe von Lasern gelingen zur Zeit mit der Genauigkeit von 3 m auf 1000 km [8].

Für Bestimmungen der Luftdichte sind auch Beobachtungen geringerer Genauigkeit brauchbar, etwa 0,01 in der Zeit und entsprechend 0,2 Winkelminuten. Solche Genauigkeiten lassen sich mit relativ einfachen optisch-photographischen Methoden und aus Dopplereffekt- bzw. Interferometermessungen erzielen [9].

3.2 Zur Bestimmung der Bahnkurven aus Kamerabeobachtungen

Die Auswertung der optisch-photographischen Beobachtungsergebnisse, die hier besonders betrachtet werden soll, geht etwa nach dem folgenden Schema vor sich [10]: Man beschränkt gemäß den vorstehenden Ausführungen $U(r, \vartheta, \varphi)$ in (4) auf

$$U_0 = \frac{\mu}{r} \quad (6a)$$

und zerlegt

$$r = \vec{R} + e\vec{l}.$$

\vec{R} gibt den Standort des Beobachters im geozentrischen Inertialsystem an, während \vec{r} die Position des Satelliten im selben System festlegt. $|\vec{l}| = 1$. ($e\vec{l}$) enthält außer der Satellitengeschwindigkeit die Rotationsgeschwindigkeit der Erde.

$$\left(\frac{\mu e}{r^3} + \ddot{e}\right)\vec{l} + 2\dot{e}\dot{\vec{l}} + e\ddot{\vec{l}} = \ddot{\vec{R}} + \frac{\mu\vec{R}}{r^3} \quad (7a)$$

mit z. B. $\ddot{e} = d^2 e/dt^2$.

Außerdem gilt

$$r^2 = e^2 + R^2 - 2e(\vec{l} \cdot \vec{R}). \quad (7b)$$

\vec{l} , $\dot{\vec{l}}$, $\ddot{\vec{l}}$ werden aus den Beobachtungen des Satelliten während der Zeit von 2 bis 5 Minuten gewonnen. \vec{R} und $\ddot{\vec{R}}$ sind bekannt. Somit hat man für die 4 Unbekannten e , \dot{e} , \ddot{e} und r 4 Gleichungen. Es empfiehlt sich, \dot{e} und \ddot{e} aus

den beiden ersten Gleichungen zu eliminieren. Man erhält eine Gleichung der Form

$$De = A - \frac{B}{r^3}. \quad (7c)$$

Für sehr hoch fliegende Satelliten ist $\dot{\vec{l}}$ nahezu senkrecht zu \vec{l} und $\ddot{\vec{l}}$. Dann ist D schlecht definiert und nahezu null. Wir beschränken daher die Methode auf relativ tief fliegende Satelliten und gute Beobachtungsdaten. Die Genauigkeit der Daten hat auch großen Einfluß auf die Bestimmung von $\dot{\vec{l}}$ und $\ddot{\vec{l}}$, die durch numerische Differentiation gewonnen werden.

Mit Hilfe von r und e gewinnt man \vec{r} ; aus drei oder mehr Vektoren \vec{r}_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) kann die elliptische Bahn bestimmt werden.

3.3 Die Bestimmung der Luftdichte

Eine eingehende Ableitung [10] ergibt, daß die relative Änderung der Umlaufzeit in Abhängigkeit der Luftdichte bei Berücksichtigung der Rotation der Atmosphäre durch

$$\frac{d\tau}{d\tau} \approx \frac{\Delta\tau}{\tau} = 3w\varrho_p a \int_0^{2\pi} \frac{\varrho(r, \vartheta, \varphi)}{\varrho_p} \frac{(1 + \varepsilon \cos \eta)^{3/2}}{(1 - \varepsilon \cos \eta)^{1/2}} \left(1 - d \frac{1 - \varepsilon \cos \eta}{1 + \varepsilon \cos \eta}\right)^2 d\eta \quad (8)$$

mit

$$d = \tau\omega_e(1 - \varepsilon)^{1/2} \cos i$$

gegeben wird. Dabei bedeuten: $a = 1/2 (r_p + r_a)$, die große Halbachse der als Ellipse angenommenen Flugbahn, η ihre exzentrische Anomalie, i den Winkel zwischen Bahnebene und Äquatorebene, ω_e die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und ϱ_p die Dichte im Perigäum. Man macht zunächst den (1) entsprechenden Ansatz

$$\varrho = \varrho_p \exp\left\{-\frac{r - r_p}{H}\right\} \text{ mit } H = \frac{RT}{g\bar{M}} = \frac{kT}{g\bar{m}}, \text{ der Skalenhöhe.} \quad (9)$$

Dabei ist \bar{M} das mittlere Molekulargewicht, für das man aus Diffusionsberechnungen ein Modell $\bar{M}(r, \vartheta, \varphi)$ gewinnen kann [12]. Direktere Methoden anzuwenden ist wünschenswert. $\bar{m} = \bar{M}/L$. L = Loschmidtsche Zahl. H kann streng durch

$$H = -\varrho / \frac{d\varrho}{dr} \quad (9a)$$

als Dichteskalenhöhe definiert werden. Bei bekanntem $\bar{M}(r, \vartheta, \varphi)$ ist $H(r, \vartheta, \varphi)$ ein Maß für die Temperaturverteilung.

Tatsächlich ist die Atmosphäre nicht kugelsymmetrisch aufgebaut, sondern zeigt regelmäßig eine Abplattung an den Polen und einen bedeutenden »Buckel«, dessen höchste Erhebung bald nach dem Sonnenhöchststand eintritt. Ferner ist mit unregelmäßigen Erhitzungen während und nach besonderen Ereignissen auf der Sonne zu rechnen, die ihre Aktivität darstellen. Das kugelsymmetrische Modell (9) mit $H(r)$ ist daher noch zu verfeinern.

Um aus (8) die Dichte der Atmosphäre etwa im Perigäum zu berechnen, müßte man daher das Gesetz der Dichteänderung längs der Bahn kennen. Bei Satelliten mit mäßiger Bahnexzentrizität $0,02 \leq \varepsilon \leq 0,2$ ist allerdings der Beitrag zur Abbremsung in der Umgebung des Perigäums bei weitem am größten. Man kann sich deshalb oft damit begnügen, einen ϱ_p -Wert in der ersten Näherung zu berechnen

$$\varrho_p = + \frac{\tau w}{3} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi a H} \right)^{1/2} \left[1 - 2\varepsilon - \frac{H}{8a\varepsilon} + 0 \left(\varepsilon^2, \frac{H^2, \omega_\varepsilon}{a^2 \varepsilon^2} \right) \right]. \quad (10)$$

Formeln, in denen ε^2 berücksichtigt wird, sind in [4] angegeben. Dieser erste Wert kann zur sukzessiven Verbesserung der ϱ_p -Werte dienen. Wenn man von der Genauigkeit der ϱ_p -Werte nicht mehr als 10% erwartet, was durch die Ausführungen im 2. Abschnitt nahegelegt wird, genügt die erste Näherung. Tatsächlich sind die wichtigsten Resultate bisher in dieser Weise gewonnen worden.

3.4 Einige Resultate der bisherigen Auswertungen

Die bisherigen, recht mühevollen Auswertungen haben erstaunliche Ergebnisse gezeitigt. Wenn man z. B. das Nicolettsche Modell [12] für den molekularen Aufbau der Neutralgasatmosphäre annimmt, kann nach (1) bzw. (9) die Temperatur T berechnet werden. Einige Resultate seien nach [10] zitiert.

Man findet, daß infolge der großen molekularen Diffusionsgeschwindigkeit die Temperatur oberhalb 300 km Höhe mit der Höhe sehr wenig veränderlich ist, so daß man bequem den repräsentativen Grenzwert angeben kann.

Für das Nachtminimum \bar{T}_N gilt dann:

$$\bar{T}_N = 635^\circ + 0,3 \bar{F}_{10,7} + 0,012 \bar{F}_{10,7}^2 [^\circ\text{K}]. \quad (11a)$$

Hierbei ist $F_{10,7}$ der tägliche Wert des Flusses der Radiostrahlung der Sonne in Einheiten 10^{-22} Watt $\text{m}^2 \text{Hz}^{-1}$. $\bar{F}_{10,7}$ ist sein monatlicher Mittelwert. (11a) drückt den Gang der Nachttemperatur während des Sonnenfleckenzyklus

aus. Weiter gelten:

$$\begin{aligned}
 T &= \bar{T} \left(1 + 0,4 \cos^4 \frac{1}{2} \psi \right) && \text{(tägliche Variation)} \\
 &+ 2,5 (F_{10,7} - \bar{F}_{10,7}) && \text{(27-tägige Schwingung)} \\
 &+ 0,5 \bar{F}_{10,7} \cos \left(4\pi \frac{t - 7. \text{April}}{365} \right) && \text{(halbjährliche Variation)} \\
 &+ 1,2 A_p && \text{(geomagnetischer Effekt).}
 \end{aligned} \tag{11b}$$

Dabei ist t die Zeit in Tagen, A_p die dreistündige geomagnetische Kennziffer und ψ der geozentrische Winkel zwischen dem Maximum des Buckels und dem Nullmeridian.

Wenn die Sonne während des Fleckenminimums eine verschwindende Aktivität zeigt, schwanken die Grenztemperaturen etwa zwischen 680 °K nachts und 950 °K am Tage. Wenn die Aktivität während des Maximums voll entfaltet ist, erreicht sie etwa folgende Schranken: 2000 °K nachts und 2700 °K am Tage. Bei starken geomagnetischen Stürmen wird sie sogar in niederen Breiten 3000 °K übersteigen.

Die in (11b) zuletzt genannten Effekte sind Wirkungen der Plasmastrahlung der Sonne, des sogenannten Sonnenwindes. Auf die interessante Interpretation kann im Rahmen dieses Aufsatzes nicht eingegangen werden.

4. Vorschläge

Aus den vorstehenden Ausführungen folgen einige Feststellungen.

a) Zur Bestimmung von ϱ_p nach (10) werden außer den in w zusammengefaßten Satellitendaten vor allen Dingen noch τ , $\Delta\tau$, ε und a benötigt. Die Berechnung von ε erfordert einigen Aufwand, während τ und a durch das 3. Keplersche Gesetz miteinander verbunden sind.

$$\tau^2/a^3 = 4 \pi^2/\mu. \tag{12}$$

Die Umlaufzeit τ ist ziemlich leicht zu bestimmen. $\dot{\tau}$ ist relativ klein, etwa 10^{-5} für niedere Satelliten, 10^{-7} bis 10^{-8} für höhere. Man hat also $\dot{\tau}$ aus den Änderungen der Umlaufzeit nach mehreren Umläufen $(\Delta\tau)_n/n\tau$ zu bestimmen.

b) Damit hängt zusammen, daß man von den Luftdichteschwankungen nur die länger-periodischen erfaßt, wie (11a, b) deutlich zeigen. Es ist nicht möglich, die individuellen Züge jeder Variation zu untersuchen, sogar dann nicht, wenn man τ als Zeiteinheit betrachtet.

c) Die Berechnung der Bahnelemente aus den Beobachtungen erfolgt im wesentlichen gemäß den Methoden der Astronomie. Dadurch werden die Möglichkeiten, die die simultane Beobachtung der Satellitenbahnen bietet, nicht ausgeschöpft. Diese machen aber Berechnungen mit größerer Genauigkeit möglich.

Aus diesen Feststellungen folgen zwei Vorschläge, die nun besprochen werden sollen.

4.1 Die direkte Auswertung des Energieintegrals und des Drehimpulses

Wenn simultane Satellitenpositionsbeobachtungen von zwei oder mehr Stationen aus während einiger hundert Sekunden (≈ 2 bis 5 Minuten) mit der Zeitgenauigkeit von etwa $0,01$ und besser und den Positionsbeobachtungen entsprechender Genauigkeit ausgeführt werden, können die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bestimmt werden. Die Genauigkeit, mit der man den Betrag v erhält, dürfte 10^{-4} oder besser sein.

Die Feststellungen der Position $\vec{r}(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt und des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$ werden mit denen nach einem oder wenigen Umläufen durch die Energie- und die Drehimpuls Gleichung miteinander in Beziehung gebracht. Wir benutzen die Energiegleichung (5)

$$\left[\frac{v^2}{2} - U \right]_1^2 = E_2 - E_1 = \Delta E_{1,2} = w \int_{P_1}^{P_2} \varrho(v, \vartheta, \varphi) v^3 dt. \quad (13a)$$

Wenn man die Bewegungsgleichung (4) vektoriell mit \vec{r} multipliziert, gewinnt man für den Drehimpuls $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{v}$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{D} = w \varrho v \vec{D}. \quad (13b)$$

Die Änderung des Drehimpulses hat stets die Richtung des Drehimpulses. Wenn die Flugbahn des Satelliten in der 1. Näherung als ebene Kurve betrachtet wird, so bleibt auch bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes (allerdings ohne die Rotation der Atmosphäre und ohne Windsysteme) die Richtung von \vec{D} eine Bewegungsinvariante. In diesem Falle ergibt sich für den Betrag des Drehimpulses in zwei Bahnpunkten P_1 und P_2

$$D_2 - D_1 = \Delta D_{12} = \exp \left\{ w \int_{P_1}^{P_2} \varrho(r, \vartheta, \varphi) v dt \right\} \text{ mit } D = r^2 \dot{\eta}. \quad (13c)$$

η ist dabei die exzentrische Anomalie.

Die Terme auf der linken Seite von (13a) und (13c) werden aus den Beobachtungen ermittelt, und zwar $v_{1,2}^2/2$ mit einem relativen Fehler von höch-

stens 10^{-4} . Mit derselben Genauigkeit dürften die Werte von D_1 und D_2 zu ermitteln sein.

$$U \approx \frac{\mu}{r_e} \frac{r_e}{r} = r_e g(r_e) \frac{r_e}{r},$$

wobei r_e der »Erdradius« ist, kann etwa mit einem Fehler von 10^{-5} bestimmt werden. Die Koeffizienten der Entwicklung (2b) sind mit derselben Genauigkeit bekannt.

Bei der Berechnung von v und $\dot{\eta}$ ist darauf hinzuweisen, daß bei dem in 3.2 geschilderten und ähnlichen Verfahren noch größere Anforderungen an die Beobachtungen gestellt werden, weil vom Vektor \vec{l} die zweite Ableitung mittels numerischer Differentiation gebildet werden muß.

Während auf den linken Seiten der Gleichungen (13a, c) keine wesentlichen Vernachlässigungen nötig sind, ist es zweckmäßig, auf der rechten Seite bei der Auswertung der Integrale die Bahnkurven als Ellipsen anzunehmen.

4.2 Die erste Näherung des Verfahrens

Wenn die Polarkoordinaten der elliptischen Satellitenbahn wieder mit r , η bezeichnet werden, so wird sie durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(\eta - \eta_p)} \approx \frac{a}{1 + \varepsilon \cos(\eta - \eta_p)} \approx a(1 - \varepsilon \cos(\eta - \eta_p)). \quad (14)$$

Sie wird bekanntlich aus den beiden ersten Integralen

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\eta}^2) - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = \bar{E} \quad (15a)$$

und

$$r^2 \dot{\eta} = \bar{D} \quad (15b)$$

gewonnen.

Wir identifizieren: $\bar{E} = 1/2 (E_1 + E_2)$ und $\bar{D} = 1/2 (D_1 + D_2)$. ε und a bzw. $\tilde{p} = a(1 - \varepsilon^2)$ lassen sich leicht aus \bar{E} und \bar{D} berechnen. Es gilt:

$$\tilde{p} = \bar{D}^2/\mu, \quad \varepsilon = \frac{\bar{D}}{\mu} \sqrt{2\bar{E} + \frac{\mu^2}{\bar{D}^2}}, \quad a = \frac{\mu}{2\bar{E}}. \quad (16)$$

Aus (13b) folgt

$$\Delta E_{1,2} = w \int_{P_1}^{P_2} \rho v^2 ds \quad \varepsilon = \frac{\bar{D}}{\mu} \sqrt{2\bar{E} + \frac{\mu^2}{\bar{D}^2}}$$

mit

$$v^2 = 2 \left(\bar{E} + \frac{\mu}{r} \right) = 2 \left[\bar{E} + \frac{\mu}{a(1-\varepsilon^2)} (1 + \varepsilon \cos(\eta - \eta_p)) \right] \approx \\ \approx 2 \bar{E} + \frac{2\mu}{a} + \frac{2\mu}{a} \cos(\eta - \eta_p)$$

und

$$\frac{ds}{d\eta} = \frac{a(1-\varepsilon^2) \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos(\eta - \eta_p) + \varepsilon^2}}{[1 + \varepsilon \cos(\eta - \eta_p)]^2} \approx a(1 - \varepsilon \cos(\eta - \eta_p)).$$

Eingesetzt erhält man:

$$\Delta E_{1,2} = aw \int_{P_1}^{P_2} \varrho(r, \vartheta, \varphi) \left[2 \bar{E} + \frac{2\mu}{a} - 2 \bar{E} \varepsilon \cos(\eta - \eta_p) \right] d\eta \quad (17a)$$

und, wenn man über einen ganzen Umlauf vom Perigäum zum Perigäum integriert:

$$\Delta E = wa \int_0^{2\pi} \varrho(r, \vartheta, \varphi) \left[2 \bar{E} + \frac{2\mu}{a} - 2 \bar{E} \varepsilon \cos \tilde{\eta} \right] d\tilde{\eta}. \quad (17b)$$

Für $\varrho(r, \vartheta, \varphi)$ werden nun ebenfalls vereinfachende Annahmen gemacht, die mittlere Verhältnisse darstellen.

4.21 Das kugelsymmetrische Modell mit konstantem H

Dieses einfachste Modell wird etwas ausführlicher behandelt. Mit Hilfe von (14) erhält man

$$- \frac{r - r_p}{H} = - \frac{\varepsilon a}{H} (1 - \cos \tilde{\eta})$$

und aus (17b)

$$\Delta E = \varrho_p wae^{-\frac{\varepsilon a}{H}} \left[\left(2 \bar{E} + \frac{2\mu}{a} \right) \int_0^{2\pi} e^{\frac{\varepsilon a}{H} \cos \tilde{\eta}} d\tilde{\eta} - 2 \bar{E} \varepsilon \int_0^{2\pi} e^{\frac{\varepsilon a}{H} \cos \tilde{\eta}} \cos \tilde{\eta} d\tilde{\eta} \right]. \quad (18)$$

Die Integrale können mit Hilfe der Integraldarstellung der Besselfunktionen

$$I_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \tilde{\eta}} \cos n \tilde{\eta} d\tilde{\eta} \quad (\text{HANSEN}) [13] \quad (19)$$

ausgewertet werden.

Es gelten

$$iz = \frac{\varepsilon a}{H} \quad \text{und} \quad z = -i \frac{\varepsilon a}{H} = -i\zeta.$$

Da ferner $I_0(z)$ eine gerade und $I_1(z)$ eine ungerade Funktion ihrer Argumente sind, erhält man:

$$\Delta E = 2 \pi \rho_p w a e^{-\frac{\varepsilon a}{H}} \left[\left(2 \bar{E} + \frac{2\mu}{a} \right) I_0(i\zeta) - 2 \bar{E} \varepsilon i I_1(i\zeta) \right]. \quad (18a)$$

$I_0(i\zeta)$ und $-iI_1(i\zeta)$ sind positive, monoton wachsende Funktionen von $\zeta = a\varepsilon/H$. ζ bewegt sich etwa zwischen den folgenden Grenzen. H ist klein für geringe Höhen und zur Nachtzeit, groß für die umgekehrten Verhältnisse. In den Höhen $r_p = 230$ und 1230 km sind diese Grenzwerte 40 bzw. 240 km [14]. Ferner gilt:

$$a\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} (r_p + r_a) = \frac{\varepsilon r_p}{2} \left(1 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \approx r_p \varepsilon (1 + \varepsilon) \text{ für } \varepsilon \ll 1.$$

Man erhält die Tabelle I:

Tabelle I

Werte für $\varepsilon(1 + \varepsilon)$

$\varepsilon =$	0,2	0,1	0,05	0,02
$(1 + \varepsilon) =$	0,24	0,11	0,053	0,02

Für $r_p = 6600$ und $e_p = 7600$ erhält man daher die äußersten Werte:

$$40 \geq \zeta \geq 0,6.$$

Mit Hilfe dieser Zahlen werden die in (18a) vorkommenden Verhältnisse $e^{-\zeta} I_0(i\zeta)$ und $-ie^{-\zeta} I_1(i\zeta)$ abgeschätzt, indem diese für die folgenden Argumente ζ berechnet werden.

Tabelle II

Werte für die Verhältnisse $e^{-\zeta} I_0(i\zeta)$ und $-ie^{-\zeta} I_1(i\zeta)$

$\zeta =$	0,693	2,30	4,605	6,91	9,21
$e^{-\zeta} I_0(i\zeta) =$	0,560	0,283	0,191	0,155	0,133
$-ie^{-\zeta} I_1(i\zeta) =$	0,213	0,210	0,169	0,143	0,126

Mit wachsendem Argument nehmen die Verhältnisse monoton ab. Für $\zeta > 10$ müssen asymptotische Entwicklungen von $I_0(i\zeta)$ und $-iI_1(i\zeta)$ benutzt werden, weil die Tafeln diese Werte nicht mehr enthalten. Voraussichtlich werden sie für $\zeta \approx 20$ kaum kleiner als $0,1$ sein. Genauere Abschätzungen sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Man vergleicht nun die Formel (18a) mit einer für ΔE eines Satelliten auf einer Kreisbahn mit der Dichte ϱ_p .

$$\Delta E = w \frac{\bar{v}^2}{2a} a^2 \int_0^{2\pi} \varrho(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} = \frac{w}{2} g(a) a^2 \varrho_p 2\pi. \quad (18b)$$

Mit $C_D = 2$, $A/m_s = 10^{-3}$ bis 10^{-4} , $|w| = 10^{-3}$ bis 10^{-4} , $g(a) = 9$ [m/s²] erhält man für $h = 330$ km ($H \approx 75$ km), $a = 6700$ km aus (18b)

$$\Delta E = 1,3 \cdot 10^{11} \varrho_p.$$

Für eine Flugbahn mit demselben Perigäum $r_p = 6700$ km, der Exzentrizität $\varepsilon = 0,1$, $\zeta = 10$, $H = 75$ km erhält man dagegen

$$\Delta E = 7,7 \cdot 10^{10} \varrho_p.$$

Die ϱ_p -Werte in dieser Höhe sind mindestens von der Größenordnung 10^{-11} [kg/m³]. Man schließt, wenn ΔE mit der relativen Genauigkeit von 10^{-4} bestimmt werden kann, daß die vorgeschlagene Methode sich durchaus für die Bestimmung der Gasdichte in der hohen Atmosphäre eignen müßte. Ihr Vorteil besteht darin, daß man a mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes $a^3 = \tau^2 \mu / 4\pi^2$ oder ebenso wie ε gemäß (16) aus den Messungen von \bar{E} und \bar{D} relativ gut bestimmen kann. Auch geht das zunächst unbekannte H in (18a) weniger stark als in (10) ein.

4.22 Verallgemeinerungen

Die bisherigen Ausführungen sind in mancher Hinsicht zu verbessern.

Am nächsten liegt es, Formeln zu entwickeln, die auch Glieder mit ε^2 enthalten. Dann würden die Ausdrücke für v^2 , $ds/d\eta$ und r Glieder mit $\cos^2 \tilde{\eta}$ enthalten, die zwar leicht in solche mit $\cos 2\tilde{\eta}$ verwandelt werden können, aber im Exponenten mathematische Schwierigkeiten bereiten. Wichtiger als eine quadratische Theorie wäre die Berücksichtigung von

- a) der Höhenabhängigkeit von $H(r)$ und $g(r)$,
- b) der Abplattung der Flächen gleicher Dichte an den Polen,
- c) der Rotation der Atmosphäre,
- d) des täglichen Ganges (des Buckels) der Atmosphärendichte am sub-solaren Punkt.

Zu a):

Aus $dP/dr = -\varrho g$ und $P = \varrho g H$ folgt $d(\varrho g H)/dr = -\varrho g$ oder

$$\varrho g = \varrho_p g_p \exp \left\{ - \int_{r_p}^r \frac{\beta + 1}{H} dr \right\} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{dH}{dr}. \quad (20)$$

Wenn $\beta = 0$ ist, gilt

$$\frac{\varrho_p g_p}{g(r)} \exp \left\{ -\frac{r - r_p}{H} \right\} = \varrho_p \frac{r^2}{r_p^2} \exp \left\{ -\frac{r - r_p}{H} \right\}.$$

Dieser Fall kann in der linearen Theorie leicht behandelt werden; dagegen sind Ansätze mit variablem H kaum bekannt.

Zu b):

Man nimmt an, daß die Flächen gleicher Dichte Rotationsellipsoide sind $\tilde{r} \approx r (1 - \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta_c)$. ϑ_c ist die geozentrische Poldistanz, ε_1 die als bekannt anzusehende Exzentrizität. Man ersetzt r und r_p in (14) durch \tilde{r} und \tilde{r}_p und berechnet $\cos \vartheta_c$ mit Hilfe des Cosinussatzes. Wenn man

$$\varrho_p \exp \left\{ -\frac{r - r_p}{H} (1 + \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta_c) \right\}$$

in eine nach ε_1 fortschreitende Reihe entwickelt und nach dem zweiten Gliede abbricht, ist dieser Fall ebenfalls recht einfach zu behandeln. Diese Form der Störungsrechnungen ist auch bei der quadratischen Theorie anzuwenden.

Zu c):

Auch der Einfluß der Rotation der Atmosphäre kann durch eine geeignete Störungsrechnung berücksichtigt werden.

Zu d):

Zur Berücksichtigung des täglichen Ganges macht man nach (11b) den Ansatz $\varrho = \varrho_s (1 + 0,4 \cos^4 \psi/2)$, wobei ϱ_s die Gasdichte im subsolaren Punkt ist und ψ die Winkeldistanz von diesem Punkt. Wiederum ist $\cos^4 \psi/2$ durch $\cos n\tilde{\eta}$ und $\sin n\tilde{\eta}$ auszudrücken und die Störungsrechnung anzuwenden.

Alle diese Vorschläge können erst genauer diskutiert werden, wenn die im vorigen Abschnitt dargestellte Methode sich als praktisch erwiesen hat.

4.3 Die Dichtebestimmung mit Hilfe des Drehimpulssatzes

Man ist versucht, auch die Formel (13c) zur Dichtebestimmung zu benutzen. Man erhält für eine kreisförmige Satellitenbahn in einer kugelsymmetrischen, ruhigen Atmosphäre

$$\Delta D = \exp \{ w \varrho_p r_p 2 \pi \}.$$

Wenn wieder die Daten $|w| = 10^{-3}$, $r_p = 6600$ km, $\varrho_p \approx 10^{-10}$ [kg/m³] benutzt werden, erkennt man sofort, daß hieraus ϱ_p nicht bestimmt werden kann.

SCHRIFTTUM

1. CHOPRA, K. P.: *Rev. Mod. Physics* **33** (1961), S. 153.
2. LUCKE, O., H. STILLER: *Fortschritte der Physik* **11** (1963), S. 587.
3. HOHL, F., G. P. WOOD: Vortrag Third Symposium on Rarefield Gas Dynamics. Paris, June 1963.
4. COOK, G. E., D. G. KING-HELE, D. M. C. WALKER: *Proc. Roy. Soc., London*, **A 257** (1960), S. 224, *Proc. Roy. Soc., London*, **A 264** (1961), S. 88.
5. BROUWER, D.: Vortrag IUTAM Symposium, Paris 1962. Dynamics of Satellites. Springer-Verlag 1963.
6. WYATT, ST. P.: Vortrag IUTAM Symposium, Paris 1962. Dynamics of Satellites. Springer-Verlag 1963.
7. HENIZE, K. G.: *Sky and Telescope* 1957 S. 108.
8. NASA News release 13. 11. 1964.
9. La Recherche Spatiale IV (1) 1965 S. 13.
10. BAKER, R. M. L.: Vortrag IUTAM Symposium, Paris 1962. Dynamics of Satellites. Springer-Verlag 1963.
 STERNE, T. E.: *Science* **127** (1958), S. 1245.
 PHILIPPS, H.: *Abh. des MHD* **55 VIII** (1960). Akademie-Verlag, Berlin.
 JACCHIA, L. G.: *Rev. Mod. Physics* **35** (1963), S. 973.
11. DAVIES, M. J.: Vortrag IUTAM Symposium, Paris 1962. Dynamics of Satellites. Springer-Verlag 1963.
12. NICOLET, M.: *Planetary Space Science* **5** (1961), S. 1.
13. JAHNKE-EMDE: *Funktionentafeln*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1933.
14. HARRIS, J., W. PRIESTER: *Time-Dependent Structure of the Upper Atmosphere*. Goddard Space Flight Centre, NASA 1962.

ON THE DETERMINATION OF THE DENSITY OF NEUTRAL GAS
 IN THE UPPER ATMOSPHERE ACCORDING TO SATELLITE OBSERVATIONS

O. LUCKE

SUMMARY

After a detailed treatment of error sources in the constants of the motion equations of an orbiting satellite, the present methods for the determination of gas density in the upper atmosphere, further its errors are discussed. Next, a novel procedure is suggested under the assumption that, besides time and position, also the velocity vector of the orbit is known with a relative precision of 10^{-4} . In this case it would be possible to compute the density of air according to subsequent passages. Estimations for circular and elliptical orbits seem to prove their usability. Hints are given for a perturbation computation procedure allowing the consideration of various influences.

DÉTERMINATION DE LA DENSITÉ DU GAZ NEUTRE
 DANS L'ATMOSPÈRE SUPÉRIEURE PAR OBSERVATIONS DE SATELLITES

O. LUCKE

RÉSUMÉ

Après l'examen détaillé des sources d'erreurs dans les constantes des équations de mouvement d'un satellite orbitant, les méthodes actuelles de détermination de la densité du gaz dans l'atmosphère supérieure et leurs erreurs sont discutées. L'auteur propose un nouveau procédé supposant la connaissance, en plus de la position et du temps, du vecteur de vitesse de l'orbite avec une précision relative de 10^{-4} . Par ce procédé, la densité de l'air pourrait se calculer sur la base des passages consécutifs. Des estimations peuvent aussi être utilisées pour les orbites circulaires et elliptiques. L'examen d'un procédé de calcul des perturbations permettant de tenir compte des différentes influences termine l'étude.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ НЕЙТРАЛЬНЫХ ГАЗОВ
В ВЫСОКИХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ИСКУССТВЕННЫХ
СПУТНИКОВ

О. ЛУКЕ

РЕЗЮМЕ

После подробного обсуждения источников погрешностей постоянных, входящих в уравнения движения спутников, рассматриваются существующие методы для определения плотности газов в высоких слоях атмосферы с оценкой их погрешности. Предлагается новый метод, при котором допускается, что кроме положения и времени известны и векторы скорости орбиты с относительной точностью 10^{-4} . При этом плотность воздуха может вычисляться на основе следующих друг за другом переходов. Оценки, выполненные для круговой и эллиптической орбит, свидетельствуют о применимости метода. Анализируется прием для высчисления помех, позволяющий учитывать различные воздействия.

PRAKTISCHER EINSATZ DER MODERNEN INGENIEURGEOPHYSIK

O. MEISSER, Freiberg

[Eingegangen am 30. März 1965]

Die neuzeitliche Weiterentwicklung der klassischen Verfahren der Angewandten Geophysik und das Beschreiten neuer physikalischer Meß- und Interpretationswege haben für Anwendungen der Ingenieurgeophysik bei praktischen Untersuchungen »in situ« neue Möglichkeiten erschlossen. An Hand von durchgeführten Untersuchungen wird der Einsatz solcher neuer Verfahren für Baugrunduntersuchungen, Messungen an Talsperren, Bauwerken und im Bergwerk zur Bestimmung der benötigten geologischen Bodenkennwerte gezeigt.

Die Geophysik hat durch ihre weltweite Zusammenarbeit insbesondere im Internationalen Geophysikalischen Jahr (IGY, 1957) und in der Zeit der Internationalen Geophysikalischen Kooperation (IGC) sehr große Fortschritte gemacht. Das Vordringen in den interplanetarischen Raum (Satelliten) und die grundlegenden neuen Erkenntnisse über den Sonneneinfluß auf das physikalische Geschehen um und in der Erde ergeben starke Impulse für weitere Untersuchungen. Die internationale Zusammenarbeit ist bestrebt, durch neue Programme die gewonnenen Erkenntnisse zu vertiefen und zu erweitern. Für die Weltraumforschung ist das Programm der ruhigen Sonne (Quiet sun) 1964 geplant. Dem gegenüber nahm sich die Erforschung des Erdmantels und des Erdinnern weniger sensationell aus. Die Untersuchungen über den Aufbau des Erdkörpers, besonders des Erdmantels, werden im »Upper Mantle Project« (UMP) in den laufenden Jahren besonders gefördert. Für wirtschaftliche Zwecke interessieren unmittelbar aber nur die allerobersten Erdschichten.

Das Gebiet der angewandten Geophysik hat durch die überaus starken Impulse aus den Erkenntnissen über den Mantelaufbau und betont mit den dabei neu erarbeiteten instrumentellen Fortschritten (Magnetbandtechnik, kernphysikalische Anwendungen, Festkörperphysik) eine wesentliche Bereicherung erfahren. Die klassischen Verfahren der Prospektionsgeophysik haben wirtschaftlich bedeutende Erfolge bei der Suche nach Erdöl und Erdgas erzielt und zur Ermittlung der Tiefenstruktur der Erdkruste beigetragen. Trotzdem fehlen hier vielfach noch Methoden, die einen direkten Nachweis von Bodenschätzen gestatten. Zur Anwendung der klassischen Prospektionsmethoden treten in der letzten Zeit neue Einsatzgebiete in der Bergbaugeophysik und Ingenieurgeophysik hinzu. Die in entsagungsvoller Stille ausgeführten Grundlagenforschungen sind soweit fortgeschritten, daß man mehr und mehr an einen wirtschaftlichen Einsatz dieser neuen Verfahren mit Erfolg denken muß.

Die Geowissenschaften: Geologie, Mineralogie und Geophysik bilden stofflich im Gegenstand eine komplexe Einheit. In der Anwendung (Engineering) auf unsere obersten Erdschichten werden diese Gebiete im Rahmen der Ingenieurgeologie, der Felsmechanik und der Ingenieurgeophysik gemeinsam zum Einsatz gebracht. Die Anwendungsmöglichkeiten bei der Ingenieurgeophysik (Bauten) erstrecken sich auf

1. den Baugrund, seine geologische, stoffliche, physikalische und hydrologische Beschaffenheit;
2. die Großbauvorhaben selbst, als da sind Talsperren, Großfundamente, Straßen, Türme, Schornsteine, Kippen und Tagebaue, Tunnel, Kavernen, Schächte und Tiefbaue (Bergwerk).

Der Einsatz der Ingenieurgeophysik wird erfolgen bei

1. der Gründung zusammen mit der ingenieurgeologischen Beurteilung;
2. dem Bau und der Auswirkung des Baues auf den Untergrund;
3. der Überwachung des fertigen Bauwerkes.

Die geologischen Bodeneigenschaften: Struktur, Petrographie, Kluft- und Spaltenbildung, Dichte, Porosität, Durchlässigkeit müssen mit den physikalischen Eigenschaften: »Gebirgsfestigkeit«, elastisches Verhalten, rheologisches Verhalten, elektrische, kernphysikalische Kennwerte usw. so verbunden werden, daß die entsprechenden Untersuchungen im Labor an Einzelproben, Probekörpern und Modellen sowie in situ mittels geophysikalischer Verfahren vornehmlich als Nahverfahren, eine komplexe Diskussion mit definierten Eichwerten zur Beurteilung des gesamten Objektraumes gestatten. Die geophysikalischen Interpretationen ähneln den Nahverfahren bei Bohrlochuntersuchungen, ganz besonders dann, wenn auch Messungen nach der Tiefe in Bohrungen mit vorgenommen werden können.

Für Gründungsuntersuchungen zur Bestimmung der geologischen Struktur eignen sich mit verfeinerter Meßgenauigkeit und angepaßter Interpretationstechnik die bekannten gravimetrischen, elektrischen, seismischen und kernphysikalischen Verfahren. Die Kennziffern wie Porosität, Elastizitätsmodul, Poissonsche Zahl, Klüftung und Setzungsverhalten bei statischer oder dynamischer Belastung können in angepaßter Form schon heute gut in situ bestimmt werden.

Zur Illustrierung der obigen allgemeinen Ausführungen werden aus unseren zahlreichen praktischen Untersuchungen einige Beispiele angeführt.

In dem Auslaugungsgebiet der Mansfelder Mulde können aus über 10jährigen, zeitlich und räumlich engen Nivellements die Kurven gleicher Bodensenkungsgeschwindigkeiten und das Wandern der Senkungs- und Hebunggebiete in der Ortslage von Erdeborn beobachtet und für Schutzmaßnahmen ausgewertet werden. Die Zonen starker rezenter Erdkrustenbewegungen fallen — empirisch festgestellt — mit einer gravimetrischen Anomalie, die von

größeren Lockermassen herrührt, zusammen. Aus der Lage der Schwereanomalie wird auch auf die Gefährdung einer Hauptstraße durch Erdfälle geschlossen werden, wie mittels seismischer Vibratormessungen (Schwingungen des Untergrundes im Bereich von 20–80 Hz) nachgewiesen wurde.

Für Fundamentgründung eines Schornsteins konnte von der Baugrube (20 × 20 m) aus elektrisch und hammerschlagseismisch das Durchsetzen eines Porphyrganges vorausgesagt werden. Die daraufhin vorgenommenen bautechnischen Sicherheitsmaßnahmen ergaben in der Überwachung mittels Schlauchwaagemessungen eine einwandfreie Standfestigkeit des 120 m hohen Schornsteines.

Die statischen Großversuche an Felsverankerungen (Schlauchwaage) einer Talsperre ergaben mit seismisch (Hammerschlagseismik, Vibratormessungen mit 700 Hz) bestimmten elastischen Kennzahlen (Elastizitätsmodul, Poisson-Zahl, Anisotropie) eine Bestimmung der entsprechenden Werte mit der Tiefe und Übereinstimmung mit der Klüftung des geologischen Gesteinskomplexes (Diabas).

Seismische, elektrische und kernphysikalische Untersuchungen an Elbedeichen zeigen komplex einen komplizierten Aufbau der Flußdämme, ihren Verfestigungszustand und eine ungefähre Beurteilung für ihre Wasserdurchlässigkeit (Sickerlinie). Es konnten dabei wertvolle theoretische und experimentelle Untersuchungen über den Zusammenhang von Porosität und Wellengeschwindigkeit in Ansatz gebracht werden.

Gerade die Bestimmung der Klüftigkeit eines Gesteinskomplexes aus den beobachteten seismischen Wellengeschwindigkeiten gestattet sowohl bei Talsperrengründungen wie im Anstehenden einer Untertagestrecke weitgehende Schlüsse auf die »Gebirgsfestigkeit« zu ziehen und die erforderlichen Arbeitsverfahren zur Schonung der Gesteinsfestigkeit festzulegen.

Das Verhalten eines Bauwerkes, statisch und dynamisch, wird aus seinen Setzungen und seinem Schwingungsverhalten (Amplitude, Frequenz, Dämpfung) in Verbindung mit dem Baugrund über die Erkenntnisse bei Erdbeben hinaus auch bei Industrieerschütterungen (Sprengungen, Maschinen) heute einwandfrei beurteilt. Besonders auf die Überwachung von Talsperren durch Präzisionsnivellements (Schlauchwaage $\pm 0,01$ mm), Neigungsmessungen (Größenordnung 0,1 Bogensekunde) und Erschütterungsmessungen sei hingewiesen. Auch der unerwünschte Abfluß unter der Sperrmauer läßt sich geophysikalisch lokalisieren.

Es ist selbstverständlich, daß die hier angeführten industriellen geophysikalischen Beispiele bei den hohen Investsummen für die Bauwerke als wesentliche Ergänzung des ingenieurgeologischen Gutachtens sowohl einen Einsatz der jetzt schon verfügbaren Ingenieurgeophysik wie eine weitere Intensivierung der entsprechenden Forschungen nach Grundlage und Erprobung dringend erfordern.

PRACTICAL APPLICATIONS OF MODERN ENGINEERING GEOPHYSICS

PROF. O. MEISER

SUMMARY

The modern development of the classical methods of applied geophysics and the new ways of physical measurements and interpretation have opened new possibilities for the application of engineering geophysics in practical "in situ" investigations. On the basis of actual investigations, the application of such novel methods for the investigation of building sites, for measurements on dams, buildings and in mines with the aim to determine the necessary geological parameters is shown.

L'APPLICATION PRATIQUE DE LA GÉOPHYSIQUE D'INGÉNIEUR

O. MEISSER

RÉSUMÉ

Le développement contemporain des procédés classiques de la géophysique appliquée et les nouvelles techniques de mesurage et d'interprétation physiques ont offert de nouvelles possibilités pour les recherches pratiques «in situ» de la géophysique d'ingénieur. Sur la base des recherches effectuées, l'auteur montre l'application des nouveaux procédés permettant la détermination des paramètres géologiques nécessaires dans les études de fondations, dans les mesures sur barrages et bâtiments ou dans les recherches minières.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННОЙ ИНЖЕНЕРНОЙ
ГЕОФИЗИКИ

O. MEISER

РЕЗЮМЕ

Современное развитие классических методов прикладной геофизики и освоение новых физических приемов измерения и интерпретации открыли новые возможности в области применения инженерной геофизики для исследования горных пород в условиях их естественного залегания. Опираясь на фактические материалы проведенных исследований, автор описывает применение подобных новых приемов в исследовании грунтов при строительстве, в измерениях, связанных с постройкой плотин, а также при горных работах для определения необходимых геологических параметров.

DIE INTERNATIONALE GEODÄTISCHE BIBLIOGRAPHIE

H. PESCHEL, Dresden

[Eingegangen am 22. März 1965]

Der Aufsatz gibt eine Übersicht über Entwicklung und Stand der zur wissenschaftlichen Forschungsarbeit unentbehrlichen Dokumentation der Geodäsie.

Das Aufblühen der Wissenschaft in den letzten 100 Jahren ließ die Zahl der Veröffentlichungen auf jedem Gebiet exponentiell anwachsen. Die Geodäten erkannten bereits sehr früh, daß eine zentrale Erfassung aller erschienenen Bücher und Fachartikel die Grundlage für jede ernste wissenschaftliche Arbeit darstellt, denn sie muß auf einem gründlichen Literaturstudium aufbauen. Eine Sammlung bibliographischer Hinweise, geordnet nach Teilgebieten der Spezialwissenschaft, ermöglicht es, alle einschlägigen Arbeiten heranzuziehen, vorausgesetzt, daß diese Sammlung vollständig ist und alle wichtigen Beiträge schon kurze Zeit nach ihrem Erscheinen nachweist.

Bereits 1889 erschien die erste »*Bibliographie Géodésique — Geodätische Literatur*«. Das von Prof. BÖRSCH in Potsdam zusammengestellte Verzeichnis war im Zentralbüro für die Internationale Erdmessung bearbeitet worden. Diese Bibliographie gibt einen Überblick über die vorliegenden Veröffentlichungen zur Gradmessung und enthält Beiträge aus 17 Ländern. Sie ist die erste internationale Fachbibliographie der Geodäsie und umfaßt insgesamt 25 Jahre. Das Vorwort enthält den Dank an die Fachkollegen Professor WITTRAM aus Rußland und den Ungarn L. v. BODOLA, der damals als Dozent für Geodäsie am Polytechnikum in Budapest wirkte.

Fast 50 Jahre später war es PERRIER, der französische Geodät und erste Generalsekretär der Internationalen Assoziation für Geodäsie in Paris, der sich mit der Herausgabe einer neuzeitlichen geodätischen Bibliographie beschäftigte. Sie erschien 1935 als Band 1 der *Bibliographie Géodésique Internationale* und erfaßte die Fachliteratur der Jahre 1928—1930 auf dem Gebiete der Höheren Geodäsie. Auch an dieser Erstausgabe hatte mit A. TASS, dem Direktor des Observatoriums Budapest, ein ungarischer Fachmann mitgewirkt und das Zustandekommen dieses Literaturnachweises maßgeblich unterstützt. Seit 1952 hat Prof. Dr. TÁRCZY-HORNOCH von der Technischen Hochschule Sopron, Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, aktiv an den Fortsetzungsbänden mitgearbeitet.

Da die Bibliographie Géodésique Internationale zu den bibliographischen Angaben von den wichtigsten Arbeiten kurze Referate bringt, kann man sie als die erste internationale Dokumentation der geodätischen Fachliteratur bezeichnen. Sie erschien regelmäßig alle drei Jahre und erfaßte die zwischen den Generalversammlungen der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik herausgekommenen Veröffentlichungen. Notwendig gewordene Veränderungen in der äußeren Form und das starke Anwachsen der geodätischen Publikationstätigkeit ohne eine äquivalente personelle Verstärkung des Bearbeiterstabes verzögerten die Herausgabe um 5 bis 8 Jahre, so daß infolge der fehlenden Aktualität das Interesse der Abnehmer zurückging. Ihr Inhalt konnte mit der modernen Entwicklung in der Geodäsie nicht mehr Schritt halten, denn die Buchform ist für ein schnelles Auffinden der gesuchten Literatur ungeeignet. Die letzte vollständige Ausgabe des Jahres 1956 mit den Annotationen 1949—51 fand nur ganz geringen Absatz.

Für die wissenschaftliche geodätische Arbeit in der Deutschen Demokratischen Republik wurde die Information und Dokumentation dringend gebraucht. Nach einem Gedankenaustausch mit Prof. Dr. O. MEISSER von der Bergakademie Freiberg über die Möglichkeiten einer geodätischen Dokumentation richtete der Direktor des Geodätischen Instituts der Technischen Hochschule in Dresden eine Dokumentationsstelle ein und betraute Dipl.-Ing. H.-J. PAUL mit der Durchführung der dokumentarischen Arbeit. Mit der Dokumentationsstelle für Geophysik an der Bergakademie Freiberg wurde engstens zusammengearbeitet, was schon daraus hervorgeht, daß ab 1957 die Ergebnisse in Heftform als »*Montanwissenschaftliche Literaturberichte, Reihe C der Bergakademie Freiberg*« erschienen. Für die Informationsarbeit bedeutend wichtiger war jedoch die gleichzeitige Herausgabe als Dokumentationskarten im Format DIN A 6, alle Angaben sowohl mit Aufdruck der Dezimalklassifikation als auch mit Stichworten.

Mit dieser Einrichtung konnte eine ausreichende Information für Lehre und Forschung der Hauptfachrichtung Geodäsie und Kartographie an der TH Dresden, aber auch an allen geodätischen Forschungs- und Entwicklungsstätten der DDR erreicht werden. Den Studenten standen nunmehr für ihr Selbststudium, insbesondere für die Ausarbeitung ihrer Seminarvorträge genügend Literaturhinweise zu Verfügung.

Wie jede Neuerung auf geodätischem Gebiet wurde auch dieser Dokumentationsdienst zunächst mit Vorbehalt aufgenommen. Anfangs herrschte die falsche Meinung vor, daß die persönliche Literatursuche nicht zu umgehen sei. Jedoch bald erkannten die Wissenschaftler den Wert des Dokumentationsdienstes und nutzten seine Vorteile aus. Die Mitarbeiter des praktischen Vermessungsdienstes erhielten die Informationen des Referatedienstes in ihren Betrieben.

Der Wunsch nach größerer Breite und Aktualität der geodätischen Dokumentation und Information wurde laut. Er ließ sich nur durch eine gut organisierte Zusammenarbeit aller wissenschaftlichen Einrichtungen der DDR auf geodätischem Gebiet erfüllen. So wurden vom Direktor des Geodätischen Instituts der TH Dresden mit den Direktoren des Geodätischen Instituts Potsdam (Prof. Dr. REICHENEDER) und des Geodätischen Dienstes in Leipzig (Dipl.-Mathem. KRAMER) Vereinbarungen getroffen, denen später die Redaktion der Fachzeitschrift »Vermessungstechnik« sich anschloß, wonach die erforderlichen Referate der in- und ausländischen Fachpresse gemeinsam und sinnvoll verteilt erarbeitet wurden. Es beteiligten sich an der Lösung der Aufgaben neben den genannten Einrichtungen noch die Dozenturen für Vermessungswesen der Hochschulen für Bauwesen in Weimar, Leipzig und Cottbus, die Institute für Markscheidewesen, für Angewandte Geophysik sowie für Geodäsie und Fotogrammetrie der Bergakademie Freiberg, der Kartographische Dienst in Potsdam sowie der VEB Carl Zeiss JENA. Die Bearbeitung der Referate war terminlich gebunden und wurde als Dienstaufgabe vorgenommen. Damit konnte die erforderliche Breite einer aktuellen Information erzielt werden.

Sehr bald interessierten sich die ausländischen Fachkollegen für diesen Informationsdienst. Die enge Freundschaft zwischen den Soproner und Dresdener Instituten und ihren Direktoren brachte dieses Interesse darin zum Ausdruck, daß Prof. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH als Erster seine Mitarbeit anbot, indem er die ungarische Fachliteratur dokumentieren und als Kurzreferate in deutscher Sprache nach Dresden senden ließ. Ihm folgten der bulgarische Kollege Prof. W. PEEWSKI, Sofia, und die Mitarbeiter des niederländischen International Training Centre Fotogrammetrie in Delft unter Leitung von Prof. Dr. SCHERMERHORN.

Es zeigte sich sehr bald, wie durch Ausweitung der internationalen Kooperation Arbeitskraft, Zeit und Geld für die fachwissenschaftliche Information gespart werden kann, wenn die nicht mehr zu umgehende Literatursuche durch die Dokumentation auf viele Schultern verteilt wird. Ganz entscheidend war bei dieser mühevollen Vorbereitung die Erkenntnis, daß für eine moderne Information die Vollständigkeit und zugleich die Aktualität nur durch eine großzügige internationale Zusammenarbeit erreicht werden kann, frei von politischen und wirtschaftlichen Hemmungen. Darüber hinaus hatte sich gezeigt, daß die freiwillige Mitarbeit der interessierten Dienststellen, die ihrerseits die Dokumentation zur dienstlichen Aufgabe und gesellschaftlichen Pflicht macht, sich bewährte.

Es konnte mit einem Minimum an Kräften ein Optimum an Information erreicht werden, besser als mit Berufsdokumentalisten, denen die fachlichen Kenntnisse für die Erfassung des wesentlichen Inhalts der Veröffentlichungen fehlen. Die rasche Auswertung der Fachliteratur für die

Dokumentation bringt außerdem den eingesetzten Fachkollegen große Vorteile für ihre eigene wissenschaftliche Arbeit.

Da die Internationale Assoziation für Geodäsie vor der Entscheidung stand, ihre B.G.I. entweder einzustellen oder neue moderne Formen für sie zu finden, fand der in Dresden eingeschlagene Weg die Aufmerksamkeit der Bibliographie-Kommission der AIG. Auf der XII. Generalversammlung der IUGG in Helsinki stand das Problem auf der Tagesordnung. Prof. BARDA von der TH Delft erhielt als Mitglied der Kommission den Auftrag, Untersuchungen und Beratungen über eine neue Form der B.G.I. mit Experten durchzuführen. Obwohl schon in Helsinki der Weg von Dresden für eine Internationale Dokumentation bei der finanziellen Lage der AIG als der einzig gangbare erschien, brachte doch erst die Expertenkonferenz im Mai 1961 in Delft Klarheit. Dort wurden Einzelheiten einer breiten Internationalen Dokumentation diskutiert und festgelegt. Der Direktor des Geodätischen Instituts der TH Dresden übernahm es, bis zur XIII. Generalversammlung der IUGG 1963 eine Internationale Dokumentation Geodäsie entsprechend dem Dresdner Muster in den vier Sprachen deutsch, russisch, englisch und französisch in Heften und Karten herauszubringen. Außerdem wurde festgelegt, daß die bisherige *Bibliographie Géodésique Internationale* für die Jahre 1952 bis 1960 vom Zentralbüro der AIG noch abgeschlossen werden sollte, um den Anschluß zur neuen Form herzustellen.

Als Dauerversuch erschienen seit Januar 1962 die Karteikarten der IGD in vier Sprachen, die Referatehefte aus ökonomischen Gründen weiterhin unter dem bisherigen Namen, »*Montanwissenschaftliche Literaturberichte, Reihe G, Geodäsie*«. Wie zu erwarten, fehlte das Verständnis der Geodäten für diesen Namen. Auf eine notwendige Namensänderung hatte Prof. Dr. TÁRCZY-HORNOCH bereits 1962 bei einer Besprechung über Fragen der internationalen Zusammenarbeit aufmerksam gemacht. Ab 1963 konnten die Referatehefte als »*Bibliographia geodetica*« erscheinen, zumal von diesem Zeitpunkt an die Herausgeberschaft vom Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik der DDR bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften übernommen wurde. Offiziell trat die *Bibliographia geodetica* die Nachfolgerschaft der *Bibliographie Géodésique Internationale* im September 1963 an, als bei den Beratungen der AIG in Berkeley die Dokumentationsstelle des Geodätischen Instituts der TU Dresden als Zentralredaktion bestätigt wurde.

Bei den Beratungen in Delft wurde empfohlen, einige Regionalzentren für die IGD zu schaffen, wo die nationalen Veröffentlichungen in der Landessprache sowie diejenigen umliegender Länder zu dokumentieren sind. Derartige Regionalzentren der AIG bestehen zur Zeit außer in Dresden in Moskau, Washington, Paris, London, Helsinki und Frankfurt/Main. Weitere Mitarbeiter für diese Regionalzentren stellen neben den früher schon aktiven Instituten

in Sopron, Budapest und Sofia mehrere geodätische Einrichtungen in Warschau, Prag, Oslo und Canberra.

Laufend müssen durch persönliche Kontakte der verantwortlichen Mitarbeiter im Dresdner Zentrum neue Mitarbeiter gewonnen werden, damit die internationale Zusammenarbeit aktiviert und verbessert werden kann. So wurde auf der VII. Konferenz der Europäisch-asiatischen Region für die Internationale Geodätische und Geophysikalische Cooperation (Moskau Juni 1964) eine Empfehlung angenommen, wonach alle Nationalkomitees der Mitgliedsländer nationale Beauftragte für die Internationale Geodätische Dokumentation benennen sollen. Auf diese Weise kann eine feste und sehr nützliche Mitarbeit gesichert werden.

In jährlich etwa 1300 Referaten werden aus allen Fachgebieten der Geodäsie die international wichtigsten Arbeiten dokumentiert. Eine Ergänzungsbibliographie bringt außerdem noch etwa 1500 Titel und ein Register, so daß von weitgehender Vollständigkeit gesprochen werden kann. Die Weiterentwicklung der Publikationen wird in Zukunft eine Vergrößerung des Umfangs fordern, die heute weder notwendig noch möglich ist. Der gezielten Auswahl der Referate kommt somit ganz besondere Bedeutung zu. Es wird eine hochwertige Mitarbeit der Geodätischen Institute aller Kulturländer gefordert.

Besonders erfreulich ist, daß der Jubilar, Prof. Dr. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH, dem dieser Beitrag zu seinem 65. Geburtstag gewidmet wurde, mit seiner ganzen Person die Arbeiten an der Internationalen Geodätischen Dokumentation gefördert hat. Dafür sagen ihm wie auch seinen Vorgängern und Mitarbeitern die Fachkollegen in aller Welt herzlichen Dank.

THE INTERNATIONAL GEODETIC BIBLIOGRAPHY

H. PESCHEL

SUMMARY

This is a summary of the development and present state of geodetic documentation indispensable for scientific research work.

LA BIBLIOGRAPHIE GÉODÉSIQUE INTERNATIONALE

H. PESCHEL

RÉSUMÉ

Le mémoire donne un aperçu du développement et de l'état actuel de la documentation géodésique, indispensable pour tout travail de recherche scientifique intéressant la géodésie.

МЕЖДУНАРОДНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ ПО ГЕОДЕЗИИ

Х. ПЕШЕЛЬ

РЕЗЮМЕ

В статье дан обзор о развитии и состоянии геодезической документации, необходимой для научно-исследовательских работ.

MODELLE ZUR DEUTUNG DES ANOMALEN VERHALTENS GEOMAGNETISCHER VARIATIONEN ÜBER GROSSEN ZYLINDRISCHEN SEDIMENTBECKEN

E. PORSTENDORFER und G. PORSTENDORFER

MITTEILUNG NR. 18 AUS DEM INSTITUT FÜR GEODYNAMIK JENA DER FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT
DER DAW ZU BERLIN

[Eingegangen am 10. Mai 1965]

Die Arbeit untersucht die Möglichkeit der Deutung des anomalen Verhaltens geomagnetischer Baistörungen in Norddeutschland durch ein Stromsystem, das im Bereich der magneto-tellurisch erfaßten gutleitenden Sedimente fließt.

Die Stromdichteverteilung wird für verschiedene Modelle gutleitender Zonen im Sedimentbereich, in der tieferen Erdkruste und im Erdmantel theoretisch unter Beachtung des Skineffektes und praktisch durch elektromagnetisch äquivalente Modellversuche abgeschätzt. Die magnetische ΔZ -Wirkung des Stromsystems im Sedimentbereich für vorgegebenen geologischen Tiefenbau wird durch Auszählprogramme ermittelt und mit den tatsächlich gemessenen Werten verglichen.

Untersuchungen von WIESE [1] und SCHMUCKER [2] an geomagnetischen Baistörungen ($T \approx 30$ min) im norddeutschen Raum zeigten, daß sich durch Norddeutschland etwa entlang der Linie Bremen—Wittenberge eine ost-westlich gerichtete Grenzlinie zieht, die zwei Räume mit entgegengesetzten Vorzeichen der ΔZ -Komponenten von Baistörungen abgrenzt. Magneto-tellurische Sondierungen in Norddeutschland [3] erbrachten den Nachweis, daß die Sedimente des norddeutsch-polnischen Sedimentbeckens mit Werten der mittleren spezifischen Längswiderstände unter 2—4 Ω m viel niederohmiger sind als bisher angenommen wurde.

Die Vermutung liegt nahe, daß das Ost-West-Stromsystem, welches das anomale Verhalten der ΔZ -Komponenten erklären würde, in erster Linie im Bereich des gutleitenden »Sedimetozeans« Norddeutschlands fließt. Diese Annahme bedarf aber einer Prüfung in Hinsicht auf die Frage, wie sich das Vorhandensein zusätzlicher gutleitender Schichten in der tieferen hochohmigen Kruste bzw. im oberen Erdmantel auswirken wird.

Dazu wurden die Stromdichteverteilungen für drei Schichtenmodelle errechnet, die unter Berücksichtigung international vorliegender magnetotellurischer Sondierungen und in Zusammenarbeit mit dem VEB Gheophysik durchgeführt Messungen im Gebiet der Insel Rügen entworfen wurden (Abb. 1).

Die Berechnung erfolgte ausgehend von dem von CAGNIARD gegebenen Ansatz für die Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung einer harmonischen ebenen Welle für horizontale Schichtung im elektromagnetischen cgs-System

$$E_x = A \cdot e^{-kz} + B e^{+kz} \quad (1)$$

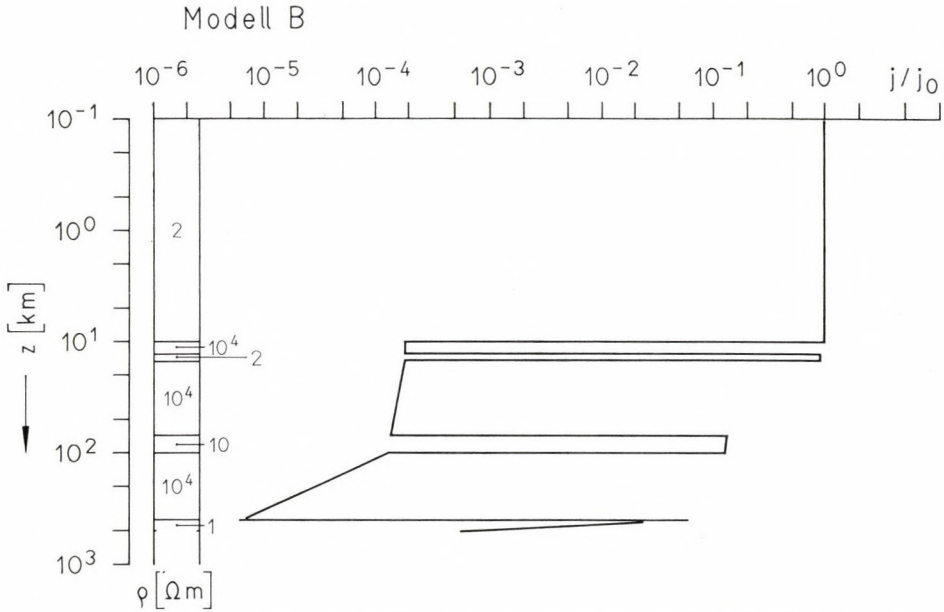


Abb. 1. B. Stromdichteverteilung für vorgegebene Krusten- und Mantelstruktur
Modell B: Typ Zentrum des norddeutschen Sedimentationsbeckens

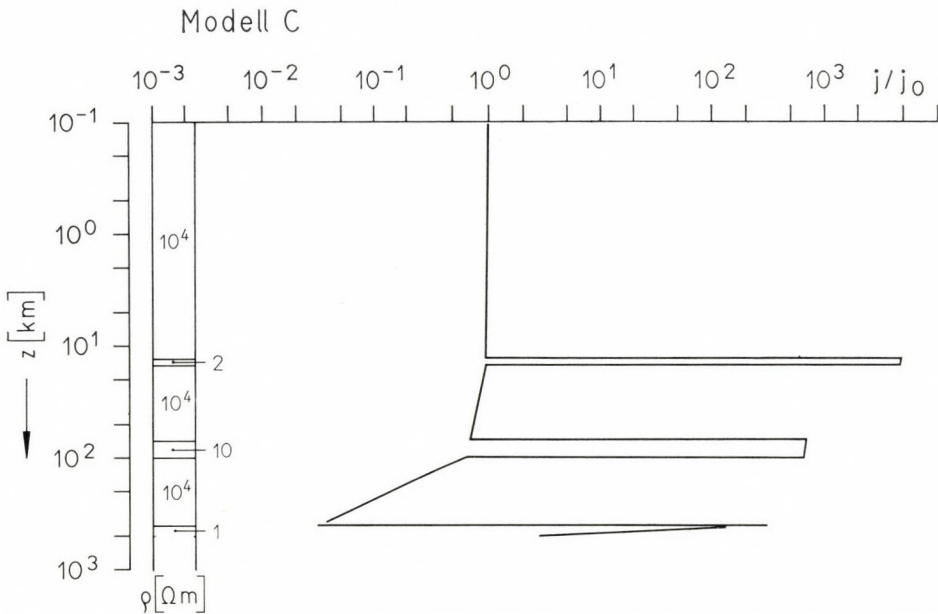


Abb. 1. C. Stromdichteverteilung für vorgegebene Krusten- und Mantelstruktur
Modell C: Typ südlich des Mitteldeutschen Hauptabbruches (Gebiet anstehenden hochohmigen Grundgebirges)

$$A_2 = A_1 \cdot e^{z_1(k_2 - k_1)} \cdot \frac{(k_2 + k_1)}{2k_2} + B_1 e^{z_1(k_2 + k_1)} \cdot \frac{k_2 - k_1}{2k_2} \quad (6)$$

$$B_2 = A_1 e^{-z_1(k_2 + k_1)} \cdot \frac{(k_2 - k_1)}{2k_2} + B_1 e^{-z_1(k_2 - k_1)} \cdot \frac{k_2 + k_1}{2k_2} \quad (7)$$

Die Trennung von Real- und Imaginärteil von A_2 und B_2 liefert (8) und (9).

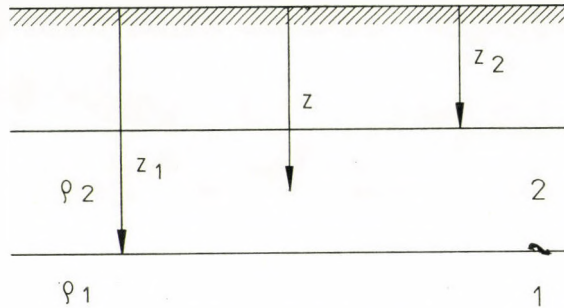


Abb. 2. Zur Erklärung der verwendeten Tiefenkoordinaten

$$A_2 = \frac{\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\sigma_2}} \cdot A_1 e^{\left(\frac{z_1}{p_2} - \frac{z_1}{p_1}\right)} \cdot e^{-i\left(\frac{z_1}{p_2} - \frac{z_1}{p_1}\right)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\sigma_2}} \cdot B_1 \cdot e^{p_2 + \frac{z_1}{p_1}} \cdot e^{-i\left(\frac{z_1}{p_2} + \frac{z_1}{p_1}\right)}$$

$$\varphi = \frac{z_1}{p_2} - \frac{z_1}{p_1} \quad \psi = \frac{z_1}{p_2} + \frac{z_1}{p_1} \quad \sigma_i = \frac{1}{\varrho_i}$$

$$f = \frac{\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\sigma_2}} \quad \sigma_i = \frac{1}{\varrho_i}$$

$$g = \frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\sigma_2}}$$

$$A_2 = (\operatorname{Re} A_1 + i \operatorname{Im} A_1) \cdot f \cdot e^\varphi (\cos \varphi - i \sin \varphi) +$$

$$+ (\operatorname{Re} B_1 + i \operatorname{Im} B_1) \cdot g \cdot e^\psi (\cos \psi - i \sin \psi)$$

$$\operatorname{Re}(A_2) = e^\varphi \cdot f (\operatorname{Re} A_1 \cos \varphi + \operatorname{Im} A_1 \sin \varphi) +$$

$$+ e^\psi \cdot g (\operatorname{Re} B_1 \cos \psi + \operatorname{Im} B_1 \sin \psi) \quad (8)$$

$$\operatorname{Im}(A_2) = e^\varphi f (-\operatorname{Re} A_1 \sin \varphi + \operatorname{Im} A_1 \cos \varphi)$$

$$+ e^\psi g (-\operatorname{Re} B_1 \sin \psi + \operatorname{Im} B_1 \cos \psi)$$

$$B_2 = A_1 \cdot \frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\sigma_2}} \cdot e^{-\left(\frac{z_1}{p_2} + \frac{z_1}{p_1}\right)} \cdot e^{+i\left(\frac{z_1}{p_2} + \frac{z_1}{p_1}\right)} +$$

$$+ B_1 \cdot \frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\sigma_2}} \cdot e^{-\left(\frac{z_1}{p_2} - \frac{z_1}{p_1}\right)} \cdot e^{+i\left(\frac{z_1}{p_2} - \frac{z_1}{p_1}\right)}$$

$$B_2 = (\operatorname{Re} A_1 + i \operatorname{Im} A_1) \cdot g e^{-\psi} \cdot (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$+ (\operatorname{Re} B_1 + i \operatorname{Im} B_1) \cdot f e^{-\varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\operatorname{Re} (B_2) = g e^{-\psi} (\operatorname{Re} A_1 \cdot \cos \psi - \operatorname{Im} A_1 \cdot \sin \psi) +$$

$$+ f e^{-\varphi} (\operatorname{Re} B_1 \cdot \cos \varphi - \operatorname{Im} B_1 \sin \varphi) \tag{9}$$

$$\operatorname{Im} (B_2) = g e^{-\psi} (\operatorname{Re} A_1 \sin \psi + \operatorname{Im} A_1 \cos \psi) +$$

$$+ f e^{-\varphi} (\operatorname{Re} B_1 \sin \varphi + \operatorname{Im} B_1 \cos \varphi)$$

Daraus lassen sich die Real- und Imaginärteile von E_2 errechnen.

$$E_2 = (\operatorname{Re} A_2 + i \operatorname{Im} A_2) e^{-\frac{z}{p_2}} \left(\cos \frac{z}{p_2} + i \sin \frac{z}{p_2} \right) +$$

$$+ (\operatorname{Re} B_2 + i \operatorname{Im} B_2) e^{\frac{z}{p_2}} \left(\cos \frac{z}{p_2} - i \sin \frac{z}{p_2} \right) =$$

$$= e^{-\frac{z}{p_2}} \left(\operatorname{Re} A_2 \cos \frac{z}{p_2} + i \operatorname{Re} A_2 \sin \frac{z}{p_2} + i \operatorname{Im} A_2 \cos \frac{z}{p_2} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Im} A_2 \sin \frac{z}{p_2} \right) + e^{+\frac{z}{p_2}} \left(\operatorname{Re} B_2 \cos \frac{z}{p_2} - i \operatorname{Re} B_2 \sin \frac{z}{p_2} + \right.$$

$$\left. + i \operatorname{Im} B_2 \cos \frac{z}{p_2} + \operatorname{Im} B_2 \sin \frac{z}{p_2} \right).$$

$$\operatorname{Re} (E_2) = e^{-\frac{z}{p_2}} \left(\operatorname{Re} A_2 \cos \frac{z}{p_2} - \operatorname{Im} A_2 \sin \frac{z}{p_2} \right) +$$

$$+ e^{+\frac{z}{p_2}} \left(\operatorname{Re} B_2 \cos \frac{z}{p_2} + \operatorname{Im} B_2 \sin \frac{z}{p_2} \right). \tag{10}$$

$$\operatorname{Im} (E_2) = e^{-\frac{z}{p_2}} \left(+ \operatorname{Re} A_2 \sin \frac{z}{p_2} + \operatorname{Im} A_2 \cos \frac{z}{p_2} \right) +$$

$$+ e^{+\frac{z}{p_2}} \left(- \operatorname{Re} B_2 \sin \frac{z}{p_2} + \operatorname{Im} B_2 \cos \frac{z}{p_2} \right).$$

Den Betrag des elektrischen Feldes erhält man aus

$$|E_2| = \sqrt{(\operatorname{Re} E_2)^2 + (\operatorname{Im} E_2)^2} \tag{11}$$

und daraus den Betrag der Stromdichte

$$j_2 = \sigma_2 \cdot |E_2|. \quad (12)$$

Für das allerunterste Medium setzt man

$$\operatorname{Re}(A) = 1$$

$$\operatorname{Im}(A) = 0$$

$$\operatorname{Re}(B) = 0$$

$$\operatorname{Im}(B) = 0$$

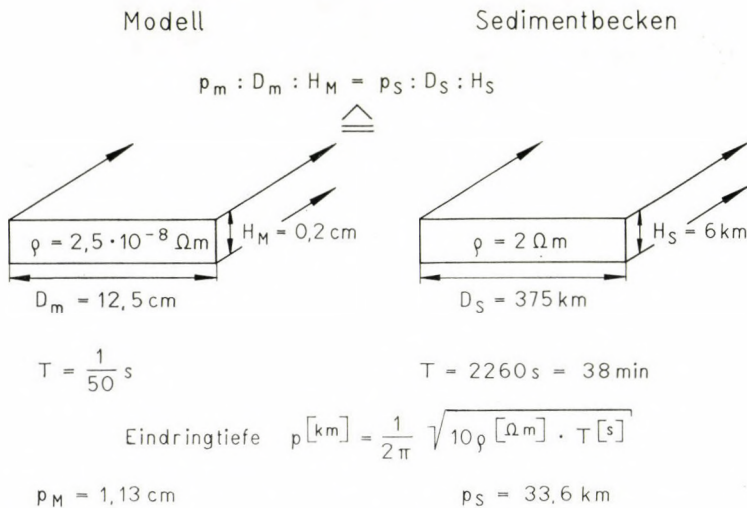


Abb. 3. Elektromagnetische Äquivalenz zwischen Modell und Sedimentbecken

So kann man ausgehend vom alleruntersten Medium sukzessiv die Koeffizienten und damit die Stromdichteverteilungen für alle darüberlagernden Schichten berechnen.

Die Ergebnisse der Rechnungen wurden in Abb. 1 eingetragen. Sie zeigen, daß im Falle des Vorhandenseins einer gutleitenden Sedimentdecke mit Mächtigkeiten bis zu 10 km der Hauptteil der den Baistörungen zugeordneten Ströme ohne wesentlichen Skineffekt im Sedimentbereich fließt. Die Ströme verlagern sich erst in größere Tiefen, wenn die Sedimentmächtigkeit abnimmt bzw. ganz verschwindet.

Die Frage, ob an den Rändern gutleitender Sedimenttröge eine Stromdrängung des Baistörungsstromsystems auftritt, wurde durch einen Modellversuch untersucht. Die elektromagnetische Äquivalenz zu einem zylindrischen Becken lieferte eine langgestreckte Aluminiumplatte (Abb. 3), durch

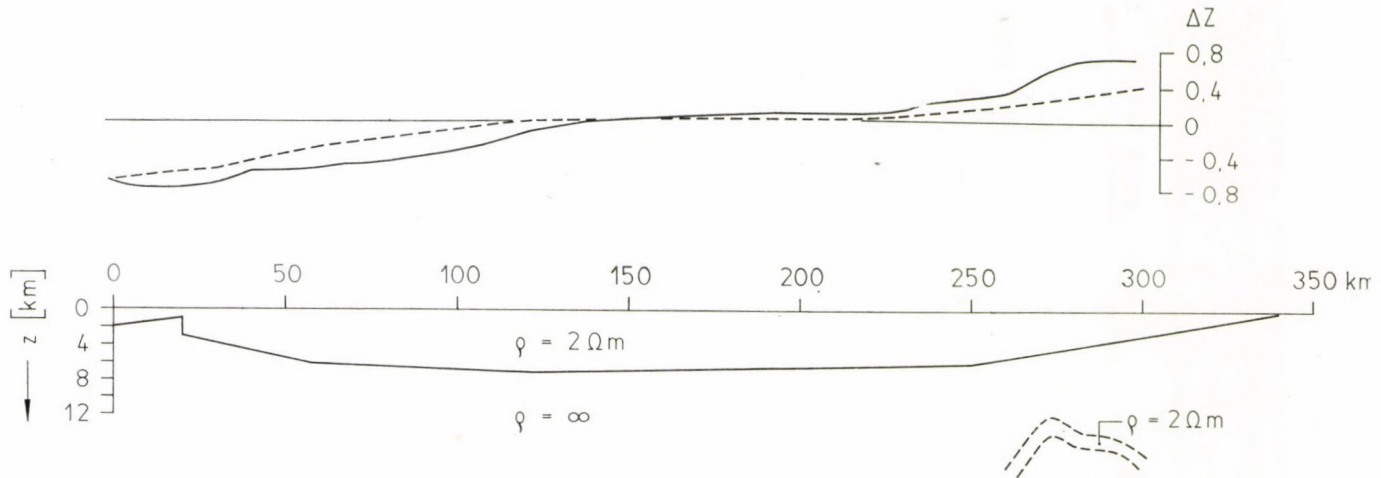


Abb. 5. Verlauf der ΔZ -Komponenten von Baistörungen in einem N-S-Schnitt durch das Norddeutsche Sedimentationsbecken; nach dem vorgegebenen geologischen Tiefenbau ausgezählte ΔZ -Werte, — relativer Verlauf der Vertikalkomponenten von Baistörungen, entnommen und umgezeichnet aus [1]

rungen des mittleren spezifischen Längswiderstandes abschätzen, so bedient man sich mit Vorteil um 90° gedrehter gravimetrischer Auszählprogramme für zylindrische Strukturen.

Das zur Auszählung verwendete Sedimentationsbecken wurde nach den in [4, 5, 6 und 7] gemachten Angaben über den geologischen Tiefenbau Norddeutschlands entworfen. Abb. 5 zeigt das Ergebnis dieser Auszählung im Vergleich zu den über diesem Profil tatsächlich gemessenen ΔZ -Werten von Baistörungen. Die Differenz zwischen den gemessenen und durch Auszählung ermittelten Werten können ihre Ursache in folgenden Gegebenheiten haben:

1. Strukturelle Abweichungen des vorgegebenen Grundgebirgsaufbaues vom tatsächlichen.

2. Nichtberücksichtigung gutleitender Sedimentgebiete südlich des Mitteldeutschen Hauptabbruches.

3. Lokale Änderungen in den mittleren spezifischen Längswiderständen der Sedimente.

4. Vorhandensein gutleitender Schichten im tieferen Krustenniveau, wie sie bisher nur auf der Insel Rügen magnetotellurisch erfaßt wurden.

Es muß einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben, die gemessenen ΔZ -Werte mit den ausgezählten unter Abänderung der strukturellen und lateral-elektrischen Parameter weiter anzupassen.

SCHRIFTTUM

1. WIESE, H.: Geomagnetische Tiefentellurik, Teil III: Die geomagnetischen Variationen in Mittel- und Südosteuropa als Indikator der Streichrichtung großräumiger elektrischer Untergrundstrukturen. *Geofisica Pura e Applicata* **56** (1963/III), S. 101–114.
2. SCHMUCKER, U.: Erdmagnetische Tiefensondierungen in Deutschland 1957–1959. Magnetogramme und erste Auswertung. *Abh. Akad. Wiss. in Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, Heft 5 (1959).
3. PORSTENDORFER, G.: Rückschlüsse auf den Verlauf des hochohmigen Grundgebirges in Norddeutschland aus Variationen des natürlichen elektromagnetischen Erdfeldes. *Monatsberichte der DAW zu Berlin* **6** (1964) 7, S. 543–547.
4. PORSTENDORFER, G.: Methodische und apparative Entwicklung magneto-tellurischer Verfahren mit Anwendung auf die Tiefenerkundung im Bereich der norddeutschen Leitfähigkeitsanomalie, Veröffentlichung des Institutes für Geodynamik Jena der DAW, Heft 3, im Akademie-Verlag Berlin.
5. REINHARDT, H.-G.: Einige neue Ergebnisse reflexionsseismischer Regional- und Übersichtsmessungen in Brandenburg und Mecklenburg. *Freib. Forsch.-H. C* **161** (1963), S. 117–126.
6. KNAPE, H.: Tektonischer Bau und Strukturgenese im nordwestlichen Vorland des Flechtlinger Höhenzuges. Teil I: Stratigraphischer Überblick und Lagerungsverhältnisse. *Geologie*, Berlin **12** (1963) 1, S. 509–536.
7. KÖLBEL, H.: Der Grundgebirgsbau Nordostdeutschlands im Gesamtrahmen der benachbarten Gebiete. *Geologie*, Berlin **12** (1963) 1, S. 674–680.

MODELS FOR THE INTERPRETATION OF THE ANOMALOUS BEHAVIOUR OF GEOMAGNETIC VARIATIONS OVER LARGE CYLINDRICAL SEDIMENTAL BASINS

E. PORSTENDORFER and G. PORSTENDORFER

SUMMARY

The present study investigates the possibility of an interpretation of the anomalous behaviour of the geomagnetic bay disturbances in North Germany as a consequence of a current system flowing in the section of the good conducting sediments obtained by magneto-telluric measurements.

The distribution of current density is estimated for various models of good conducting zones on the sedimental range, in the deeper crust and in the mantle theoretically considering the skin effect and practically with the aid of electromagnetically equivalent model experiments. The magnetic ΔZ -effect of the current system in the sedimental range for a given geological deep structure is calculated with nomograms and compared with actually obtained measured values.

MODÈLES POUR L'INTERPRÉTATION DU COMPORTEMENT IRRÉGULIER DES VARIATIONS GÉOMAGNÉTIQUES AU-DESSUS DES GRANDS BASSINS SÉDIMENTAIRES CYLINDRIQUES

E. PORSTENDORFER et G. PORSTENDORFER

RÉSUMÉ

L'ouvrage examine la possibilité d'une interprétation du comportement irrégulier des perturbations de baies géomagnétiques en Allemagne du Nord, par un système de courants circulant dans le domaine des sédiments bons conducteurs contrôlables par des mesurages magnéto-telluriques.

La distribution de la densité des courants est évaluée pour les différents modèles de zones conductrices dans le domaine sédimentaire, dans la croûte plus profonde et dans le manteau, d'une façon théorique en tenant compte de l'effet pelliculaire, et par une méthode pratique, à l'aide d'essais sur modèles électro-magnétiquement équivalents. L'effet magnétique ΔZ du système de courants dans le domaine sédimentaire est évalué pour une structure profonde donnée au moyen de nomogrammes, et comparé aux valeurs effectivement mesurées.

МОДЕЛИ ДЛЯ ВЫЯСНЕНИЯ АНОМАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ГЕОМАГНИТНЫХ ВАРИАЦИЙ НАД КРУПНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ОСАДОЧНЫМИ БАСЕЙНАМИ

Э. ПОРСТЕНДОРФЕР и Г. ПОРСТЕНДОРФЕР

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается возможность выяснения аномального поведения геомагнитных бухтовых возмущений в северной части Германии при помощи системы токов, которая течет в толще хорошо проводящих осадков, охватываемой магнито-теллурическими наблюдениями.

Распределение плотности токов оценивается для разных моделей хорошо проводящих зон в осадочной толще, в глубокой части земной коры и в мантии теоретически с учетом скин-эффекта и практически при помощи опытов на эквивалентных по электромагнитным свойствам моделях. Магнитный ΔZ эффект системы токов в осадочной толще для заданных глубинных геологических структур определяется по диаграммам и сопоставляется с фактически наблюдаемыми значениями.

ÜBER DIE GENAUIGKEIT DER BESTIMMUNG DER ASTRONOMISCHEN REFRAKTION

K. RAMSAYER, Stuttgart

[Eingegangen am 6. April 1965]

Die astronomische Refraktion wird in der Regel nur aus der scheinbaren Zenitdistanz z , dem Luftdruck und der Temperatur im Beobachtungsort berechnet. Zur Abschätzung der Grenzen dieser Vereinfachung wird u. a. gezeigt, daß für einen mittleren Zustand der Atmosphäre unter Annahme einer sphärischen Schichtung der Einfluß der Atmosphäre oberhalb des Beobachtungsortes nur $0,076 \cdot \tan z(1 + \tan^2 z)$ beträgt. Für $z \leq 60^\circ$ können deshalb auch erhebliche Abweichungen der Atmosphäre vom Normalzustand die Refraktion höchstens um $0,1 \dots 0,2$ verfälschen. Refraktionsstörungen rühren hauptsächlich von Schichtneigungen, d. h. von Abweichungen der Flächen gleicher Brechungsanzahl von einer sphärischen Schichtung, her. Der Einfluß der Schichtneigungen wird unter der Annahme einer exponentiellen Abnahme mit der Höhe und einer linearen horizontalen Änderung untersucht. Ist die horizontale Änderung klein, so ist der Einfluß der Schichtneigungen proportional zu $\sec^2 z$ und kann aus der Beobachtung von mehreren Sternen in verschiedenen Zenitdistanzen genähert ermittelt werden.

1. Einleitung

Die astronomische Refraktion wird in der Regel aus der scheinbaren Zenitdistanz, dem Luftdruck und der Temperatur im Beobachtungsort ermittelt. Weitere, die Refraktion beeinflussende Größen, wie z. B. der Wasserdampfdruck, der Zustand der Atmosphäre usw. werden nur ausnahmsweise berücksichtigt oder können überhaupt nicht erfaßt werden. Es soll deshalb nachstehend untersucht werden, mit welchen Fehlern bei der Refraktionsermittlung für Zenitdistanzen $\leq 60^\circ$ gerechnet werden muß und ob die Genauigkeit gesteigert werden kann.

2. Berechnung der astronomischen Refraktion bei sphärischer Schichtung der Atmosphäre

Zur Berechnung der astronomischen Refraktion zerlegen wir die Atmosphäre in dünne Schichten, die von Flächen gleicher Brechungsanzahl n begrenzt werden. Bezeichnen wir die auf diese Flächen bezogenen Einfallswinkel des vom Stern kommenden Lichtstrahls mit i , so lautet die strenge Gleichung für die Refraktion im Beobachtungsort B

$$R = \varrho'' \int_G^B \tan i \cdot \frac{dn}{n}, \quad \varrho'' = 206\,265'', \quad (1)$$

wobei zwischen der Grenze Gr der Atmosphäre und B zu integrieren ist. Dieses Integral ist lösbar, wenn in jedem Punkt der Bahnkurve des vom Stern kommenden Lichtstrahls die Brechungsahl n und der Einfallswinkel i bekannt sind.

Die Brechungsahl n kann nach [1] aus folgenden Gleichungen

$$\text{Troposphäre: } n - 1 = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} (\nu_2 - 1) - \frac{e}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} (\nu_2 - \nu_1), \quad (2)$$

$$\text{Stratosphäre: } n - 1 = \frac{T}{T_0} \Sigma \frac{p_\beta}{p_0} (\nu_\beta - 1) \quad (3)$$

berechnet werden. Es bedeuten p = Luftdruck, T = absolute Temperatur, $p_0 = 760$ Torr, T_0 = absolute Temperatur bei 0°C , ν_2 = Brechungsahl der trockenen Luft und ν_1 = Brechungsahl des Wasserdampfes jeweils beim Druck p_0 und der Temperatur T_0 , e = Wasserdampfdruck, p_β = Partialdruck des Gases β im Gasgemisch der Luft, ν_β = Brechungsahl des Gases β beim Druck p_0 und der Temperatur T_0 . Wir müßten demnach für jeden Punkt der Lichtstrahlkurve die Größen p , T , e bzw. p_β und T kennen, um n berechnen zu können. Dies ist praktisch nicht möglich, da uns die momentanen Werte dieser Größen nicht oder nur genähert bekannt sind. Wir können jedoch n für einen mittleren Zustand der Atmosphäre, über den wir heute bis etwa 700 km Höhe gut informiert sind [2], für jede Meereshöhe innerhalb dieses Bereiches berechnen. Dabei genügt es, sich auf die unteren 60 . . . 70 km zu beschränken, da oberhalb mit genügender Genauigkeit $n = 1$ gesetzt werden kann.

Wir können auch für einen mittleren Zustand der Atmosphäre den wahren Verlauf der Flächen gleicher Brechungsahl ermitteln und bei der Berechnung der Einfallswinkel i berücksichtigen, wie dies von HARZER [1] durchgeführt wurde. Dadurch wird die Berechnung von (1) sehr kompliziert. In [1] wird jedoch auch gezeigt, daß die den meisten Refraktionstheorien zu Grunde liegende Annahme von konzentrischen Kugelflächen bis zu Zenitdistanzen von etwa 80° sehr gute Näherungswerte liefert. Wir wollen deshalb für die weitere Behandlung des Refraktionsintegrals die Niveauläche durch den Beobachtungsort B durch die Schmiegunskugel in B ersetzen und annehmen, daß die Flächen gleicher Brechungsahl zum Mittelpunkt M dieser Kugel konzentrische Kugelflächen sind. Dann kann (1) nach [3] S. 480/81 ohne nennenswerten Genauigkeitsverlust in die Form

$$R = \tan z \int_{n_0}^{n_1} (1 - s) \cdot d\left(\frac{n_0}{n}\right) - \frac{1}{2} \tan^3 z \int_{n_0}^{n_1} (1 - s) \cdot d\left(\frac{n_0}{n}\right) + \\ + \frac{1}{2} \tan^3 z \int_{n_0}^{n_1} (1 - s) \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \cdot d\left(\frac{n_0}{n}\right) - \tan^3 z \int_{n_0}^{n_1} s \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \cdot d\left(\frac{n_0}{n}\right)$$

gebracht werden. Hierin bedeuten R = Refraktion im Beobachtungsort B , z = scheinbare Zenitdistanz in B , n_0 = Brechungsanzahl in B , $n_1 = 1$ = Brechungsanzahl an der Grenze der Atmosphäre, $1 - s = a/r$, a = Radius der Schmiegunskugel durch B , r = Abstand vom Mittelpunkt M der Kugelflächen, n = Brechungsanzahl der Kugelflächen vom Radius r . Bezeichnen wir die Höhendifferenz zwischen einem beliebigen Punkt der Lichtkurve und B mit h , setzen

$$r = a + h; \quad s = 1 - \frac{a}{a + h} \approx \frac{h}{a}$$

und gehen zum Winkelmaß über, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$R = \varrho'' (n_0 - 1) \tan z - \tan z \frac{\varrho''}{a} \int_{n_0}^{n_1} h \cdot d\left(\frac{n_0}{n}\right) + \frac{1}{2} \varrho'' (n_0 - 1)^2 \tan^3 z - \tan^3 z \cdot \frac{\varrho''}{a} \int_{n_0}^{n_1} h \cdot d\left(\frac{n_0}{n}\right). \tag{4}$$

Zahlentafel I

H km	n	Druck Torr	Dampfdruck Torr	Temp. °C	Standard Atmosph.	
					Druck Torr	Temp. °C
0	1,000 282 56	760,3	4,8	+ 9,4	760,0	+15,0
1	254 53	673,1	3,2	+ 4,6	674,1	+ 8,5
2	228 61	594,6	1,9	+ 0,1	596,3	+ 2,0
4	184 53	460,9	0,8	-10,7	462,5	-11,0
6	148 74	353,0	0,2	-23,7	354,2	-24,0
8	119 06	266,3		-38,0	267,4	-36,9
10	092 96	197,6		-49,6	198,8	-49,9
12	069 68	145,1		-54,2	145,5	-56,5
16	037 35	77,8		-54,1	77,7	-56,5
20	020 10	41,8		-54,1	41,5	-56,5
24	010 85	22,5		-54,1	22,3	-52,6
28	005 86	12,2		-54,1	12,1	-48,6
32	003 18	6,58		-54,1	6,67	-44,7
40	000 94	1,94		-54,1	2,15	-22,8
48	000 28	0,58		-54,1	0,77	- 2,5
60	000 05	0,10		-54,1	0,17	-17,4
72	000 01	0,02		-54,1	0,03	-61,3

Brechungsanzahlen n der Atmosphäre für die Wellenlänge $\lambda = 574 \text{ m}\mu$ in verschiedenen Meereshöhen H für eine mittlere Druck- und Temperaturverteilung in $52^\circ 5$ geographischer Breite nach P. Harzer [1] und Vergleich mit der U. S. Standard Atmosphäre 1962 [2].

In Zahlentafel I sind die Brechungszahlen n nach [1] für einen mittleren Zustand der Atmosphäre für verschiedene Meereshöhen H auszugsweise angegeben. Die meteorologischen Werte sind zwar schon älteren Datums, stimmen aber für $H < 32$ km befriedigend mit neueren Werten überein, wie aus dem Vergleich mit der U. S. Standard Atmosphäre 1962 hervorgeht. Die Abweichungen für $H > 32$ km sind unerheblich, da sich hier n nur zwischen 1,000 003 und 1 ändern kann.

Mit den Harzerschen Werten und $a = 6370$ km erhalten wir für einen Ort im Meeresniveau ($H = 0$), wenn wir die mittlere Brechungszahl im Meeresniveau mit n_m bezeichnen,

$$\varrho'' (n_m - 1) = 58'',282, \quad \frac{1}{2} \varrho'' (n_m - 1)^2 = 0'',0082, \quad (5)$$

$$\frac{\varrho''}{a} \int_{n_m}^{n_1} h \cdot d \left(\frac{n_m}{n} \right) = 0'',0762,$$

$$R_m = 58'',282 \cdot \tan z - 0'',0762 \cdot \tan^3 z + 0'',0082 \cdot \tan^3 z - \quad (6)$$

$$- 0'',0762 \cdot \tan^3 z = 58'',206 \tan z - 0'',068 \cdot \tan^3 z.$$

R_m stellt die mittlere Refraktion oder Normalrefraktion im Meeresniveau für den in Zahlentafel I niedergelegten mittleren Zustand der Atmosphäre dar.

3. Abweichung des wahren Druck- und Temperaturverlaufs längs der Lichtbahn von den theoretisch angenommenen Werten

Vergleichen wir (4) mit (6), so stellen wir fest, daß der Einfluß der Atmosphäre oberhalb des Beobachtungsortes für einen mittleren Zustand

$$dR_A = - 0'',0762 \cdot \tan z - 0'',0762 \cdot \tan^3 z = - 0'',0762 \cdot \tan z (1 + \tan^2 z) \quad (7)$$

beträgt. Aus nachstehender Tabelle

z	0°	20°	40°	60°	70°	80°
$ dR_A $	$0'',00$	$0'',03$	$0'',11$	$0'',53$	$1'',79$	$14'',33$

folgt, daß dR_A für $z < 60^\circ$ nur wenige Zehntelsekunden beträgt. Im Bereich $z < 60^\circ$ können deshalb auch erhebliche Abweichungen vom Normalzustand der Atmosphäre (z. B. durch Temperaturinversion in den unteren Schichten) die Refraktion höchstens um $0'',1 \dots 0'',2$ verfälschen. Hieraus folgt ferner, daß für $z < 70^\circ$ die Refraktion im wesentlichen nur von der Brechungszahl und der scheinbaren Zenitdistanz im Beobachtungsort abhängt.

Daß die Schwankungen des Druck- und Temperaturverlaufs in der Atmosphäre die Refraktion nur sehr wenig beeinflussen, geht auch aus Zahlentafel II hervor, in der die Normalrefraktionswerte nach verschiedenen Refraktionsstafeln zusammengestellt sind. Hierbei berücksichtigen nur die Werte von HARZER den wahren Druck- und Temperaturverlauf für einen mittleren Zustand der Atmosphäre, während die übrigen Werte auf Hypothesen beruhen, die teilweise von der Wirklichkeit erheblich abweichen. Trotz der sehr unterschiedlichen und bei BESSEL, GYLDÉN und RADAU als überholt zu bezeichnenden Theorien stimmen die Werte für $z < 80^\circ$ bis auf wenige Zehntelsekunden überein.

Zahlentafel II

z	40°	50°	60°	70°	80°
Harzer	48,7''	69,1''	100,2''	158,1''	317,9''
Bessel	48,9''	69,3''	100,6''	158,7''	318,9''
Gyldén	48,6''	69,0''	100,1''	157,9''	317,7''
Radau	48,6''	69,0''	100,1''	157,9''	317,7''

Vergleich verschiedener Refraktionstafeln für 760 Torr Luftdruck, $+10^\circ\text{C}$ Temperatur und 6 Torr Wasserdampfdruck

Noch deutlicher wird die weitgehende Unabhängigkeit vom Druck- und Temperaturverlauf in der Atmosphäre, wenn wir annehmen, daß die Flächen gleicher Brechungszahlen horizontale Ebenen sind. In diesem Falle wird der Radius der sphärischen Schichten unendlich groß, so daß in (4) die Integralglieder wegfallen. Hieraus folgt, daß bei einer horizontalen und ebenen Schichtung der Atmosphäre die Refraktion nur von z und n_c abhängt und daß sie vom Zustand der darüber liegenden Atmosphäre völlig unabhängig ist. Die Tatsache, daß sich der Zustand der Atmosphäre trotzdem entsprechend den Integralgliedern in (4) auswirkt, ist nur durch die Krümmung der optischen Schichten der Atmosphäre bedingt.

4. Berücksichtigung des wahren Luftdrucks und der wahren Temperatur im Beobachtungsort

Da nach den bisherigen Untersuchungen R fast ausschließlich nur von der Brechungszahl und der scheinbaren Zenitdistanz im Beobachtungsort abhängt, läßt sich aus (2) und (4) unter Vernachlässigung des sehr kleinen Einflusses des Wasserdampfdruckes die fast immer ausreichende Näherungsgleichung

$$R \approx R_m \cdot \frac{P}{P_m} \cdot \frac{T_m}{T} \quad (8)$$

ableiten. Hiermit kann aus der Normalrefraktion R_m beim Druck p_m und der Temperatur T_m die Refraktion R beim Druck p und der Temperatur T berechnet werden.

5. Einfluß der Schichtneigung

Bei der Herleitung der Refraktionsgleichung (4) wurde vorausgesetzt, daß die Flächen gleicher Brechungszahlen konzentrische Kugelflächen sind, die auf der Lotrichtung im Beobachtungsort senkrecht stehen. Dies wird in Wirklichkeit nicht zutreffen. Bezeichnen wir die Abweichung der wahren Einfallswinkel i von den entsprechenden Einfallswinkeln i^* bei sphärischer Schichtung mit di und setzen

$$i = i^* + di,$$

so erhalten wir aus der strengen Gleichung (1)

$$R = \varrho'' \int_{Gr}^B \tan i^* \cdot \frac{dn}{n} + \varrho'' \int_{Gr}^B \frac{di}{\cos^2 i^*} \cdot \frac{dn}{n}.$$

Beachten wir, daß das letzte Glied klein ist, daß i^* von z nur wenig abweicht und daß $n \approx 1$ ist, so erhalten wir den »Einfluß der Schichtneigung« aus

$$dR \approx \frac{\varrho''}{\cos^2 z} \int_G^B di \cdot dn. \quad (9)$$

Zur Diskussion dieser Gleichung gehen wir von einem mittleren Zustand der Atmosphäre aus und suchen den Zusammenhang zwischen n und der Meereshöhe H . Zu diesem Zweck tragen wir in einem halblogarithmischen Netz die Wertepaare $(n - 1)$ und H nach Zahlentafel I auf. Dann können wir feststellen, daß $\log(n - 1)$ sehr genau durch zwei Gerade angenähert werden kann. Diesen Geraden entsprechen die Beziehungen

$$0 \leq H \leq 9 \text{ km} : (n - 1)_H \approx (n - 1)_{H=0} \cdot e^{-0,10931 \cdot H} \quad (10)$$

$$H \geq 9 \text{ km} : (n - 1)_H \approx (n - 1)_{H=9} \cdot e^{-0,15209(H-9)*} \quad (11)$$

Hieraus erhalten wir durch Differentiation

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq H \leq 9 \text{ km} : dn \approx b_1 \cdot e^{-a_1 H} \cdot dH, \\ H \geq 9 \text{ km} : dn \approx b_2 \cdot e^{-a_2(H-9)} \cdot dH, \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 0,10931, b_1 = -a_1(n - 1)_{H=0}; \\ a_2 = 0,15209, b_2 = -a_2(n - 1)_{H=9}. \end{array} \right\} \quad (13)$$

* Die Exponenten entsprechen den Steigungen der Sehnen zwischen $\log(n - 1)_{H=0}$ und $\log(n - 1)_{H=9}$ und zwischen $\log(n - 1)_{H=9}$ und $\log(n - 1)_{H=52}$.

Die Schichtneigungen di im Beobachtungsverтикал sind hauptsächlich vom horizontalen Temperatur- und Druckgradienten der Atmosphäre abhängig. Dabei kann angenommen werden, daß diese Gradienten in den höheren Schichten wegen der besseren Ausgleichsmöglichkeiten nicht so große Werte annehmen wie in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche. Wir setzen deshalb voraus, daß di längs der Lotlinie des Beobachtungsortes B mit der Höhe exponentiell abnimmt. di wird sich auch längs der Schnittlinien des Beobachtungsverтикалs mit den Kugelflächen ändern. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß diese Änderung proportional zur Horizontalentfernung S von B ist, und daß der Proportionalitätsfaktor η für alle Kugelflächen konstant ist, so können wir den Ansatz

$$di = di_0(1 + \eta \cdot S) e^{-\gamma(H-H_0)} \quad (14)$$

machen. Hierin bedeuten di = Schichtneigung im Beobachtungsverтикал in der Meereshöhe H in der Horizontalentfernung S von B , di_0 = Schichtneigung in B , H_0 = Meereshöhe von B , η , γ = Konstanten. Hieraus folgt mit $S = (H - H_0) \tan z$

$$di = di_0 \cdot e^{-\gamma(H-H_0)} + \eta \cdot di_0 \cdot \tan z (H - H_0) \cdot e^{-\gamma(H-H_0)}. \quad (15)$$

Setzen wir (12), (13) und (15) in (9) ein und integrieren, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} dR \approx \frac{\varrho'' \cdot di_0}{\cos^2 z} & \left\{ \frac{a_1(n-1)_{H=H_0}}{a_1 + \gamma} \left(1 + \frac{\eta \cdot \tan z}{a_1 + \gamma} \right) + \right. \\ & + (n-1)_{H=9} \cdot e^{-\gamma(9-H_0)} \left(\frac{a_2}{a_2 + \gamma} - \frac{a_1}{a_1 + \gamma} \right) + \\ & + \eta \cdot \tan z (n-1)_{H=9} \cdot e^{-\gamma(9-H_0)} \left[\frac{a_2}{a_2 + \gamma} \left(9 - H_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{a_2 + \gamma} \right) - \frac{a_1}{a_1 + \gamma} \left(9 - H_0 + \frac{1}{a_1 + \gamma} \right) \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Dabei ist dR positiv, wenn die unterste Schicht in Beobachtungsrichtung gesehen ansteigt, also di_0 positiv ist. Da die Schichtneigung in 9 km Höhe weitgehend abgeklungen sein wird, können die beiden letzten Glieder vernachlässigt werden. Wir erhalten dann die vereinfachte Gleichung

$$dR \approx \frac{\varrho'' \cdot di_0}{\cos^2 z} (n-1)_{H=H_0} \cdot \frac{a_1}{a_1 + \gamma} \left(1 + \frac{\eta \cdot \tan z}{a_1 + \gamma} \right). \quad (17)$$

Um eine bessere Vorstellung vom Einfluß des Faktors γ zu erhalten, lösen wir (14) für die Lotlinie von $B(S = 0)$ nach γ auf und erhalten

$$\gamma = \frac{-\log \frac{di}{di_0}}{(H - H_0) \cdot \log e} \quad (18)$$

Bezeichnen wir mit h die Höhendifferenz $H - H_0$, für welche $di = 0,1 di_0$ ist, so erhalten wir aus (18), (17) und (13)

$$\gamma = \frac{-\log 0,1}{\log e \cdot h} = \frac{2,30}{h}, \quad (19)$$

$$dR \approx \frac{\varrho'' \cdot di_0}{\cos^2 z} (n - 1)_{H=H_0} \cdot \frac{0,11 h}{2,30 + 0,11 h} \left(1 + \frac{\eta \cdot h \cdot \tan z}{2,30 + 0,11 h} \right). \quad (20)$$

Hieraus folgt für $H_0 = 0$, di_0 im Gradmaß und h in Kilometer

$$dR \approx \frac{0,11''}{\cos^2 z} \cdot \frac{di_0^\circ}{1^\circ} \cdot \frac{h}{2,30 + 0,11 h} \left(1 + \frac{\eta \cdot h \cdot \tan z}{2,30 + 0,11 h} \right). \quad (21)$$

Ist $\eta \leq 0,2$, $h \leq 1$ km, $z \leq 60^\circ$, so wird das von η abhängige Glied $\leq |0,14|$. Der Einfluß der horizontalen Änderung der Schichtneigung wird demnach für $z < 60^\circ$ in vielen Fällen vernachlässigt werden können. Setzen wir demnach $\eta = 0$, so stimmt (21) weitgehend mit der Näherungsgleichung

$$dR \approx 0,050'' \cdot di_0 \cdot h \cdot \sec^2 z$$

überein, die von BOHRMANN [4] unter der Annahme, daß die Schichtneigung linear mit der Höhe abnimmt und in der Höhe h abgeklungen ist, abgeleitet wurde.

Nach [4] ist di_0 im wesentlichen vom horizontalen Temperaturgradienten dT/dS im Beobachtungsvertikal abhängig und es gilt genähert

$$di_0 \approx 1,68^\circ \cdot dT/dS, \quad (22)$$

wobei dT/dS in Grad Celsius/km einzusetzen ist. Damit erhalten wir aus (21) mit $dT/dS = 1^\circ$ C/km, $h = 1$ km, $\eta = 0$

z	0°	20°	40°	60°
dR	$0,08$	$0,09$	$0,13$	$0,31$

Hieraus folgt, daß schon ein geringer horizontaler Temperaturgradient einen merklichen Einfluß auf die Refraktion haben kann. Wir müssen deshalb, wenn dT/dS mehrere $^{\circ}\text{C}/\text{km}$ beträgt, was z. B. bei Beobachtungen in Hanglagen oder an der Grenze zwischen Wald und Feld oder zwischen größeren Wasserflächen und Land, der Fall sein kann, mit erheblichen Refraktionsstörungen rechnen.

Der Einfluß der Schichtneigung, die durch ein horizontales Druckgefälle verursacht wird, ist nach [5] wesentlich kleiner und fällt in der Regel nicht ins Gewicht. Ebenso kann der Einfluß der »normalen« Schichtneigungen bei einem mittleren Zustand der Atmosphäre, der nach [1] für $z < 65^{\circ} \leq 0,08$ ist, vernachlässigt werden.

Im Zusammenhang mit der Schichtneigung sei noch auf die Saalrefraktion hingewiesen, die bei der Beobachtung durch den Schlitz einer Beobachtungskuppel auftritt, falls der Austausch zwischen Luft innerhalb und außerhalb der Kuppel unzureichend ist.

6. Weitere Faktoren, welche die Refraktion beeinflussen

Die astronomische Vertikalrefraktion ist auch noch vom Wasserdampfdruck, von der Wellenlänge des Sternenlichts, von der Jahreszeit, der Tageszeit und vom Wind abhängig. Der Einfluß der möglichen Schwankungen dieser Größen ist jedoch sehr gering und kann im Bedarfsfalle mit genügender Genauigkeit erfaßt werden. Nach [6] verursachen Luftwogen in mittleren Höhen der Troposphäre kurzperiodische Refraktionsschwankungen mit einer mittleren Amplitude von $0,7''$ und einer mittleren Periode von 1 Minute. Schließlich verursacht die Szintillation Richtungsschwankungen mit Frequenzen zwischen 0,5 und 100 Hz und mittleren Amplituden zwischen $0,3''$ in Zenitnähe und $5''$ in Horizontnähe. Da diese Refraktionsänderungen kurzperiodisch sind, läßt sich ihr Einfluß auf die Zenitdistanzmessung durch Häufung der Beobachtungen reduzieren.

7. Erfahrungswerte über die Genauigkeit der Refraktionsermittlung

Um das Bild über die Genauigkeit der Refraktionsermittlung abzurunden, werden nachstehend die mittleren Refraktionsfehler m_R nach den Untersuchungen von BAUSCHINGER (B) [8] und COURVOISIER (C) [7] aufgeführt.

Z	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
B	$\pm 0,0''$	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,1	1,8	
C	$\pm 0,1''$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,5	0,8	1,1	2,4	
$0,1'' \sec^2 z$	$\pm 0,10''$	0,11	0,12	0,15	0,20	0,30	0,56	1,11	2,14	5,87	

Diese Werte können für $z \leq 65^\circ$ gut durch die Gleichung

$$m_R = \pm 0,1'' \cdot \sec^2 z \quad (23)$$

angenähert werden.

8. Vorschlag zur Ermittlung des Einflusses der Schichtneigung

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß der Fehler der Refraktionsbestimmung hauptsächlich von den Schichtneigungen, d. h. von den Abweichungen der Schichten gleicher Brechungszahl von konzentrischen Kugelschalen herrühren. Die Genauigkeit der Refraktionsbestimmung läßt sich deshalb nur dann nennenswert steigern, wenn es gelingt, den Einfluß der Schichtneigungen zu erfassen. Dies erscheint dann wenigstens genähert möglich zu sein, wenn der Einfluß der horizontalen Änderung der Schichtneigung vernachlässigt werden kann. Dann fällt in (17) und (21) das Glied mit η weg. ν ist also unabhängig von z und der Einfluß der Schichtneigungen

$$\begin{aligned} dR &\approx \nu \cdot \sec^2 z; \quad \nu = \varrho'' \int_{Gr}^B di \cdot dn \approx \varrho'' \cdot di_0 \cdot \frac{a_1}{a_1 + \gamma} (n - 1)_{H=H_0} \approx \\ &\approx 0,11'' \cdot \frac{di_0^\circ}{1^\circ} \cdot \frac{h}{2,30 + h} \end{aligned} \quad (24)$$

ist proportional zu $\sec^2 z$. Unterstellen wir, daß diese Voraussetzung zutrifft, und bleiben die Schichtneigungen über einige Zeit konstant, so können wir ν und die Fernrohrbiegung für einen bestimmten Vertikal durch Messen der Zenitdistanzen von mehreren Sternen bestimmen. Wir erhalten dann für jede Beobachtung mit

$$\cos z_i = \sin \varphi \sin \delta_i + \cos \varphi \cos \delta_i \cos t_i \quad (25)$$

$$dz = \cos a d\varphi + \cos \varphi \sin a dt \quad (26)$$

eine Fehlergleichung von der Form

$$v_i = \pm dz \mp \nu \sec^2 z_i - b \sin z_i - (z'_i + R_i - z_i) \begin{cases} a = a \\ a = a \pm 180^\circ \end{cases} \quad (27)$$

Hierin bedeuten z_i = berechnete Zenitdistanz für eine Näherungsbreite φ und einen Näherungsstundenwinkel t_j , δ_j = Deklination des Sterns j , a = Azimut, $d\varphi$ = Verbesserung von φ , dt = konstante Verbesserung von t_j , v_j = Verbesserung, z'_j = gemessene Zenitdistanz, R_j = berechnete Refraktion, ν = effektive Schichtneigung, positiv, wenn die Schichten im Vertikal mit dem

Azimut a ansteigen, $b \cdot \sin z_i =$ Fernrohrbiegung. Wir müssen also mindestens drei Sterne mit verschiedenen Zenitdistanzen im Vertikal mit dem Azimut a oder $a + 180^\circ$ beobachten, um die Unbekannten dz , ν und b ermitteln zu können. Beobachten wir mehr als drei Sterne, so können wir die Unbekannten durch Ausgleichung bestimmen. Dabei ist darauf zu achten, daß kleine und große Zenitdistanzen zu beobachten sind, da sonst ν von dz nicht getrennt werden kann. Diese Forderung kann u. U. die Annahme, daß ν unabhängig von z ist, in Frage stellen, da sich die horizontale Änderung der Schichtneigung umso stärker bemerkbar macht, je größer z ist. An Hand der mittleren Fehler der Unbekannten und der Verbesserungen ν kann jedoch beurteilt werden, ob der Ansatz entsprechend (27) berechtigt war. Günstiger sind die Verhältnisse, wenn φ und t so genau bekannt sind, daß in (27) dz vernachlässigt werden kann. Dann können wir uns auf Zenitdistanzen $\leq 45^\circ \dots 50^\circ$ beschränken und haben bessere Aussichten, die effektive Schichtneigung ν zu ermitteln. Auf weitere Sonderfälle, z. B. $\cos a \cdot d\varphi = 0$ oder $\cos \varphi \cdot \sin a \cdot dt = 0$ oder Elimination der Fernrohrbiegung durch Beobachtung von diametralen Sternen in etwa gleicher Zenitdistanz usw. soll hier nicht näher eingegangen werden.

SCHRIFTTUM

1. HARZER, P.: Berechnung der Ablenkung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre der Erde auf rein meteorologisch-physikalischer Grundlage. *Publikation der Sternwarte in Kiel*. XIII (1922—24).
2. National Aeronautics and Space Administration, United States Air Force, United States Weather Bureau: U. S. Standard. Atmosphere, 1962. Washington, D.C., 1962.
3. JORDAN-EGGERT: Handbuch der Vermessungskunde, Band III, 1. Halbband, 8. Auflage 1939.
4. BOHRMANN, A.: Über Refraktionsstörungen. *Veröffentlichungen der Badischen Landessternwarte zu Heidelberg*, 3, (1932), No. 9.
5. LÖSER, H. G.: Untersuchung zur praktischen Berechnung von Refraktionsanomalien für die Zwecke der Orientierung nach Sonnenhöhen. *Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission, Reihe B*, 36 (1957).
6. COURVOISIER, L.: Beobachtungen kurzperiodischer Refraktionsschwankungen. *Astronomische Nachrichten* 1949, S. 259—63.
7. COURVOISIER, L.: Untersuchungen über die astronomische Refraktion. *Veröffentlichung der Sternwarte zu Heidelberg*, 3 (1904).
8. BAUSCHINGER, I.: Untersuchungen über die astronomische Refraktion. *Neue Annalen der K. Sternwarte in München*, 3 (1898).

ON THE ACCURACY OF THE DETERMINATION OF THE ASTRONOMICAL REFRACTION

K. RAMSAYER

SUMMARY

In normal cases the astronomical refraction is calculated only from the apparent zenith-distance z and the pressure and temperature of the air at the observation station. To estimate the limit of this simplification it is shown that the influence of the atmosphere above the observation station for standard conditions and spherical layers is only $0,076 \tan z (1 + \tan^2 z)$. Hence for $z \leq 60^\circ$ even the influence of essential anomalies from the standard atmosphere will be $< 0,2\%$. The main source of refraction anomalies are the inclinations of the

optical layers, that is to say the deviation of the layers of equal refraction index from concentric spherical layers. The influence of these inclinations is investigated assuming that they are exponentially decreasing with altitude and that the horizontal change is linear. If the latter is small, the influence of the inclinations of the optical layers is proportional to $\sec^2 z$ and may be approximately determined by the observation of several stars with different zenith-distances.

SUR LA PRÉCISION DE LA DÉTERMINATION DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE

K. RAMSAYER

RÉSUMÉ

Pour calculer la réfraction astronomique, on n'utilise d'ordinaire que la distance apparente du zénith z , ainsi que la pression et la température de l'air à la station d'observation. Pour évaluer les limites d'une telle simplification, l'auteur démontre, entre autres, que dans les conditions normales de l'atmosphère et en cas de stratification sphérique, l'observation est de $0,076 \tan z / (1 + \tan^2 z)$ seulement. Par conséquent, pour $z = 60^\circ$, des écarts même considérables de l'atmosphère par rapport aux conditions normales n'altèrent la réfraction que de $01'' \dots 0''2$ au plus. Les perturbations de la réfraction résultent en premier lieu des inclinaisons de couches, c'est-à-dire des écarts, par rapport à une stratification sphérique, des surfaces ayant des indices de réfraction identiques. L'influence des inclinaisons de couches est examinée en supposant la diminution exponentielle avec l'altitude et une variation horizontale linéaire. Si cette variation horizontale est faible, l'influence des inclinaisons de couches est proportionnelle à $\sec^2 z$ et peut être calculée approximativement de l'observation de plusieurs étoiles à différentes distances du zénith.

О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ

К. РАМЗАЙЕР

РЕЗЮМЕ

Астрономическая рефракция вычисляется, как правило, только по кажущемуся зенитному расстоянию z , давлению воздуха и температуре, характерным для пункта наблюдения. Для выяснения ограничений подобного упрощения показано, что при нормальных атмосферных условиях и, принимая сферическую слоистость, влияние атмосферы над пунктом наблюдения составляет лишь $0,076 \tan z (1 + \tan^2 z)$. В связи с этим, при $z \leq 60^\circ$, рефракция искажается, даже при более значительных отклонениях от нормальных условий атмосферы, не более чем на $0,1 - 0,2$. Аномальные рефракции вызываются главным образом отклонениями оптических слоев, т. е. отклонениями плоскостей с равными показателями преломления от сферической слоистости. Влияние этих отклонений изучается с предположением, что последние уменьшаются с высотой по экспоненциальному закону, а горизонтальные изменения являются линейными. При небольших горизонтальных изменениях влияние отклонений слоев пропорционально \sec^2 и может быть приближенно вычислено по наблюдениями над несколькими звездами при различных зенитных расстояниях.

DIE RÄUMLICHE DREHSTRECKUNG*

K. RINNER, Graz

[Eingegangen am 6. April 1965]

Für die Berechnung von Netzen der dreidimensionalen Geodäsie bestehen, wie für ebene Netze, eine Reihe von Grundaufgaben. Zu diesen gehören neben den einfachen Aufgaben der Punktbestimmung im Raum, durch räumliche Richtungen, Winkel und Strecken auch die Orientierung eines Bündels von Raumstrahlen und die räumliche Drehstreckung. Über die letztere wird in dieser Arbeit berichtet, während auf die daraus folgende Orientierung eines Raumbündels an anderer Stelle eingegangen wird. (s. [4]).

Eine räumliche Drehstreckung ist eine lineare Transformation, durch welche die Form eines Raumnetzes erhalten bleibt. Sie ist durch drei Verschiebungsgrößen, drei Parameter, einer räumlichen Drehung und einem Maßstabsfaktor, also durch insgesamt 7 Parameter bestimmt. Sie entspricht einer Helmert-Transformation im Raum. In der vorliegenden Arbeit wird eine Lösung der einfach bestimmten Aufgabe beschrieben, sowie auf zwei weitere Lösungen eingegangen, in welchen drei entsprechende Punktepaare, also 2 Überbestimmungen vorliegen. Schließlich wird auch die Ausgleichung des überbestimmten Systems gezeigt. Die praktische Anwendung wird an Zahlenbeispielen vorgeführt, welche in für die Handrechnung geeigneten Vordrucken berechnet werden.

Ein räumliches Netz N , welches in einem örtlichen System berechnet wird, kann als Modell für das endgültige, zu N ähnliche Netz N_L aufgefaßt werden und läßt sich daher durch eine Verschiebung, Streckung und Drehung mit N_L zur Deckung bringen. Die Transformation, welche N in N_L überführt bezeichnen wir als räumliche Drehstreckung; wir können sie benutzen, um Zwangsanschlüsse zu erfüllen, oder partielle Netze zu einem einzigen zusammenzuschließen.

Die räumliche Drehstreckung stellt eine konforme, lineare Transformation dar, welche durch 7 Parameter, dem Streckungsfaktor, drei Komponenten des Schiebungsvektors und die drei Parameter einer räumlichen Drehung bestimmt wird.

1. Allgemeine Lösung

Zur Bestimmung der Parameter einer Drehstreckung muß eine Anzahl von zugeordneten Knotenpunkten P , P_L vorgegeben sein, welche wir Anschluß-, Zwangs- oder Paßpunkte nennen wollen. Die Ortsvektoren der Punkte

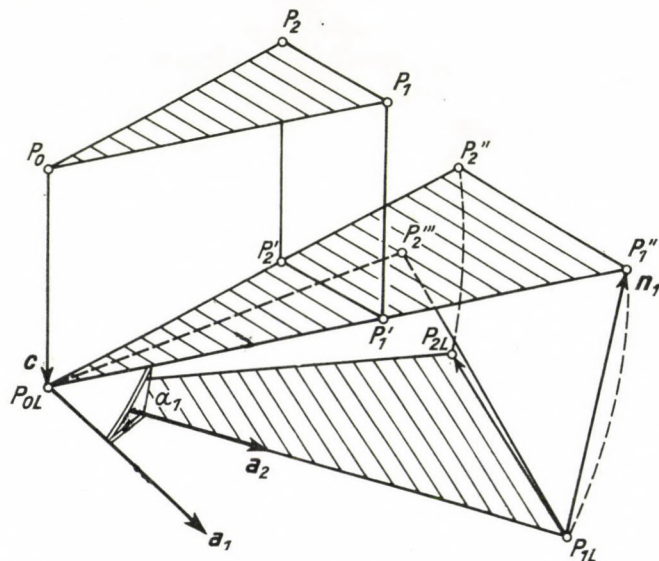
* Bemerkung: Diese Untersuchung wird auch in Bd. VI. des »Handbuches d. Vermessungskunde« von JORDAN—EGGERT—KNEISSL, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart in §. 102 aufgenommen werden.

im System N seien mit \mathbf{x} , die entsprechenden im System N_L mit \mathbf{x}_L bezeichnet. \mathbf{c} sei der Verschiebungsvektor, μ der Streckungsfaktor und \mathbf{A} die (orthogonale) Matrix, welche die räumliche Drehung bewerkstelligt.

Denken wir uns N verschoben, bis ein Punkt P_0 mit seinem entsprechenden P_{0L} zusammenfällt, so ist der Verschiebungsvektor \mathbf{c} durch

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}_{0L} - \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

bestimmt (Bild 1).



Bild, 1

Hierauf strecken wir das verschobene Netz N' von P_{0L} aus mit dem Faktor μ

$$\mathbf{x}'' = \mu(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

und verdrehen das erhaltene Netz N'' um eine durch P_{0L} gehende Achse α um den Winkel α , bis sich entsprechende Punktepaare decken. Der mathematische Ausdruck für diese Operation wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L &= \mathbf{x}_{0L} + \mathbf{A}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}''_0) \\ &= \mathbf{x}_{0L} + \mu\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (2a)$$

oder auch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L &= \mathbf{c} + \mu\mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{c} &= \mathbf{x}_{0L} - \mu\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2b)$$

gegeben. Durch Quadrieren der 2. Gln. (2a) erhalten wir eine geometrisch leicht verständliche Darstellung für den Streckungsfaktor:

$$\mu = \sqrt{\frac{(\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_{0L})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}}. \quad (3a)$$

Dieser kann demnach berechnet werden, wenn außer (P_0, P_{0L}) noch ein weiteres entsprechendes Punktepaar (P, P_L) gegeben ist.

Um die Matrix \mathbf{A} zu finden, denken wir uns die Drehung um 2 Achsen ausgeführt. Erst derart, daß ein Punkt P''_1 mit seinem entsprechenden P_{1L} zusammenfällt und dann um die Achse (P_{0L}, P_{1L}) , bis ein weiterer Punkt P_2 seine richtige Raumlage besitzt. Bezeichnen $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ die zu diesen Drehungen gehörigen Matrizen, so ist die Matrix der Drehstreckung durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \quad (3b)$$

bestimmt.

Die Achse der ersten Drehung muß offensichtlich normal zu den Verbindungsgeraden $(P_{0L}, P''_1), (P_{0L}, P_{1L})$ sein, der Drehwinkel α_1 wird von diesen eingeschlossen (s. Fig. 1). Bezeichnen wir die Richtungen mit

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|}, \quad \mathbf{s}_{1L} = \frac{\mathbf{x}_{1L} - \mathbf{x}_{0L}}{|\mathbf{x}_{1L} - \mathbf{x}_{0L}|} \quad (4)$$

so sind die Elemente (\mathbf{a}_1, α_1) der ersten Drehung durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_{1L} \\ \sin \alpha_1 &= |\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{1L}| \\ \mathbf{a}_1 &= \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{1L}}{\sin \alpha_1} \end{aligned} \quad (4b)$$

bestimmt. Mit den Komponenten $(a_1 a_2 a_3)$ der Richtung \mathbf{a}_1 der Drehachse und dem Drehwinkel α_1 können wir nach [1] die 9 Elemente a_{ik} der Drehmatrix \mathbf{A}_1 berechnen.

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1 - \cos \alpha_1) a_1^2 + \cos \alpha_1 \\ a_{21} &= (1 - \cos \alpha_1) a_1 a_2 + a_3 \sin \alpha_1 \\ a_{31} &= (1 - \cos \alpha_1) a_1 a_3 - a_2 \sin \alpha_1 \\ a_{12} &= (1 - \cos \alpha_1) a_2 a_1 - a_3 \sin \alpha_1 \\ a_{22} &= (1 - \cos \alpha_1) a_2^2 + \cos \alpha_1 \\ a_{32} &= (1 - \cos \alpha_1) a_2 a_3 + a_1 \sin \alpha_1 \\ a_{13} &= (1 - \cos \alpha_1) a_3 a_1 + a_2 \sin \alpha_1 \\ a_{23} &= (1 - \cos \alpha_1) a_3 a_2 - a_1 \sin \alpha_1 \\ a_{33} &= (1 - \cos \alpha_1) a_3^2 + \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Mit Hilfe der Matrix \mathbf{A}_1 verdrehen wir das Netz N'' nach N''' und bestimmen den Ortsvektor \mathbf{x}_2''' eines weiteren Netzpunktes P_2'''

$$\mathbf{x}_2''' = \mathbf{x}_{0L} + \mu \mathbf{A}_1 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0).$$

Damit können wir die Elemente der zweiten Drehung leicht bestimmen. Die Drechachse ist offensichtlich die Gerade $(P_{0L}P_{1L})$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{s}_{1L} \quad (7a)$$

und den Drehwinkel α_2 erhalten wir aus der Gleichung

$$\mathbf{x}_{2L} = \mathbf{x}_{0L} + \mathbf{A}_2 (\mathbf{x}_2''' - \mathbf{x}_{0L}),$$

in welcher nur mehr α_2 als Unbekannte auftritt. Zur Bestimmung von α_2 benötigen wir lediglich eine der drei skalaren Gleichungen, welche durch die obige Vektorgleichung vermittelt werden. Wir brauchen daher von P_{2L} nur eine Koordinate zu kennen. Eine räumliche Drehstreckung ist somit bestimmt, wenn von 2 Anschlußpunkten alle drei und von einem weiteren eine Koordinate gegeben sind.

Nehmen wir (wie üblich die Höhe) Z_{2L} als gegeben an, so folgt eine transzendente Gleichung für α_2

$$\begin{aligned} & (a_1 a_3 (1 - \cos \alpha_2) - a_2 \sin \alpha_2) (x_2''' - x_{0L}) + \\ & + (a_2 a_3 (1 - \cos \alpha_2) + a_1 \sin \alpha_2) (y_2''' - y_{0L}) + \\ & + (a_3^2 (1 - \cos \alpha_2) + \cos \alpha_2) (z_2''' - z_{0L}) = z_{2L} - z_{0L}, \end{aligned}$$

welche wir leicht umformen können:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 A + \cos \alpha_2 B + C &= 0 \\ A &= a_1 (y_2''' - y_{0L}) - a_2 (x_2''' - x_{0L}) \\ B &= -a_3 D + z_2''' - z_{0L} \\ C &= a_3 D - (z_{2L} - z_{0L}) \\ D &= a_1 (x_1''' - x_{0L}) + a_2 (y_2''' - y_{0L}) + a_3 (z_2''' - z_{0L}). \end{aligned} \quad (7b)$$

Die Gleichung besitzt zwei Lösungen

$$\tan \frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{B - C} (A \mp \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}), \quad (7c)$$

mit welchen wir die für den Aufbau der Matrix A_2 benötigten Funktionen

$$\sin \alpha_2 = \frac{2 \tan \frac{\alpha_2}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha_2}{2}}, \quad \cos \alpha_{1,2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha_2}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha_2}{2}} \quad (7d)$$

berechnen. Die Aufgabe hat zwei Lösungen, was auch aus geometrischen Gründen leicht verständlich ist. Ein Zahlenbeispiel ist in *Vordruck I* berechnet.

In der Regel ist eine größere Zahl von Anschlußpunkten mit allen drei Koordinaten (xyz) gegeben. In diesem Fall liegen Überbestimmungen vor, die wir zu einer Ausgleichung benutzen können. Hierzu benötigen wir Näherungswerte für die Parameter der Drehstreckung, welche wir nun nicht nach dem vorher beschriebenen Verfahren, sondern einfacher mit Hilfe von drei durch alle Koordinaten bestimmte Anschlußpunkte ermitteln wollen.

Die Achse \mathbf{a} der Gesamtdrehung muß in der Symmetrieebene der Verbindungsstrecke ($P_{iL}P'_i$) eines entsprechenden Punktepaars liegen und kann daher als Schnitt von 2 derartigen Ebenen bestimmt werden.

Für die Symmetrieebene ist der Verbindungsvektor

$$\mathbf{n}_i = (\mathbf{x}_i'' - \mathbf{x}_{iL}) \quad (8a)$$

eine Normale (Bild 1), die Schnittgerade zweier Symmetrieebenen, also die Drehachse \mathbf{a} , muß daher parallel zum äußeren Produkt der Normalen $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sein und durch P_{0L} hindurchgehen:

$$\mathbf{a} \text{ parallel } (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2). \quad (8b)$$

Der Drehwinkel α wird von den beiden Ebenen ($\mathbf{a}P_L$) und ($\mathbf{a}P''$) eingeschlossen, ist daher gleich dem Winkel, den die Richtungen

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i & \text{ parallel } \mathbf{a} \times (\mathbf{x}_i'' - \mathbf{x}_{0L}) \\ \mathbf{m}_{iL} & \text{ parallel } \mathbf{a} \times (\mathbf{x}_{iL} - \mathbf{x}_{0L}) \end{aligned} \quad (8c)$$

der Normalen dieser Ebenen miteinander bilden, und läßt sich aus der Beziehung

$$\cos \alpha = \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_{iL} \quad (8d)$$

ermitteln. Mit (\mathbf{a}, α) können wir unter Benutzung der Beziehungen (6) die Elemente der Matrix \mathbf{A} berechnen. Um die Anwendung der Formelsysteme zu zeigen, haben wir das bereits berechnete Beispiel in *Vordruck II* nochmals ausgeführt.

Vordruck I

Räumliche Drehstreckung mit sieben gegebenen Koordinaten

Angaben				A_1	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$
	X	Y	Z				
$P_0 = 4$	+ 9500,07	+11 314,00	+10 499,92	$a_{1,i}$	+0,9637172	-0,0802765	-0,2545686
$P_1 = 7$	+ 6562,10	+9000,79	+ 921,22	$a_{2,i}$	+0,1088063	+0,9890176	+0,1000271
$P_2 = 8$	+14402,33	+1492,30	+2249,09	$a_{3,i}$	+0,2437430	-0,1240965	+0,9618678
					X'''	Y'''	Z'''
	X_L	Y_L	Z_L	P_0	+4357,010	+ 687,540	+1310,430
				P_1	+4305,200	- 203,860	-1100,191
				P_2	+6260,320	- 1813,894	- 70,188
$P_0 = 4$	+4357,01	+ 687,54	+1 310,43	4. a_2	-0,0201542	-0,3467573	-0,9377385
$P_1 = 7$	+4305,20	- 203,86	-1100,19	$X_2''' - X_0''$	+1903,310	-2501,434	-1380,618
P_2	-	-	- 134,17				
1.	$X_{0,L} - X_0$	$Y_{0,L} - Y_L$	$Z_{0,L} - Z_0$		A	B	C
e	-5143,06	-10626,46	-9189,49		+ 710,401	+ 610,847	- 546,865
	X'	Y'	Z'		$\frac{1}{C - B}$	$-A$	$\pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}$
					-0,0008637742	+ 710,401	$\pm 760,751$
P_0	+4357,01	+ 687,54	+1310,43			1. Lösung	2. Lösung
P_1	+1419,04	-1625,57	-8268,27		$\tan \frac{\alpha_2}{2} =$	-0,0434910	+1,2707409
P_2	+9259,27	-9134,16	-6940,40		$\tan^2 \frac{\alpha_2}{2} =$	0,0018915	+1,6147824
2.	$(X_{i,L} - X_{0,L})^2$	$(X'_i - X'_0)^2$	$\mu = \frac{\sum L}{\sum'}$		$2 \tan \frac{\alpha_2}{2} =$	-0,0869820	+2,5414818
	2 684	8 631 668	0,2499997		$1 + \tan^2 \frac{\alpha_2}{2} =$	1,0018915	2,6147824
	794 594	5 350 941			$1 - \tan^2 \frac{\alpha_2}{2} =$	+0,9981085	-0,6147824
	5 811 089	91 751 494					
\sum^2	6 608 367	105 734 103					
\sum'	2 570,674	10 282,709					

	$X' - X'_0$	$Y' - Y'_0$	$Z' - Z'_0$		$\sin \alpha_2 =$	-0,0868178	+0,9719668	
					$\cos \alpha_2 =$	+0,9962241	-0,2351180	
					$1 - \cos \alpha_2 =$	+0,0037758	+1,2351180	
P_0	0,00	0,00	0,00	$A_{2,1}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	
P_1	-2937,97	-2313,21	-9578,70		$a_{1,i}$	-0,0813859	+0,0301760	
P_2	+4902,26	-9821,70	-8 250,83		$a_{2,i}$	+0,9966782	-0,0005220	
					$a_{3,i}$	+0,0029775	+0,9995445	
	X''	Y''	Z''	$A_{2,2}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	
P_0	+4357,010	+ 687,540	+1 310,430		$a_{1,i}$	-0,2346168	+0,9200823	
P_1	+3622,518	+ 109,238	-1 084,243		$a_{2,i}$	-0,9028188	-0,0866071	
P_2	+5582,574	-1 767,883	- 752,276		$a_{3,i}$	+0,3603795	+0,3820314	
3.	$X_{1,L} - X_{0,L}$	$X''_1 - X''_0$	$S_{1,0,L}$	5. $\mu \cdot A'$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	
ΔX	- 51,81	- 734,492	2570,674		$a_{1,i}$	+0,2396446	-0,0410525	
ΔY	- 891,40	- 578,302	$S''_{1,0}$		$a_{2,i}$	+0,0467003	+0,2448146	
ΔZ	-2410,62	-2394,673	2570,675		$a_{3,i}$	+0,0537530	-0,0296710	
$\Sigma \Delta X^2$	6608367	6608370			$\mu \cdot A''$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$
	n_1	n_2	$n_2 \times n_1$		$a_{1,i}$	-0,0506135	+0,2419347	-0,0374931
	-0,0201542	-0,2857195	-0,1120618		$a_{2,i}$	-0,1942044	-0,0163629	+0,1565784
	-0,3467573	-0,2249611	-0,2491558		$a_{3,i}$	+0,1490732	+0,0608252	+0,1912521
	-0,9377385	-0,9315347	+0,0945414	6. $P_{2,L}$	1. Lösung	2. Lösung		
		$ n \times n_1 =$	0,2890926	X_L	+6415,056	+2042,028		
	a_1			Y_L	-1469,861	-1395,692		
	-0,3876329	$\cos \alpha_1 =$	0,9573013	Z_L	- 134,170	- 134,170		
	-0,8618546	$1 - \cos \alpha_1 =$	0,0426987					
	+0,3270281	$\sin \alpha_1 =$	+0,2890926					

Vordruck II

Räumliche Drehstreckung mit drei gegebenen Punkten

Angaben					$\mathbf{a} \times (\mathbf{X}_2' - \mathbf{X}_0')$	\mathbf{m}_1	\mathbf{m}_2	$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$
	X	Y	Z		$\mathbf{a} \times (\mathbf{X}_{2,L} - \mathbf{X}_{0,L})$			
					3425,864	+0,8655525	+0,7113053	-0,0985727
					3425,865	+0,0114106	+0,2121458	-0,2238682
						+0,5006880	+0,6701038	+0,1755071
$P_0 = 4$	+ 9 500,07	+11 314,00	+10 499,92					
$P_1 = 7$	+ 6 562,10	+ 9 000,79	+ 921,22					
$P_2 = 8$	+14 402,33	+ 1 492,30	+ 2 249,09					
	X_L	Y_L	Z_L		$ \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 $	$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2$	$1 - \cos \alpha$	
					+0,3010586	+0,9536056	0,0463944	
$P_0 = 4$	+ 4 357,01	+ 687,54	+ 1 310,43	$\mathbf{A} \mu$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	
$P_1 = 7$	+ 4 305,20	- 203,86	- 1 100,19					
$P_2 = 8$	+ 6 415,06	- 1 649,86	- 134,17					
1.	$X_{0,L} - X_0$	$Y_{0,L} - Y_0$	$Z_{0,L} - Z_0$	$a_{1,i}$	+0,2396446	-0,0410528	-0,0581809	
				$a_{2,i}$	+0,0467007	+0,2448146	+0,0196152	
				$a_{3,i}$	+0,0537531	-0,0296711	+0,2423430	
c	- 5 143,06	-10 626,46	- 9 189,49	4.	X_L	Y_L	Z_L	
	X'	Y'	Z'					
P_0	+ 4 357,01	+ 687,54	+ 1 310,43	P_0	+4357,01	+ 687,54	+1 310,43	
P_1	+ 1 419,04	- 1 625,67	- 8 268,27	P_1	+4305,202	- 203,861	-1 100,190	
P_2	+ 9 259,27	- 9 134,16	- 6 940,40	P_2	+6415,060	-1649,860	- 134,170	
2.	$(\mathbf{X}_{1,L} - \mathbf{X}_{0,L})^2$	$(\mathbf{X}'_1 - \mathbf{X}'_0)^2$	$(\mathbf{X}_{2,L} - \mathbf{X}_{0,L})^2$	$(\mathbf{X}'_2 - \mathbf{X}'_0)^2$	Geg.: 3 Punkte			
	2 684	8 631 668	4 235 570	24 032 153	1. Verschiebungsvektor $\mathbf{c} = \mathbf{X}_{0,L} - \mathbf{X}_0$			
	794 594	5 350 941	5 463 439	96 465 791	$\mathbf{X}'_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{c}$			
	5 811 089	91 751 494	2 086 869	68 076 196	2. Streckungsfaktor $\mu^2 = \frac{(\mathbf{X}_{1,L} - \mathbf{X}_{0,L})^2}{(\mathbf{X}'_1 - \mathbf{X}'_0)^2}$			
					$\mathbf{X}'_i' = \mathbf{X}'_i + \mu (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}'_i')$			

Σ^2	6 608 367	105 734 103	1 1785878	188 574 140
Σ	2 570,674	10 282,709	3 433,057	13 723,230
μ	0,2499997	0,2500000	μ mittel = 0,2499998	
	$X'_i - X'_0$	$Y'_i - Y'_0$	$Z'_i - Z'_0$	
P_0	0,00	0,00	0,00	
P_1	-2937,97	-2313,21	-9578,70	
P_2	+4902,26	-9821,70	-8250,83	
	X''	Y''	Z''	
P_0	+4357,010	+ 687,540	+ 1 310,430	
P_1	+3622,518	+ 109,238	-1 084,243	
P_2	+5582,574	- 1 767,883	- 752,276	
3.	\mathbf{n}_1	\mathbf{n}_2	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$	\mathbf{a}
	-682,682	-832,486	-191 646	-0,3274205
	+313,098	-118,023	-435 245	-0,7436031
	+ 15,947	-618,106	+341 222	+0,5829668
	-	$ \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 =$	585 320	-
	$\mathbf{X}_{2,L} - \mathbf{X}_{0,L}$	$\mathbf{X}'_2 - \mathbf{X}'_0$	$\mathbf{a} \times (\mathbf{X}'_2 - \mathbf{X}'_0)$	$\mathbf{a} \times (\mathbf{X}_{2,L} - \mathbf{X}_{0,L})$
	+2058,05	+1225,564	+2965,265	+2436,836
	-2337,40	-2455,423	+ 39,091	+ 726,783
	-1444,60	-2062,706	+1715,289	+2295,685

3. Drehmatrix **A**

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{X}'_1 - \mathbf{X}_{1,L} \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{X}'_2 - \mathbf{X}_{2,L}$$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \parallel \text{Drehachse } \mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$$

$$\mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{a} \times (\mathbf{X}'_2 - \mathbf{X}'_0), \quad \mathbf{m}_2 \parallel \mathbf{a} \times (\mathbf{X}_{2,L} - \mathbf{X}_{0,L})$$

$$\cos \alpha = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2, \quad \sin \alpha = |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|$$

$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ Einheitsvektoren

Drehmatrix **A** aus $\mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ berechnen

$$a'_{1,1} = (1 - \cos \alpha) a_1^2 + \cos \alpha$$

$$a'_{2,1} = (1 - \cos \alpha) a_1 a_2 + a_3 \sin \alpha$$

$$a'_{3,1} = (1 - \cos \alpha) a_1 a_3 - a_2 \sin \alpha$$

$$a'_{1,2} = (1 - \cos \alpha) a_2 a_1 - a_3 \sin \alpha$$

$$a'_{2,2} = (1 - \cos \alpha) a_2^2 + \cos \alpha$$

$$a'_{3,2} = (1 - \cos \alpha) a_2 a_3 + a_1 \sin \alpha$$

$$a'_{1,3} = (1 - \cos \alpha) a_3 a_1 + a_2 \sin \alpha$$

$$a'_{2,3} = (1 - \cos \alpha) a_3 a_2 - a_1 \sin \alpha$$

$$a'_{3,3} = (1 - \cos \alpha) a_3^2 + \cos \alpha$$

$$a_{i,k} = \mu a'_{iL}, \quad (\mu \mathbf{A}) = (a_{i,k})$$

4. Endgültige Transformationsformel

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{X}_{0,L} + (\mathbf{A} \mu) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

Achtung! Die Punkte P_0, P_1 und P_2 sind im Uhrzeiger-sinn zu beziffern.

Vordruck III

Räumliche Drehstreckung durch Matrizenzerlegung

Angaben					4. A	$a'_{i,1}$	$a'_{i,2}$	$a'_{i,3}$	
	X	Y	Z		$a'_{1,i}$	+ 0,958 580	- 0,164 212	- 0,232 724	
					$a'_{2,i}$	+ 0,186 804	+ 0,979 259	+ 0,078 461	
					$a'_{3,i}$	+ 0,215 012	- 0,118 685	+ 0,969 373	
$P_0 = 4$	+ 9 500,07	+ 11 314,00	+ 10 499,92		$A \mu$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	
$P_1 = 7$	+ 6 562,10	+ 9 000,79	921,22		$a_{1,i}$	+ 0,239 645	- 0,041 053	- 0,058 181	
$P_2 = 8$	+ 14 402,33	+ 1 492,30	+ 2 249,09		$a_{2,i}$	+ 0,046 701	+ 0,244 814	+ 0,019 615	
	X_L	Y_L	Z_L		$a_{3,i}$	+ 0,053 753	- 0,029 671	+ 0,242 343	
$P_0 = 4$	+ 4 357,01	+ 687,54	+ 1 310,43	5.	X_L	Y_L	Z_L		
$P_1 = 7$	+ 4 305,20	- 203,86	- 1 100,19	P_0	+ 4 357,01	+ 687,54	+ 1 310,43		
$P_2 = 8$	+ 6 415,06	- 1 649,86	- 134,17	P_1	+ 4 305,203	- 203,859	- 1 100,190		
1.	$X_{0,L} - X_0$	$Y_{0,L} - Y_0$	$Z_{0,L} - Z_0$	P_2	+ 6 415,064	- 1 649,849	- 134,170		
c	- 5 143,06	- 10 626,46	- 9 189,49	Geg.: 3 Punkte					
	X'	Y'	Z'	1. Verschiebungsvektor $c = X_{0,L} - X_0$					
P_0	+ 4 357,01	+ 687,54	+ 1 310,43	$X'_i = X_i + c$					
P_1	+ 1 419,04	- 1 625,67	- 8 268,27	2. Streckungsfaktor $\mu^2 = \frac{(X_{1,L} - X_{0,L})^2}{(X'_1 - X_0)^2}$					
P_2	+ 9259,27	- 9 134,16	- 6 940,40	$X'_i = X'_0 + \mu (X_i - X_0)$					
2.	$(X_{1,L} - X_{0,L})^2$	$(X'_1 - X_0)^2$	$(X_{2,L} - X_{0,L})^2$	$(X'_2 - X_0)^2$	3. Bestimmung der Koeffizienten a, b, c				
	2 684	8 631 668	4 235 570	24 032 153	$b(\Delta Z_L + \Delta Z'') - c(\Delta Y_L + \Delta Y'') - (\Delta X_L - \Delta X'') = 0$				
	794 594	5 350 491	5 463 439	96 465 791	$a(\Delta Z_L + \Delta Z'') + c(\Delta X_L + \Delta X'') - (\Delta Y_L - \Delta Y'') = 0$				
	5 811 089	91 751 494	2 086 869	68 076 196					

Σ^2	6 608 367	105 734 103	11 785 878	188 574 140
Σ	2 570,674	10 282,709	3 433,057	13 732,230
μ	0,2499997	0,2500000	μ mittel = 0,2499998	

	$X' - X'_0$	$Y' - Y'_0$	$Z' - Z'_0$
P_0	0,00	0,00	0,00
P_1	-2 937,97	-2 313,21	-9 578,70
P_2	+4 902,26	-9 821,70	-8 250,83

	$\Delta X''$	$\Delta Y''$	$\Delta Z''$
$X_1 - X_0$	- 734,492	- 578,302	-2 394,673
$X_2 - X_0$	+1 225,564	-2 455,423	-2 062,706

	ΔX_L	ΔY_L	ΔZ_L
$X_1 - X_0$	- 51,81	- 891,40	-2 410,62
$X_2 - X_0$	+2 058,05	-2 337,40	-1 444,60

3. Bestimmung von b und c

	$+(\Delta Z_L + \Delta Z'')$	$-(\Delta Y_L + \Delta Y'')$	$- +\Delta X_L - \Delta X''$
$X_1 - X_0$	-4 805,293	+1 469,702	- 682,682
$X_2 - X_0$	-3 507,306	+4 792,823	- 832,486
	$b = -0,114592$	$c = +0,089838$	

Bestimmung von a und c

	$-(\Delta Z_L + \Delta Z'')$	$+(\Delta X_L + \Delta X'')$	$-(\Delta Y_L - \Delta Y'')$
$X_1 - X_0$	+4 805,293	- 786,302	+ 313,098
$X_2 - X_0$	+3 507,306	+3 283,614	- 118,023
	$a = -0,050457$	$c = +0,089837$	

c mittel = +0,089838

4. Bestimmung der Drehmatrix \mathbf{A}

$$a'_{1,1} = \frac{1}{N} (1 + a^2 - b^2 - c^2)$$

$$a'_{2,1} = \frac{1}{N} (2ab + 2c)$$

$$a'_{3,1} = \frac{1}{N} (2ac - 2b)$$

$$a'_{1,2} = \frac{1}{N} (2ab - 2c)$$

$$a'_{2,2} = \frac{1}{N} (1 - a^2 + b^2 - c^2)$$

$$a'_{3,2} = \frac{1}{N} (2bc + 2a)$$

$$a'_{1,3} = \frac{1}{N} (2ac + 2b)$$

$$a'_{2,3} = \frac{1}{N} (2bc - 2a)$$

$$a'_{3,3} = \frac{1}{N} (1 - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$N = 1 + a^2 + b^2 + c^2 \quad \mu \hat{a}_{i,k} = a_{i,k}$$

$$\mu \mathbf{A} = (a_{i,k})$$

5. Endgültige Transformationsformel:

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{X}_{0,L} + (\mathbf{A}\mu) (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

Im Falle dreier gegebener Vergleichspunkte können wir auch eine für orthogonale Matrizen bestehende Identität zur Bestimmung von \mathbf{A} benutzen. Bezeichnet \mathbf{R}_A die zu \mathbf{A} gehörige schiefsymmetrische Matrix, welche aus den drei Parametern a, b, c von \mathbf{A} gebildet werden kann,

$$\mathbf{R}_A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (9a)$$

so besteht die Identität (siehe [2]):

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} - \mathbf{R}_A)^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{R}_A) \quad (9b)$$

Diese setzen wir in die Gleichung (2a) und erhalten daraus die Beziehung

$$-(\mathbf{E} - \mathbf{R}_A)(\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_{0L}) + (\mathbf{E} + \mathbf{R}_A)(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}_0'') = 0, \quad (10a)$$

welche drei skalaren, linearen Gleichungen für die Parameter a, b, c entspricht:

$$\begin{aligned} & + (\Delta z_L + \Delta z'') b - (\Delta y_L + \Delta y'') c - (\Delta x_L - \Delta x'') = 0 \\ - (\Delta z_L + \Delta z'') a & \qquad \qquad \qquad + (\Delta x_L + \Delta x'') c - (\Delta y_L - \Delta y'') = 0 \\ (\Delta y_L + \Delta y'') a - (\Delta x_L + \Delta x'') b & \qquad \qquad \qquad - (\Delta z_L - \Delta z'') = 0 \\ \Delta x'' = x'' - x_0'', \quad \Delta y'' = y'' - y_0'', \quad \Delta z'' = z'' - z_0'' & \quad (10b) \\ \Delta x_L = x_L - x_{0L} \quad \Delta y_L = y_L - y_{0L} \quad \Delta z_L = z_L - z_{0L} & \end{aligned}$$

Da die Determinante des Systems verschwindet, sind nur zwei der Gleichungen unabhängig. Jeder zusätzlich zu P_{0L} gegebene Anschlußpunkt gibt daher Anlaß zu 2 linearen Gleichungen für die Parameter, so daß diese aus insgesamt drei Anschlußpunkten mit einer Überbestimmung gegeben sind. Aus den Parametern a, b, c lassen sich die Elemente (a_{ik}) der Matrix \mathbf{A} ermitteln.

$$\begin{aligned} N a_{11} &= 1 + a^2 - b^2 - c^2 \\ N a_{21} &= 2 ab + 2c \\ N a_{31} &= 2ac - 2b \\ N a_{12} &= 2ab - 2c \\ N a_{22} &= 1 - a^2 + b^2 - c^2 \\ N a_{32} &= 2bc + 2a \\ N a_{13} &= 2ac + 2b \\ N a_{23} &= 2bc - 2a \\ N a_{33} &= 1 - a^2 - b^2 + c^2 \\ N &= 1 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned} \quad (10c)$$

Das Formelsystem wird in *Vordruck III* für das bereits früher berechnete Beispiel angewendet.

2. Differentialformeln

Nach einem der im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren seien Näherungen (μ) , (\mathbf{A}) bestimmt und wir wollen nun diese mit Hilfe von Linearformen verbessern. Zu diesem Zweck denken wir uns die Verschiebung durch die Zuordnung zweier noch unbekannter Punkte P_0, P_{0L} gegeben

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}_{0L} - \mathbf{x}_0 \quad (11a)$$

und gehen von der aus (2) folgenden allgemeinen Transformationsformel

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{x}_{0L} + \mu \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (11b)$$

der Drehstreckung aus. Sodann zerlegen wir die Matrix \mathbf{A} in das Produkt aus der bekannten Näherungsmatrix (\mathbf{A}) und einer Differentialmatrix $d\mathbf{A}$ und beachten, daß wir letztere auch durch das Differential der zu \mathbf{A} gehörigen schiefssymmetrischen Matrix $d\mathbf{R}_A$ ausdrücken können

$$\mathbf{A} = d\mathbf{A} (\mathbf{A}) = (\mathbf{E} + d\mathbf{R}_A) (\mathbf{A}) = (\mathbf{A}) + d\mathbf{R}_A (\mathbf{A}). \quad (12a)$$

Die Multiplikation mit $d\mathbf{R}_A$ kann bekanntlich auch durch die vektorielle Multiplikation mit einem Vektor $d\mathbf{a}$ ersetzt werden, dessen Komponenten die drei Parameter von $d\mathbf{R}_A$ sind und den wir als Drehvektor bezeichnen:

$$d\mathbf{R}_A \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -da_3 & da_2 \\ da_3 & 0 & -da_1 \\ -da_2 & da_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 \\ da_2 \\ da_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d\mathbf{a} \times \mathbf{x}. \quad (12b)$$

Die Verbesserung $d\mu$ führen wir durch die Beziehung

$$\mu = (1 + d\mu) (\mu) \quad (12c)$$

ein. Damit erhalten wir aus (11b) die Gleichung

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{x}_{0L} + (1 + d\mu) (\mu) (\mathbf{E} + d\mathbf{R}_A) (\mathbf{A}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (11c)$$

aus welcher nach Vernachlässigung der Glieder 2. Ordnung die Transformationsformel

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L &= \mathbf{x}_{0L} + (\Delta \mathbf{x}_L) + d\mu (\Delta \mathbf{x}_L) + d\mathbf{R}_A (\Delta \mathbf{x}_L) \\ (\Delta \mathbf{x}_L) &= (\mu) (\mathbf{A}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_L) - (\mathbf{x}_{0L}) \end{aligned} \quad (11d)$$

Vordruck IV

Räumliche Drehstreckung mittels Ausgleichung

Angaben				2. W	W_1	W_2	W_3
	X	Y	Z				
$P_1 = 5$	+1823,74	+3511,41	+2023,12	P_1	-0,247	+1,248	+2,252
$P_2 = 6$	+18645,34	+1833,50	+8073,14	P_2	-3,873	+0,021	+0,247
$P_3 = 8$	+14402,33	+1492,30	+2249,09	P_3	-3,200	+0,683	+1,697
$P_4 = 9$	+6003,79	+2470,93	+9698,24	P_4	-0,930	+0,817	+0,295
P_5				P_5			
S	+10218,80	+2327,04	+5510,90	$d\mu = -0,0009445$		$\mu = 0,2499997$	
				3. Normalgleichungen			
	X_L	Y_L	Z_L	$d\alpha_1$	$d\alpha_2$	$d\alpha_3$	-l
$P_1 = 5$	+3330,93	-1747,41	-924,98	+4,0177220	-0,9412984	-2,8855547	-0,0009164
$P_2 = 6$	+7079,02	-1253,94	+1495,20		+14,0071812	-0,5575863	+0,0008792
$P_3 = 8$	+6415,06	-1649,86	-134,17			+10,2807777	+0,0015686
$P_4 = 9$	+3928,82	-1656,38	+1190,59	Reduktion der Normalgleichungen			
P_5				4,0177220	-0,9412984	-2,8855547	-0,0009164
S	+5188,46	-1576,90	+406,66	+0,2342866	+13,7866476	-1,2336331	+0,0006645
(A)	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	+0,7182068	+0,0894802	+8,0979670	+0,0009699
$a_{1,i}$	+0,9585694	-0,1643355	-0,2326769	$d\alpha_1$	$d\alpha_2$	$d\alpha_3$	
$a_{2,i}$	+0,1869447	+0,9792245	+0,0785558	+0,0001283	-0,0000589	-0,0001198	
$a_{3,i}$	+0,2149335	-0,1187989	+0,9693763	4. $\sin \alpha_1 = d\alpha_1$		$\sin \alpha_2 = d\alpha_2$	$\sin \alpha_3 = d\alpha_3$
(e)	-5142,00	-10625,00	-9190,00	+0,0001283	-0,0000589	-0,0001198	
(μ)	+0,250236						

1.	$X - X_S$	$Y - Y_S$	$Z - Z_S$	$\cos \alpha_1$	$\cos \alpha_2$	$\cos \alpha_3$	
P_1	-8395,06	+1184,37	-3487,78	+1,0000000	+1,0000000	+1,0000000	
P_2	+8426,54	-493,54	+2562,24				
P_3	+4183,53	-834,74	-3261,81	dA	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$
P_4	-4215,01	+143,89	+4187,34	$a_{1,i}$	1,0000000	+0,0001198	-0,0000589
P_5				$a_{2,i}$	-0,0001198	+1,0000000	-0,0001283
Σ	0,00	-0,02	-0,01	$a_{3,i}$	+0,0000589	+0,0001283	+1,0000000
$(\Delta X)_L$	$(X_L - X_{S,L})$	$(Y_L - Y_{S,L})$	$(Z_L - Z_{S,L})$	5. A	$a'_{i,1}$	$a'_{i,2}$	$a'_{i,3}$
P_1	-1859,343	-171,068	-1332,769	$a'_{1,i}$	+0,9585791	-0,1642112	-0,2327246
P_2	+1892,373	+323,629	+1089,416	$a'_{2,i}$	+0,1868023	+0,9792594	+0,0784593
P_3	+1227,740	-72,953	-541,404	$a'_{3,i}$	+0,2150139	-0,1186829	+0,9693727
P_4	-1260,770	-79,607	+784,758	μA	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$
P_5				$a_{1,i}$	+0,2396445	-0,0410528	-0,0581811
Σ	0,000	+0,001	+0,001	$a_{2,i}$	+0,0467005	+0,2448146	+0,0196148
				$a_{3,i}$	+0,0537534	-0,0296707	+0,2423429
	(X_L)	(Y_L)	(Z_L)	6.	endgültige Koordinaten		
P_1	+3331,177	-1748,658	-927,232		X_L	Y_L	Z_L
P_2	+7082,893	-1253,961	+1494,953	P_1	+3330,929	-1747,413	-924,983
P_3	+6418,260	-1650,543	-135,867	P_2	+7079,019	-1253,942	+1495,199
P_4	+3929,750	-1657,197	+1190,295	P_3	+6415,062	-1649,861	-134,170
P_5				P_4	+3928,824	-1656,381	+1190,592
S	+5190,520	-1577,590	+405,537	P_5	+5188,458	-1576,898	+406,660
				S			

folgt. Denken wir uns die Punkte (P_L) des Netzes (N) nach P_L transformiert, so werden wir Klaffungen zwischen transformierten und gegebenen Anschlußpunkten P_L , (P_L) feststellen

$$\mathbf{d} = \mathbf{x}_L - (\mathbf{x}_L). \quad (13a)$$

Wir bezeichnen die Differenz zwischen dem endgültigen und dem durch die Näherungstransformation erhaltenen Ortsvektor mit

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_L - (\mu) (\mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x}_L - (\mathbf{x}_L), \quad (13b)$$

die Verbesserung des Verschiebungsvektors mit

$$d\mathbf{c} = \mathbf{x}_{0L} - (\mu) (\mathbf{A}) \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0L} - (\mathbf{x}_{0L}) \quad (13c)$$

und erhalten aus (13c) eine lineare Beziehung zwischen dem Klaffungsvektor \mathbf{d} und den Unbekannten $d\mathbf{c}$, $d\mathbf{R}_A$, $d\mu$

$$\mathbf{d} = \mathbf{w} - d\mathbf{c} - d\mu (\Delta\mathbf{x}_L) - d\mathbf{R}_A (\Delta\mathbf{x}_L). \quad (14a)$$

Daraus folgen drei skalare Gleichungen für die Koordinaten dc_i von $d\mathbf{c}$, die Parameter (da_i) von $d\mathbf{R}_A$ (oder $d\mathbf{a}$) und $d\mu$

$$\begin{aligned} d_1 &= w_1 - dc_1 - (\Delta x_L) d\mu & \cdot & & - (\Delta z_L) da_2 + (\Delta y_L) da_3 \\ d_2 &= w_2 - dc_2 - (\Delta y_L) d\mu + (\Delta z_L) da_1 & \cdot & & - (\Delta x_L) da_3 \\ d_3 &= w_3 - dc_3 - (\Delta z_L) d\mu - (\Delta y_L) da_1 + (\Delta x_L) da_2. \end{aligned} \quad (14b)$$

Für n Anschlußpunkte erhalten wir ein System von $(3n)$ derartigen Gleichungen, das wir in Analogie zum Vorgang bei der ebenen Drehstreckung durch die Forderung nach einer minimalen Quadratsumme der verbleibenden Restklaffungen ausgleichen wollen. Das Netz (N) wird dabei in seiner Form nicht verändert und formtreu in die Anschlußpunkte eingepaßt.

Aus der Forderung $[\mathbf{d}^2] = \text{Min.}$ folgt in bekannter Weise ein Normalgleichungssystem, welches nach dem Einführen von Schwerpunktskoordinaten für die Punkte des Netzes (N) zerfällt.

Aus $(\mathbf{x}_{0L}) = (\mathbf{x}_{SL})$ folgt $[(\mathbf{x}_L) - (\mathbf{x}_{0L})] = 0$ und damit berechnen wir:

$$d\mathbf{c} = \frac{[\mathbf{w}]}{n} = \frac{[\mathbf{x}_L]}{n} - \frac{[(\mathbf{x}_L)]}{n} = \mathbf{x}_{SL} - (\mathbf{x}_{SL}). \quad (15a)$$

Wegen der nach obigem und (11c) geltenden Beziehung

$$[(\mathbf{x}_L) - (\mathbf{x}_{0L})] = (\mu) (\mathbf{A}) [\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] = 0$$

folgt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_S$. Für den Näherungswert (c) des Verschiebungsvektors besteht somit die Gleichung

$$(\mathbf{c}) = (\mathbf{x}_{0L}) - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_{SL}) - \mathbf{x}_S \quad (15b)$$

und mit dieser und (15a) erhalten wir:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}) + d\mathbf{c} = \mathbf{x}_{SL} - \mathbf{x}_S. \quad (15c)$$

Das heißt, die Verschiebung des Netzes (N) muß in aller Strenge so erfolgen, daß die Schwerpunkte der Netze (N) und N_L zusammenfallen. Auch die Verbesserung $d\mu$ können wir in Schwerpunktskoordinaten explizit darstellen

$$d\mu = \frac{[w_1(\Delta x_L) + w_2(\Delta y_L) + w_3(\Delta z_L)]}{[(\Delta x_L)^2 + (\Delta y_L)^2 + (\Delta z_L)^2]}. \quad (16)$$

Für die Komponenten von $d\mathbf{R}_A$ (oder des Drehvektors $d\mathbf{a}$) verbleibt ein Normalgleichungssystem mit 3 Unbekannten:

$$\begin{aligned} [(\Delta y_L)^2 + (\Delta z_L)^2] da_1 - [(\Delta x_L)(\Delta y_L)] da_2 - [(\Delta x_L)(\Delta z_L)] da_3 + [w_2(\Delta z_L) - \\ - w_3(\Delta y_L)] &= 0 \\ [(\Delta z_L)^2 + (\Delta x_L)^2] da_2 - [(\Delta z_L)(\Delta y_L)] da_3 + [w_3(\Delta x_L) - w_1(\Delta z_L)] &= 0 \\ [(\Delta x_L)^2 + (\Delta y_L)^2] da_3 + [w_1(\Delta y_L) - w_2(\Delta x_L)] &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Mit den erhaltenen Werten bilden wir die Matrix $d\mathbf{A}$ nach (6) in welche wir

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{da_1^2 + da_2^2 + da_3^2} \\ \alpha a_1 &= da_1, \alpha a_2 = da_2, \alpha a_3 = da_3 \end{aligned} \quad (18a)$$

eingeführen. Wir können $d\mathbf{A}$ aber auch mit einer beliebigen aus 3 Drehungen gebildeten Matrix berechnen, wenn wir darin $\sin a_i = da_i$ setzen. Aus $d\mathbf{A}$, $d\mu$ berechnen wir verbesserte Raumlagen für die Netzpunkte:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_L)_1 &= \mathbf{x}_{LS} + (\mu)_1 (\mathbf{A})_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \\ (\mu)_1 &= (1 + d\mu) (\mu) \\ (\mathbf{A})_1 &= d\mathbf{A} (\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (18b)$$

Das Verfahren setzen wir fort, bis $d\mu$ genügend klein wird und $d\mathbf{A}$ genügend mit der Einheitsmatrix übereinstimmt. Nach n Iterationen bestehen die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L &= \mathbf{x}_{LS} + \mu \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \\ \mu &= (1 + d\mu_n) (1 + d\mu_{n-1}) (\mu) \dots (1 + d\mu_1) (\mu) \\ \mathbf{A} &= d\mathbf{A}_n d\mathbf{A}_{n-1} \dots d\mathbf{A}_1 (\mathbf{A}), \end{aligned} \quad (19)$$

in welchen wir der Systematik wegen $d\mathbf{A} = d\mathbf{A}_1$ und $d\mu = d\mu_1$ gesetzt haben. In der Regel werden 1 bis 2 Iterationen genügen. Die Anwendung auf das bereits mehrfach behandelte Beispiel wird im *Vordruck IV* gezeigt.

SCHRIFTTUM

1. RINNER, K.: Über räumliche Drehungen, *Veröff. d. Deutschen Geod. Komm., Reihe A, Höhere Geod.*, Heft Nr. 25.
2. SCHUT, G. H.: Construction of Orthogonal Matrices and their Application in Anal. Photogr., *Photogrammetrie* 1958/59 Nr. 4, S. 149—162.
3. MISSKY, L.: An Introduction to Linear Algebra, Oxford. At the Clarendon Press, 1955, S. 222 ff.
4. RINNER, K.; Die Orientierung eines Richtungsbündels. *Ö. Z. f. V.* 1955. s. 105—113.

LINEAR CONFORMAL TRANSFORMATION IN SPACE

K. RINNER

SUMMARY

As basis for the calculation of three-dimensional geodetic networks the knowledge of a number of fundamental tasks is needed, which correspond to the well known fundamental tasks in two-dimensional calculations. To these fundamental tasks of space triangulation first all methods for positioning a single point by means of directions, angles and lengths in the space belong; in addition also the process of orientating a bundle of rays in space and the linear conformal transformation in space.

The paper deals with this transformation, while the problem mentioned before will be the object of another publication.

The linear conformal transformation in space has 7 parameters, 3 of them can be interpreted as translations, 3 as rotations and the last one as a scaling parameter. The transformation is the analogue in space to the well known twodimensional Helmert transformation.

In the paper a solution for the general problems is presented, in which only 7 corresponding data (coordinates) are given. Besides, 2 other solutions are derived for the case in which 3 corresponding points (9 coordinates) are available. Finally formulas for adjusting over determined datas are considered.

For all solutions digital examples are calculated, using a form specially suitable for calculation at desk machines.

LA TRANSFORMATION LINÉAIRE DANS L'ESPACE

K. RINNER

RÉSUMÉ

Comme base des calculs des réseaux de la géodésie tridimensionnelle, il importe de connaître un certain nombre de tâches fondamentales correspondant à celles, bien connues, des calculs bidimensionnels. Ces tâches fondamentales de la triangulation dans l'espace comprennent d'abord toutes les méthodes de détermination d'un point singulier par les directions, angles et distances, le procédé d'orientation d'un faisceau de rayons et la transformation linéaire dans l'espace.

L'étude traite de cette transformation; le problème mentionné fera l'objet d'une autre publication.

La transformation linéaire dans l'espace a 7 paramètres, dont 3 peuvent être interprétés comme des translations, 3 comme des rotations et le dernier comme un facteur d'échelle. La transformation est l'analogue, dans l'espace, de la transformation bidimensionnelle bien connue de Helmert.

L'étude présente une solution pour les problèmes généraux, dans laquelle ne figurent que 7 données correspondantes (coordonnées). Elle donne aussi deux autres solutions pour le cas où l'on ne dispose que de 3 points correspondants (9 coordonnées). Enfin l'auteur prend en considération des formules pour la compensation de données surdéterminées.

Pour chaque solution, l'auteur donne des exemples numériques utilisant des formes appropriées pour les calculs par calculatrices digitales.

КОНФОРМНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

К. РИННЕР

РЕЗЮМЕ

В основе вычисления трехмерных геодезических сетей лежит ряд основных задач, соответствующих хорошо известным из двухмерных вычислений основным задачам. В круг этих задач пространственной триангуляции входят, в первую очередь, все методы определения одиночного пункта при помощи направлений, углов и расстояний в пространстве а также процесс ориентирования пучка лучей и конформная линейная трансформация в пространстве.

В настоящей работе рассматривается эта трансформация, а ориентирование пучка лучей обсуждается в другой статье.

Конформная линейная трансформация в пространстве характеризуется 7 параметрами; три из них могут рассматриваться как трансляция, три как кручение, а последний — как параметр шкалы. Трансформация соответствует хорошо известной двумерной трансформации Гельмерта в пространстве.

В статье дается решение задачи, в которой имеется лишь 7 соответствующих данных (координат). Кроме того, рассматривается два дополнительных решения для случая трех соответствующих пунктов (9 координат). В заключение приводятся формулы для выравнивания переопределенных данных.

Для каждого решения приводятся числовые примеры с использованием формы, особо удобной для вычислений при помощи настольных вычислительных машин.

BETRACHTUNGEN ZUR PASSPUNKTBESTIMMUNG DURCH MESSTISCHPHOTOGRAMMETRIE BEI TERRESTRISCH-PHOTOGRAMMETRISCHEN AUFNAHMEN VON BRAUNKOHLENTAGEBAUEN

W. RÜGER, Freiberg/Sa

[Eingegangen am 27. März 1965]

Es werden ein analytisch-photogrammetrisches und ein graphisch-photogrammetrisches Verfahren zur Paßpunktbestimmung bei Tagebaufnahmen beschrieben, ihre Genauigkeit und der benötigte Zeitaufwand mit den der klassisch-geodätischen Bestimmung verglichen, wobei sich das graphisch-photogrammetrische Verfahren als das wirtschaftlichste erwiesen hat.

1. Bedeutung der photogrammetrischen Aufnahme im Tagebau

Im letzten Jahrzehnt sind viele Tagebaubetriebe, insbesondere solche des Braunkohlentagebaus, dazu übergegangen, klassisch-geodätische Messungen durch photogrammetrische Messungen zu ersetzen. Dabei werden sowohl Verfahren der Luftbildmessung als auch der Erdbildmessung für die Aufnahme von Tagebauen eingesetzt. Professor TÁRCZY-HORNOCH hat schon 1932 in einem Vortrag »Die Photogrammetrie im Dienste des Bergbaus« [1] vor der Generalversammlung der Ungarischen Photogrammetrischen Gesellschaft auf die besondere Bedeutung der Photogrammetrie für den Bergbau hingewiesen und die Grenzen ihrer Anwendung aufgezeigt. Aber erst im letzten Jahrzehnt konnte sich die Photogrammetrie im Bergbau in breiterem Maße durchsetzen.

In dieser Epoche begannen die Markscheider selbst [2, 3, 4] sich der photogrammetrischen Meßtechnik zu bedienen, während früher fast ausschließlich solche Arbeiten an photogrammetrische Spezialunternehmen vergeben wurden. Es ist verständlich, daß diese neuen Bedingungen die Bestrebungen zur weiteren Rationalisierung der photogrammetrischen Tagebaufnahmen förderten.

2. Zur Frage der Notwendigkeit von Paßpunkten und deren Bestimmung

Der Tagebau, seine Größe und seine Betriebsart, die eingesetzten Geräte für Gewinnung, Förderung und den Versturz von Abraummassen und die ständige Veränderung von Abbau- und Kippenstrossen stellen der Anwendung der Erdbildmessung, mit der sich diese Arbeit ausschließlich beschäftigt

soll, für das markscheiderische Aufmaß besondere Bedingungen. Durch diese Bedingungen ist der wirtschaftliche Vorteil einer terrestrisch-photogrammetrischen Tagebauaufnahme mehr als bei Aufnahmen für rein topographische Zwecke von einer absolut zuverlässigen Paßpunktbestimmung abhängig, da wegen der im allgemeinen schnellen Veränderungen des Objekts keine nachträglichen Paßpunktbestimmungen oder Wiederholungsaufnahmen gemacht werden können. Zur Einhaltung der Genauigkeitsforderungen für die rißlichen Darstellungen, die im Braunkohlentagebau der DDR in der Regel im Maßstab 1 : 2000 zu zeichnen sind, werden die Stand- und Paßpunktkoordinaten x, y, z bei terrestrisch-photogrammetrischen Tagebauaufnahmen mit Hilfe klassisch-geodätischer Verfahren bestimmt. Die gebräuchlichsten Verfahren sind die trigonometrischen Einschneideverfahren für die Lagebestimmung und die trigonometrische Höhenübertragung für die Höhenbestimmung der Stand- und Paßpunkte. Es ist nachgewiesen, daß die Bestimmung der Paßpunkte mit klassisch-geodätischen Methoden, d. h. meist durch Richtungs- und Zenitwinkelbeobachtungen mit Hilfe von Theodoliten etwa die Hälfte der Feldarbeitszeit in Anspruch nimmt. Im allgemeinen wird durch diesen Aufwand der wirtschaftliche Vorteil des terrestrisch-photogrammetrischen Aufnahmeverfahrens nicht in Zweifel gestellt. Es gibt aber eine Reihe von Aufgaben, bei denen eine schnelle Bereitstellung von Karten- und Planmaterial besonders wichtig ist. Gerade solche Aufgaben förderten die Bestrebungen, klassisch-geodätische Verfahren durch photogrammetrische zu ersetzen. Es ist deshalb naheliegend, den Aufwand für die Paßpunktbestimmungen durch Wahl anderer Bestimmungsverfahren zu verringern. Hierfür bieten sich photogrammetrische Verfahren geradezu an. Es soll deshalb im folgenden untersucht werden, welche Genauigkeit der Paßpunktbestimmung durch Meßtischphotogrammetrie und welche wirtschaftlichen Vorteile damit erzielt werden können. Dieses Bestimmungsverfahren ist bei Aufnahmen in mittleren und kleinen Maßstäben für topographische Zwecke vor allem auf Expeditionen üblich, bei großmaßstäblichen Tagebauaufnahmen jedoch wegen der höheren Genauigkeitsforderungen kaum angewandt worden.

Es läßt sich damit die Aufgabe formulieren:

1. Es ist die Genauigkeit des photogrammetrischen Einschneideverfahrens bei Verwendung der terrestrischen photogrammetrischen Aufnahme- und Auswerteausrüstung: Phototheodolit 19/1318, Stereokomparator 1818 und Stereoautograph 1318 des VEB Carl Zeiss Jena zu ermitteln.
2. Es ist eine im Hinblick auf die Genauigkeit und auf den Zeitaufwand günstige Methode des photogrammetrischen Einschneidens von Paßpunkten bei Tagebauaufnahmen zu erarbeiten.

3. Grundlagen der Untersuchung

Die Untersuchungen gehen aus von dem als bekannt vorauszusetzenden Verfahren der Meßtischphotogrammetrie, bei dem von mindestens zwei bekannten Standpunkten unter einem großen Basisverhältnis mit konvergierenden Aufnahmerichtungen Meßbilder aufgenommen werden. Aus diesen Meßbildern können die Richtungen von den Standpunkten nach den zu bestimmenden Neupunkten auf verschiedene Weise gewonnen werden, die dann zur rechnerischen oder unmittelbar graphischen Bestimmung der Koordinaten benutzt werden. Voraussetzung für eine genaue Punktbestimmung nach diesem Verfahren ist eine einwandfreie äußere und innere Orientierung der Meßbilder, die über Richtungskontrollpunkte kontrolliert und gegebenenfalls verbessert werden können.

Grundlage der Untersuchung bildeten zwei vollständige terrestrisch-photogrammetrische Aufnahmen von Braunkohlentagebauen. Die Aufnahme des Tagebaues Deutzen (Bild 1) lag bei Beginn der Untersuchungen fertig vor. An dieser wurde nachträglich die Methodik erprobt. In die Aufnahme des Tagebaues Roßbach (Bild 2) wurden von Beginn an systematische Untersuchungen zu Fragen der Genauigkeit und der Wirtschaftlichkeit der photogrammetrischen Paßpunktbestimmung einbezogen. Zur Beurteilung der Genauigkeit der photogrammetrischen Paßpunktbestimmung war die gleichzeitige geodätische Bestimmung der Paßpunktkoordinaten erforderlich. Für diesen Vergleich zwischen photogrammetrischer und klassisch-geodätischer Bestimmung fanden 16 Punkte Verwendung, die von bis zu 4 Standpunkten eingeschnitten wurden. Standpunkte des photogrammetrischen Einschneidens waren gleichzeitig die linken Standpunkte der Basen der stereophotogrammetrischen Tagebaufnahmen, so daß keine zusätzlichen Aufnahmen für das photogrammetrische Einschneiden erforderlich waren. Gleichzeitig wurden auch auf diesen Standpunkten die Richtungen beobachtet, die zur klassisch-geodätischen Bestimmung der Paßpunktkoordinaten erforderlich waren. Dies ermöglichte einen direkten Vergleich zwischen der geodätischen und der photogrammetrischen Richtungsbestimmung. Die Aufnahmerichtung wurde aus der Basisrichtung und dem jeweils eingestellten Verschwenkungswinkel abgeleitet und für die graphische Auswertung auf der Kartierungsunterlage (z. B. A 3a(R) in Bild 2) festgelegt. Als Richtungskontrollpunkte dienten 8 am Tagebaurand oder in größerer Entfernung liegende singalisierte Festpunkte (z. B. A 5— (Ro) in Bild 2) sowie gegenüberliegende Aufnahme-standpunkte. Die Kontrollrichtungen sind an den Aufnahmestandpunkten durch kurze Pfeile (Bild 1 und 2) angegeben. Auf den insgesamt hierfür benutzten 11 Meßbildern des Tagebaus Roßbach (Bild 2) kamen durchschnittlich 1 bis 2 Richtungskontrollpunkte und 5 bis 10 zu bestimmende Punkte zur Abbildung.

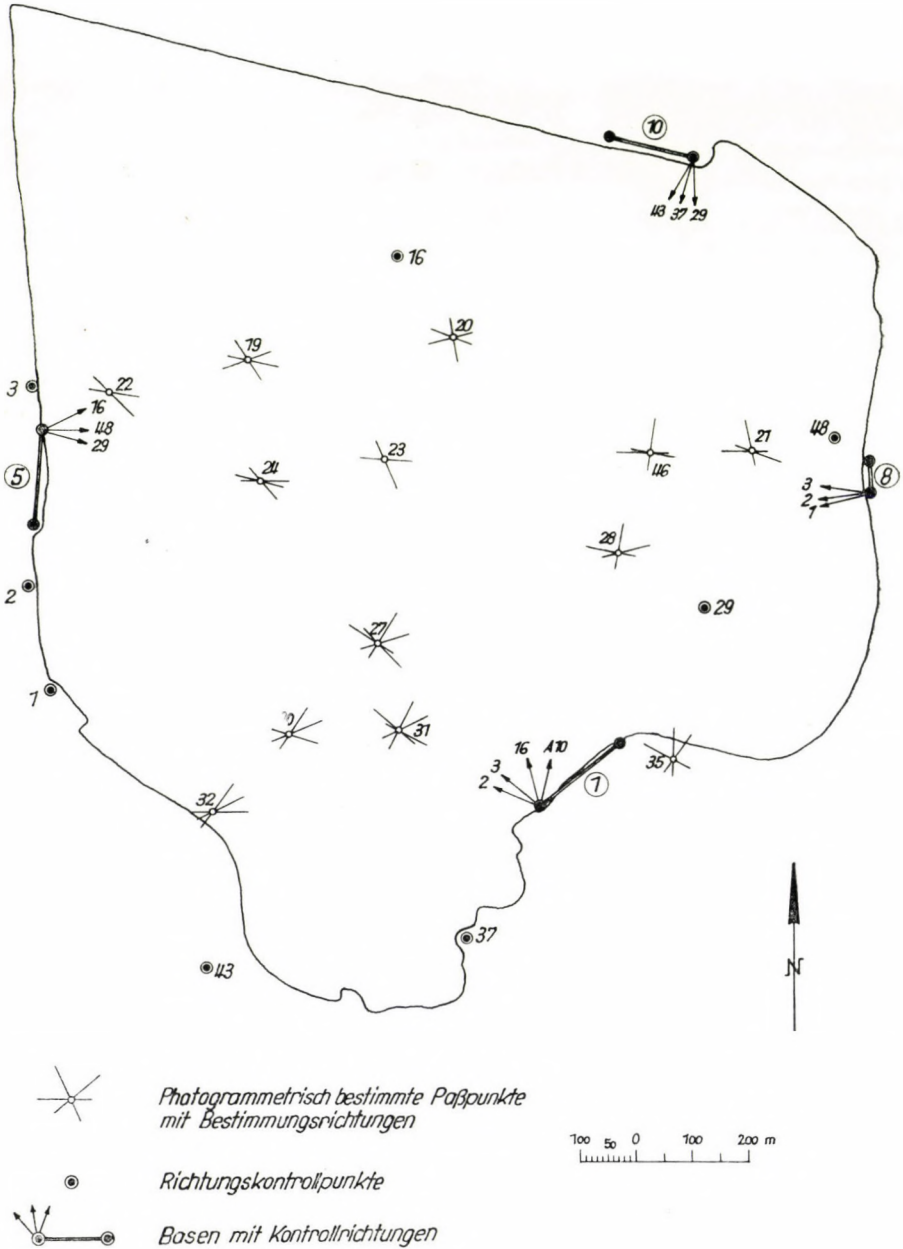
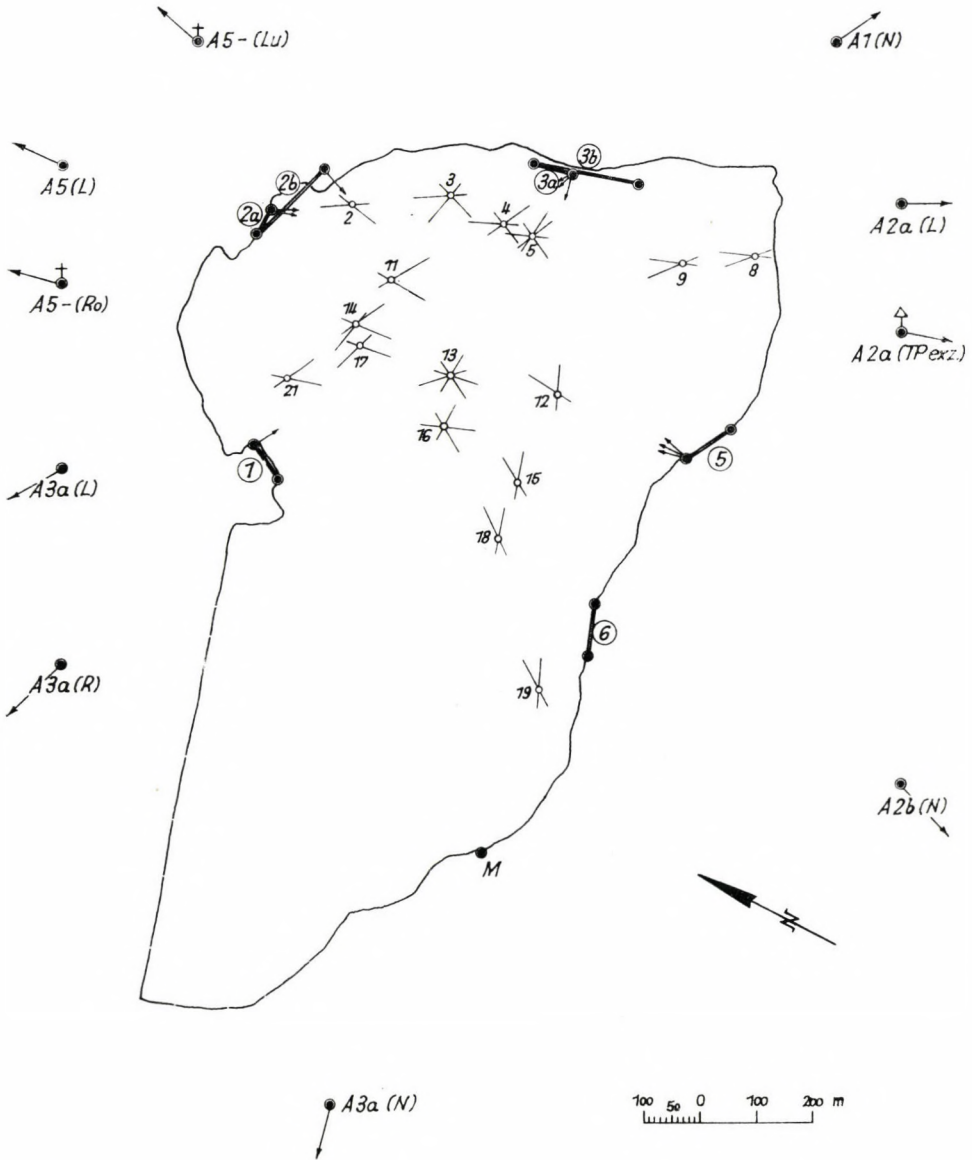


Bild 1






-  *Photogrammetrisch bestimmte Paßpunkte mit Bestimmungsrichtungen*
-  *Richtungskontrollpunkte*
-  *Basen mit Kontrollrichtungen*

Bild 2

4. Die Untersuchungsverfahren

4.1. Analytisch-photogrammetrisches Einschneiden

Am Stereokomparator 1818 des VEB Carl Zeiss Jena wurden in den Meßbildern die Bildkoordinaten der zu bestimmenden Punkte und der Richtungskontrollpunkte durch zweimaliges Anfahren gemessen. Da für die Paßpunktbestimmung durch Meßtischphotogrammetrie keine besonderen Aufnahmen angefertigt worden waren, sondern die für die Tagebaukartierung vorgesehenen Stereoaufnahmen verwendet wurden, konnte bei der Bildkoordinatenmessung die rechte Platte zur besseren Punktidentifizierung durch Stereobetrachtung mitgenutzt werden.

Die Berechnung der Richtungen und Höhenwinkel aus den Bildkoordinaten und der Kammerkonstante des Phototheodolits erfolgte nach den bekannten Grundformeln. Die Paßpunktkoordinaten wurden als Vorwärtseinschnitte in den möglichen Kombinationen der gemessenen Richtungen auf einer Doppelrechenmaschine bestimmt, wobei Schnitte unter einem Winkel $10^g > \gamma > 190^g$ nicht berücksichtigt wurden. Bei Überbestimmungen erfolgte eine graphische Ausgleichung mit Hilfe der Winkelhalbierenden in den fehlerzeigenden Figuren.

Die Höhenbestimmung erfolgte ohne Kontrolle der äußeren und inneren Orientierung der Aufnahme. Erdkrümmung und Refraktion wurden berücksichtigt.

Die Messungen nach dem analytisch-photogrammetrischen Verfahren auf Grund der Tagebauaufnahme Deutzen (Bild 1) wurden zur Ermittlung der Richtungsgenauigkeit für photogrammetrisch mit dem Phototheodolit 19/1318 bestimmte Richtungen benutzt. Es ergaben sich zunächst aus den Doppelmessungen die mittleren Fehler der gemessenen Bildkoordinaten:

$$m_{x'} = \pm 0,004 \text{ mm}$$

$$m_{z'} = \pm 0,008 \text{ mm}$$

Diese mittleren Fehler stellen ein Maß der Beobachtungsgenauigkeit mit dem Stereokomparator 1818 dar. Sie zeigen den Meßfehler bei der Auswertung der Meßbilder in Abhängigkeit von der Identifizierbarkeit der Punkte. Der Unterschied zwischen $m_{x'}$ und $m_{z'}$ ist keine Folge unterschiedlicher Meßgenauigkeit am Stereokomparator in x' - und z' -Richtung, sondern der unterschiedlichen Identifizierbarkeit der Paßpunkte nach Richtung und Höhe, was besonders bei Verwendung in der Natur vorgefundener Paßpunkte auftreten kann.

Aus den Unterschieden zwischen den mit dem Zeiss-Theodolit 030 gemessenen Richtungen und den photogrammetrisch bestimmten Richtungen wurde der mittlere Fehler m_a einer photogrammetrisch bestimmten Richtung bestimmt. Mit Hilfe der Richtungskontrollpunkte wurde der systematische

Verschwenkungsfehler $\Delta\varphi$, auf dessen Ursachen hier nicht eingegangen werden soll, abgeleitet. Die Ergebnisse enthält Tabelle I. Die Werte stellen Durchschnittswerte aus den auf einem Standpunkt ausgeführten Aufnahmen dar. Der mittlere Richtungsfehler m_α setzt sich aus Meß- und Identifizierungsfehlern sowie aus Restfehlern der äußeren und inneren Orientierung zusammen. Er gibt ein Bild über die äußere Genauigkeit der photogrammetrischen Richtungsmessung. Sein Wert von durchschnittlich $\pm 0,7^\circ$ entspricht einer linearen Querabweichung von ± 11 cm/km.

Tabelle I

*Genauigkeit der photogrammetrischen Richtungsmessung
mit Zeiss-Phototheodolit 19/1318*

m_α = mittlerer Richtungsfehler
 $\Delta\varphi$ = Verschwenkungsfehler
 E = durchschnittliche Aufnahmeentfernung

Aufnahmebasis	m_α	$\Delta\varphi$	E
1 (L, N, R)	$\pm 0^\circ,89$	$- 0^\circ,51 \pm 0^\circ,25$	0,9 km
5 (N, R)	$\pm 0^\circ,76$	$- 0^\circ,91 \pm 0^\circ,42$	1,0 km
8 (L, N, R)	$\pm 0^\circ,53$	$- 2^\circ,05 \pm 0^\circ,23$	1,0 km
10 (L, N, R)	$\pm 0^\circ,64$	$- 0^\circ,39 \pm 0^\circ,55$	1,1 km
Mittel	$\pm 0^\circ,70$	$- 0^\circ,97 \pm 0^\circ,41$	1,0 km

Aus den unverbesserten wie aus den mit Hilfe von Richtungskontrollpunkten orientierungsverbesserten analytisch-photogrammetrisch bestimmten Richtungen wurden die Koordinaten der Paßpunkte berechnet. Die hierbei erzielte Lagegenauigkeit auf Grund der Berechnungen im Tagebau Roßbach (Bild 2) zeigt Tabelle II. Hierbei wird der aus Überbestimmungen berechnete Fehler mit »innerer Genauigkeit«, der aus den Differenzen zwischen photogrammetrischer und klassisch-geodätischer Punktbestimmung mit »äußerer Genauigkeit« bezeichnet. Das Ergebnis genügt den praktischen Anforderungen, wenn man diesen Werten die Kartiergenauigkeit von 0,2 mm ($\pm 0,4$ m im Maßstab 1 : 2000) und die Genauigkeit der Modelleinpassung am Stereoaographen ($\pm 0,2$ bis $\pm 0,3$ mm \triangleq $\pm 0,4$ m bis $\pm 0,6$ m im Maßstab 1 : 2000) gegenüberstellt.

4.2. Graphisch-photogrammetrisches Einschneiden

Die Untersuchung wurde am Stereoaographen 1318 des VEB Carl Zeiss Jena ausgeführt. Bekanntlich erhält man den gerätebezogenen Standpunkt auf der Kartierungsunterlage, wenn man lediglich im linken Bild einzelne

Tabelle II
*Genauigkeit des analytisch-photogrammetrischen
 Einschneideverfahrens*

Bestimmungsstrahlen	Anzahl der Punkte	Innere Genauigkeit	Äußere Genauigkeit
<i>Lagefehler ohne Richtungskontrolle</i>			
4	3	$\pm 0,23$ m	$\pm 0,26$ m
3	8	$\pm 0,25$ m	$\pm 0,30$ m
2	5	—	$\pm 0,57$ m
4 + 3 + 2	16	—	$\pm 0,39$ m
<i>Lagefehler mit Richtungskontrolle</i>			
4	3	$\pm 0,10$ m	$\pm 0,12$ m
3	8	$\pm 0,14$ m	$\pm 0,16$ m
2	5	—	$\pm 0,32$ m
4 + 3 + 2	16	—	$\pm 0,20$ m
<i>Höhenfehler (ohne Horizontverbesserung)</i>			
4	3	$\pm 0,06$ m	$\pm 0,03$ m
3	7	$\pm 0,11$ m	$\pm 0,14$ m
2	4	$\pm 0,13$ m	$\pm 0,17$ m
4 + 3 + 2	14	$\pm 0,11$ m	$\pm 0,13$ m

Punkte in beliebig kleiner und großer Entfernung y des Basiswagens anfährt, in diesen Stellungen die zugehörigen x -Werte auf die Kartierungsunterlage abnadelt und entsprechende Punkte verbindet. Der Schnittpunkt aller so erhaltenen Strahlen ergibt den gerätebezogenen Standpunkt der Aufnahme auf dem Zeichentisch. Dieser Punkt kann mit Hilfe eines Einstellmikroskops oder einer einfachen Einstellschablone festgelegt werden.

Für das graphisch-photogrammetrische Punkteinschneiden wurde diese Standpunktsbestimmung nur einmal für die Kammerkonstante des verwendeten Phototheodolits durchgeführt. Danach wurden die einzelnen Meßbilder, die von 5 Standpunkten (A 1, A 2a, A 2b, A 3a, A 5 in Bild 2) aus aufgenommen worden waren, nacheinander in den linken Bildträger des Stereoautographen eingelegt, die Kartierungsunterlage mit dem jeweiligen Aufnahme-standpunkt unter dem gerätebezogenen Standpunkt eingestellt und nach den Richtungskontrollpunkten orientiert. Danach wurden die zu bestimmenden Paßpunkte bei verschiedener Stellung des Basiswagens angefahren und die Richtung auf der Kartierungsunterlage abgenadelt. Die Verbindung dieser beiden Richtungspunkte ergab jeweils eine Bestimmungsrichtung für einen Paßpunkt. Es wurde darauf geachtet, daß diese Richtungspunkte in der

Tabelle III*Vergleich der Verfahren zur Paßpunktbestimmung*

	Klassisch- geodätisch	Analytisch- photogramm.	Graphisch- photogramm.
Punktzahl	16	16	16
Zeitaufwand	35 h	35 h	8 h
Anteile der Außenarbeit	25%	*	*
Anteile der Auswertarbeit	75%	100%	100%

* Werden Bilder von Stereobildpaaren der Tagebauaufnahme verwendet, so entsteht kein Aufwand für Außenarbeiten.

Erreichte Genauigkeit

der Lage	$\pm 9,2$ cm	± 23 cm
der Höhe	$\pm 2,4$ cm	± 5 cm

Die Zahlenangaben sind durchschnittliche Fehler, die aus den Abweichungen gegenüber den klassisch-geodätisch bestimmten Paßpunktkoordinaten und Höhen berechnet wurden. Die Maximalabweichungen betragen beim graphisch-photogrammetrischen Verfahren in der Lage 45 cm und in der Höhe — 11 cm.

Nähe des Paßpunktes und zwar vor und hinter diesem lagen. Dabei erfolgte die Orientierung bezüglich der Entfernung mit Hilfe des noch nicht eingepaßten Modells.

Für die Höhenermittlung am Stereoautographen müssen die einzelnen Modelle eingepaßt und orientiert werden, da für eine genaue photogrammetrische Höhenbestimmung die Entfernung bekannt sein muß. Auf der Grundlage der orientierten Kartierungsunterlage wurden mit dem Einpaßmikroskop am Zeichentisch die einzelnen zuvor nach Lage ermittelten Paßpunkte eingestellt, der Punkt im linken Bild mit der Meßmarke der Höhe nach angefahren und die Höhe am Höhenzähler abgelesen. Dabei dienten 1 bis 2 höhenmäßig bekannte Punkte pro Bild zur Kontrolle des Aufnahmehorizontes und damit praktisch der Einstellung des Höhenzählers. Es ergaben sich für die Lage- und für die Höhenbestimmung folgende durchschnittlichen Fehler

$$t_{\text{Lage}} = \pm 0,23 \text{ m} \quad t_{\text{Höhe}} = \pm 0,05 \text{ m.}$$

5. Genauigkeits- und Wirtschaftlichkeitsvergleich

In Tabelle III sind drei Verfahren der Paßpunktbestimmung, klassisch-geodätisch, analytisch-photogrammetrisch und graphisch-photogrammetrisch gegenübergestellt. Die Werte zeigen, daß die Paßpunktbestimmung nach den

untersuchten Verfahren mit ausreichender Genauigkeit durchgeführt werden kann. Der durchschnittliche Lagefehler liegt innerhalb der Zeichengenauigkeit, die für den Maßstab 1 : 2000 mit $\pm 0,4$ m angenommen werden kann.

Der besondere Vorteil der graphisch-photogrammetrischen Bestimmung liegt in dem gegenüber den anderen Verfahren sehr geringen Zeitaufwand, der nur etwa 25% des Zeitaufwandes der klassisch-geodätischen sowie der analytisch-photogrammetrischen Bestimmung beträgt.

6. Einschätzung des graphisch-photogrammetrischen Verfahrens

Die Überlegenheit hinsichtlich des Zeitaufwandes des graphisch-photogrammetrischen Einschneidens ist eindeutig. Das Verfahren bietet dann praktische Vorteile, wenn ein Tagebau von mehreren Seiten her aufgenommen werden muß, so daß sich gegenüberliegende Standlinien ergeben. Das ist bei Gesamtaufnahmen eines Tagebaues meist der Fall. Es kann unwirtschaftlich werden, wenn nur eine Abbaufont aufzunehmen ist. Bei regelmäßig wiederkehrenden Aufnahmen, bei denen Aufnahme Standpunkte und Richtungskontrollpunkte erhalten bleiben und sich nur im inneren Bereich des Tagebaus Veränderungen ergeben (z. B. Kippenstands aufnahmen), können Paßpunkte mit rückbaren Gleisanlagen verbunden werden und so ihre Lage bezüglich des Aufnahmeobjektes etwa beibehalten, aber bei jeder Aufnahme auf einfachste Weise mitbestimmt werden. Es kann so das Neuaufstellen von Paßpunkten, das erfahrungsgemäß einen hohen anteiligen Zeitaufwand fordert, vermieden werden.

SCHRIFTTUM

1. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Markscheiderische Studien, Verl. d. Ung. Akademie der Wissenschaften, Budapest 1963, S. 318 bis 323.
2. RÜGER, W.: Möglichkeiten und Grenzen der Anwendung der Photogrammetrie im Bergbau, *Freiberger Forsch.-Heft A 285*, Leipzig 1963.
3. KLOSS, W.: Über die Einführung der Photogrammetrie im Bergbau. *Vermess.-Techn.*, Berlin II (1963), S. 244 bis 246.
4. HEYLL, H.: Massenermittlungen im Rheinischen Braunkohlentagebau mittels Luftbildmessung und elektronischer Rechentechnik. *Mit. a. d. Markscheidewesen* 67 (1960) 4, S. 154 bis 166.

CONSIDERATIONS ON THE DETERMINATION OF MINOR CONTROL POINTS BY WAY OF PLANE-TABLE PHOTOGRAMMETRY IN TERRESTRIAL-PHOTOGRAMMETRICAL SURVEYING IN BROWN COAL SURFACE MINING WORKS

W. RÜGER

SUMMARY

An analytic-photogrammetric and a graphical-photogrammetric procedure for the determination of the points of minor control in surface mining surveys are described, their accuracy and required time-consumption compared with those of the classical geodetical determinations; being that the graphical-photogrammetrical procedure had been proved to be the most economical.

L'EXÉCUTION DU CANEVAS DE RESTITUTION AVEC PHOTOGRAMMÉTRIE
PAR INTERSECTION DANS LES LEVÉS TERRESTRES PHOTOGRAMMÉTRIQUES
DES MINES DE CHARBON A CIEL OUVERT

W. RÜGER

RÉSUMÉ

L'auteur décrit un procédé analytique-photogrammétrique et un autre graphique-photogrammétrique, pour l'exécution du canevas de restitution dans les levés des mines à ciel ouvert, et compare leur précision et leur dépense de temps à celles de la détermination géodésique classique. Le procédé graphique-photogrammétrique se montre le plus économique des deux procédés.

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ СВЯЗУЮЩИХ ТОЧЕК
МЕНЗУЛЬНО-ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ПРИ НАЗЕМНОЙ
ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКЕ ОТКРЫТОЙ РАЗРАБОТКИ БУРЫХ
УГЛЕЙ

В. РЮГЕР

РЕЗЮМЕ

Дается описание аналитического и графического фотограмметрических методов определения связующих точек при съемках открытой разработки, причем рассматривается их точность и затрата времени в сопоставлении с классическими методами геодезии. Наиболее экономичным оказывается графический фотограмметрический метод.

DIE BESTIMMUNG DER LOTABWEICHUNG η FÜR POTSDAM AUS STERNBEDECKUNGEN

H. U. SANDIG, Dresden und Potsdam

[Eingegangen am 17. März 1965]

Aus 73 in den Jahren 1955 bis 1959 visuell erfaßten Sternbedeckungen durch den Mond wird, unter Berücksichtigung des Mondrandprofils nach HAYN und WEIMER, die (absolute) Lotabweichung η in Bezug auf das Hayford-Ellipsoid für den Helmert-Turm in Potsdam (Europäisches Datum) abgeleitet. Die nach zwei verschiedenen Verfahren ermittelten Werte (+2,9 und +2,3) befinden sich in hinreichender Übereinstimmung zu den von anderen Autoren auf gravimetrischem Wege ermittelten Werten.

Die Verwendung von Sternbedeckungen durch den Mond für geodätische Zwecke ist nur gelegentlich versucht worden. Von besonderer Bedeutung sind die Versuche von O'KEEFE und seinen Mitarbeitern, die einerseits die Ableitung des Äquatorradius der Erde zum Ziel hatten [1], zum anderen den Anschluß von Inseln im Pazifik an ein Festpunktfeld bezweckten [2]. 1949 hat HOPMANN [3] den Versuch unternommen, die über tausend Sternbedeckungen, die BATTERMANN in den Jahren 1884 bis 1903 in Berlin beobachtet hatte, für geodätische Zwecke auszunutzen. Dabei hatte sich herausgestellt, daß diese Beobachtungsreihe vor allem in der Lotabweichung in Länge zu völlig unmöglichen Werten führt. HOPMANN erklärt diese Diskrepanz durch eine ungewöhnlich große persönliche Gleichung des Beobachters BATTERMANN. Außerdem wird darauf hingewiesen, daß die Beobachtungen nicht wegen des Profils des Mondrandes korrigiert worden waren, das ja erst zu Beginn des ersten Weltkrieges von HAYN erstmals ermittelt worden war.

Seit 1955 werden im Geodätischen Institut in Potsdam auf dem Helmerdturm durch H. KRÜGER und andere Mitarbeiter des Instituts die dort erreichbaren Sternbedeckungen durch den Mond mit einem 15 cm Cassegrain-Spiegelteleskop nach der Tastermethode beobachtet. Die Beobachtungen sind (zusammen mit den Widersprüchen $\Delta\sigma$ in der Distanz Stern-Mondzentrum) in mehreren Mitteilungen der Astron. Nachr. veröffentlicht worden [4]. Da KRÜGER und ein weiterer Beobachter ihre persönliche Gleichung mit einem künstlichen Stern bestimmt hatten [5], schien eine Berechnung des verbleibenden systematischen, die Lotabweichung enthaltenden Unterschiedes lohnend, zumal für den Helmerdturm bereits gravimetrische Bestimmungen der Lotabweichung durch WOLF [6], HOPMAN [7], ARNOLD [8] u. a. vorlagen. Da ein Fehler im Mondort der Ephemeride mit vollem Betrag in das Ergebnis

eingeht, konnten nur Beobachtungen der Jahre Verwendung finden, für die durch die zentrale Bearbeitung aller auf der ganzen Erde beobachteten Sternbedeckungen die Korrekturen der Mondephemeride ermittelt worden waren. Dies bedeutet, daß nur die Beobachtungen bis einschließlich 1959 verwendet werden konnten. Insgesamt standen somit 73 Beobachtungen zur Verfügung, die in den Jahren 1955 bis 1959 angestellt worden waren.

Da die Bestimmung der Lotabweichung in Breite aus Beobachtungen auf nur einer Station prinzipiell ungünstig ist (siehe z. B. die Darstellung von BERROTH u. HOFMANN [9]) so habe ich mich bei dem Versuch, die Potsdamer Beobachtungen auszuwerten, auf die Lotabweichung in Länge beschränkt. Eine vorhandene größere Lotabweichung in Breite (die nach den vorliegenden gravimetrischen Ergebnissen unwahrscheinlich ist) würde dann zwar die Ergebnisse der einzelnen Beobachtungen verfälschen, doch wird im Mittel aus einer großen Zahl von Beobachtungen die infolge der Lotabweichung falsch angenommene Breite sich im wesentlichen in einer Vergrößerung der zufälligen Streuung äußern und nur einen verschwindenden systematischen Einfluß haben.

Die Berechnung der Längendifferenz astronomisch minus geodätisch geschah auf zwei verschiedenen Wegen, einem nahezu strengen Verfahren und einem Näherungsverfahren. Das Näherungsverfahren ist der geringen Beobachtungsgenauigkeit der visuellen Sternbedeckungen angepaßt, in jedem Falle kann es zur Sicherung gegen grobe Fehler im strengen Verfahren mit Vorteil verwendet werden. Es verlangt nur einen minimalen Rechenaufwand.

Zur Aufstellung der Fehlergleichung für das strenge Verfahren wurden drei Unbekannte eingeführt: Eine Verbesserung der Länge $\Delta\lambda$ als Längendifferenz astronomisch minus geodätisch, eine Verbesserung Δk_0 des mittleren Mondradius k_0 (ausgedrückt in Einheiten des mittl. Äquatorradius der Erde) und eine Verbesserung $\Delta\pi_0$ der mittleren Mondparallaxe π_0 . Dabei ist natürlich klar, daß aus dem Material von nicht einmal 100 visuellen Sternbedeckungen keine verbürgten Verbesserungen des Mondradius und der Mondparallaxe erwartet werden können. Der Sinn der Mitnahme dieser Unbekannten war der, fehlerhafte Korrekturen wegen des Mondrandprofils dort zur Auswirkung zu bringen, d. h. aufzufangen, so daß sie sich in $\Delta\lambda$ nicht auswirken können. Die Richtigkeit dieser Überlegung wird sich bei dem späteren Vergleich der nach den beiden Methoden gewonnenen Ergebnisse zeigen. Im Absolutglied der Fehlergleichung gehen außer den Differenzen $\Delta\sigma$ bzw. Δk , die sich aus der Gegenüberstellung von Beobachtung und Berechnung ergeben, die Fehler der Mondephemeride und die Korrekturen wegen des Mondrandprofils ein. Die Fehlergleichung lautet dann:

$$k_0 \Delta k_0 + (Mm + Nn) \Delta\lambda + P \frac{\Delta\pi_0}{\sin \pi_0} = L - M\Delta\alpha - N\Delta\delta - k \frac{\Delta\omega'}{\sin \pi}.$$

Dabei bedeuten $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die Verbesserungen der Mondephemeride, die aus den vom Royal Greenwich Observatory in Herstmonceux gegebenen ΔL und ΔB , bezogen auf die Mondbahn, ermittelt werden müssen. $\Delta\omega'$ ist die Randkorrektur des Mondes, die für die zur Beobachtungszeit gehörende Libration und den Positionswinkel der Bedeckung den Kartenwerken von HAYN [10], WEIMER [11] oder WATTS [12] entnommen wird. Die Koeffizienten L , M , N , P haben die bei DE BALL [13] angegebene Bedeutung. Sie ergeben sich aus der Bedingungsgleichung für den »Schattenkreis« in der Besselschen Fundamentalebene

$$(x_0 + dx - \xi)^2 + (y_0 + dy - \eta)^2 = (k_0 + \Delta k)^2.$$

Dabei sind x_0, y_0 die für den Beobachtungszeitpunkt (TU_2) berechneten Koordinaten des Mondzentrums und ξ, η die astronomisch bestimmten auf ein Normalellipsoid bezogenen Koordinaten des Beobachtungsortes in bezug auf die Fundamentalebene. Nehmen wir nunmehr fürs erste an, daß die Lotabweichung in φ für den Beobachtungsort verschwindend ist. Es wird dann der den geodätischen (lotabweichungsfreien) Koordinaten entsprechende Ort in der Fundamentalebene die gleichen Koordinaten ξ, η zu einem Zeitpunkt haben, der sich von dem Beobachtungszeitpunkt um den Betrag $\Delta\lambda$ unterscheidet. Dabei ist $\Delta\lambda$ die Lotabweichung in Länge, ausgedrückt im Zeitmaß. Die diesem Zeitabschnitt entsprechenden Änderungen der Koordinaten des Mondzentrums in der Fundamentalebene sind dx und dy . Sie müssen die Bedingungsgleichung des Schattenkreises erfüllen. Ihre Beziehungen zu den Änderungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der äquatorialen geozentrischen Koordinaten des Mondzentrums werden durch die Koeffizienten der Fehlergleichung vermittelt. Für den sicherlich vorliegenden Fall, daß $\Delta\varphi$ von Null etwas verschieden ist, gibt dieses Verfahren im einzelnen Fall natürlich fehlerhafte Resultate; im Mittel aus einer großen Zahl von Sternbedeckungen wird der Einfluß von $\Delta\varphi$ jedoch fast völlig herausfallen, da dann alle Lagen der scheinbaren Mondbahn in Bezug auf den Stern vorkommen werden, je größer die Zahl desto besser verteilt. Ich habe dieses eigentlich für Längenbestimmungen gedachte Verfahren für den vorliegenden Zweck angewandt, weil nur geozentrische Werte in die Koeffizienten der Fehlergleichung eingehen, weil es mir in übersichtlicher Weise zu gestatten schien, nur die Lotabweichung in Länge zu berücksichtigen, und vor allem, weil der größte Teil der für die Berechnung der Koeffizienten nötigen Daten von H. KRÜGER in Potsdam bereits fertig berechnet vorlag. Die Aufstellung der Fehlergleichungen war somit relativ rasch zu bewerkstelligen. Die Hauptarbeit bestand in der Ermittlung der Randkorrekturen, wozu zunächst die Librationen zu berechnen waren. Die Positionswinkel lagen ebenfalls bereits vor. Das Randprofil wurde sowohl aus den Karten von HAYN [10] als auch denen von WEIMER [11] entnommen,

um Vergleichsmöglichkeiten zu haben. Es erwies sich, daß die Haynschen Karten den Weimerschen etwa ebenbürtig sind, obwohl letztere mit einem bedeutend größeren Instrument und wesentlich mehr Material erhalten wurden. Aus den Differenzen der 58 Korrekturen der Randpunkte, für die aus beiden Kartenwerken $\Delta\omega'$ entnommen werden konnten, ergibt sich ein m. F. von $\pm 0,31$ für eine Profilentnahme, wenn beide Kartenwerke als gleich genau angenommen werden. Gibt man Hayns Genauigkeitsangabe von $\pm 0,25$ vor, so würde der Weimersche Atlas, für den vom Autor leider keine Genauigkeitsangaben gemacht werden, nur $\pm 0,36$ erreichen. So erstaunlich immer wieder die hohe Zuverlässigkeit der Haynschen Arbeiten ist, so ist auf der anderen Seite doch die Kenntnis des Mondrandprofils noch recht mangelhaft für die vorliegende Aufgabe, und ein Erfolg ist auch bei einem objektiven Beobachtungsverfahren (Registrierung des Photostroms, den der Bedeckungsstern erzeugt) nur durch eine große Häufung von Beobachtungen zu erwarten. Leider lag zur Zeit der Durchführung der Rechnungen der inzwischen erschienene Atlas des Mondrandprofils von WATTS [12] noch nicht vor.

Die Berechnung der Librationen, Entnahme der Randkorrekturen, Berechnung der Koeffizienten, Aufstellung der Fehlergleichungen, Berücksichtigung der persönlichen Gleichung und Ermittlung der Verbesserungen $\Delta\lambda$, $\Delta\pi_0$ und Δk_0 sowie auch die Rechnungen nach dem im folgenden beschriebenen Näherungskontrollverfahren hat Herr G. LANDMANN in Berlin im Rahmen seiner Diplomarbeit als Fernstudent an der TU Dresden nach meiner Anleitung durchgeführt, wofür ihm auch an dieser Stelle gedankt sei.

Das erwähnte Näherungsverfahren geht wieder von der Bedingungs-gleichung des »Schattenkreises« in der Fundamentalebene aus

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \sigma^2.$$

wenn σ der aktuelle Mondradius in Bogensekunden ist. Diese Gleichung führt zu Widersprüchen $\Delta\sigma = \sigma' - \sigma$ für jede einzelne Sternbedeckung. Diese $\Delta\sigma$ werden nun in eine Komponente in Richtung der Mondbewegung und in eine senkrecht dazu zerlegt, nach der Beziehung

$$\Delta\sigma = p\Delta L' + q\Delta B'.$$

Bezeichnet man mit ϱ den Positionswinkel der Mondbewegung und mit \varkappa den Positionswinkel des Sterns, so ist

$$p = \cos(\varrho - \varkappa) \quad \text{und} \quad q = \sin(\varrho - \varkappa).$$

Auch diese Größen lagen in Potsdam bereits fertig berechnet vor, so daß die Kontrollrechnung nur in einer Bestimmung der $\Delta L'$ und $\Delta B'$ durch

Ausgleichung, für jeden Jahresabschnitt gesondert, bestand. Die so ermittelten L' wurden den vom Sternbedeckungszentrum in Herstmonceux zur Verfügung gestellten [14] L gegenübergestellt und die Differenzen $\Delta L = L' - L$ über die mittlere Mondbewegung in Zeit verwandelt. Unter den bei der ersten Methode gemachten Voraussetzungen wird im Mittel aus einer großen Zahl von Sternbedeckungen dieser Zeitunterschied gleich der Lotabweichung in Länge für den Beobachtungsort sein, wobei hier noch hinzukommt, daß die Bewegungsgeschwindigkeiten des Mondes in der Bahn so verteilt sein müssen, daß sich die mittlere Bewegung ergibt, mit deren Reziproken die ΔL multipliziert werden. Es werden sich also Unterschiede zwischen den nach der ersten und nach der zweiten Methode gewonnenen Lotabweichungen ergeben. Die Rechnungen zeigten, daß diese Abweichungen zunächst unverhältnismäßig groß waren. Sie wurden wesentlich geringer, wenn an die $\Delta\sigma$ die bei der ersten Lösung erhaltenen Δk_0 angebracht wurden. Damit ist die oben behauptete Zweckmäßigkeit der Aufnahme einer Verbesserung des Mondradius erwiesen. Δk_0 stellt keine Verbesserung des mittleren Mondradius dar, sondern gestattet lediglich den Umstand zu berücksichtigen, daß die angebrachten Korrekturen für die aktuellen Randpunkte nicht auf den mittleren Mondradius führen.

Die Ergebnisse (für $\Delta\lambda$ umgerechnet in Bogensekunden) zeigt die folgende Zusammenstellung:

Jahr	1. Verf. $\Delta\lambda$	2. Verf. $\Delta\lambda$	2. Verf. $\Delta\lambda$ korr. weg. Δk_0	$\Delta k_0 \cdot 10^{-6}$	$\Delta\sigma_0$
1955	$+0,87 \pm 9,9$	$+8,19$	$+2,18 \pm 6,6$	$+ 84 \pm 86$	$+0,10 \pm 0,42$
1956	$-5,19 \pm 12,0$	$-4,10$	$-4,10 \pm 6,8$	$+ 3 \pm 105$	$+0,07 \pm 0,62$
1957	$-13,50 \pm 14,8$	$-7,10$	$-11,74 \pm 9,8$	$+ 97 \pm 121$	$+0,44 \pm 0,58$
1958	$+1,08 \pm 8,4$	$+2,46$	$+ 0,27 \pm 7,1$	$+ 90 \pm 73$	$-0,85 \pm 0,41$
1959	$- 3,45 \pm 6,2$	$-5,73$	$- 5,73 \pm 4,1$	$- 16 \pm 30$	$+ 0,20 \pm 0,27$
Mittel	$- 4,8 \pm 4,4$	$-1,3$	$- 3,8 \pm 4,8$	$+ 54 \pm 35$	$+ 0,02 \pm 0,17$

Die Mittelwerte und ihre mittleren Fehler wurden aus einer Ausgleichung des Gesamtmaterials erhalten. Für die Schlußbetrachtungen sollen nur diese Mittelwerte hinzugezogen werden.

Nach Ausweis der mittleren Fehler können die Ergebnisse kaum dem Vorzeichen nach als gesichert gelten. Die Reihe der Einzelwerte zeigt jedoch, daß $\Delta\lambda$ negativ sein muß. Um einen Vergleich mit den auf gravimetrischem Wege über die Stokes'sche Formel erhaltenen Ergebnissen zu bekommen, berechnen wir $\eta = -\Delta\lambda \cos \varphi$ und erhalten im Vergleich zu den Ergebnissen von WOLF [6], HOPMANN [7] und ARNOLD [8] aus Sternbedeckungen

	η
1. Verfahren	+ 2 ⁹ ± 2 ⁷
2. Verfahren	+ 2 ³ ± 3 ⁰

aus Schwerewerten

H. WOLF	+ 1 ³
J. HOPMANN	+ 2 ⁴
K. ARNOLD	+ 1 ⁹

Die Werte beziehen sich auf das Hayford-Erdellipsoid und auf die alte konventionelle Länge von Potsdam.

Die Übereinstimmung der gravimetrisch und geometrisch ermittelten Werte ist unerwartet gut. Die mitgeteilten mittl. Fehler bewahren freilich davor, dieser Übereinstimmung zu viel Wert beizumessen. Sie ermutigen jedoch den Verfasser, die Versuche mit verbesserten Hilfsmitteln fortzusetzen. Am Lohrmann-Institut der Technischen Universität Dresden wurde am 30cm Refraktor eine lichtelektrische Apparatur adaptiert, mit der in den letzten Monaten bereits ein halbes Dutzend Bedeckungen hellerer Sterne erfaßt werden konnten. Die Genauigkeit ist besser als $\pm 0,01$ und gestattet, die Winkeldurchmesser der Sterne abzuleiten, soweit es sich um Riesensterne handelt. Eine zweite derartige Apparatur wird im kommenden Jahr vom Geodätischen Institut Potsdam übernommen und an einem größeren Fernrohr adaptiert werden. Damit ist die zeitliche Erfassung des Phänomens mit aller wünschenswerten Genauigkeit und frei von systematischen Fehlern gesichert. Ein Problem bleibt nach wie vor die Erfassung der Mondrandkorrektur, doch ist zu hoffen, daß der Atlas von WATTS [12], der jetzt in Potsdam vorliegt, eine wesentliche Genauigkeitssteigerung bringen wird. Die Ungenauigkeiten in der Kenntnis des Mondrandprofils werden jedoch nach wie vor eine große Häufung von Sternbedeckungen erforderlich machen, bevor ein hinreichend gesicherter Wert der Lotabweichung angegeben werden kann.

SCHRIFTTUM

1. O'KEEFE, J. A. und ANDERSON, J. P.: *Bull. geod.* 1953. Nr. 29, 219—248.
2. *Astron. Journ.* **63**, 291—295 (1958).
3. HOPMANN, J.: *Veröff. d. Inst. f. Erdmessung Bamberg* Nr. 12, 75—125 (1950).
4. KRÜGER, H.: *Astron. Nachr.* 284. 183 (1958) und 286. 90 (1960).
5. KRÜGER, H.: *Astron. Nachr.* 284. 183 (1958).
6. WOLF, H.: *Veröff. d. Inst. f. Erdmessung Bamberg*, Nr. 6 (1949).
7. HOPMANN, J.: *Veröff. d. Inst. f. Erdmessung Bamberg* Nr. 12, 78 (1950).
8. ARNOLD, K.: *The European Datum. Bol. da Univers. do Parana, Geodesia*, 1962, Nr. 4 (dort auch weitere Literatur).
9. BERROTH und HOFMANN, *Kosmische Geodäsie*, Karlsruhe 1960, S. 273 f.
10. HAYN, F.: *Selenographische Koordinaten IV, Abh. d. Kön. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Kl.* 33 Leipzig 1914.
11. WEIMER, T.: *Atlas de Profils Lunaires*. Observatoire de Paris (1951).
12. WATTS, C. B.: *The Marginal Zone of the Moon*. *Astron. Papers of the American Ephemeris XVII* (1963), Washington.
13. L. DE BALL: *Lehrbuch der Sphärischen Astronomie*, Leipzig (1912) S. 297.
14. *Astron. Journ.* 1958, S. 244 und 1960, S. 102, sowie für 1958 und 1959 briefliche Mitteilung.

THE DETERMINATION OF THE POTSDAM DEFLECTION OF THE PLUMBLINE η
FROM STAR OCCULTATIONS BY THE MOON

H. U. SANDIG

SUMMARY

From 73 occultations of stars by the moon observed visually between 1955 and 1959 the component η of the (absolute) deflection of the plumbline is derived for the Helmert-Turm at Potsdam (European Datum) with respect to the Hayford Ellipsoid. The corrections for the marginal Zone were taken from the charts of HAYN and WEIMER. The results obtained by two different methods (+2,9 and +2,3) are in sufficient correspondence with the results derived from gravimetric data.

DÉTERMINATION DE LA DÉVIATION DE LA VERTICALE η DE POTSDAM,
SUR LA BASE DE L'OCCULTATION D'ÉTOILES

H. U. SANDIG

RÉSUMÉ

Sur la base de 73 occultations d'étoiles observées visuellement entre les années 1955 et 1959, et en considération du profil de la lune selon HAYN et WEIMER, on déduit la déviation (absolue) de la verticale η pour la Helmert-Turm de Potsdam (donnée européenne) en relation avec l'ellipsoïde Hayford. Les valeurs calculées selon deux procédés différents (+2,9 et +2,3) sont en accord satisfaisant avec les valeurs d'autres auteurs calculées par gravimétrie.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА η ДЛЯ ПОТСДАМА ПО
ПОКРЫТИЯМ ЗВЕЗД

H. U. SANDIG

РЕЗЮМЕ

На основе 73 покрытий звезд Луной, определенных визуальным методом за период 1955—1959 гг. с учетом профиля края Луны по Хайну и Веимеру, выводится (абсолютное) отклонение отвеса η для башни Гельмерта в г. Потсдаме (Европейская дата) по отношению к эллипсоиду Хейфорда. Значения, полученные двумя методами (+2,9" и +2,3") хорошо совпадают со значениями, определенными другими авторами гравиметрическим способом.

ÜBER MARKSCHEIDERISCHE MESSERGEBNISSE ZUR FESTSTELLUNG DER DURCH BERGMÄNNISCHEN ABBAU VERURSACHTEN GEBIRGSBEWEGUNGEN

H. SPICKERNAGEL, Leoben

[Eingegangen am 31. März 1965]

In den folgenden Untersuchungen wird über die Auswertung von markscheiderischen Messungen berichtet, die zur Beobachtung von abbaubedingten Punktbewegungen unter Tage durchgeführt worden sind. Die Messungen waren angesetzt, um einen Beitrag zu der für das Forschungsgebiet der Bergschadenkunde so bedeutsamen Frage zu leisten, ob die zur Vorausberechnung der an der Tagesoberfläche zu erwartenden Einwirkungen des bergmännischen Abbaues entwickelten Vorstellungen ohne Einschränkung übertragbar sind auf den Bewegungsablauf, der sich im Gebirgsinneren vollzieht.

Die mitgeteilten Ergebnisse betreffen nur die vertikale Komponente des Bewegungsablaufes, weil weitergehende Untersuchungen den Umfang der Arbeit zu sehr vergrößert haben würden.

Mit dem unterirdisch betriebenen bergmännischen Abbau einer Lagerstätte ist zwangsläufig eine Störung des in dem betroffenen Gesteinsschichtenverband (nach bergmännischem Sprachgebrauch: Gebirgsschichtenverband) vor Beginn des Abbaus allseitig herrschenden Spannungszustandes verbunden. Als Folge der hierdurch auftretenden Spannungsanomalien versuchen sich die mit Schaffung des Abbauhohlraums ihrer Unterstützung bzw. ihres Gegenlagers beraubten hangenden und liegenden Schichten der Lagerstätte in den Hohlraum hinein zu bewegen, um diesen schließlich wieder zu verfüllen. So wird durch den bergmännischen Abbau ein Bewegungsvorgang ausgelöst, der sich durch das anstehende Gebirge bis zur Tagesoberfläche fortsetzen kann und in der Regel auch fortsetzt. Unter dem Einfluß der damit verbundenen absinkenden und verschiebenden Lageveränderungen, der vertikalen und horizontalen Komponente des Bewegungsvorgangs, treten die von der Tagesoberfläche her bekannten Schäden, die sogenannten Bergschäden auf.

Auf dem Weg zwischen AbbauhORIZONT und Niveau der Tagesoberfläche durchlaufen die absinkenden Bewegungen die verschiedenartigsten Gebirgsschichten; verschiedenartig, sowohl hinsichtlich ihrer physikalischen Eigenschaften als auch ihres geologischen Schichtenaufbaus, ihres Schichteneinfallens und ihrer Mächtigkeit. So kommt es, daß die übertage sichtbar werdenden »Bodenbewegungen« durchaus nicht ident sein müssen mit den innerhalb des Gebirges stattfindenden Bewegungen der einzelnen Gebirgsschichten, den sog. »Gebirgsbewegungen«.

Will man die Kenntnisse über die als Folge des bergmännischen Abbaus eintretenden Boden- und Gebirgsbewegungen einer wenigstens in etwa all-

gemein anwendbaren Lösung zuführen, dann ist es unumgänglich, die einzelnen Parameter zu bestimmen, die den Ablauf der *u n t e r t ä g i g e n* Bewegungen, also der Gebirgsbewegungen, bestimmend beeinflussen. Zwar ist es angesichts ihrer Vielzahl und ihrer z. T. von Natur aus gegebenen wechselvollen Ausbildung zweifelhaft, ob es überhaupt gelingen wird, eine einzige, allgemein gültige Lösung des Problems zu finden; aber auch eine nur regional gültige Lösung, mit deren Hilfe wir in der Lage wären, den Ablauf der Bewegungen vom Niveau der abgebauten Lagerstätte bis zur Tagesoberfläche zu erfassen und im voraus zu bestimmen, würde vor allem auch für die Belange der Grubensicherheit sowie für die Erhaltung und Unterhaltung der Grubenbaue einen entscheidenden Fortschritt darstellen.

Es erhebt sich die Frage, welche Wege gangbar sind, um das gesteckte Ziel zu erreichen, bzw. ihm näher zu kommen. Hier fällt erschwerend ins Gewicht, daß es untertage nur an relativ wenigen Stellen möglich ist, den Ablauf der Gebirgsbewegungen zu messen. Allerdings ist es möglich, die Beobachtungen bis zu einem gewissen Grad durch Untersuchungen an geeigneten Modellen zu ersetzen. Dennoch aber können auch die umsichtigsten Modellversuche nicht der Meßergebnisse über die in der Natur tatsächlich stattgefundenen Bewegungen entbehren. Erst die Folgerungen, die sich bei vergleichender Betrachtung der in der Natur gemessenen Bewegungsabläufe mit den am Modell demonstrierten herausstellen, können schrittweise einen Ersatz für ein etwaiges Fehlen von Meßergebnissen in der zwischen der Tagesoberfläche und dem Abbauhorizont oft gegebenen Beobachtungslücke darstellen.

Wenn wir von den Meßverfahren absehen wollen, die nur eine relative Aussagekraft besitzen (z. B. Konvergenzmessungen), dann sind es vor allem die auch aus dem *ü b e r t ä g i g e n* Vermessungswesen her bekannten Meßverfahren, mit deren Hilfe die durch Lageveränderungen fixierter Meßpunkte sichtbar werdenden Bewegungen der Gebirgsschichten zu erfassen sind. Die in vermessungstechnischer Hinsicht einwandfreie Anwendung der Meßverfahren wird untertage allerdings in oft nicht vorzustellender Weise durch den Ablauf des Betriebsgeschehens sowie durch die Enge und Art der Grubenbaue erschwert; außerdem verlangt die Forderung nach einer unveränderten Lage des Messungsanschlusses eine häufige Wiederholung von Kontrollmessungen. Die oft extrem kurzen Polygonseiten zwingen zur Anwendung zwangszentrierter Winkelmessungen und zur Vermeidung von Fehlmessungen als Folge unbemerkt eintretender Refraktionseinflüsse empfiehlt sich vor allem in gashaltigen Lagerstätten eine Kontrolle des von den Messungen durchquerten Wetterstroms.

In vereinfachter Weise werden die zur Messung der Gebirgsbewegungen benötigten Festpunkte in der unmittelbaren Umgebung des Streb- oder Streckenhohlraums, also in der Firste und in der Sohle einer Strecke, vermarktet. Hierzu werden etwa 30 bis 50 cm lange Holzpflocke in Bohrlöcher eingetrieben

und in diesen wird der Meßpunkt markiert. Die an solchen Festpunkten gemessenen Bewegungen sind jedoch, wie vor allem durchgeführte Höhenmessungen erkennen lassen, nicht allein durch die als Folge des Abbaus eintretende Senkungsbewegung der Schichten bestimmt. Sie werden vielmehr gleichzeitig von anderen Einwirkungen überlagert, deren Ursache in Druckauswirkungen zu erblicken ist, die eine Folge der durch die Senkung der Gebirgsschichten gleichzeitig hervorgerufenen Bruchbewegungen des den Streckenhohlraum umgebenden Gesteinsmantels darstellen. Bei Meßergebnissen, die an solcherweise vermarkten Festpunkten erzielt werden, besteht daher die Aufgabe darin, die unterschiedlichen Einflüsse der Senkungsbewegung von den durch Druckauswirkungen verursachten Bewegungen voneinander zu trennen.

Im nachfolgenden sollen als erstes Ergebnisse von Messungen diskutiert werden, die wir auf Punkten durchgeführt haben, deren Vermarkung in der Umgebung einer Strecke erfolgte. Ferner sollen danach Höhenmeßergebnisse erörtert werden, die in einem mehr als 600 m tiefen Schacht zur Verfolgung des Senkungsvorgangs vom Niveau des Abbaus bis zur Tagesoberfläche erzielt wurden.

Die erstgenannten Meßergebnisse wurden ermittelt bei der Beobachtung eines Querschlags in 600 m Teufe (= -530 m NN), der mit einem rund 250 m langem Streb in geringem vertikalem Abstand von etwa 10–40 m unterbaut wurde. Der Abbau erfolgte in einem rund 155 cm mächtigen Steinkohlenflöz mit einem mittleren Schichteneinfallen von 15^g; es wurde ohne Versatz gebaut.

Die Anzahl der vermarkten Punktpaare betrug 29. Von diesen konnten jedoch 7 Punktpaare (Nr. 21 bis 29) nach der dritten Messung nicht mehr beobachtet werden, weil der Querschlag aus Gründen der Wetterführung hinter dem Punkt 22 zugesetzt werden mußte. Die Punktpaare 12 und 13 konnten nur 7mal beobachtet werden, weil sie danach infolge eines Streckenbruchs vorzeitig fortfielen. Die Beobachtungsmessungen erstreckten sich über einen Zeitraum von insgesamt 1 Jahr und 5 Monaten. In dieser Zeitspanne wurden die Messungen 18mal durchgeführt. Zur Zeit der stärksten Einwirkungen wurden die Messungen in Abständen von je 14 Tagen wiederholt.

Lage und Schnitt des Abbaus zeigen Abb. 1 und 1a. Die Auswertung der Messungen ließ erwartungsgemäß erkennen, daß der nördliche Teil der Beobachtungslinie, das sind die Punktpaare 1 bis 11, Bewegungen erfuhren, die nur von den Druckauswirkungen des Streckenhohlraums bestimmt wurden. Aus diesem Grund sollen die Punktpaare 1 bis 11 hier nicht näher betrachtet werden.

Aber auch bei der Punktfolge 14 bis 22 zeigen sich neben den Auswirkungen des Senkungsvorgangs noch solche Bewegungen, die durch dynamische Auswirkungen gekennzeichnet sind. Verständlicherweise zeigen sich die Druckauswirkungen umso stärker, je intensiver die Abbaueinwirkungen auf die

kungen bei den weiter nach Süden vermarkten Beobachtungspunkten in geringerem Maße zeigten als bei den weiter nach Norden hin vermarkten Punkten. Auch schon die Feststellung, daß die beiden nördlich gelegenen Punktpaare 12 und 13 als Folge eines Streckenbruchs vorzeitig ausfielen, bestätigte diese Erwartung; und die Meßergebnisse über die an den Punkten 14 bis 22 stattgefundenen Bewegungen bestätigen diese Tendenz.

In den Abb. 2a—c sind gleichzeitig als Beispiel für die an den übrigen Punkten gemessenen Bewegungen die an den Punktpaaren 14, 17 und 21 gemessenen Senkungsabläufe wiedergegeben. Für jedes Punktpaar ist die verti-

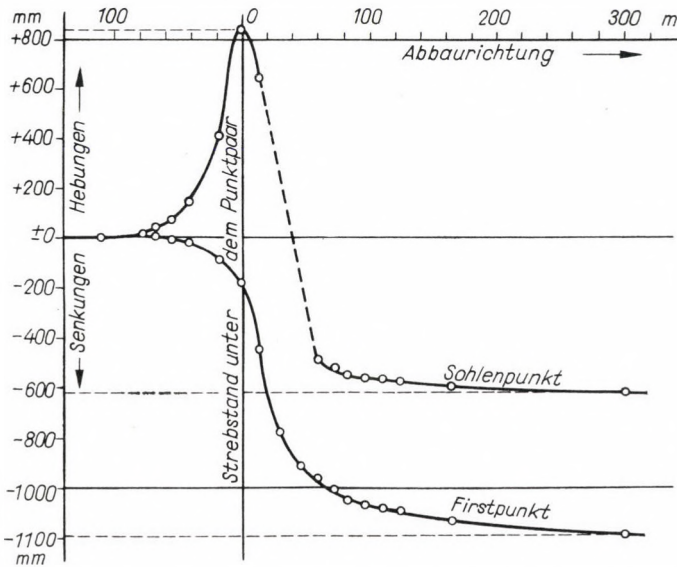


Abb. 2a. Senkungsverlauf am Punktpaar 14

kale Lageveränderung des in der Sohle und des in der Firste des Querschlags vermarkten Punktes getrennt dargestellt.

Am Punkt 14 zeigt der in der Streckensohle angebrachte Festpunkt, der 16 m über dem Abbau-Horizont lag, zu Beginn der Abbaueinwirkungen unter dem Einfluß der Verformungskräfte eine stark aufwärts gerichtete Bewegung. Diese erreicht zu dem Zeitpunkt, in dem das Punktpaar durch den Streb unterfahren wird, eine maximale Hebung von rund 840 mm. Der in der Streckenfirste angebrachte Beobachtungspunkt hingegen zeigt nur zu Beginn des Bewegungsablaufs eine sehr geringe, innerhalb der Meßgenauigkeit liegende, scheinbare Aufwärtsbewegung, um anschließend einer eindeutigen Abwärtsbewegung zu folgen. Diese hatte zu dem Zeitpunkt der Strebunterfahrung schon eine Größe von fast 180 mm erreicht, so daß sich unter dem Einfluß der Abbaueinwirkungen die Streckenhöhe im Bereich des Punktpaares 14 um mehr als 1000 mm verringert hatte.

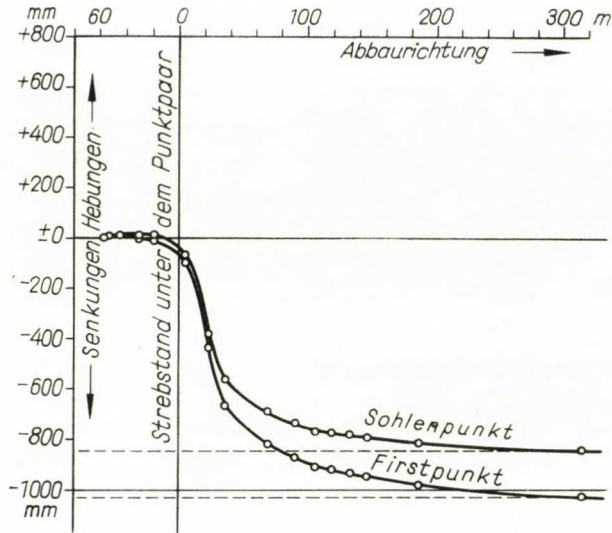


Abb. 2b. Senkungsverlauf am Punktpaar 17

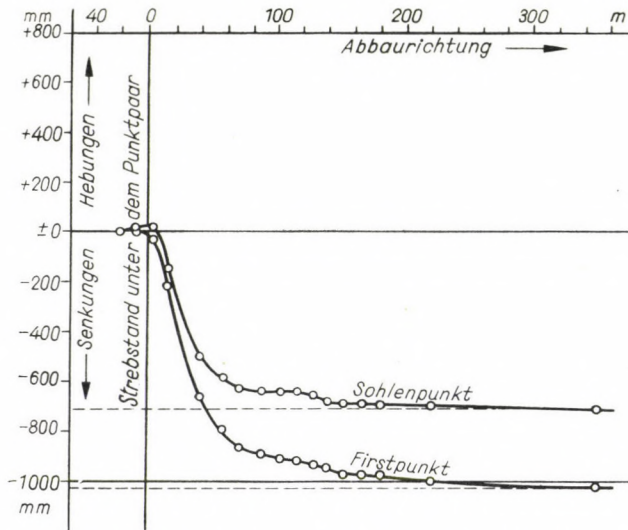


Abb. 2c. Senkungsverlauf am Punktpaar 21

Nach Überschreiten des Hebungsmaximums zeigt sich auch an dem in der Streckensohle vermarkten Punkt der Beginn einer steil abwärts führenden Senkungskurve. Allerdings konnte diese nicht weiter verfolgt werden, weil die durch die Hebung der Streckensohle eingetretenen Erschwernisse für den Förderbetrieb so sehr störten, daß der Querschlag durchgesenkt werden mußte,

womit die Beobachtung des Sohlenpunktes eine Unterbrechung erfuhr. Die Auswertung der später nach Erneuerung des Punktes durchgeführten Messungen läßt erkennen, daß bei größerer Entfernung des Strebstandes beide Meßpunkte eine annähernd gleichgerichtete Bewegung erfahren.

Aus dem für das Punktpaar 17 (Abb. 2b) gezeigten Senkungsverlauf ist zu erkennen, daß die Hebung der Streckensohle vernachlässigbar gering ist. Auch das Punktpaar 21 (Abb. 2c) zeigt einen ähnlichen Senkungsablauf wie das Punktpaar 17.

Wenngleich die Hebung der Streckensohle ab Punktpaar 17 nur noch sehr gering in Erscheinung tritt, so ist dennoch übereinstimmend bei allen Beobachtungspunkten ein großer, verbleibender Senkungsunterschied zwischen den in der Streckenfirste und den in der Streckensohle vermarkten Punkten festzustellen. Dieser Unterschied stellt eine echte Folge der Druckauswirkungen dar, die auch nach Beginn des Senkungsvorgangs noch eine anhaltende relative Aufwärtsbewegung der Streckensohle verursachen. Sie kommt in Form einer gegenüber dem Firstpunkt geringeren Absenkung der Streckensohle zum Ausdruck.

Es ist nun die Frage von Bedeutung, ob auch die in der Streckenfirste vermarkten Beobachtungspunkte unter dem Einfluß der Druckauswirkungen vertikale Lageveränderungen erfahren haben. Einwirkender Abbaudruck hätte sich durch eine zusätzliche Abwärtsbewegung der Streckenfirste in den Streckenhohlraum hinein auswirken müssen, so daß eine Vergrößerung der schon als Folge der Schichtenabsenkung zu erwartenden Senkung eingetreten wäre. Zur Prüfung dieser Frage haben wir Senkungsvorausberechnungen durchgeführt, die für alle Beobachtungspunkte ein rechnerisches Senkungsmaximum von 1400 mm ergeben haben. Die tatsächlich gemessenen Senkungen liegen aber im Maximum nur zwischen 977 und 1207 mm und die mittlere maximale Senkung beträgt demnach 1070 mm. Die gemessene Senkung ist also nicht größer als die rechnerisch zu erwartende, sondern sie liegt um mehr als 300 mm unter dem errechneten Betrag. Diese Feststellung zeigt, daß die in der Streckenfirste angebrachten Punkte nicht nur keine durch Druckauswirkungen verursachte zusätzliche Absenkung erfahren haben, sondern ganz erheblich hinter den »Sollwerten« der Senkungen zurückgeblieben sind.

Das vorstehend genannte Ergebnis stellt keinen Einzelfall dar. HOFFMANN [4], GRÄBSCH [2] und wir selbst [6] haben über das Zurückbleiben der untertage gemessenen Senkungsbeträge gegenüber den rechnerisch zu erwartenden wiederholt berichtet. Wir konnten diese Erscheinung auch bei Beobachtungspunkten feststellen, deren Vermarkung außerhalb der den Streckenhohlraum umgebenden Lockerungszone erfolgt war, die also nicht von dynamischen Auswirkungen betroffen wurden. Angesichts der besonderen Bedeutung, die diese zunächst überraschende Feststellung z. B. für die Abbauplanung im Bereich von Schachtsicherheitspfeilern besitzt, haben wir an ande-

rer Stelle [7] den Vorgang näher untersucht. Damals schon haben wir die Auffassung vertreten, daß der Senkungsunterschied auf eine im Gebirge vorübergehend verbleibende Schichtenauflockerung zurückzuführen ist, die erst bei weiterer Ausdehnung des Abbaus rückgebildet wird. Mit dieser Auffassung stimmen zwar auch einige andere Autoren, wie z. B. HAUSSE [3], FAYOL [1] und KÖHNE [5] u. a. überein; es werden in der Literatur aber auch gegenteilige Meinungen vertreten. Für den Fall, daß die Deutung einer vorübergehenden Schichtenauflockerung zu Recht bestehen würde, wäre aus ihr weiterhin zu folgern, daß die für die Tagesoberfläche zur Vorausberechnung von Bodensenkungen entwickelten Vorstellungen nicht ohne weiteres auf Berechnungen anzuwenden sind, die der Bestimmung der innerhalb des Gebirgskörpers zu erwartenden Bewegungen dienen sollen.

Es soll deshalb an Hand von Meßergebnissen die Frage der vorübergehenden Schichtenauflockerung als Folge des bergmännischen Abbaus noch näher untersucht werden. Den Ergebnissen liegen Höhenmessungen zugrunde, die wir in einem über 600 m tiefen zu Tage führenden Schacht eines Steinkohlenbergwerks in Westfalen durchführen konnten.

Bei den damaligen Messungen lag der im Ruhrgebiet relativ seltene Fall vor, daß von einem neu abgeteuften Schacht aus in einem bisher unverritzten Feld der bergmännische Abbau in einem einzelnen Flöz erstmalig begonnen wurde. Vor der Aufnahme des Abbaus wurde in dem Schacht eine aus 25 Punkten bestehende Beobachtungslinie angelegt.

Die Höhenmessungen wurden mit Hilfe eines 300 m langen eingehängten Schachtteufenmeßbandes unter Beachtung der für Präzisionsmessungen dieser Art notwendigen Maßnahmen durchgeführt. Der mittlere Teufenfehler je 300 m Meßbandlänge wurde bei den durchgeführten Messungen ziemlich konstant mit ± 8 mm bestimmt.

Im Rahmen dieser kurz gefaßten Abhandlung sollen lediglich die Meßergebnisse besprochen werden, die über den Senkungsablauf der Punkte 1—20 (Abb. 3) Auskunft geben. Von den Punkten lag die Punktfolge 1—18 oberhalb des abgebauten Flözes, während der Punkt 20 um 15 m tiefer als der Abbau in der Schachtsäule vermarkt war. Der 11 m über dem Abbau vermarktete Punkt 19 soll unberücksichtigt bleiben, weil seine Lageveränderung sehr stark von dynamischen Auswirkungen bestimmt wurde. Ferner sollen nur die Ergebnisse für jeden 2. Punkt der Beobachtungslinie behandelt werden.

Über die Ergebnisse der insgesamt 11mal durchgeführten Messungen gibt die Zahlentafel I Auskunft. Schon auf den ersten Blick ist zu erkennen, daß die Größe der Senkungen in starkem Maße von der Höhenlage des Beobachtungspunktes abhängig ist. Das Gebirge sinkt über dem Abbauhohlraum nicht in Form eines in sich geschlossenen ganzen Blocks nach, sondern ganz offensichtlich mit einer aus den Senkungsunterschieden ablesbaren Schichtenauflockerung, die ihr Maximum bei der 6. Messung zwischen den Punkten

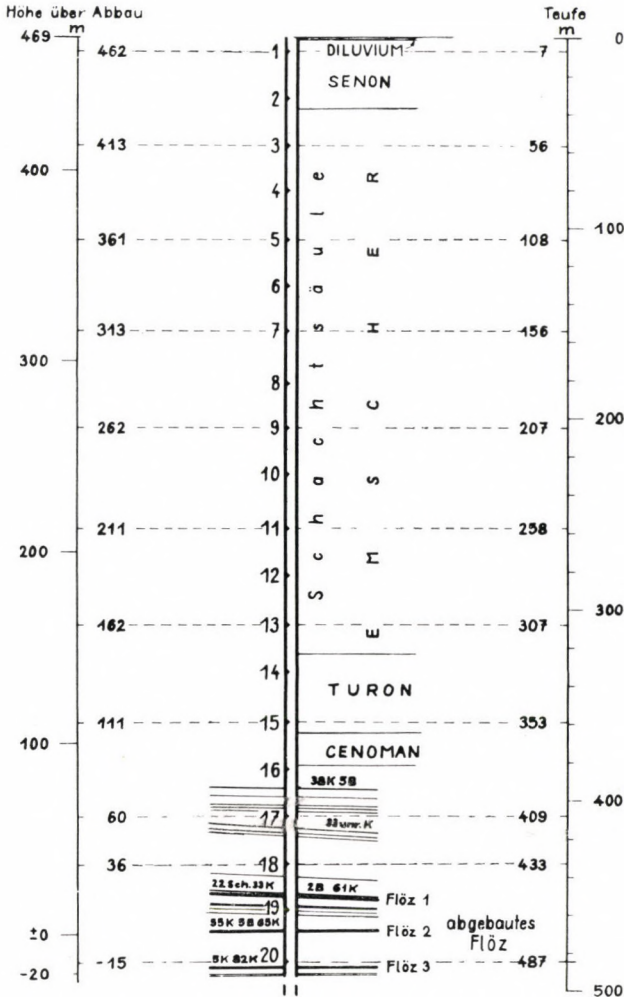


Abb. 3. Schachtschnitt mit Lage der Meßpunkte

15 und 17 erreichte. Hier, in der Höhenlage zwischen 111 und 60 m über dem Abbau erreicht die Auflockerung der Gesteinsschichten 86 mm. Sie macht auf 51 lfm bezogen, 1,7 mm je lfm aus, was einem Verhältnis von rund 2‰ entspricht. Allerdings wird sich die Auflockerung nicht in dieser durch die Verhältniszahl angegebenen Gleichmäßigkeit über den ganzen Gebirgsschichtenverband verteilen; sie wird vielmehr an einzelnen Schichtfugen größere Beträge erreichen und das zwischen den Fugen liegende Gesteinsmittel gar nicht oder nur wenig beanspruchen. Auch läßt sich aus der Zahlentafel I die Größe der in der Umgebung des Abbaus in der Schachtsäule auftretenden Kürzungen ablesen, die hier bis zu einem Betrag von 2‰ anwachsen. Es sei schließlich

auch noch auf das Verhalten des Punktes 20 hingewiesen, der unter dem Einfluß der Expansivkraft des Gesteinsverbandes eine vorübergehende Aufwärtsbewegung, also eine Hebung in den Abbauhohlräum hinein erfährt, die einen Höchstwert von 69 mm erreicht.

Vergleicht man den Ablauf der an den einzelnen Punkten gemessenen Senkungsbeträge miteinander, wobei man die Endsenkungen jeweils gleich 100% setzt, dann läßt sich für alle Punkte eine recht gut übereinstimmende Tendenz des Senkungsablaufs erkennen (s. Abb. 4).

Zahlentafel I

Beob.- Pkt.	Höhenlagen:		Ergebnisse (Senkungen: -, Hebungen: +) der					
	Über d. Abbau	Unter d. Tagesoberfl.	4.	6.	8.	9.	10.	11.
			M e s s u n g					
	m	m	mm	mm	mm	mm	mm	mm
1	+462	- 7	- 45	-158	-315	-489	-715	-755
3	+413	- 56	- 47	-160	-318	-496	-717	-758
5	+361	-108	- 52	-168	-333	-513	-724	-764
7	+313	-156	- 54	-176	-361	-535	-740	-774
9	+262	-207	- 63	-194	-370	-549	-743	-776
11	+211	-258	- 75	-220	-401	-579	-743	-774
13	+162	-307	- 92	-255	-432	-600	-745	-762
15	+111	-358	-117	-296	-459	-613	-739	-755
17	+ 60	-409	-174	-382	-495	-611	-711	-724
18	+ 36	-433	-213	-395	-501	-611	-733	-747
19	+ 11	-458	+ 12	+ 4	- 28	- 91	-338	-350
H ö h e n l a g e d e s A b b a u s								
20	- 15	-484	+ 69	+ 65	+ 51	+ 18	- 8	-11

Es sei nun die Frage erörtert, ob die Begriffe für die Senkungsvorausberechnung, wie sie für die Tagesoberfläche entwickelt worden sind, auch auf die hier in der Schachtsäule und damit innerhalb des Gebirges vermarkten Beobachtungspunkte anwendbar sind. In den nicht näher zu erörternden Rechenverfahren spielt der sog. Einwirkungsfaktor eine besondere Rolle. Dieser berücksichtigt die Erfahrung, daß ein im Schwerpunkt der »Einwirkungsfläche« liegender Abbau eine größere Senkung hervorruft als eine gleich große am Rand gelegene Abbaufäche.

Die Tatsache, daß zwischen der Entwicklung des Einwirkungsfaktors und dem Senkungsverlauf eine gesetzmäßig erscheinende Abhängigkeit besteht, geht auch aus den in der Schachtsäule gemessenen Senkungsbeträgen hervor. Aus den Abb. 5a und 5b, in denen für die Punkte 1 und 5 die gemessenen

Senkungen den für die gleichen Beobachtungspunkte jeweils ermittelten Anteilen des Einwirkungsfaktors gegenübergestellt sind, ist dieses Verhalten gut zu erkennen. Auch für alle übrigen Punkte der Beobachtungsreihe zeigte sich ein gleichartiger Vorgang.

Will man nun die Frage untersuchen, ob sich die für die Tagesoberfläche entwickelten Rechenverfahren auf die unter Tage vorliegenden Verhältnisse ohne weiteres übertragen lassen, dann ist es notwendig, zu prüfen, ob die durch Rechnung erhaltenen Größen der Senkungsbeträge in befriedigender Weise mit den gemessenen Werten übereinstimmen.

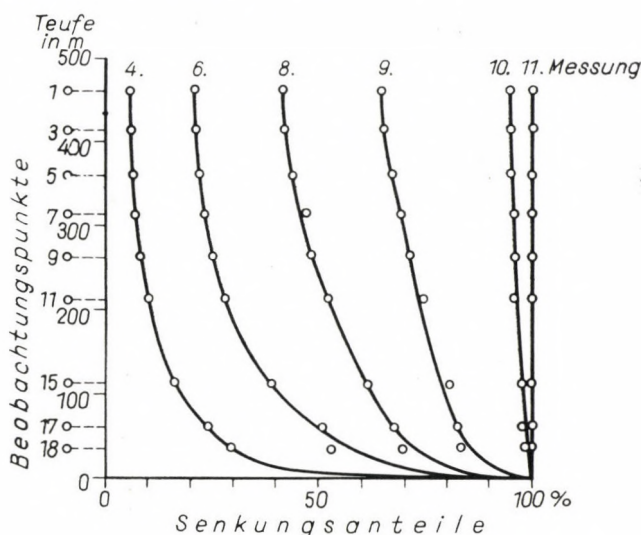


Abb. 4. Senkungsanteile der Beobachtungspunkte je Messung

Schon bei der Besprechung der in den Abb. 2a bis 2c wiedergegebenen Senkungen wurde festgestellt, daß die in dem Querschlag gemessenen Senkungsbeträge bei weitem nicht die Größe erreichten, wie sie sich nach Berechnung hätte einstellen müssen. In gleicher Weise liegen auch die in der Schachtsäule gemessenen Senkungsbeträge zumindest für die tief gelegenen Punkte der Beobachtungslinie erheblich niedriger, als aus den Größen des die Entwicklung der Abbaufäche kennzeichnenden Einwirkungsfaktors e gefolgert werden mußte. Zwar wäre es möglich, die Unterschiede rechnerisch durch Einführung eines »Zeitfaktors« auszugleichen; die hierzu angestellten Untersuchungen haben jedoch ergeben, daß solche Zeitfaktoren bei der Anwendung unter Tage fast für jede Bezugshöhe andere Größen erhalten müßten. Außerdem würde die Einfügung in rechnerischer Hinsicht einen Ringschluß darstellen. Aus diesem Grund erscheint uns die Einführung eines nur für die jeweilige Teufe gültigen, nicht allgemein anwendbaren Zeitfaktors unzulässig und es

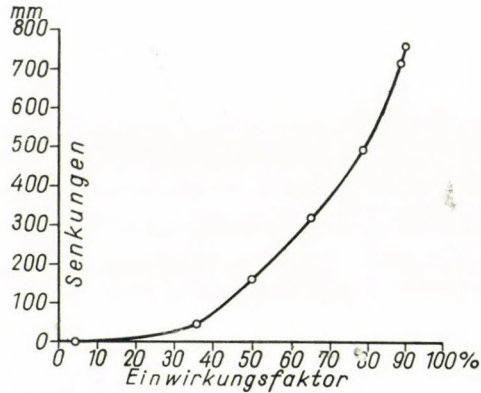


Abb. 5a. Abhängigkeit zwischen Senkungen und Einwirkungsfaktor, gemessen am Punkt 1

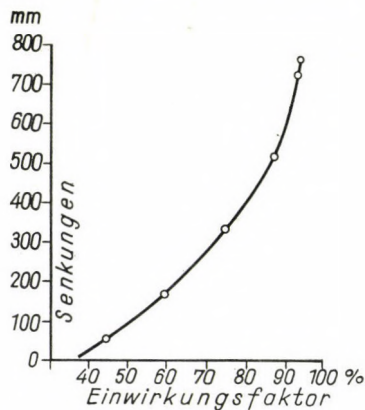


Abb. 5b. Abhängigkeit zwischen Senkungen und Einwirkungsfaktor, gemessen am Punkt 5

wird einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, die Problematik des Zeitfaktors noch näher zu betrachten.

Stellen wir nun die für die einzelnen Beobachtungspunkte ermittelten Einwirkungsfaktoren den gemessenen Senkungsbeträgen gegenüber, wie das die Abb. 6 erläutert, dann zeigt sich folgendes Ergebnis:

Für den rund 400 m unter dem Punkt 1 liegenden Meßpunkt 17 ergibt sich schon zum Zeitpunkt der 4. Messung die Größe des Einwirkungsfaktors mit 100%. Der zu dieser Zeit gemessene Senkungsanteil des Punktes macht aber nur 24% aus. Bei der 6. Messung (Einwirkungsfaktoren = 100%) erreichte der Senkungsanteil die Größe von 53%. Die Senkungsanteile liegen also erheblich niedriger als aus der Größe der für den Punkt 17 gültigen Einwirkungsfaktoren zu folgern war. Anders allerdings sieht die Rechnung aus, wenn die gemessenen Senkungsanteile des Punktes 17 ins Verhältnis gesetzt werden zur Größe der für dieselben Zeitabschnitte ermittelten Einwirkungsfaktoren

für den tagesoberflächennahen Punkt 1. Hiernach ergibt sich nämlich für die 4. und 6. Messung in der Gegenüberstellung ein Einwirkungsfaktor von 36% bzw. 50% für den Punkt 1 und ein Senkungsanteil von 24% bzw. 53% für den Punkt 17. Für die Punkte 1 und 18 zeigt die Gegenüberstellung: 36% bzw. 50% Einwirkungsfaktor für den Punkt 1 und 27% bzw. 53% Senkungsanteil des Punktes 18.

Um die sich aus der vorstehend beschriebenen relativ guten Übereinstimmung bereits andeutende Schlußfolgerung weiter zu verdeutlichen, wurde der die Lage und Ausdehnung der Abbaufäche bewertende Einwirkungsfaktor

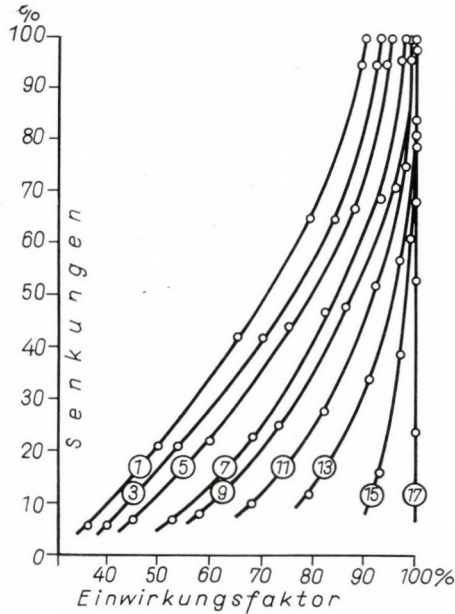


Abb. 6. Verhältnis zwischen Senkungen und Einwirkung der Abbaufäche (○ = Nummer des Beobachtungspunktes)

e für alle Beobachtungspunkte ermittelt und dem jeweiligen Senkungsanteil der Punkte gegenübergestellt. Das Ergebnis zeigt die Zahlentafel II, in der zum Ausgleich kleinerer Ungenauigkeiten ein etwas größerer Auswertemaßstab gewählt wurde. Dazu wurden die Endsenkungsbeträge und der volle Einwirkungs faktor von 100% jeweils in 15/15tel geteilt.

Aus einem Vergleich der in der Zahlentafel II wiedergegebenen Werte wird ersichtlich, daß der jeweilige Senkungsanteil der zu tiefst gelegenen Punkte, z. B. 15, 17 und 18, in keiner Weise übereinstimmt mit dem Verhalten der für diese Punkte ermittelten Faktoren *e*. Überraschenderweise zeigen dagegen die Senkungsanteile dieser Punkte in demselben Maß ein Anwachsen, wie der Einwirkungs faktor für den höchstgelegenen Punkt 1 größer wird. Für den Ablauf des Senkungsvorgangs der bis zu 426 m unterhalb des Punk-

tes I gelegenen Beobachtungspunkte ist demnach nicht etwa die Größe der auf die Höhenlage der einzelnen Punkte zu beziehenden Einwirkungsfaktoren maßgeblich, sondern die auf den nahe der Tagesoberfläche gelegenen Punkt I zu beziehende Ausdehnung des Abbaus.

In dieser auffallenden Abhängigkeit der Senkungen unter Tage von der Größe der für über Tage gültigen Einwirkungsfaktoren finden wir überzeugend

Zahlentafel II

Beob.- Pkt.	Höhen unter Tagesoberfl. m	A n t e i l e v o n e u n d s b e i d e r											
		4.		6.		8.		9.		10.		11.	
		M e s s u n g											
		e	s	e	s	e	s	e	s	e	s	e	s
1	— 7	5	1	8	3	10	6	12	10	13	14	14	15
3	— 56	6	1	8	3	10	6	13	10	13	14	14	15
5	—108	7	1	9	3	11	7	13	10	14	14	14	15
7	—156	8	1	10	3	12	7	14	10	14	14	15	15
9	—207	9	1	11	4	13	2	15	10	15	14	15	15
11	—258	10	2	12	4	14	8	15	11	15	15	15	15
13	—307	12	2	14	5	14	9	15	12	15	15	15	15
15	—358	14	3	15	6	15	9	15	12	15	15	15	15
17	—409	15	4	15	8	15	10	15	12	15	15	15	15
18	—433	15	4	15	8	15	10	15	12	15	15	15	15

e = Einwirkungsfaktor, s = Senkungen; jeweils in 1/15 Teilen (15/15 = volle Einwirkung); (15/15 = Endsenkung).

die Annahme bestätigt, daß der Senkungsvorgang innerhalb des Gebirgskörpers bestimmt wird von dem Nachbrechen der Gesteinsschichten und deren Gewicht. Demnach ist es nicht zulässig, bei Vorausberechnungen für unter Tage gelegene Punkte mit einer auf die jeweilige Höhenlage der Punkte bezogenen »Einwirkungsfläche« zu rechnen. Weiter läßt sich aus dieser Feststellung folgern, daß auch die für die Tagesoberfläche entwickelten Vorstellungen über den »Grenz- und »Bruchwinkel« nicht ohne weiteres nach untertage übertragen werden können. Sozusagen noch zur Bestätigung unserer Ausführungen sei auch wieder auf das Verhalten des in der Zahlentafel I genannten Punktes 20 aufmerksam gemacht, der unterhalb des Abbaus liegt. Es ist zu erkennen, wie dieser anfänglich durch die freiwerdenden Expansivkräfte gegen die Richtung der Schwerkraft eine Hebung erfahrende Beobachtungspunkt mit Anwachsen der durch das Nachbrechen der Gesteinsschichten wieder wirksam werden den Auflast in seine ursprüngliche Ausgangslage zurückgedrückt wird. Auch dieser Bewegungsvorgang läßt das Vorhandensein einer vorübergehend wirksamen »Schichtenauflockerung« erkennen.

SCHRIFTTUM

1. FAYOL, M.: Note sur les mouvements des terrains provoqués par l'exploitation des mines. *Bull. Soc. Ind. min. 2e Sér.* 14 (1885), 805—871.
2. GRÄBSCH, W.: Gebirgsbewegungen in einer Abbaustrecke und theoretische Folgerungen hinsichtlich der Auswirkung über Tage. *Glückauf* 1954, S. 895/898.
3. HAUSSE, R.: Von dem Niedergehen des Gebirges beim Kohlenbergbau u. den damit zusammenhängenden Boden- und Gebäudesenkungen. *Z. Berg-, Hütt- u. Salinew.* 55 (1907), 324—446.
4. HOFFMANN, H.: Messungsergebnisse in einem gebirgsschlaggefährdeten Flöz. *Glückauf* 1951, S. 101/113.
5. KÖHNE, W.: Beschreibung und Erläuterung des Verfahrens zur Berechnung zukünftiger Bodensenkungen im Emschergebiet. Essen 1910 (nicht veröffentlichtes Manuskript).
6. SPICKERNAGEL, H.: Über den Ablauf von Bewegungsvorgängen im Hangenden eines bergmännischen Abbaus. *Bergbau-Archiv* 1960. Heft 3, S. 1/23.
7. SPICKERNAGEL, H.: Unterschiede zwischen dem Verlauf der durch den Abbau verursachten Bewegungen über und unter Tage. *Mitteilungen a. d. Markscheidewesen*, Heft 3, 1964 S. 93—115.

ON THE RESULTS OF UNDERGROUND SURVEYS FOR THE DETERMINATION OF ROCK DISPLACEMENTS DUE TO MINING OPERATION

H. SPICKERNAGEL

SUMMARY

The following analysis reports on the interpretation of underground surveys pertaining to the observation of point movements due to workings in the underground. The surveys were made with the point of view to make a contribution to a very important question in the field of damages due to mining operations. This question is, if it is possible to transfer, without restrictions, the developed conception of the precalculation of the damages expected on the surface to the rock movements going on within the solid rocks.

The results presented deal only with the vertical component of the rock movement because further investigations would exceedingly increase the size of this publication.

MESURAGES GÉOMÉTRIQUES SOUTERRAINS POUR LA DÉTERMINATION DES MOUVEMENTS DE ROCHES PRODUITS PAR LES OPÉRATIONS MINIÈRES

H. SPICKERNAGEL

RÉSUMÉ

L'auteur donne l'interprétation des résultats des mesures géométriques effectuées en vue de l'observation des déplacements de points résultant des travaux souterrains. Ces mesures devaient servir de contribution à la question très importante des dommages de surface causés par des travaux d'exploitation. Le problème se pose de savoir s'il est possible d'appliquer sans restriction la notion de précalcul des dommages de surface aux mouvements qui se présentent dans les roches solides à la suite des travaux miniers.

Les résultats présentés ne se rapportent qu'à la composante verticale des mouvements de roche, des recherches plus étendues dépassant le cadre de l'étude.

О РЕЗУЛЬТАТАХ МАРКШЕЙДЕРСКИХ РАБОТ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ
СМЕЩЕНИЙ ГРУНТА, СВЯЗАННЫХ С ГОРНЫМИ РАБОТАМИ

Х. ШПИКЕРНАГЕЛЬ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматриваются вопросы интерпретации маркшейдерских измерений, проведенных под дневной поверхностью для определения смещений грунта, обусловленных горными работами. Измерения проводились для выяснения вопросов, весьма существенных для анализа ущерба от горных работ. В частности ставится вопрос, можно ли без всяких ограничений перенести представления, разработанные для предварительного вычисления ожидаемых на поверхности воздействий горной выработки, на движения, происходящие внутри горных пород.

Описанные результаты охватывают лишь вертикальный компонент смещений, поскольку дальнейшие исследования превзошли бы объем настоящей работы.

ZUR DEUTUNG DIFFERENTIALTHERMOANALYTISCHER UNTERSUCHUNGEN AN TITANOMAGNETITEN BEI VERWENDUNG VON UNMAGNETISCHEM UND MAGNETISCHEM VERGLEICHSMATERIAL

H. STILLER

(MITTEILUNG AUS DEM GEOMAGNETISCHEN INSTITUT DER DAW, POTSDAM, NR. 192)

[Eingegangen am 16. März 1965]

Die Differentialthermoanalyse wird zur Untersuchung des Magnetits von Kiruna, von synthetischem Hämatit und des Titanomagnetits vom Hutberg verwendet. Das Inertmaterial ist Al_2O_3 . Die Auswirkungen, die sich beim Ersetzen von Al_2O_3 durch Magnetit und Hämatit auf die Resultate der Analyse ergeben, werden diskutiert.

1. Einleitung

Die bei der Abkühlung magnetischer Proben im Magnetfeld erzeugte thermische Magnetisierung wird in ihren Eigenschaften von thermisch bedingten Phasenänderungen im Material beeinflusst. Deshalb bietet es sich an, ergänzend zur Messung der Temperaturabhängigkeiten magnetischer Parameter auch Größen wie die Wärmekapazität bzw. die spezifische Wärme oder mit ihnen zusammenhängende Parameter zu untersuchen.

In der Mineralogie und Baustoffkunde steht für schnelle Relativuntersuchungen des thermischen Verhaltens interessierender Materialien die Differentialthermoanalyse (DTA) zur Verfügung. Bei diesem Verfahren werden in einem Ofen die zu untersuchende Probe (Pr) und die Vergleichsprobe (Vgl) mit konstanter Geschwindigkeit aufgeheizt. Die beim Untersuchungsvorgang registrierte Temperaturdifferenz

$$\Delta T = |T_{Pr} - T_{Vgl}| \quad (1)$$

wird in Abhängigkeit von der ebenfalls aufgezeichneten Temperatur T_{Vgl} der Vergleichsprobe aufgetragen. Ist die Vergleichsprobe ein Material wie Al_2O_3 , das im interessierenden Temperaturbereich (bis etwa 700 °C) keine Phasenänderungen erleidet, so führen Phasenänderungen in der Probe (Pr), die entweder Wärme verbrauchen oder freigeben, zu verschiedenen Zunahmen δT_{Pr} der Temperatur des Probenmaterials pro Zeiteinheit verglichen mit dem Temperaturzuwachs δT_{Vgl} des Vergleichsmaterials. Damit zeigt die gemessene Differenz $\Delta T = f(T_{Vgl})$ Variationen, die mit den Phasenänderungen in der Probe (Pr) korreliert werden können.

Mit diesem Verfahren wurden von STILLER und VOLLSTÄDT [1], VOLLSTÄDT und STILLER [2] und VOLLSTÄDT [3] synthetische und natürliche Eisen-

oxide untersucht. Dabei gelang der Nachweis von chemischen Phasenänderungen (Oxidation) und von magnetischen Phasenübergängen (ferri- bzw. antiferromagnetische CURIEtemperaturen) in Übereinstimmung mit den Temperaturabhängigkeiten der Spontanmagnetisierung.

In der vorliegenden Arbeit werden die DTA-Kurven von Magnetit (Kiruna), synthetischem Hämatit und von Titanomagnetit vom Hutberg in Sachsen bei Al_2O_3 als Vergleichsmaterial miteinander verglichen. Zur Diskussion der Hämatitkurve werden die thermodynamischen Rechnungen zur Darstellung der Wärmekapazität von ferro- und ferrimagnetischen Materialien, wie sie in der Arbeit [1] nach BELOW [4] benutzt wurden, auf die Wärmekapazität eines Antiferromagnetikums (Hämatit) übertragen. Die beim Übergang zu anderen Vergleichsmaterialien eingetretenen Änderungen der DTA-Kurven von Titanomagnetit vom Hutberg werden hinsichtlich ihres Informationsgehaltes geprüft.

2. DTA-Resultate bei Al_2O_3 als Vergleichsmaterial

2.1 Vorbemerkungen

Durch die konstante Aufheizgeschwindigkeit, deren Konstanz besonders kontrolliert wird, ist gewährleistet, daß der Probe Pr und dem Vergleichsmaterial Vgl pro Zeiteinheit gleiche Wärmemengen δQ zugeführt werden, die zu den Temperaturzunahmen δT_{Pr} und δT_{Vgl} führen. Da die Messungen gewöhnlich bei konstantem Druck p und ohne Magnetfeld ($H = 0$) durchgeführt werden, so hat man gemäß [1] durch Betrachtung der Wärmekapazität der magnetischen Probe

$$(C_{Pr})_{H=0, p=\text{const}} = \left(\frac{\delta Q}{\delta T_{Pr}} \right)_{H=0, p=\text{const}} \quad (2)$$

einen günstigen Zugang zur Diskussion der DTA-Kurven.

Verbraucht eine Phasenänderung in der Probe Wärme, so wird ΔT kleiner, da die pro Zeiteinheit beiden Materialien zugeführte gleiche Wärmemenge in der Probe Pr eine kleinere Temperaturerhöhung verursacht als in der Vergleichsprobe, die keine Phasenänderung aufweist. Die Funktion $\Delta T = f(T_{Vgl})$ zeigt eine Abnahme (endothermer Vorgang). Wird durch einen Vorgang in der Probe Pr Wärme erzeugt, so tritt das Umgekehrte ein (exothermer Prozeß).

2.2 Ergebnisse und Interpretation

2.21 Magnetit und Hämatit

In den Abbildungen 1 und 2 werden die DTA-Kurven von Magnetit aus Kiruna [1] und von synthetischem Hämatit [3] angeführt, um Vergleiche mit der in Abb. 3 dargestellten Kurve von Titanomagnetit vom Hutberg und mit

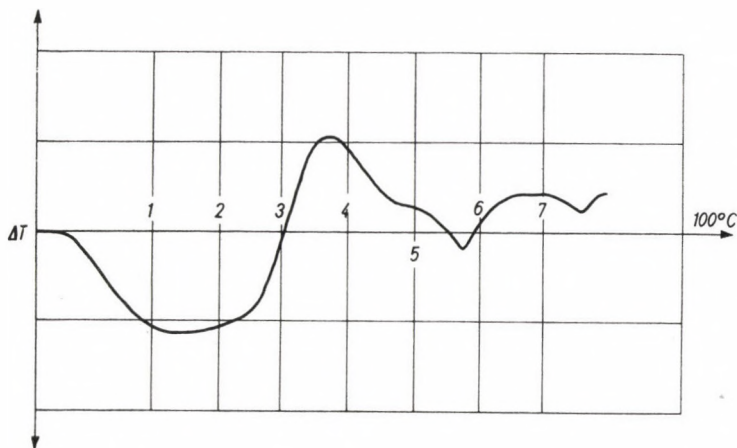


Abb. 1. DTA-Kurve von Magnetit (Kiruna, Schweden) $T = 750\text{ }^\circ\text{C}$, $A = 10\text{ }^\circ\text{C/min}$, $E = 1/3$

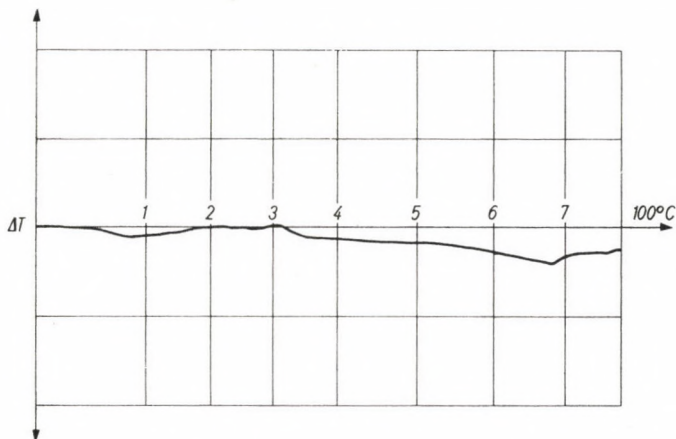


Abb. 2. DTA-Kurve von synthetischem Hämatit. $T = 750\text{ }^\circ\text{C}$, $A = 10\text{ }^\circ\text{C/min}$, $E = 1/3$

den späteren Ergebnissen vornehmen zu können. Für Magnetit ergibt sich auf Grund der Arbeiten [1–3] unter der Verwendung der Beziehung (BELOW [4])

$$C_{p,H=0} = - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial T^2} - 2 a' T \frac{\partial}{\partial T} (J^2), \quad (3)$$

wo $J = \sigma_s / \sigma_0$, Φ_0 der unmagnetische Teil des thermodynamischen Potentials, a' ein Koeffizient, T die Temperatur und σ_s und σ_0 die Spontanmagnetisierungen (Resultierende der Untergittermagnetisierungen) pro 1 p bei der Temperatur T und $0\text{ }^\circ\text{K}$ sind, die folgende Interpretation der DTA-Resultate (s. Tabelle I).

Der auf der Abbildung 1 hinter 700 °C erscheinende endotherme peak gehört bereits zur Abkühlungskurve. Man sieht, daß das zweite Glied der Gleichung (3) im Bereich von 380—575 °C signifikant wirksam wird, da das Aufbrechen der Austauschkopplung (Verschwinden der Spontanmagnetisierung) Wärme verbraucht.

Die in Abbildung 2 zu sehende Kurve von Hämatit zeigt einen anderen Verlauf als die von Magnetit. Da Hämatit das stabile Endprodukt des Oxyda-

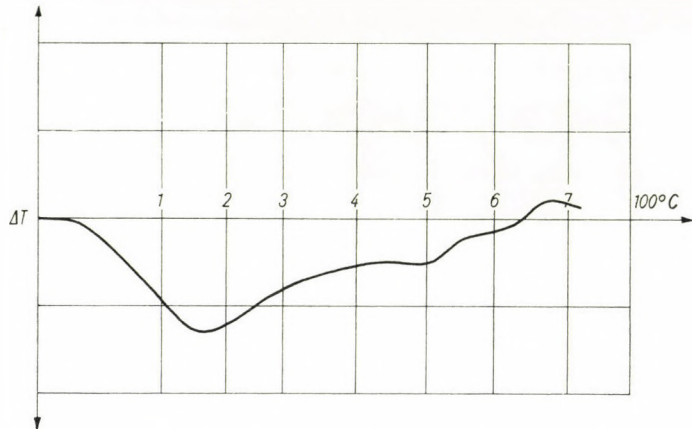


Abb. 3. DTA-Kurve der Probe H — 19 (Hutberg bei Schönau) Vgl. = Al_2O_3
 $T = 700\text{ }^\circ\text{C}$, $A = 10\text{ }^\circ\text{C}/\text{min}$, $E = 1/3$

tionsprozesses $\text{Fe}_3\text{O}_4 \rightarrow \gamma - \text{Fe}_2\text{O}_3 \rightarrow \alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$ ist, werden auch keine signifikanten Oxydationsbereiche beobachtet. Die Erhöhung bei 300 °C kann mit Störeffekten in Verbindung gebracht werden.

Der magnetische Anteil der Wärmekapazität von antiferromagnetischen Materialien läßt sich mit Hilfe der thermodynamischen Theorie, wie sie nach

Tabelle I

DTA-Ergebnisse für Magnetit von Kiruna

Temperaturen °C	endotherm/exotherm	Ursache
bis 280	endothermer Bereich	Trocknung von Wasser
280—380	exothermer Bereich	Oberflächenoxydation der Körner
380—570	endothermer Abfall	Abnahme der Spontanmagnetisierung
≈500	exothermer Vorgang	Oxydation der inneren Teile der Körner
≈575	endotherme Spitze	Schroffe Änderung von C_p von Magnetit bei T_c
≈685	endotherme Spitze	Schroffe Änderung von C_p von oxydationsbedingtem Hämatit bei T_c

BELOW [4] für Magnetit bereits angewendet wurde, ebenfalls günstig beschreiben. Man kann zu diesem Zweck von derselben Reihendarstellung ausgehen, wie sie bei Magnetit für den CURIEtemperaturbereich verwendet wurde:

$$\Phi = \Phi_0 + aJ^2 + bJ^4 + \dots \quad (4)$$

Φ_0 enthält alle unmagnetischen Anteile des thermodynamischen Potentials. Beim Übergang zum antiferromagnetischen Fall muß man die Untergittermagnetisierungen $(\sigma_A)_S$ und $(\sigma_B)_S$ berücksichtigen, die gegeneinander gerichtet sind. Das führt mit

$$a = a_1 - a_2, \quad (5a)$$

$$(\sigma_A)_S = \sigma_S, (\sigma_B)_S = -\sigma_S, J = \frac{\sigma_S}{\sigma_0}, \quad (5b)$$

$$a_1 J^2 = \frac{a_1}{2} \left\{ \frac{(\sigma_A)_S^2}{(\sigma_0)^2} + \frac{(\sigma_B)_S^2}{(\sigma_0)^2} \right\}, \quad (5c)$$

$$-a_2 J^2 = -a_2 \frac{(\sigma_A)_S}{(\sigma_0)} \frac{(-\sigma_B)_S}{(\sigma_0)}, \quad (5d)$$

$$bJ^4 = \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{(\sigma_A)_S^4}{(\sigma_0)^4} + \frac{(\sigma_B)_S^4}{(\sigma_0)^4} \right\} \quad (5e)$$

zum folgenden Ausdruck für das thermodynamische Potential des Antiferromagnetikums bei $H = 0$:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{a_1}{2} \left\{ \frac{(\sigma_A)_S^2}{(\sigma_0)^2} + \frac{(\sigma_B)_S^2}{(\sigma_0)^2} \right\} + a_2 (\sigma_A)_S (\sigma_B)_S + \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{(\sigma_A)_S^4}{(\sigma_0)^4} + \frac{(\sigma_B)_S^4}{(\sigma_0)^4} \right\}. \quad (6)$$

Mit

$$a_1 - a_2 = \alpha'(T - T_C) + \dots \quad (7)$$

und unter Berücksichtigung der Beziehung (5b) ergibt das den Ausdruck

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha'(T - T_C)J^2 + \beta J^4 + \dots \quad (8)$$

aus dem man mittels der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J} = 2 \alpha'(T - T_C) J + 4 \beta J^3 = 0 \quad (9)$$

und der daraus folgenden Formel

$$J^2 = -\frac{\alpha'}{2\beta}(T - T_C), \quad (10)$$

das thermodynamische Potential folgendermaßen darstellen kann:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{\alpha'^2}{2\beta} (T - T_c)^2. \quad (11)$$

Die Formeln

$$S = - \frac{\partial \Phi}{\partial T},$$

wo S die Entropie bedeutet,

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

und

$$\frac{\partial J^2}{\partial T} = - \frac{\alpha'}{2\beta}$$

ergeben dann:

für $T < T_c$

$$C_p = -T \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial T^2} + T \frac{\alpha'^2}{\beta} \quad (12a)$$

$$= -T \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial T^2} - 2 \zeta' T \frac{\partial J^2}{\partial T}, \quad (12b)$$

für $T > T_c$:

$$C_p = -T \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial T^2}, \quad (13)$$

und für $T = T_c$:

$$\Delta C_p = C_p - C_0 = T_c \frac{\alpha'^2}{\beta} \quad (14)$$

entsprechend den Ausdrücken, wie sie für die Resultierende der Untergittermagnetisierungen von Magnetit erhalten wurden [1]. Die Gleichungen (3) und (12b) entsprechen einander.

Von der formelmäßigen Darstellung her haben wir somit ganz analoge Verhältnisse wie beim Magnetit, nur daß keine resultierende Magnetisierung wirksam wird, die bei hohen Temperaturen offenbar sehr starken Einfluß haben kann (s. Abb. 1). Das zweite Glied der Gleichung (12b) (magnetischer Anteil der Wärmekapazität) hat bereits dicht oberhalb 300 °C (s. Abb. 2) einen merklichen Einfluß. Beim Magnetit ist das nicht erkennbar, weil zwischen 300 und 400 °C ein Oxydationsbereich liegt. Der magnetisch bedingte endotherme Abfall erstreckt sich bis zur antiferromagnetischen CURIEtemperatur hin, wo bei $T_c = 680$ °C eine deutlich erkennbare endotherme Spitze liegt. Die auf Grund der thermodynamischen Theorie mit Hilfe der Untergittermagnetisierung erreichte Zerlegung der Wärmekapazität in einen magnetischen und einen unmagnetischen Anteil gestattet somit die qualitative Interpretation

der magnetisch bedingten Effekte bei der Differentialthermoanalyse von Hämatit.

Ausführungen über die Darstellung des unmagnetischen Anteils der Wärmekapazität und über Möglichkeiten zur quantitativen Trennung von magnetischen und unmagnetischen Komponenten der Wärmekapazität findet man in den Arbeiten [6] und [7]. Gleichungen, die (3) und (12b) entsprechen, kann man auch auf der Basis der Molekularfeldnäherung erhalten [5]. Die thermodynamischen Rechnungen nach BELOW haben jedoch den Vorteil, daß bei ihnen alle einschränkenden Voraussetzungen über die Entwicklungskoeffizienten wegfallen. Für die DTA-Kurve von synthetischem Hämatit haben wir somit nach der obigen Diskussion die folgenden Interpretationsmöglichkeiten:

Tabelle II
DTA-Ergebnisse von synthetischem Hämatit

Temperaturbereich °C	endotherm/exotherm	Ursache
bis 150	endothermer Bereich	Trocknung
310—320	exotherme Spitze	Störeffekt (?)
320—600	endothermer Bereich	Abnahme der Untergittermagnetisierung
≈600	endotherme Spitze	Schroffe Änderung von C_p bei T_c

2.22 Titanomagnetit vom Hutberg

Die Abb. 3 zeigt eine typische DTA-Kurve vom Titanomagnetit vom Hutberg (Probe H 19). Ein analoges Verhalten bei der Differentialthermoanalyse zeigen alle anderen untersuchten Proben, nur daß die einzelnen peaks mehr oder weniger stark ausgeprägt sind. Durch die nicht vollständig mögliche Separation bleiben sehr viele Verunreinigungen durch Bestandteile des umgebenden Gesteins enthalten. Außerdem sind im Titanomagnetit gegenüber dem verhältnismäßig reinen Magnetit von Kiruna neben Titanionen auch andere Beimengungen enthalten, die die DTA-Kurven bei Diffusionsvorgängen aller Art beeinflussen.

Der Titanomagnetit kann auch nicht als homogen angesehen werden. Alle diese Gründe führen dazu, daß der natürliche Titanomagnetit ein wesentlich anderes DTA-Verhalten zeigt als der Magnetit von Kiruna. Der endotherme Bereich bis 150 °C kann sicher durch Trocknung erklärt werden. Er wird abgelöst durch einen exothermen Bereich, der gewöhnlich bei 300—400 °C beendet ist. Für diesen Temperaturbereich sind Entmischungs- bzw. Oxydationsvorgänge typisch. Oberhalb 400 °C wird der Einfluß des magnetischen Teils der Gleichung (3) als endothermer Vorgang merklich, und bei 500 °C liegt der CURIEtemperaturbereich, der bei den Titanomagnetiten vom

Hutberg etwa 50 °C umfaßt und sehr schwach ausgeprägt ist. Wir erhalten also folgende Ergebnisse:

Tabelle III
DTA-Ergebnisse für Titanomagnetit vom Hutberg

Temperaturen °C	endotherm/exotherm	Ursache
bis 150	endothermer Bereich	Trocknung
150—300		
bis 400	exothermer Bereich	Entmischungen, schwache Oxydationen
400—480	endothermer Abfall	Abnahme der Spontanmagnetisierung
≈500	endothermer Bereich	Änderung von C bei der CURIEtemperatur T_c

Charakteristisch ist die nur schwach ausgeprägte und weit ausgedehnte Anomalie bei T_c . Das ist auch verständlich, da die Größe ΔCp stark von

- a) der thermischen Geschichte des Materials,
- b) der Konzentration der Komponenten und Beimengungen,
- c) dem polykristallinen Charakter des Materials

abhängen kann. So erhöhte nach BELOW [4] das Tempern einer Cu-Ni-Legierung bei 1000 °C mit zunehmender Dauer die Größe ΔCp und machte den Übergang schärfer. Dagegen führte das Tempern einer Mn-Ni-Legierung bei 380 °C mit zunehmender Dauer zu einer Verringerung von ΔCp verbunden mit einer Verwaschung des CURIEtemperaturüberganges.

Konzentrationschwankungen führen zu unterschiedlichen T_c -Werten in verschiedenen Teilbereichen des Materials und damit zur Existenz eines CURIEtemperaturbereiches im Material. Ähnlich werden auch die Kristallite eines polykristallinen Materials wirksam.

Man hat somit auch für die natürlichen Titanomagnetite keine definierte CURIEtemperatur zu erwarten, sondern einen CURIEtemperaturbereich, was im Einklang mit den DTA-Ergebnissen steht.

3. DTA-Resultate des Titanomagnetits vom Hutberg bei Magnetit und Hämatit als Vergleichssubstanz

3.1 Vorbemerkungen

Bei automatischer Einschaltung eines konstanten Temperaturgradienten in der Vergleichsprobe wird wegen der Tatsache, daß das Vergleichsmaterial nicht mehr thermisch inert ist, beispielsweise bei einem exothermen Vorgang in der Vergleichsprobe weniger Wärme benötigt, um die beabsichtigte Temperaturzunahme zu erreichen. Da von der Wärmezufuhr sowohl die Probe Pr als auch Vgl betroffen sind, so würde das bedeuten, daß die Temperaturzunahme

der zu untersuchenden Probe geringer werden muß und auf der DTA-Registrierung als ein endothermer Bereich erscheint, wenn nicht in Pr ebenfalls gleichzeitig ein starker exothermer Effekt auftritt. Bei einem endothermen Vorgang im Vergleichsmaterial müßte das Umgekehrte festzustellen sein.

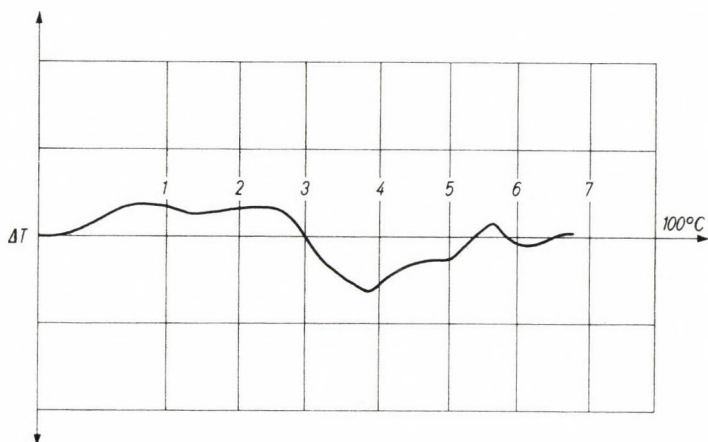


Abb. 4. DTA-Kurve der Probe H-19 (Hutberg bei Schönau) Vgl. = Magnetit (Kiruna)
 $T = 700^\circ\text{C}$, $A = 10^\circ\text{C}/\text{min}$, $E = 1/3$

3.2 Magnetit von Kiruna als Vergleichsmaterial

Auf der Abbildung 4 ist ein Beispiel einer DTA-Kurve von Titanomagnetit mit Magnetit von Kiruna als Vergleichssubstanz angegeben. Die anderen untersuchten Proben zeigen das gleiche Verhalten. Man beobachtet beim Vergleich zwischen Abb. 4 und den Ergebnissen der Tabelle I folgende Übereinstimmungen (Tabelle IV):

Tabelle IV

Vergleich mit Tabelle I

Temperaturbereich $^\circ\text{C}$	Magnetit Kiruna (Tab. I)	Titanomagnetit
bis 280	endotherm	exotherm
280—380	exotherm	endotherm
380—570	endotherm	exotherm
≈ 500	exotherm	endotherm
≈ 570	endotherm	exotherm

Die Vorgänge im Vergleichsmaterial sind also in der erwarteten Weise auf den DTA-Kurven erkennbar. Das ist besonders deshalb deutlich sichtbar, weil die Vorgänge im Titanomagnetit verhältnismäßig schwach sind. Die CURIE-

temperatur des Titanomagnetits fällt leider mit einem geringen exothermen peak im Vergleichsmaterial zusammen, so daß der bei 500 °C erscheinende endotherme Knick (Abb. 4) nicht eindeutig auf die CURIEtemperatur des Titanomagnetits zurückgeführt werden kann.

3.3 Hämatit als Vergleichsmaterial

Ein Beispiel für eine solche Registrierung ist in Abb. 5 zu sehen. Die bei den anderen Proben erzielten Resultate sind analog. Die Ergebnisse der Abbildung 5 werden in der Tabelle V mit den Resultaten der Tabelle II verglichen.

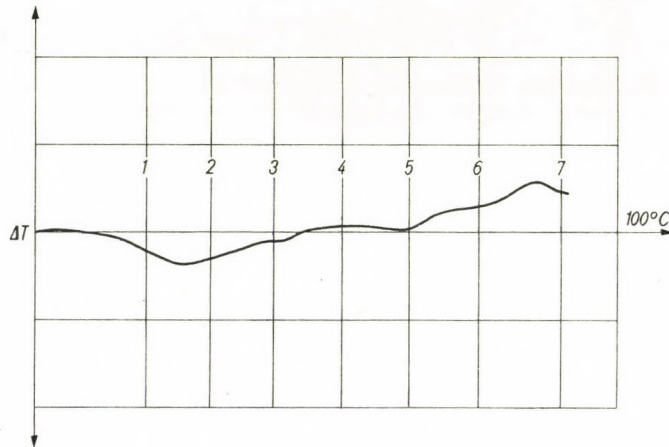


Abb. 5. DTA-Kurve der Probe H—19 (Hutberg bei Schönau) Vgl. = Hämatit (synth.)
 $T = 700^{\circ}\text{C}$, $A = 10^{\circ}\text{C}/\text{min}$, $E = 1/3$

Aus der Tabelle II wird ersichtlich, daß einige Vorgänge in der untersuchten Probe diejenigen in der Vergleichssubstanz überwiegen. Das betrifft den Bereich bis 150 °C, wo die Trocknungseffekte im Titanomagnetit stärker sind als im Hämatit, und das CURIEtemperaturgebiet des Titanomagnetits von 480—530 °C.

Tabelle V
 Vergleich mit Tabelle II

Temperaturbereich °C	Hämatit (Tab. II)	Titanomagnetit
bis 150	endotherm	endotherm
310—320	exotherm	endotherm
320—680	endotherm	exotherm (unterbrochen bei 480—530 °C)
480—530	—	endotherm
≈680	endotherm	exotherm

Unter Umständen bietet sich auf diesem Wege eine erweiterte Anwendungsmöglichkeit des benutzten Verfahrens an, die auf der Verwendung von magnetischen Vergleichssubstanzen beruht, in denen bekannte Änderungen bekannter Intensität vor sich gehen.

Zum Schluß sei Herrn Dipl.-Min. VOLLSTÄDT dafür gedankt, daß er mir das Probenmaterial zur Verfügung gestellt und die Durchführung der Messungen organisiert hat.

SCHRIFTTUM

1. STILLER, H. und VOLLSTÄDT, H.: Bestimmung ferri- und antiferromagnetischer CURIE-temperaturen mittels Differentialthermoanalyse. *Z. Geophysik* **31** (1965) 212—217.
2. VOLLSTÄDT, H. und STILLER, H.: Vergleichende Betrachtungen zu thermomagnetischen und differentialthermoanalytischen Messungen an natürlichen und synthetischen Eisenoxiden. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin* **XIV** (1965), 41—49.
3. VOLLSTÄDT, H.: Differentialthermoanalytische Untersuchungen an Spinell- und Korundtypmineralen. (Vortrag auf dem X. Symposium der Ungarischen Geophysikalischen Gesellschaft, Budapest, 1964). *Magyar Geofizika* (in Vorbereitung). und Dissertation 1965.
4. BELOW, K. P.: Magnetische Umwandlungen (magnituye prewraschtschenija). 1959, Moskwa, Gosisdat.
5. KNELLER, E.: Ferromagnetismus. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962.
6. HOFMANN, J. A. u. a.: Analysis of Ferromagnetic and Antiferromagnetic Second-Order Transitions. *J. Phys. Chem. Solids*, **1** (1956), 45—60.
7. PASKIN, A.: Fraction of Total Energy and Entropy of Magnetic Order attained at the Curie-Temperature by Antiferromagnetic Salts. *J. Phys. Chem. Solids*, **2** (1957), 232—236.

ON THE INTERPRETATION OF DIFFERENTIAL THERMAL ANALYTICAL INVESTIGATIONS OF TITANOMAGNETITES UNDER THE APPLICATION OF NON-MAGNETIC AND MAGNETIC COMPARISON MATERIALS

H. STILLER

SUMMARY

Differential thermal analysis is applied to the investigation of magnetite (Kiruna), synthetic hematite and titanomagnetite (Hutberg). The inert material is Al_2O_3 . The influence of the substitution of Al_2O_3 by magnetite and hematite on the results of the analysis of titanomagnetite is discussed.

SUR L'INTERPRÉTATION DES RECHERCHES THERMOANALYTIQUES DIFFÉRENTIELLES DE TITANOMAGNÉTITES AVEC APPLICATION DE MATÉRIAUX NON MAGNÉTIQUES ET MAGNÉTIQUES

H. STILLER

RÉSUMÉ

L'analyse thermique différentielle est appliquée à l'étude de magnétites de Kiruna, d'hématites synthétiques et de titanomagnétites de Hutberg. La substance inerte est Al_2O_3 . Le remplacement par magnétite et par hématite de Al_2O_3 exerce sur les résultats de l'analyse de la titanomagnétite une influence qui est examinée par l'auteur.

ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕРМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ТИТАНОМАГНЕТИТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕМАГНИТНОГО И
МАГНИТНОГО СРАВНИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Х. ШТИЛЛЕР

РЕЗЮМЕ

Термографический анализ применяется для исследования магнетита (Кируна), синтетического гематита и титаномагнетита горы Хутберг. Инертным материалом является Al_2O_3 . В настоящей работе рассматривается влияние замены Al_2O_3 магнетитом или гематитом на результаты анализа титаномагнетита.

DER EINFLUSS VON KORRELATIONEN AUF DIE UNBEKANNTEN EINER AUSGLEICHUNG

H. WOLF, Bonn

[Eingegangen am 8. März 1965]

Es wird eine allgemeine Formel aufgestellt, welche den Unterschied zwischen den Ergebnissen zweier Ausgleichungen angibt, von denen — bei demselben Beobachtungsmaterial — die eine *mit* und die andere *ohne* Berücksichtigung von Korrelationen durchgeführt wird.

Von vielen der in eine Ausgleichung einzuführenden Größen weiß man, daß sie gewisse Korrelationen untereinander besitzen. Es können diese Korrelationen entweder bereits während der Messung zustandegekommen sein, indem die Messungsgrößen aus physikalischen Gründen von einer bestimmten Einflußgröße, und damit auch untereinander, abhängig sind; — oder es ergeben sich die Korrelationen dadurch, daß man die Originalmessungen zunächst einer Vor-Ausgleichung unterworfen hat, deren Ergebnisse dann als »Beobachtungen« in eine weitere Ausgleichung einzuführen sind (die im folgenden als die Haupt-Ausgleichung bezeichnet werden soll).

Wenn es in der Regel auch schwierig ist, die *physikalische* Korrelation zahlenmäßig anzugeben, so bereitet es auf der anderen Seite keinerlei Schwierigkeiten, die *mathematische* Korrelation in Rechnung zu stellen, da man die erforderlichen Korrelationsbeträge, ausgedrückt durch entsprechende Q -Matrizen, bei Gelegenheit der erwähnten Vor-Ausgleichung gleichsam als Nebenprodukt mitgewinnt.

Es entsteht sodann die Frage, ob es möglicherweise lohnt, diese Korrelationen in der Ausgleichung zu berücksichtigen, oder ob man vielleicht nicht besser in der Hauptausgleichung diese Korrelationen unterdrücken soll. Seither rechtfertigte man die Vernachlässigung der Korrelationen immer mit dem etwas höheren Rechenaufwand, der hierdurch entsteht. Nachdem heute aber schon ein Großteil der geodätischen Berechnungen auf elektronischen Rechenanlagen durchgeführt wird, ist eine solche Argumentation nicht mehr recht überzeugend.

Bei einer anderen Gelegenheit war bereits [1] die Frage gestellt und beantwortet worden, wie stark die Abweichungen in den ausgeglichenen Größen sind, wenn man einmal *mit* und einmal *ohne* Korrelation ausgleicht. Da jene Ausführungen [1] auf die nach einer »bedingten« Ausgleichung übrigen Verbesserungen beschränkt waren, so soll nachstehend versucht

werden, für die Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_u die Änderungsbeträge mit einer allgemeinen Formel anzugeben. Man verfährt dann so, daß man sich zunächst die Ausgleichung *ohne* Berücksichtigung von irgendwelchen Korrelationen durchgeführt denkt, worauf eine zweite Ausgleichung vorgenommen wird, in der dann die Korrelationsbeträge voll berücksichtigt werden. Beiden Ausgleichungen soll genau dasselbe Beobachtungsmaterial zu Grunde gelegt werden.

In den aufzustellenden Verbesserungsgleichungen sei mit w der Vektor der Absolutglieder bezeichnet und mit B die Matrix der Koeffizienten bei den Unbekannten. Die Unbekannten selbst ergeben den Vektor x_0 im »nicht-korrelierten« Fall, bzw. den Vektor \bar{x} , wenn die Korrelationen berücksichtigt werden. Die an den Beobachtungen anzubringenden Verbesserungen seien im Vektor v zusammengefaßt (im nicht-korrelierten Fall), bzw. im Vektor e (bei Berücksichtigung der Korrelation). Die Gewichte für den nicht-korrelierten Fall seien enthalten in der Diagonal-Matrix P gemäß

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/Q_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/Q_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

wobei n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. (Die Anzahl der Unbekannten war mit u bezeichnet worden.) Für den Fall der korrelierten Beobachtungen dagegen seien die folgenden Korrelationen aus den Vor-Ausgleichungen bekannt (unter Zuhilfenahme der Matrizen-Schreibeweise):

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Dann ergeben sich für die Durchführung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen die folgenden Zusammenhänge, vgl. WOLF, a. a. O. [2], Seite 140, bzw. 138:

	<i>ohne</i> Korrelation	<i>mit</i> Korrelation
Verbesserungsgleichungen:	$v = Bx_0 + w$ (3a)	$e = B\bar{x} + w$ (3b)
Ausgleichungsprinzip:	$v^T P v = \min$	$e^T Q^{-1} e = \min$
Normalgleichungen:	$N_0 x_0 + B^T P w = 0$ (4a)	$\bar{N} x + B^T Q^{-1} w = 0$ (4b)
worin	$N_0 = B^T P B$ (5a)	$\bar{N} = B^T Q^{-1} B$ (5b)
so daß	$x_0 = -N_0^{-1} B^T P w$ (6a)	$\bar{x} = -\bar{N}^{-1} B^T Q^{-1} w$ (6b)

Gesuchte Differenzen in den Unbekannten: Nach (6a) und (6b) ist:

$$\bar{x} - x_0 = (N_0^{-1} B^T P - \bar{N}^{-1} B^T Q^{-1})w = (N_0^{-1} B^T P - Z)w, \quad (7)$$

worin
$$Z = (B^T Q^{-1} B)^{-1} B^T Q^{-1}. \quad (8)$$

Aus (1) und (2) gewinnt man folgendes, wobei mit E die Einheitsmatrix bezeichnet werden soll:

$$Q = P^{-1} + \Delta Q,$$

worin
$$|\Delta Q| < |P^{-1}|. \quad (9)$$

Dann gilt:
$$Q^{-1} = (P + \Delta Q)^{-1} = (P^{-1}(E + P\Delta Q))^{-1}$$

oder
$$Q^{-1} = (E + P\Delta Q)^{-1} P.$$

Benutzt man die bekannte Neumannsche Reihe, vgl. WOLF, a. a. O. [2], Seite 163, so erhält man wegen (9):

$$Q^{-1} = (E - P\Delta Q + P\Delta Q P\Delta Q \mp \dots)P$$

oder mit
$$P\Delta Q P = S \quad (10)$$

$$Q^{-1} = P(E - \Delta Q P + \Delta Q S \mp \dots).$$

Damit gewinnt man aus (8), wenn die angedeuteten kleinen Größen höherer Ordnung nicht mitgeführt werden sollen:

$$Z = (B^T P(E - \Delta Q P + \Delta Q S)B)^{-1} B^T P(E - \Delta Q P + \Delta Q S)$$

oder mit (5a):

$$Z = (E - N_0^{-1} B^T P\Delta Q(P - S)B)^{-1} N_0^{-1} B^T P(E - \Delta Q P + \Delta Q S).$$

Verwendet man auch hierbei wieder die Neumannsche Reihe [2], so wird:

$$Z = (E + N_0^{-1} B^T P\Delta Q(P - S)B(E + N_0^{-1} B^T P\Delta Q(P - S)B)N_0^{-1} B^T P(E - \Delta Q P + \Delta Q S)$$

oder mit $N_0^{-1} B^T P\Delta Q(P - S)B = R$:

$$Z = (E + R(E + R))(T_0 - T_1 + T_2),$$

worin
$$T_0 = N_0^{-1} B^T P$$

$$T_1 = N_0^{-1} B^T P\Delta Q P$$

$$T_2 = N_0^{-1} B^T P\Delta Q S.$$

Zerlegt man R schließlich noch in R_1 und R_2 , wobei

$$R_1 = N_0^{-1} B^T P \Delta Q P B$$

$$R_2 = N_0^{-1} B^T P \Delta Q S B$$

$$R = R_1 - R_2, \text{ so ergibt sich}$$

$$E + R(E + R) = E + R + R^2 = E + R_1 - R_2 + R_1^2 - 2 R_1 R_2 + R_2^2,$$

oder bei Vernachlässigung von kleinen Größen III. und höherer Ordnung:

$$E + R(E + R) = E + R_1 - R_2 + R_1^2.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} Z &= T_0 - T_1 + T_2 + R_1 T_0 - R_1 T_1 - R_2 T_0 + R_1^2 T_0, \text{ oder} \\ Z &= N_0^{-1} B^T P - N_0^{-1} B^T P \Delta Q P + N_0^{-1} B^T P \Delta Q S + \\ &+ N_0^{-1} B^T P \Delta Q P B N_0^{-1} B^T P - N_0^{-1} B^T P \Delta Q P B N_0^{-1} B^T P \Delta Q P - \\ &- N_0^{-1} B^T P \Delta Q S B N_0^{-1} B^T P + \\ &+ N_0^{-1} B^T \Delta Q P B N_0^{-1} B^T P \Delta Q P B N_0^{-1} B^T P \end{aligned}$$

und mit (10):

$$\begin{aligned} Z &= N_0^{-1} B^T P - N_0^{-1} B^T S (E - B N_0^{-1} B^T P) + N_0^{-1} B^T \Delta Q S (E - \\ &- B N_0^{-1} B^T P) - N_0^{-1} B^T S B N_0^{-1} B^T S (E - B N_0^{-1} B^T P), \text{ oder} \\ Z &= N_0^{-1} B^T P + (-N_0^{-1} B^T S + N_0^{-1} B^T P \Delta Q S - \\ &- N_0^{-1} B^T S B N_0^{-1} B^T S) (E - B N_0^{-1} B^T P). \end{aligned}$$

Da aber aus (3a) mit (6a) folgt:

$$v = -B N_0^{-1} B^T P w + w = (E - B N_0^{-1} B^T P) w,$$

so erhält man aus (7) und dann mit (10):

$$\begin{aligned} \bar{x} - x_0 &= N_0^{-1} B^T (S - P \Delta Q S + S B N_0^{-1} B^T S) v, \text{ oder} \\ \bar{x} - x_0 &= N_0^{-1} B^T P (E - \Delta Q P + \Delta Q P B N_0^{-1} B^T P) \Delta Q P v. \end{aligned}$$

Nun ist, vgl. WOLF, a. a. O. [2], Seite 140:

$$B N_0^{-1} B^T = Q_{(1)}$$

die Q -Matrix der *ausgeglichenen Beobachtungen* ($l + v$), so daß

$$\bar{x} - x_0 = N_0^{-1} B^T P (E - \Delta Q P + \Delta Q P Q_{(1)} P) \Delta Q P v. \quad (11)$$

Für viele Zwecke dürfte es genügen, wenn man sich z. B. nach Abschluß der »nicht-korrelierten« Ausgleichung für die Verfälschungen $(x - x_0)$ nur in überschlägiger Weise interessiert, so daß man dann in (11) auch die kleinen Größen II. Ordnung vernachlässigen darf. Damit erhält man für die Zwecke von Abschätzungen, d. h. um eine »Voraussage« zu treffen, um welchen Betrag die Ergebnisse x der »korrelierten« Ausgleichung noch von den ohne Korrelationen (bereits) berechneten x_0 abweichen werden, den einfachen Zusammenhang:

$$\bar{x} - x_0 = N_0^{-1} B^T P \Delta Q P v . \quad (12)$$

Hierin kommen also nur die in der »nicht-korrelierten« Ausgleichung enthaltenen Größen vor, sowie die gegebenen Korrelationsbeträge ΔQ .

Im übrigen liefert (11) noch

$$B(\bar{x} - x_0) = Q_{(1)} P (E - \Delta Q P + \Delta Q P Q_{(1)} P) \Delta Q P v . \quad (13)$$

Das ist aber nach (3a) und (3b) zugleich der Einfluß der Korrelation ΔQ auf die Verbesserungen, indem nämlich

$$B(\bar{x} - x_0) = e - v .$$

Damit ist der Korrelationseinfluß *auf die ausgeglichenen Werte der Beobachtungsgrößen* definiert. Hiermit hat man den Anschluß an die Formel (3, 8) der a. a. O. [1] genannten Arbeit des Verf. gefunden. Es gilt mithin ganz allgemein, — gleichgültig, ob die Ausgleichung nach vermittelnden *oder* nach bedingten Beobachtungen durchgeführt wird:

$$e - v = Q_{(1)} P (E - \Delta Q P (E - Q_{(1)} P \pm \dots)) \Delta Q P v , \quad (14)$$

womit die Frage nach dem Unterschied der Ergebnisse von Ausgleichungen, die einmal *mit* und zum anderen *ohne* Korrelationen vorgenommen worden sind, hinreichend beantwortet sein dürfte.

SCHRIFTTUM

1. WOLF, H.: On the importance of correlations within geodetic computations (im Druck).
2. WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmlers Verlag Bonn.

THE INFLUENCE OF CORRELATIONS UPON THE UNKNOWN OF AN ADJUSTMENT

H. WOLF

SUMMARY

A general formula is established which describes the difference between the results of two adjustments; — one of them is to be performed with the full consideration of all correlations and the other adjustment without any correlation — both adjustments being based upon just the same values of observations.

INFLUENCE DES CORRÉLATIONS SUR LES INCONNUES
D'UNE COMPENSATION

H. WOLF

RÉSUMÉ

L'auteur établit une formule générale décrivant la différence entre les résultats de deux compensations — basées sur les mêmes valeurs d'observation — dont l'une a été effectuée en tenant compte des corrélations, et l'autre en les négligeant.

О ВЛИЯНИИ КОРРЕЛЯЦИЙ НА НЕИЗВЕСТНЫЕ УРАВНИВАНИЯ

X. ВОЛЬФ

РЕЗЮМЕ

Выводится общая формула, определяющая разности результатов двух различных уравнений; одно из уравнений проводится с полным учетом всех корреляций, а другое — без всякой корреляции. При этом в основу обоих видов уравнений входят одни и те же величины наблюдений.

DIE ANWENDUNG VON NÄHERUNGSFORMELN BEI DER ABSTECKUNG VON KREISBÖGEN

W. ZILL, Dresden

[Eingegangen am 29. März 1965]

Für einige bei der Absteckung von Kreisbogen angewendete Näherungsformeln werden Nomogramme angegeben, die den Anwendungsbereich in verschiedenen Genauigkeitsstufen zeigen. Ein Vorschlag zur Verbesserung der bekannten Viertelmethode führt zu neuen Formeln sowohl für gleiche als auch für ungleiche Bogenlängen.

1. Einleitung

Die Berechnung der Absteckungselemente für Kreisbogenpunkte erfolgt im allgemeinen mit Hilfe trigonometrischer Funktionen oder nach Bogenabstecktabellen. Dabei ist meist die Lage der Tangenten in der Natur gegeben. Auf ihrem Schnittpunkt wird der Tangentenwinkel gemessen, der gleich dem Zentriwinkel des abzusteckenden Kreisbogens ist. Durch eine weitere Größe, z. B. den Radius, ist die Lage des Kreisbogens eindeutig bestimmt. Bei kurzen Bogenstücken und großem Radius können die notwendigen Absteckungselemente mit einfachen Näherungsformeln entweder unmittelbar berechnet oder kontrolliert werden. In fast allen Fällen genügt dazu der Rechenschieber als Rechenhilfsmittel. Infolge der bequemen Handhabung sind die Näherungsformeln in der Praxis sehr beliebt, jedoch besteht noch zu wenig Übersicht über ihre Genauigkeit und somit über die Grenzen ihres Anwendungsbereichs. Zur Klärung dieser Frage sollen besonders die im folgenden dargestellten Nomogramme beitragen.

2. Absteckung nach rechtwinkligen Koordinaten von der Tangente aus

Dieses Absteckverfahren wird für einfache Aufgaben am häufigsten angewendet. Dabei ist entweder der Abschnitt auf der Tangente oder aber die Bogenlänge bei bekanntem Radius vorgegeben.

2.1 Gegeben der Radius R und die Abszisse x auf der Tangente, gesucht die Ordinate y

Man erhält aus der Abbildung in Nomogramm 1 die bekannte Beziehung

$$x^2 + (R - y)^2 = R^2$$

$$R - y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

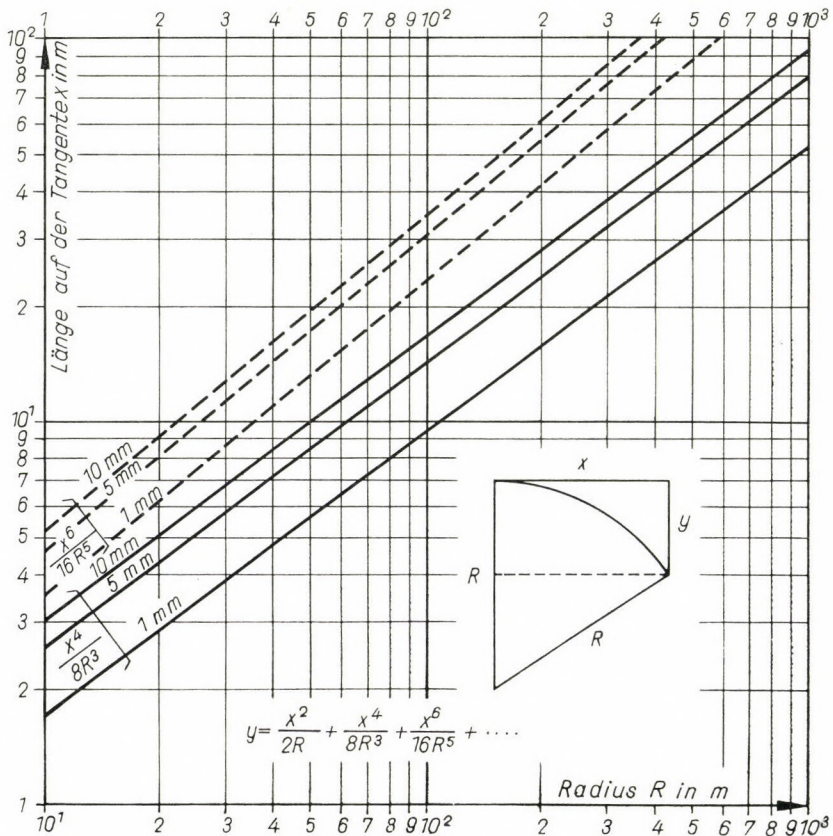
Entwickelt man die Wurzel in eine Reihe, so ergibt sich:

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \frac{x^6}{16R^5} + \frac{5x^8}{128R^7} + \dots$$

Bezeichnet man das erste Glied der Reihe mit y' , so kann man auch schreiben:

$$y = y' + \frac{y'^2}{2R} + \frac{y'^3}{2R^2} + \dots$$

Die Reihe konvergiert nicht sehr gut. Aus Nomogramm 1 ist ersichtlich, für welche Werte von x und R man y in den Genauigkeitsgrenzen von 1 mm, 5 mm und 10 mm sowohl für das erste als auch für das zweite Glied der Reihe erhält.



Nomogramm 1

2.2 Gegeben der Radius R und die Bogenlänge b , gesucht die Abszisse x und die Ordinate y

Man erhält für x :

$$x = R \sin \alpha$$

$$x = R \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^7}{5040} + \dots \right), \text{ wobei } \alpha = \frac{b}{R}$$

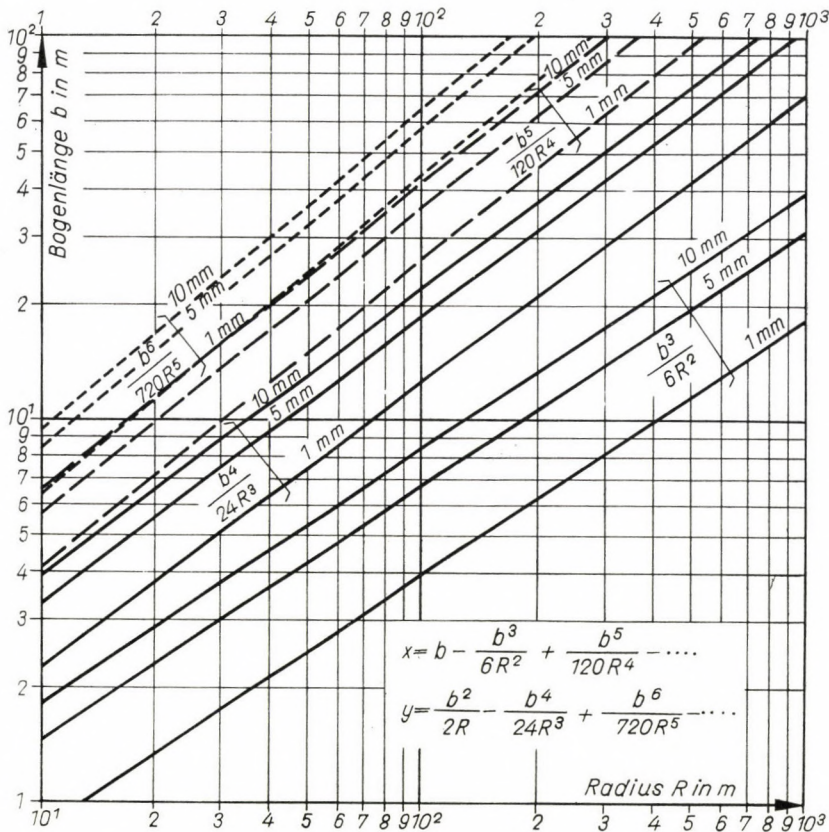
$$x = b - \frac{b^3}{6R^2} + \frac{b^5}{120R^4} - \frac{b^7}{5040R^6} + \dots$$

und entsprechend für y :

$$y = R - R \cos \alpha$$

$$y = R - R \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^6}{720} + \dots \right), \text{ wobei } \alpha = \frac{b}{R}$$

$$y = \frac{b^2}{2R} - \frac{b^4}{24R^3} + \frac{b^6}{720R^5} - \dots$$



Nomogramm 2

Bezeichnet man das erste Glied der Reihe mit y' , so kann man auch schreiben:

$$y = y' - \frac{y'^2}{6R} + \frac{y'^3}{90R^2} - \dots$$

Das Nomogramm 2 zeigt den Anwendungsbereich sowohl für die x - als auch für die y -Werte jeweils in den Genauigkeitsgrenzen 1 mm, 5 mm und 10 mm.

3. Absteckung nach Polarkoordinaten mit Hilfe von Peripheriewinkeln und Sehnen

Bei diesem Verfahren ist meist die Bogenlänge des Gesamtbogens mit dem zugehörigen Zentriwinkel gegeben. Man steckt nach gleichen Bogenlängen ab, die sich durch Teilung der Gesamtbogenlänge in n gleiche Teile ergeben. Der zur Einzelbogenlänge zugehörige Peripheriewinkel ist dann gleich dem gesamten Zentriwinkel, geteilt durch $2n$. Bei der Absteckung wird noch die zur Einzelbogenlänge zugehörige Sehne benötigt. Die Differenz zwischen der bekannten Bogenlänge b und der zu berechnenden Sehnenlänge s ergibt sich zu:

$$b - s = b - 2R \sin \alpha .$$

Dabei wird mit α der zum Bogen b gehörige Peripheriewinkel bezeichnet. In eine Reihe entwickelt, erhält man:

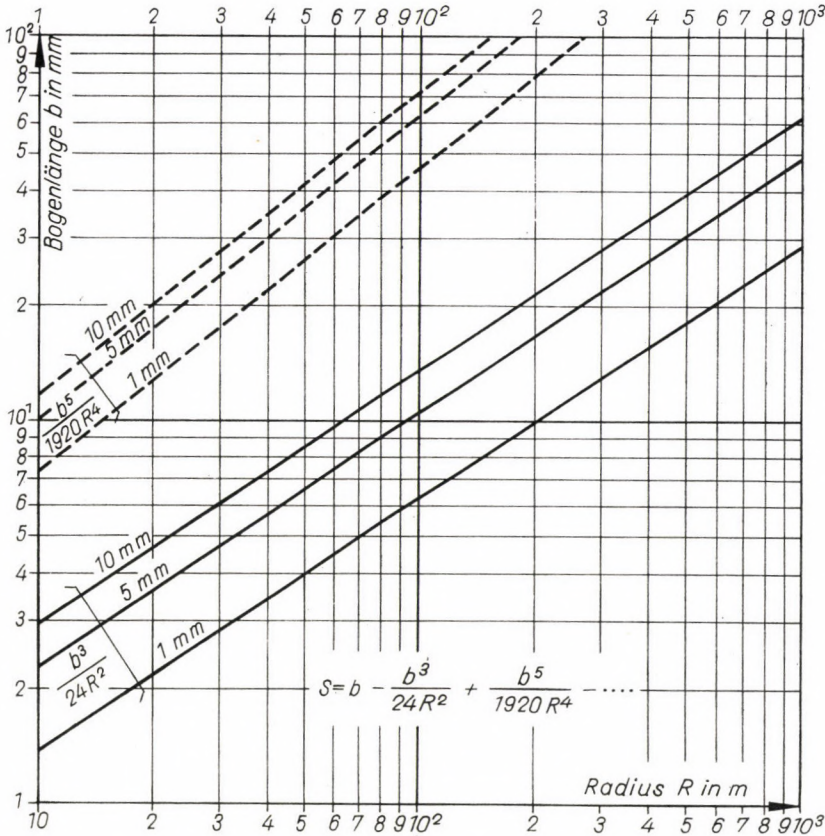
$$b - s = b - 2R \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^7}{5040} + \dots \right), \text{ wobei } \alpha = \frac{b}{2R}$$

$$b - s = b - b + \frac{b^3}{24R^2} - \frac{b^5}{1920R^4} + \dots$$

oder

$$s = b - \frac{b^3}{24R^2} + \frac{b^5}{1920R^4} - \dots$$

Diese Reihe konvergiert etwas besser. Aus dem Nomogramm 3 kann man ersehen, bis zu welchen Bogenlängen und Radien man die Sehne mit einer Genauigkeit von 1 mm, 5 mm und 10 mm gleich dem Bogen setzen kann und welcher Anwendungsbereich sich nach Verbesserung durch das erste Glied der Reihe ergibt. Die Absteckung ist dann ohne Verwendung von Tafelwerken mit genauen Werten möglich.



Nomogramm 3

4. Näherungsweise Absteckung von Kreisbogenzwischenpunkten nach der Viertelmethode

Hierbei wird vorausgesetzt, daß 3 gleichabständige Punkte eines Kreisbogens in der Natur gegeben sind. Der Radius braucht dabei nicht bekannt zu sein. Weitere in der Mitte der beiden Bogenstücke gelegene Zwischenpunkte erhält man durch Absetzen von einem Viertel der Gesamtpfeilhöhe p auf der Sehnenmitte nach bogenaußen. Dieses Verfahren wird vor allem auf der Baustelle häufig angewendet. In Form der 2/8-Methode ist es auch für Kurven mit stetig veränderlicher Krümmung anwendbar. Für die Vergrößerung des Anwendungsbereichs hat PUWEIN 1952 in der *Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins*, Heft 7/8, Seite 71, folgende Formel angegeben:

$$p_1 = \frac{p}{4} \left[1 + \left(\frac{p}{s} \right)^2 \right]$$

wobei nach der Abbildung im Nomogramm 4 die Gesamtsehne mit s bezeichnet wird. Sie muß zusammen mit p in der Natur gemessen werden, wenn sie nicht aus vorhergehenden Rechnungen bereits bekannt ist.

4.1 Vorschlag für eine Verbesserung der Viertelmethode

Mißt man nur die Teilsehne s_1 und die Gesamtpfeilhöhe p , so hat man bedeutend weniger Messungsaufwand, weil die Teilsehnen ohnehin zur Feststellung ihres Mittelpunktes beim Absetzen der Pfeilhöhen p_1 durchgemessen werden müssen. Außerdem kann man dann nach der *strengen* Beziehung $R = s_1^2/2p$ den Radius des Kreisbogens berechnen. Sollte der Radius bekannt sein, so kann die Messung von p entfallen, man berechnet p streng aus $p = s_1^2/2R$.

Es bestehen die beiden Proportionen:

$$\frac{p}{s_1} = \frac{s_1}{2R} \quad \text{und} \quad \frac{s_1}{2(R - p_1)} = \frac{p}{\sqrt{s_1^2 - p^2}}.$$

Daraus erhält man

$$p_1 = R - \frac{s_1}{2p} \sqrt{s_1^2 - p^2} \quad \text{und mit} \quad R = \frac{s_1^2}{2p}$$

$$p_1 = \frac{s_1^2}{2p} - \frac{s_1^2}{2p} \sqrt{1 - \frac{p^2}{s_1^2}}.$$

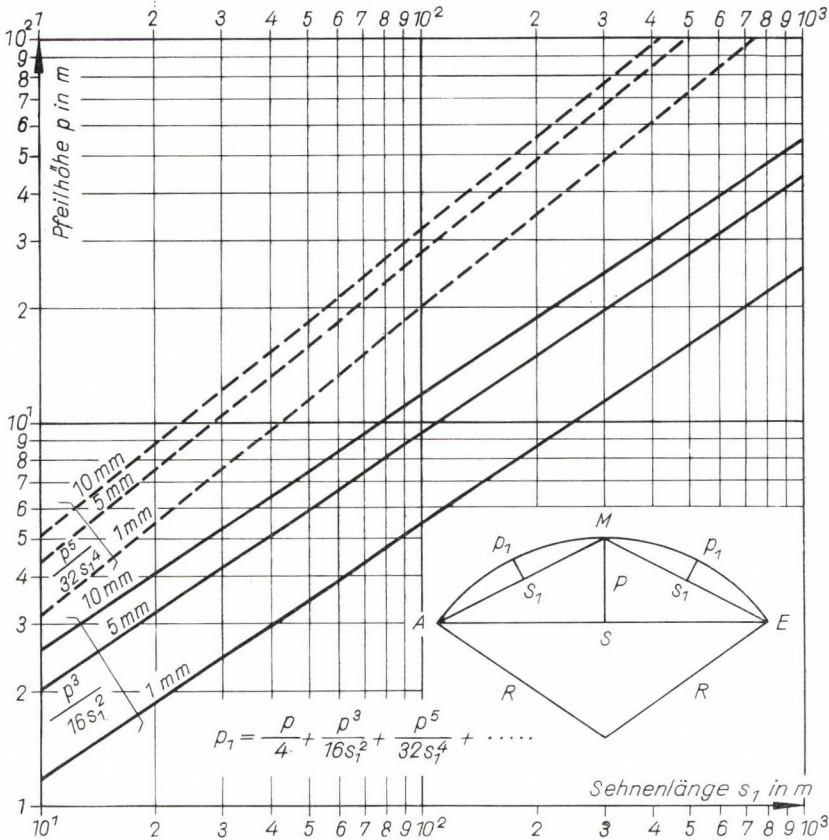
Die Wurzel in eine Reihe entwickelt, gibt

$$p_1 = \frac{p}{4} + \frac{p^3}{16 s_1^2} + \frac{p^5}{32 s_1^4} + \dots$$

Unter Vernachlässigung des 3. Gliedes kann man schreiben:

$$p_1 = \frac{p}{4} \left[1 + \left(\frac{p}{2 s_1} \right)^2 \right].$$

Zur gleichen Lösung kommt man, wenn in die unter Abschnitt 2.1 abgeleitete Reihe $y = p_1$, $x = s_1/2$ und $R = s_1^2/2p$ gesetzt wird. Die hier entwickelte Näherungsformel ist um ein geringes schärfer als die von PUWEIN angegebene. Ihr Anwendungsbereich wiederum in den Genauigkeitsgrenzen von 1 mm, 5 mm und 10 mm ist im Nomogramm 4 dargestellt.



Nomogramm 4

4.2 Anwendung der Viertelmethode bei ungleichen Bogenlängen

Sind nach Bild 1 in der Natur 3 beliebige Punkte gegeben, so ist durch sie ein Kreisbogen bestimmt. Mißt man die Sehnen s_a und s_b und die Gesamtpfeilhöhe p , so können Bogenzwischenpunkte über den halben Sehnen mit den Pfeilhöhen p_a und p_b abgesteckt werden.

Es gelten folgende Proportionen:

$$\frac{P}{s_a} = \frac{s_b}{2R} \quad \text{und} \quad \frac{s_a}{2(R - p_a)} = \frac{P}{\sqrt{s_b^2 - p^2}}$$

$$p_a = R - \frac{s_a}{2p} \sqrt{s_b^2 - p^2} \quad \text{mit} \quad R = \frac{s_a s_b}{2p}$$

$$p_a = \frac{s_a s_b}{2p} - \frac{s_a s_b}{2p} \sqrt{1 - \frac{p^2}{s_b^2}}$$

Entwickelt man die Wurzel in eine Reihe, ergibt sich:

$$p_a = \frac{p}{4} \frac{s_a}{s_b} + \frac{s_a \cdot p^3}{16 s_b^3} + \frac{s_a \cdot p^5}{32 \cdot s_b^5} + \dots$$

und entsprechend

$$p_b = \frac{p}{4} \frac{s_b}{s_a} + \frac{s_b \cdot p^3}{16 s_a^3} + \frac{s_b \cdot p^5}{32 s_a^5} + \dots$$

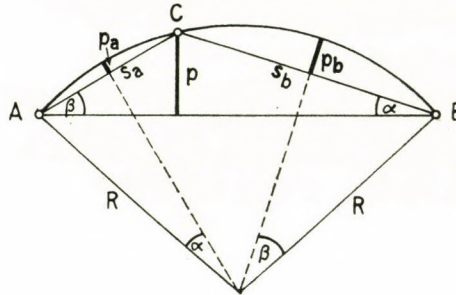


Bild 1

Unter Vernachlässigung des dritten Gliedes kann man schreiben:

$$p_a = \frac{p}{4} \frac{s_a}{s_b} \left[1 + \left(\frac{p}{2 s_b} \right)^2 \right]$$

$$p_b = \frac{p}{4} \frac{s_b}{s_a} \left[1 + \left(\frac{p}{2 s_a} \right)^2 \right].$$

Das heißt, die im Abschnitt 4.1 vorgeschlagene Verbesserung der Viertel-methode läßt sich in sehr bequemer Weise auch für den allgemeinen Fall ungleicher Bogenlängen anwenden. Allerdings ist die Genauigkeit der Pfeilhöhe noch von dem Verhältnis $s_a : s_b$ bzw. $s_b : s_a$ abhängig. Die Teilsehnenlängen sollten also nicht allzu unterschiedlich sein. Hervorzuheben ist auch hier die Möglichkeit der strengen Berechnung des Radius aus den beiden Teilsehnen und der Gesamtpfeilhöhe nach der oben angegebenen Formel.

APPLICATION OF APPROXIMATION FORMULAS IN THE SETTING OUT OF ARCS OF CIRCLES

W. ZILL

SUMMARY

For several approximate formulas used for the setting out of arcs of circle nomograms are given that show the scope of application in different degrees of accuracy. A proposal for improving the well-known "Viertelmethode" (method of quartered mid-coordinates) implies new formulas for equal as well as unequal lengths of arcs.

APPLICATION DES FORMULES D'APPROXIMATION DANS
LE JALONNEMENT D'ARCS DE CERCLES

W. ZILL

RÉSUMÉ

L'auteur donne des nomogrammes pour quelques formules approchées utilisées dans le jalonnement d'arcs de cercles, qui en montrent le champ d'application dans les différents degrés de précision. Une proposition relative au perfectionnement de la «Viertelmethode» (procédé utilisant la division en 4 parties de la flèche) conduit à de nouvelles formules valables pour des longueurs d'arcs égales et inégales.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РАЗБИВКИ
ОКРУЖНОСТИ НА ДУГИ

В. ЦИЛЛ

РЕЗЮМЕ

Для некоторых приближенных формул, применяемых для разбивки окружности на дуги, даются номограммы, показывающие области их применения для различных степеней точности. Приводится предложение по усовершенствованию известного метода «четвертей», в результате чего получаются новые формулы для дуг как с равной, так и с неравной длиной.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU
DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

Antal Tarczy-Hornoch :

MARKSCHEIDERISCHE STUDIEN

Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1963. 1010 Seiten

Der Fachwelt ist bekannt, daß ungarische Traditionen im Bergbau weit ins Mittelalter zurückreichen. Nicht selten haben markscheiderische Erfahrungen und Neuerungen befruchtend auf die Entwicklung anderer Länder eingewirkt. Wertvolle Beiträge sind vor allem auf instrumentellem Gebiet und in riblicher Darstellung von ungarischen Persönlichkeiten geleistet worden. Die Bergakademien Schemnitz und Sopron sind die bekannten Geburtsstätten wissenschaftlichen Lebens mit einer Reihe erfolgreicher Gedanken.

Als jüngstes Glied in dieser Kette können wir Antal Tarczy-Hornoch betrachten. Vier Jahrzehnte intensiver Arbeit haben ihn zu einem in allen Erdteilen hoch geschätzten Wissenschaftler gemacht. Im Jahre 1963 gab er den ersten Band »Markscheiderische Studien« heraus, die einen guten Einblick in die Vielseitigkeit und Gründlichkeit seiner wissenschaftlichen Abhandlungen auf markscheiderischem Fachgebiet gewähren. Betrachtet man seine Arbeiten im Rahmen der Verwendung für die Ausbildung auf Hochschulebene, so stellt man uneingeschränkt fest, daß seine Studien eine hervorragende Grundlage für markscheiderische Spezialvorlesungen, Seminare und Konsultationen bilden.

Im folgenden sei es mir gestattet, meine langjährigen Erfahrungen beim Markscheiderinstitut der Bergakademie Freiberg unter dem genannten Aspekt in wenigen Zügen zu umreißen.

Die beiden ersten wissenschaftlichen Arbeiten von Tarczy-Hornoch haben ihm frühzeitig nicht nur die für seine langjährige Hochschultätigkeit erforderlichen akademischen Grade, sondern was noch viel bedeutungsvoller ist, die Hochschätzung auf internationaler Ebene eingebracht. Seine besonders anschaulichen und pädagogisch gut durchdachten Ausführungen in der Anwendung von mathematischen Kenntnissen auf die Darstellende Geometrie und damit auf markscheiderische Projektierungsaufgaben kommen zum Ausdruck in »Neue Gesichtspunkte zur rechnerischen Lösung der Markscheideraufgaben« und in der Arbeit »Das Verwerferproblem im Lichte des Markscheiders«. Da die mathematische Durchdringung viel vollkommener ist als die zeichnerischen Methoden der Darstellenden Geometrie, wendet sich Tarczy-Hornoch weitgehend der rechnerischen Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum zu und behandelt die Beziehungen zwischen Geraden und Geraden, Geraden und Ebenen sowie Ebenen und Ebenen. Zur Vereinfachung charakterisiert er eine Ebene durch Steigrichtung und Steigwinkel. Auf diese Weise werden die Winkelfunktionen positiv. Mathematische Gewandtheit und verblüffende Klarheit in der Abhandlung führen den Studierenden aus der Verkrampfung schülerhafter Vorstellungen in eine gelockerte Gedankenbeweglichkeit. Laufend werden die Beziehungen und Anwendungen zum Bergbau aufgezeigt, wodurch die Beispiele ansprechend und interessant wirken, so daß auf diese Weise der Eindruck einer trockenen Materie überhaupt nicht entsteht. Die Erziehung zum wissenschaftlichen Denken wird durch die reichlich angezogenen Literaturstellen nachhaltig gefördert, da die im Schrifttum bestehenden Angaben vermerkt, ihre Brauchbarkeit untersucht und evtl. als unzulänglich verbessert oder ergänzt werden. Mit Genugtuung nimmt der Leser von der Dankbarkeit und Verehrung Kenntnis, die Tarczy-Hornoch wiederholt seinem Lehrer und Meister Prof. Aubell zollt. Richtungweisend grenzt er das Aufgabengebiet zwischen Geologie und Markscheidekunde ab, indem er den mathematischen Teil des Verwerferproblems einschließlich der gesamten Projektierung dem Markscheider zuweist, während die Bearbeitung genetischer Fragen ausschließlich dem Geologen vorbehalten bleibt. In gleicher Klarheit lassen sich hin und wieder auftretende Überschneidungen in der Vorratserfassung lösen. Während die gesamte Erkundung ureigenstes Gebiet der Geologen darstellt, ist die Erfassung und Einschätzung betrieblicher Vorräte Aufgabe des Markscheiders, da die Projektierung der

Lagerstättenendschaften und damit die Bestimmung der Kreuzlinien eine der unerläßlichen Voraussetzungen für die flächenmäßige Abgrenzung zum Inhalt hat. Das Streben nach Klarheit kommt zuletzt darin zum Ausdruck, daß eine Systematik in der Nomenklatur im Unterschied zu der bisher sehr unterschiedlichen Bezeichnung gleicher Größen bei jeder sich bietenden Gelegenheit aufgestellt wird. Auch in dieser Hinsicht weist Tárczy-Hornoch vorausblickend der Fachwelt die Schranken, die für ein gegenseitiges Verstehen eine wohlthuende Voraussetzung sind. Bisweilen bestehende Zweifel der studierenden Generation in der allumfassenden Machtstellung mathematischen Denkens werden in vielerlei Varianten immer wieder aufs neue über jeden Zweifel erhaben zerstreut, so daß Fehlschlüsse nur auf Grund räumlich unzulänglicher Vorstellungen aufgedeckt werden können. Bei aller Hochachtung gegenüber vorhandenem Gedankengut mit präziser Angabe der Quellen tritt der junge Gelehrte mit seiner erschöpfenden Bearbeitung und bisweilen übertriebener Bescheidenheit in die Öffentlichkeit. Die wohlthuende Art, mit der eingehende Rezensionen der Fachwelt behandelt werden, kennzeichnet die Überlegenheit Hornochscher Gedankenfülle. Beispiele hierfür bieten seine Veröffentlichungen »Beitrag zur Ausrichtung der Verwerfungen« und »Über die exakte Behandlung des Verwerferproblems«. Gegen Überheblichkeiten zeigt sich Tárczy-Hornoch bewußt aggressiv. Er sucht geradezu den Meinungsstreit und pariert seinem Gegner mit Überlegenheit.

Neu aufkommenden Meßmethoden weist er den Platz zu, der ihnen gebührt. Bei aller Bedeutung, die der Photogrammetrie für den Bergbau zukommt, schließt Tárczy-Hornoch seine Ausführungen in dem Artikel »Die Photogrammetrie im Dienste des Bergbaues« mit den Worten: »Kein Meßverfahren ist universal und so auch die Photogrammetrie nicht. Wir sind eine wissenschaftliche Gesellschaft, deren Ziel nicht so sehr die Propaganda, als eher die sachliche Erkennung der Tatsachen ist und deshalb dürfen wir in gegebenen Fällen auch vor Feststellungen negativen Sinnes nicht zurückschrecken.«

Maßgebender Anteil in der Vervollkommnung der Ausgleichung von Einrechnungszügen, offenen Polygonzügen und im Voranschlag von Durchschlagszügen mit einer Reihe von Veröffentlichungen kommt Tárczy-Hornoch in der internationalen Fachwelt zu. Folgende Artikel stammen aus seiner Feder:

1. Über die Ausgleichung der Einrechnungszüge
2. Genauigkeitsvoranschläge bei Durchschlagszügen
3. Über die verknoteten Einrechnungszüge
4. Zur Fehlertheorie der offenen Polygonzüge
5. Die durch den Einrechnungszug erzielbare Orientierungsgenauigkeit
6. Der Einfluß der regelmäßigen Fehler auf die Orientierungsgenauigkeit der Einrechnungszüge
7. Genauigkeitsvoranschläge bei Durchschlagsketten
8. Die günstigste Gewichtsverteilung im ausgeglichenen Einrechnungszug
9. Eine weitere Methode zur strengen Ausgleichung der Einrechnungszüge.

Mit beispielloser Gründlichkeit und mathematischer Versiertheit werden die in der Markscheidkunde bekannten Probleme in ihrer gesamten Breite und Tiefe behandelt. Übersetzungen in mehrere Sprachen mögen ein Maßstab für ihre Güte sein.

Ein umfangreiches Arbeitsgebiet stellt auch die Auseinandersetzung mit Orientierungsmessungen dar. Maßgebend sind nachfolgende Themas:

1. Das markscheiderische Steilschachtproblem
2. Fehlertheoretische Studien über das Schachtanschlußdreieck
3. Die günstigste Gewichtsverteilung im ausgeglichenen Schachtanschlußdreieck
4. Über das Schachtlotproblem.

Diese Studien sind vielfach Gegenstand internationaler Auseinandersetzungen gewesen. Vor allem in der deutschen Fachliteratur haben sie eine Reihe von Entgegnungen ausgelöst.

Ein beliebtes Thema von Tárczy-Hornoch ist die Beschäftigung mit der Vervollkommnung der Zwangszentrierung. Hier seien genannt:

1. Die Drehhülsenzwangszentrierung
2. Zwangszentrierungen und ihre Bedeutung bei Tunnelabsteckungen
3. Die Drehprismenausstellung, eine weitere Zwangszentrierungsmethode.

Erstaunenswert ist sein Gedächtnis aus Studien mit der Frühgeschichte der Markscheidkunde und ihre kritische Einschätzung. Sie kommen zum Ausdruck in:

1. Zur Geschichte des Grubenrißwesens
2. Zur Vereinheitlichung des Grubenrißwesens.

Mit diesen Angaben sind nur die bedeutungsvollen Veröffentlichungen erwähnt, denen in der Ausbildung von Studierenden der Fachrichtung Markscheidwesen aktuelle Bedeutung zukommt. Ihr Studium wirkt erzieherisch in der Gründlichkeit sowie Gewandtheit und ist geeignet, die Liebe zum Beruf zu wecken und die heranwachsende Generation dafür zu begeistern.

K. Neubert

INDEX

- Arnold, K.* : Zur Genauigkeit der Formel für das gravimetrische Zusatzglied — On the Precision of the Formula for the Gravimetric Correction Term — Sur la précision de la formule du terme de correction gravimétrique — *Арнольд, К.*: О точности формулы для определения гравиметрического дополнительного члена 243
- Böhm, J.* : Messung von vertikalen Erdkrustenbewegungen im Lichte der Fehlertheorie — The Measuring of Vertical Motions of the Earth's Crust in the Light of the Theory of Errors — Mesurages des mouvements verticaux de la croûte terrestre à lumière de la théorie des erreurs — *Бем, Й.*: Измерение вертикальных движений земной коры с учетом теории погрешности 251
- Buchheim, W.* : Über das Verhältnis der stochastischen Behandlung von Setzungs-
bewegungen in Lockermassen nach J. Litwiniszyn zur Lückendiffusions-Theorie —
On the Relation of the Stochastic Treatment of the Settling of Loose Rock Mas-
ses According to J. Litwiniszyn, to the Interspace Diffusion Theory — Sur la
relation du traitement stochastique, selon J. Litwiniszyn, de la sédimentation
de masses de roches friables avec la théorie de la diffusion interspatiale — *Бух-
хейм, В.*: Об отношении стохастической обработки процессов оседания
рыхлых масс по методу Й. Литвинисына к теории щелевой диффузии 261
- Egyed, L.* : The Change of Ellipticity of an Expanding Earth — Die Veränderung der Ab-
plattung der sich ausdehnenden Erde — La variation de l'ellipticité en cas d'une
Terre en dilatation — *Эдьед, Л.*: Изменение сжатия Земли в случае расширя-
ющейся Земли 273
- Ertel, H.* : Dynamische Morphologie der Schildvulkane — Dynamic Morphology of Shield
Volcanoes — Morphologie dynamique des volcans en bouclier — *Эртель, Х.*:
Динамическая морфология щитовых вулканов 277
- Fanselau, G.* : Zur Frage nach der Realität des geomagnetischen Außenfeldes — On the
Problem of Reality of the External Geomagnetic Field — Sur le problème de la
réalité du champ géomagnétique extérieur — *Фанзелау, Г.*: К вопросу о
реальности внешнего геомагнитного поля 281
- Hristov, V. K.* : Ausgleichung korrelierter Beobachtungen nach Bedingungen bei singulärer
Korrelationsmatrix — Adjustment of Correlated Conditional Observations in
Case of a Singular Correlation Matrix — La compensation d'observations condition-
nelles corrélées en cas de matrice de corrélation singulière — *Христов, В. К.*:
Выравнивание прокоррелированных наблюдений при наличии сингулярной кор-
реляционной матрицы 295
- Kamela, Cz.* : Die Perspektiven der Modernisierung der klassischen Triangulation —
The Perspectives of a Modernization of Classical Triangulation — Perspectives
de modernisation de la triangulation classique — *Камела, Ц.*: О перспекти-
вах модернизации классической триангуляции 305
- Ledersteger, K.* : Das Normalsphäroid der Erde und die dynamische Bestimmung seiner
geometrischen Parameter — The Normal Spheroid of the Earth and the Dynamical
Determination of its Geometric Parameters — Le sphéroïde normal de la terre et
la détermination dynamique de ses paramètres géométriques — *Ледерштегер,
К.*: Нормальный сфероид Земли и определение его геометрических параметров 311

- Lucke, O.* : Zur Bestimmung der Dichte des Neutralgases in der hohen Atmosphäre aus Satellitenbeobachtungen — On the Determination of the Density of Neutral Gas in the upper Atmosphere according to Satellite Observations — Détermination de la densité du gaz neutre dans l'atmosphère supérieure par observations de satellites — *Луке, О.* : К вопросу об определении плотности нейтральных газов в высоких слоях атмосферы по наблюдениям искусственных спутников ... 323
- Meißer, O.* : Praktischer Einsatz der modernen Ingenieurgeophysik — Practical Applications of Modern Engineering Geophysics — L'application pratique de la géophysique d'ingénieur — *Меузер, О.* : Практическое применение современной инженерной геофизики 341
- Peschel, H.* : Die internationale geodätische Bibliographie — The International Geodetic Bibliography — La bibliographie géodésique internationale — *Пешел, Х.* : Международная библиография по геодезии 345
- Porstendorfer, E.*—*Porstendorfer, G.* : Modelle zur Deutung des anomalen Verhaltens geomagnetischer Variationen über großen zylindrischen Sedimentbecken — Models for the Interpretation of the Anomalous Behaviour of Geomagnetic Variations over Large Cylindrical Sedimental Basins — Modèles pour l'interprétation du comportement irrégulier des variations géomagnétiques au-dessus des grands bassins sédimentaires cylindriques — *Порстendorfer, Э.*—*Порстendorfer, Г.* : Модели для выяснения аномального поведения геомагнитных вариаций над крупными цилиндрическими осадочными бассейнами 351
- Ramsayer, K.* : Über die Genauigkeit der Bestimmung der astronomischen Refraktion — On the Accuracy of the Determination of the Astronomical Refraction — Sur la précision de la détermination de la réfraction astronomique — *Рамзайер, К.* : О точности определения астрономической рефракции 361
- Rinner, K.* : Die räumliche Drehstreckung — Linear Conformal Transformation in Space — La transformation linéaire dans l'espace — *Риннер, К.* : Конформная линейная трансформация в пространстве 373
- Rüger, W.* : Betrachtungen zur Paßpunktbestimmung durch Meßtischphotogrammetrie bei terrestrisch-photogrammetrischen Aufnahmen von Braunkohlentagebauen — Considerations on the Determination of Minor Control Points by Way of Plane-Table Photogrammetry in Terrestrial-Photogrammetrical Surveying in Brown Coal Surface Mining Works — L'exécution du canevas de restitution avec photogrammétrie par intersection dans les levés terrestres photogrammétriques des mines de charbon à ciel ouvert — *Рюгер, В.* : Некоторые соображения по определению связующих точек мензульно-фотограмметрическим методом при наземной фотограмметрической съемке открытой разработки бурых углей . 393
- Sandig, H. U.* : Die Bestimmung der Lotabweichung η für Potsdam aus Sternbedeckungen — The Determination of the Potsdam Deflection of the Plumbline η from Star Occultations by the Moon — Détermination de la déviation de la verticale η de Potsdam, sur la base de l'occultation d'étoiles — *Сандиг, Х. У.* : Определение отклонения отвеса η для Потсдама по покрытиям звезд 405
- Spickernagel, H.* : Über markscheiderische Meßergebnisse zur Feststellung der durch bergmännischen Abbau verursachten Gebirgsbewegungen — On the Results of Underground Surveys for the Determination of Rock Displacements due to Mining Operation — Mesurages géométriques souterrains pour la détermination des mouvements de roches produits par les opérations minières — *Шпикернагель, Х.* : О результатах маркшейдерских работ по определению смещений грунта, связанных с горными работами 413
- Stiller, H.* : Zur Deutung differentialthermoanalytischer Untersuchungen an Titanomagnetiten bei Verwendung von unmagnetischem und magnetischem Vergleichsmaterial — On the Interpretation of Differential Thermal Analytical Investigations of Titanomagnetites under the Application of Non-Magnetic and Magnetic Comparison Materials — Sur l'interprétation des recherches thermoanalytiques différentielles de titanomagnétites avec application de matériaux non magnétiques et magnétiques — *Штиллер, Х.* : Об интерпретации дифференциально-термического анализа титаномagnetитов с применением немагнитного и магнитного сравнительных материалов 429

<i>Wolf, H.</i> : Der Einfluß von Korrelationen auf die Unbekannten einer Ausgleichung — The Influence of Correlations upon the Unknowns of an Adjustment — Influence des corrélations sur les inconnues d'une compensation — <i>Вольф, Х.</i> : О влиянии корреляций на неизвестные уравнения	441
<i>Zill, W.</i> : Die Anwendung von Näherungsformeln bei der Absteckung von Kreisbögen — Application of Approximation Formulas in the Setting out of Arcs of Circles — Application des formules d'approximation dans le jalonnement d'arcs de cercles — <i>Цилл, В.</i> : Применение приближенных формул для разбивки окружности на дуги	447
Recensio	
<i>Tárczy-Hornoch, A.</i> : Markscheiderische Studien (K. Neubert)	457

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1965. IX. 23. — Terjedelem: 19,50 (A/5) ív 42 ábra

65.61388 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

