

ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS



VOLUMEN IUBILARE



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST  
1965

ACTA TECHN. HUNG.



# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

*Acta Technica*  
Nádor u. 7.  
Budapest V.  
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.



ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS  
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT  
A. GELEJI

TOMUS 50

VOLUMEN IUBILARE



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST  
1965







## PREFACE

TO VOLUME 50

Before the Liberation of Hungary scientists who wished to publish papers or lectures in a foreign language, could only do so abroad, or within the limited space available in the *Publications of the Faculty of Mining and Geotechnics, Sopron*, or by the *Publications of the University of Technical Sciences, Budapest*.

With the reorganization of the Hungarian Academy of Sciences in 1949 the situation was radically changed. The Academy's Section of Technical Sciences started two scientific reviews: one published in Hungarian and the other, the *Acta Technica*, in foreign languages.

The first volume of the *Acta Technica* was published in 1950 and today, in 1965, the 20th year after the Liberation, the 50th volume is to appear. This means some 25 000 pages of scientific literature within fourteen years.

When starting the *Acta Technica*, we wanted this review to become a comprehensive scientific survey of the results achieved in the research institutes of the Academy of Sciences and in those supported by the Academy. Since then progress in the technical sciences brought with it an ever expanding research activity, which of course meant an increasing number of scientific communications. So that the *Acta Technica* have outgrown themselves. It is therefore planned to break it up into several series, the first of which is *Series Geodaetica et Geophysica*.

It appears that the *Acta Technica* have found a meritable place in the literature and are now integrated among the appreciated technical journals of the world; a sign of this is the increasing number of foreign scientists utilizing their space.

On the occasion of the publication of this, the fiftieth, volume of *Acta Technica* we wish to express our thanks and gratitude to the responsible government authorities, to the Hungarian Academy of Sciences, and, last but



not least, to all the workers, past and present, who helped creating this international forum for bringing to the notice of the world technical-scientific results achieved by researchers in this country. Our special thanks are due to those foreign scientists who honoured us by contributing their valuable articles to the present issue.

**Prof. Dr. A. Geleji**

Member of the Hungarian Academy  
of Sciences,  
Editor-in-Chief of the *Acta Technica*

# ÜBER DIE BERECHNUNG DER DURCHBIEGUNG EINER MEMBRAN

J. BARTA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 1. Oktober 1964]

Der Rand ist unverschieblich. Die Last ist gleichmäßig verteilt. Die Durchbiegung im Punkte  $P$  ist mit  $w_p$  bezeichnet. In diesem Aufsatz ist bewiesen, daß für  $w_p$  die Einschränkung (3) gilt. Ein numerisches Beispiel erläutert die Anwendung der Formel (3).

Die Membran ist durch den ebenen Bereich  $B$  und durch die auf die Längeneinheit bezogene Spannkraft  $S$  charakterisiert. Wir beschränken uns auf den Fall, wo  $B$  einfach zusammenhängend ist. Der Rand von  $B$  wird mit  $R$  bezeichnet (Bild 1). Senkrecht auf die Membran wirkt eine gleichmäßig verteilte Last von der Intensität  $q$ . Die Durchbiegung der Membran wird mit  $w(x, y)$  bezeichnet. Wie es üblich ist, wird  $w(x, y)$  als klein vorausgesetzt.  $S$  und  $q$  sind gegebene Konstanten. Die Funktion  $w(x, y)$  ist, wie bekannt, durch die Differentialgleichung

$$\Delta w = -\frac{q}{S} \quad \text{in } B \quad (1)$$

und durch die Randbedingung

$$w = 0 \quad \text{an } R$$

bestimmt. Dabei ist  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  der Laplacesche Operator.  $w(x, y)$  ist also die Lösung des Randwertproblems (1), (2).

$P$  sei ein gegebener Punkt des Bereiches  $B$ . Mit  $w_p$  bezeichnen wir den Wert von  $w(x, y)$  im Punkte  $P$ . Es soll hier gezeigt werden, wie eine untere und eine obere Schranke für den Wert  $w_p$  ermittelt werden können. Man nimmt eine Funktion  $\omega(x, y)$ , die im  $B$  zweimal stetig differenzierbar und sonst beliebig ist, und benützt dann die Formel

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\min} \frac{q}{S} \leq w_p \leq \left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\max} \frac{q}{S} \quad (3)$$

Bei der Bildung des Minimums und des Maximums ist  $\omega_R$  der Wert von  $\omega(x, y)$  am Rande  $R$ , und  $(-\Delta\omega)_B$  der Wert von  $-\Delta\omega$  im Bereich  $B$ .

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\min} \frac{q}{S}$$



ist also eine untere Schranke,

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\max} \frac{q}{S}$$

eine obere Schranke für  $w_p$ .

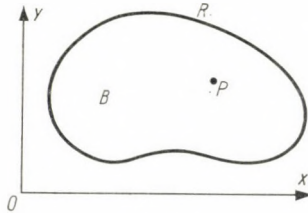


Bild 1

### Der Beweis der Formel (3)

$G(x, y; \xi, \eta)$  ist die Greensche Funktion des Bereiches  $B$ . Dann ist

$$w_p = \frac{1}{2\pi} \int_R \frac{\partial G}{\partial n} w dR - \frac{1}{2\pi} \int_B G \Delta w dB. \quad (4)$$

Die Gleichung (4) drückt eine bekannte Eigenschaft der Greenschen Funktion aus. In analoger Weise läßt sich

$$\omega_p = \frac{1}{2\pi} \int_R \frac{\partial G}{\partial n} \omega dR - \frac{1}{2\pi} \int_B G \Delta \omega dB \quad (5)$$

schreiben. Führen wir (1) und (2) in (4) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$w_p = \frac{q}{2\pi S} \int_B G dB. \quad (6)$$

Eine weitere Eigenschaft der Greenschen Funktion ist, daß  $G$  und  $\partial G/\partial n$  nicht negativ sind. Daher dürfen wir auf die beiden Integrale in (5) den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden. So ist

$$\omega_p = \frac{\omega^*}{2\pi} \int_R \frac{\partial G}{\partial n} dR - \frac{(\Delta\omega)^{**}}{2\pi} \int_B G dB, \quad (7)$$

wobei  $\omega^*$  der Wert von  $\omega(x, y)$  an einer geeignet gewählten Stelle von  $R$  ist, und  $(\Delta\omega)^{**}$  derjenige von  $\Delta\omega$  an einer geeignet gewählten Stelle von  $B$ . Es ist ferner, wie bekannt,

$$\int_R \frac{\partial G}{\partial n} dR = 2\pi.$$

(7) hat also die Form

$$\omega_p = \omega^* - \frac{(\Delta\omega)^{**}}{2\pi} \int_B G dB$$

oder, was dasselbe ist,

$$0 = \frac{\omega_p - \omega^*}{(-\Delta\omega)^{**}} \cdot \frac{q}{S} - \frac{q}{2\pi S} \int_B G dB. \tag{8}$$

Werden (6) und (8) addiert, so wird

$$w_p = \frac{\omega_p - \omega^*}{(-\Delta\omega)^{**}} \cdot \frac{q}{S}.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Einschränkung (3).

### Praktische Winke für die Anwendung der Formel (3)

Die zweimal stetig differenzierbare Funktion  $\omega(x, y)$  darf man beliebig wählen, doch wird man bestrebt sein, sie so zu wählen, daß die untere Schranke

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\min} \frac{q}{S}$$

möglichst groß oder die obere Schranke

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\max} \frac{q}{S}$$

möglichst klein sei. Während der Bildung des Minimums und des Maximums wird  $P$  als ein fester Punkt betrachtet. Das Minimum bzw. das Maximum ist so zu bilden, daß  $\omega_R$  und  $(-\Delta\omega)_B$  sich unabhängig voneinander verändern. Deshalb ist die Anwendung der Formel (3) nicht allzu einfach. Doch wird sie ziemlich einfach sein, wenn man entweder

$$\Delta\omega = \text{konst. in } B, \tag{9}$$

oder

$$\omega = 0 \quad \text{an } R \tag{10}$$

wählt. Ein geeignetes  $\omega(x, y)$  wird durch Probieren oder durch die Verwendung der sogenannten Kollokationsmethode (oder anderer bekannten Näherungsmethoden) gefunden.

### Beispiel

Der Bereich der Membran sei ein symmetrisches Parabelsegment (Bild 2). Ihre auf die Längeneinheit bezogene Spannkraft sei  $S$ . Ihre Last habe die konstante Intensität  $q$ . Gesucht ist die Durchbiegung im Punkte  $P$ .

Dazu setzen wir zuerst

$$\omega = (1 - y - x^2) y .$$

Dieser Ansatz erfüllt (10) und liefert

$$\omega_p = (1 - 0,5 - 0) 0,5 = 0,25 ,$$

$$\omega_R = 0 ,$$

$$-\Delta\omega = 2 + 2y ,$$

$$\frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} = \frac{0,25 - 0}{2 + 2y_B} ,$$

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\min} = \frac{0,25}{2 + 2 \cdot 1} = 0,0625 ,$$

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_R} \right]_{\max} = \frac{0,25}{2 + 2 \cdot 0} = 0,125 .$$

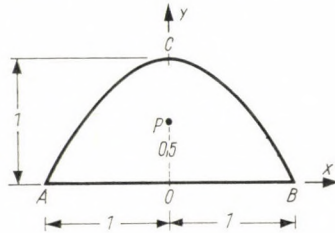


Bild 2

Mithin liefert die Formel (3) die Einschränkung

$$0,0625 \frac{q}{S} \leq w_p \leq 0,125 \frac{q}{S} .$$

Sodann setzen wir

$$\omega = (1 - y - x^2) y (4 - y) .$$

Auch dieser Ansatz erfüllt (10). Aus ihm folgt

$$\omega_p = (1 - 0,5) 0,5 (4 - 0,5) = 0,875 ,$$

$$\omega_R = 0 ,$$

$$-\Delta\omega = 10 + 2y - 2x^2 - 2y^2 ,$$

$$(-\Delta\omega)_{\min} = 8 , \quad (-\Delta\omega)_{\max} = 10,5 ,$$

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\min} = \frac{0,875 - 0}{10,5} = 0,083 \dots ,$$

$$\left[ \frac{\omega_p - \omega_R}{(-\Delta\omega)_B} \right]_{\max} = \frac{0,875 + 0}{8} = 0,109 \dots .$$

Gemäß (3) haben wir also die Einschränkung

$$0,083 \frac{q}{S} < w_p < 0,11 \frac{q}{S} .$$

Es ist leicht eine solche Funktion  $\omega(x, y)$  zu finden, daß einerseits (9) erfüllt ist, und andererseits  $\omega_R$  nur zwischen engen Grenzen variiert. Sie sei von der Form

$$\omega = -y^2 + ay + b(3x^2y - y^3) + c(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5) , \quad (11)$$



worin  $a, b, c$  Konstanten sind. Durch (11) ist (9) erfüllt. Die zahlenmäßigen Werte der Konstanten  $a, b, c$  haben wir durch die sogenannte Randkollokation ermittelt, und so fanden wir

$$\omega = -y^2 + 0,7853y - 0,22747(3x^2y - y^3) - 0,01277(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5).$$

Unter der Benützung dieses Ansatzes haben wir

$$\omega_p = -0,5^2 + 0,7853 \cdot 0,5 - \dots = 0,1706\dots,$$

$$\omega_R = \begin{cases} 0 & \text{an } AOB, \\ 0,03904y - 0,18989y^2 + 0,29132y^3 - 0,1277y^4 - 0,01277y^5 & \text{an } ACB. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\omega_{R\min} = 0, \quad \omega_{R\max} < 0,003.$$

Ferner ergibt sich

$$-\Delta\omega = 2.$$

Damit lautet die Einschränkung (3)

$$\frac{0,1706\dots - 0,003}{2} \cdot \frac{q}{S} < w_p \leq \frac{0,1706\dots - 0}{2} \cdot \frac{q}{S},$$

woraus

$$0,0838 \frac{q}{S} < w_p < 0,0854 \frac{q}{S}$$

folgt. Das arithmetische Mittel ist

$$\frac{0,0838 + 0,0854}{2} \cdot \frac{q}{S} = 0,0846 \frac{q}{S}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß der Wert  $0,0846 q/S$  sich um weniger als 1% von dem strengen Wert  $w_p$  unterscheidet. Die Genauigkeit des Resultates kann noch gesteigert werden, wenn man in (11) mehrere Glieder berücksichtigt.

## ON THE DEFLECTION ANALYSIS OF A MEMBRANE

J. BARTA

### SUMMARY

The circumference is immovable and the load is uniformly distributed. The displacement in point  $P$  is denoted by  $w_p$ . In this paper, author demonstrates that the inequality (3) is valid for  $w_p$ . A numerical example elucidates the application of formula (3).

## CALCUL DU DÉPLACEMENT D'UNE MEMBRANE

J. BARTA

### RÉSUMÉ

Le bord de la membrane est une courbe plane inamovible, la charge est uniformément répartie. Le déplacement d'un point  $P$  étant désigné par  $w_p$ , l'auteur démontre que l'inégalité (3) est valable, c'est-à-dire que  $w_p$  peut être soumis à une limitation. Un exemple numérique illustrant l'application de la formule (3) termine l'étude.

## О РАСЧЕТЕ ПЕРЕГИБА ПЛЕНКИ

И. БАРТА

### РЕЗЮМЕ

Край пленки представляет собою несдвигаемую плоскую кривую, нагрузка ее равномерно распределяется,  $w_p$  означает перегиб точки  $P$ . В данной работе доказано, что имеет место неравенство (3), то есть  $w_p$  можно ограничить верхним и нижним пределами. Применение формулы (3) объясняется числовым примером.



# SOME CONCEPTS OF MODEL INVESTIGATIONS ON SEDIMENT TRANSPORTING WATERCOURSES

J. L. BOGÁRDI

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received July 18, 1963]

The fundamental problem in scale model investigations is to ensure similarity between the model and the prototype. It will be recalled that full mechanical similarity cannot be realized in hydromechanical scale model tests. In the majority of cases, aside from geometric and kinematic similarity, partial dynamic similarity can be achieved at best, where the similarity of two forces considered significant for the phenomenon under study is only ensured. The similarity of other forces is sacrificed in full appreciation of the error introduced thereby.

When reproducing natural watercourses in the model even the criterion of geometric similarity must often be neglected because of the necessity of distorting the vertical dimensions in order to satisfy the criteria of reproducibility at the given horizontal scale, *e.g.* to ensure turbulent flow in the model. The distortion of geometric dimensions involves the necessity of distorting other physical quantities as well.

If the prototype to be investigated in the model is a sediment transporting watercourse, then, naturally, the conditions of sediment transportation must also be allowed for. These additional criteria are likely to introduce further inconsistencies. The conclusion eventually arrived at is, that studies of this nature can be performed in distorted models only, in which aside from the geometry of the model the diameter, or even the specific gravity of the sediment particles is distorted. This, however, involves the distortion of other quantities as well. Various criteria can be combined into a set of condition equations which lacks any exact solution because of its inherent inconsistencies. In the knowledge of the problem there is a possibility for satisfying particular condition equations which are the most significant for the phenomenon under consideration and for concentrating the errors in the condition equations which contain the less stringent criteria.

## 1. The Acting Forces and the Properties of the Moving Fluid

The five forces generally taken into consideration during investigations of fluid motion are each related to a special property of the fluid, *i.e.*, their value always depends also on one property of the fluid. It will be recalled that inertia forces are related to the inertia mass of the fluid. The inertia mass is not identical with the so-called ponderous mass, but since the inertia of material is proportionate to the mass measured by its weight, the quantity used during the investigations is always the ponderous mass, or essentially the weight density  $\rho$  of the fluid. Consequently, from among the properties of the fluid the inertia force in hydromechanical investigations is related to density. The corresponding counterparts are the friction force and the dynamic viscosity  $\eta$  of the fluid, gravity force and the density  $\rho$  of the fluid, the capillary force and the molecular composition of the fluid, and finally the elastic force and the elasticity of the fluid.



As it is known from the description of the special model laws and the  $Re$ ,  $Fr$ ,  $We$  and  $Ca$  numbers, the similarity of a single force besides the inertia force, that is, the similarity of *altogether two forces* is always ensured by the identity of one of these dimensionless numbers [1, 2].

Whichever of the four dimensionless numbers is adopted as the only criterion of similarity, the similarity of three forces is obviously neglected. On the other hand, since the number of criteria to be satisfied for ensuring (partial) similarity is reduced to one, in similar cases the selection of the scale ratios is largely unrestricted. The most important consequence thereof is that the properties of the model fluid involved in the dimensionless number in question may be selected at will. The prototype fluid being mostly water, mostly the same is used in the model as well. It should be noted here that today there are already several additional criteria to be taken into account, which of course entail certain restrictions.

The adoption of two of the above dimensionless numbers as similarity criteria entails more stringent restrictions which are in many cases impossible to comply with. The observation of two dimensionless numbers would involve the identical reproduction of three forces. It should be observed immediately that the criteria obtained will differ according to whether the three forces are related to three, or exceptionally but to two properties of the fluid. The latter condition arises if both the inertia force and gravity force are included among the three forces. Both of these two forces are namely related to the same property, i.e. density.

*Let us consider first* this relatively simple case, where inertia and gravity are included among the three forces. In view of the phenomenon of fluid motion the third force to be included is usually the frictional force with the dynamic viscosity  $\eta$  coupled to it. The criterion of similarity in this case is the identity of the dimensionless numbers.

$$Re = \frac{vl\rho}{\eta} \quad \text{and} \quad Fr = \frac{v^2}{gl},$$

whence it will be obtained that the similarity of the three forces selected can not be ensured unless the ratio of the dynamic viscosities of the fluids in the prototype and the model, in short the scale ratio of dynamic viscosity is calculated from the expression

$$\lambda_\eta = \lambda_l^{3/2} \lambda_g^{1/2} \lambda_\rho. \quad (1)$$

With the model and the prototype in the same geographic location,  $\lambda_g$  becomes equal to unity and thus [3, 4]

$$\lambda_\eta = \lambda_l^{3/2} \lambda_\rho. \quad (2)$$

Passing over to kinematic viscosity, the similarity of the three forces selected can be ensured by satisfying the equation

$$\lambda_v = \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\rho} = \lambda_l^{3/2}. \quad (3)$$

As revealed by Eq. (2) above, one of the two properties of the model fluid may be selected arbitrarily, but then the other property is determined by the given length scale ratio. Consequently, even in the case where no more than two properties of the fluid are involved, the similarity of three forces cannot be ensured unless a fluid differing in dynamic viscosity or density from the prototype is used according to Eq. (2) in the model. A model fluid with these properties should not be too difficult to produce.

Let us consider hereafter the case where each of the three forces to be modeled are related to different properties of the fluid. An example for this phenomenon is the infiltration of fluid through a granular soil. The velocities and especially the changes in velocity being small, the neglect of inertia forces was found to cause no error of appreciable magnitude. On the other hand, the effect of capillary forces may be significant in the vicinity of the surface of the infiltrating fluid. For this reason the third force to be considered besides gravity and friction is usually capillary. The three properties related to the three forces are fluid density  $\rho$ , dynamic viscosity  $\eta$  and surface tension  $\varphi$  of the fluid.

The scale ratios  $\pi$  of the forces are defined by the following familiar expressions:

$$\text{for gravity forces} \quad \pi = \lambda_\rho \lambda_l^3 \lambda_g, \quad (4)$$

$$\text{for friction forces} \quad \pi = \lambda_l^2 \lambda_\eta \lambda_t, \quad (5)$$

$$\text{for capillary forces} \quad \pi = \lambda_l \lambda_\varphi. \quad (6)$$

From the identity of the scale ratios  $\pi$  of the three forces, i.e. from the equality of Eqs. (4), (5), and (6) two condition equations are obtained. Assuming identical geographical locations, i.e.  $\lambda_g = 1$ , these will be as follows:

$$\lambda_\rho \lambda_l = \lambda_\eta \lambda_t^{-1}, \quad (7)$$

$$\lambda_\rho \lambda_l^2 = \lambda_\varphi. \quad (8)$$

Altogether five unknown scale ratios are involved in Eqs. (7) and (8), so that in principle the value of three of them may be selected arbitrarily, provided that no other criteria are observed. One of the free scale ratios is obviously the one for lengths  $\lambda_l$ . The second may be one of the properties of the fluid (density, dynamic viscosity or surface tension). The third scale ratio to be selected freely could be the scale ratio of time  $\lambda_t$ , but since the phenomenon under consideration is fluid motion, the arbitrary adoption thereof is prevented



by certain kinematic relationships. In the present case of infiltration the Darcy-law could, for example, be one of these relationships. Even if the difficulties encountered in the adoption of  $\lambda_t$  were disregarded, it is almost inconceivable that, for instance, at any preselected density  $\rho$  the dynamic viscosity and surface tension of the fluid should be exactly the value defined by Eqs. (7) and (8). In any unique solution of the condition equations (7) and (8) all scale ratios are equal to unity, i.e. the model and the prototype have the same dimensions. The similarity of three forces which are related to three properties of the fluid can thus be ensured only in a model which in every respect is identical with the prototype [3].

It thus follows that the similarity of more than three forces can only be ensured in a model which is identical with the prototype.

Since the fluid appears in both the model and the prototype with all its properties and all these forces related to these latter become effective, full mechanical similarity can be attained only in a model which is in every respect identical with the prototype. In a model of this type, all criteria can be satisfied [5].

Disregarding exceptions the model fluid in hydraulic scale model tests is usually water. Thus, strictly speaking in a model built with dimensions differing from those of the prototype exact mechanical similarity can never be attained.

## 2. Special Forms of the Known Dimensionless Numbers

Scale model tests and hydromechanical investigations lead to the discovery that individual phenomena in the motion of water are especially well described by other forms of the dimensionless numbers. These special forms of the dimensionless numbers, which cannot actually be regarded as new, by their introduction as similarity criteria for distorted models resulted in conditions departing from those given by the original dimensionless numbers. Examples for these are obtained by introducing, in the case of sediment settling, into the  $Re$  and  $Fr$  numbers the settling velocity  $w$  as the characteristic velocity and the particle diameter  $d$  as the characteristic length, or if the shear velocity  $U_*$  is used as characteristic velocity.

The above considerations can be illustrated by the following *example*:

Introducing into any arbitrary similarity criterion the shear velocity  $U_*$  instead of the mean velocity  $v$  as the characteristic velocity, the equality

$$\lambda_{U_*} = \lambda_v \quad (9)$$

must be valid. Since  $U_* = \sqrt{ghJ}$ ,

$$\lambda_{U_*} = \lambda_h^{1/2} \lambda_f^{1/2} = \lambda_h^{1/2} \frac{\lambda_h^{1/2}}{\lambda_l^{1/2}} = \lambda_h \lambda_l^{-1/2} = \lambda_v, \quad (10)$$



where it is assumed that the model and the prototype are geographically in the same location.

Where besides inertia the second force controlling the phenomenon investigated is gravity, the Froude criterion must also be satisfied. Thus,

$$\lambda_v = \lambda_h^{1/2}. \quad (11)$$

The conditions expressed by Eqs. (10) and (11) can be satisfied only in a model where the lengths and depths are undistorted.

If the criterion to be satisfied is that of Reynolds, then

$$\lambda_v = \lambda_l^{-1}. \quad (12)$$

The conditions expressed by Eqs. (10) and (12) cannot be satisfied unless

$$\lambda_h = \lambda_l^{-1/2} \quad (13)$$

which is impossible in the majority of cases.

It is to be seen from the above considerations that the introduction of the special dimensionless numbers usually involves additional restrictions.

Fortunately the requirement to observe exact mechanical similarity criteria is not this strict in engineering practice. In most of the phenomena to be investigated certain properties of the fluid play apparently a but insignificant role. In such cases the requirements of mechanical similarity may be regarded as approximately satisfied. In the case of distorted models, however, it would be basically wrong to speak of mechanical similarity, since the scale ratios of quantities of identical dimension appreciably differ from each other

### 3. Similarity in the Case of Scale Models of Sediment Transporting Watercourses

The general conclusions arrived at in connection with scale model investigations also apply to models in which problems of sediment transportation are to be considered too. Besides the hydraulic factors proper the quality of the sediment (namely its particle size  $d$ , its specific gravity  $\gamma_s$ , its grain size distribution), the sediment quantities transported ( $q_h$  total and  $q_B$  bed load rate), the manner in which the sediment is transported, and in some cases even the regime of movement must be truly reproduced in these models. Studies of this type involve obviously additional difficulties which are also reflected by the trend in the development of the methods used. In early times the similarity of these models posed almost insoluble problems.

In the first period of sediment model studies the key to the solution of the problem was believed to be hidden in the selection of a model sediment material suitable for the aim of a particular study, or in the case of a given sediment material, in the determination of the suitable slope.

It has been suggested, for instance, by H. KREY [6] that the movement of the sediment in the model is ensured if the water depth  $h''$  is within the range

$$\frac{d''}{20 J''} \leq h'' \leq \frac{d''}{8 J''} . \quad (14)$$

One of the limit slopes (the lower limit) in the model would thus be

$$J'' = \frac{d''}{8 h''} .$$

The other limit slope is defined by the circumstance that normal flow in the prototype should be reproduced in the model as normal flow. Thus the other limit slope (the upper limit) is determined by the condition

$$J'' < \frac{g''}{c''^2} , \quad (15)$$

where  $g''$  is the gravitational acceleration at the location of the model, while  $c''$  is the velocity factor of the model.

The conclusions of KREY were later completed by S. ROHRINGER [7] who suggested that the model slope should have the same ratio relative to the fixed limit values as in the prototype.

Fundamental laws of sediment movement were subsequently adopted as basic similarity criteria. The tractive force  $\tau_0$  was reproduced by many, involving, on the basis of the relationship  $\tau_0 = \gamma h J$ , and assuming  $\lambda_\gamma = 1$ , that  $\lambda_h = \lambda_l^{1/2}$ .

Aside from the reproduction of critical velocities, many investigators adopted, especially in recent times, some form of the channel stability factor for satisfying the similarity criteria. The author, too, has adopted in his earlier investigations the channel stability factor  $d/hJ$ , introduced by him in 1943, as the similarity criterion. The consequence of adopting the factor  $d/hJ$  is, for example, that

$$\lambda_d = \frac{\lambda_h^2}{\lambda_l} .$$

Since the channel stability factor is related to the concept of the stable channel, the idea of using in sediment model studies the characteristics of the stable channel as basic similarity criteria lay close to hand. An example for this is the relationship developed by T. BLENCH [8], who suggested on the basis of the relationship existing between the width  $B$ , the depth  $h$  and slope  $J$  of the stable channel, and the discharge  $Q$  the following ratios for the corresponding scale ratios:

$$\lambda_B : \lambda_h : \lambda_J = \lambda_Q^{1/2} : \lambda_Q^{1/3} : \lambda_Q^{-1/6} . \quad (16)$$



From Eq. (16) we obtain for the scale ratio of depths

$$\lambda_h = \lambda_B^{2/3}. \quad (17)$$

Several investigators attempted to ensure similarity in model studies of sediment transporting natural watercourses on the basis of morphological characteristics. Although no objection can be raised against the idea itself, the quantitative description of morphology is bound to introduce difficulties [9, 10].

The attempts listed in the foregoing are usually characterized by the endeavour to ensure similarity on the basis of no more than one, or two properties of sediment movement only. No attempts were made to satisfy other criteria while it must be conceded that no possibility existed therefore.

Models of this type must usually be distorted and the quantity affected thereby is usually the depth, which involves at the same time the distortion of the slope as well. The scale ratios are usually determined with the help of Froude's model law. Several disturbing inconsistencies and contradictions are introduced between the model and the prototype. From among the inconsistencies those interfering with the similarity of the phenomenon to be studied should be naturally eliminated. This purpose is served by the operation referred to as *verification*, which consists essentially of the introduction of additional distortions with the aim to counteract the effect of the first, original distortion. It is not intended here to discuss in any detail the rules and procedure of verification, it should suffice to mention that it is nothing but a trial and error process, and a fairly difficult one at that. The reason for this is that certain quantities (such as e.g.  $\lambda_t$ ,  $\lambda_h$ ,  $\lambda_j$ ) have been assigned definite numerical values, so that the adjustment is even more lengthy to find. A further drawback of this method is that these modifications are not determined by regular mathematical methods and calculations, but mostly on the basis of the relation of a few quantities and without allowing for other relationships. The method of verification is nevertheless still widely used, and may even be regarded in many cases as the single method. The explanation for this lies in the ample practical experience gained in this field which the experimenter is capable of exploiting advantageously. Several modifications can be realized by verification. Arbitrary changes are thus usually effected in  $\lambda_Q$ , in roughness conditions, in the slope distortion resulting from the distortion of depths, etc.

The latest model techniques, which we believe to ensure the best possible reproduction, are essentially also some form of verification, but instead of subsequent trial and error preliminary calculations are used at a time when all scale ratios can be selected freely and when the extent, and even more important the point of occurrence of deviations can be controlled. Quite obviously the trouble caused by the deviations is least disturbing if they occur at the least significant point, or quantity with respect to the phenomenon studied.



#### 4. Dimensional Analysis for Determining Similarity Criteria

It should be established at the outset that dimensional analysis is regarded as a method of paramount importance and significance in determining the criteria of similarity. The importance of the method is reflected by the circumstance that similarity criteria almost without exception can and usually are derived with the aid of dimensional analysis. It should be recognized, however, that dimensional analysis is not a solution to every problem. As long as the physical quantities and hydraulic factors involved in the phenomenon are not clearly understood, no attempts at dimensional analysis can be made. Insight into the physical quantities influencing individual phenomena can, on the other hand, be gained by lengthy investigations only. Any successful application of the dimensional analysis is thus seen to depend on the extent to which the physical quantities controlling the phenomenon can be clarified.

A further consideration to be taken into account before dimensional analysis is applied is that in distorted models, and sediment models are as a rule distorted, each similarity requirement encountered in a new form presents at the same time an additional criterion. A similar situation arises frequently with undistorted models as well. The original conditions do, of course, not expire with the introduction of additional new criteria, and compliance with them remains compulsory. This is especially true for criteria dominating the phenomenon, which must be satisfied even in the case of so-called hydraulic similarity. In the application of dimensional analysis compliance with the original criteria is frequently neglected, and this leads occasionally to essential and impermissible deviations.

Let us consider now an *example* of a model in which sediment transportation is also involved.

If it is assumed that as far as sediment transportation is concerned the physical properties are determined for the fluid (water) by the density  $\varrho$  and the kinematic viscosity  $\nu$ , for the sediment the submerged specific gravity  $(\gamma_1 - \gamma)$  and the particle size  $d$ , while the dynamic condition of the watercourse is described by the shear velocity  $U_*$ , then the above five parameters can be combined to altogether two dimensionless numbers of the form

$$\frac{U_* d}{\nu} = Re_*, \quad (18)$$

and

$$\frac{U_*^2}{gd} \frac{\gamma}{\gamma_1 - \gamma} = Fr_* \frac{\gamma}{\gamma_1 - \gamma} \quad (19)$$

which may be on some power, or may occur in a product form.

It should be noted here that the two relationships (18) and (19) could be derived with the aid of dimensional analysis after lengthy and laborious

research work only, which revealed  $U_*$  as the most important factor in sediment transportation as it is much more characteristic for the movement of sediment than either the mean velocity, or the slope-depth product.

From the foregoing considerations it should be obvious that the identities

$$Re'_* = Re''_* \quad (20)$$

and

$$\left( \frac{\gamma}{\gamma_1 - \gamma} Fr_* \right)' = \left( \frac{\gamma}{\gamma_1 - \gamma} Fr_* \right)'' \quad (21)$$

must be regarded as the similarity criteria of sediment models [11, 12]. If the fluid in both the model and prototype is water, i.e.,  $\lambda_\rho = \lambda_\nu = \lambda_\gamma = 1$  and the geographical location is the same, i.e.  $\lambda_g = 1$ , then from Eqs. (20) and (21) we obtain the following two condition equations

$$\lambda_d = \frac{1}{\lambda_{U_*}}, \quad (22)$$

$$\lambda_d = \frac{\lambda_{U_*}^2}{\lambda_{(\gamma_1 - \gamma)}}. \quad (23)$$

Since according to Eq. (10) presented earlier  $\lambda_{U_*} = \lambda_h^{1/2} \lambda_J^{1/2}$ , from the condition equations (22) and (23) we obtain

$$\lambda_{(\gamma_1 - \gamma)} = \lambda_{U_*}^3 = \lambda_h^{3/2} \lambda_J^{3/2}. \quad (24)$$

Assume first no distortion for the quantities having length dimension, i.e.

$$\lambda_l = \lambda_h = \lambda_d.$$

In this case  $\lambda_J = 1$ .

With these values

$$\lambda_{(\gamma_1 - \gamma)} = \lambda_l^{3/2}, \text{ and thus } \lambda_{U_*}^3 = \lambda_l^{3/2}, \text{ or } \lambda_{U_*} = \lambda_l^{1/2},$$

on the other hand, according to Eq. (22)

$$\lambda_d = \lambda_l = \frac{1}{\lambda_{U_*}} = \frac{1}{\lambda_l^{1/2}},$$

whence we obtain the value  $\lambda_l = 1$ . This, however, leads to the conclusion that all scale ratios will be unity, i.e., *without distorting the quantities of length dimension the  $Re_*$  and  $Fr_*$  criteria can be satisfied in the prototype only.*

Let us consider subsequently the case where distortion is possible, i.e.

$$\lambda_l \neq \lambda_h \neq \lambda_d \quad \text{and} \quad \lambda_J = \frac{\lambda_h}{\lambda_l}.$$



In this case

$$\lambda_{(\gamma_1 - \gamma)} = \lambda_h^{3/2} \frac{\lambda_h^{3/2}}{\lambda_l^{3/2}} = \lambda_h^3 \lambda_l^{-3/2}.$$

The scale ratio of shear velocity is thus

$$\lambda_{U*} = \lambda_h^{1/2} \frac{\lambda_h^{1/2}}{\lambda_l^{1/2}} = \lambda_h \lambda_l^{-1/2}, \quad (25)$$

and from Eq. (22)

$$\lambda_d = \lambda_h^{-1} \lambda_l^{1/2}. \quad (26)$$

It is known, on the other hand, that for free surface flow the *Fr* criterion must also be satisfied. Thus, considering Eq. (25) as well

$$\lambda_v = \lambda_h^{1/2} = \lambda_{U*} = \lambda_h \lambda_l^{-1/2}. \quad (27)$$

It was demonstrated in the foregoing that if the *Fr* criterion is satisfied,  $\lambda_v = \lambda_{U*}$  is possible in a geometrically undistorted model only. In fact, according to Eq. (27)

$$\lambda_h^{-1/2} = \lambda_l^{-1/2}, \quad \text{or} \quad \lambda_h = \lambda_l \quad \text{and naturally} \quad \lambda_l = 1.$$

Thus from Eq. (25)

$$\lambda_{U*} = \lambda_l^{1/2} \quad (28)$$

and according to Eq. (26)

$$\lambda_d = \lambda_l^{-1/2}, \quad (29)$$

while finally

$$\lambda_{(\gamma_1 - \gamma)} = \lambda_l^{3/2}. \quad (30)$$

Consequently the conditions for the simultaneous validity of the *Fr*,  $\gamma/(\gamma_1 - \gamma)$ , *Re*<sub>\*</sub> and *Fr* criteria are:

a) the geometry of the model must not be distorted,

b) the particle size of the sediment must be distorted, namely instead of  $\lambda_d = \lambda_l$

$$\lambda_d = \lambda_l^{-1/2} \quad (31)$$

must be used.

c) The submerged weight of the sediment must also differ from that in the prototype, i.e. a scale ratio

$$\lambda_{(\gamma_1 - \gamma)} = \lambda_l^{3/2} \quad (32)$$

must be introduced.

The scale ratios calculated according to Eqs. (31) and (32) are, however, not suited for practical use. E.g. for  $\lambda_l = 100$  a sediment having a diameter ten times as large as in the prototype, and a submerged weight thousand times lower than that of the prototype sediment would be necessary.



If either  $\lambda_d = \lambda_l$ , or  $\lambda_d = 1$ , further if regardless of these  $\lambda_{(\gamma_1-\gamma)} = \lambda_l$ , or  $\lambda_{(\gamma_1-\gamma)} = 1$ , all scale ratios will be equal to unity, or, in other words, these criteria can be satisfied by the prototype only.

### 5. Calculation of Models of Sediment Transporting Watercourses

With regard to the above considerations, the idea of determining the scale ratios of sediment models on the basis of the similarity criteria expressed by Eqs. (20) and (21) must be abandoned. As has already been pointed out a trial and error method must be used instead, the calculations being based on suitably selected condition equations.

It should be noted at this juncture that the criteria  $Fr_* \gamma / \gamma_1 - \gamma$ ,  $Re_*$  and  $Fr$  criteria are also included in the method of H. EINSTEIN [13], which is based on nine condition equations. In the modified method developed by the author the  $Fr$  criterion is preserved, while the  $Fr_*$  and  $Re_*$  criteria are replaced by a parameter satisfying both simultaneously as a similarity criterion in the set of equations on which the calculations are founded [14, 15].

It follows from the foregoing that hydraulic similarity in models of sediment transporting watercourses can most practically be ensured by *verification*, by which

possible modifications can be determined beforehand, a systematic calculation can be adopted, and the deviations can be concentrated at points where their disturbing effect on the phenomenon under consideration is least felt.

From among the methods based on this principle those of H. EINSTEIN and NING CHIEN [13], and the form thereof modified by us [14, 15] can be mentioned. Since the publication of these, other approaches have also appeared in the literature. In principle these resemble the method of EINSTEIN, differences being, in general, in the form of the condition equations only. For details reference is made to the attached bibliography [16, 17].

### REFERENCES

1. MOSONYI, E.—HANKÓ, Z.: Hidraulikai hasonlóság, a kismintatörvények és a kísérletek értékelése, a várható eredmények. Mérnöki Továbbképző Intézet 3525. Budapest, 1955. (Hydraulic similarity, model laws and the evaluation of experimental results, information expected.)
2. ALBERTSON, M. L.—BARTON, T. R.—SIMONS, D. B.: Fluid Mechanics for Engineers. Prentice Hall, Inc., 1961.
3. ROUSE, H.: Elementary Mechanics of Fluids. John Wiley and Sons, Inc. 1950.
4. NÉMETH, E.: Invariáns számok szerepe a kismintakísérleteknél. *Magyar Tudományos Akadémia VI. oszt. Közleményei* 10 (1953). (On the role of dimensionless numbers in model investigation.)

5. IVICSICS, L.: Gondolatok a fizika rokonjelenségeinek fogalmáról. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* (1962). (Considerations on the concept of related phenomena in physics.)
6. KREY, H.: Grenzen der Übertragbarkeit der Versuchsergebnisse und Modellähnlichkeit bei praktischen Flussbauversuchen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*.
7. ROHRINGER, S.: Beitrag zur Frage: Studium der hydrotechnischen Fragen mit Hilfe von Laboratoriumsversuchen an Modellen in verkleinertem Massstab. — I. Abteilung, *Mitteilung des XV. Internationalen Schiffartskongress*. Venedig 1931.
8. BLENCH, T.: Regime Theory for Self-Formed Sediment Bearing Channels. *Proceedings of American Society of Civil Engineers*. 77 (1951).
9. KARÁDI, G.: Mozcómedrű kismintakísérletek a morfológiai viszonyok figyelembevételével. *Vízügyi Közlemények* (1953). (Model studies of channels with movable bed, allowing for morphological conditions.)
10. BOGÁRDI, J.: A hordalékmozgás elmélete. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955. (The theory of sediment transportation.)
11. YALIN, S.: Über die Naturähnlichkeit der Geschiebebewegungen bei Modellversuchen. *Die Bautechnik* 36 (1959).
12. YALIN, S.: Über die dynamische Ähnlichkeit der Geschiebebewegungen. *Die Wasserwirtschaft* (1960).
13. EINSTEIN, H. A.—CHIEN, N.: Similarity of Distorted River Models with Movable Beds. *Transactions of American Society of Civil Engineers* 121 (1956).
14. BOGÁRDI, J.: Mozcómedrű folyók hidraulikai hasonlósága és a hordalékmozgás törvényszerűségei. Beszámoló a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézet 1957. évi munkájáról, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1959. (Similarity of watercourses with movable bed and the laws governing sediment transportation.)
15. BOGÁRDI, J.: Hydraulic Similarity of River Models with Movable Bed. *Acta Technica Hung.* 24 (1959).
16. KOMURA, S.: Bulk Properties of River-Bed Sediments and its Applications to Sediment Hydraulics. Proceedings of the 11th Japan National Congress for Applied Mechanics, Tokyo 1961.
17. KOMURA, S.: Similarity and Design Methods of River Models with Movable Bed. *Transactions of Japanese Society of Civil Engineers* No. 80, Tokyo 1962.

## DIE FRAGE DER ÄHNLICHKEIT, UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER MODELLVERSUCHE AN GESCHIEBEFÜHRENDE WASSERLÄUFEN

J. BOGÁRDI

### ZUSAMMENFASSUNG

Die grundlegende Frage der Modelluntersuchungen ist die Frage der Ähnlichkeit des Modells und des Originals. Es ist bekannt, daß bei hydromechanischen Modellversuchen die vollständige mechanische Ähnlichkeit nicht gesichert werden kann. In einer großen Zahl von Fällen kann neben der geometrischen und der kinematischen Ähnlichkeit nur von teilweiser dynamischer Ähnlichkeit die Rede sein, bei welcher bloß die Ähnlichkeit von zwei, vom Standpunkt der untersuchten Erscheinung maßgebenden Kräften gesichert wird; von der Ähnlichkeit der übrigen Kräfte wird abgesehen, und der damit verbundene Fehler wird bewußt in Kauf genommen.

Bei der Modellierung von natürlichen Wasserläufen muß oft auch die Bedingung der geometrischen Ähnlichkeit aufgegeben werden, da die Höhenmaße verzerrt werden müssen, um bei gegebenem waagrechttem Maßstab die Bedingungen für die Nachbildbarkeit einhalten zu können, z.B. die, daß die Wasserbewegung im Modell noch turbulent bleibt. Die Verzerrung der geometrischen Maße hat die Notwendigkeit der Verzerrung weiterer physikalischer Größen zur Folge.

Bei der Untersuchung der Geschiebebewegung von Wasserläufen, welche auch Geschiebe führen, müssen auch die Bedingungen der Geschiebebewegung beachtet werden. Diese weiteren Bedingungen haben weitere Widersprüche zur Folge. Im Endergebnis kann festgestellt werden, daß derartige Untersuchungen nur an verzerrten Modellen durchgeführt werden können, wo nicht nur die geometrischen Maße des Modells, sondern auch die Korndurchmesser des Geschiebes, eventuell sein spezifisches Gewicht verzerrt werden. Dies zieht natürlich die Verzerrung



weiterer Größen nach sich. *Die verschiedenen Bedingungen können in ein System von Gleichungen zusammengefaßt werden.* Das Gleichungssystem enthält innere Widersprüche und hat keine korrekte Lösung. In Kenntnis der Aufgabe können diejenigen Bedingungsgleichungen erfüllt werden, welche vom Standpunkt der untersuchten Erscheinung am wichtigsten sind und die Fehler können auf diejenigen Bedingungsgleichungen konzentriert werden, welche weniger wichtige Bedingungen enthalten.

## LE PROBLÈME DE LA SIMILITUDE, AVEC CONSIDÉRATION PARTICULIÈRE DES ESSAIS SUR MODÈLES RÉDUITS DES COURS D'EAU TRANSPORTANT DES MATIÈRES SOLIDES

J. BOGÁRDI

### RÉSUMÉ

Le problème fondamental des essais sur modèles réduits consiste dans la similitude de l'ouvrage et du modèle réduit. On sait qu'en cas d'essais sur modèles hydromécaniques, on ne saurait garantir la similitude mécanique complète. Dans la plupart des cas, la similitude géométrique et cinématique ne s'accompagne que d'une similitude dynamique partielle, la similitude des deux forces considérées comme importantes du point de vue du phénomène examiné étant seule garantie. Quant à la similitude des autres forces, on en fait abstraction tout en acceptant certaines erreurs se produisant en conséquence.

Lors de l'établissement des modèles de cours d'eau naturels, il faut souvent renoncer aussi au critère de la similitude géométrique. L'échelle horizontale étant une fois fixée, les dimensions en hauteur doivent, en effet, être déformées si l'on veut respecter les conditions d'établissement des modèles, par ex. la turbulence du mouvement de l'eau, etc... La déformation des dimensions géométriques entraîne nécessairement celle d'autres quantités physiques.

En cas d'essais sur modèles réduits de cours d'eau transportant des matières solides, il faut aussi tenir compte des conditions du charriage. Ces nouvelles conditions font naître à leur tour des contradictions nouvelles. On peut constater, en définitive, que de tels essais ne peuvent être effectués que sur des modèles réduits déformés, où non seulement les dimensions géométriques du modèle, mais aussi le diamètre des grains du matériau de fond, et éventuellement même leur poids spécifique sont sujets à déformation, fait qui entraîne naturellement la déformation d'autres quantités. Les différentes conditions peuvent être exprimées par un système d'équations. Ce système d'équations renfermant des contradictions internes ne comporte pas de solution exacte. En connaissance du problème, on peut satisfaire les équations de condition les plus importantes du point de vue du phénomène à étudier, et concentrer les erreurs chez les équations contenant des conditions moins essentielles.

## ВОПРОС ПОДОБИЯ, УДЕЛЯЯ ОСОБОЕ ВНИМАНИЕ ПРОВОДИМЫМ НА МОДЕЛЯХ ИССЛЕДОВАНИЯМ ВОДНЫХ ПОТОКОВ С НАНОСАМИ

Я. БОГАРДИ

### РЕЗЮМЕ

Основным вопросом исследований на моделях является подобие образца и модели. Известно, что в случае проведения гидромеханических исследований на моделях не представляется возможным обеспечить полное механическое подобие. В большинстве случаев при геометрическом и кинематическом подобии можно говорить лишь о частичном динамическом подобии, когда может быть обеспечено подобие только двух, решительно важных с точки зрения исследуемого явления сил; от подобия остальных сил приходится отказываться, сознательно приняв в расчет происходящую от этого погрешность.

При моделировании естественных водных потоков часто приходится отказываться и от условия геометрического подобия, так как бывает необходимо исказить размеры высоты, чтобы при заданном масштабе горизонтальных размеров сохранить условия возможности моделирования, напр. чтобы движение воды в модели еще оставалось турбу-

лентным. Искажение геометрических размеров влечет за собой необходимость искажения также других физических количеств.

При модельном исследовании движения наносов водных потоков с наносами необходимо принимать во внимание также условия движения наносов. Эти дополнительные условия приводят к новым противоречиям. В результате можно установить, что такие исследования можно проводить лишь на искаженных моделях, где искажены не только геометрические размеры, но и диаметр зерна наноса, а возможно и его удельный вес. Это естественно обуславливает искажение и других величин. Отдельные условия могут быть объединены в систему уравнений. Система уравнений, содержащая внутренние противоречия, правильного решения не имеет. Если известно задание, можно удовлетворить те уравнения условий, которые с точки зрения исследуемого явления наиболее важны. Погрешности же могут быть сконцентрированы в уравнения условий, содержащие менее важные условия.



# THE INCREASE OF INFORMATION CAPACITY OF LONG-DISTANCE BROAD BAND MICROWAVE RADIO RELAY SYSTEMS

G. BOGNÁR

MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
RESEARCH INSTITUTE OF TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received December 8, 1964]

The problems of the long-distance broad-band microwave radio links are dealt with as part of a communication network covering the whole Earth. The possibilities of building a system of a network covering the Earth are considered. The general build-up of equipments used in up-to-date long-distance microwave radio links and the requirements for them are described. The noise problems of microwave radio links are analysed. The possibilities of using various types of low-noise microwave preamplifiers are evaluated. Final results of theoretical investigations concerning intermodulation noise, and noise due to interference between the neighbouring radio channels are reported. Finally, the possibilities of further trends of development in broad-band communication are pointed out.

## I. Introduction

The continually growing requirements in the field of communication justify the creation of high-capacity communication systems covering the whole Earth. All necessary elements of the complete system are not yet available. There are some notions founded on preliminary experiments but their implementation and their application in a communication system covering the Earth is the task of the next years. Within this period, according to the demands to be expected, it will be necessary to build up such long-distance system on and between the continents which is able to transmit several thousand, even more than ten thousand, telephone channels, as well as some television channels for the exchange of international television programs.

One of the means for the transcontinental transmission of so many telephone channels and of television channels is the coaxial cable. On the long-distance coaxial cables used today a maximum of 2700 telephone channels can be transmitted, depending on the quality of the cable, on the used terminal equipment and on the distance between the repeater stations. For the transmission of 2700 telephone channels, a baseband of 12 Mc width must be covered.

However, the bandwidth of the cable at present crossing the Atlantic Ocean is considerably smaller: it equals no more than 0,4 Mc. This bandwidth does not allow to carry out more than 100 telephone talks simultaneously. The *direct* transmission of television picture within the given band width is, of

course, not possible. However, it has been tried to transmit moving pictures with speed slowed down according to the bandwidth. In this way, for the transmission of a scene lasting five minutes, ca. 50 minutes were required.

Another means for the long-distance transmission of a great number of telephone channels or television program within a continent is the point-to-point broad-band microwave radio relay communication. The broad-band microwave radio transmission, according to our present knowledge, can be

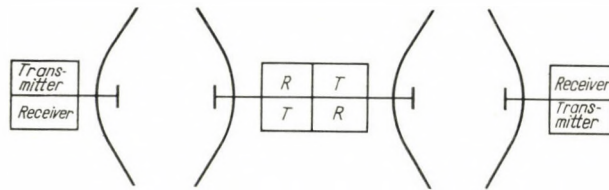


Fig. 1

achieved only by propagation within optical sight. To ensure optical sight, when covering great distances, repeater stations must be included. These repeaters can be active or passive. The active repeaters (Fig. 1) receive the emitted signal within the distance of optical sight and, after amplification, translate it to the

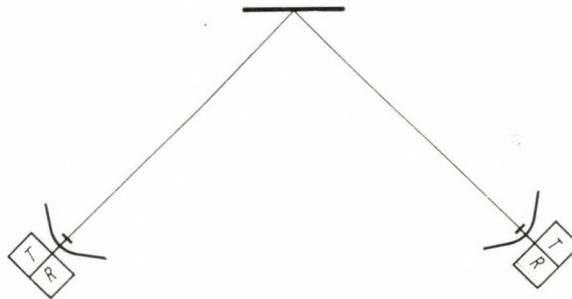


Fig. 2

next repeater station. The passive repeater (Fig. 2) is, as a matter of fact, a surface reflecting the microwaves which forwards the optical sight by reflection between a transmitter and a receiver station.

The oceans cannot be bridged, in practice, by means of a great number of repeater stations set up on stabilized floats.

Preliminary calculations have been made, plans prepared and pre-experiments started to cross the oceans by means of artificial satellites. These can be active or passive repeaters. In the last case, as far as possible, a large reflecting surface should be envisaged; this can be realized in practice by means



of a balloon made of very thin plastic foil with a metallized surface and having a diameter of ca. 30 m.

The artificial satellite functioning as active repeater contains a microwave broad-band amplifier with a power of a few watts. This amplifier is fed by the electric energy obtained by transforming the radiation energy of the Sun.

The satellites acting as repeaters would go round the Earth at an altitude of  $4 \div 5000$  km in ca. 2 hours. To ensure the continuity of communication ca.  $20 \div 25$  such artificial satellites must be kept in their orbits.

The antenna system of the transmitter station and that of the receiver station follow the satellite actually above the horizon on the basis of data predicted by electronic computers and corrected by means of optical and radar methods. The sharp beam of the transmitter irradiates the satellite and the receiver on the off shore receives the reflected or, in case of active repeater, amplified signals.

To control the calculations, in 1960 a balloon with a diameter of 30 m was shot up in the US according to the terms of the Echo program. The transmitting power was 10 kW. By means of a ca. 20 m dia. paraboloid reflector controlled with an accuracy of  $0,2^\circ$  it succeeded in making a telephone communication using the reflection from the artificial satellite.

According to the terms of the Syncom program, the surface of the whole Earth can practically be irradiated by means of three artificial satellites orbiting at a distance of ca. 35,000 km from the Earth. The orbiting angular speed of these satellites would be equal to the rotating angular speed of the Earth, and would therefore seem to stand in one place with respect to the Earth surface. This circumstance facilitates the following of the artificial satellites.

Atmospheric strata, meteors, celestial bodies causing scattering, which can be regarded as "natural" reflectors, cannot be used for long-distance broad-band communication. Scattering due to the lower strata of the ionosphere in the frequency range of  $30 \div 60$  Mc and scattering due to tropospheric phenomena in the microwave range have been observed in recent years. The tropospheric scattering is due to the stratification of the dielectric constant of the troposphere or to turbulence occurring therein. Both phenomena spread over a large surface or assume a large volume, allowing thereby the multiway propagation and preventing the broad-band transmission of the required quality.

Notwithstanding, the communication based on tropospheric scattered propagation limited to dozens of telephone channels is an important means of long-distance communication.

The celestial body nearest to us, the Moon, cannot be used as a broad-band reflector, either, although the irradiation of the Moon having a visual angle of  $0,5^\circ$  would not meet with any difficulties. Disregarding the finer structure of reflection and considering only the dimensions of the Moon (having a



radius of 1500 km), it may be realized that reflections occur from various points of the Moon surface at various moments, with a maximum time difference of 10 ms according to the radius of the Moon. This time difference reduces the transmittable bandwidth to 100 c.

Direct telephone talk would also be delayed by the time of 2,66 sec necessary to cover the distance of  $2 \times 400\,000$  km.

In addition, the Sun having also a visual angle of  $0,5^\circ$  and being at a distance of 8 minutes is a strong noise source. Consequently, the "natural" reflectors, at least according to our knowledge of today, are out of question from the viewpoint of multichannel telephone transmission.

The transcontinental systems consisting of microwave links and coaxial cables, covering distances of several ten thousand km, are widely used today.

Within a transmission system, be it wired (coaxial cable) or microwave radio link, generally several broad-band channels are united to a beam, and in this way the transmission of several thousand telephone channels and some television channels on a route can be ensured.

An important factor in the creation of transcontinental communications is to ensure the interconnection of the coaxial cable systems and the microwave radio relay links. This involves the condition that the transmission range and the transmission parameters of the microwave radio relay link should coincide with those of the carrier system of the coaxial cables.

## II. Long-Distance Broad-Band Microwave Systems

The operating band of the long-distance broad-band microwave systems falls in the ranges of 2000, 4000 and 6000 Mc. The lower limit of the frequency used is determined by the bandwidth of  $4 \div 500$  Mc required for the transmission of several microwave channels. The increases of the used frequency is limited by the atmospheric attenuation increasing with the frequency.

Most of the long-distance broad-band systems actually in service operate in the frequency range of 4000 Mc. These systems contain, within the given range, generally six broad-band and two narrow-band channels. Five of the six broad-band channels are used for signal transmission as regular channels, the sixth channel being the common stand-by channel. Each microwave channel is able to transmit 600 or maybe 960 simultaneous telephone talks or one television picture channel with sound. The system is able, therefore, to transmit at maximum  $3000 \div 5000$  telephone channels. The narrow-band channels located at the edges of the frequency bands serve to carry out the service telephone talks, for the remote control of the unattended repeater stations, for their remote controlling as well as for the automatic protection switching-over to the common stand-by equipment (Fig. 3).



If the characteristics of quality recommended by the CCIR are fulfilled, the subjective observer listening to the telephone talk or looking at the television picture can hardly differentiate between the signal applied to the system and the signal obtained from the system which had already run over the dis-

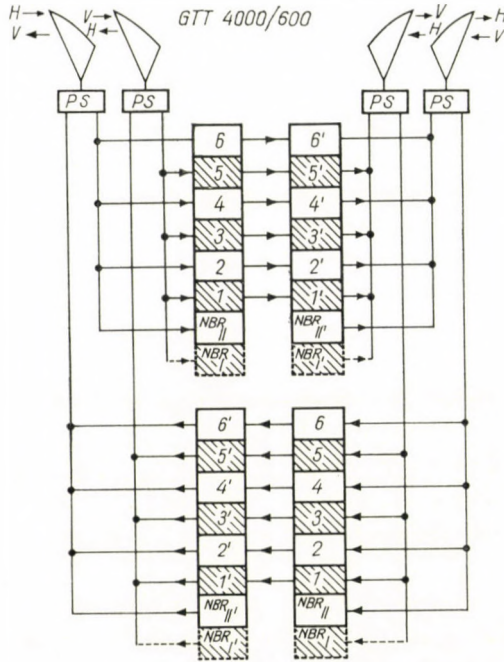


Fig. 3

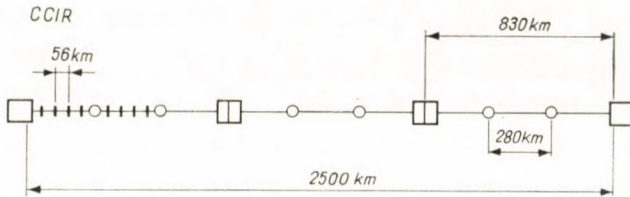


Fig. 4

tance of 2500 km corresponding to the length of the hypothetical reference circuit (Fig. 4). The requirements of very high quality are justified by the fact that the section of 2500 km is only a part of the link around the Earth and the audibility of the telephone talk as well as the satisfactory television picture must be ensured over a distance of 25 000 km which corresponds, in practice, to the maximum distance between two points of the Earth. The increase of

the distance by a factor of 8 decreases the signal-to-noise ratio by 9 dB giving a visometric signal-to-noise ratio of 48 dB in the television channel and 41 dB in the telephone channel.

The build-up of a system covering the earthy distances justify the revision of the existing international recommendations as well as the application of the qualitative specifications to a hypothetical reference circuit of 25 000 km instead of 2500 km as today. (Studies in that field are being carried on by the Study Group of the CCIR on radio relay systems.)

The growing demands for more telephone channels necessitate the increase of the information capacity within the existing systems in service, as well as the development of new systems with greater information capacity.

The information capacity in the existing systems can be enhanced by two methods complementary to each other. The first method is the increase of the number of microwave channels within the given frequency band. The second way consists in the broadening of the baseband transmitted by the individual microwave channels.

The growing demands cannot be met by purely expanding the existing systems. Hence the necessity arises to develop new systems which are called not only for increasing the number of the telephone channels to be transmitted but also for satisfying all quality and service requirements which have become necessary in the development.

The increase of the number of telephone channels requires, first of all, the extension of the baseband width. According to preliminary considerations, the transmission of  $10 \div 12$  Mc wide baseband seems to be desirable. Within this band width maximum 2700 telephone channels can be accommodated. This band width allows the transmission of a coloured television picture with a great number of lines, suitable for theatrical projection. In the case of transmission of a television picture with a normal number of lines, several hundreds of telephone channels can also be transmitted.

In order to fulfil the higher-quality requirements the extension of the pass band width makes it desirable to decrease the relative band width with respect to the carrier frequency. This desire for a given pass band can be satisfied only by increasing the carrier frequency. This circumstance justifies the choice of the frequency band around 6000 Mc.

As a new service requirement arises the claim for transmitting data signals of electronic computers and data processing machines. This requirement involves a high degree of reliability of the system. Besides, it requires a very fast switching over to the stand-by equipment in the case of failure. The switching time must be so brief that it may not cause signal loss in the succession of digital signals. The higher reliability and the fast switching, however, require the use of suitable systems of failure correction in the transmission of digital signals.



It is desirable for economic reasons that the new system should be installed on the route of systems already in service, in their buildings, making use of their aerial system. Within the available frequency range (Fig. 5) it is convenient to locate eight broad-band and two narrow-band channels. Of the eight broad-band channels six are regular channels and two stand-by channels.

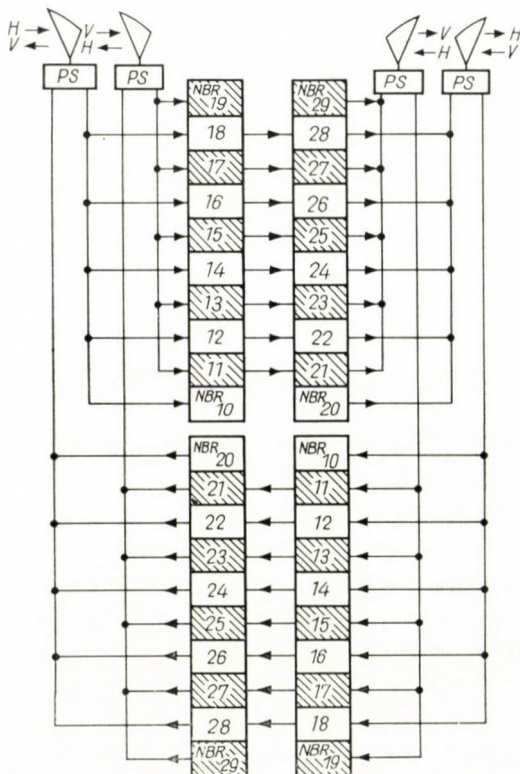


Fig. 5

The two narrow-band channels serve for remote control and for carrying out service telephone talks. The two stand-by channels belonging to the six regular channels contribute to the higher service reliability. In the case of a deep selective fading effect the stand-by channel which is farther from the involved regular channel takes on the traffic. That corresponds to an operation similar to the principle of frequency diversity.

Having outlined the requirements, let us analyse the basic principles governing the realizations of the system. We have a choice between two basic principles. The first possibility is an amplification exclusively on microwaves. The second is the transposition of the input microwave signal to intermediate frequency and its amplification on this frequency.

The gain of the microwave amplifiers necessary to compensate for the section attenuations, system losses and fading effects, etc. is  $70 \div 80$  dB. To satisfy the baseband requirements, the amplifier must feature a high stability of amplitude and a minimum fluctuation of propagation time within the pass band. In addition, the AM—PM conversion, i.e. the conversion of the additional amplitude modulation into phase modulation, shall be reduced to the minimum. For the complete system, the AM—PM conversion shall not exceed the value of  $3^\circ/\text{dB}$ . In view of the given rigorous requirements, it is convenient

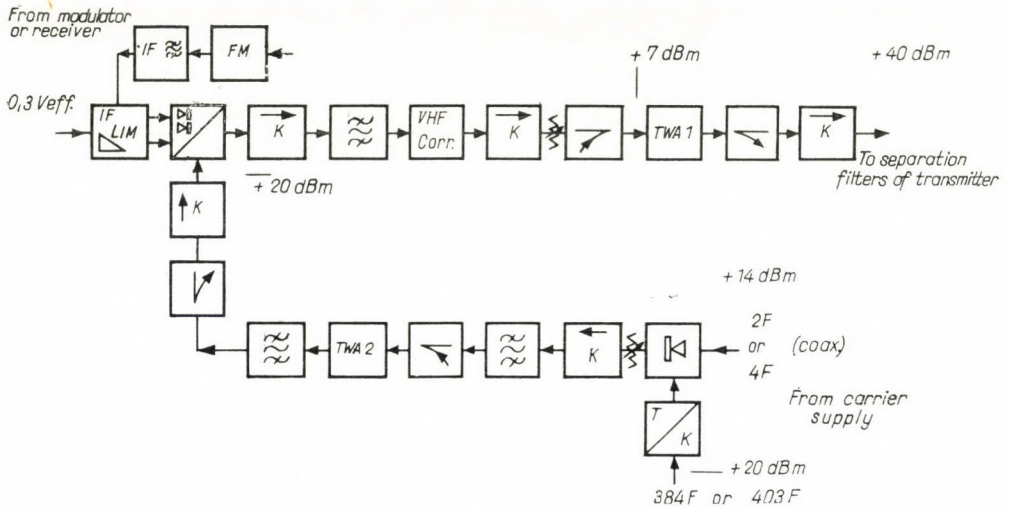


Fig. 6

to divide the stages of the whole amplifier system functionally and to make the calculation of each stage dependent on the given function. The complete amplifier system consists of preliminary, amplifier and output stages. These stages are complemented by a mixer stage by means of which the frequency of the input signal can be shifted by a certain value. The modification of the frequency is indispensable because the output stage of the system can react, across the reflectors, upon the input stage and this can result in interference noise, possibly in the self-oscillation of the system. The most important requirement is the decrease of the noise factor by the input stage. By means of low-noise travelling-wave tubes a noise factor of  $4 \div 5$  dB could be attained. The noise requirements concerning the intermediate amplifier stage are considerably lower, and the required output power does not exceed a few milliwatts. Therefore, the gain of about 50 dB which must be offered by this stage can be attained easily. A crystal-controlled shift oscillator oscillating at the difference of the transmitter and receiver frequencies is joined to the mixer stage. The frequency of the shift oscillator will be added to the incoming amplified frequency,



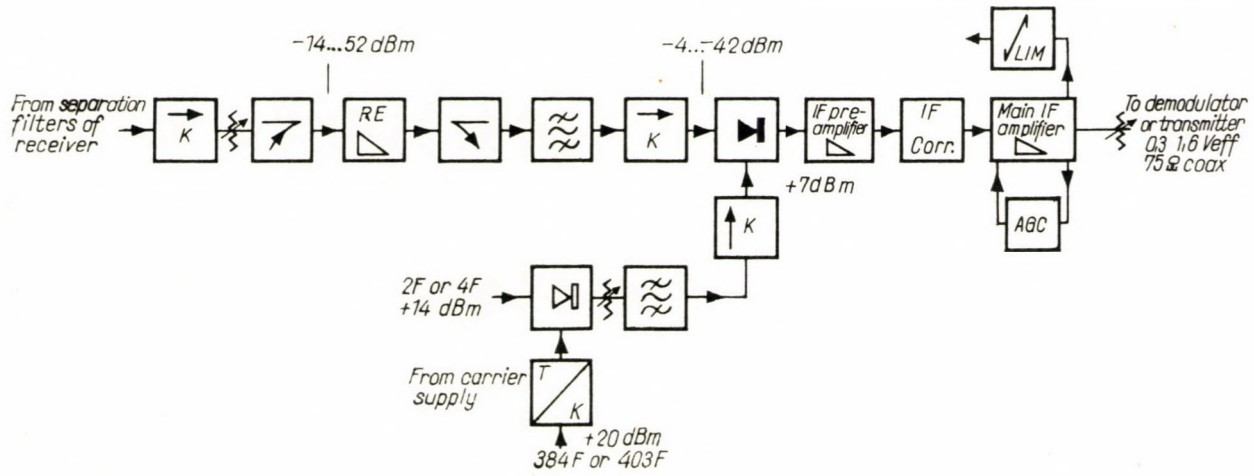


Fig. 7

i.e. it will be deducted from the amplified frequency and this produces the transmitter frequency shifted with respect to the incoming receiver frequency. The transmitter frequency obtained in the mixer stage will be amplified from a level of a few milliwatts to that of some watts by the output amplifier tube.

The system built up exclusively on travelling-wave tubes has the advantage of consisting of few building units. A further advantage is that, in the case of microwave amplification, the relative band width related to the carrier wave of 6000 Mc is small.

The use of the above system for high-capacity transmission arouses several problems. For a better utilization of the frequency band the microwave channels placed near to one another require microwave filters ensuring a considerable image attenuation and having a great steepness at the edges of the frequency band. The compensation of the amplitude and group delay fluctuations within the band must be achieved by means of microwave elements. A further problem is to obtain a suitable microwave discriminator and microwave limiter. The switching over to the stand-by equipment must be made by means of a microwave switch.

In systems using intermediate frequency amplification, although they are of a more complicated build-up, the above problems fall away and the solution can rather rest upon well-known principles justified in practice. In the design of high-capacity systems, however, the principles known and justified for systems of lesser capacity may serve only as a starting point to the solution of problems arising in connection with the great number of telephone channels and with the nearness of the microwave channels.

The block diagram of the transmitter of the system using intermediate frequency amplification is shown in Fig. 6.

In the block diagram of the receiver (Fig. 7) the microwave signal coming from the antenna system will be amplified by a low-noise microwave pre-amplifier.

On the basis of the block diagrams it shall be examined in what degree the elements of the system contribute to the resulting noise and in what degree they influence the noise balance thereby.

### III. Noise Problems of Microwave Links

The resulting noise can be decomposed into three main component noises: the thermal noise, the intermodulation noise and the interference noise. As the three component noises arise from independent sources, the component mean noise powers add up. In a given system, all three component noises are functions of the baseband load.



For the calculation of the thermal noise, the route attenuation must first be determined. The antenna emits on the wavelength of 5 cm in a beam width of  $1.2^\circ$ . At the distance of 50 km the beam of  $1.2^\circ$  lights a surface of about 1,000,000 m<sup>2</sup>. From that, some millionth parts fall upon the receiver antenna having a useful surface of some square metres. Assuming a mean fading of 7 dB, exactly one millionth part of the transmitter power goes to the receiver antenna. Besides that, in the calculation of the input level of the receiver, the attenuation of the antenna feeder and waveguide units shall also be taken into account. If the transmitter power, receiver input level, receiver noise factor and the frequency deviation are known, the thermal signal-to-noise ratio can be determined.

In the case of the transmission of multichannel telephone signals the nonlinear distortions of the transmission path cause intermodulation noise which deteriorates the signal-to-noise ratio of the communication link. In frequency-modulated transmission nonlinear distortions are caused by

- a) nonlinear characteristics of the baseband networks as well as by
- b) fluctuations of the group delay characteristics of the intermediate-frequency, resp. radiofrequency networks.

The distortion effect of the latter will be easily understood if we take into consideration that in the transmission of a frequency-modulated signal the signal undergoes an additional amplitude and phase modulation owing to the frequency-dependent group delay. The additional amplitude modulation is compensated in practice by the limiter but the additional phase modulation cannot be separated from the useful information.

For the analysis of the produced intermodulation noise, in the case of a great number of speech channels, the baseband signal will be replaced by "white noise" as it can be assumed that the baseband signal resulting from the many independent telephone talks has a normal probability density and so it has properties similar to the thermal noise. This assumption proves true in terms of statistical investigations.

The theoretical analysis of the intermodulation noise results in the following:

1. The noise power due to the nonlinear distortions of the baseband networks (in a single telephone channel) is (Fig. 8)

$$P_n(\omega) = \left[ 1/2 a_2^2 a_2 \left( \frac{\omega}{B} \right) + 2/3 a_3^2 a_3 \left( \frac{\omega}{B} \right) \right] P_0.$$

2. The noise power due to phase distortion of the intermediate-frequency, resp. radiofrequency networks (Fig. 9) is

$$P_n(\omega) = \left[ 1/2 b_2^2 \beta_2 \left( \frac{\omega}{B} \right) + 2/3 b_3^2 \beta_3 \left( \frac{\omega}{B} \right) \right] P_0.$$

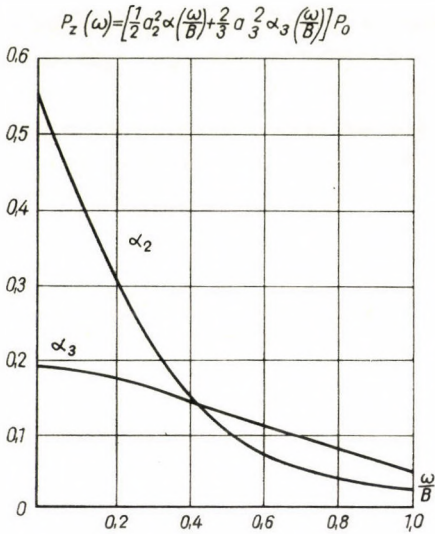


Fig. 8

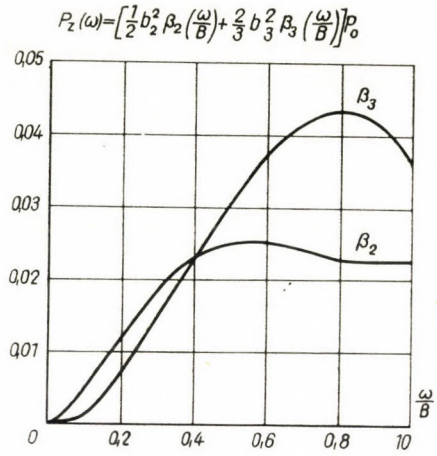


Fig. 9

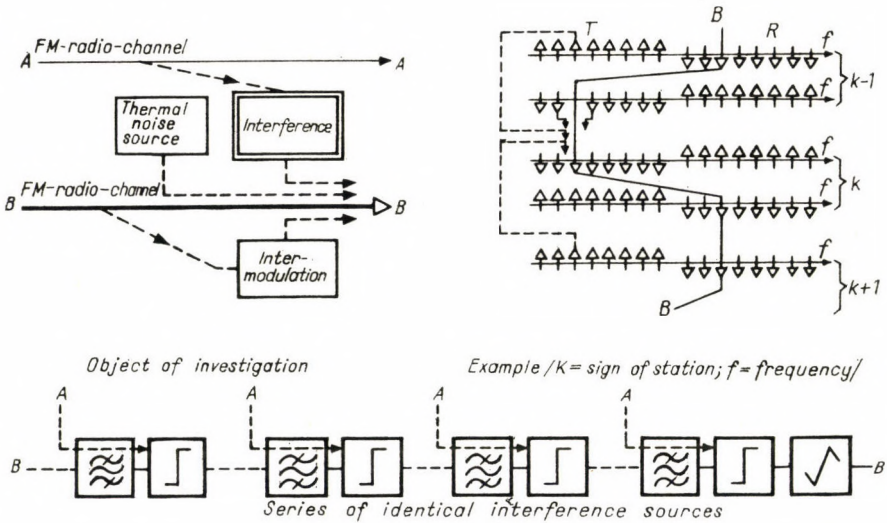


Fig. 10

In the above expressions  $\omega$  is the telephone channel under test,  $B$  is the carrier frequency of the upper telephone channel,  $a_2, a_3$ , resp.  $b_2, b_3$  are constants characterizing the nonlinearity of the transmission characteristics. The functions  $\alpha$  and  $\beta$  can be determined from the enclosed diagrams.  $P_0$  is the power of the test noise. When determining the diagrams, the effect of the used pre-emphasis characteristics was also taken into account.



The most important sources of interference due to external radio channels for the case of eight radio channels in each direction and using two carrier frequencies in each radio channel are shown in Fig. 10.

On the scales shown one under another the carrier frequencies of three stations are indicated. The transmission path of the radio channel under test is represented by the thick line *B—B*. Four interference paths are shown. Two of them are due to the antenna backradiation interference and the other two to neighbouring radio channels.

The measured and the theoretically determined characteristics for antenna backradiation interference are shown in Fig. 11 and 12. (The thick line re-

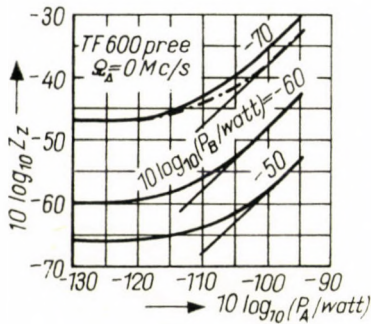


Fig. 11

(Remarks see on page 39, Fig. 14)

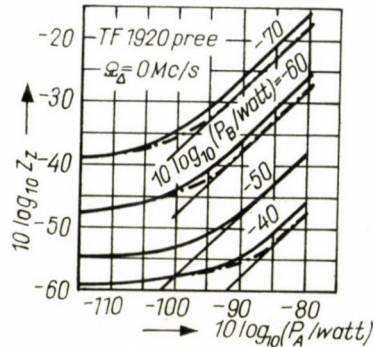


Fig. 12

presents the measured characteristic, the dotted line indicates the power sum of the theoretical interference and the ground noise of the noisy radio channel.) Fig. 11 refers to the case of 600 telephone channels and the Fig. 12 to that of 1920 telephone channels. The noise-to-noise ratio is shown in decibels on the ordinate, the noise level at the receiver filter input of the disturbed radio channel is plotted on the abscissa. The parameter of the curves is the level of the useful signal at the input of the receiver filter of the disturbed radio channel.

The theoretical characteristics have been determined with the assumption of a simple null detector. It can be well seen that this detector model characterizes, in the case under test, the real conditions with sufficient accuracy.

The characteristics of interference noise due to neighbouring radio channels for 1920 telephone channels are shown in Figs. 13 and 14.

The carrier frequency separation between the radio channels under test is 30 Mc/s. The receiver selectivity at a distance of 25 Mc/s from mid-band equals 42 dB in the case of Fig. 13 and 18 dB in the case of Fig. 14. In the case of interference between neighbouring radio channels, the receiver selectivity plays an important part in suppressing the interference due to secondary effects of the FM detector.

Fig. 13 demonstrates that, if a suitable receiver selectivity is used, the suppression is complete and the interference due to null detection is alone decisive for the magnitude of the noise produced.

The diagrams shown in the foregoing figures refer to the case of a single interference source. In reality, however, a great number of interference sources occur along a link of considerable length. This involves the necessity of statistical analysis.

The theoretical and experimental analysis of the interference noise beyond the examples described here has been extended to all substantial sources of the channel arrangement shown in Fig. 10 and has led to the result that in

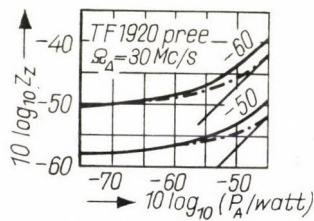


Fig. 13.

(Remarks see on page 39, Fig. 14)

the case of transmitting 1920 telephone channels on each broad-band radio channel, with a distance of 30 Mc/s between the neighbouring broad-band channels of one direction and 75 Mc/s between the broad-band channels of the opposite direction, the interference noise on a link of 2500 km length can be kept by adequate design below 1000 pW.

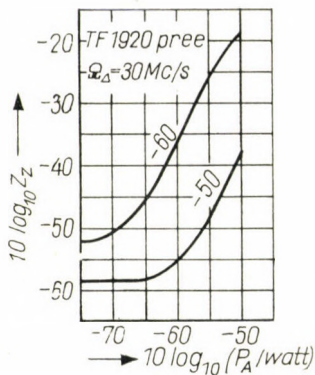
For the purpose of increasing the information capacity of the broad-band microwave system all noise sources shall be revised and further possibilities to improve the signal-to-noise ratio shall be explored. One of these possibilities is the decrease of the receiver noise factor by the use of low-noise preamplifier.

The microwave receivers in use today have a mixer input with semiconductor diodes whose noise factor amounts to about 14 dB. Using up-to date diodes and IF amplifiers with lower noise, the noise factor can be decreased to 10 ÷ 11 dB.

The further decrease of the receiver noise factor involves the necessity of introducing a low-noise preamplifier before the input mixer stage. This microwave preamplifier may be a travelling-wave electronic amplifier as well as an amplifier with parametric diodes or tunnel diodes. The intrinsic noise factor of the preamplifier must be considerably lower than the noise factor of the mixer stage and its gain must be so high that the noise of the following stages could not prevail.



In the case of travelling-wave tube preamplifier a noise factor of 7 ÷ 10 dB can be attained by means of a simple noise-killing gun (with two or three voltage steps). By the aid of the more complicated noise-killing gun with many



To Figs. 11-14. : Modulation

in the disturbing radio channel	yes
in the disturbed radio channel	no

To Figs. 13-14. Receiver selectivity

Detuning, mcs	25	
Rel. att./dB	1st variant of receiver	42
	2nd variant of receiver	18

- $Z_z$ -noise-test noise ratio in the upper telephone channel
- measured noise
- power sum of noise measured without interference and calculated interference noise
- calculated interference noise

Fig. 14

voltage steps a noise factor of 5 ÷ 7 dB can be achieved. Consequently, a considerable improvement of the noise factor can be obtained with the travelling-wave tube preamplifier. These amplifiers have also a large band width and can therefore be applied in broad-band microwave communication without any difficulty.

The noise factor can further be improved by the use of parametric diode amplifier. This allows to obtain a noise factor of about  $3 \div 5$  dB. The operation of the amplifier is based upon the voltage dependence of the semiconductor diode's capacitance. The low-level signal to be amplified and the high-level feeding signal (with a power of  $50 \div 10$  mW) result in a signal whose frequency corresponds to the sum, i.e. to the difference of these frequencies. In the first case the amplifier is called a nonreversing type and in the latter, a reversing-type parametric amplifier. The power amplification is given by the ratio of the appearing new signal to the frequencies of the signal to be amplified. In the case of the reversing stages a negative resistance appears which permits to increase further the amplification at the expense of stability. In the microwave range, an appreciable amplification can be attained only with the reversing-type parametric amplifier. It is called converter amplifier if the frequencies of the input and output signals are different and is referred to as a signal-frequency amplifier if the input signal and the output signal have the same frequency. In the case of signal-frequency amplifiers degenerative and non-degenerative amplifiers are discerned depending upon whether or not the appearing new signal falls in the band to be amplified.

The properties of parametric amplifiers depend, in a high degree, on the features of the diode used. Important parameters are the series resistance of the diode and the degree of capacitance variation. With the decrease of the series resistance the noise factor of the amplifier decreases and its band width increases. With the increase of the capacitance variation less feeding power is required.

The parametric amplifier has the advantage that a low noise factor can be achieved. It has, however, the disadvantage that special high-frequency feeding is necessary. In broad-band microwave links in a band width of  $\pm 12$  Mc/s an amplitude fluctuation of no more than  $\pm 0,1$  dB is permissible, and this is very hard to attain with parametric amplifiers.

The tunnel diode preamplifier does not require any special high-frequency feeding. By its use a noise factor of 5 dB may be expected.

The improvement of the receiver noise factor can be exploited for several purposes from the viewpoint of the equipment operation: for the increase of capacity or transmission range of the microwave channel or for applying such economic solutions as the siting of the equipment on the Earth surface or the use of a long antenna feeder.

For a higher reliability of operation and lower power consumption it is expedient to use semiconductor devices.

The microwave systems with more than 10 000 telephone channels in co-operation with broad-band cable network can be expected to satisfy, at long range, the requirements of transcontinental communication. Beside the analogous systems, code modulation can also be used extensively. The utiliza-



tion of the very advantageous properties offered by code modulation may open wide space for future development. Today we know already the basic principles which allow the increase even of this capacity by orders of magnitude. The attenuation of the circular waveguide in  $TE_{01}$  mode decreases with frequency. In this mode, in the case of millimetric waves, the band width which can be transmitted exceeds the band width transmitted by free-space radiation.

The coded transmission of speech sounds or sound groups and the composition of synthetic speech from the codes decreases, by orders of magnitude, the band width of the speech channel and can likewise increase the numbers of telephone channels to be transmitted.

Considering the existing systems and those under development as well as the basic principles determining the future prospects it may firmly be announced that the possibilities of further development of telecommunication technique to satisfy the growing demands are at our disposal.

#### REFERENCES

1. BAGHDADY, E. J.: Lectures on Communication System Theory. Mc-Graw-Hill Book Company, 1961.
2. BOGNÁR, G.: The Effect of Noise Sources on the Performance of a Multi-Channel FM Radio Link. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* (1958), No. 4.
3. Бородич, С. В.—Минашин, В. П.—Соколов, А. В.: Радиорелейная связь. Связьиздат, Москва 1960.
4. CCIR Documents of the Xth Plenary Assembly, Geneva 1963. Volume IV: Radio Relay Systems, Space Systems, Radioastronomy.
5. CURTIS, H. E.—COLLINS, T. R. D.—JAMESON, B. C.: Interstitial Channels for Doubling TD-2 Radio System Capacity. *The Bell System Technical Journal* **39** (1960), 1504—1527.
6. CARUTHERS, R. S.: All Solid State Microwave — A New Aera in World Communication. XIth International Scientific Congress on Electronics, Rome; 22<sup>nd</sup>—26<sup>th</sup> June 1964.
7. FEDIDA, S.: All Travelling-Wave Tube Systems. *Electronic Engineering* (1958), May.
8. Proceedings of the Second Colloquium on Microwave Communication. Akadémiai Kiadó, Budapest 1963. See also: *Acta Techn. Hung.* **42** (1963), Fasc. 1—3.
9. Project Echo. *The Bell System Technical Journal* **40** (1961), No. 4.
10. Convention on Long-Distance Transmission by Waveguide. *The Proceedings of the I. E. E.* Part B. Supplement (1959), January.
11. Modulations- und Funkgestelle FM 960-TV/4000. *Siemens Weitverkehrs-Technik*.
12. Смирнов, В. А.: Основы радиосвязи на ультракоротких волнах. Связьиздат, Москва 1957.
13. The Telstar Experiment. *The Bell System Technical Journal* **42** (1963), Number 4.
14. The TH Microwave Radio Relay System. *The Bell System Technical Journal* **40** (1961), Number 6.
15. The Summaries of Papers of the International Conference on Microwaves, Circuit Theory and Information Theory. September 7—11, 1964, Tokyo; Part 1: Microwaves.
16. RÓNA, P.: Intermodulation Noise on Multi-Channel Radio Links. *Híradástechnika* **13** (1962), 173—176 (in Hungarian).
17. CSIBI, S.: Mean-Square Interference Noise of FM Radio Links. Thesis for a candidate's degree, 1960. (Available in the manuscript archives of the Hungarian Academy of Sciences.)

## DIE ERHÖHUNG DER INFORMATIONSKAPAZITÄT VON BREITBAND-WEITVERKEHRS-RICHTFUNKVERBINDUNGEN

G. BOGNÁR

### ZUSAMMENFASSUNG

Es werden die Probleme der Breitband-Weitverkehrs-Richtfunkverbindungen als Teile eines die ganze Erde umfassenden Nachrichtennetzes erörtert. Die Möglichkeiten der Lösung des einen die ganze Erde umfassenden Netz bildenden Systems werden behandelt. Der allgemeine Aufbau der Einrichtungen der neuzeitlichen Weitverkehrs-Richtfunkverbindungen und die an sie gestellten Forderungen werden beschrieben. Die Geräuschprobleme der Richtfunkverbindungen werden untersucht. Die Möglichkeiten der Verwendung verschiedener Typen von Geräuscharmen Vorverstärkern werden erwo-gen. Die Endergebnisse theoretischer Untersuchungen über das Intermodulationsgeräusch und das von den benachbarten Funkkanälen herrührende Interferenzgeräusch werden mitgeteilt. Abschließend wird auf die Möglichkeiten hingewiesen, die in Perspektive die Richtungen der Weiterentwicklung der Breitbandnachrichtentechnik bestimmen können.

## L'ACCROISSEMENT DE LA CAPACITÉ D'INFORMATION DES FAISCEAUX HERTZIENS A LARGE BANDE

G. BOGNÁR

### RÉSUMÉ

L'auteur aborde le problème des faisceaux hertziens à large bande et à grande distance en les considérant comme faisant partie d'un réseau de communication couvrant l'ensemble de la Terre, et expose les possibilités de réalisation d'un tel réseau. Il décrit la structure générale des équipements des liaisons hertziennes modernes, ainsi que les exigences auxquelles celles-ci doivent satisfaire. Il examine aussi les problèmes du bruit dans les liaisons hertziennes. Les possibilités d'application des divers types de préamplificateurs à faibles bruits sont envisagées. L'auteur expose ensuite les conclusions théoriques concernant le bruit d'intermodulation et le bruit dû à l'interférence entre radiocanaux voisins. L'article se termine par l'indication des perspectives et de l'orientation du développement futur de la communication à large bande.

## УВЕЛИЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЕМКОСТИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ МАГИСТРАЛЬНЫХ РАДИОРЕЛЕЙНЫХ ЛИНИЙ

Г. БОГНАР

### РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются проблемы широкополосных магистральных радиорелейных линий как части сети связи, охватывающей всю Землю. Обсуждаются возможности решения системы, составляющей сеть, охватывающую Землю. Излагаются общее построение аппаратуры современных магистральных радиорелейных линий и предъявляемые к ним требования. Исследуются проблемы шумов радиорелейных линий. Оцениваются возможности применения различных типов малозумных предварительных усилителей. Сообщаются результаты теоретических исследований по переходным шумам и шумам, вызванным интерференцией между соседними радиоканалами. Наконец, указываются возможности, которые в перспективе могут определить направления дальнейшего развития широкополосной радиорелейной связи.



# CROSS VAULT SHAPED SECTORIAL SHELLS WITH CANTILEVER-LIKE OVERHANGING FREE BOUNDARY

P. CSONKA

DR. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY  
OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received November 2, 1964]

Paper deals with the statics of polygonal shells consisting of identically shaped sectorial elements. The middle surfaces of the sector elements are cylinders with horizontal generatrices, the basic projections of which are normal to the sides of the polygonal plan form. The single sectorial elements are supported on both of their sides by vertical arches, the cantilevered front edge, however, is entirely free without any support. The load system acting on the shell is identically distributed upon each sectorial element and is constant along the generatrices. The considerations are based on the well known simplifying assumptions of membrane theory and disregard all the disturbing effects arising in the vicinity of the bordering arches. The application of the derived formulae is explained by a numerical example.

## 1. Introduction

For roofing of larger areas modern architecture frequently applies polygonal shells constructed of sectorial elements, separated from each other by dividing ribs. These composite shells are of very interesting appearance and especially favoured when their unsupported, entirely free front edge is cantilevered over the basic polygon (Fig. 1.).

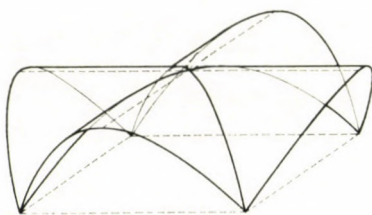


Fig. 1. Cross vault shaped sectorial shell with cantilever-like overhanging free boundary

Present paper deals with a special type of the afore-mentioned sectorial shells, that is, of shells made up of cylindrical elements. Up to now, no analytical method has been published in technical literature. The following endeavours fill this gap by expounding an analytical method.

## 2. Symbols, Assumptions

The following treats composite shells with a polygonal plan form. The individual elements of the shell are of identical shape and symmetrical as to the normal bisector plane of the sides of the basic polygon. The middle surface of the shell sectors is a cylinder with horizontal axis.

The sectorial elements are supported on both sides by vertical arches. The cantilevered front parts, projecting beyond the sides of the basic polygon,

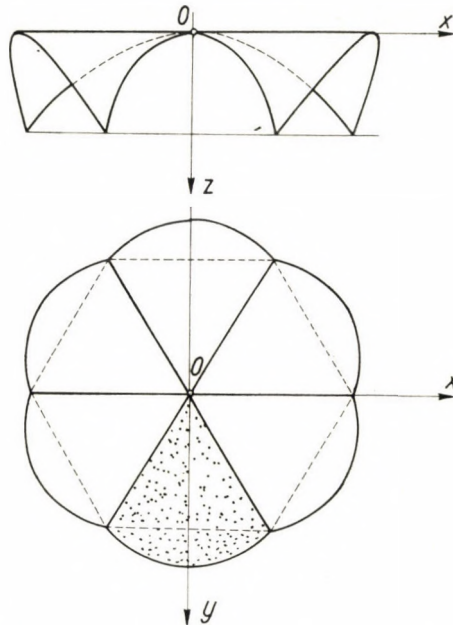


Fig. 2. System of co-ordinates  $0(x, y, z)$

are entirely free, unsupported by any buttressing structures. The border line of this entirely free edge zone is a curve, which does not coincide with any of the generatrices of the cylinder, does not touch any of them, and does not cut any of them at more than one point.

It is assumed that the shell is loaded by vertical forces which are symmetrically distributed in relation to the planes of symmetry of the basic polygon and are considered as constant along the generatrices.

The following discussions are based on the usual assumptions of membrane theory, the disturbing effects arising in the vicinity of the bordering arches being disregarded.

All the investigations refer to the shell sector marked in Figure 2 by dotting. The system  $0(x, y, z)$  of orthogonal co-ordinates is placed, as shown in the figure, in such a way that vertical axis  $z$  should pass through the center



of the shell and plane  $x = 0$  coincide with the plane of symmetry of the examined shell sector.

The shape of the shell should be characterized by the equation of its middle surface, that is by

$$z = f(x) \quad (1)$$

and the form of the free edge line by the equation of its basic projection:

$$t(x) - y = 0. \quad (2)$$

The vertical loads acting on the shell should be expressed by their specific value referred to the unit area of the ground plane, and characterized by the load function

$$Z = Z(x). \quad (3)$$

### 3. Stress Function of the Problem

For solving the problem, Pucher's stress function  $F = F(x, y)$  is to be set up. In the case of shells loaded by vertical forces, this function has to satisfy the differential equation of general validity

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + Z = 0.$$

Since in the present case the relations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad Z = Z(x)$$

hold, instead of the former differential equation the following may be written:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + Z(x) = 0.$$

Consequently:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{Z(x)}{d^2 z / dx^2}. \quad (4)$$

Since the middle surface of the examined shell sector is a cylinder with generatrices parallel to the axis  $y$ , the derivate  $\partial^2 z / \partial x^2$  is a function of variable  $x$  only. So, the right side of formula (4) also exclusively depends on the variable  $x$ . According to these

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \Phi(x) \quad (5)$$

where  $\Phi(x)$  is a known function of the variable  $x$ :

$$\Phi(x) = - \frac{Z(x)}{d^2 z / dx^2}. \quad (6)$$

From relation (5) can be deduced by twofold integration the formula

$$F = \Phi(x) \frac{y^2}{2} + C_1(x)y + C_2(x) \quad (7)$$

in which the expressions  $C_1(x)$  and  $C_2(x)$  denote, for the time being, unknown integration functions.

For the calculation, functions  $C_1(x)$  and  $C_2(x)$  have to be determined from the boundary conditions of the problem.

Since the examined shell structure and its loading are symmetrically arranged in regard to the dividing ribs supporting the shell sectors, the ribs are only loaded by forces acting in their planes. According to the assumption that the ribs are sufficiently resistant to all these forces, no restricting conditions have to be made for function  $F$  along the ribs.

The situation is quite different along the entirely free edge line, that is for  $y = t(x)$ , where the shell is completely unsupported. For this reason, along this edge line, the boundary conditions are:

$$[F]_{y=t(x)} = 0, \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{y=t(x)} = 0. \quad (8)$$

In the case under (5), these boundary conditions can be formulated as follows:

$$\Phi(x) \cdot \frac{[t(x)]^2}{2} + C_1(x) \cdot t(x) + C_2(x) = 0,$$

$$\Phi(x) \cdot t(x) + C_1(x) = 0.$$

From these two equations, integration functions  $C_1(x)$  and  $C_2(x)$  can be unequivocally determined:

$$C_1(x) = -\Phi(x) \cdot t(x),$$

$$C_2(x) = +\Phi(x) \frac{[t(x)]^2}{2}.$$

Setting these values in (7), the formula

$$F = \frac{1}{2} \Phi(x) \cdot [t(x) - y]^2 \quad (9)$$

is obtained for the stress function of the problem.

Being acquainted with stress function  $F$ , the reduced internal forces can be calculated with the aid of the well-known relations:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (10)$$



Consequently:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \Phi(x), \\
 n_{xy} &= + \frac{d\Phi}{dx} [t(x) - y] + \Phi(x) \cdot \frac{dt}{dx}, \\
 n_y &= - \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi}{dx^2} [t(x) - y] + 2 \frac{d\Phi}{dx} [t(x) - y] \frac{dt}{dx} + \\
 &\quad + \Phi(x) \cdot \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 - \Phi(x) [t(x) - y] \frac{d^2t}{dx^2}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

In the special case, when

$$\Phi(x) = \Phi_0 = \text{const.},$$

formula (9) of the stress function can be written as follows:

$$F = \frac{\Phi_0}{2} [t(x) - y]^2. \tag{12}$$

Consequently, formulae (11) can be used in the following simpler form:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \Phi_0, \\
 n_{xy} &= \Phi_0 \frac{dt}{dx}, \\
 n_y &= \Phi_0 \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 + \Phi_0 [t(x) - y] \frac{d^2t}{dx^2}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

#### 4. Forces Acting on the Intermediate Ribs

For structural analysis of cross vault shaped sectorial shells it is necessary to know the forces acting on the intermediate ribs of the roof. For simplicity's sake the determination of these will be demonstrated here on a concrete example; in other cases the procedure may be similar to the one shown below.

The middle surface of the shell sectors of the roof construction treated here is a parabolic cylinder, the basic projection of the unsupported edge line being a parabola (Fig. 3). The equation of the middle surface of the dotted shell sector is

$$z = \frac{h}{h^2} x^2,$$

and that of the unsupported edge line

$$y - t(x) = 0,$$

where

$$t(x) = b - \frac{cx^2}{a^2}. \quad (14)$$

As a load acting on the shell we take a vertical distributed force system into account, the specific value of which as related to the basic area is

$$Z = Z_0 = \text{const.}$$

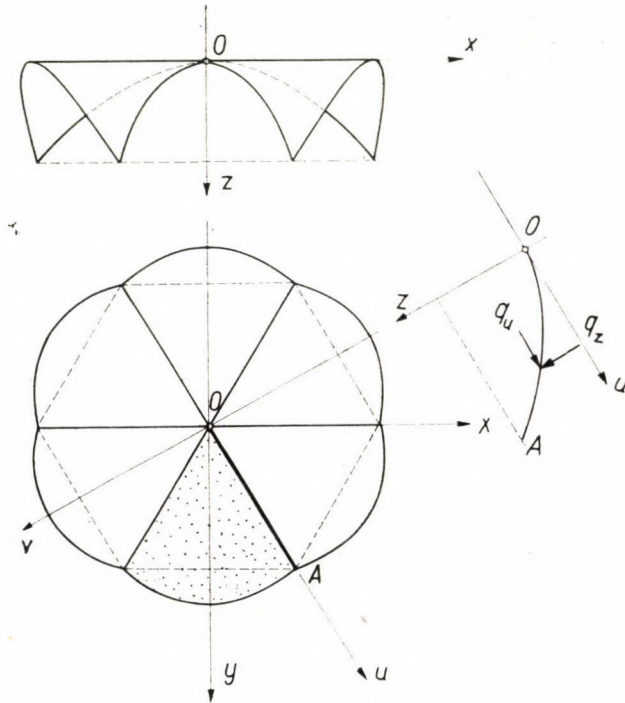


Fig. 3. System of co-ordinates  $0(u, v, z)$

In the chosen example function  $\Phi(x)$  as defined by formula (4) has a constant value:

$$\Phi_0 = -\frac{Z}{d^2z/dx^2} = -\frac{Z_0}{2h/a^2} = -\frac{Z_0 a^2}{2h}. \quad (15)$$

When determining the forces acting on the intermediate ribs, it would be expedient to introduce the system of co-ordinates  $0(u, v, z)$  instead of co-ordinates  $0(x, y, z)$ . The origin  $0$  and axis  $z$ , respectively, of the new system coincide with those of the original system and axis plane  $v = 0$  is common with the plane of the intermediate rib under investigation. Between the co-ordinates



of the two systems the following relations hold:

$$x = u \cos a - v \sin a,$$

$$y = u \sin a + v \cos a.$$

In the system of co-ordinates  $0(u, v, z)$  the middle surface of the shell sector in question can be expressed as

$$z = \frac{h}{a^2} (u \cos a - v \sin a)^2, \quad (16)$$

and the equation of the basic projection of the unsupported edge line is

$$\frac{c}{a^2} (u \cos a - v \sin a)^2 + (u \sin a + v \cos a) - b = 0. \quad (17)$$

By taking these into consideration, equation (12) of the stress function will be modified as follows:

$$F = \frac{\Phi_0}{2} \left[ \frac{c}{a^2} (u \cos a - v \sin a)^2 + (u \sin a + v \cos a) - b \right]^2. \quad (18)$$

As a consequence, the values of reduced internal forces belonging to the directions  $u$  and  $v$  are in general

$$\begin{aligned} n_u &= \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \Phi_0 \left[ \frac{6c^2}{a^4} \sin^2 a (u \cos a - v \sin a)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6c}{a^2} v \cos a \cdot \sin^2 a + \frac{2c}{a^2} u \sin a (\sin^2 a - 2 \cos^2 a) + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 a - \frac{2c}{a^2} b \sin^2 a \right], \\ n_{uv} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial u \cdot \partial v} = \Phi_0 \left[ \frac{6c^2}{a^4} \cos a \cdot \sin a (u \cos a - v \sin a)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2c}{a^2} u \cos a (\cos^2 a - 2 \sin^2 a) - \frac{2c}{a^2} v \sin a (\sin^2 a - 2 \cos^2 a) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2c}{a^2} b \right) \cos a \cdot \sin a \right], \\ n_v &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \Phi_0 \left[ \frac{6c^2}{a^4} \cos^2 a (u \cos a - v \sin a)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6c}{a^2} (u \cos^2 a \cdot \sin a) + \frac{2c}{a^2} v \cos a (\cos^2 a - 2 \sin^2 a) + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 a - \frac{2c}{a^2} b \cos^2 a \right], \end{aligned}$$

which take the following simplified shape along the rib  $v = 0$ :

$$\begin{aligned}
 [n_u]_{v=0} &= \Phi_0 \left[ \frac{6c^2}{a^4} u^2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{2c}{a^2} u \sin \alpha (\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos^2 \alpha - \frac{2c}{a^2} b \sin^2 \alpha \right], \\
 [n_{uv}]_{v=0} &= \Phi_0 \left[ \frac{6c^2}{a^4} u^2 \cos^3 \alpha \sin \alpha - \frac{2c}{a^2} u \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) - \right. \\
 &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2cb}{a^2} \right) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \right], \\
 [n_v]_{v=0} &= \Phi_0 \left[ \frac{6c^2}{a^4} u^2 \cos^4 \alpha + \frac{6c}{a^2} u \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \sin^2 \alpha - \frac{2c}{a^2} b \cos^2 \alpha \right].
 \end{aligned} \tag{19}$$

Of the reduced internal forces  $n_u$ ,  $n_{uv}$  and  $n_v$  only the forces  $n_{uv}$  and  $n_v$  act on the rib  $v = 0$ , and that from both sides. Therefore, values of internal forces

$$[n_{uv}]_{v=0} \quad \text{and} \quad [n_v]_{v=0}$$

must be taken into calculation twofold. These forces acting on the rib will be characterized by their specific value as related to the unit length of the basic projection of their axis line. Consequently, the specific value of the  $u$ - and  $v$ -directed components of forces acting on the rib are

$$q_u = 2 [n_{uv}]_{v=0}, \tag{20}$$

$$q_v = 2 [n_{uv}]_{v=0} \tan \varphi + 2 [n_v]_{v=0} \tan \psi. \tag{21}$$

As the definite result of the above investigation we obtain the formulae of force components  $q_u$  and  $q_v$  by substituting the values (19) and (21) into the formulae (20) and (21).

## 5. Numerical Example

The reduced internal forces acting on the cross vault shaped sectorial shell constructed over a quadratical plan form, shown in Fig. 4, should be determined.

In the case of the given example they are:

$$a = 10,0 \text{ m}, \quad b = 15,0 \text{ m}, \quad c = 5,0 \text{ m}, \quad h = 8,0 \text{ m}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

The specific value of the distributed vertical force system related to the basic area is

$$Z = Z_0 = 320 \text{ kp/m}^2.$$

The middle surfaces of the shell sectors are parabolic cylinders, the basic projection of the unsupported edge line being a parabola. The equation of the middle surface of the shell sector,



denoted in the figure by dotting is

$$z = \frac{h}{a^2} x^2 = \frac{8,0}{10,0^2} x^2 = 0,08 x^2.$$

The basic projection of the unsupported edge line can be characterized by the equation

$$y = t(x) = 15,0 - 5,0 \frac{x^2}{10,0^2} = 15 - 0,05 x^2.$$

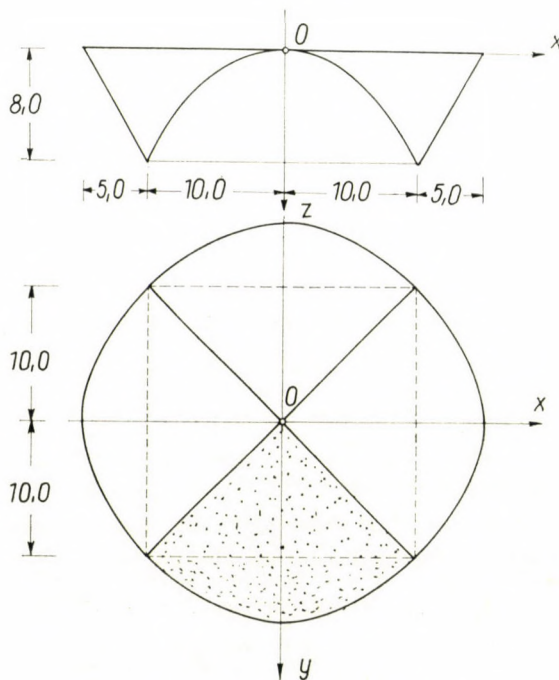


Fig. 4. Numerical example

Reckoning the above values, we obtain the relation according to formula (15)

$$\Phi_0 = - \frac{320 \cdot 10,0^2}{2 \cdot 8,0} = - 2000 \text{ kp/m},$$

and according to formula (13), the following values for the reduced internal forces:

$$n_x = - 2000 \text{ [kp/m]},$$

$$n_{xy} = - 2000 (- 0,1 x) = 200 \cdot x \text{ [kp/m]},$$

$$\begin{aligned} n_y &= - 2000 (- 0,1 x)^2 - 2000 (15 - 0,05 x^2 - y) (- 0,1) = \\ &= (3000 + 190 x^2 - 200 y) \text{ [kp/m]}. \end{aligned}$$

## KREUZGEWÖLBEARTIGE SCHALEN MIT AUSKRAGENDEM FREIEM RAND

P. CSONKA

## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird das Kräftespiel der aus gleichförmigen Sektorelementen zusammengesetzten polygonalen Schalen behandelt. Die Mittelfläche der einzelnen Schalenelemente sind Zylinder mit horizontaler Achse. Die einzelnen Schalenelemente sind an beiden Seitenrändern durch vertikale Zwischenbögen unterstützt, die Stirnseite der Schalenelemente hingegen ist vollkommen frei, ohne irgendwelcher Unterstützung. Die Belastung der Schale ist längs der Erzeugenden der Mittelfläche konstant und an jedem Schalenelement die gleiche. Bei den Untersuchungen werden die bekannten vereinfachenden Voraussetzungen der Membrantheorie herangezogen. Die, in der Nachbarschaft der Zwischenbögen entstehenden Randstörungen werden außer acht gelassen. Die Anwendung der abgeleiteten Formeln wird durch ein Zahlenbeispiel erläutert.

## VOILES COMPOSÉS EN VOÛTE D'ARÊTES, A BORDS LIBRES EN PORTE-A-FAUX

P. CSONKA

## RÉSUMÉ

L'étude traite du jeu de forces de voiles polygonaux segmentés. La surface moyenne des segments identiques est une surface cylindrique, dont les génératrices sont, en projection sur la base, normales aux côtés du polygone. Les segments du voile reposent par leurs côtés sur des arcs; leur côté frontal, avançant en porte-à-faux au-dessus des côtés du polygone de base n'est pas supporté. Le système de charges verticales considéré est réparti identiquement sur chaque segment; sa valeur reste constante le long des génératrices. L'étude statique, reposant sur l'hypothèse simplificatrice habituelle de la théorie des membranes, ne tient pas compte des effets perturbateurs dûs aux contraintes de déformation. L'application des formules déduites est illustrée par un exemple numérique.

СЕГМЕНТНЫЕ ОБОЛОЧКИ В ВИДЕ ПОПЕРЕЧНОГО СВОДА СО СВОБОДНЫМ  
КРАЕМ, ВЫСТУПАЮЩИМ ВПЕРЕД КОНСОЛЕОБРАЗНО

П. ЧОНКА

## РЕЗЮМЕ

Статья занимается работой полигональных оболочек, состоящих из сегментов идентичной формы. Средняя поверхность отдельных сегментов оболочки представляет собою такую цилиндрическую поверхность горизонтальной оси, образующие которой в проекции на план являются перпендикулярными к полигональным сторонам. Сегментные оболочки с двух сторон опираются на арочные фермы, а лобовая сторона их (которая консолеобразно выступает перед полигонными сторонами плана) не опирается ни на какую опорную конструкцию. На всех сегментных оболочках учтенная отвесная распределяющаяся система нагрузки распределяется идентичным образом. Значение нагрузки вдоль образующих цилиндра является постоянной. Динамический анализ — упуская при этом мешающие действия от деформационных принуждений — основывается на обычном упрощающем предположении мембранной теории. Применение выведенных формул освещается числовым примером.



# THE DIMENSIONING OF GAS PIPE LINES

A. FONÓ

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received August 31, 1964]

The cost of long-distance gas transport by pipe line is influenced by the dimensions of the pipe line. The minimum total cost is attained with determined dimensions. The result of the present investigations is a family of curves which determines the dimensions guaranteeing economic operation. Namely, the curves give the pressure ratio to be chosen at the compressor stations, the pipe diameter, and the length of line section between two compressor stations. The most economic value is determined by an expression containing the annual cost of the compressor stations which are not proportional with the compression work. This is of decisive influence on the dimensions ensuring economic service.

The cost of gas transportation depends on the correct dimensioning of the pipe line. At present, in the project stage, generally the most economic solution is sought for, by subsequent trials. Due to the multitude of variables this method requires very many subsequent calculations, so many that a satisfactory result can be obtained only by the use of computers. Earlier attempts at a calculation method giving optimum dimensions did not lead to a useable result.

The present paper provides an aid for finding the most economic solution.

According to the result of the investigation, all dimensions corresponding to minimum total cost per annum for a horizontal pipe line are determined and can be calculated, if the transported quantity of gas is known and if the numerical value is known which determines that cost which is independent of the capacity of the compressor station and is related only to the type of solution and to the quantity of transported gas.

Long gas pipe lines are constructed with compressor stations which section by section increase the gas pressure that had dropped during the flow of gas.

In the expression for the total cost of gas transportation appear, besides the gas quantity to be transported, four variables which must be determined. Assuming the final compression pressure, there remain three. The expression for the pressure drop gives a relation between the variables. Hence, the number of variables is reduced to two. Calculating extremum values by differentiating with respect to the two variables, these can be determined as well. In this way all variables, thus all required dimensions are unequivocally determined. Therefore, the dimensions giving the most favourable conditions can be determined directly without trials.

The result of the investigations permits, if the two initial data mentioned above are known, on the one hand, to read directly from a family of curves good estimations for the main dimensions to be selected; on the other hand, it shows the great influence of that cost which is independent of the power of the compressor station on the total cost of gas transportation and on the dimensions guaranteeing the most economical solution.

The cost of the gas transported by the pipe-line contains the cost related to the line and to the compressor stations. The costs are in part proportional to the initial costs, in part to operation.

In the following the author has in view modern, long pipe-lines for natural gas of great capacity. It is assumed that the transported quantity is constant, i.e. that the fluctuations of gas consumption at the end of the line are equalized by appropriate means, and furthermore, that the pipe line is horizontal.

It is economic to increase the pressure at the compressure stations to the maximum possible value. According to the practice of the last years, one may assume compression to approx. 70 kg/cm<sup>2</sup>. The use of pipes having adequate strength is supposed. The expansion of the gas in the pipe line is isothermal. The gas takes the temperature of the soil into which the pipe-line is embedded.

In the calculation of gas pressure along the line the two relations used in practice (that of WEYMOUTH and of PANHANDLE) are taken into account by such a formula in which the introduction of specific constants permits to use either chosen relation. The general form of the relation is

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{q^\beta l}{c_4 d^\alpha} \quad (1)$$

where

- $p_1$  [kg/m<sup>2</sup>] = the pressure at the beginning of the line section, after the compressor station;
- $p_2$  [kg/m<sup>2</sup>] = the pressure at the end of the line section, ahead of the compressor stations;
- $q$  [Nm<sup>3</sup>/h] = the transported gas quantity;
- $l$  [m] = the distance between two compressor stations;
- $d$  [m] = the inner diameter of the pipe.

$q$  [Nm<sup>3</sup>/h] is the quantity flowing through the line, corresponding to the maximum daily mean load. It is assumed that by adequate storage the daily fluctuations are equalized so that the mean quantity flows through the line. The influence of the seasonal fluctuations on the economic calculations, if they are not equalized by storage installations of an adequate large capacity, is taken into account by the number of annual operating hours,  $h$ .

For natural gas mainly consisting of methane (CH<sub>4</sub>), according to the earlier Weymouth formula or more recent Panhandle formula see Table I.



Table I

	The earlier Weymouth formula	The more recent Panhandle formula
$c_4$	$1,21 \cdot 10^6$	$0,187 \cdot 10^6$
$\alpha$	5,33	4,854
$\beta$	2	1,854

For calculating the capacity of the gas compressor isothermal compression is taken into account, which is easier to treat mathematically than the polytropic one.

The energy requirement of the compressor is

$$L = \frac{1}{\eta} q \gamma RT \ln \frac{p_1}{p_2} \frac{9,8}{3600 \cdot 1000} \text{ [kW]} \quad (2)$$

where

- $\eta$  = efficiency;
- $q$  = [Nm<sup>3</sup>/h];
- $\gamma$  = 0,717 [kg/Nm<sup>3</sup>], for CH<sub>4</sub> natural gas;
- $R$  = 52,9 kJ/kg °K, gas constant for CH<sub>4</sub> natural gas;
- $T$  = 300 °K, assumed as a mean value.

The calculations are made for a 1 m line section, including the cost of the pipe line as well as that of the compressor stations. For this, the expression

$$\frac{L}{l} \text{ [kW/m]}$$

will be needed.

Taking  $l$  from (1) and introducing  $p_1/p_2 = r$  for the pressure ratio,

$$\frac{L}{l} = \frac{q^{\beta+1} \gamma RT \ln r 9,8}{\eta c_4 p_1^2 (1 - 1/r^2) d^\alpha 3,6 \cdot 10^6} \text{ [kW/m]}. \quad (3)$$

According to experience, the investment cost of a compressor station consists of a part proportional to the kW power and besides this, of costs independent from that, determined by local conditions and by the character of the solution. E.g., terrain correction cost; in-door construction with complete personnel, repair shop, spare parts store and personnel housing require additional expenses as compared to modern out-door design with completely automatic operation, permanent staff only at headquarters and spare material stores and shop only in the centre.

Annual costs consist of amortization and interest on capital, of operation and maintenance costs, together they can be taken to amount to  $s$  % of capital layout.

The part of the investment costs proportional to the kW power shall be  $k$  Ft/kW and the costs independent of it shall be  $B$  Ft.

Calculating for the first item with  $s_1$  ‰, and with  $s_2$  ‰ for the second item, the total annual cost connected with investment is for 1 m of line length

$$\frac{kLs_1 + Bs_2}{l}$$

Considering other costs, too, which are not proportional to power and to  $L$ ,  $B'$  will be used instead of  $Bs_2$ .

Above the already considered ones, the annual cost of the compressor stations is increased by the price of the consumed energy.

The cost of the consumed energy is proportional to the annual operating hours  $h$  and with its unit price  $e$ . The cost of the consumed kw-hours varies with the kind of machine driving the compressor, and with prices. Electric motor drive or more often, gas motor or turbine drive may be considered.

Accordingly, the total annual cost related to the compressor station is for 1 m of line length

$$\frac{L(ks_1 + he) + B'}{l}$$

Taking  $L/l$  from Equ. (3), the total cost due to compression for 1 m of line length is

$$\frac{K_s}{l} = \frac{0,717 \cdot 52,9 \cdot 300 \frac{9,8}{3,6 \cdot 10^6} \frac{Ks_1 + he}{\eta} q \ln r + B'}{c_4 p_1^2 d^a (1 - 1/r^2) 1/q^\beta},$$

$$\frac{K_s}{l} = \frac{(c_1 q \ln r + B') q^\beta}{c'_4 d^a (1 - 1/r^2)} \quad (4)$$

where

$$c_1 = 0,031 \frac{ks_1 + he}{\eta}, \quad (5a)$$

$$c'_4 = c_4 p_1^2. \quad (5b)$$

Realization of the pipe line includes the costs for providing the pipes and fittings, their transportation to the place of use, their laying including the external insulation of the pipes as a protection against corrosion and of the generally used cathodic protection. The cost per meter of building the pipe line is approximately proportional to its weight and this latter is — for the same pressure — about proportional to the square of the diameter. The cost of pipe-laying is about proportional to its outer diameter. Other costs can be attached partly to the one post, partly to the other, so that finally the cost per meter of a pipe line of  $d_k$  outer diameter will be investigated. Within the



considered limits the outer diameter is taken as being 1,03 times the inner diameter  $d$ .

In the following this factor is taken into consideration in the unit price factors  $c_2$  and  $c_3$ .

The price:

$$c_2 d + c_3 d^2$$

can be approximated by constants valid within certain limits. Cost of armatures, amortization and also of inspection, maintenance: including all these into the  $s_3$  % of annual cost, the annual cost per meter will be

$$K_c = s_3 (c_2 d + c_3 d^2).$$

Completing this formula, the annual cost per meter of the complete line will be

$$K_t = \frac{K_s}{l} + K_c.$$

Introducing

$$1,03 s_3 C_2 = C'_2 \quad \text{and} \quad 1,03 s_3 C_3 = C'_3$$

where, e.g.  $s_3 = 0,12$  and

$$1,03 \cdot 0,12 c_2 = 0,124 c_2 = c'_2, \quad 1,03^2 \cdot 0,12 c_3 = 0,128 c_3 = c'_3$$

the total cost per annum and per meter will be from (4)

$$K_t = \frac{c_1 q \ln r + B'}{c'_4 d^\alpha (1 - 1/r^2)} q^\beta + c'_2 d + c'_3 d^2. \quad (6)$$

The minimum value of this cost is required.

According to the minimum calculation shown in the *Annex*, the condition for minimum annual cost is

$$r^2 - 1 - 2 \ln r = \frac{2 B'}{c_1 q} \quad (7)$$

and

$$d^{\alpha+1} + 2 \frac{c'_3}{c'_2} d^{\alpha+2} = \alpha \frac{c'_1 r^2 q^{\beta+1}}{2 c'_2 c'_4}, \quad (8)$$

$$q^{\beta+1} = \left[ \frac{2 B'}{c_1 (r^2 - 1 - 2 \ln r)} \right] = \frac{2 c'_2 c'_4}{\alpha c_1 r^2} \left[ d^{\alpha+1} + 2 \frac{c'_3}{c'_2} d^{\alpha+2} \right].$$

Transferring the constants to one side, after arrangement

$$\left( \frac{2 B'}{c_1} \right)^{\beta+1} \alpha \frac{c_1}{2 c'_2 c'_4} \frac{r^2}{(r^2 - 1 - 2 \ln r)^{\beta+1}} = d^{\alpha+1} + 2 \frac{c'_3}{c'_2} d^{\alpha+2}.$$

Introducing

$$A = \left( \frac{2 B'}{c_1} \right)^{\beta+1} \alpha \frac{c_1}{2 c_2' c_4'} = \left( \frac{3.48 B'}{c_1} \right)^{\beta+1} \frac{c_1}{2 c_2' c_4'} *$$

and

$$\varepsilon = \frac{c_3'}{c_2'}$$

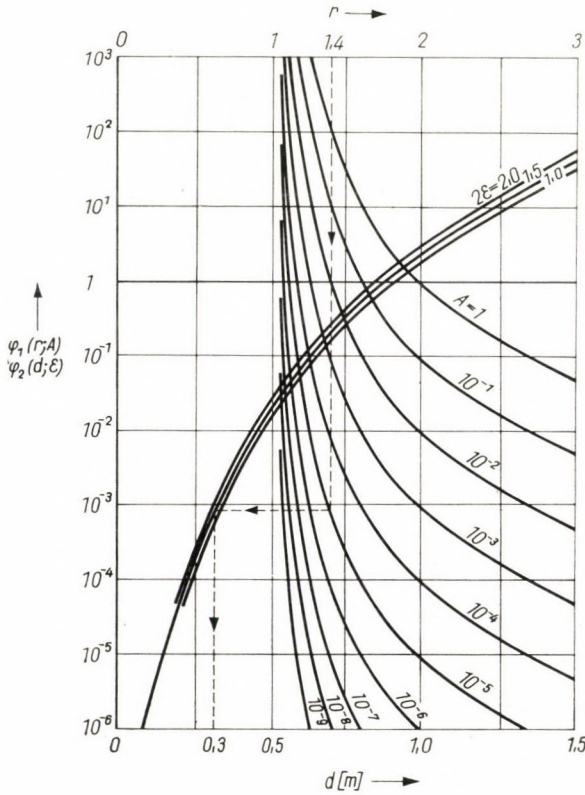


Fig. 1

the last equation can be written in the simplified form:

$$A \frac{r^2}{(r^2 - 1 - 2 \ln r)^{\beta+1}} = d^{\alpha+1} + 2 \varepsilon d^{\alpha+2}. \tag{9}$$

Passing to logarithms,

$$\begin{aligned} \log A + 2 \log r - (\beta + 1) \log (r^2 - 1 - 2 \ln r) &= \\ &= (\alpha + 1) \log d + \log (1 + 2 \varepsilon d). \end{aligned} \tag{10}$$

\* Because in Weymouth's formula as well as in Panhandle's formula  $\alpha^{1/(\beta+1)} = 1,74$ .  
 — In the formula for  $A$ , both  $B'/c_1$  and  $c_1/c_2'$  are ratios of money values, hence they are independent of currency.



Denoted the left side of Equ. (9) by  $\varphi_1(r, A)$ , its right side by  $\varphi_2(d, \varepsilon)$  for a given  $r$  and  $A$ ,  $d$  is found in the following way:

Fig. 1 shows, on the one hand, the family of curves  $\varphi_1(r, A)$  (only those belonging to a value of  $A$  with an entire logarithm), on the other hand, the curves  $\varphi_2(d, \varepsilon)$ . The ordinates are drawn to logarithmic scale. For a given  $r$  and  $A$ , on the corresponding element of the family of curves corresponding to  $r$  the point related to  $r$  with the ordinate  $\varphi_1(r, A)$  is determined. Tracing a horizontal straight through this point, this intersects the curve  $\varphi_2(d, \varepsilon)$  at the point, the abscissa of which is the required value of  $d$ .

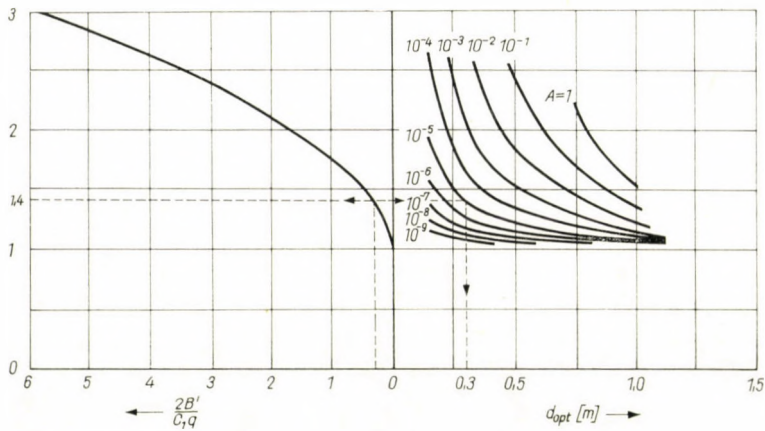


Fig. 2

The family of curves of Fig. 1 has been used for graphically solving Equ. (9) and the solution is shown on Fig. 2.

On the left side of Fig. 2 the value of  $r$  is taken from curve of Fig. 5. This permits to choose  $r$  belonging to the value of  $B'$ . On the right side of the same figure the relation between the optimum  $r$  and the optimum  $d$  for a given  $A$  can be seen. Therefore, this is the graphical method replacing the mathematical solution of Equ. (9). Knowing  $q$  and  $B'$ , in this way the most economic solution for  $r$  and  $d$  can be read on the family of curves. Knowing these,  $l$  is calculated from Equ. (1) and thus all principal parameters resulting in a minimum annual cost of the gas pipe-line are determined.

In order to permit consideration of values of  $2 \varepsilon$  which might differ from 1,5, the curves for  $2 \varepsilon = 1$  and for  $2 \varepsilon = 2$  are shown as well in Fig. 1.

In Fig. 3, the values of Fig. 2 are shown in logarithmic scale. This permits more precise reading.

Equ. (9) and the corresponding family of curves in Figs 2 and 3 can be used for investigations based on any kind of currency.

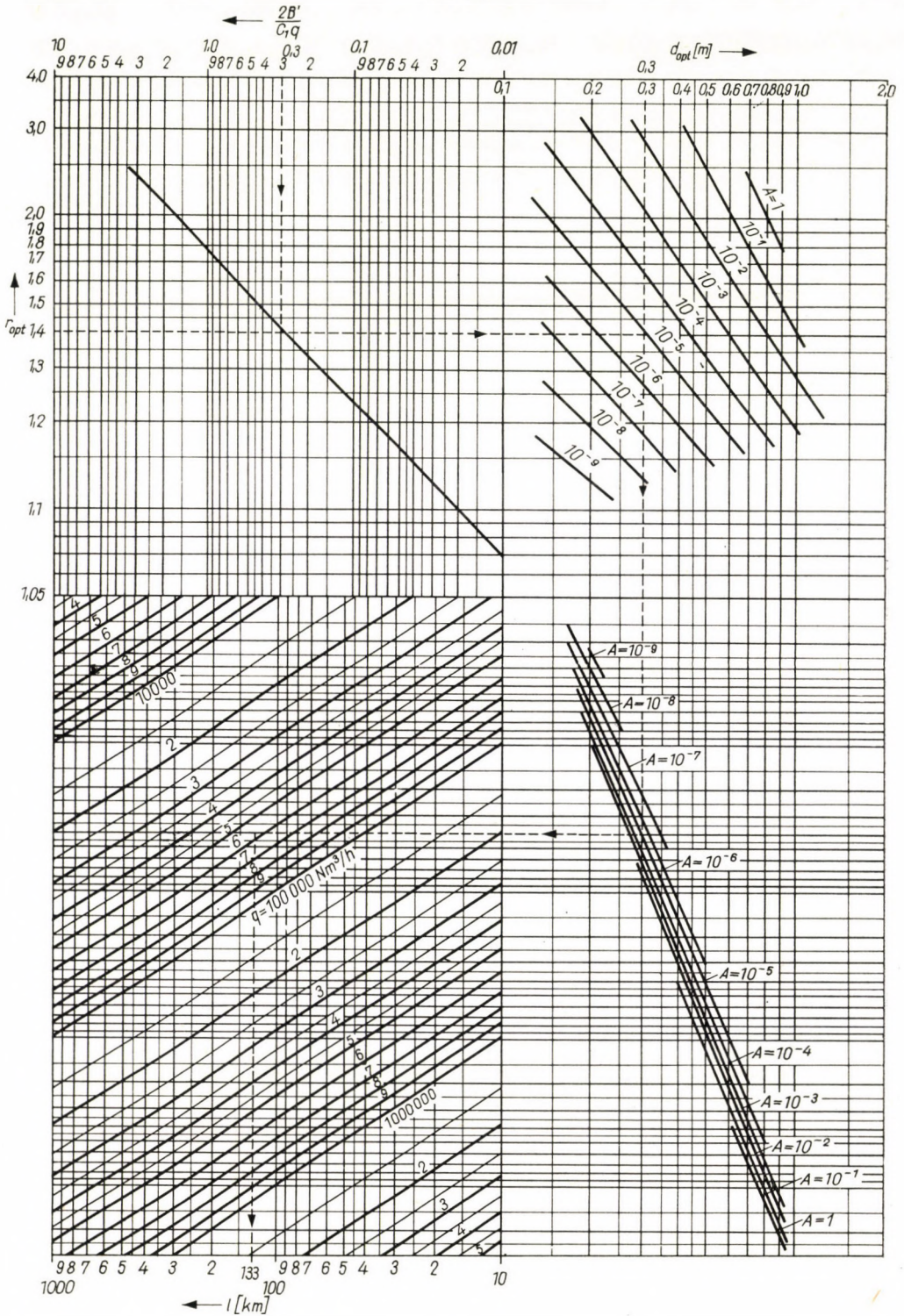


Fig. 3



In the foregoing

- $c_1$  = the power-dependent part of the compressor station cost, proportional to 1 kW, according to (5), where  
 $h$  = the number of annual operating hours;  
 $e$  = the cost of 1 kWh consumption;  
 $\eta$  = the efficiency of the compressor plant;  
 $B'$  = that part of the annual compressor plant which is independent of power;  
 $c'_2$  = that part of the cost per meter of the laid-down pipe-line, which is proportional to its diameter (mainly the part depending on laying costs).

For the numerical values of the above parameters one can find good approximate values for modern large pipe-lines and introducing them into the formulae, good informative data are obtained, these being valid within certain limits.

For the data of the chosen typical example the author assumes that they correspond to optimum conditions, determined by trial and error only:

$Kt$  = 370 \$/kW is the part of the total investment cost of the compressor station corresponding to 1 kW power. From this,

$K$  = 290 \$/kW is the part of the compression station investment cost which is proportional to the kW power production and varies with it.

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 12\%;$$

$$h = 7500 \text{ h/year};$$

$$e = 0,5 \text{ c/kWh};$$

$$\eta = 0,71 \text{ efficiency of the complete machine group};$$

$$P_1 = 70,3 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2;$$

$$c_1 = 0,031 \frac{290 \cdot 0,12 + 7500 \cdot 0,005}{0,71} = 3,16;$$

$c'_2$  and  $c'_3$  are, from the cost estimation of a pipe line, for 26'' ÷ 36'' O. D. pipes and for an estimated  $s_3 = 12\%$ :  $c'_2 = 7,5$  \$/m, year;

$$\varepsilon = \frac{c'_3}{c'_2} = 0,77.$$

Calculating with the Panhandle formula,

$$A = \left( \frac{3,48 B'}{c_1} \right)^{2,854} \frac{c_1}{2 c'_2 0,187 \cdot 10^6 P_1^2} = \left( \frac{3,48 B'}{3,16} \right)^{2,854} \frac{3,16}{2 \cdot 75 \cdot 9,2 \cdot 10^6},$$

$$A = 3 \cdot 10^{-18} B'^{2,854}$$

while from the Weymouth formula

$$A = 0,465 \cdot 10^{-18} B'^3.$$

The results from the two formulae are identical, if  $B' = 3,5 \cdot 10^5$ .

The family of curves of Fig. 3 serves for determining the most economic principal dimensions  $r$ ,  $d$  and hence  $l$  for the given  $q$  and  $B'$ . The figures were traced on the base of the Weymouth formula.

In the system of curve families of Fig. 3 the starting value for finding the most economical dimensions is  $2 B'/c_1 q$ . This is the ratio of two unit prices, according to the example

$$\frac{B'}{q} \text{ is in } \$/\text{m}^3\text{h} \text{ and } c_1 \text{ is in } \$/\text{kWh}.$$

Here  $B'/q$  and  $c_1$  can be expressed in any other currency instead of \$, if  $q$  is given in cu.ft/day instead of  $\text{m}^3/\text{h}$ , the value of  $q$  must be multiplied by  $28,317/24 = 1,18$ .

For the determination of  $A$  within the limits which interest us,  $c_1$  and  $c_2$  are taken as being constants.

According to the initial assumptions,  $B'$  is the annual cost of one compressor station independent of kW power. Generally it consists of a part  $s_4 B_0$  due to investments and of a part  $B_0$  independent of the size of investments.

Generally the  $B_4$  investment cost is accounted for together with the  $K$  investment cost, which is proportional to the number of kW and  $K_0 = B_0 + K$  is shown as investment per kW. This is the amount calculated by dividing the total investment cost of the compressor plant with the power.

As an example the data of a projected large natural-gas line are used, assumed to have been projected for optimum economy as the result of many repeated trials.

$$\begin{aligned} q &= 10^6 \text{ Nm}^3/\text{h}; \\ d &= 0,89 \text{ m}; \\ l &= 133,000 \text{ m}; \\ p_1 &= 70,3 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2; \\ L &= 8700 \text{ kW}; \\ p_2 &= 57 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2; \\ \text{number of compressor stations: } &10; \\ \text{annual cost of line: } &15,1 \text{ } \$/\text{m}; \\ \text{power-proportional part of compressor station costs: } &290 \text{ } \$/\text{kW}; \\ \text{total investment: } &370 \text{ } \$/\text{kW}. \end{aligned}$$

Calculating with the Panhandle formula, from (1) is

$$\begin{aligned} p_1^2 - p_2^2 &= p_1^2 (1 - 1/r^2) = \frac{10^{6 \cdot 1,854} \cdot 133\,000}{0,187 \cdot 10^6 \cdot 0,89^{4,854}} = 16,2 \cdot 10^{10}, \\ p_2^2 &= (57 \cdot 10^4)^2, \\ r &= \frac{70,3}{57} = 1,23. \end{aligned}$$

With the Weymouth formula, is

$$r = \frac{70,3}{54} = 1,3.$$

The formerly used Weymouth formula and the now, chiefly for large capacity pipe-lines, used Panhandle formula give somewhat different results, but with the present determination of optimum dimensions, they correctly show the great influence of the value  $B'$  on the dimensions to be chosen. The values read from Fig. 3 give good information.



From (7)

$$(r^2 - 1 - 2 \ln r) = 0,096 = \frac{2 B'}{c_1 q},$$

$$\frac{B'}{c_1} = 0,096 \frac{10^6}{2} = 48\,000$$

is the ratio that is independent of the currency.

$c_1 = 3,16$  is the annual cost proportional to 1 kW power, determined by 12% of investment.

$B' = 48\,000$   $c_1 = 48\,000 \cdot 3,16 = 152\,000$  \$/year. The total cost per annum of gas transportation, related to 1 m of line will be

$$K_t = \frac{c_1 q \ln r + B'}{l} + c'_2 d \left( 1 + 2 \frac{c'_3}{c'_2} d \right) \$/\text{m, year};$$

$$K_t = 3,16 \frac{10^6 \cdot 0,261 + 48\,000}{133\,000} + 7,5 \cdot 0,89 (1 + 1,44 \cdot 0,89);$$

$$K_t = 5,9 + 15,1 = 21 \$/\text{m, year}.$$

The total length of the line is  $10.133\,000 = 1,33 \cdot 10^6$  m.

The annually transported gas quantity is  $7500 \cdot 10^6$  m<sup>3</sup>, hence the cost of transportation of 1 m<sup>3</sup> (in the case of optimum economy) is

$$\begin{aligned} \frac{K_t \cdot 1,33 \cdot 10^6}{7500 \cdot 10^6} &= \frac{K_t}{5620} \$/\text{m}^3 = \frac{K_t}{56,2} \text{cent}/\text{m}^3 = \\ &= \frac{21}{56,2} = 0,374 \text{cent}/\text{m}^3. \end{aligned}$$

The value of  $B'$  has a great influence on the unit price.

$A$  changes in the same sense as  $B'$ . If  $B'/q$  is small and  $r$  as a consequence is small too, a value of  $d$  is obtained, ensuring economic operation, which belongs to small values of  $A$  and of  $r$ .

With a constant  $B'$  therefore with an unchanged type of plant, for increasing transported quantity  $q$  the economic pressure ratio  $r$  decreases.

The results of the investigations permit to calculate the optimal dimensions of a horizontal pipe line — for a given gas quantity and for 70 kg/cm<sup>2</sup> end pressure of compression at the stations — as function of a factor  $B'$  giving a part of the expenses of compression, which is not in proportion to the power needed for compression.

Similarly the lowest price of transportation, corresponding to those optimal dimensions can be found. These are traced on the diagrams of Fig. 4 giv-

ing the unity of price of the transportation of a  $q$  quantity per hour with the parameter  $B'$  and also with a parameter  $B'/q$ .

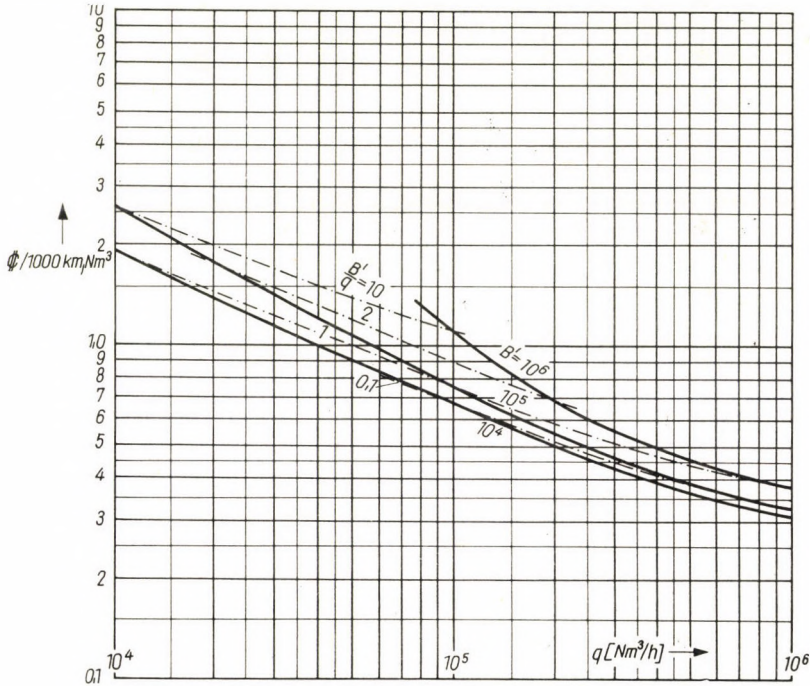


Fig. 4

### Acknowledgements

The author expresses his thanks to Mr. E. MAKKAI, Senior Research Member of the Mathematical Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, for writing the Annex and for other valuable aid, and to Mr. I. LINDNER especially for preparing the diagrams.

### ANNEX

E. MAKKAI

MATHEMATICAL RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

The extremum value problem arising in the investigation is the following: the minimum of the value expressed by Equ. (6) is asked for, where the variables are  $d$  and  $r$ ,  $l$  is a function of the expression below; the other quantities are considered as being constants.

The minimum of the function

$$K_l = c_1 \frac{q}{l} \ln r + \frac{B'}{l} + c_2 d + c_3 d^2, \quad (1)$$



if

$$l = \frac{c'_4 d^\alpha}{q^\beta} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \quad (2)$$

and if  $q$  is a given number.

Eliminating  $l$  from Eqs. (1) and (2),

$$K_t = \frac{c_1 q \ln r + B}{1 - \frac{1}{r^2}} \frac{q^\beta d^{-\alpha}}{c'_4} + c'_2 d + c'_3 d^2.$$

$K_t$  now depends on two variables,  $r$  and  $d$ . If  $r$  and  $d$  vary, the minimum of  $K_t$  is where its partial derivatives with respect to  $r$  and  $d$  disappear simultaneously:

$$\frac{\partial K_t}{\partial r} = \frac{\frac{c_1 q}{r} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) - (c_1 q \ln r + B') \frac{2}{r^3}}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2} \frac{q^\beta}{c_4 d^\alpha} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial K_t}{\partial d} = \frac{c_1 q \ln r + B'}{1 - \frac{1}{r^2}} \frac{q^\beta}{c'_4} (-\alpha) d^{-\alpha-1} + c'_2 + 2 c'_3 d = 0. \quad (4)$$

Solving the system of equations (3) and (4) for  $r$  and  $d$ , the optimum values of  $r$  and  $d$  are obtained. An algebraic solution, i.e. a final result given by formulae, appears to be a hopeless enterprise; but the system of equations can be solved graphically.

Equ. (3) can be brought to the following form by simple algebraic transformations:

$$\frac{c_1 q}{2} r^2 \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = c_1 q \ln r + B'. \quad (3')$$

Dividing by  $c_1 q/2$  and rearranging,

$$r^2 - 1 - 2 \ln r = \frac{2 B'}{c_1 q}. \quad (3'')$$

Similarly, from (4) with the aid of (3') is obtained:

$$\begin{aligned} c'_2 + 2 c'_3 d &= \alpha \frac{c_1 q \ln r + B'}{1 - 1/r^2} \frac{q^\beta}{c'_4} d^{-\alpha-1} = \\ &= \frac{\frac{c_1 q}{2} r^2 \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)}{1 - 1/r^2} \frac{q^\beta}{c'_4} d^{-\alpha-1}, \end{aligned}$$

simplifying and multiplying with  $d^{\alpha+1}/c'_2$

$$d^{\alpha+1} + 2 \frac{c'_3}{c'_2} d^{\alpha+2} = \alpha \frac{c_1 q^{\beta+1} r^2}{2 c'_2 c'_4}. \quad (4')$$

Eqs. (3'') and (4') derived from the original Eqs. (3) and (4) can both be solved graphically. For this purpose the

$$y = x^2 - 1 - 2 \log x$$

and

$$y = c_2 x^{\alpha+1} + 2 c_3 x^{\alpha+2}$$

functions are traced. It is easy to prove that these functions monotonously increase in the ranges  $1 < x < \infty$  and  $0 < x < \infty$ , respectively, which are of interest for us (Figs. 5 and 6). On the axis of ordinates of Fig. 5 the point  $2B'/C_1q$  is marked. A horizontal straight is passed through it which intersects the curve at point P. According to Equ. (3''), the abscissa of P will be equal to the optimum value of  $r$ .

After that, the expression

$$\alpha \frac{c_1 q^{\beta+1} r_{\text{opt}}}{2 c'_2 c'_4}$$

is calculated from the optimum value of  $r$  thus obtained and measured on the axis of ordinates in Fig. 6. The horizontal straight through this point intersects the curve in  $Q$ , the abscissa of which is, according to Equ. (4'), the optimum value of  $d$ .

Knowing the optimum values of  $r$  and of  $d$ , Eq. (2) gives the optimum  $l$ .

The simultaneous existence of Eqs. (3) and (4) is only a necessity but not a sufficient

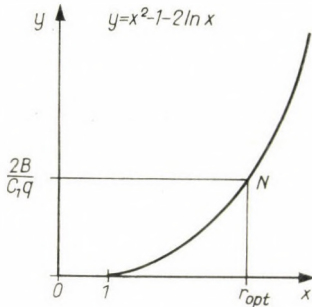


Fig. 5

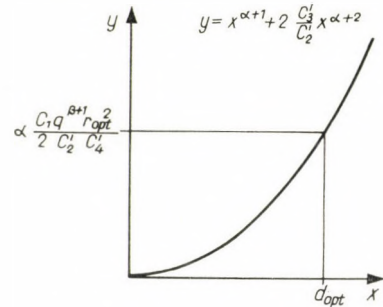


Fig. 6

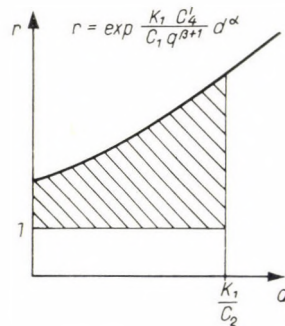


Fig. 7

condition for the existence of the minimum of the function

$$K_t = \frac{c_1 q \ln r + B'}{1 - r^2} \frac{q^\beta d^{-\alpha}}{c_4} + c_2 d + c_3 d^2. \quad (*)$$

That in the present case the function  $K_t$  has indeed a minimum at the points determined by Eqs. (3) and (4), will be proved by the following considerations.

Let us assume that the value of the function in some place of the quarter-plane  $r \geq 1$ ,  $d \geq 0$  (e.g. at the point  $r = 2$ ,  $d = 1$ ) is  $K_t$ . It may be stated that the value of the function  $K_t$  is greater than  $K_t$  at each point  $r$ ,  $d$  which is not inside the shaded region of Fig. 7.

If

$$r \geq \exp \frac{K_1 c_4 d^\alpha}{c_1 q^{\beta+1}}$$

i.e. the part of the plane above the exponential curve is considered, then from formula (\*)

$$\begin{aligned} K_t &> \frac{c_1 q \ln r}{1 - 1/r^2} \frac{q^\beta d^{-\alpha}}{c_4} > \frac{c_1 q^{\beta+1} d^{-\alpha}}{c_4} \ln r \geq \\ &\geq \frac{c_1 q^{\beta+1} d^{-\alpha}}{c_4} \frac{K_1 c_4}{c_1 q^{\beta+1}} d^\alpha = K_1. \end{aligned}$$



Furthermore, if

$$d \geq \frac{K_1}{c'_2}$$

then, also from formula (\*)

$$K_t > c'_2 d \geq c'_2 \frac{K_1}{c'_2} = K_1.$$

Finally it follows from Equ. (\*) that

$$K_t > \frac{B' q^\beta}{c'_4} \frac{d^{-\alpha}}{1 - 1/r^2}$$

and this already shows that either  $d \rightarrow +0$ , or  $r \rightarrow 1 + 0$ ,  $K_t \rightarrow \infty$  that is the function  $K_t(d, r)$  cannot assume a minimum outside the lower horizontal and the left vertical limit of the shaded area.

Let us denote the inside of the shaded area by  $D$  (this will therefore be a limited open area) when including the limit points, by  $\bar{D}$ . The function  $K_t(d, r)$  is continuous in the  $D$  open area, in the  $\bar{D}$  closed area it is positive. (At some points of the limit the value  $+\infty$  can be ascribed to the function.) According to one variant of a known theorem of Weierstrass the function  $K_t$  assumes its minimum somewhere in the closed area  $\bar{D}$ . This minimum cannot be at the limit of the area, thus it must be in the open area  $D$ . It follows from the differentiable character of the function  $K_t(d, r)$  that the system of equations (3) and (4) is satisfied for the minimum located *inside* the area. The system of equations can be satisfied only by one pair of values  $(r, d)$  and therefore the solution of this system necessarily furnishes the place of the minimum.

## DIE DIMENSIONIERUNG VON GASFERNLEITUNGEN

A. FONÓ

### ZUSAMMENFASSUNG

Die Kosten für den Transport von Gas über große Entfernungen werden von den Abmessungen der Leitung beeinflusst. Die geringsten Gesamtkosten können bei bestimmten Abmessungen erzielt werden. Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist eine Kurvenschar, welche die wirtschaftlichsten Betrieb sichernden Abmessungen ergibt. Insbesondere ergibt sie das bei den Kompressorstationen zu wählende Druckverhältnis, den Rohrdurchmesser und die hierdurch bestimmte Länge des Leitungsabschnitts zwischen zwei Kompressorstationen. Der wirtschaftlichste Wert wird durch eine Gleichung bestimmt, in welcher die mit der Verdichtungsleistung nicht proportionalen jährlichen Kosten der Kompressorstationen enthalten sind. Dieselben sind von entscheidendem Einfluß auf die wirtschaftlichen Betrieb sichernden Abmessungen.

## LE DIMENSIONNEMENT DES LIGNES DE TRANSPORT DE GAZ À LONGUE DISTANCE

A. FONÓ

### RÉSUMÉ

Les frais du transport de gaz à longue distance sont influencés par les dimensions de la conduite. Le minimum du frais global peut être atteint avec des dimensions définies. Le résultat de la présente étude est une famille de courbes qui fournit les dimensions garantissant l'exploitation économique. Cette famille de courbes donne notamment le rapport de compression à choisir aux postes de compression et le diamètre des tubes, enfin la longueur de la section de ligne entre deux postes de compression, définie par les deux grandeurs. La valeur la plus économique est définie par une expression contenant les frais annuels du poste de compression, non proportionnels au travail de compression. Ceux-ci ont une influence décisive sur les dimensions assurant l'exploitation économique.

## РАСЧЕТ ГАЗОПРОВОДОВ

А. ФОНО

## РЕЗЮМЕ

Экономичные размеры газопроводов обычно определяют при помощи продолжительных серийных опытов. Прежние опыты расчетов, проводившиеся на основе теоретических зависимостей, не дали применимых на практике результатов. Мною разработана методика расчета и на основе ее построено семейство кривых, которое при использовании исходных данных непосредственно дает наиболее экономичные размеры. Исходные данные представляют собою отчасти технические данные, отчасти же местные цены и расходы. По семейству кривых видно влияние отдельных факторов на экономичность, чего нельзя определить непосредственно из-за сложности выражений.



# DAS ELASTISCH-PLASTISCHE BIEGEN VON RUNDSTÄBEN

A. GELEJI

BERICHT Nr 34. DER METALLURGISCHEN ARBEITSGEMEINSCHAFT  
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 7. Oktober 1963]

In der Fachliteratur vermißt man bisher eine eingehendere Besprechung des elastisch-plastischen Biegens von Rundstäben. Die ganz exakte Lösung des Problems stößt auf gewisse mathematische Schwierigkeiten. Das Problem läßt sich aber mit einer Genauigkeit von  $\pm 1 \div 5\%$  annähernd lösen. Die Lösung wird in dieser Abhandlung vorgeführt.

Im Fachschrifttum vermißt man bisher eine eingehendere Besprechung des elastisch-plastischen Biegens von Rundstäben. Die Bearbeitung dieses Problems hat eine gewisse praktische Bedeutung (z. B. Richtvorgang), deshalb soll im folgenden das Biegen von Rundstäben eingehend behandelt werden.

Es wird bei diesen Ausführungen vorausgesetzt, daß der Werkstoff, aus dem der Rundstab hergestellt ist, eine ausgesprochene Fließgrenze hat, die Fließgrenze bei Zug und bei Druck gleich groß ist, zwischen den zwei Fließgrenzen das Hookesche Gesetz gültig ist, und daß bei der Umformung keine Verfestigung entsteht.

Im Querschnitt des gebogenen Rundstabes, der über die Fließgrenze beansprucht wird, kann man plastisch deformierte und elastisch deformierte Zonen unterscheiden.

Die in einem auf Biegung beanspruchten Stabe wirkenden Spannungen können mit der Bedingung errechnet werden, daß die einen Querschnitt angreifenden äußeren Kräfte den im Querschnitt entstehenden inneren Kräften das Gleichgewicht halten. Bei reiner Biegung ist mit den äußeren Kräften ein Kräftepaar gleichwertig, das in der Ebene  $xy$  eine Drehwirkung um die Achse  $z$  ausübt. Die Achse  $z$  liegt in der Ebene der neutralen Fasern, und zwar senkrecht zur Ebene  $xy$ , d. h. die Querschnittsebene wird der Biegung zufolge um die Achse  $z$  verdreht (Bild 1).

Der Durchmesser des auf Biegung beanspruchten Rundstabes ist  $h \equiv d$ . In den äußeren Fasern des Rundstabes, welche in die  $xy$  Ebene fallen, tritt nur dann eine der Fließgrenze  $\sigma_f$  entsprechende Spannung auf, wenn das Moment um die Achse  $z$

$$M_f = \sigma_f \frac{2J}{h} \quad (1)$$

beträgt, wobei  $J = \pi \cdot h^4/b^4$  das Trägheitsmoment des gebogenen Rundstabes

und  $e = h/2 = r$  ist. Ist das Biegemoment kleiner als das Moment  $M_f$ , dann entsteht im Stabe nur elastische Umformung; ist dagegen das um die Achse  $z$  wirkende Moment größer als  $M_f$  (Querschnitt 2—2), dann entstehen in den äußeren Fasern des Stabes bleibend verformte Schichten von der Stärke  $\delta = 0,5(h - h_1)$ ;  $h_1$  bedeutet die Stärke der nur elastisch verformten Schicht.

Um in den  $\delta$  starken äußeren Schichten des Stabes eine bleibende Verformung hervorzurufen, ist ein Biegemoment von

$$M = \sigma_f(W_1 + 2 F y_s) \quad (2)$$

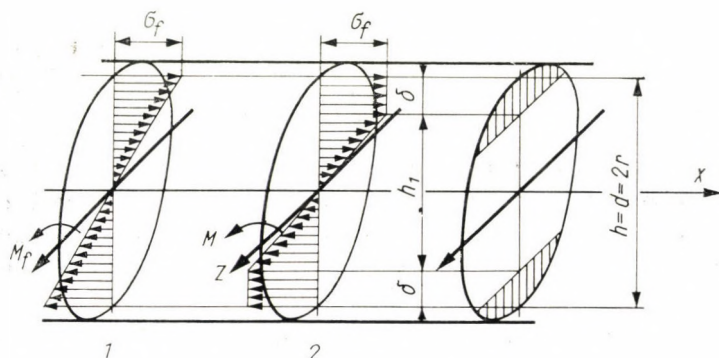


Bild 1

erforderlich. In dieser Gleichung ist  $W_1$  das Widerstandsmoment der nur elastisch deformierten  $h_1$  dicken Schicht:

$$W_1 = \frac{2 J_1}{h_1} = \frac{J_1}{y_1}, \quad (3)$$

$J_1$  bedeutet das Trägheitsmoment der nur elastisch deformierten Schicht, bezogen auf die Biegeachse  $z$  (Bild 2):

$$J_1 = -y_1 (r^2 - y_1^2)^{3/2} + \frac{1}{2} y_1 r^2 (r^2 - y_1^2)^{1/2} + \frac{1}{2} r^4 \arcsin\left(\frac{y_1}{r}\right), \quad (4)$$

somit ist das Widerstandsmoment dieser Schicht, bezogen auf die Achse  $z$ :

$$W_1 = -(r^2 - y_1^2)^{3/2} + \frac{1}{2} r^2 (r^2 - y_1^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{y_1} \arcsin\left(\frac{y_1}{r}\right). \quad (5)$$

Das zweite Glied der Gleichung (2) kann folgenderweise berechnet werden (Bild 2):



Der Flächeninhalt des  $\delta$  hohen und  $b$  breiten Kreisabschnittes wird mit maximal  $\pm 10\%$  Abweichung, wie folgt, ermittelt:

$$F = 0,73 b \cdot \delta. \quad (6)$$

Die Entfernung  $y_s$  des Schwerpunktes  $S$  von der Biegeachse  $z$  ist

$$y_s = \frac{b^3}{12 F} = \frac{b^2}{8,75 \cdot \delta} = \frac{b^2}{8,75 (r - y_1)}. \quad (7)$$

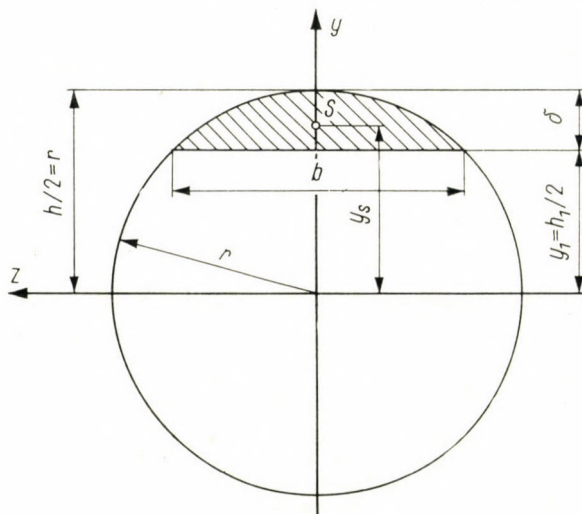


Bild 2

Da

$$\frac{b^2}{4} + y_1^2 = r^2 \quad \text{und} \quad b^2 = 4(r^2 - y_1^2)$$

beträgt, wird

$$y_s = \frac{0,46 (r^2 - y_1^2)}{(r - y_1)} = 0,46 (r + y_1). \quad (8)$$

Gleichung (2) kann somit folgenderweise aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} M &= \sigma_f \left\{ \left[ \frac{1}{2} r^2 (r^2 - y_1^2)^{1/2} - (r^2 - y_1^2)^{3/2} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{y_1} \arcsin \left( \frac{y_1}{r} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + [2 \cdot 0,73 (2 \cdot \sqrt{r^2 - y_1^2}) (r - y_1)] \cdot [0,46 (r + y_1)] \right\} \\ M &= \sigma_f r^3 \left\{ 0,5 \left[ 1 - \left( \frac{y_1}{r} \right)^2 \right]^{1/2} + 0,34 \left[ 1 - \left( \frac{y_1}{r} \right)^2 \right]^{3/2} + \right. \\ &\quad \left. + 0,5 \frac{\arcsin (y_1/r)}{(y_1/r)} \right\}. \quad (9)^* \end{aligned}$$

Man kann aber die Biegegleichung auch folgenderweise aufschreiben:

$$M = \sigma_f r^3 f\left(\frac{y_1}{r}\right). \quad (10)$$

Die Funktion  $f(y_1/r)$  kann man mit Hilfe der Lagrange-schen Interpolationsformel durch eine Parabel ersetzen, und demnach kann das Biegemoment durch folgende Gleichung ersetzt werden:

$$M = \sigma_f r^3 \left[ -0,38 \left(\frac{y_1}{r}\right)^2 - 0,16 \left(\frac{y_1}{r}\right) + 1,36 \right]. \quad (11)$$

Der so begangene Fehler bleibt unter  $\pm 5\%$ .

Aus Gleichung (11) kann die nur elastisch deformierte Schichtstärke berechnet werden:

$$h_1 = 2 y_1 = d \left[ \sqrt{3,58 - 21,2 \left(\frac{M}{\sigma_f d^3}\right)} - 0,212 \right]. \quad (12)$$

Wenn ein auf zwei Stützen gelagerter Rundstab durch ein Drehmoment  $M = \text{konst.}$  belastet wird, das heißt, wenn jeder Stabquerschnitt unter der gleichen Belastung steht, dann ist die Form der neutralen Linie des Stabes eine Kreislinie mit dem Halbmesser  $\varrho$ . Wird dagegen der Stab in der Mitte durch eine konzentrierte Kraft  $P$  belastet, dann ändert sich das Biegemoment den ganzen Stab entlang ( $M = P \cdot x/2$ ; Bild 3). Infolgedessen gibt es im Stabe Abschnitte, in denen  $M < M_f$ , in denen also nur elastische Formänderungen entstehen, während in anderen Abschnitten bleibende Formänderungen erzeugt werden. Der rein elastisch verformte Stabteil endet und der auch bleibend verformte Stabteil beginnt an der Stelle, wo  $h_1 = h = d$  (Gleichung 12).

Somit ist

$$d = d \left[ \sqrt{3,58 - 10,6 \left(\frac{P x_0}{\sigma_f d^3}\right)} - 0,212 \right], \quad (13)$$

und daraus ist

$$x_0 = 0,2 \frac{\sigma_f d^3}{P}. \quad (14)$$

Die Kraft, die erforderlich ist, damit im mittleren Querschnitt überall die der Fließgrenze entsprechende Spannung  $\sigma_f$  auftritt, wenn also im mittleren Querschnitt  $h_{1x} = 0$  ist (Bild 4), kann aus der Gl. (12) ermittelt werden:

$$h_{1x} = 0 = d \left[ \sqrt{3,58 - 10,6 \left(\frac{P l/2}{\sigma_f d^3}\right)} - 0,212 \right], \quad (15)$$

daraus ist

$$P = 0,66 \left(\frac{\sigma_f d^3}{l}\right). \quad (16)$$



Hier taucht die Frage auf, welche Form der Rundstab aufnehmen wird, wenn das Biegemoment  $M$  im Stabe zwei  $\delta$  starke bleibend deformierte Schichten hervorbringt.

Wenn beim Biegen in den äußeren Fasern des Rundstabes die Spannung  $\sigma_f$  die der Fließgrenze entsprechende Größe erreicht, dann ist der Krümmungsradius:

$$\rho_f = \frac{JE}{M_f} = \frac{Eh}{2\sigma_f} \quad (17)$$

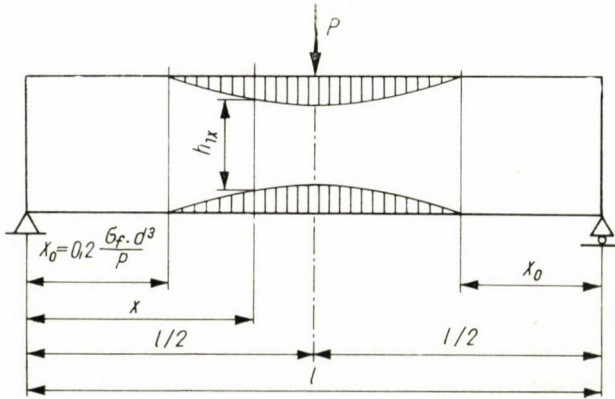


Bild 3

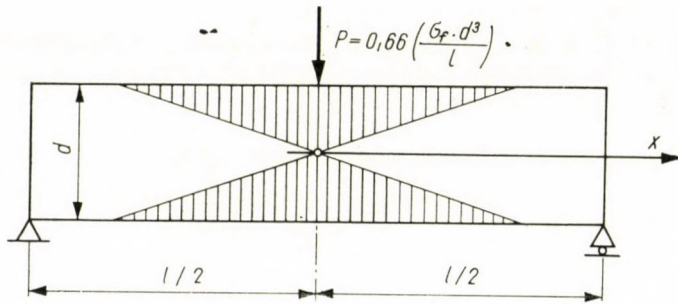


Bild 4

Wird der Rundstab so gebogen, daß in der unteren und in der oberen  $\delta$  starken Schicht die der Fließgrenze entsprechende Spannung  $\sigma_f$  auftritt, dann wäre bei unverändertem Krümmungsradius, wenn dabei keine bleibende Formänderung auftreten würde, die elastische Spannung

$$\sigma = \sigma_f \frac{h}{h_1} \quad (18)$$

Die Stärke der die Form nur elastisch ändernden Schicht ist aus den Gleichungen (17) und (18):

$$h_1 = \frac{\sigma_f}{\sigma} h = \sigma_f \frac{2\varrho}{E} = 2 y_1, \quad (19)$$

dabei ist

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{JE}{\varrho W} = \frac{JE}{\varrho \frac{J}{h/2}} = \frac{hE}{2\varrho}. \quad (20)$$

Aus den Gleichungen (12) und (19) erhält man den Krümmungsradius des Stabes, falls der Stab durch das Moment  $M > M_f$  belastet wird:

$$h_1 = \sigma_f \frac{2\varrho}{E} = d \left[ \sqrt{3,58 - 21,2 \left( \frac{M}{\sigma_f d^3} \right)} - 0,212 \right], \quad (21)$$

daraus ist

$$\varrho = \pm \frac{E}{2\sigma_f} \left[ \sqrt{3,58 d^2 - 21,2 \left( \frac{M}{\sigma_f d} \right)} - 0,212 d \right]. \quad (22)$$

Wenn also  $M > M_f$  ist, dann ergibt sich bei einem Biegemoment  $M$  ein Krümmungsradius  $\varrho$ . Beziehungswise ist, wenn der Stab mit einem Krümmungsradius  $\varrho$  gebogen werden soll, im Sinne der Gl. (21) das folgende Biegemoment erforderlich:

$$M_\varrho = 0,166 d^3 \sigma_f - \left[ 0,04 \sigma_f^2 d^2 \left( \frac{\varrho}{E} \right) + 0,188 \sigma_f^3 d \left( \frac{\varrho}{E} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Hier stellt sich die Frage: Wie groß muß der Krümmungsradius sein, wenn nur in den äußeren Fasern eine der Fließgrenze entsprechende Spannung  $\sigma_f$  auftritt. Im Sinne der Gl. (19) ist

$$h_1 = d = \sigma_f \cdot \frac{2\varrho}{E}, \quad (19a)$$

somit ist

$$\varrho = \frac{Ed}{2\sigma_f}. \quad (24)$$

Zu diesem Krümmungsradius ist laut Gl. (23) folgendes Biegemoment nötig:

$$M_\varrho = 0,166 \sigma_f d^3 - 0,066 \sigma_f d^3 = 0,1 \sigma_f d^3. \quad (25)$$

Die annähernde Gleichung der neutralen Linie des elastisch-plastisch verformten Stabes kann mit der bekannten Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt werden, wonach

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (26)$$

ist.



Die Gleichung der neutralen Linie im elastisch verformten Stab lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{JE} = - \frac{Px}{2JE} = - \frac{32 Px}{\pi d^4 E} = - 10,2 \frac{P \cdot x}{d^4 \cdot E}, \quad (27)$$

daraus ist

$$\frac{dy}{dx} = - 5,1 \frac{Px^2}{d^4 E} + C_u \quad (28)$$

und

$$y = - 1,7 \frac{Px^3}{d^4 E} + C_u x + C_w. \quad (29)$$

Ist  $x = 0$ , dann ist  $y = 0$  und somit  $C_w = 0$ ; demnach wird Gl. (29) die folgende Form annehmen:

$$y = - 1,7 \frac{Px^3}{d^4 E} + C_u x. \quad (29a)$$

Wo  $x = l/2$ , dort ist  $dy/dx = 0$ , also ist aus der Gleichung (28)

$$C_u = 5,1 \frac{P(l/2)^2}{d^4 E} = 1,275 \frac{Pl^2}{d^4 E} \quad (30)$$

und so nimmt Gl. (29) bzw. (29a) die folgende Form an:

$$y = \frac{P}{d^4 E} (1,275 l^2 x - 1,7 x^3). \quad (31)$$

Die Einsenkung bei  $x = x_0$  ist

$$y_0 = \frac{P}{d^4 E} (1,275 l^2 x_0 - 1,7 x_0^3). \quad (31a)$$

Die Gleichung der neutralen Linie des bleibend verformten Stabteils kann mit Hilfe der Gl. (22) bestimmt werden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{2 \sigma_f}{E \cdot \left[ \sqrt{3,58 d^2 - 21,2 \left( \frac{M}{\sigma_f d} \right) - 0,212 d} \right]}. \quad (32)$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung ist integrierbar. Übersichtlichkeitshalber sei

$$M = \frac{Px}{2}; \quad a = 3,58 d^2; \quad b = \frac{10,6 P}{\sigma_f d};$$

$$c = \frac{2 \sigma_f}{E}; \quad e = 0,212 d,$$

somit erhält Gl. (32) die folgende Form:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{c}{e - \sqrt{a - bx}}, \quad (33)$$

woraus

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int \frac{c dx}{e - \sqrt{a - bx}} + C_1 = \\ &= \frac{2c}{b} [\sqrt{a - bx} + e \ln |e - \sqrt{a - bx}|] + k'. \end{aligned} \quad (34)$$

Da im elastischen Bereich bei  $x = x_0$  (Gl. 28):

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = \frac{P}{d^4 E} (1,275 l^2 - 5,1 x_0^2) \quad (35)$$

ist, folgt, daß

$$\begin{aligned} k' &= \frac{P}{d^4 \cdot E} (1,275 l^2 - 5,1 x_0^2) - \\ &- \frac{2c}{b} \{ \sqrt{a - bx_0} + e \ln |e - \sqrt{a - bx_0}| \} \end{aligned} \quad (36)$$

wird.

Die Durchbiegung des elastisch-plastisch deformierten Stabteiles ist:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2c}{b} \int \{ [\sqrt{a - bx} + e \ln |e - \sqrt{a - bx}|] + k' \} dx = \\ &= \frac{2ce}{b} \left\{ - \frac{2}{3be} \sqrt{(a - bx)^3} + e \sqrt{a - bx} + \right. \\ &\quad \left. + (x - a + e^2) \ln |e - \sqrt{a - bx}| \right\} + K^* x + K^*, \end{aligned} \quad (37)$$

dabei ist

$$K^* = k' \left( \frac{be}{2c} - \frac{b}{2} \right) \quad (38)$$

und

$$\begin{aligned} K^{**} &= \frac{b}{2ce} \cdot \frac{P}{d^4 E} (1,275 l^2 x_0 - 1,7 x_0^3) - \\ &- \left\{ - \frac{2}{3be} (a - bx_0)^{3/2} + e (a - bx_0)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + (x_0 - a - e^2) \ln |e - (a - bx_0)^{1/2}| + \right. \\ &\quad \left. + k' \left( \frac{be}{2c} - \frac{b}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$



Es fragt sich nun, welche Form der Stab annimmt, wenn er nach der erlittenen bleibenden Umformung von der Belastungskraft  $P$  befreit wird.

Nach dem Aufheben der Belastung sucht der Stab eine weniger gekrümmte Form anzunehmen, d. h. der Krümmungshalbmesser wird überall größer. Das Moment der Spannungen in der elastisch verformten inneren Schicht wirkt dem äußeren Moment entgegen und trachtet den Stab gerade zu richten. Nach dem Aufheben der äußeren Kräfte ist in den bleibend verformten Schichten keine elastische Spannung vorhanden. Diese Schichten werden nach dem Aufhören der äußeren Kräfte unter der Wirkung des Biegemoments der in den elastischen Schichten wirkenden Spannungen elastisch oder eventuell auch bleibend verformt. Wo jedoch durch die äußeren Kräfte eine Verlänge-

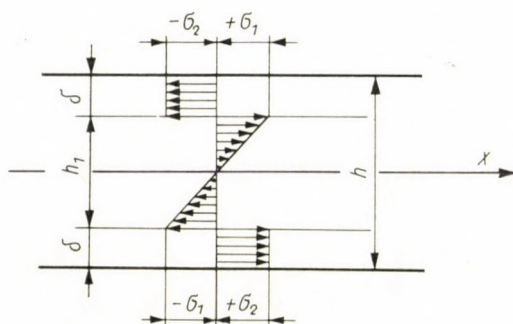


Bild 5

rung verursacht wurde, dort tritt jetzt eine Verkürzung ein, wo eine Verkürzung erfolgte, entsteht eine Verlängerung (Bild 5).

Sollte ein Gleichgewichtszustand eintreten, so ist

$$\sigma_1 W_1 = \sigma_2 F y_s, \quad (40)$$

d. h. das Moment der in den bleibend verformten Schichten entstehenden elastischen Spannungen ist gleich dem Moment der in den nur elastisch verformten Schichten auftretenden Spannungen. In Gl. (40) bezeichnet  $F$  die Fläche der bleibend verformten Schicht (Gl. 6),  $y_s$  ist die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche  $F$  von der  $z$ -Achse (Gl. 8).

Ist der Stab bis zu einer Krümmung von Halbmesser  $\varrho$  gebogen, so kann die in der  $\delta$  starken äußeren Schicht entstehende elastische Spannung auf Grund der folgenden Überlegung bestimmt werden (Bild 6). Die Länge  $x$  der äußeren verformten Schicht des Stabes dehnt bzw. verkürzt sich um  $\lambda$ , wenn der Halbmesser der Krümmung  $\varrho$  ist. Nach Bild 6 gilt die folgende Beziehung:

$$\frac{x}{\varrho} = \frac{\lambda}{y}$$

und

$$\frac{y}{\varrho} = \frac{\lambda}{x} = \varepsilon \quad (\text{die spezifische Dehnung}),$$

da aber

$$y = \frac{h}{2}$$

ist, folgt, daß

$$\varepsilon = \frac{h}{2\varrho} \quad (41)$$

wird.

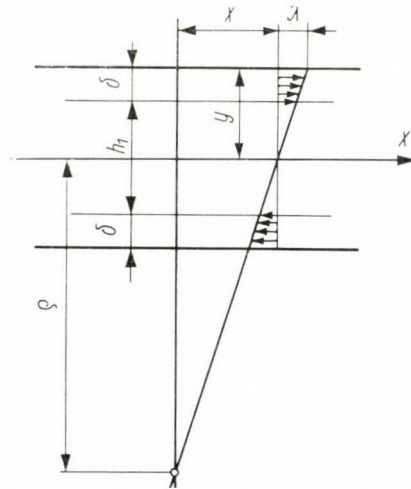


Bild 6

Die spezifische Dehnung der  $\delta$  starken Schicht wird annäherungsweise durch Gl. (41) angegeben. Die entstehende Spannung ist also

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E h}{2 \varrho} . \quad (42)$$

Wird ein gekrümmter Stab mit dem Krümmungshalbmesser  $\varrho_1$  derart gebogen, daß der Krümmungshalbmesser den Wert  $\varrho_2$  annimmt ( $\varrho_1 < \varrho_2$ ), dann entsteht in den äußeren Schichten des Stabes die Spannung:

$$\sigma = \frac{h E}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) . \quad (43)$$

Das Moment der in den beiden  $\delta$  starken äußeren Schichten entstehenden elastischen Spannungen ist (Gl. 40):

$$M_b = \sigma_2 \cdot 2 F y_s \quad (44)$$



Das Moment der  $h_1$  starken inneren Schicht ist bei dem Krümmungshalbmesser  $\varrho_2$ :

$$M_e = - \frac{J_1 E}{\varrho_2} . \quad (45)$$

Bei Gleichgewicht ist

$$M_b + M_e = 0 , \quad (46)$$

das heißt

$$\sigma_2 \cdot 2 F y_s = \frac{J_1 E}{\varrho_2} = 0 , \quad (47)$$

bzw. ist (Gl. 43):

$$2 F y_s r E \cdot \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) - \frac{J_1 \cdot E}{\varrho_2} = 0 . \quad (48)$$

Aus dieser Gleichung ist der Krümmungsradius des von der Belastung befreiten Stabes:

$$\varrho_2 = \varrho_1 \left[ 1 + \frac{J_1}{2 r F y_s} \right] . \quad (49)$$

Nach entsprechenden Einsetzungen [Gl. (4), (6), (12), (19), (24)] nimmt Gl. (49) die folgende Form an:

$$\varrho_2 = \varrho_1 \left\{ \frac{1 + 0,5 r^4 \arcsin \left( \frac{\sigma_f \varrho_1}{E r} \right) - \left( \frac{\sigma_f \varrho_1}{E} \right) \left[ r^2 - \left( \frac{\sigma_f \varrho_1}{E} \right)^2 \right]^{3/2} + 0,5 \left( \frac{\sigma_f \varrho_1}{E} \right) \left[ r^2 - \left( \frac{\sigma_f \varrho_1}{E} \right)^2 \right]^{3/2}}{1,34 r \left[ r^2 - \left( \frac{\sigma_f \varrho_1}{E} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} . \quad (50)$$

Der Stab wird gerade, wenn  $\varrho_2 = \infty$ . Das tritt ein, wenn (Gl. 50)

$$r^2 - \left( \frac{\sigma_f \varrho_1}{E} \right)^2 = 0 \quad (51)$$

ist, d. h., wenn der Stab vorher mit einem Krümmungsradius

$$\varrho_1 = \frac{r E}{\sigma_f} \quad (52)$$

gebogen war.

Das Ausrichten des Rundstabes erfolgt übrigens stufenweise, der letzte Krümmungsradius muß der mit Gl. (52) ausgedrückte Krümmungsradius sein.

## SCHRIFTTUM

1. NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw-Hill, New-York, 1950.
2. SOKOLOWSKI, V. V.: Theorie der Plastizität. VEB-Verlag Technik, Berlin, 1955.
3. HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1955.
4. PAWELSKI, O.—LUEG, W.: Das elastisch-plastische Biegen von Rundstäben und seine Anwendung auf den Richtvorgang in Dreiwalzen-Richtmaschinen. *Stahl u. Eisen*, 79 (1959), 1852—1861.

## THE ELASTIC-PLASTIC FLEXURE OF BARS WITH CIRCULAR CROSS-SECTION

A. GELEJI

## SUMMARY

In scientific literature there is no detailed analysis of the elastic-plastic deformation of bars with circular cross-section, permitting also numerical evaluation of the problem. An exact solution meets with great mathematical difficulties, but an approximate method presented in this paper makes possible to solve the problem with an accuracy of  $\pm 1 \div 5\%$ .

## FLEXION ÉLASTO-PLASTIQUE DES BARRES DE SECTION CIRCULAIRE

A. GELEJI

## RÉSUMÉ

La littérature de la question manque jusqu'à présent d'analyses détaillées de la flexion élasto-plastique des barres de section circulaire. La solution absolument exacte du problème se heurte à des difficultés mathématiques considérables, mais une solution approchée présentée dans cette étude permet de résoudre le problème avec une précision de  $\pm 1 \div 5\%$ .

## ЭЛАСТИЧНО-ПЛАСТИЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

А. ГЕЛЕИ

## РЕЗЮМЕ

В технической литературе по сегодняшний день не освещен вопрос эластично-пластичного изгиба стержней круглого сечения. Совершенно строгое решение проблемы сталкивается с трудностями математического характера, однако, задача может быть решена с приближением на  $\pm 1 \div 5\%$ . В работе приводится это приближенное решение.



# SIMPLIFIED METHOD TO PLOT HAIGH AND/OR SMITH GRAPHS

L. GILLEMOT

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received November 16, 1964]

Affected by an alternating load superimposed onto a static mean stress, fatigue limit value will be the function of the mean stress. The value of the alternating stress the superposition of which to a given mean stress is still feasible can be approximated by means of a cubical parabola. To plot the alternating stress value which might still be added to the static mean stress, several simplified design methods have been suggested applying, however, always to a specified case. By introducing the idea of the actual stress causing fracture, a simple linear relation can be arrived at existing between static mean stress and alternating stress, independent of sample shape and test temperature. The value of any alternating stress which might be superimposed to any given static mean stress can be determined by means of one single static test and by the measurement of one single fatigue limit.

## I. Introduction

The fatigue limit determined by repeated loading depends on the stress values representing the range stress which appears as varying within. In an absolutely general case the stress varies between a maximum and a minimum value. As it is well known, all these stress alternations may be considered as sums of the static mean stress and a superimposed alternating stress. With  $\sigma_M$  as the amplitude of the static means stress and  $\sigma_A$  as that of the superimposed alternating stress (Fig. 1), the stress in time is expressed by the following formula:

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_A \sin 2\pi N \quad (1)$$

where  $N$  represents the number of loadings. Fatigue limit value greatly varies in function of the static mean stress magnitude and of the alternating stress amplitude. To determine the whole stress cycle diagram of a material, a great many experiments are needed as the alternating stresses ( $\sigma_A$ ) pertaining to the different mean stress values ( $\sigma_M$ ) failing, however, to cause fracture as yet must all be determined.

There have been two methods the most commonly used to illustrate the complete fatigue curve in practice. One is the Smith-diagram illustrated by Fig. 2a, and the other is the Haigh-system presented by Fig. 2b. With the Smith-diagram, the mean stress line  $\sigma_M$  is represented by a straight line of 45°, the alternating stress values pertaining to the given mean stresses

being plotted above and below, respectively, therefrom. The area confined by the curves thus obtained is the so-called safety zone. The two limit curves of the safety zone intersect, in the Smith-diagram, at the  $\sigma_U$  point representing the tensile strength value. If the mean stress value equals to zero, that is,

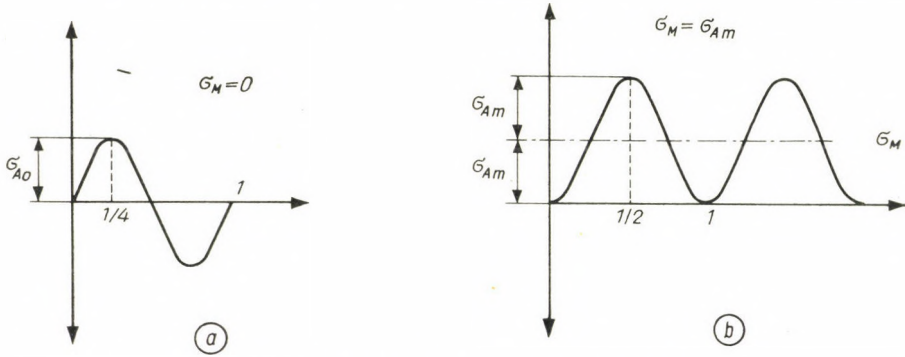


Fig. 1. Stress variation in function of time  
 Static mean stress equals to zero (a); static mean stress differs from zero (b)

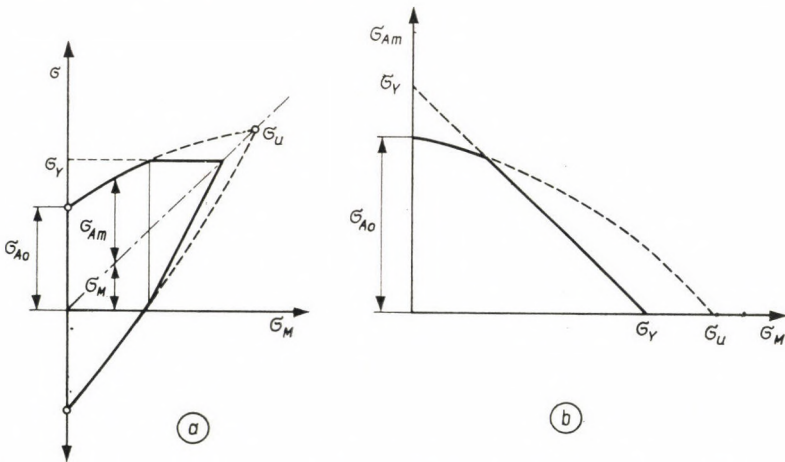


Fig. 2. Fatigue diagram according to SMITH (a) and according to HAIGH (b)

$\sigma_{max}$  and  $\sigma_{min}$  values are identically having only opposite signs, then the fatigue limit value is  $\sigma_{A0}$ .

Theoretically, the Haigh-diagram is entirely identical with the Smith-curve the only exception being that the static mean stress value is represented here on the horizontal axis while the alternating stress value is to be added on the vertical one.

Both diagrams are usually limited by the yield point value. The line limiting the safety zone of each diagram is a curve the equation of which is



expressed, according to the suggestion by PETERSON, with an approximation by a cubical parabola [1]. According to PETERSON, the limit curve of the Haigh-diagram is presented by the following equation:

$$\frac{\sigma_{Am}}{\sigma_{A0}} = \left[ 8 - \left( \frac{\sigma_M}{\sigma_U} + 1 \right)^3 \right] \quad (2)$$

where  $\sigma_{Am}$  is the alternating stress pertaining to a  $\sigma_M$  mean stress causing no fracture yet, whereas  $\sigma_{A0}$  represents the fatigue limit as determined by  $\sigma_M = 0$ .

In order to verify the general validity of the formula for several material types, PETERSON illustrated the data collected by J. O. SMITH [2] from the

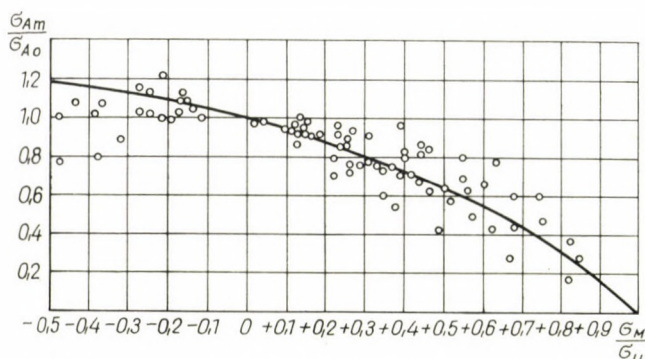


Fig. 3. The influence of mean stress on alternating stress in case of plain samples (PETERSON[1])

papers of different authors by means of a diagram (Fig. 3). The full line of the diagram represents the curve conforming to Equation (2) while the dots display the measurement points as determined by the data measured for various materials.

A similar formula supported, however, by certain theoretical considerations was derived by STÜSSI [3]. Accordingly,

$$\frac{\sigma_{Am}}{\sigma_{A0}} = \frac{\sigma_U (\sigma_u - \sigma_M)}{\sigma_U (\sigma_u - \sigma_M) + \sigma_{A0} \cdot \sigma_M} \quad (3)$$

The advantage of this formula is manifested by the fact that, if the fatigue limit is known for at least one single case, then it can readily be calculated for any other mean stress as well. To plot the Smith-diagram illustrated by Fig. 2a, the determination of at least two or three fatigue limit values is necessary. According to the suggestion developed by the VDI, to simplify this at least for plastic materials, it is sufficient to determine the fatigue limit pertaining to  $\sigma_M = 0$  since, with this plotted onto the Smith-diagram, the top limit curve may be substituted by a straight line of  $35^\circ$  inclination (Fig. 4).

By means of these data, it follows that the whole curve can also be plotted. The design suggested by VDI applies, however, only to plastic material types and, also among those, only to a restricted extent. Calculating, by means of the numerous measurement data reported by HEMPEL [4], POMP [5], DOLAN

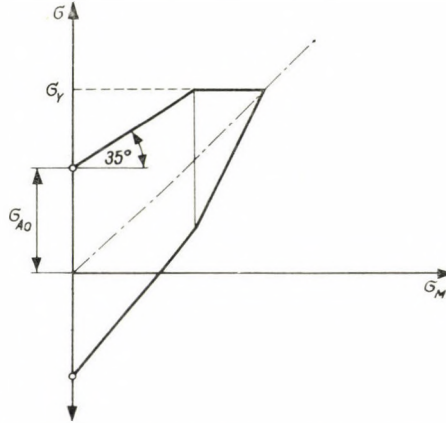


Fig. 4. The simplified plotting of a Smith-diagram

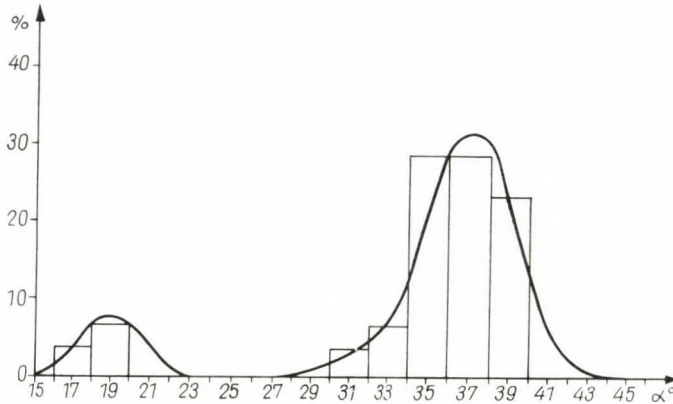


Fig. 5. Frequency of the angle of inclination of a simplified Smith-diagram

[6, 7] and others, the inclination of the line for the simplified design, the value most frequently obtained is indeed that around  $35^\circ$  with the angle of inclination varying, however, from  $27^\circ$  to  $44^\circ$  as shown in Fig. 4.

Fig. 5 illustrates the frequency of the inclination value calculated from numerous data. Actually, this figure may be considered as representing two frequency curves: the most probable value of the angle of inclination exhibited by the Smith-diagram as calculated by means of data measured at lower ( $-78$  and  $-188^\circ\text{C}$ ) temperatures is, namely, not  $35^\circ$  but  $19^\circ$ . This design may be employed, therefore, only to a limited extent.



On the aforesaid grounds it has been decided to aim at the elaboration of plotting the Haigh-diagram with only the knowledge of one single fatigue limit value and of the strength characteristics obtained through the static of the material required. Although these two data are sufficient to permit the determination of the fatigue limit by either the Stüssi formula or the Peterson equation, the suggested equation or calculation method is, nevertheless, of a much more general character applying to plain as well as to notched samples and different temperatures, thus expressing an absolutely generalized regularity as compared to the simplified design or calculation methods suggested so far.

## II. Transition from Static Stress to Fatigue Phenomena

All design types or formulae discussed previously are based on the assumption according to which standard strength is represented, in case of purely static loadings, by the tensile strength ( $\sigma_U$ ). Fatigue tests are mostly conducted with stresses lower than the yield point ( $\sigma_Y$ ). In case of such stresses, the stress related to the initial cross section is practically equal to the actual stress related to the changed cross section. Stresses higher than the yield point cause, however, plastic deformations to such an extent that the actual stress value will considerably differ from the value of the stress related to the initial cross section. With an  $\varepsilon$  specific elongation of the sample, the following relationship will exist — due to the law of volume stability — between the actual stress and that related to the initial cross section:

$$\sigma' = \sigma \cdot (1 + \varepsilon) \quad (4)$$

where

$\sigma' = F/A$  meaning the average true stress,  
 $\sigma = F/A_0$  — the stress related to the initial cross section.

The actual stress value considerably differs from the value of the non-actual stress as shown by the data calculated by using the stress-strain diagram of a tempered C-35 steel sample (Fig. 6). The value of the actual stress ( $\sigma'_F$ ) observed at fracture is much higher than that experienced at the point of the maximum force ( $\sigma'_M$ ). Fatigue tests conducted with stresses higher than the actual stress observed at the point of the maximum force [8] have shown that the material tested would withstand great number of loadings without fracture. Thus neither the tensile strength nor the actual stress observed at the point of the maximum force can be considered as the stress characteristic to fracture. Fracture phenomena are determined exclusively by the true stress actually present at fracture ( $\sigma'_F$ ) although, due to the contraction taking place in course of the tensile test, there is a multiaxial stress condition existing at the location of the fracture resulting in a higher average value ( $\sigma'_F$ ) of mean

actual stress than what could be obtained in case of a fracture taking place in a purely uniaxial stress condition. With low contraction materials such as steels, this difference is not significant and, for practical engineering approximation, the  $\sigma'_F$  value as determined by the tensile test may be, therefore, considered to represent the actual stress characteristic to fracture.

For materials having a great reduction of area such as aluminium, there should be a certain correction employed in calculations [8, 9] not required, however, for steel samples.

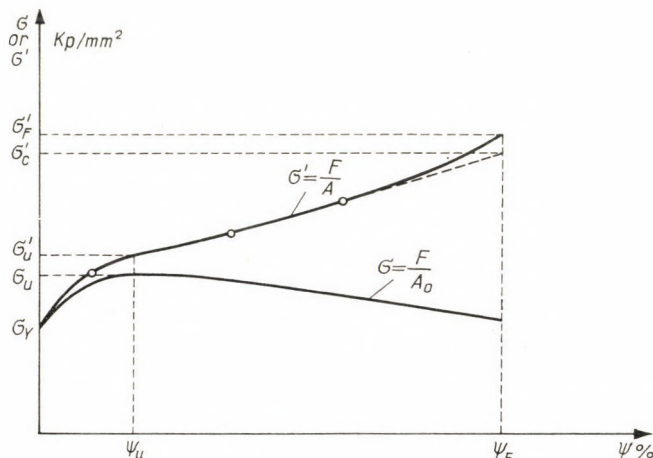


Fig. 6. Actual (0') and non-actual (0) stress in function of contraction

KÖRBER and ROHLAND [10] have already shown that the actual stress in function of the contraction can be expressed, to a very accurate approximation, by a straight line. This relationship reveals that the actual stress causing fracture is

$$\sigma'_F = \sigma_U \frac{1 + \psi - 2\psi_U}{(1 - \psi_U)^2}$$

where  $\psi$  is the contraction value at fracture, and  $\psi_U$  means the contraction observed at the limit of uniform elongation.

Accordingly,  $\sigma'_F$  is the actual stress causing fracture. Subsequently, determining the mean stress ( $\sigma'_M$ ) employed in course of tensile tests also as an actual stress, formula (1) concludes to the fact that, in case of  $\sigma_A = 0$ , the equation  $\sigma'_M = \sigma'_F$  must be true. Consequently, the terminal of the Haigh-diagram must be point  $\sigma'_F$  instead of  $\sigma_U$ .

It could be verified experimentally that, in course of fatigue tests conducted with actual stresses higher than the  $\sigma'_U$  actual stress pertaining to the maximum force, the terminal of the  $\sigma' - N$  curve is indeed represented by the  $\sigma'_F$  stress [8].



Thus the Smith- and Haigh-diagrams may be plotted very simply by using actual stresses. When plotting a Haigh-diagram, the horizontal axis should have the  $\sigma'_F$  value and the  $\sigma'_F/\sigma'_M$  value, respectively, measured, while for the vertical axis the  $\sigma_A$  and  $\sigma'_A/\sigma'_{A0}$  values, respectively. The relation between alternating stress and mean stress as expressed by actual stresses presents a simple linear equation:

$$\frac{\sigma'_A}{\sigma'_{A0}} = 1 - \frac{\sigma'_M}{\sigma'_F} . \quad (6)$$

The equation (6) was suggested firstly by GOUGH and SOPWITH [11]. They found it valid for four different steels at room-temperature and unnotched test pieces.

Taking into account that the sum of the alternating stress and mean stress in structures is always lower than the yield point it follows that, with the exception of stress  $\sigma'_F$ , all other stress values of the formula may be expressed by either actual or non-actual stresses as, in case of stresses lower than the yield point, actual and non-actual stresses differ numerically from each other only to a negligible extent.

Formula (6) could be totally generalized and does not involve any restrictions according to which it would apply only to a given temperature. This should be attributed to the fact that the value of the actual stress  $\sigma'_F$  is practically independent of temperature, and does not depend on whether plain or notched samples have been used for measurements, either. Ludwik has already ascertained that the actual stress produced at rupture is of identical value with plain as well as with notched samples. According to a number of experiments performed with various steel samples, if the stress concentration factor of the notches is not excessive, the  $\sigma'_F$  value is really independent of notching and temperature. To verify this, Fig. 7 presents the data of C-10 mild steel sample from among our experiments. For experimental purposes plain ( $K_t = 1$ ) as well as various notched samples as indicated by the figure have been used. The figure reveals that the  $\sigma'_F$  value is, within the  $\pm 10$  per cent margin of error, independent of temperature and notching. For samples without notches, however, the  $\sigma'_F$  value as measured at a given temperature shows an approximately identical deviation. It may thus be concluded that  $\sigma'_F$  might be considered practically constant as independent of temperature and notching effects. Equation (6) is, therefore, of general validity.

To verify the soundness of the equation, Fig. 8 presents a great number of experimental data by POMP and HEMPEL [4, 5]. The steel data, sample types, and test temperature made use of in plotting the diagram are displayed in Table I. Thus the data used for plotting the graph cover the most different steel types in annealed and tempered condition alike. As shown by the Table, the data made use of were obtained within a measurement range of from

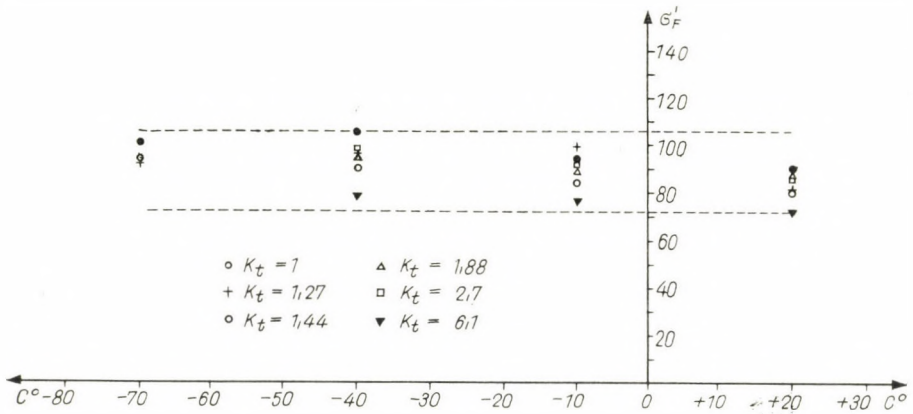


Fig. 7. Variation of the actual stress produced at rupture in function of temperature and notching

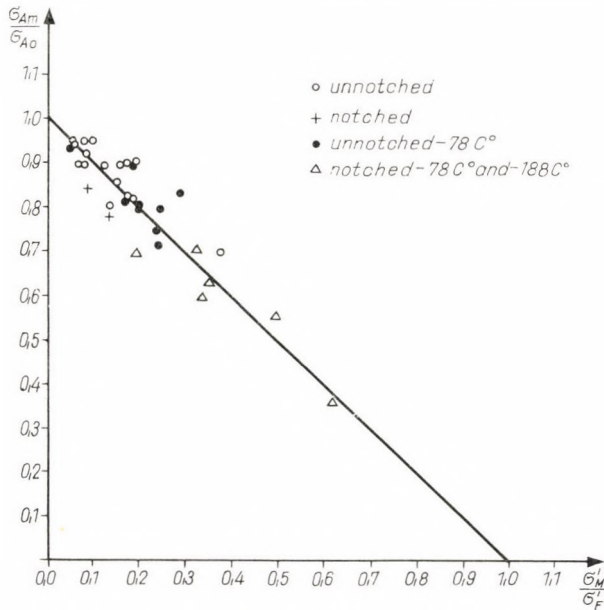


Fig. 8. Method suggested for plotting Haigh-diagrams

+20° C to -188° C temperature with plain as well as notched samples. All experimental data cited refer to axial alternate compression and tension stresses.

The experimental points of Fig. 8 are located with only a slight deviation as compared to the theoretical straight line thus it may be concluded that Equation (6) is of general validity, indeed, as the deviation of the experimental points as compared to the theoretical straight line does not exceed the usual deviation when determining the fatigue limit.



As a summary, therefore, it may be stated that, plotting Haigh- or Smith-graphs, the  $\sigma_M$  mean stress axis should have either the value  $\sigma'_F$  or the ratio  $\sigma'_M/\sigma'_F$  measured on, whereas the vertical axis the ratio  $\sigma_{Am}/\sigma_{Ao}$ .

This means that nothing but the value  $\sigma_A$  must be determined for the sample type and temperature, respectively, the diagram ought to be plotted. Using Formula (5), value  $\sigma'_F$  can be determined by means of a static tensile test.

On grounds of the results, plotting may be further generalized in that measurement of the  $\sigma_{Ao}$  fatigue limit pertaining to the mean stress  $\sigma_M = 0$  is not required for all sample types so soon as in the first approximation.

Table I

Author	C %	Si %	Mn %	Cr %	Ni %	Mo %	Sample	Test temperature
[4] St 37	0,11	0,22	0,39	—	—	—	plain, notched	+20° C
St 52	0,19	0,39	1,35	—	—	—	plain, notched	+20° C
Spring steel	0,47	0,33	1,75	—	—	—	plain, notched	+20° C
Cr-Ni steel	0,13	0,31	0,72	0,96	4,22	—	plain	+20° C
Cr-Ni steel	0,30	0,24	0,49	0,77	3,50	—	plain	+20° C
[5] Cr-Mo steel	0,22	0,33	0,60	0,83	0,09	0,22	plain, notched	+20, -78, -188° C
Cr-Ni-Mo steel	0,34	0,27	0,45	1,88	2,27	0,4	plain, notched	+20, -78, -188° C
St 34.11	0,08	—	0,59	—	—	—	plain, notched	+20, -78, -188° C
St 50.11	0,40	0,17	0,78	—	—	—	plain, notched	+20, -78, -188° C
St 70.11	0,64	0,11	0,75	—	—	—	plain, notched	+20, -78, -188° C

Recently, HARRIS [12] developed a useful method based on theoretically correct considerations permitting the determination of the fatigue limit of notched samples, to a satisfactory approximation, by means of the fatigue limit measured for plain samples. Assume  $\sigma_A$  as the fatigue limit of the plain sample, and  $\sigma_{AN}$  as that of the notched one. Thus the relation  $K_f$  of the two is:

$$K_f = \frac{\sigma_{AN}}{\sigma_A} . \quad (7)$$

According to HARRIS, there is a following relationship existing between the stress concentration factor and  $K_f$ ;

$$\eta = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} = 1 - e^{-\frac{e}{eH}} \quad (8)$$

where  $K_t$  is the stress concentration factor of the sample,  $\rho$  is the bend radius of the notch, and  $\rho_H$  means a quantity depending on the strength of the material having, according to HARRIS, the following value:

$$\rho_H = \frac{33 \cdot 4}{\sigma_u^2} \quad (9)$$

Substituting the  $\sigma_U$  value expressed in  $\text{kp/mm}^2$ , the value of  $\rho_H$  will be obtained in mm and, therefore, the radius of the notch ( $\rho$ ) in Formula (8) must also be substituted in mm.

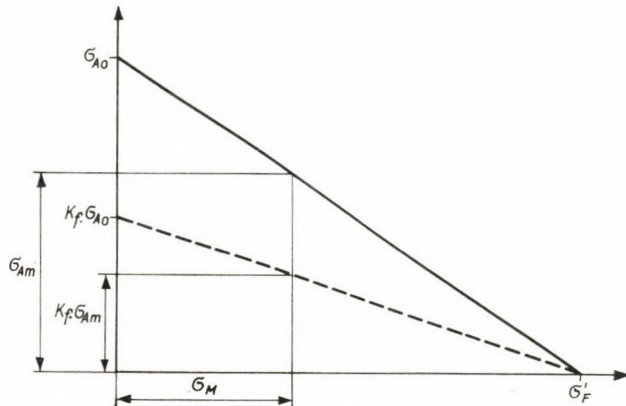


Fig. 9. Plotting the complete fatigue diagram of notched samples as based upon the fatigue limit of plain samples

As a first approximation, if the fatigue limit of a material is known in plain condition, its fatigue limit pertaining to the notch of  $K_t$  stress concentration factor can be calculated. As the value of  $\sigma'_F$  does not vary with the notch, the value  $\sigma'_F$  determined for the plain sample may be used for plotting. Thus with the fatigue limit value of the plain sample known and brought onto the vertical axis (Fig. 9), then connected by means of a straight line to the  $\sigma'_F$  value brought into the horizontal axis, the complete fatigue diagram applying to plain samples is obtained. Determining the  $\sigma_{AN}$  value of the notched sample by means of formulae (7), (8), and (9), and bringing it up to the vertical axis of the diagram, the straight line characterizing the notched sample is obtained. Thus with the fatigue limit of the plain sample known, the complete fatigue diagram of notched samples can be determined in the first approximation. Theoretically, of course, plotting Smith-diagrams is similarly performed.



## REFERENCES

1. PETERSON, R. E.: *Fatigue and Fracture of Metals*. W. M. Murray, New York 1950, 74.
2. SMITH, J. O.: *Univ. Illinois Eng. Exp. Stat. Bulletin* (1942), No. 334.
3. STÜSSI, F.: *Mitteilungen der R. K. V. S. B.*, No. 13.
4. HEMPEL, M.—LUCE, J.: *Mitt. K. W. Inst. Eisenforschung* **23** (1941), Lfg. 5.
5. POMP, A.—HEMPEL, M.: *Mitt. I. W. Inst. Eisenforschung* **18** (1936), Lfg 1.
6. DOLAN, T. J.: *N. A. C. A. Rep. T. N.* (1942), 852.
7. DOLAN, T. J.: *Univ. Illinois Eng. Exp. Stat.*, 1946.
8. GILLEMOT, L.: Vorträge des III. Congr. f. Materialprüfung, Budapest 1964; 5.
9. GILLEMOT, L.: *Archiv f. Eisenhüttenwesen* (under press).
10. KÖRBER, F.—ROHLAND, W.: *Mitt. K. W. I. Eisenforschung* **5** (1924), 55.
11. GOUGH, H. J.—SOPWITH, D. G.: *Journal of the Iron and Steel Inst.* **85** (1937), 293.
12. HARRIS: *Metallic Fatigue*, New York 1962.

EIN VEREINFACHTES VERFAHREN  
FÜR DIE KONSTRUKTION DES HAIGH- BZW. SMITH-DIAGRAMMS

L. GILLEMOT

ZUSAMMENFASSUNG

Unter der Wirkung einer auf die statische Mittelspannung superponierten Wechselbeanspruchung wird der Wert der Ermüdungsgrenze eine Funktion der Mittelspannung. Die auf eine gegebene Mittelspannung noch superponierbare Wechsellastspannung kann durch eine Parabel dritten Grades angenähert werden. Für den Wert der zur statischen Mittelspannung addierbaren Wechsellastspannung wurden mehrere vereinfachte Konstruktionen vorgeschlagen, welche jedoch stets nur für einen bestimmten Fall Geltung haben. Durch Einführung des Begriffes der wahren Bruchspannung kann ein einfacher linearer Zusammenhang zwischen der statischen Mittelspannung und der Wechsellastspannung abgeleitet werden, welcher von der Gestalt des Probekörpers und der Versuchstemperatur unabhängig ist. Der Wert der auf eine beliebige statische Spannung superponierbaren Wechsellastspannung kann aus einem einzigen statischen Versuch und einer Messung der Ermüdungsgrenze bestimmt werden.

UNE MÉTHODE SIMPLIFIÉE  
POUR LE TRACÉ DU DIAGRAMME DE HAIGH RESP. DE SMITH

L. GILLEMOT

RÉSUMÉ

Sous l'action d'un effort alternatif superposé à une contrainte statique moyenne, la limite de fatigue devient une fonction de la contrainte moyenne. La contrainte alternative encore superposable à la contrainte moyenne donnée peut être approchée par une parabole du troisième degré. On a déjà proposé plusieurs méthodes simplifiées pour la détermination graphique de la contrainte alternative superposable à la contrainte statique moyenne, mais celles-ci n'étaient valables que pour un cas donné. En introduisant la notion de contrainte de rupture réelle, on peut déduire une relation linéaire simple entre la contrainte statique moyenne et la contrainte alternative, relation indépendante de la forme de l'éprouvette et de la température d'essai. La contrainte alternative superposable à n'importe quelle contrainte statique donnée peut être déterminée par un seul essai statique et une mesure unique de la limite de fatigue.

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММ  
ПО ГАЙГ ИЛИ СМИТ

Л. ЖИЛЬМО

## РЕЗЮМЕ

Под воздействием переменной нагрузки, накладываемой на некоторое среднее напряжение, значение предела усталости становится функцией среднего напряжения. Значение переменного напряжения, которое еще можно наложить на данное среднее напряжение, можно определить приближением при помощи параболы третьего порядка. Для значения переменного напряжения, которое можно наложить на статическое среднее напряжение, было предложено ряд методов построения, которые, однако, действительны всегда только для некоторого определенного случая. Введя понятие действительного напряжения, вызывающего излом, между статическим средним напряжением и переменным напряжением можно вывести такую простую линейную зависимость, которая независима от формы образца и температуры испытания. Значение переменного напряжения, которое можно наложить на произвольное статическое среднее напряжение, можно определить по одному единственному опыту и на основе измерения одного предела усталости.



# NEW POWER STATION SYSTEM FOR UNIT CAPACITIES IN THE 1000 MW ORDER

L. HELLER

MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received January 11, 1965]

Power demand steadily growing all over the world raises new problems of design, such as for instance to evolve turbosets with good thermal efficiencies and very high unit capacities, to apply air-cooled condensation and to develop a power station cycle permitting to utilize the available thermodynamic potentials in units of very high capacities, chiefly in cold climates. To satisfy these demands, the conventional power plant cycle must be fundamentally modified. By a combined binary vapour plant cycle (water as an upper medium and an appropriate coolant in the lower region), turbosets of very high unit capacities can be developed while the use of air-cooled condensing equipment, without the risk of frost, permits to utilize potentials lying in low ambient temperatures. Research into ammonia as coolant [3] and [5] has proved that the combined system — with high unit capacities — seems to be economical for both first cost and heat consumption.

Demand for electric power is in a steady and powerful rise all the world over. The rate of increase is between 8 and 12 per cent per year on an international average which means that electric power consumption practically doubles every ten years. This fact puts electric power station designers to a hard test indeed, the more so as they have to meet not only quantitatively growing demands but also more stringent qualitative requirements; the power plants they design must produce electricity at an increasingly better economy. This latter criterion, up to recently, stimulated designers to increase the efficiency of the power plants. Increased efficiency, however, involves higher first costs which, in turn, set a limit to efficiency increase. In recent times the dynamically growing demand for power have opened up new and promising ways towards increased economy. Larger networks, namely, permit higher unit capacities to be installed and these, in turn, are conducive to producing energy with better economic efficiency — in two directions. The specific first costs of larger machine units are naturally decreasing and at the same time higher unit capacities afford good possibilities for improving thermal efficiency, although the savings derived from the latter are substantially smaller than the influence of the unit capacities upon the specific first costs.

The fast rate of progress, however, practically within a few years' time, has led to unit capacities which to surpass is wellnigh impossible for the designers. The volumetric conditions of the circulated working medium set a limit to increasing unit capacities, beyond a certain value. The first obstacle in this respect is the exit cross-section of the steam turbine since, for

considerations of strength, the blade length in the last stage cannot be increased beyond a certain value. Obviously, by raising the pressure values, the capacity of a machine having a given cross section can be substantially increased. By raising, for instance, the inlet pressure of a 125 MW capacity machine from 141 to 250 atmospheres and by increasing simultaneously the condenser pressure from 0,034 to 0,1 atmosphere, its output can be stepped up to round 325 MW [1]. Such a way of increasing the output, however, involves a considerable loss in efficiency, since a rise in the condenser pressure obtained in the said manner — depending on the heat flow scheme — may cause a heat consumption more than 5 per cent higher.

The above example is meant to illustrate the effect of the volumetric conditions of the flowing medium. The present construction facilities naturally permit the building of larger units without such an onerous rise in condenser pressure. It is true that the rated vacuum is necessarily worse in large units than in smaller ones and it is actually desirable to deteriorate vacuum up to a degree required for optimum economy. Higher unit capacities greatly contribute to improving economy by keeping down specific first costs, and this, in turn, makes a certain loss in efficiency tolerable.

The highest unit capacities built so far are around 600 MW but swiftly growing requirements call for further increases. 700 to 800 MW capacity units are actually in the design stage and in all probability even these capacities will be surpassed before long. At the Lausanne session of the World Power Conference, for instance, the unit capacity forecast for the British grid was determined around 1200 MW. With such capacities, as a result of economic optimization, the rated vacuum will be obviously much worse than what had been usual with capacities around 100 MW. Higher unit capacities to reduce first costs will thus, over and above constructional difficulties, cause a definite deterioration in efficiency.

In building power stations, we have to face another problem, too. In siting new power plants, on account of the steadily growing capacities, the supply of cooling water emerges as a serious problem. In areas which would otherwise meet all criteria of economical location, the demand for huge quantities of cooling water is more and more difficult to satisfy, and this brings the need for the application of air-cooled condensation into the fore. Air-cooled condensation in units of very high capacity is justified also by the fact that a worse rated vacuum would not affect over-all economy in it as seriously as would operation with wet-type cooling towers.

Should wet-cooling towers be installed, although worse vacuum would cause the first costs of the condenser surface and the cooling tower combined to diminish, the recapitalized cost of water supply — which is in the same order — would grow practically in the same degree in which, owing to deteriorated vacuum, the quantity of steam reaches the condenser.



The capitalized value of higher fuel consumption due to deteriorated vacuum and of the loss in capacity amount to the multiple of the savings represented by the difference between the two items mentioned in the previous paragraph, whereby the magnitude of the loss in capacity equals the capitalized cost of water supply.

With air-cooled condensation the situation is fundamentally different. Here, owing to deteriorated vacuum, the total cost of air-cooled condensation shows a practically linear decrease with increasing difference between ambient-air and condenser temperatures. And since, assuming a case in which wet cooling and air-cooled condensation are economically equivalent, the first costs of air-cooled condensation are higher than those of wet cooling by the capitalized costs of water supply, the savings, by which the expenses of the additional fuel consumption and loss of capacity can be reduced, are two to three times higher than they would be with the application of wet cooling. Consequently, the effect of vacuum deterioration permitted with a view to increasing unit capacities can be offset by the lower specific first costs, achieved by installing larger units, much sooner if air-cooled condensation is used than with wet cooling!\*

Air-cooled condensation at the same time affords new possibilities the exploitation of which — on account of the above-outlined constructional difficulties caused by the volumetric conditions of the steam turbine — would be impossible with very large units. In areas in the cold zone, acquiring growing importance for industry (Siberia, Canada, Northern Japan, etc.), air-cooled condensation would permit the utilization of the very low annual average temperatures prevailing there by way of ambient temperatures. Considering our present steam turbine constructions this is impossible with units of both very high and even of considerably lower capacities.\*\*

Under extremely cold climates on the other hand, the elimination of frost hazard poses a serious problem in air-cooled condensation.

To meet the case, a solution must be found which permits the utilization of the lower temperature limits offered by air-cooled condensation, on the one hand, and excludes frost hazard, on the other; a solution that will ultimately eliminate the contradiction inherent in the fact that while with high unit capacities the large specific volumes call for an intentional deterioration of vacuum, air-cooled condensation enables better vacua to be achieved —

\* Fresh-water cooling in this respect presents the same picture as cooling by wet cooling towers. The capitalized cost of water supply with fresh-water cooling is generally not significant and, even if it were to change considerably, its effect would remain by orders below the additional costs incurred by higher fuel consumption and by loss in capacity. Consequently, these must again be offset solely by the savings in first costs, through a transition to higher unit capacities.

\*\* This naturally applies not only to cold climates but to all areas where winter loads by far outbalance summer loads.

particularly in the winter period. All these problems can be solved by a cycle in which water in the lower regions is substituted by another suitable working medium, one that satisfies all requirements.

The solution to the problem, consequently, is the evolution of a binary vapour cycle in which steam serves as the working medium in the upper stage and some "cold vapour" in the lower. Fig. 1 shows this binary vapour cycle in

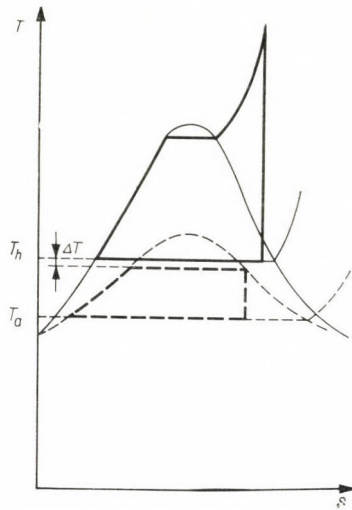


Fig. 1

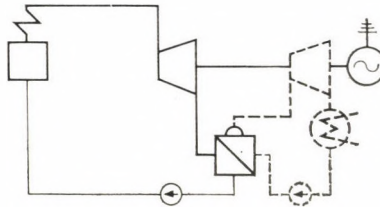


Fig. 2

the TS chart while Fig. 2 illustrates the flow diagram of the system. Such cycle resolves all problems unequivocally. In the upper stage the top part of the cycle is kept unchanged (with optional — even with supercritical — initial state) while in the lower one the cycle is carried out by the "cold vapour". The dual problem is actually solved by the properties of the cold vapours which manifest themselves in such form that the specific volumes of these working media at identical temperature are lower by orders than the specific volume of steam. At the same time, the freezing points of cold vapours are far below even the lowest air temperatures that may occur under the cold climates whereby frost hazard in operation with water is precluded.



By way of "cold vapour" naturally any one of the working media applied in refrigerating engineering may be used. In what follows, we shall compare the various media, with a close scrutiny of all factors that may have an influence on the process, to ascertain which of them seems most suitable for our purposes. It should be borne in mind, however, that all "cold vapours" have a basic property — which in fact makes them capable essentially of solving the first problem — that their specific volume, at identical temperature, is lower by several orders than that of steam. Hence the capacity curbing effect of steam — which arises with its volumetric conditions — can be completely eliminated. The specific volume of ammonia ( $\text{NH}_3$ ), for instance, at  $30^\circ\text{C}$

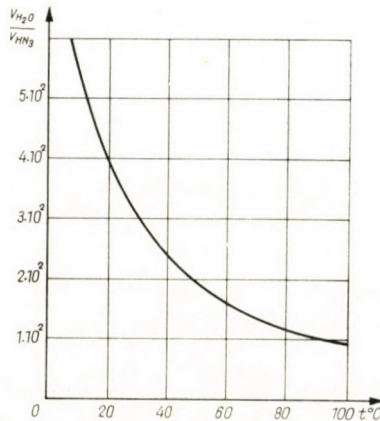


Fig. 3

temperature, is round three hundred times lower than that of steam (see Fig. 3). Thus, considering that the utilizable heat drop, if ammonia is applied, is less specifically than half of that of steam, the required exit cross-section of the turbine is still smaller by two orders than would be in a steam turbine, assuming the same output.

Volumetric conditions in such a system do not set any limits whatsoever to the optional increase of unit capacities, even with condensing temperatures as low as  $-20^\circ\text{C}$ . Accordingly, with an outlet pressure of the steam turbine determined to be 1 to 2 atmospheres, units can be designed (on a single shaft!) whose steam turbine (high-pressure) part yields practically the same volume as its low pressure portion which, as said above, operates with some sort of cold vapour. In the structural design of such a machine unit, capacity considerations will set practically no limitation, even though our expectations for the few decades ahead might materialize. As to the building of a unit on a single shaft, the only likely restriction may be the maximum capacity for which the electric generators can be built.

Such a new system will naturally involve one basic drawback from the thermodynamic point of view, as will unambiguously appear from Fig. 1. This consist of a heat exchanger inserted between the steam and the cold-vapour systems operating, obviously, with definite temperature difference and causing necessarily a loss in the system. This loss is, however, offset by the thermal gain due to the fact that the condenser pressure need no longer be boosted artificially since it can be kept at a value best suited to the ambient temperature. Thus economy calculations for optimalization must, essentially, set two items against each other, viz. the thermal loss due to the presence of the heat exchanger in the system against the gain effected in condensation, and the differences in first costs. The fact that the extremely bulky low-pressure part of the conventional steam turbine is replaced by a "cold vapour" turbine that represents but a fraction of it, will help to reduce costs, although the savings derived will naturally be cut by the first costs of the heat exchanger.

The above-mentioned economy calculation may naturally, even with regard to the conventional method of water cooling, yield a result revealing the binary cycle of Fig. 1, in units of very high capacity, to be more economical than the classic steam cycle, particularly in the light of latest research and forecasts for the future, concerning production costs per kWh. These prove that fuel costs show a tendency to approximate the fixed charges, indeed are expected to drop below them [2]. And in this direction, air-cooled condensation holds out substantially better hopes.

With air-cooled condensation — even under normal climatic conditions — the savings effected in the condensation generally exceed the thermal loss caused by the insertion of the heat exchanger\* and the saving in the overall economy is derived mainly from the difference between the saving in the first cost of the turbine (thanks to smaller dimensions), on the one hand, and the first costs of the heat exchanger, on the other. This latter difference is always positive, and particularly so if the required unit capacities are higher than the existing construction facilities would permit. Binary vapour cycles will definitely be favoured for power stations to be erected in a cold climate. In such a case the saving in condensation will by far exceed the thermal losses caused by the heat exchanger.

\*

As will be apparent from the above, the over-all economy of this binary cycle is influenced by three factors: the proper selection of the cold vapour

\* Even air-cooled condensation would be incapable of utilizing severe winter temperatures with the conventional steam cycle, since the optimum vacuum of the steam turbine is considerably above the vacuum values that would correspond to the lowest temperatures occurring under normal climatic conditions. This limitation has, however, no effect in cold-vapour turbines whose limit vacuum can be so determined as to suit the lowest probable temperatures.



which is to function as the working medium of the lower stage, the magnitude of the temperature gap ( $\Delta t$ ) applied in the heat exchange process, and the dividing temperature that separates the two working processes ( $t_h$ ), i.e. the temperature at which steam condenses. These factors can, naturally, not be chosen arbitrarily and independently from one another. On the contrary, they are one another's highly complex implicit functions. I do not wish to dwell on the complicated and extraordinarily extensive mathematical derivation of these function series or quote any parts of our investigations because they will be published before long in the candidate's thesis of one of my associates [3]. I shall restrict myself to a qualitative survey of the findings of these investigations.

The size of the heat exchanger surface and with it its first costs — which materially affect over-all economy — closely depend on the temperature difference ( $\Delta t$ ) applied. But it depends, to a similar extent, also on the quality of the cold vapour applied since, alongside the  $\Delta t$  value, heat exchanger dimensions are determined by the heat transfer coefficient of the boiling medium. Accordingly, the heat transfer coefficient will be as follows:

$$a_{\text{boiling}} = f_1(\text{cold vapour}, \Delta t).$$

The heat-exchanging surface ( $F$ ) is at the same time a function of the quantity of the heat transferred ( $Q$ ). Consequently:

$$F = f_2(a, \Delta t, Q) = f_2[Q, \Delta t, f_1(\text{cold vapour}, \Delta t)].$$

For our calculation, the cost of the heat exchanger is also important. This, too, is the function of the working medium since its kind determines not only the structural materials to be used but also the pressure to be applied, i.e. one that corresponds to the temperature concerned.

On the other hand, the heat transferred in the heat exchanger will naturally depend on the efficiency of the system as a whole, viz.:

$$Q = f_3(\eta_{\text{tot}}).$$

The over-all efficiency of the system is finally — in addition to the temperature gap ( $\Delta t$ ) — the function of the thermal efficiency of the lower stage operated with the chosen cold vapour as working medium, as well. (For reasons of practicability, we have in our calculations used, instead of the thermal efficiency of the lower stage, its ratio to such thermal efficiency that would be attained by applying steam for working medium in the temperature region in question, that is:

$$\frac{\eta_{\text{H}_2\text{O}}}{\eta_{\text{cold vapour}}} = \varphi.)$$

Hence it logically follows that, upon the effect of the value of  $\varphi$ , over-all efficiency is affected also by the dividing temperature ( $t_h$ ) that separates the two (lower and upper) stages, i.e. the temperature at which steam condenses in the heat exchanger.

In consequence:

$$\eta_{\text{tot}} = f_4(\Delta t, \varphi, t_h).$$

The value of ( $t_h$ ), viz. the limit temperature, through the value of  $\varphi$ , is a function also of the applied cold medium since it is obvious that, if the thermal efficiencies of the two part cycles differ, the value of the dividing tem-

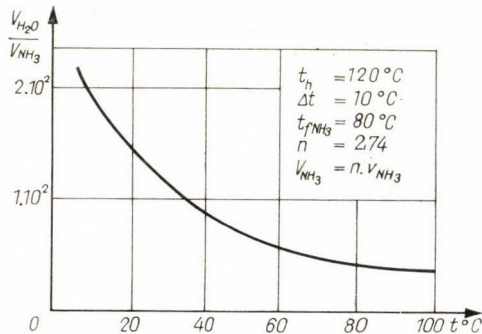


Fig. 4

perature must have a decisive role in the evolution of over-all efficiency. This statement will be unequivocally proved below.

The  $t_h$  value is finally the function also of the  $\Delta t$  applied. The endeavour to keep down the degree of irreversibility calls for isothermic heat exchange in the system. Accordingly, it may be written that:

$$(t_h - \Delta t) < t_{hk_{kr}}$$

(where  $t_{hk_{kr}}$  stands for the critical temperature of the cold vapour), in other words, the refrigerant must pick up heat through evaporation. But, even independently from the refrigerant chosen, the limit temperature has an important and interesting part in the system, as will appear from the following.

Let us investigate cycle in which the working medium carrying heat, introduced at the upper temperature limit ( $T_f$ ) is, after a certain expansion, extracted from the machine, the heat extractable from the first part cycle is transferred by isothermic heat exchange to some other (or identical) medium and this second medium further expands in the machine down to the lower temperature limit. For the original cycle let us assume a Carnot cycle in which the 1 2 5 6 area stands for the heat introduced from outside and the area 1 2 3 4 for the work yielded (see Fig. 5). Let us now divide this cycle into two parts



in such a way that the expansion of the working medium is interrupted at point 7 and the heat  $8\ 7\ 6\ 5$  transferred, via a heat exchanger, to a lower stage operating with another (or identical) working medium. It is a matter of course that while the lower stage takes over this heat, entropy will increase ( $\Delta S$ ), owing to the  $\Delta T$  temperature difference. Therefore the extracted heat, at identical heat input, will grow, on account of the increased entropy, by the  $3\ 12\ 11\ 5$  surface, i.e. by a value of ( $T_a \cdot \Delta S$ ), rendering the efficiency of the total cycle correspondingly worse than had been the efficiency of the original

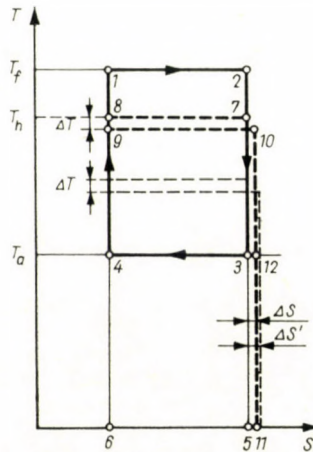


Fig. 5

$1\ 2\ 3\ 4$  cycle. The drawing furthermore indicates unambiguously that by keeping the dividing temperature ( $T_h$ ) at a lower value, the rate of entropy increase will grow ( $\Delta S' > \Delta S$ ), and the effect of the binary vapour cycle gradually deteriorate. In such a case, the best efficiency of a cycle operating with binary medium will be attained by raising the  $T_h$  value as high as possible.

The same result is obtained in a conventional steam cycle, instead of the Carnot cycle, by using ideal regenerative feedwater heating in its course; i.e. by preheating feedwater practically up to the upper temperature ( $T_f$ ), with steam extracted from the turbine at an infinite number of points and, naturally, by applying heaters of infinitely large surfaces (Fig. 6). If a steam cycle so "carnotized" ( $1\ 2\ 3\ 4$ ) is divided into two parts according to Fig. 5, assuming this time identical working media, then, owing to the  $\Delta T$  temperature difference, the unavoidable entropy increase ( $\Delta s$ ) which essentially augments the extracted heat by the area  $9\ 10\ 11\ 3$ , will again set in. This will once more deteriorate the efficiency of the new binary vapour cycle since, with the same quantity of external heat introduced ( $1\ 2\ 12\ 13$ ), the extracted heat ( $4\ 9\ 10\ 14$ ) is larger than was the original, and the sum of the work yielded by the two part





in such a way that the expansion of steam is interrupted at point 6 where the complete steam quantity is extracted and is passed to the heat exchanger there to condense at the dividing temperature  $T_h$ . The feedwater reaching the other side of the heat exchanger at  $T_a$  temperature (4) is first warmed up to  $(T_h - \Delta T)$  (9) with the heat rejected in the course of condensation (5 6 11 12), then evaporated — whereby the terminal point of evaporation will be the state marked point 8. (The state indicated by point 8 was assumed naturally for the sake of simplicity only; the state after evaporation should obviously be point 14, but in this case our further calculations should be referred to a quantity

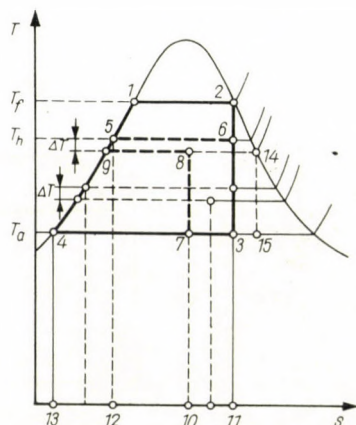


Fig. 7

of less than 1 kg, instead of 1 kg. For easier illustration we shall keep the final state as shown in point 8 which will cause no changes either numerically or qualitatively except for a negligible numerical difference: the work yielded by vapours of different volumes but of the same heat content is not the same if illustrated as work yielded by the expansion of wet steam and plotted in a Ts-chart drawn for 1 kg or if illustrated in a Ts-chart drawn for the actual quantity of steam (for instance for 0,8 kilograms) as dry saturated steam. The work derived from the same quantity of transferred heat is namely not of the same value when wet steam and when dry saturated steam — in a proportionately smaller quantity — is expanded.) Steam in the second stage expands from the state denoted by point 8 to the state as per point 7. (The terminal point of expansion naturally should be at point 15 here, too, but calculating with the diminished quantity, the state indicated by point 7 satisfies even the quantitative criteria.)

We have so far no evidence to go by for the changes in efficiency since the chart shows that the work obtained, instead of the value illustrated by the original 1 2 3 4 area, is composed of the areas 1 2 6 5 and 4 9 8 7 — and

is consequently obviously less than originally. At the same time, the average temperature of heat input is higher than was the original and the heat extracted is less (by the value corresponding to the 7 3 11 10 area) and, finally, the heat introduced decreases from the original 4 1 2 11 13 to the 5 1 2 11 12 value. (In our investigations only such irreversibilities were considered as occur with the heat exchanges, disregarding all other irreversibilities in the system due to throttlings, friction, etc.) The influence of the above changes upon over-all efficiency cannot, naturally, be determined without numerical data, but the

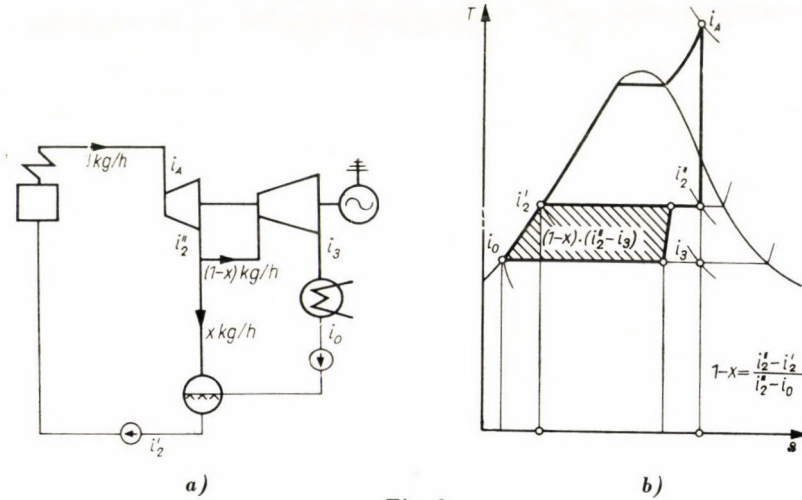


Fig. 8

simple considerations to be outlined below unequivocally bear out, also here, the qualitative result, respectively point out the foreseeable direction of the changes in efficiency.

From such considerations we can draw the highly interesting conclusion that, in the case in hand, the conversion to the binary vapour cycle — assuming a heat exchanger of infinitely large surface — will by all means yield better efficiency than does the single-medium cycle. It is self-evident that if heat exchange took place with finite temperature difference, and not in an infinitely large heat exchanger, efficiency would improve, up to a certain value, and unchanged efficiency would be obtained only at a definite maximum value of the  $\Delta t$  temperature difference. Thus, transition to the binary cycle will not necessarily deteriorate the efficiency of the entire system, on the contrary, by maintaining a certain slight temperature difference, efficiency may be augmented.

This statement, at first sight surprising, will become clear in the light of the following simple considerations.

In a simple steam cycle, single-stage regenerative feedwater preheating is applied (see Fig. 8a) in such a way that, to avoid using an infinitely large



heat exchanger, a mixing preheater is provided in which a portion ( $x$  kg per h) of the steam (1 kg per h) entering the turbine is condensed and mixed with the steam quantity  $(1-x)$  kg per h coming from the condenser, while the  $(1-x)$  kg per h steam naturally continues to expand, to condenser pressure, in the low-pressure stage. Fig. 8b showing this system in a Ts-chart will at once prove the otherwise well known thesis that such regenerative feedwater heating helps to improve the over-all efficiency of the cycle. Although the work gained in the low-pressure stage drops to the  $(1-x)$ th part of the original, the

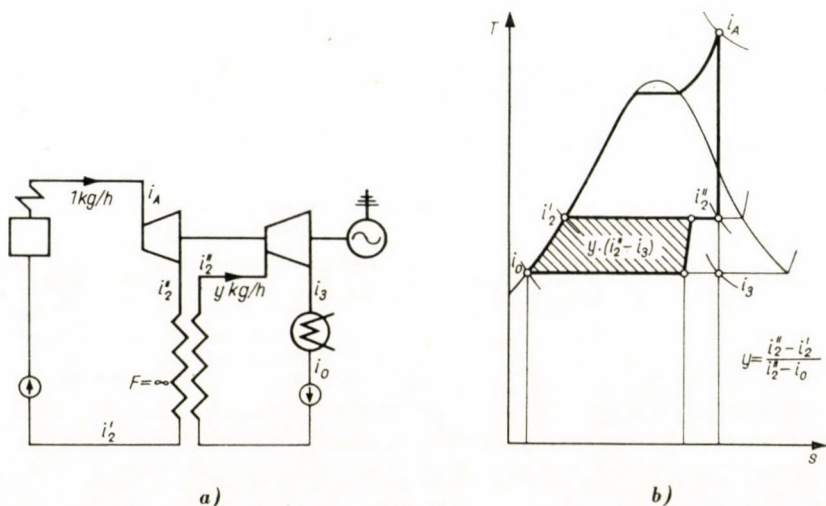


Fig. 9

heat extracted from the total cycle (including also the high-pressure stage) will diminish in the same ratio. The heat introduced will at the same time decrease in accordance with the fact that feedwater now reaches the boiler with an enthalpy of  $i_2'$  and not with  $i_0$ , which ultimately results in higher over-all efficiency.

Let us now transform the original cycle in such a manner (see Fig. 9a) that — under the same extraction pressure as before — not only the steam quantity required for the feedwater heating (in the former case  $x$  kg) but the total steam quantity is extracted and passed into an infinitely large heat exchanger to condense and subsequently to leave at an enthalpy of similarly  $i_2'$  to get into the boiler. On the other side simultaneously  $y$  kg per h condensate with  $i_0$  enthalpy is passed to the heat exchanger — the value of  $y$  so determined that the enthalpy of steam leaving the heat exchanger should also be  $i_2''$ . In this way  $y$  kg per h steam, of an enthalpy of  $i_2''$  expands in the low-pressure part down to  $i_3$ . Even a short calculation will immediately reveal that the  $y$  value in the second case equals the  $(1-x)$  value and the work gained from the system is in complete agreement with the value of the work obtained in the case accord-

ing to Fig. 8, heat introduced remaining unchanged, viz. at the value of  $(i_a - i'_2)$  kcal per kg.

In the scheme of Fig. 9, the efficiency gain is precisely the same as in the case illustrated in Fig. 8, achieved by regenerative feedwater heating. Over-all efficiency as per Fig. 9 — with an infinitely large heat exchanger — improved in the same measure as had been attainable in the case according to Fig. 8, through regenerative feed heating. An infinitely large surface was used only for the sake of simplicity, because a finite heat exchanger, just as it would bring about higher efficiency in feedwater heating, would improve efficiency also in the case according to Fig. 9.

The above simple example bears out our previous statement whereby in the case as per Fig. 7 — where the single-vapour cycle is converted into a binary one (media in the upper and lower stages remaining identical) — improved efficiency can be achieved just as well as with regenerative feedwater heating. There is a maximum to efficiency increase of regenerative feedwater heating between the two extreme values — both of which naturally yield zero — and the same applies to the binary cycle of Fig. 7. Here, too, the optimum value of the  $t_h$ , which brings maximum improvement, must be sought for.\*

As is apparent, the determination of the dividing temperature is not as simple and unequivocal as in the cases according to Figs 5 and 6 and in the general case — even though essentially identical working media are circulated in the upper and the lower stages of the binary vapour system — accurate calculations must be carried out to set the optimum dividing temperature. If the binary cycle operates with different media — as will be dealt with hereunder, further complications will arise.

The thermal efficiency of the lower cycle, with given upper and lower limit temperatures and disregarding regenerative preheating, essentially depends on the extent of the irreversibility — the only one — in the ideal cycle, viz. the one taking place in the heat exchanger. This decisively depends on the physical properties of the working medium of the lower stage, in fact on

\* These reflections are naturally not intended to suggest that in the conventional steam cycle the complete steam quantity should be extracted from the turbine and utilized towards the production of secondary steam for further expansion in the turbine instead of the usual feedwater heating by bled steam. Such a suggestion would entail a heat-transmitting surface many times larger than we have it now and would cause further losses in the form of additional losses in work due to the finite temperature difference. This accounts for the fact that, while increased temperature difference in a conventional steam cycle offsets only gradually the gain achieved by regenerative feedwater heating, in the full heat exchanger as per Fig. 7, once the temperature difference has increased to a certain value, the advantages of the scheme will completely disappear. These reflections are meant to state that where on account of the two different media the full heat exchange must, at all cost, be carried out, thermal losses, due to the temperature difference, are not inevitable. On the contrary, with an adequately small temperature difference, these losses will not occur at all, yet if they do, they will be considerably smaller than would seem at a cursory glance.



the ratio of the fluid heat to evaporation heat in the given temperature region, as is shown in Fig. 10. This drawing is a qualitative illustration of the heat exchange process, respectively its effect on the degree of irreversibility. The area encompassed by 1 2 3 4 denotes the heat transferred in the heat exchanger through the condensation of steam. This is taken over by an arbitrarily chosen working medium along the line 5 6 7 (dotted line). The value characterizing the irreversibility of the heat exchange, i.e. the average temperature of heat input, according to the drawing, is  $\bar{T}^*$  which, as can be seen from the drawing

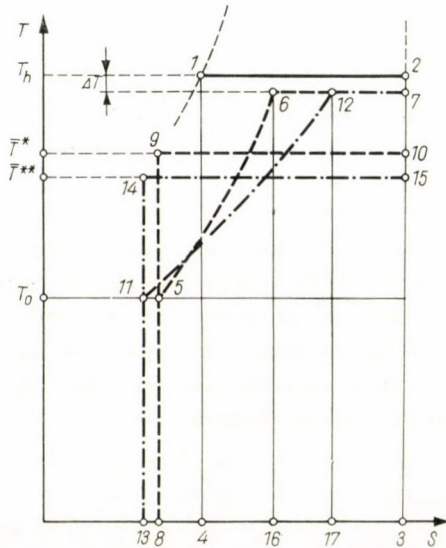


Fig. 10

depends solely on the ratio of 5 6 16 8, illustrating the quantity of the fluid heat, to 6 7 3 16, illustrating the evaporation heat. (The TS-chart is naturally not referred to 1 kg of the refrigerant but to the quantity of same corresponding to the heat picked up from 1 kg steam.) Taking, by way of example, another working medium (dash-and-dot line), this ratio is expressed by the proportion between the area encompassed by points 11 12 17 13 and the one by the 12 7 3 17 points. In this latter case the average temperature of heat input will be  $\bar{T}^{**}$  which, as indicated in the drawing, is below  $\bar{T}^*$ . This means that the thermal efficiency of the lower stage cycle, carried out with the second working medium, is correspondingly worse. (Point 7 in the TS diagram denotes the points corresponding to the saturated states shifted, for the sake of clarity, below point 2.)

As will be seen, the thermal efficiency of the lower stage depends on the relationship between the heat communicated to the fluid and the heat of evap-

oration, which can be written in the following manner:

$$\eta_{0 \text{ refr.}} = \left( \frac{\int_{T_0}^{T_h - \Delta T} c_f dT}{r_{(T_h - \Delta T)}} \right).$$

Since the values of  $c_f$  and  $r$  with a given medium are the sole functions of temperature, at a given  $T_0$  temperature

$$\eta_{0 \text{ refr.}} = \Phi(T)$$

where  $T$  denotes the upper temperature of the lower stage, viz.:

$$T = T_h - \Delta T.$$

In this function we have obtained another coefficient for the optimization of the values of the dividing temperature ( $t_h$ ) and the temperature difference applied in the heat exchanger ( $\Delta t$ ).

This last function is naturally the function of the physical properties of the cold vapour chosen for the working medium, which has a decisive influence on the optimum layout of the entire system in respect of the thermal efficiency. However, the physical properties of the cold vapour applied as a working medium affect not only thermal efficiency but also a number of other factors which are significant in construction. In what follows, we shall examine the influences of these various factors.

\*

The characteristics of the cold vapour which is the working medium in the lower stage of the system, affect primarily the dimensions of the required heat exchanger equipment, its structural design and its system.

The dimensions of the heat transfer surface required in the heat exchanger greatly depend on the heat transfer coefficient of the cold vapour during heat transmission in the boiling state ( $\alpha_{\text{boiling}}$ ). The factors affecting the structural build-up of the equipment are the relationships between the medium and temperature, pressure and specific volume and its boiling point curve [ $p = f(t_s)$ ]. This latter relationship determines the working pressure of the equipment on the cold vapour side, and, through it, the strength criteria.

Another significant factor in deciding upon the system of the heat exchanger is the evaporation heat of the cold medium at a given evaporation pressure. This value namely determines the ratio ( $n$ ) which indicates how many kilograms of cold vapour are produced in the heat exchanger in the equilibrium stage during the condensation of 1 kg steam.

Consequently,

$$n = \text{cold vapour kg per h per steam kg per h} \dots \text{ kg/kg.}$$



This factor, over and above its various other effects, determines whether natural circulation, forced circulation or once-through flow should take place in the heat exchanger. With forced circulation or once-through flow this factor will influence not only the design of the heat exchanger but also the power demand of the pumping work.

The selection of the refrigerant is naturally also of utmost importance in the design of the turbine since its properties determine the dimensions, structural build-up and the flow scheme of the turbine, the construction of the glands and the engine efficiency of the turbine.

The dimensional relations of the turbine depend, in the first place, on the specific volume of the cold vapour, although some other thermal properties of the medium may also have an effect on them. Such properties are, firstly, the boiling point curve of the medium — whose value pairs relating to a state unequivocally determine the value of the specific volume corresponding to it — secondly, the evaporation heat which unambiguously determines the value of “ $n$ ” already discussed, i.e. the ratio of the steam circulating in the upper stage to the quantity of cold vapour circulating in the lower one. Through the specific volume this ratio will determine the actual volume of the medium flow across the turbine during unit time. Ultimately, the magnitude of the exit cross-section of the turbine naturally depends on the optimum exit velocity achieved in the last stage.

As to the flow scheme (facilities for regenerative heating and its effect upon efficiency), the optimum arrangement of stages, viz. essentially structural build-up, is determined by the thermal equations of state of the cold medium. The factors enumerated above determine the engine efficiency of the turbine, i.e. essentially the magnitude of clearance losses, friction, (ventilation) losses, exit losses and the losses through the glands — which are all functions of the factors treated — and in addition, functions of the viscosity factor which affect losses by friction. Finally, the engine efficiency of the turbine is affected also by losses caused by the braking effect of droplets which is obviously influenced by the trend of the saturation limit curve of the refrigerant.

Through the performance of the feed pump, the quality of the cold vapour affects — though not significantly — the efficiency of the entire system. This effect acts on the efficiency of the system as a whole rather than on the efficiency of the turbine alone. The performance of the feed pump, the one which carries the condensate of the cold vapour to the heat exchanger via the preheaters, depends on the value of “ $n$ ”.

The properties of the refrigerant used as a working medium have an overwhelming effect also on the operational and control conditions of the whole system. Binary vapour systems afford an excellent inherent possibility which, however, cannot be exploited with all cold media. This consists of the elimination of vacuum from the whole system. While in turbines operating purely on



steam, in the course of condensation, vacuum is practically unavoidable, most cold media, even at the lowest temperatures that may occur in practice, have above-atmospheric saturation pressures. This fact offers the highly favourable possibility that, provided steam condenses in the heat exchanger at a pressure above 1 at, vacuum can be prevented from arising throughout the system. This not only greatly facilitates and simplifies operation by dispensing with all kinds of sealing equipments — for instance vacuum air ejector, water pumps, coolers, etc. — but brings the advantage that air does not deteriorate the conditions of heat transfer in the heat exchangers (in the steam to refrigerant heat exchanger and in the condenser).

Such greatly simplified operation will, of course, make further demands on control, since under these conditions the elimination of vacua under all operational conditions becomes imperative. I shall revert later to the suitable design of regulation and control.

To take advantage of these possibilities a refrigerant must be selected whose boiling-point curve ensures that the pressure of the medium should never, in any operational point, drop below 1 atmosphere.

Some other, non-thermal properties of the cold vapour applied as working medium should also be dealt with. Such properties are the inflammability of the medium, its toxicity, its corrosive effect on structural materials, its chemical stability in the application sphere concerned and — last but not least — its price.

Bearing the above factors in mind, we have examined several refrigerants that were likely candidates for a working medium. No material was found unequivocally optimal from all aspects, however, each evinced favourable and less advantageous properties, considered in the light of what has been stated above. Freon compounds, for instance,  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ ,  $F_{13}$ ,  $F_{14}$ ,  $F_{21}$ ,  $F_{22}$ ,  $F_{113}$ ,  $F_{114}$  and  $F_{142}$ , have the common advantage that in the temperature region concerned their pressure values are lower than, let us say, of ammonia or carbon dioxide. At the same time, following from the above, they have the common disadvantage that, with the sole exception of  $F_{12}$ , their condenser pressure in the coldest probable climates cannot always be kept above atmospheric, whereby the great advantage that could have been derived from the absence of vacuum in the entire system, is forfeited. The specific volume of freon compounds is higher than that of ammonia and with  $F_{12}$  the “ $n$ ” value, too, is considerably higher than with ammonia; in addition, the relationship between the heat of the fluid and the evaporation heat are correspondingly unfavourable.

Carbon dioxide which has many favourable properties [4], has a drawback in that its critical temperature is low ( $31^{\circ}$  C). This precludes isothermic heat exchange to take place, viz. makes the heat exchange essentially superfluous, rendering at the same time the installation of a binary vapour cycle unnecessary. Namely, carbon dioxide is by itself capable of performing the



complete cycle and taking advantage of the small specific volumes in the region of condensation. This, in turn, brings in its wake the considerable drawback that primary steam pressures will be very high. To achieve a thermodynamically acceptable cycle, pressures should essentially be kept between 600 and 800 atmospheres. This, of course, would present serious problems and difficulties in construction. The omission of heat exchange from the system is, no doubt, highly advantageous. This advantage manifests itself mainly in the costs of capital investment since the thermal gain derived from the absence of heat exchange — as explained above — is less than would seem without the above considerations.

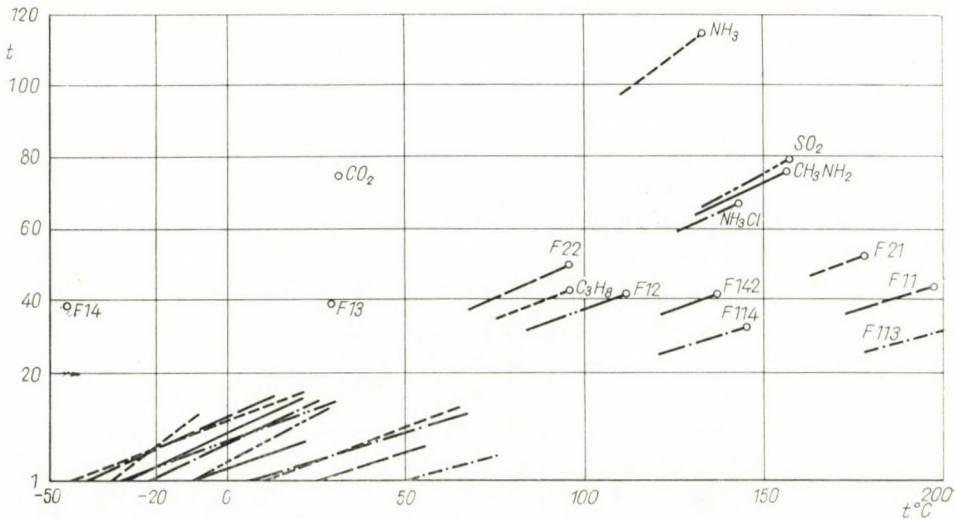


Fig. 11

Beside the above media, we have investigated into the properties of sulphur dioxide ( $\text{SO}_2$ ), methylamine ( $\text{CH}_3\text{NH}_2$ ), methyl chloride ( $\text{CH}_3\text{Cl}$ ), propane and propane derivatives, ethyl and ethyl derivatives, and various methyl derivatives.

Fig. 11 shows the  $p$ - $t$  chart of the most important media examined.\* Studying Fig. 11 in the light of the above-mentioned requirements, the number of suitable working media can be significantly reduced. If the numerical requirement for colder climates is that up to  $-20^\circ\text{C}$  temperature the working medium must have a saturation pressure above the atmospheric, then — as can

\* Fig. 11 does not include the actual  $p$ - $t$  diagrams of the media, only their critical points and their saturation temperatures in relation to 1 atmosphere pressure. The lines starting out from these points, even in the length as drawn out in the chart, do not illustrate the actual pattern of the  $p$ - $t$  curves. They were meant only to help establish the correlated values of any one of the media treated.

be seen from the diagram of Fig. 11 — only ammonia, methylamine, methyl chloride and  $F_{12}$  meet the case. G. VERES' dissertation referred to above will report on the findings of our investigations in greater detail. In the present paper, for the sake of clarity, I have included the diagram shown in Fig. 12, the illustration of the volumetric relationships of the likely media.

In the course of our investigations, ammonia was found the best working medium from most points of view — bearing in mind also that it is in fact the most frequently applied coolant in refrigeration engineering and one which is

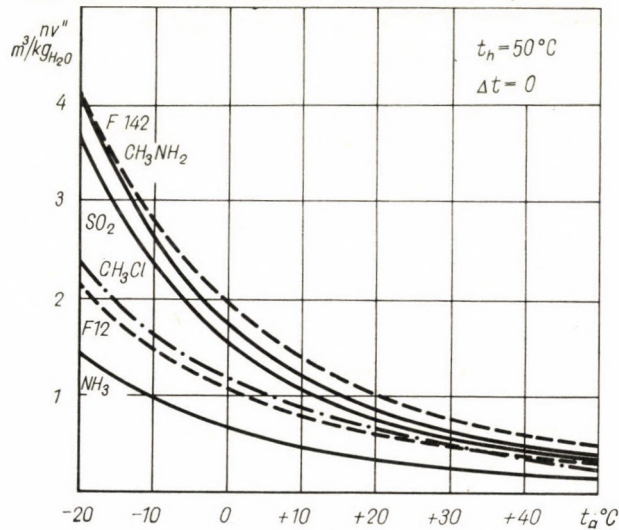


Fig. 12

unlikely to cause difficulties in operation in power engineering. Accordingly all numerical data in the following will refer to ammonia.

\*

The magnitude of the heat exchanger surface with ammonia as working medium is two thirds of the condenser surface of a machine of equal output. This finding is the result of optimization with due consideration to our assumptions (fuel cost, construction cost, etc.). In our calculations a heat exchanger was assumed in which ammonia boils in tubes under high pressure, while steam condensing at 1–2 atmospheres pressure fills the outer space. Under such circumstances the same 1–2 atmosphere pressure will act on the casing. With different conditions assumed, the result of optimization may also take a different shape, but not as to its order of magnitude. Since ammonia does not call for the use of special materials and its working temperatures are



low, the specific costs of the equipment are not likely to exceed the building costs of conventional condensers.

\*

As to its structural design, the cold-vapour turbine may be similar to the steam turbine known from practice, naturally with deviations — and sometimes considerable deviations — from the usual. Thus, for instance, to suit the volumetric conditions, which have changed by orders of magnitude, the stresses acting on the blades will substantially differ from the accustomed.

With most cold vapours the thermal build-up of the turbine and particularly the determination and arrangement of the stages show fundamental differences. Here, too, ammonia is favourable since the arrangement of its stages is nearest to that of the steam turbine. It may be said in general that the thermal build-up of an ammonia turbine fairly approximates that of its steam turbine counterpart.

In the system of optimum regenerative heating, on the other hand, principles completely different from steam turbine design must be followed. To give an unambiguous explanation, in Fig. 13 we have plotted the changes in state both in steam and in cold-vapour cycles, with a bleeding installed at  $T_e$  temperature. Selecting, for the purposes of illustration in the TS chart, the quantitative ratios in such a way that in both media the same moisture content ( $E$ ) represents the bleeding point, the thermal gain of regenerative heating with cold vapour is substantially higher than with the steam cycle. Owing to the fact that the ratio of evaporation heat to fluid heat is considerably smaller with cold vapour than with steam, the heating of feedwater with the same temperature difference will call for the extraction of a steam quantity essentially larger, specifically, in a cold-vapour cycle than in a steam cycle. This difference is shown conspicuously in the drawing in which the steam cycle is plotted with a full line, the cold-vapour cycle with dotted one. While the heat transmitted to the fluid in the steam cycle is proportional to the area encompassed by  $1\ 2\ 3\ 4$ , the heat proportional to the  $10\ 11\ 12\ 13$  area is required to attain the same temperature difference with cold vapour. At the same time, the area  $1\ 2\ 3\ 4$  is naturally equal to the heat quantity illustrated by the area  $5\ E\ 6\ 7\ 8\ 9$ , while the  $10\ 11\ 12\ 13$  area equals the  $14\ E\ 6\ 7\ 16\ 15$  area. From this interpretation it follows unambiguously that in a cold-vapour cycle the vapour extracted to preheat the fluid constitutes a substantially larger portion of the total quantity of vapour flowing across the turbine than in a steam cycle, which, ultimately, means that the thermal gain of regenerative heating achieved by bleeding is considerably higher in a cold-vapour cycle than in a steam cycle.

Hence it is obvious that to increase the number of bleedings in a cold-vapour cycle so as to improve thermal efficiency is more justified than in a steam cycle. Additional factors that may call for an increased number of bleedings are the materially lower specific volumes respectively the smaller volume of the vapour extracted.

The fact that the favourable effect of regenerative heating upon the thermal efficiency using cold vapour is greater than with steam permits the further raising of thermal efficiency. This possibility has existed so far in steam cycles,

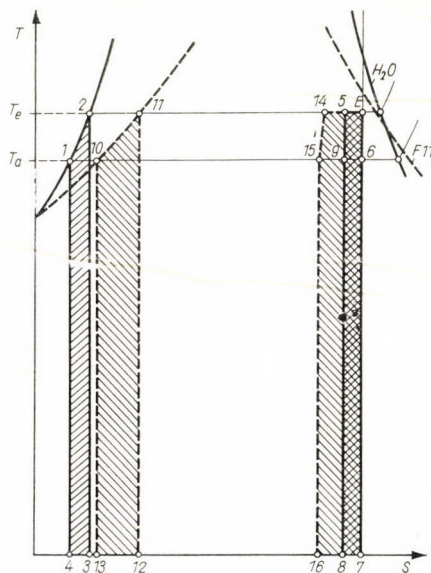


Fig. 13

but its significance was by far not as great as with cold vapours. The potentiality for improvement — to be described below — is naturally enhanced by the fact that with very high capacities even a minor efficiency increase may run into sizeable sums; so much so that for plants e.g. in the order of 1000 MW an improvement of no more than 1–2 per mil may be of very considerable importance and more justified than with much smaller capacities.

The essential features of the flow scheme for improved efficiency is as follows (see Fig. 14).

The number and location of the bleedings on the turbine for the purpose of regenerative heating, are determined by an optimum calculation carried out with due regard to the constructional characteristics of the turbine. Leaving the so determined number and location of bleedings unchanged it becomes possible — particularly in cold-vapour cycles — to further increase thermal efficiency, according to what has been stated above in connection with cold



vapours. Building a third one between two heaters heated by adjacent bleedings and letting this third heater get its heating steam by compression, in a steam jet compressor, steam extracted from the bleeding of lower pressure by a quantity of steam taken from the bleeding of higher pressure to an intermediate pressure value, then, to heat up the fluid from  $t_0$  to  $t_2$  temperature more steam would be extracted from the lower-pressure bleeding than before and less from the higher-pressure bleeding than before — whereby the sum of the two steam quantities remains practically unchanged (disregarding the negligible difference attendant the difference between the enthalpies),\* which means that thermal efficiency has increased. Fig. 14a shows the original scheme of the two heaters, Fig. 14b is the proposed modified scheme.

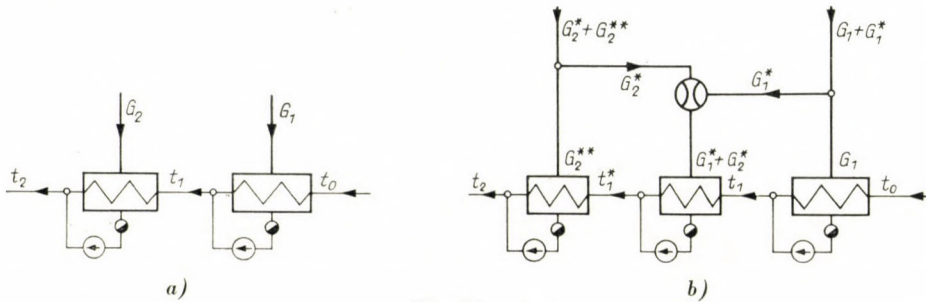


Fig. 14

A comparison of the drawings will clearly reveal that, since in both cases equal quantities of fluid\*\* were heated from  $t_0$  to  $t_2$  temperature, the total value of steam introduced cannot possibly change. Accordingly:

$$G_1 + G_2 = (G_1 + G_1^*) + (G_2^* + G_2^{**}).$$

Hence it follows that

$$G_2^* + G_2^{**} = G_2 - G_1^*,$$

i.e. the steam extracted from the higher-pressure bleeding ( $G_2^* + G_2^{**}$ ) is less than the quantity ( $G_2$ ) extracted by the bleeding of the same pressure in the original scheme, less obviously by the same value ( $G_1^*$ ) by which the steam extracted at the lower-pressure bleeding had grown. Consequently, the differential steam quantity ( $G_1^*$ ) yields more work, since it now expands to the lower-pressure and not to the higher-pressure bleeding point. Thereby the output increases and the cycle efficiency improves correspondingly.

This improvement is clearly seen in the cycle plotted in Ts-diagram (Fig. 15). The total heat transmitted to the fluid in the course of preheating is proportional to the area encompassed by 1 2 3 4 which, in the normal scheme, equals the 5 6 7 8 9 10 11 area. If now we wish to work according to the

\* This difference, by the way, is indicated in Fig. 15.

\*\* Neglecting the change taking place owing to increased efficiency.





The trend in the  $Ts$  diagram of the saturation limit curve with cold vapours (referred naturally always to "n" kg) will be flatter than with steam, whence obviously the vapour in the lower region of expansion will mostly have a higher moisture content than when steam is expanded. Accordingly, in cold-vapour cycles, care must generally be taken to remove the liquid during expansion. This involves an additional duty, compared to the conventional steam turbine construction.

\*

Another additional problem may be the structural development of the gland if, for instance, ammonia is applied for cold vapour because it offers advantageous possibilities for the evolution of the gland with liquid seal. Glands with liquid seal were in use already, mainly earlier, in steam turbines. Their application with ammonia as the working medium, has a twofold advantage. By using water as sealing liquid, the escape of toxic ammonia into the atmosphere can be prevented with complete safety, and ammonia loss may also be avoided by regaining the absorbed quantity from water by simple means.

(Whether or not the elimination of ammonia losses makes the installation of a regenerating equipment a worthwhile proposition must be determined by economy calculations.) This problem is of particular importance also because with cold vapours, primarily with ammonia, even the lowest pressure in the system exceeds the atmospheric.

\*

In binary vapour cycles, control has a paramount significance. This system namely makes it possible that vacuum should be entirely excluded from the system, as the saturation pressure, corresponding to the condensing temperature of an appropriately selected cold vapour even at the lowest probable ambient temperatures, exceeds that of the atmosphere. Since pressure, behind the steam turbine, can also be maintained above 1 atmosphere, at no point of the system will pressures below the atmospheric occur. This is a decisive advantage which permits to dispense with all equipments installed to keep up vacuum and brings not only sizeable savings in first costs but also simplifies operation.

The operational conditions determined for the rated output prevents vacuum from arising in the system. However, care must be taken to prevent vacuum also at loads below the rated, by an appropriately designed system of control. This is of particular importance because the determination of the outlet pressure of the steam turbine, considerably above the atmospheric, holds disadvantages, as is obvious from what has been said before, with decreasing load, the pressures automatically adapting to the new equilibrium

state on either side of the heat exchanger surface will decrease and so the pressure on the steam side may drop below 1 ata. Under such load conditions the regulation is called upon to prevent vacuum from arising in the system.

Interference by control will naturally result in losses. These, however, will be smaller than the advantage offered by the prevention of air ingress into the system. Not only can the installation and operation of air-extracting equipments be avoided but control also increases the efficiency of the heat exchanger and prevents the deterioration of heat transfer due to the penetration of air into the system.

Over and above the normal load governor which controls steam inflow as a function of output, a second control organ must be inserted to keep pressure on the ammonia side of the heat exchanger at a predetermined mini-

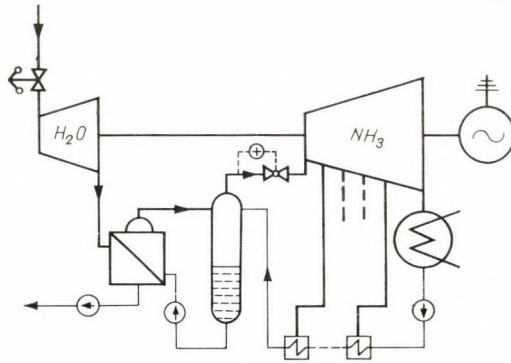


Fig. 16

imum level (Fig. 16). Should the load governor, on decreasing load, admit less steam into the turbine, the (outlet) pressure behind the turbine would correspondingly decrease and so would the pressure of ammonia vapour on the other side of the heat exchanger. Upon the effect of decreasing pressure, the regulator ahead of the ammonia turbine permits less steam to flow toward the ammonia turbine so as to maintain the pressure prevailing in the ammonia vapour space ahead of the regulator. This will prevent also the pressure on the steam side of the heat exchanger from dropping below a value so determined that it should always be above the atmospheric.

By way of example:

let us assume a condensing temperature of steam of  $110^{\circ}\text{C}$  at full load (with the corresponding saturation pressure in condensation), and an evaporation temperature of ammonia of  $104^{\circ}\text{C}$  (with the corresponding pressure of ammonia saturation on the other side of the surface). Should now the load decrease to 40 per cent and the load governor ahead of the steam turbine should correspondingly let less steam pass, then the regulator ahead of the ammonia turbine will let a correspondingly smaller quantity of steam pass, so as to keep pressure — naturally tending to decrease — at the preset value. The



characteristics of this regulator should be determined in such a way that with full steam flow it should keep ammonia pressure ahead of the regulator at the saturation pressure that corresponds to  $104^{\circ}\text{C}$  saturation temperature and that at the same time, with a quantity of vapour corresponding to 40 per cent load, keep this same pressure, so that, as a saturation pressure, it should correspond to  $99^{\circ}\text{C}$  saturation temperature. In this case the condensing temperature on the steam side will drop e.g. from  $110$  to  $102^{\circ}\text{C}$  temperature.

(Although this decrease would correspond to a 50 per cent temperature drop only, considering that simultaneously, with smaller temperature difference, the heat transfer coefficient on the ammonia side deteriorates considerably, the 50 per cent may also continue to decrease to, let us say, 40 per cent.)

Should, as a result of the optimum calculation, a temperature difference in the heat exchanger, in excess of  $5$  to  $10^{\circ}$ , seem more economical, then another regulation method would have to be chosen. With a greater temperature difference it would not be advisable (according to the above regulation) to increase the pressure of steam; it would rather be preferable to create a larger temperature gap by determining a lower pressure for the ammonia vapour. In such a case, on the other hand, the control system should be so designed as to maintain the steam pressure and not the pressure of the ammonia vapour above a certain minimum. This essentially means that the dimensions of the heat transfer area must be varied as a function of the changes in load. Two basic possibilities exist to achieve this:

In the first alternative the effective surface is so diminished that the removal of condensate arising on the steam side of the heat exchanger is slowed down so that the rising condensate should flood the appropriate portion of the cooling surface, cutting it out in this way from the heat transfer. Here the drawback is that the insertion of a separate water storage tank is needed and that the heat exchanger itself fills up with water and increases thereby very considerably in weight. This fact — in view of the vast dimensions required for very large outputs — may raise serious problems. At the same time, the control of the condensate pump may also impose a difficult task since, instead of the conventional level control, some other, obviously more complicated, solution must be found.

The scheme according to Figure 17 presents a simpler solution to the problem. The pressure of ammonia vapour is left freely to adjust to the load, but the pressure on the steam side is maintained at a predetermined lowest level. To achieve this the ammonia side of the heat exchanger surface is divided into several parallel sections whose inlet valves are operated by a pressure regulator controlled from the steam side in such a way that, upon decreasing steam-side pressure, the valves consecutively close while, upon the effect of rising steam-side pressure, they consecutively open. Thereby, under the lowest rate of load, only as large an evaporating surface remains active as ensures the

temperature difference required to keep the pressure on the steam side above atmospheric, i.e. temperature on this side remains at all times above  $100^{\circ}\text{C}$ .

Any one of the control systems here described will, by simple means, ensure that pressure relations, even under the smallest possible load acting on the machine, should not cause vacuum to arise at any point of the system.

The complementary control naturally increases losses by forcefully affecting the pressure relations which would otherwise automatically adapt to the momentary equilibrium state, and further boosts entropy increased by control. The increase in losses is however not significant, the more so as it brings cer-

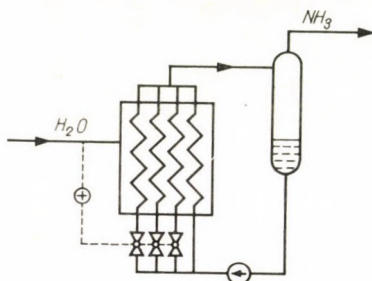


Fig. 17

tain improving effects in its wake. For instance, as functions of the absolute values of  $\Delta t$  and  $t_h$ , there is a limit value of load up to which the complementary regulation need not cut in. Pressure will namely adjust, by itself, on both sides of the heat exchanger, to a value depending on the quantity of steam (that is, without additional loss), and without the pressure on the steam side falling below the permissible value. Complementary control will consequently enter into operation only at and beyond this point. For instance, with the steam side pressure of the heat exchanger under full load rated at 1.5 atmospheres, on a 15 per cent drop in load, pressure will automatically attain 1.2 atmospheres a value still safely above the 1 ata. At the same time, by keeping the pressure of steam at e.g. 1.2 atmospheres as a minimum value, we may achieve the advantage that with further decreasing load the exit loss of the steam turbine will not continue to grow — in spite of the fact that the automatic adjustment of the steam side pressure to the new equilibrium state would otherwise cause a powerful increase.

And finally, the additional entropy increase caused by the complementary regulation is not an actual increment loss because simultaneously, in reaction as it were, the entropy increases arising from power regulation diminish, rendering the total increase insignificant.

Summing up all the above-mentioned factors it may be stated that the effect of the eventual losses is far smaller than the considerable gain achieved by the elimination of the vacuum from the system.



*Summing up*: Power demand steadily growing all over the world raises new problems in power station design. The main problems can be divided into the following three groups:

- a) the evolution of turbosets with good thermal efficiencies and very high unit capacities;
- b) the solution of the ever more stringent problems of cooling water supply by applying air-cooled condensation;
- c) the development of a power station cycle permitting to utilize the available thermodynamical potentials even in units of very high capacities to be erected in cold climates.

To satisfy these demands, the conventional power plant cycle must be fundamentally modified. Water, due to its well known thermophysical properties, is no longer suitable as an energy-carrying medium in turbosets of high unit capacities (1000 MW or above) and may be disadvantageous even in cases where the lower limit of the temperature region of the power plant cycle, thanks to ambient temperatures, can be maintained at a low level.

If the above criteria exist, the evolution of a power plant cycle would seem desirable in which water is used as energy carrier in the upper temperature region while in the lower a medium is applied whose volumetric and thermophysical properties are favourable both for machines of very high unit capacities and for the exploitation of the potentials inherent in low ambient temperatures. This twofold criterion is best met by the application of an appropriate coolant known from refrigeration engineering.

By a combined binary vapour power plant cycle turbosets of very high unit capacities can be developed while the use of air-cooled condensing equipments in which frost hazard is completely eliminated permits to utilize potentials, lying in low ambient temperatures, to satisfaction and at full safety.

Investigations carried on with ammonia as coolant [3] [5] have proved that the combined system — with high unit capacities — is economical for both first cost and heat consumption, and the problems, arising in the course of structural and thermal design and in the development of the control system, can be satisfactorily solved. There are naturally details to be elucidated but, as our investigations have so far borne out, no unsurmountable difficulties need be reckoned with.

#### REFERENCES

1. SCHRÖDER, K.: Aktuelle Probleme des heutigen Dampfkraftwerkbauens. Report at the VGB Session June 29—July 1, 1961; Vienna. "Dampfkraftwerke in siebten Jahrzehnt" — Brochure published by the Siemens-Schuckertwerke A. G., Erlangen 1962.
2. PHILIP, SPORN: The Prospects for Further Reductions of Losses in Capital, Fuel, Operation and Maintenance in Advanced Large Fossil Fuel Steam-Electric Power Systems. General Address No. 3. delivered at the Sectional Meeting of the World Power Conference, Lausanne; September 17, 1964.



3. VERES, G.: Igen nagy egységteljesítményekre alkalmas kombinált körfolyamat elemzése (An Analysis of Combined Cycle for Very Large Unit Capacities); Candidate's Dissertation, 1965.
4. Дехтярев, В. Л.: О создании углекислотной энергетической установки большой мощности и высокой экономичности. *Электрические станции* (1962), № 5, 2—6.
5. BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM ENERGIAGAZDÁLKODÁSI TANSZÉK (*Technical University of Budapest, Department for Energetics* : is-diagram ammoniára (NH<sub>3</sub>) 140 at nyomásig és 400° C hőmérsékletig [is chart for ammonia (NH<sub>3</sub>) up to 140 atmospheres and 400° C temperature] 1965.

## EIN NEUES KRAFTWERKSSYSTEM FÜR EINHEITSLEISTUNGEN IN DER GRÖSSENORDNUNG VON 1000 MW

L. HELLER

### ZUSAMMENFASSUNG

Der stürmische Anstieg des Energiebedarfs der Welt hat die Erbauer von Kraftwerken vor eine Reihe von neuen Problemen gestellt. Die mit dem Problemkomplex zusammenhängenden Hauptaufgaben können in drei Gruppen eingereiht werden:

a) Die Entwicklung eines Turbomaschinensatzes mit gutem thermischen Wirkungsgrad und außergewöhnlich hoher Einheitsleistung.

b) Die Beseitigung der mit der Kühlwasserversorgung zusammenhängenden, immer schwerwiegender werdenden Probleme durch die Anwendung der Luftkondensation.

c) Die Entwicklung eines solchen Kreisprozesses für Kraftwerke, der es ermöglicht, in den Gebieten mit niedriger Durchschnittstemperatur auch im Fall von außerordentlich großen Einheiten die potentiellen thermodynamischen Möglichkeiten auszunützen.

Im Interesse der Erfüllung obiger Forderungen muß der Aufbau des üblichen Kreisprozesses der Kraftwerke grundlegend verändert werden. Wegen seiner bekannten thermophysikalischen Eigenschaften ist das Wasser als Arbeitsstoff in Turbomaschinen mit sehr großer Einheitsleistung (1000 MW oder mehr) nicht geeignet. Wasser ist auch in solchen Fällen als unvorteilhaft zu betrachten, wo die untere Grenze des Temperaturintervalls des Kraftwerk-Kreisprozesses zufolge der Umgebungstemperaturverhältnisse auf niedrigem Niveau gehalten werden kann.

Bei Bestehen der obigen Anforderungen erscheint es zweckmäßig, einen solchen Kreisprozeß für Kraftwerke zu entwickeln, in welchem im oberen Temperaturbereich Wasser als Arbeitsstoff verwendet wird, während im unteren Temperaturbereich mit einem solchen Medium gearbeitet wird, dessen volumetrische Eigenschaften sowie die sonstigen thermophysikalischen Eigenschaften sowohl von dem Gesichtspunkt der Entwicklung von Maschinen mit großer Einheitsleistung, als auch dem der Ausnützung der potentiellen Möglichkeiten der niedrigen Umgebungstemperaturen aus günstig sind. Dieser zweifachen Bedingung kann zweckmäßig durch die Verwendung irgendeines aus der Kältetechnik bekannten, zweckentsprechenden Mediums Genüge getan werden.

Mit dem kombinierten Zweistoff-Kreisprozeß für Kraftwerke kann das Problem der Ausgestaltung von Turbomaschinen mit sehr großer Leistung gelöst werden, und durch die Anwendung der frostsicheren Luftkondensation können die bei niedriger Umgebungstemperatur sich ergebenden potentiellen Möglichkeiten mit großer Sicherheit ausgenützt werden.

Eingehende Untersuchungen über Ammoniak als Kühlmedium [3] [5] zeigen, daß das kombinierte System — bei großen Einheitsleistungen — sowohl in bezug auf die Investitionskosten, als auch auf den Wärmeverbrauch wirtschaftlich aufgebaut werden kann, und daß die Detailfragen in Zusammenhang mit dem konstruktiven Aufbau, der thermischen Ausbildung des Systems sowie mit der Regelung, zufriedenstellend gelöst werden können. Natürlich müssen noch zahlreiche Teilprobleme gelöst werden, aber wie die bisher durchgeführten Untersuchungen zeigen, muß mit dem Auftreten von unüberwindlichen Schwierigkeiten nicht gerechnet werden.



## UN NOUVEAU SYSTÈME DE CENTRALES THERMIQUES POUR PUISSANCES UNITAIRES DE 1000 MW

L. HELLER

### RÉSUMÉ

L'accroissement rapide des besoins en énergie a posé, dans le monde entier, une série de nouveaux problèmes aux constructeurs des centrales. Les principaux problèmes peuvent être groupés comme suit:

a° réalisations de turbo-groupes d'un bon rendement thermique et de puissance unitaire très élevée;

b° élimination des problèmes de plus en plus difficiles de l'alimentation en eau de refroidissement, par l'emploi de la condensation par air;

c° création d'un cycle thermique grâce auquel les possibilités thermo-dynamiques potentielles des territoires de basse température moyenne peuvent être mises à profit en cas d'unités très grandes.

Pour satisfaire ces exigences, il faut modifier à fond le cycle thermique usuel. En raison de ses caractéristiques thermo-physiques connues, l'eau en tant que porteuse d'énergie, ne saurait être utilisée dans les turbines de puissance unitaire très élevée (1000 MW et au-dessus), et doit être considérée aussi comme défavorable, quand la limite inférieure de l'intervalle de température du cycle peut être tenue à un niveau plus bas par suite des conditions de température ambiante.

Dans ces conditions, il paraît utile de créer un cycle où l'eau est utilisée comme porteuse d'énergie dans le domaine supérieur des températures, tandis que dans le domaine inférieur de celles-ci, on travaille avec une porteuse d'énergie dont les caractéristiques volumétriques et thermo-physiques en général sont favorables du double point de vue de la construction de machines de grande puissance unitaire, et de la mise à profit des possibilités potentielles de la basse température ambiante. Ces deux conditions peuvent être satisfaites par l'utilisation d'un réfrigérant convenable connu de la technique du froid.

A l'aide d'un cycle combiné à deux médiums, on peut résoudre le problème de la construction de turbines de très grande puissance unitaire. Par l'emploi de condensateurs par air, non sensibles au gel, on peut aussi utiliser en toute sécurité les possibilités potentielles offertes par les basses températures ambiantes.

Les études détaillées sur l'ammoniac utilisé comme réfrigérant [3], [5], ont montré qu'en cas de grandes puissances unitaires, le système combiné permet des économies portant en même temps sur les frais d'investissement et sur la consommation thermique, et que les problèmes de détail mécaniques, thermiques et de régulation peuvent être résolus d'une façon satisfaisante. Naturellement, de nombreuses questions de détail attendent encore leur solution, mais d'après les études déjà faites, des difficultés insurmontables ne sont pas à prévoir.

## НОВАЯ СИСТЕМА ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ С АГРЕГАТАМИ МОЩНОСТЬЮ 1000 МГВТ

Л. ХЕЛЛЕР

### РЕЗЮМЕ

Быстрый рост потребления энергии во всем мире поставил проектировщиков электростанций перед целым рядом новых проблем. Эти проблемы можно разбить на три группы основных задач.

а) Разработка сверхмощных турбоагрегатов с высоким термическим коэффициентом полезного действия.

б) Разрешение все более насущных проблем водяного охлаждения, путем применения воздушной конденсации.

в) Разработка такого циркуляционного процесса электростанций, который позволит использовать потенциальные термодинамические возможности в районах с низкой средней температурой, даже в случае сверхмощных агрегатов.

В интересах удовлетворения указанных выше требований, необходимо в корне изменить обычную схему циркуляционного процесса электростанции. Вода, как среда-энергоноситель, ввиду ее известных термодинамических свойств уже непригодна для того, чтобы ее использовать в качестве среды-энергоносителя в случае сверхмощных турбоагре-

гатов (мощностью 1000 мвт или выше), и ее можно считать непригодной также в тех случаях, когда нижний предел интервала температур циркуляционного процесса электростанции из-за условий окружающей среды можно поддерживать на более низком уровне.

При существовании упомянутых выше требований кажется целесообразным работать такой циркуляционный процесс электростанции, при котором в верхнем диапазоне температур в качестве энергоносительной среды используется вода, в нижнем же диапазоне температур используется такая среда, изменения объема которой и, соответственно, прочие термодинамические свойства выгодны как с точки зрения оформления сверхмощных машин, так и с точки зрения использования потенциальных возможностей низких температур окружающей среды. Это двоякое требование можно целесообразно удовлетворить применением какого-либо подходящего и известного из техники охлаждения хладагента.

При использовании для процесса циркуляции электростанции двух сред можно решить вопрос конструирования сверхмощных турбогенераторных агрегатов, а применением морозостойких устройств воздушной конденсации с большой надежностью можно использовать потенциальные возможности, появляющиеся в случае низких температур окружающей среды.

Детальные исследования, проведенные с аммонием в качестве хладагента, показывают, что в случае комбинированной системы охлаждения при условии использования сверхмощных турбогенераторных агрегатов можно удовлетворительно решить постройку и конструктивное оформление, термическую систему, а также частные проблемы регулирования, как с точки зрения капитальных затрат, так и с точки зрения потребления тепла. Естественно, необходимо решить еще ряд частных проблем, но как это показывают проведенные до сих пор исследования, нет необходимости опасаться нерешимых затруднений.



# ÜBER ASYNCHRONMASCHINEN MIT EINACHSIGEM LÄUFER

K. P. KOVÁCS

KORRESP. MITGL. DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 17. November 1964]

Es werden die Brems- und Anlaufeigenschaften von Schleifringläufermaschinen mit einachsig kurzgeschlossener Läuferwicklung untersucht. Es wird für diese Schaltung gezeigt, daß durch Einsetzen von Ständerwiderständen günstige Brems- und Anfaheigenschaften erreicht werden können. Diese Schaltung scheint bei dem Selbstanlauf von Synchronmotoren (ohne — oder mit wenig Dämpfung bei kurzgeschlossener Erregerwicklung) sehr günstig anwendbar zu sein. Die Asynchronmaschine kann in dieser Schaltung auch als spezielle Bremsmaschine oder Momentgeber angewendet werden.

## I. Einleitung

In neuerer Zeit haben sich mehrere Aufsätze mit Asynchronmaschinen mit asymmetrischem Läufer befaßt [1, 2]. Dabei gingen einige dieser Aufsätze von einer Ersatzschaltung aus, welche aus der einschlägigen Literatur

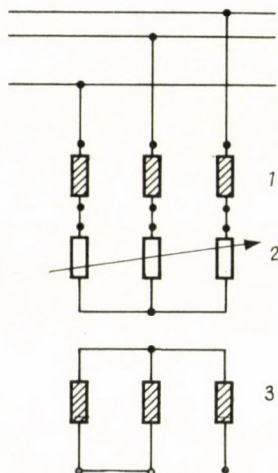


Bild 1. Die Schaltung des dreiphasigen Asynchronmotors mit einachsigem Läufer (1 Ständer; 2 Anlaßwiderstand im Ständerkreis; 3 Läufer einachsig kurzgeschlossen)

bekannt ist [3] und welche es gestattet, die Mit- und Gegenströme des Ständers im Läuferkoordinaten zu erfassen.

Im Bild 1 wird die von uns untersuchte Schaltung aufgezeichnet. Wie es aus der Abbildung erhellt, handelt es sich um einen Schleifringläufer, wo zwei

Schleifringe kurzgeschlossen sind, und die dritte Wicklung offen bleibt. Um günstige Anlauf- und Bremsverhältnisse in der Umgebung von  $s = 1$  bzw. bei  $s \geq 1$  zu erhalten, wird im dreiphasigen Ständerkreis der Maschine ein dreiphasiger symmetrischer Regelwiderstand mit angeschlossen.

## II. Gleichungen der Maschine

Im Bild 2a haben wir die Ersatzschaltung der Mit- und Gegenströme, des Ständers im Läuferkoordinaten aufgezeichnet. Im Bild 2a kann  $Z_q$  mit sehr guter Näherung (da  $s \geq 1$  ist) mit

$$\bar{Z}_q = jX_\sigma + \frac{R_r}{s} \quad (1)$$

ersetzt werden, wo

$$X_\sigma = X_{sr} + X_{r\sigma}$$

für die Gesamtstreuung gesetzt wurde.

Die Impedanz  $\bar{Z}_d$  kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\bar{Z}_d = j(X_{sr} + X_m), \quad (2)$$

indem eine der Läuferphasenwicklungen offen ist.

Da wir den Fall  $s \geq 1$  untersuchen wollen, und nachdem  $\bar{Z}_d \gg \bar{Z}_q$  ist, kann als erste Näherung praktisch

$$\bar{Z}_d = \infty \text{ gesetzt werden.}^*$$

Im Bild 2b wurde die Ersatzschaltung für  $\bar{i}_1$  und  $\bar{i}_2$  bei der angenommenen Vereinfachung für  $s = 1$  gezeichnet. Wie aus dem Bilde ersichtlich ist, wird

$$\bar{i}_1 = \bar{i}_2, \quad (3)$$

und die Luftspaltleistung der Maschine beträgt für das Mitfeld

$$P_{l1} = 3 I_1^2 (2 R_r + KR_s) \quad (4a)$$

und für das Gegenfeld

$$P_{l2} = 3 I_1^2 KR_s. \quad (4b)$$

Für die volle Luftspaltleistung kann gesetzt werden:

$$P_l = P_{l1} + P_{l2} = 6 I_1^2 (R_r + KR_s). \quad (5)$$

Angenommen, daß  $R_r \cong R_s$  ist, wird die Luftspaltleistung

$$P_l = 6 I_1^2 R_r (1 + K). \quad (6)$$

\* Bei der Berücksichtigung des Magnetisierungszweiges sollen die später berechneten Drehmomente bei normalen Maschinen um etwa 20% vermindert werden.



Wir drücken auf Grund des Bildes 2b den Strom aus:

$$\bar{I}_1 = \frac{U_s}{2(R_r + KR_s) + 2jX_\sigma} = \frac{U_s}{2} \frac{1}{R_r(1 + K) + jX_\sigma} \quad (7)$$

oder mit  $R_r/X_\sigma = s_K$  (Kippschlupf):

$$\bar{I}_1 = \frac{U_s}{2X_\sigma} \frac{1}{s_K(1 + K) + j} \quad (8)$$

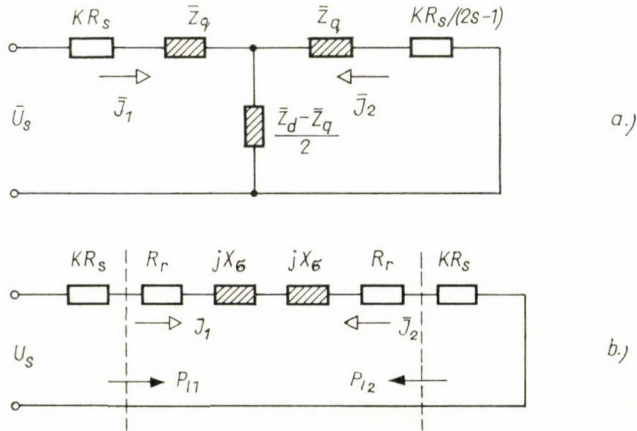


Bild 2. Ersatzschaltung für die Bestimmung der Ständer-Komponentenströme  $I_1$  und  $I_2$ . Alle Größen sind in Läuferkoordinaten

(a) genaue Schaltung; b) vereinfachte Schaltung bei  $s = 1$  mit Weglassung der Magnetisierungsbranche

und

$$I_1^2 = \frac{U_s^2}{4X_\sigma^2} \frac{1}{1 + s_K^2(1 + K)^2} \quad (9)$$

Durch Einsetzen von Gl. (9) in (6) wird die Luftspaltleistung:

$$P_l = \frac{3U_s^2}{2X_\sigma} \frac{s_K(1 + K)}{1 + s_K^2(1 + K)^2} \quad (10)$$

oder das Drehmoment bei  $s = 1$  (Anlaufmoment)

$$M_A = \frac{3U_s^2}{\omega_1 2X_\sigma} \frac{s_K(1 + K)}{1 + s_K^2(1 + K)^2} \quad (11)$$

Wir berechnen das Höchstmoment bei  $s = 1$  in Abhängigkeit von  $(1 + K)$ , indem  $\partial M_A/\partial(1 + K) = 0$  gesetzt wird:

$$s_K^2(1 + K)^2 + 1 - (1 + K)s_K^2 2(1 + K) = 0,$$

woraus

$$1 = s_K^2(1 + K)^2$$

und

$$(1 + K)_{\max} = \frac{1}{s_k}, \quad (12)$$

oder dieser Wert in Gl. (11) gesetzt:

$$M_{A \max} \cong \frac{3 U_s^2}{\omega_1 2 X_\sigma} \cdot \frac{1}{2} = \frac{M_K}{2}. \quad (13)$$

Es ist zu ersehen, daß die Maschine im Stillstand bei der angegebenen Schaltung als Höchstmoment die Hälfte des motorischen Kippmomentes ausüben kann.

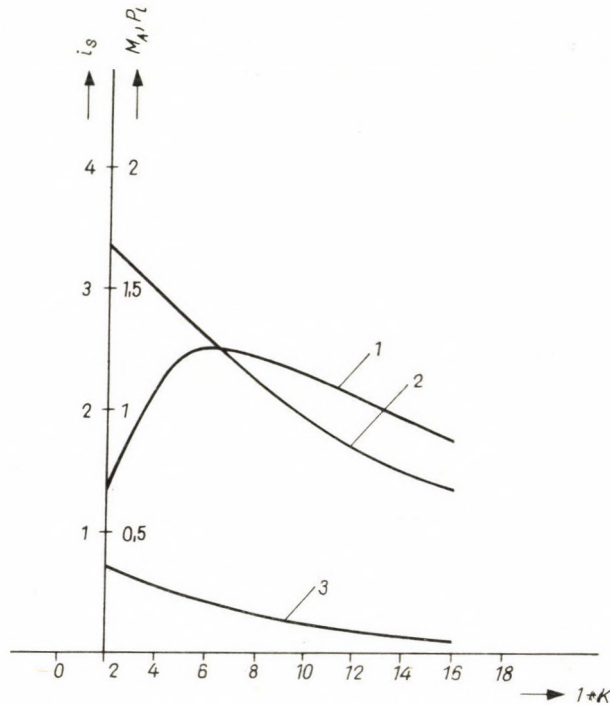


Bild 3. Verlauf der Momenten- und Stromgrößen in Funktion des variablen Ständerwirkwiderstandes

(1 Anlaufmoment bei  $s = 1$ ; 2 Anlaufstrom:  $I_s = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$ ; 3 Läuferstromwärmeverlust. Alle Werte in rel. Einheiten. Für die Deutung von  $K$  siehe Bild 2)

### III. Zahlenbeispiel

Im Bilde 3 haben wir  $M_A$  als Funktion von  $(1 + K)$  für eine Maschine mit  $u_s = 1$ ,  $x_\sigma = 0,2$  und  $s_K = 0,15$  aufgezeichnet.

Nachdem in rel. Einheiten

$$m_A = \frac{u_s^2}{2 x_\sigma} \frac{s_K (1 + K)}{1 + s_K^2 (1 + K)^2}$$



ist, und mit  $u_s^2/2 x_\sigma = m_K = 1/0,4 = 2,5$  wird das Anlaufmoment

$$m_A = 2,5 \frac{0,15(1+K)}{1+0,15^2(1+K)^2} = 16,7 \frac{1+K}{44,5+(1+K)^2} .$$

Im selben Bilde wurde auch die Ständerstromstärke als Funktion von  $(1+K)$  angegeben.

Bei der Bestimmung der Stromstärke haben wir auf Grund der Gl. (8) für  $i_1$  in rel. Einheiten das Folgende erhalten:

$$i_1 = \frac{u_s}{2 x_\sigma} \frac{1}{\sqrt{1+(1+K)^2 s_K^2}} . \tag{14}$$

Da  $i_1 = i_2$  ist, sind wir so vorgegangen, als ob die Maschine ganz langsam sich drehen würde ( $s \approx 1$ ). In diesem Falle sind die Frequenzen der beiden Komponentenströme schon verschieden, da die Frequenz von  $i_1$  immer gleich 50 Hz ist, und die Frequenz von  $i_2$ ,  $(2s - 1) \cdot 50$  Hz gleichkommt. So kann für  $i_s = \sqrt{i_1^2 + i_2^2}$  gesetzt werden, wenn für die Gesamtstromstärke die äquivalente Erwärmung (verursacht durch  $i_1$  und  $i_2$  gemeinsam) maßgebend angenommen wird. Aus dem Bilde 3 ist klar zu entnehmen, daß mit dieser Schaltung gegenüber Kurzschlußläufermaschinen sehr günstige Anfahr- bzw. Bremseigenschaften erzielt werden können, da bei ungefähr 1,6fachen Ständerstrom das Nennmoment erzielt wurde.

Ein Kurzschlußmotor mit denselben Eigenschaften muß einen hochohmigen Läufer besitzen, wobei die Wärmeverluste (bei Nennmoment und  $s = 1$  die volle Nennleistung) selbst im Läufer entstehen und von dort abgeführt werden müssen, was zu einer Überdimensionierung der Maschine führt. Im Bilde 3 haben wir zum Vergleich die Läuferstromwärmeverluste für die einachsige Schaltung auch angegeben.

Eine solche Spezialmaschine kann vorteilhaft nur als Brems- oder Momentgebermotor für Steuerungszwecke in Betracht kommen.

Wir haben uns absichtlich nur dem Fall zugewendet, bei dem die Maschine als Momentgeber mit ganz niedrigen Umlaufzahlen fährt, oder als Bremsmaschine der Schlupf  $s > 1$  wird.

Bei höheren Tourenzahlen im Motorbetrieb machen sich die Pendelmomente schon unangenehm bemerkbar. Aus diesem Grunde kann der Motor mit einachsigem Läufer nur in einem solchen Drehzahlbereich ruhig arbeiten, wo die Pendelmomente, die von Frequenz  $2sf_1$  sind, von den Umlaufmassen noch abgedämpft werden.

Es soll noch nachdrücklich betont werden, daß das oben angeführte Verfahren, wonach das Drehmoment einer Dreiphasenmaschine mit einachsigem Kurzschlußläufer durch Einsetzen von Ständerwirkwiderständen bis zum Nennmoment ohne weiteres erhöht werden kann, bei dem Anlauf von Syn-

chronmotoren, ohne oder — mit wenig Dämpfung, sehr günstig angewendet werden könnte.

Ausgedehnte Versuche haben die oben angeführten Eigenschaften der Asynchronmaschine mit einachsiger, niederohmiger kurzgeschlossener Läuferwicklung und mit dreiphasigem Regelwiderstand im Ständerkreis, vollzählig bestätigt.

#### SCHRIFTTUM

1. BAUSCH, H.—JORDAN, H.—LORENZEN, H. W.: Anlauf von Reluktanzmotoren mit geblechtem Läufer. *ETZ-A* **85** (1964), H 6.
2. KOVÁCS, K. P.: Über Asynchronmaschinen mit asymmetrischem Läufer. *Archiv f. Elektrotechnik* **49** (1964), 190—202.
3. CONCORDIA, Ch.: Synchronous Machines. J. Wiley, New York 1951.

#### ASYNCHRONOUS MACHINES WITH ONE-AXIS ROTOR

K. P. KOVÁCS

#### SUMMARY

The author investigates the braking and starting characteristics of slip-ring motors where one rotor phase is short-circuited. He shows that with this connection, by the aid of starting resistances in the stator, favourable braking and starting characteristics can be attained. It seems that this connection could be used well for the self-starting of synchronous motors where there are no, or very few, damping windings. In such a connection the asynchronous machine could also be used as a special braking machine or as a torque motor.

#### SUR LES MACHINES ASYNCHRONES AVEC ROTOR A UN AXE

K. P. KOVÁCS

#### RÉSUMÉ

L'auteur examine les caractéristiques de démarrage et de freinage des rotors à bague avec enroulement en court-circuit monophasé. Dans ce montage, l'emploi de résistances de démarrage dans le stator donne des caractéristiques favorables au démarrage et au freinage. Ce montage semble pouvoir être utilisé avantageusement au démarrage autonome de moteurs synchrones n'ayant pas ou n'ayant que très peu de spires d'amortissement. Dans cette connection, la machine asynchrone peut aussi s'utiliser comme machine de freinage spéciale ou comme moteur de torque.

#### ОБ АСИНХРОННЫХ МАШИНАХ С ОДНОВАЛЬНЫМ РОТОРОМ

К. П. КОВАЧ

#### РЕЗЮМЕ

Автор исследует пусковые и тормозные свойства однофазно короткозамкнутых двигателей с контактными кольцами. Показано, что при данной схеме с помощью сопротивлений в статоре, можно добиться выгодных пусковых и тормозных свойств. Кажется, что эта схема может быть выгодно использована при пуске таких синхронных двигателей, у которых или совершенно не имеется демпферной обмотки или же очень мало ее. Асинхронный двигатель при данной схеме можно применять в качестве специальной тормозной машины или двигателя момента.



# THE HOT-WIRE ANEMOMETER

L. S. G. KOVÁSZNAY

PROFESSOR OF AERONAUTICS

THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY BALTIMORE-MARYLAND, U. S. A.

[Manuscript received November 6, 1964]

The principal tool of experimental turbulence research is the hot-wire anemometer. The heat loss laws that govern the static response of the wire are given both for low and high speed flow. The fluctuation sensitivities are the key to the interpretation of turbulence measurements. The electrical circuitry, both constant current and constant temperature, are described, and finally the interpretation of the measurements in light of "fluctuation diagrams" is treated. Historical references and extensive bibliography have been added.

## I. Introduction

The phenomenon of turbulence plays a rather important role in fluid mechanics. It appears that all flow configurations containing solid boundaries become turbulent above a finite critical Reynolds number. Theoretical considerations also indicate that the basic nonlinearity of the governing hydrodynamic equations is necessary in producing turbulence.

In the past, the different theoretical approaches to the problem of turbulence always have contained a few heuristic elements, so the role of experimentation has been quite important. This is in contrast to many other branches of applied mechanics where experimentation is needed more to verify or disprove theories than to explore for "inspiration".

The subject of our present discussion is a survey of the principal measuring technique now in use to discover both the general properties and the detailed dynamic structure of turbulent flows. In a short article we must confine our attention to the method itself, and we shall not deal here with experimental results. Of all the instruments the most important tool is undoubtedly the hot-wire anemometer. Other instruments and measuring methods have been considered [18, 42, 47], but so far none of them presented a serious challenge. It may be of some interest to mention here that the hot-wire anemometer as an instrument to measure mean velocity is exactly fifty years old, if one considers L. V. KING's [37] classic paper in 1914 as its beginning. Also it may be mentioned that in the same year, I. SCHRODT wrote a doctoral thesis on the same subject in Budapest [77] giving empirical calibration "maps" on the heat loss of a thin wire used as an anemometer.

The hot-wire anemometer as an instrument to measure rapid turbulent velocity fluctuations is only thirty-six years old, dating from the invention of electronic thermal lag compensation by DRYDEN and KUETHE in 1928 [25] that permitted the extension of the useful frequency response by one or two orders of magnitude.

From the late nineteen-thirties, the hot-wire anemometer became the principal tool of turbulence research, but it must be stated right away that it is far from being an ideal instrument. Nevertheless, most of the reliable experimental information we have on turbulence has been obtained with it. All the other methods have given only indications that they may supply information that is not in disagreement with the hot-wire data.

## II. Operating Principle

A thin metallic wire (typical diameter  $0,0001 \div 0,001$  cm, typical length,  $0,05 \div 0,5$  cm, material is usually platinum, or tungsten or some other metal) is heated by an electric current (typically  $20 \div 200$  mA) above the ambient temperature of the air ( $10^\circ \div 500^\circ \text{C}$ ). In a steady state, the thermal equilibrium of the wire represents a relationship between the electrical variables such as temperature (electric resistance) attained and the heating current imposed, and the flow variables, such as air temperature, air density, air velocity. This functional relationship can always be determined, at least in principle, by a detailed static calibration. Fortunately, the functional form of this relationship is reasonably well-known and when expressed in terms of non-dimensional variables it is quite reliable. For turbulence measurements this is also of a practical consequence: since the functional form of the law is known, one needs to determine only a few numerical constants and there is no need to prepare detailed calibration "maps" by varying several variables.

It must be emphasized again that in general the hot-wire anemometer is not a good instrument to measure mean velocity or mean temperature since the sensitivity and reproducibility are both inferior to those of other conventional instruments. The pitot-tube liquid manometer combination for mean velocity measurement and the shielded thermocouple for temperature measurement are both far superior to hot-wire probes. Fig. 1 shows the difference between the two methods. The only exceptions where the hot-wire is superior to these even for mean velocity measurements are on one hand measurements at very low velocities ( $5 \div 50$  cm/sec) and on the other hand measurements in thin shear layers where the small physical dimension of the hot-wire represents less disturbance than even a flattened hypodermic tube. The unique advantage of the hot-wire is its fast time response, and the simple fact that by using electronic thermal lag compensation its transient response can be



made adequate up to very rapid fluctuations both in velocity and in temperature. In this respect the hot-wire anemometer is even more satisfactory than most microphones (because it is also quite small). It is a further advantage, that if the static thermal equilibrium of the heat wire is disturbed by changing the velocity or the temperature, the transient response obeys a very simple differential equation.

The hot-wire anemometer as a measuring instrument is used essentially in one or the other of two principal modes of operation. If the heating current of the wire is kept constant and the variations in wire temperature are detected as fluctuations in the voltage drop across the wire, this is called constant current operation. Thermal energy is absorbed in the mass of the wire and is released again according to the fluctuating heat transfer rate, and of the wire's thermal capacity.

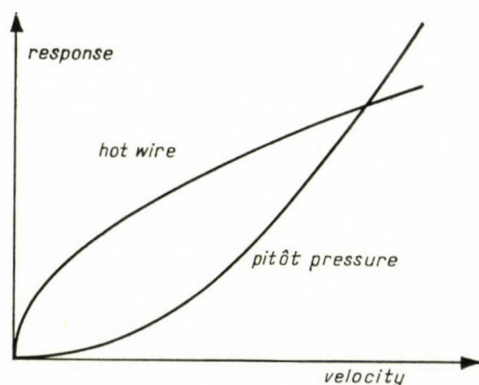


Fig. 1. Comparison of the hot-wire anemometer and the Pitot-tube for measurement of mean velocity

The other important mode of operation is the constant temperature feedback system first proposed by ZIEGLER [107], later by WESKE [98] and analyzed in detail by OSSOFKY [67]. In that case, an approximately constant wire temperature is maintained at all times, therefore the thermal lag is made non-operative.

Both systems, the constant current system with electronic compensation (open loop) and the constant temperature, negative feedback system (closed loop) have different merits and the preference of one over the other is dependent upon the particular application.

### III. Heat loss laws

The sensitivity of the hot-wire anemometer to velocity fluctuations and to air temperature fluctuations depends on the partial derivatives of the heat loss function with respect to these flow variables. The first systematic

study of the heat loss, both theoretically and experimentally was made by L. V. KING [37]. He has found that the heat loss  $H$  is approximately proportional to the temperature difference between air and wire and that it is a linear function of the square root of the mass flow, the velocity-density product:

$$H = (T_w - T_e)(a\sqrt{\rho U} + b). \quad (1)$$

Fig. 2 shows the typical calibration curve of a hot-wire in low speed flow. For higher velocities (Reynolds numbers), the heat loss is still a linear function of the square root of the velocity although the constants may change discontinuously at  $Re = 10$  and at  $Re = 40$ , corresponding to known changes in the flow pattern around cylinders.

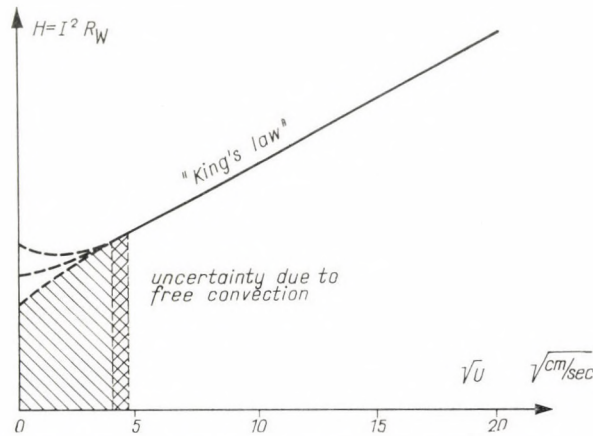


Fig. 2. Typical heat-loss dependence on mean flow velocity. Free convection varies according to wire orientation (horizontal or vertical)

Later works have extended our knowledge in different directions. On the theoretical side, most recently, TOMOTIKA [89] has recomputed the low Reynolds number case in incompressible flow. Compressibility effects have been of obvious interest. The first theoretical paper was by TSIEN and FINSTON [92], later ones by WU, COLE and ROSHKO [104, 10, 11], and independently by TCHEN [88]. Experimental work to extend the validity of the heat loss formulae to compressible regime was first reported by LOWELL [56] using rather thick wires intended primarily for measuring mean flow at transonic and supersonic Mach numbers. KOVÁSZNAY and TÖRNMARCK [43, 44], found that for supersonic flow, the heat loss data, if presented in a particular form became independent of the Mach number. This correlation was obtained when the stagnation viscosity and heat conductivity were used to form the non-dimensional variables. The entire transonic and supersonic range was also measured by SPANGENBERG [84] and a very careful detailed measurement of the supersonic



heat loss was done by McCLELLAN [50, 60]. By using nondimensional variables, one can represent the supersonic results in a rather simple form [43, 44]:

$$H = (T_w - T_e) k_0 \left( A \sqrt{\frac{U \rho d}{\mu_0}} - B \right) \left( 1 - C \frac{T_w - T_e}{T_0} \right). \quad (2)$$

With the introduction of the nondimensional variables  
[the Reynolds number

$$\text{Re} = U \rho d / \mu_0,$$

the Nusselt number

$$\text{Nu} = H / w_1 (T_w - T_e) k_0,$$

the temperature loading

$$\tau = (T_w - T_e) / T_0]$$

we find that the Nusselt number is a linear function of the square root of the Reynolds number, and it is independent of the Mach number as long as the flow is truly supersonic:

$$\text{Nu} = (A \sqrt{\text{Re}} - B) (1 - C \tau). \quad (3)$$

This fact greatly simplifies the evaluation of supersonic hot-wire data.

Slip flow and free molecular flow effects both become important for the wire much before they become important for the wind tunnel as a whole since the wire diameter is so small compared to the rest of the apparatus. BALDWIN [2], COLLIS [12, 13, 14], and STALDER et al. [85] have done the important works. Hypersonic boundary layer flow was probed by the hot-wire by DEMETRIADES [20]. Relatively new data on the transonic behavior of hot-wires, including nonlinear behavior with temperature difference (overheating ratio  $\tau$ ) are reported by STINE and WINOVICH [87, 99].

On the opposite end of the scale, the validity of King's law at very low velocities is affected by free convection. In connection with this aspect of hot-wire application, MAHONY [58], SIMMONS [83] and VAN DER HEGGE ZIJNEN [95] should be mentioned. Using the hot-wire at very high temperature (GLAWE [35]), brings in a re-examination of the temperature dependence of heat loss. The use of the hot-wire in other media, especially in water, was explored by some workers. This idea, however, was not pursued yet to a degree of perfection comparable with that attained in air. RICHARDSON's early work [71], then STEVENS and BORDEN [86] and PATTERSON [68] have all reported on this application.

If the wire is not normal to the flow, the heat loss further depends on the angle of attack,  $\Phi$  (defined as the angle between the wind velocity and the plane normal to the wire). As a rough approximation, the velocity component

normal to the wire can be taken as the effective velocity  $U_{\text{eff}}$  to be substituted in King's formula (equ. 1).

$$U_{\text{eff}}(\Phi) = U \cos \Phi. \quad (4)$$

Detailed measurements modify this somewhat naive picture and GAUDFERNAU [32, 33] and SANDBORN and LAURENCE [76] have more up-to-date information.

Recently, WEBSTER [97] after taking careful measurements proposed a formula (attributed to HINZE),

$$U_{\text{eff}}^2(\Phi) = U^2(\cos^2 \Phi + a \sin^2 \Phi) \quad (5)$$

with the constant  $a = 0,2$ .

The presence of a solid wall near the wire naturally changes the heat loss. This effect is quite important when measuring in a boundary layer close to the wall. The simplest way one can guess the effect is by the use of images. PIERCY and RICHARDSON [69, 72] give details on this subject. Other spurious effects such as humidity in the air were also considered (SCHUBAUER [78]).

#### IV. Fluctuation Sensitivity

The principal use of the hot-wire anemometer is to measure turbulent velocity and temperature fluctuations whose magnitude may vary from very large down to extremely small values.

While at high turbulence level, the principal problem is linearity, at low turbulence level, the limiting factor is the background random noise of the electronic equipment. The hot-wire and its associated electronic equipment

Table I

Flow type	Turbulent velocity fluctuations in % of the local mean velocity	
Turbulent jet	30 ÷ 60%	
KÁRMÁN vortex street	5 ÷ 15%	
Turbulent boundary layer	4 ÷ 10%	
Turbulent wake	2 ÷ 5%	
Grid turbulence (nearly isotropic)	0,3 ÷ 2,0%	
Background turbulence in wind tunnels	poor	0,1 ÷ 0,5%
	good	< 0,05%



has an overall dynamic response to fluctuations in all variables (velocity, temperature, heating current). The details of this dynamic response depend of course on the type of circuit used.

The heat balance of the wire can be written as

$$\frac{dE}{dt} = W - H \quad (6)$$

(for the steady case, simply  $W = H$ ). Where  $E = C'T$  is the heat energy stored in the wire and  $W = I^2R_w$  is the heat input (Joule heating). The thermal capacity when divided by the mean heat transfer rate gives a quantity with dimension of time: this is  $M$  the thermal time constant. The transient response at the particular operating point obeys the relatively simple differential equation

$$T_w + M \frac{dT_w}{dt} = T_{st}(I, U, \rho, T_e) \quad (7)$$

where  $T_w$  is the instantaneous temperature of the wire, and it obeys a simple first order linear differential equation with  $T_{st}$  as the temperature, the wire would have attained if it responded instantly according to its static calibration calculated from equation (1) and  $W = H$ . It is clear from equation (1) that electronic compensation of the thermal lag is relatively easy. It consists of adding to the hot-wire signal a certain amount of its first time derivative, the "certain amount" is given by the time constant.

In most practical cases, the d. c. voltage drop across the hot-wire is of the order of  $0,5 \div 1$  volt. When the heating current is constant the voltage fluctuations caused by the velocity fluctuations are of the order of  $1 \div 5$  millivolts for a turbulence level of one per cent (using a typical overheating ratio). As turbulence levels of  $0,02 \div 0,1\%$  may occur in the free stream of a low turbulence tunnel, hot-wire signals as low as  $50 \div 100$  microvolts are not unusual.

The hot-wire also responds to temperature fluctuations as would any resistance thermometer. The relative sensitivity for velocity and for temperature fluctuations varies quite markedly with change of the overheating ratio (typically in ratio 1 : 10 over the practical range) and this feature makes possible the separation of the velocity and temperature fluctuations both in heated low speed flows (CORRSIN [16, 17]) and in supersonic flows (KOVÁSZNAY [44, 46]). For constant heating current the hot wire response can be given as follows: The potential fluctuations across the wire

$$\delta e + M \frac{d\delta e}{dt} = \delta e_{st} = F \delta U + G \delta T \quad (8)$$

with the sensitivity constants

$$F = \frac{IR_w a_w Z}{2U}, \quad (9)$$

with

$$Z = \frac{1}{1 + \sqrt{U_{0/U}}} = \frac{I^2 - I_0^2}{I^2}; \quad (10)$$

$$G = \alpha R_f I, \quad (11)$$

with

$$\alpha R_f = \frac{dR_w}{dT_w}. \quad (12)$$

The time constant of the wire

$$M = \frac{na_w}{I^2}. \quad (13)$$

If the current is not exactly constant because the effective source impedance  $Z_s$  of the heating circuit is finite, there will be a slight negative feedback and the sensitivity constants  $F$  and  $G$  will be reduced by a factor

$$E = \frac{1 - \varepsilon}{1 + 2a_w \varepsilon}, \quad (14)$$

where

$$\varepsilon = \frac{R_w}{Z_s + R_w}. \quad (15)$$

The time constant  $M$  is also reduced by a factor  $(1 + 2a_w \varepsilon)^{-1}$ . For more details consult [47].

The output signal of a constant temperature circuit is the heating current  $I$  (or a voltage proportional to it, e.g. the voltage across the resistance bridge)

$$I^2 = I_0^2 \left( 1 + \sqrt{\frac{U}{U_0}} \right). \quad (16)$$

By logarithmic differentiation, one obtains the fluctuation sensitivity

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{Z}{4} \frac{\delta U}{U} \rightarrow \frac{1}{4} \frac{\delta U}{U} \quad (17)$$

where  $Z$  is given by (10). (And for high velocities  $Z \rightarrow 0$ .)

While the constant temperature circuit is quite convenient to measure velocity fluctuations, it is not well suited to measure temperature fluctuations, because it operates inefficiently at low overheating ratios (the feedback reduces proportionately to the overheating ratio).



### V. Constant Current and Constant Temperature Circuits

A constant current hot-wire anemometer consists of a d. c. heating circuit, metering circuits for convenient determination of the static characteristics and a high sensitivity, low input level amplifier that also incorporate the thermal lag compensation (Fig. 3). This scheme of operation is due to DRYDEN and KUETHE, et al. [25, 26]. It was independently discovered also by ZIEGLER

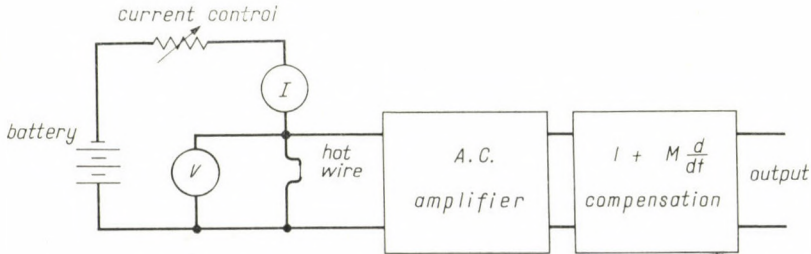


Fig. 3. Constant-current circuit with thermal lag compensation

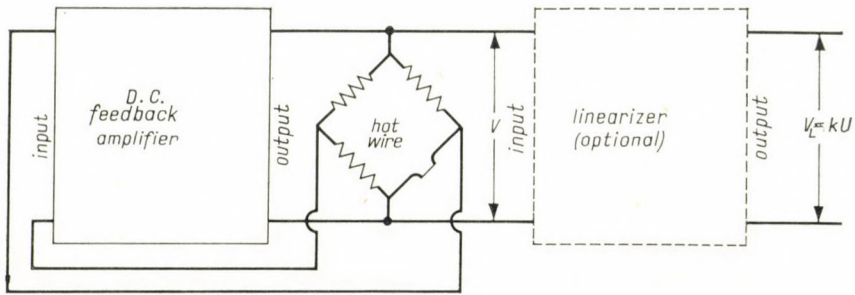


Fig. 4. Constant temperature circuit with "linearizer"

[105] and [106]. A more recent version is found in [45] giving high frequency response up to 70 kc, and now commercially available equipment can reach the same limits.

The other type of circuit is the constant temperature hot-wire anemometer. Since the wire temperature is not permitted to change there is no variable amount of energy stored in the thermal capacity. In order to achieve a constant temperature, the heating current must be varied rapidly according to the changing demands for heating (Fig. 4 shows a block diagram of the constant temperature circuit). In practice the wire is placed in a Wheatstone bridge and the unbalance voltage appearing across the bridge is amplified, the resulting large signal is used to control the heating current of the wire. This represents a strong negative feedback and it maintains the wire at a relatively constant temperature. The thermal lag effects are reduced in the ratio

of the negative feedback applied (in practical cases this varies between 30 and 300).

A detailed analysis shows that the effective time constant is reduced by the feedback ratio (loop gain)  $K$  [41, 49, 67].

$$M' = \frac{M}{1 + K} \quad (18)$$

where

$$K = 2 a_w R_w g_m \quad (19)$$

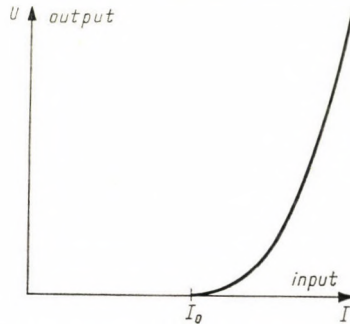


Fig. 5. Input-output characteristics of a linearizer ( $I - I_0$  for  $V = 0$ )

and the transconductance of the amplifier

$$g_m = \frac{dI_{\text{out}}}{de_{\text{in}}} \quad (20)$$

The constant temperature circuits are usually d. c. coupled for stability at low frequencies. This fact permits the "linearization" of the output so that it becomes proportional to the air velocity [49, 51, 52, 67]. By inverting (16) we find the velocity

$$U = \left( U_0 \frac{I^2}{I_0^2} - 1 \right)^2 \quad (21)$$

Fig. 5 shows the typical input-output characteristics of such a linearizer. The actual circuit may be realized either by two cascaded squaring circuits with a variable voltage off-set between them or by a direct approximation of the function given by Eq. (21). This can be done by a chain of biased diodes or by some non-linear solid state device.

The choice between a constant current and a constant temperature system depends mainly on the intended field of application. When the fluctuations are large  $u'/U > 0,10$  or if the velocity is allowed to drop to a near zero value, the constant temperature system is definitely superior. On the other hand, if the separation of velocity and temperature fluctuations is important



(this includes practically all supersonic work) constant current operation is necessary, for measurements must be taken at different overheating ratios down to vanishing heating currents. Since the constant temperature feedback system can operate successfully only at a relatively high overheating ratio (the feedback ratio is directly proportional to the overheating ratio, equation 19), it cannot be used at the low overheating ratios needed for predominantly temperature sensitivity. Turbulence measurement in a shock tube is an exception, it is much more convenient with a constant temperature system since

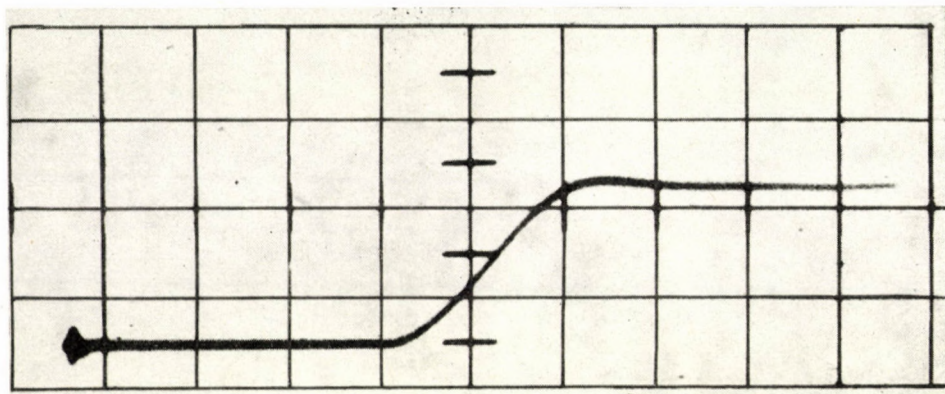


Fig. 6. Transient response of a hot-wire anemometer to a travelling shock wave. (Time scale  $25 \mu$  sec. per division  $3,7 \mu$  diameter Tungsten [Wolfram] wire)

it permits relatively strong overheating of the wire behind the shock by using instantaneous heating current values that would normally burn the wire in the still air before the shock front arrives.

The dynamic response of the wire, of course, depends on the thermal capacity and on the actual cooling rate. Dynamic calibration techniques exploit the fact that for small perturbations the time constant of the transient response must be the same for all kinds of imposed fluctuations, irrespective of whether the equilibrium is disturbed by transients in the heating current or in the velocity [22, 47]. The dissenting view stresses the importance of finite heat conduction effects along the wire (BETCHOV [3, 4]). Such questions can be settled experimentally. Mechanical shaking of the wire in a uniform steady flow has often been suggested but a high frequency cannot be reached without excessive inertial forces in the wire. Square wave heating current transients were first adopted by present author [39] as a routine method of time constant calibration. Comparison of response at two discrete frequencies is also feasible [75]. An excellent aerodynamic step function transient can be created in the form of a travelling shock wave in a shock tube and this was used to verify the theory of transient response (DOSANJH [23, 24]). Fig. 6 shows the hot-wire response to a travelling shock wave.

Typical hot-wire time constants are of the order of  $0,1 \div 2,0 \cdot 10^{-3}$  sec. (increasing with diameter and overheating). The use of coated quartz fibres and other laminated structures were considered by LOWELL [57], BORDEN [6] and LING & HUBBARD [55], giving a more rugged probe, especially in water. In accordance with the time constant values, quoted above, the unaided wire gives a uniform frequency response up to 1600 cps or 80 cps respectively (3 dB point). Electronic compensation of the thermal lag needs an extra amplification for the high frequencies at least by the same factor as the frequency band is being extended. Fig. 7 shows a typical example. The amplifiers

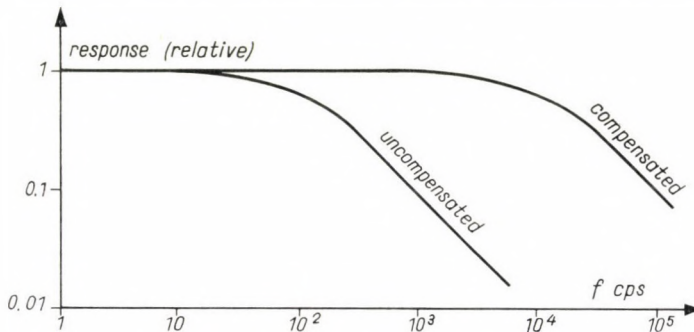


Fig. 7. Typical frequency response of a constant-current type hot-wire anemometer. (Time constant:  $M = 1,5 \cdot 10^{-3}$  sec; thermal lag compensation 40 dB)

all have noise and ultimately this noise limits the minimum detectable turbulence signal. The point where the turbulence signal disappears in the thermal noise usually occurs at a turbulence level of the order  $0,01 \div 0,2\%$  ( $u'/U = 1 \cdot 10^{-4} \div 2 \cdot 10^{-3}$ ). (Naturally, this depends on band-width and wire, and with great care it may be improved.) Obviously, the ultimate limit would occur when the thermodynamic noise (Johnson noise) of the hot-wire itself is reached, and would dominate all other noise. Good quality hot-wire equipment today is within less than a factor of 10 from this ultimate limit. A moderate amount of thermal lag compensation can be accomplished also by using mismatched transformer coupling ("poor man's hot-wire" [41]; also SHEPARD [81], who used it to compensate thermal lag of thermocouples).

Constant current equipment in general has a lower noise figure (more freedom in tailoring the pass-band and also the added possibility of using transformer coupling (SCHUH [79])). Constant temperature system on the other hand, adapts itself well to transistorized circuitry and can be quite compact [49]. A carrier frequency (r. f.) operated constant temperature feedback system also can be attractive in some special applications (TOURNIER [90] and SHEPARD [80]). A very detailed treatment covering all possible modes of operation (constant temperature, current, r. f. carrier, etc.) mostly from the electronic engineer's point of view is given by WISE et al. [100, 101, 102, 103].



## VI. Signal Processing

It was discovered quite early [82] that the velocity component perpendicular to the mean flow can be sensed as fluctuation in the wire's angle of attack. The variation of heat loss with angle of attack has been recently re-measured by WEBSTER [97]. The standard technique for measuring cross component velocity fluctuation is to use two oblique wires so that with a variation of direction the angle of attack increases on one and decreases on the other wire ( $X$  or  $V$  probe). The configuration can be calibrated against the angle of flow simply by rotating the probe when placed in a uniform airstream. The sensitivity for the  $v'$  or cross-component of the velocity appears to be of the same order of magnitude as for the  $u'$  component directed along the mean flow. By combining the sum and difference of the  $u'$  and  $v'$  signals, the Reynolds stress  $\rho u'v'$  can be also measured. The analysis of errors due to the unavoidable mismatch of the two wires in this case becomes quite involved. ASHKENAS [1], RUETENIK [73, 74], NEWMAN & LEARY [66] all have dealt with this problem considering the low speed case. In supersonic flow, MORKOVIN and PHINNEY attempted to do the same [64].

Besides two-wire probes for measuring  $u'$  and  $v'$ , more complex configurations exist for other purposes. A tetrahedral array of four wires can be arranged for the direct measurement of the vorticity component along the mean flow ([47], on pages 227–228). More complicated arrays of hot-wire anemometers have been described earlier by BURGERS [8]; recently, five wire "ladder probe" was developed to measure instantaneous boundary layer profiles during laminar turbulent transition [49].

In high speed flow the unheated hot-wire assumes a temperature that is close to the stagnation temperature, the actual value depending slightly on the Mach number and also on the Reynolds number (as we approach slip flow) [43, 44, 50, 60]. The heat loss depends primarily on the mass flow  $\rho U$  and the Mach number has important influences only in the high subsonic and transonic range. There is also a marked nonlinearity with overheating that affects significantly the fluctuation sensitivity coefficients.

In a well-established supersonic flow ( $M > 1.2$ ) the procedure for separating the different fluctuation modes is well established [46, 63, 38, 96]. In high subsonic flow, however, the requirements on static calibration are so stringent that unambiguous interpretation of fluctuation measurements is much more difficult [63, 64].

In hypersonic flow, the hot-wire has been used successfully even without absolute calibration by DEMETRIADES [19, 20] and by DEWEY [21].

As mentioned earlier the velocity and temperature fluctuations may be separated by taking several readings at different wire temperatures. This is essentially the same procedure at low speed or at supersonic velocities except

that in the latter case, the variables are the mass-flow ( $\rho U$ ) and stagnation temperature  $T_0$ .

By using a constant current circuit, we find that the potential fluctuations across the wire after proper thermal lag compensation are proportional to a linear combination of the velocity and temperature fluctuations [Eq. (8)].

$$\delta e = -F\delta U + G\delta T. \quad (22)$$

The sensitivity coefficients  $F$  and  $G$  for a given flow are still dependent on the wire operating conditions and their ratio  $F/G = r(a_w)$  is a monotonic (almost linear) function of the wire overheating ratio  $a_w$ . By taking the mean square value of the voltage fluctuation we find

$$\overline{\delta e^2} = F^2 \overline{(\delta U)^2} + G^2 \overline{(\delta T)^2} - 2FG \overline{(\delta U \cdot \delta T)}. \quad (23)$$

By taking three readings at three different wire temperatures, we can solve (at least in principle) for the three unknown quantities [16, 17]: the two mean square fluctuations  $\overline{\delta U^2}$  and  $\overline{\delta T^2}$  and the cross correlation between them  $\overline{\delta U \cdot \delta T}$ . By taking more than three readings one has consistency checks, and the results can be presented also in the "fluctuation diagram". This can be obtained by plotting  $\Theta$

$$\Theta^2 = \frac{\overline{\delta e^2}}{G^2} \quad (24)$$

against  $r(a_w)$ . Typical curves showing the dependence on the relative magnitudes of the three unknown quantities are given in Fig. 8.

If there are only velocity fluctuations, the diagram is a straight line out from the origin, and the slope is proportional to the velocity fluctuation  $d\Theta/dr = \delta U'$ . If there are only temperature fluctuations the diagram is a horizontal line ( $\Theta = \text{const}$ ). If there are both fluctuations present, the plot varies according to the correlation coefficient between the two ( $\delta U$  and  $\delta T$ ) fluctuations. For perfectly correlated or perfectly anticorrelated fluctuations, the curve becomes a straight line, and for zero correlation, it is hyperbola. The fluctuation diagrams are extensively treated in [46, 63, 96].

The signals obtained from the hot-wire are further processed just as any other electrical signal. Historically, they were the hot-wire turbulence signals that were first processed to obtain statistical quantities such as the autocorrelation and the power spectrum. Mean square quantities (turbulence level) are most often measured by the vacuum thermocouple, mean products for correlation measurement by the "quarter-square" method as the difference of the two signals. Triple and quadruple correlations have their corresponding analogue circuitry (TOWNSEND [91]).

In order to obtain the autocorrelation function, the short-time approximate steadiness of the turbulent pattern is used, and the fluctuations are



measured at two different points in space while the results are interpreted as representing two different times. The frequent practice to interchange space and time variables in homogeneous turbulence is referred to as "Taylor's hypothesis". Justification for this practice is based partly on intuition, but also on a paper by LIN [54].

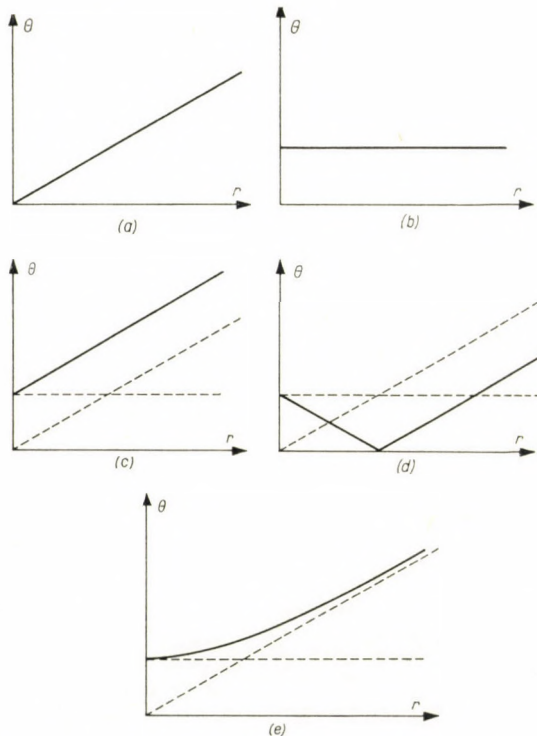


Fig. 8. Typical fluctuation diagrams:

- (a) velocity fluctuation alone; (b) temperature fluctuation alone; (c)  $R_{UT} = -1$ ;  
 (d)  $R_{UT} = +1$ ; (e)  $R_{UT} = 0$

True time correlations, especially the combined space-time correlation can be obtained by delaying one of the signals by the use of a magnetic tape-recorder. This approach has been pursued in most detail by FAVRE et al. [27, 28, 29].

Power spectra are measured by narrow band filters followed by "true r. m. s." meters, and the Fourier transform properties of power spectra and autocorrelation functions can be verified.

In addition to the r. m. s. fluctuation representing the turbulence level, different length scales are often determined. In principle these can be obtained equally well from the correlation or from the spectrum measurements. An interesting short-cut should be mentioned here. That is, the determination of the

microscale  $\lambda$  by counting the number of zero crossings of the signal (LIEPMANN [53]). In recent years the use of analogue computing techniques has become more common, so we no longer need to deal here at length with the details of statistical processing of the hot-wire signals.

The hot-wire has a finite length and the difference in the turbulent pattern at the two ends of the wire may significantly modify our statistical measurements. Wire length effects were estimated by FRENKIEL [30] and a generalized treatment of statistical measurement with a probe of finite dimension is given in [93].

So far as special applications are concerned, no references are given here to papers that report mainly measured results as the number of references on technique alone is already too high. A recent symposium in 1961 reviewed the state of our knowledge of turbulence and the reader is referred to the proceedings [62]. For a general introduction [42, 47, 18, 7] would serve and [8, 25, 26, 94 and 95] all have historical value. Modern constant current equipment is treated in [36, 45 and 65]; constant temperature equipment in [31, 40, 67 and 52]. For the use of hot-wires in transonic and supersonic flow [46 and 63] are useful. The subject of hot-wires in water is treated in [68 and 86], and that of hot-wires in shocktube in [9, 23 and 24]. Meteorological applications are given in [61].

We may sum it up the following way. During the 36 years of hot-wire turbulence research, the improvement in technique is impressive and the published data on turbulence have increased steadily. Nevertheless, it still has more the caprice of an art than the complete reliability of a convenient routine laboratory procedure.

## APPENDIX

### *Symbols*

$H$	heat loss of wire;
$T$	temperature;
$T_e$	equilibrium temperature of the unheated wire;
$T_w$	temperature of the heated wire;
$a, b, A, B, C$	constants;
$\rho$	gas density;
$U$	velocity (usually mean velocity);
$k_0, \mu_0$	heat conductivity and viscosity at stagnation temperature $T_0$ ;
$d$	wire diameter;
$Re = U\rho d/\eta_0$	Reynolds number of the hot-wire;
$Nu = \frac{H}{\pi l (T_w - T_e) k_0}$	Nusselt number of the hot-wire;
$\tau = \frac{T_w - T_e}{T_0}$	temperature loading;
$U_{\text{eff}}$	effective velocity for oblique wires;
$\Phi$	angle between velocity and a plane normal to the wire;



$E$	thermal energy stored in the wire;
$t$	time;
$W = I^2 R_w$	Joule heating of wire;
$I$	electric heating current;
$R_w$	wire resistance at temperature $T_w$ ;
$C'$	heat capacity of the wire;
$M$	time constant of wire;
$T_{st}$	temperature the wire would attain according to its static response ( $W = H$ );
$e = IR_w$	voltage drop across wire;
$\delta e, \delta U, \delta T, \delta I$	fluctuations in the corresponding variables $e, U, T, I$ ;
$F, G$	fluctuation sensitivity constants;
$Z$	calibration factor;
$R_f$	wire resistance at reference temperature $T_f$ (usually $0^\circ\text{C}$ );
$\alpha$	thermal coefficient of resistivity defined at reference temperature $T_f$ ;
$n$	constant of thermal inertia;
$a_w = \frac{R_w - R_e}{R_e}$	overheating ratio;
$U_0$	calibration constant (characteristic velocity);
$I_0$	calibration constant (characteristic current);
$Z_s$	heating circuit internal impedance;
$\varepsilon$	finite heating circuit factor;
$M'$	reduced time constant of a constant temperature hot-wire anemometer;
$K$	feedback ratio (loop gain);
$g_m$	transconductance of feedback amplifier;
$e_{in}, I_{out}$	input voltage and output current respectively;
$u', v'$	r. m. s. velocity fluctuation components;
$r$	ratio of the sensitivity to velocity and to temperature fluctuations;
$T_0 = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$	stagnation temperature defined for compressible flow ( $M$ is Mach number, $\gamma$ is the ratio of specific heats);
$\Theta$	r. m. s. fluctuation amplitude used in "fluctuation diagram";
$\lambda$	microscale of turbulence;
$R_{UT}$	velocity-temperature correlation coefficient.

## REFERENCES

1. ASHKENAS, H.: Hot-Wire Measurements with X-Meter (Contract NAW-6295). NACA and Cornell University (1955), May.
2. BALDWIN, L. V.: Slip-Flow Heat Transfer from Cylinders in Subsonic Airstreams. NACA TN 4369 (1958), Sept.
3. BETCHOV, R.: Non-Linear Theory of a Hot-Wire Anemometer. NACA TM 1346 (Translation of "Théorie non-linéaire de l'anémomètre à fil chaud"). *Verhand. Kon. Ned. Akad. Wetensch* (Amsterdam) **52** (1949), 195-207.
4. BETCHOV, R.—WELLING, W.: Some Experiences Regarding the Nonlinearity of Hot-Wires. NACA TM 1223 (Translation of "Quelques expériences sur la non-linéarité des fils chauds") *Verhand. Kon. Ned. Akad. Wetensch* (Amsterdam) **53** (1950), 432-439.
5. BILLINGTON, I. J.: The Hot-Wire Anemometer and its Use in Non-Steady Flow, Tech. Note 5. *Univ. of Toronto, Institute of Aerophysics* (1955), Sept.
6. BORDEN, A.: Time Constants and Frequency Response of Coated Hot-Wires Used as Turbulence-Sensing Elements. *R & D Rept. 952, Hydrodynamics Lab., David Taylor Model Basin*; (1957), June.
7. BRADSHAW, P.—JOHNSON, R. F.: Turbulence Measurements with Hot-Wire Anemometers. *National Physical Laboratory: Notes on Applied Science, London* (1963), No. 33.
8. BURGERS, J. M.: Hitzdrahtmessungen. *Handbuch der Experimentalphysik*; Vol. 4, Part 1, 637-667; Wien-Harms, Leipzig 1931.
9. CHRISTIANSEN, WALTER H.: Use of Fine Unheated Wires for Heat Transfer Measurements in the Shock Tube. *Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology, Hypersonic Research Project, Mem. No. 55*. (1960), June 1.
10. COLE, J.—ROSHKO, A.: Heat Transfer from Wires at Reynolds Numbers in the Oseen Range. *Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Univ. of Calif., Berkeley* 1954.

11. COLE, J. D.—WU, T. Y.: Heat Conduction in a Compressible Fluid. *Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford Univ. Press* (1951), 121.
12. COLLIS, D. C.: Forced Convection of Heat from Cylinders at Low Reynolds Numbers. *J. Aero. Sci.* **23** (1956), No. 7, July.
13. COLLIS, D. C.—WILLIAMS, M. J.: Two-Dimensional Forced Convection from Cylinders at Low Reynolds Numbers. *Rept. ARL/A 105, Dept. of Supply, Australia* (1957), November.
14. COLLIS, D. C.—WILLIAMS, M. J.: Molecular and Compressibility Effects on Forced Convection of Heat from Cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **6** (1959), 357.
15. COOPER, R. D.—TULIN, M. P.: Turbulence Measurements with the Hot-Wire Anemometer. *NATO, AGARDograph No. 12*, Paris (1955), Aug.
16. CORRSIN, S.: Extended Applications of the Hot-Wire Anemometer. *Rev. Sci. Instr.* **18** (1947), No. 7.
17. CORRSIN, S.: Extended Applications of the Hot-Wire Anemometer. NACA TN 1864 (1949).
18. CORRSIN, S.: Turbulence Experimental Methods. *Handbuch der Physik*; Vol. VIII/2, 525—590; Springer Verlag, Berlin 1963.
19. DEMETRIADES, A.: Hot-Wire Measurements in the Hypersonic Wake of a Cylinder. *Jour. Aero. Sci.* **28** No 11. (1961), 901.
20. DEMETRIADES, A.: An Experimental Investigation of the Stability of the Hypersonic Laminar Boundary Layer. *Jour. Aero. Sci.* **25**, No 9 (1958), Sept.
21. DEWEY, C. FORBES: Hot Wire Measurements in Low Reynolds Number Hypersonic Flows. *American Rocket Society Journal* (1961), 1709.
22. DATWYLER, G.: Beiträge zur Hitzdrahtmethode. *Zeit. f. Ang. Math. Phys.* **1**, No 5 (1950), 298—316.
23. DOSANJH, D. S.: Use of a Hot-Wire Anemometer in Shock Tube Investigations (Pt. 1). Ph. D. Thesis, Johns Hopkins Univ. 1953.
24. DOSANJH, D. S.: Use of a Hot-Wire Anemometer as a Triggering and Timing Device for Wave Phenomena in a Shock Tube. *Rev. Sci. Instr.* **26** Jan. (1955), 65.
25. DRYDEN, H. L.—KUETHE, A. M.: The Measurement of Fluctuations of Air Speed in Turbulent Flow. NACA TR No. 320, 1928.
26. DRYDEN, H. L.—SCHUBAUER, G. B.—MOCK, W. C.—SKRAMSTAD, H. K.: Measurement of Intensity and Scale of Wind Tunnel Turbulence and Their Relation to the Critical Reynolds Number of Spheres. NACA TR No. 581, 1937.
27. FAVRE, A.: Statistical Measurements of Time Correlation. *Proc. Seventh Int. Congr. Appl. Mech.* **2** Pt. 1 (1948), 44—45.
28. FAVRE, A.—GAVIGLIO, J. J.—DUMAS, R.: Apparatus for Measurements of Time and Space Correlation. NACA TM 1371 (1955), April.
29. FAVRE, A. J.—GAVIGLIO, J. J.—DUMAS, R.: Space-Time Double Correlations and Spectra in a Turbulent Boundary Layer. *Jour. Fluid Mech.* **2** Pt. 4 (1957), June also **3** Pt. 4 (1958), Jan.
30. FRENKIEL, F. N.: Effects of Wire Length in Turbulence Investigations with a Hot-Wire Anemometer. *The Aero. Quart.* **5** (1954), May.
31. GALINARO, RAYMOND—GOUGAT, PIERRE: Réalisation d'un anémomètre à fil chaud à résistance constante. *Journal des Recherches du CNRS* (1963), No. 63.
32. GAUDFERNAU, J.: Anémoclinométrie à fils chauds. La. Recherche Aéronautique, *O. N. E. R. A.* (1955), No. 48.
33. GAUDFERNAU, J.—ENGAMMARE, E.—BOIVINET, G.: Clinomètre dynamique à fils chauds CCl-Contrôle en Soufflerie des Performances. *Note Technique No. 8/1333 AP, O.N.E.R.A.* 1956.
34. GAVIGLIO, JEAN: Sur quelques problèmes de mesures de turbulence. Doctoral Thesis, Université Aix-Marseille. 1958.
35. GLAWE, G. E.—JOHNSON, R. C.: Experimental Study of Heat Transfer to Small Cylinders in a Subsonic, High-Temperature Gas Stream. NACA TN 3934 (1957), May.
36. HAYASHI, NISIKI: An Improved Hot-Wire Anemometer. Rep. No. 36 *Unyu-Gijutsu Kenkyujo* (Transportation Technical Research Institute) Tokyo (1959), July.
37. KING, L. V.: On the Convection of Heat from Small Cylinders in a Stream of Fluid. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **214** No 14 (1914), 373—432.
38. KISTLER, A.: Turbulent Boundary Layer Fluctuations at Supersonic Velocities. *Phys. of Fluids* **2** (1959), 290.
39. KOVÁSZNAY, L. S. G.: Calibration and Measurement in Turbulence Research by the Hot-Wire Method. NACA TN 1130, 1947. (Translation from Hungarian Doctoral Thesis. Műegyetem, Budapest 1943.)
40. KOVÁSZNAY, L. S. G.: Constant Temperature Feedback Hot-Wire Anemometer. Johns Hopkins Univ., Appl. Phys. Lab. CM-478 (1948) June.



41. KOVÁSZNAY, L. S. G.: Simple Hot-Wire Anemometer. Rept. Aero. Dept., Johns Hopkins Univ. CM-573, 1949.
42. KOVÁSZNAY, L. S. G.: Turbulence Measurements. *App. Mech. Rev.* (feature article) **12** No 6 (1959), 375.
43. KOVÁSZNAY, L. S. G.—TÖRNMARCK, S. I. A.: Heat Loss of Hot-Wires in Supersonic Flow. Bumblebee Rept. No. 127, Johns Hopkins Univ. (1950), April.
44. KOVÁSZNAY, L. S. G.: The Hot-Wire Anemometer in Supersonic Flow. *Jour. Aero. Sci.* **17** (1950), No. 9.
45. KOVÁSZNAY, L. S. G.: Development of Turbulence-Measuring Equipment. NACA TR No. 1209, 1954.
46. KOVÁSZNAY, L. S. G.: Turbulence in Supersonic Flow. *Jour. Aero. Sci.* **20** No 20 (1953), 657.
47. KOVÁSZNAY, L. S. G.: Turbulence Measurements. *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, Princeton Univ. Press, 1954; **9**, 213—285, Sect. F.
48. KOVÁSZNAY, L. S. G.—KOMODA, H.—VASUDEVA, B. R.: Detailed Flow in Transition. Proceedings of the 1962 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, 1962.
49. KOVÁSZNAY, L. S. G.—MILLER, L. T.—VASUDEVA, B. R.: A Simple Hot-Wire Anemometer. Tech. Rep. J. H. U., Johns Hopkins University, July 1963; 22 p.
50. LAUFER, J.—McCLELLAN, R.: Measurements of Heat Transfer from Fine Wires in Supersonic Flows. *Jour. Fluid Mech.* **1** Pt. 3 (1956), Sept.
51. LAURENCE, J. C.: Intensity, Scale and Spectra of Turbulence in Mixing Region of Free Subsonic Jet. NACA TN 3561, Sept. 1955.
52. LAURENCE, J. C.—LANDER, L. G.: Auxiliary Equipment and Techniques for Adapting the Constant-Temperature Hot-Wire Anemometer to Specific Problems in Air-Flow Measurements. NACA TN 2843 (1952), Nov.
53. LIEPMANN, H. W.—ROBINSON, M. S.: Counting Methods and Equipment for Mean-Value Measurements in Turbulence Research. NACA TN 3037 (1953), Oct.
54. LIN, C. C.: On Taylor's Hypothesis and the Acceleration Terms in the Navier-Stokes Equations. *Quart. of Applied Mathematics* **10** (1953), No. 4 January.
55. LING, S. G.—HUBBARD, P. G.: The Hot-Film Anemometer. *Jour. Aero. Sci.* **23** (1956), 890.
56. LOWELL, H. H.: Design and Application of Hot-Wire Anemometer for Steady-State Measurements at Transonic and Supersonic Speeds. NACA TN 2117 (1950), July.
57. LOWELL, H. H.—PATTON, N.: Response of Homogeneous and Two-Material Laminated Cylinders to Sinusoidal Environmental Temperature Change, with Applications to Hot-Wire Anemometry and Thermocouple Pyrometry. NACA TN 3514 (1955), Sept.
58. MAHONY, J. J.: Heat Transfer at Small Grashoff Numbers. *Proc. Roy. Soc. A* **233** (1956), 412—423.
59. MATTIOLI, E.: Una Nuova Sonda a Filo Caldo per Misure di Turbulenza Nello Strato Limite. Tipografia Vincenzo Bona, Torino 1957.
60. McCLELLAN, R.: Equilibrium Temperature and Heat Transfer Characteristics of Hot-Wires in Supersonic Flow. Thesis A. E. Degree, Calif. Inst. of Techn. (1955), June.
61. MACCREADY, P. B.: Atmospheric Turbulence Measurements. *Jour. Meteor* **10** No 5, Oct., (1953), 325—337.
62. *Mécanique de la Turbulence*. Editions du C. N. R. S., Paris 1962; No. 108.
63. MORKOVIN, M. V.: Fluctuations and Hot-Wire Anemometry in Compressible Fluids. AGARDograph No. 24, NATO (1956), Nov.
64. MORKOVIN, M. V.—PHINNEY, R. E.: Extended Applications of Hot-Wire Anemometry to High-Speed Turbulent Boundary Layers; AFOSR TN-58-469, ASTIA AD-158-279, Johns Hopkins Univ., Dept. of Aero (1958), June.
65. NELSON, H. M.—COLLIS, D. C.: A Wide Range Hot-Wire Amplifier. Rept. ARL/1. 20, Dept. of Supply (Australia) (1958), Jan.
66. NEWMAN, B. G.—LEARY, B. G.: The Measurement of the Reynolds Stresses in a Circular Pipe as a Means of Testing a Hot-Wire Anemometer. Dept. of Supply (Australia) Aero Research Labs., Rept. A. 72, 1952.
67. OSSOFSKY, E.: Constant Temperature Operation of the Hot-Wire Anemometer at High Frequency. *Rev. Sci. Instr.* **19** (1948), No. 12.
68. PATTERSON, A. M.: Development of a Hot-Wire Instrument for Ocean Turbulence Measurements. Tech. Memo. 57—2, Pacific Naval Lab., Esquimalt, B. C. (1957), Dec.
69. PIERCY, N. A. V.—RICHARDSON, E. G.—WINNY, H. F.: On the Convection of Heat from a Wire Moving through Air Close to a Cooling Surface. *Proc. Phys. Soc. B* **69** (1956), 731.
70. REMENYIK, C. J.—KOVÁSZNAY, L. S. G.: The "Orifice-Hot-Wire" Probe and Measurements of Wall Pressure Fluctuations. Proceedings of the 1962 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press 1962.



71. RICHARDSON, E. G.: Appareils à fil chaud. Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris, 1954.
72. RICHARDSON, E. G.: The Correction of Hot-Wire Readings in a Boundary Layer for Proximity to the Solid Boundary. *Jour. Aero. Sci.* **23** (1956), 970–971.
73. RUETENIK, J. R.: The Effect of the Temperature Dependence of King's Constant A on Hot-Wire Sensitivity Coefficient. *Jour. Aero. Sci.* **22** (1955), 502–503.
74. RUETENIK, J. R.: Investigation of Equilibrium Flow in a Slightly Divergent Channel. Doctoral dissertation, Johns Hopkins Univ. (1954), Aug.
75. RUNYAN, R. A.—JEFFRIES, R. I.: Empirical Methods for Frequency Compensation of the Hot-Wire Anemometer. NACA TN 1331, 1947.
76. SANDBORN, V. A.—LAURENCE, J. C.: Heat Loss from Yawed Hot-Wires at Subsonic Mach Numbers. NACA TN 3563 (1955), Sept.
77. SCHRODT, I.: Lineáris gázmozgások kísérleti vizsgálata új mérési eljárással. Ph. D. Thesis, University of Budapest, 1914.
78. SCHUBAUER, G. B.: Effect of Humidity in Hot-Wire Anemometry, National Bureau of Standards. *Jour. of Res.* **15** (1935), 575–578.
79. SCHUH, H.—WALKER, D.: Wide Range Amplifier for Turbulence Measurements with Adjustable Upper Frequency Limit. U. D. C. No. 533.6.082.73, Rept. No. Aero 2492, Roy. Aircraft Est. (1953), Aug.
80. SHEPARD, C. E.: A Self-Excited Alternating-Current, Constant-Temperature Hot-Wire Anemometer. NACA TN 3406 (1955), April.
81. SHEPARD, C. E.—WARSHAWSKY, I.: Electrical Techniques for Compensation of Thermal Time Lag of Thermocouples and Resistance Thermometer Elements. NACA TN 2703 (1952), May 6.
82. SIMMONS, L. F. G.—BALEY, A.: *Phil. Mag.* **7** (1927), 81.
83. SIMMONS, F. G.: Shielded Hot-Wire Anemometer for Low Speeds. *Jour. Sci. Instr.* **26** (1949), 407–411.
84. SPANGENBERG, W. G.: Heat Loss Characteristics of Hot-Wire Anemometers at Various Densities in Transonic and Supersonic Flow. NACA TN 3381 (1955), May.
85. STALDER, J. R. et al.: Heat Transfer to Bodies in a High Speed Rarefied-Gas Stream. NACA TN 2438, 1951.
86. STEVENS, R. G.—BORDEN, A.—STRAUSSER, P. E.: Summary Report on the Development of a Hot-Wire Turbulence-Sensing Element for Use in Water. R & D Rept. 953, Navy Dept. (1956), Dec.
87. STINE, H. A.: Investigation of the Heat Transfer from Hot-Wires in the Transonic Speed Range. Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., Stanford Univ. 1954.
88. TCHEN, C. M.: Heat Delivery in a Compressible Flow and Applications to Hot-Wire Anemometry. NACA TN 2436, 1951.
89. TOMOTIKA, S.—YOSINOBU, H.: On the Convection of Heat from Cylinders Immersed in a Low-Speed Stream of Incompressible Fluid. *Jour. of Math. and Phys.* **36** (1957), 112–120.
90. TOURNIER, M., et al.: Sur l'utilisation des courants de haute fréquence pour le chauffage des anémomètres à fil chaud. *La Recherche Aéronautique* (1951), No. 19.
91. TOWNSEND, A. A.: The Measurement of Double and Triple Correlation Derivatives in Isotropic Turbulence. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **43** (1947), 560–570.
92. TSIEN, H. S.—FINSTON, M.: Hot-Wire Anemometer in High-Speed Flows. Meteor Rept. No. 28, Mass. Inst. of Tech. 1948.
93. UBERON, M. S.—KOVÁSZNAY, L. S. G.: On Mapping and Measurement of Random Fields. *Quart. Appl. Math.* **10** (1953), 375.
94. VAN DER HEGGE ZIJNEN, B. G.: On the Construction of Hot-Wire Anemometers for the Investigation of Turbulence. *Appl. Sci. Res.* **A2** (1951), 351–363.
95. VAN DER HEGGE ZIJNEN, B. G.: Modified Correlation Formulae for the Heat Transfers by Natural and by Forced Convection from Horizontal Cylinders. *Appl. Sci. Res. Sec. A* **6**, 1956.
96. VREBALOVICH, THOMAS: Application of Hot-Wire Techniques in Unsteady Compressible Flows. Symposium on Measurement in Unsteady Flow (ASME Hydraulic Division Conference) May 21–23 (1962), 62.
97. WEBSTER, C. A. G.: A Note on the Sensitivity to Yaw of a Hot-Wire Anemometer. *Jour. Fluid. Mech.* **13** Part 2 (1962), 307.
98. WESKE, I. R.: Measurements of the Arithmetic Mean Velocity of a Pulsating Flow of High Velocity by the Hot-Wire Method. NACA TN 990, (1946).
99. WINOVICH, W.—STINE, H. A.: Measurements of the Nonlinear Variation with Temperature of Heat-Transfer Rate from Hot-Wires in Transonic and Supersonic Flow. NACA TN 3965 (1957), April.



100. WISE, B.: The Hot-Wire Anemometer for Turbulence Measurements. Pt. I, C. P. No. 273 (13.803) A. R. C. Tech. Rept. Ministry of Supply, London 1956.
101. WISE, B.—STEWART, D. H.: The Hot-Wire Anemometer for Turbulence Measurements. Pt. II, C. P. No. 274 (14.285) A. R. C. Tech. Rept., Ministry of Supply, London 1956.
102. WISE, B.—SCHULTZ, D. L.: The Hot-Wire Anemometer for Turbulence Measurements. Pt. III, C. P. No. 275 (16.679), A. R. C. Tech. Rept. Ministry of Supply, London 1956.
103. WISE, B.—SCHULTZ, D. L.: The Hot-Wire Anemometer for Turbulence Measurements. Pt. IV, C. P. No. 276 (16.726) A. R. C. Tech. Rept. Ministry of Supply, London 1956.
104. WU, T.: On Problems of Heat Conduction in a Compressible Fluid. Ph. D. Thesis, Calif. Inst. of Tech., 1952.
105. ZIEGLER, M.: The Application of the Hot-Wire Anemometer for the Investigation of the Turbulence of an Airstream. *Vers. d. Kon. Akad. v. Wetensch, Amsterdam* **33** (1930).
106. ZIEGLER, M.: Investigation, the Measurement and the Recording of Rapid Airspeed Fluctuations with Very Thin and Short Hot-Wires. *Vers. d. Kon. Akad. v. Wetensch, Amsterdam* **33** (1930).
107. ZIEGLER, M.: The Construction of a Hot-Wire Anemometer with Linear Scale and Negligible Lag. *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch, Amsterdam* **15** (1934). No. 1.

### HITZDRAHTANÄMOMETER

L. S. G. KOVÁSZNAY

#### ZUSAMMENFASSUNG

Das wichtigste Instrument der Turbulenzforschung ist das Hitzdrahtanämometer. Der Verfasser untersucht für kleine und für große Geschwindigkeiten die Wärmeverlustgesetze, welche das statische Verhalten des Drahtes bestimmen. Die dynamische Empfindlichkeit führt zur Erklärung der Ergebnisse der Turbulenz-Messungen. Die Arbeit bringt die Schaltung der Instrumente sowohl für konstanten Strom als auch für konstante Temperatur. Schließlich werden mit Hilfe des »Fluktuationsdiagramms« die Messungen erklärt; mit einem historischen Überblick und einer reichhaltigen Zusammenfassung der Literatur wird die Arbeit abgeschlossen.

### ANÉMOMÈTRES A FIL CHAUD

L. S. G. KOVÁSZNAY

#### RÉSUMÉ

L'instrument essentiel des recherches sur la turbulence est l'anémomètre à fil chaud. L'étude traite des lois relatives à la perte de chaleur, qui déterminent le comportement statique du fil en cas de petites et de grandes vitesses. La sensibilité dynamique conduit à l'explication des résultats des mesures de la turbulence. L'étude présente les montages pour courant constant et pour température constante. A l'aide du «diagramme des fluctuations», l'auteur offre enfin une explication des mesures et termine l'article par un aperçu rétrospectif et une bibliographie détaillée.

### ТЕРМОАНЕМОМЕТР

Л. Ш. Г. КОВАЧАИ

#### РЕЗЮМЕ

Важнейшим прибором исследований в области турбулентности является термоанемометр. В статье рассматриваются закономерности тепловых потерь для высоких и низких скоростей, определяющие статическое поведение нити. Динамическая чувствительность дает объяснение результатов измерения турбулентности. В статье показана схема соединения прибора как в случае постоянного тока, так и постоянной температуры. Наконец, при помощи «флюктуационной диаграммы» дается объяснение измерений, после чего — историческим обзором и подведением итогов на основе широких литературных данных — заканчивается статья.





# SPEEDING UP OF DIGIT TRANSMISSION BY TELEPHONE SUBSCRIBERS

L. KOZMA

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received August 28, 1964]

This study deals with the possibilities of speeding up the information transmission of telephone subscribers. First, the basic principles of the methods known from literature are treated briefly, then the safety aspects of digit transmission are discussed. It is proved that — since the parameters of the subscribers' lines of the present networks may vary within broad limits — a safe digit transmission can be achieved only by increasing the signal-to-noise ratio. This aim, on the other hand, can be attained only by a network-decentralization essentially greater than the present one. One way is to employ the concentrator-type exchanges. Besides the improvement of the signal-to-noise ratio, the transmitting power of the subscribers' sets in this way increases.

## I. Introduction

It follows from operation characteristics of telephone networks that transmission of data between individual — geographically distant — points is necessary. Then, on the basis of these data, speech channels are connected in series to make it possible for the calling, respectively, called subscribers to carry on their conversation.

The overwhelming majority of these data contain the call numbers of the calling and called parties, the related service characteristics, further different informations serving for the connection to be established. The scheme of operation is shown in Fig. 1.

The calling subscriber  $E_1$  gets into connection with a register  $R$  and transmits to the latter information  $I_0$  which is the call number of the required subscriber  $E_2$ . According to the information thus obtained, the connection is built up stepwise by  $R$  through a certain number of switching units  $C_1, C_2 \dots$ . Each of these switching units contains certain switching mechanisms, the setting up of which is made by common organs — control units, markers and auxiliary registers. In the figure, these are marked by  $M_1, M_2$ , etc. In possession of the information  $I_0$ ,  $R$  knows towards which next unit  $C$  the connection has to be extended to in each unit  $C$  and it transmits the adequate information to each  $M$ . These informations — actually digits — are marked on the figure as  $I_1, I_2$ , etc. Since the different  $C$ -s may lie far from each other — from a few meters up to several hundreds of kilometers — generally a *single two-wire line*,

resp. a single speech channel is available in each relation, for the transmission of informations.

The speed of data transmission is determined by the operation times of the switching devices employed. In up-to-date *cross-bar type* switch exchanges, the time necessary for putting through a connection lies within a second. It would be therefore advisable, that the forwarding of informations necessary for the build-up of the connection from the *R*-s to the individual *M*-s should last for a similar order of magnitude in time. Since both the *R*-s and the *M*-s are *common equipments* of the exchanges, thus relatively few are needed. Accordingly, it is possible to introduce a larger number of circuitry elements, with which the forwarding of each digit can be provided within 0,1 sec. Such

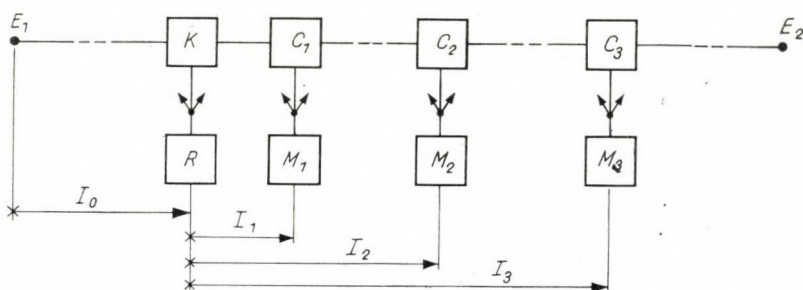


Fig. 1. Transmission of informations in telephone exchanges

solutions, employing various frequencies in a coded form, are known from literature, too.

A far more difficult problem is the speeding up of the transmission of information  $I_0$ . The generation of the information is done in the subscribers' sets, and because of the great number the costs must be kept low. The present study deals with the possibilities of solution of this task.

## II. Exposition of the Problem

At present, the digits of the called party are transmitted with a dial by the subscriber. Actually this means an interruption of the subscriber's loop with an average speed of 10 imp/sec. Between two series of pulses a separating pause must be inserted. In this way a transmission time of about 1,5 sec/digit develops, resulting — by consideration of the  $6 \div 10$  digits necessary in the present large national networks — in at least 12  $\div$  15 sec. This, however, should be regarded as too long, for the following reasons:

a) This hinders the operation of the register which builds up the connection. The engagement time of the register — due to the use of the present cross-bar switches — could be shortened practically to the sending in time of the digits, and this would lead to a considerable decrease in the number of registers.



- b) Similarly the so-called idle engagement times of the switches, which represent a large part of the exchange and of their circuits would shorten, too.
- c) A slow digit transmission is inconvenient and tiresome for the subscriber.

On account of the *parameters* of the subscriber's line the speed of the dial cannot be increased. For reasons of economy, a *leakage between wires or ground-leakage of minimally 10 000 ohms* must be allowed for besides the usual capacitive and inductive characteristics. The loop resistance may vary from 0 to 1200 ohm. If, besides this, also the induced noises caused by outer effects are taken into consideration, the safety of digit transmission would cease to exist with higher speed. On account of distortions and outer effects, the number of pulses may decrease or increase, and there is no method for the detection of a faulty operation.

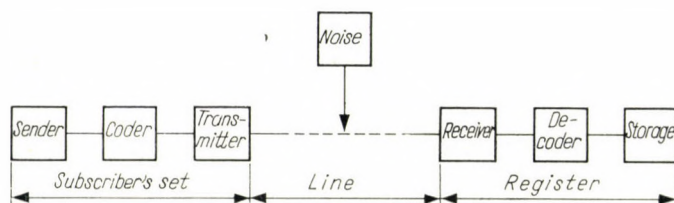


Fig. 2. Transmission of informations from subscriber to register

The problem is schematically illustrated in Fig. 2. According to our present knowledge, the sending of digits can be supposed only with a keyboard. Corresponding to the decimal system there are 10 keys. With suitable practice  $3 \div 4$  keys can be operated in a second; this may shorten the transmission time to about 3 sec. The main problem is the coding and transmitting equipment, because of the large number of subscriber's sets. In the register, the solution is a function of transmission. It is known, however, that the number of registers is — on account of the short engagement times of these — only a *few millesimals* of the number of subscribers' sets. Thus, the main endeavour in the solution applied in the registers must be that of simplifying the transmitter equipment in the set.

It is not advisable to employ *ground wire* in the circuit of the subscriber's set, since it may cause disturbances and uncertainties, moreover, it involves additional costs.

The line noises are of uncertain character; only safe codes, further a raising of the *signal-to-noise ratio* to a suitable level could help. The noise is *directly* proportional to the length of the subscriber's line; therefore the subscriber's line has to be kept *as short as possible*, and the transmission level of the signal *as high as possible*. To the latter, however, limits are set by the specifications of the CCITT.

### III. Possibilities of Solution

The solutions known from the literature at present may be divided into three groups of signalling systems operating on the basis of measurements of

- a) time,
- b) voltage,
- c) frequency.

#### 1. Systems based upon measurement of time

Upon pressing down any of the keys, an unstable multivibrator in the subscriber's set starts to oscillate, interrupting the subscriber's basic circuit as long as the key remains in the depressed position. The pulses generated in this way have a break time  $S$  and a closing time  $Z$ . The variation of these two times transmits *the information* to the register.

Both the breaking and the closing may last for about

$$1 t, 2 t, 4 t \text{ and } 8 t$$

in msec. In this way a total of  $4^2 = 16$  different digits can be transmitted. The measuring of time in the register must be begun at the first break and stopped at the second. Since the forwarding of 10 digits is sufficient either the breaking or closing times of

$$1 t, 2 t \text{ and } 4 t$$

may suffice. In this way the maximal measuring time is  $11 t$ , and the apparatus must operate safely upon the depression of 4 keys per second; thus

$$t = \frac{1}{44} = 20 \text{ msec};$$

(in the solution known from literature, for safety reasons,  $t = 6$  msec).

The schematic diagram of the appliance in the subscriber's set is shown in Fig. 3. The keys as transmitting organs operate common contacts, which in turn influence the operation of the multivibrator as transmitter, according to a certain code. In the receiving part of the register, the measuring of time has to be made by electronic elements on account of the order of magnitude of the times in question, and, on account of the differences merely having a binary base between individual times.

The disadvantage of this method is that the pulses may be greatly *distorted over long subscriber's lines*, making the time measurement uncertain. Besides, if the breaking or closing times suffer changes from any outer effect, the register is unable to detect the erroneous reception, as there is no *redundancy* in the system, and so the register may receive a false digit.



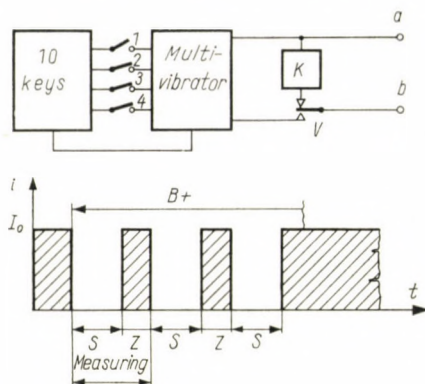


Fig. 3. Digit transmission based on the measurement of time

The safety of such systems might be attained only by lowering the subscriber's loop resistances and by stretching out the pulses.

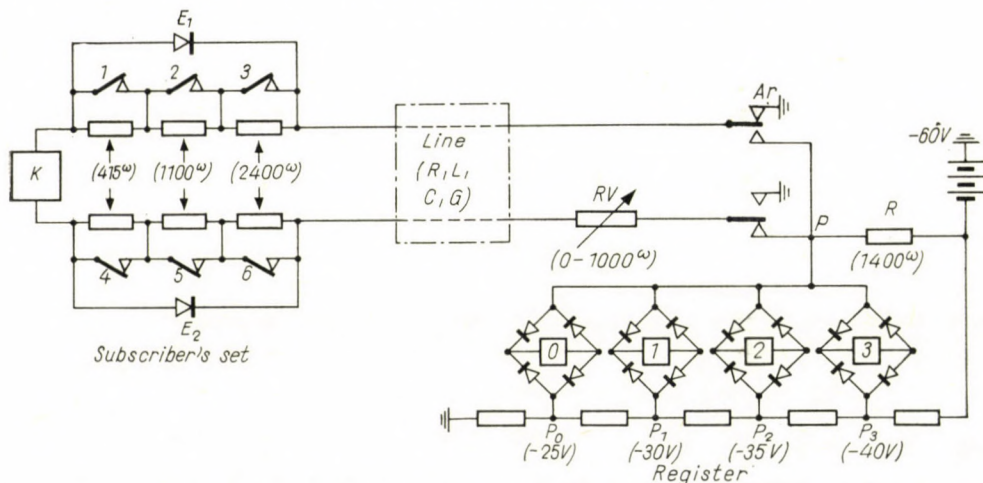


Fig. 4. Digit transmission based on the measurement of voltage

## 2. System based on voltage measuring

Referring to the example shown in Fig. 4; as soon as the register becomes connected to the calling subscriber, a variable resistance  $RV$  raises the resistance of the subscriber's line to a definite value, for example to 1000 ohm (resp. to the maximal line resistance allowed). The resistance  $RV$  inserts resistances stepwise as long as the voltage of point  $P$  increases to a voltage  $P_0$ . Four voltmeter bridges are connected to point  $P$ , signalling — e.g. by the release of a relay — if free of voltage. The bridge marked by 0 will be free of voltage, if the voltage of point  $P$  is  $-25$  V, and the operation of  $RV$  will be stopped by this circumstance.

Two measurements are made by the register: the first one begins when the voltage condition of  $-25$  V is upset on account of a resistance being inserted in the subscriber's loop on the depression of one of the 10 keys on the set, and consequently the voltage of point  $P$  has been raised. The keys open the break contacts marked 1–6, according to the codes to be found in Table I. By the first measurement, the state of contacts 1–3 is checked, and as a result of this, one of the bridges 1–3 becomes free of voltage. During the first measurement, the measuring voltage in the exchange is connected to branch  $b$ , — the earthing

Table I

Key	Contacts					
	1	2	3	4	5	6
1	+	—	—	+	—	—
2	+	—	—	—	+	—
3	+	—	—	—	—	+
4	—	+	—	+	—	—
5	—	+	—	—	+	—
6	—	+	—	—	—	+
7	—	—	+	+	—	—
8	—	—	+	—	+	—
9	—	—	+	—	—	+
0	—	—	+	—	—	—

to branch  $a$ ; thus the resistances switched on by contacts 4–6 will be short-circuited by the rectifier  $E_0$ .

After establishing the results of the first measurement, the register operates the relay  $A_1$  and repeats the measurement with an inverted polarity. This time the resistances switched on by contacts 4–6 are checked. In this case also that fact gives information if *none of the contacts* was actuated (hence actually a total of  $3 \times 4 = 12$  digits could be forwarded).

The values of the resistances 1–6 are to be determined so that the operating limits of the measuring bridges develop suitably. According to the values shown in the figure, steps of minimally 5 volts are ensured, but the voltage values are shifted by the presence or absence of leakage  $G$ . Its effect is apparent mainly at higher resistances.

The measuring bridges must operate selectively even when subscribers' lines have the most varying characteristics, since only the ohmic resistance of the loop can be compensated, but neither the leakage between wires or to earth nor the individual resistance values changing as a function of time, can.

However, also this method has a considerable disadvantage that the error occurring in digit transmission is not detectable, and thus an erroneous



connection is established in these cases. On the other hand, the solution is unquestionably cheap: all that is needed are 6 resistances, 6 contacts, 2 rectifiers and 10 keys. Increase in safety could be realized by redundancy only. The introduction of further measuring voltages, however, would further impair the measuring conditions.

### 3. Systems based on the use of audio-frequency signals

Since the direction of information transmission points from the subscriber towards the register, the frequencies employed for signalling must be generated *within the set itself*. Any other solution where the register would send currents of different frequencies towards the set, and these currents would be sent back after a certain modulation under the effect of depressing the keys, can hardly be imagined because of the parameters of the subscriber's line. Moreover, even this solution would not be cheaper than the use of oscillators. At any rate, endeavour must be made to keep *the number of frequencies* employed for signalling as low as possible, for economical reasons.

With the aid of the minimally needed 2 frequencies, decimal digits could be transmitted only if 2 pulses were generated by pressing a single key down, and the two breaks, respectively two closings provided for the four time elements during which one frequency would indicate the two breaks, and the other the information on a binary base. The mechanical construction necessary for providing the two pulses, however, would be too complicated for a subscriber's set; furthermore, the period of the two pulses would become far too long, thus impeding a speedy keying.

In case of a single impulse, two kinds of solutions exist. One of them is: to use also the renewed closing after the breaking period of the pulse for signalling. The other one: to signal only during the depression period of the key. In both cases audio-frequency signalling currents can only be used on the sound-level allowed, therefore, protection is needed against eventual *speech-interference* by the calling party.

If there are two time elements (1 break and 1 closure), 12 different digits can be transmitted by 3 signal frequencies, as shown by Table II, for example.

As a matter of fact, the information capacity of this code method is essentially larger. During break,

$$3^2 - 1 = 7$$

different usable combinations, — during closure,

$$3^2 = 8$$

combinations are possible. It is not possible, however, to use the same combination during break and closure, since the register is unable to distinguish between them. Thus, the *maximal information capacity is 49 decimal digits*. (For the

Table II

Digit	Break			Closure		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	+	-	-	-	+	-
2	+	-	-	-	-	+
3	+	-	-	-	+	+
4	-	+	-	+	-	-
5	-	+	-	-	-	+
6	-	+	-	+	-	+
7	-	-	+	+	-	-
8	-	-	+	-	+	-
9	-	-	+	+	+	-
10	+	+	-	-	-	-

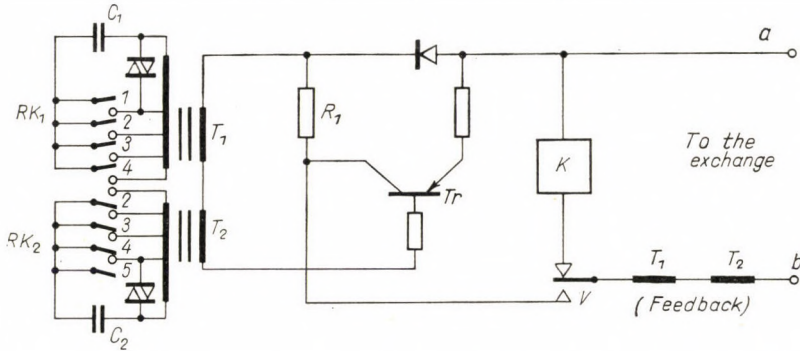


Fig. 5. Digit transmission based on the use of audio-frequency signals

same reason, 2 frequencies would only make the transmission of  $3 \times 3 = 9$  digits possible, therefore this cannot be used.)

This solution is not advisable for 3 reasons:

- There is no possibility of error checking.
- The pulse breaking and closing codes must be produced during the depression of the keys, and this means constructional complications.
- In actual circuits it is difficult to keep the transmission level unchanged when sending 1 or 2 frequencies.

Besides these, generation of 3 or 5 frequencies in the set means nearly the same costs. The schematic diagram of such a set is shown in Fig. 5. Two — practically independent — LC oscillating circuits generate the 5 frequencies, out of which 2 are always connected to the line. In this way

$$\binom{5}{2} = 10$$



different combinations are obtained. These 2 codes out of 5 already have a redundancy and are suitable for self-checking, i.e. for *the detection of one error at a time*. The branchings of the two coupling transformers ensure the different inductivity values. The oscillating circuit  $RK_1$  has to generate the frequencies  $f_1 - f_4$ , — circuit  $RK_2$ , for its own, similarly four, namely the frequencies  $f_2 - f_5$ . In actual construction, a second transistor is needed in order to send the two frequencies over the line of generally 600 ohms on a 1 mW level and to make the generation of the frequencies more stable.

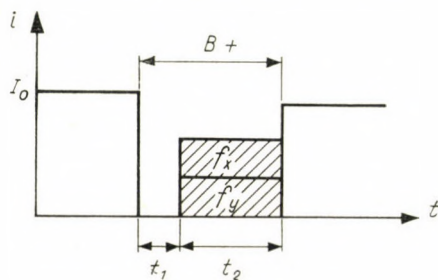


Fig. 6. Time diagram

The time diagram of operation is shown in Fig. 6. On pressing any of the keys down, the common code contact  $V$  switches over from the set to the transmitter circuit, thus eliminating an eventual microphone interference. At the break of the loop, a delay of a period  $t_1$  is introduced by the register in order to leave time for the starting of the oscillation; then the tuned receiver circuits are activated, and the received signals recorded on storage units. The whole operation takes place in 50–60 msec.

The coder and transmitter equipment of the set is quite expensive, since it contains:

- 2 transformers,
- 2 transistors,
- 3 condensers,
- several resistances and
- a keyboard.

The price of the whole apparatus perhaps exceeds that of the dial solution by the price of 3–4 relays. This means a cost increase of  $60 \div 65\%$ . From the point of view of convenience for the subscriber, this is not sufficient in itself to justify the increase in price. It must be investigated, which counter items can be found in the exchange.

A rapid digit transmission results in some economy in two parts of the exchange:

In the registers and in the equipment serving for their switching in, and in the call concentration.

These savings cannot be precisely calculated, they can be estimated only. If the keyboard digit transmission is  $4 \div 5$  times faster than the dial operation, the engagement time of the registers and also their number decrease to a similar proportion.

The number of registers in an exchange of 20 000 is about 300. These — including the switches serving for their connection — represent about 10% of the price of the exchange. The saving may amount to about 1,65 relays per subscriber.

The price of call concentration decreases, because the idle engagement time — i.e. the time during dialling — diminishes with the decrease of the engagement time of the registers. The price of the equipment to be saved in this way may be estimated to about 0,65 relays per subscriber; thus the entire saving amounts to 2,3. Now the apparatus is only by about 1,5 relays more expensive than the present one.

There are also some minor value entries: e.g. in case of a digit transmission to PBX sub-exchanges,  $1 \div 2$  seconds out of the entire connection time can be saved.

Coded multifrequency systems have numerous advantages in addition to the advantages discussed in connection with the previous methods. Thus:

1. Two codes out of five make the error detection in the registers possible. In such cases, the connection is not completed, and — in case of further digit transmission — the error is generally not repeated.

2. In spite of audio-frequency signalling, the speech-interference is eliminated.

3. The speed of digit transmission can be increased up to 10 digits/second, also making an automatic transmission possible, if necessary.

4. The signalling frequencies may be set far from each other, and a sharp tuning of the signal-receivers in the registers is not necessary. This permits a greater tolerance in frequency values and makes a higher operation speed possible.

5. Control of frequencies from the exchange is easily realizable.

However, the *difficulties* to be expected must be considered, too. As already mentioned earlier, the signal-to-noise ratio must be sufficiently high in order not to let the inductive noises of the lines influence the digit transmission. The signal level is given (about 1 mW); the noise, on the other hand, is a function of the length of the line. The 1 mW is *the value at the subscriber's set* and it may diminish — in case of long lines — even to nearly its half at the exchange end. The line parameters producing the distortion similarly increase with line length.

Finally the conclusion may be drawn from what had been said that the faultless operation of any of the rapid digit transmission methods can be safeguarded only then if it is possible to *shorten the length of the subscribers' lines*. In the following part of the present study it is our intention to prove that this shortening of length became already possible through the presently known telephone exchange systems.



#### IV. Application of Concentrators

In Fig. 7 the block diagram of the so-called call concentration stage of a telephone exchange is visible. The subscribers' lines of low efficiency must be reduced to a smaller number, consequently more efficient trunk circuits with the switch equipment *HK*. In practice the efficiency of subscribers' lines is about 10%; the circuits behind the *HK*, on the other hand, show an efficiency of about  $60 \div 70\%$ .

The length of the subscribers' lines can be shortened by providing the telephone network with as many exchanges as possible. It is clear that the

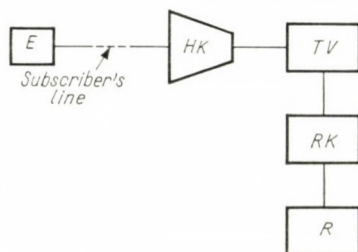


Fig. 7. Block diagram of call concentration

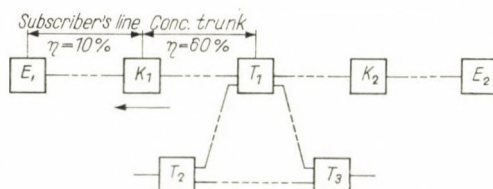


Fig. 8. Block diagram of concentrator network

smaller the area to be attended by an exchange, the shorter are the subscribers' lines. At the same time, however, the number of subscribers belonging to the same exchange decreases. In case of a small number of subscribers, on the other hand, the traffic is insufficient, and the efficiency of the concentrating trunk does not reach the 60% mentioned. For a given station density it can be calculated, what size exchange may be regarded as optimal. The usual result is that, e.g. in a network the size of Budapest, a total of about 1000 exchanges would be economical. This is, however, too high a number from the point of view of maintenance, tandem-formation, etc.

A satisfactory solution is obtained, if only the *HK* part of the exchange is separated and brought nearer to the subscribers. This is the realization of the known principle of concentration. In cross-bar type exchanges the call concentration and the line selection can be combined in so-called *K* concentrators. The diagram of such a network is shown in Fig. 8.

It is not possible to digress from the characteristic features of the concentrators here. It must be emphasized, however, how favourable an effect the application of concentrators and of keyboard digit transmission exert upon each other. In advance, the single fact must be stressed that a strongly decentralized network can be maintained only if the concentrators remain simple in circuitry, and possibly do not perform any other function besides actual concentration.

The following points of view must be mentioned (see Fig. 8):

a) If part  $K$  is removed from the exchange, the subscriber's line is divided into two parts: one of them is the remaining shortened subscriber's line, the other is the now added concentrator trunk. Noise is brought in, in the first line, by the qualitatively weaker subscriber's line, and since this is shortened, a smaller noise may be expected. The concentrator trunks are placed in an armoured cable, thus causing less noise.

b) Since the number of concentrator trunks is about one sixth of the number of subscribers, the cross-section of the concentrator trunks can be increased, and still there is a gain in copper weight. On account of the trunks of smaller resistance, the ohmic resistance and attenuation of the connection between  $E$  and  $R$  diminishes. This circumstance — as emphasized several times already — increases the safety of the keyboard operated digit transmitter circuit (even in the voltage-measuring solutions).

c) Furthermore, the multifrequency coded digit transmission makes it possible also to build the microphone feeding bridge in  $K$ . (In case of dials this would be realizable with difficulty, since the pulses would have to be transferred across the feeding bridge!) The audio-frequency signalling currents get across the feeding bridge. The feeding bridge placed in  $K$  has as a result, that the feed current of the microphone can be kept — making use of the stabilizing effect of ballast tubes — at a *constantly high value*. This increases the output of the microphone and keeps it at a constant high value.

## V. Conclusion

With the aid of the presently known up-to-date cross-bar type exchanges, the optimal decentralization of telephone networks can be economically solved even today. The operation of these exchanges is so reliable that the costs of maintenance is less by an order of magnitude than the earlier Rotary-type exchanges, therefore the concentrators can be operated *without supervision*.

As a result of the use of concentrators, *the ohmic resistance and the attenuation of the subscribers' lines decrease*, having two essential consequences:

a) Placing the feeding bridge in the concentrator, the microphone current can be kept at a high value, increasing thereby the *transmission power*.



b) *The signal-to-noise ratio* improves, because *less noise* is brought in by the *shorter subscribers' lines*, and the output power of the signalling frequencies on the receiver side will be higher because of the smaller attenuation of the subscriber's line. In this way, the *safety* of digit transmission increases.

## REFERENCES

1. ALBRECHT, H.: Die Teilnehmerstation heute und in Zukunft. *Technische Mitteilungen PTT* (1963) IV.
2. SCHENKER, L.: Pushbutton Calling with a Two-Group Voice-Frequency Code. *Bell System Techn. Journal* (1960), No. 1.
3. MEASCHAM, L. A.: Tone Ringing and Pushbutton Calling. *Bell System Techn. Journal* (1958), No. 2.
4. HENQUET, A. J.: Pentaconta Line Concentrators. *Electrical Communication* (1963), No. 2.

BESCHLEUNIGUNG DER ZAHLENÜBERTRAGUNG  
VON FERNSPRECH-TEILNEHMERN

L. KOZMA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz beschäftigt sich mit den Beschleunigungsmöglichkeiten der Informationsübertragung von Fernsprech-Teilnehmern. Zuerst werden die Grundsätze der aus Literatur bekannten Methoden kurz dargestellt, dann die Sicherheitsgesichtspunkte der Zahlenübertragung behandelt. Es wird gezeigt, daß eine sichere Zahlenübertragung — wegen der Möglichkeit der Veränderung der Linienparameter der jetzigen Fernsprechnetze in einem breiten Bereich — nur durch eine Erhöhung des Signal-Rausch-Verhältnisses verwirklicht werden kann. Dieses Ziel kann aber durch eine solche Dezentralisation des Netzwerkes erreicht werden, die die gegenwärtige wesentlich übertrifft. Ein Weg dazu führt über die Anwendung von Fernsprechzentralen vom Konzentrador-Typ. Neben einer Besserung des Signal-Rausch-Verhältnisses, erhöht sich auf diese Weise auch die Sendeleistung des Teilnehmer-Apparates.

ACCÉLÉRATION DES TRANSMISSIONS DE CHIFFRES  
PAR LES ABONNÉS AU TÉLÉPHONE

L. KOZMA

RÉSUMÉ

L'étude traite des possibilités d'accélérer la transmission d'informations effectuée par les abonnés au téléphone. Les principes fondamentaux des méthodes connues de la littérature sont d'abord brièvement exposés par l'auteur, qui examine ensuite le point de vue de la sécurité de la transmission des chiffres. Il démontre que les paramètres des lignes d'abonnés des réseaux actuels pouvant varier entre de larges limites, une transmission sûre des chiffres ne peut être réalisée que par l'augmentation du rapport signal/bruit. Cette condition ne saurait être atteinte que par une bien plus grande décentralisation des réseaux. Un des moyens consiste à utiliser le central de type concentrateur. A part l'augmentation du rapport signal/bruit, on arrive à élever aussi, de cette façon, la puissance d'émission des appareils d'abonnés.

## УСКОРЕНИЕ ПОСЫЛКИ ТЕЛЕФОННЫХ АБОНЕНТСКИХ КОДОВ

Л. КОЗЬМА

## РЕЗЮМЕ

Работа занимается возможностями ускорения посылки телефонных абонентских информаций. Кратко излагаются принципы известных по литературе методов, после чего говорится о точках зрения надежности посылки кодов. Показано, что вследствие изменения в широких пределах параметров абонентских линий теперешних телефонных сетей, надежная посылка кодов может быть достигнута только в условиях возросшего отношения сигнал/шум. Данную цель можно достигнуть только при значительно большей чем теперешняя децентрализации сетей; одним методом решения этой задачи является применение концентраторных станций. Наряду с улучшением отношения сигнал/шум улучшается также качество телефонирования телефонных аппаратов.



# CONTRÔLE DES CONDITIONS DE FISSURATION ET DE DÉFORMATION DE DALLES DIMENSIONNÉES A L'ÉTAT LIMITE ULTIME

Prof. FRANCO LEVI

PRÉSIDENT DU COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON

[Manuscrit présenté le 9. Octobre 1964]

Le mémoire se propose d'obvier à une insuffisance typique des méthodes de dimensionnement des dalles qui ne considèrent que l'état limite ultime (p. ex. la théorie des lignes de rupture): à savoir l'absence de toute indication sur le comportement en phase d'exploitation. La méthode indiquée, fondée sur une théorie de l'adaptation des dalles proposée par l'auteur en 1950, assimile l'effet des fissures à celui de «distorsions» dont on étudie l'effet sur le régime d'équilibre. Pour simplifier le calcul, on remarque que la déformée de la dalle provoquée par une distorsion n'est autre que la surface d'influence du moment fléchissant pour la section où la distorsion a été introduite. Or la connaissance de la déformée implique celle de tous les aspects du régime des efforts; si l'on connaît la relation entre valeur du moment fléchissant et ampleur des fissures, et si l'on possède la surface d'influence correspondant à la section fissurée, il est donc possible de suivre le comportement de la dalle après fissuration et de contrôler si la charge d'exploitation compatible avec la capacité portante ultime donne lieu à des conditions de service acceptables. Un exemple numérique simple illustre les détails d'application du procédé et met en évidence les grandes capacités d'adaptation dont disposent les dalles. La conclusion indique les recherches expérimentales qui paraissent nécessaires pour une application systématique de la méthode.

On sait que le dimensionnement des dalles par la théorie des lignes de rupture ne donne aucune garantie quant au fonctionnement en phase d'exploitation. C'est ainsi que les *Recommandations Pratiques du Comité Européen du Béton* (paragraphe CR 3.21) suggèrent d'imposer des limites aux rapports entre les moments de rupture des différentes sections de la dalle, afin d'éviter des risques de fissuration ou de déformation excessives. Par ailleurs les mêmes *Recommandations* (paragraphe R. 3.21) indiquent que l'extension de la théorie de l'élasticité au delà de ses hypothèses de base devrait permettre dans certains cas de déterminer les conditions de fissuration et de déformation sous les charges d'utilisation.

Ce dernier paragraphe fait implicitement allusion à une méthode d'évaluation des effets de déformations non élastiques (déformations plastiques proprement dites ou fissures) que nous avons proposée en 1950 [1]. Cette méthode, qui consiste à assimiler l'effet des déformations non élastiques à celui de distorsions de SOMIGLIANA, permet en effet d'évaluer les redistributions des contraintes qui accompagnent le dépassement local des limites d'élasticité du matériau. Une application systématique du procédé en question, à l'interprétation théorique du comportement expérimental d'une dalle carrée simplement appuyée soumise à quatre charges concentrées, a d'ailleurs fait l'objet tout récemment d'une étude approfondie de la part d'un de nos collaborateurs [2].

Les résultats illustrés dans cette note confirment la validité de la méthode.

La lecture des Recommandations du *C.E.B.* et des mémoires que nous venons de citer, pourrait cependant donner l'impression que l'application du procédé en question aux problèmes concrets exige des calculs laborieux, ou pour le moins l'établissement préalable d'abaques spéciaux donnant les états de contrainte et de déformation provoqués par les distorsions localisées.

Nous voudrions montrer ici que l'utilisation des théorèmes de réciprocité permet de simplifier considérablement le travail dont il s'agit et qu'en utilisant les surfaces d'influence des moments de flexion disponibles dans la bibliographie, il est possible dans beaucoup de cas d'instituer sans trop de difficultés un contrôle du fonctionnement des dalles en phase d'exploitation.

\*

Notons tout d'abord que ce qui intéresse essentiellement le calculateur qui a dimensionné une dalle par la méthode des lignes de rupture, c'est d'éviter que, sous la charge d'exploitation, les zones de la dalle soumises aux plus fortes contraintes ne donnent lieu à une fissuration excessive (et que, en même temps, la déformation qui accompagne cette fissuration ne dépasse pas les limites admissibles). Or, en général, le dépassement des limites d'élasticité qui peut se produire sous les charges d'exploitation n'intéresse qu'un petit nombre de zones de la dalle. De plus, ces zones étant les plus sollicitées, il arrive fréquemment, pour les dalles des types les plus courants, que l'on dispose des surfaces d'influence des moments correspondantes.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer qu'il est possible d'utiliser ces surfaces d'influence pour étudier le comportement de la dalle fissurée. Pour simplifier le raisonnement, nous supposerons tout d'abord que la fissuration n'intéresse qu'une seule zone; successivement nous généraliserons la méthode au cas où la fissuration intéresse plusieurs régions de la dalle.

Soit donc un point  $i$  d'une dalle pour lequel nous supposons de connaître la surface d'influence du moment agissant dans la direction  $x$  rapporté à l'unité de longueur ( $m_{ix}$ ). Suivant l'interprétation proposée dans notre mémoire [1], cette surface d'influence peut être interprétée comme la déformée de la dalle obtenue en introduisant au point  $i$ , et dans une direction perpendiculaire à  $x$ , une distorsion d'ampleur unitaire appliquée à une «coupure» de longueur unitaire.\* En fait nous serons toujours amenés à opérer sur un treillis élastique ayant par exemple des mailles carrées de longueur  $\lambda$  (les charges étant alors supposées réparties sur une maille de côté  $\lambda$  centrée sur le point  $i$ ). Dans ce cas, nous devons imaginer d'introduire la distorsion sur une coupure de lon-

\* Pour la discussion détaillée de cette opération, on voudra bien se reporter au mémoire cité en [1].



gueur  $\lambda$  centrée sur le point  $i$  et l'ordonnée correspondante  $J$  de la déformée sera égale au produit par  $\lambda$  de l'ordonnée sans dimensions  $y$  de la surface d'influence.

La connaissance d'une surface d'influence des moments équivaut donc à la connaissance de la surface élastique donnée par une distorsion localisée au point  $i$ . Or on sait que, partant des ordonnées de la surface élastique, il est facile de calculer toutes les caractéristiques de l'état de contrainte, en particulier les moments en un point quelconque de la dalle. En nous reportant aux expressions qui figurent dans le mémoire [1], nous aurons par exemple pour les moments de flexion en un point  $R$  quelconque (évalués toujours par la méthode des différences finies), (fig. 1)

$$\begin{aligned} m_{Rx} &= \frac{B}{\lambda^2} [(2J_R - J_a - J_b) + \nu(2J_R - J_c - J_d)] \\ m_{Ry} &= \frac{B}{\lambda^2} [(2J_R - J_c - J_d) + \nu(2J_R - J_a - J_b)] \end{aligned} \quad (1)$$

expressions dans lesquelles  $B$  représente la raideur de la dalle, soit, pour une dalle d'épaisseur  $s$  caractérisée par un coefficient de contraction latérale  $\nu$ :

$$B = \frac{Es^3}{13(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Dans les expressions (1), les ordonnées  $J$  pourront être évaluées, comme indiqué plus haut, par des expressions de la forme:

$$J = \lambda y. \quad (3)$$

Au point  $i$  lui-même, mises à part certaines causes d'imprécision qui sont analysées dans le mémoire [1], les expressions des moments comportent des termes supplémentaires provenant de la présence au point  $i$  de «courbures imposées» données par la distorsion. Dans le cas général où il y aurait au point  $i$  deux distorsions, l'une suivant  $x$ , l'autre suivant  $y$ , les moments s'écriraient sous la forme:

$$\begin{aligned} m_{iz} &= \frac{B}{\lambda^2} [(2J_i - J_a - J_b) + \nu(2J_i - J_c - J_d)] - B(\bar{\mu}_{ix} + \nu\bar{\mu}_{iy}), \\ m_{iy} &= \frac{B}{\lambda^2} [(2J_i - J_c - J_d) + \nu(2J_i - J_a - J_b)] - B(\bar{\mu}_{iy} + \nu\bar{\mu}_{ix}). \end{aligned} \quad (4)$$

Dans ce cas naturellement, les ordonnées telles que  $J_i, J_a$  etc... devront correspondre à l'effet simultané des deux distorsions introduites.

Si, comme nous l'avons supposé plus haut, la distorsion n'est introduite que sur une coupure perpendiculaire à  $x$ , intéressant un segment de longueur  $\lambda$  centré sur  $i$  et orienté suivant l'axe des  $x$  (fig. 1), nous aurons:

$$\bar{\mu}_{ix} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\bar{\mu}_{iy} = 0$$

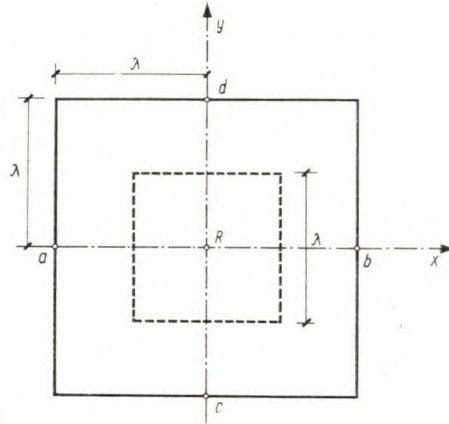


Fig. 1

et les ordonnées  $J$  seront à déduire de la surface d'influence du moment  $m_{ix}$ .

Ce qui précède montre donc qu'il est possible, quand on dispose des surfaces d'influence convenables, d'évaluer les états de contrainte et de déformation donnés par une distorsion. Et comme l'effet d'une fissuration localisée est assimilable à celui d'une distorsion, ceci revient à dire que, par le truchement des surfaces d'influence, nous sommes en mesure d'étudier les redistributions d'efforts et les déformations provoquées par les fissures.

Proposons-nous maintenant d'appliquer ces raisonnements à l'étude d'une dalle fissurée.

Pour effectuer une étude du comportement de la dalle en phase de fissuration, il faut évidemment supposer de connaître la relation qui existe entre la valeur du moment fléchissant et les conditions correspondantes de fissuration. Une telle relation, assez facile à établir dans le cas d'une poutre, n'est pas connue avec précision dans le cas des dalles pour lesquelles il y aurait lieu de faire état d'un critère de fissuration biaxiale. En l'absence de données précises sur cet aspect du problème, dans ce qui suit nous utiliserons le critère élémentaire qui consiste à admettre que chaque élément de dalle se comporte comme un élément de poutre isolée (autrement dit nous admettrons que la fissuration ne soit aucunement influencée par la présence d'un état de contrainte biaxial).



Il est toutefois important de signaler que le procédé que nous illustrons ci-après consentirait d'introduire d'autres critères de fissuration.

En raisonnant comme sur une poutre, nous admettrons donc de connaître la relation qui subsiste entre moment appliqué à un élément de dalle et largeur des fissures. Nous supposerons également que, compte tenu de l'allure du diagramme des moments, il soit possible de définir avec une approximation suffisante l'extension de la zone fissurée et la distance entre les fissures. En d'autres termes, nous admettrons d'être en mesure d'évaluer, en fonction du moment maximum atteint au point  $i$ , la somme des ouvertures des fissures  $\Sigma W_{ix}$  se produisant au voisinage du point  $i$ , et par conséquent l'ampleur de la distorsion  $\bar{\varphi}_{ix} = \Sigma W_{ix}/s$  dont il faut tenir compte dans l'étude des conditions d'équilibre (l'indice  $ix$  signifie: fissure ou distorsion dans la zone  $i$ , perpendiculaire à la direction  $x$ ).

Dans le domaine des poutres, il est courant d'admettre que le diagramme moment-rotation prenne une allure trilineaire; c'est d'ailleurs sur une hypothèse de ce genre que s'est appuyé avec succès M. Callari dans le mémoire cité précédemment. Dans ce qui suit, nous utiliserons également cette schématisation et nous admettrons donc que l'ampleur de la distorsion  $\bar{\varphi}_{ix}$  soit proportionnelle à la différence entre le moment  $m_{ix}$  et le moment  $m_1$  qui caractérise la fin d'un comportement élastique, soit:

$$\bar{\varphi}_{ix} = f_{ix} (m_{ix} - m_1). \quad (5)$$

En considérant cette relation comme valable en valeur algébrique, et en considérant le coefficient  $f_{ix}$  comme essentiellement positif, nous attribuons implicitement à  $\bar{\varphi}_{ix}$  le même signe qu'au moment qui lui donne naissance.

En général, pour éviter des complications de calcul, nous serons pratiquement obligés d'admettre que toutes les fissures soient comprises à l'intérieur de la maille de côté  $\lambda$  centrée sur le point  $i$ . Ceci pourra amener une certaine imprécision en présence d'une fissuration étendue, mais nous estimons que, comme dans les poutres, cette approximation est généralement acceptable.

Par ailleurs, pour tenir compte que, dans l'intervalle  $\lambda$ , mesuré suivant l'orientation des fissures, l'ouverture des fissures est certainement variable, dans l'évaluation de  $\bar{\varphi}$ , il y aura lieu d'appliquer à  $\Sigma W$  un coefficient de réduction  $c$  dont la valeur devra être établie expérimentalement\*. Nous aurons donc en réalité:

$$\bar{\varphi}_{ix} = \frac{c \Sigma W_{ix}}{s}. \quad (6)$$

\* La corrélation entre la valeur arbitraire de  $\lambda$  et l'ampleur de la distorsion  $\varphi_{ix}$  à introduire dans les calculs constitue assurément un élément d'incertitude que seule l'expérience pourra lever. Pour cette raison, les données numériques qui figurent dans les exemples développés ci-après ne peuvent avoir qu'une valeur purement indicative.

Comme indiqué plus haut, à la présence de la distorsion  $\varphi_{ix}$  correspondra l'apparition au point  $i$ , suivant  $x$ , d'une courbure imposée:

$$\bar{\mu}_{ix} = \frac{\bar{\varphi}_{ix}}{\lambda} = \frac{f_{ix}(m_{ix} - m_1)}{\lambda} \quad (7)$$

et l'effet statique de la fissuration correspondante pourra être évalué par les expressions (1), (4) où les valeurs des ordonnées seront naturellement affectées du facteur  $f_{ix}(m_{ix} - m_1)$ . Ces expressions donneront l'effet de redistribution provoqué par les fissures. Pour distinguer les sollicitations correspondantes de la sollicitation totale, qui comprend également l'effet élastique des charges appliquées, nous représenterons les moments donnés par les formules (1) et (4) par une notation surlignée. Nous écrirons par exemple:

$$\begin{aligned} \bar{m}_{ix} = (m_{ix} - m_1) f_{ix} \frac{B}{\lambda^2} [(2J_i - J_a - J_b) + \\ + \nu(2J_i - J_c - J_d)] - \frac{B f_{ix}(m_{ix} - m_1)}{\lambda} \end{aligned} \quad (8)$$

et nous poserons:

$$\bar{m}_{ix} = (m_{ix} - m_1) R \quad (9)$$

où le coefficient  $R$ , quantité sans dimensions, s'écrit

$$R = f_{ix} \frac{B}{\lambda^2} [(2J_i - J_a - J_b) + \nu(2J_i - J_c - J_d)] - \frac{B}{\lambda} f_{ix}. \quad (10)$$

Supposons alors que la charge appliquée à la dalle varie en restant semblable à elle-même, et que la théorie des lignes de rupture nous ait permis d'évaluer la valeur  $Q^*$  de la charge limite. Si  $\gamma_s$  est le coefficient de majoration des charges, la valeur de la charge caractéristique compatible avec les conditions de résistance à l'état ultime vaut:

$$Q_k = \frac{Q^*}{\gamma_s}. \quad (11)$$

Conformément aux principes des *Recommandations du C.E.B.*, il y aura alors lieu de contrôler si, en présence de cette charge caractéristique, les conditions de fissuration et de déformation sont acceptables.

Soit alors  $m_{ix}$  le moment déterminé au point  $i$  suivant  $x$  par une charge  $Q$  de valeur unitaire en régime purement élastique, nous pourrions en définitive évaluer le moment total  $m_{ix}$  donné par  $Q_k$  en régime de fissuration par une relation de la forme:

$$m_{ix} = Q_k m_{ix} + (m_{ix} - m_1) R, \quad (12)$$

soit:

$$m_{ix} = \frac{Q_k m_{ix} - m_1 R}{1 - R}. \quad (13)$$



La connaissance de  $m_{ix}$  permet alors d'évaluer l'ampleur maximum des fissures ainsi que les déformations que ces fissures provoquent (et qui s'ajoutent à la déformation donnée par l'effet élastique de la charge).

Le procédé fournit donc bien tous les éléments nécessaires pour instituer le contrôle des conditions de fonctionnement sous la charge  $Q_k$ .

Une autre façon d'appliquer le procédé pourrait consister dans l'évaluation préalable du moment limite  $m_L$  qui correspond à l'apparition au point  $i$  de la fissuration admissible. Dans ce cas, la relation (12) permettrait d'évaluer la valeur de la charge  $Q$  compatible avec les conditions de fissuration admises en écrivant:

$$\varphi \underline{m}_{ix} + (m_L - m_1) R = m_L,$$

soit:

$$Q = \frac{m_L(1 - R) + m_1 R}{\underline{m}_{ix}}. \quad (14)$$

Valeur qui serait à comparer avec  $Q_k$ .

Avant de conclure, nous croyons utile de rappeler une fois encore que le procédé de calcul que nous venons de proposer comporte un certain nombre d'imprécisions et d'incertitudes dont l'influence sur les résultats des calculs devra être évaluée par voie d'expérience.

Voici, brièvement résumées, les principales causes d'erreur:

- approximation donnée par l'adoption de la méthode des différences finies (d'autant plus faible que les mailles du réseau sont plus serrées);
- incertitudes concernant l'évaluation de l'ouverture des fissures en régime biaxial' aussi bien dans le sens perpendiculaire aux fissures que suivant leur direction propre, et incertitudes sur la corrélation entre  $\bar{\varphi}_{ix}$  et les dimensions attribuées au treillis élastique;
- imprécision que comporte l'application des expressions (4) à l'évaluation des moments au point  $i$  (voir à ce propos le mémoire cité en [1]).

Malgré toutes ces approximations, nous sommes cependant persuadés que la méthode présente un intérêt réel dans les applications pratiques car elle permet, au moyen de calculs simples fondés sur l'utilisation des surfaces d'influence classiques, un contrôle vraisemblable des conditions d'exploitation de dalles calculées «en rupture».

Ainsi que nous le verrons dans l'exemple numérique qui suit, il arrive cependant très fréquemment que l'apparition de fissures dans la zone la plus sollicitée  $i$  d'une dalle entraîne très rapidement la création de fissures dans une deuxième zone  $u$  (c'est ce qui se produit par exemple dans les dalles rectangulaires où les moments dans les coins sont du même ordre de grandeur que les moments au centre de la dalle). Dans ce cas, pour mener à bien le calcul, il faudra disposer des surfaces d'influence des moments en  $i$  et en  $u$ . D'autre part, à l'équation linéaire (12) il faudra cette fois substituer un système de deux équations où les inconnues seront les valeurs des moments en  $i$  et en  $u$ .

Le procédé se complique ultérieurement si en  $i$  et en  $u$  la fissuration se produit simultanément suivant  $x$  et suivant  $y$  (ou bien suivant deux autres directions  $r$  et  $s$ , auquel cas il y a lieu d'introduire un critère d'équivalence de distorsions différemment orientées). En principe, dans un pareil cas il faudrait disposer de quatre surfaces d'influence et l'on parviendrait à un système de quatre équations à quatre inconnues. Dans de nombreux cas cependant des considérations de symétrie permettent de simplifier les calculs.

Encore faut-il remarquer toutefois que souvent l'étendue des zones soumises à des moments intenses au voisinage des coins est très réduite et qu'il est possible d'en éviter la fissuration en  $y$  introduisant une petite quantité d'armature supplémentaire. Si l'on procède ainsi, on peut alors simplifier dans une large mesure le contrôle des conditions d'exploitation.

### Exemple numérique\*

Proposons-nous d'établir la capacité portante d'une dalle rectangulaire d'une épaisseur de 12 cm ayant en plan les dimensions:  $a = 400$  cm;  $b = 500$  cm;  $a/b = 0,8$ ). La dalle est supposée armée uniformément dans les deux sens par 1  $\varnothing$  14 mm tous les 14 cm (hauteur utile:  $h^* = 10$  cm). On suppose que les coins comportent une armature supplémentaire capable de rendre négligeable l'effet de la fissuration correspondante.

Les matériaux sont supposés présenter les résistances de calcul ci-après:

$$\sigma_a^* = 3600 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_b^* = 200 \text{ kg/cm}^2$$

Coefficient de majoration des surcharges:  $\gamma_s = 1,4$ .

D'après la théorie de JOHANSEN, si  $m_r$  est le moment de rupture par unité de longueur, la valeur  $q_r$  de la charge répartie qui correspond à l'état limite ultime est donnée par la relation:

$$m_r = \frac{q_r ab}{8 \left( 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}$$

soit ici:

$$q_r = \frac{24,4 m_r}{1,25 a^2} = 1,22 m_r \text{ kgm/m}^2$$

( $m_r$  étant exprimé en kg.m/m).

Avec les données du problème on a:

$$m_r = 3600 \text{ kgm/m},$$

ce qui donne:

$$q_r = 4400 \text{ kg/m}^2.$$

La valeur caractéristique correspondante de la charge est donc:

$$q_k = \frac{4400}{1,4} = 3150 \text{ kg/m}^2.$$

Vérifions maintenant cette même dalle par la méthode classique. Si l'on attribue au coefficient de sécurité  $\gamma_1$  la valeur 1,5 et si l'on suppose que l'écart quadratique moyen sur la résistance du béton soit égal à 0,15, la résistance moyenne à prendre en compte est:

$$\sigma_{bm} = \frac{200 \times 1,5}{1 - 1,64 \times 0,15} = 400 \text{ kg/cm}^2$$

\* Dans ce qui suit nous avons adopté les notations du C.E.B.



D'après le règlement italien en vigueur, ce béton peut travailler à 95 kg/cm<sup>2</sup>, ce qui donne, avec  $n = 8$ , un moment admissible:

$$\bar{m} = 1450 \text{ kgm/m}$$

(le taux de travail correspondant de l'acier étant 1450 kg/cm<sup>2</sup>). En régime élastique, la charge répartie admissible correspondant à  $\bar{m}$  vaut alors:

$$\bar{q} = \frac{1450}{0,0447 \times 1,25 \times 16} = 1620 \text{ kg/m}^2.$$

On voit donc que la charge caractéristique  $q_k$  déduite de la théorie de Johansen est presque double de la charge admissible donnée par la théorie classique. Il est donc logique de se demander si les conditions de fissuration et de déformation en présence de  $q_k$  sont encore acceptables.

Pour instituer un contrôle des conditions de fonctionnement en régime fissuré, il nous faut tout d'abord analyser le comportement d'un élément de dalle en phase de fissuration.

Dans notre calcul, nous utiliserons les formules de Brice et nous admettrons qu'entre le taux d'adhérence de ronds lisses et la résistance à la traction, il y ait un rapport de 1,5. Avec cette hypothèse, l'intervalle maximum entre fissures vaut:

$$\Delta l_{\max} = 11,4 \text{ cm}$$

et l'intervalle moyen:  $\Delta l_m = 8,6 \text{ cm}$ .

Nous admettrons que la fissuration commence lorsque l'acier atteint le taux de travail de 1450 kg/cm<sup>2</sup> (taux qui est atteint lorsque la dalle supporte la charge admissible calculée par la méthode classique). La valeur correspondante du moment est:

$$m_1 = 1450 \text{ kgm/m}$$

Pour une ouverture maximum de 1/10 mm, le taux de travail de l'acier vaut approximativement:

$$\frac{0,01}{8,6} \times 2,10^6 = 2330 \text{ kg/cm}^2.$$

et le moment limite correspondant:

$$m_L = 2330 \text{ kgm/m}.$$

Pour calculer l'effet de la fissuration, nous utiliserons les tables 13 et 14 du manuel de PUCHER [3], qui, pour une dalle caractérisée par  $a/b = 0,8$ , comportent  $8 \times 10$  intervalles. Nous poserons donc dans notre cas  $\lambda = 50 \text{ cm}$  et nous admettrons que la distorsion provoquée par la fissuration soit entièrement localisée dans le carré de 50 cm de côté centré sur le milieu de la dalle.

Sur la base d'une évaluation sommaire (dont la validité ne pourra être appréciée que par voie d'expérience) nous admettrons que, compte tenu du choix de la valeur de  $\lambda$ , lorsque le moment agissant suivant le petit côté de la dalle atteint au centre de la dalle la valeur  $m_L$ , la fissuration correspondante soit équivalente à une distorsion

$$\bar{\varphi}_{ixL} = c \frac{\sum W}{h} = 0,008.$$

En attribuant au module du béton la valeur  $E_k = 300\,000 \text{ kg/cm}^2$  il vient par ailleurs (avec  $\nu = 0$ )  $B = 300\,000 \frac{12^3}{12} = 430 \cdot 10^5 \text{ kgcm}$ .

Avec nos notations on, a par ailleurs:

$$f_{ix} = \frac{\bar{\varphi}_{ixL}}{m_L - m_1} = \frac{0,008}{880} \text{ kg}^{-1}.$$

Les valeurs moyennes des ordonnées des tables de PUCHER dans les carrés centrés sur les points qui interviennent dans le calcul par différences finies sont d'autre part:

$$y_i = 0,227, \quad y_a = y_b = 0,111;$$

(la valeur de  $y_i$ , particulièrement difficile à évaluer sur les tables de PUCHER, a été contrôlée sur les tables de BITTNER [4] en considérant l'effet d'une charge répartie sur un carré de 50 cm de côté centré sur le milieu de la dalle).

On a donc, d'après la formule (10):

$$R = - \frac{0,008}{880} \frac{430 \cdot 10^5}{50} \cdot 0,768 = - 6 .$$

Les tables de BITTNER donnent en outre:

$$\underline{m}_{ix} = 0,0447 \cdot 1,25 \times 16 = 0,894 \text{ m}^2 .$$

La charge  $q$  compatible avec la fissuration considérée (fissures limitées à 1/10 mm) serait donc d'après la formule (14):

$$\bar{q} = \frac{2330(1+6) - 1450 \times 6}{0,894} = 8550 \text{ kg/m}^2 .$$

Ce résultat apparemment absurde signifie en fait que l'effet de redistribution des contraintes donné par l'apparition des fissures est extrêmement efficace. Il est évident qu'en réalité, bien avant que perpendiculairement au petit côté les fissures atteignent la largeur admise, une fissuration se produira perpendiculairement au grand côté de la dalle (rappelons que nous avons exclu qu'une fissuration puisse se produire au voisinage des coins). Pour en avoir confirmation, il suffit de calculer, d'après la formule (13) le moment  $m_{ix}$  donné par la charge caractéristique  $q_k = 3150 \text{ kg/cm}^2$ . Il vient en effet:

$$m_{ix} = \frac{3150 \times 0,894 + 1450 \times 6}{7} = 1645 \text{ kgm/m} .$$

A cette même valeur de la charge correspondrait par ailleurs, en régime élastique, un moment  $m_{iy}$  donné par la formule:

$$m_{iy} = 3150 \times 0,0268 \times 1,25 \times 16 = 1680 \text{ kgm/m}$$

qui dépasse déjà nettement la valeur  $m_1$  (et ce dépassement serait encore bien plus marqué si l'on tenait compte des fissures apparues perpendiculairement au petit côté).

Nous devons donc reprendre notre étude en considérant l'influence des deux fissurations simultanées. Pour cela nous admettrons que la loi de fissuration soit la même suivant  $x$  et suivant  $y$ , autrement dit nous poserons:

$$f_{iy} = f_{ix} = \frac{0,008}{880} \text{ kg}^{-1} .$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment, mais en affectant les différentes quantités d'indices se rapportant aux deux directions considérées, nous écrirons alors (cfr. formule (12)):

$$\left. \begin{aligned} m_{ix} &= Q_K \underline{m}_{ix} + \bar{m}_{ix} , \\ m_{iy} &= Q_K \underline{m}_{iy} + \bar{m}_{iy} ; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_{ix} &= (m_{ix} - m_1) R_{xx} + (m_{iy} - m_1) R_{xy} , \\ \bar{m}_{iy} &= (m_{ix} - m_1) R_{yx} + (m_{iy} - m_1) R_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$



où nous avons posé (avec  $\nu = 0$ )

$$R_{xx} = f_{ix} \frac{B}{\lambda^2} [(2J_{iz} - J_{ax} - J_{bx})] - \frac{B}{\lambda} f_{ix},$$

$$R_{yy} = f_{iy} \frac{B}{\lambda^2} [(2J_{iy} - J_{cy} - J_{dy})] - \frac{B}{\lambda} f_{iy},$$

$$R_{xy} = R_{yx} = f_{ix} \frac{B}{\lambda^2} [(2J_{ix} - J_{cx} - J_{dx})] = f_{iy} \frac{B}{\lambda^2} [(2J_{iy} - J_{cy} - J_{dy})].$$

En résolvant les équations (16) il vient alors:

$$m_{ix} = \frac{\varphi_K m_{ix}(1 - R_{yy}) - m_1(R_{xx} + R_{yy})(1 - R_{yy}) + Q_K m_{iy} R_{xy} - m_1(R_{yx} + R_{yy}) R_{xy}}{(1 - R_{xx})(1 - R_{yy}) - R_{yx}^2} \quad (17)$$

et une expression analogue pour  $m_{iy}$  obtenue par permutation des indices.

D'après les tables de BITTNER, on a dans notre exemple:

$$m_{iy} = 0,0268 \times 1,25 \times 16 = 0,536 \text{ m}^2,$$

et d'après les tables de PUCHER:

$$R_{xy} = R_{yx} = 0,123 f_{ix} \frac{B}{\lambda},$$

$$R_{yy} = -0,767 f_{ix} \frac{B}{\lambda}.$$

En reportant ces valeurs dans les expressions (17) on obtient:

$$m_{ix} = 1653 \text{ kgm/m},$$

$$m_{iy} = 1512 \text{ kgm/m}.$$

Dans ces conditions, les fissures perpendiculaires à  $x$  atteignent environ un quart de la valeur maximum admise, et la déformation que les fissures déterminent au point  $i$  et qui s'ajoute à la déformation élastique vaut:

$$\frac{0,008}{4} \times 0,227 \times 500 \approx 0,22 \text{ mm}.$$

(en fait il faudrait ajouter à cette valeur l'effet, d'ailleurs très limité, de la distorsion, donnée par  $m_{iy}$ ).

\*

Indépendamment de toutes les incertitudes que le procédé comporte, qui ne pourront être levées que par un approfondissement des bases théoriques et expérimentales du procédé, il nous semble que l'exemple numérique développé ci-dessus permet de formuler les conclusions suivantes:

a) Les dalles sont extrêmement sensibles aux effets de redistribution des contraintes donnés par les distorsions. Cette sensibilité est telle que l'on peut même se demander si le calcul des contraintes élastiques dans une dalle en béton armé est capable de donner une image vraisemblable du comportement réel dès que l'on se rapproche de l'état fissuré.

b) Si l'ordre de grandeur de nos résultats se trouvait confirmé, on pourrait en déduire que, dans la plupart des cas, les charges admissibles déduites de la théorie des lignes de rupture devraient correspondre à des conditions de fissuration et de déformation acceptables. Ceci à condition toutefois que des dispositions soient prises pour contrecarrer les effets de défaillances localisées, comme par exemple la fissuration des coins des dalles rectangulaires. (L'apparition de fissures dans ces zones réduirait en effet dans de larges proportions l'effet de redistribution donné par les fissures apparues dans la zone centrale de la dalle.)

c) L'importance considérable des phénomènes de redistribution observés permettrait en outre d'affirmer que pour les dalles, encore plus que pour les systèmes linéaires, vaut la remarque de M. MACCHI [5] d'après laquelle, en phase de fissuration avancée, les conditions d'équilibre interne peuvent être facilement satisfaites par de très faibles variations d'ampleur des distorsions. D'où la possibilité d'étudier la configuration ultime en se basant sur de simples considérations de compatibilité géométrique de la dalle assimilée à un système rigide-plastique. Pour les dalles qui comportent des sections faiblement armées d'aciers à palier, ces raisonnements conduisent à confirmer la théorie de JOHANSEN. En revanche, pour les dalles comportant des sections fragiles (forts pourcentages d'armature) ou écrouissables (aciers sans palier), on pourrait parvenir de cette manière à un perfectionnement de la théorie des lignes de rupture qui consisterait à prendre en compte un moment résistant variable le long des charnières séparant les différents éléments de la dalle.

Pour conclure, nous voudrions donc souhaiter que l'étude théorique et expérimentale du procédé que nous venons d'exposer soit poursuivie activement, en vue de contrôler les conclusions provisoires que nous avons cru pouvoir tirer de nos premiers résultats.

#### LITTÉRATURE

1. LEVI, F.: Superfici d'influenza e fenomeni di adattamento nelle lastre piane. *Giornale de Genio Civile*, N° 5—1950.
2. CALLARI, C. E.: Méthode générale de calcul des dalles dans le domaine anélastique. *Annales de l'Institut Technique* — Paris Septembre 1964 — XVII<sup>e</sup> Année — n° 201 — Série «Théories et méthodes de calcul».
3. FUCHER, A.: *Einflußfelder elastischer Platten*. Springer, Wien.
4. BITTNER, E.: *Momententafeln und Einflußflächen für kreisweise bewehrte Eisenbetonplatten*. Springer, Wien 1958.
5. MACCHI, G.: *Bulletins du Comité Européen du Béton* n. 21, 30, 34.



## CONTROL OF THE CONDITIONS OF CRACKING AND OF DEFORMATION OF PLATES DIMENSIONED FOR ULTIMATE STRESS

F. LEVI

### SUMMARY

The author intends to obviate a typical insufficiency of those dimensioning methods for plates which consider only the ultimate state of stress (e.g. the cracking-line theory): i.e. the absence of any indications on the behaviour during service. The method shown in the paper is based on the theory of adaptation of plates proposed by the author in 1950, and compares the effect of cracks to that of the "distortions", the effect of which on the state of equilibrium is investigated. In order to simplify calculations the author remarks that the elastic line of a plate, generated by a distortion, is but the surface of influence of the bending moment for the section where the distortion has been introduced. The knowledge of the elastic line involves the knowledge of all aspects of the state of stress; if the relation between the values of the bending moment and the size of the cracks, as well as the surfaces of influence corresponding to the cracked section are known, it is possible to follow the behaviour of the plate after cracking and to control whether the service load compatible with the ultimate strength leads to acceptable service conditions. A numerical example illustrates the details of the application of the method and brings into relief the great capacity of adaptation of the plates. The conclusion indicates what experimental research appears to be necessary in order to permit a systematic application of the method.

## KONTROLLE DER BEDINGUNGEN FÜR DIE RISSBILDUNG UND DIE VERFORMUNG VON FÜR DEN BRUCHSPANNUNGSZUSTAND DIMENSIONIERTEN PLATTEN

F. LEVI

### ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit bezweckt eine typische Unzulänglichkeit derjenigen Dimensionierungsmethoden für Platten zu beheben, welche nur den Bruchspannungszustand berücksichtigen (so z.B. die Bruchlinientheorie), nämlich das Fehlen von jedweder Information über das Betriebsverhalten. Die hier beschriebene Methode beruht auf einer vom Verfasser i.J. 1950 vorgeschlagenen Theorie der Anpassung der Platten und setzt die Wirkung der Risse jener der »Distorsionen« gleich, deren Wirkung auf den Gleichgewichtszustand untersucht wird. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird nachgewiesen, daß die von einer Distorsion erzeugte elastische Linie der Platte nichts anderes ist als die Einflußfläche des Biegemoments für den Querschnitt, wo die Distorsion eingeführt wurde. Die Kenntnis der elastischen Linie schließt die vollständige Kenntnis des Spannungszustands ein; wenn man die Beziehung zwischen dem Wert des Biegemoments und der Größe der Risse kennt und wenn die Einflußfläche für den gesprungenen Querschnitt bekannt ist, so ist es möglich, das Verhalten der Platte nach dem Reißen zu verfolgen und zu kontrollieren, ob die mit der Bruchlast verträgliche Betriebslast zu zulässigen Betriebsbedingungen führt. Ein einfaches Zahlenbeispiel illustriert die Einzelheiten der Anwendung des Verfahrens und unterstreicht das bedeutende Anpassungsvermögen der Platten. Zum Abschluß wird darauf hingewiesen, daß experimentelle Untersuchungen notwendig erscheinen, um die Methode systematisch anwenden zu können.

## ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ ТРЕЩИН И ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИН, РАССЧИТАННЫХ НА НАПРЯЖЕНИЕ ИЗЛОМА

Ф. ЛЕВИ

### РЕЗЮМЕ

В работе автор ставит своей задачей устранить один типический недочет тех методов расчета пластин, которые учитывают лишь состояние излома (напр. теория линий излома), так как полностью отсутствует информация об эксплуатационном поведении. Продемонстрированный метод, основой которого является предложенная автором в

1950 г. теория установки пластин, сравнивает воздействие трещин с воздействием «дисторзий», и исследует воздействие последних на состояние равновесия. В интересах упрощения расчетов автор устанавливает, что упругая линия пластин, вызванная дисторзией, является ничем иным, чем поверхностью действия изгибающего момента на то сечение, где может произойти дисторзия. Если известна упругая линия, тогда становятся известными все детали напряженного состояния; если известна зависимость между значением изгибающего момента и размерами трещин, и если известна соответствующая треснутому сечению площадь трещины, тогда можно проследить за поведением пластины после образования трещины и можно проверить, получают ли приемлемые эксплуатационные условия при рабочих нагрузках, соответствующих нагрузкам излома. Простой числовой пример показывает также детали применения метода и подчеркивается высокая устанавливаемость пластин. В качестве конечного заключения автор показывает те опыты, которые были бы необходимы в интересах систематического применения предложенного им метода.



# EFFORTS TO RAISE TEMPERATURES IN CONVENTIONAL AND NUCLEAR POWER STATIONS

A. LÉVAI

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received August 25, 1964]

In the course of the conversion of energy bound by chemical or by nuclear forces into mechanical power, the ultimate objective is to attain thermodynamically elevated temperatures. Investigations into the field have revealed that in conventional power plants the correlation of marginal efficiency and steam temperature can be effectively proved. The situation in nuclear power stations is more complex because, in addition to the capital costs and plant efficiency — included in marginal efficiency, — the temperature-dependent burnup level, plutonium allowance and initial enrichment affect the results. The paper gives concrete calculations for *GGR* reactors. In nuclear power stations the modification of reactor cooling may contribute to a thermodynamically more effective utilization of temperatures. This, however, calls for the development of new reactor types. Outstanding results can be attained in spherical reactors with pebble-bed charges and the coolant introduced in the centre.

## I. Preface

In accordance with fundamental thermodynamic laws, the efforts made to raise the temperature at which heat, chemically or nuclearly bound in energy carriers and released in the course of conversion is transformed into mechanical or electrical power, are as natural as they are commendable. The attainable upper limits both in conventional and nuclear power stations are set by technological factors and by the economic considerations associated therewith. A closer study of the problem will however reveal that essential differences exist between the two types of power plants.

## II. Raising the Temperature in Conventional Power Stations

In conformity with the second theorem of thermodynamics, one kilogram of fuel burnt in conventional power plants would yield maximum work if the working medium expanded from the theoretical temperature of combustion to the ambient temperature without losses. However, owing to irreversible processes taking place in the course of burning, the theoretical temperature of combustion — ranging in fuels around 2000 to 2100 °C — can naturally never be attained. The maximum attainable temperature depending on the construction of the boiler and the furnace, on the quality of the fuel and on the

operational conditions, is 1000 to 1500 °C at the utmost. Adding to this drop in temperature the losses concomitant to heat transfer (the temperature of superheated steam emerging from the boiler moves around 540 to 570 °C), it will at once be apparent that approximately 50 per cent of the theoretical yield of the fuel is lost while transferring its energy to the working medium.

It is common knowledge that the temperatures in conventional power stations are limited by technological, fabrication and economic factors. While the specific heat consumption of a power station ( $q$  kcal/kWh) will considerably decrease with higher initial temperatures (see Fig. 1), its specific capital costs ( $a$ , Ft/kW)\* show a gradual but rather steep rise (particularly steep above the temperatures of 560 to 570 °C), the slope depending on the grade of the steels applied, i.e. on their price. A ratio of the increment of specific capital cost to the variations in specific heat consumption ( $\Delta a/\Delta q$ ) can be formulated to indicate the incremental specific capital costs ( $\Delta a$ ) required to decrease specific heat consumption by unity ( $\Delta q$ ). The limit up to which the ( $\Delta a/\Delta q$ ) value can be increased to decrease the unit price of electric power fed into the co-operating network — the so-called rate of marginal efficiency ( $\delta$ ) — depends on the operational conditions of the co-operating network of power station (load factor, utilization factor, reserves, etc.) and its economic criteria (price of energy carriers, interests, rate of amortization).

The criterion of efficiency is

$$\frac{\Delta a}{\Delta q} \leq \delta.$$

According to calculations under the conditions prevailing in Hungary, Fig. 1 clearly shows that under the present circumstances it is not expedient to raise initial steam temperatures above 560 to 570 °C because, closing to the first costs of electric power, this would entail economic disadvantages: higher self costs of electric power. This result is in harmony with the trends experienced all over the world to set the initial temperatures of new thermal power stations of the conventional type around 540 to 550 °C.\*\*

### III. Raising Temperatures in Nuclear Power Stations

It would seem at first glance that the higher initial temperatures in nuclear power stations are less significant than they are in conventional power plants. The apparently plausible explanation is that in the production costs of electric power generated in a nuclear power plant, the fraction depending on the capital costs is far in excess of the costs of fuel. On the other hand, if we regard higher temperatures merely as a means to increasing efficiency, the

\* Ft is the abbreviation for Forint, the Hungarian monetary unit.

\*\* The part below 560 °C of the stepped function  $a(t)$  in Fig. 1 was averaged and  $\Delta a$  derived from it.



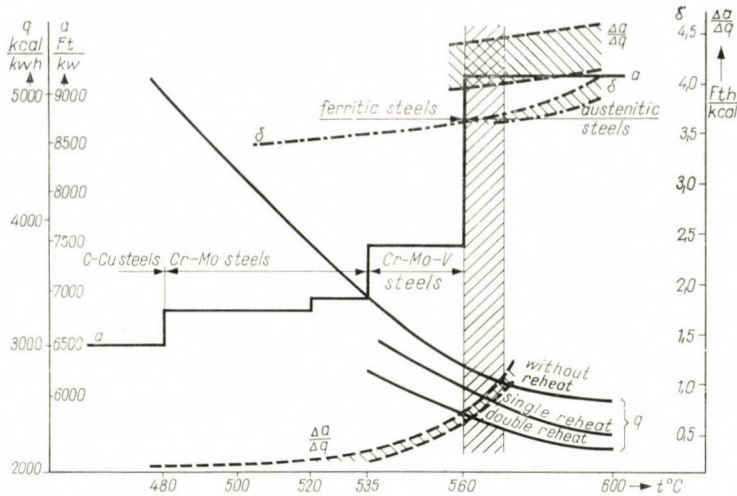


Fig. 1. Specific heat consumptions, specific investment costs and rate of marginal efficiency as functions of initial temperature, in conventional power stations

problem would prove irrelevant. Conditions, however, are much more complex in actual practice, since in nuclear power stations — as against their conventional counterparts — over and above the temperature-dependent specific capital costs ( $a$ ) and specific heat consumption ( $q$ ), additional important factors — likewise temperature-dependent and strongly affecting power costs — are involved. Such factors of paramount importance are the quantity of heat extractable from each kilogram of the fuel, what is called the burnup level ( $Q_0$  [MWD/t]), and the value of plutonium accumulated in the course of burnup ( $P_{Pu}$ ).

We may safely assume that the price of metallic uranium of reactor purity placed into the nuclear reactor is as independent of the temperature of heat release as is the price of the conventional energy carriers, for instance coal or oil. (Here, although still implicitly, we have in mind the gas-graphite reactors to be dealt with later on.) Owing to the fact that probability of fissions referred to one nucleon and neutron — i.e. the microscopic effective cross-section ( $\sigma$ ) — as a rule is generally inversely proportional to temperature (the  $1/v$  law), the heat extracted from unit quantity of the fissile material will, in principle, not result in temperature dependence because the number of neutrons involving fissions (neutron flux,  $\Phi$ ) simultaneously and linearly grows with temperature; the product of the two quantities, which is decisive for the heat output, thus remains constant.

As can be seen from the curves of Fig. 2, plotted in double logarithmic scale, in relation to some fuels ( $U^{235}$  and  $Pu^{239}$ ) and to the  $Xe^{135}$  fission products, there are considerable deviations from the simple  $1/v$  law with the majority of materials present in the reactor. The total effective cross-section ( $\sigma$  [barn])

is shown on the vertical axis and the neutron energy ( $E$  [eV]) proportional to the square of velocity has been plotted on its horizontal axis.

In our further examinations we shall characterize the temperature of nuclear reactors by the neutron gas temperature ( $t_{ng}$ ) which pertains to the average energy of neutrons taken at certain energy intervals ( $E$ ), considering also the possible distortion of the neutron spectrum through greater capture

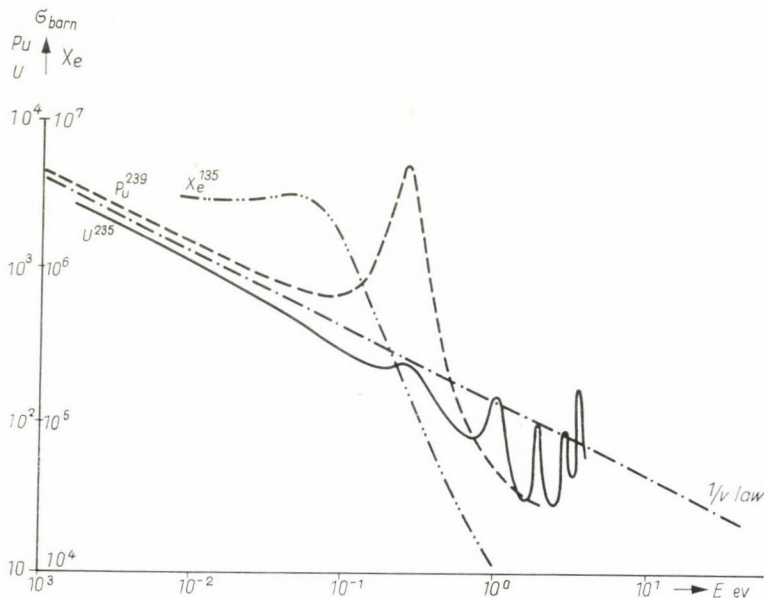


Fig. 2. Energy dependence of microscopic cross-sections

at low energies. Accordingly, the neutron gas temperature influences the effective multiplication factor of the reactor ( $k_{eff}$ ) both in its initial — unpoisoned — state ( $k_{eff,0}$ ), and during its operation and is, also according to the definition, a function of the physical and technical (engineering) structure of the reactor.

In the further course of investigations we have, in concreto, taken natural uranium-gas-graphite reactors (*GGR* type) into consideration. In choosing this type we were prompted partly by the fact that the *GGR* is the most widespread and best developed type (some 75 per cent of the world's nuclear power-generating reactors are of the *GGR* type), and partly by the fact that the greatest part of available information in literature concerns *GGR* reactors.

The type having been determined, the investigations of temperature dependence are limited to a temperature range in which the structural materials incorporated in the type can be safely operated. This range at present corresponds to temperatures of approximately 600°C for the fuel, approximately 480°C for the can, and approximately 430°C for the outlet gas temperature.



In the determination of the temperature dependence of *GGR* type reactors, a careful and thorough analysis of all factors of nuclear physics, neutron physics and reactor engineering has yielded the relationship shown in Fig. 3 for the initial multiplication factor. By way of control we have plotted in the drawing also the check points found in the technical literature — mostly

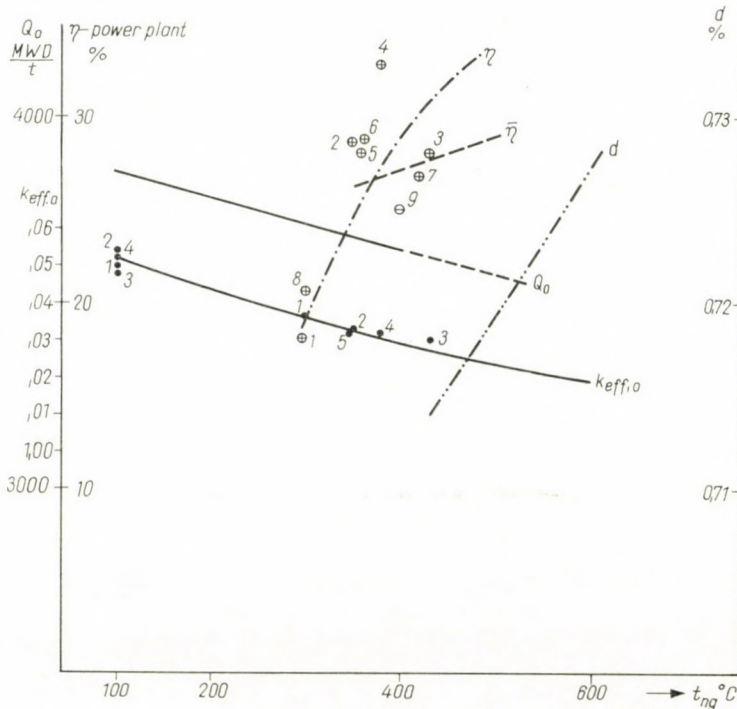


Fig. 3. Temperature-dependent characteristics of *GGR* type reactors

1. Calder Hall. 2. Chapelcross. 3. Berkeley. 4. Bradwell. 5. Hunterston. 6. Hinkley Point. 7. Trawsfynydd. 8. Dungeness. 9. Sizewell. 10. Oldbury. 11. Wylfa

determined by measurements — for the reactor in its cold ( $t_{ng} = 100^\circ\text{C}$ ) and in its hot state. The calculated and measured values have shown a fair degree of agreement.

### 1. Burnup Calculations

A new and important factor in temperature dependence — one that has so far not received sufficient attention in the literature — is the dependence of the burnup level — the heat extractable from unit quantity of fuel — ( $Q_0$ ) on the neutron gas temperature. For its determination, the following burnup calculations have been performed (the calculations are given here in a summarized form).

The fuel placed in the reactor, in our assumptions natural uranium, undergoes various changes under the effect of nuclear fissions and subsequent nuclear reactions. These and the most important reactions considered in our calculations are shown in the schematic diagram of Fig. 4. The figure shows also the symbols applied in the calculations for each nucleon. On their basis the following system of differential equations have been set up for the fissile isotopes and for the heavy isotopes they produce.\*

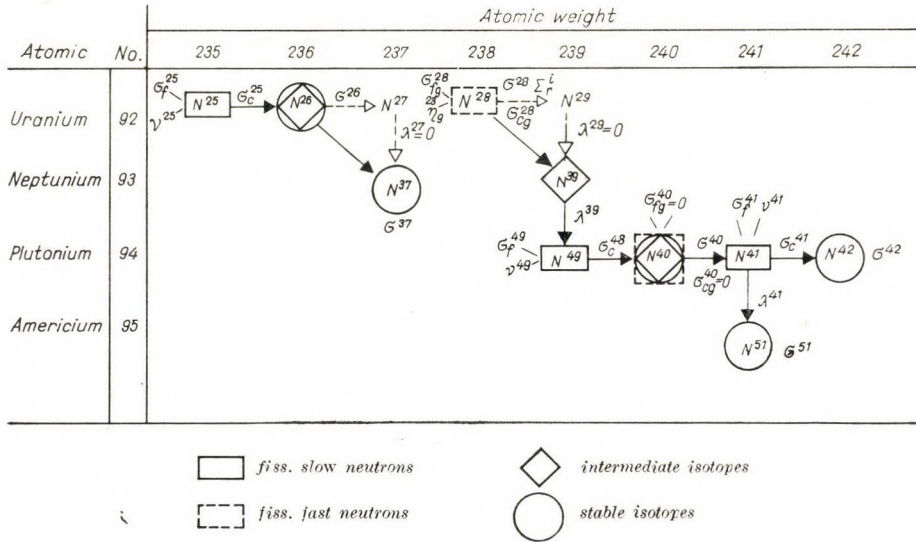


Fig. 4. Nuclear reactions taking place in natural uranium-fuelled reactors

a) Examination of the  $U^{235}$  chain:

$$\frac{dN^{25}}{d\hat{t}} = -\hat{\sigma}^{25} N^{25}; \tag{1}$$

$$\frac{dN^{26}}{d\hat{t}} = \hat{\sigma}_c^{25} N^{25} - \hat{\sigma}^{26} N^{26}; \tag{2}$$

$$\frac{dN^{37}}{d\hat{t}} = \hat{\sigma}^{26} N^{26} - \hat{\sigma}^{37} N^{37}. \tag{3}$$

b) Examination of the  $U^{238}$  chain:

$$\frac{dN^{28}}{d\hat{t}} = -\hat{\sigma}^{28} N^{28} - \sum_r^i, \tag{4}$$

\* The system of equations has been formulated and solved by Dr. I. BÜKI and V. VÁRADI.



where the total macroscopic resonance absorption cross-section is:

$$\Sigma_r^i = \left[ \frac{(1-p)\varepsilon}{1+B^2L_f^2} + \frac{\varepsilon-1}{\eta_g^{28}-1} \right] \sum_i \hat{\sigma}_f^i v^i N^i \quad (i = 25; 49; 41).$$

$$\frac{dN^{39}}{d\hat{\tau}} = \hat{\sigma}^{28} N^{28} + a \cdot \sum_r^i - \frac{\lambda^{39}}{\hat{\Phi}} N^{39} \quad (5)$$

$$(i = 25; 49; 41),$$

where

$$a = \frac{\frac{(1-p)\varepsilon}{1+B^2L_f^2} + \frac{\varepsilon-1}{\eta_g^{28}-1} \cdot \frac{\sigma_{cg}^{28}}{\sigma_g^{28}}}{\frac{(1-p)\varepsilon}{1+B^2L_f^2} + \frac{\varepsilon-1}{\eta_g^{28}-1}};$$

$$\frac{dN^{49}}{d\hat{\tau}} = \frac{\lambda^{39}}{\hat{\Phi}} N^{39} - \hat{\sigma}^{49} N^{49}; \quad (6)$$

$$\frac{dN^{40}}{d\hat{\tau}} = \hat{\sigma}_c^{49} N^{49} - \hat{\sigma}^{40} N^{40}; \quad (7)$$

$$\frac{dN^{41}}{d\hat{\tau}} = \hat{\sigma}^{40} N^{40} - \left( \hat{\sigma}^{41} + \frac{\lambda^{41}}{\hat{\Phi}} \right) N^{41}; \quad (8)$$

$$\frac{dN^{42}}{d\hat{\tau}} = \hat{\sigma}_c^{41} N^{41} - \hat{\sigma}^{42} N^{42}; \quad (9)$$

$$\frac{dN^{51}}{d\hat{\tau}} = \frac{\lambda^{41}}{\hat{\Phi}} N^{41} - \hat{\sigma}^{51} N^{51}. \quad (10)$$

In the above system of equations the following symbols were used:

$N$  number of atoms per unit volume of some element;

$\hat{\sigma}$  microscopic effective cross-section related to thermal neutrons, according to WESTCOTT [1];

$\hat{\tau}$  effective value of irradiation (flux time). (Product of the effective flux pertaining to the effective cross-section and the irradiation time);

$\hat{\sigma}_c$  microscopic effective cross-section of the non-fissile capture related to thermal neutrons, according to WESTCOTT;

$p$  resonance escape probability;

$\varepsilon$  fast fission factor;

$B$  material buckling;

$L$  slowing-down length of fast neutrons;

$\eta$  thermal neutron yield factor;

$\sigma_f$  microscopic effective cross-section of fission related to thermal neutrons according to WESTCOTT;

- $\nu$  average number of fast neutrons produced in the fission of one nucleus;
- $\lambda$  decay constant of radioactivity;
- $\hat{\Phi}$  effective thermal neutron flux pertaining to the effective cross-sections.

The fissions yield large amounts of fission products which undergo transformations partly by neutron capture and partly by a series of radioactive

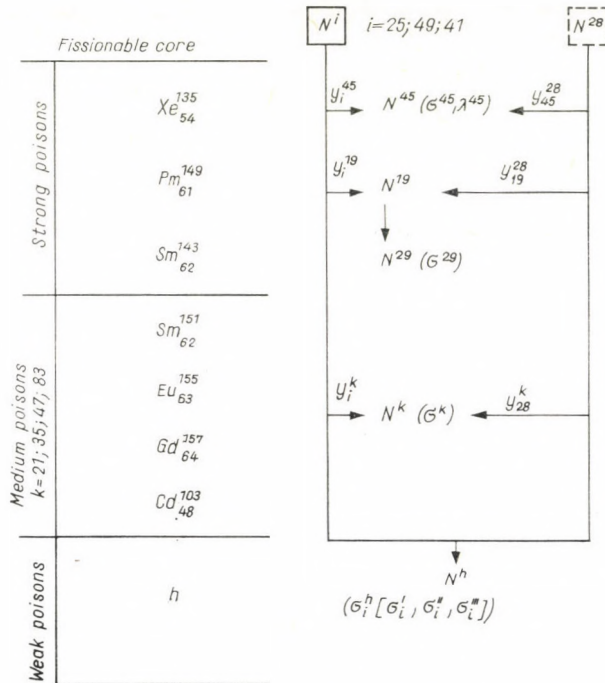
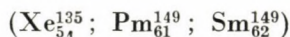


Fig. 5. Classification of the more important poisons arising during burnup

desintegrations. From among the several hundreds of fission products simultaneously present in the reactor, only those shall be taken into consideration in the burnup examinations which, through their more or less strong neutron capture, have a substantial influence on reactor operation.

The three groups of reactor poisons taken into account in the calculations are schematically illustrated in Fig. 5 where  $y$  stands for the relative yields of the elements arising from the fission of the nucleus concerned  $N^i$  ( $i = 25; 49; 41$ ) and  $N^{28}$ .

c) Examination of strong poisons:





$$\frac{dN^{45}}{d\hat{\tau}} = \sum_i b^i \sigma_f^i N^i - \left( \hat{\sigma}^{45} + \frac{\lambda^{45}}{\hat{\Phi}} \right) N^{45} \quad (11)$$

( $i = 25 ; 49 ; 41$ ),

where

$$b^i = y_i^{45} + y_{28}^{45} \frac{\varepsilon - 1}{\eta_g^{28} - 1} \frac{\sigma_{fg}^{28}}{\sigma_g^{28}} \nu^i ;$$

$$\frac{dN^{19}}{d\hat{\tau}} = \sum_i c^i \sigma_f^i N^i - \frac{\lambda^{19}}{\hat{\Phi}} N^{19} \quad (12)$$

( $i = 25 ; 49 ; 41$ ),

where

$$c^i = y_i^{19} + y_{28}^{19} \frac{\varepsilon - 1}{\eta_g^{28} - 1} \frac{\sigma_{fg}^{28}}{\sigma_g^{28}} \nu^i ;$$

$$\frac{dN^{29}}{d\hat{\tau}} = \frac{\lambda^{19}}{\hat{\Phi}} N^{19} - \hat{\sigma}^{29} N^{29} . \quad (13)$$

d) Examination of medium-strong poisons:

(Sm<sub>62</sub><sup>151</sup> ; Eu<sub>63</sub><sup>155</sup> ; Gd<sub>64</sub><sup>157</sup> ; Cd<sub>48</sub><sup>113</sup>)

$$\frac{dN^k}{d\hat{\tau}} = \sum_i d^i \hat{\sigma}_f^i N^i - \hat{\sigma}^k N^k \quad (i = 25 ; 49 ; 41), \quad (14)$$

where

$$d^i = y^i + y^{28} \frac{\varepsilon - 1}{\eta_g^{28} - 1} \frac{\sigma_{fg}^{28}}{\sigma_g^{28}} \nu^i ;$$

$$y^i = \sum_k y_i^k ;$$

$$y^{28} = \sum_k y_{28}^k ;$$

$$\hat{\sigma}^k = \frac{\sum_k \sum_i y_i^k}{\sum_k \frac{y_k}{\hat{\sigma}^k}} . \quad (k = 21 ; 35 ; 47 ; 83)$$

e) Examination of weak poisons (in one group):

$$\frac{dN^h}{d\hat{\tau}} = \sum_i f^i \sigma_f^i N^i - \hat{\sigma}^h N^h \quad (i = 25 ; 49 ; 41), \quad (15)$$

where

$$f^i = 1 + \frac{\varepsilon - 1}{\eta_g^{28} - 1} \frac{\sigma_{fg}^{28}}{\sigma_g^{28}} \nu^i ;$$

$$\hat{\sigma}^h = A_1 e^{-\hat{\sigma}^h \hat{\tau}} + A_2 e^{-\hat{\sigma}^h \hat{\tau}} + A_3 e^{-\hat{\sigma}^h \hat{\tau}} .$$

The values of the effective cross-sections and constants can be found in Table I.

Table I

$i$	$\hat{\sigma}'$	$\hat{\sigma}''$	$\hat{\sigma}'''$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
25	25	300	600	23,75	45,08	21,16
49	25	300	600	—	—	—

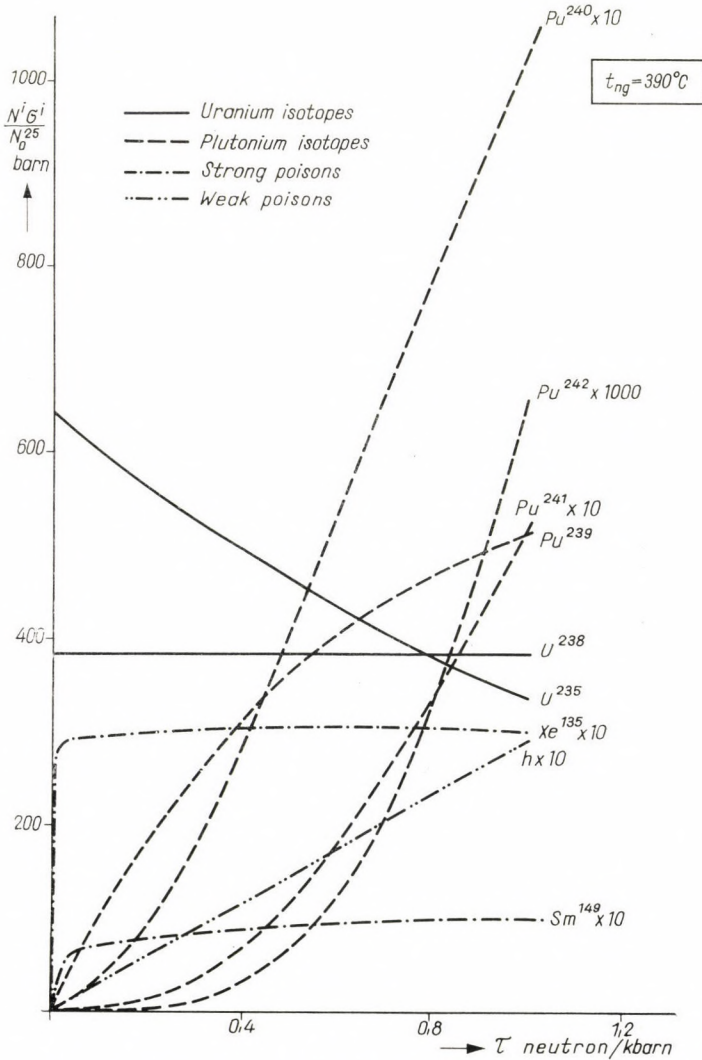


Fig. 6. Relative quantity of certain isotopes during burnup



The curves according to Fig. 6, characterizing the variations of some of the heavy isotopes and reactor poisons during burnup, were arrived at through the resolution of the above system of equations in a digital computer. In Fig. 6, the quantity of the individual isotopes as referred to an initial  $U^{235}$  atom, for reasons of computation techniques, the product of this quantity with the neutron capture effective cross-section

$$\left( \frac{N^i \sigma^i}{N_0^{25}} \right)$$

is plotted on the vertical axis, while the irradiation achieved is shown on the horizontal axis ( $\tau$ ).

Our drawing applies to a neutron gas temperature of  $390^\circ\text{C}$ . At other temperatures, the curves will show a pattern of similar character, however, with different numerical values. The figure indicates the more important isotopes and reactor poisons only. The curves so obtained show a fair agreement with the results of similar calculations published in the most recent literature — if and when such are at all available [2]. Our curves, including phenomena neglected so far, bring some improvement over the data quoted in the literature, both in concept and accuracy. Such phenomena were for instance the variations in the quantity of  $U^{238}$ , the radioactive decay of  $Pu^{241}$ , the consideration of  $Am^{241}$  and the medium strong poisons.

Another substantial difference in the examinations of the burnup was that neutron flux ( $\hat{\Phi}$ ) in our computations was assumed as one changing in time. Should we namely aim at rendering the reactor heat output independent of time so as to satisfy practical needs, we should have to make the flux change; namely first to decrease it and subsequently to increase it according to the number of fissile nuclei ( $N^i$ ), to the fission cross-sections ( $\sigma_f^i$ ), and to the energy yielded with the fission of one nucleus ( $E^i$ ). Accordingly, the neutron flux varying with time is:

$$\hat{\Phi} = \frac{\hat{\Phi}_0 E^{25} (1 + g \nu^{25}) \hat{\sigma}_f^{25} N_0^{25}}{\sum_i E^i (1 + g \nu^i) \hat{\sigma}_f^i N^i} \quad (i = 25; 49; 41), \quad (16)$$

where

$$g = \frac{\varepsilon - 1}{\eta_g^{28} - 1} \left( 1 - \frac{\sigma_{cg}^{28}}{\sigma_g^{28}} \right).$$

In the above relationship and in our later calculations, the index "0" refers to the initial state.

## 2. Investigations into Productivity

In order to determine, from the variations in the number of isotopes, the quantity of heat extractable from unit quantity of fuel, i.e. the burnup level ( $Q_0$ , MWD/t), we have to establish first how long a reactor operating under the

given initial conditions stays operable. The most expedient way to carry out these investigations is to compare the actual total neutron-producing cross-section ( $\pi_1$ ) against the total neutron-absorbing cross-section of the isotopes ( $\pi_2$ ). In this way we shall arrive at the concept of the what is called productivity ( $\pi$ ):

$$\pi = \pi_1 - \pi_2. \quad (17)$$

The total effective productive cross-section can be written as

$$\pi_1 = n \sum_i \hat{\sigma}_f^i \nu^i N^i \quad (i = 25; 49; 41), \quad (18)$$

where

$$n = \frac{\varepsilon \cdot P}{1 + B^2 L^2}.$$

The total effective absorptive cross-section being:

$$\pi_2 = \sum_j \hat{\sigma}^j N^j + B \frac{\hat{\Phi}_m}{\hat{\Phi}} \quad (19)$$

$$(j = 25; 49; 41; 26; 37; 28; 39; 40; 42; 51; 19; 29; k; 45; h;)$$

where

$$B = \left( \frac{n \sigma_f^{45} \cdot \nu^{45}}{k_{\text{eff},0}} - \hat{\sigma}^{25} - \frac{N_0^{28}}{N_0^{25}} \hat{\sigma}^{28} \right) \frac{N_0^{25}}{\left( \frac{\hat{\Phi}_m}{\hat{\Phi}} \right)_0}.$$

$\hat{\Phi}_m$  denotes the average value of flux in the moderator whose proportion to the average flux in the reactor is:

$$\frac{\hat{\Phi}_m}{\hat{\Phi}} = 1 + o \sum \hat{\sigma}^j N^j,$$

where

$$o = \frac{\left( \frac{\hat{\Phi}_m}{\hat{\Phi}} \right)_0 - 1}{N_0^{25} \hat{\sigma}^{25} + N_0^{28} \hat{\sigma}^{28}}$$

while the value of the initial effective multiplication factor is:

$$k_{\text{eff},0} = n \cdot \nu^{25} \frac{\hat{\sigma}_f^{25} N_0^{25}}{\pi_2}.$$

The reactor will stay operable until its productivity is positive ( $\pi > 0$ ).

Fig. 7 shows the trend of the productivity curves in the function of irradiation ( $\tau$ ) for three freely chosen neutron gas temperatures ( $t_{ng} = 100; 390; 600^\circ \text{C}$ ). The initial point of the curves ( $\tau = 0$ ) corresponds to the values of  $k_{\text{eff},0}$  indicated in Fig. 3.

While in the figure the curves representing  $100^\circ \text{C}$  (continuous line) and  $390^\circ \text{C}$  (dash-and-dot line) neutron gas temperature show a positive productiv-



ity up to the limit of burnup, the 600°C curve (dotted line) indicates negative productivity in the initial period of operation. In consequence, this reactor under the assumed conditions, expressed in terms of the initial multiplication factor, cannot be regarded as operable.

From the number of fissions taking place until irradiation results in zero productivity, and from the heat released in each fission, the heat released

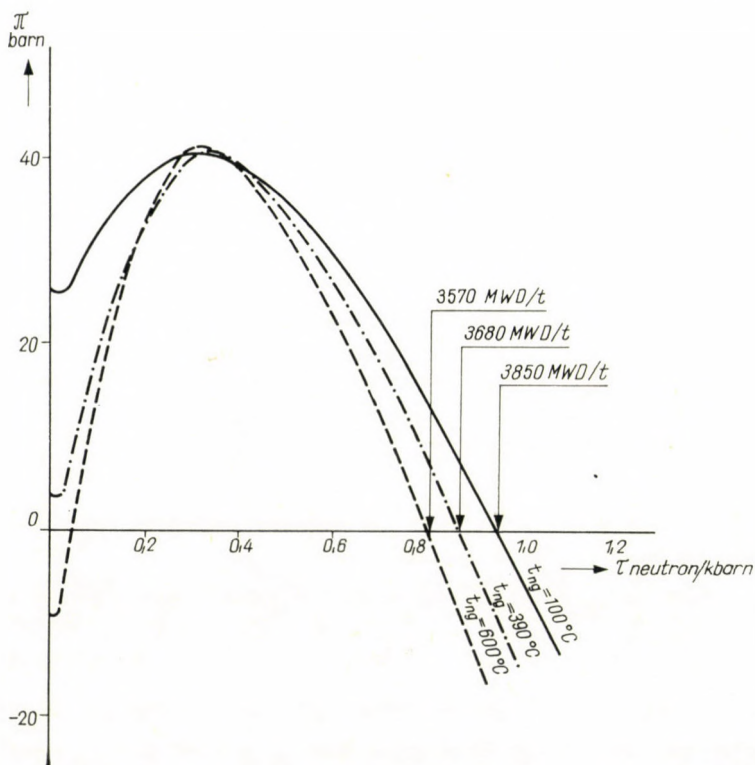


Fig. 7. Productivity as a function of irradiation and neutron gas temperature

from the fuel during the time of operation, viz. the burnup level sought for can be determined. As shown by the  $Q_0$  curve of Fig. 3, this burnup level is temperature-dependent. This fact is fundamentally different from the conventional steam boilers in which the heat released by chemical reaction, is practically independent of temperature.

As seen from Fig. 3, in the reactor type under examination, the quantity of extractable heat decreases by 1.4 per cent with each 100°C temperature rise in the reactor. In contrast to this, as is well known, the efficiency of a nuclear power station ( $\eta$ ), similarly to its conventional counterpart, grows with rising temperatures; it grows at a higher rate (at some 5 to 6 per cent

per 100°C) than the burnup level drops. For purposes of illustration, in Fig. 3 we have indicated not only the rather scattered actual efficiency data of the erected and designed nuclear power stations with GGR type reactors and (to balance them out) the average efficiency curve ( $\eta$ ) with dash-and-dot line, but also the efficiency curve ( $\bar{\eta}$ ) with dotted line, after eliminating therefrom the factors caused by local conditions — primarily by the heat diagram and the

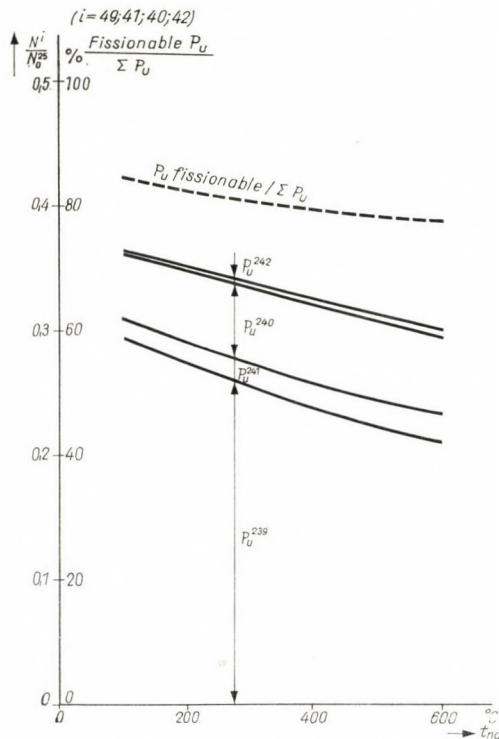


Fig. 8. Quantity of fissile Pu isotopes as a function of neutron gas temperature

secondary cycle—and bringing it to an identical basis. The above-mentioned 5 to 6 per cent per 100°C value refers to the latter curve.

Owing to the changes that take place in the isotope composition of the fuel during the burnup process (see Fig. 6), the quantity of *plutonium* available at the end of burnup will become temperature-dependent and so will its qualitative composition, viz. the number of fissionable plutonium atoms related to the number of all plutonium atoms ( $Pu \text{ fissionable} / \Sigma Pu$ ). As Fig. 8 evinces, the above ratio which characterizes plutonium value, decreases with rising temperature whereby the sums deducted for plutonium allowance in the economic examinations of a nuclear power station will likewise decrease with rising temperature [3].



In addition to variations in the burnup level and plutonium valuation — which are directly temperature-dependent, — we obtain an indirect temperature dependence by *enriching the uranium* charge, respectively by inserting highly enriched fuel elements into the natural uranium core — as is customary in the latest types of gas-graphite reactors operating at more elevated temperatures (*AGR, HTGR* types).

The degree of enrichment required to avoid the negative initial productivity, according to Fig. 7, is shown by line *d* in Fig. 3, related to the average of the core. It is evident that enrichment will not only increase fuel costs but affect fixed costs through the intercalary interest concomitant to sustained burnup. The more so as with rising temperatures not only the degree of enrichment but the entire structural design of the reactor, the materials used, etc. must be modified.

Since no literature is at present available on the capital costs of gas-graphite reactors operating at elevated temperatures, we are not in a position to illustrate, by numerical values, the rate of marginal efficiency for nuclear power stations, as we have done in Fig. 1 for conventional thermal power plants. It brooks no doubt, however, that in principle an economically optimum solution exists also for nuclear power plants. Special care must be paid in the determination of the  $\delta$ -curve which represents marginal efficiency, because the utilization factor influencing it is a function of the variable cost of electric power generated in nuclear power stations which, in the light of what has been said above, is temperature-dependent.

The concept that, for higher economy, nuclear power stations, whose building entails enormous capital investment, should be run at maximum but not less than 8000 hours per year utilization time, was formerly widespread in the international literature, and is still extant. In such cases, however, provided it is actually correct to run nuclear power stations at a high utilization factor in view of the low variable costs, the costs of power generated must be charged with the expenses incident to decreased load on the rest of the power plants in the system, or else — and this can be expressed in an identical manner in calculation techniques — an appropriately lower utilization factor should be determined for nuclear power stations. If so, the costs of nuclear power will rise by approximately 10 per cent and the rate of marginal efficiency that can be considered in our calculations will decrease at the same rate [4].

According to our investigations, in the current *GGR* type reactors, viz. in those operating with natural uranium canned in magnesium-aluminium alloy and with carbon dioxide gas as coolant, the outlet gas temperature could well be raised by 30 to 50°C in order to approximate the optimum economy. This means that this type, considering the required temperature margin for increased safety, has more or less reached maximum development.



### 3. Further Attempts at Development

The types that constitute the basis of further development partly switch over from uranium to uranium oxide with austenitic high-alloy steels for canning (*AGR* type), partly — to achieve still higher temperatures — surround the uranium fuel, which is built in in the form of carbide and mixed with graphite in a quasi-heterogeneous way, with a gastight external graphite canning. Cooling takes place for instance through helium gas (*HTGR* and *AVR* types). In the latter, fuel rods have been substituted by 60 mm diameter balls [5]. These latest high-temperature gas-graphite reactors have so far been erected either in prototypes only (for example *AGR*) or are still in the construction stage and thus unsuitable for economy investigations.

A new reactor type takes 8 to 10 years to be developed from its conception to the time when reliable operational experiences can be gained. With respect to high-temperature gas-graphite reactors, development is in its mid-stage at the utmost, whence economic results cannot be expected for some 3 to 4 more years. It is, however, of paramount significance that the basic examination methods have been clarified and, although in a rather confined area viz. in respect of *GGR* reactors only, they have brought satisfactory results (even though not 100 per cent dependable as yet).

But of even higher importance than the above-outlined temperature investigations are the endeavours toward the better *thermodynamical utilization* of the temperatures within the reactor. One of the consequences of the non-uniformity of neutron flux in the reactor is an inequality of temperature occurring both perpendicular and parallel to the flow of the cooling gas in the reactor. While non-uniformity in radial direction by an appropriate nuclear structure and by adequately controlled operational procedures can be equalized more or less so as to prevent excessive differences over the cross-section in the temperature of the cooling gas leaving the reactor, the attempts have so far failed to eliminate the differences along the cooling ducts which are due partly to the warming up of the cooling gas, partly to the non-uniformity of the neutron flux distribution in the direction of the longitudinal reactor axis.

Carrying out the calculations with respect to the natural uranium carbon dioxide-graphite reactors assumed above and plotting the findings in Fig. 9, the heating of the gas along the cooling duct is indicated by the continuous line ( $t_h$ ) while the temperature of the can is given by the  $t_b$  line. It has been assumed that the maximum heating of the cooling medium is, in the case in hand, limited by the magnesium-aluminium alloy can which precludes that the can temperature exceeds 480° C, a temperature usual in such type of reactors. From the figure it follows that in such reactors neither fuel nor the can or other structural materials are utilized to their technologically permissible upper temperature limits. It follows furthermore that the thermodynam-



ic efficiency of reactor cooling ( $\eta_{oh}$ ), by which we understand the Carnot efficiency calculated with the mean temperature of heat admission, is very low — in this case not more than 47,5 per cent. (The mean heat admission temperature is  $\bar{T}_{h,ln} = 572^\circ\text{K}$ , ambient temperature  $27^\circ\text{C}$ .)

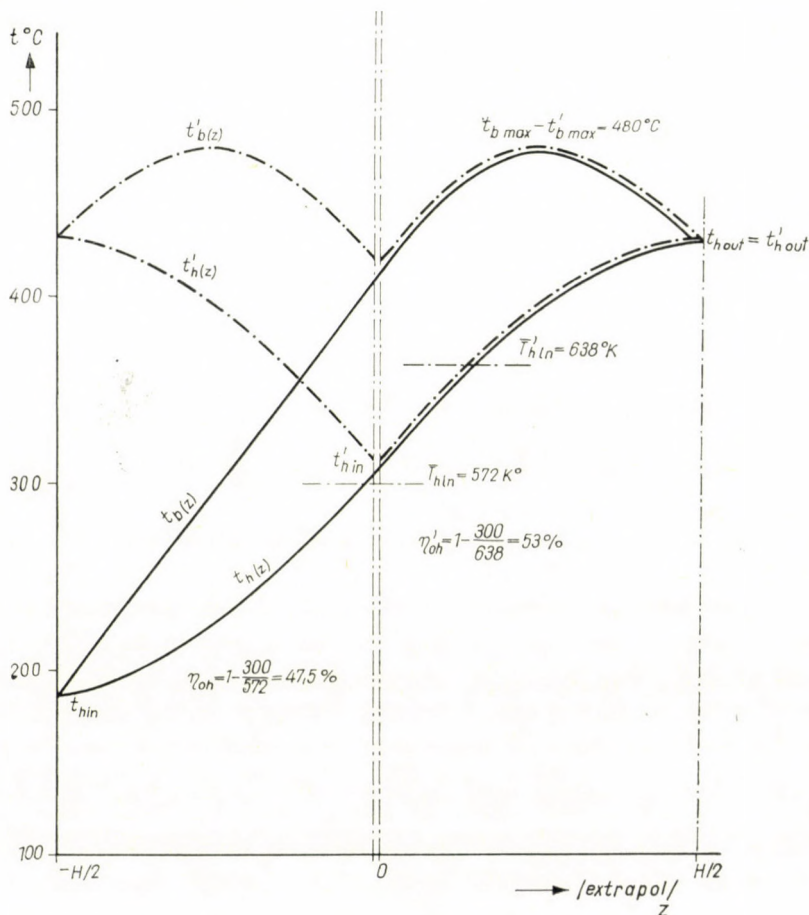


Fig. 9. Variations in cooling gas temperature with the coolant in unidirectional, respectively in twin flow

If coolant is not flow through the fuel channel from its beginning to end, but introduced, for example, at its centre and discharged at either end of the channel (twin flow), the temperature distribution along the duct will be substantially more uniform — as is shown by the dotted lines of Fig. 9 (temperature values are denoted  $t'$ ). This, at identical can temperature, will yield a 53 per cent thermodynamical efficiency for reactor cooling, higher by 11,6 per cent than before. (This method of cooling was first employed in the French

G-1 plutonium-producer reactor but — probably owing to the difficulties of the introduction of coolant in the centre —, the method has not come to be employed in power reactors. The process, over and above its better thermodynamics in cooling, may claim interest also for the improved efficiency of its power-generating cycle since the higher inlet temperature of cooling gas — which is permissible with twin flow — permits a better regenerative preheating of the feedwater for the secondary cycle.)

The advantages of central gas admission will receive particular attention if new ways and means are sought in reactor geometry and in the buildup of

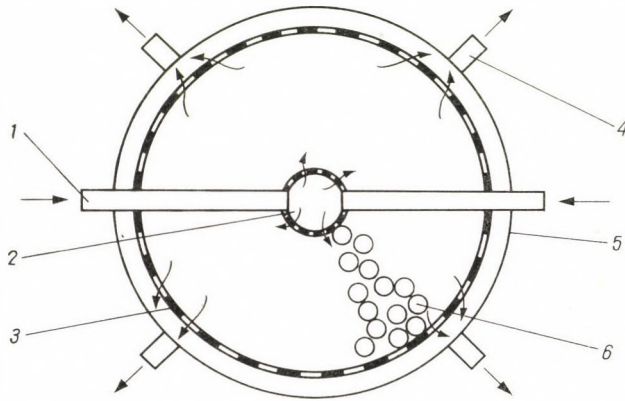


Fig. 10. Schematic layout of a spherical reactor with pebble-bed charges (according to G. BÜKI)

the fuel elements. Such a new possibility is embodied in the proposal put forward by G. BÜKI: a spherical reactor with balls for charge, in the layout according to Fig. 10 [6]. Spherical reactors are known to be more favourable than cylindrical ones both from the physics and engineering points of view. However, to take full use of these advantages, the buildup of fuel elements must also be modified in such a way — as has been proposed in connection with the AVR-reactor — that balls should be used for charge instead of the usual rods. These balls should have enriched uranium carbide cores and be graphite-coated. To suit more elevated temperatures, helium gas could be used for cooling. The introduction of cooling gas into the hollow space in the centre of the reactor is relatively simple, and this arrangement in which the coldest gas enters the space with highest flux — and with highest temperature —, substantially improves the efficiency of cooling. Fig. 11 will give an idea of this arrangement. In it the continuous lines show the curves characteristic of the cooling in pebble-bed cylindrical reactors. While the line  $\bar{t}_h$  indicates the heating of the cooling gas calculated for the average along the length of the cylindrical reactor, the line marked  $t_{h \max}$  denotes the heating along the central



line in the cylinder, and the  $t_{u \max}$  refers to the heating of uranium-carbide in the centre of the fuel balls, in the cylinder axis. As can be seen, fuel temperature will culminate at 1870 °C.

With balls of similar structure, in a spherical reactor and with gas inlet at the centre (in the schematic layout according to Fig. 10) where the radius

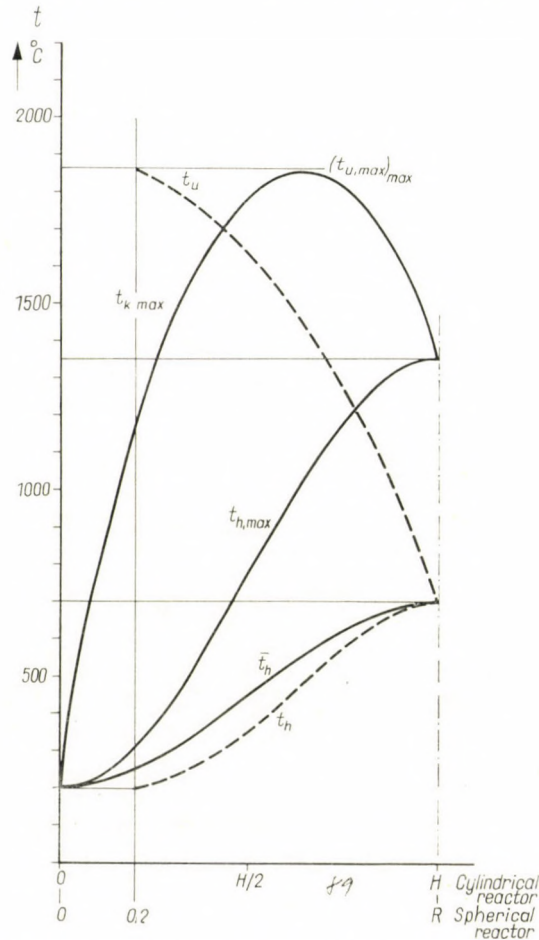


Fig. 11. Comparison of the cooling conditions in pebble-bed cylindrical and spherical reactors

of the gas distribution sphere is one fifth of the external radius, the temperature pattern along the reactor radius is shown by the dotted lines of Fig. 11.

Assuming the same average heating of gas ( $700 - 200 = 500$  °C), consequently the same thermodynamic efficiency of cooling and maximum fuel temperature (1870 °C), the heat output in a pebble-bed spherical reactor is 90 per cent higher than in a similarly pebble-bed but cylindrically shaped reactor. As a result — taking account also of the better utilization of the avail-

able space of the spherical reactor, its better mechanical conditions, etc. — an economy of at least 50 per cent of the specific capital costs may be expected.

By improving thermodynamics of reactor cooling and equalization of temperatures within the reactor, we have very good and still untapped possibilities to reduce capital investment costs of nuclear power stations, apparently still unfavourable. These open up new ways in raising the temperature in nuclear power stations, quite different from those existing in conventional ones. A comparison of the two will reveal that conditions, in principle as well as in practice, are fundamentally different.

Research must go along new paths but, as this rather sketchy treatment endeavoured to prove with some examples, future holds out good prospects.

#### REFERENCES

1. WESTCOTT, C. H.: Effective Cross Section Values for Well Moderated Thermal Reactor Spectra. AECL 1101 (CRRP)-960; EANDC (Can)-4; TNCC (Can)-30, 1960.
2. BASSO, P.—GHILARDOTTI, G.: Long Reactivity Changes in Natural Uranium Graphite Lattices. *Energia Nucleare* 9 (1962), No. 1.
3. LÉVAI, A.—KOVÁTS, I.—BÜKI, G.: Analytical and Economic Investigation of Pu-Production in Nuclear Power Reactors. Second U. N. Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, 1958; 15/P-1727.
4. LÉVAI, A.—ÓCSAI, M.: Economic Valuations of Atomic Energy in Interconnected Systems Consisting Mainly of Conventional Thermal Power Stations. IAEA Conf. Vienna, 1960; SMPR/60.
5. Directory of Nuclear Reactors, 4, IAEA.
6. BÜKI, G.: Thermodynamische Möglichkeiten zur Verbesserung des Wirkungsgrades der Reaktorkühlung. WPC Lausanne, 1964. II. C. P. 109.

#### BESTREBUNGEN ZUR ERHÖHUNG DER TEMPERATUR IN KONVENTIONELLEN UND IN ATOMKRAFTWERKEN

A. LÉVAI

#### ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Umwandlung der durch chemische oder durch Kernkräfte gebundenen Energie in mechanische (elektrische) Energie ist das Ziel die Erreichung von je höheren Temperaturen. Von diesem Standpunkt aus untersucht, kann bei konventionellen Kraftwerken die mit der Temperatur zusammenhängende Grenzwirtschaftlichkeit zahlenmäßig festgestellt werden. Bei Atomkraftwerken ist die Lage komplizierter, weil außer den in der Grenzwirtschaftlichkeit eine Rolle spielenden Investitionskosten und dem Kraftwerkswirkungsgrad auch der von der Temperatur abhängige Ausbrenngrad, die Plutonium-Gutschreibung und die anfängliche Anreicherung das Ergebnis beeinflussen.

Die Arbeit bringt konkrete Untersuchungen über GCR-Reaktoren. Bei Atomkraftwerken kann die thermodynamisch bessere Ausnützung der Temperaturen durch eine Änderung der Reaktorkühlung erzielt werden. Hiezu werden natürlich neue Reaktortypen benötigt. Besonders günstige Ergebnisse können mit sphärischen Reaktoren mit Kugelfüllung und Einleitung des Kühlmediums im Mittelpunkt erzielt werden.



## TENDANCES A L'ACCROISSEMENT DE LA TEMPÉRATURE DANS LES CENTRALES THERMIQUES CONVENTIONNELLES ET ATOMIQUES

A. LÉVAI

## RÉSUMÉ

Au cours de la transformation en énergie mécanique (électrique) des énergies liées chimiquement ou par des forces nucléaires, le but est d'atteindre des températures aussi élevées que possible. En analysant les problèmes de ce point de vue, on peut, pour les centrales thermiques conventionnelles, calculer numériquement l'économie limite liée à la température de la vapeur. Pour les centrales atomiques, la situation est plus compliquée, car en plus des frais d'investissement et du rendement intervenant dans l'économie limite, le résultat est influencé par le *burnup* dépendant lui-même de la température, par le prix du plutonium et enfin par l'enrichissement initial.

L'étude présente des résultats concrets pour des réacteurs de type *GGR*. Aux centrales atomiques, une utilisation thermodynamiquement plus favorable des températures peut être obtenue en modifiant le refroidissement du réacteur, ce qui exige naturellement la création de nouveaux types de réacteurs. On peut atteindre des résultats particulièrement favorables avec des réacteurs sphériques chargés de boules, en cas d'introduction centrale du réfrigérant.

## СТРЕМЛЕНИЯ ПОВЫШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА КОНВЕНЦИОНАЛЬНЫХ И АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЯХ

А. ЛЕВАИ

## РЕЗЮМЕ

В процессе преобразования химической или атомной энергий в механическую (электрическую), с термодинамической точки зрения целью является достижение возможно высоких температур. Рассматривая вопрос, исходя из сказанного, в случае конвенциональных электростанций можно показать предельную экономичность, зависящую от температуры. Для атомных электростанций положение более сложно, так как сверх капитальных затрат для достижения предельной экономичности, а также *кпд* электростанции, на результаты действуют также зависящий от температуры уровень выжигания, списание за счет плутония и начальное обогащение. В работе для реакторов типа *GGR* приведены конкретные исследования. Для атомных электростанций лучшая утилизация температур в термодинамическом отношении может быть достигнута изменением охлаждения реактора. А для этого, естественно, необходимо разработать новые типы реакторов. Особенно хороших результатов можно добиться при помощи сферических реакторов шарикового заряда — в случае введения хладагента в центре.





# ÜBER DAS VERHALTEN VON FREMDSTOFFSPUREN IN PULVERMETALLURGISCHEN WOLFRAMMETALLSORTEN

TH. MILLNER

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 17. Mai 1963]

Es wird auf Grund von älteren bekannten Feststellungen und neuen, an Wolfram und einigen anderen Metallen gesammelten Beobachtungen die Frage behandelt, wie sich diejenigen Fremdstoffe, welche die technologischen Eigenschaften und das Rekristallisationsverhalten bestimmen, im Wolframmetall (Wolframdraht) verhalten dürften, mit besonderer Rücksicht auf die offene Frage, ob diese ihre Wirkungen als Fremdkörperteilchen oder aber als Fremdatome ausüben. Auch die Gesamtheit der Beobachtungen, besonders aber die Resultate der an Wolframdrähten angestellten Kriechversuche und die Ergebnisse der im Modellsystem Sn—Ag durchgeführten autoradiographischen Untersuchungen sprechen dafür, daß diejenigen Fremdstoffspuren, welche in der Wolframtechnologie eine aktive Rolle spielen, teils als Teilchen, teils als Atome im Wolframkörper vorhanden sein können und sich während der technologischen Vorgänge ineinander umwandeln können, dabei aber ihre wesentlichen Wirkungen als spezifische Fremdatome ausüben.

## I

Heutzutage werden die Leuchtkörper der Glühlampen aus gezogenen Wolframdrähten hergestellt [1, 2]. Auch die dünnsten, nicht einmal 10 Mikron starken, gezogenen Drähte bestehen aus einer Vielzahl von nebeneinander liegenden, miteinander fest verbundenen Metallfasern (Bild 1).

Beim Erhitzen auf Betriebstemperatur unterliegen solche Drähte einer sog. Rekristallisation: sie verlieren ihre Faserstruktur, und es entstehen in ihnen nach der Art der Metallvorbereitung kleinere oder größere Kristallite (Bild 2).

In den sog. reinen, aus zusatzfreiem Metallpulver hergestellten dünneren Wolframdrähten entwickeln sich bei der Rekristallisation kleine, nicht einmal den ganzen Drahtquerschnitt ausfüllende Kristallite (Bild 2c). In den Wolframdrähten, deren Metallpulver gleichzeitig mit K und Si enthaltenden Zusätzen bereitet wurde, entstehen wesentlich größere Kristalle (Bild 2b). Schließlich wachsen im Rekristallisationsprozeß von mit gleichzeitig K, Si und Al enthaltenden Zusätzen hergestellten Wolframdrähten lange, einander überlappende Kristalle (Bild 2a).

Auch bei anderen Metallen kann die Rekristallisationsstruktur mit verschiedenen Mitteln in der kleinkristallinen oder in der großkristallinen Richtung verschoben werden. Die Möglichkeit einer Beeinflussung der Kristallitengröße

mittels der angeführten Fremdstoffe ist nach unseren heutigen Kenntnissen auf pulvermetallurgisch erzeugten Wolframdrähte beschränkt.

Jahrzehntenlange Erfahrung hat uns gelehrt, daß während des etwa 1000stündigen Betriebes der Glühlampen nur langkristallinische Spiralen ihre ursprüngliche (z.B. ebene) Anordnung unverändert beibehalten. Spiralen aus feinkristallinen Drähten hängen während des Betriebes in zuneh-

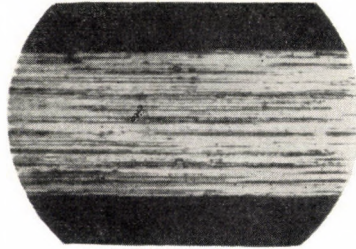


Bild 1. Faserstruktur eines gezogenen Wolframdrahtes (LAX—PIRANI: Wolfram, 1929 [4]; S. 320, Bild 227)

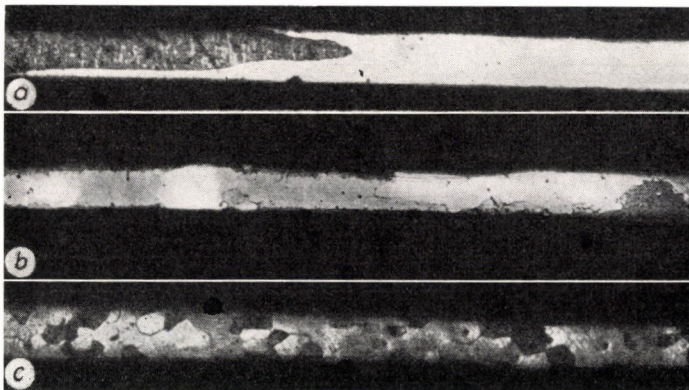


Bild 2. Kristallstruktur von gezogenen Wolframdrähten nach erfolgter Rekristallisation  
 a) K, Si, Al-Zusatzspuren enthaltender Wolframdraht;  
 b) K, Si-Zusatzspuren enthaltender Wolframdraht;  
 c) ohne Zusätze erzeugter Wolframdraht  
 (RIECK, G. D., 1959 [19]; S. 112, Bild 3)

mendem Maße durch (siehe Bild 7 weiter unten) und erzeugen demzufolge das Licht immer unwirtschaftlicher.

Als eine der wichtigsten Aufgaben der Glühlampenindustrie hat sich dementsprechend die Beseitigung des Spiraldurchhanges ergeben. Es wurde von Schritt zu Schritt empirisch festgestellt, daß dieses Ziel am besten durch Erzwingung einer Großkristallstruktur im Rekristallisationsvorgang mittels sehr kleiner, K, Si und Al enthaltender Zusatzspuren zu erreichen ist [1].



In welcher Weise diese Zusatzspuren ihre Wirkungen ausüben, ist heute noch bei weitem nicht aufgeklärt. Es ist demzufolge schwer zu erklären, warum der Durchhang in der allgemein beobachteten Art und Weise mit der Kristallitengröße zusammenhängt. Wie in vielen Fällen, sind auch hier die Erscheinungen selbst besser bekannt, als ihre Gründe. Aus dem heute bekannten, diesbezüglichen Material soll hier eine kleine Auswahl gegeben werden.

Mann muß dazu noch folgendes beachten.

Alle gezogenen Wolframdrähte können im Laufe des Rekristallisationsprozesses, also während der Umgruppierung ihrer Wolframatomte, mit viel geringeren Kräften deformiert werden, als nach einer beendeten Rekristallisation. Die großkristallinen Spiralen erleiden demzufolge beim ersten Einschalten auf Betriebstemperatur durch ihr Eigengewicht meistens einen leichten (primären) Durchhang, und verändern ihre Form nach beendeter Rekristallisation nicht mehr. Die feinkristallinen Spiralen weisen beim ersten Einschalten ebenfalls einen primären Durchhang auf, worauf dann bei ihnen meistens ein weiterer (sekundärer) Durchhang des schon rekristallisierten Glühkörpers erfolgt. Nur der sekundäre Durchhang kann durch eine mittels Zusätze hervorgerufene Großkristallstruktur aufgehoben werden.

## II

Um die Jahre 1905—1910, im Zeitalter der Vakuumglühlampen mit »gestreckten Glühfäden«, kamen zuerst »möglichst reine« Wolframdrähte — darunter auch schon gezogene Drähte — in Gebrauch. Nach dem Erhitzen auf Betriebstemperatur sind in diesen Drähten derartige Kristallite entstanden, die den Drahtquerschnitt eben ausfüllten und im Betrieb aneinander allmählich seitwärts abgleiteten. Dadurch sind Stellen mit vermindertem Drahtquerschnitt (mit erhöhtem Widerstand) entstanden, welche überhitzt wurden und zu einem frühzeitigen Ausbrennen der Lampen führten (Bild 3 und Bild 4).

Man sah den Fehler in der Entstehung dieser den ganzen Querschnitt ausfüllenden Kristallite, d.h. in einer ungünstigen »Rekristallisationsstruktur« und suchte nach Mitteln zur Erzielung einer viel feinkörnigeren Kristallstruktur, die man durch die Verhinderung der Rekristallisation zu erreichen glaubte.

Bald wurde die Entdeckung gemacht, daß in gezogenen Wolframdrähten, welche etwa 1% feinverteiltes  $\text{ThO}_2$  enthielten, die gewünschte feinkristalline Struktur entsteht (Bild 5) und festgestellt, daß solche Drähte in Vakuumlampen bei etwa 2400 °K keine schädlichen Querschnittsänderungen erleiden.

Man nahm an, daß durch die Anwendung des  $\text{ThO}_2$ -Zusatzes in der Tat eine Hemmung des Kristallwachstumes und der Rekristallisation erreicht wurde und war der Meinung, daß in der feinkörnigen Struktur solcher Drähte die vielen kleinen Kristallite einander gegenseitig an dem Abgleiten hindern.

Es bedeutete eine ziemlich große Überraschung, als man von 1912 ab feststellen mußte, daß die thorierten Drähte in gasgefüllten Lampen bei einer Drahttemperatur von etwa 2700 °K zwar ebenfalls feinkristallinisch sind, ihre Spiralen aber trotzdem einen beträchtlichen Durchhang erleiden, also in

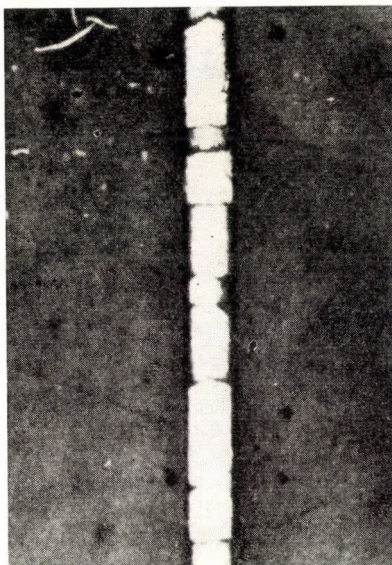


Bild 3. Ohne Zusätze erzeugter, 0,05 mm starker Wolframdraht, in der Lampe rekristallisiert und gebrannt. Die Korngrenzen stehen waagrecht auf die Drahtachse  
(SMITHELLS, C. J.: Tungsten, 1952 [2]; S. 138, Bild 112)

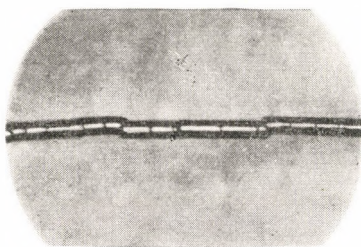


Bild 4. Die Kristallite der Drähte, in welchen die Korngrenzen waagrecht auf die Drahtachse stehen, gleiten im Betrieb seitwärts aus  
(LAX—PIRANI: Wolfram, 1929 [4]; S. 321, Bild 228)

ihnen die Kristallite ihre gegenseitigen Lagen beträchtlich ändern können (siehe Bild 7 weiter unten).

Langsam erkannte man, daß im Verhalten der thorierten Drähte keine einfache Kristallwachstumserscheinungen, keine einfache Rekristallisationsprozesse und Durchhangsmechanismen vor uns stehen, weil die thorierten



Drähte sich als aus einem Oxyd und einem Metall zusammengesetzte chemische Systeme verhalten, in welchen die metallphysikalischen Prozesse mit chemischen Vorgängen gekoppelt sind.

Die thorierten Drähte konnten sich wegen ihres Durchhanges in den gasgefüllten Glühlampen als Glühspiralen nicht behaupten. Sie wurden bald durch die K, Si [3] und K, Si, Al [1] Zusatzspuren enthaltenden, großkristal-

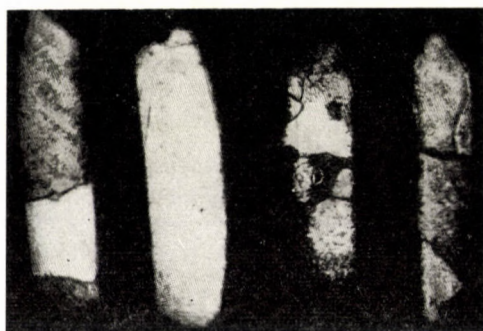


Bild 5. a) Kristallstruktur einer Glühspirale aus ohne Zusätze erzeugtem Wolframdraht, nach 1000 Stunden Brenndauer



b) Kristallstruktur einer Glühspirale aus einem 0,65% ThO<sub>2</sub> enthaltenden Wolframdraht nach 1000 Stunden Brenndauer  
(SMITHELLS, C. J.: Tungsten, 1952 [2]; S. 144, Bild 116 und Bild 119)

linischen, formbeständigen Drähte abgelöst. Mit dem Verhalten dieser Zusatzspuren wollen wir uns näher beschäftigen.

Vorerst müssen wir uns aber mit einigen chemischen Vorgängen der thorierten Drähte befassen, da nicht nur diese einen oxydischen Zusatz enthalten, sondern auch unsere heutigen Zusätze als oxydische Fremdstoffe dem Wolframmaterial zugegeben werden, und sie demzufolge die Rekristallisationserscheinungen außer metallphysikalischen, auch durch bisher wenig beachtete chemische Vorgänge beeinflussen können.

## III

Man hat es schon frühzeitig wahrgenommen, daß das Thoriumoxyd aus den thorierten Drähten im Betrieb (auch während des Durchhängens) allmählich verschwindet. Es wurde angenommen, daß das  $\text{ThO}_2$  entlang der Korngrenzen entweicht, und den Zusammenhalt der Kristallite derart stört, daß dadurch ein Spiraldurchhang entstehen kann.

Daß diese Materialbewegung tatsächlich überwiegend entlang der Korngrenzen erfolgt, haben GEISS und LIEMPT [5] im Jahre 1927 endgültig bewiesen. Nach Angaben ihrer Versuche verschwand aus einem 0,91%  $\text{ThO}_2$  enthaltenden polykristallinen Draht in Vakuum, bei 2450 °K, in 900 Stunden etwa die Hälfte der zugesetzten  $\text{ThO}_2$ -Menge, blieb aber in einem 2,4%  $\text{ThO}_2$  enthaltenden *Pintsch*-Einkristalldraht [6], also in einem Draht, welcher keine Querkorngrenzen enthält, auch noch nach 1200 Brennstunden voll erhalten (Tafel I und Tafel II).

Tafel I

*ThO<sub>2</sub>-Abnahme bei 2450 °K in Vakuum nach GEISS und LIEMPT*

Polykristalliner W-Draht, Durchmesser 75 Mikron, als gestreckter Draht in Vakuum bei 2450 °K gegläht		Pintsch-Einkristall W-Draht, Durchmesser 75 Mikron, als gestreckter Draht in Vakuum bei 2450 °K gegläht	
Glühzeit, St	ThO <sub>2</sub> , %	Glühzeit, St	ThO <sub>2</sub> , %
0	0,91 ± 0,04	0	2,4 ± 0,1
100	0,68	100	2,3
500	0,46	500	2,3
900	0,44	1200	2,4

Tafel II

*ThO<sub>2</sub>-Abnahme in einer Gasatmosphäre nach GEISS und LIEMPT*

Polykristalliner W-Draht, Durchmesser 180 Mikron, als Glühspirale in der Gasfüllung einer Glühlampe gegläht			
Draht-temperatur, °K	Glühzeit, St	ThO <sub>2</sub> , %	Farbe des Lösungsrückstandes
2325	300	0,87 ± 0,02	weiß
2450	300	0,82	hellgrau
2575	300	0,76	grau
2700	300	0,32	grau
2775	107	0,16	grau
2990	11	0,18	grau



Da es aber keinem Zweifel unterliegt, daß man mittels  $\text{ThO}_2$  das gegenseitige Abgleiten (off-setting) der Kristallite verhindern kann, war unserer Meinung nach durch diese Versuche nur der Weg des Materialtransportes aufgedeckt, und nicht die Ursache des Durchhanges aufgeschlossen. Wir erblicken heutzutage die Ursache des Durchhanges nicht mehr in einer Lockerung der Korngrenzen, sondern vielmehr darin, daß im Laufe der bevorzugten Verarmung der Korngrenzengebiete an  $\text{ThO}_2$  einander berührende reinere und weniger reine Gebiete entstehen, welche, getrieben hauptsächlich

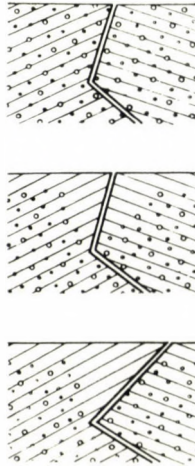


Bild 6. In den thorierten Drähten befinden sich die  $\text{ThO}_2$ -Teilchen zuerst in einer nahezu gleichmäßigen Verteilung (oben); bei Glühfadentemperatur nimmt der  $\text{ThO}_2$ -Gehalt ab:  $\text{ThO}_2$  und seine Reaktionsprodukte entweichen entlang der Korngrenzen. Demzufolge verarmen die Korngrenzengebiete an  $\text{ThO}_2$  (in der Mitte), worauf diese Gebiete eine neue Orientation annehmen (unten)

(Bild 6 ist nur eine qualitative Skizze dieses Vorganges)

durch den Unterschied in ihrem chemischen Potential, ihre ursprüngliche Gitterorientation in eine neue, in bezug auf ihre Umgebung stabilere Orientation umwandeln, d.h. infolge chemischer Inhomogenitäten rekristallisieren (Bild 6). Daß während des Durchhanges der thorierten Drähte tatsächlich eine wiederholte Rekristallisation stattfindet, wurde schon frühzeitig röntgenographisch festgestellt. Diese »chemische Rekristallisation« dürfte derjenige Vorgang sein, im Laufe dessen die Festigkeit der thorierten Drähte so weit herabgesetzt wird, daß ein Spiraldurchhang entstehen kann.

Seit den grundlegenden, die Radoröhrenindustrie ins Leben rufenden Arbeiten von LANGMUIR aus den Jahren 1913—1923 weiß man [7], daß ein kleiner Teil des  $\text{ThO}_2$ -Gehaltes der thorierten Drähte bei hohen Temperaturen gemäß Tafel III zu metallischem Thorium reduziert wird. Was aber dabei mit den Sauerstoffatomen geschieht, blieb bis heute fast völlig unaufgeklärt.

Tafel III

Ausmaß der  $\text{ThO}_2$ -Reduktion in glühenden Wolframdrähten nach LANGMUIR

W-Draht mit 1% $\text{ThO}_2$ -Gehalt			Drahtdurchmesser: 0,0778 mm
°K	Anzahl der Th-Atome je $10^6$ W-Atome		Anteil der reduzierten Th-Atome in %en aller Thoriumatome
	als $\text{ThO}_2$	als Th	
1800	6999	1,1	0,016
2000	6996	4	0,057
2400	6975	25	0,358
2800	6902	98	1,42
3000	6841	159	2,32

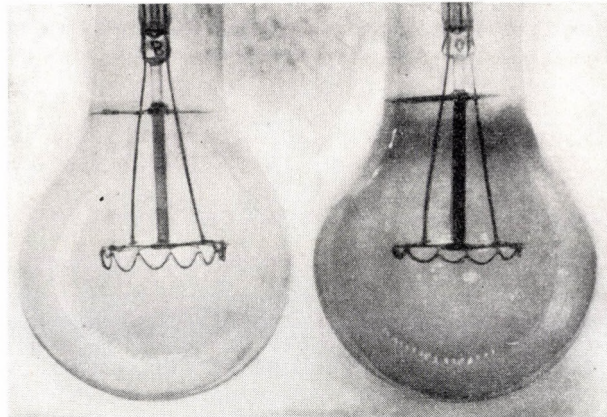


Bild 7. Zwei gasgefüllte Lampen, welche mit Spiralen aus ein und demselben, 0,75%  $\text{ThO}_2$  enthaltenden Wolframdraht unter gleichen Bedingungen hergestellt und bei einer Glühfadentemperatur von 2700 °K etwa 700 Stunden gebrannt wurden. Im Wasserdampfsuren enthaltenden Gasraum der Lampe mit geschwärztem Kolben entstand ein viel geringerer Durchhang als im extrem trockenem Gasraum der anderen Lampe (MILLNER, 1929)

Um darüber etwas zu erfahren, haben wir im Jahre 1929 gasgefüllte Lampen mit ein und derselben Gasfüllung und mit Spiralen aus ein und demselben thorierten Draht einerseits mit Wasserdampfsuren, andererseits ohne diese hergestellt und sie im Dauerbrennversuch geprüft. In den Lampen mit extrem trockener Gasfüllung war ein sehr beträchtlicher Durchhang zu verzeichnen, in den wasserdampfhaltigen Lampen trat hingegen nur ein geringer Durchhang auf. Man konnte also mittels Wasserdampfmolekeln die herausdiffundierenden Th-Atome an der Drahtoberfläche ständig zu  $\text{ThO}_2$  zurückoxydieren und den Durchhang mittels dieser chemischen Maßnahme weitgehend zurückhalten (Bild 7).



Man ersieht daraus, wie unumgänglich man die chemischen Vorgänge und insbesondere die Rolle des Sauerstoffes vor Augen halten muß, wenn man den Rekristallisationsvorgang und die damit verbundenen Festigkeitseigenschaften der Wolframdrähte mittels oxydischer Zusätze beeinflussen und diesen Einfluß verstehen will.

#### IV

Die großkristallinen Drähte unserer Zeit haben es mit den thorierten Drähten der Vergangenheit gemeinsam, daß bei ihrer Bereitung gleichfalls oxydische Zusätze in einer Höhe von 1% Verwendung finden. Es bestehen aber sehr wesentliche Unterschiede zwischen den beiden Drahtsorten.

In den thorierten Stäben und Drähten bleibt der  $\text{ThO}_2$ -Zusatz zuerst fast unvermindert zurück. Ein wesentlich niedrigerer  $\text{ThO}_2$ -Gehalt hat keinen nennenswerten Einfluß auf die Drahteigenschaften (z.B. auf den Rekristallisationsvorgang).

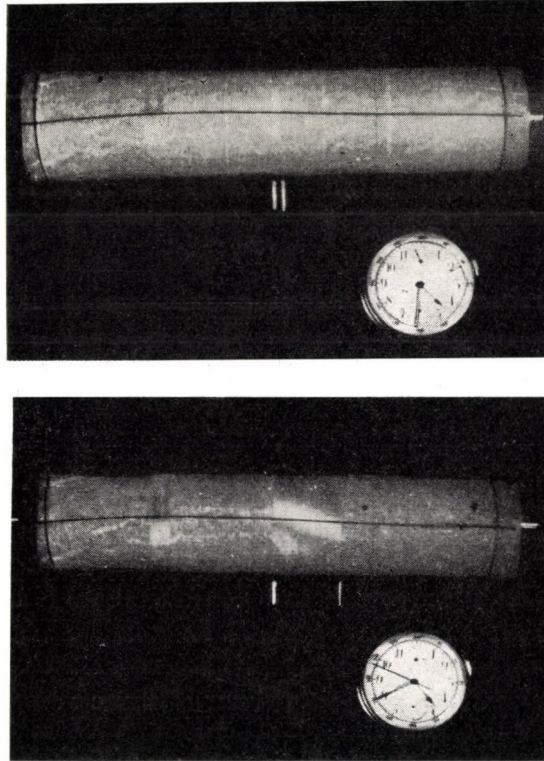
Aus den Stäben der großkristallinen Drähte unserer Zeit, die mit K, Si, Al usw. enthaltenden Zusätzen hergestellt werden [1], entweichen die meisten Zusätze bis etwa auf ihren zehntausendstel Teil. Diese winzige Fremdstoffspuren beeinflussen sehr weitgehend die Drahteigenschaften (erhöhen z.B. die Rekristallisationstemperatur von etwa 1700 °K bis auf etwa 2700 °K). Jedoch nur dann, wenn die Zusätze im Reduktionsvorgang vom  $\text{WO}_3$  mittels  $\text{H}_2$  anwesend waren. Außerdem hängt ihre Wirksamkeit noch von der Art und Weise des Reduktionsvorganges selbst ab. Diese Empfindlichkeit fehlt beim thorierten Material sehr weitgehend. In welcher Weise die chemischen Ereignisse der Reduktion die Wirksamkeit der neuzeitlichen Zusätze bestimmen, wird seit vielen Jahren sowohl bei uns, wie auch an anderen Stellen eifrig untersucht.

Jetzt wollen wir uns aber damit nicht beschäftigen, sondern die andere grundlegende Frage näher betrachten, wie sich die neuzeitlichen Zusatzspuren im Wolframmetall verhalten, wenn sie einmal schon in wirksamer Form im gezogenen Draht vorliegen. Dazu ziehen wir auch einige ältere und neuere Beobachtungen über das Verhalten von Fremdstoffspuren auch anderer Metalle in Betracht.

#### V

Nach einem, von ROBINSON im Jahre 1942 beschriebenen Verfahren [8] haben wir um 1955–1960 das Erscheinen und das Weiterwachsen von Kristalliten im Rekristallisationsprozeß von gezogenen Wolframdrähten, und zwar von K, Si-Zusatzspuren enthaltenden sog. UC Drähten und K, Si, Al-Zusatzspuren enthaltenden sog. GK Drähten messend verfolgt [9, 10].

Die Wolframdrähte von 0,9 mm Durchmesser wurden in der Längsachse einer evakuierten Glasröhre ausgespannt und auf die entsprechende Temperatur erhitzt. Die innere Wand der Röhre wurde mit einer Willemitpulverschicht bedeckt. Durch die Beschleunigung der thermischen Elektronen in radialer Richtung mit etwa 8000 V Gleichspannung konnte man die Willemitschicht



*Bild 8.* Sog. *Robinson*-Aufnahmen. Der mit zwei Strichen bezeichnete Kristallit erreichte in 17 Sek. nach seiner Beobachtung eine Länge von 0,25 cm (oben) und wuchs in 594 Sek. bis zu einer Länge von 3,14 cm weiter (unten)

(PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.—MILLNER, T.: Festkörperphysik, 1961 [10]; S. 60, Bild 1.2 und Bild 1.13)

derart zum Leuchten erregen, daß an ihr die Entstehung und das Weiterwachsen der einzelnen Kristallite photographisch festgehalten und die Wachstumsgeschwindigkeit berechnet werden konnte. Bild 8 zeigt uns zwei solche Aufnahmen.

Auf Grund von Hunderten solcher Messungen wurden die Durchschnittswerte berechnet, welche in der Tafel IV zusammengestellt sind. Man ersieht daraus, daß die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Kristallite in den UC Drähten einerseits und in den GK Drähten andererseits fast den



gleichen Wert besitzt. Nicht wegen eines entsprechenden Unterschiedes in den Wachstumsgeschwindigkeiten entstehen also in den (Al-haltigen) GK Drähten viel längere Kristallite als in den UC Drähten, sondern darum, weil in der Zeiteinheit in den GK Drähten viel weniger Kristallkeime zu wachsen beginnen als in den UC Drähten.

Die Tatsache, daß ein Übergang von den K, Si-Zusatzspuren auf die K, Si, Al-Zusatzspuren die Keimbildungsgeschwindigkeit der gezogenen Wolf-

**Tafel IV**

*Durchschnittswerte von Kristallwachstums-Kennzahlen*

(Bei einem Drahtdurchmesser von 0,085 cm sind die Kristallite der GK Drähte 59 ÷ 11mal, und die der UC Drähte 7 ÷ 4mal länger als der Drahtdurchmesser)

	°K	UC (K, Na, Si)	GK (K, Si, Al)	
Durchschnittswerte der Kristallwachstumsgeschwindigkeiten, cm sec <sup>-1</sup>	2040 2200	0,0002 0,02	0,0003 0,02	Die Werte der GK und UC Drähte unterscheiden sich kaum
Durchschnittswerte der Keimbildungsgeschwindigkeiten, cm <sup>-3</sup> sec <sup>-1</sup>	2040 2200	6 300	0,2 30	Die Werte der GK Drähte sind 30 ÷ 10mal kleiner als die der UC Drähte
Durchschnittliche Kristallitenlängen, cm	2040 2200	0,6 0,3	5,0 0,9	Die Werte der GK Drähte sind 9 ÷ 3mal größer als die der UC Drähte

ramdrähte beträchtlich herabsetzt, führte uns zu der Auffassung, daß die typische Langkristallstruktur der K, Si, Al-Drähte nicht von unspezifischen »Schlackenteilchen« [11], sondern vielmehr durch artspezifischen Eigenschaften von atomdispers verteilten Al-Atomen hervorgerufen wird [12].

**VI**

Das fortschreitende Wachsen des im Bild 8 gezeigten Kristalles haben wir in kleineren Abschnitten längere Zeit messend verfolgt. Aus den in der Tafel V zusammengestellten Meßwerten geht es hervor, daß der Kristall bei 2120 °K in 666 Sekunden 3,19 cm lang geworden ist. Man sieht außerdem, daß seine Geschwindigkeitswerte im Verhältnis 1 : 8 schwankten.

Vergleicht man die Wachstumsgeschwindigkeitswerte mehrerer Kristallite, so findet man noch größere Unterschiede.

Einem 100 Mikron starken Draht, in welchem die numerische Konzentration der K, Si und Al-Atome niedriger als 10<sup>-5</sup> lag, haben wir an 25 Stellen 25 Drahtstücke von je 25 cm entnommen und die sekundäre Rekristallisation

Tafel V

## Wachstumsgeschwindigkeits-Schwankungen in einem einzigen Kristall

( $V_D$  Durchschnittswert der Kristallwachstumsgeschwindigkeit innerhalb 666 Sekunden,  
 $5,2 \cdot 10^{-3}$  cm sec $^{-1}$ ;  $V_{\text{Min}}$   $1,82 \cdot 10^{-3}$  cm sec $^{-1}$ )

Laufnummer der Zeit- intervalle, $n$	Dauer des Zeit- intervalles, $t$ [sec]	Längen- zunahme des Kristallites, $l$ [cm]	Intervallge- schwindigkeit, $l/t = \bar{V}_n$	$V_n/V_D$	$V_n/V_{\text{Min}}$
1.					
2.	17	0,25	$1,47 \cdot 10^{-2}$	2,81	8,1
3.	21	0,12	$5,71 \cdot 10^{-3}$	1,09	3,1
5.	71	0,25	$3,54 \cdot 10^{-3}$	0,68	2,0
7.	11	0,02	$1,82 \cdot 10^{-3}$	0,35	1,0
9.	135	0,36	$2,66 \cdot 10^{-3}$	0,51	1,5
11.	37	0,36	$9,73 \cdot 10^{-3}$	1,86	5,3
13.	89	0,29	$3,26 \cdot 10^{-3}$	0,62	1,8
14.	72	0,35	$4,86 \cdot 10^{-3}$	0,93	2,7

Tafel VI

## Schwankungen der Wachstumsgeschwindigkeit in längeren Drahtabschnitten

( $V_D$  Durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in den einzelnen Drahtabschnitten;  
 $V_{\text{Max}}$ ,  $V_{\text{Min}}$  im betreffenden Drahtabschnitt beobachteter maximaler und minimaler  
Wert der Wachstumsgeschwindigkeit)

Draht- nummer	Draht- temperatur, $^{\circ}\text{K}$	$V_D$ , cm sec $^{-1}$	Zahl der Kristallite, $n$	Draht- abschnitt, $l$ [cm]	$V_{\text{Max}}/V_{\text{Min}}$
1.	2060	$1,6 \cdot 10^{-3}$	6	22,5	41,8
6.	2090	$1,4 \cdot 10^{-4}$	13	15,8	468,7
9.	2120	$6,5 \cdot 10^{-4}$	7	23,4	66,6
13.	2190	$5,6 \cdot 10^{-4}$	18	22,0	638,8
14.	2220	$4,5 \cdot 10^{-4}$	12	22,4	71,9
19.	2245	$1,1 \cdot 10^{-3}$	13	23,7	185,7
21.	2320	$1,8 \cdot 10^{-3}$	14	13,4	27,0
25.	2140	$2,3 \cdot 10^{-3}$	13	22,0	3200,0

derselben untersucht. Bei 299 Kristalliten haben wir den Wachstumsvorgang mit Hilfe von rund 1450 Aufnahmen festgehalten. Einige Meßwerte dieser Serie enthält die Tafel VI.

Man sieht, daß bei den zu verschiedenen Zeitabschnitten gehörenden Geschwindigkeitswerten verschiedener Kristalle hundertfache bis tausend-



fache Unterschiede auftreten. Diese interessante Tatsache blieb bei den metallographischen Rekristallisationsuntersuchungen bisher völlig verborgen und wurde erst durch unsere *Robinson*-Aufnahmen zum Vorschein gebracht.

Worauf sind diese großen Schwankungen zurückzuführen? Kann eine Fremdstoffkonzentration von  $10^{-4}\%$  eine Korngrenzenbewegung überhaupt derart beeinflussen? Sind die wirksamen Zusatzspuren vielleicht sehr ungleichmäßig verteilt? Bewegen sie sich zusammen mit den Korngrenzen? Oder werden sie vielmehr von den wandernden Korngrenzen ungerührt an Ort und Stelle belassen? Wirken sie statisch oder dynamisch? Als Teilchen oder als Atome?

Alle diese hochinteressanten Fragen der mit K, Si, Al-Zusatzspuren gelenkten Rekristallisation der Wolframdrähte gelten im Grunde genommen auch heutzutage noch als offene Fragen.

## VII

Es taucht sofort die Frage auf: sind ähnliche Geschwindigkeitsschwankungen auch schon bei anderen Metallen, z. B. bei nicht pulvermetallurgisch erzeugten Metallen, beobachtet worden?

BRINSON und MOORE haben im Rekristallisationsprozeß von gegossenem Zink ähnliches beobachtet und im Jahre 1951 beschrieben [13]. Sie photo-



Bild 9. In einer, mit einem Stich von 15% durch Druck deformierten Zinkscheibe aus reinem gegossenem Zink erscheint und wächst ein neuer Kristall während der Rekristallisation bei 110 °C (heller Kristall in der Bildmitte). Mit polarisiertem Licht aufgenommenes Bild; Vergrößerung etwa 140×

(BRINSON, G.—MOORE, A. J. W., 1951 [13]; Bildtafel LVIII, Bild 31 und Bild 37)

graphierten in polarisiertem Licht das Fortschreiten der Korngrenzen einzelner neu entstandener Kristallite während der Rekristallisation von bearbeitetem reinem Zink (Bild 9) und fanden dabei, daß sich die Korngrenzen oft mit sehr unterschiedlicher Geschwindigkeit weiterbewegen, wobei sie vorhandene Einschlüsse, Fremdteilchen usw. entweder aufzehren oder herumwachsen

und andererseits wiederholt ohne sichtbaren Grund stehen bleiben. Sie kamen zu dem Schluß, daß die beobachteten Geschwindigkeitsschwankungen nicht von mechanischen Hindernissen stammen können, sondern irgend einen anderen Grund haben müssen.

Man sieht, daß man die Geschwindigkeitsschwankungen von Wolfram ebenfalls nicht unbedenklich auf den mechanischen Einfluß von Fremdstoffteilchen zurückführen darf.

### VIII

TAMMANN beschäftigte sich um 1922—1928 mit der Frage, auf welche Plätze sich unlösliche Verunreinigungen in einem Metallkörper in gegossenem Zustand und darauffolgend im Rekristallisationsgefüge verteilen können [14—16].



*Bild 10.* Im Rekristallisationsprozeß von 0,1% Zinn enthaltenden Kadmiumpüttchen umsiedeln die unlöslichen, Sn-haltigen Teilchen von ihren früheren Plätzen auf die neuen Korngrenzen. Diese von TAMMANN stammende Skizze zeigt die Neuordnung der Teilchen nach einem Erhitzen auf 250 °C

(TAMMANN, G. — HEINZEL, A., 1928 [16]; S. 150, Bild 6)

Er löste gegossene Kadmiumpüttchen in 50%iger Ammoniumnitratlösung (also ohne Gasblasenbildung) auf und stellte unter dem Mikroskop fest, daß an den Stellen der gewesenen Korngrenzen ein aus Fremdstoffen bestehendes durchsichtiges Skelett hinterbleibt. Nach einer Zulegierung von 0,1% Zinn zu dem Kadmiummehall fand er nach der Auflösung der gegossenen Püttchen das Fremdstoffskelett dicht mit schwarzen Punkten besetzt wieder. Wurde ein solches Püttchen gewalzt und darauffolgend bei 200 °C rekristallisiert, dann fand man die schwarzen Punkte nicht mehr an den früheren Stellen, sondern an den in der festen Phase entstandenen neuen Korngrenzen (Bild 10). Wurde das Püttchen darauffolgend auf 250 °C erhitzt, so entstanden abermals neue Kristalle und die schwarzen Punkte fand man nun an diesen zuletzt gebildeten Korngrenzen.

Damit war TAMMANN der erste, der beschrieben hat, daß unlösliche Fremdstoffteilchen, die die Korngrenzen besetzen, im Laufe des Rekristallisationsprozesses, also während einer Kristallbildung in fester Phase, wieder-



holt auf neue Korngrenzen übersiedeln können. Er war der Meinung, daß ein solches Übersiedeln nur dann möglich ist, wenn die Fremdstoffteilchen eine entsprechend niedrig schmelzende eutektische Zusammensetzung besitzen und ihre Plätze im geschmolzenen Zustand ändern können.

Seitdem wurden aber auch isotherme Übersiedlungen bekannt geworden, bei denen also diese Vorbedingung nicht erfüllt ist.

## IX

Man kann die wertvollen, an gegossenem Zink und Kadmium gewonnenen Resultate u. a. schon deshalb nicht ohne weiteres auf den Rekristallisationsvorgang von pulvermetallurgisch erzeugten Wolframdrähten übertragen, weil die Fremdstoffspuren sich zu Beginn im Zink und Kadmium nahezu in Gleichgewichtsverteilung befinden, im Wolframdraht aber in einer erzwungenen Verteilung vorliegen.

Man sieht, daß die Natur uns im Zink ein statisches (unbewegtes) Verhalten von Fremdstoffteilchen aufzeigt, im Kadmium hingegen ein dynamisches (bewegliches) Benehmen der Fremdstoffteilchen präsentiert. Welches der beiden Möglichkeiten dem Verhalten der Zusatzspuren von Wolframdrähten nähersteht, ist zurzeit noch nicht entschieden.

Eine Gruppe bekannter Wolframforscher bevorzugen das statische Bild.

MEIJERING (1955) und RIECK haben angenommen [11, 17, 18], daß die Zusatzspuren in den gezogenen Drähten die Faseroberflächen wie Röhrenwände bedecken, und ergänzten diese Annahme damit, daß diese Röhren an voneinander ziemlich weit liegenden Stellen Verstopfungen und an ihren Wänden Seitenlöcher aufweisen. Weiterhin soll diese Anordnung der Zusatzteilchen im primären Rekristallisationsprozeß unverändert bleiben. In der sekundären Rekristallisation ist dann infolge dieser Anordnung das Weiterwachsen der Kristalle in der Richtung der Drahtachse weniger gehindert als seitwärts. Das wäre der Grund dafür, daß z. B. in den K, Si, Al-Zusatzspuren enthaltenden Wolframdrähten im sekundären Rekristallisationsprozeß lange, sich überlappende Kristalle entstehen. Für alle diese Annahmen fehlen aber bisher die direkten Beweise. Da es später RIECK gelungen ist mittels einer dazu geeigneten Röntgenmethode eine Erscheinung (die Fragmentation) nachzuweisen, welche für eine solche Anordnung der Zusatzteilchen auch in den Kristalliten der sekundären Rekristallisation spricht, wurde ergänzend noch angenommen, daß dieselbe Anordnung der Zusatzteilchen auch nach erfolgter sekundärer Rekristallisation bestehen bleibt.

Diese völlig statische Auffassung bezüglich der Rolle der Zusatzspuren wurde später von RIECK noch weiter ausgebaut, um erklären zu können, warum in den rekristallisierten großkristallinen Drähten die größten Kristallite

immer eine [531] oder [421] Orientierung gegenüber der [110] Orientierung der kleineren Kristallite aufweisen, wie dies aus der Tafel VII hervorgeht [19—21].

Als Erklärung dafür hat RIECK auf Grund von Betrachtungen über die Gleitmöglichkeiten den Umstand angegeben, daß im Ziehprozeß die Zusatzhüllen derjenigen Texturelemente, welche zufällig die für ihre plastische Deformation ungünstigen [531] oder [421] Orientierungen besitzen, am meisten abgewetzt werden, und demzufolge im Rekristallisationsprozeß zu bevorzugten (ungehinderten) Wachstumsmöglichkeiten gelangen.

Tafel VII

Die Häufigkeit der Kristallit-Orientierungen [531] und [110] in einigen Wolframdrahtsorten nach RIECK (1959)

Draht $\alpha_{02}$ mit K, Si, Al-Zusatzspuren				Draht $\beta$ mit K, Si- Zusatzspuren		Draht $\alpha_{01}$ Rein-W Draht	
Ausgesuchte große Kristalle		Kristalle an beliebigen Stellen		an beliebigen Stellen		an allen Stellen	
[531]	[110]	[531]	[110]	[531]	[110]	[531]	[110]
19	0	14	12	8	15	0	alle

## X

Das mit großer Sorgfalt gesammelte interessante Beobachtungsmaterial von RIECK hat allgemeine Anerkennung gefunden. Gegen die Erklärungsversuche mit aus Zusatzteilchen bestehenden Röhrenwänden, welche schon im gezogenen Draht vorhanden sein und den Rekristallisationsprozeß durchstehen sollen, sind gewisse Bedenken erhoben worden.

Auch wir selbst haben darauf hingewiesen [12], daß die Konzentration der wirksamen Zusatzspuren in den großkristallinen Drähten so gering ist, daß sie nicht einmal dazu ausreicht, die gesamte Faseroberfläche monoatomar zu bedecken. Wir hielten langher [1] eine Erklärung als viel wahrscheinlicher, welche auf die Wirkungen von Einzelatomen aufgebaut ist.

Einen solchen möglichen Mechanismus hat in den Jahren 1960—1962 MANNERKOSKI angegeben [22, 23].

MANNERKOSKI geht davon aus, daß nach erfolgter primärer Rekristallisation der z. B. K, Si, Al-Zusatzspuren enthaltenden Wolframdrähte alle Texturelemente derselben eine [110] Orientierung aufweisen [22, 23]. Nach seiner Annahme sind in dieser Textur die Zusatzspuren nicht als Teilchen in einer Röhrenwandanordnung vorhanden, sondern unregelmäßig und atomdispers verteilt. Gemäß MANNERKOSKI enthalten dabei die Quergrenzflächen der Texturelemente vorwiegend Schraubenversetzungen und die Längsgrenzflächen



überwiegend Linienversetzungen. Bei der sekundären Rekristallisation entweicht ein beträchtlicher Teil dieser Versetzungen aus dem primär rekristallisierten Draht. Gemäß ihrer Eigenart wandern dabei die Linienversetzungen senkrecht zu der Drahtachse und die Schraubenversetzungen in der Richtung der Drahtachse aus dem Draht heraus. Unterdessen führen die Linienversetzungen Fremdatome mit sich und häufen diese in der Längsrichtung als Fäden (Wände) an. Die Schraubenversetzungen führen keine Fremdatome mit sich. Ähnliche Gebilde, wie die von RIECK schon in den gezogenen Drähten angenommenen, aus *Fremdstoffteilchen* bestehenden Röhrenwände, entstehen also nach MANNERKOSKI aus *Fremdatomen* erst im Rekristallisationsprozeß selbst.

MANNERKOSKI war einer der ersten, die nicht über die Verteilung, sondern über das Verhalten der Zusatzspuren neue Aussagen machten, d. h. die statische durch eine dynamische Behandlungsweise abzulösen versuchten.

## XI

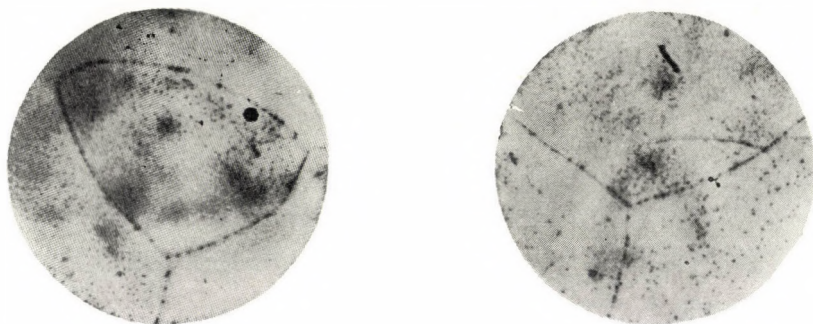
In der letzten Zeit hat auch uns das dynamische Verhalten von Fremdstoffspuren in den Kristallisations- und Rekristallisationsprozessen der Metalle beschäftigt. Zu solchen Untersuchungen sind autoradiographische Methoden besonders geeignet. Es sind aber keine entsprechend langlebige K, Si und Al-Isotope bekannt, mit welchen man solche Untersuchungen an pulvermetallurgischen Wolframdrähten durchführen könnte.

So sind wir dann zu Modellversuchen übergegangen, zu welchen wir als Grundmetall Zinn und als in fester Phase sehr wenig lösliche Verunreinigung Silber gewählt haben [24].

Wir stellten u. a. eine 0,005%ige, mit aktiven  $^{110}\text{Ag}$  Atomen markierte Zinn-Silber-Legierung her und konnten damit feststellen, daß das Silber sowohl im Gußkörper wie auch in den daraus erzeugten bearbeiteten und rekristallisierten Proben in Form feiner punktförmiger Gebilde hauptsächlich die Korngrenzen besetzt, und bei einer Weiterbewegung der Korngrenzen sich mit diesen irgendwie mitbewegt. Im Bild 11 zeigen uns zwei autoradiographische Aufnahmen diese Erscheinung. Man findet hier auf dem Gebiete sehr kleiner Fremdstoffkonzentrationen dieselben Erscheinungen wieder, welche TAMMANN für größere Konzentrationen vor vier Jahrzehnten beschrieben hat.

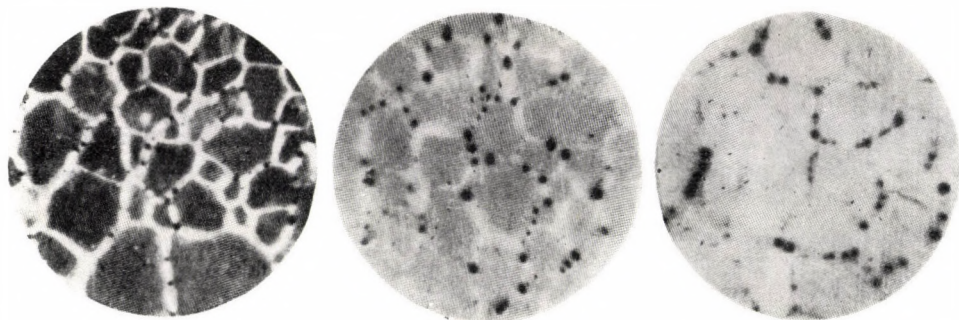
Unsere autoradiographischen Studien haben uns aber auch eine völlig neue Seite dieser Erscheinungen aufgedeckt [25]. Wir ließen mit aktiven  $^{110}\text{Ag}$ -Atomen markiertes Silber von der »oberen« Seite her in eine reine vielkristalline Zinnscheibe in 480 Stunden bei 170 °C hineindiffundieren. Wie uns Bild 12 lehrt, konnte man nachher in den autoradiographischen Aufnahmen

— wie erwartet — die Folgen einer langsameren, etwa 30 Mikron tief vordringenden Volumendiffusion und die einer rascheren, bis zu der anderen Scheibenseite reichenden Korngrenzendiffusion beobachten. Sehr auffallend war es, daß die Korngrenzen weiß, d. h. leer aussahen und das Silber statt in einer



*Bild 11. Links:* Autoradiographisches Teilbild von einem Zinngußkörper mit 0,005% Silber (markiert mit  $^{110}\text{Ag}$ -Atomen) nach Erhitzen während 60 Min. bei 210 °C mit Kristallitgrenzen, deren Verschiebung verfolgt werden kann

*Rechts:* Autoradiographisches Bild derselben Stelle nach weiterer Erhitzung während 30 Min. bei 210 °C. Man sieht, wie die Silberspuren die wandernden Korngrenzen begleiten (MILLNER, T.—BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J., 1960 [24]; Bild 10a und 11a)



*Bild 12.* Autoradiographische Bilder vom Ergebnis eines Diffusionsprozesses von Silberatomen einer 0,2% Ag und  $2 \cdot 10^{-50}\%$   $^{110}\text{Ag}$  enthaltenden Silberschicht in das Innere eines reinen Zinn-gußkörpers nach 480 Stunden bei 170 °C

*Links:* 5 Mikron tief; starke Volumendiffusion, »leere« Korngrenzen, mit punktförmigen Silberanhäufungen.

*In der Mitte:* 30 Mikron tief; schwache Volumendiffusion, »leere« Korngrenzen, mit punktförmigen Silberanhäufungen

*Rechts:* 300 Mikron tief; Fehlen einer Volumendiffusion, punktförmige Silberanhäufungen an den Korngrenzen

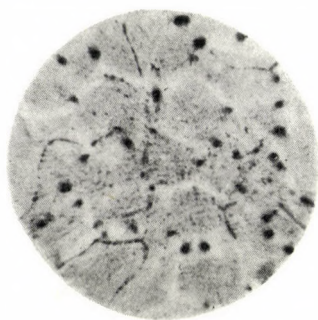
(MILLNER, T.—BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J., 1963 [25]; Bild 1a, 1b und 1c)

homogenen Verteilung in Form punktförmiger Gebilde enthielten. Dieser Umstand hat uns zu der folgenden Beobachtung verholfen.

An dieser Zinnscheibe wurde nach dem Diffusionsversuch ein kleines Gebiet durch leichten Walzdruck mechanisch beansprucht. Danach gab dieses



Gebiet in einer Tiefe von 30 Mikron das autoradiographische Bild 13. Es ist hier zufälliger Weise gelungen, die besonderen Verhältnisse einer bei Zimmertemperatur fortschreitenden Rekristallisation festzuhalten. Einerseits sieht man noch die durch Volumendiffusion verursachte Schwärzung der Kristallite und die Überreste des hellen Korngrenzenetzes mit den zugehörigen Anhäufungen, andererseits bemerkt man aber auch neue, mit kleinen schwarzen Punkten perlenschnurartig besetzte und von den hellen völlig unabhängige Korngrenzen. Im Laufe dieser isothermen Rekristallisation (bei Zimmertemperatur) begannen die Silberatome der alten Anhäufungen sich auf die neuen Korngrenzen umzugruppieren.



*Bild 13.* Ein weiteres autoradiographisches Bild von einem Teil der Zinnscheibe im Bilde 12. Nach einer bei Zimmertemperatur stattgefundenen Beanspruchung durch Walzen und einer gleichzeitig teilweise abgelaufenen isothermen Rekristallisation sieht man hier noch Überreste der früheren Silberverteilung und sogleich auch die neue Silberverteilung, d. h. die perlenschnurartige Besetzung der neuen Korngrenzen mit viel feineren Silberanhäufungen

(MILLNER, T.—BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J., 1963 [25]; Bild 2a)

Man sieht, wie eine Umgruppierung von Fremdatomen in einem Rekristallisationsprozeß auch isotherm und mit großer Geschwindigkeit vor sich gehen kann, und daß dazu kein geschmolzenes Eutektikum — wie das TAMMANN annimmt — notwendig ist. Nicht das Verhalten von festen Fremdstoffteilchen und nicht das Verhalten irgendeiner flüssigen Phase spiegeln sich in diesen Erscheinungen, sondern das Verhalten der Fremdatome selbst. Vielleicht kann einmal diese Erkenntnis auch auf die Aufklärung der Rekristallisationserscheinungen von Wolframdrähten fördernd wirken.

## XII

Es taucht nun die Frage auf, ob wir auch schon bei den Wolframdrähten Erscheinungen beobachtet haben, welche eher auf das Verhalten von Fremdatomen als auf das Verhalten von irgendwelchen Teilchen fremder Phasen zurückzuführen wären.

Seit Jahren untersuchen wir die langsame Dehnung von 0,9 mm starken rekristallisierten Wolframdrähten bei 2800 °K. Zur Untersuchung kamen bisher vier Arten von Drähten: K, Si, Al-Zusatzspuren enthaltende GK Drähte; K, (Na), Si-Zusatzspuren enthaltende UC Drähte; K, Al-Zusatzspuren enthaltende KAl Drähte und ohne Zusätze hergestellte sog. Rein-W Drähte [26].

Aus jedem der vier Metallpulver stellten wir mit rascher, üblicher und langsamer Sinterung Stäbe her. Es entstanden so zwölf verschiedene Stabsorten. Unserer Anschauung nach enthielten die »raschen« mehr und die »langsamen« weniger Zusatzreste als die »üblichen«. Aus allen zwölf Varianten wurden Drähte hergestellt. Alle Drahtsorten wurden bei einer Zugbelastung von

Tafel VIII

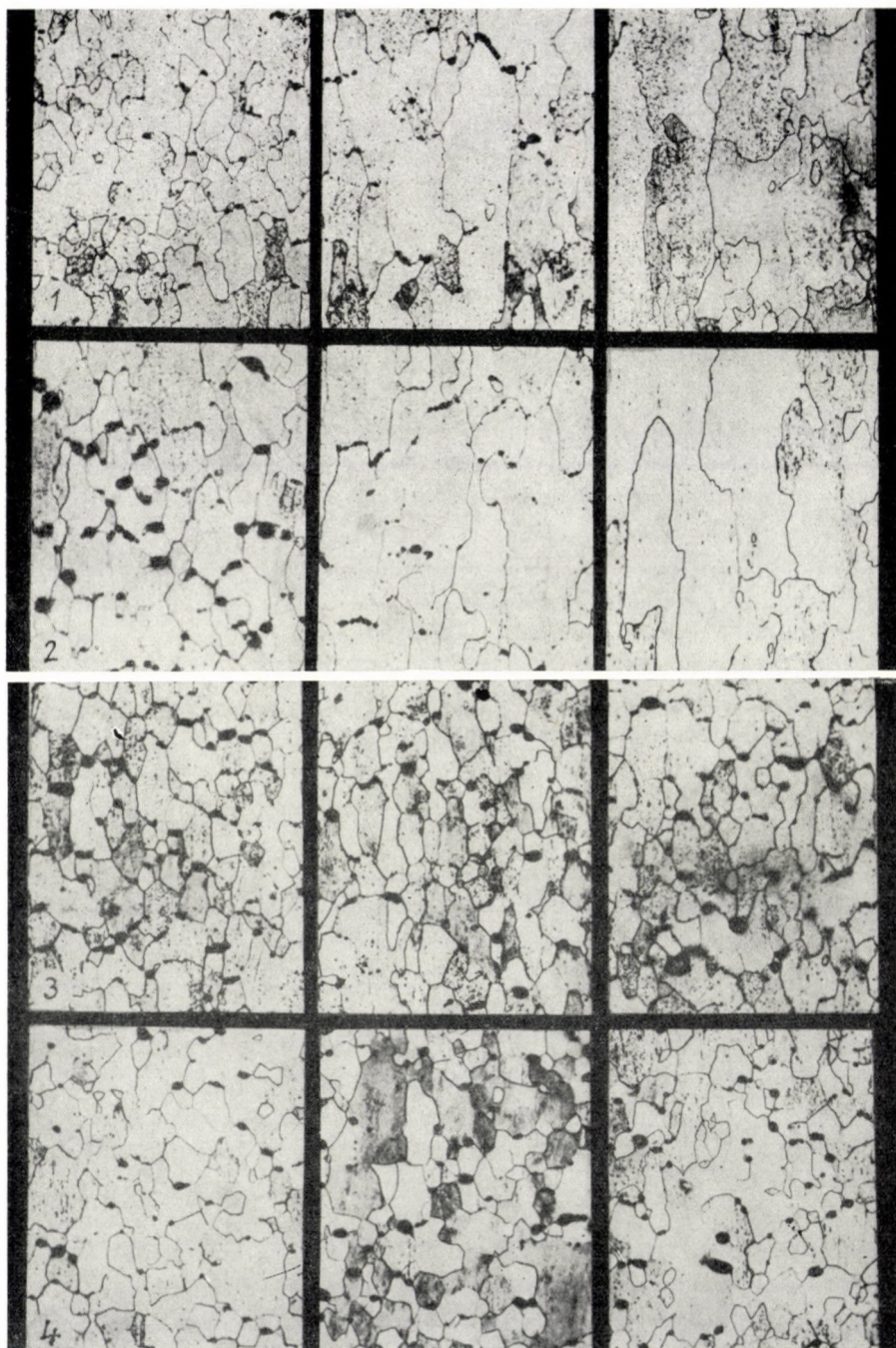
Zusammenstellung der Hochtemperatur-Dehnungs-Kennzahlen von vier typischen Wolframdrähten nach MILLNER und HORACSEK

(Drahtdurchmesser 0,9 mm, Drahtlänge 400 mm, Versuchstemperatur 2800 °K; s: schnelle, ü: übliche, l: langsame Sinterung)

Bezeichnung	GK			UC		
	K, Si, Al			K, Na, Si		
	s	ü	l	s	ü	l
Bruchdehnung [mm] .....	10,2	4,1	3,6	24,6	14,2	7,9
Dehnungsgeschwindigkeit [mm/Stunde] .....	3,8	0,4	0,2	15,3	5,8	1,1
Zeit bis zum Bruch [Stunden] ....	2,7	10,2	18,0	1,6	2,4	7,2
Relative Häufigkeit der Ätzgruben	++	++	0	+++	++	0
Relative Länge der Kristallite .....	1	3	4	1	3	4
Gestalt der Kristallite (ae: aequiaxial, l: länglich) .....	ae	l	l	ae	l	l

Bezeichnung	KAl			Rein-W		
	K, Al			zusatzfrei		
	s	ü	l	s	ü	l
Bruchdehnung [mm] .....	27,0	30,3	30,8	31,7	37,1	36,9
Dehnungsgeschwindigkeit [mm/Stunde] .....	15,1	14,0	24,0	19,1	16,7	17,0
Zeit bis zum Bruch [Stunden] ....	1,8	2,2	1,3	1,7	2,2	2,2
Relative Häufigkeit der Ätzgruben	+++	+++	+++	+++	+++	+++
Relative Länge der Kristallite .....	1	1	1	1	1	1
Gestalt der Kristallite (ae: aequiaxial, l: länglich) .....	ae	ae	ae	ae	ae	ae





**Bild 14.** *Reihe 1* : Schliffbilder von GK Drähten aus »rasch«, »üblich« und »langsam« gesinter-  
ten Stäben nach dem Kriechversuch. *Reihe 2* : Schliffbilder von entsprechenden UC Drähten;  
*Reihe 3* : Schliffbilder von entsprechenden KAl Drähten; *Reihe 4* : Schliffbilder von ent-  
sprechenden Rein-W Drähten



1300 g/mm<sup>2</sup> und bei einer Temperatur von 2800 °K auf ihre Dehnungseigenschaften geprüft. Nachher wurden ihre metallographischen Schliffe mittels eines von uns entwickelten Ätzmittels [27, 28] auf eine spezielle Ätzgrubenbildung untersucht. Die Resultate sind in der Tafel VIII sowie im Bild 14 zusammengestellt.

Auf Grund der Tafel VIII heben wir die Tatsache hervor, daß die Si-haltigen GK und UC Drahtsorten viel langsamer kriechen als die ohne Si-Zusatz hergestellten beiden anderen. Außerdem sieht man, daß das langsamere Kriechen bei den Si-haltigen Sorten durch langsames Sintern noch weiter stark herabgesetzt werden kann. Die beiden Si-freien, rasch kriechenden Sorten d. h. die KAl- und Rein-W-Drähte sind völlig unempfindlich gegen die Variationen des Sintervorganges.

Parallel dazu weisen die Schlibbilder der Si-haltigen GK und UC Sorten im allgemeinen viel weniger Ätzlöcher auf als die beiden anderen. Vor dem Kriechen entstehen keine Ätzlöcher. Ihre Ursache entwickelt sich erst im Kriechvorgang selbst.

Dehnung und Ätzlochbildung werden offensichtlich durch die chemische Eigenart der Zusatzspuren beeinflußt, da man beides nur bei den Si-haltigen Drähten durch spezielles Sintern verringern kann. Die Ätzlöcher treten erst nach dem Kriechen und dann immer an den Querkorngrenzen auf. Höchstwahrscheinlich häufen sich — vielleicht mit Vakanzen gepaart — die Fremdstoffe unter dem Zwange der Zugbelastung am meisten an diesen an. Es lassen sich diese Beobachtungen leichter erklären, wenn man die Zusatzspuren als Fremdatome ansieht, als wenn man sie als Fremdphasenteilchen betrachtet.

### XIII

In ihrer Gesamtheit sprechen diese Befunde und Beobachtungen dafür, daß die Fremdstoffspuren, welche in der Wolframtechnologie eine aktive Rolle spielen, weder vorwiegend als Teilchen, noch ausschließlich als Atome betrachtet werden dürfen.

Besonders unsere eigenen Versuche weisen darauf hin, daß immer dann, wenn in einem Metallkörper eine Neuordnung des beanspruchten Gitters erfolgt, gewisse Fremdatome eine unerwartet große Beweglichkeit aufweisen, und es kann eine Neuordnung auch der Fremdstoffspuren leicht erfolgen. Andererseits sieht man, daß nach erfolgter Umorientierung des Gitters die Fremdstoffe ihre neuen Plätze — auch in sehr geringer Konzentration — oft nicht in atomarer Verteilung, sondern als neue Teilchen besetzen. Die Erforschung des einerseits statischen, andererseits dynamischen Verhaltens der Fremdstoffspuren, besonders in den Rekristallisationsprozessen, scheint eine der wichtigsten Aufgaben der Wolframforschung zu sein.



Da die meisten nützlichen Zusatzspuren der Wolframtechnologie auch heute aus oxydischen Fremdstoffen stammen, sollten die chemischen Vorgänge, die zwischen den Zusatzspuren und dem Wolframmetall sich abspielen können, mehr als bisher beachtet werden, wie dies auch aus unseren Beobachtungen an thorierten Drähten hervorgeht. Daß diese Frage ihre Bedeutung auch im Falle der sehr geringen neuzeitlichen Zusatzspuren nicht verliert, geht aus einer bei uns gemachten bisher unveröffentlichten Beobachtung am klarsten hervor [29], wonach in den K, Al, Si-Zusatzspuren enthaltenden GK Drähten in einer entsprechend feuchten Wasserstoffatmosphäre im Rekrystallisationsprozeß zwar ebenso große Kristalle entstehen wie in trockenem Wasserstoff, sie sind aber dann im Vergleich zu den »trockenen« ungewein brüchig.

Dieser Befund bringt den engen Zusammenhang zwischen den metallphysikalischen Vorgängen und der chemischen Eigenart der Fremdstoffspuren auf dem Gebiet der Wolframforschung klar zum Ausdruck.

\*

Die eigenen Forschungsarbeiten wurden früher im Forschungslaboratorium der Firma *Tungstam* (Budapest), später im *Forschungsinstitut für die Nachrichtentechnische Industrie* (Budapest) und schließlich im *Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Debrecen* (Ungarn) und im *Forschungsinstitut für Technische Physik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften* (Budapest) durchgeführt.

#### SCHRIFTTUM

1. MILLNER, T.: *Acta Techn. Hung.* **17** (1957), 67.
2. SMITHELLS, C. J.: *Tungsten*. Chapman and Hall, London 1952.
3. PÁCZ, A.: USA Pat. 1.410.499 (1922).
4. LAX, E.—PIRANI, M.: Wolfram in GEHLHOFF: Lehrbuch der technischen Physik, III. J. Ambrosius Barth, Leipzig 1929; S. 320; Abb. 227, Abb. 228.
5. GEISS, W.—VAN LIEMPT, J. A. M.: *Z. anorg. allg. Chem.* **168** (1927), 107.
6. PINTSCH: DRP 291.994 (1913).
7. LANGMUIR, J.: *Phys. Rev.* **22** (1923), 357.
8. ROBINSON, C. S.: *J. Appl. Phys.* **13** (1942), 647.
9. MILLNER, T.—PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.: *Acta Techn. Hung.* **17** (1957), 289.
10. PROHÁSZKA, J.—HORVÁTH, A.—MILLNER, T.: Festkörperphysik. Festkörperphysik-Tagung in Balatonfüred (Ungarn) 1959. Akademie Verlag, Berlin 1961, S. 60.
11. MEIJERING, J. L.: Warmfeste und korrosionsbeständige Sinterwerkstoffe 2. Plansee-Seminar 1955, Reutte (Tirol); 1956, S. 305.
12. MILLNER, T.—PROHÁSZKA, J.—NEUGEBAUER, J.: Festkörperphysik. Festkörperphysik-Tagung in Balatonfüred (Ungarn) 1959. Akademie Verlag, Berlin 1961, S. 219.
13. BRINSON, G.—MOORE, A. J. W.: *J. Inst. Metals* **79** (1951), 429.
14. TAMMANN, G.: *Z. anorg. allg. Chem.* **121** (1922), 275.
15. TAMMANN, G.—HEINZEL, A.—LAASS, F.: *Z. anorg. allg. Chem.* **173** (1928), 143.
16. TAMMANN, G.—HEINZEL, A.: *Z. anorg. allg. Chem.* **173** (1928), 147.
17. RIECK, G. D.: *Acta Metallurgica* **4** (1956), 47.
18. MEIJERING, J. L.—RIECK, G. D.: *Philips' Technische Rundschau* **19** (1957/58), 113.
19. RIECK, G. D.: Hochschmelzende Metalle 3. Plansee Seminar 1958, Reutte (Tirol). Springer Verlag, Wien 1959, S. 108.

20. RIECK, G. D.: *Acta Metallurgica* **6** (1958), 360.
21. RIECK, G. D.: *Acta Metallurgica* **9** (1961), 825.
22. MANNERKOSKI, M.: *J. Institute of Metals* **88** (1959—60), 397.
23. MANNERKOSKI, M.: *Acta Metallurgica* **10** (1962), 982.
24. MILLNER, T.—BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J.: *Z. Metallkunde* **51** (1960), 639.
25. MILLNER, T.—BARTHA, L.—PROHÁSZKA, J.: *Z. Metallkunde* **54** (1963), 17.
26. MILLNER, T.—SASS, L.—NEUGEBAUER, J.—PROHÁSZKA, J.—HORACEK, O.—ÁCS, V.: II. Intern. Pulvermet. Tagung. Eisenach, 1961. *Abh. der DAW zu Berlin* (1962), 281.
27. MILLNER, T.—SASS, L.: *Aluminium* (Budapest) **5** (1953), 214.
28. SCHADLER, H. W.: Direct Observation of Imperfections in Crystals. Edited by J. B. Newkirk and J. H. Wernick. Interscience Publishers, New York—London 1962; P. 593.
29. NEUGEBAUER, J.: unveröffentlichte Beobachtung.

## ABOUT THE BEHAVIOUR OF THE DOPES IN POWDERMETALLURGICAL TUNGSTEN

TH. MILLNER

### SUMMARY

Relying on the already established facts and on the more recent observations on tungsten and other metals, a discussion is given about the possible behaviour of the dopes which determine the properties of tungsten (wires) in respect of technology and recrystallization. The main problem is, whether the effect of the dopes is due to foreign particles or to foreign atoms. The dopes, which play an important role in the technology of tungsten, may be present partly in the form of particles and partly as dispersed foreign atoms. During the processing of the metal these two forms may even transform into each other. The basic influence of dopes, however, comes from the specific foreign atoms. This view is supported by all observations, but first of all by the results of the creep experiments on tungsten wires, and by those of the autoradiographic investigations on the Sn-Ag model-system.

## COMPORTEMENT DES TRACES DE SUBSTANCES ÉTRANGÈRES DANS LE TUNGSTÈNE MÉTALLIQUE

T. MILLNER

### RÉSUMÉ

Sur la base de constatations plus anciennes relatives au tungstène métallique et — en partie — à d'autres métaux, confirmées aussi par des observations plus récentes, l'auteur cherche à élucider comment les traces de substances étrangères déterminant les caractéristiques technologiques et de recristallisation des filaments de tungstène se comportent dans le tungstène métallique, au cours de la fabrication et pendant l'usage. Se comportent-elles comme des particules de substances étrangères ou comme des atomes étrangers? Toutes les observations, en particulier les résultats des essais de fluage effectués avec des filaments de tungstène et l'étude autoradiographique du système étain-argent examiné comme modèle, indiquent que les traces de substances étrangères jouant un rôle actif dans la technologie du tungstène sont présentes dans les échantillons de tungstène en partie sous forme de particules et en partie sous forme d'atomes, les particules pouvant donner naissance à des atomes indépendants qui peuvent, à leur tour, former de nouveau des particules au cours des processus technologiques. Mais dans ces processus métallographiques, les effets technologiques caractéristiques sont produits non par les particules, mais par les différents atomes étrangers.



## ПОВЕДЕНИЕ СЛЕДОВ ПРИСАДКИ В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ВОЛЬФРАМЕ

Т. МИЛЬНЕР

## РЕЗЮМЕ

На основе накопленных ранее данных и новых наблюдений вольфрама и других металлов поясняется нерешенный вопрос поведения следов чужеродных атомов, которые определяют технологические свойства и особенности рекристаллизации вольфрамовой проволоки в процессе изготовления и эксплуатации ее. Ведут ли они себя как инородные включения, или как растворенные атомы. Все наблюдения, а особенно исследование вольфрамовой проволоки на ползучесть и исследование моделирующей системы сплава олово-серебро методом радиографии, показывают, что следы присадки, имеющие активную роль в технологии изготовления вольфрама, присутствуют в нем в виде включений и как растворенные атомы. В процессе же технологического цикла имеет место взаимное перераспределение. Технологические особенности вызваны, однако, не включениями, а различными чужеродными растворенными атомами.





# BEITRAG ZUR UNTERSUCHUNG DER FACHWERKE AUS STAHLBETON UNTER STATISCHEN UND DAUERBEANSPRUCHUNGEN

S. A. MORTADA

PROF. DR. ING.

TECHNICAL UNIVERSITY ALEXANDRIA

[Eingegangen am 30. Juli 1964]

Es wurde versucht, an Hand weitgehender Messungen an zwei Fachwerkträgern das statische und dynamische Verhalten der Fachwerke aus Stahlbeton zu klären. Der eine Träger wurde speziell für die statischen Versuche verwendet, der andere dagegen statisch und dynamisch geprüft. Ziel dieser Untersuchungen war, Angaben über die Zuverlässigkeit und den Sicherheitsgrad dieser Bauwerke zu schaffen, die als Grundlage für die Anwendung derselben gelten können.

## I. Statische Untersuchungen

Der Zweck der statischen Untersuchungen war folgender:

1. Bestimmung der *Rißlast*, derjenigen Last, bei welcher die Zugfestigkeit des Betons erreicht wird. Ferner Feststellung der infolge der Risse verursachten Veränderungen der Verformungen des Tragwerks.
2. Bestimmung der infolge der steifen Anschlüsse auftretenden *zusätzlichen Spannungen* — Nebenspannungen — und ihres Verhältnisses zu den Hauptspannungen infolge der Nutzlast sowie für Belastungen innerhalb des Elastizitätsbereiches und nach Überschreitung desselben.
3. Untersuchung der *Verformungen* im Elastizitäts- und im plastischen Bereich.
4. Feststellung der Grenze des *Elastizitätsbereiches* und des *Sicherheitsgrades* gegen Bruch.
5. Feststellung des Einflusses der *wiederholten Belastung* auf die Elastizität und die Tragfähigkeit der Bauwerke (Ermüdung).

Die statischen Untersuchungen wurden in der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt, Zürich und zwar an zwei gleichen Versuchsträgern durchgeführt.

### 1. Versuchsanordnung, zulässige Spannungen

Die Träger (Bild 1) wurden nach den schweizerischen Normen für Stahlbeton berechnet. Die Einzelheiten der Stahlbewehrung und die Abmessungen der Versuchsträger sind aus Bild 2 zu entnehmen.

Für Druckstäbe mit Schlankheitsgrad  $\lambda_k < 35$  beträgt für die Axialbelastung die zulässige Druckspannung  $70 \text{ kp/cm}^2$ . Für größere Schlankheits-

grade von  $\lambda_k < 35$  ergibt sich die zulässige Knickspannung für  $\sigma_{zul} = 70$  kp/cm<sup>2</sup> aus der Beziehung

$$\sigma_k = 80 - 0,3 \lambda_k.$$

Als Knicklänge wurde 0,8 der theoretischen Stablänge des Fachwerks angenommen.

Die Kräfte der gezogenen Stäbe wurden vollständig von den Stahleinlagen aufgenommen, mit einer zulässigen Spannung von 1200 kp/cm<sup>2</sup>. Die Zahl  $n = E_e : E_b$  wurde mit 10 eingesetzt. Als Belastung — Nutzlast — wurde eine Einzellast von 50 Mp in der Mitte des Trägers vorgesehen.

Für die Dimensionierung wurden die Stabkräfte des gelenkigen Fachwerks angenommen. Die Berechnung der Nebenspannungen erfolgte nach

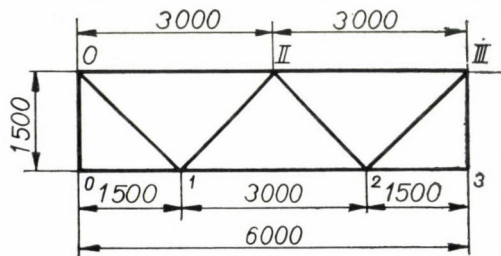


Bild 1

MOHR, und zwar einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung des Zugbetons. Weiter wurde eine Berechnung auch ohne Berücksichtigung des Zugbetons aufgestellt.

Die errechneten Nebenspannungen dienten nur zum Vergleich mit den Messungen, für die Dimensionierung selbst wurden sie nicht berücksichtigt.

## 2. Statische Versuche

Die statischen Versuche umfassen die Bestimmung der Stabkräfte und Momente, der Durchbiegungen und Drehungen der Versuchsträger.

Bei Bestimmung der Spannungen aus den gemessenen Dehnungen ergaben sich zwei Schwierigkeiten:

*Streuung im Elastizitätsmodul des Betons.* Die  $E$ -Messung an Hand der Betonprismen ergab ziemlich hohe Werte für  $E \approx 400\,000$  kp/cm<sup>2</sup>, bei deren Zugrundelegung die Fachwerkstabkräfte nicht in guter Übereinstimmung mit der Belastung stehen. Ferner war der  $E$ -Wert aller Trägerteile nicht ganz einheitlich, was die Bestimmung eines mittleren Elastizitätsmoduls, welcher eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung gestattet, erforderte. Dieser wurde für  $E_b = 340\,000$  kp/cm<sup>2</sup> ermittelt.

*Unvollkommenes Reißen des gezogenen Betons und Druckvorspannung der Stahlarmierung infolge des Schwindens des Betons:* diese zwei Faktoren haben



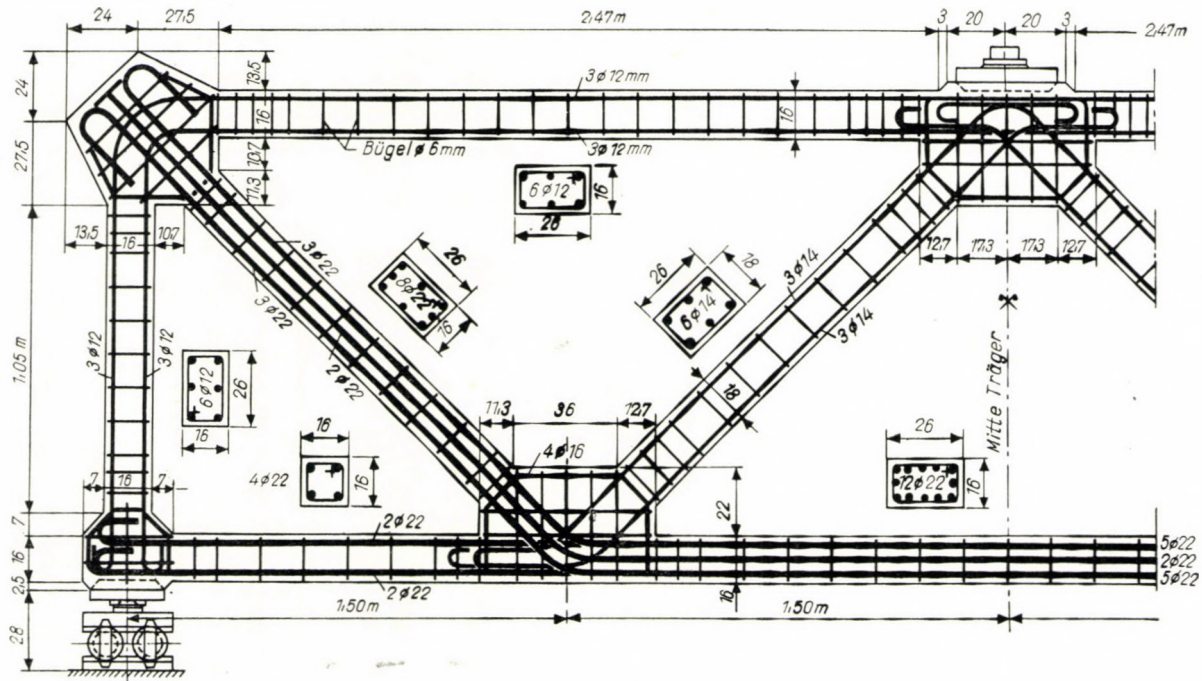


Bild ?

die Messungen an den Zuggliedern erschwert; die auf dem Stahl ermittelten Spannungen sind dadurch kleiner als sie sein sollten bei der Annahme, daß der Stahl allein wirkt.

**Tafel I**  
*Belastung 50 Mp Nutzlast*

Stab	Messungen am Beton			Messungen am Stahl					Mittelwerte	
	$\sigma_m$	$\sigma_v$	$\sigma_v/\sigma_m$ %	$\sigma_m$	$\sigma_v$	$\sigma_v/\sigma_m$ %	Kraft cm Mp	Moment cm Mp	Stabkraft Mp	Momente cm Mp
0	51	30	59	354	108	31	25,8	21,9	25,7	25,95
0	52	43	83	352	191	55	25,6	38,3		25,2
3	48	12	25	336	149	44	24,5	30,0	24,75	
III	61	40	66	343	180	53	25,0	36,1		
II	41	33	81	357	197	55	26,0	39,6	25,8	40,30
	47	52	111	352	315	90	25,6	63,0	25,8	60,50
II	45	50	111	354	288	82	25,6	58,0	25,8	
III	56	48	88	358	206	58	26,0	41,0		
1	—	—	—	1009	13,5	1	30,7	1,26	32,1	2,73
	—	—	—	1099	1	0	33,4	0,00		32,9
III	—	—	—	1036	45	4	31,5	4,20	32,25	
2	—	—	—	1089	149	14	33,0	13,9		
1	64	31	49	383	178	47	32,0	46,7	32,15	54,50
II	53	19	36	388	131	34	32,3	34,2		34,28
II	63	14	22	440	185	42	36,8	48,9	36,4	
2	70	29	42	434	236	55	36,0	62,3		
1	—	—	—	1043	103	10	47,6	16,0	47,7	19,7
2	—	—	—	1048	150	14	47,8	23,4		

a) *Versuche mit dem ersten Träger*

Die Versuche wurden mit einer Belastung von 50 Mp in Trägermitte, also mit der der Nutzlast entsprechenden Belastung durchgeführt.

a) *Gemessene Stabkräfte und Momente.* Stabkräfte und Momente wurden aus Messungen an dem Stahl ermittelt, da der E-Modul des Stahles als konstant angenommen werden kann. Die Messungen an dem Beton wurden nur zu Vergleichszwecken durchgeführt und dienten zur Beurteilung der Größe der Biegespannungen an den Meßstellen. Für die Messungen an dem Beton



wurde eine Meßstrecke von 10 cm verwendet. Die Meßergebnisse sind in Tafel I angegeben.

Es ist zu beachten, daß die gemessenen Nebenspannungen nicht die größten waren, die im Träger auftraten, da die Stablängen kurz, die Knotenpunkte verhältnismäßig groß und die Meßlänge von 10 cm Messungen an dem Beton, nahe dem Knotenpunktrand nicht erlaubten. Da die Messungen an dem Stahl das Herausspitzen des Schutzbetons an den Meßstellen erforderte, war es nicht zweckmäßig, solche dicht neben den Einspannstellen durchzuführen, da an diesen Stellen die Querschnitte am stärksten beansprucht sind, so daß jede Schwächung durch das Herausschlagen des Betons die Tragfähigkeit des Bauwerks herabsetzen kann.

Die Druckgurtungen erwiesen sich als die am meisten auf Biegung beanspruchten Glieder. Es traten Spannungserhöhungen — Nebenspannungen — von 111% am mittleren Obergurtnotenpunkt auf. In zweiter Reihe kommen die Druckdiagonalen. Die Zugglieder erlitten keine großen Nebenspannungen; bei einer Zugdiagonale sanken sie sogar auf nahe Null.

Der aus den Messungen an den Druckgliedern sich ergebende Mittelwert der Spannungserhöhung infolge der Knotenpunktsteifigkeit betrug

1. bei Messungen an dem Beton: im Durchschnitt 64%;
2. bei Messungen an dem Stahl: im Durchschnitt 62%.

Der Mittelwert für Zugglieder beträgt 7%.

Die Nebenspannungen in den Druckgliedern der Stahlbetonfachwerke sind sehr hoch und dürfen nicht vernachlässigt werden. Anders liegen die Verhältnisse bei den Zuggliedern, wo diese Spannungen sehr klein und praktisch belanglos sind.

b) *Gemessene Drehungen und Durchbiegungen.* Die zahlreichen Drehungsmessungen an jedem Knotenpunkt zeigten, daß die Drehungen an den verschiedenen Stellen eines Knotenpunkts keine großen Unterschiede aufweisen. Daraus ergibt sich, daß die Knotenpunkte infolge ihrer kräftigen und massiven Ausbildung sich nur wenig verformen.

Die an beiden Trägerhälften gemessenen Durchbiegungen stimmen gut überein. Die Durchbiegung in der Mitte ist 3,59 mm = 1/1700 der Spannweite des Trägers, die 6 m beträgt. Der Träger ist also sehr steif.

c) *Theoretische Berechnung der Stabkräfte und Momente sowie der Verformungen.* Für den Fall des voll arbeitenden Betons und für denjenigen des vollständig gerissenen Betons wurde das Mohrsche Verfahren angewendet. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind, besonders für den Obergurt, sehr stark unterschiedlich. Die Mitwirkung des Betons auf Zug ermäßigt die Biegespannungen in den Druckgliedern bedeutend, erhöht dieselben dagegen bei den Zuggliedern.

Die ohne Mitwirkung des Zugbetons errechneten Nebenspannungen und Verformungen nähern sich den Messungen besser, stimmen jedoch nicht genau

mit denselben überein. Sie werden für die weitere Berechnung des Betons in den Zuggliedern vernachlässigt.

Um die Berechnungsergebnisse den Messungen besser anpassen zu können, mußte die durch die Knotenpunkte verursachte Steifigkeit der Stäbe berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck wurde durch Einführung von steifen Strecken an den Stabsenden, deren Länge von Fall zu Fall verschieden ist, die Veränderung der vorhandenen Steifigkeitsverhältnisse berücksichtigt.

Die endgültige Wahl der Größe der Versteifungsstrecken erfolgte nach wiederholter Berechnung. Zu den auf diese Weise für den Versuchsträger erhaltenen Werten läßt sich folgendes bemerken:

1. Für Zugglieder fallen die Versteifungsstrecken ganz weg. Diese Glieder können ohne weiteres als gelenkig an den Knotenpunkt angeschlossen betrachtet werden. Das Wegfallen der Mitwirkung des Zugbetons vermindert die Steifigkeit der Zugglieder erheblich.

2. Die Summe der Versteifungsstrecken an beiden Enden eines Stabes ist umgekehrt proportional dem Schlankheitsgrad des Stabes.

3. Der einseitige Anschluß des Obergurts im mittleren Knotenpunkt, bei welchem der Gurt nur einseitig an den Knotenpunkt angeschlossen ist, läßt eine freiere Deformierung zu und reduziert somit die Größe der Versteifungsstrecke an dieser Stelle.

Berücksichtigt man die Elastizität der Knotenpunkte, so ergibt die Berechnung Werte, die mit den Messungen besser übereinstimmen.

### *β) Versuche mit dem zweiten Träger*

Die Versuche wurden mit einer Belastung von 25 Mp durchgeführt. Es wurden nur Messungen an dem Beton durchgeführt, um das Abspitzen des Betons auf dem Stahl zu vermeiden und den Träger für die dynamischen Versuche unbeschädigt zu erhalten. Die Meßergebnisse zeigten keine großen Unterschiede gegenüber denjenigen des ersten Trägers. Die Meßergebnisse nähern sich hier den nach dem Möhrschen Verfahren ohne Berücksichtigung des Zugbetons errechneten Werten.

Die Nebenspannungen erreichten am Obergurt in Trägermitte 93%, der Mittelwert betrug 52%. Dieser Wert liegt etwas tiefer als der entsprechende des ersten Trägers, jedoch ist hier zu berücksichtigen, daß die Belastung nur die Hälfte beträgt. Es ergibt sich daraus, daß die Nebenspannungen mit wachsender Belastung verhältnismäßig stärker zunehmen.

Wir werden auf alle diese Punkte bei der Besprechung der Bruchversuche zurückkommen.



## II. Bruchversuche

Die Hauptziele dieser Versuche waren:

Bestimmung der Last, bei welcher die Verformung nicht mehr proportional der Belastung ist, das heißt der Grenze des Elastizitätsbereiches des Bauwerks. Ferner Bestimmung der dieser Belastung entsprechenden Spannungen im Stahl und Beton sowie der Größe der Verformungen;

Bestimmung der Bruchlast und damit des Sicherheitsgrades gegen statischen Bruch;

Bestimmung der Nebenspannungen bei wachsender Belastung und deren Verhältnis zu den Hauptspannungen;

Feststellung des Einflusses der Wechselbeanspruchung — Ermüdung — auf die Tragfähigkeit und Elastizität des Tragwerkes.

### 1. Versuchseinrichtung und Belastungsvorgang

Bei den Versuchen war die Lagerungsart dieselbe wie die bei den statischen Versuchen. Die Erhöhung der Belastung erfolgte stufenweise um je 25 Mp in folgender Reihenfolge:

5—25—50—75—100—125 Mp.

Jede Laststufe wurde zweimal wiederholt, indem von der Grundlast aus stufenweise hinauf und hinunter vorgeschritten wurde.

Gemessen wurden die Dehnungen an dem Beton und dem Stahl sowie die Drehungen und Durchbiegungen. Bei jeder Belastung wurden sämtliche Apparate abgelesen. Die Dehnungsmessungen wurden auf die eine Hälfte des Trägers beschränkt, da derselbe symmetrisch war.

Bei der Vornahme der Bruchversuche hatte der Beton ein Alter von 180 Tagen bei dem ersten und 110 Tagen beim zweiten Träger. Die Prismendruckfestigkeit betrug  $375 \text{ kp/cm}^2$ . Der zweite Träger wurde den Bruchversuchen erst unterworfen, nachdem die dynamischen Prüfungen beendet waren; er wurde  $3\frac{1}{4}$  Millionen Lastwechseln unterworfen. Einzelheiten dieser Versuche werden im Abschnitt IV besprochen.

Für den ersten Träger wurde ein E-Modul von  $400\,000 \text{ kp/cm}^2$  gewählt, für den zweiten jedoch ein solcher von  $500\,000 \text{ kp/cm}^2$ , um die Messungen mit den Berechnungen in Einklang zu bringen.

Bei jeder Belastungsstufe wurden die totalen und die bleibenden Verformungen ermittelt; letztere bezeichnen die Zustandsänderungen des Tragwerks. Mit der Größe derselben nehmen auch die Eigenschaftsänderungen des Materials zu.

## 2. Versuchsergebnisse

Die Ergebnisse der Messungen sind in die Bilder 3—5 eingetragen. Die elastischen und die bleibenden Verformungen sind getrennt angegeben. Die Ergebnisse können unterteilt werden in:

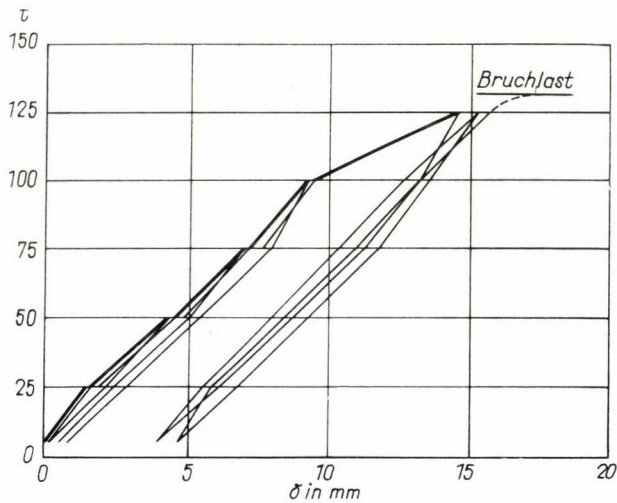


Bild 3

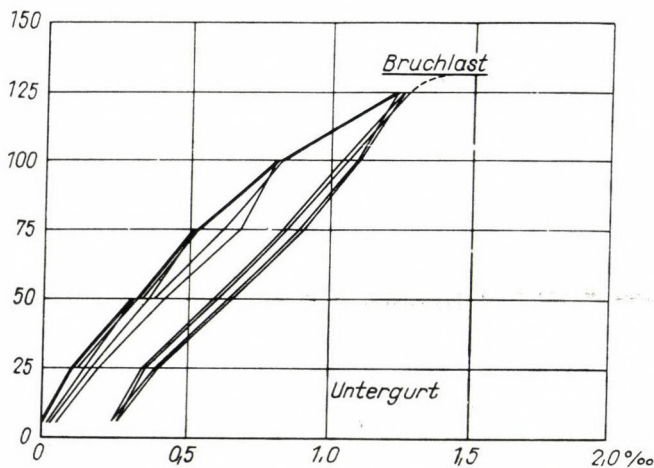


Bild 4

a) *Verlauf der Verformungen innerhalb des Elastizitätsbereichs.* Beim Beton besteht bei einmaliger, allmählich anwachsender Beanspruchung keine scharfe Elastizitätsgrenze wie beim Stahl, auch wenn die Spannungen sehr klein sind, ergeben sich im Beton bei jeder Phase Belastung-Entlastung blei-



bende Zusammendrückungen; es besteht jedoch ein Spannungswert, nach welchem die bleibende Verformung rascher zunimmt. Diese Grenze entspricht ziemlich gut der Ursprungsfestigkeit des Betons. Für unsere Versuchsträger war die Ursprungsfestigkeit

$$\sigma_u = 0,6 p\beta_d \cong 220 \text{ kp/cm}^2.$$

Spannungen im Beton von dieser Größe wurden im Obergurt bei einer Belastung von 100 Mp festgestellt; sie traten aber infolge der hohen Neben-

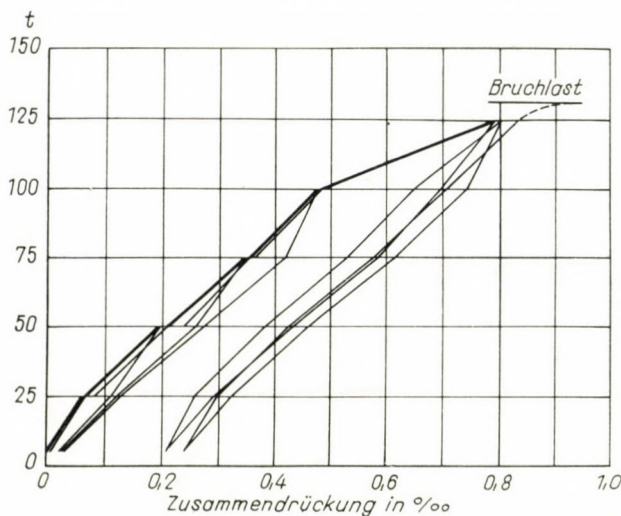


Bild 5

spannungen nur örtlich auf. Die entsprechende maximale Spannung im Zugstahl, wie sie am Untergurt festgestellt wurde, betrug 2370 kp/cm<sup>2</sup>, lag also nicht mehr sehr weit von der Streckgrenze des Armierungsstahls.

Die Belastung von 100 Mp entspricht dem Doppelten der Nutzlast.

In Bildern 3—5 sind Beispiele der Belastung-Entlastung-Verformungskurven angegeben; die verschiedenen Kurven zeigten einen ganz ähnlichen Verlauf und ergaben die bekannten Hysteresisschleifen.

Bis zu einer Last von 100 Mp waren die bleibenden Verformungen verhältnismäßig klein. Die wiederholte Belastung und Entlastung ergab, daß die Elastizität der Tragwerke nicht beeinträchtigt wurde. Abgesehen von verstärkter Ribbildung, blieben die Träger unbeschädigt.

Daraus ergeben sich für die Betonfachwerke folgende Erkenntnisse:

a) Infolge der hohen Nebenspannungen in den Druckgliedern — bei gleichzeitig niedrigen Werten derselben in den Zuggliedern — treten im Beton Druckspannungen von bis  $\sim 0,6 p\beta_d$ , somit bis zur Ursprungsfestigkeit, bei fast gleichzeitiger Erreichung der Streckgrenze des Stahls, auf.

$\beta$ ) Die vorerwähnten Spannungen treten auf bei einer Last gleich dem Doppelten der Belastung, für welche die Fachwerke dimensioniert waren.

$\gamma$ ) Diese Spannungen verursachen im Tragwerk keine starken bleibenden Verformungen; das Tragwerk verhält sich bei wiederholten Beanspruchungen somit praktisch elastisch.

Daraus ergibt sich, daß Stahlbetonfachwerke einen Sicherheitsgrad von  $\cong 2$  gegenüber denjenigen wiederholten Belastungen, welche praktisch noch annehmbare, bleibende Verformungen erzeugen, besitzen; dieser Sicherheitsgrad von  $\sim 2$  begrenzt somit den Elastizitätsbereich solcher Fachwerke.

Die entsprechenden bleibenden Verformungen bei dieser Belastung betrugen 5,5% der gesamten Verformungen. Die maximale bleibende Zusammendrückung des Betons betrug 0,052‰.

b) *Verhalten des Trägers im plastischen Zustand.* Durch Erhöhung der Belastung von 100 auf 125 Mp floß der Stahl des Untergurts und der Zugdiagonale. Der Zugbeton zeigte starke Risse. Als Bauwerke bewertet, sind die Träger in diesem Zustand als nicht mehr brauchbar zu bezeichnen, obwohl sie als Tragwerke immer noch hielten.

Die Durchbiegungen, Drehungen und Dehnungen hatten stark zugenommen, so daß Messungen auf dem Zugstahl keinen großen Wert mehr gezeigt hätten. Der Druckbeton aber wurde noch nicht beschädigt. Auf der Druckdiagonale wurden Druckspannungen von bis 330 kp/cm<sup>2</sup> gemessen, welcher Wert immer noch unterhalb der Druckfestigkeit von 375 kp/cm<sup>2</sup> liegt. Der Untergurt zeigte starke Dehnungen, so daß die Auflagerpunkte beträchtliche Drehungen aufwiesen.

Bei dieser Belastung von 125 Mp wurde keiner der Knotenpunkte beschädigt.

Die Träger wurden dann stufenweise bis auf 5 Mp entlastet und nachher stufenweise bis auf 125 Mp wieder belastet; dieser Vorgang wurde zweimal wiederholt.

Das Verhältnis der bleibenden zu den gesamten Durchbiegungen in der Mitte des Trägers betrug beim ersten Träger 20%, beim zweiten 23%.

c) *Eintritt des Bruches.* Bei Erhöhung der Belastung auf über 125 Mp zeigten sich folgende Vorgänge:

a) Die Rundstähe dehnten sich stark aus, ferner wurden in den Zuggliedern Risse von 4 bis 5 mm festgestellt; der Stahl ist somit geflossen.

$\beta$ ) Die Druckfestigkeit des Betons an den Einspannstellen des Obergurts im mittleren Knotenpunkt war in den oberen Fasern überwunden, so daß der Beton bis in eine gewisse Tiefe zermalmt wurde.

$\gamma$ ) Durch weitere Erhöhung der Last wurde der Beton unter den Endhaken, die zur Verankerung der Stahlanlagen der Zugdiagonale am Obergurtknotenpunkt dienten, zerdrückt. Dadurch entstand Gleitung des Stahls (Bild 6).



δ) Die maximale Belastung betrug 135 Mp beim ersten Träger und 132 Mp beim zweiten, im Mittel also 133,5 Mp. Der Gewichtsanteil des Trägers in der Mitte und der Druckvorrichtung betrug etwa 2,5 Mp, so daß die Bruchlast mit 136 Mp festgestellt wurde. Die Sicherheit gegen Bruch unter ständiger und Verkehrslast ergibt sich somit zu  $\cong 136/52,5 \cong 2,6$ .

d) *Haupt- und Nebenspannungen.* Aus den gemessenen örtlichen Dehnungen wurden die Randspannungen und daraus die mittleren Spannungen

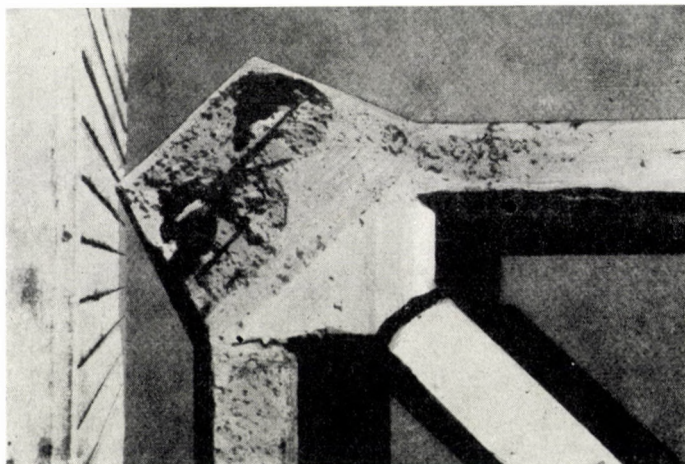


Bild 6

$\sigma_m$  sowie die Nebenspannungen  $\sigma_v$  ermittelt, ferner wurde das Verhältnis  $\sigma_v : \sigma_m$  gebildet, und die Stabkraft  $P$  berechnet. Die Ergebnisse zeigten folgendes:

a) Bei den Druckgliedern stimmen die Stabkräfte mit den theoretischen Werten gut überein.

β) Bei den Zuggliedern sind die gemessenen Kräfte kleiner als die theoretischen, besonders beim Untergurt zeigten sich große Abweichungen. Diese Erscheinung ist zurückzuführen auf das unvollkommene Reißen des Betons, welcher Faktor in der Rechnung nicht berücksichtigt ist.

γ) Das Verhältnis der Nebenspannungen zu den Hauptspannungen bleibt nicht konstant, es nimmt mit der Belastung zu, wie dies aus den Bildern 7–8 hervorgeht.

In der Tafel II sind die Mittelwerte für Druckglieder unter den verschiedenen Belastungen angegeben. Bei Steigerung der Belastung von 25 Mp = 1/2 Nutzlast auf 125 Mp = 2,5 Nutzlast steigt das Verhältnis  $\sigma_v : \sigma_m$  um 15% beim ersten bzw. 12% beim zweiten Träger, im Mittel also um  $\sim 14\%$ . Die Mittelwerte der Verhältnisse  $\sigma_v : \sigma_m$  des ersten Trägers, wie sie in der Tafel

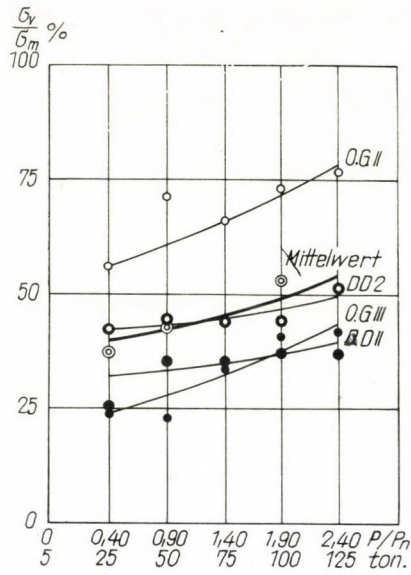


Bild 7

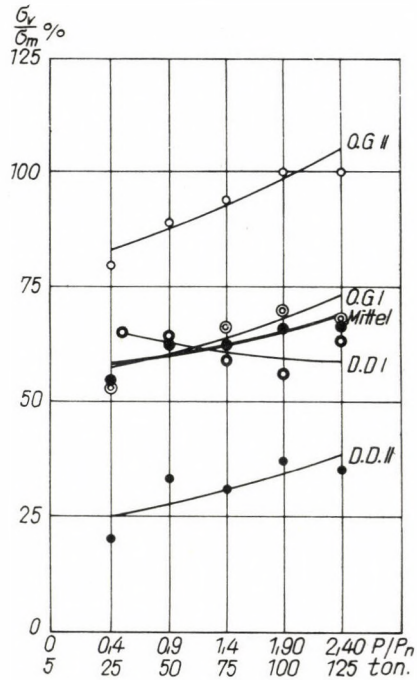


Bild 8



angegeben sind, sind kleiner als die entsprechenden Werte des zweiten Trägers. Dies rührt daher, daß beim ersten Träger die Messungen an dem Stahl durchgeführt wurden. Da dieses aber tiefer als die Betonoberfläche liegt, so sind die ermittelten Nebenspannungen nicht die maximalen. Beim zweiten Träger dagegen wurden die Messungen an dem Beton vorgenommen, ferner liegen die Meßstellen beim zweiten Träger näher den Knotenpunkten als beim ersten.

Tafel II

*Verhältnisse der Nebenspannungen zu den Hauptspannungen  
bei verschiedenen Belastungen (Grundlast = 5 Mp)*

Stab	Belastung in Mp					Mittel	
	25	50	75	100	125		
	Träger I						
O. G. II.	56	71	66	73	77	69	Verhältnisse $\sigma_v/\sigma_m$ ‰
O. G. III.	24	23	34	41	42	33	
D. D. II.	25	35	35	37	36	34	
D. D. 2.	42	44	44	44	51	45	
Mittel	37	43	45	49	52	45	
	Träger II						
O. G. II.	80	89	94	100	100	93	
O. G. O	53	64	66	70	68	64	
D. D. I.	65	64	59	56	63	61	
D. D. II.	20	33	31	37	35	61	
Mittel	55	60	63	66	67	62	

Der Größenzuwachs der Nebenspannungen mit zunehmender Belastung ist auf folgenden Umstand zurückzuführen: durch die Steigerung der Last treten stärkere Risse im Zugbeton auf, und bei hohen Belastungen streckt sich der Zugstahl, wodurch die Steifigkeit der Träger herabgesetzt wird. Dies hat zur Folge, daß die Verformung des Fachwerks rascher vor sich geht, als es der Steigerung der Belastung entspricht, so daß die in kräftig ausgebildete Knotenpunkte einbindenden Stäbe stärker auf Biegung beansprucht werden und damit rascher zunehmende Nebenspannungen erleiden.

e) *Einfluß der Ermüdung auf die Elastizität und Festigkeit der Stahlbetonfachwerke.* Wie bereits erwähnt, wurde der zweite Träger durch wiederholte Beanspruchung zuerst ermüdet und nachher statisch bis zum Bruch geprüft.

Die Ergebnisse der statischen Untersuchungen zeigen gegenüber denjenigen des ersten Trägers keine bedeutenden Unterschiede.

Die Grenze des Elastizitätsbereiches ist für beide Träger praktisch gleich, die Bruchlasten sind nur wenig voneinander verschieden. Beide Träger zeigen praktisch denselben Sicherheitsgrad gegen Bruch.

Der Verlauf der Belastungs-Entlastungs-Verformungskurven war für beide Träger fast gleich, nur die Hysteresisschleifen des zweiten Trägers waren etwas breiter als diejenigen des ersten, was auf eine größere Nachgiebigkeit des Betons zurückzuführen ist, wie dies öfters an Betonprismen festgestellt wurde. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß der Beton des zweiten Trägers bei der Durchführung der Versuche 110 Tage alt war, gegenüber 180 Tagen beim ersten Träger. Ein Altersunterschied von 70 Tagen übt einen gewissen Einfluß aus.

Es ergibt sich daraus, daß die sehr zahlreichen, wiederholten Beanspruchungen (Ermüdung), welchen der zweite Träger unterworfen wurde, weder auf die Tragfähigkeit, noch auf die Elastizität desselben einen nennenswerten Einfluß ausübten.

### III. Dynamische Versuche

Ziel der durchgeführten dynamischen Versuche war, den Träger auf die Einflüsse der Ermüdung zu prüfen.

Beim Stahlbetonträger waren die inneren Spannungen klein, sie rührten der Hauptsache nach von der Schwindwirkung des Betons her. Der Beton war sehr sorgfältig zubereitet worden, die Rundstähe waren praktisch spannungsfrei. Im Beton traten nur kleine Risse auf, was vorauszusehen war, da der Beton schon unter der statischen Belastung riß. Besonders zu erwähnen ist, daß die dynamischen Risse immer an denjenigen Stellen auftraten, an denen Querbügel vorhanden waren. Es war sogar möglich, durch die Risse die Lage und Anzahl der Bügel zu bestimmen. Die Risse haben periodisch mit der Belastung geatmet, ihre Breite war jedoch nicht beträchtlich. Die Versuche am geprüften Stahlbetonträger dauerten 18 Betriebstage und wurden dann abgebrochen.

Bei Beginn der Versuche war der Beton 75 Tage alt; die Prismendruckfestigkeit desselben betrug  $p\beta_d = 300 \text{ kp/cm}^2$ .

Die errechnete Eigenschwingungszahl für eine statische Belastung von 25 Mp betrug 10,85, die gemessene dagegen nur 8,22 mit einem Unterschied von 24%.

Die Spannungen wurden an der Einspannstelle des Obergurts am mittleren Knotenpunkt gemessen. An dieser Stelle trat die maximale Spannung im Beton auf, da die Nebenspannungen dort am größten waren; die letzteren betragen  $\sim 100\%$  der Hauptspannungen.



Die Resonanzaufnahmen wurden während der ersten Belastungsstufe mit einer Exzentrizität  $e = 14^\circ$  aufgenommen, für die zweite Stufe wurde dieser Wert auf  $20^\circ$  erhöht, da sonst die Ausschläge zu klein gewesen wären.

Die verschiedenen Phasen der Versuche sind die folgenden:

a)	Statische Belastung	25 Mp
	Exzentrizität der Maschine	$22^\circ$
	Statische Spannung	60 kp/cm <sup>2</sup>
	Dynamische Spannung	$\pm 50$ kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\max}$	110 kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\min}$	10 kp/cm <sup>2</sup>
	Obere Lastgrenze = 46 Mp = 0,92 $P_n$ , $P_n$ = Nutzlast = 50 Mp	
	Untere Lastgrenze = 4 Mp = 0,08 $P_n$	
	Anzahl Lastwechsel	$0,38 \cdot 10^6$
$\beta$ )	Statische Belastung	25 Mp
	Exzentrizität der Maschine	$24^\circ$
	Statische Spannung	60 kp/cm <sup>2</sup>
	Dynamische Spannung	$\pm 55$ kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\max}$	115 kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\min}$	5 kp/cm <sup>2</sup>
	Obere Lastgrenze = 48 Mp = 0,96 $P_n$	
	Untere Lastgrenze = 2 Mp = 0,04 $P_n$	
	Anzahl Lastwechsel	$1,12 \cdot 10^6$
$\gamma$ )	Statische Belastung	25 Mp
	Exzentrizität der Maschine	$26^\circ$
	Statische Spannung	60 kp/cm <sup>2</sup>
	Dynamische Spannung	$\pm 60$ kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\max}$	120 kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\min}$	0
	Obere Lastgrenze	$P_n$
	Untere Lastgrenze	0
	Anzahl Lastwechsel	$0,97 \cdot 10^6$
$\delta$ )	Statische Belastung	31,5 Mp
	Exzentrizität der Maschine	$40^\circ$
	Statische Spannung	75 kp/cm <sup>2</sup>
	Dynamische Spannung	$\pm 65$ kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\max}$	140 kp/cm <sup>2</sup>
	$\sigma_{\min}$	10 kp/cm <sup>2</sup>
	Obere Lastgrenze = 60 Mp = 1,2 $P_n$	
	Untere Lastgrenze = 4 Mp = 0,08 $P_n$	
	Anzahl Lastwechsel	$0,79 \cdot 10^6$
	Totale Anzahl Lastwechsel	$3,26 \cdot 10^6$

Die Belastung konnte nicht weiter erhöht werden, da der Schwinge, keine höheren Impulswerte erzeugen konnte. Wir haben versucht, die statische Belastung auf 37,5 Mp, das heißt die Grundlast von 25 Mp um 50% zu erhöhen, wobei die statischen Spannungen naturgemäß bis auf 90 kp/cm<sup>2</sup> anstiegen; die dynamischen Spannungen aber konnten nicht höher als 45 kp/cm<sup>2</sup> getrieben werden, so daß die Grundwerte der Spannungen zwischen 45 und 135 kp/cm<sup>2</sup> wechselten. Diese Art der Beanspruchung war für das Tragwerk sogar günstiger als diejenige mit der niedrigeren statischen Belastung von 31,5 Mp, wo die Spannungen zwischen 10 und 140 kp/cm<sup>2</sup> wechselten.

Nach  $3\frac{1}{4}$  Millionen Lastwechseln wurden die Versuche abgebrochen.

Bei Beendigung der Versuche befand sich der Träger in gutem Zustand. Mit Ausnahme der Risse im auf Zug beanspruchten Beton hatten die Lastwechsel weder auf das statische, noch auf das dynamische Verhalten des Stahlbetonträgers einen wesentlichen Einfluß. Die festgestellten Änderungen sind die folgenden:

1. Die *statische Durchbiegung* hat sich im Laufe der Versuche vergrößert. Am Anfang der Versuche betrug sie für eine Last von 25 Mp 2 mm, somit ist die Rückstellkraft  $C = 125$  Mp. Am Ende der dritten Phase, das heißt nach etwa  $2,5 \cdot 10^6$  Lastwechseln, war sie für die gleiche statische Last 25 Mp 2,5 mm und somit  $C = 100$  Mp, der Träger wurde also etwas verformbarer (nachgiebiger). Es zeigte sich jedoch, daß der Träger sich wieder verfestigte, indem am Schluß der Versuche für eine Durchbiegung von 2,5 mm eine statische Belastung von 31,5 Mp, somit  $C = 125$  Mp, erforderlich wurden.

2. Die *Eigenschwingungszahl* sank nach den ersten  $2,5 \cdot 10^6$  Lastwechseln von 8,22 auf 7,92, zeigte also eine Abnahme von 3,65%, die als klein zu bezeichnen ist. Obwohl die Belastung erhöht wurde, trat doch keine Änderung ein. Zu Beginn der vierten Phase war die Eigenschwingungszahl 7,20 und am Schluß der Versuche ebenfalls 7,20.

Daraus ist zu schließen, daß die Ermüdungseigenschaften des Trägers, das heißt die Resonanzlage und die Dämpfung, durch die ausgeübten Ermüdungsvorgänge sehr wenig beeinflusst wurden. Sogar bei der zweiten Phase der Versuche, wo die statische Belastung auf 31,5 Mp erhöht wurde, konnte ein Beharrungszustand festgestellt werden, indem die Eigenschwingungszahl am Schluß der Versuche, abgesehen von den Schwankungen infolge der Ruhezeit, die Tendenz zeigte, einen konstanten Wert anzunehmen. Das gleiche zeigte die statische Durchbiegung und die daraus errechnete Rückstellkraft.

Für alle praktischen Zwecke können die im Versuchsträger eingetretenen Veränderungen als belanglos angesprochen werden.

Der wichtigste Gewinn unserer Untersuchungen am Stahlbetonträger für die Praxis ist der folgende:

Häufig wiederholte, innerhalb angemessener Grenzen gehaltene Beanspruchungen — Ursprungsfestigkeit — schaden weder der Elastizität, noch der Tragfähigkeit, noch den dynamischen Eigenschaften der Stahlbetonfachwerke.

Für diese Bauweise ist die Sicherheit gegen Dauerbeanspruchungen bei einem statisch ausreichenden Sicherheitsgrad als gewährleistet zu betrachten.

#### *Ermittlung der schwingenden Masse $M$ und der Rückstellkraft $C$ aus den dynamischen Versuchen*

Die Erhöhung der Belastung von 25 auf 31,5 Mp hatte eine Herabsetzung der Eigenschwingungszahl von 7,92 auf 7,20 zur Folge. Die schwingende Masse  $M$  stieg auf  $(M + 6,5)$  t. Die Rückstellkraft  $C$  blieb konstant.



Durch zweimalige Anwendung der Formel mit  $m = M$  und  $(M + 6,5)$ , wobei  $n_0 = 7,92$  bzw.  $7,20$  ist, ergeben sich zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei Unbekannten  $M$  und  $C$ . Diese Berechnung ergibt  $G = 37,50$  t und  $C = 95,5$  t.

Der auf statischem Wege sich ergebende Wert von  $C$  ist  $100$  Mp, der Unterschied also nur  $4,5\%$ .

Die Belastungsgewichte betragen  $G = 25$  Mp.

Der vorhandene Unterschied von  $12,5$  Mp  $= 50\%$  entspricht der Ersatzlast, die als in der Mitte des Trägers konzentriert gedacht ist, um die zusätzlichen, in Schwingung versetzten Massen, zum Beispiel Fundamente, Träger-teile, Boden usw., bei der Berechnung der Eigenschwingungszahl des Systems berücksichtigen zu können. Die mit  $G = 27,5$  Mp errechnete Eigenschwingungszahl  $n_0$  beträgt  $8,04$ , die gemessene Größe dagegen  $7,92$  mit einem praktisch unbedeutenden Unterschied von nur  $1,5\%$ .

Diese Ergebnisse zeigen, daß die wirklich schwingenden Massen von der wirklich vorhandenen Masse sehr stark verschieden sein können. Da aber alle theoretischen Berechnungen stark von der wirklich schwingenden Masse abhängig sind, ist die genaue Kenntnis derselben notwendig, was nicht immer leicht und gut möglich ist. Größte Vorsicht in der Anwendung theoretischer Ergebnisse auf die wirklichen Verhältnisse ist daher ein Gebot.

#### *Beispiele aus den Messungen*

In den Bildern 9–14 sind die Resonanzkurven der Versuche Nr. 17 und 18, die am gleichen Tag vor beziehungsweise nach der Ermüdung aufgenommen sind, wiedergegeben. Die vorhandenen Unterschiede sind deutlich zu sehen.

### IV. Schlußfolgerungen

#### *Statische Beanspruchung*

1. Die Rißlast, bei welcher die Zugfestigkeit des Betons überwunden wurde, inbegriffen der Eigengewichtsanteil, beträgt im Mittel  $13,25$  Mp oder  $26,5\%$  der Nutzlast.

Die Vorspannung des Betons auf Zug durch die Schwindwirkung verursachte eine starke Herabsetzung der Rißlast.

2. Durch das Reißen des Betons verändern sich die Stabkräfte und Momente, indem die Zugglieder entlastet und die Druckglieder stärker belastet werden.

Das Reißen des Betons verursacht beachtenswerte bleibende Verformungen. Für eine Last von  $0,5$  der Nutzlast ergab sich für den zweiten Versuchsträger eine bleibende Verformung von  $19\%$  der totalen Verformung, beim ersten Träger betrug diese  $20\%$  bei einer Belastung von  $0,8$  der Nutzlast.

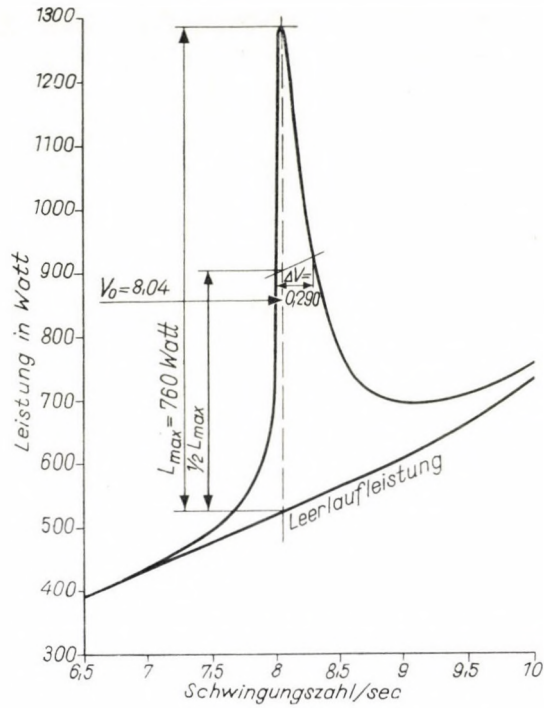


Bild 9

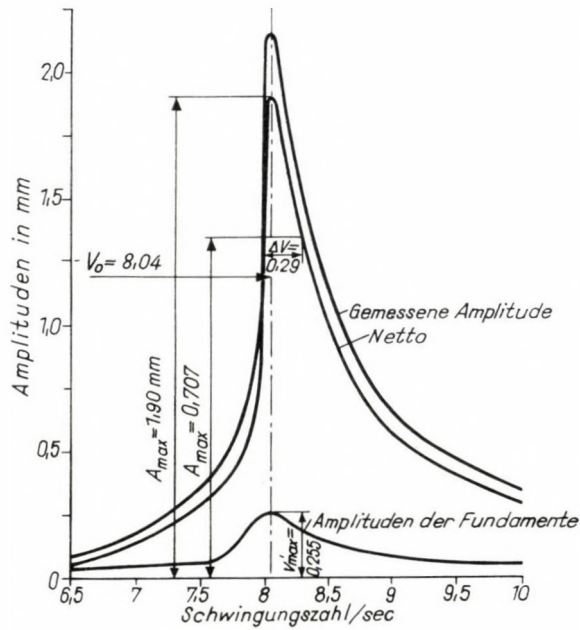


Bild 10



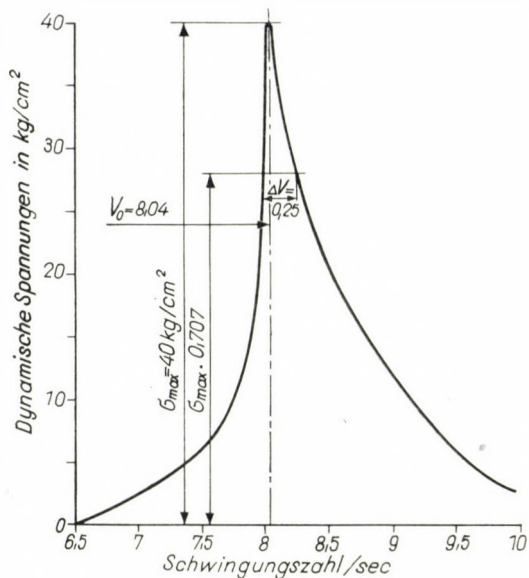


Bild 11

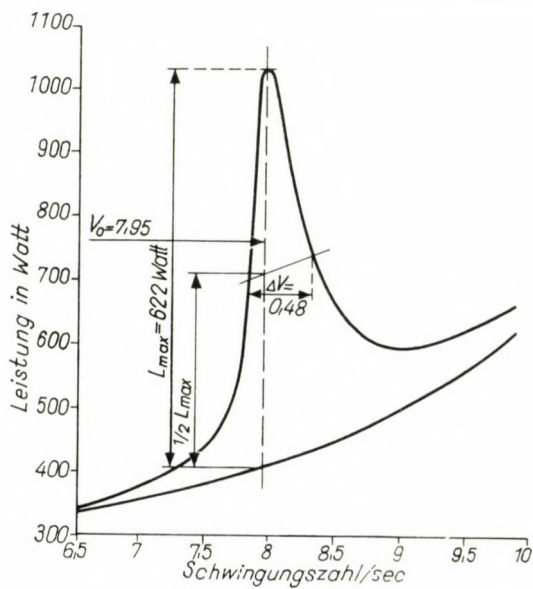


Bild 12

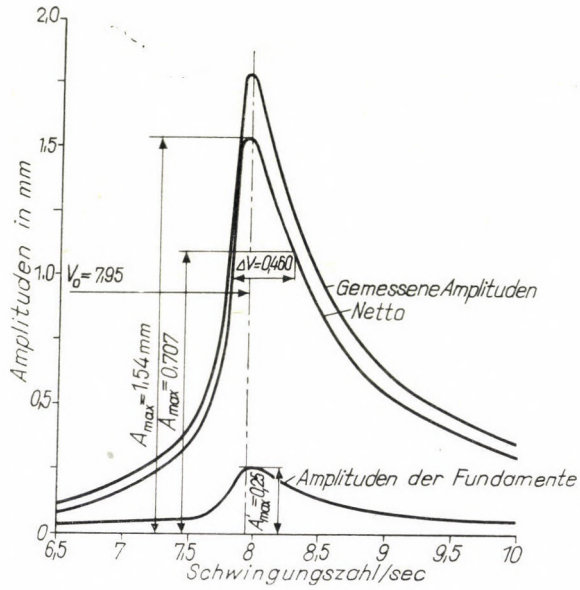


Bild 13

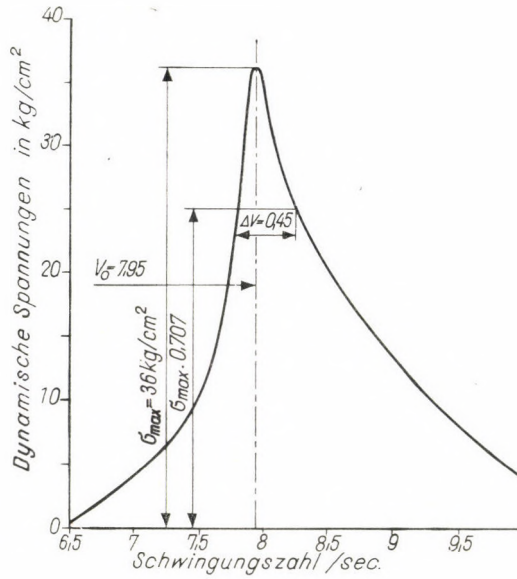


Bild 14



3. Die von den steifen Stabanschlüssen herrührenden Biegespannungen — Nebenspannungen — in Stahlbetonfachwerken sind infolge ihrer im Verhältnis zu den Hauptspannungen sehr großen Werte nicht zu vernachlässigen.

Die Nebenspannungen erreichten einen maximalen Wert von 111%.

Die Druckgurtstäbe erleiden die größten Nebenspannungen, die im Mittel zwischen 64 und 93% schwanken.

In den gedrückten Füllgliedern schwanken diese Werte zwischen 31 und 61%.

Der Mittelwert sämtlicher Druckglieder liegt zwischen 65 und 70%.

Bei den im Versuchsträger vorhandenen Zuggliedern waren die Nebenspannungen gering, sie betragen im Mittel 7,5%.

4. Die Biegespannungen nehmen infolge der rascheren Zunahme der Verformung bei wachsender Belastung zu, jedoch nicht linear. Der Zuwachs ist bei den höheren Belastungen größer, er wächst außerordentlich stark beim Erreichen der Fließgrenze des Armierungsstahls.

5. Die Fließgrenze des Stahls und gleichzeitig die Ursprungsfestigkeit des Betons  $\sigma_u \cong 0,6 p\beta_d$  sind bei einer Belastung gleich dem Doppelten der Nutzlast ziemlich gleichzeitig erreicht worden.

Ein Sicherheitsgrad von  $\sim 2$  begrenzt den Elastizitätsbereich der Stahlbetonfachwerke für wiederholte Belastungen.

Die entsprechenden bleibenden Verformungen bei dieser Belastung betragen 5,5% der gesamten Verformungen. Die maximale bleibende Zusammendrückung des Betons betrug 0,0052 %.

Für höhere Belastungen treten große bleibende Verformungen auf; die Tragwerke befinden sich im plastischen Zustand.

6. Die mittlere Bruchlast betrug 136 Mp. Der Sicherheitsgrad gegen Bruch ergibt sich somit zu 2,6.

7. Die Beanspruchung auf Ermüdung — Ursprungsfestigkeit — für die Nutzlast (50 Mp) und innerhalb der vorhandenen Anzahl der Spannungswechsel (3 1/4 Millionen) hat weder auf die statische oder dynamische Tragfähigkeit, noch auf die Elastizität einen nennenswerten Einfluß ausgeübt.

### *Ermüdung*

8. Die statische Durchbiegung und Dämpfung nehmen im Laufe des Ermüdungsvorganges zu; somit nehmen die Rückstellkraft und die Eigenschwingungszahl ab. Unter den gleichen Versuchsbedingungen bei den Resonanzaufnahmen nehmen die Leistung, die Amplituden und die Verstärkungszahl mit der Ermüdung ab.

9. Eine nachträgliche Erholung (Rückgewinnung an Steifigkeit) wurde festgestellt.

Innerhalb einzelner Zeitabschnitte stellte sich nach einer gewissen Anzahl von Lastwechseln ein Beharrungszustand ein.

10. Bei einem statisch ausreichenden Sicherheitsgrad ist die Sicherheit der Stahlbetonfachwerke gegen Dauerbeanspruchungen gewährleistet.

11. Größte Vorsicht in der Anwendung theoretischer Ergebnisse der Dynamik auf die wirklichen Verhältnisse ist ein Gebot.

#### CONTRIBUTIONS TO THE BEHAVIOUR OF CONCRETE LATTICE GIRDERS DURING STATIC AND FATIGUE TESTS

S. A. MORTADA

##### SUMMARY

The author has tried to elucidate the static and dynamic behaviour of concrete lattice girders by measurements made on two such girders. One girder was used for static tests, the other one was submitted to static and dynamic tests. The aim of this work was to obtain data on the reliability and on the degree of safety of these elements which might provide the basic conditions for the use of such girders.

#### CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT AUX ESSAIS STATIQUES ET DE FATIGUE DES POUTRES A TREILLIS EN BÉTON ARMÉ

S. A. MORTADA

##### RÉSUMÉ

L'auteur a étudié le comportement statique et dynamique des poutres à treillis en béton armé par des essais effectués avec deux poutres à treillis. L'une des poutres a été utilisée pour des mesures statiques, l'autre a été soumise à des études statiques et dynamiques. Le but des essais était de fournir des données relatives à la sécurité et au degré de sûreté de ces constructions, données qui peuvent servir de base à l'utilisation de telles poutres.

#### К ПОВЕДЕНИЮ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ АРОК ПРИ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ И ИСПЫТАНИЯХ НА УСТАЛОСТЬ

С. А. МОРТАДА

##### РЕЗЮМЕ

Автор поставил целью выяснить статическое и динамическое поведение железобетонных арок при помощи экспериментальных измерений на двух арках. Одна арка была использована для выполнения статических испытаний, а вторая — подвергнута статическим и динамическим испытаниям. Целью опытов являлось получение таких данных относительно надежности и запаса прочности этих конструкций, которые могут служить в качестве основных условий, применения таких арок.



# НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С СИММЕТРИЧНЫМ НЕИЗГИБАЕМЫМ КОНТУРОМ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Е. Н. НИКОЛЬСКИЙ

ПРОФЕССОР, ДОКТОР ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

(Поступило 20-го сентября 1964 г.)

В статье даются формулы теории цилиндрических оболочек с неизгибаемым контуром поперечного сечения, позволяющие провести практические расчеты напряжений в срединной поверхности оболочек при произвольной нагрузке на краевых образующих. Формулы относятся к частному случаю симметричных оболочек с  $U$ -образным контуром поперечного сечения. Система уравнений теории решается в форме тригонометрических рядов.

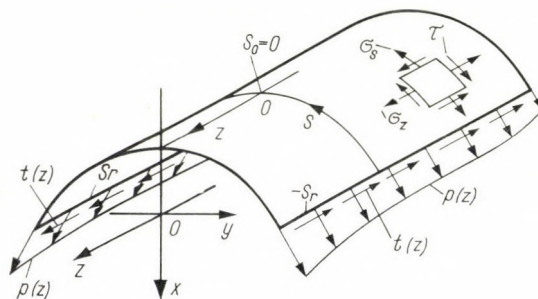
## 1. Значение теории оболочек с неизгибаемым контуром

Теория тонкостенных стержней и цилиндрических оболочек с недеформируемым контуром, разработанная В. З. Власовым [1], получила широкое распространение в различных областях техники. Эта теория базируется на гипотезах о равенстве нулю деформаций сдвига ( $\gamma$ ) срединной поверхности оболочки и о недеформируемости контура ее поперечного сечения. Гипотеза о недеформируемости контура поперечного сечения означает, что деформации удлинения ( $\epsilon_s$ ) контура и деформации его изгиба ( $\nu$ ) считаются равными нулю. Указанные гипотезы приводят к простому аналитическому аппарату, удобному для практических расчетов напряжений и перемещений в тонкостенных стержнях. Однако внешние силы удается при этом учитывать только с точностью до их интегральных характеристик, выражающихся изгибающими и крутящими моментами, нормальной и перерезывающими силами и так называемыми бимоентами. Распределение напряжений в поперечном сечении оказывается подчиненным секториальному закону и при равных интегральных характеристиках внешних сил не зависит от особенностей распределения последних.

В сечениях, достаточно удаленных от точек приложения внешних сил, секториальный закон хорошо описывает действительное распределение напряжений, но вблизи внешних сил местный характер распределения напряжений может существенно отклоняться от секториального закона. Потому для анализа напряженного состояния срединной поверхности оболочек вблизи точек приложения внешних сил нужно иметь теории, в которых деформации сдвига ( $\gamma$ ) и деформации поперечных удлинений ( $\epsilon_s$ ) не считаются равными нулю.

Общие уравнения для цилиндрических оболочек с произвольным контуром поперечного сечения, удовлетворяющие этим условиям, были получены В. З. Власовым [2] и В. В. Новожиловым [3]. Однако эти уравнения, в которых учитываются также и деформации изгиба контура поперечного сечения оболочек, довольно сложны и авторы не приводят их решения.

Вариант практического решения вопроса дает теория оболочек с неизгибаемым контуром [4, 5]. В этой теории учитываются все три деформации  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $\gamma$  срединной поверхности оболочки, но деформация изгиба  $\nu$



Фиг. 1

контура поперечного сечения считается равной нулю. Как следствие эта теория позволяет исследовать только напряженное состояние срединной поверхности оболочки, причем результаты приемлемой точности могут быть получены в применении к оболочкам, обладающим достаточно жестким на изгиб контуром, и в частности к оболочкам, имеющим поперечные ребра жесткости. На основе метода чередования основных систем [5] эта теория может быть применена как определенный элемент алгоритма и для анализа оболочек с гибким контуром.

### II. Обозначения и общие уравнения для симметричных оболочек

Принятые системы цилиндрических координат  $z$ ,  $s$  и декартовых координат  $xuz$  показаны на фиг. 1. Там же представлены составляющие напряжений  $\sigma_z$ ,  $\sigma_s$  и  $\tau$  в срединной поверхности оболочки. Для оболочки с контуром поперечного сечения, симметричным относительно оси  $ox$  при нагрузке, симметричной относительно плоскости  $xoz$ , напряжения в срединной поверхности и прогибы  $\xi$  средней образующей оболочки в направлении оси  $ox$  определяются следующей системой уравнений [4; 5]:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = -E \xi'' x''; \int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} x'' h ds = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}; \quad \sigma_s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial s}, \quad (2)$$



Где

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4}{\partial s^4}$$

$x = x(s)$  — абсцисса контура (функция  $s$  — длины дуги контура),

$$x'' = x''(s) = \frac{d^2 x}{ds^2}$$

— вторая производная  $x$  по  $s$ ,  $\xi = \xi(z)$  — прогибы оболочки (функция только переменной  $z$ ),

$$\xi'' = \frac{d^2 \xi}{dz^2},$$

$\varphi = \varphi(z, s)$  — функция напряжений,  
 $E$  — модуль упругости,  
 $h$  — толщина оболочки,

Интеграл берется по всей длине контура поперечного сечения  $S$ .

Уравнения (1) записаны для случая, когда внешняя нагрузка сводится только к нормальным  $p(z)$  и касательным  $t(z)$  силам, распределенным вдоль краевых образующих оболочки и действующим в плоскости касательной к срединной поверхности. Соответственно условия на продольных краях оболочки имеют вид

$$\sigma_s(s, z)|_{s=s_r} = p(z); \quad \tau(s, z)|_{s=s_r} = t(z) \quad (3)$$

где  $s_r$  — значение координаты  $s$  для крайней образующей.

Решение уравнений (1) при условиях (3) может быть представлено в следующем виде.

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n1} \sin \alpha z; \quad \xi'' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \alpha z, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{n \pi}{l},$$

$l$  — длина оболочки,

$$\alpha s_r = u_n.$$

$$f_{n1} = -\frac{1}{\alpha^2} \{ [a_n + \alpha^2 A_n f_{n2}(s_r)] \eta_1 + [c_n - \alpha A_n f'_{n2}(s_r)] \eta_2 \} + A_n f_{n2}(s), \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1(s) = 2(u_n \varphi_4 + \varphi_3) \cosh \alpha s - 2 \varphi_3 \alpha s \sinh \alpha s, \\ \eta_2 &= \eta_2(s) = 2 u_n + \varphi_3 \cosh \alpha s - 2 \varphi_4 \alpha s \sinh \alpha s; \\ \eta'_1 &= \eta'_1(s) = -2 \alpha (\varphi_3 \alpha s \cosh \alpha s - u_n \varphi_4 \sinh \alpha s), \\ \eta'_2 &= \eta'_2(s) = -2 \alpha [\varphi_4 \alpha s \cosh \alpha s - (u_n \varphi_3 - \varphi_4) \sinh \alpha s]; \\ \eta''_1 &= \eta''_1(s) = 2 \alpha^2 [(u_n \varphi_4 - \varphi_3) \cosh \alpha s - \varphi_3 \alpha s \sinh \alpha s], \\ \eta''_2 &= \eta''_2(s) = 2 \alpha^2 [(u_n \varphi_3 - 2 \varphi_4) \cosh \alpha s - \varphi_4 \alpha s \sinh \alpha s]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\varphi_3 = \frac{\sinh u_n}{\sinh 2 u_n + 2 u_n}; \quad \varphi_4 = \frac{\cosh u_n}{\sinh 2 u_n + 2 u_n}, \quad u_n = \alpha s_r. \quad (7)$$

$$f_{n2}(s) = \frac{E}{2 \alpha^2} \int_0^s \left[ \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha (s-u) - (s-u) \cosh \alpha (s-u) \right] x''(u) du. \quad (8)$$

$a_n$  и  $c_n$  — коэффициенты разложения функций  $p(z)$  и  $t(z)$  в ряды Фурье:

$$p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \alpha z, \quad t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \alpha z. \quad (9)$$

$$A_n = k_{na} a_n + k_{nc} c_n, \quad (10)$$

$$k_{na} = \frac{\Delta_a}{\delta}; \quad k_{nc} = \frac{\Delta_c}{\delta}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta = & 4 [\alpha^2 f_{n2}(s_r)(u_n \varphi_4 + \varphi_3) - \alpha f_{n2}''(s_r) u_n \varphi_3] \int_0^{s_r} \cosh \alpha s x'' h ds - \\ & - 4 [\alpha^2 f_{n2}(s_r) \varphi_3 - \alpha f_{n2}'(s_r) \varphi_4] \int_0^{s_r} \alpha s \sinh \alpha s x'' h ds - \\ & - 2 \alpha^2 \int_0^{s_r} f_{n2}(s) x'' h ds; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_a = & -4 (\varphi_3 + u_n \varphi_4) \int_0^{s_r} \cosh \alpha s x'' h ds + \\ & + 4 \varphi_3 \int_0^{s_r} \alpha s \sinh \alpha s x'' h ds, \\ \Delta_c = & -4 u_n \varphi_3 \int_0^{s_r} \cosh \alpha s x'' h ds + \\ & + 4 \varphi_4 \int_0^{s_r} \alpha s \sinh \alpha s x'' h ds. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Начало координат  $s = s_0 = 0$  расположено посередине контура.

Выражения (2), ... (13) приобретают конкретную форму, если задана функция  $x'' = x''(s)$ . Получаемые расчетные формулы даже при простых функциях  $x''(s)$  оказываются довольно сложными, поэтому целесообразно заданный контур поперечного сечения оболочки аппроксимировать так, чтобы функция  $x''(s)$  имела простейший вид. Наибольшие упрощения дает представление функции  $x''(s)$  в виде кусочно-постоянной.

### III. Особенности аппроксимирования кривой, заданной уравнениями в параметрической форме

Ограничимся рассмотрением частного случая оболочки с симметричным контуром поперечного сечения, характерным для надоконных частей кузовов пассажирских вагонов (фиг. 2).



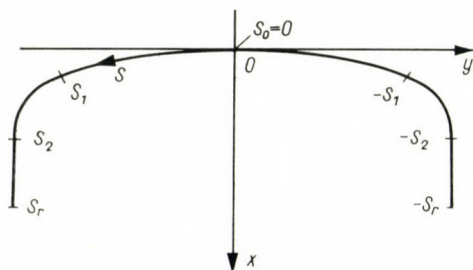
Пусть кривая контура задана уравнениями в параметрической форме

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

$s$  = параметр — длина дуги.

На участке  $s_0 \leq s \leq s_1$ , контур имеет сравнительно малую кривизну, на участке  $s_1 \leq s \leq s_2$  кривизна увеличена. Участок  $s_2 \leq s \leq s_r$  является прямолинейным и параллельным оси  $ox$ .

Такой контур удается практически хорошо аппроксимировать по общему характеру очертания, если функцию  $x''$ , т. е. вторую производную  $x$



Фиг. 2

по  $s$  заменить кусочно-постоянной функцией  $x''_1(s)$ , которую можно записать следующим образом:

$$x''_1(s) = \underbrace{k_1}_{s_0 \leq s \leq s_1} + \underbrace{k_2}_{s_1 \leq s \leq s_2} + \underbrace{0}_{s_2 \leq s \leq s_r}, \tag{14}$$

где

$$k_1 = x''(s)|_{s=s_{m1}}; \quad k_2 = x''(s)|_{s=s_{m2}} \tag{15}$$

— некоторые средние значения функции  $x''(s)$  для заданного контура на участках  $s_0 \leq s \leq s_1$  и  $s_1 \leq s \leq s_2$ ;  $s_{m1}$  и  $s_{m2}$  — значения координаты  $s$  на указанных участках.

Знак  $\underbrace{\quad}_{s_i \leq s \leq s_{i+1}}$  имеет смысл функционального прерывателя и указывает, что стоящее над ним выражение определяет функцию  $x''_1(s)$  только на участке  $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ . Для всех значений  $s$ , не лежащих на указанном участке, это выражение следует считать равным нулю тождественно.

Дважды интегрируя уравнение (14), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \underbrace{k_1 s + B_1}_{0 \leq s \leq s_1} + \underbrace{k_2 s + B_2}_{s_1 \leq s \leq s_2} + \underbrace{B_3}_{s_2 \leq s \leq s_r}; \\ x_1 &= \underbrace{\frac{1}{2} k_1 s^2 + B_1 s + B_4}_{0 \leq s \leq s_1} + \underbrace{\frac{1}{2} k_2 s^2 + B_2 s + B_5}_{s_1 \leq s \leq s_2} + \\ &\quad + \underbrace{B_3 s + B_6}_{s_2 \leq s \leq s_r}, \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

где  $B_1, B_2 \dots B_6$  — постоянные интегрирования, при определении которых должны быть использованы условия непрерывности аппроксимирующей функции и ее производной:

$$\begin{aligned} x_1(s_1 + 0) &= x_1(s_1 - 0), & x'_1(s_1 + 0) &= x'_1(s_1 - 0), \\ x_1(s_2 + 0) &= x_1(s_2 - 0), & x'_1(s_2 + 0) &= x'_1(s_2 - 0). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя значения  $x_1$  и  $x'_1$  из (16), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} k_1 s_1^2 + B_1 s_1 + B_4 &= \frac{1}{2} k_2 s_1^2 + B_2 s_1 + B_5; \\ k_1 s_1 + B_1 &= k_2 s_1 + B_2; \\ \frac{1}{2} k_2 s_2^2 + B_2 s_2 + B_5 &= B_3 s_2 + B_6; \\ k_2 s_2 + B_2 &= B_3. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Поскольку параметром является длина дуги  $s$ , то уравнению абсцисс  $x_1 = x_1(s)$  контура отвечает определенная кривая.

Уравнение для ординат  $y_1 = y_1(s)$  контура вытекает из дифференциальной зависимости  $ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2$  откуда

$$y_1(s) = y_{10} + \int_{s_0}^s \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2} \right] ds. \quad (19)$$

При построении функции  $x_1(s)$  должно выполняться условие существования кривой, выраженной уравнениями в параметрической форме  $x_1 = x_1(s)$ ,  $y_1 = y_1(s)$ . Это условие имеет вид

$$\frac{dx_1}{ds} \leq 1. \quad (20)$$

Кроме приближения функции  $x_1(s)$  к  $x(s)$  по средним значениям второй производной согласно условию (15) оказывается возможным при трех участках с различными постоянными значениями функции  $x''_1(s)$  получить совпадение приближенной и заданной кривых в двух точках. При этом три значения  $s_i$  на границах участков ( $s_1, s_2, s_r$ ) не могут выбираться произвольно, а должны определяться вместе с постоянными интегрирования  $B_i$  общей системой уравнений. Они получают новые значения  $s'_1, s'_2, s'_r$ .

Условия совпадения координат и касательной в некоторой точке  $s = s_c$  запишем в виде

$$\begin{aligned} x_1(s'_c) &= x(s_c); \\ y_1(s'_c) &= y(s_c); \end{aligned} \quad (21)$$



$$\left. \frac{dx_1}{dy_1} \right|_{s=s_c} = \left. \frac{\frac{dx_1}{ds}}{\frac{dy_1}{ds}} \right|_{s=s_c} = \left. \frac{dx}{dy} \right|_{s=s_c} \quad (21)$$

Если совпадение имеет место в начальной ( $s_c = s_0 = 0$ ) и конечной ( $s_c = s_r$ ) точках контура, то после подстановки в (21) выражений для  $x_1$  и  $y_1$  из (16) и (19) получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} k_1 s_0^2 + B_1 s_0 + B_4 &= x(s_0) = x_0; \\ y_1(s_0) = y_{10} &= y(s_0) = y_0; \\ \left. \frac{dx_1}{dy_1} \right|_{s=s_0} &= \frac{k_1 s_0 + B_1}{\sqrt{1 - (k_1 s_0 + B_1)^2}} = \left. \frac{dx}{dy} \right|_{s=s_0} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} B_3 s'_r + B_6 &= x(s_r); \\ y_{10} + \int_0^{s'_r} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2} \right) ds &= y(s_r); \\ \left. \frac{dx_1}{dy_1} \right|_{s=s'_r} &= \frac{B_3}{\sqrt{1 - B_3^2}} = \left. \frac{dx}{dy} \right|_{s=s_r} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Система девяти уравнений (18), (22), (23) определяет девять неизвестных  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, s'_1, s'_2, s'_r$ . Ввиду того, что второе уравнение системы (23) является трансцендентным практическое решение системы можно вести, предварительно задав несколько значений одного из неизвестных, например  $s'_1$ , и решать восемь уравнений.

Второе уравнение системы (23) служит для контроля выбора величины  $s'_1$ .

При выбранном положении начала координат (фиг. 2) имеем:

$$\begin{aligned} s_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \\ \left. \frac{dx}{ds} \right|_{s=s_0} = 0, \quad \left. \frac{dx}{ds} \right|_{s=s_r} = \infty \end{aligned}$$

Из уравнений (22) и третьего уравнения системы (23) получаем:

$$B_4 = B_1 = 0; \quad B_3 = 1.$$

Остальные неизвестные  $B_2, B_5, B_6, s'_1, s'_2, s'_r$  определяются шестью оставшимися уравнениями системы (18) и (23).

Рассмотренное здесь аппроксимирование кривых заданных в параметрической форме легко обобщается для случая произвольного числа участков с постоянными значениями функции  $x'_1$ .

**IV. Формулы для напряжений в оболочках с аппроксимированным контуром поперечного сечения**

Формулы (2) на основании соотношений (4) и (5) принимают вид\*

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{\alpha^2} \eta_1'' + \frac{c_n}{\alpha^2} \eta_2'' \right) \sin \alpha z - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ f_{n2}(s_r) \eta_1'' - \frac{1}{\alpha} f'_{n2}(s_r) \eta_2'' - f''_{n2}(s) \right] \sin \alpha z ; \\
 \sigma_s &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \eta_1 + c_n \eta_2) \sin \alpha z + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [ \alpha^2 f_{n2}(s_r) \eta_1 - \alpha f'_{n2}(s_r) \eta_2 - \alpha^2 f_{n2}(s) ] \sin \alpha z ; \\
 \tau &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{\alpha} \eta_1' + \frac{c_n}{\alpha} \eta_2' \right) \cos \alpha z + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [ \alpha f_{n2}(s_r) \eta_1' - f'_{n2}(s_r) \eta_2' - \alpha f'_{n2}(s) ] \cos \alpha z ,
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где функция  $f_{n2}(s)$  определяется формулой (8), которая после подстановки  $x'' = x_1''$  по выражению (14) и интегрирования может быть записана в форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \alpha^4}{E} f_{n2}(s) &= k_1 \underbrace{(2 \cosh \alpha s - \alpha s \sinh \alpha s - 2)}_{\substack{0 \quad \quad \quad s \quad \quad \quad s_1}} + \\
 &\quad + k_1 \left\{ \underbrace{\alpha(s-s_1) \sinh \alpha(s-s_1) - \alpha s \sinh \alpha s + 2 [\cosh \alpha s - \cosh \alpha(s-s_1)]}_{s_1 \quad \quad \quad s \quad \quad \quad \dots} \right\} + \\
 &\quad + k_2 \left\{ \underbrace{2 [\cosh \alpha(s-s_1) - 1] - \alpha(s-s_1) \sinh \alpha(s-s_1)}_{\dots \quad \quad \quad s_2} \right\} + \\
 &\quad + k_1 \left\{ \underbrace{\alpha(s-s_1) \sinh \alpha(s-s_1) - \alpha s \sinh \alpha s + 2 [\cosh \alpha s - \cosh \alpha(s-s_1)]}_{s_2 \quad \quad \quad s \quad \quad \quad \dots} \right\} + \\
 &\quad \quad \quad + k_2 \left\{ \underbrace{\alpha(s-s_2) \sinh \alpha(s-s_2) - \alpha(s-s_1) \sinh \alpha(s-s_1) + 2 [\cosh \alpha(s-s_1) - \cosh \alpha(s-s_2)]}_{\dots \quad \quad \quad s_r} \right\} .
 \end{aligned} \quad (25)$$

Знак  $\underbrace{\quad \quad \quad}_{s_i \quad \quad \quad s \quad \quad \quad s_{i+1}}$  является раздвинутым знаком  $\underbrace{\quad \quad \quad}_{s_i \quad \quad \quad s \quad \quad \quad s_{i+1}}$  (см. формулу (14)).

\* В формулах (24) и далее для упрощения записи индекс ' (штрих) вверху  $s_r, s_1$  и  $s_2$  опущен.



Первая и вторая производные функции  $f_{n2}(s)$  по  $s$  получают выражения:

$$\begin{aligned} \frac{2 a^3}{E} f'_{n2}(s) = & \underbrace{k_1 (\sinh a s - a s \cosh a s)}_{\substack{0 \\ s \\ s_1}} + \\ & + \underbrace{k_1 [a (s - s_1) \cosh a (s - s_1) - a s \cosh a s - \sinh a (s - s_1) + \sinh a s]}_{\substack{s_1 \\ s}} + \\ & + \underbrace{k_2 [\sinh a (s - s_1) - a (s - s_1) \cosh a (s - s_1)]}_{\substack{s_2}} + \\ & + \underbrace{k_1 [a (s - s_1) \cosh a (s - s_1) - a s \cosh a s - \sinh a (s - s_1) + \sinh a s]}_{\substack{s_2 \\ s}} + \\ & + \underbrace{k_2 [a (s - s_2) \cosh a (s - s_2) - a (s - s_1) \cosh a (s - s_1) - \sinh a (s - s_2) + \sinh a (s - s_1)]}_{s_r}. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{2 a^2}{E} f''_{n2}(s) = & - \underbrace{k_1 a s \sinh a s}_{\substack{0 \\ s \\ s_1}} + \\ & + \underbrace{(k_1 - k_2) a (s - s_1) \sinh a (s - s_1) - k_1 a s \sinh a s}_{\substack{s_1 \\ s \\ s_2}} + \\ & + \underbrace{(k_1 - k_2) a (s - s_1) \sinh a (s - s_1) - k_1 a s \sinh a s}_{\substack{s_2 \\ s}} + \\ & + \underbrace{k_2 a (s - s_2) \sinh a (s - s_2)}_{s_r}. \end{aligned} \quad (27)$$

$f_{n2}(s_r)$  и  $f'_{n2}(s_r)$  — представляют собой значения функций  $f_{n2}(s)$  и, соответственно, ее производной  $f'_{n2}(s)$  при  $s = s_r$ .

$A_n$  определяется выражениями (10) и (11) причем формулы (12), (13) для величин  $\delta$ ,  $\Delta_a$ ,  $\Delta_c$  после подстановки значения  $x'' = x''_1$  по уравнению (14) и интегрирования получают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \delta = & - 4 a^2 f_{n2}(s_r) \left[ \varphi_3 H_2 - \frac{1}{a} (\varphi_3 + u_n \varphi_4) H_1 \right] + \\ & + 4 a f'_{n2}(s_r) \left( \varphi_4 H_2 - \frac{u_n}{a} \varphi_3 H_1 \right) - \\ & - \frac{E}{a} \left[ k_1^2 \mathcal{D}_1 + \frac{k_2 (k_1 - k_2)}{a^2} \mathcal{D}_2 + \frac{k_2 k_1}{a^2} \mathcal{D}_3 - \right. \\ & \left. - \frac{2 k_2^2}{a} (s_2 - s_1) \right]; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Delta_a = 4 \left[ \varphi_3 H_2 - \frac{1}{a} (\varphi_3 + u_n \varphi_4) H_1 \right] h; \quad (29)$$

$$\Delta_c = 4 \left( \varphi_4 H_2 - \frac{u_n}{a} \varphi_3 H_1 \right) h, \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= (k_1 - k_2) \sinh a s_1 + k_2 \sinh a s_2; \\ H_2 &= (k_1 - k_2) \mathcal{D}_0 + k_2 \left( s_2 \cosh a s_2 - \frac{1}{a} \sinh a s_2 \right); \\ \mathcal{D}_0 &= s_1 \cosh a s_1 - \frac{1}{a} \sinh a s_1; \\ \mathcal{D}_1 &= \frac{1}{a} \left( \frac{2}{a} \sinh a s_1 - \mathcal{D}_0 - 2 s_1 \right); \\ \mathcal{D}_2 &= a (s_2 - s_1) \cosh a (s_2 - s_1) - 3 \sinh a (s_2 - s_1); \\ \mathcal{D}_3 &= a s_1 \cosh a s_1 - a s_2 \cosh a s_2 + \\ &\quad + 3 (\sinh a s_2 - \sinh a s_1). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Функции  $\eta_1 = \eta_1(s)$  и  $\eta_2 = \eta_2(s)$  вычисляются по уравнениям (6).  
Функции  $\eta'_1 = \eta'_1(s)$ ,  $\eta'_2 = \eta'_2(s)$ ,  $\eta''_1 = \eta''_1(s)$ ,  $\eta''_2 = \eta''_2(s)$  представляют собой первые и вторые производные функций  $\eta_1$  и  $\eta_2$  по  $s$ .

Коэффициенты  $a_n$  и  $c_n$  определяются формулами Фурье

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l p(z) \sin a z dz, \quad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l t(z) \cos a z dz.$$

Первые суммы в формулах (24) соответствуют известному в теории упругости решению Файлона для плоской прямоугольной пластинки [5], представляющей собой развернутую на плоскость оболочку и нагруженную по продольным краям заданными силами  $p(z)$  и  $t(z)$ . Вторые суммы являются специфическими для оболочек с неизгибаемым контуром.

Расчеты по приведенным формулам удобно проводить на электронных числовых машинах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З.: Тонкостенные упругие стержни, 1959.
2. Власов В. З.: Общая теория оболочек. М. Гостехиздат 1949.
3. Новожилов В. В.: Теория тонких оболочек. Л. Судпромгиз 1962.
4. Никольский Е. Н.: Деформации и напряжения в цилиндрических оболочках и тонкостенных стержнях с неизгибаемым контуром поперечного сечения. *Известия Академии Наук СССР, Отделение технических наук* (1956), № 6.
5. Никольский Е. Н.: Оболочки с вырезами типа вагонных кузовов (теоретические основы исследования напряжений). Машгиз 1963.



## STRESSES IN CYLINDRICAL SHELLS WITH SYMMETRICAL CROSS-SECTION

J. N. NIKOLSKI

## SUMMARY

The paper deals with the theory of stresses arising in cylindrical shells with symmetrical cross-section. With the help of the formulae derived in the paper the stresses arising in the middle surface of a shell can be computed for any system of loads. The paper presents the solution of the problem in the form of trigonometrical series.

## SPANNUNGEN IN ZYLINDERSCHALEN MIT SYMMETRISCHEM QUERSCHNITT

J. N. NIKOLSKI

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit behandelt die Theorie von Zylinderschalen mit symmetrischem Querschnitt. Mit Hilfe der abgeleiteten Formeln können die in der Mittelfläche der Schalen entstehenden Spannungen für jedes beliebige System von Belastungen berechnet werden. Die Arbeit gibt die Ergebnisse in Form von trigonometrischen Reihen an.

## LES CONTRAINTES ENGENDRÉES DANS LES VOILES CYLINDRIQUES DE SECTION SYMÉTRIQUE

J. N. NIKOLSKI

## RÉSUMÉ

L'article expose la théorie de voiles cylindriques de section symétrique. A l'aide des formules déduites par l'auteur, les contraintes engendrées sur la surface moyenne des voiles peuvent être calculées pour un système de charges quelconque. La solution du problème est donnée sous forme de séries trigonométriques.





# ON ANISOTROPIC TWISTED BARS

## A NON-LINEAR ASPECT

W. OLSZAK

PROF. DR. DR. h. c.

POLISH ACADEMY OF SCIENCES, WARSAW

[Manuscript received August 28, 1964]

The paper is concerned with certain non-linear effects in twisted anisotropic prismatic bars. The analysis is based on a simplified theory which consists in the extension of C. WEBER's approach for isotropic bars to anisotropic problems.

The distribution of longitudinal stresses and the shortening phenomenon are studied, as well as the increase of torsional rigidity due to the presence of longitudinal stresses. Practical conclusions are drawn by confronting the behaviour of anisotropic and isotropic bars. The Appendix sketches the linear theory of an anisotropic prismatic bar under torsion, based on the application of the stress function.

### 1. General Remarks. The Statement of the Problem

It is a known fact that cases of pure torsion accompanied by considerable angles of twist may often occur in engineering problems. They lead to non-linear effects.

The problems of the non-linear theory of elasticity may be classed in two groups:

- geometrically non-linear, and
- physically non-linear problems.

Of course, "mixed" types may also occur.

The problem under consideration resembles that of bending a thin steel strip which can be bent to form a full ring or even more. Such a phenomenon is possible within the validity of Hooke's law.

Similarly, the material of a bar subject to torsion may, despite large displacements and angles of twist, behave, in a certain range, elastically, so that, after removal of the torque, the bar assumes its original form.

Such is the problem to be dealt with in the present paper. In this paper only the first part of the problem is studied: the elastic response of the bar. The second part will follow the evolution of its behaviour when passing into the elastic-plastic range and also analyze its ultimate load carrying capacity. It should be added that we shall consider a rectangular bar of anisotropic structure. In this connection we shall also consider the limit case of a very narrow rectangular cross-section.

A typical element subject to torsion with considerable angles of twist are drilling devices, especially for large drilling depths.<sup>1</sup>

But also in civil engineering torsion is a more frequent phenomenon than usually supposed. A number of structural elements usually considered to be subject to bending alone must also carry considerable torques.<sup>3</sup> As an example let us mention angular ("broken") girders.<sup>4</sup> In such structures, however, the angles of twist are, as a rule, small. This may be quite different for space frame systems which can be exposed to considerable torques, their torsional rigidities being usually small.

The present paper has been conceived in connection with the design of a measuring device the central element of which was an anisotropic shaft subject to large twisting angles and for which a high degree of accuracy was required.

The torsion involving large twisting angles is accompanied by a certain secondary effect: the change of the length of the bar caused by the longitudinal stresses which are generated in such a case (even for pure torsion).

The mechanical properties of the anisotropic rectangular bar under consideration are supposed to be related to three planes of elastic symmetry connected with the systems of the axes 1, 2, 3. This is the case of anisotropy of the "prismatic" type ("orthotropy"). Of the set of 9 elastic constants determining the elastic behaviour of such a material, we shall need, in view of the character of the considered problem, only 3, viz.  $E_3$ ,  $G_{13}$  and  $G_{23}$ .

If a prismatic bar of any cross-section is subject to torsion by two couples acting on its ends and located in planes normal to the axis of the bar, it is assumed as a rule that the generating lines of the cylinder remain, for small angles of twist, straight. It is assumed, in addition, that the distances between specified cross-sections, though warping<sup>5</sup> occurs, remain unchanged.

However, these assumptions are no more justified for large angles of twist, as has been pointed out by C. WEBER [20].<sup>6</sup> Thus, for instance, generating lines originally straight and parallel to the axis of the bar, become after deformation spirals. The distance between the ends of a spiral, measured along the axis of the bar, is less than the primary length of a generating line. This

<sup>1</sup> For bars of considerable length, a critical value of the torque may be found for which the rectilinear form of the bar is no more stable (cf. A. G. GREENHILL [6]<sup>2</sup> and E. SCHWERIN [15]). It may be shown, in this connection, that a compressive force reduces, and a tensile force raises this critical value (cf. e.g., A. N. DINNIK [3] and J. W. GECKELER [5]). An analogous case of torsional "stiffening" of the bar was discussed in [20], [19], [2].

<sup>2</sup> Numbers in square brackets refer to the list of references at the end of the paper.

<sup>3</sup> Cf. e.g., W. OLSZAK [13].

<sup>4</sup> Such systems were examined by W. WIERZBICKI [21].

<sup>5</sup> For isotropic bars, the circular and annular sections constitute, in this respect, exceptions. The case of anisotropic bars is quite different. This was discussed in detail in our papers [14]. Cf. also footnote<sup>18</sup>.

<sup>6</sup> Cf., e.g., S. P. TIMOSHENKO [19] or M. S. G. CULLIMORE [2]. We adopt a systematization proposed in these papers. To facilitate comparison of results, we introduce, wherever possible, similar notations in what follows; the argument is also explained in a similar way.



shortening increases with increasing angles of twist. It follows that also two neighbouring cross-sections, which — in the classical scheme — are supposed to be immovable along the axis, will approach each other.

The originally straight longitudinal fibres deform, as already stated, into spiral lines. Their inclination angle is not constant; it varies in direct proportion to the distance from the axis of the bar (or, more strictly, from its axis of twist). The axis itself remains straight.

Thus, the greater the distance between the fibre under consideration and the axis of twist, the greater its inclination and shortening. However, the longitudinal fibres cannot shorten individually. Their behaviour depends on the neighbouring fibres. Hence, as an effect, the exterior fibres are constrained by the interior ones, and so subject to tension, whereas those located close to the axis of twist will be in a state of compression. These physical phenomena accompany the "shortening effect".

## 2. Simplified Theory

The general theoretical approach to non linear problems requires an appropriate definition of the strain tensor.

If we denote by the quantities  $\gamma_{rs}$  the symmetrical components of the covariant (second rank) strain tensor, we find (cf. [17])

$$\gamma_{rs} = \frac{1}{2} (\nabla_r u_s + \nabla_s u_r + \nabla_r u^n \nabla_s u_n). \quad (2.1)$$

Thus these components are given in terms of the components of the displacement vector  $\vec{u}$  with respect to the undeformed body  $B$  (Lagrangian variables). Here  $\nabla_r u_m$  denotes the covariant derivative

$$\nabla_r u_m = \partial_r u_m - \left\{ \begin{matrix} s \\ mr \end{matrix} \right\} u_s, \quad (2.2)$$

$\left\{ \begin{matrix} s \\ mv \end{matrix} \right\}$  standing for the Christoffel symbol of the second kind calculated for the configuration  $B$  from the metric tensors  $g_{rs}, g^{rs}$ .

Alternatively we could define  $\gamma_{rs}$  in terms of the components of  $\vec{u}$  with respect to the deformed body  $\bar{B}$  (Eulerian variables).

When referred, e.g., to the Cartesian system  $(x_1, x_2, x_3)$  in the state  $B$ , we find that

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \text{ etc...} \end{aligned} \quad (2.3)$$

In an alternative way, we could derive the quantities  $\gamma_{11}, \gamma_{23}$ , etc . . . , referred to the Cartesian system  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  in the state  $\bar{B}$ .

Obviously, the classical theory of elasticity is as a rule concerned with small deformations for which the derivatives of displacements can be disregarded when compared with unity, as well as the products of two displacements or their derivatives when compared with the linear expressions of these quantities. Then the last term in equation (2.1) disappears and we find for  $\gamma_{rs}$  the known linear definition.

The form of the non linear equations (2.1) shows that an attempt to use them when integrating the basic set of equations for specified boundary value problems, obviously leads to great difficulties.

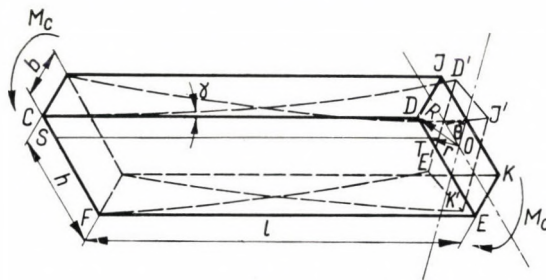


Fig. 1

As a matter of fact, it is not always necessary to have recourse to these equations in their general form (2.1). This will also be the case in our present problem.

The simplified, sufficiently approximate theory will be based on the analysis of the physical phenomena which accompany torsional processes involving considerable angles of twist. The argument will, at first, be analogous to that indicated by C. WEBER for isotropic bars [20].<sup>6</sup> For anisotropic bars the conditions may be different.

Let us consider the behaviour of a prismatic bar shown in Fig. 1 and loaded by torques  $M_c$  acting as described previously. If the bar of length  $l$  is twisted through the angle  $\Theta$ , thus passing from the initial undeformed position  $CDEFIJKL$  into the deformed position  $CD'E'FIJ'K'L$ , the edge  $CD$ , for instance, initially rectilinear, of length  $l$ , becomes helical. Its length, measured on the surface of the cylinder of radius  $R$  and length  $l$ , is

$$L = \overline{CD'} = \sqrt{l^2 + R^2 \Theta^2} = \frac{l}{\cos \gamma} = l \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{2} \right] = l \left[ 1 + \frac{1}{2} (\vartheta R)^2 \right], \quad (2.4)$$

where  $\vartheta$  denotes the angle of twist per unit length

$$\vartheta = \frac{1}{l} \Theta. \quad (2.5)$$



The increase of length is, therefore,

$$\Delta l_R = L - l = l \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{R\Theta}{l} \right)^2} - 1 \right] = \frac{R^2 \Theta^2}{2l} = \frac{1}{2} (\vartheta R)^2 l. \quad (2.6)$$

Then, the strain is<sup>7</sup>

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l_R}{l} = \frac{R^2 \Theta^2}{2l^2} = \frac{1}{2} \vartheta^2 R^2. \quad (2.7)$$

The corresponding, tensile stress is

$$\sigma_{\max} = \varepsilon_{\max} \cdot E_3 = \frac{1}{2} E_3 \vartheta^2 R^2. \quad (2.8)$$

For any fibre  $ST$ , at the distance  $r$  from the axis, the strain is less and equal to

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\max} \left( \frac{r}{R} \right)^2. \quad (2.9)$$

Hence, the corresponding tensile stress is

$$\sigma_r = \sigma_{\max} \left( \frac{r}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} E_3 \vartheta^2 r^2. \quad (2.10)$$

Our assumption was, however, that the distance between two sections remains, during torsion, unaltered. This is equivalent to the postulate that the bar is subject to longitudinal stresses  $\sigma_r$  defined in (2.10), which keep its length unaltered.

But, since such a longitudinal force does not exist, the bar being subject to torques only, the torsion must necessarily be accompanied by a shortening of the bar.

Let us assume that this unit shortening, the same for each particular fibre, is equal to  $\varepsilon_0$ . Then, instead of (2.10), we obtain

$$\sigma_r = \frac{1}{2} E_3 \vartheta^2 r^2 - \varepsilon_0 E_3. \quad (2.11)$$

Since there is no longitudinal force,  $\varepsilon_0$  has to be computed from the condition that the resultant of all the stresses (2.11) vanishes:

$$\int_A \sigma_r \cdot dA = 0. \quad (2.12)$$

The cosines of the inclination angles of the fibres to the axis have been assumed to be equal to unity. Hence

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2A} \int_A \vartheta^2 r^2 dA, \quad (2.13)$$

<sup>7</sup> As a matter of fact, the notations  $\varepsilon_{\max}$  and  $\sigma_{\max}$  are not related to extremum values. However, since no error is possible, we adopt them in what follows. On the other hand, the values of  $\sigma_{\min}$  and  $\tau_{\max}$  which will appear later, are related to extrema.

which, in the case of a rectangular bar, is

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2bh} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \vartheta^2 (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{24} \vartheta^2 (b^2 + h^2). \quad (2.14)$$

On returning to the expression (2.11) and substituting therein for  $\varepsilon_0$  (2.14), we find, in turn, the longitudinal stresses which are variable from fibre to fibre

$$\sigma_r = \frac{1}{2} E_3 \vartheta^2 \left( r^2 - \frac{b^2 + h^2}{12} \right)^8. \quad (2.15)$$

It is now easy to obtain the distance  $r_n$  of the "neutral" fibres subject to no longitudinal stress. We have

$$r_n = \pm \sqrt{\frac{1}{12} (b^2 + h^2)}. \quad (2.16)$$

From (2.15) it is seen that for  $r < \sqrt{(b^2 + h^2)/12}$  the stresses  $\sigma_r$  are negative (the central portion of the bar is subject to longitudinal compression); on the other hand, for  $r > \sqrt{(b^2 + h^2)/12}$  the stresses  $\sigma_r$  are positive (the outer parts are subject to tension).

The greatest values of these stresses will occur in fibres at the greatest distance from the axis, that is in the four corners  $N$  of the rectangle (Fig. 2), for which  $r^2 = R^2 = (b^2 + h^2)/4$ . Hence

$$\sigma_{\max} = \sigma_R = \frac{1}{12} E_3 \vartheta^2 (b^2 + h^2). \quad (2.17)$$

Other characteristic values are those (Fig. 3) in the middle of the shorter side  $B$ , ( $r_B = h/2$ ); in the middle of the longer side  $H$ , ( $r_H = b/2$ ); and at the axis, ( $r_0 = 0$ ). We have respectively

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{1}{24} E_3 \vartheta^2 (2h^2 - b^2), \\ \sigma_H &= \frac{1}{24} E_3 \vartheta^2 (2b^2 - h^2), \\ \sigma_0 &= -\frac{1}{24} E_3 \vartheta^2 (b^2 + h^2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

If we are interested in a flat prismatic bar for which  $b^2$  can be assumed to be negligible in relation to  $h^2$ , we find from (2.15) the following stress

<sup>8</sup> The conditions of the problem require that the end sections be free from normal stresses. So the stresses (2.15) occur only at a certain distance from the ends. Short end portions will be in a state of stress more complex than would follow from the above relation, this state being a function of the variables  $x$ ,  $y$ , and  $z$ . It should also be added that the longitudinal stresses as described by the above expressions can be produced only when the ends of the bar are free to undergo longitudinal displacements connected with the deformations of cross-sections.



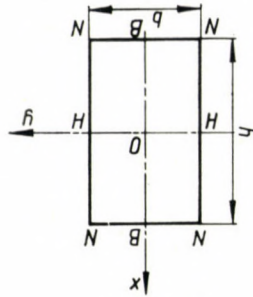


Fig. 2

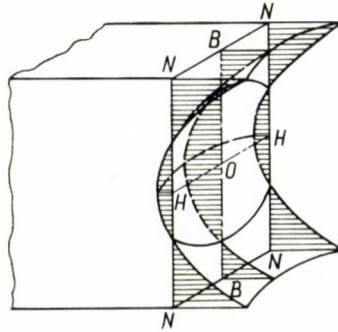


Fig. 3

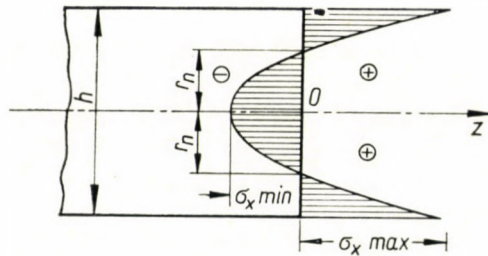


Fig. 4

distribution (Fig. 4)<sup>9</sup>

$$\sigma_x = \frac{1}{2} E_3 \vartheta^2 \left( x^2 - \frac{h^2}{12} \right). \quad (2.19)$$

It is now easy to find its greatest positive value (tension) for the most distant fibre,  $x = h/2$ , as well as the minimum value (maximum compression) which occurs at the axis of the flat strip,  $x = 0$ . These quantities are, respectively,

$$\sigma_{x \max} = + \frac{1}{12} E_3 \vartheta^2 h^2, \quad \sigma_{x \min} = - \frac{1}{24} E_3 \vartheta^2 h^2. \quad (2.20)$$

<sup>9</sup> For this particular case cf., for instance, [19].

The distance of the "neutral" fibres is

$$r_n = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} h = 0,289 h. \quad (2.21)$$

The form of the fundamental relation (2.15) shows that the most typical feature of the phenomenon is that the stresses  $\sigma_r$  are no more a linear but a quadratic function of the angle of twist  $\vartheta$  (in contrast to the known linear relations of the theory of small elastic twists).

For the purpose of estimating the order of magnitude and, therefore, the importance of the "secondary" longitudinal stresses, we have now to confront the values of  $\sigma_r$  and, in particular,  $\sigma_{x \max}$ , with the maximum shear stress  $\tau_{\max}$  produced by torsion. This requires the knowledge of the state of stress in the case of torsion of prismatic anisotropic rectangular bars.

The way for obtaining this answer being somewhat lengthy, it is outlined in a separate section 6. From that section we take now the final results for direct application to the problem we are now interested in. In particular we shall need the expressions for  $\tau_{\max H}$ ,  $\tau_{\max B}$  and  $\vartheta$ , from the equations (6.12), (6.13) and (6.17), respectively. In addition, it will be necessary to use the auxiliary functions  $\mu$  (6.9),  $\delta$  (6.9),  $\beta$  (6.14a),  $\varkappa_H$  (6.14b), and  $\varkappa_B$  (6.14c).

### 3. Application to the Rectangular Bar

If the value

$$\vartheta = \frac{\tau_{\max}}{G_{13} \cdot b \lambda(\delta)}$$

following from (6.17) is substituted in the expression for maximum longitudinal stress  $\sigma_{\max}$ , we obtain, from (2.17)

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{12} E_3 \frac{\tau_{\max}^2}{G_{13}^2 \cdot b^2 \cdot \lambda^2(\delta)} (b^2 + h^2). \quad (3.1)$$

Depending on whether  $\tau_{\max H}$  or  $\tau_{\max B}$  is used, this expression may be rewritten in the form

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{12} \cdot \frac{E_3}{G_{13}^2} \cdot \frac{1}{\beta^2 \varkappa_H^2} \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^2} \cdot \tau_{\max H}^2, \quad (3.1a)$$

or

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{12} \cdot \frac{E_3}{G_{12} G_{13}} \cdot \frac{1}{\beta^2 \varkappa_B^2} \cdot \frac{b^2 + h^2}{b^2} \cdot \tau_{\max B}^2. \quad (3.1b)$$



Bearing in mind the relations (2.18) we can write the expressions for other characteristic values of the longitudinal stresses in the form

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \frac{1}{24} E_3 \frac{\tau_{\max}^2}{G_{13}^2 \cdot b^2 \cdot \lambda^2(\delta)} (2b^2 - h^2), \\ \sigma_B &= \frac{1}{24} E_3 \frac{\tau_{\max}^2}{G_{13}^2 \cdot b^2 \cdot \lambda^2(\delta)} (2h^2 - b^2), \\ \sigma_0 &= -\frac{1}{24} E_3 \frac{\tau_{\max}^2}{G_{13}^2 \cdot b^2 \cdot \lambda^2(\delta)} (b^2 + h^2).\end{aligned}\quad (3.2)$$

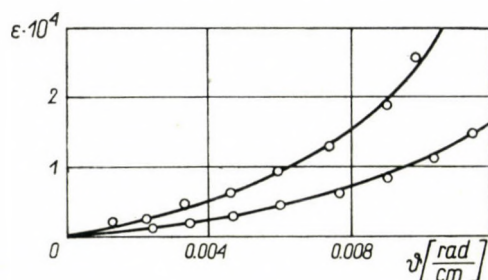


Fig. 5

Each of them can now be expressed in terms of either  $\tau_{\max H}$  or  $\tau_{\max B}$ .

In the particular case when a narrow rectangle is considered ( $h^2 \gg b^2$ ), we can write for the maximum and minimum values of the longitudinal stress [in agreement with (2.20) and (2.21)] the following somewhat simplified expressions

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= +\frac{1}{12} \cdot \frac{E_3}{G_{13}^2 \cdot \lambda^2(\delta)} \cdot \frac{h^2}{b^2} \cdot \tau_{\max}^2, \\ \sigma_{\min} &= -\frac{1}{24} \cdot \frac{E_3}{G_{13}^2 \cdot \lambda^2(\delta)} \cdot \frac{h^2}{b^2} \cdot \tau_{\max}^2.\end{aligned}\quad (3.3)$$

It is seen that the longitudinal stresses increase with the square of the greatest value of the shear stress ( $\tau_{\max}^2$ ).

The quadratic dependency of one of the stress components on the characteristic deformation, which could already be seen in (2.15) and (2.19), shows clearly the deviation of the phenomena from linearity which constitutes the basic feature of the "classical" solution. Consequently, a rapid increase of the longitudinal stresses with increasing angle of twist  $\vartheta$  is the result.

As shown by M. S. G. CULLIMORE [2], measurements of longitudinal stresses in aluminium bars have proved that the theoretical parabolic relation is in fair agreement with reality (cf. Fig. 5).

The anisotropic properties of metal bars may either be caused by the technological production process (rolling, for instance), or else the anisotropy may be connected with the practical structural arrangements adopted for the element under consideration.<sup>10</sup>

#### 4. Torsional Stiffening of the Bar

The presence of longitudinal stresses "stiffens" the bar against torsion. For anisotropic bars this phenomenon is essentially similar to that for isotropic bars. For this reason we shall mention it only briefly.<sup>11</sup>

The longitudinal stresses discussed above coincide with the direction of longitudinal fibres of the twisted bar. Therefore, they are not parallel to the  $z$ -axis. Their inclination to this axis is  $\vartheta$ .

By calculating their projection on the plane normal to the  $z$ -axis we obtain, when taking (2.15) into account,

$$\sigma_r \cdot \vartheta_r = \frac{1}{2} E_3 \vartheta^3 \left( r^3 - r \frac{b^2 + h^2}{12} \right). \quad (4.1)$$

Now we can compute the moment of this component with respect to the  $z$ -axis. This may be found, with an accuracy sufficient for our purposes, to be

$$\frac{1}{2} E_3 \vartheta^3 r^2 \left( r^2 - \frac{b^2 + h^2}{12} \right)^{12}.$$

Hence the torque due to the stresses  $\sigma_r$  is

$$\begin{aligned} M_\sigma &= \frac{1}{2} E_3 \vartheta^3 \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} r^2 \left( r^2 - \frac{b^2 + h^2}{12} \right) \cdot dx \cdot dy = \\ &= \frac{1}{2} E_3 \vartheta^3 \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} (x^2 + y^2) \left( x^2 + y^2 - \frac{b^2 + h^2}{12} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{360} E_3 \vartheta^3 bh (b^4 + h^4). \end{aligned} \quad (4.2)$$

<sup>10</sup> The numerical assessment of the degree of anisotropy is expressed by means of the coefficient  $\mu$  of the definition (6.9). According to A. KRUPKOWSKI's experimental research, the difference between two orthogonal directions may amount to about  $1:\sqrt{0.3}$ , depending on the kind of the test piece and the metal considered (due to the type of technological processes alone). This "inherent" anisotropy may be combined with the "structural" anisotropy. In his monograph [8], S. G. LEKHNITSKY introduced for the ratio of shear moduli, which is decisive for  $\mu$ , the value  $G_{23}/G_{13} = 9$ .

<sup>11</sup> cf., e.g., [20], [19], [2].

<sup>12</sup> This would require a more exact approach. The value of the lever arm has been assumed to be equal to  $r$ .



The torque due to the shear stresses is, as follows from (6.10) and (6.11) of Section 6,

$$M_\tau = G_{13} \cdot \vartheta \cdot b^3 h \beta.$$

Summing up the torques  $M_\sigma$  and  $M_\tau$ , we obtain the total torque

$$\begin{aligned} M_c = M_\tau + M_\sigma &= G_{13} b^3 h \beta \vartheta + \frac{1}{360} E_3 b h (b^4 + h^4) \vartheta^3 = \\ &= G_{13} b^3 h \beta \vartheta \left[ 1 + \frac{1}{360} \frac{E_3}{G_{13}} \frac{1}{b^2} \frac{1}{\beta} (b^4 + h^4) \vartheta^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Evidently, this total torque  $M_c$ , which is necessary to produce the angle of twist  $\vartheta$ , is greater than the "linear" torque  $M_\tau$ .

For a narrow rectangle, for which  $h^4 \gg b^4$ , this expression is somewhat simplified to become

$$M_c = G_{13} b^3 h \beta \vartheta \left[ 1 + \frac{1}{360} \cdot \frac{E_3}{G_{13}} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{h^4}{b^2} \vartheta^2 \right]. \quad (4.4)$$

As a matter of fact, experiments have confirmed the occurrence of increased rigidity of a twisted bar with increasing angle  $\vartheta$ . This "stiffening" effect is due to the necessity of producing in the bar additional longitudinal stresses ( $\sigma_r$ ), besides the necessity of producing a state of "pure torsion" ( $\tau$ ).

From these considerations it also follows that, for instance, a tension uniformly distributed over the entire cross-section will influence the angle of twist of the bar. Such a force will additionally stiffen the bar against torsion. This can easily be shown by means of the following considerations.

Let us assume that uniform tensile stress  $\sigma_3$  is acting on the rectangular section under consideration. The former condition (2.12) has now to be replaced by

$$\int_A \sigma_r \cdot dA = \sigma_3 \cdot bh. \quad (4.5)$$

If here  $\bar{\sigma}_r$  from (2.11) is introduced, we obtain

$$E_3 \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \frac{1}{2} \vartheta^2 r^2 - \bar{\varepsilon}_0 \right) \cdot dx dy = \sigma_3 bh. \quad (4.6)$$

Hence the following value is obtained for  $\bar{\varepsilon}_0$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_0 &= \frac{1}{2A} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \vartheta^2 (x^2 + y^2) dx dy - \frac{\sigma_3}{E_3} = \\ &= \frac{1}{24} \vartheta^2 (b^2 + h^2) - \frac{\sigma_3}{E_3}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

The stresses, variable from fibre to fibre, are now found to be

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{2} E_3 \vartheta^2 \left( r^2 - \frac{b^2 + h^2}{12} \right) + \sigma_3. \quad (4.8)$$

If similar assumptions are made for the direction of the stresses  $\sigma_3$  as previously, the resultant torque  $\bar{M}_\sigma$  is

$$\begin{aligned} \bar{M}_\sigma &= \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{\sigma}_r \vartheta_r \cdot r \cdot dx dy = \\ &= \frac{1}{360} E_3 \vartheta^3 bh (b^4 + h^4) + \frac{1}{12} \sigma_3 \vartheta bh (b^2 + h^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

If now  $M_\tau$  is added to  $\bar{M}_\sigma$ , we obtain the total torque  $\bar{M}_c$ , which will take the following form replacing (4.3)

$$\begin{aligned} \bar{M}_c &= M_\tau + \bar{M}_\sigma = G_{13} b^3 h \beta \vartheta + \frac{1}{360} E_3 bh (b^4 + h^4) \vartheta^3 + \\ &+ \frac{1}{12} \sigma_3 bh (b^2 + h^2) \vartheta = G_{13} b^3 h \beta \vartheta \left[ 1 + \frac{1}{360} \frac{E_3}{G_{13}} \frac{1}{\beta} \frac{1}{b^2} (b^4 + h^4) \vartheta^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{12} \frac{\sigma_3}{G_{13}} \frac{1}{\beta} \frac{1}{b^2} (b^2 + h^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

This is now the total torque necessary to produce an angle of twist  $\vartheta$  if, in addition to "pure torsion" ( $\tau$ ), also the "secondary" longitudinal stresses ( $\sigma_r$ ), as well as the additionally acting longitudinal stresses ( $\sigma_3$ ) are taken into consideration.

For a narrow rectangle ( $h^4 \gg b^4$ ), this expression is simplified to become

$$\bar{M}_c = G_{13} b^3 h \beta \vartheta \left[ 1 + \frac{1}{360} \frac{E_3}{G_{13}} \frac{h^4}{\beta} \frac{\vartheta^2}{b^2} + \frac{1}{12} \frac{\sigma_3}{G_{13}} \frac{1}{\beta} \frac{h^2}{b^2} \right]. \quad (4.11)$$

It is evident that, similarly to the case of an isotropic bar [19], the additional longitudinal stress in a flat strip with large ratio  $\gamma = h/b$  may considerably reduce the value of the angle of twist  $\vartheta$ .

## 5. Practical Conclusions

Let us consider the total effect of all the above phenomena and compare their influence on the torsion of anisotropic to that of isotropic rectangular bars, for large angles of twist  $\vartheta$ .

(1) In twisted isotropic rectangular bars the maximum shear stress  $\tau_{\max}$  occurs always in the middle of the longer side, that is, at the contour point



of minimum distance from the axis of the bar,<sup>13</sup> whereas the greatest tensile stress  $\sigma_{\max}$  occurs in fibres located at the greatest distance from this axis, that is, in the corners. Hence no local coincidence of the stresses  $\tau_{\max}$  and  $\sigma_{\max}$  takes place.

It is true that in flat bars (with considerable ratio  $\gamma = h/b$ ) the stresses  $\sigma_B$  in the middle of the shorter sides (point  $B$ ), although smaller than those in the corners,  $\sigma_{\max}$ , may still be considerable so that the "reduced" ("effective") stress,  $\sigma_{\text{red}}$ , should be studied at these points.<sup>14</sup> It may turn out that  $\sigma_{\text{red}}$  is greater than the reduced stress due to  $\tau_{\max}$  or  $\sigma_{\max}$ .

Quite different may be the case of an anisotropic rectangular bar under torsion. Here, the stress  $\tau_{\max}$  may occur, depending on the ratio of the sides  $h/b$  and that of the moduli  $G_{13}/G_{23}$  [expressed collectively by the value of the parameter  $\delta$  (6.9)], in the middle of the longer or shorter side.

In the first case, the distribution of stresses and their extremum values will be, similarly to the extremum values of the reduced stress, analogous to the case of isotropic bars.

If, however,  $\tau_{\max}$  occurs in the middle of the shorter side  $B$ , then, especially in the case of a narrow rectangle, the longitudinal stress  $\sigma_B$  at this point will be but very little smaller than  $\sigma_{\max}$  occurring in the corner which is close to it. Then the reduced stress at  $B$  may turn out to be dangerous, the more so that we are concerned with a simultaneous occurrence of shear and tension (a disadvantageous combination).

(2) The values of longitudinal stresses  $\sigma_r$  increase with the square of the angle of twist  $\vartheta$ . Thus they increase much quicker than the shear stresses  $\tau$  which are a linear function of the angle  $\vartheta$ .

For this reason, the values of longitudinal stresses  $\sigma_{\max}$  may, for greater  $\vartheta$ , be of the same order of magnitude as the values of shear stresses  $\tau_{\max}$ . This will occur if we are concerned with materials with a low shear modulus  $G$  (which leads to large  $\vartheta$ ) and with a disadvantageous orientation of the anisotropic structure ( $G_{23}$  large,  $G_{13}$  small).

Also in the case of narrow rectangles, the stress  $\sigma_{\max}$  may be high in relation to the stresses  $\tau_{\max}$  (and even exceed them), which may easily be evidenced by worked out numerical examples.

(3) The forms (4.3) and (4.4) show that in the case of narrow rectangles and large angles of twist  $\vartheta$ , the contribution of longitudinal stresses  $\sigma_r$  to the torque may be considerable, which is represented by the second term of these

<sup>13</sup> It has been shown by L. N. G. FILON [4] that points of the contour nearest to the axis of the bar are not always those of maximum stress. A deviation from this rule may take place, in particular, if the contour is not everywhere convex. This will be discussed in more detail in our separate paper dealing with a "concave" profile of a special type.

<sup>14</sup> A detailed analysis will be presented in the paper on elastic-plastic torsion with large angles of twist. (Cf. Section 1).

expressions; this term  $M_\sigma$  increases in direct proportion to  $\vartheta^3$ , whereas  $M_\tau$ , originating from the shear stresses, increases in direct proportion to  $\vartheta^1$ .

These relations have essentially been confirmed by experimental research [cf. point (7), below].

(4) It may be stated (which is in agreement with the results holding for isotropic bars, cf. [19]) that in the case of large angles of twist  $\vartheta$ , an additional uniform tensile stress acting on the cross section may be of considerable influence on that angle.

(5) The phenomena mentioned in (3) and (4) contribute to the "stiffening" of the bar against torsion and have found experimental confirmation [cf. point (7), below].

(6) For composite profiles such as I, Z or U used in engineering, the same argument may be applied. Such sections should be considered to be composed of an appropriate number of rectangles. This being an interesting engineering topic, it will be discussed separately. It is also possible to take into account the possible anisotropic properties of each of the component rectangles.

(7) Interesting results of experimental research are to be found in the paper by M. S. G. CULLIMORE [2]. The theoretical torque/twist curve and that obtained experimentally are in good agreement.

(8) It may be added that the consideration of longitudinal stresses may be advisable if we analyze torsional buckling. From what was said it follows also that the rigidity against this type of instability will be improved if the element is subject to a tensile force.<sup>15</sup>

## 6. Appendix to Section 3

### *(Linear Torsion of Anisotropic Bars)*

Following the ideas of B. de SAINT VENANT [16],<sup>16</sup> for solving the problem of elastic equilibrium of an anisotropic prismatic bar a semi-inverse method could be conceived.

However, the use of a stress function  $\Omega(x, y)$  appears to be simpler. The stress components are expressed, in the known way, as the first partial derivatives as follows

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}. \quad (6.1)$$

<sup>15</sup> Such conditions may be those of longitudinal tension members of a lattice or a roof truss if it is loaded perpendicularly between the nodes.

<sup>16</sup> Cf. also A. E. H. LOVE [9] and S. G. LEKHNITSKY [8].



A similar method was chosen by S. G. LEKHNITSKY [8] in the analysis of the same problem in somewhat different coordinates.<sup>17</sup>

The stress function  $\Omega(x, y)$  must satisfy the equation

$$\frac{1}{G_{23}} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{1}{G_{13}} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = -2\vartheta, \quad (6.2)$$

it being assumed, as stated above, that the axes  $x$  and  $y$  are directed normally to the symmetry planes of the orthotropic structure of the bar.

The boundary conditions require that the lateral surfaces of the rectangular parallelepiped be free from stresses. Consequently, as may easily be shown, the function  $\Omega$  itself cannot vary if we move along the boundary. In the case of simply connected regions, that is, as in our case, for solid bars, this constant boundary-value may be chosen as arbitrary. In what follows it will be assumed, on the four sides of the rectangle ( $x = \pm h/2$ ;  $y = \pm b/2$ ) to be zero.

One of the ways of reducing (6.2) to the equation

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1^2} = -2\vartheta G_1 \quad (6.3)$$

is the linear substitution<sup>18</sup>

$$x = x_1 \sqrt{\frac{2 G_{13}}{G_{13} + G_{23}}} = \frac{1}{a_x} x_1, \quad y = y_1 \sqrt{\frac{2 G_{23}}{G_{13} + G_{23}}} = \frac{1}{a_y} y_1, \quad (6.4)$$

owing to which the substitute modulus  $G_1$  is expressed by

$$G_1 = \frac{G_{23}}{a_x^2} = \frac{G_{13}}{a_y^2} = \frac{2 G_{13} G_{23}}{G_{13} + G_{23}}. \quad (6.5)$$

The symmetry condition in relation to the  $x$ -axis and the first of the boundary conditions (for  $x = \pm h/2$ ) will be satisfied if  $\Omega$  is assumed in form of the series

$$\Omega = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \cdot Y_{1n}(y_1) \cdot \cos \frac{n\pi x_1}{a_x \cdot b}, \quad (6.6)$$

where  $Y_{11}, Y_{13}, \dots$  are functions of  $y_1$  alone.

<sup>17</sup> The present approach seems to be convenient, for it enables us (the reference system coinciding with the symmetry axes of the bar) to make use of the symmetry conditions of all relevant functions.

<sup>18</sup> This linear transformation suggests a convenient possibility of generalizing the known membrane analogy (holding for isotropic bars) to problems of torsion of anisotropic bars. A generalization of this analogy to cases of anisotropy has been discussed in our papers [14]. The transformation in question can be performed in several ways. It follows that the above generalization is also possible in several variants.

We substitute now (6.6) into (6.3) of which the right-hand side may in turn be expressed in form of the series

$$- \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} 2 \vartheta G_1 \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n \pi x_1}{\alpha_x \cdot b}. \quad (6.7)$$

So we obtain a second order differential equation from which the functions  $Y_{1n}$  can be determined. On introducing it into (6.6) we obtain, finally, after some rearrangements, the following final expression for  $\Omega$

$$\Omega = \frac{8 \vartheta G_{23} h^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh \frac{n \pi \mu y}{h}}{\cosh \frac{n \pi \mu b}{h}} \right] \cos \frac{n \pi x}{h}, \quad (6.8)$$

where

$$\gamma = \frac{h}{b}, \quad \mu = \frac{\alpha_y}{\alpha_x} \sqrt{\frac{G_{13}}{G_{23}}}, \quad \delta = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{13}}} = \frac{\gamma}{\mu}. \quad (6.9)$$

The torque is obtained from the expression

$$M_\tau = 2 \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \Omega \cdot dx dy = C_\tau \vartheta, \quad (6.10)$$

where

$$C_\tau = G_{13} b^3 h \beta. \quad (6.11)$$

The stresses  $\tau_{xz}$  and  $\tau_{yz}$  are found from  $\Omega$  (6.8) as its first derivatives according to (6.1). We do not quote here the corresponding general expressions as we are mainly interested in the greatest values of the stresses. These occur at the points  $H$  in the middle of the (longer) sides  $h$ , that is for  $x = 0$ ,  $y = \pm b/2$ ; and for the points  $B$  lying in the middle of the (shorter) sides  $b$ , that is for  $x = \pm h/2$ ,  $y = 0$ .

We have

$$\tau_{\max H} = \vartheta G_{13} b \beta \varkappa_H = \frac{M_\tau}{b^2 h} \varkappa_H \quad (6.12)$$

and

$$\tau_{\max B} = \vartheta \sqrt{G_{13} G_{23}} b \beta \varkappa_B = \frac{M_\tau}{b^2 h} \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{13}}} \varkappa_B. \quad (6.13)$$

The question as to which of these values is greater, will be decided upon by the ratio of sides ( $\gamma$ ) and the ratio of shear moduli ( $\mu$ ), on which depend the

<sup>19</sup> We find here an analogy to polar orthotropy where the stress distribution is decided upon by the ratio  $s = \sqrt{E_1/E_2}$ . Cf. our papers [11] and [12].



numerical values of the coefficients  $\beta$ ,  $\kappa_H$ , and  $\kappa_B$ . These auxiliary functions are given by the expressions

$$\beta = \frac{32 \delta^2}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( 1 - \frac{2 \delta}{n \mu} \tanh \frac{n \pi}{2 \delta} \right), \quad (6.14a)$$

$$\kappa_H = \frac{8 \delta}{\pi^2 \beta} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2} \tanh \frac{n \pi}{2 \delta}, \quad (6.14b)$$

$$\kappa_B = \frac{\delta}{\beta} \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cosh \frac{n \pi}{2 \delta}} \right]. \quad (6.14c)$$

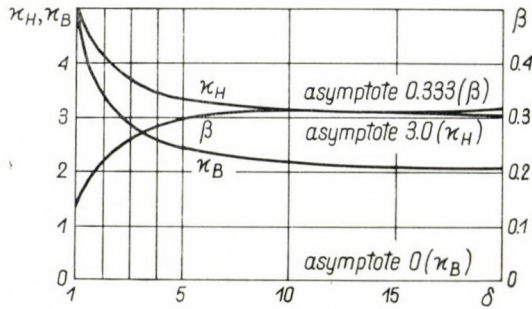


Fig. 6

The functions  $\beta$ ,  $\kappa_H$  and  $\kappa_B$  are represented graphically in Fig. 6 depending on the parameter  $\delta$  from the equation (6.9) for its values are greater than unity.<sup>20</sup>

With the above results, the following statement can be made. In isotropic rectangular bars subject to torsion, the maximum shear stresses will always occur at the middle points of the longer side of the rectangle. Therefore, for  $h > b$ , we find  $\tau_{\max H} > \tau_{\max B}$ . For a specified torque ( $M_t$ ) and a specified material ( $G$ ), the maximum shear stress  $\tau_{\max H}$  will depend on the ratio  $\gamma = h/b$ .

In anisotropic bars, in addition to the ratio mentioned, the ratio  $\mu = \sqrt{G_{13}/G_{23}}$  will be involved, as stated above. The maximum value of the shear stress may occur either in the middle of the longer side  $H$ , or in the middle of the shorter side  $B$ . The question as to which one of these cases is relevant, is decided upon by the parameter  $\delta$  known from definition (6.9). This parameter characterizes both the geometric features of the bar and its mechanical properties; it is of decisive influence on the distribution and intensity of the shear stresses.

<sup>20</sup> This implies no limitation on the applicability of the expressions obtained. For  $\delta < 1$ , we have only to change appropriately the notations, which is always possible. Cf. for instance [8].

In the analysis of the non-linear torsion problem another presentation of (6.12) and (6.13) may be of use. These results can be expressed in the common form

$$\tau_{\max} = \vartheta G_{13} b \cdot \lambda(\delta), \quad (6.15)$$

where  $\lambda(\delta)$  is a function of the ratios  $\gamma = h/b$  and  $\mu = \sqrt{G_{13}/G_{23}}$ . This function may easily be found when using the previous results. It is expressed by

$$\lambda(\delta)_H = \beta \kappa_H \quad \text{or} \quad \lambda(\delta)_B = \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{13}}} \beta \kappa_B. \quad (6.16)$$

Then, for the angle of twist  $\vartheta$  we obtain the expression

$$\vartheta = \frac{\tau_{\max}}{G_{13} \cdot b \cdot \lambda(\delta)} \quad (6.17)$$

which was used, as we remember, in Section 3.

#### REFERENCES

1. BERGMAN, S.—REISSNER, H.: *Ztschr. Flugtechn. Motorluftsch.*, 1929, No. 18; 1930, No 12.
2. CULLIMORE, M. S. G.: *Res. Eng. Struct., Suppl.*, Butterworths Sc. Publ., London 1949.
3. ДИННИК, А. Н.: Устойчивость упругих систем, Акад. Наук СССР, Москва—Ленинград 1950.
4. FILON, L. N. G.: *Phil. Trans. A.*, vol. 193, 1900, p. 309.
5. GECKELER, J. W.: *Hdb. f. Phys.*, vol. 6, Springer, Berlin 1928.
6. GREENHILL, A. G.: *Proc. Inst. Mech. Engl.*, 1883, 183.
7. HEARMON, R. F. S.: *The Elasticity of Wood and Plywood*, London 1948.
8. ЛЕХНИЦКИЙ, С. Г.: Теория упругости анизотропного тела, Огиз, Москва—Ленинград 1958.
9. LOVE, A. E. H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Ed., New York 1944.
10. НОВОЖИЛОВ, В. В.: Основы нелинейной теории упругости, Огиз, Ленинград—Москва 1948.
11. OLSZAK, W.: *Bauing.* 1936, No 31, 32.
12. OLSZAK, W.: *Bull. Internat., Pol. Akad. Um., Ser. A*, 1950, No 10. *Prace techn., Tow. Nauk. Warsz.* 1951.
13. OLSZAK, W.: *Arch. Mech. Stos.*, 1950, No 3.
14. OLSZAK, W.: *Arch. Mech. Stos.*, 1953, No 1; *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 1953, No 1, 2.
15. SCHWERIN, E.: *Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech.*, 1945, p. 235.
16. DE SAINT VENANT, B.: *Mém.* vol. 14, 1856; *C. R.* vol. 88, 1879.
17. SNEDDON, I. N.: *The Classical Theory of Elasticity*, *Encycl. Phys.*, vol. 6, Springer 1958.
18. TIMOSHENKO, S. P.: *Theory of Elasticity*, New York, 1940.
19. TIMOSHENKO, S. P.: *Strength of Materials*, 2nd Ed., 1948.
20. WEBER, C.: *V. D. I. Forschungsarb.* No 249, Berlin 1921
21. WIERZBICKI, W.: *AIPC, Mém.* vol. 4, p. 639.

Note: During proofreading I have learned about the criticism advanced by M. REINER (1964) in connection with the theory of C. WEBER—S. P. TIMOSHENKO (*I. J. T.*, 2/3). We shall revert to the matter in the announced second part of the present paper (cf. also our paper *Arch. Inż. Lad.*, in print). (31. May, 1965).



## ÜBER DIE TORSION VON ANISOTROPEN STÄBEN

W. OLSZAK

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit untersucht eine nicht-lineare Erscheinung, die in tordierten anisotropen Stäben auftreten kann. Die Analyse stützt sich auf eine vereinfachte Theorie, die von C. WEBER's Vorschlag, gültig für isotrope Stäbe, ausgeht.

Das Auftreten und die Verteilung von Längsspannungen und der damit verbundene Verkürzungseffekt werden untersucht sowie der Zuwachs der Torsionssteifigkeit, verursacht durch die Existenz der Längsspannungen. Praktische Schlußfolgerungen werden gezogen, die das Verhalten der anisotropen Stäbe demjenigen der isotropen Stäbe gegenüberstellen. Im Anhang wird kurz die lineare Theorie des tordierten anisotropen prismatischen Stabes unter Anwendung einer Spannungsfunktion in Erinnerung gebracht.

## SUR LA TORSION DES BARRES ANISOTROPES

W. OLSZAK

## RÉSUMÉ

L'étude traite d'un effet non-linéaire créé dans des barres anisotropes prismatiques fortement tordues. L'analyse s'appuie sur une théorie simplifiée, analogue à celle de C. Weber pour des barres anisotropes.

L'apparition et la distribution des contraintes longitudinales et l'effet de raccourcissement sont étudiés, ainsi que l'augmentation de la rigidité de torsion, due à la création des contraintes longitudinales. Des conclusions pratiques opposant le comportement des barres anisotropes à celui des barres isotropes sont formulées. En annexe, on trouve un aperçu de la théorie linéaire d'une barre anisotrope prismatique de section rectangulaire soumise à la torsion. Cette théorie est basée sur l'emploi d'une fonction de tension.

## ТОРСИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В. ОЛШАК

## РЕЗЮМЕ

В работе исследуется нелинейное явление, которое может возникнуть в тордированных анизотропных стержнях. Анализ основывается на упрощенной теории, которая по предложению Ц. Вебера подходит для анизотропных стержней.

Возникновение и распределение продольных напряжений и связанный с этим эффект укорочения подвергаются изучению, как и прирост глубины торсионности, зависящей от существования продольного напряжения. Делаются практические выводы, в которых поведение анизотропных стержней противопоставляется изотропным стержням. В приложении кратко упоминается о функции напряжения в применении к линейной теории тордированного анизотропного призматического стержня.





# DIE UNGARISCHE UND DIE INTERNATIONALE WEITERENTWICKLUNG DER 50 HZ-VOLLBAHNFAHRZEUGE\*

F. RATKOVSKY

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Der Verfasser schildert die Schwierigkeiten, die sich seinerzeit der Verbreitung der in der ganzen Welt zuerst in Ungarn in den Jahren 1923—1930 entwickelten und in Betrieb genommenen 50 Hz-Bahnelektrifizierung (System Ganz—Kandó) entgegengestellt haben. Diese Schwierigkeiten wurden durch die i. d. J. 1938—1944 ebenfalls in Ungarn entwickelten und gebauten, für beliebige Leistungen und Geschwindigkeiten geeigneten zeitgemässen Periodenumformer-Fahrzeuge, ferner die von den Französischen Staatsbahnen 1950—1955 durchgeführten großangelegten Versuche sowie die von den französischen und anderen ausländischen Bahnen und Herstellerfirmen entwickelten Ignitron-Lokomotiven vollends beseitigt. Der Verfasser vergleicht die technischen Daten der nach dem Krieg in Ungarn leider nicht glücklich gewählten Periodenumformer-Lokomotiven mit Schleifringanker-Fahrmotoren und 5 festen Geschwindigkeitsstufen bzw. deren Betriebserfahrungen mit den Daten der von den Französischen Staatsbahnen bestellten und im Betrieb sehr gut bewährten Periodenumformer-Lokomotiven mit verlustlos regelbaren Käfiganker-Fahrmotoren sowie mit den damit erzielten Erfahrungen. Die durch die falsche Typenwahl in den Jahren 1947—48 verursachten Schäden der ungarischen Bahnelektrifizierung und der Lokomotivindustrie werden erwähnt.

Der Verfasser betont die entscheidende Wichtigkeit der von den Französischen Staatsbahnen und den französischen Fabriken geleisteten großzügigen Entwicklungsarbeit, welche schließlich durch Entwicklung der Ignitron-Lokomotiven endgültig die Frage des wirtschaftlichen Bahnelektrifizierungssystems zu Gunsten des von Ungarn schon vor 30 Jahren entwickelten und verwirklichten 50 Hz-Systems entschieden hat, dessen Übergewicht zufolge der Entwicklung der neuesten Trockengleichrichter-(Si-)Lokomotiven noch entscheidender geworden ist. Zum Schluß weist er noch auf eine weitere Entwicklungsmöglichkeit der 50 Hz-Lokomotiven hin, welche eventuell ermöglichen wird, die Vorteile der Siliziumgleichrichter und die der Kurzschlußläufermotoren in Zukunft in den 50 Hz-Fahrzeugen zu vereinigen, welche Lösung die einfachsten und betriebssichersten elektrischen Fahrzeuge der Zukunft darstellen wird.

## I. Einleitung

Das Thema der im Jahre 1952 gehaltenen ersten Antrittsvorlesung\*\* des Verfassers war die 50 Hz-Bahnelektrifizierung, einerseits deshalb, weil Ungarn — das mit der im Jahre 1898 begonnenen Elektrifizierung der Valtellinabahn in der Elektrifizierung mit Hochspannung der Hochleistungs-Bahnen in der ganzen Welt an erster Stelle stand — durch die in den Jahren 1931—1932 nach dem System Ganz-Kandó durchgeführte Elektrifizierung der zweigeleisigen Hauptstrecke Budapest—Hegyeshalom Pionier der 50 Hz-Elektrifizie-

\* Zusammenfassung der von F. RATKOVSKY, Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, am 3. Dezember 1961 gehaltenen Antrittsvorlesung.

\*\* *Acta Techn. Hung.* 4 (1952), H. 1—4.

rung war, andererseits, weil Ungarn seine führende Rolle in der zeitgemässen Weiterentwicklung der 50 Hz-Lokomotiven auch von 1935 bis 1950 beibehalten hatte.

Die vorliegende zweite Antrittsvorlesung wünschte der Verfasser über den gleichen Themenkreis zu halten, einerseits deswegen, weil die 50 Hz-Bahnelektrifizierung wegen ihrer großen wirtschaftlichen Bedeutung sowohl international als auch in Ungarn im Brennpunkt des Interesses steht, andererseits weil der Verfasser die mit den in Ungarn erfundenen Periodenumformer-Lokomotiven erzielten Ergebnisse auf Grund der jetzt schon verfügbaren *tatsächlichen betriebsstatistischen Daten* zur allgemeinen Kenntnis bringen möchte, und schließlich deswegen, weil er auf weitere — wiederum ungarischer Initiative zu verdankende — Entwicklungsmöglichkeiten der heute schon in der ganzen Welt siegreichen 50 Hz-Fahrzeuge kurz hinweisen möchte.

## II. Die Entwicklung der 50 Hz-Bahnelektrifizierung vor dem zweiten Weltkrieg

Einleitend möchte der Verfasser bezugnehmend auf das in seiner ersten Antrittsvorlesung Gesagte, allgemein die Entwicklung des 50 Hz-Systems schildern.

Es ist in der ganzen Welt allgemein bekannt, daß Bahnbrecher des 50 Hz-Bahnelektrifizierungssystems Ungarn war, wo auf Grund der zukunftsreichen Konzeption und Konstruktion von K. KANDÓ bereits *vor 30 Jahren* die Hauptstrecke Budapest—Hegyeshalom mit 50 Hz elektrifiziert wurde, wodurch es sämtliche übrige Länder der Welt um mehr als *20 Jahre überholte*, denn jene haben diese Periode erst nach 1952 begonnen.

Wie bekannt, hat KANDÓ im Jahre 1918 angefangen seine Ideen bereits zu konkretisieren. Nach dem ersten Weltkrieg, in den zwanziger Jahren, wurden die ersten 50 Hz-Versuchslokomotiven mit großer Leistung gebaut; im Jahre 1923, vor cca 40 Jahren, wurde bereits die erste 50 Hz-Versuchsstrecke Budapest—Alag in Betrieb genommen, deren Ergebnisse die Elektrifizierung der ganzen Hauptstrecke Budapest—Hegyeshalom ermöglichten, welche im Jahre 1932 in Betrieb genommen wurde.

Seit den zwanziger Jahren vertraten K. KANDÓ und L. VEREBÉLY — denen sich anfangs der dreißiger Jahre auch der Verfasser, als damaliger technischer Leiter der Elektrischen Fabrik Ganz, anschloß — entgegen der damals allgemeinen technischen Fachmeinung aufs entschiedenste den Standpunkt, daß die *einzig mögliche Zukunft* der wirtschaftlichen Bahnelektrifizierung *das 50 Hz-System sei, und zwar wegen der in entscheidendem Maße kleineren Investitionskosten*. Das größte Hindernis der Bahnelektrifizierung, welche bekanntlich sehr große Einsparungen an Kohle mit sich bringt



und die Ausnutzungsmöglichkeit der Strecken bedeutend erhöht, war immer — wie ebenfalls bekannt ist — daß sie hohe Investitionskosten beansprucht. Die Verbreitung der Elektrifizierung kann daher in der ganzen Welt entscheidend beschleunigt werden, wenn die Investitionskosten bedeutend verringert werden können, und eben diesen entscheidenden Vorteil sicherte das 50 Hz-System.

Damit soll nicht gesagt werden, daß seinerzeit die Elektrifizierung mit 16  $\frac{2}{3}$  Hz und mit Gleichstrom nicht richtig war; im Gegenteil möchte der Verfasser feststellen, daß zur Zeit, als Deutschland, Österreich, die Schweiz, Frankreich, Schweden, Italien usw. mit der Elektrifizierung in größerem Maße begannen — also vor und unmittelbar nach dem ersten Weltkrieg — sie die Elektrifizierung *richtiger Weise* mit 16  $\frac{2}{3}$  Hz oder Gleichstrom *begonnen und fortgesetzt* haben, weil zu dieser Zeit 50 Hz-Fahrzeuge mit entsprechenden Eigenschaften noch bei weitem nicht zur Verfügung standen, und die Leistungsfähigkeit der Landesnetze ebenfalls noch nicht die Anwendung von 50 Hz berechtigten.

Zu dieser Zeit nämlich — vor und unmittelbar nach dem ersten Weltkrieg — waren die 50 Hz-Landesnetze noch wenig entwickelt; einerseits überquerten sie die Staatsgebiete noch nicht in genügendem Maße, andererseits waren ihre Leistungen zu klein, um die für die Eisenbahn unbedingt nötige Betriebssicherheit gewährleisten zu können. Es war daher damals berechtigt, daß die Bahnen zwecks Erreichung der unbedingten Betriebssicherheit möglichst eigene Netze und Kraftwerke mit hoher Leistung zu bauen und aufrechtzuerhalten wünschten. Im Falle eines eigenen Netzes war der verbrauchte Strom unabhängig vom 50 Hz-Landesnetz, und so konnten die Bahnen ein System wählen, für welches entsprechende Fahrzeuge von hoher Leistung und Geschwindigkeit nach dem *damaligen* Stand der Technik schon in einwandfreier Qualität zur Verfügung standen. Mit Rücksicht auf diese Umstände wählten die Staatsbahnen der einzelnen Länder damals *richtig* das 16  $\frac{2}{3}$  Hz- oder das Gleichstrom-System.

Als Ungarn die Hauptstrecke Budapest—Hegyeshalom elektrifizierte, waren diese Gesichtspunkte noch größtenteils gültig, sowohl was die Ausdehnung und Leistung der Netze, als auch was die Fahrzeuge anbelangt. Man muß sich nämlich darüber im klaren sein, daß die Kandó-Lokomotive — die erste 50 Hz-Hochleistungslokomotive der Welt — eine geniale Schöpfung darstellt und einen bahnbrechenden Schritt bedeutete, die den ungarischen Verhältnissen *damals* auch vollkommen entsprach, aber den gesteigerten Ansprüchen der ausländischen Vollbahnen — Leistung, Geschwindigkeit — *bei weitem nicht entsprechen konnte*. Die Staatsbahnen des Auslands gingen daher nach dem ersten Weltkrieg, und noch in den dreißiger Jahren — als die Strecke Budapest-Hegyeshalom schon in Betrieb war — richtig vor, wenn sie ihre Linien mit 16  $\frac{2}{3}$  Hz oder mit Gleichstrom elektrifizierten, denn 50 Hz-Lokomotiven



und Triebwagen mit ihren Zwecken entsprechenden Leistungen und Geschwindigkeiten waren damals überhaupt nicht zu beschaffen.

Es war das große Verdienst von K. KANDÓ und L. VEREBÉLY — denen sich zu Anfang der dreißiger Jahre auch der Verfasser in vollem Maße anschloß — daß sie einerseits eine den damaligen ungarischen Verhältnissen voll entsprechende Lösung wirklich zustande bringen konnten und andererseits hiemit den Prozeß der 50 Hz-Bahnelektrifizierung *in Gang brachten*. Es war nämlich nicht zweifelhaft, daß wenn das Interesse der Bahnen und der Großunternehmen der einzelnen Länder für die 50 Hz-Elektrifizierung entsprechend geweckt wird, die Entwicklung der 50 Hz-Fahrzeuge allgemein in Gang gesetzt wird und, daß infolgedessen die 50 Hz-Fahrzeuge — sowohl in bezug auf die technischen Eigenschaften als auch auf Wirtschaftlichkeit — die 16 2/3 Hz- und Gleichstrom-Fahrzeuge nicht nur rasch erreichen, sondern auch überholen werden, wie dies auch bereits geschehen ist.

In der ersten Antrittsvorlesung hat der Verfasser das System Ganz-Kandó und die Elektrifizierung der Hauptstrecke Budapest—Hegyeshalom eingehend beschrieben. Ebenso wurde die Weiterentwicklung des Systems geschildert, der Versuchsbetrieb auf der Höllentalbahn, weiter die mit großer Umsicht durchgeführten Versuche der Französischen Staatsbahnen auf der Strecke Ancey—Aix-les-Bains. Diese Zeit kann die erste Periode der Weiterentwicklung des 50 Hz-Systems genannt werden.

In der ersten Periode der Weiterentwicklung wurde der erste Schritt von der *Deutschen Reichsbahn*, gemeinsam mit der deutschen und schweizerischen Lokomotivindustrie damit getan, daß sie zu Versuchszwecken die *Höllentalbahn* mit 50 Hz elektrifizierte und in den Versuchslokomotiven vier verschiedene Systeme zur Anwendung brachte. Wie in der ersten Antrittsvorlesung eingehend dargelegt wurde, zeitigte der Versuch seinerzeit keine entsprechenden Ergebnisse. Die Eigenschaften der vier Versuchslokomotiven waren nicht so gut, daß sie den Wettbewerb mit den schon bewährten 16 2/3 Hz-Lokomotiven hätten aufnehmen können, und deswegen breitete sich die Elektrifizierung mit 50 Hz weder in Deutschland, noch in anderen Ländern weiter aus. Die Höllentalbahn blieb mit 50 Hz vorläufig auch weiterhin isoliert in Betrieb und wie bekannt, wurde sie in jüngster Vergangenheit richtigerweise auf 16 2/3 Hz umgebaut, im Einklang mit dem gesamten deutschen Bahnnetz.

Der zweite Schritt während der ersten Periode der Weiterentwicklung war die Erfindung und Entwicklung des *ungarischen Periodenumformer-Systems Ganz—Ratkovszky*, welches der Verfasser der ersten Antrittsvorlesung ebenfalls in allen Einzelheiten beschrieb, weswegen auf dessen Einzelheiten diesmal nicht eingegangen werden soll. Es möge nur bemerkt werden, daß während das System Kandó auf Grund der genialen Konzeption von KANDÓ die ungarischen Ansprüche der dreißiger Jahre einwandfrei befriedigen konnte, auf Grund der Erfahrung diese Konstruktion für Leistungen über etwa 2500 PS



und Geschwindigkeiten über 100 km/h nicht gebaut werden konnte. Deswegen war zur weiteren Verbreitung des 50 Hz-Systems in der Welt unbedingt die Entwicklung eines solchen 50 Hz-Fahrzeuges notwendig, welches die zeitgemässen Ansprüche hinsichtlich Leistung und Geschwindigkeit einwandfrei befriedigen konnte. Diesen Bedingungen entsprach in vollem Maße das in der Elektrischen Fabrik Ganz unmittelbar vor dem zweiten Weltkrieg bzw. während desselben entwickelte, mit  $\cos \varphi = 1$  arbeitende Periodenumformer-System, welches die wirtschaftliche Herstellung von Lokomotiven von *beliebiger Leistung und Geschwindigkeit*, in modernster Ausführung, ermöglichte. Nach diesem System wurden während des zweiten Weltkriegs ein Triebwagen und einige Lokomotiven mit einer Leistung von 4000 PS und 125 km/h Geschwindigkeit in Ungarn gebaut.

Zu dieser Zeit, Ende der dreißiger Jahre, war also Ungarn wieder *an der Spitze* in der Hz-Elektrifizierung bzw. im Bau von 50 Hz-Fahrzeugen.

### III. Die Weiterentwicklung des 50 Hz-Systems nach dem zweiten Weltkrieg

Die Weiterentwicklung der 50 Hz-Fahrzeuge wurde nach dem Weltkrieg weiter fortgesetzt, einerseits in Ungarn, wo weitere Strecken mit 50 Hz elektrifiziert wurden und weitere Fahrzeuge gebaut wurden, andererseits — in viel größerem Umfang — in Frankreich, wo die Staatsbahnen in Erkenntnis der Tatsache, daß die Weiterentwicklung der mit 1500 V Gleichstrom begonnenen Elektrifizierung wirtschaftlich unmöglich wurde, gezwungen waren, das System zu wechseln. Die Französischen Staatsbahnen studierten mit sehr großer Gründlichkeit die Wirtschaftlichkeit der verschiedenen Systeme und begannen großangelegte Versuche. Wie bekannt, wurde die Linie Ancey—Aix-les-Bains zu Versuchszwecken mit 50 Hz elektrifiziert, und im Jahre 1950 wurden für diese Versuchsstrecke verschiedene Typen von Lokomotiven und Triebwagen bestellt. Nach Erprobung dieser Lokomotiven und Triebwagen wurde auf Grund der günstigen technischen und wirtschaftlichen Ergebnisse beschlossen, die *weitere Elektrifizierung in Frankreich mit 50 Hz durchzuführen und 1952 begann die großangelegte 50 Hz-Elektrifizierung von Frankreich*, angefangen mit der Linie Valenciennes—Thionville, für welche die Französischen Staatsbahnen im Jahre 1952 einhundertfünf 50 Hz-Lokomotiven von großer Leistung bestellten.

Nachdem die Frage des wirtschaftlichsten Lokomotivtyps auch nach den Versuchen von Aix-les-Bains noch nicht endgültig entschieden werden konnte, bestellten die Französischen Staatsbahnen einerseits 65 Ward-Leonard-Lokomotiven von 2470 PS, welche zwar nicht den Anforderungen an die wirtschaftlichsten und modernsten Lokomotiven entsprachen, aber aus jahr-



zehntenlang bewährten Bauelementen bestanden und so unbedingt betriebs-sicher waren. Außerdem wurden aber im Interesse der zeitgemässen Ent-wicklung noch 20 *Periodenumformer-Lokomotiven* von 4100 PS, 15 *Wechsel-strom-Kommutatormotor-Lokomotiven* von 3000 PS und 5 *Ignitron-Lokomotiven* von 3450 PS bestellt in der Absicht, nach entsprechenden Erfahrungen aus diesen den am besten entsprechenden Typ auszuwählen. Wie auch aus der bestellten Stückzahl ersichtlich ist, hielten *die Französischen Staatsbahnen zu dieser Zeit die in Ungarn erfundene und entwickelte Periodenumformer-Lokomotive* mit Käfiganker-Fahrmotoren, *System Ganz—Ratkowszky*, für den am besten entsprechenden Typ.

Die Versuchslokomotiven von Anney und die mit ihnen erzielten Ergeb-nisse hat der Verfasser schon in seiner ersten Antrittsvorlesung eingehend behandelt, daher möchte er auf sie jetzt nicht im einzelnen eingehen. Die Antrittsvorlesung von 1952 schloß mit der Schlußfolgerung, daß aller Wahr-scheinlichkeit nach, neben der Periodenumformer-Lokomotive die größte Zukunft für die Gleichrichter-Lokomotive vorausgesehen werden kann. Gegen-über diesen Systemen wird die Ausführung mit Wechselstrom-Kommutator-motoren immer mehr in den Hintergrund gedrängt werden, wobei die Typen mit Periodenumformern und die mit Gleichrichtern wahrscheinlich eine Zeit lang parallel zur Anwendung gelangen werden, bis die Erfahrungen zu Gunsten des einen Typs — und zwar wahrscheinlich zu Gunsten des Typs mit Gleich-richter — die Frage endgültig entscheiden werden. In der jetzigen Antritts-vorlesung möchte sich der Verfasser mit der zu diesem Zeitpunkt begonnenen Entwicklung und ihren Ergebnissen, weiterhin mit den Zukunftsaussichten befassen.

Es muß festgestellt werden, daß die Entwicklung auch dementsprechend verlaufen ist: im Anfang wurden das Periodenumformersystem und das Gleich-richtersystem nebeneinander bestellt (im Verhältnis von 20 : 5 zu Gunsten des Periodenumformersystems), dann kam auf Grund der Versuchsergebnisse das Gleichrichtersystem an führende Stelle, während die Kommutator-Aus-führung vollkommen in den Hintergrund gedrängt wurde.

#### IV. Die Entwicklung der 50 Hz-Bahnelektrifizierung in Ungarn nach dem zweiten Weltkrieg

Wie schon erwähnt, entwickelte sich zur gleichen Zeit auch in Ungarn die 50 Hz-Elektrifizierung. Die Elektrifizierungsarbeiten auf der 200 km langen Hauptstrecke Budapest—Miskolc wurden begonnen und die Regierung — in Erkenntnis der überragenden Bedeutung der Elektrifizierung — beschloß die Elektrifizierung von zahlreichen weiteren, von Budapest ausgehenden Hauptstrecken. Zu gleicher Zeit begann der Bau der Prototypen der BoCo-



Periodenumformer-Lokomotiven von 3200 PS, 125 km/h Höchstgeschwindigkeit mit 5 Geschwindigkeitsstufen, an die sich die Fabrikation einer seinerzeit auf ungefähr 30 Stück geplanten Serie anschloß.

Leider war der — entgegen der Meinung des Verfassers — von der ungarischen Industrie gewählte und in Bau genommene Lokomotivtyp mit Flüssigkeitsanlasser, mit 5 festen Geschwindigkeiten und mit Schleifringmotoren — welcher Typ im weiteren kurz BoCo genannt wird, wobei unter dieser Bezeichnung außer der Achsenanordnung auch das elektrische System der Lokomotive verstanden werden soll — die *am wenigsten* entsprechende Ausführung des Periodenumformersystems.

Der 1949 in Fabrikation genommene BoCo Typ war weder *technisch* noch betreffs ihrer *Traktionseigenschaften*, noch vom Standpunkt der *Betriebsicherheit* entsprechend.

Dieser Typ wurde mit Flüssigkeitsanlasser für 5 feste Geschwindigkeiten gebaut und konnte schon deswegen nicht den internationalen Anforderungen entsprechen. Außerdem war seine Anfahrzugkraft auch ungenügend wegen der sehr ungünstigen Adhäsionseigenschaften des gewählten Systems (widerstandsangelassene asynchrone Schleifringankermotoren).

Wegen des außerordentlich verwickelten Aufbaus jedoch blieb auch die Betriebssicherheit weit unter dem, was die viel einfacher aufgebauten, allgemein verwendeten Typen zu leisten imstande sind.

Wie bekannt, bestellten die Französischen Staatsbahnen bei der Firma Oerlikon 20 Stück Periodenumformer-Lokomotiven, die vollkommen gemäß dem, auch in Frankreich und Deutschland erteilten Patent Ganz—Ratkovszky von 1938 gebaut wurden. Nach dem gleichen System wurde in Ungarn schon im Jahre 1941 für die Ungarischen Staatsbahnen von der Fabrik Ganz ein Triebwagen von 600 PS gebaut. Da aber die ungarische Industrie das schon erteilte französische Patent leider nicht aufrecht erhielt, konnten die Französischen Staatsbahnen und die ausländischen Herstellerfirmen das Patent bedauerlicherweise ohne jede Gegenleistung an Ungarn und an dem Erfinder benützen.

Im Jahre 1952 betrachteten die Französischen Staatsbahnen dieses System als das beste und entwicklungsfähigste. Wenn Ungarn 1948 statt der unglücklich gewählten BoCo-Ausführung dasselbe System gewählt hätte — welches zweifellos die einzige zeitgemässe, wahrhaft wirtschaftliche Ausführung des Periodenumformer-Systems ist, und gemäß welchem ein Versuchsfahrzeug während des Weltkriegs in Ungarn auch hergestellt worden war — so hätte Ungarn am Vorabend der großen französischen Bahnelektrifizierung von neuem einen Welterfolg erringen können. Einerseits hätte Ungarn *seine in der ganzen Welt führende Rolle wenigstens bis 1955 aufrechterhalten können*, andererseits hätte Ungarn mit sicherem Erfolg *an den großen Lokomotivlieferungen für die Französischen Staatsbahnen in den Jahren 1952—1953 teilnehmen*



*können*. Es ist nämlich natürlich, daß in diesem Falle statt der Firma Oerlikon Ungarn total oder doch größtenteils die Lieferung der nach seinem *eigenen* Patent zu bauenden 20 Periodenumformer-Lokomotiven von einem Gesamtwert von etwa 6 Millionen Dollar vergeben bekommen hätte. Überdies wäre wegen dieser großen Lokomotivlieferung heute *Ungarn offenbar auch Mitglied der Europäischen Arbeitsgemeinschaft für den Bau von 50 Hz-Lokomotiven*, deren Mitglieder *all* die Firmen sind, welche die ersten großangelegten und erfolgreichen Lokomotivlieferungen für die Französischen Staatsbahnen durchführten. Damit hätte natürlich Ungarn im Ausland einen *moralischen und wirtschaftlichen Erfolg* von unabsehbarer Tragweite errungen.

Um eine klare Erkenntnis der Lage und der daraus folgenden Lehren zu ermöglichen, werden im nachstehenden einige Daten für den von der ungarischen Industrie 1947—48 leider falsch gewählten Typ BoCo und für die bei den Französischen Staatsbahnen in Betrieb befindliche — und ebenfalls Gegenstand einer ungarischen Erfindung bildende — Periodenumformer-Lokomotive mit Käfigankermotoren miteinander verglichen.

Es besteht kein Zweifel, daß bei der Inbetriebnahme der ersten von Oerlikon gebauten Periodenumformer-Lokomotive eine für die Firma Oerlikon unerwartete Schwierigkeit auftrat, welche die serienmäßige Inbetriebsetzung um ungefähr 2 Jahre hinausschob. Im Zusammenhang hiemit muß aber nachdrücklich betont werden, daß diese Schwierigkeit überhaupt nicht aufgetreten wäre, falls die Lokomotiven Ungarn geliefert hätte. Die ungarische Elektroindustrie hatte nämlich schon auf Grund der 1940 durchgeführten Berechnungen und Vorversuche diejenige Erscheinung festgestellt, welche die Firma Oerlikon nicht entsprechender Beachtung würdigte, nämlich, daß bei den beim Anfahren auftretenden ganz niedrigen Frequenzen der Ohmsche Widerstand der Motoren gegenüber dem induktiven nicht mehr vernachlässigt werden kann und daß deswegen die Anfahrzugkraft, bei Fehlen von entsprechenden Maßnahmen, ungenügend sein kann. Demgemäß wäre diese, bei der Inbetriebsetzung auftretende Schwierigkeit — wegen welcher die Motoren der Oerlikon-Lokomotiven und die Art des Anfahrens in kleinerem Maße geändert werden mußten — bei Lieferung aus Ungarn überhaupt nicht aufgetreten.

Abgesehen von diesen Anfangsschwierigkeiten, die ganz unbedeutende Kinderkrankheiten (wie Lagererwärmung, Isolationsfehler in den Schleifringen der Maschinengruppen, Fehler an Apparaten usw.) waren, haben sich bei den französischen Lokomotiven keine wesentlichen Fehler gezeigt. Diese Lokomotiven sind vom *Standpunkt der Bedienung die einfachsten* von allen, und auch nach Meinung der Französischen Staatsbahnen sind die Gesamteigenschaften *nach den Ignitron-Lokomotiven die zweit besten unter allen 50 Hz-Lokomotiven*, auch weit vor dem System mit Wechselstrom-Kommutatormotoren.

Während der inzwischen vergangenen Zeit sind die Periodenumformer-Lokomotiven der Französischen Staatsbahnen — nachdem die Firma die oben



erwähnten Fehler gänzlich beseitigt hat — fortlaufend in Betrieb genommen worden, sind derzeit in ständigem, einwandfreiem Gebrauch, und es stehen heute schon die tatsächlichen Betriebserfahrungen zur Verfügung.

Wenn man die kennzeichnendsten Eigenschaften der Typen BoCo und der von der Französischen Staatsbahnen gewählten nebeneinanderstellt, so ist folgendes festzustellen:

Das System *BoCo*

kann nur auf 5 festen Geschwindigkeitsstufen benützt werden;

das Anfahren und das Beschleunigen erfolgen bei *ungünstiger Adhäsion* mit *Flüssigkeitswiderstand* bei sehr großen Verlusten von 2000—2500 kW; wegen der komplizierten Konstruktion ist die Betriebssicherheit verhältnismäßig gering, die Instandhaltungskosten sind hoch.

Der von den *Französischen Staatsbahnen* gewählte Typ

kann mit *beliebiger Geschwindigkeit* bei gleicherweise *gutem Wirkungsgrad* fahren;

das Anfahren und das Beschleunigen bei *ausgezeichneter Adhäsion* sind gleicherweise verlustfrei;

das Bremsen bis zum Stillstand erfolgt durch *Rekuperation*;

die elektrischen Maschinen der Lokomotive sind *einfach* und *betriebs-sicher*.

Die hauptsächlichsten technischen und betrieblichen Daten der beiden Systeme sind die folgenden:

	Frankreich	BoCo
<i>Leistungsgewicht</i> der elektrischen Einrichtung	13,6 kg/PS	13,8 kg/PS
<i>Selbstkosten</i> Da der spezifische Preis der Phasenumformer- und Frequenzumformergruppe der BoCo-Lokomotive wegen der überaus verwickelten Konstruktion wesentlich höher ist als der der einfach aufgebauten Maschinen, sind die spezifischen Selbstkosten der BoCo um ungefähr 15—20% höher als die der Ausführung mit einfachen Maschinen	100%	115 ÷ 120%
<i>Max. Anfahrzugskraft</i> (ohne Schleudern)	cca. 35%*	cca. 27%
<i>Betriebsunfähige Tage</i> (wegen Fehler und Instandhaltung) pro Jahr**	11,8%	33,5%

Wie bekannt, erschien es zweckmäßig, den Bau der BoCo-Lokomotiven in Ungarn wegen ihrer ungünstigen Eigenschaften, des hohen Preises, der häufigen Defekte und der Instandhaltungsschwierigkeiten nach der Herstellung von 12 Lokomotiven, an Stelle der auf ungefähr 30 Stück geplanten ersten Serie, einzustellen.

\* Kann noch gesteigert werden.

\*\* Im 4. bzw. 10. Betriebsjahr des Systems.

Zwecks Deckung des dringendsten Bedarfs der Ungarischen Staatsbahnen ist zur Zeit, den Möglichkeiten entsprechend, der Bau von 30 Ward-Leonard-Lokomotiven von 1300 PS im Gang, und diesen werden noch weitere etwa 10—20 Ward-Leonard-Lokomotiven folgen, bei denen aber die Leistung bei im wesentlichen gleichem Gewicht auf 2000 PS gesteigert sein wird.

Heute kann offensichtlich schon festgestellt werden, daß in den Jahren 1947—48 die ungarische Industrie statt des Systems BoCo den Bau des von den Französischen Staatsbahnen 1952 richtig ausgewählten zeitmegässen und auch im *Weltniveau bewährten Typs* (von dem 1944 in Ungarn ein Probeexemplar schon fertig war) der Periodenumformer-Lokomotive hätte beginnen müssen. In diesem Falle hätte man statt der jetzt in Bau befindlichen 1300—2000 PS Ward-Leonard-Lokomotiven ungefähr im gleichen Gewicht und zum selben Preis BoBo Periodenumformer-Lokomotiven von ungefähr 2500—2700 PS — mit den besten Traktionseigenschaften — laufend bauen können, welche sowohl die heutigen, als auch die in nächster Zukunft auftretenden Ansprüche der Ungarischen Staatsbahnen vollkommen hätten befriedigen können.

Aus den technischen Daten der den Französischen Staatsbahnen gelieferten Ward-Leonard- und Periodenumformer-Lokomotiven kann nämlich, wie bekannt, festgestellt werden, daß aus dem gleichen Gewicht die Periodenumformer-Lokomotiven ungefähr 50% mehr Leistung herauszubringen imstande sind. Obwohl die thermische Beanspruchung der französischen Periodenumformer-Lokomotiven etwas höher war, als die der Ward-Leonard-Lokomotiven, macht die Mehrleistung, noch unter Berücksichtigung dieser Tatsache, mindestens 40% aus.

Zu dem Periodenumformer-System mit Käfigankermotoren — welches die einzig richtige Ausführung des Periodenumformer-Systems ist — muß noch bemerkt werden, daß zwar die heutigen Si-Gleichrichter-Lokomotiven zweifellos bedeutend moderner sind, ihr spezifisches Leistungsgewicht viel kleiner, und ihr Wirkungsgrad wesentlich höher ist, jedoch bis zu einer gewissen Lokomotivleistung der Unterschied in Wirtschaftlichkeit gegenüber dem mit  $\cos \varphi = 1$  betriebenen Periodenumformer-System verhältnismäßig klein ist, besonders unter ungarischen Verhältnissen. Es ist nämlich zu berücksichtigen, daß die Strecke Budapest—Hegyeshalom statt 25 kV mit 16 kV elektrifiziert ist, und bekanntlich genügt diese Spannung für stärkeren Verkehr von Gleichrichter-Lokomotiven nicht.

Dem wesentlich geringeren Leistungsgewicht und viel besseren Wirkungsgrad der Gleichrichter-Lokomotiven steht nämlich gegenüber, daß

der *Preis je Kilogramm Gewicht* der Periodenumformer-Lokomotiven mit Kurzschlußläufermotoren *wesentlich niedriger* ist;

das *Leistungsgewicht der Fahrmotoren viel kleiner* ist;

der Unterschied im Wirkungsgrad durch die wegen des Leistungsfaktors  $\cos \varphi = 1$  der Periodenumformer-Lokomotiven kleineren Fahrleitungs- und



Unterwerksverluste sowie durch die *Rekuperation* dieser Lokomotiven herabgesetzt wird;

die *Investitionskosten* der Strecken kleiner sind, wegen der Tatsache, daß zufolge des guten  $\cos \varphi$  die Zahl der benötigten Unterwerke wesentlich geringer ist.

Hiezu kommt noch der Vorteil des Systems mit Kurzschlußläufermotoren, daß sie bei *Talfahrten andauernd* und beim Bremsen bis zum Stillstand mit *Rekuperation* arbeiten.

Bei Berücksichtigung aller Umstände kann abschließend festgestellt werden, daß obzwar die Si-Gleichrichter-Lokomotiven unbedingt als *moderner* anzusehen sind, bei mittleren Lokomotivleistungen und bei für sehr schwere Güterzüge benötigten schweren Lokomotiven, in bezug auf Wirtschaftlichkeit der Unterschied verhältnismäßig gering ist. Deswegen kann für Strecken mit *sehr langen und stark geneigten Rampen* in gewissen Fällen das Periodenumformer-System sogar wünschenswert sein.

#### V. Die derzeitige stürmische Entwicklung des 50 Hz-Systems im Ausland

Im folgenden möchte der Verfasser die seit der ersten Antrittsvorlesung im Ausland eingetretene stürmische Entwicklung kurz schildern.

Wie bekannt, haben die Französischen Staatsbahnen im Jahre 1952 in 50 Hz-Ausführung — abgesehen von den 65 Ward-Leonard-Lokomotiven — 20 Periodenumformer-Lokomotiven, 15 Kommutatormotor-Lokomotiven, 5 Ignitron-Lokomotiven bestellt.

Wie schon aus den Zahlen festgestellt werden kann, haben die Französischen Staatsbahnen 1952 die größte Zukunft von den, nach dem ungarischen Patent gebauten Periodenumformer-Lokomotiven erwartet und am wenigsten waren sie der Zukunft der Ignitron-Lokomotiven vertraut. Die Betriebserfahrungen der Lokomotiven haben jedoch die Meinung betreffs der letzteren entscheidend verändert. Obwohl die Periodenumformer-Lokomotive nach Beseitigung der schon erwähnten Kinderkrankheiten auch auf Grund der praktischen Erfahrungen sich als *zweitbesten Lokomotivtyp* erwies, ist die Ignitron-Lokomotive auf Grund ihrer ausgezeichneten Eigenschaften an die Spitze vorgedrungen. Ihre Adhäsion war die möglichst beste, wesentlich besser als die der bis damals verwendeten Gleichstrom-Lokomotiven der Französischen Staatsbahnen.

Auf Grund der entscheidenden Vorteile der Ignitron-Lokomotiven (Adhäsion, kleineres Gesamtgewicht, um 40% kleineres Fahrmotorengewicht, Wirkungsgrad usw.) ließen die Französischen Staatsbahnen die Wechselstromkommutatormotor-Lokomotiven und sogar die Anwendung dieses Systems auf Triebwagen vollkommen fallen.

Die Gleichrichter-Lokomotiven haben nach ihrer Inbetriebnahme während einer ganz kurzen Zeitspanne (5 Jahre) die Welt zur Gänze erobert und wegen ihrer ausgezeichneten Eigenschaften jedes andere System von 50 Hz-Lokomotiven vollkommen verdrängt.

Das günstige Ergebnis der Ignitron-Lokomotiven hat deren stürmische weitere Vervollkommnung mit sich gebracht. Während z. B. die für Thionville bestellten Ignitron-Lokomotiven bei einem Gewicht von 84 t eine garantierte Leistung von 3450 PS aufwiesen, kann man heute schon mit dem gleichen Gewicht eine Leistung von 5400 PS sichern.

Auf Grund der mit den Ignitron-Lokomotiven erzielten ausgezeichneten Ergebnisse ist die *entscheidende Überlegenheit der 50 Hz-Elektrifizierung über die 16 2/3 Hz- und Gleichstromsysteme zu einer unbestreitbaren Tatsache geworden*. Heute wird nur noch diskutiert, wie die in einem Land nach einem anderen System begonnene Bahnelektrifizierung fortzusetzen ist. Dieses große Ergebnis ist, nach der von Ungarn geleisteten Pionierarbeit, zweifellos das *Verdienst der Französischen Staatsbahnen und Herstellerfirmen*.

Ungarn war nämlich zweifellos Bahnbrecher des 50 Hz-Systems, da die ungarische Strecke Budapest—Hegyeshalom den 50 Hz-Großbetriebselektrifizierungen der übrigen Länder um mehr als 20 Jahre zuvorgekommen ist. Jedoch konnte seinerzeit — obwohl die ungarische Industrie Lokomotiven mit den heimischen Verhältnissen vollkommen entsprechender Leistung und Geschwindigkeit auf Grund der genialen Ideen von KANDÓ produzieren konnte — dieser Typ den zeitgemäßen ausländischen Anforderungen an hohe Leistung und große Geschwindigkeit nicht entsprechen, und deswegen konnte seinerzeit das Ausland das 50 Hz-System nicht übernehmen. Unmittelbar vor dem sowie während des zweiten Weltkriegs konnte das in Ungarn erfundene Periodenumformer-System Ganz—Ratkovszky diese Schwierigkeit überwinden, und können noch heute — 25 Jahre nach der Erfindung des Systems — zeitgemässe Lokomotiven mit beliebiger Leistung und Geschwindigkeit nach dem System gebaut werden. Dieses System konnte sich jedoch infolge des Weltkriegs nicht verbreiten, sogar nicht einmal allgemein bekannt werden; deshalb konnte das 50 Hz-System im Weltmaßstab erst weitergelangen, als die Französischen Staatsbahnen dessen große Möglichkeiten erkannten und auf Grund von großangelegten Studien und Versuchen dessen allgemeine Anwendung beschlossen. Daß die aus Ungarn stammende 50 Hz-Elektrifizierung vom Zeitpunkt weitergelangte und heute unbestreitbar als das einzige System zu betrachten ist, welches in jedem Land gewählt werden muß, wo noch keine Elektrifizierung mit einem anderen System durchgeführt wurde, ist zweifellos Verdienst der Französischen Staatsbahnen und der französischen Herstellerfirmen.

Die Entwicklung der 50 Hz-Elektrifizierung hat in riesigem Ausmaß begonnen. Wie bekannt, wurde die Erprobung der ersten 5 Ignitron-Lokomotiven im Jahre 1955 begonnen. Bis 1960, während 5 Jahre haben allein die franzö-



sischen Firmen 530 Ignitron-Lokomotiven hergestellt, welche Tatsache zeigt, in welchem stürmischem Tempo die 50 Hz-Elektrifizierung zu diesem Zeitpunkt begonnen hat. Von den 530 Ignitron-Lokomotiven sind 340 Stück für die Französischen Staatsbahnen gebaut worden, 100 für Indien, 15 für Portugal, 50 für die Sowjetunion und 25 für China.

Außer den französischen Fabriken haben sich natürlich auch die Fabriken anderer Länder in die Versuchs- und in die Serienerzeugung der Ignitron-Lokomotiven eingeschaltet. So ist auch in der Sowjetunion eine größere Zahl von Ignitron-Lokomotiven im Bau (außer den importierten 50 Stück), weiterhin sind auch in Westdeutschland, der Schweiz und England Gleichrichter-Lokomotiven entwickelt und gebaut worden. Nach den Ignitron-Lokomotiven ist auch die Excitronausführung von neuem in den Vordergrund getreten, und heute können schon mit Ignitron-Lokomotiven und mit Excitron-Lokomotiven praktisch die gleichen Ergebnisse erzielt werden.

England, wo bisher die Bahnelektrifizierung nur geringfügig war, hat ebenfalls die Einführung des 50 Hz-Systems in gesamtstaatlichem Maßstab beschlossen und ein großangelegtes Elektrifizierungsprogramm aufgestellt.

Die Gleichrichter-Lokomotive, die in ihren technischen Eigenschaften und im Preis mit den  $16 \frac{2}{3}$  Hz-Lokomotiven vollkommen gleichwertig ist und sogar diesen gegenüber gewisse Vorteile aufweist, hat den von Ungarn ausgegangenen Gedanken der 50 Hz-Elektrifizierung in der ganzen Welt zum Siege geführt. Die Entwicklung ist jedoch auch hiemit nicht stehen geblieben.

Auf dem Gebiet der Gleichrichtertechnik sind seit langem Versuche durchgeführt worden, um die Quecksilbergleichrichter auszuschalten, teils wegen ihrer empfindlicheren Konstruktion teils wegen ihrer ziemlich großen Verluste.

Wie bekannt, hat mit Ausnützung der ausgezeichneten Eigenschaften der Halbleiter eine große Versuchstätigkeit begonnen mit dem Ziel, Trocken-gleichrichter zu entwickeln. Unter Verwendung von Germanium haben die Versuche sehr bedeutende Ergebnisse gebracht, und die Germaniumgleichrichter haben sowohl in Industrieanlagen, als auch in Fahrzeugen immer weitere Verbreitung gefunden.

Da das Germanium weitere Wege eröffnete, wünschten die Französischen Staatsbahnen auf dem Weg der Vervollkommnung der 50 Hz-Fahrzeuge weiter fortzuschreiten, obwohl sie mit dem Betrieb der Ignitron-Lokomotiven in höchstem Maße zufrieden waren. Deshalb bestellten sie 1956 zwei Triebwagen mit Germaniumgleichrichtern. Zu gleicher Zeit begann man auch in England den Bau einer größeren Anzahl von Triebwagen mit Germaniumgleichrichtern.

Die französischen Triebwagen kamen jedoch in dieser Form nicht mehr in Betrieb, da sich die Technik von neuem weiterentwickelte. Es wurden nämlich auch mit anderen Halbleitern Versuche geführt, und den Siemens-Schuckert-Werken gebührt das Verdienst, die, eine überaus schwierige Technologie erfordernden Siliziumgleichrichter entwickelt zu haben. Wegen ihrer her-



vorragenden Eigenschaften entwickelten sich die Siliziumgleichrichter überaus schnell, und außer den Pionieren Siemens—Schuckert, werden diese heute schon von anderen Firmen, wie z. B. AEG, BBC, Schneider-Westinghouse, General Electric Co ebenfalls in einwandfreier Qualität erzeugt. Die Entwicklung der Germanium- und Siliziumgleichrichter wurde auch in Ungarn begonnen, und sie wird mit großer Energie auch in der Sowjetunion und in der Tschechoslowakei vorgetrieben.

Auf vielen Gebieten der chemischen Industrie haben die Siliziumgleichrichter bereits die Quecksilberdampfumformer und die mechanischen Umformer verdrängt, während im Fahrzeugbau die Zukunft derzeit vollends den Siliziumgleichrichtern gehört.

Die Französischen Staatsbahnen bauten ihre zwei, ursprünglich mit Germaniumgleichrichtern bestellten Triebwagen auf Siliziumgleichrichter um, und diese kamen schon in dieser Ausführung in den Probebetrieb. Eine vorhandene Ignitron-Lokomotive von 5000 PS wurde ebenfalls auf Siliziumgleichrichter-ausführung umgebaut. Diese Lokomotive war schon im Jahre 1960 seit mehr als 2 Jahren einwandfrei im Betrieb. Während der zwei Jahre haben die Siliziumgleichrichter im Betrieb keinerlei Beschädigung erlitten und keinerlei Instandhaltung beansprucht.

In Deutschland wurde vor mehr als 2 1/2 Jahren vor 1960 eine Versuchs-Verschublokomotive mit Siliziumgleichrichtern — die erste Silizium-Lokomotive der Welt — für 16 2/3 Hz in Betrieb genommen. Während des Jahres 1960 haben 3 verschiedene Firmen, nämlich AEG, BBC und SSW je eine Versuchslokomotive von 4000 PS mit Siliziumgleichrichtern in Betrieb genommen, die für 50 Hz und 16 2/3 Hz gleichermaßen geeignet sind.

In England waren 1960 45 Germaniumgleichrichter-Triebwagen von 1200 PS in Betrieb, 1959 bestellten jedoch auch die Britischen Staatsbahnen 10 Silizium-Lokomotiven von 3000 PS, deren erstes Exemplar Ende des Jahres 1960 bereits in Betrieb gestellt wurde.

Im Jahre 1959 bestellte auch die Sowjetunion bei den Siemens—Schuckert Werken 20 Stück 6000 PS Silizium-Lokomotiven, und Ende des Jahres 1960 vergaben auch die Französischen Staatsbahnen eine Bestellung für 15 Stück Silizium-Lokomotiven.

Auf dem Gebiet der Siliziumgleichrichter-Lokomotiven begann eine stürmische Entwicklung und auf Grund der bisherigen Ergebnisse kann nicht bezweifelt werden, daß in den nächsten Jahren der Siliziumgleichrichter jeden anderen Gleichrichter (Ignitron, Excitron, Germanium) aus den Fahrzeugen verdrängen und die Alleinherrschaft übernehmen wird.

In der Geschichte der 50 Hz-Lokomotiven beginnt also, kaum 5 Jahre nach der riesigen Gebietseroberung durch die Ignitron-Lokomotiven, das Zeitalter der Silizium-Lokomotiven. Diese Lokomotiven behalten die sämtlichen guten Eigenschaften der Ignitron-Lokomotiven bei und beseitigen deren Nachteile.



Zwecks Deckung des einheimischen Bedarfs und für Exportzwecke wird auch die ungarische Industrie in naher Zukunft Silizium-Lokomotiven bauen, da sie mit der Europäischen Arbeitsgemeinschaft, in der die größten europäischen Firmen teilnehmen, wie AEG, BBC, Charleroi, Jeumont, Oerlikon, Schneider-Westinghouse, Siemens-Schuckert Werke, Ende des Jahres 1960 einen entsprechenden Lizenzvertrag abschließen konnte, laut welchem die ungarische Industrie, nach Übernahme der von der Europäischen Arbeitsgemeinschaft gelieferten 7 Lokomotiven, aus eigener Erzeugung den Ungarischen Staatsbahnen und für Exportzwecke Siliziumgleichrichter-Lokomotiven von 3000 PS mit Achsenanordnung B—B liefern wird. Damit wird Ungarn endlich — wenn auch nicht nach eigenem System wie früher, aber auf jeden Fall von neuem — Lokomotiven von *modernster* Ausführung serienmäßig erzeugen.

## VI. Zukünftige Möglichkeiten

Abschließend möchte der Verfasser noch eine Idee kurz besprechen, die eventuell eine noch weitere Entwicklung der heute schon bewährten und die hervorragendsten Traktionseigenschaften aufweisenden Siliziumgleichrichter-Fahrzeuge ermöglichen wird.

Bekanntlich hat der Verfasser immer das größte Gewicht darauf gelegt, als Fahrmotor möglichst Käfigankermotoren zu verwenden. Es ist nämlich der Käfigankermotor — der weder Kommutator, noch Schleifringe, noch Bürsten besitzt, keinerlei Instandhaltung beansprucht und im Gewicht sehr leicht gebaut werden kann — vom Standpunkt der Traktion aus als die idealste Lösung anzusehen, deren Vorteile durch *keinerlei andere Konstruktionen* erreicht werden können.

Die Meinung des Verfassers über die kurzgeschlossenen Motoren teilten seinerzeit in vollem Maße auch die Französischen Staatsbahnen, deren Generaldirektor ARMAND — im Jahre 1952 — in seiner bedeutungsvollen Rede über die 50 Hz-Elektrifizierung nachdrücklich hierauf hinwies. Eine ähnliche Meinung vertritt auch die Sowjetunion, wo die Bedeutung der Frage noch dadurch gesteigert wird, daß wegen der vielerorts auftretenden außergewöhnlichen Kälte, Schneefälle und Vereisungen diese einfach aufgebauten und keinerlei Instandhaltung beanspruchenden Motoren in gesteigertem Maß von Vorteil sind.

Wie bekannt, hat das in den Elektrischen Werken Ganz entwickelte und heute in Frankreich in Betrieb befindliche Periodenumformer-System Ganz — Ratkovszky die Anwendung der kurzgeschlossenen Motoren ermöglicht, und diese Möglichkeit war der bedeutungsvollste Vorzug des Periodenwandler-Systems.

Den Vorteilen der Käfigankermotoren standen jedoch das bedeutende Gewicht und die hohen Kosten der zu ihrem Betrieb notwendigen rotie-

renden Umformer und der hierdurch verursachte schlechte Gesamtwirkungsgrad gegenüber. Die Ignitrongleichrichter und insbesondere die Trockengleichrichter ergeben einen so einfachen Aufbau, daß diesen gegenüber die Lokomotiven mit rotierenden Umformern nicht entsprechend wettbewerbsfähig bleiben, trotz dem großen Vorteil der Fahrmotoren mit Käfiganker und dem guten Leistungsfaktor ( $\cos \varphi = 1$ ). Dies ist insbesondere der Fall, wenn bei kleinem Gewicht sehr große Lokomotivleistungen benötigt werden. Aus dem gleichen Fahrzeuggewicht kann man nämlich bei Ignitron- oder Trockengleichrichterausführung ungefähr 20—40% mehr Leistung herausbringen als aus Lokomotiven mit rotierenden Umformern und Käfigankermotoren.

Die entscheidenden Vorteile der einzelnen Systeme sind daher die folgenden:

Beim Periodenumformer-System, außer dem guten Leistungsfaktor, die einfach aufgebauten und überhaupt keine Instandhaltung beanspruchenden *sehr leichten Käfigankermotoren*:

beim Gleichrichtersystem die *einfache*, leichte und keine Instandhaltung beanspruchende Konstruktion der *Siliziumgleichrichter*.

In bezug auf die Traktionseigenschaften und die Adhäsion sind beide Systeme gleicherweise hervorragend.

Der Gedanke ist daher nahelegend, daß man in irgendeiner Weise die Vorteile der beiden Systeme vereinigen müßte, daß heißt, man müßte ein derartiges Fahrzeug entwickeln, welches kurzgeschlossene Motoren besitzt, jedoch statt eines rotierenden Umformers Siliziumgleichrichter verwendet. Diesen Bedingungen entspricht das System,\* welches im folgenden nur ganz kurz geschildert werden möge:

Wenn in einem Fahrzeug der auf die schon bekannte Weise zustandegebrachte pulsierende Gleichstrom mit irgendeiner bekannten Einrichtung so beeinflußt wird, daß derselbe in Abhängigkeit von der Zeit verschiedene Werte annimmt, so kann man mit entsprechend gewählter Beeinflussung erzielen, daß der Augenblickswert des pulsierenden Gleichstroms sich gemäß einer Sinushalbwellenlänge von beliebiger Frequenz ändert.

Wenn nun eine solche Schaltung angewendet wird, welche es ermöglicht, im Stromkreis der Motoren auch den Sinn des Gleichstroms zu ändern, so kann im Stromkreis der Motoren ein sinusförmiger Strom von beliebiger Frequenz zustandegebracht werden. Bei Verwendung von mehreren Stromkreisen kann auch Dreiphasenstrom oder — denn in diesem Fall werden nur zwei Stromkreise benötigt — ein Zweiphasenstrom zustandegebracht werden. Es ist daher möglich, Zwei- oder Mehrphasen-Käfigankermotoren mit dem von den bekannten Gleichrichtern erzeugten Gleichstrom zu speisen, so daß der Gleichstrom in wenigstens zwei Stromkreisen durch entsprechende Steuerein-

\* Zum Patent angemeldet am 24. Dezember 1959.



richtungen in gegeneinander entsprechend phasenverschobene sinusförmige Wechselströme von kontinuierlich veränderlicher Frequenz umgeformt wird.

Im Rahmen dieser Auseinandersetzung wünscht der Verfasser nicht auf die Einzelheiten des Problems einzugehen und möchte nur darauf hinweisen, daß so eine Steuerung schon auf bekannte Weise realisiert werden kann. Mit gesteuerten Gleichrichtern kann durch entsprechende, bekannte Schaltungen und Steuerungen nämlich erzielt werden, daß aus Gleichstrom — auch im Fall von großen Leistungen — Wechselstrom hergestellt wird. Das erwünschte Ziel: Verwendung von kurzgeschlossenen Fahrmotoren und Verwendung von Gleichrichtern, kann daher gesichert werden.

Nach dem im vorangehenden kurz geschilderten Prinzip können mit Excitrongleichrichtern — wenn auch nicht einfach und wirtschaftlich — solche Fahrzeuge schon nach dem Stand der Technik 1960 verwirklicht werden.

Die entsprechende Steuerung der Trockengleichrichter war bis 1960 noch nicht in genügendem Maß entwickelt, die Möglichkeit ihrer Steuerung genügte noch nicht dem vorliegenden Zweck. Im Vergleich zu den jetzigen Fahrzeugen mit Siliziumgleichrichtern und Kommutatormotoren können aber die Fahrzeuge nach obigem Prinzip nur dann als ein wirklicher Fortschritt betrachtet werden, wenn für die entsprechende Steuerung der einfach aufgebauten Trockengleichrichter von ausgezeichnetem Wirkungsgrad eine wirtschaftliche Lösung gefunden worden ist. Wenn jedoch in Betracht gezogen wird, daß die Silizium- und Germaniumgleichrichter mit hoher Leistung im Jahre 1960 eine kaum sechsjährige Vergangenheit hatten, und daß die Vergangenheit der steuerbaren Trockengleichrichter kaum auf die Hälfte dieser Jahre, also auf drei Jahre zurückreicht, so kann nach Ansicht des Verfassers die Annahme, daß die entsprechend steuerbaren Trockengleichrichter von befriedigender Leistung in wirtschaftlicher und einfacher Ausführung in kürzester Zeit — innerhalb einiger Jahre — zur Verfügung stehen werden, nicht als zu optimistisch betrachtet werden. In diesem Fall werden aber die heute nur in Excitronausführung (sehr kompliziert und teuer) herstellbaren Lokomotiven mit Käfiganker-Fahrmotoren auch mit Trockengleichrichtern — deren Freiwerdezeit in Grössenordnung kleiner ist, als die eines Excitrons, wodurch das Problem des Löschens viel einfacher und billiger zu lösen ist — herzustellen sein.

Das gesteuerte Trockengleichrichter-Käfiganker-System nach obigem Prinzip wird aller Wahrscheinlichkeit nach für Einphasen-Wechselstromfahrzeuge die *ideal beste Lösung bieten*. In diesen Fahrzeugen werden die technischen, wirtschaftlichen, betriebssicherheitlichen und instandhaltungstechnischen Vorteile der Fahrzeuge mit Kurzschlußfahrmotoren und derjenigen mit Trockengleichrichtern — durch relativ einfachen und wirtschaftlichen Mitteln — vereinigt sein, unter Beibehaltung der ausgezeichneten Traktions- und Adhäsionseigenschaften.

In dem oben Gesagten hat sich der Verfasser bemüht, auf die wichtigsten Gesichtspunkte und Ergebnisse der technischen Entwicklung der von Ungarn angeregter 50 Hz-Bahnelektrifizierung — an welcher er selbst auch dauernd stark tätig war — hinzuweisen, soweit dies in dem zur Verfügung stehenden Rahmen möglich war.

Ungarn war mit der 50 Hz-Elektrifizierung der Hauptstrecke Budapest—Hegyeshalom der ganzen Welt um mehr als 20 Jahre zuvorgekommen. Durch die Entwicklung des Periodenumformer-Systems Ganz-Ratkovszky war Ungarn während weiterer 20 Jahre, ungefähr bis 1950, im Weltmaßstab unbestreitbar noch immer an erster Stelle. Obwohl Ungarn seit ungefähr 1952 — also seit cca 10 Jahren — diese Position nicht mehr halten konnte, einesteils aus eigenem Verschulden, anderenteils wegen der in der ganzen Welt in Gang gekommenen stürmischen Entwicklung, hat das von Ungarn erfundene und stets vertretene Prinzip — entgegen der 20 Jahre dauernden Opposition der ganzen Welt — heute schon einen vollkommenen Sieg errungen.

Heute verkehren schon Hunderte von 50 Hz-Lokomotiven in der ganzen Welt — außer Ungarn in erster Reihe in Frankreich, weiters in England, der Sowjetunion, China, Indien, Afrika, Japan usw. — in stets vollkommener Ausführung, und dieselben haben heute in bezug auf Wirtschaftlichkeit und technische Eigenschaften die 16 2/3 Hz- und die Gleichstrom-Lokomotiven nicht nur eingeholt, sondern auch überholt.

Das von Ungarn ausgegangene 50 Hz-System hat *unbestreitbar die ganze Welt erobert*, die verschiedensten Länder und die größten Fabriken der Welt arbeiten an der noch weiteren Vervollkommnung dieses Systems, und es ist zu hoffen, daß in der Zukunft Ungarn — welches in Kürze für eigene und für Exportzwecke die modernsten Silizium-Lokomotiven herstellen wird — getreu seiner alten Tradition sich auch in die Weiterentwicklung wieder einschalten und darin wieder an führende Stelle gelangen wird.

#### THE FUTURE DEVELOPMENT OF THE 50 Hz RAILWAY VEHICLES IN HUNGARY AND ABROAD

F. RATKOVSKY

#### SUMMARY

The author discusses the difficulties encountered at that time, with the extension to other countries of the 50 Hz railway electrification (Ganz—Kandó system) which was developed and put into service, in Hungary during the period from 1923 to 1931 for the first time in the whole world. These difficulties were completely overcome, first by the frequency-changer vehicles with continuous and loss-free speed regulation, suitable for any power and speed, which were developed and built also in Hungary, in the years 1938—1944, afterwards by the large-scale tests made in 1950—1955 by the French State Railways and by the ignitron locomotives developed by French and other foreign factories. The technical data and the operating experience gained with the unfortunately chosen Hungarian-built slip-ring motor locomotives with 5 fixed speeds are compared to those of the frequency changer locomotives ordered by the French



State Railways, which have short-circuited armature traction motors and have given full satisfaction during operation. The author points out what disadvantages had been suffered by the Hungarian 50 Hz railway electrification and the locomotive-building industry as a consequence of the erroneous decision made in the years 1947—1948.

The author insists on the decisive importance of the large development work of the French State Railways and of the French manufacturers, that by developing the ignitron locomotives finally decided the question of the economic railway electrification system in favour of the 50 Hz system, developed and realized in Hungary already 30 years ago. Due to the development of the newest dry rectifier (Si) locomotives this advantage has become even more decisive. Finally a further possibility of development of the 50 Hz locomotives is discussed, which will possibly permit to unite in the 50 Hz vehicles the advantages of the rectifiers and of the short-circuited motors, which solution would result in the most simple electrified vehicles, having at the same time maximum operational safety.

## LE DÉVELOPPEMENT DES VÉHICULES DE CHEMIN DE FER A 50 HZ

F. RATKOVSKY

### RÉSUMÉ

L'auteur rappelle d'abord les difficultés ayant jadis empêché l'adoption, à l'étranger, du système d'électrification à 50 Hz (système Ganz—Kandó), que la Hongrie fut la première à développer et à réaliser sur ses grandes lignes, entre 1923 et 1931. Ces difficultés ont été complètement éliminées par la suite, grâce au convertisseur de phase développé et fabriqué en Hongrie pendant les années 1938—1944, aux essais de grande envergure de la SNCF effectués en 1950—1955, enfin aux locomotives à ignitron développées par les fabriques françaises et d'autres fabriques étrangères. L'auteur compare ensuite les caractéristiques techniques et les résultats d'exploitation du type de locomotives à convertisseur de phase fabriqué en Hongrie après la guerre (moteurs à bagues et à 5 vitesses fixes) à ceux des locomotives à convertisseur de phase commandées par la SNCF (moteurs en court-circuit et réglage continu de la vitesse), qui ont donné des résultats excellents en service. Il indique aussi les préjudices portés à l'électrification des chemins de fer hongrois et à l'industrie hongroise de construction de locomotives par le type mal choisi de 1947—48.

L'auteur souligne l'importance décisive des grands efforts de développement faits par la SNCF et les constructeurs français, grâce auxquels le développement des locomotives à ignitron a fait définitivement adopter comme système d'électrification économique celui à 50 Hz, développé et réalisé en Hongrie il y a 30 ans. Par le récent développement des locomotives à redresseur sec (Si), la supériorité de celui-ci s'est encore accentuée. Une nouvelle possibilité de développement des locomotives à 50 Hz est enfin indiquée par l'auteur. Dans l'avenir, les avantages des redresseurs et des moteurs en court-circuit pourraient être combinés dans les véhicules à 50 Hz, solution qui assurerait aux véhicules électrifiés le plus de simplicité de construction et le maximum de sécurité en service.

## РАЗВИТИЕ В ВЕНГРИИ МАГИСТРАЛЬНЫХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПОДВИЖНЫХ СРЕДСТВ, ПИТАЕМЫХ ТОКОМ ПРОМЫШЛЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Ф. РАТКОВСКИ

### РЕЗЮМЕ

Автор описывает трудности распространения зарубежом электрификации железнодорожного транспорта током промышленной частоты (по системе Ганз—Кандо), впервые в мире разработанной в Венгрии в 1923—1931 гг. Эти трудности впоследствии были полностью преодолены разработанными и изготовленными также в Венгрии в 1938—1944 гг. подвижными средствами произвольной мощности, оборудованными преобразователями частоты, позволяющими без потерь непрерывно менять скорость, а также благодаря опытам, проведенным в 1950—1955 гг. в крупных масштабах Французскими государственными железными дорогами, и опытам с игнитронными электровозами, разработанными другими зарубежными заводами.

Автор дает сравнение технических данных с опытом эксплуатации электровоза, разработанного после войны в Венгрии, к сожалению, вследствие неудачного выбора типа, оборудованного тяговым двигателем с контактными кольцами, имеющего пять определенных ступени скорости, с преобразователем частоты, и данных разработанного по заказу Французских государственных железных дорог, хорошо оправдавшегося в эксплуатации электровоза с короткозамкнутым тяговым двигателем, с беспотерным непрерывным изменением скоростей, с преобразователем частоты. Говорится об ущербе венгерской промышленности транспортных средств в области электрификации железных дорог на основе тока промышленной частоты от неправильного выбора типа электровоза.

Подчеркивается решающая важность огромной работы по разработке электровозов, проведенной Французскими государственными железными дорогами и заводами, в результате которой разработаны игнитронные электровозы, которые окончательно решили вопрос экономичности электрификации железных дорог в пользу уже 30 лет назад разработанной и введенной в Венгрии системы, основанной на использовании тока промышленной частоты. Все это получает еще большее значение в связи с разработкой новейшего типа электровозов с сухими преобразователями. Наконец, указывается еще одна возможность усовершенствования электровозов для тока промышленной частоты, которая состоит в объединении преимуществ выпрямителей и короткозамкнутых тяговых двигателей, и в применении их на электровозах, питаемых током промышленной частоты, причем это решение даст наиболее совершенные в эксплуатации локомотивы.



# STUDY ON THE MECHANIZED CULTIVATION OF DRIFT SAND LANDS

I. RÁZSÓ

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received August 31, 1964]

Sandy areas make out abt. 16% of the whole agricultural territory in Hungary, and round about 300 000 ha thereof are covered with quicksand. The cultivation of the latter is just being developed. Meanwhile, mechanizing of this process is greatly impeded by the mechanical properties of quicksand that differ much from those of normal arable lands, mainly as far as bearing capacity is concerned. The so-called burrow effect with which the rolling motion of wheels on blown sand areas is attended is also one of the unfavourable consequences of the poor bearing capacity. In this paper, factors influencing the burrow effect are analyzed and conditions are determined by which no burrow effect occurs. Informations are given about characteristics of blown sand lands, in Hungary, and about the results obtained on the basis of theoretic relations and calculations, especially by introducing a new notion, i.e. the limit factor ( $R_l$ ) of burrow effect.

## I. Introduction

In Hungary, about round 16% of its geographical territory is covered with sand; an area of abt. 300 000 ha thereof is quicksand. Unfortunately, though a large portion of our blown sand lands is suitable for fruit raising and especially for vine-growing, there are, as yet, only small areas under cultivation.

In former times, nearly all these territories were cultivated by small land owners; then, problems of mechanization were unknown. For cultivation purposes, when and where it was realisable at all, solely horse drawn machines were used. Only of late, inasmuch small farms have been united in cooperatives, mechanization of these collective estates, including blown sand lands too, is felt to be necessary. However, some of the involved problems are not the mechanical properties of drift sand and those of other, so to say normal lands. It is the very small bearing capacity of quicksand areas as compared with other arable lands that can be considered as the fundamental difference in consequence of which the forward movement of agricultural machines — first of all wheel tractors — is greatly hampered.

The formation of sand drifts can be ascribed to human activity, more precisely, to an improper method of cultivation. By force of the wind, not only the very sand but also the cultivated dry soil becomes moved. The more the soil is dry and dusty, the greater will the drift be. In the Soviet Union, the

strongest sandstorms occur on black soils, wherefrom comes the name "black-storm". The smallest percentage of sand in this dusty soil in turn forms dunes of rather pure sand when the storm starts to blow. Through the action of the wind, the entire soil matter will be moved; the smallest and the lightest grains, clay and humus particles are carried as far as some hundreds or even thousands kilometers away, whereas larger and heavier sand grains are dropped within  $20 \div 30$  km, i.e. a sorting of soil particles is performed according to size and weight. The greater portion of the present sandy deserts was once

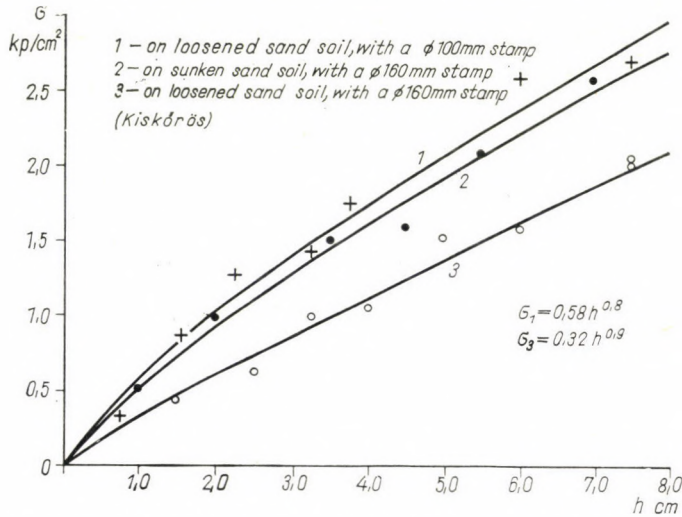


Fig. 1. Load bearing capacity of quick sandy soil. Soil stress as function of penetration depth of testing body

the most fertile territory on earth, which had been cultivated since the most ancient times. Now, it is well known that fertile areas, under dry climatic conditions, can be saved from devastation only when a constant growth of vegetation is assured by well chosen cultivating methods.

## II. Some Physical Properties of Blowing Lands

On the bearing capacity of quicksand, one finds well founded informations in the graph of Fig. 1, that has been plotted as a result of experiments made on a typical drift sandy soil (Estate of Kiskörös, District Csengőd). The tests were carried out with two circular stamps, the one of which has a diameter of  $D_1 = 100$  mm, the other a diameter of  $D_3 = 160$  mm. On the basis of these curves, the resulting pressure stress  $\sigma$  in the soil, being a function of the penetration depth  $h$  of the stamps, is expressed as follows:

$$\sigma_1 = 0,58 h^{0,8},$$

$$\sigma_3 = 0,32 h^{0,9}$$



where  $\sigma_1$  refers to tests in loosened sand with the 100 mm stamp, and  $\sigma_3$  refers to tests in loosened sand with the 160 mm stamp.

When comparing the curves of the graph, one can observe that their trend varies with the diameter of the penetrating stamp. In the study by SAAKYAN [5] a simplified interdependence is established by expressing  $\sigma$  as the function of the ratio ( $h/D$ ) namely:

$$\sigma_1 = 3,8 \left( \frac{h}{D} \right)^{0,85}$$

for loosened sand, and

$$\sigma_3 = 5 \left( \frac{h}{D} \right)^{0,85}$$

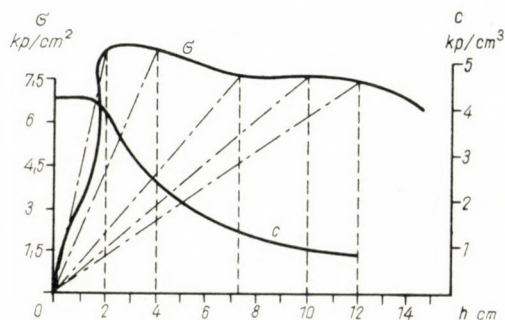


Fig. 2. Load bearing capacity of normal arable land; factor  $c$  versus soil sinking depth

for sunken sand. As far as the load bearing capacity of other arable soils is concerned, the characteristic curves are different (see Fig. 2). For such normal soils, the starting portion of the curves is characterized by a linear or nearly linear trend showing a more or less regular proportionality between pressure stress and depth of penetration, and the second portion of the ( $\sigma, h$ ) curve is characterized by a rapid increase of the penetration depth with a constant stress value or even with decreasing stress; in other words, the soil seems to have reached the flow limit. Thus, the first portion of the curve corresponds to a constant ratio of *soil deformation/soil stress*, i.e.  $\sigma/h = c = \text{constant}$ , or

$$c \text{ [kp/cm}^3\text{]} = \frac{\sigma \text{ [kp/cm}^2\text{]}}{h \text{ [cm]}}$$

where the value of  $c$  [kp/cm<sup>3</sup>], as the specific stamping factor of the soil, expresses the necessary pressure per unit volume of stamped soil.

As a summary, for so called normal soils, during the first period of loading, the ratio between load and deformation is at least nearly proportional, whereas for quick sandy areas, the factor  $c$  is not constant, but varies as a function of deformation according to the relationship as illustrated in Fig. 3, where the

specific stamping factor appears as a decreasing quantity already during the starting period of loading.

According to informations obtained from scientific authorities, normal arable soils are characterized by the following values:  $\sigma = 1 \dots 9 \text{ kp/cm}^2$  and  $c = 3 \dots 20 \text{ kp/cm}^3$ . With respect to values as plotted in Figs. 1 and 3, it is obvious that machines and implements that have been designed for use on normal arable lands, will prove, unavoidably, quite unsuitable for quick sandy areas because of their weight.

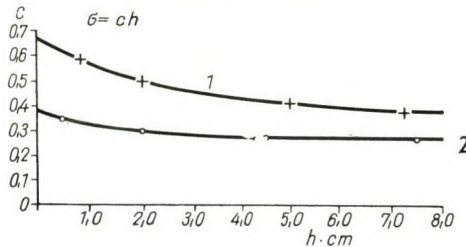


Fig. 3. Specific stamping factor  $c$  versus penetration depth of the testing body  
1 — on loosened sand, with a stamp of 100 mm dia; 2 — on loosened sand, with a stamp of 160 mm dia

Table I  
Grain size

Diameter, mm	Contents, %
> 1,4	1,2*
1,4 ... 1	0,7*
1 ... 0,63	1,0**
0,63 ... 0,32	10
0,32 ... 0,2	37
0,2 ... 0,1	41
0,1 ... 0,06	7,4
< 0,06	1,7***

\* vegetable matters;

\*\* partly vegetable matters;

\*\*\* with some organic contents

When analysing the physical properties of quick sandy soils in connection with their rather poor bearing capacity and the hard conditions that impede us in solving mechanization problems, the following three factors can be referred to: grain size, — grain form, — lack of bonding materials.



### 1. Grain size

In Hungary, the most sorts of quicksand contain the smallest quartz-grains, that can easily be moved by moderate winds. In Table I grain sizes are enumerated as found in samples taken from the top layer of 5 cm of the *Kiskőrös* blown sand land.

According to these data, the great majority of grains (namely 78%) belong to the size range from 0,1 up to 0,32 mm. This distribution scheme is illustrated in Fig. 4.

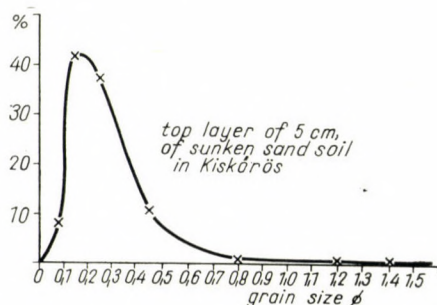


Fig. 4. Grain distribution of the quick sandy soil of Kiskőrös

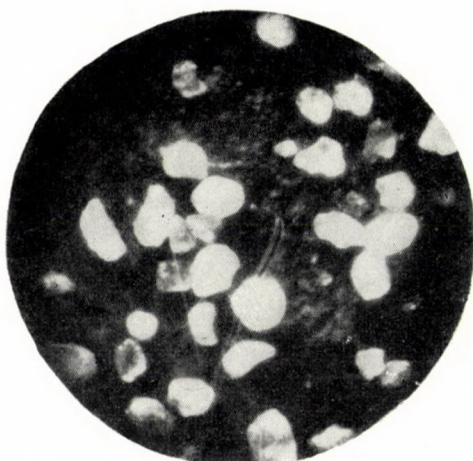


Fig. 5. Micro-photograph of selected quicksand grains; range of grain dia:  $\delta = 0,06 \div 0,1$  mm

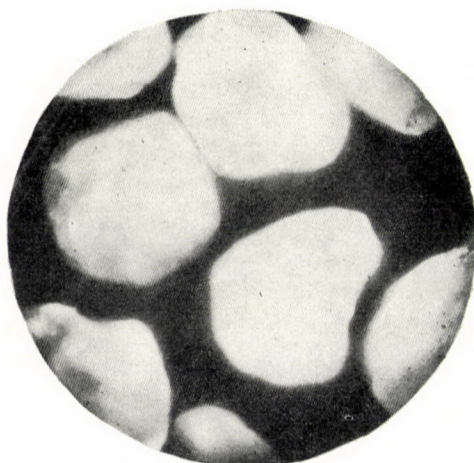


Fig. 6. Micro-photograph of selected quicksand grains; range of grain dia:  $\delta = 0,32 \div 0,63$  mm

### 2. Grain form

Further, the grain form is, generally, nearly globular i.e. well rounded and with a smooth surface. Consequently, they can easily roll around each other (see Figs. 5, 6). Samples taken from other than quick sandy soils are characterized by a larger number of rude, polyhedral grains, not yet smoothed off (Fig. 7).

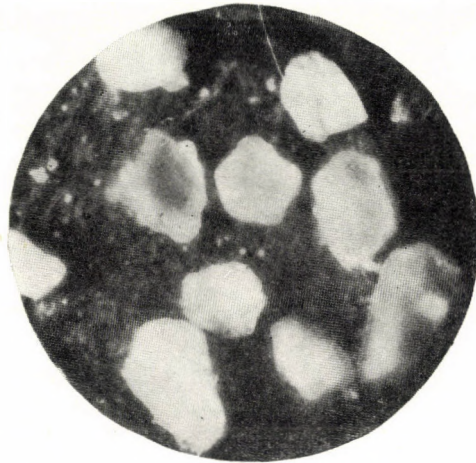


Fig. 7. Micro-photograph of building sand grains, not selected

### 3. Lack of bonding materials

As already mentioned, grains of quicksand will easily be moved, already by the action of a moderate wind, excepting when the soil contains the necessary quantity of particles of the colloidal size ( $< 0,0002$  mm in diameter) that exert a bonding effect on the sand grains in the presence of humidity, and which can prevent — of course in the case of moderate winds — winnowing wind actions. Now, our samples contain, according to the values given in the table, only a rather negligible quantity (1,7%) of grains of the size under 0,06 mm in diameter, whereas a real bonding effect exerted by particles of colloidal size can be expected only when they reach the range of  $3 \div 4\%$  contents.

Sand grains, once moved by the wind, undergo a further abrasion as a consequence of rubbing against each other the effect of which is a further disintegration and deformation; their form changes from a polyhedral shape into a globular one. And just these smallest globe-like shaped grains are responsible for the unfavourable physical properties of quick sandy soils.

### III. Rolling Resistance on a Soil Subject to Deformation

With the restriction that the formula applies only to a wheel with a rigid rim when rolling on a sinking soil, i.e. when a visible trace of the motion is being performed,

the expression of rolling resistance is, according to GERSTNER:

$$P_f = 0,86 \cdot \sqrt{\frac{G^4}{c \cdot b \cdot D^2}}$$



where

- $P_f$  tractive force necessary for moving the wheel forward, i.e. the rolling resistance [kp];  
 $G$  the whole weight transmitted by the wheel into the soil [kp];  
 $b$  wheel width [cm];  
 $D$  wheel diameter [cm];  
 $c$  specific stamping resistivity of the soil [kp/cm<sup>3</sup>].

When we neglect some minute modifications, we nowadays use, the same formula in order to express the rolling resistance of a wheel having a rigid rim, and leaving a visible trace when rolling on a sinking soil.

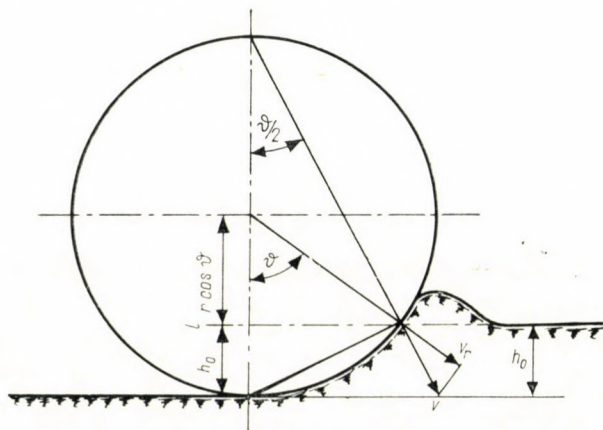


Fig. 8. Explanation of the burrow (bulldozing) effect

Again, as will be seen from the explanation herebelow, the validity of the above formula is limited for a certain depth of trace. For a clearer understanding of the displacement of soil particles when they come to touch the wheel rim, Fig. 8 is to be considered. We assume that the trace depth — measured from the original land level — is equal to  $h_0$  (by neglecting the actual elastic deformation of the soil) and, magnitude as well as direction of the velocity vector ( $v$ ) belonging to the rim point  $h_0$  — assuming a slip-free rolling motion — can easily be determined. Now, if no friction occurs between rim and soil-particles, these particles are pushed, by the rim, in the direction  $v_r$ , i.e. radially (in an orthogonal direction towards the rim surface). Bearing in mind that the direction of the velocity vector  $v$  and that of the pushing effect  $v_r$  do not coincide, but that they form the angle  $\vartheta/2$ , a pushing and stamping of the soil particles by the rim is only possible if this angle is less than (or in the extreme case equal to) the angle of friction  $\rho$  understood for rim and soil. As can be seen from Fig. 8 the angle  $\vartheta$  is the angle at the centre belonging to the chord measured between the footpoint of the rim and the point  $h_0$ . In written

form:

$$\varrho \geq \vartheta/2, (\vartheta \leq 2\varrho) \quad \text{and} \quad \vartheta_{\max} = 2\varrho.$$

From the aforesaid analytical line of thinking it is easily understandable that the formula of GERSTNER cannot be applied between arbitrary limits; its validity is confined up to a maximum value of the sinking depth ( $h_0$ ) of the wheel. This limit is expressed as:

$$h_{0(\max)} = r - r \cdot \cos \vartheta_{\max} = r(1 - \cos \vartheta_{\max}) = r(1 - \cos 2\varrho).$$

By introducing the symbol  $R_t$  for the member between brackets [i.e.  $(1 - \cos 2\varrho) = R_t$ ], we obtain:

$$h_{0(\max)} = rR_t,$$

from where

$$\frac{h_{0(\max)}}{r} = R_t$$

in other words,  $R_t$  expresses the ratio of the sinking depth to the wheel radius. This can be considered as an index number for a given kind of soil. For our case, the friction ratio for dry quicksand is the most unfavourable, namely  $\mu = 0,27$ ; whence  $\varrho = \arctan \mu = 15^\circ$ , and  $R_t = 0,14$  that gives

$$h_{0(\max)} = rR_t = 0,14 r,$$

this means, that for our case the equation of the rolling resistance is only valid as far as the sinking depth of the wheel is less than the wheel radius multiplied by 0,14 i.e.

$$h_0 = 0,14 r.$$

Now, when the actual sinking depth surpasses this limit value, the rolling wheel is not suitable for pushing and stamping all the particles lying in front of the rim, consequently, the surplus of particles not being stamped form a burrow barring the way. This phenomenon, the so called burrow effect, is well known by men of practice. As a consequence of this, sand particles are heaped up, and the arc along which the wheel touches the earth, becomes longer than the former one corresponding to the sinking depth. Therefore, a greater part of the rim surface will try to push and stamp the particles, including the surplus heap too; this exerts a force against further heaping up and finally a stationary state of stamping results. This means that the mass of burrow pushed by the wheel is constant as long as heaping conditions do not change.

A further consequence of the burrow effect is an increase of the rolling resistance, because the burrow in front of the rim acts as a brake shoe; in other words, the rolling resistance is influenced by other factors than it was assumed when the formula of GERSTNER, and the further subsequent relations were exposed. With this heaping up of the soil, the rolling resistance suddenly increases.



Obviously, here we find the case of qualitative factors changing on the influence of the variation of quantities. In concreto, the increase of the sinking depth (variation of a quantity) involves the qualitative change that occurs when the rolling resistance becomes larger and surpasses the practicable limit value. With a view of the importance of the limit value of the above mentioned quantity  $R_t$  (in our case  $R_t = h_{0(\max)}/r = 0,14$ ) it is advisable to create a new term; this value of  $R_t$  may be referred to as the *limit factor of burrow effect*.

In our case, the occurrence of the burrow effect is to be expected when steel wheels having a smooth rim surface are rolling on quick sandy soil and the sinking depth reaches the value of  $0,14 \cdot r$  ( $r$  denoting the wheel radius).

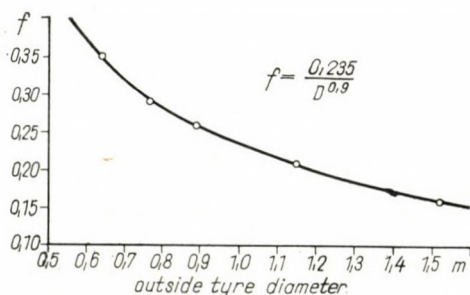


Fig. 9. Variation of the rolling resistance factor as a function of wheel diameter, on quick sandy soils

This limit is equally to be considered for tractor front wheels that serve only for steering purposes without being driven. The somewhat higher value of the friction ratio for rubber tyres should be taken as a security factor only.

From empirically obtained results, the rolling resistance factor ( $f$ ) for pushed or pulled steel wheels working on quick sandy soil, can be expressed as

$$f = \frac{0,235}{D^{0,9}}$$

The curve representing the function of  $f$  versus  $D$  is given in the graph in Fig. 9. According to experiments made in Hungary, this formula can be applied to tests carried out on our drift sand lands, too.

#### IV. Rolling of the Driver Wheel, the Rated Tractive Force

The above-mentioned burrow effect occurs with wheels, which are pushed or pulled, and not with driver wheels. The latter ones do not heap up particles but exert an additional force for stamping rearward particles even of such soils which have a small bearing capacity. With these wheels, the normal rolling motion ceases because the wheel digs itself deeply into the soil. This

digging effect depends on the friction between the rim and the soil, the shearing strength and the internal friction in the soil.

Considering the friction ratio ( $\mu$ ) between wheel and soil and the internal friction ratio ( $\mu'$ ) between the grains themselves, it is only the lesser value of these two that has an influence.

On a given soil area  $F$ , the value of the maximum shearing force is expressed as:

$$T_{\max} = c' F + \mu' N$$

where

$c'$  soil cohesion [kp/cm<sup>2</sup>];  
 $\mu'$  soil (internal) friction ratio;  
 $N$  pressing force in normal direction.

On a quick sandy soil  $c' = 0$ , whence  $T_{\max} = \mu' N$  or  $T_{\max} = \tan \varrho' \cdot N$  where  $\varrho'$  is the angle of the internal friction.

It is advantageous to express, for a given tractor, the maximum tractive force by means of the adhesion coefficient, the latter equalling the ratio of the useful tractive force to the adhesive weight. Bearing in mind that the useful tractive force ( $P_v$ ) equals the difference between the tangential force excited in the soil and the rolling resistance ( $P_f$ ), or, expressed in specific quantities, the adhesion coefficient equals the difference between the clinging coefficient ( $\varphi$ ) and the rolling resistance factor ( $f$ ), we can write:

$$\mu_a = \frac{P_v}{G_{\text{adh}}} = \frac{\tan \varrho' \cdot N}{G_{\text{adh}}} - \frac{P_f}{G_{\text{adh}}} = \tan \varrho - \frac{P_f}{G_{\text{adh}}},$$

because the normal force  $N$  equals the weight  $G_{\text{adh}}$ .

By making use of the relation:  $\sigma = ch$ , we obtain, for the rolling resistance with 2 caterpillar bands or 2 tractor-wheels respectively:

$$P_f = bch^2 = \frac{G^2}{4bcL^2} = \frac{bp^2}{c}$$

or, for a caterpillar:

$$\frac{P_v}{G} = \tan \varrho' - \frac{bp^2}{cG}$$

and, for a wheel-tractor:

$$\frac{P_v}{G_{\text{adh}}} = \tan \varrho' - \left[ \left( \frac{b_1 p^2}{cG_{\text{adh}}} \right)_{(\text{rearwheel})} + \left( \frac{b_2 p^2}{cG_{\text{adh}}} \right)_{(\text{forewheel})} \right]$$

where

$b$  band-width, or wheel-width;  
 $p$  average specific pressure;  
 $L$  average length of the bearing surface.

In the equation for wheel tractors,  $b_1$  refers to the rearwheel,  $b_2$  refers to the forewheel; and  $G_{\text{adh}}$  is to be understood for the respective weight that loads



the wheel referred to. On sandy soils, there is no significant difference between the values of  $c$  whether with reference to the rearwheel or to the forewheel, in spite of the stamping effect of the latter; according to experimental results, the assumed value of  $c$  is generally  $0,30 \div 0,35$ , for both.

The graph in Fig. 10 shows the curves for  $\mu_a$  (equalling  $P_v/G_{adh}$ ) versus  $p$ , for some concrete values of  $c$ , i.e. for various kinds of soil. According to this graph, we can easily establish that with sandy soils the increase of the pressing force (the application of additional load) results in a decrease of the adhesion coefficient and, generally, does not lead to a greater tractive force. This is

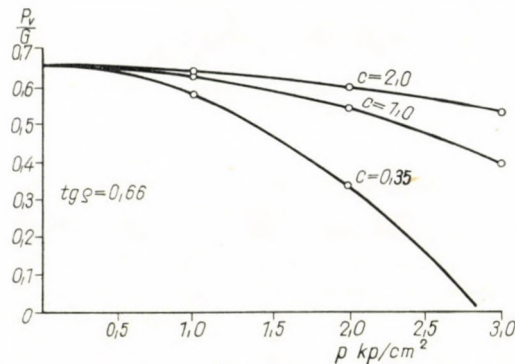
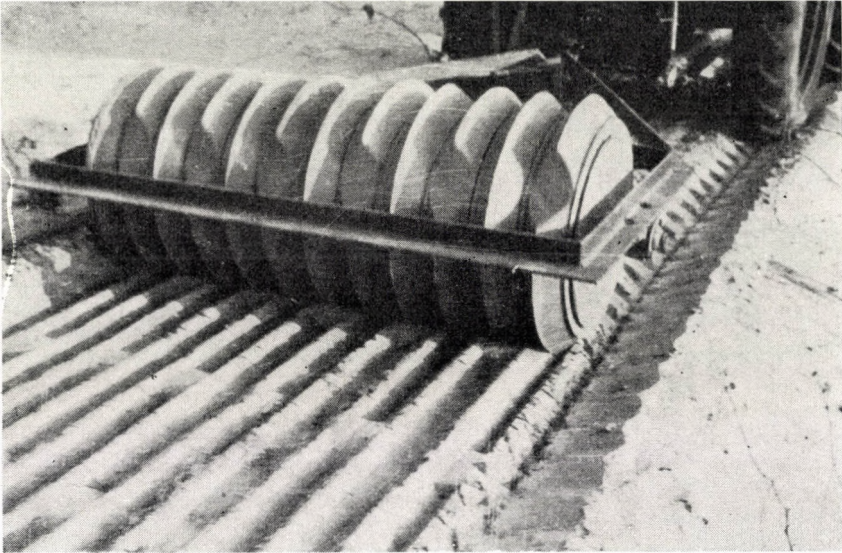


Fig. 10. Variation of the tractive force factor as a function of the surface pressure between wheel rim and soil surface for soils with different values of  $c$ , by assuming a constant angle of internal friction

unquestionable for driven steel wheels; again, in the case of rubber tyred wheels, (with pneumatics, a certain flattening of the wheel occurs), the effect of additional load is a certain enlargement of the bearing surface.

## V. Protection against Wind by means of Burrow-Free Rollers

There are several useful operations suitable for checking the effect of wind drift, when the cultivation of blown sand lands is the order of the day. First, the soil should be stamped down to a sufficient degree; then it is important to form on the soil surface, rather small furrows that serve to impede the movement of air masses just over the earth surface which can be considered, according to experiences, as an adequate protection. Generally, both operations, stamping and ridging are successfully carried out by means of ring-rollers. These machines, of course, are first of all, suitable for working on normal soils their design is not suitable for quick sandy areas. Namely, their sinking depth surpasses the above determined limit and the burrow effect unavoidably follows. In order to solve this problem, new types of rollers have been developed by the



*Fig. 11.* Ring-roller designed for burrow-free motion, in working position



*Fig. 12.* Working effect of burrow-free ring-roller with various tractive speed values  
a) —  $v = 7$  km/h; b) —  $v = 13,5$  km/h



experts of the Department of Agricultural Machines (Technical University of Budapest) that proved successful for the cultivation of even the loosest blowing lands (Fig. 11).<sup>\*</sup> This type of roller leaves small heaps at regular distances along the furrows; these small heaps serve, so to say, for a repeated prevention of the burrow-effect and have proved useful, as cross ridges, for barring the blow of winds along the furrows. These small heaps or more exactly cross-ridges are built at a distance of 1 meter from each other. Our experiments on absolutely dry quicksand areas, carried out in October 1963, justified our expectations. For the sake of a sufficient stamping of the soil, a slipfree rolling movement is needed. According to our experience the best suitable speed, to this end, is abt. 8 km/h (see Fig. 12a and 12b).

Also smooth rollers, working without burrowing, have been developed. The use of these is successful for soil preparation before sowing and for spring-time cultivation of winter-corn seed-fields. Whereas smooth cylindrical-rollers having a dia. of 35 cm were not at all suitable for working on quick sandy soils, the new type of roller with a dia. of 65 cm proved quite satisfactory in even the loosest areas.

#### REFERENCES

1. RÁZSÓ, I.: Szántóföldön lefolyó gördülési jelenségek és mezőgazdasági vonatkozásai (Rolling phenomena on arable land and their relation to other agricultural problems). *Acta Techn. Hung.* 1 (1951), fasc. 3.
2. BEKKER, M.: Theory of land locomotion. Michigan 1956.
3. LITTLE, L.: Wheels or Tracks for Earthmoving? *Automotive Design Engineering* (1963), August.
4. SENKOWSKI, A.: Ground adhesion problems of wheeled agricultural tractors. *Journal and Proceedings of the Institution of Brit. Agr. Engineers* (1959), April.
5. СААҚЯН, С.: О закономерности сопротивления почвы вдавлению. Сборник трудов по земледельческой механике, т. III. 1956. (On regularities of soil resistance to stamping; Collection of studies by agricultural engineers.)

#### EINIGE FRAGEN DER MECHANISIERUNG DER BEARBEITUNG VON FLUGSANDGEBIETEN

I. RÁZSÓ

#### ZUSAMMENFASSUNG

In Ungarn besteht ungefähr 16% der landwirtschaftlichen Gebiete aus Sandboden, und hiervon ist eine Fläche von cca 300 000 ha mit Flugsand bedeckt. Man ist eben daran, auch diese Bodenfläche in die Bebauung einzubeziehen. Nun aber begegnet die Mechanisierung der Bearbeitung auf Flugsandboden gewissen Schwierigkeiten, die auf die mechanischen Eigenschaften dieser Böden zurückzuführen sind, da diese von denen der normalen Ackerfelder abweichen, insbesondere infolge der geringen Tragfähigkeit von Flugsand. Auch die Erscheinung einer Erdwühlung vor den am Flugsandboden fortrollenden Rädern ist eine Folge der verringerten Tragfähigkeit. In dieser Abhandlung werden die Ursachen der Wühlerscheinung analysiert und die speziellen Bedingungen bestimmt, unter denen diese Erscheinung un-

<sup>\*</sup> Following a proposition made by Prof. Dr. E. KUND, ringrollers have been built in Hungary that are designed to form ridges and depressions, only, they are not suitable for working on sandy soils.

terdrückt werden kann. Es werden noch Informationen über die Eigenheiten des Flugsandbodens in Ungarn und über die durch theoretische Überlegungen und Berechnungen erzielbaren Erfolge mitgeteilt, insbesondere durch Einführung eines neuen Begriffs, nämlich des Grenzfaktors ( $R_f$ ) für den Wühleffekt.

## PROBLÈMES DE LA MÉCANISATION SUR LES TERRAINS DE SABLES MOUVANTS

I. RÁZSÓ

### RÉSUMÉ

16 % de la superficie des sols agricoles de la Hongrie sont couverts de sable. Sur cette étendue, 300 000 hectares environ sont du sable mouvant, dont la mise en culture est actuellement en cours. La mécanisation est rendue plus difficile par certaines propriétés physiques du sable mouvant, qui diffèrent de celles des autres sols, en premier lieu par leur capacité portante nettement plus faible. C'est à cette cause que se ramènent les phénomènes de fouillage provoqué par les roues des machines utilisées sur le sable mouvant. L'étude se propose aussi l'examen des facteurs intervenant dans le processus du fouillage et détermine les conditions dans lesquelles celui-ci ne peut pas se produire. L'auteur fournit enfin des données sur les caractéristiques des sables mouvants de Hongrie et fait connaître les résultats obtenus par application des relations théoriques et des calculs, grâce surtout à l'introduction de la nouvelle notion de facteur limite de fouillage ( $R_f$ ).

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАБОТ НА ТЕРРИТОРИИ ЗЫБУЧИХ ПЕСКОВ

И. РАЖО

### РЕЗЮМЕ

16% сельскохозяйственных площадей Венгрии покрыты песками, из них около 300 000 га составляют зыбучие пески. При механизации работ на зыбучих песках большие трудности возникают из-за отличных от других видов почв физических свойств зыбучих песков, а в первую очередь, — значительно худшей несущей способности их. Явления зарывания колес, возникающие у применяемых на зыбучих песках машин, можно свести к этому свойству. Работа посвящена анализу тех факторов, которые воздействуют на зарывание, а также определяется при каких условиях не может произойти зарывания. В работе приводятся данные по показателям свойств встречающихся в Венгрии зыбучих песков, далее результатам, достигнутым вследствие применения теоретических зависимостей и расчетов, и в основном от применения нового понятия, а именно предельного фактора зарывания ( $R_f$ ).



# ECONOMICS OF WATER-COOLED TURBOGENERATORS

M. SEIDNER

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received August 31, 1964]

Originally turbogenerators were air-cooled. With such indirect cooling the heat arising in the stator and rotor windings flows through the insulation and through the teeth to the surface washed by the air. About 1937 manufacturers in the USA began to replace the cooling air by hydrogen and about 1952 they changed over to direct hydrogen-cooling inside the hollow conductors. To-day this very efficient cooling method is in world-wide use.

With the direct cooling of the conductors the heat-carrying hydrogen flows through narrow openings in the conductors towards the cooler. Water being able to transport 3000 times more heat across the same cross-section, at the same velocity and with an equal temperature rise, than can hydrogen of atmospheric pressure, the stator windings of hydrogen-cooled turbogenerators are to-day generally cooled by water. But the direct water-cooling of the rotor windings is hampered by design problems due to speeds of 3000 or 3600 r.p.m. Nevertheless, the output of the turbogenerator being limited by the performance of the rotor which is less cooled by the hydrogen, the water-cooling of the hollow rotor conductors has lately come to the fore.

By water-cooling the rotor and stator windings the specific performance of turbogenerators increases for small machines by some 40%, for large units by some 25% and it becomes possible to build water-cooled units from 30 up to 1000 MW. The paper investigates the economics of water-cooled turbogenerators, their efficiency, the methods of development and presents designs for the water-cooling of the rotor.

## I. The Development of Cooling

In the early 20th century, turbogenerators were originally cooled by atmospheric air. With this cooling method the heat arising in the stator and rotor windings flows through the insulation and through the teeth to the surfaces washed by the flowing air. For this reason the efficiency of the cooling is small, and the steep increase of air friction losses prevents the increase of the rotor diameter and, with this, of the rotor performance. The upper limit of performance of air-cooled turbogenerators is about 20 MW at 3600 r.p.m. and 80 MW at 3000 r.p.m.

Around 1937 the leading electrical manufacturers in the USA developed, with much work and at great expense, the indirect cooling of turbogenerators by hydrogen of atmospheric pressure. Since the specific weight of 96% pure hydrogen of atmospheric pressure used in practice is only about 1/10 of that of air at the same pressure, the friction losses of the rotor dropped to 10%. Therefore it became possible to increase radically the rotor diameter and thus the performance of the machine. Although indirect cooling with hydrogen of

atmospheric pressure increases the specific performance of the turbogenerator only by some 20% as compared to air-cooling the output could be raised considerably by increasing the rotor diameter.

Towards 1952 the Americans changed over to direct cooling, by high-pressure hydrogen, of the stator and rotor windings of their 3600 r.p.m. turbogenerators. European manufacturers gradually followed suit. As for size, the French manufacturers have taken the lead by the production of 600 MW turbogenerators having a rotor diameter of about 1150 mm and a rotor length of about 6300 mm.

With direct cooling through channels of 6–12 mm width inside the conductor or formed by profile conductors the water can, at identical velocity and temperature rise, take over and carry off about 3000 times as much heat than can hydrogen of atmospheric pressure. Therefore the use of water as a cooling medium has come to the fore in the direct cooling of turbogenerator conductors. The cooling of the stationary stator windings can be achieved by relatively simple means; yet the direct water-cooling of the rotor conductors meets with mechanical difficulties owing to such factors as the water intake into, and the outlet from, the hollow conductors turning at 3000 or 3600 r.p.m., the shaft bending and vibrations and the thermal dilatation of the conductors and the rotor body.

## II. Direct Hydrogen-Cooling of the Rotor Conductors

The relationship between current  $i$  [ampere] flowing through  $l$  m of conductor length, temperature rise  $t$  °C of the conductor, specific heat  $k$  cal/m<sup>3</sup>, °C of the cooling medium and pressure difference  $p$  kg/cm<sup>2</sup> necessary for the circulation of the coolant is expressed by the cooling equation

$$\frac{i^4 \cdot l^3}{t^2 \cdot p \cdot k} = \text{const.} \quad (1)$$

In this formula the temperature rise  $t$  °C of the conductors includes the temperature drop arising at the surface transfer as well as that necessary for the transportation of the heat.

The efficiency of the cooling is measured by the expression  $t = \sqrt[4]{i^4 \cdot l^3 / t^2 \cdot p \cdot k}$ . Since the specific heat per m<sup>3</sup> and °C of the gaseous coolants,  $k$ , is only 1/3000 of that of water, the natural cooling capacity of hydrogen does barely count in comparison to that of water. Yet according to Eq. (1), the natural cooling capacity of hydrogen can be multiplied by shortening the length  $l$  or by rising the number of sections, furthermore by increasing the permitted temperature rise  $t^\circ$ , the thermal capacity  $k$  of the coolant and increasing pressure  $p$  for circulating the cooling medium.



In order to increase the cooling efficiency, every turn of a hydrogen-cooled rotor winding is divided, according to usual practice, into 12–16 sections; therefore the whole rotor winding is divided — as far as cooling is concerned — into 2000–2500 parallel branches. Concurrently the permitted maximum pressure rise of the rotor conductors is forced up to 70–86 °C, the static pressure of the hydrogen to 5–6 kg/cm<sup>2</sup> abs. and the gas velocity to 80–90 m/sec.

In the French report N° 141 presented at the 1964 Conférence Internationale des Grands Réseaux Électriques à Haute Tension (CIGRÉ) in Paris [1], the designers of the 600 MW turbogenerators declared the following on the subject of the hydrogen-cooled rotors: “However these methods, specially with regard to rotor cooling, do not seem very far from their limit, and jumping to a new capacity level over 600 MW will probably be accompanied by an important change in the solutions employed up to present.”

The direct water-cooling of the hollow or profiled rotor conductors is able to take care of this “important change”.

### III. Development of Turbogenerators with Water-Cooled Conductors

Direct water-cooling of the rotor makes it possible from the point of view of cooling to increase the specific performance of hydrogen-cooled turbogenerators by about 25% and to reduce the temperature rise of the rotor conductors from 70 ÷ 86 °C to 25 ÷ 35 °C. The author wants to prove this statement by the following two examples. The subsequent calculations referring to the direct water-cooling of the rotor conductors are based on the patented water-cooled rotor design [2] of the author, according to Figs. 3 and 4.

The output of a turbogenerator cooled by mediumpressure hydrogen, having a rotor of 1030 mm dia. and 3800 mm length, with  $t = 70$  °C maximum rotor conductor temperature rise and 0,85 power factor, will be 100 MW at 3000 r.p.m. With direct water-cooling, at the same maximum temperature rise of 70 °C and  $p = 0,9$  kg/cm<sup>2</sup> hydraulic pressure, this rotor could supply the excitation ampere-turns needed for the circulation of the cooling water is increased to 30 kg/cm<sup>2</sup>, the ampere-turn capacity of the rotor, at 70 °C temperature rise of the conductors, is increased, according to the cooling equation (1), to  $\sqrt[4]{30/0,9} = 2,4$  times the original value. On the other hand, if the rotor performance remains unchanged, with water-cooling at 30 kg/cm<sup>2</sup> the maximum temperature rise of the rotor conductors will, according to Eq. (1), drop to  $70 \sqrt[4]{0,9/30} = 12$  °C.

The performance of water-cooled turbogenerators is limited by the short-circuit ratio and by the transient stability. If these factors permit an output increase of 25%, an about 35% increase of the excitation current and a 27 °C temperature rise of the rotor conductors will require [according to Eq. (1)]

a hydraulic pressure  $p = 1,35^4 70^2/27.0,9 = 20 \text{ kg/cm}^2$  for the circulation of the water. The directly water-cooled stator conductors can produce a current corresponding to 125 MW with unchanged temperature rise, partly through increasing the cooling water velocity, partly through multiplying the number of cooling tubes.

The French report N° 141 presented at the 1964 CIGRÉ Conference deals in detail with the 600 MW turbogenerators being built for Electricité de France. The author of the present paper has tried to re-calculate and re-design the "B" type generator, having a rotor of cca 1150 mm dia. and 6300 mm length, for direct water-cooling of the rotor as shown in Fig. 4. Accordingly, this rotor could supply the excitation corresponding to 600 MW at a hydraulic pressure of 1,1 kg/cm<sup>2</sup> and at unchanged 86 °C temperature rise of the conductors. If, on the other hand, the pressure needed for the circulation of the cooling water is increased to 50 kg/cm<sup>2</sup>, then [according to Eq. (1)] in the case of an unchanged 86 °C temperature rise of the conductors, the ampere-turn capacity of the rotor increases to  $\sqrt[4]{50/1,1} = 2,6$  times that of the hydrogen-cooled rotor; but if the capacity of the rotor remains unchanged, the maximum temperature rise of the rotor conductors drops to  $86 \sqrt{1,1/50} = 13 \text{ °C}$ , as compared to the 86 °C arising with hydrogen-cooling.

Such a considerable increase of the capacity of the 600MW turbo-generator is prevented by the transient stability; but it may be supposed that an adequate development of the speed and voltage governors will permit a 25% increase of the generator output to 750 MW. For a 25% increase of the performance a 35% increase of the excitation current might be required. This increased excitation current can be provided at 20 kg/cm<sup>2</sup> pressure rise and about 35 °C temperature rise of the conductors. The water-cooled stator windings could produce at unchanged temperature rise the current corresponding to 750 MW, partly due to rising of cooling water velocity, partly due to multiplying the cooling pipes.

The direct water-cooling of the stator and rotor windings can be combined with the cooling of the stator laminations and of its structural parts by atmospheric-pressure hydrogen. But it also becomes feasible to cool the stator laminations by water with the aid of copper tubes embedded in aluminium blocks, fitted in the radial ventilation ducts; thus eliminating completely hydrogen from the cooling system of the turbogenerator; so the rotor will turn in air.

#### IV. Efficiency of Water-Cooled Turbogenerators

The direct water-cooling of the stator windings permits to reduce the cross-section of the conductors embedded in the stator slots; hence the radial dimension of the slots, and therefore of the laminations, can be reduced. In this way the weight of a 200 MW generator can be reduced by 20 tons of active



material, but then the efficiency of the generator is also reduced by 0,2%. So the question arises: how will the increase of output obtainable by direct water-cooling of the rotor conductors influence the efficiency of the turbogenerator?

The losses arising in a hydrogen-cooled 133 MW turbogenerator having 950 mm rotor dia., operating at 3000 r.p.m. with a 0,85 power factor, are given in the first column of Table I [3].

**Table I**  
*Distribution of losses arising in turbogenerators*

Cooling	By hydrogen	Stator and rotor windings by water
Output, MW .....	133	166
Mechanical and ventilation losses, kW .....	545	300
Iron losses, kW .....	200	220
Ohmic losses in the stator windings, kW .....	325	510
Ohmic losses in the rotor windings, kW .....	560	1050
Additional losses, kW .....	240	380
Total losses, kW .....	1870	2460
Generator efficiency at full load, %	98,5	98,52

The second column of Table I shows the losses when the stator and the rotor windings are watercooled, the rotor turns in low-pressure hydrogen and the generator produces 25% more energy. Therefore the stator current is increased by 25% and correspondingly the excitation current by cca 35%. Ventilation losses of the rotor are reduced by about 20%, bearing friction losses are unchanged, iron losses are increased by some 10%, ohmic losses in the stator winding and additional losses increase 1,25<sup>2</sup> times, ohmic losses in the rotor winding increase 1,35<sup>2</sup> times.

It follows from the results shown in Table I that the 133 MW hydrogen-cooled turbogenerator — if the stator and rotor windings are water-cooled — is able to supply the output increased by 25% to 166 MW with an efficiency equal to that of the original hydrogen-cooled machine.

## V. Economics of Water-Cooled Turbogenerators

Hydrogen is an explosive cooling gas. Protection against the explosion danger is provided by a hermetically closed casing, shaft sealing by oil, by building-in the coolers and compressors into the casing; for handling the

hydrogen and the sealing oil explosion-proof external installations are needed as well. For these same reasons the internal and external devices are inclined to cause operating troubles. Therefore the elimination of hydrogen-cooling simplifies the operation of the power plant, increases the safety of operation and reduces the manufacturing costs of the generator. According to informative data provided by the Ganz Electrical Works, the manufacturing cost of e.g. the 3000 r.p.m. 50 MW hydrogen-cooled turbogenerator is 35% above that of the air-cooled machine of the same performance.

If it is assumed that the manufacturing costs of the water-cooled turbogenerator of a 25% higher output are 5% higher than those of the air-cooled machine of equal weight, the following comparative Table II is obtained.

**Table II**

*Specific costs of turbogenerators cooled by air, by hydrogen and by water*

Kind of cooling	Output	Manu- facturing costs	Specific costs
With air-cooling . . . . .	100	100	100 : 100 = 1
With hydrogen-cooling . . . . .	100	135	135 : 100 = 1,35
With water-cooling . . . . .	125	105	105 : 125 = 0,84

According to Table II, the manufacturing costs of a water-cooled generator turning at 3000 r.p.m. and having a 50 MW output are by 38% lower than those of the hydrogen cooled machine of same speed and output.

This result of the calculations is also supported by practice. Reports N° 104 (British) [8], N° 129 (Soviet) [9] and N° 141 (French) [1] presented at the 1964 CIGRÉ Conference in Paris deal in detail with the cooling of turbogenerators.

According to report N° 129, a 100 MVA, 3000 r.p.m. turbogenerator has been in operation in the Soviet Union for many years; its stator windings and iron core are cooled by oil, as shown in Fig. 1, while its rotor windings are directly cooled by water; the rotor turns in atmospheric air. The weight of this machine is 1,36 kg/kVA. On the other hand, according to report N° 104, the weight of a British-built 3000 r.p.m., 75 MVA generator cooled by hydrogen at 1,035 kg/cm<sup>2</sup> abs. is 2,3 kg/kVA. Thus the weight of the water-cooled 75 MVA turbogenerator is  $1,36 : 2,3 = 60\%$  of that of the 100 MVA hydrogen-cooled machine. Concurrently, according to Table II, the manufacturing cost of a water-cooled turbogenerator is  $0,84 : 1,35 = 62\%$  of the cost of a hydrogen-cooled machine.



If high-pressure hydrogen is used there is less difference between the weight of water-cooled and that of hydrogen-cooled high-performance turbogenerators. According to report N° 129, the rotor and the stator windings of the 3000 r.p.m., 582 MVA turbogenerator are cooled by water. The weight of this generator is 78% of that of a generator of same weight and output, cooled by high-pressure hydrogen.

Owing to the considerable reduction of manufacturing costs of the water-cooled turbogenerators, shown above, the production costs of energy at the power plant will be reduced, too. Some years ago the author of this paper investigated the initial and operating costs of steam power plants built in the USA, on the base of the yearly data regularly published by *Electrical World* [4]. The conclusion was that the initial costs of 14 steam power plants put into operation during the years 1954–1956 — when units ranging from 30 to 300 Mw were installed — had amounted to an average of 131 USA dollar/kw. Details of investment costs are shown in columns 1 and 2 of Table III.

**Table III**  
*Investment costs of steam power plants in US dollars*

Cooling of the turbogenerator	by hydrogen		by water	
	US dollar	% of total cost	% of total cost	
Estate and construction . . . .	25,7	19,6	19,6	19,6
Boiler plant . . . . .	54,5	41,5	41,5	41,5
Steam turbine plant . . . . .	40,2	30,7	21,5 (70%)	21,5
Turbogenerator plant . . . . .			9,2 (30%)	5,5
Miscellaneous costs . . . . .	10,6	8,2	8,2	7,5
Total costs	131	100	100	95,6

Assuming that the initial costs of the turbogenerator amount to 30% of the price of the turbine-generator unit, the initial costs of the turbine and of the generator are shown separately in column 3 of Table III; in column 4 of the table, the investment costs of the water-cooled generator are taken as being 60% of that of the hydrogen-cooled machine.

According to Table III, the investment costs of steam power plants fitted with completely water-cooled turbogenerators are reduced by 4,4% with respect to those of hydrogen-cooled plants.

Production costs in steam power plants are analyzed in column 4 of Table IV, also on the basis of data provided by *Electrical World* [4]. Column 2 of this table has been computed with regard to the 4,4% reduction arising from the water-cooling of the rotor, as shown in Table III.

**Table IV**  
*Production costs in steam power plants*

	% of total costs	
Interest, amortization, tax, insurance: 14% of invested capital . .	49	46,8
Annual fuel costs . . . . .	44	44,0
Repairs, maintenance, personnel, minor material costs . . . . .	7	7,0
Annual total expense	100	97,8

Hence, according to Table IV, a steam power plant where completely water-cooled turbogenerators are installed produces 1 kWh at costs by 2,2% lower than a plant of equal power equipped with hydrogen-cooled turbogenerators. This saving is equivalent to a 5% reduction of the annual fuel costs. The realization is hampered by serious mechanical problems arising from the different deflection of the shaft and of the rotor-covering cylinder.

### VI. Development of 750–1000 MW Turbogenerators

In steam power plants the reduction of the production costs of the kWh has become possible by rising the thermal efficiency of the plant, in the first place by increasing the pressure and the overheating temperature of the steam. Therefore the efficiency related to fuel consumption has risen from 15 ÷ 20% to 30 ÷ 40% since the beginning of this century. But the newest experience shows that above 560 °C steam temperature it is necessary to use expensive austenitic steels with 13 ÷ 15% chromium and 12 ÷ 14% nickel content, and consequently the savings attained in the fuel are surpassed by the interest and by the amortization of the increased initial costs of the steam power plant [5].

Yet a further possibility for reducing production costs in steam power plants is offered by the reduction of the other component of these costs: the investment costs. Data taken from publications [6, 7] show that, by duplicating the performance of single-shaft turbine-generator units of unchanged design and thermal efficiency, the investment costs of the power plant per kW decrease by some 20%. If, e.g. 1000 MW boiler single shaft turbine-generator units are installed in the power plant instead of 500 MW units, the investment costs of the plant per kW drop by cca 20% and thus the production costs per kWh are correspondingly reduced, too.

Column 1 of Table V shows the percentual investment costs of the steam power plants listed in column 1 of Table IV. Column 2 of Table V shows the



Table V

*Influence of the boiler-turbine-generator units on the production cost of 1 kWh*

Interest and amortization of the investment costs of the power plant .....	49%	39,2%
Annual fuel costs .....	44%	44,0%
Repair, maintenance, personnel, minor material costs .....	7%	5,6%
Total annual expense	100%	88,8%

costs reduced by 20%, attained by duplicating the output of the boiler-turbine-generator unit.

Hence, according to Table V, the reduction in investment costs, obtained by replacing the boiler-single shaft turbine-generator units by such of same design and efficiency but with doubled performance, covers 25% of the fuel costs.

The reduction of the production cost of 1 kWh by 11,2% justifies, in the interest of the consumers, the building of steam power plants consisting of 750–1000 MW boiler-turbine-generator units and the development of the necessary turbogenerators. There are no obstacles to designing and constructing the stator. But in the 600 MW rotors all artificial means for increasing the performance, are used and exhausted such as the power factor, diameter and length, trapezoidal slots, subslots, cooling of the conductors in parallel branches, temperature rise of the conductors, static pressure and velocity of the hydrogen, pick-up, radial and axial cooling, cooling of the hydrogen before and after the compressor.

In Section III it has been pointed out that the French-designed 600 MW turborotor itself could supply 750 MW with direct water-cooling and, after the fulfilment of the stability conditions, the output of the 600 MW turbogenerator could be raised to 750 MW. If by eliminating hydrogen-cooling the built-in coolers are removed, a water-cooled rotor of 7500 mm active length, corresponding to an output of 1000 MW could be placed within the 11,5 m bearing distance. Consequently, from the point of view of cooling there is no obstacle to the development of a 1000 MW output water-cooled turbogenerator; from the point of view of operation, there are two means for the development: ensuring stability and increasing the active length.

In steam power plants operated with conventional fuel, interest and amortization of invested capital, insurance and taxes amount to 49% of the total production cost of the kWh, according to Table IV. On the other hand, in atomic steam power plants, interest and amortization of capital, insurance and taxes attain 68% of the total cost [12]. As it is possible to increase con-

siderably the specific capacity of turbogenerators by a direct water-cooling of the hollow rotor conductors as well as to reduce considerably the investment for the generator by eliminating hydrogen and to reduce substantially the establishment costs of steam power plants by the erection of 750—1000 MW capacity boiler turbine generator units, the water-cooling of the rotors of turbogenerators acquires importance for the realization of atomic steam power plants.

## VII. Water-Cooled Rotor Designs

Some arrangements for the liquid-cooling of rotor windings are presented in the following.

The direct liquid-cooling of the rotor and stator windings of turbogenerators was first proposed by the author of this paper in 1917 in his US Patent N° 1 448 700. According to Fig. 1 the rotor is hermetically closed by a steel tube and water or oil circulates in this closed space from the central bore of the rotor. Realization is hampered by serious mechanical problems arising from the different deflections of the shaft and of the rotor-covering cylinder.

US Patent N° 1 448 700 combines water-cooling of the rotor with oil-cooling of the stator. According to Fig. 1, the stator forms a closed space with the cylinder made from insulating material and fitted into the air gap, and this space is filled with circulating oil. The synchronous phase converters on 46 electric locomotives in operation on the electrified lines of the Hungarian Railways are cooled according to this patent. The cooling of the phase converters is shown in Fig. 2.

On the basis of the 30 years experience gained with the phase converters shown in Fig. 2, the author of this paper applied for, and was granted, a new US Patent, N° 3 034 003, for the direct water-cooling of the hollow conductors of turborotors. The winding scheme of the arrangement is shown in Fig. 3, its longitudinal section in Fig. 4.

According to Fig. 4, the cooling waters enters on the excitation side from the central bore, through radial holes, and leaves the rotor body in the same way on the turbine side. For conducting the cooling water from the radial holes into the winding heads, the lower and the upper turn of the excitation-side winding heads is axially drilled into a "fitting" space, from where they are connected through 3-way connectors and intermediary tubes to the radial holes of the shaft.

On the lower half of Fig. 4 the winding heads, arranged concentrically one behind the other, are drawn out by means of a double bend; according to the upper half of Fig. 4, the windings situated on the same cylindrical surface are drawn out without bending between the winding heads. The 3-way connectors and the hermetic joints belonging to the radial borings of the shaft and the



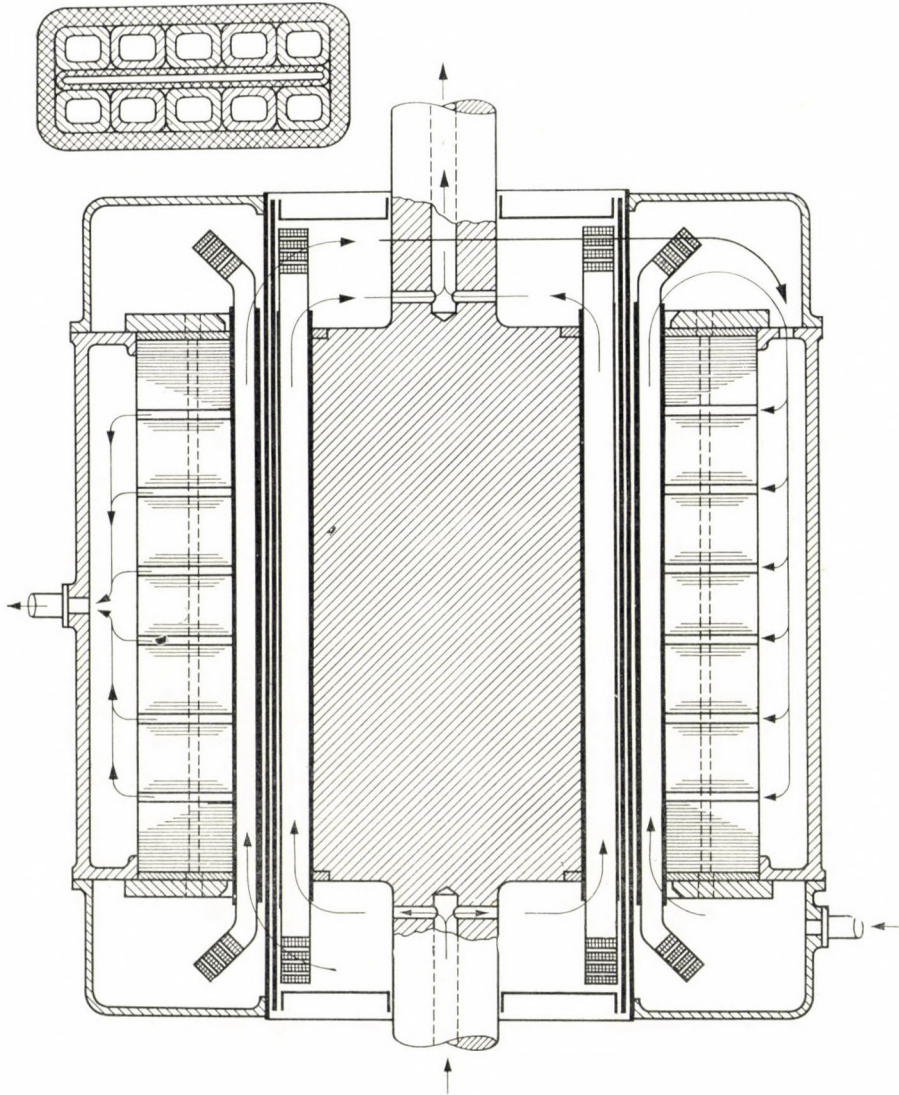


Fig. 1. Liquid-cooled rotor and stator arrangement, 1917

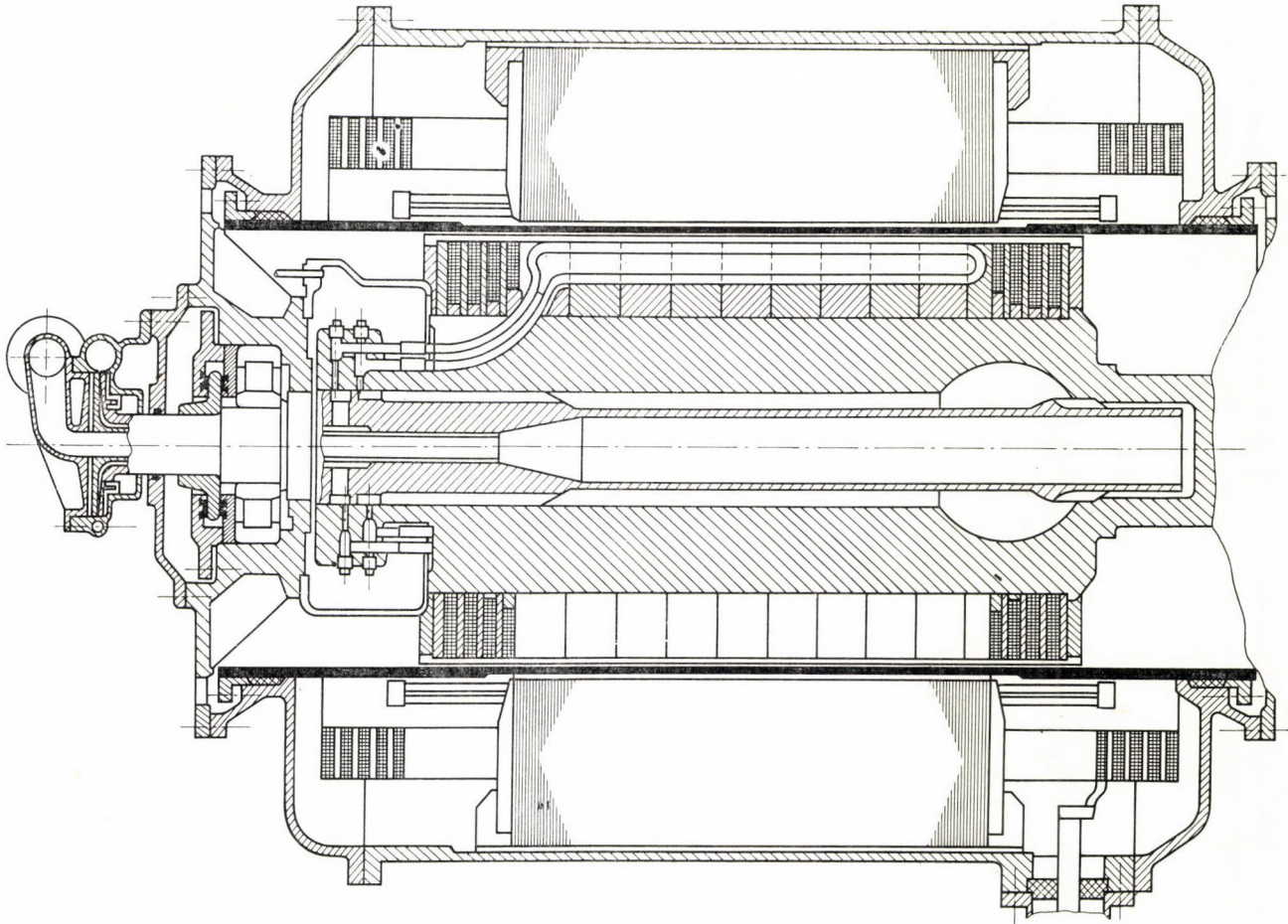


Fig. 2. Liquid-cooled synchronous phase converter



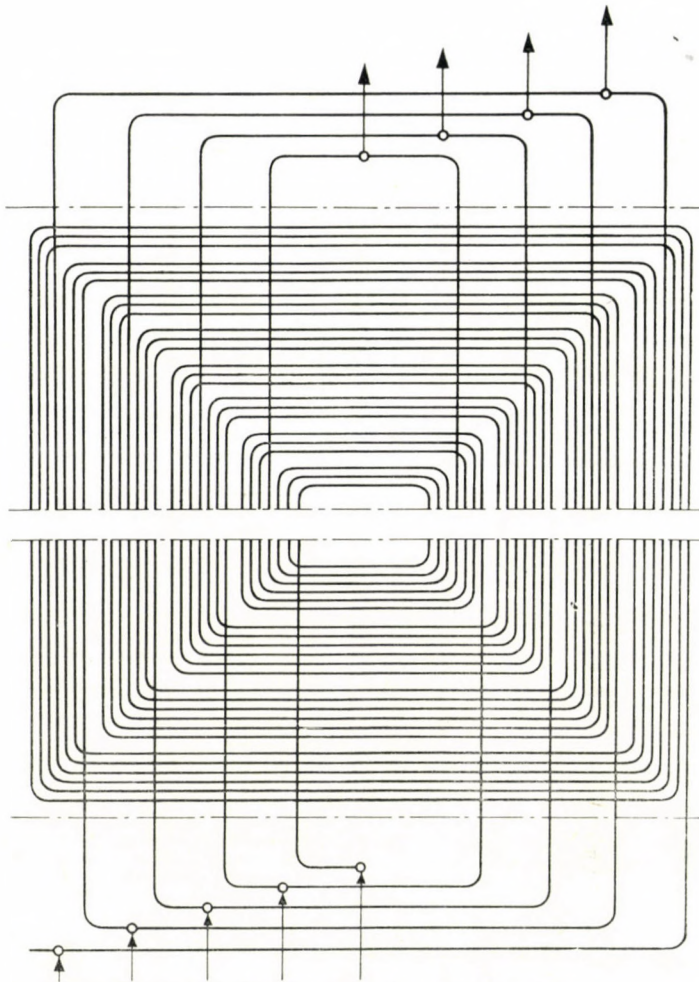


Fig. 3. Winding scheme of water-cooled rotor

insulated connections to the radial shaft holes can thus be assembled, inspected and repaired without disassembling the winding-head-retaining rings.

The Hungarian Foreign Trading Co. Komplex has concluded a license arrangement for the use of this patent in Switzerland, France and Western Germany with Brown Boveri Co. and, for its use in France, with the French Société Alsthom, Paris-Belfort.

Recently Mr. CAIN, engineer of General Electric Co., has proposed a rotor cooling shown in Fig. 5, similar to that of Fig. 1.

According to Fig. 6, the water inlet and outlet on the rotor winding heads are achieved by flexible insulating pipes. According to the figure every turn of every winding is connected parallel, with respect to cooling [11].

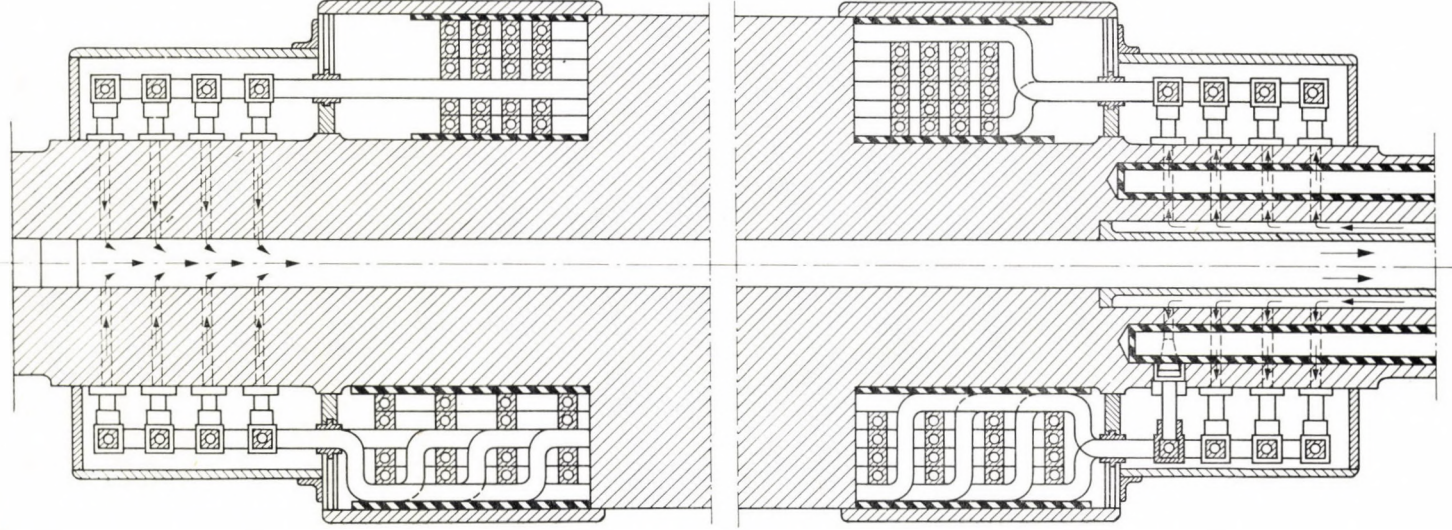


Fig. 4. Longitudinal section of water-cooled rotor



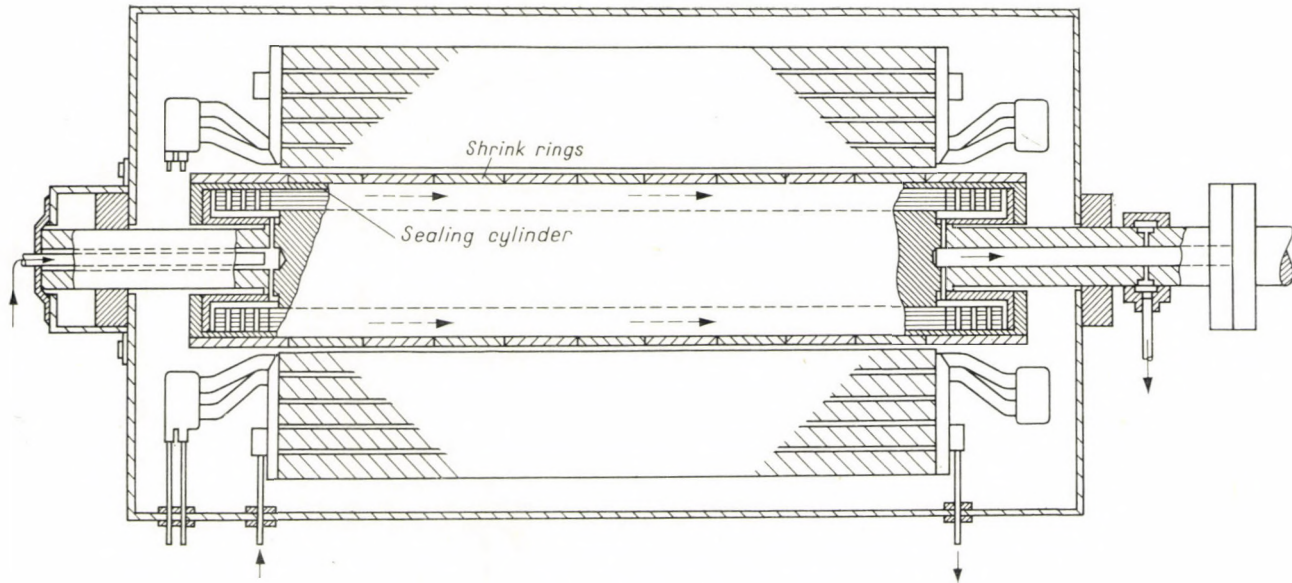


Fig. 5. Longitudinal section of liquid-cooled rotor

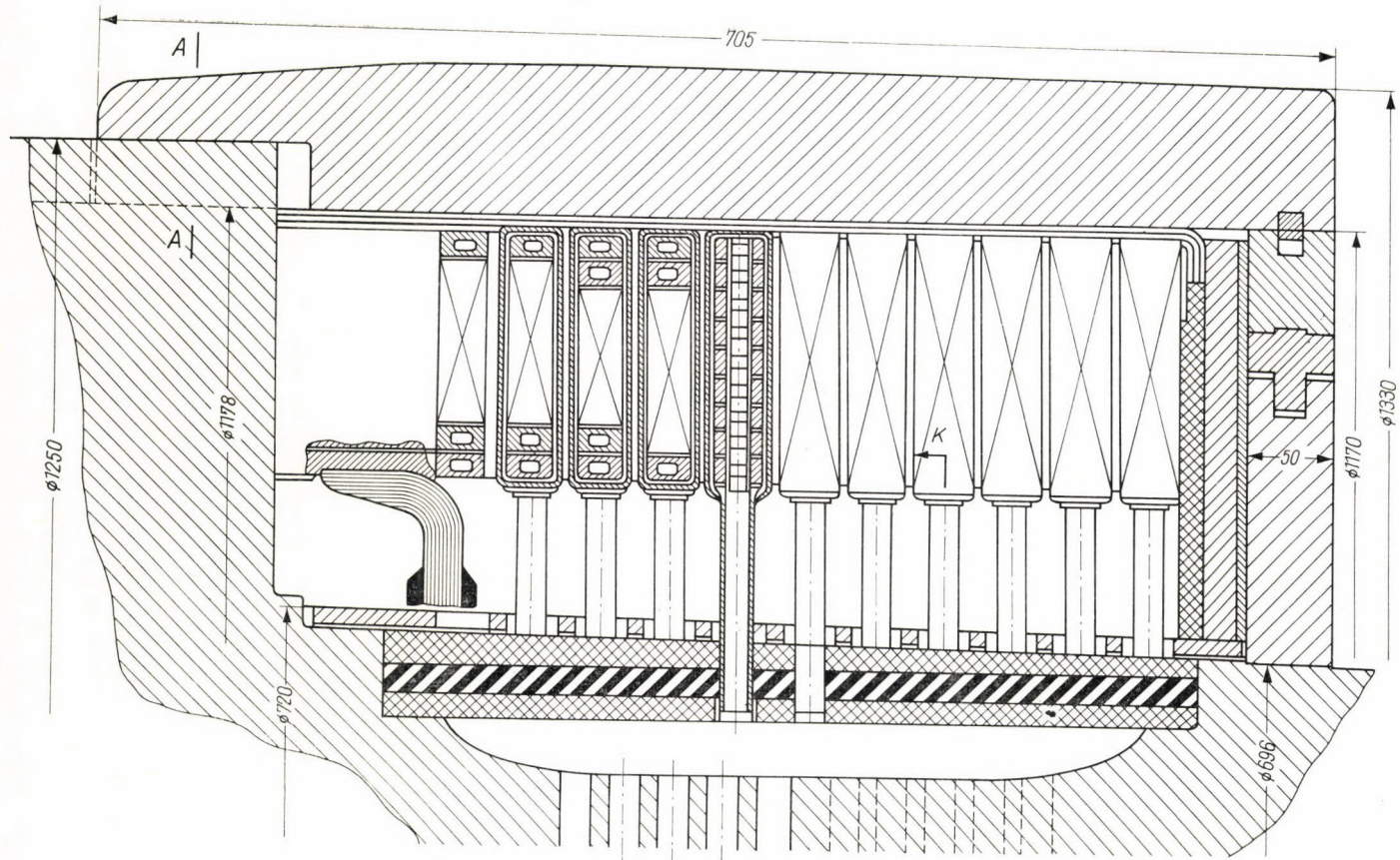


Fig. 6. Inlet and outlet of water on liquid-cooled rotor



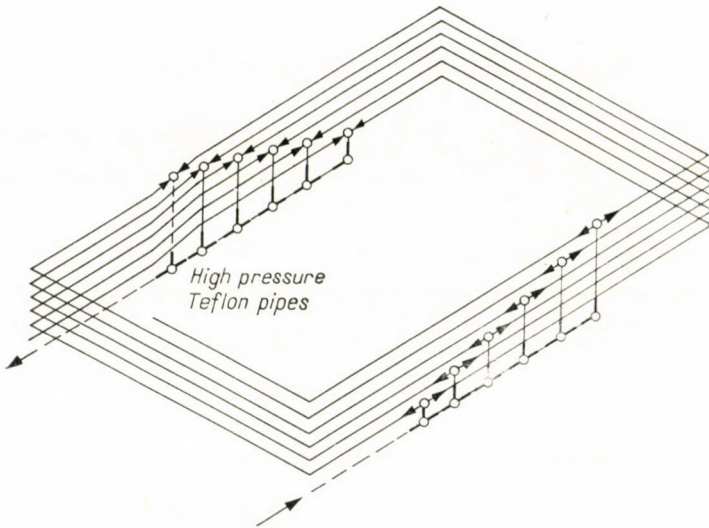
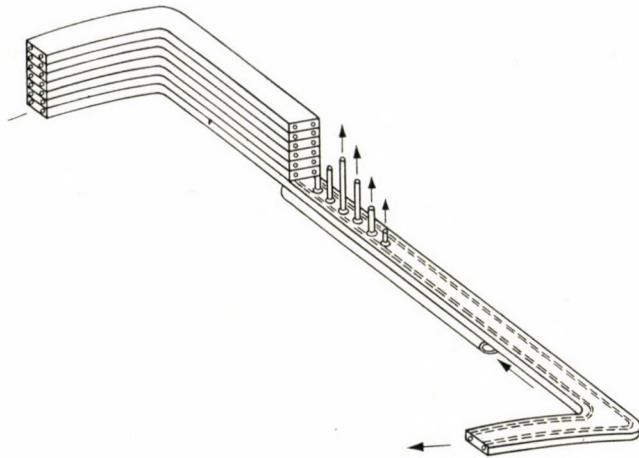


Fig. 7. Distribution of water on liquid-cooled rotor

The rotor cooling proposed by WILLYOUNG and BECKER, and shown on Fig. 7, is similar to that of Fig. 6, inasmuch the cooling water is lead through insulating pipes to each hollow rotor conductor. But the inlet water does not come from a container below the winding heads, but from distribution pipes laid in the slots below the turns.

The AEG has been engaged in the development of water-cooled turbo-generators for many years. Fig. 7 is taken from *AEG-Mitteilungen* (1962), N° 9—10 [10].

#### REFERENCES

1. FAVEZ, B.—MAGOUX, I.—SÉNÉCHANT, P.—DUREAULT, M.—GERALDE, P.—THERY, M.—WOLFHUGEL, A.: Characteristics of generators designed for single shaft 600 MW thermal sets. Conférence Internationale des Grands Réseaux Électriques à Haute Tension, Paris 1964.
2. US Patent N 3,034,003 of SEIDNER, M.: Liquid-cooled rotors for Turbo-alternators.
3. BAYLAC, H.: Les grands turbogénérateurs à ventilation interne des conducteurs. *Bull. de la Société Française des Électriciens* (1960), juillet.
4. KEARNEY, I. I.: 10th Steam Station Survey; *Electrical World* (1957), Oct. 7. 11th Steam Stations Cost Survey; *Electrical World* (1959), Oct. 5.
5. SPORN, P.—FIALA, S. N.: Evaluation of supercritical pressure steam plants based upon the first time operating experience. World Power Conference, Montreal 1958.
6. KLINGENBERG, G.: *Bau großer Elektrizitätswerke*. Springer Verlag, Berlin 1924.
7. BOOTH, E. L.—DORE, I. W. H.: The development of large electrical generating units. World Power Conference, Madrid 1960.
8. JAMES, L. W.—CRECK, F. R. L. — TUDGE, I.: Progrès récents dans la Technique du Refroidissement des Turbo-Générateurs de Grande Puissance en Grande-Bretagne. Conférence Internationale des Grands Réseaux Électriques à Haute Tension, Paris 1964.
9. KOSTENKO, M. T.—KOZOVSKY, E. Y.—IVANOV, M. P.—STANISLAVSKY, L. Y.—POTEKHIN, K. F.: Générateurs entraînés par turbines thermiques et hydrauliques de grande puissance et de facteur d'utilisation élevé. Conférence Internationale des Grands Réseaux Électriques à Haute Tension, Paris 1964.
10. WANKE, K.: Wassergekühlte Turbogeneratoren. *AEG-Mitteilungen* (1962), Nr. 9—10.
11. ANEMPODISTOV, V. P.—KASHARSKII, E. G.—URUSOV, L. D.: Problems in the design and development of 750 Mw Turbogenerators. Pergamon Press, London 1963.
12. BROWN, F. H. S.: Development of Modern Steam Power Station Plant. *The Engineer* (1963), Jan. 4.

#### DIE WIRTSCHAFTLICHKEIT VON WASSERGEKÜHLTEN TURBOGENERATOREN

M. SEIDNER

#### ZUSAMMENFASSUNG

Ursprünglich wurden Turbogeneratoren mit Luft gekühlt. Bei einer solchen indirekten Kühlung wandert die in den Stator- und Rotorspulen entstehende Wärme durch die Isolation und die Zähne zu den luftbestrichenen Flächen. Um 1937 begannen die Fabriken in den USA die Kühlluft durch Wasserstoff zu ersetzen und um 1952 gingen sie zur direkten Wasserstoffkühlung des Inneren der Hohlleiter über. Dieses wirksame Kühlverfahren wird heute allgemein angewendet.

Bei direkter Kühlung der Leiter strömt der mit Wärme beladene Wasserstoff durch die in den Leitern ausgebildeten engen Öffnungen zum Kühler. Da Wasser durch gleiche Querschnitte, bei gleicher Geschwindigkeit und gleicher Temperaturerhöhung, ungefähr 3000-mal mehr Wärme abführen kann als Wasserstoff von atmosphärischem Druck, werden heute die Statorspulen von wasserstoffgekühlten Turbogeneratoren allgemein mit Wasser gekühlt. Die direkte Wasserkühlung der Rotorspulen wird jedoch durch die mit der Umdrehungsgeschwindigkeit von 3000 bzw. 3600 U/min verbundenen konstruktiven Schwierigkeiten behindert. Da



jedoch die Leistung eines Turbogenerators gerade von dem durch Wasserstoff weniger gekühlten Rotor begrenzt wird, ist neuerdings die Wasserkühlung der hohlen Rotorleiter in den Vordergrund getreten.

Durch die Wasserkühlung der Rotor- und Statorspulen wächst die spezifische Leistung der Turbogeneratoren bei kleinen Maschinen um etwa 40%, bei großen Maschinen um etwa 25% und die Fertigung von wassergekühlten Einheiten mit Leistungen von 30 bis 1000 MW wird ermöglicht. Die vorliegende Arbeit untersucht die Wirtschaftlichkeit der wassergekühlten Turbogeneratoren, ihren Wirkungsgrad, die Methoden für ihre Entwicklung und beschreibt Konstruktionen für die Wasserkühlung des Rotors.

## L'ÉCONOMIE DES TURBO-GÉNÉRATEURS REFROIDIS PAR L'EAU

M. SEIDNER

### RÉSUMÉ

Les turbo-générateurs étaient d'abord refroidis à l'air. Avec ce système de refroidissement indirect, la chaleur engendrée dans les enroulements du stator et du rotor s'écoule, à travers l'isolement et les dents, aux surfaces exposées au passage de l'air. Vers 1937, les constructeurs américains commençaient à remplacer l'air réfrigérant par l'hydrogène et ensuite, aux alentours de 1952, ils passaient au refroidissement direct par l'hydrogène à l'intérieur de conducteurs creux. Ce mode de refroidissement efficace est utilisé maintenant dans le monde entier.

Au refroidissement direct des conducteurs, le courant d'hydrogène chargé de chaleur passe au réfrigérateur à travers les ouvertures étroites ménagées dans les conducteurs. Étant donné qu'à travers des sections égales, à vitesse et à augmentation de température égales, l'eau transporte env. 3000 fois plus de chaleur que l'hydrogène de pression atmosphérique, le refroidissement par l'eau des enroulements statoriques des turbogénérateurs refroidis à l'hydrogène est devenu d'un usage général. Par contre, le refroidissement direct par l'eau des enroulements du rotor est gêné par certaines difficultés de construction, liées à la vitesse de 3000 à 3600 t/min. Néanmoins, la puissance du turbo-générateur étant précisément limitée par celle du rotor, moins refroidi par l'hydrogène, on fait de plus en plus appel au refroidissement par l'eau des conducteurs creux du rotor.

Le refroidissement par l'eau des enroulements du rotor et du stator augmente la puissance spécifique des petites machines d'env. 40%, et celle des grandes machines d'env. 25%, et rend possible la construction d'unités ayant des puissances de 30 à 1000 MW. L'auteur examine l'économie, l'efficacité et les méthodes de développement des turbogénérateurs refroidis par l'eau, et décrit certaines constructions appropriées pour le refroidissement à l'eau du rotor.

## ЭКОНОМИЧНОСТЬ ТУРБОГЕНЕРАТОРОВ ВОДЯНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

М. СЕЙДНЕР

### РЕЗЮМЕ

Первоначально турбогенераторы охлаждались воздухом. При таком способе охлаждения тепло, выделяющееся в обмотках ротора и статора, переносится через изоляцию и зубцы статора к частям, внешняя поверхность которых охлаждается циркулирующим воздухом. Приблизительно в 1947 году на американских заводах начали заменять воздушное охлаждение на охлаждение водородом, затем в 1952 году перешли непосредственно на внутреннее водородное охлаждение полых проводников обмоток. Этот способ охлаждения теперь используется во всем мире.

При непосредственном внутреннем охлаждении проводников обмоток нагретый водород отводит тепло через узкое отверстие в проводниках. Поскольку вода при том же сечении, скорости движения и перепаде температур может отвести в 3000 раз больше тепла чем водород при атмосферном давлении, то обмотки статора турбогенератора с водородным охлаждением теперь в основном охлаждаются водой.

Трудности конструкции, связанные с высоким числом оборотов 3000—3600 об/мин, являются причиной, мешающей применению водяного охлаждения для обмоток ротора. Но так как мощность в недостаточной степени охлажденного водородом ротора ограничивает мощность генератора, то снова встал вопрос о применении охлаждения полых проводников обмоток ротора. Удельная мощность генераторов с охлаждением обмоток ротора и статора у маломощных машин увеличивается на 40%, мощных — на 25%, и изменяется в пределах от 30 Мвт до 1000 Мвт. В данной работе исследуется экономичность турбогенераторов с водяным охлаждением, их *кпд.*, дальнейшие пути развития и известные конструкции роторов с водяным охлаждением.



# ELASTO-PLASTIC BEHAVIOUR OF A ROUND BAR SUBJECTED TO AXIAL FORCE AND TORQUE

G. SVÉD and D. S. BROOKS

UNIVERSITY OF ADELAIDE

[Manuscript received July 1, 1964]

The behaviour of a long bar of constant section, made from an ideal elastic-plastic material, and subjected to axial loading and torque is investigated. The equilibrium and compatibility equations and the Reuss stress-strain relationships are expressed in terms of modified stresses (conventional stresses divided by the yield strength in shear) and modified strains (conventional strains multiplied by the ratio of the shear modulus to the yield strength in shear). The change in stresses and strains for increasing load is found by solving a system of four simultaneous partial differential equations of hyperbolic type. Numerical solutions are obtained for a bar subjected to constant twist and increasing axial pull. The results are shown to be independent of the ratio of the shear modulus to the yield strength in shear, but dependent on Poisson's ratio. The variation with Poisson's ratio is small, justifying the assumptions made by PRAGER and HODGE in treating the material as incompressible.

## I. Introduction

Although the principal reason for the use of plastic methods in the design of engineering structures is to ascertain as to whether the structure possesses adequate strength before collapse, it is not uncommon to encounter problems in which the deflections must also be considered. For structures composed of members carrying only bending moments in the elastic and elastoplastic ranges, the simple engineering approach gives good agreement between theoretical and experimental deflections, provided the effects of upper yield and strain hardening are taken into account. In this approximate method, only the normal stresses acting parallel to the axis of each particular member are considered, and, in essence, the deflections are found by the integration of the expressions for the curvature.

Where a structural member is subjected to combined axial load and torsion or combined bending moment and torsion, it is difficult to predict analytically the behaviour of the member in the elasto-plastic range. For a section which is fully plastic under the action of combined bending and torsion, HILL and SIEBEL (1953) obtained upper and lower bound solutions, and HODGE and SANKARANARAYANAN (1959) have shown how approximations to the structural behaviour at collapse may be found by replacing the yield curve relating to the bending moment and torque for full plasticity by a set of straight lines forming a closed polygon. Explicit expressions for the stress distributions

and deformations of solid circular bars carrying combined tension and torsion in the elasto-plastic range have been determined by PRAGER and HODGE (1951) and GAYDON (1952), but in both bases the analysis was restricted to a material with Poisson's ratio  $\nu$  equal to  $\frac{1}{2}$ . HILL and SIEBEL (1951) analysed the behaviour of a thin tube under combined bending and torsion using the Reuss stress-strain relations and the von Mises yield criterion. By making the wall thickness of the tube small in comparison with the external radius, there was no need to take account of the triaxiality of stresses which would normally arise in a member having a material with Poisson's ratio different from  $\frac{1}{2}$ . SIEBEL (1953) obtained experimental confirmation of the above theory and was able to present experimental evidence justifying the use of the Reuss stress-strain relationships in conditions where the elastic and plastic parts of the strain increment are comparable and where the stress distribution is non-uniform.

In this paper, the behaviour of a long bar of circular cross-section carrying an axial tension combined with torsion in the elasto-plastic range is examined. The material is assumed to be ideally elastic-plastic, that is, to behave elastically under stresses which do not satisfy the yield condition and to deform under constant stress when the yield condition is satisfied. Elastic compressibility of the material is taken into account, so that allowance may be made for the actual Poisson's ratio of the material used. The von Mises yield condition is used, together with the Reuss stress-strain relationships.

## 2. Analysis of Stresses and Strains

Cylindrical coordinates  $r, \theta, z$  are used in the analysis; the  $z$  axis coincides with the axis of the bar. The displacements in the directions of the coordinate axes are  $u, v$ , and  $w$ .

Instead of working with the conventional strain components, it will be convenient to introduce modified strain components as defined by equations (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{2G}{k} u_{,r}; & \varepsilon_\theta &= \frac{2G}{k} \frac{1}{r} (u + v_{,\theta}); & \varepsilon_z &= \frac{2G}{k} w_{,z}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{G}{k} \left( \frac{1}{r} u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{1}{r} v \right); & \gamma_{\theta z} &= \frac{G}{k} \left( v_{,z} + \frac{1}{r} w_{,\theta} \right), \\ \gamma_{zr} &= \frac{G}{k} (w_{,r} + u_{,z}). \end{aligned} \quad (1)$$

In these expressions  $G$  is the shear modulus and  $k$  is the yield strength of the material in shear; suffixes following a comma indicate differentiation, e.g.  $u_{,r} \equiv \partial u / \partial r$ ;  $u_{,\theta} \equiv \partial u / \partial \theta$ , etc. The strain components thus defined are



dimensionless (as are the conventional strain components) and they are generally of the same order of magnitude as the dimensionless stress components defined as the conventional stress components divided by  $k$  [see equations (2)]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\bar{\sigma}_r}{k}; & \sigma_\theta &= \frac{\bar{\sigma}_\theta}{k}; & \sigma_z &= \frac{\bar{\sigma}_z}{k}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{k}; & \tau_{\theta z} &= \frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{k}; & \tau_{zr} &= \frac{\bar{\tau}_{zr}}{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

From axial symmetry with respect to the axis of the bar it follows that the displacements, strains and stresses are independent of  $\theta$ . If it is assumed further that the section of the bar is uniform in the axial direction and only end tractions are acting on the bar, then the radial displacement is independent of  $z$ , while the tangential and axial displacements are linear functions of  $z$  and all stress components are independent of  $z$ .

Equations (1) reduce to

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{2G}{k} u_{,r}; & \varepsilon_\theta &= \frac{2G}{k} \cdot \frac{1}{r} u; & \varepsilon_z &= \frac{2G}{k} w_{,z}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2G}{k} \left( v_{,r} - \frac{1}{r} v \right); & \gamma_{\theta z} &= \frac{2G}{k} v_{,z} = 0; & \gamma_{zr} &= \frac{2G}{k} w_{,r}. \end{aligned} \quad (3)$$

The equilibrium equations [see TIMOSHENKO and GOODIER (1951)]:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \tau_{zr,z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0, \\ \tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} + \tau_{\theta z,z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0, \\ \tau_{zr,r} + \frac{1}{r} \tau_{\theta z,\theta} + \sigma_{z,z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

are reduced in the present case, after omitting derivatives that are zero, to

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0, \\ \tau_{r\theta,r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0, \\ \tau_{zr,r} + \frac{1}{r} \tau_{zr} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

From the last two equations in group (5) it follows that

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= \frac{c_1}{r^2}, \\ \tau_{zr} &= \frac{c_2}{r}.\end{aligned}\tag{6}$$

From boundary conditions [at the outer boundary both shear stress components appearing in equations (6) are zero]  $c_1 = c_2 = 0$ .

Since  $\tau_{r\theta} = 0$  implies that  $\gamma_{r\theta} = 0$ , integrating the relevant equation (with  $u_{,\theta} = 0$ ) from group (3)

$$v_{,r} - \frac{1}{r}v = 0\tag{7}$$

and noting that  $v$  is a linear function of  $z$ ,

$$v = rzv(\varrho)\tag{8}$$

where  $\varrho$  is some parameter characterizing the state of plastic deformation and  $\bar{r} = r/R$ , with  $R =$  outer radius of the shaft. Stresses and other displacements are also functions of the state of plastic deformation, so that the stress components to be considered are

$$\sigma_r = \sigma_r(r, \varrho); \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(r, \varrho); \quad \sigma_z = \sigma_z(r, \varrho); \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(r, \varrho)\tag{9}$$

and the displacements are

$$u = R\bar{u}(r, \varrho); \quad v = \bar{r}z\bar{v}(\varrho); \quad w = z\bar{w}(r, \varrho)\tag{10}$$

( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  are also dimensionless).

The stress and strain deviators are defined as

$$\begin{aligned}s_r &= \sigma_r - s, & s_\theta &= \sigma_\theta - s, & s_z &= \sigma_z - s, \\ e_r &= \varepsilon_r - e, & e_\theta &= \varepsilon_\theta - e, & e_z &= \varepsilon_z - e\end{aligned}\tag{11}$$

where

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z), \\ e &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z).\end{aligned}\tag{12}$$

From equations (3), (11), and (12)

$$\begin{aligned}e_r &= \frac{2G}{3k} \left( 2u_{,r} - \frac{1}{r}u - \varepsilon_z \right), \\ e_\theta &= \frac{2G}{3k} \left( \frac{2}{r}u - u_{,r} - \varepsilon_z \right).\end{aligned}\tag{13}$$



Differentiating the last two equations with respect to  $r$  and noting that  $e_{z,r} = 0$ , both  $u$  and  $\varepsilon_z$  can be eliminated, giving the compatibility equation

$$e_{r,r} + 2 e_{\theta,r} = \frac{1}{r} (e_r - e_{\theta}). \quad (14)$$

Also from equations (5), (11), and (12), the only equilibrium equation to be satisfied can be written

$$s_{r,r} + s_{,r} + \frac{1}{r} (s_r - s_{\theta}) = 0. \quad (15)$$

### 3. Stress-Strain Relationships. Yield criteria

When the bar is in the elasto-plastic condition, it will consist of an inner cylindrical core which is elastic and an outer annulus which has become plastic. It is assumed that the external loading system causes the radius of the elasto-plastic boundary to decrease monotonically from the value at the outer periphery when the section is fully elastic to zero when the section is fully plastic. It will be convenient to identify the parameter  $\varrho$  introduced earlier with the instantaneous radius of this boundary, divided by  $R$ , the outer radius of the shaft.

The Reuss stress-strain relationships for the plastic annulus can be written

$$\begin{aligned} e_{r,\varrho} &= s_{r,\varrho} + \lambda s_r, \\ e_{\theta,\varrho} &= s_{\theta,\varrho} + \lambda s_{\theta}, \\ e_{z,\varrho} &= s_{z,\varrho} + \lambda s_z, \\ \gamma_{,\varrho} &= \tau_{,\varrho} + \lambda \tau, \end{aligned} \quad (16)$$

(where, for convenience sake, the suffix  $\theta z$  has been dropped from the only non-vanishing shearing strain and stress components), together with

$$e = \frac{(1 - 2\nu)}{(1 + \nu)} s. \quad (17)$$

In these equations  $\lambda$  is non-negative parameter, depending on the rate of plastic strain and  $\nu$  is Poisson's ratio.

Accepting the von Mises yield criterion, the stress components in the plastic zone and along its boundary must satisfy the equation

$$s_r^2 + s_r s_{\theta} + s_{\theta}^2 + \tau^2 = 1 \quad (18)$$

since all stress components are expressed as multiples of  $k$ , the yield strength of the material in pure shear.

In the elastic core of the bar, equations (17) are replaced by the equations following from Hooke's law: these elastic equations coincide with the Reuss equations if  $\lambda$  is set equal to zero.

Eliminating  $\lambda$  and  $\tau$  with the help of the last Reuss equation and the yield criterion provides two equations relating the derivatives of the radial and tangential stress and strain deviators.

Substituting the value of  $\tau$  from equation (18) into the last of equations (16) and solving for  $\lambda$  gives

$$\lambda = (1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{r,\varrho} + \frac{(2s_r + s_\theta)s_{r,\varrho} + (2s_\theta + s_r)s_{\theta,\varrho}}{2(1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta)}. \quad (19)$$

Substituting into the first two Reuss equations, provides after some algebra:

$$2(1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta) e_{r,\varrho} - (2 - 2s_\theta^2 - s_r s_\theta) s_{r,\varrho} - (2s_r s_\theta + s_r^2) s_{\theta,\varrho} = s_r (1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta)^{\frac{1}{2}} \gamma_{r,\varrho}, \quad (20)$$

and

$$2(1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta) e_{\theta,\varrho} - (2 - 2s_r^2 - s_r s_\theta) s_{\theta,\varrho} - (2s_r s_\theta + s_\theta^2) s_{r,\varrho} = s_\theta (1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta)^{\frac{1}{2}} \gamma_{r,\varrho}. \quad (21)$$

These two equations, together with the compatibility equation (14) reproduced as equation (22)

$$e_{r,r} + 2e_{\theta,r} = \frac{1}{r}(e_r - e_\theta), \quad (22)$$

and the equilibrium equation (15), from which  $s$  has been eliminated by the use of (17), (11) and (12)

$$s_{r,r} + \frac{1+\nu}{1-2\nu} e_{r,r} + \frac{1+\nu}{1-2\nu} e_{\theta,r} + \frac{1}{r}(s_r - s_\theta) = 0 \quad (23)$$

form a set of hyperbolic first order differential equations in the dependent variables  $e_r$ ,  $e_\theta$ ,  $s_r$ ,  $s_\theta$ . The characteristics of these equations are  $r = \text{const.}$  and  $\varrho = \text{const.}$  [see PRAGER and HODGE (1951)]. A numerical solution can be obtained for known boundary conditions.

In the elastic central part the solutions supplied by the theory of elasticity apply; for a linearly distributed shearing stress at the ends, a uniform radial stress  $\sigma_{r\varrho}$  on the elasto-plastic boundary and axial strain  $\varepsilon_z$  that is independent of the radius, it follows that

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_{r\varrho} \quad (\text{constant}), \quad (24)$$

$$\sigma_z = (1 + \nu) \varepsilon_z + 2\nu \sigma_{r\varrho} \quad (\text{constant}). \quad (26)$$



The hydrostatic stress in the elastic core thus becomes

$$s = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z),$$

$$s = \frac{1}{3}(1 + \nu)(2\sigma_{r\varrho} + \varepsilon_z), \quad (26)$$

and the stress deviator components

$$s_r = s_\theta = \frac{1}{3}(\sigma_{r\varrho}(1 - 2\nu) - \varepsilon_z(1 + \nu)). \quad (27)$$

From the yield equation (18) follows, after writing  $\tau_\varrho$  for the shearing stress on the elasto-plastic boundary

$$s_r = s_\theta = \left( \frac{1 - \tau_\varrho^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

#### 4. Numerical Solution

The elasto-plastic behaviour of a round bar subjected to a constant twist and to a gradually increasing axial force (or to a gradually increasing axial strain) is investigated as a simple illustration of the formulae derived. For this bar  $\gamma_{r\varrho} = 0$  and the four equations to be solved can be rearranged to give

$$e_{r,\varrho} - As_{r,\varrho} - Bs_{\theta,\varrho} = 0, \quad (20a)$$

$$e_{\theta,\varrho} - Cs_{\theta,\varrho} - Ds_{r,\varrho} = 0, \quad (21a)$$

$$e_{r,r} + 2e_{\theta,r} = \frac{1}{r}(e - e_\theta), \quad (22a)$$

$$s_{r,r} + \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}e_{r,r} + \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}e_{\theta,r} = -\frac{1}{r}(s_r - s_\theta) \quad (23a)$$

where

$$A = \frac{2 - 2s_\theta^2 - s_r s_\theta}{1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta}; \quad B = \frac{2s_r s_\theta + s_r^2}{1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta}, \quad (29)$$

$$C = \frac{2 - 2s_r^2 - s_r s_\theta}{1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta}; \quad D = \frac{2s_r s_\theta + s_\theta^2}{1 - s_r^2 - s_\theta^2 - s_r s_\theta}.$$

The four quantities defined by equations (29) are readily calculated at every point where the stresses are known; the same applies to the right hand side of equation (23a) and also to the right hand side of equation (22a) if the strains are also known.

The equations (20a) to (23a) are rewritten in finite difference form; only increments with respect to  $\varrho$  appear in the first two equations and increments with respect to  $r$  in the last two. For the sake of convenience, the increments in  $r$  and  $\varrho$  are made numerically equal; in the problem under investigation the elasto-plastic boundary moves inwards, hence the change in  $\varrho$  ( $\Delta\varrho$ ) is negative.

Figure 1 shows the sequence of operations in the  $r - \varrho$  plane. Let it be assumed that by some means the stresses and strains have been determined at all relevant points at the time when the elasto-plastic boundary is at the

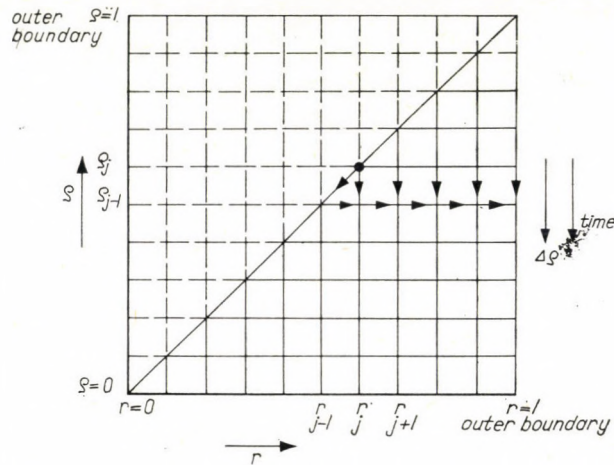


Fig. 1

point characterized by the value  $\varrho_j$ . (For radii greater than  $\varrho_j$ , the bar is in the plastic state, shown in solid lines in Fig. 1, while for  $r < \varrho_j$ , the bar is elastic, shown in dotted lines in Fig. 1.) It is desired to investigate the effect of a change  $\Delta\varrho$  in the boundary radius; the new radius is  $\varrho_{j-1}$ . Since the twist was assumed to remain unchanged, the shearing stress in the elastic part (including the boundary) remains unchanged. Once  $\tau_\varrho$  is known, equation (28) can be used to calculate  $s_r$  and  $s_\theta$  at this point; since the elastic relationships apply at this point,  $e_r = s_r$  and  $e_\theta = s_\theta$ .

Substituting the stresses and strains at  $r = r_j$ , for  $\varrho = \varrho_j$  in equations (20a) and (21a), and the values at  $r = r_{j-1}$  for  $\varrho = \varrho_{j-1}$ , and solving the resulting four simultaneous equations,  $e_r$ ,  $e_\theta$ ,  $s_r$ , and  $s_\theta$  are obtained at  $r = r_j$  for  $\varrho = \varrho_{j-1}$ . The calculations are repeated, using values for  $r = r_{j+1}$  and  $\varrho = \varrho_j$  in the first two equations,  $r = r_j$  and  $\varrho = \varrho_{j-1}$  in the last two, to give the desired quantities for  $r = r_{j+1}$  and  $\varrho = \varrho_{j-1}$ . Further repetitions permit the calculation of all values, right to the outer boundary.

The facts that the radial stress at the outer boundary is zero and that the sum of the strain deviator components is also zero are used to calculate



the axial strain and hence the axial stress in the elastic core of the bar

$$\sigma_r = s_r + s = 0 \quad \text{or} \quad s = -s_r \quad (30)$$

on the free (outer) boundary;

$$\varepsilon_z = e_z + e = -(e_r + e_\theta) + e = -(e_r + e_\theta) - \frac{1-2\nu}{1+\nu} s_r \quad (31)$$

from equations (11), (17) and (30).

The values substituted in equation (31) are those applying at the outer boundary; however  $\varepsilon_z$  has the same value right through the section. Once  $e_z$  is known,  $e$  can be calculated at every point since

$$e = \varepsilon_z - e_z = \varepsilon_z + e_r + e_\theta. \quad (32)$$

Equation (17) is used to compute  $s$  and equations (11) to provide the true stresses and strains. Numerical integration (Simpson's rule) allows the determination of the axial load and of the torque for every value of  $\varrho$ .

## 5. Discussion of Results

The University of Adelaide's "IBM 1620" computer was used to obtain numerical results. In most calculations  $\Delta r = -\Delta p = 0,1$  was used; a check with  $\Delta r = -\Delta \varrho = 0,0625$  and  $0,05$  and an  $\Delta^2$ -type extrapolation showed

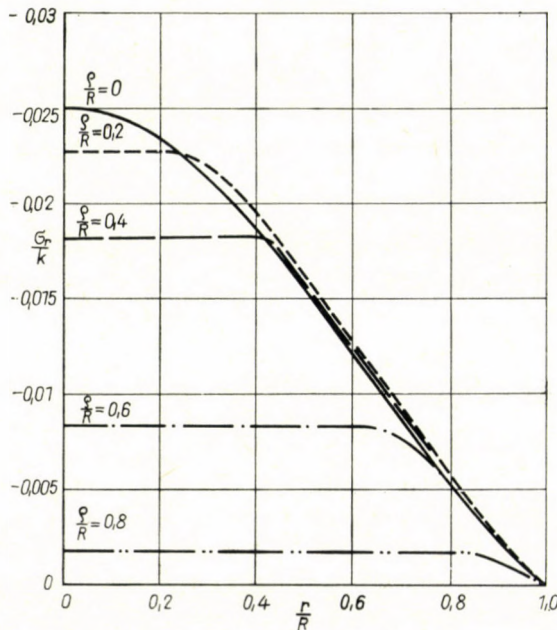


Fig. 2

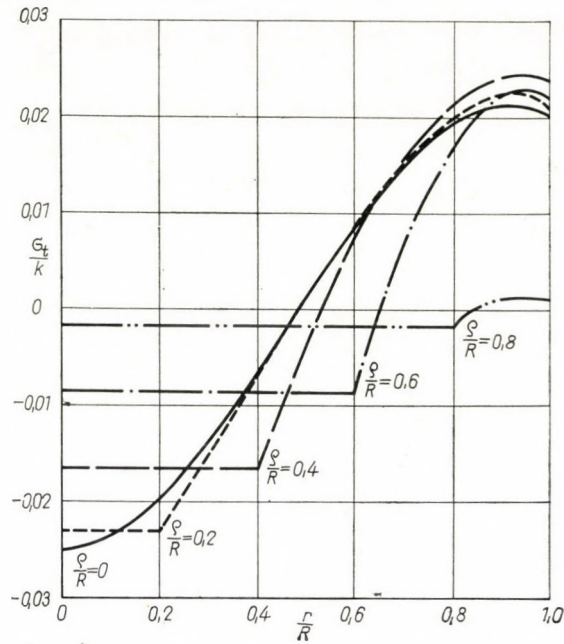


Fig. 3

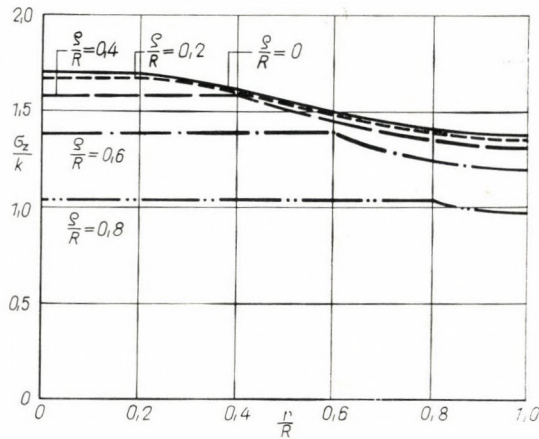


Fig. 4

that an interval of 0,1 provides sufficient accuracy. As the results are in a dimensionless form and all calculations are independent of the  $G/k$  ratio, the only input information required was the value of Poisson's ratio. The output included  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  and  $\tau$  at every one tenth radius in the plastic range for every one tenth radius advance of the elasto-plastic boundary and the values of the torque and axial pull for every position of this boundary.



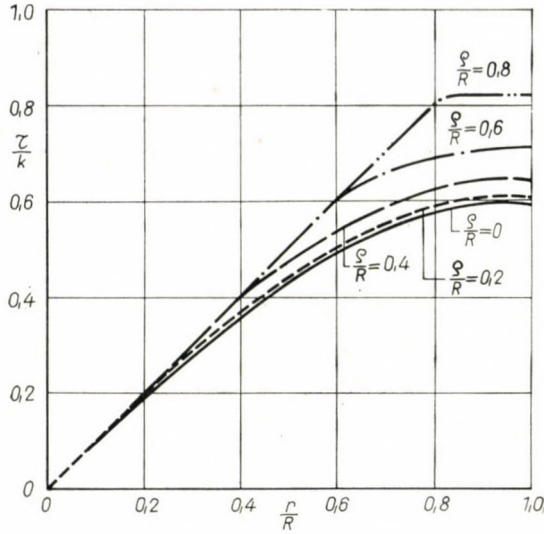


Fig. 5

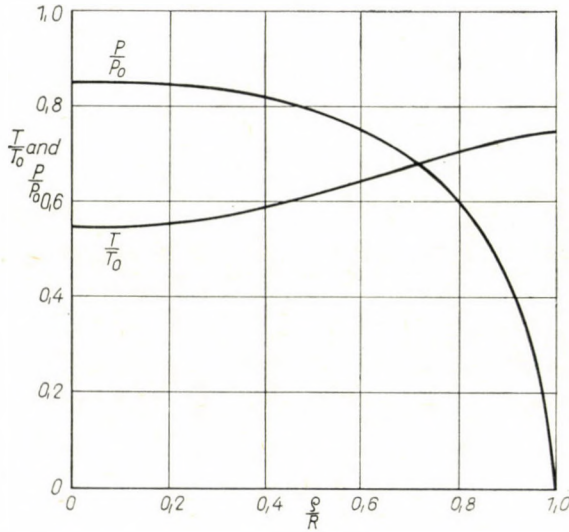


Fig. 6

The computations were repeated for  $\nu = 0, 0.1, 0.3, 0.4, 0.45,$  and  $0.49$ . ( $\nu = 0.5$  would have involved dividing by zero; to avoid rewriting the programme,  $\nu = 0.49$  was used as a sufficiently good approximation to the incompressible condition).

Figures 2 to 5 show the distribution of the radial, tangential and axial stress and the shearing stress for different positions of the elasto-plastic boundary; the graphs refer to  $\nu = 0.3$ . Figure 6 shows the variation of the

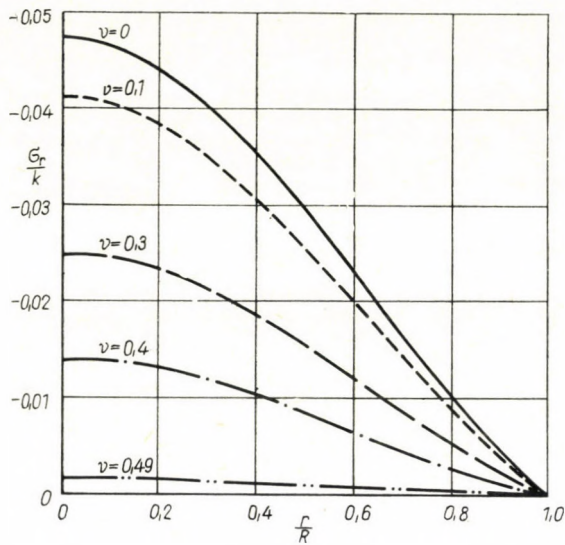


Fig. 7

axial force and torque with movement of the boundary, for the same value of  $\nu$ ; axial force is expressed as a multiple of the force, that acting on its own would cause yielding ( $= \sqrt{3}R^2 \pi k$ ); similarly the torque divided by  $3/2 R^3 \pi k$  is shown.

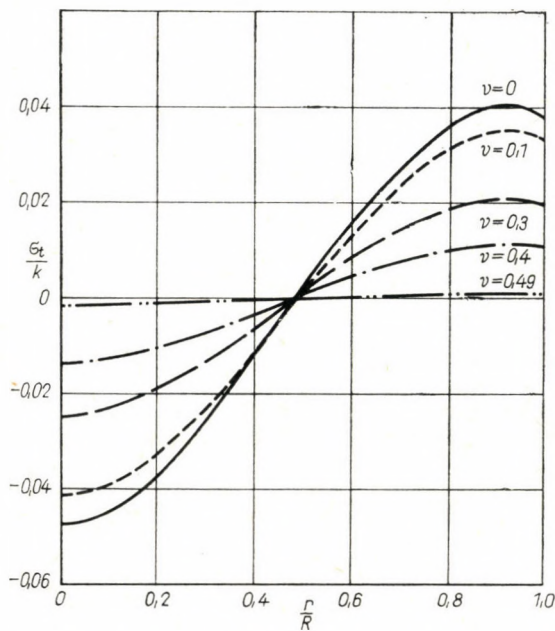


Fig. 8



The effect of altering Poisson's ratio on  $\sigma_z$  and  $\tau$ , and on the resultant pull and torque is small, typical values are listed in Table 1, together with some values calculated by PRAGER and HODGE (1951). All values refer to the fully plastic conditions; for partial plasticity the effect is similar. Figures 7 and 8 show the variation of  $\sigma_r$  and  $\sigma_t$  for the fully plastic condition; although the relative variations are large, these stress components are small ( $|\sigma_r| < 0,05$  and  $|\sigma_t| < 0,05$ ).

Table I

*Effect of Poisson's ratio on stresses, axial force and torque on fully plastic bar*

	$\frac{\nu}{r}$	0	0,1	0,3	0,4	0,45	0,49	Prager & Hodge
$\sigma_z$	0,1	1,6778	1,6837	1,6994	1,7099	1,7163	1,7219	1,7234
	0,4	1,5887	1,5913	1,5948	1,6031	1,6060	1,6085	1,6086
	0,7	1,4613	1,4583	1,4503	1,4448	1,4414	1,4383	1,4338
	1,0	1,3939	1,3787	1,3698	1,3579	1,3508	1,3444	1,3191
$\tau$	0,1	0,0994	0,0994	0,0994	0,0995	0,0995	0,0995	0,0998
	0,4	0,3649	0,3656	0,3673	0,3685	0,3692	0,3698	0,3708
	0,7	0,5413	0,5434	0,5491	0,5530	0,5552	0,5573	0,5611
	1,0	0,6080	0,6112	0,6194	0,6248	0,6281	0,6309	0,6480
$P/P_0$		0,8570	0,8559	0,8524	0,8501	0,8487	0,8475	0,8467
$T/T_0$		0,3586	0,3601	0,3642	0,3669	0,3685	0,3699	0,3726

## 6. Conclusion

A rigorous solution, satisfying all equilibrium and compatibility conditions right through the bar, Hooke's law in the elastic part, Reuss's equations and the von Mises yield condition in the plastic part is presented for a round bar made from an elastic-plastic material and subjected to axial load and torque. The solution is shown to be independent of the ratio of the shear modulus to the yield stress in shear, but dependent on Poisson's ratio.

Numerical calculations show that for a bar subjected to constant twist (the twist being of such magnitude that acting on its own it will just cause yielding in the outermost fibres) and to a gradually increasing axial pull the effect of Poisson's ratio is relatively small; the method of PRAGER and HODGE, based on the assumption of an incompressible material material ( $\nu = 0,5$ ) is likely to give an error of less than 3% in the axial force and in the torque at full plasticity. However, calculations to be reported elsewhere show that for other loading paths the effect of Poisson's ratio might be higher.



## REFERENCES

- FREUDENTHAL, A. M.—GEIRINGER, H.: *Encyclopaedia of Physics* (Ed. Flugge, S.) 6 (1958), 413 (Springer, Berlin).
- GAYDON, F. A.: *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 5 (1952), 29.
- HILL, R. and SIEBEL, M. P. L.: *Phil. Mag.* 42 (1951), 722. — *J. Mech. Phys. Solids.* 1 (1953), 207.
- HODGE, P. G.: *Plastic Analysis of Structures*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- HODGE, P. G.—SANKARANARAYANAN, R.: *J. Appl. Mech.* (1959), Paper No. 59-APM-26.
- PRAGER, W.—HODGE, P. G.: *Theory of Perfectly Plastic Solids* Wiley, New York, 1951.
- SIEBEL, M. P. L.: *J. Mech. Phys. Solids.* 1 (1953), 189.
- TIMOSHENKO, S.—GOODIER, J. N.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1951.

DAS ELASTO-PLASTISCHE VERHALTEN DES MIT EINER AXIALEN KRAFT UND EINEM TORSIONSMOMENT BELASTETEN STABES MIT KREISQUERSCHNITT

G. SVÉD—D. S. BROOKS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit dem Verhalten eines Stabes von Kreisquerschnitt aus einem idealen elastisch-plastischen Material, der außer der axialen Belastung noch auf Verdrehung beansprucht ist. Die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen sowie die Reuss'schen Spannungs-Dehnungs-Gleichungen werden durch die modifizierten Spannungen (übliche Spannung dividiert durch die Schubspannung) und die modifizierten Dehnungen (übliche Dehnung multipliziert mit dem Quotienten aus dem Schubmodul und der Schubfließspannung) ausgedrückt. Die unter der Einwirkung der steigenden Belastung zustandekommenden Spannungs- und Dehnungsänderungen werden durch Lösung eines aus vier hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen bestehenden Systems gelöst. Numerische Lösungen werden für Stäbe angegeben, die außer durch konstantes Torsionsmoment durch eine stetig ansteigende Axialkraft auf Zug beansprucht werden. Die Ergebnisse sind unabhängig vom Verhältnis des Gleitmoduls und der Schubfließgrenze, hängen jedoch von der Poissonschen Zahl ab. Bei Änderung der Poissonschen Zahl ändern sich die Ergebnisse nur wenig und bestätigen die Hypothese von PRAGER und HODGE, wonach bei der Untersuchung der Werkstoff des Stabes als inkompressibel betrachtet werden kann.

COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE DES BARRES DE SECTION CIRCULAIRE CHARGÉES PAR UNE FORCE AXIALE ET PAR UN MOMENT DE TORSION

G. SVÉD—D. S. BROOKS

RÉSUMÉ

L'étude traite du comportement d'une barre de section circulaire constante en matière élasto-plastique idéale, laquelle est sollicitée par un effort axial et, en plus, par un moment de torsion. Les conditions d'équilibre et de compatibilité, ainsi que les rapports tension-allongement de Reuss sont exprimés par les contraintes modifiées (contraintes usuelles divisées par les contraintes de cisaillement) et les allongements modifiés (allongement usuel multiplié par le quotient du module d'élasticité transversal et de la tension d'écoulement en cisaillement). L'auteur détermine les variations des tensions et allongements dues à la croissance de la charge, par la solution d'un système de quatre équations différentielles partielles de type hyperbolique. Des solutions numériques sont données pour des barres soumises à un couple de torsion constant et un effort de traxion axial croissant. Les résultats sont indépendants du rapport du module d'élasticité transversal et de la tension d'écoulement en cisaillement et dépendent, par contre, du coefficient de Poisson. Les résultats se modifient peu en fonction du coefficient de Poisson et confirment l'hypothèse de PRAGER et de HODGE, suivant laquelle la matière de la barre peut être considérée comme incompressible du point de vue du calcul.



ЭЛАСТОПЛАСТИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО  
АКСИАЛЬНОЙ СИЛОЙ И КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ

Г. ШВЕД и Д. С. БРУКС

## РЕЗЮМЕ

Статья посвящена поведению стержня неизменного сечения из материала идеальной пластичности, на который кроме аксиальной нагрузки действуют также нагрузки от кручения. Уравнения равновесия и совместимости, а также зависимости напряжения и растяжения **Reuss** выражаются данными модифицированных напряжений (обычное напряжение, деленное на сдвигающее напряжение) и модифицированных растяжений (обычные растяжения, помноженные на частное модуля сдвига и напряжения сдвига при течении). Изменения напряжений и растяжений, возникающие под действием возрастающей нагрузки, определяются решением системы уравнений, состоящих из четырех парциальных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Приводятся числовые решения для случая таких стержней, на которые при постоянном крутящем моменте действует растяжение от постоянно возрастающего аксиального усилия. Результаты независимы от отношения модуля сдвига и предела текучести сдвига, но зависят от показателя Пуассона. С изменением показателя Пуассона результаты изменяются только незначительно и подтверждают предположение **Prager** и **Hodge**, на основе которого при анализе материал стержня можно считать несжимаемым.





# BESTIMMUNG DER STAHLBEWEHRUNG UND DER RAMMSPANNUNGEN VON STAHLBETONPFÄHLEN

K. SZÉCHY

KORRESPONDIERENDES MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 9. April 1964]

Die Feststellung der in Stahlbetonpfählen auftretenden Rammspannungen ist recht umständlich und unsicher, obwohl der beim Rammen dieser Pfähle häufig beobachteten Zerstörung in der Praxis große Bedeutung zukommt. Die Schwierigkeiten dieser Frage bestehen darin, daß für die Stahlbetonpfähle keine sichere Bemessungsgrundlagen vorliegen. Weder die Festigkeit der Konstruktion, noch die Größe der auftretenden Spannung und Verteilung ist zufriedenstellend geklärt. Der Verfasser führt zuerst ein Annäherungsverfahren zur Berechnung der Querbewehrung vor und dann stellt er ein neuartiges und auf tatsächlich meßbaren Verformungswerte aufgebautes Verfahren für die Bestimmung der rationalen Rammtiefe und der kritischen Rammbeanspruchung vor.

Da auf Grund der Energiegleichung die im Pfahl auftretende dynamische Kraft proportional der Abnahme des Eindringungsmaßes ( $e_m$ ) wächst, wird ihr Höchstwert von der Bedingung  $e_m \equiv 0$  bestimmt. Die elastische Verformung ( $e_r$ ) hingegen wächst proportional der Kraft. Trägt man das Verhältnis  $e_m/e_r$  parallel mit der Eindringung des Pfahls in einem Diagramm auf, dann wird das Maximum der dynamischen Tragfähigkeit durch das Verhältnis  $e_m/e_r \rightarrow 0$  gekennzeichnet. Über diese Grenze hinaus entstehen im Pfahl beim Einrammen bloß elastische Verformungen, die zu seiner fortschreitenden Zerstörung führen, ohne die Tragfähigkeit des Pfahls vergrößern zu können. Diese *wirtschaftliche Grenztiefe* wird außerdem vom maximalen Wert der spezifischen Einrammarbeit angeben, die zur Erhöhung der spezifischen Tragfähigkeit aufgewendet werden mußte (Bild 6). Die im Pfahlschaft auftretenden Spannungen können aus ihrer elastischen Verformung berechnet werden. Die praktisch meßbare elastische Verformung besteht jedoch nicht nur aus der des Pfahles, sondern enthält auch diejenige des Bodens. Es wird gezeigt, daß die beiden Verformungskomponenten voneinander getrennt werden können, wenn man die elastische Verformung am Pfahl gleichzeitig an zwei Stellen mißt. Davon können dann die Rammspannungen nach dem Hooke'schen Gesetz bestimmt werden (Bild 9). Die Neigung der Geraden, die diese Verformung darstellen, ist den im Pfahl auftretenden Spannungen proportional. Bestimmt man andererseits die vom Pfahlquerschnitt erträgliche Grenzspannung, so kann man durch deren Schnittpunkt mit der Spannungskurve des Pfahls die Rammtiefe bestimmen, bei der die Zerstörung des Pfahls beginnen wird (Bild 10).

Es kommt in der Praxis häufig vor, daß die vorgefertigten Stahlbetonpfähle beim Einrammen zugrunde gehen. Vor allem pflügt der Pfahlkopf zu zerbröckeln, es kommen aber auch Risse und Sprünge in der Pfahlschaft vor, ebenso Absplittern und Brüche in den Pfahlspitzen.

Das Zugrundegehen hängt von den Umständen des Rammens und der Konstruktion des Pfahls ab, die Umstände des Rammens bestimmen die Beanspruchungen, die Konstruktion des Pfahls bestimmt dagegen die Festigkeit. Leider läßt sich keiner von diesen beiden theoretisch genau bestimmen, und deshalb kann die genaue wirtschaftliche Bemessung der Stahlbetonpfähle heute noch nicht als gelöst betrachtet werden; wir sind da hauptsächlich auf praktische Erfahrungen angewiesen.

### A) Berechnung der Stahlbewehrung von Stahlbetonpfählen

Die Festigkeit von Stahlbetonpfählen wird grundlegend durch die Festigkeit des Betons bestimmt, deshalb ist ein Grundprinzip der Bemessung, Beton großer Würfelfestigkeit (mindenstens B 280, eher aber B 340 ÷ B 400) zu

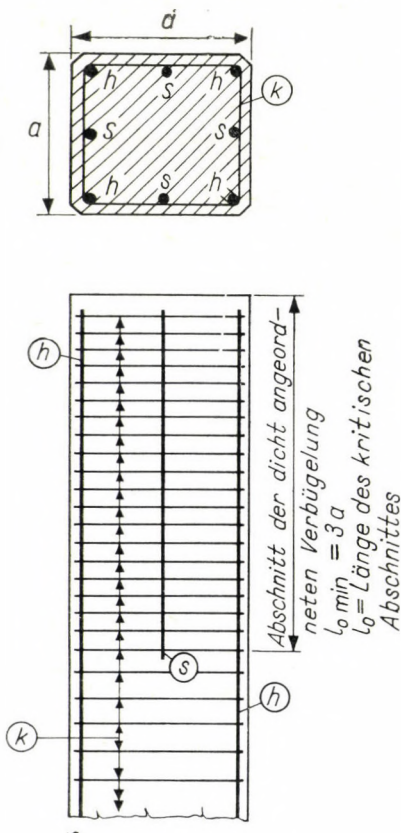


Bild 1. Anordnung der Kopfbewehrung des Stahlbetonpfahls

benützen. Obgleich die Stahlbewehrung der Pfähle auf Grund gewisser Voraussetzungen bemessen wird, besteht die höchste Aufgabe der Stahleinlagen doch darin, die Widerstandsfähigkeit des Betons gegen Schläge zu erhöhen. (Wie bekannt, können gedrückte Betonsäulen bis an die Grenze des plastischen Zustandes belastet, wenn Formänderungen in Querrichtung verhindert werden).

Die im Pfahl befindliche Querbewehrung ist für die Verhinderung der Formänderungen in Querrichtung bestimmt, während die Längsbewehrung die kleinere Druckfestigkeit des Betons gegen Schläge (Stoßbeanspruchungen)



ausgleicht. Die aus der Längs- und Querbewehrung gebildete räumliche korbartige Bewehrung dient außerdem zur Vergrößerung der Widerstandsfestigkeit gegen die durch Schläge verursachten dynamischen Wirkungen. Weil bekanntlich die durch das Einrammen entstehenden Spannungen im Pfahlkopf am größten sind, muß das Bewehrungsgitter an dieser Stelle am dichtesten sein, wie es Bild 1 zeigt (in seltenen Ausnahmefällen kommen Spannungshöchstwerte auch in der Pfahlspitze vor). Die Stahlbewehrung der Pfähle be-

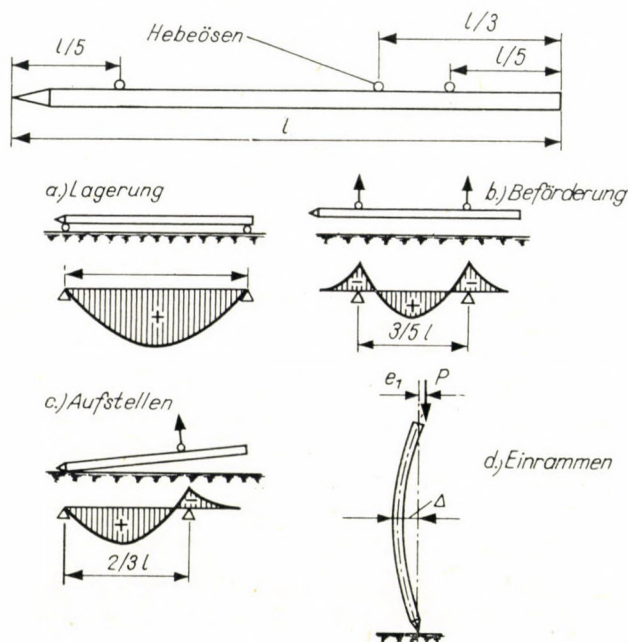


Bild 2. Berechnungsannahmen für die Bestimmung der Biegebeanspruchung in Stahlbetonpfählen

steht aus den durch den ganzen Pfahl laufenden Hauptstahleinlagen ( $h$ ), sowie aus den Hilfsstahleinlagen ( $s$ ) im Kopf und in der Spitze des Pfahls in einer gewissen Länge ( $l_0 = 3a$ ) angeordnet und aus den Quereinlagen (Bügeln). Man kann lediglich die Fläche der Hauptstahleinlagen mit Hilfe von Bemessungsannahmen bestimmen. Bild 2 zeigt die Voraussetzungen, bei welchen, infolge verschiedener Ungenauigkeiten der Herstellung und Einrammung, durch Ausmittigkeit bedingte Biegebeanspruchungen im Pfahl entstehen. Dadurch kann der Querschnitt des Stahlbetonpfahls und somit die Menge der Hauptstahleinlagen wie folgt bestimmt werden:

$$M = M_1 = \frac{g \cdot l^2}{a} \quad \text{oder} \quad M_2 P (\Delta + e_1 + e_2)$$

je nachdem, ob  $M_1$  oder  $M_2$  größer ist.

Die Formel gilt auch für Spannungen, die beim Transport oder beim Einheben des Pfahls entstehen. Der Wert des Beiwerts  $a$  beträgt 18, wenn ein einziger Hebehaken in einem Drittel des Pfahls angeordnet ist, hat aber den Wert 50, wenn zwei Hebeösen in der Entfernung  $l/5$  von den Pfahlenden benützt werden;  $g$  bedeutet das Pfahlgewicht je laufendem Meter,  $l$  bezeichnet die Pfahllänge,  $\Delta$  die Herstellungsgenauigkeit ( $\cong 0,03 l$ ),  $e_1$  ist das von der Ausmittigkeit der Spitze und der Rammung herstammende, dagegen  $e_2$  das von der etwaigen Abschrägung des Pfahlkopfes entstehende Exzentrizitätsmaß ( $e_1 \cong 5$  cm und  $e_2 \cong 0,025a - 0,04a$ ). Schließlich ist die durch einen Schlag im Pfahl entstehende dynamische Widerstandskraft mit  $P$  bezeichnet.

Die aus obigem Biegemoment berechnete Stahlbewehrung wird von gewissen Vorschriften nur dann angenommen, wenn ein gewisser Mindestwert überschritten wird. Der englische *Code of Engineering Practice* schreibt z.B. vor, daß

$$\begin{array}{ll} \text{wenn } l \leq 30a \text{ ist,} & \text{dann wird } F_v \geq 0,0125 F_b, \\ \text{wenn } 30a < l < 40a, & \text{dann wird } F_v \geq 0,015 F_b, \text{ und} \\ \text{wenn } l \geq 40a, & \text{dann wird } F_v \geq 0,02 F_b, \end{array}$$

wo  $l$  die Pfahllänge und  $F_b$  ( $a^2$ ) den Betonquerschnitt des Pfahls bezeichnet.

Das Minimum der Querbewehrung (Bügel) beträgt nach derselben Vorschrift im Pfahlkörper  $0,002 F_b$ , aber muß im Kopf bis zur Länge  $3a$  auf  $0,006 F_b$  betragen.

Die Qualitätsvorschriften für die Betongüte lauten hier folgendermaßen:

a) bei schwerem Rammen (durchschnittliche Rammspannung  $\sigma > 105$  kg/cm<sup>2</sup>)  $K_{28} = 332,5$  kg/cm<sup>2</sup> (Ungarische Vorschrift B 340),

b) normales und leichtes Rammen (durchschnittliche Rammspannung  $\sigma < 105$  kg/cm<sup>2</sup>)  $K_{28} = 280$  kg/cm<sup>2</sup> (Ungarische Vorschrift B 280).

In der deutschen Vorschrift ist für dieselben Werte für die Längsbewehrung durchschnittlich  $0,009 F_b$ ,  $0,012 F_b$  und  $0,026 F_b$  vorgeschrieben, während für die Betongüte bis zu Längen von 15 m B 300 oder besser B 450 verlangt wird. Bei längeren Pfählen als 15 m ist unbedingt eine Betonfestigkeit von B 450 vorgeschrieben. Die Querbewehrung wird hier nach Bestimmung des Durchmessers und des Mindestabstandes auf Grund rein konstruktiver Erwägungen angegeben.

Zur Bestimmung der Längsbewehrung hat sich also eine gewisse Dimensionierungstheorie herausgebildet, während zur Berechnung der Querbewehrung theoretische Grundlagen noch nicht vorhanden sind.

Die nötige Fläche der Querbewehrung könnte annäherungsweise aus der Bedingung abgeleitet werden, daß sie die Querdehnung des Pfahls verhindern muß. Man weiß aus der Festigkeitslehre, daß bei einem Würfel mit gleichen Kantenlängen, zwischen den senkrechten und waagrechten Span-



nungen ( $\sigma_z$ ) bei verhinderter Seitenausdehnung und bei Raumbeständigkeit folgende Beziehung besteht:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sigma_z}{m - 1}, \quad \text{wo} \quad \sigma_z = \frac{P}{F}$$

(bei einem Pfahl mit quadratischen Querschnitt  $\sigma_z = P/a^2$ ).

Als Annäherung, die aber zu Gunsten der Sicherheit ausfällt, wird die Annahme betrachtet, daß die auf Grund der senkrechten Druckkraft  $P$  ent-

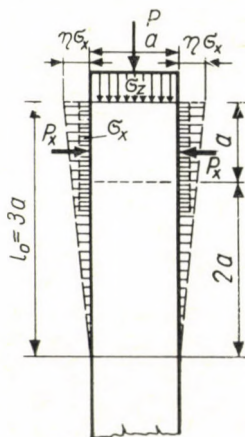


Bild 3. Angenäherte Aufnahme des Spannungszustandes im Pfahlkopf, bei behinderter Querausdehnung

standene waagerechte Kraft  $P_x$  im Pfahlkopf gleichfalls auf der senkrechten Seitenfläche eines Würfels mit der Kantenlänge  $a$  auftritt. Diese Kraft kann also folgendermaßen bestimmt werden:

$$P_x = a^2 \sigma_x = \frac{a^2 P}{a^2 (m - 1)} = \frac{P}{m - 1} .$$

Da die statische Aufgabe der Bügel lediglich als Verhinderung der Seitenausdehnung bezeichnet werden kann, dürfte man annehmen, daß diese Kraft von der Querbewehrung in der kritischen Länge des durch die Schläge am stärksten beanspruchten Pfahlkopfes aufgenommen werden mußte. Das Minimum dieser kritischen Länge ist erfahrungsgemäß  $3a$  (siehe weiter unten). Innerhalb dieser Länge ist also die Verteilung nicht gleichmäßig, sondern an der Kopffläche tritt ein Höchstwert auf, das bis zum Ende der kritischen Länge auf einen Kleinstwert absinkt (Bild 3). Aus Sicherheitsgründen wird dieser Kleinstwert dem Durchschnittswert ( $P_x$ ) gleichgesetzt.

Man könnte für die Aufnahme der Zugspannungen in Querrichtung auch die Zugfestigkeit des Betons berücksichtigen, jedoch wird dies aus Sicher-

heitsgründen vernachlässigt. Der nötige Querschnitt der Querbewehrung läßt sich aus dem Zusammenhang

$$F_{vk} = \frac{P_x}{\sigma_{vH}} = \frac{P}{(m-1)\sigma_{vH}}$$

bestimmen. Ist der Querschnitt eines Bügels  $F_v$ , dann ergibt sich die Anzahl der Bügel der ganzen Querbewehrung zu  $n_0 = F_{vk}/F_v$ . Die Verteilung dieser Bügel ist jedoch innerhalb der kritischen Länge nicht gleichmäßig, sondern wird in Richtung der Kopffläche dichter. Zur Bestimmung der Verteilung kann der Erhöhungsfaktor  $\eta$  benutzt werden, der aus der Hiley'schen Formel abgeleitet und im *Civil Engineering Code of Practice Foundations* Heft 4, Seite 73 (Punkt 3.83) vorgeschlagen wird:

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} - 1.$$

In dieser Formel ist

$$\alpha = \frac{Q + k^2 q}{Q + q}$$

der zweite Multiplikationsfaktor der Hileyschen Formel, der die Wirksamkeit des Schlages ausdrückt (je wirksamer der Schlag ist, um so kleiner sind die elastischen Verluste, die lediglich für die im Pfahlkopf entstehenden Spannungen verantwortlich sind). In dieser Formel ist  $Q$  das Gewicht des Rammhärens,  $q$  ist das Pfahlgewicht und  $k$  ist ein Stoßfaktor, der nach Hiley folgende Werte hat:

beim Einrammen von Stahlbetonpfählen ohne Rammhaube, nur mit Unterlage  $k = 0,4$ .

beim Einrammen von Stahlbetonpfählen mit Rammhaube, Unterlage und gut erhaltener Hartklotzeinlage  $k = 0,25$ .

Im Pfahlkopf muß also der Bügelabstand auf den Wert

$$t_{\min} = \frac{t_0}{\eta} = \frac{3a}{n_0 \eta}$$

vermindert werden, und dieser Wert muß mindestens bis zur Tiefe  $a$  (aus Sicherheitsgründen) eventuell bis zu  $3a$  beibehalten werden. Danach kann der Bügelabstand stufenweise auf den Wert  $t_0$  vergrößert werden.

Bild 4 zeigt die Änderung der Faktoren  $\eta$  und  $\alpha$  in Abhängigkeit vom Gewichtsverhältnis des Rammhärens und des Pfahls. Als Parameter dienen die beiden oben angegebenen Werte  $k$ . Man sieht, daß die Rammspannungen im Pfahlkopf sehr schnell größer werden, und gleichzeitig der Wirkungsgrad des Rammens ( $\alpha$ ) schnell abnimmt, wenn das Verhältnis  $Q/q$  kleiner wird als 1, wenn also das Gewicht des Rammhärens kleiner wird als das Pfahlgewicht.



Damit kann also die wohlbekannte Regel bestätigt werden, daß das Rammen von Pfählen zweckmäßigerweise mit einem möglichst schweren Rammbar und kleiner Fallhöhe durchgeführt werden muß, und besonders darf der Rammbar nicht leichter, als der einzurammende Pfahl sein.

Aus obigen Annäherungsbedingungen konnte also eine Berechnungsgrundlage zur Bestimmung und Anordnung der Querbewehrung gewonnen werden.

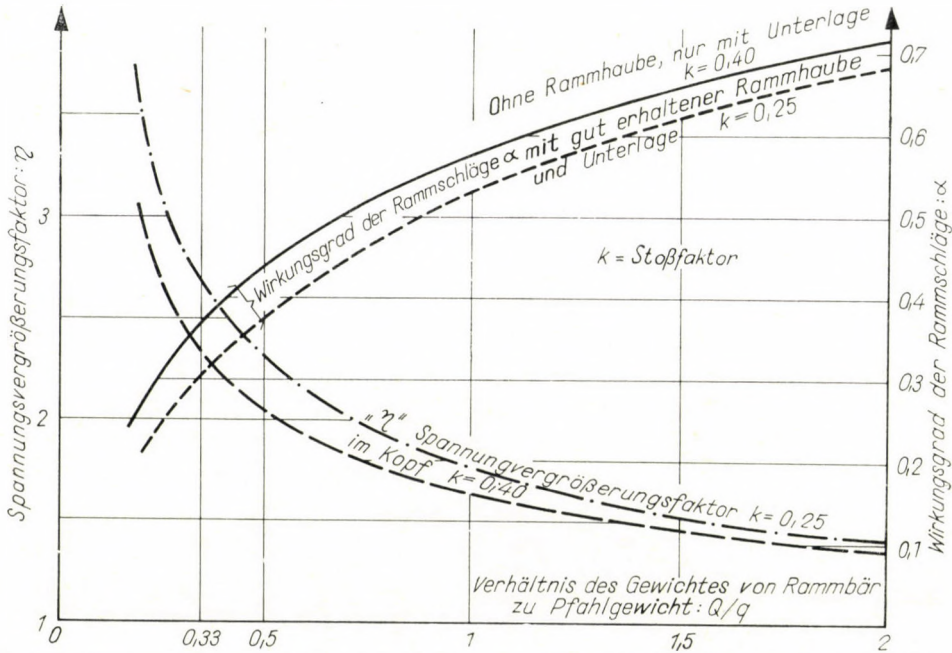


Bild 4. Zusammenhang zwischen dem Wirkungsgrad des Rammchlages und der im Pfahlkopf auftretenden Spannungsvergrößerung im Verhältnis von Rammbargewicht zum Pfahlgewicht

Als Beispiel sei berechnet, welche Querbewehrung im Kopf eines 10 m langen Stahlbetonpfahls mit  $30 \times 30$  cm Querschnitt unter schweren Rammbedingungen ausgebildet werden muß. Die schweren Rammbedingungen werden lt. oben angegebener Vorschrift (Tabelle 8, Seite 82) durch die durchschnittliche Schlagspannung von  $\sigma_z = 140$  kg/cm<sup>2</sup> gekennzeichnet. (Leichtes Rammen siehe weiter unten  $\sigma_z = 35$  kg/cm<sup>2</sup>.) Es ist also  $P = \sigma_z F = 140$  kg/cm<sup>2</sup> ·  $30 \cdot 30 = 126\,000$  kg.

Es ist außerdem

$$F_{ek} = \frac{P}{(m-1)\sigma_{vH}} = \frac{126\,000}{(6-1)2000 \text{ kg/cm}^2} = 12,6 \text{ cm}^2$$

Werden 8 mm – Bügel benützt, dann wird

$$F_{v1} = 2 \cdot 0,5 = 1,0 \text{ cm}^2,$$

und somit

$$t_0 = \frac{3 \cdot 30}{12,6} \cdot 1,0 = 7,1 \text{ cm}.$$

Beträgt das Gewicht des Rammbaren  $Q = 1500$  kg und das des Pfahls  $q = 30 \cdot 30 \cdot 1000 \cdot 2,5 = 2250$  kg, dann wird  $Q/q = 1500/2200 = 0,67$ . Der Wert für  $\alpha$  ist dann  $\alpha = 0,36/0,30$  und  $\eta = 3,33$  (3.62), wodurch der kleinste Bügelabstand

$$t_{\min} = t_0/\eta = 7,1/3,33 = 2,1 \text{ cm.}$$

Dies ist zu dicht, weshalb entweder ein größerer Bügeldurchmesser oder ein schwererer Rammbar benützt werden muß.

Unter den Bedingungen eines leichteren Rammens, bei dem  $\sigma_z = 35$  kg/cm<sup>2</sup> beträgt, sinkt die von den Bügeln aufzunehmende Kraft auf ein Viertel obigen Wertes, wodurch ein viermal größerer Bügelabstand gewählt werden oder gegebenenfalls ein leichterer Rammbar verwendet werden kann.

Der Querschnitt der Hilfseinlagen ( $s$ ) wird im allgemeinen mit  $40 \div 50\%$  des Querschnittes der Haupteinlagen angenommen.

Es sei bemerkt, daß mit Rücksicht darauf, daß die Stahleinlagen in der Längsrichtung auf ausmittigen Druck beansprucht sind (wobei ihre Festigkeit nicht völlig ausgenützt werden kann) und ein gewisser Mindestprozentsatz des Stahlquerschnittes in den Vorschriften aus konstruktiven Gründen erfordert wird, ist es bei Stahlbetonpfählen im allgemeinen unwirtschaftlich Stahleinlagen großer Festigkeit zu benützen.

## B) Bestimmung der zweckmäßigen Einrammtiefe

GLANVILLE und seine Mitarbeiter bestimmten 1935 durch ausführliche Untersuchungen die im kritischen Querschnitt des Pfahls (Kopf, Spitze) auftretenden Spannungen. Es gelang ihnen, die Wirkung vieler Faktoren zu klären, von denen sich als wichtigsten für die Größe der Spannungen das Gewicht des Rammbaren, die Fallhöhe, die Elastizität der Rammhaube, sowie die Querbewehrung des Pfahlkopfes und der Spitze ergeben hatten. Die im Kopf auftretenden größten Beanspruchungen wurden durch die vom Schlag verursachten Schwingungen theoretisch bestimmt und in Dimensionierungskurven zusammengefaßt. Dabei muß aber außer diesen Faktoren noch ein Stoßfaktor  $k$  aufgenommen werden, der die Elastizität der Rammhaube ausdrückt. Dieser Wert ist aber auch mit den zur Verfügung gestellten Hilfsmitteln und Richtwerten ziemlich unsicher und kann zu großen Abweichungen von der Wirklichkeit führen, weil auch die theoretischen Ausgangsbedingungen Annäherungen enthalten.

In der Baupraxis oft auftretenden Schlagbeschädigungen veranlaßten den Verfasser, die während des Einrammens meßbaren tatsächlichen Formänderungen für eine genauere Bemessung zu verwenden. Wie bekannt, sind ja die Formänderungen innerhalb des Elastizitätsbereiches den Spannungen proportional.

Geht man von der grundlegenden Energiegleichung aus, so muß die Gleichheit der Rammarbeit mit der Eindringungsarbeit (genauer: Formände-



rungsarbeit) zu Grunde gelegt werden. Mit den bekannten Bezeichnungen ist also

$$Qh a = c P e, \quad (1)$$

wo  $Q$  das Gewicht des Rammjärens,  $h$  die Fallhöhe und  $a$  die Rammverluste (Reibung, Exzentrizität, Stoß usw.) bedeutet, während  $P$  die im Pfahl auftretende Kraft,  $e$  die Eindringung (Formänderung) und  $c$  die dabei auftretenden Verluste bedeutet. Werden die Verluste zum Faktor  $a/c = \beta$  zusammengefaßt,

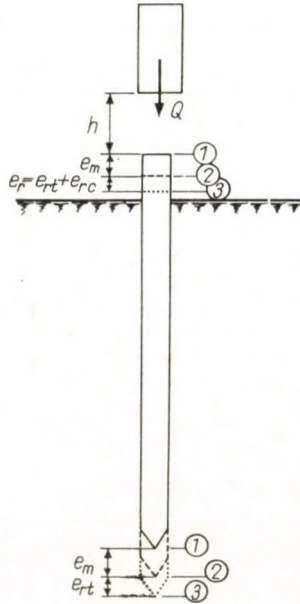


Bild 5. Pfahlbewegung während des Rammenschlages

und beachtet man, daß die durch den Schlag eintretende Verformung aus zwei Teilen, nämlich aus der bleibenden Eindringung des Pfahls  $e_m$  und aus der elastischen Verformung des Pfahles und des Baugrundes  $e_r$  besteht, dann kann die Gleichung (1) folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\beta Qh = P (e_m + 1/2 e_r) \quad \text{und} \quad P = \frac{\beta Qh}{e_m + 1/2 e_r}. \quad (2)$$

Auf die Einwirkung des Rammenschlages gerät der Pfahl aus der Lage 1 des Bildes 5 in die Lage 3 und gelangt dann nach Beendigung des Schlages in die Lage 2.

In den vergangenen Jahren wurde mit Unterstützung der Ministerien für Verkehrs- und Postwesen sowie für Bauwesen eine Versuchsserie durchgeführt, um unter anderen die Gründe des Bruches der Pfähle und der Ab-

bröckelung der Pfahlköpfe zu klären. Die dabei gemessenen Werte sind im Bild 6 angegeben.

Die auf Grund der bekannten Hileyschen Formel berechnete dynamische Tragfähigkeit der Pfähle ist im Bild 6a als Funktion der Eindringungstiefe dargestellt. Bild 6b zeigt den Wert des bei einem Schlag wirklich gemessenen Eindringungsmaßes = bleibende Setzung ( $e_m$ ) und den der elastischen Verfor-

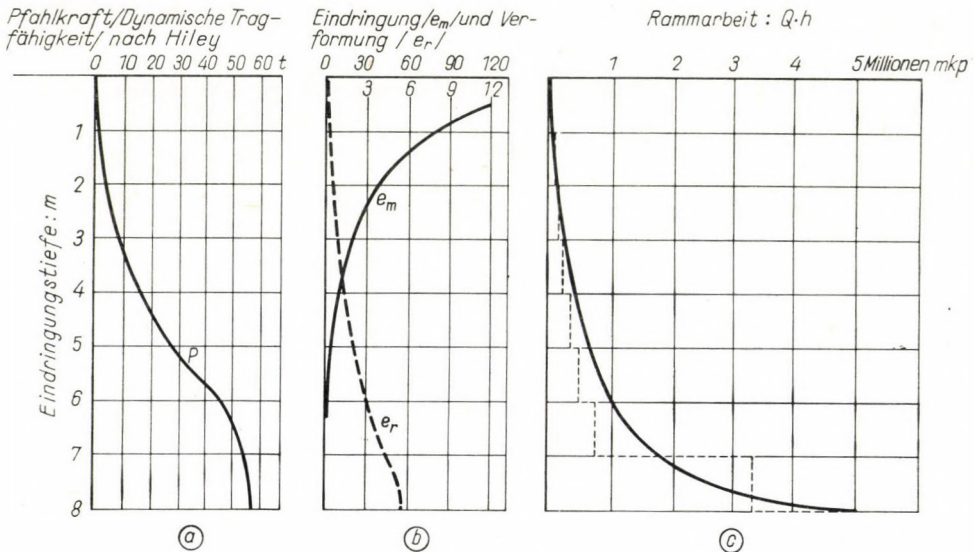


Bild 6. Zunahme der Pfahltragfähigkeit im Verhältnis zur Eindringungstiefe (a). Die Veränderung der bleibenden Setzungen ( $e_m$ ) und der elastischen Verformungen ( $e_r$ ) mit der Rammtiefe (b) und die Zunahme der Rammarbeit mit der Rammtiefe (c)

mung ( $e_r$ ) gleichfalls als Funktion der Eindringungstiefe. Bild 6c zeigt den Verlauf des wohlbekannten Rammdiagrammes.

Zu Beginn des Rammens sind die Werte  $e_m$  groß, also wird die im Pfahl auftretende Kraft  $P$  bei gleichbleibender Rammarbeit ( $Qh = \text{konst.}$ ) gering sein. Bei fortschreitendem Einrammen nehmen die bleibenden Setzungswerte ( $e_m$ ) ab, und die Kraft  $P$  nimmt zu. Wird die Kraft  $P$  größer, so nimmt aber auch die elastische Verformung ( $e_r$ ) zu, vorausgesetzt, daß die freie Verformungslänge ( $l$ ) auch konstant bleibt, weil

$$e_r = \frac{Pl}{EF} = \frac{\sigma l}{E} \quad (3)$$

ist.

Die Länge  $l$  ist aber nicht konstant, weil bei fortschreitender Pfahleindringung die ständig wachsende Reibung die freie Verformung hindert. Die sogenannte aktive Länge nimmt also dadurch ständig ab. Außerdem muß berücksichtigt werden, daß die über der Bodenoberfläche meßbare elastische



Verformung nicht nur die des Pfahls ( $e_{rc}$ ) sondern auch die des Bodens ( $e_{rt}$ ) unter der Pfahlspitze enthält. Es ist also

$$e_r = e_{rc} + e_{rt}. \quad (4)$$

Bemerkt sei, daß die auf Grund der Formel(3) berechnete elastische Verformung des Pfahls prinzipiell geeignet ist, die im Pfahl auftretenden Spannungen ( $\sigma$ ) zu berechnen, weil man von Gleichung (3) folgenden Ausdruck ableiten kann:

$$\sigma = \frac{e_{rc} E}{l}. \quad (5)$$

(Ein vom Verfasser vorgeschlagenes und zur Bestimmung der aktiven Länge und zur Trennung der elastischen Verformung des Bodens von der des Pfahls sich eignende Verfahren wird im nächsten Abschnitt C) angegeben.)

Beim Einrammen von Pfählen ist also ganz natürlich, daß zu Beginn die Eindringungen groß sind, und dementsprechend die durch den Ausdruck (2) bestimmbaren Pfahlkräfte klein bleiben. Mit der Abnahme der Eindringungen steigt die Pfahlkraft fortschreitend an, und damit nimmt auch die elastische Verformung nach der Gleichung (2) ständig zu. Nach einer gewissen Grenze wird die bleibende Eindringung des Pfahls praktisch Null ( $e_m = 0$ ), womit die gesamte Rammarbeit in elastische Verformung umgewandelt wird. Damit erreichen auch die Pfahlkraft  $P$  und die in der Pfahlschaft entstehenden Spannungen ihren Höchstwert, weil auch die elastischen Verformungen praktisch konstant bleiben. Bei fortgesetzten Einrammungen kann die elastische Verformung des Geländes ( $e_{rt}$ ) durch Bodenverdichtungen unter der Pfahlspitze ein wenig größer werden, was jedoch schon weder die Tragfähigkeit des Pfahls maßgebend vergrößert, noch den Wert  $e_r$  merklich beeinflusst. (Man hat also die wirtschaftliche Einrammtiefe des Pfahls erreicht.)

Wird jedoch die Rammung weiter fortgesetzt, so wird die Zerstörung des Pfahls fortschreitend gefördert. Betrachtet man die Erhöhung der zum Einrammen des Pfahls nötigen Rammarbeit, so sieht man, daß diese in einem homogenen Boden mit der Eindringungstiefe nach höheren Potenz ansteigt (Bild 6c). Betrachtet man jedoch das Verhältnis ( $\Delta P/\Delta h$ , das die Wirksamkeit der Rammarbeit zur Vergrößerung der Pfahltragfähigkeit angibt, so sieht man, daß dieses Verhältnis zu Beginn stark anwächst und nach Überschreiten eines Grenzwertes wieder rasch gegen Null abfällt, weil der Rammwiderstand schneller ansteigt als die Tragfähigkeit des Pfahls zunimmt (Bild 7a). Dasselbe Bild gewinnt man durch das Verhältnis der bleibenden Eindringung ( $e_m$ ) zur elastischen Verformung ( $e_r$ ) (Bild 7b), das zu seinen Nullwert nähert wo sich im Bild 7a ein Maximum zeigt.

Hört die bleibende Eindringung des Pfahls auf, und wird das Einrammen weiter fortgesetzt, so wird der Pfahl auf wiederholte Belastung auf Er-

müdung beansprucht, ohne dabei seine Tragfähigkeit erhöhen zu können. (Die durch Schwingungen entstehende Verdichtung bewirkt nur eine vernachlässigbare Erhöhung der Tragfähigkeit.) Der Pfahl wird also zwecklos zerstört. Bezeichnend dafür ist die Änderung der Beltramischen Arbeit, die die auf das aktive Pfahlvolumen ( $l_0 F$ ) bezogene spezifische Rammarbeit ( $\Sigma Q \cdot h$ )

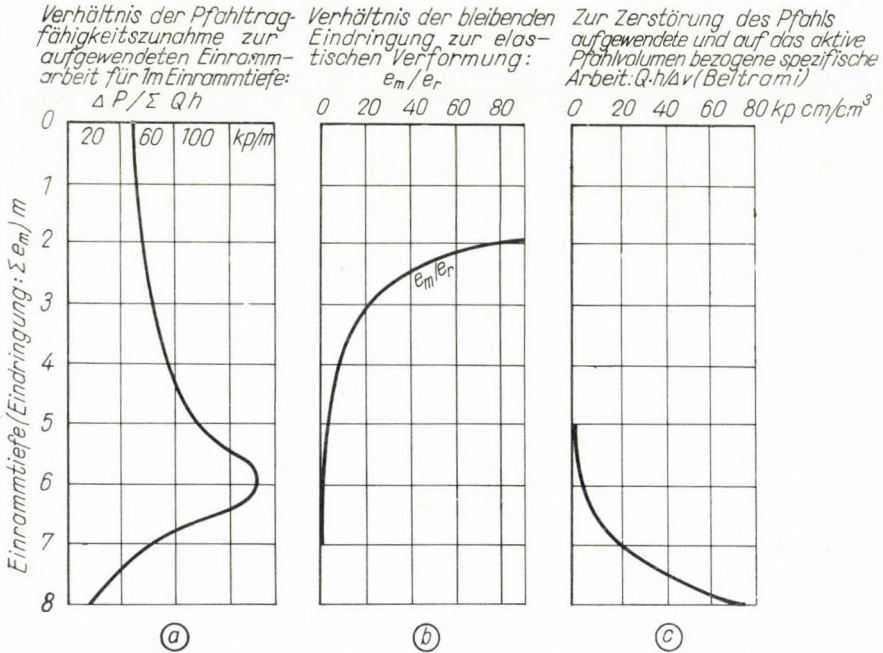


Bild 7. Spezifische Veränderung der Pfahltragfähigkeit im Verhältnis von angewandeter Rammarbeit zur Einheitseindringung (a) im Verhältnis der bleibenden Setzung ( $e_m$ ) zur elastischen ( $e_r$ ) Verformung (b) und die Veränderung der auf die Pfahlerstörung kennzeichnenden Beltramische Arbeitsleistung in Abhängigkeit von der Einrammtiefe (c)

angibt. Die Untersuchungen zeigten, daß dieser Wert für die Zerstörung von Stahlbetonpfählen kennzeichnend ist. Dieser spezifische Wert steigt nach einer gewissen Grenztiefe — die mit der oben bestimmten Tiefen beinahe übereinstimmt — stark progressiv an (Bild 7c).

Es kann daher festgestellt werden, daß das Fortsetzen des Pfahleinrammens nach einer gewissen Grenze für die Erhöhung der Pfahlbelastung zwecklos und für die Zerstörung des Pfahls gefährlich ist. Man kann diesen Wert die »kritische« Grenze der Einrammtiefe nennen und kann sie praktisch dadurch bestimmen, daß die bleibende Eindringung auf einen bedeutungslosen Wert abfällt. Ebenso kann man sie aus dem maximalen Wert der zur Vergrößerung der Tragfähigkeit aufgewendeten spezifischen Rammarbeit bestimm-



men. Im absoluten Sinn kann diese Grenze durch Festlegung der elastischen Verformungen und damit der im Pfahl auftretenden Spannungen festgelegt werden.

### C) Bestimmung der im Pfahl auftretenden Rammspannungen

Praktisch darf man jedoch die Grenze der zulässigen Rammtiefe nicht dadurch festlegen, daß sie bei der Tiefe liegen sollte, wo die bleibende Eindringung zu Null wird. Deren Abnahme geht nämlich so langsam vor sich, daß die Zerstörung schon während dieses Vorganges auftreten dürfte. Erträgliche Minimalwerte zahlenmäßig als Grenze anzugeben, wäre bei der Veränderlichkeit der Umstände (Bodenschichtung, Pfahllänge usw.) auch unmöglich. Es ist vielmehr versprechend die zulässigen Spannungswerte im Vergleich zu den meßbaren elastischen Verformungen festzulegen.

Die im Pfahl auftretende Durchschnittsspannung kann mit Hilfe des Ausdrucks (3) während des Einrammens theoretisch jederzeit durch direkte Messung kontrolliert werden, weil

$$\sigma = \frac{E e_{rc}}{l}$$

ist. Der Wert  $\sigma$  muß in jedem Fall kleiner sein als  $\sigma_H$ , der die aus den Abmessungen und der Bewehrung des Pfahls berechenbare Grenzspannung darstellt.

Die Aufgabe besteht jedoch in der genauen Bestimmung der Werte  $e_{rc}$  und  $l$ . Wie einleitend erwähnt, kann  $e_{rc}$ , also die elastische Verformung des Pfahls, nicht direkt gemessen werden, weil nach dem Verfahren des Bildes 8 im Wert  $e_r$  auch die elastische Verformung des Bodens enthalten ist ( $e_{rt}$ ). Annäherungswerte für  $e_{rt}$  kann man aus verschiedenen Vorschriften und aus den Tabellen von Hiley entnehmen. Die Tabellen des *Civ. Eng. Code of Practice* Nr. 4 »Foundations« schreiben für die Art des Einrammens folgende Werte vor:

Elastische Zusammendrückung des Bodens mm	Durchschnittsspannung im Pfahl kg/cm <sup>2</sup>			
	leichtes Rammen 35	mittleres Rammen 70	schweres Rammen 105	sehr schweres Rammen 140
$e_{rt}$	0,13	0,25 ÷ 0,50	0,38 ÷ 0,64	0,13 ÷ 0,38

Die große Streuung der Werte zeigt ihren annähernden Charakter.

Hinsichtlich der aktiven Länge des Pfahls bekommt man gleichfalls Näherungswerte, es ist nämlich klar, daß die Reibung des Bodens die freie Formänderung umsomehr behindert, je tiefer der Pfahl eindringt. Der Wert  $l$  wird also immer kleiner sein als die gesamte Pfahllänge und wird den klein-

sten Wert bei der größten Einrammtiefe annehmen. Nach Untersuchungen von Schenck und Fröhlich ändert sich die Längenabnahme zwischen der halben und der viertel Pfahllänge.

Das hier vorgeschlagene Verfahren eignet sich zur Vermeidung oben erwähnter Unsicherheiten und zur genaueren Bestimmung der elastischen Zusammendrückung des Bodens und der aktiven Pfahllänge durch Messungen an den Arbeitstellen.

Die elastische Zusammendrückung des Pfahls und des Geländes kann voneinander getrennt werden, wenn die genannte elastische Zusammendrück-

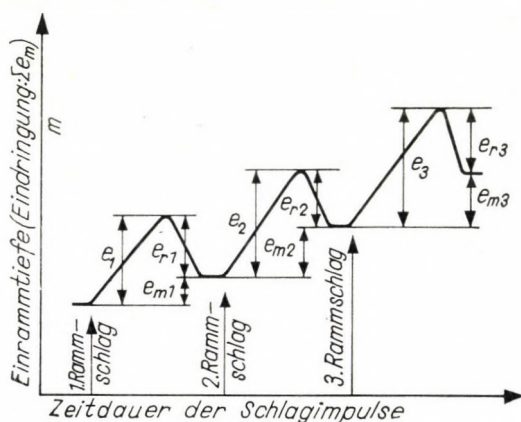


Bild 8. Meßkurve der bleibenden und elastischen Verformungen

kung während des Einrammens über der Bodenoberfläche gleichzeitig an zwei verschiedenen Stellen gemessen wird (Bild 9). Werden die gemessenen Werte  $e'_r$  und  $e''_r$ , der Meßstellenentfernung entsprechend, bei den Längen  $l_1$  und  $l_2$  aufgetragen, so bekommt man zwei für die Verformung kennzeichnende Punkte. Die diese Punkte verbindende Gerade schneidet an der Ordinatenachse den Wert  $e_{rt}$  aus, der die elastische Verformung des Bodens bezeichnet.

Für die Größe dieses Schnittpunktwertes ist es nicht gleichgültig, wie die Entfernungen  $l_1$  und  $l_2$  bestimmt werden. Für die hier angegebenen Berechnungen genügt es aber, wenn man mit dem Wert  $\Delta l = l_1 - l_2$  arbeitet, weil die im Pfahl auftretende Durchschnittsspannung durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{e''_r - e'_r}{\Delta l} E$$

direkt berechnet werden kann. (Die Bestimmung der elastischen Zusammendrückung des Bodens kann somit umgangen werden.)

Der Quotient  $e''_r - e'_r / \Delta l$  ist im Bild 9 als Tangens des Neigungswinkels  $\Psi$  der Geraden angegeben. Je stärker also die Gerade ist, umso größer wird die



im Pfahl auftretende Spannung sein. Wird der Wert  $\Psi$  in Abhängigkeit von der Eindringung des Pfahls aufgetragen, so bekommt man eine Kurve, die das Anwachsen der Spannungen  $\sigma$  kennzeichnet. Mit Hilfe der Grenzspannung kann man dann gleichfalls die Tiefe bestimmen, wo man mit der Zerstörung des Pfahls rechnen muß. Weil die Spannungen  $\sigma$  aus den während des Einrammens tatsächlich auftretenden Verformungen bestimmt wurden, enthalten sie auch die dynamischen Wirkungen. Die Verteilung dieser Spannungen ist

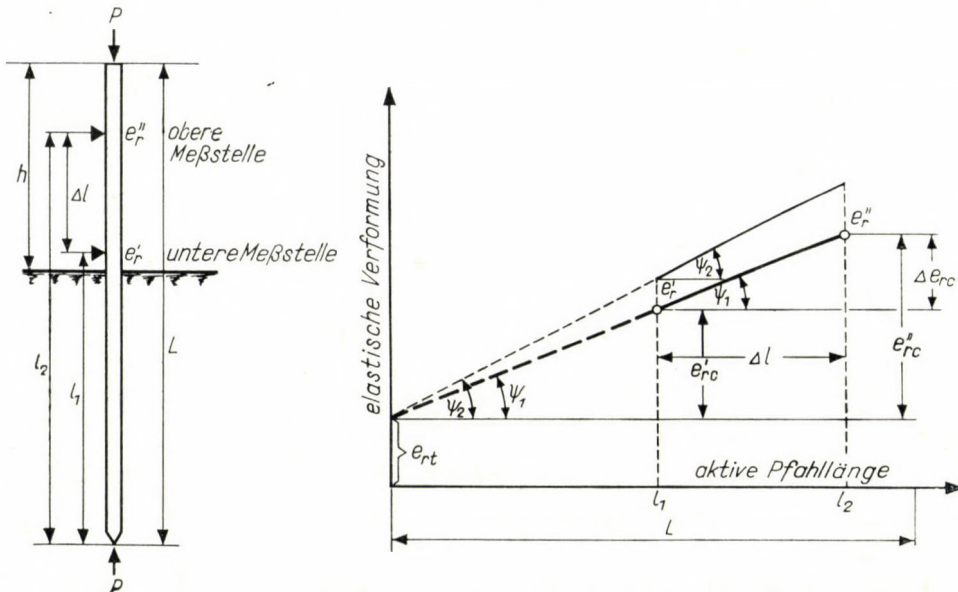


Bild 9. Bestimmung der Verformungen an zwei Meßstellen zur Trennung der elastischen Verformung des Bodens und des Pfahls

jedoch in Richtung der Pfahllänge nicht gleichmäßig, sondern im Kopf größer als in der Pfahlschaft.

Für die Berechnung der im Pfahlkopf auftretenden Spannungen wurde das Annäherungsverfahren angewendet, das auf Seite 73 des englischen *Civil Engineering Code of Practice* No. 4 »Foundations« angegeben ist, falls man den Wert  $\sigma$  mit dem Vergrößerungsfaktor multipliziert, der schon im Abschnitt A angegeben wurde. Dieser Wert errechnet sich zu

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{\frac{Q + k^2 q}{Q + q}}} - 1.$$

Der unter dem Wurzelzeichen befindliche Ausdruck (der zweite Faktor der Hileyschen Formel) drückt die elastischen Stoßverluste aus. Es ist klar, daß diese Energie die im Pfahlkopf auftretenden Spannungen vergrößert ( $k = 0,25 \div 0,4$ ).

Die Kontrolle der Pfahlabmessungen und der Beanspruchungen kann jetzt mit Hilfe des Ausdruckes

$$\sigma_H \leq \eta \sigma$$

durchgeführt werden.

Wird also die Kurve  $\sigma$  Obigem entsprechend aufgetragen, so bekommt man mit dem Schnittpunkt  $\sigma_H/\eta = \sigma$  die Eindringungstiefe, über die hinaus mit der Zerstörung des Pfahls gerechnet werden muß (Bild 10).

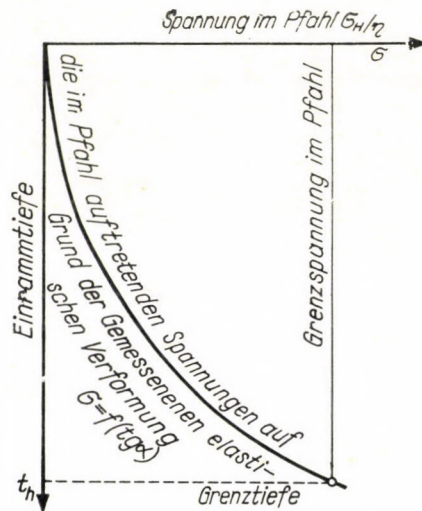


Bild 10. Bestimmung der Einrammtiefe, bei der die Festigkeit des Pfahlkopfes überschritten wird

Für die Ermöglichung der auch wissenschaftlichen Zwecken dienenden Feldversuche möchte ich meinen besten Dank den Ministerien für Verkehrs- und Postwesen ebenso dem für Bauwesen auch hier zum Ausdruck bringen. Ebenso sei hier mein herzlichster Dank meinen wissenschaftlichen Mitarbeiter, Herrn Ingenieur Gy. GRESCHIK, für seine wertvolle Hilfe bei der Auswertung der Resultate und der Durchführung der Bemessungen ausgerichtet.

#### DETERMINATION OF DRIVING STRESSES IN PILES

K. SZÉCHY

#### SUMMARY

The theoretical determination of driving stresses in a concrete pile is a very complicated and uncertain task, although it is of great importance on account of the deterioration of reinforced concrete piles frequently occurring during ramming. The difficulties of the problem lie in the fact that there is no reliable basis for the dimensioning of reinforced concrete piles. Neither the strength of the structure nor the magnitude and distribution of the stresses have been analyzed adequately. The author presents first an approximate method for the calculation of the lateral reinforcements, then describes methods for the determination of the optimum driving depth and of the critical ramming stresses.



Since the dynamical force in the pile increases, on the basis of the energy equation, in proportion to the decrease of the permanent penetration ( $e_m$ ), it attains its maximum value when  $e_m$  becomes zero. On the other hand, the elastic deformation ( $e_r$ ) increases in proportion to the force. Hence, if the ratio  $e_m/e_r$  is represented in a diagram as a function of the penetration of the pile, the maximum dynamical bearing capacity of the pile will be characterized by the value  $e_m/e_r \rightarrow 0$ . Beyond this limit driving will give rise only to elastic deformations in the pile, and this will lead to the gradual deterioration of the pile without increasing its bearing capacity. This economic limit depth is also given by the maximum value of the driving energy applied to the increase of the specific-bearing capacity (Fig. 6.). The stresses in the pile body can be calculated from the elastic deformation of the pile. But the elastic deformation, which can be measured in reality, includes not only that of the pile, but also the elastic deformation of the ground. The author shows that if the deformation is measured simultaneously in two places, the two values can be separated and thus the driving stress can be calculated by Hooke's law (Fig. 9). The slope of the straight lines representing the deformation is proportional to the stresses arising in the pile and if the limit stress of the pile cross-section is determined, its intersection with the curve of real stresses determines the depth of penetration at which destruction starts (Fig. 10).

## DÉTERMINATION DES CONTRAINTES SURVENANT DANS LES PIEUX PENDANT LE BATTAGE

K. SZÉCHY

### RÉSUMÉ

La détermination théorique des contraintes survenant dans les pieux en béton armé pendant le battage est fort compliquée et incertaine, bien qu'elle présente une grande importance pratique si l'on veut éviter la détérioration, assez fréquente, des pieux en béton armé pendant le battage. La difficulté tient à ce qu'on manque d'une base sûre pour le dimensionnement des pieux en béton armé. Ni la résistance de la construction, ni la grandeur et la répartition des contraintes provoquées ne sont suffisamment connues. L'auteur présente d'abord une méthode approchée pour le calcul des étriers, et fait connaître ensuite quelques nouveaux procédés pour la détermination de la profondeur de battage rationnelle et des contraintes critiques provoquées au cours du battage.

Étant donné qu'en vertu de l'équation d'énergie, la force dynamique survenant dans le pieu augmente en raison directe de la diminution de la pénétration permanente ( $e_m$ ), elle atteint sa valeur maximum quand elle devient constante. La déformation élastique ( $e_r$ ) croît, par contre, en raison directe de l'augmentation de la force. Si le coefficient  $e_m/e_r$  est représenté, parallèlement à la pénétration du pieu, dans un diagramme, alors le maximum de la force portante dynamique du pieu sera caractérisé par la valeur  $e_m/e_r \rightarrow 0$ . Au delà de cette limite, des déformations élastiques seront seules à se produire dans le pieu sous l'effet du battage, ce qui conduit à la détérioration progressive du pieu, sans augmentation de sa force portante. Cette profondeur limite économique est aussi donnée par la valeur maximum du travail de battage appelé à accroître la force portante spécifique (figure 6). Les contraintes survenant dans le pieu peuvent être calculées de la déformation élastique. Mais dans la déformation élastique pratiquement mesurable, celle du pieu se trouve réunie à la déformation élastique du sol. L'auteur démontre que la mesure simultanée de la déformation en deux points différents permet de séparer ces deux valeurs, de sorte que la contrainte survenant pendant le battage peut être déterminée d'après la loi de Hooke (figure 9). L'inclinaison des droites représentant la déformation est proportionnelle aux contraintes survenant dans le pieu, et si l'on détermine la contrainte limite de la section de ce dernier, son intersection avec la courbe des contraintes réelles donne la profondeur de battage signifiant le commencement de la détérioration (figure 10).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЗАБИВАНИИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В СВАЯХ

K. СЕЧИ

## РЕЗЮМЕ

Теоретическое определение напряжений от забивания, возникающих в железобетонных сваях, является очень сложным и неопределенным, но их определение имеет большое практическое значение с точки зрения разрушения железобетонных свай, часто наблюдаемом при их забивании. Трудность вопроса состоит в том, что железобетонные сваи не имеют надежных основ расчета. Не уточнены соответствующим образом ни прочность конструкции, ни величина возникающего напряжения и его распределение. Автор сначала демонстрирует приближенный метод расчета армирования, затем излагает новые методы определения целесообразной глубины забивания и критических напряжений забивания.

Вследствие того, что возникающая в свае динамическая сила на основе уравнения энергии возрастает с уменьшением остаточного проникновения ( $e_{ост}$ ), наибольшего своего значения достигает тогда, когда остаточное проникновение становится равным  $S$ . Упругая деформация ( $e_{упр}$ ) же, в свою очередь, возрастает с ростом силы. Следовательно, если частное  $e_{ост}/e_{упр}$  отобразить на диаграмме параллельно с проникновением сваи, тогда максимум динамической нагружаемости сваи будет характеризовать величина  $e_{ост}/e_{упр} \rightarrow 0$ . Сверх этого предела в свае под воздействием забивания возникают лишь упругие деформации, что приводит к постепенному разрушению сваи без того, чтобы возрастала бы нагружаемость сваи. Эту экономичную предельную глубину можно получить также на основе максимальной работы забивания, приложенной для повышения удельной нагружаемости (рис. 6). Нагрузки, возникающие в теле сваи, можно рассчитать по упругой деформации сваи. Однако, упругая деформация, измеримая в действительности, содержит упругую деформацию не только сваи, но и грунта. Автор показывает, что в случае, если деформация одновременно измеряется в двух местах, тогда две величины можно отделить друг от друга и, таким образом, напряжение при забивании можно определить на основе закона Гука (рис. 9). Наклон прямых, отображающих деформацию, пропорционален возникающим в свае напряжениям и если определить предельное напряжение сечения сваи, тогда секущая кривых действительных напряжений даст глубину забивания, которая будет началом разрушения сваи (рис. 10).



# EXAMEN NUMÉRIQUE DE MEMBRANES CONSTRUITES SUR UNE BASE RECTANGULAIRE

K. SZMODITS

DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES  
INSTITUT SCIENTIFIQUE DU BÂTIMENT, BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 18 juillet 1964]

L'étude numérique des membranes construites sur une base rectangulaire consiste à déterminer les valeurs de noeuds d'une fonction nodale satisfaisant une équation potentielle inhomogène. L'étude présente un théorème d'interchangeabilité et démontre qu'à l'aide de celui-ci et en vertu des relations connues entre les ordonnées de la fonction nodale on peut, à partir d'une solution relative à un noeud chargé voisin du bord, produire une solution se rapportant à n'importe quel noeud intérieur. L'application du procédé est illustrée par un exemple numérique.

Il existe un grand nombre de problèmes mécaniques relatifs au flux potentiel, à la torsion, à la théorie des structures des voiles et des membranes qui se ramènent, du point de vue mathématique, au problème de la première valeur au contour de la théorie du potentiel.

On sait qu'en cas de domaine rectangulaire, la solution de l'équation potentielle inhomogène ne peut être produite avec une expression finie. Il n'existe alors que des solutions analytiques exprimées avec des séries infinies, ou des solutions numériques comportant un ensemble de valeurs discrètes nommées fonctions nodales.

Dans ce qui suit, on examinera les relations existant entre les valeurs des fonctions nodales. De la fonction nodale connue d'un cas de charge on déterminera ensuite, sur la base de ces relations, les fonctions nodales des autres cas de charges. L'avantage de ce procédé est qu'il nécessite des calculs plus simples et moins longs que la solution indépendante de chaque cas de charge individuel.

L'équation d'une surface de membrane  $w(xy)$  soumise, aux points  $u, v$ , à une charge concentrée  $P$ , et limitée par le rectangle aux côtés  $a, b$  sera — en cas de conditions au contour homogènes — selon la solution bien connue de Navier:

$$w(u, v; x, y) = \frac{4P}{Hab\pi^2} \times \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1)$$

où  $H$  est la projection horizontale de la force de traction agissant sur le bord de longueur unitaire et  $m = 1, 2, 3 \dots; n = 1, 2, 3 \dots$

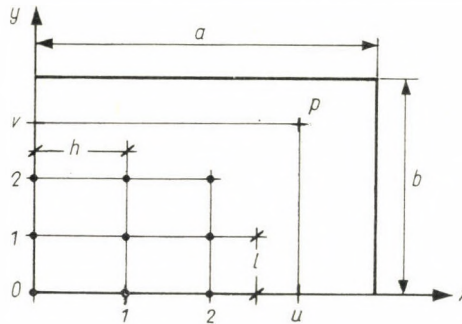


Figure 1

La formule (1) peut aussi s'écrire sous forme d'une fonction nodale définie dans les noeuds d'un réseau rectangulaire. Compte tenu de la figure 1:

$$h = \frac{a}{M+1}; \quad l = \frac{b}{N+1}; \quad r = \frac{l}{h}.$$

$$j = 0, 1, \dots, u, \dots, M+1$$

$$k = 0, 1, \dots, v, \dots, N+1$$

$$m = 1, 2, \dots, M$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

$$\varrho_m = \frac{m\pi h}{a}; \quad \zeta_n = \frac{n\pi l}{b}.$$

Une charge concentrée  $P$  agissant aux noeuds  $j = u$  et  $k = v$  peut être développée dans la série trigonométrique finie

$$p_{j,k} = \frac{4hlP}{ab} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sin \varrho_m u \cdot \sin \zeta_n v \cdot \sin \varrho_m j \cdot \sin \zeta_n k. \quad (2)$$

Soit le déplacement des noeuds intérieurs du réseau donné par l'expression finie suivante:

$$w_{jk} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin \varrho_m j \cdot \sin \zeta_n k. \quad (3)$$

Si  $\bar{\Delta}$  est l'opérateur laplacien écrit avec des différences finies, alors en substituant (2) et (3) dans l'équation potentielle inhomogène

$$H \cdot \bar{\Delta} w_{jk} = p_{jk}$$

on reçoit:

$$w_{jk} = \frac{2hlP}{Hab} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{\sin \varrho_m u \cdot \sin \zeta_n v}{r^2 (\cos \varrho_m - 1) + (\cos \zeta_n - 1)} \sin \varrho_m j \cdot \sin \zeta_n k. \quad (4)$$



Des formules (1) et (4) il ressort que les coordonnées  $u$ , resp.  $v$  du lieu d'application de la force, et celles  $x$ , resp.  $y$  du lieu de déplacement peuvent être interchangées, c'est-à-dire

$$w(u, v; x, y) = w(x, u; u, y) = w(u, y; x, v) = w(x, y; u, v). \quad (5)$$

On peut donc énoncer le théorème d'interchangeabilité suivant, valable en cas de base rectangulaire:

Sur une surface de membrane définie par une fonction continue ou par une fonction nodale, le déplacement des points  $x, y$ , produit par la force  $P$  agissant aux points  $u, v$  est égal au déplacement des points  $x$  et  $v$ , resp.  $u$  et  $y$ , que provoque la force  $P$  agissant aux points  $u, y$  resp.  $x, v$ ;  $u$ , et  $v$  étant des coordonnées fixes,  $x$  et  $y$  des coordonnées mobiles.



Figure 2

Au cas spécial où  $y$  et  $v$ , et  $x$  et  $u$  sont interchangés simultanément, le théorème (5) est identique au théorème de Maxwell.

Le théorème (5) est valable non seulement pour des membranes, mais aussi pour des plaques élastiques, fait qui découle de l'analogie que la formule de la surface des plaques élastiques présente avec les équations (1) et (2).

Du théorème (5) il découle que certaines séries ou colonnes des fonctions nodales correspondant à une charge concentrée sont identiques à celles de fonctions nodales correspondant à des charges concentrées agissant en d'autres points.

Si le noeud chargé est voisin du contour  $w = 0$  et la fonction nodale de la charge est connue, on peut, à la base du théorème déduit, écrire simplement les lignes ou colonnes extrêmes de la fonction nodale qui correspond au noeud chargé situé dans la ligne ou colonne en question. Sur la base des relations existant entre les valeurs des noeuds non chargés, les autres lignes ou colonnes peuvent être aisément déterminées, indépendamment les unes des autres, en additionnant les lignes ou colonnes de la solution connue. Les chiffres indiqués sur la figure 2 expriment, comme on sait, que la somme des valeurs des noeuds voisins du  $jk^{\text{ième}}$  noeud et du  $jk^{\text{ième}}$  noeud lui-même est égale à zéro. Si les valeurs des noeuds de deux lignes ou colonnes sont connues, les valeurs nodales de la troisième ligne ou colonne peuvent être déterminées de cette relation.

	0	0	0			0	0	0	0
9					IX = 4				
8					VIII = 3 + 5				
7					VII = 2 + 4 + 6				
6					VI = 1 + 3 + 5 + 7				
5					V = 2 + 4 + 6 + 8				
4					IV = 3 + 5 + 7 + 9				
3					III = 4 + 6 + 8				
2					II = 5 + 7				
1					I = 6				
	0	0	0			0	0	0	0

Figure 3

Soit par exemple une fonction nodale composée de neuf lignes intérieures, le noeud chargé étant situé dans la première ligne de la deuxième colonne. De la fonction nodale de ce cas connu, déterminons celle de la charge agissant dans la VI<sup>e</sup> ligne de la deuxième colonne. La solution comportera les étapes suivantes (figure 3):

1. La I<sup>e</sup> resp. IX<sup>e</sup> ligne de la fonction nodale cherchée est identique, selon le théorème ci-dessus, à la 6<sup>e</sup>, resp. 4<sup>e</sup> ligne de la fonction nodale connue.

2. D'après la relation représentée figure 2, la ligne II est la somme des lignes 5 et 7, ou exprimé symboliquement :  $II = 5 + 7$  et  $VIII = 3 + 5$ , c'est-à-dire la ligne II est la somme des lignes voisines de la ligne 6, et celle VIII la somme des lignes voisines de la ligne 4.

3. Les autres lignes sont formées par les sommes des valeurs de noeuds de la solution connue, d'une façon telle que la fonction nodale soit une fonction potentielle, chaque ligne nouvelle étant la somme des termes voisins de ceux de la ligne précédente. En procédant de la sorte, les lignes nouvelles désignées par des chiffres romains seront les sommes des anciennes lignes de nombre pair ou impair, et les lignes composées de nombres pairs sont suivies de lignes de nombres impairs et inversement. Si, dans les symboles des sommes, les chiffres désignant chaque ligne sont écrits dans l'ordre croissant, les chiffres correspondants des lignes forment une suite de nombres naturels dans les deux directions à partir de la ligne renfermant le noeud chargé. Les sommes qui déterminent les lignes II—VIII selon la règle précédente, sont mises en vue sur la figure 3.



*Exemple.* Soit un carré contenant  $5 \times 5$  noeuds intérieurs, chargé en son point encadré par une unité de force  $P = 1000$ . La fonction nodale symétrique à la diagonale, et déterminée par relaxation est indiquée par la figure 4. On cherche la fonction nodale relative au noeud intérieur chargé, représenté figure 6. La solution est obtenue en deux étapes. De la fonction nodale connue, on détermine d'abord, de la façon décrite, la fonction nodale correspondant à la charge qui agit dans la deuxième ligne de la première colonne (figure 5), puis on en détermine la fonction nodale chargée dans la deuxième colonne de la III<sup>e</sup> ligne. Les deux étapes et les règles de calcul servant à déterminer les nouvelles lignes sont montrés par les figures 4 à 6. En vue de la vérification des calculs, on peut démontrer que la 6<sup>e</sup> fonction nodale satisfait, dans tous les noeuds, la relation indiquée sur la figure 2.

	0	0	0	0	0	0	0
1	0	301,74	103,48	40,20	16,86	6,41	0
2	0	103,48	91,97	40,46	20,83	8,78	0
3	0	40,20	40,46	28,84	17,23	7,88	0
4	0	16,86	20,83	17,23	11,36	5,50	0
5	0	6,41	8,78	7,88	5,50	2,75	0
	0	0	0	0	0	0	0

Figure 4

	I*	II*	III*	IV*	V*	
	0	0	0	0	0	0
I = 2	0	103,48	71,97	40,46	20,83	8,78
II = 1+3	0	341,94	143,94	69,04	34,09	14,29
III = 2+4	0	120,33	92,80	57,69	32,20	14,28
IV = 3+5	0	46,61	49,24	36,72	22,73	10,62
V = 4	0	16,86	20,83	17,23	11,36	5,50
	0	0	0	0	0	0

Figure 5

De même, on peut déterminer, à l'aide de la fonction nodale indiquée sur la figure 4, la fonction nodale correspondant à n'importe quel noeud intérieur chargé. Par une combinaison linéaire de ces fonctions nodales, on produit la surface de membrane d'une charge quelconque. Le procédé décrit peut s'appliquer non seulement à l'étude des membranes, mais aussi à celle des plaques élastiques rectangulaires librement appuyées.

	III*	II*+IV*	I*+III*+V*	II*+IV*	III*	
0	0	0	0	0	0	0
0	40,46	92,80	152,71	92,80	40,46	0
0	69,04	178,03	425,27	178,03	69,04	0
0	57,69	125,00	192,30	125,00	57,69	0
0	36,72	71,97	93,95	71,97	36,72	0
0	17,23	32,19	39,59	32,19	17,23	0
0	0	0	0	0	0	0

Figure 6

## NUMERICAL INVESTIGATION OF MEMBRANE SHELLS WITH RECTANGULAR PLAN

K. SZMODITS

## SUMMARY

The numerical investigation of membranes with rectangular plan consists of the determination of the grid values of a grid function which satisfies an inhomogeneous potential equation. The paper presents a reciprocity theorem and shows that, with its aid and with the known relations between the ordinates of the grid functions, the solution for any inner point can be determined from the solution belonging to a loaded point beside the boundary. The application of the method is shown by a numerical example.

NUMERISCHE BEHANDLUNG VON MEMBRANSCHALEN  
MIT RECHTECKIGEM GRUNDRIS

K. SZMODITS

## ZUSAMMENFASSUNG

Die numerische Untersuchung von Membranschalen mit rechteckigem Grundriß beruht auf der Bestimmung der Gitterwerte einer Gitterfunktion, welche eine inhomogene Potentialgleichung erfüllt. Der Aufsatz führt einen Vertauschungssatz vor und legt dar, daß mit dessen Hilfe sowie auf Grund der bekannten Zusammenhänge zwischen den Ordinaten der Gitterfunktionen aus der Lösung für einen neben dem Rand belasteten Punkt die zu einem beliebigen inneren Punkt gehörige Lösung dargestellt werden kann. Die Anwendung des Verfahrens wird an einem Zahlenbeispiel gezeigt.

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕМБРАННОЙ ОБОЛОЧКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПЛАНА

K. СМОДИЧ

## РЕЗЮМЕ

Численный анализ мембранной оболочки прямоугольного плана состоит в определении значений решетки уравнения решетки, удовлетворяющего неоднородному потенциальному уравнению. В работе показаны теорема взаимозаменяемости и то, что с помощью ее, а также на основе зависимостей известных между ординатами функций решетки, из решения, действительного для некоторой нагруженной периферической точки, можно получить решение, действительное для любой внутренней точки. Применение демонстрируется на числовом примере.



# ENRICHMENT OF COAL SLIME BY IN-SERIES CONNECTED HYDROCYCLONES

G. TARJÁN

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received January 3, 1964]

For the enrichment of coal washings, the connexion in series of enriching and classifier (condensing) hydrocyclones operating "in own liquid" — instead of the costly flotation — promises to be an economical method.

The Lias coals of Hungary contain a large quantity of fine dust. For example, 20,7 weight per cent of the coal produced by the Pécs Coal Mining Trust has a grain size finer than 0,5 mm. For the fractions of this coal dust, separated at specific weights of 1,5 and 2,0, the numerical data hold in Table I.

**Table I**

Specific weight	Weight %	Ash %	Recovery	
			Ash	Comburent
—1,5	11,2 54	10	17	70
1,5 ÷ 2,0	5,1 24	38	29	22
+2,0	4,4 22	76	54	8
	20,7 100	31	100	100

That is, 20,7 weight per cent of 0,5 mm coal dust contained in 100 weight per cent of coking coal from Pécs, theoretically yields 11,2 weight % of coking coal of a specific weight less than 1,5 and of an ash content of 10%, further 5,1 weight % of middlings and 4,4 weight % of waste. Against this, only 2,5 ÷ 2,7 weight % of coking coal dust (flotate of 12% of ash content) is produced by the Pécsújhegy washery at present.

However, the quantity of coking-coal quality products can be considerably increased with low initial and operating costs, without a further development of the costly flotation unit by connecting enriching hydrocyclones and classifier hydrocyclones operating "in own liquid" in series, keeping the overflow of the classifier cyclones partly or entirely in circulation.

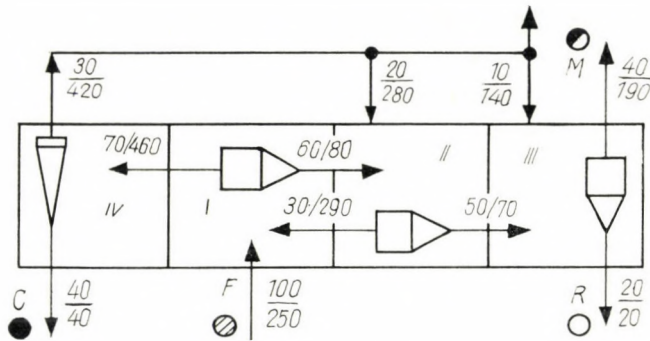


Fig. 1

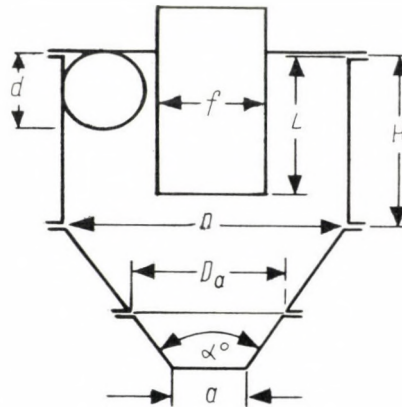


Fig. 2. Enriching cyclone  $H/D = 0,67$ ,  $L/D = 0,57$ ,  $d/D = 0,20$ ,  $f/D = 0,42$ ,  $a/D = 0,20$ ,  $\alpha = 75^\circ$ ,  $D_a = 20$  cm

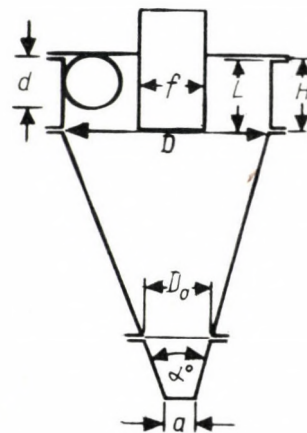


Fig. 3. Classifier cyclone  $H/D = 0,20$ ,  $L/D = 0,20$ ,  $d/D = 0,125$ ,  $f/D = 0,15$ ,  $a/D = 0,1 \div 0,05$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $D_o = 8$  cm



But also the costly flotation unit of the Dunaújváros washery, for example, could be largely relieved (eventually fully omitted) by the application of the enrichment method outlined above.

A possible connection flow-sheet — showing the balance of solid parts and water — can be, e.g., the one according to Fig. 1. The numerator of the numbers shown in the figure indicates the quantity of solid parts, their denominator — the quantity of water, referring to a feeding of 100% solid parts. The cyclones of the tanks I—II—III are large-cone angle enriching cyclones of  $0,5 \div 0,6$  atmospheric pressure, e.g. having a construction according to Fig. 2; those of the tank IV are small cone angle classifier cyclones of  $1,5 \div 2,5$

Table II

Tank N°	t/m <sup>3</sup>	$\sim\delta$	$\sim\gamma$	Q, m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> /t
I	130/540	1,6	1,08	620	4,15
II	80/360	1,75	1,09	405	4,50
III	70/210	1,85	1,12	250	3,50
IV	70/460	1,4	1,04	510	6,56

atmospheric pressure, e.g. having a construction according to Fig. 3. The upper outflow of the classifier cyclone IV gets into the tanks II and III as thinning water; in this way, there is no need of fresh water.

According to the data shown in the flow sheet, the raw slime flow into tank I in a thinning of 2,5 [m<sup>3</sup>/t]. The final products *C* and *R* as the lower outflow of the cyclones leave in a thinning of  $\sim 1,0$ ; the thinning of the middlings *M* is 4,65. This product may flow into the standage or into the flotation cells. (If the thinning of the feed is higher than 2,5, also the thinning of the middlings will be higher.) If the plant does not want to separate the waste from the middlings (coaldust), tank III and its cyclone are omitted and the feed of tank III flows into the standage directly.

The solid part vs. water balance of the flow sheet, resp. the slurry/hour  $Q$  m<sup>3</sup> load of the individual cyclones, related to a feed of solid parts  $F = 100$  t/h, is as Table II shows ( $\delta$  is the specific weight of the solid parts,  $\gamma$  is that of the slurry).

For example, the cyclones and slurry pumps necessary for working up the entire quantity of raw slime  $F = 70$  t/h of the Pécsújhely washery (calculating with a  $\eta = 0,6$  pump efficiency) may be the following (Table III).

The cyclones IV (8 cyclones 32 cm for  $Q = 360$  m<sup>3</sup>/h at 1,5 atp) can be alternatively the showing ones in Table IV. (Smaller diameter cyclones classify at smaller grain sizes, i.e. they produce more washed coal!)

**Table III**

Tank N°	Q, m³/h	Cyclone			Slurry pump	
		p.	Dia-meter, cm	atp	H, m	N, HP
I	435	2	65	0,6	10	29
II	285	1	72	0,6	10	19
III	175	1	60	0,6	10	12
IV	360	8	32	1,5	20	45

**Table IV**

p.	atp		
	1,5	2,0	2,5
8	32	30	28
6	38	36	33
4	47	44	41

**Table V**

Tank N°	Q, m³/h	Cyclone			Slurry pump	
		p.	Dia-meter, cm	atp	H, m	N, HP
I	620	2	78	0,6	10	42
II	405	1	86	0,6	10	27
III	250	1	72	0,6	10	17
IV	510	10	34	1,5	20	64

In the Dunaújváros washery, the quantity of coal slime  $< 0,5$  mm is  $F = 100$  t/h. In this case, the data in Table V are obtained.

The cyclones IV can be alternatively the ones showing in Table VI.

**Table VI**

p.	atp		
	1,5	2,0	2,5
10	34	32	30
8	38	36	34
6	46	43	40



The classifier hydrocyclones IV, requiring comparatively much energy, may be substituted also by static slurry thickener vats. It is advisable to shape the suction pipes of the slurry pumps according to Fig. 4. The lower part of the suction pipe is enclosed in a pipe (bell) with a larger diameter, and the upper end of the pipe protracting out of the former reaches near to the slurry surface. The bell protects the lower part of the suction pipe against being filled with

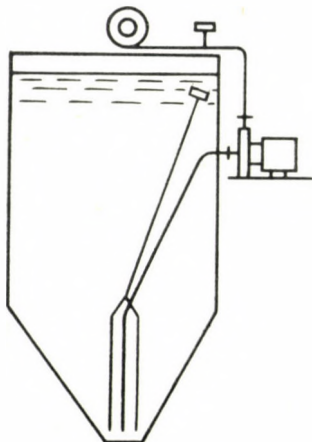


Fig. 4. Tank

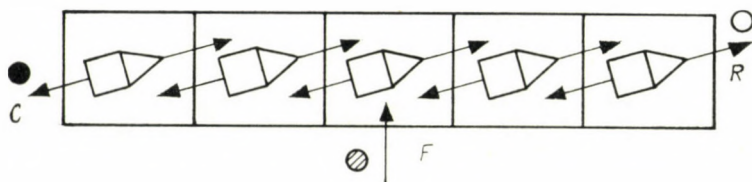


Fig. 5

mud during standstills, and the pump begins to work — at the start — with clean water from the vicinity of the slurry surface, if the plug of the upgoing pipe is removed. During normal work, this pipe as well as the pipe junction of the discharge pressure tube over the tank is closed. On starting, a waterhose lance is attached by a rubber hose to the junction of the discharge pipe, for churning the washings settled at the bottom of the tank.

Instead of slurry pumps, also air lifts can be employed for the operation of the enriching hydrocyclones. The advantage of this solution is, that instead of several — relatively short-lived — slurry pumps — a single — properly sized — compressor is needed, in which no slurry-caused wear shows. The air lift solution involving the saving of the other slurry pumps promises to be especially advantageous, if not only 2 or 3 “enriching” cells are connected in series (as in Fig. 1) but several — e.g. 4–5–6 — cells are applied succes-

sively in such a way that the upper, resp. lower products of the hydrocyclones of the individual cells get into the "preceding", resp. "succeeding" cell (as in Fig. 5). In the consecutive cells in the direction of the lower cyclone products, the specific weight of the slurry as well as that of the coal on feed gradually increase, while they gradually decrease in the opposite direction; in this way, so from the first and last cells clean final products leave. This operating system is closely related to the series-cells flotation; also there, the feeding of the "waste" of the individual cell into the "succeeding" cell and the refeeding of its froth as intermediate product into one of the "preceding" cells ensures the clean end-concentrate and end-waste.

The enrichment method suggested here substitutes, as a final outcome, the costly flotation in the dressing of Lias coal-washings. But its further significant advantage is that it is suitable for the enrichment of brown coals, too, where flotation simply cannot be employed — in lack of suitable reagents —, and where also the other specific gravity enrichment methods fail.

#### ANREICHERUNG VON KOHLENSCHLAMMEN DURCH IN REIHE GESCHALTETE HYDROZYKLONE

G. TARJÁN

#### ZUSAMMENFASSUNG

Für die Anreicherung von Schlammkohlen — statt der kostspieligen Flotation — verspricht die Schaltung von »in eigenem Saft« arbeitenden Sortier- und Klassier- (Eindick-) Hydrozyklonen in Reihe — bei Rückzirkulation eines großen Anteils des Überflusses der Klassier-Zyklone — ein wirtschaftliches Verfahren zu sein.

#### CONCENTRATION DES SCHLAMMS DE CHARBON PAR DES HYDROCYCLONES CONNECTÉS EN SÉRIE

G. TARJÁN

#### RÉSUMÉ

Au lieu de la flottation trop coûteuse, l'auteur propose, pour le concentration des schlamms de charbon, une méthode plus économique consistant dans la connexion en série d'hydrocyclones d'enrichissement et de classification (de condensation) opérant en «jus propre», avec maintien en circulation d'une grande partie de la décharge supérieure des cyclones classeurs.

#### БОГАЩЕНИЕ УГОЛЬНЫХ ШЛАМОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫМИ ГИДРОЦИКЛОНАМИ

Г. ТАРЬЯН

#### РЕЗЮМЕ

Для обогащения шламовых углей, вместо дорогостоящего метода флотации, кажется экономичным метод последовательного соединения гидроциклонов, работающих в „собственной жидкости“, и классифицирующих гидроциклонов, с поддержанием системы циркуляции большей части перелива классифицирующих гидроциклонов.



# SHAKEDOWN — NEW VIEWPOINT IN STRUCTURAL ANALYSIS

DESI D. VÁSÁRHELYI

PROFESSOR OF CIVIL ENGINEERING  
UNIVERSITY OF WASHINGTON SEATTLE, WASHINGTON

[Manuscript received August 14, 1964]

While pre- and post-stressing, that is, manipulations of residual stresses have largely been accepted in structural practice, many engineers do not like to hear about shakedown. It is shown that shakedown and the designed adoption of residual stresses are but two different aspects of the engineering recognition of various inelastic actions.

## I. Introduction

Since Hooke's statement in 1676 — "ut tensio sic vis" — it took almost two centuries to develop the bases of modern structural analysis founded primarily on the principles of linear elasticity. Another century almost passed before the inelastic behavior of structural materials received engineering consideration for the first time in the work of G. KAZINCZY in 1914. This second one is still limited and would not enter into design considerations of entire large groups of structures, such as bridges. It would be interesting to visualize what direction the further development of the analysis of the latter group of structures is taking.

The ever-increasing knowledge of the fatigue behavior introduced already the idea of finite useful life. This also implies that one might be ready to consider other phenomenon of transient nature; such as the so-called shakedown process.

The almost exclusive consideration of strength and of limited deformability are also being supplemented. With the advent of prestressed structures a new factor, the residual stress condition, becomes a convenient tool of design in the hands of engineers.

A somewhat paralleled review of the implications of shakedown and of residual stress conditions may be helpful at this point in clarifying some ideas.

In the following considerations when we talk about structures, we mean in the most general sense, assemblies made of various elements. Using more customary engineering language, we include non-composite as well as composite structures, allowing that we generalize this idea beyond combinations of steel and of concrete to eventually include combinations of elements of other materials.

## II. The Phenomenon of Shakedown

### 1. General Description

Inelastic action almost exclusively would only be considered, in plastic analysis methods, in establishing ultimate load carrying capacities. Yet, some partial inelastic actions in structures, especially in conjunction with the integral elasto-plastic action, may be just as important. This group of phenomena (known since the work of H. BLEICH and E. MELAN in the 1930's) constitutes the basis of the so-called shakedown action.

In the following discussion the term *elastic action* will be used in the most conventional sense, meaning fully reversible action excluding any dissipation of energy from the process of deformation. Moreover, one should realize that elastic action may take place at any stress level. All the work spent in bringing about elastic deformation is fully recovered when the deformation is being released.

The term *inelastic action* will be used in a largely generalized sense to include all deformational processes which are analogous to the plastic action of ductile metals. Inelastic action takes only place at a specific stress level. All the work spent in bringing about inelastic deformation is fully dissipated. Inelastic deformation cannot be released and the work spent in bringing it about cannot be recovered.

Using these definitions, the term elastic action will include

- a) all actual elastic deformations,
- b) all limited elastic (Euler) buckling.

(Examples of this: elastic buckling of the thin compression plate of a box-type girder, the elastic buckling of the thin web of a plate girder.)

The term inelastic action will include:

- a) actual material yielding, which may be a result of
  - a) action of loads,
  - $\beta$ ) thermal action,
  - $\gamma$ ) operations during fabrication.
- b) slip between connected parts, as a result of
  - a) break-down of frictional resistance,
  - $\beta$ ) differential expansion (as for instance in cover-plate cut-offs).
- c) creep in certain members,
- d) imposed mechanical adjustment (such as fit-ups, readjustments of camber and of support pressures by mechanical means).

This list certainly does not include all possible actions but it may serve as an illustrative sample.

The occurrence of inelastic action usually brings about a state of residual stress in all or in part of the members of a structure. Now, it is quite possible that some residual stresses are present in parts of the structure even before



they are assembled, such as residual stresses due to rolling and non-uniform cooling of rolled sections or shrinkage stresses of prefabricated concrete members. Thus, one may distinguish

- a) pre-existing residual stresses ( $r_1$ ),
- b) incidental residual stresses ( $r_2$ ).

When the assembled structure undergoes its first loading cycle, the stresses due to the application of working loads ( $s$ ), are superimposed on the pre-existing system ( $r_1$ ) of residual stresses, the limit stresses for one or several inelastic actions (yielding, slip, etc.) may be exceeded, resulting in inelastic action, manifested by increase in permanent deformations and a changed system of residual stresses ( $r_1, r_2$ ). If with every application of the working load this process continues it results in a gradual deterioration by increasing the permanent deformations and leads eventually to an incremental state of collapse. A structure which follows this course of behavior is one which did not shakedown.

If on the other hand, after a finite number of load applications the residual stress system of the structure becomes such that combined with the stresses caused by the loads, no further inelastic action results and henceforth the structure behaves elastically only under the loading cycles, we say that the structure accomplished its shakedown.

The phenomenon of shakedown for all types of structures and for continuous media as well has been widely studied and its basic properties satisfactorily established. A condition of shakedown has now theoretically been established. Whenever this condition is satisfied, the structure will shake down and become elastic in all its further behavior for a given load system. It is not necessary to know the actual procedure step by step through which the shakedown will occur.

## 2. Condition of Shakedown

The condition of shakedown in the most general terms is the following:

If any such system of residual stresses ( $r_1, r_2$ ) from all causes may be established which, when added to the system of stresses from the working loads, the resultant stress anywhere in the structure will not reach the limiting stress for any inelastic action, the structure will shake down for a given system of loads.

Once the shakedown is accomplished the structure becomes for all loads not exceeding the shakedown loads, a perfectly elastic system. In the process of shakedown of a structure it is easy to see an analogy to a process of cold working of a ductile metal. One realizes that it might be accomplished by one or in several cycles of load application and once accomplished, no further inelastic behavior results for a certain load level. Work is always spent or dissipated in the process of shakedown.

The condition of shakedown being present, the shakedown will occur once loads are acting upon the structure. Here again two possibilities can be distinguished. The condition for shakedown may be present

- a) by coincidence,
- b) by design.

The second one implies that an unfavorable condition of shakedown may be turned into a more favorable one by a designed control of the process.

The foregoing also corrects an outdated concept of the phenomena, reflected by the very term "shakedown". This last one suggests a process of getting rid of the effect of residual stress. Actually, there is a rearrangement of the residual stresses into a pattern which assures the planned functioning of a structure.

### III. Residual Stresses

What does actually a designed condition of shakedown imply? It implies the setting up of a residual stress system by design — a process akin to the pre- or post-stressing of the structure. In this we hit upon another generalization and recognize that shakedown and pre- or post-stressing are both manipulations of residual stress systems. With this in mind one may attempt an encompassing view of the procedures.

#### 1. Sources of Residual Stress

Some means by which designed systems of residual stress may be set up include

- a) the arrangement and provision of initial permanent deflections (camber, fit-up),
- b) the adjusting of certain internal forces by mechanical devices (post-tensioning, etc.),
- c) the adjusting of certain external reactions by mechanical devices (jacking on supporting points, adjusting of relative positions of such supports),
- d) thermal adjusting techniques (flame straightening or bending, post-heating in some cases).

This again does not pretend to be an exhaustive list, and certainly various other means to produce residual stress systems may be found.

Another implication should also be noted. Once one shakedown state has been reached by some process (e.g., by incidental cycles of working loads) it still remains the possibility of a shakedown for an entirely different or an altered system of working loads. Here the concept of the so-called shakedown load should be recalled: there is a maximum load system for which a given structure can still shakedown.



Previously reference has been made about shakedown for some given load system — which, of course, might be an actual system of working loads multiplied by a factor of safety. The design proposition for such a system of working loads naturally is to find the structure which shakedown load is equal to the factorized working load.

## 2. Applications in Design

The process of designing a structure consequently would imply the following steps:

- a) the primary design of the structural system,
- b) the *design* of the residual stress system. This may have the following aspects:
  - a) an evaluation of the *existing* shakedown condition, as determined by the residual stresses due to material, fabrication, erection, etc.,
  - $\beta$ ) in addition to the previous (under a)) the establishment of a designed system of residual stress to bring about the *desired* shakedown condition.

The process of fabrication and erection will also, as a consequence, include:

- a) the actual fabrication and erection,
- b) the setting up of residual stress system (e.g., pre- or post-stressing),
- c) the artificial shakedown (which very well may be called a pre-cycling or tuning-in procedure).

## IV. Conclusion

Do the preceding notes mean that our design and construction procedures will change radically in the future?

Not necessarily so, but the concept of structural action, as well as of structural analysis and design, will slowly take a more realistic and general aspect. The same as plastic and ultimate load methods of analysis and of design found their way into the thinking of the structural engineers. The same concept of shakedown action, generalized as to cover all application of pre-arranged residual stress, is on its way to penetrate all structural analysis and design, and this time bridge structures probably will not be excluded.

Some re-thinking of ingrained ideas will be necessary. It is evident that some degree of permanent deformation during the shakedown process should be considered as part of normal and predictable action of structures.

Pre- and post-stressings have already been extensively accepted as normal engineering procedures. Shakedown is still an odious sounding term for many structural engineers, but this might prove to be merely a question of semantics. Fortunately most of the structures now, as well as in the past, adopt themselves to the loads by shakedown.

## REFERENCES

Since the preceding discussion is a result of an extensive study of plastic analysis and of inelastic actions, it seems to be appropriate to list some comprehensive works covering the field. Some of these books have very detailed bibliographies.

- NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. Vol. I (1950) and Vol. II (1963). McGraw-Hill Co., New York.
- FREUDENTHAL, A. M.: The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures. J. Wiley and Sons, New York 1950.
- PRAGER, W.—HODGE, PH. G.: Theory of Perfectly Plastic Solids. J. Wiley and Sons, New York 1951.
- OSGOOD, W. R.: Residual Stresses in Metals and Metal Construction. Reinhold Publishing Co., New York 1954.
- NEAL, B. G.: The Plastic Methods of Structural Analysis. J. Wiley and Sons, New York 1956.
- HODGE, PH. G., JR.: Plastic Analysis of Structures. McGraw-Hill Co., New York 1959.
- BOLEY, B. A.—WEINER, J. H.: Theory of Thermal Stresses. J. Wiley and Sons, New York 1960.
- LEE, E. H.—SYMONDS, P. S.: Plasticity. Pergamon Press, New York 1960.
- HOFF, N. J.: Creep in Structures. Springer Verlag, Berlin 1962.

## ANPASSUNG — EIN NEUER GESICHTSPUNKT FÜR DIE ANALYSE VON KONSTRUKTIONEN

D. D. VÁSÁRHELYI

## ZUSAMMENFASSUNG

Obwohl Vor- und Nachspannung, das heißt die Anwendung von Restspannungen, in der Konstruktionspraxis weitgehend angewendete Verfahren sind, hören viele Ingenieure nicht gern von der Anpassung. Der Verfasser zeigt, daß Anpassung und planmäßige Anwendung von Restspannungen bloß zwei verschiedene Gesichtspunkte für die ingenieurmäßige Erkenntnis der verschiedenen inelastischen Vorgänge darstellen.

## LA STABILISATION — UN NOUVEAU POINT DE VUE POUR L'ANALYSE DES CONSTRUCTIONS

D. D. VÁSÁRHELYI

## RÉSUMÉ

La pré- et postcontrainte, c'est-à-dire l'application des contraintes résiduelles a été largement adoptée dans la pratique des constructions, mais beaucoup d'ingénieurs sont hostiles à l'idée de stabilisation. L'auteur montre que la stabilisation et l'application des contraintes résiduelles ne sont pourtant que deux aspects différents de la reconnaissance, par les ingénieurs, de différentes actions inélastiques.

## УСТАНОВЛЕНИЕ — НОВАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Д. ВАШАРХЕИ

## РЕЗЮМЕ

Несмотря на то, что сознательное использование предварительного и последующего напряжения, т. е. остаточных напряжений, является полностью принятым методом в практике конструирования, многие инженеры лишь нехотя принимают к сведению вопрос об установлении конструкций.

Можно показать, что планомерное использование установления и остаточных напряжений представляет собой лишь два различных вида освещения рассматриваемого вопроса при инженерном познании различных неупругих процессов.



# THE PROBLEM OF ARC-FAILURE IN GAS-FILLED INCANDESCENT LAMPS

E. WINTER

MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

and

T. Z. SZELÉNYI

RESEARCH INSTITUTE OF TECHNICAL PHYSICS, BUDAPEST

[Manuscript received October 28, 1964]

The tendency of arc-failure as the limiting factor in the life performance and efficiency (lm/W) of gas-filled incandescent lamps, and the role of positive ions in connection with electron space-charge are discussed. Possible causes for this type of arcing, which occurs early in life and increases rejects in manufacture, are treated. The positive ion emissivity of several tungsten samples employed in incandescent lamps is investigated. The importance of the flashing schedule is stressed and the ameliorating effect by the instant switch-on process described. In a medium sized workshop experiment, where the tendency to initial arcing was suppressed by suitable additions to the usual getter material, an increase of 4,5 SCE% 1000 h was achieved without augmenting the reject.

## I. Introduction

The ever more growing technique seems to have as a general rule that every product is in a process of continuous perfection. The almost hundred years old incandescent lamp is no exception, but — of course — the process of perfection is somewhat slow, nevertheless it is perceptible. If in its manufacture new materials become hardly conspicuous, the purity of the materials used in it, and the precision of the applied technology are in an ever increasing progress.

Despite the shifting of the light sources towards new devices, the incandescent lamp is still prevailing today, and from the economic point of view it has a very important role in technical production. The competition with newer light sources, and also the competition between the manufacturing companies have carried the possibilities of the incandescent lamp to the extremes.

An upper limit is set to the increased requirements as regards to lifetime and efficiency by the tendency to form an arc-discharge between the two leads, inducing the lamp's immediate destruction.

## II. The Two Types of Arcs

In the gas-filled incandescent filament lamps arcing may possibly occur — as is well known — in two ways: either after disruption of the filament, or by excessive ionization of the inert gas.

The first type of arc generally occurs after a comparatively long life. The filament in some places (spots) becomes thin as a consequence of the uneven evaporation of tungsten. From these thinner parts, having higher temperatures, the evaporation is all the more enhanced, and so the process leading to the rupture, that is to an arc, is constantly accelerated.

The arcing of this first type can be kept more firmly in hand as that of the second one: there are several counter measures by which the evaporation process can be controlled. For example, by giving adequate dimensions to the incandescent spiral, by higher pressure of the inert gas-filling, or by the addition of iodine to the gas, etc. By means of theoretical formulae which quite well agree with experiences, the evaporation of tungsten and the thinning away of the filament can be expressed, too. This may be considered as a sign of understanding the physical processes involved.

The second type of arcing, that is arcing by an ion avalanche — with regards to its origin — is far less understood. This arc is the main cause of the unexpected sudden destruction of the lamps without any visible indication beforehand, which often occurs early in life or, moreover, already during the manufacturing.

The present paper's purpose is to deal only with arcs of this second type.

### III. The Role of Electrons and Ions

The incandescent tungsten filament acting as a source of visible electromagnetic radiation has — from the point of view of a light source — an accessory property: that of thermionic electron emission, the so-called Edison effect. The emitted electrons are surrounding the incandescent metal as an electron atmosphere, the density of which decreases exponentially with the distance.

The temperature of the electron atmosphere is approximately as high as that of the inert gas immediately surrounding the cathode. In consequence of the positive charges remaining on the surface, and also as a result of the electronic space charge, a retarding negative potential wall arises around the filament. Over this wall the electrons cannot transgress and reflected from it return again into the metal.

One of the authors inferred [5] from the discharge characteristics that the inert gas (argon) of about atmospheric pressure does not augment the work function of the clean tungsten surface. For this reason behind the potential wall the emission and reflexion of the whole saturation current must be taken into consideration.

The electrons inside and outside the incandescent filament have besides its thermal motion also a drift velocity as a consequence of the potential



drop along the filament. Therefore, the electrons emitted at places of lower potentials are absorbed where the potential is higher.

The electrons are making many elastic impacts on the gas atoms and are losing in each impact a small fraction of their energy. Consequently they are normally not accelerated beyond a certain limit by the field, and they

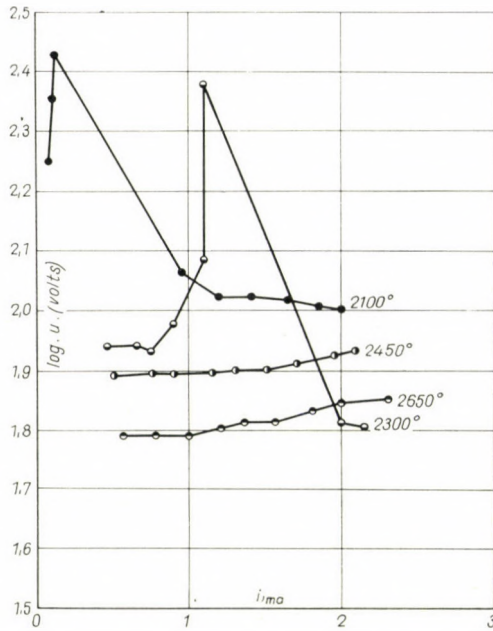


Fig. 1. Hot cathode gas discharge characteristics in argon of 500 mm Hg pressure. Distance between the electrodes: 1.0 cm. Series resistance 240 kohms. The logarithm of the potentials between the electrodes in volts are plotted against the discharge current in milliamperes. Cathode temperatures as parameters are labelled at the curves in °K. At higher temperatures (2450 and 2650 °K) the characteristics have always positive slopes indicating conduction by electrons only. At the temperatures 2100 and 2200 °K the negative slopes are signs of ionizations brought about by excessive field strengths. Owing to ionization the conduction in some points is greater than in those where only electrons are present

cannot gain sufficient energy to ionize the inert gas atoms. Along a straight incandescent tungsten filament surrounded with gas the electrical conduction is always greater inside the metal, and a breakthrough in the gas can never occur under stationary conditions. If, however, the filament is coiled, or bent into a loop in some manner, then it may happen also in pure inert gases and without any other disturbing causes that the potential gradient through the gas is greater than along the filament. This situation may lead to an ionization avalanche, that is, to an arcing. In the construction of incandescent lamps therefore, it must be carefully avoided having between any two points on the filament a potential drop larger than that which keeps the equilibrium of

accelerated electrons to gain the ionization energy from the field, against the losses of kinetic energy by elastic impacts on gas atoms. This potential difference is e.g. in krypton smaller than in argon, and therefore the advantage of krypton allowing a higher filament temperature is almost lost, because the coiled filament must be given a more stretched form. This is the cause, as is

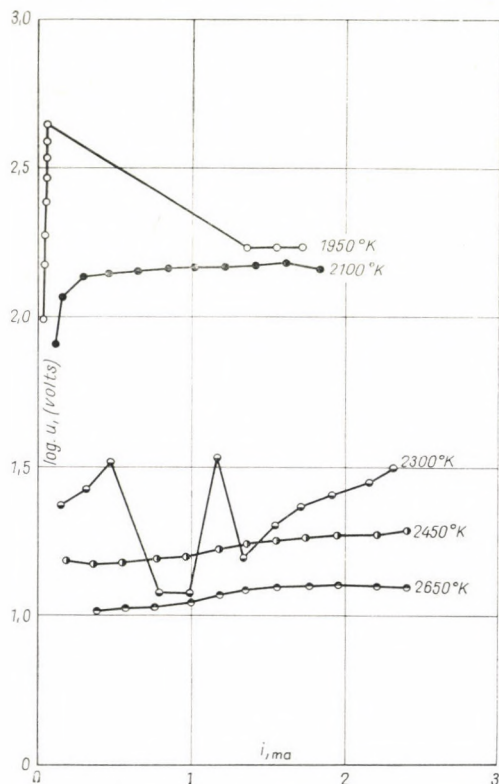


Fig. 2. Hot cathode gas discharge characteristics as in Fig. 1. Distance between electrodes: 0.2 cm

well known, that from the potentialities of the heavier krypton atoms, allowing theoretically a gain of about 10% lm/W efficiency over that which may be reached with argon, practically only 2–3% can be attained [1, 13].

The conductivity of the electron cloud though considerable — does not reach that of the incandescent filament. As long as around the filament there prevails only one kind of charge, — that is the negative charges of the electrons, — the conduction phenomena do not become critical. The reason for this is that the characteristics of conduction have a positive slope: to increase the discharge current the voltage must be increased, too.

This fact is demonstrated by the discharge characteristics taken at the cathode temperatures 2450 and 2650 °K in Figs 1 and 2. The discharge is brought about in a diode, filled with pure argon at 500 mm Hg. The diode



is provided with a tungsten spiral-cathode and a molybdenum anode, the distance between the electrodes being variable. A large series resistance of 240 kohm limits the current and so this remains harmless to the electrodes. The two other curves in the figures will be discussed below.

If between opposite parts of the filament at a somewhat greater distance a potential difference prevails, another effect, the so-called impeding effect [8, 9] prevents the ionization. In this case, as a consequence of the great electron space-charge, the virtual cathode, from which the discharge starts protrudes so far into the gas that it arrives in a much colder place of the Langmuir sheet. Here the mean free path of the electrons being shorter, the balance which exists between elastic losses to the gas atoms and gains from the field is upset in that sense that the probability for ionization is less: An initiation of a large discharge current by ionization is impeded.\*

However, the situation described above alters essentially if besides the electrons, for some reason positive charges are present, too. The characteristic of the discharge becomes negative, and the conduction may increase over that called forth by the highly concentrated electrons. To this behaviour from the characteristics at the temperatures 1950, 2300 °K in Figs. 1 and 2 can be concluded.

Of course, the origin of the positive charges may be sought for also in the effect of excessive field-strength. In this case the emitted free electrons are able to ionize by impacts the inert gas atoms. The occurrence of this effect is not impossible taking the fact into account that conditions of the lamps are extremely stressed and variations often occur in the main potential. Nevertheless the purpose of the present paper is not to deal with the consequences of overvoltage and voltage transients.

The presence of positive ions is destructive to the incandescent lamp because by neutralization they abolish the negative potential wall, mentioned above, and increase the conductivity in the gas. Greater conductivity again furthers the ionization and this continues until in an avalanche process breakdown of the gas occurs. In the high conducting plasma a short circuit is forming in consequence of which the tungsten filament melts, and if fuses were not applied, the arc-discharge — having a negative characteristic — would lead to further destructions outside the lamp.

#### IV. Origin of the Ions

From the point of view of perfecting the incandescent lamp manufacture the most essential question is: where do — overvoltage precluded — these positive ions originate from, and how could they be eliminated?

\* *Note added in proof:* On ground of new experimental evidence, the impeding effect is caused mainly by the convective motion of the gas which interferes with the ionic drift. Results on this matter will be published soon.

Since external ionizing radiations are not important under normal conditions, and the photoionization by the light which is emitted from the incandescent body itself is vanishingly small, the first ions may have their origin from inside the filament, or from its surface. The surface may be contaminated

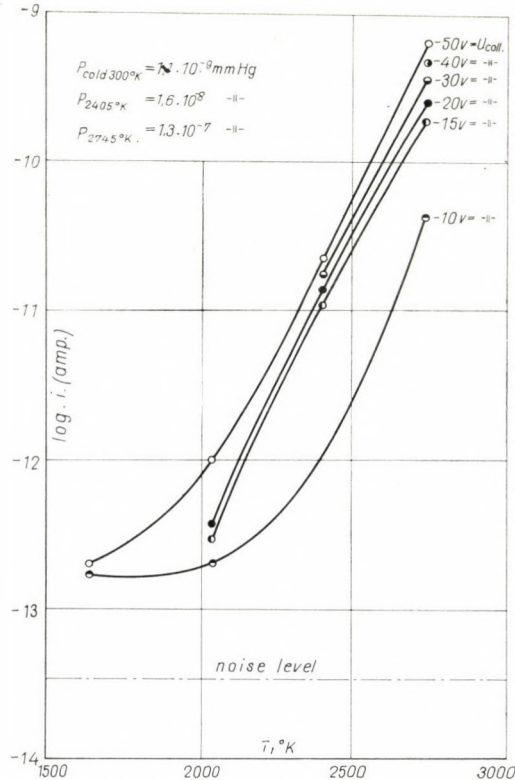


Fig. 3. Positive ion emissivity of a tungsten wire, used in normal incandescent lamp manufacture having a surface of about  $0.25 \text{ cm}^2$  is plotted in a logarithmic scale (amp) against the emitter's temperature in  $^{\circ}\text{K}$ . The measurements were made by a Wayne-Kerr precision electrometer type N 141, using a "CA 141" adapter and a resistance of  $10^{10}$  ohms

The pressures during the measurements were  $1.1 \cdot 10^{-9}$ ,  $1.6 \cdot 10^{-8}$  and  $1.3 \cdot 10^{-7}$  mm Hg at the emitter temperatures of 300, 2400 and 2750  $^{\circ}\text{K}$ , respectively, as registered by a Bayard-Alpert manometer. The collector potentials are marked at the curves

during manufacture or by disintegrating tiny particles from the inner side of the glass bulb.

One of the authors (E. WINTER) was who first concluded [7], on ground of the impeding effect to the importance of the alkaline doping elements added to the tungsten, as a source of positive ions. The same possibility was suggested two years later also by A. G. BUCHANAN [1]. In the literature several papers are dealing with the positive ion emissivity of tungsten [for inst. 2, 11].

Presumably the positive ion emission is a function of the sintering process applied in the powder metallurgic manufacture of tungsten: the longer is the



time of heat treating before the pores of the metal coalesce, the fewer doping material remains in the end product. To clarify these circumstances and to determine the positive ion emissivity of tungsten wires normally used in lamp manufacture, authors made measurements in ultrahigh vacuum by means of a vibrating condenser type electrometer.

For the experimental tube construction the arrangement described in the paper of WINTERS et al. [11] served as a model. The measurements were extended to the following samples:

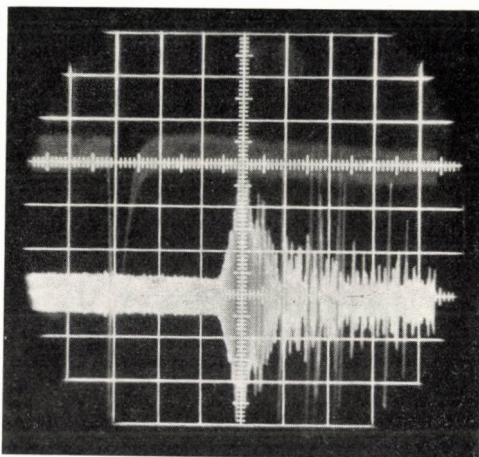
- a) Tungsten filaments normally used in the form of coiled coil spirals.
- b) Tungsten filaments whose raw material was made with the same doping additions as in item a), but heat-treated about hundred times longer.
- c) Filaments from the same material as in items a) and b), but whose heat-treating time was shorter by a factor of about one-third.
- d) and e) Coiled coil filaments taken out from commercially available lamps made by different firms of good reputation.

All these samples showed positive ion emissivities.

Results from the measurements of item a) are shown in Fig. 3, where the positive ion current in function of the filament temperature is shown. Parameter is the negative voltage of the collector. Disregarding the variations of the heated area from different temperatures, the surface of the emitter is about 0,25 cm<sup>2</sup>. The pressure as read off by an Alpert manometer was  $1,1 \cdot 10^{-9}$  mm Hg without heating the emitter, and  $1,6 \cdot 10^{-8}$  and  $1,3 \cdot 10^{-7}$  mm Hg at the emitter temperatures of 2405 and 2745 °K respectively. These results are in agreement found by WINTERS and collaborators (loc. cit.).

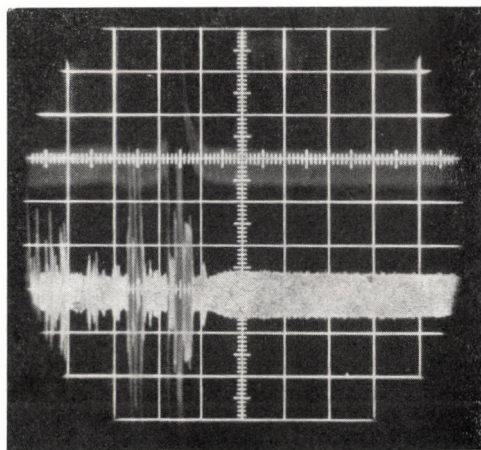
The two outputs of the electrometer were connected to the inputs of an RFT-double-beam oscillograph, type: EO 2/130. The upper beam registered the noise level of the heating current, whereas the lower showed the emitted pulses out of which the positive ion current consists. The oscillogramms are seen in Figs. 4, 5. Fig. 4 characterizes a switch-on effect: the d.c. heating was switched on to the tungsten filament in the 4th second, then a heating up period begins and lasts for about 9,5 sec.

At the beginning of the emission, the pulses are always somewhat greater, in accordance with the observations of WINTERS et al. This behaviour is certainly due to surface phenomena on the filament. It is supposed that small dust particles detaching from the inner surface of the glass wall are adsorbed on the filament as it cools down, and these particles are given off again in the heating up period. It is very likely that these increased positive ion bursts are always important in the switching on processes, since it is a widespread observation that the lamps often fail at this moment. Fig. 5 demonstrates a switch-out process. It can be seen, that the temperature soon falls down to such a value, at which the positive ion emission ceases, and the pulses dissolve in the region of the amplifier's noise.



*Fig. 4.* Positive ion pulses as observable in ultravacuum by a cathode ray oscillograph; lower beam connected to the output of the Wayne—Kerr electrometer. (Upper beam: noise in the heating current.)

The heating current was switched on at  $-31,5$  mm, taking the vertical middle line as zero. The emission begins after 5,5 seconds at  $-6$  mm; the maximum emission is in the middle line; later the pulses appear statistically distributed. The sweeping speed is 2,2 sec/cm. Vertically  $1,4 \cdot 10^{-11}$  amp. corresponds to 1 cm



*Fig. 5.* CRO-gram of positive ion pulses as in Fig. 4. Switch-out effect. The heating current was switched-out at  $-18$  mm, the emission ceases after 2 seconds at  $-9$  mm; afterwards the amplifier noise is visible consisting of the vibrating condenser's 1000 Hz frequency

From the point of view of the problem discussed here, the findings of WINTERS et al. are also very important inasmuch as the presence of small traces of oxygen and water have a favourable effect on the positive ion emission, and therefore increase the tendency for arcing. The investigation of item *b*), which suffered a hundred times longer heat treatment, yielded almost the same



result as that of item *a*) in Fig. 3. And, in general, all samples with the exception of item *c*) differed little from each other regarding their positive ion emissivity. Observing the behaviour of item *c*) with the oscilloscope, much larger impulses were found, but the frequency of these impulses was not greater than in the other samples. These statements must be taken but as preliminary and further investigations are planned in this matter.

A common shortcoming of the employed measuring method in sealed vacuum tubes is to be restricted only to previously degassed filaments. One must thus renounce to the investigation of the material which comes during the whole life of the filament to emission in the form of positive ions. To determine this quantity would also be of importance from the point of view of the lamps. For this reason under the inducement of one of the authors (E. WINTER) preliminary examinations were made by P. ROBOZ [3] by means of a mass-spectrograph of medium sensitivity. According to his results a difference within an order of magnitude was found between samples of the items *a*) and *b*), the positive ion emissivity (mainly potassium) of the second type being less. A repetition and extension of these measurements is planned with greater sensitivity.

The life performance and efficiency (lm/W) tests of lamps made with filaments from the same tungsten material as item *b*) did not differ appreciable from that of item *a*).

## V. Statistical Analysis

From the above experiments one can conclude that the positive ion pulses may statistically play a role in the life performance of incandescent lamps, inasmuch as the largest bursts possibly give incitement to arcing.

To get a deeper understanding of the whole problem a statistical evaluation of the event during manufacture is made. The amount of the reject per working shift due to arc failure of a common type incandescent lamp was recorded over a longer period of time, so assembling data of more than one million lamps. If on the abscissae the rejects during a shift were expressed in percentages, and on the ordinates the number of the corresponding work shifts were plotted, a skew-symmetric distribution appeared with the maximum nearer to the origin.

If, however, one plots the same ordinates against the logarithms of the abscissae — so performing a simple transformation —, one obtains the distribution shown in Fig. 6. Here the scale for the ordinates was according to the normal distribution, whereas the abscissae were plotted in arbitrary units. As a consequence of this arbitrariness, the mean value and the standard deviation correspond by no means to realities! The points in the graph are

mainly grouped about a straight line. From this behaviour one can infer that the occurrence of the arc-failure in the manufacture has a logarithmic normal distribution.

The meaning of this fact is that in the process of arcing — as in any other processes with a normal distribution — many causes together must play

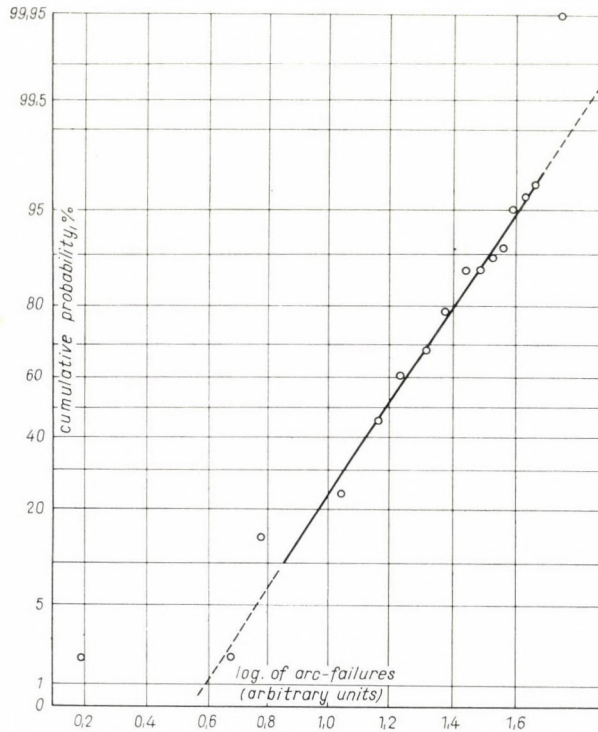


Fig. 6. Statistical distribution of arc-failure rejects in incandescent lamp manufacture; logarithmic transformation; arbitrary units, see text

a role, and the occurrence of the event depends on the direction in which the equilibrium of the promoting and of the hindering actions is upset. This circumstance must be emphasized, because if the arc failure would be brought about by one single cause — which would occur frequently but with a very small probability — then the distribution would differ definitely from that shown in Fig. 6. In any case it would also be instructive to determine the statistical distribution of arc-failure events during such a period in which the rejects are in consequence of this failure abnormally high. It is very probable, and one can find indication in the literature, too, that the temporarily suffered larger deficiencies due to arc-failure, are caused by excessive positive ion emissivity.



It is possible that the observed much shorter lifetimes of the normal lamps may sometimes be traced also to the same cause [1].

## VI. The Initial Lighting Schedule

The experiences gathered by means of the investigations described above has drawn the attention more decidedly to the flashing schedule in the manufacture of the lamps, the importance of which has been emphasized in the literature as well [1].

Up to the present the flashing process of normal lamps consisted without exception in a step by step heating up of the filament, beginning first at an underrated, and increased afterwards in short periods to, or somewhat over the rated voltage. This gradual process was not only thought as inevitable in order to avoid excessive arc-failures during manufacture, but also as advantageous for the recrystallization, degassing and decontamination of the tungsten filament.

According to the experience of the authors, however, the contrary can be stated: It was the observation of Miss E. SZÉNYFY\* [4] which hitherto has been proved in all small sample experiments that the lamps which were flashed directly at the rated voltage — whose heat-treating process was therefore more active, decidedly gave a better performance, compared with those receiving a gradual heat-treatment. The improvement expressed in Standard Comparison Efficiency for 1000 hours lifetime, was always manifest by several units.\*\* The explanation for this ameliorating effect is still lacking. Up to the present only suggestions were given to find the cause in the more appropriate recrystallization process and better gettering action in consequence of the more active heat treatment.

To overcome the difficulty of having intolerably large rejects in manufacture because of initial arc-failures, nevertheless utilizing the superiority of the instantaneous switch-on method, one of the authors (E. WINTER) made the proposal [7] to apply some additions to the usual getter material. In the flashing process these small additions immediately evaporate from the surface of the filament, they bind in molecular compounds the impurities, and in that

\* Head of section of the Tungfram Works Ltd., now in retirement.

\*\* The "Standard Comparison Efficiency percentage for 1000 hours" is convenient for the evaluation of the quality of identical types of lamps, and makes use of the interconnection which exists between the lumen per watt efficiency and the lifetime of the incandescent lamp.

It was agreed by international convention that a certain lumen per watt efficiency for which the lamp has 1000 hours lifetime, is called 100%. If the efficiency is greater for 1000 hours lifetime as was standardized, this augmentation is expressed in percents; if however, the lifetime is greater, the efficiency is converted, according to empirical relations, to that corresponding to 1000 hours.

way eliminate the positive ions [10]. The effect of such an action may be interpreted on ground of the paper by R. H. CLAPP [12] who found in the course of his experiments that the total emission of an incandescent filament — observed with the aid of a collector plate — was always larger when the lamp was first lit. This behaviour he ascribes to the volatilized impurities which form a highly conductive plasma surrounding the filament.

The arc inhibiting potency of the above mentioned additions ceases to be active during the later life of the lamp because of their immediate evaporation, but the amelioration brought about in the first instant remains secured for its whole life. Finally, as is well known, if lamps having a higher SCE% are used without this gain in lm/W efficiency, are also considerably safer in respect to the unexpected arc-failures. This means that the advantage of the “instant switch-on process” indirectly presents itself also in this field.

A medium sized workshop experiment was made according to this scheme using 220 V, 100 W, normal, coiled coil filament lamps. The instant switch-on method to the rated voltage was applied. The reject due to initial arc-failures was by no means greater than that in the normal process in which the usual step-by-step heating was employed.

The ameliorating effect was manifested by a gain of 4,5 SCE% 1000 h.

The success of this method verifies what has been stated in the introduction about the general technical progress.

### Acknowledgements

The authors are grateful to the staff of the Tungsten Works Ltd. for their co-operation in the work-shop experiments, and for measuring the lamp characteristics. They wish to thank Mr. J. SZONDY for the helpful discussions and to Miss E. SZÉNYI for her suggestions and joint effort.

They also wish to express their appreciation to Mr. J. GUBICS and Mr. A. GEDE for their expert technical skill in making the necessary vacuum and gas-filled devices.

### REFERENCES

1. BUCHANAN, A. G.: Some Aspects of Arcing in Incandescent Filament Lamps. *Transactions of the Illuminating Engineering Society* **29** (1964), No. 1.
2. MINTURN, R. E.—DATZ, S.—TAYLOR, E. H.: Thermal Emission of Alkali Ion Pulses from Clean and Oxygenated Tungsten. *Journ. App. Physics* **31** (1960), 876—879.
3. ROBOZ, P.: Mass Spectrometric Studies of Contaminations Evaporating from Tungsten Wires. Proceedings of the Symposium on Electron and Vacuum Physics, Hungary 1962. Akadémiai Kiadó, Budapest 1963, 329.
4. SZELÉNYI, T.—SZÉNYI, E.: Izzólámpák kikezelési eljárása (Processing of Incandescent Lamps). Hungarian Patent No. 151 111.
5. SZELÉNYI, T.: Folgerungen auf die Elektronenaustrittsarbeit des Wolframs in 500 Torr Argon. Delivered for publication to *Tungsrām-Mitteilungen* (1964), V.



6. SZELÉNYI, T. Z.: Distance to Potential Minimum of the Electronic Space-Charge from Externally Heated Cathodes in Inert High-Pressure Gas Discharges. *Acta Physica Hung.* **15** (1962), 71–74.
7. WINTER, E.—MILLNER, T.—SZELÉNYI, T.—NEUGEBAUER, E.: Csökkentett pozitívionemisziójú izzótesttel készült gáztöltéses lámpa (Lamp made with an Incandescent Filament of Reduced Positive Ion Emission). Hungarian Patent already published under No. 10724/1963.
8. WINTER, E.—SZELÉNYI, T.: Electrical Conduction and Breakdown Phenomena in 500 mm Hg Pressure Argon Employing an Externally Heated Cathode. Proceedings of the Symposium on Electron and Vacuum Physics, Hungary, 1962. Akadémiai Kiadó, Budapest 1963, 465.
9. WINTER, E.—SZELÉNYI, T. Z.: Electron Space-Charge in High Pressure, Hot Cathode Gas Discharges. *British Journ. Appl. Physics* **14** (1963), 177–188.
10. WINTER, E.—SZELÉNYI, T.—SZÉNYFŐ, E.: Eljárás javított minőségű izzólámpa előállítására (Process for Ameliorating Incandescent Lamps). Application for Hungarian Patent 1964, IX.
11. WINTERS—DENISON—BILLS—DONALDSON: Chemical Sputtering of Tungsten at Elevated Temperature. *Journ. Appl. Phys.* **34** (1963), 1810.
12. CLAPP, R. H.: Thermionic Emission in Gas-Filled Incandescent Lamps. *Illuminating Engineering* **45** (1950), 357.
13. GEISS, W.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur neueren Glühlampentwicklung. *Philips' Techn. Rundschau* **6** (1941), 338.

## DAS PROBLEM DES LICHTBOGENABBRANDS IN GASGEFÜLLTEN GLÜHLAMPEN

E. WINTER und T. Z. SZELÉNYI

### ZUSAMMENFASSUNG

Die Ursachen des schädlichen Bogenabbrands von gasgefüllten Glühlampen werden im Zusammenhang mit der Schutzwirkung der Elektronenraumladung und der zerstörenden Wirkung der positiven Ionen untersucht. Die positive Ionenemission von verschiedenen in der Glühlampenfabrikation verwendeten Wolframwerkstoffen wurde in Abhängigkeit von der Glühtemperatur gemessen. Ein Diagramm und das Oszillogramm der Ionenimpulse beim Ein- und beim Ausschaltvorgang werden mitgeteilt. Aus statistischen Angaben wird gefolgert, daß der anfängliche Bogenabbrand nicht auf einen einzigen Faktor zurückgeführt werden kann, sondern daß er die Konsequenz des Zusammenspiels von verschiedenen Umständen, und von deren Auftreten in verschiedenem Ausmaß, ist. Die wichtige Rolle der Art des ersten Aufheizens der Lampe wird unterstrichen, sowie die günstige Wirkung des plötzlichen Aufheizens. Als Ergebnis eines Betriebsversuchs von mittlerem Ausmaß, bei welchem die anfänglichen Bogenabbrände mit Hilfe eines dem üblichen Getter aus rotem Phosphor beigemischtem Zusatzmaterials beseitigt wurden, ist es gelungen, im Vergleich zur normalen Fertigung eine Verbesserung um 4,5% SCE pro 1000 Stunden zu erzielen.

## LE PROBLÈME DE LA DÉFECTUOSITÉ DUE A L'ARC DANS DES LAMPES A INCANDESCENCE REMPLIES DE GAZ

E. WINTER et T. Z. SZELÉNYI

### RÉSUMÉ

Les auteurs examinent les causes du processus de détérioration due à l'arc qui se produit dans les lampes à incandescence remplies de gaz, en relation avec l'action préservative de la charge spatiale électronique et l'action destructive des ions positifs. L'émission ionique positive de différents tungstènes utilisés pour la fabrication des lampes a été mesurée en fonction de la température. Un diagramme et l'oscillogramme des impulsions ioniques pendant la fermeture et l'interruption du potentiel sont communiqués. Les auteurs déduisent des données statistiques que le processus initial ne peut pas être ramené à un facteur unique, mais

est produit par le concours de nombreuses circonstances. Le rôle important du premier chauffage et l'effet favorable du chauffage brusque sont soulignés par les auteurs. En résultat d'un essai d'ampleur moyenne fait en usine, au cours duquel le processus initial a été éliminé par des produits d'addition mélangés au getter de phosphore rouge, on a pu obtenir une amélioration de 4,5 % SCE par 1000 heures de service par rapport au procédé de fabrication normal.

## ВОПРОС ДУГОВОГО СГОРАНИЯ ГАЗОНАПОЛНЕННЫХ ЛАМП НАКАЛИВАНИЯ

Э. ВИНТЕР и Т. З. СЕЛЕНИ

### РЕЗЮМЕ

Причины вредных процессов дугового сгорания газонаполненных ламп накаливания рассматриваются в зависимости от защитного действия заряда электронного поля и разрушающего действия положительных ионов. Положительная ионная эмиссия различных вольфрамовых материалов, применяемых в производстве ламп накаливания, измерялась в функции температуры накаливания. В работе приводится график этих измерений и осциллограмма ионных толчков в процессе включения и выключения. На основе статистических данных можно сделать вывод, что начальное дуговое сгорание нельзя свести к одному единственному фактору, а является следствием ряда обстоятельств и возникновения их в различной степени. Необходимо подчеркнуть важность первого метода накала ламп и сообщается благоприятное действие т. н. «врезания». В результате средних по масштабам производственных опытов, — при помощи которых добавками, примешиваемыми к обычному геттеру из красного фосфора, устраняются начальные дуговые сгорания, — удалось добиться улучшения порядка 4,5 SCE%/1000 час по сравнению с обычным производством.



# THE EFFECT OF SHEARING FORCE ON THE BUCKLING LOAD BEYOND THE LIMIT OF PROPORTIONALITY

ARVO YLINEN

PROF., D. SC. TECHN.

FINLAND INSTITUTE OF TECHNOLOGY, HELSINKI

[Manuscript received September 19, 1964]

The author presents a new approach for solving the problem of the effect of shearing force on the buckling load above the limit of proportionality. The solution is given in such a form that it is valid both below and above the limit of proportionality. The basic equation for the determination of the effect of shearing force is given in eq. (22). With a view to obtaining some idea of the effect of shearing force on the critical length of the column, Table 2 presents the calculated values of ratio  $\lambda_{cr}/\lambda_E$  for columns made from structural steel St 52.

When buckling occurs in a centrally-loaded column which is initially straight, the cross sections of the column are not any longer perpendicular to the compressive force, and shearing forces appear. The effect of these forces on the buckling load below the limit of proportionality is well known. However, clarification of the effect of shearing forces beyond the limit of proportionality is far from complete and partly incorrect. This paper is concerned with a new approach to solution of the problem of the effect exercised by shearing force on the critical load beyond the limit of proportionality. The solution is given in such a form that it is valid both below and above the limit of proportionality.

Let us consider a straight column, built in at the bottom, and loaded axially at the top. The coordinate axes are taken as indicated in Fig. 1. When the column is assumed to be in a slightly deflected position the bending moment at any cross section  $mn$  is

$$M = -F(\delta - y), \quad (1)$$

and the shearing force

$$Q = \frac{dM}{dx} = F \frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

The differential equation of the deflection curve is

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{E_\sigma I} + \frac{\alpha}{G_\sigma A} \frac{dQ}{dx}, \quad (3)$$

where the first term on the right side denotes the curvature of the column as a result of bending moment  $M$ , and the second a result of shearing force  $Q$ . Quantity  $I$  denotes the smallest moment of inertia of the cross-section,  $A$  the

cross-sectional area of the column, and  $a$  a numerical factor dependent on the shape of the cross section. For a rectangular cross-section,  $a = 1.2$ , and for a circular cross-section,  $a = 1.11$ . For an  $I$  beam bent in the plane of the flanges, the value of factor  $a \approx 1.2 A/A_f$ , where  $A_f$  is the area of the two flanges. If an  $I$  beam is bent in the plane of the web, factor  $a \approx A/A_w$ , where  $A_w$  is the area of the web.

In equation (3), the variable modulus of elasticity  $E_\sigma$ , and the variable modulus of rigidity  $G_\sigma$ , both dependent on the compressive stress  $\sigma = F/A$ ,

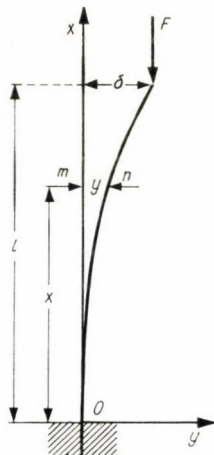


Fig. 1

have been introduced to render the equation valid for the entire range of buckling.

On introduction of the expressions  $M$  and  $Q$  from equations (1) and (2) into equation (3), the differential equation of the column becomes

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{E_\sigma I} (\delta - y) + \frac{\alpha F}{G_\sigma A} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

or

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{E_\sigma I \left(1 - \frac{\alpha F}{G_\sigma A}\right)} (\delta - y). \quad (4)$$

By using the notation

$$p^2 = \frac{F}{E_\sigma I \left(1 - \frac{\alpha F}{G_\sigma A}\right)}, \quad (5)$$

we can write equation (4) in the form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = p^2 \delta. \quad (6)$$



The general solution of this equation is

$$y = \delta + A \cos px + B \sin px,$$

in which  $A$  and  $B$  are constants of integration. These must be determined from the following conditions at the built-in end of the column:

$$[y]_{x=0} = 0, \quad \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 0.$$

These conditions are fulfilled if

$$A = -\delta, \quad B = 0.$$

Then

$$y = \delta(1 - \cos px). \quad (7)$$

The condition at the upper end of the column requires that

$$[y]_{x=l} = \delta,$$

which is satisfied if

$$\delta \cdot \cos pl = 0.$$

This equation requires that either  $\delta = 0$  or  $\cos pl = 0$ . If  $\delta = 0$ , the column remains straight and there is no buckling. If  $\cos pl = 0$ , we must have

$$pl = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

where  $n$  is an integer. The smallest value of  $pl$ , and therefore of  $F$ , which satisfies equation (8), is obtained by taking  $n = 0$ . Then, by using notation (5), we obtain for the critical value of the load  $F$  the equation

$$pl = l \sqrt{\frac{F}{E_\sigma I \left(1 - \frac{\alpha F}{G_\sigma A}\right)}} = \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Below the limit of proportionality, where  $E_\sigma = E$  and  $G_\sigma = G$  are constant, equation (9) can be solved for  $F$ , thus giving

$$F_{cr} = \frac{F_e}{1 + \frac{\alpha F_e}{GA}}, \quad (10)$$

where

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{4l^2} \quad (11)$$

represents the Euler critical load for the end conditions, represented in Fig. 1. Thus, owing to the effect of shearing forces, the critical load is dimi-

nished in the ratio<sup>1</sup>

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha F_e}{GA}} \quad (12)$$

Since the value of ratio (12) is always  $< 1$ ,  $F_{cr}$  is smaller than the Euler critical load (11) computed for the same length of the column, but ignoring the effect of shearing forces.

Above the limit of proportionality, both the modulus of elasticity  $E_\sigma$  and the modulus of rigidity  $G_\sigma$  are dependent on the compressive stress  $\sigma = F/A$ , and equation (9) cannot, in general, be solved for  $F$ . Instead, it can be solved for the critical length  $l$ , thus obtaining

$$l_{cr} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E_\sigma I \left(1 - \frac{\alpha F}{G_\sigma A}\right)}{F}} \quad (13)$$

The use of this equation assumes that we know how the value of the modulus of elasticity  $E_\sigma$  and that of the modulus of rigidity  $G_\sigma$ , are dependent on the compressive stress  $\sigma = F/A$ .

Let us first consider the modulus of elasticity  $E_\sigma$ . If it is assumed that no strain reversal takes place on the convex side of the bent column when it passes from the straight form to the adjacent deflected configuration, the deformation is, according to ENGESSER,<sup>2</sup> controlled by the tangent modulus

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad (14)$$

which corresponds to the buckling stress. This value of the modulus of elasticity must be used in equation (13) instead of  $E_\sigma$  when it is employed for determining the effect of shearing force on the critical length of the column.

For investigation of the value of the variable modulus of rigidity  $G_\sigma$  in equation (13), we first assume that the column has a rectangular cross section and that the deflection occurs in the direction of one side of the cross section. It can then be assumed that the stress distribution in the column is plane. In Fig. 2,  $abcd$  represents a small rectangular element cut from the column under stress. It is assumed that sides  $ab$  and  $cd$  are parallel to the longitudinal axis  $x$  of the column. The *principal directions*  $\varphi$  are defined by equation

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (15)$$

<sup>1</sup>This result was first obtained by F. ENGESSER, *Zentralblatt der Bauverwaltung*, vol. 11 (1891), p. 483.

<sup>2</sup>F. ENGESSER, *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 1889, p. 455.



From this equation two perpendicular directions can be found for which the shearing stress is zero. The *principal axes* of strain are determined by the equation

$$\tan 2\psi = \frac{\gamma}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}, \quad (16)$$

where  $\gamma = \gamma_{xy}$  is the shearing strain, and  $\varepsilon_x$  and  $\varepsilon_y$  are the unit elongations in the  $x$ - and  $y$ -directions, respectively. When a column, made from homo-

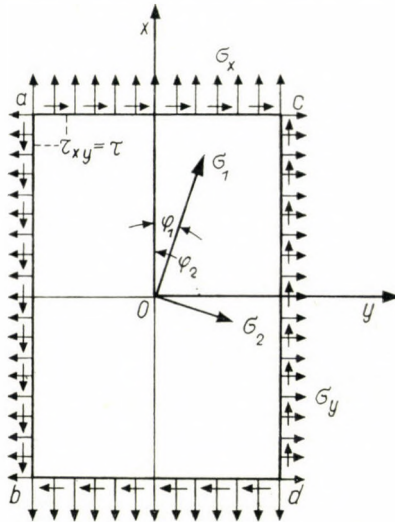


Fig. 2

geneous and initially isotropic material, is loaded, the principal directions  $\varphi$  coincide with the principal axes  $\psi$  both below and above the limit of proportionality. Thus, from equations (15) and (16) the shearing strain is derived

$$\gamma = 2\tau \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

By expressing the transverse unit elongation in the form  $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ , where  $\nu$  denotes the Poisson's ratio, and observing that  $\sigma_y = 0$ , we obtain

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{\sigma_x/\varepsilon_x} \tau. \quad (17)$$

According to the compression test diagram, represented in Figure 3,

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = E_{\text{sec}}. \quad )$$

By introducing this into equation (17), we have

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E_{\text{sec}}} \tau. \quad (19)$$

Below the limit of proportionality, where the material obeys Hooke's law, shear strain  $\gamma$  is proportional to shear stress  $\tau$  and the relation between the shear strain and the shear stress can be expressed by the formula

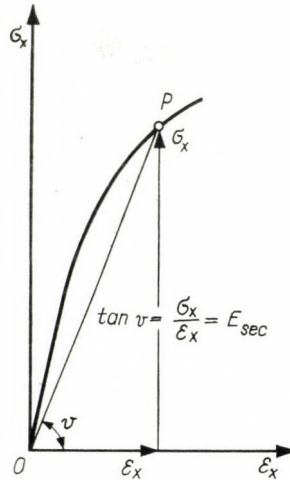


Fig. 3

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (20)$$

in which  $G$  denotes the modulus of rigidity. By reason of the similarity between equations (19) and (20), we can conclude that the inverse value of the fraction in equation (19) can be denoted

$$G_{\sigma} = \frac{E_{\text{sec}}}{2(1+\nu)}, \quad (21)$$

in which  $G_{\sigma}$  is the variable modulus of rigidity. Below the limit of proportionality  $E_{\text{sec}} = E$ , and equation (21) is reduced to the well known formula

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

On replacing the variable modulus of elasticity  $E_{\sigma}$  in equation (13) by the tangent modulus  $E_t$ , and introducing the expression of  $G_{\sigma}$  from equation (21), we get

$$l_{cr} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E_t I \left(1 - \frac{2(1+\nu) \alpha F}{E_{\text{sec}} A}\right)}{F}}. \quad (22)$$



This is the basic equation for determination of the effect of shearing force on the critical load of a centrally-loaded straight column with a rectangular cross-section. It can also be used for columns with other section forms, although to a lesser degree of accuracy. The equation is valid both below and above the limit of proportionality.

The fundamental relationship between buckling load and critical length of the column over the entire range of buckling can be determined from equation (22) for any homogeneous and isotropic structural material, provided a complete compressive stress-strain diagram of the material is available.

**Table 1**  
*E,  $\sigma_y$  and  $c$  of some materials*

Material	$E$ kp/cm <sup>2</sup>	$\sigma_y$ kp/cm <sup>2</sup>	$c$
Steel St 37 .....	2 100 000	2 400	0,977
Steel St 52 .....	2 100 000	3 600	0,977
Magnesium alloy (Electron) .....	460 000	1 000	0,857
Concrete .....	250 000	280	0,606
Finnish pine .....	125 000	450	0,875

In many cases, however, it is advantageous to approximate the stress-strain diagram with a suitable function, and to deduce from it the corresponding expression for tangent modulus  $E_t$  and secant modulus  $E_{sec}$ , according to formulae (14) and (18). The function chosen should contain a sufficient number of free parameters. By choosing these appropriately, it is possible to make the values of the function coincide with the experimental values of the compression stress-strain diagram.

For approximation of the stress-strain diagram, in what follows is employed the function<sup>1</sup>

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left[ c \sigma - (1 - c) \sigma_y \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right) \right]. \quad (23)$$

in which  $E$  denotes the modulus of elasticity,  $\sigma_y$  yield-point stress in compression, and  $c$  a dimensionless parameter with a value which depends on the shape of the stress-strain diagram. By means of the value  $c = 1$ , function (23) is reduced to Hooke's law. Table 1 presents the values of the parameter  $c$  of some materials.

To have a general idea of the form of the stress-strain diagrams represented by function (23), this is put into a more suitable form for graphical

<sup>1</sup> See the author's paper in *Publ. Intern. Assoc. Bridge Structural Eng.*, vol. 16 (1956), p. 529.

representation by the multiplication of both sides by the ratio  $E/\sigma_y$ , which gives

$$\frac{E \varepsilon}{\sigma_y} = c \frac{\sigma}{\sigma_y} - (1 - c) \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right). \quad (24)$$

In comparison with (23), this dimensionless form<sup>1</sup> possesses the advantage that  $E \varepsilon/\sigma_y$  is a function only of ratio  $\sigma/\sigma_y$  and parameter  $c$ . However, on the right side of equation (23) there are four variable quantities,  $E$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_y$  and  $c$ . The stress-strain curves according to equation (24) it may be seen from Figure 4,

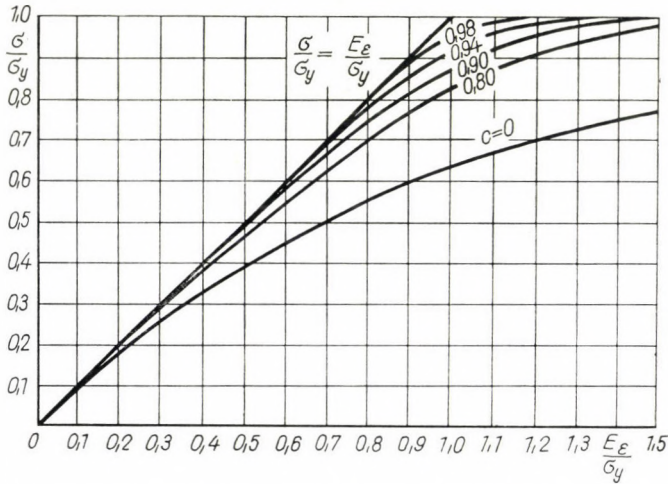


Fig. 4. Dimensionless stress-strain diagrams in accordance with equation (24)

in which  $\sigma/\sigma_y$  is plotted against  $E \varepsilon/\sigma_y$ , with  $c$  as parameter. It can be observed that as the value of  $c$  becomes larger, the smaller is the deviation of the stress-strain curves from the broken line formed by Hooke's line  $\sigma/\sigma_y = E \varepsilon/\sigma_y$  and the horizontal line  $\sigma/\sigma_y = 1$  corresponding to the yield-point stress.

From stress-strain function (23), we obtain in accordance with equation (14) the tangent modulus

$$E_t = E \frac{1 - \frac{\sigma}{\sigma_y}}{1 - c \frac{\sigma}{\sigma_y}} \quad (25)$$

In Figure 5, the ratio  $E_t/E$  is plotted against  $\sigma/\sigma_y$ , with  $c$  as parameter. With increasing stress, a decrease occurs in the value of tangent modulus  $E_t$ .

<sup>1</sup>This method of representing the stress-strain curves in dimensionless form was developed in the author's investigation *Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten geraden Stabes im elastischen und unelastischen Bereich*. Doctoral thesis. Finland Institute of Technology. Helsinki, 1939, p. 28.



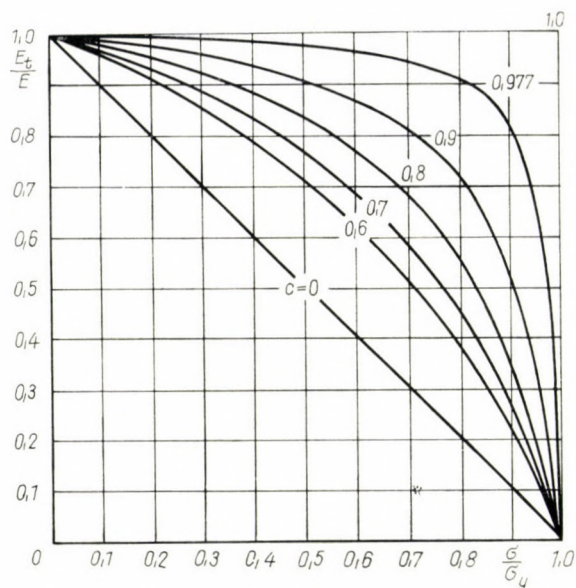


Fig. 5. Tangent modulus diagrams in dimensionless form in accordance with formula (25)

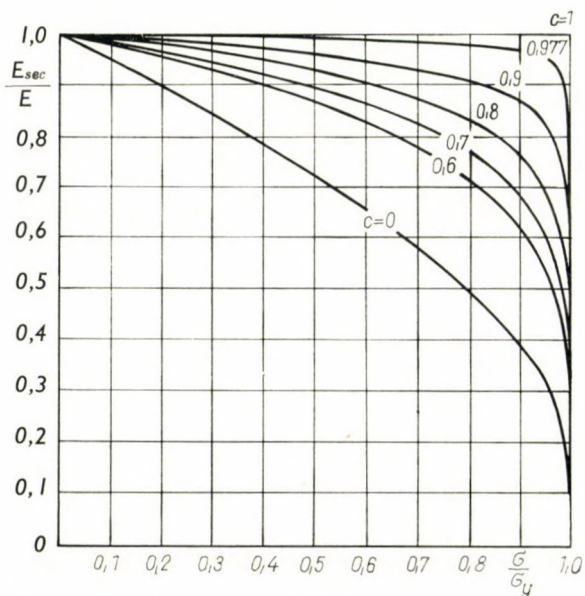


Fig. 6. Secant modulus diagrams in dimensionless form in accordance with formula (26)

The rapidity with which this will take place depends on the value of parameter  $c$ . When  $\sigma \rightarrow \sigma_y$ ,  $E_t \rightarrow 0$  for any value of  $c$ .

By introducing the expression of  $\varepsilon$  from equation (23) into equation (18), without subscripts, we obtain

$$E_{\text{sec}} = E \frac{\frac{\sigma}{\sigma_y}}{c \frac{\sigma}{\sigma_y} - (1-c) \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)}. \quad (26)$$

From this, it appears that  $E_{\text{sec}} \rightarrow E$ , when  $\sigma \rightarrow 0$ .  $E_{\text{sec}}$  equals  $E$  at any value of  $\sigma$ , when  $c = 1$ . In Figure 6, ratio  $E_{\text{sec}}/E$  is plotted against  $\sigma/\sigma_y$ , with  $c$  as parameter. With increasing stress, there is a decrease in the value of secant modulus  $E_{\text{sec}}$ . The rapidity with which this will take place depends on the value of parameter  $c$ . When  $\sigma \rightarrow \sigma_y$ ,  $E_{\text{sec}} \rightarrow 0$  for any value of  $c$ .

When use is made of equation (22) for the determination of the effect of shearing force on the critical length of the column, it must be borne in mind that Poisson's ratio  $\nu$  is also dependent on the buckling stress  $\sigma$ . According to STOWELL,<sup>1</sup> this dependence can be estimated from the formula

$$\nu = \nu_p - (\nu_p - \nu_e) \frac{E_{\text{sec}}}{E}, \quad (27)$$

where  $\nu_p$  denotes the value of Poisson's ratio for plastic strain and  $\nu_e$  for elastic strain. For many isotropic materials  $\nu_p = 0.5$  and  $\nu_e = 0.3$  can be taken. By the introduction of the expression of  $E_{\text{sec}}/E$  from equation (26) into formula (27), we obtain

$$\nu = \nu_p - (\nu_p - \nu_e) \frac{\frac{\sigma}{\sigma_y}}{c \frac{\sigma}{\sigma_y} - (1-c) \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)}, \quad (28)$$

which is suitable for numerical calculations in connection with equation (22).

By expressing in equation (22) the moment of inertia  $I$  by the radius of gyration  $r$ , and the area  $A$  of the cross section in the form  $I = r^2 A$ , and further by denoting the average compressive stress by  $F/A = \sigma$ , and the slenderness ratio of the column by  $l/r = \lambda$ , for the critical slenderness ratio the formula is obtained

$$\lambda_{cr} = \lambda_E \sqrt{1 - \frac{2(1+\nu)\alpha\sigma}{E_{\text{sec}}}}, \quad (29)$$

where

$$\lambda_E = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E_t}{\sigma}} \quad (30)$$

<sup>1</sup> E. Z. STOWELL, *A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates*, NACA, TN No. 1556, 1948.



denotes the slenderness ratio according to ENGESSER's tangent modulus theory. Since the value of the square root in equation (29)  $< 1$ ,  $\lambda_{cr}$  is smaller than the ENGESSER critical slenderness ratio  $\lambda_E$  computed for the same buckling stress, but ignoring the effect of the shearing force. On the introduction of the expression of  $E_t$  from formula (25) into equation (30), the formula for the ENGESSER buckling slenderness ratio is arrived at:

$$\lambda_E^2 = \frac{\pi^2 E}{4 \sigma} \frac{\sigma_y - \sigma}{\sigma_y - c \sigma} \quad (31)$$

When this is reduced, for the buckling stress an equation of second degree is obtained, of which the roots are

$$\sigma = \frac{\frac{\pi^2 E}{4} + \sigma_y \lambda_E^2}{2 c \lambda_E^2} (\pm) \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi^2 E}{4} + \sigma_y \lambda_E^2\right)^2 - \pi^2 c E \sigma_y \lambda_E^2}{4 c^2 \lambda_E^4}} \quad (32)$$

A negative sign should be chosen for the square root, because the buckling stress must vanish when  $\lambda_E \rightarrow \infty$ .

With a view to obtaining some idea of the effect of shearing force on the critical length of the column, Table 2 presents the calculated values of ratio  $\lambda_{cr}/\lambda_E$  for columns made from structural steel St 52. The numerical values of the constants used in the calculations are  $E = 2\,100\,000$  kp/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_y = 3600$  kp/cm<sup>2</sup>,  $c = 0,977$ ,  $\nu_p = 0,5$ ,  $\nu_e = 0,30$  and  $a = 1,2$ .

Table 2

$\lambda_E$	10	20	30	40	50	100	150
$\sigma$ kp/cm <sup>2</sup> [eq. (32)]	3 594	3 569	3 478	2 932	2 014	516	230
$E_t$ kp/cm <sup>2</sup> [eq. (25)]	142 380	576 090	1 268 380	1 907 450	2 040 400	2 091 960	2 096 700
$E_{sec}$ kp/cm <sup>2</sup> [eq. (26)]	1 868 000	1 932 000	1 983 000	2 047 000	2 072 000	2 096 200	2 098 360
$\nu$ [eq. (28)]	0.322	0.316	0.311	0.305	0.302	0.300	0.300
$\lambda_{cr}/\lambda_E$ [eq. (29)]	0.9969	0.9971	0.9974	0.9978	0.9985	0.9996	0.9998

Only for very short columns does the ratio  $\lambda_{cr}/\lambda_E$  depart somewhat from unity. With increasing slenderness ratio, the effect of shearing force decreases; when  $\lambda_E \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_{cr}/\lambda_E \rightarrow 1$ . The decrease in strength for all slenderness ratios is consequently extremely slight, and can be ignored in practical applications.

DER EINFLUSS DER SCHUBKRAFT AUF DIE KNICKKRAFT  
ÜBER DER PROPORTIONALITÄTSGRENZE

A. YLINEN

## ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser beschreibt ein neues Näherungsverfahren für Lösung des Knickproblems unterhalb und oberhalb der Proportionalitätsgrenze, unter Berücksichtigung der Schubkraft. Die Lösung wird in einer Form mitgeteilt, die unter- und überhalb der Proportionalitätsgrenze in gleicher Weise gültig ist. Die grundlegende Beziehung zur Berechnung des Einflusses der Schubkraft drückt Gl. (22) aus. Den Einfluß der Schubkraft auf die kritische Länge des Stabes zeigt Tafel 2, die auch die berechneten Werte des Quotienten  $\lambda_{cr}/\lambda_E$  für Stahl S 52 enthält.

L'INFLUENCE DES EFFORTS TRANCHANTS SUR LA FORCE DE FLAMBAGE,  
AU-DESSUS DE LA LIMITE DE PROPORTIONNALITÉ

A. YLINEN

## RÉSUMÉ

L'auteur présente une nouvelle méthode approchée pour la solution du problème de flambage au-dessous et au-dessus de la limite de proportionnalité, qui tient aussi compte de l'influence des efforts tranchants. La solution est présentée sous une forme valable aussi bien au-dessous qu'au-dessus de la limite de proportionnalité. La relation fondamentale servant à déterminer l'influence de l'effort tranchant est exprimée par l'équation (22). L'influence des efforts tranchants sur la longueur critique de la barre est mise en évidence par le Tableau 2, lequel montre les valeurs calculées du rapport pour l'acier S 52.

ВЛИЯНИЕ СДВИГАЮЩЕГО УСИЛИЯ, ОКАЗЫВАЕМОЕ НА ПРОГИБАЮЩЕЕ  
УСИЛИЕ ЗА ПРЕДЕЛОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

А. ИЛИНЕН

## РЕЗЮМЕ

Автор демонстрирует новый приближенный метод решения проблемы прогиба выше и ниже предела пропорциональности с учетом сдвигающего усилия. Решение сообщается в такой форме, которая действительна как ниже, так и выше предела пропорциональности. Основную зависимость, служащую для определения действия сдвигающего усилия, выражается уравнением (22). Действие сдвигающих усилий, оказываемое на критическую длину стержня, показано наглядно в табл. 2, далее для стали марки S 52 приводится расчетное значение частного  $\lambda_{cr}/\lambda_E$ .



# ВАЖНЕЙШИЕ ОСНОВЫ ЗАЛОЖЕНИЯ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ПРИ ПРОЦЕНТНОЙ АМОРТИЗАЦИИ

Я. ЗАМБО

ЧЛ. КОРР. АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

[Поступило 20-го декабря 1963 г.]

Автор продолжает развивать проведенные ранее исследования. Два наиболее важных параметра закладываемого горного предприятия, производственная мощность и распространение шахтного поля, определяются им в данной работе. Капитальные затраты принимаются во внимание при условии процентной амортизации, что приводит к сложным зависимостям. Однако, автор дает простые решения, вполне удовлетворяющие требованиям практики. Два наиболее важных параметра исследуются не отдельно друг от друга, а вместе, принимая во внимание их взаимодействие. Посредством метода повторений, многосложные связи функций значительно упрощаются. Приводится числовой пример.

В одном из предыдущих исследований [1] мы уже занимались вопросом оптимальной производственной мощности горного предприятия в случае процентной амортизации. При этом исходили из условия, что распространение горного предприятия, заключенное в нем пригодное к разработке минеральное богатство ( $Q$ ) заданы.

В настоящем исследовании мы исходим из того основного предположения, что распространение горного предприятия не задано, поле разработок свободно может расширяться в двух направлениях, как по направлению простирания, так и по падению. При таких условиях отыскивается оптимальная мощность горного предприятия и соответствующее его распространение по линиям простирания и падения, вообще размер шахтного поля.

Пусть суточная производственная мощность будет обозначаться через  $q_0$  [т/сутки], распространение по простиранию —  $A$  [м], а по падению —  $B$  [м]. При щитовой разработке  $A$  и  $B$  принимаются в плоскости пласта. В случае же ярусных разработок размеры, естественно, следует понимать в основной проекции.

Как производственная мощность ( $q_0$ ), так и распространение шахтного поля  $A$  и  $B$  оптимальны в том случае, если удельное значение связанных с ними затрат [Фт/т] наименьшее.

Наиболее важные затраты, связанные с двумя параметрами ( $q_0$ ,  $A$  и  $B$ ), следующие: постоянные затраты, капитальные затраты, а также затраты на перемещение грузов. В число затрат на перемещение грузов входят шахтный транспорт, перевозка людей, обезвоживание, вентиляция, расходы на

потери энергии в электропроводке. В интересах сохранения единства сюда же причисляются и затраты по поддержанию выработки.

Удельный расход  $k$  [Фт/т], связанный с двумя параметрами, может быть выражен следующим равенством:

$$k = \frac{K_n}{q_0} + \frac{dq_0 + D_0}{ABQ_0} + (c_{cb} \sum k_{cb} + c_{cj} \sum k_{cj}) A + (c_s \sum k_s + c_e \sum k_e) B,$$

где  $K_n$  — суточные постоянные затраты,  $dq_0 + D_0$  — капитальные затраты. Эти два вида затрат подробно разъяснены в уже упомянутой работе [1].  $Q_0$  — минеральное богатство, могущее быть выработано с 1 м<sup>2</sup> территории

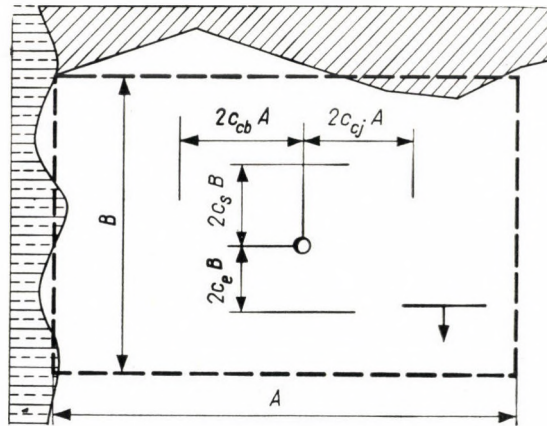


Рис. 1

[т/м<sup>2</sup>]. При щитовой разработке это следует понимать в плоскости пласта, при ярусной же в основной проекции.

Расстояния  $c_{cb}A$ ;  $c_{cj}A$ ;  $c_sB$ ;  $c_eB$  могут быть выражены посредством расстояний центров тяжести (рис. 1). Так, например, расстояние  $2c_{cb}A$  связывает шахту в направлении простирания с той линией падения центра тяжести, которая является линией тяжести по падению могущей быть выработанной части минеральной залежи простирающейся влево от шахты. Размер  $2c_{cj}A$  выражает тоже по правой стороне.

Индекс  $c$  указывает направление простирания, индекс  $b$  — левую сторону, индекс  $j$  — правую сторону, индекс  $s$  — поле ската, индекс  $e$  — поле уклона. Естественно, о поле ската или уклона речь может идти лишь в случае щитовой разработки, при ярусной разработке следует говорить соответственно о двухстороннем распространении в поперек вместо поля



ската и поля уклона. Тогда, конечно, здесь тоже есть правая и левая стороны.

Поскольку  $cA$  и  $cB$  выражают расстояния, размерность  $\Sigma k$  будет Фт/мт, а  $\Sigma k$ , таким образом, выразит удельные затраты на перемещение грузов, отнесенные к расстоянию в  $1 M$  и к  $1 T$  могущего быть выработанным минерального богатства.

Затрата  $K_n$  представляет сумму постоянных затрат горного предприятия, и поэтому в удельной затрате  $\Sigma k$  может заключаться лишь переменная затрата на перевозки. Таким образом,  $\Sigma k$  является удельной затратой на шахтный транспорт, перевозки людей, обезвоживание, текущий ремонт и потери энергии в электропроводах. Эта удельная затрата является функцией расстояния.

К этой функциональной зависимости мы еще вернемся.

Постоянная затрата  $K_n$  и затраты на перещение грузов действуют в течение всего времени существования горного предприятия, в отличие от этого капитальные затраты [1]

$$K_b = dq_0 + D_0,$$

как правило, возникают в начальный период существования горного предприятия. Поэтому, ссылаясь на предыдущее исследование [1], удельные затраты, зависящие от двух параметров, записываем, принимая во внимание процентную амортизацию:

$$k_r = \frac{K_n}{q_0} + \frac{p-1}{z} \frac{p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}}}{p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}} - 1} \left( d + \frac{D_0}{q_0} \right) + \\ + (c_{cb} \Sigma k_{cb} + c_{cj} \Sigma k_{cj}) A + (c_s \Sigma k_s + c_e \Sigma k_e) B,$$

где  $z$  — число рабочих дней в год, а  $p$  — процентный коэффициент.

В интересах определения крайних значений функции с тремя неизвестными выводим следующие парциальные дифференциальные производные:

$$\frac{\partial k_r}{\partial q_0} = 0,$$

$$\frac{\partial k_r}{\partial A} = 0,$$

$$\frac{\partial k_r}{\partial B} = 0.$$

$k_r$  имеет минимум, когда действительны следующие зависимости:

$$\frac{p-1}{z^2} ABQ_0 \left( d + \frac{D_0}{q_0} \right) \frac{p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}}}{\left( p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}} - 1 \right)^2} \ln p -$$

$$- \frac{p-1}{z} D_0 \frac{p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}}}{p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}} - 1} - K_n = 0,$$

$$\frac{p-1}{z^2} BQ_0 \left( d + \frac{D_0}{q_0} \right) \frac{p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}}}{\left( p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}} - 1 \right)^2} \ln p - c_{cb} \sum k_{cb} - c_{cj} \sum k_{cj} = 0,$$

$$\frac{p-1}{z^2} AQ_0 \left( d + \frac{D_0}{q_0} \right) \frac{p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}}}{\left( p^{\frac{ABQ_0}{zq_0}} - 1 \right)^2} \ln p - c_s \sum k_s - c_e \sum k_e = 0.$$

Из последних двух уравнений следует, что

$$\gamma = \frac{B}{A} = \frac{c_{cb} \sum k_{cb} + c_{cj} \sum k_{cj}}{c_s \sum k_s + c_e \sum k_e}.$$

Соотношение взаимоперпендикулярного распространения по двум направлениям совпадает с обратным соотношением суммы удельных затрат. Если удельные затраты по перемещению по двум взаимоперпендикулярным направлениям равны между собой, то оптимально будет поле квадратной формы.

Первое уравнение тройной зависимости сначала разделим на второе, затем на третье и введем обозначения

$$ABQ_0 = Q$$

и

$$p^{\frac{Q}{zq_0}} = \delta.$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$\frac{p-1}{z^2} Q \left( d + \frac{c D_0 \ln \delta}{Q \ln p} \right) \frac{\delta}{(\delta - 1)^2} \ln p - \frac{p-1}{z} D_0 \frac{\delta}{\delta - 1} - K_n = 0,$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\left( \frac{p-1}{z} D_0 \frac{\delta}{\delta - 1} + K_n \right)^2 Q_0 z^2 \ln^2 \delta}{(c_{cb} \sum k_{cb} + c_{cj} \sum k_{cj}) (c_s \sum k_s + c_e \sum k_e) \ln^2 p}}.$$



Наиболее целесообразным методом решения этой системы уравнений будет метод приближения.

Исследуем первое уравнение в функции  $\delta$ , то есть запишем:

$$\varphi(\delta) = \frac{P-1}{z^2} Q \left( d + \frac{z D_0 \ln \delta}{Q \ln p} \right) \frac{\delta}{(\delta-1)^2} \ln p - \frac{P-1}{z} D_0 \frac{\delta}{\delta-1} - K_n = 0.$$

Выберем некоторое значение  $Q$  и к выбранному  $Q$  отыщем графическим путем место нуля функции ( $\varphi(\delta)$ ). Метод ускоряется двумя обстоятельствами: нет надобности в большой точности, функцию  $\varphi(\delta)$  нужно вычертить лишь в непосредственной близости оси  $\delta$ , так как требуется отыскать только точку пересечения кривой с осью  $\delta$ .

Подставив значение  $\delta$ , полученное при первой операции, во второе уравнение, получаем значение  $Q$  отличное от первоначально выбранного. Во второй операции повторяем метод первой, но исходим из значения  $Q$ , полученного при первой операции. Этот метод повторяется до тех пор пока расчетное значение  $Q$  практически совпадет с исходным  $Q$  последней операции, то есть со значением  $Q$ , перенятым из предыдущей операции.

Последняя операция даст значения  $Q$  и  $\delta$ , из которых уже просто рассчитать оптимальную производственную мощность и оптимальные линейные размеры поля:

$$q_{0,opt} = \frac{Q}{z} \frac{\ln p}{\ln \delta},$$

$$A_{opt} = \sqrt{\frac{Q}{\gamma Q_0}},$$

$$B_{opt} = \sqrt{\frac{\gamma Q}{Q_0}}.$$

Для наглядности способа приведем числовой пример. Данные пусть будут следующие:

$$p = 1,07, z = 300 \text{ [дней/год]}, K_n = 110 \cdot 10^3 \text{ [Фор/день]}, Q_0 = 8,0 \text{ [T/M}^2\text{]}.$$

Разработка залежи ведется ярусным способом (рис. 2). Удельные затраты на перемещение в двух взаимноперпендикулярных направлениях почти равны между собой:

$$c_{cb} \sum k_{cb} + c_{cj} \sum k_{cj} = c_s \sum k_s + c_e \sum k_e = c_b \sum k_b + c_j \sum k_j = c \sum k = 1/4 \cdot 0,048 = 0,012 \text{ Фт/мт.}$$

Уравнение капитальных затрат имеет вид:

$$K_b = dq_0 + D_0 = 120 \cdot 10^3 q_0 + 20 \cdot 10^6.$$

Подставим в функцию  $\varphi(\delta)$  числовые значения:

$$\varphi(\delta) = 0,0063 Q \frac{\delta}{(\delta-1)^2} + 4,67 \cdot 10^3 \left\{ \frac{\delta}{(\delta-1)^2} \ln \delta - \frac{\delta}{\delta-1} \right\} - 110 \cdot 10^3.$$

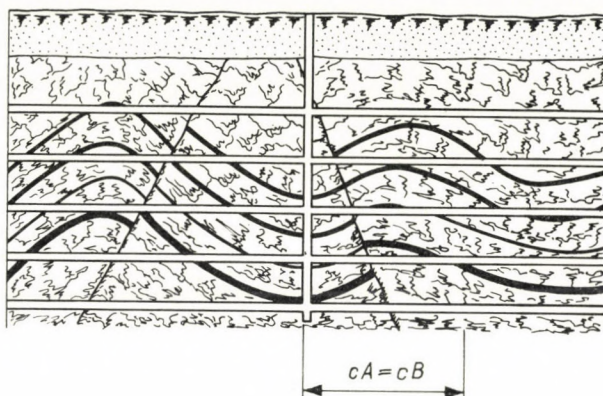


Рис. 2

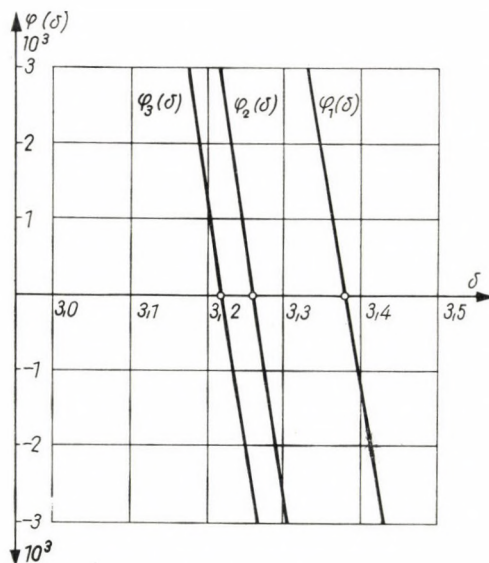


Рис. 3

Для первого шага выберем значение  $Q$  равное  $30 \cdot 10^6$  т, то есть

$$\varphi_1(\delta) = 10^3 \left\{ 189 \frac{\delta}{(\delta-1)^2} + 4,67 \left[ \frac{\delta}{(\delta-1)^2} \ln \delta - \frac{\delta}{\delta-1} \right] - 110 \right\}.$$

Рис. 3 показывает графическое решение, задает нулевую точку функции  $\varphi_1(\delta)$ . Для построения кривой достаточно нескольких точек. Кривая  $\varphi_1(\delta)$ , проведенная через несколько нанесенных точек, пересекает ось  $\delta$  в точке  $\delta_1 = 3,38$ .

Заместим  $\delta_1$  в уравнении  $Q$  и получим результат:  $Q_1 = 28 \cdot 10^6$  т. Для второго шага уже принимаем во внимание  $Q_1 = 28 \cdot 10^6$  и по примеру первого шага получаем следующие результаты:  $\delta_2 = 3,26$  и  $Q_2 = 27,5 \cdot 10^6$  т.

Результат третьего шага уже вплотную приблизится к результату второго:  $\delta_3 = 3,22$  и  $Q_3 = 27,3 \cdot 10^6$  т.



После этого уже можно вести расчет оптимальной производственной мощности:

$$q_{\text{opt}} = \frac{27,3 + 10^6 \ln 1,07}{300 \ln 3,22} = 5265 \cong 5000 \text{ т/сутки.}$$

Между тем величина шахтного поля будет:

$$T = \frac{27,3}{8} = 3,4 \text{ км}^2.$$

Длина составит:  $A = B = 1850 \text{ м.}$

Таким образом, практически территорию шахтного поля можно принять величиной в  $4 \text{ км}^2$ , а мощность — около  $5000 \text{ т/сутки}$ . Продолжительность существования горного предприятия составит  $25\text{--}30$  лет, если принять во внимание время разгона и период замирания.

Числовой пример показал лишь метод расчета, общих выводов из него делать нельзя.

Определение двух главных параметров требует довольно кропотливой подготовительной работы. Подбор необходимых данных связан с основательной работой.

Зависимостью  $K_b = c'q_0 + D_0$ , выражающей капитальные затраты, мы подробно уже занимались в прежнем исследовании [1].

Другой важный показатель — суточные постоянные затраты  $K_n$ . Эти затраты можно калькулировать. Однако, можно прибегнуть и к такому методу, который проще и быстрее приведет к верному результату.

В распоряжении имеются данные производства и затрат существующих, действующих горных предприятий. Выбираем такое предприятие или такие предприятия, которые по своим геологическим особенностям походят на проектируемое горное предприятие и при этом за последние несколько лет еще имели возрастающую тенденцию производства. Если, например, возьмем за основу последние  $3\text{--}4$  года, то по месячным данным получим  $36\text{--}48$  таких показателей которые выражают количество суточной выработки ( $q_0$ ) и соответствующие суточные затраты ( $K$ ).

В качестве абсциссы нашей системы координат выберем  $q_0$ , в качестве же ординаты принадлежащее к  $q_0$ -му  $K$  (рис. 4). Запись уравнения регрессирующей прямой, определенной множеством точек, получающихся по связанным между собой значениям  $q_0$  и  $K$

$$K = aq_0 + K_n$$

не представляет трудности.  $K_n$  — свободный член уравнения выражает постоянные затраты.

Условием пусть будет то, что сумма квадратов расстояний между прямой и точками представляет некоторый минимум. При таком условии

$$K_n = \frac{\text{ctg } \varphi \sum_1^n q_0 + \sum_1^n K}{n},$$

где  $n$  — число точек. Значение  $\varphi$  может быть вычислено по следующей зависимости:

$$\tan 2\varphi = 2 \frac{\sum_1^n q_0 \sum_1^n K - n \sum_1^n q_0 K}{\sum_1^n q_0 \sum_1^n q_0 - n \sum_1^n q_0^2 - \sum_1^n K \sum_1^n K + n \sum_1^n K^2}.$$

Поскольку речь идет о проектировании, практически будет правильным и отыскание регрессирующей прямой графическим путем. Прямую накладывают на множество точек таким расчетом чтобы число точек по обе сто-

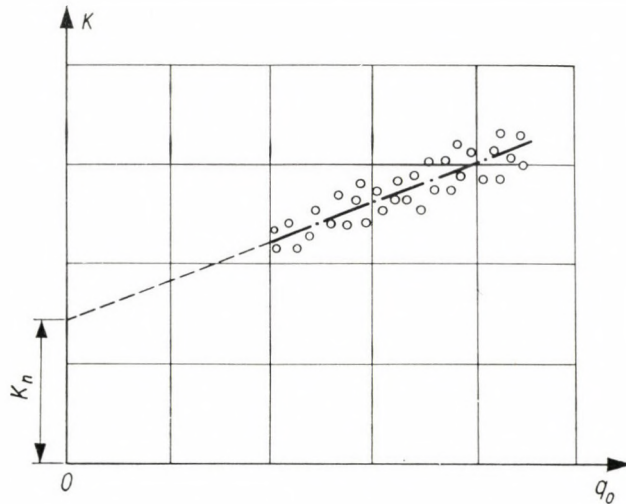


Рис. 4

роны прямой было одинаковым. Хотя это обстоятельство само по себе еще не определяет однозначно положения прямой, однако, дает верную исходную точку.

Возможно, что к множеству точек, вместо прямой, плотнее прилегает кривая второго порядка:

$$K = aq_0^2 + bq_0 + K_n.$$

Свободный член и в этом случае выражает постоянные затраты. Отыскание регрессирующей кривой второго рода является относительно простой математической задачей, ею мы не занимаемся. Практически правильным будет и тот случай, если кривая будет получена графическим путем.

Из множества данных необходимо отобрать те, которые искажены под влиянием какого-нибудь внешнего явления. Таким, например, может быть стихийное бедствие. Отбросить следует также и изменение заработной платы или стоимости материалов, если таковое произошло по вмешательству извне.



Определение значений  $c$  при отыскании значений  $c \sum k$  относительно просто. Если например, в случае равномерного залегания шахта расположена в середине, то

$$c_{cb} = c_{cj} = \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad c_s = c_e = \frac{1}{8},$$

то есть

$$c_{cb} \sum k_{cb} + c_{cj} \sum k_{cj} = \frac{1}{8} (\sum k_{cb} + \sum k_{cj})$$

или же

$$c_s \sum k_s + c_e \sum k_e = \frac{1}{8} (\sum k_s + \sum k_e).$$

Если  $Q_0$  практически постоянно, то есть речь идет о равномерном залегании и при этом работы ведутся ярусным способом, то практически удельные затраты на перемещение грузов будут выражаться следующей зависимостью:

$$k_m = c(A + B) \sum k = \frac{A + B}{4} \sum k.$$

Более того, зная, что при ярусных разработках в случае равенства удельных затрат по двум направлениям  $A = B$ , удельные затраты по перемещению грузов составят

$$k_m = \frac{A}{2} \sum k,$$

где  $A$  — сторона квадрата шахтного поля.

Если шахту запроектировать не в центре, то при определении отдельных значений  $c$  следует обратить внимание на соотношение между двумя частями шахтного поля по разные стороны от шахты.

Значения  $\sum k$  [фор/мт] определяются путем калькуляции. Естественно, можно использовать данные существующих предприятий, приняв во внимание ожидаемый прогресс. Сравнительно просто можно достичь цели в отношении определения переменных удельных затрат на шахтный транспорт, перевозку людей, вентиляцию и на потери энергии в электропроводке. Неопределенным, однако, является количество воды, и, следовательно, удельные затраты на обезвоживание тоже более или менее неопределенны. При учете затрат по поддержанию выработок наиболее целесообразно взять за основу затраты на подобных предприятиях, причем, естественно, и здесь следует принять во внимание возможный прогресс.

Определив описанным способом два параметра заложения еще нельзя считать задачу решенной. Причиной этого является, что основные данные ( $K_n$ ,  $K_b$ ,  $\sum k$ ), собственно говоря, есть так же функции двух параметров ( $q_0$  и  $A$ ,  $B$ ). Эта внутренняя зависимость имеет математическое выражение,

приводящее к весьма сложным зависимостям, и поэтому практически целесообразнее применять т. н. метод повторений.

Суть метода повторений заключается в следующем: когда основные данные определяются впервые, первоначально предполагаются некоторые величины параметров ( $q_0$ ,  $A$ ,  $B$ ), и в соответствии с ними определяются данные, принимающие во внимание эти параметры. В конце первой операции расчетные параметры не совпадают с заранее предположенными. Для второй операции данные выбираются уже в соответствии с расчетными параметрами первой операции. Операции продолжают до тех пор, пока предполагаемые или же принятые параметры приблизятся к расчетным. При расхождении не превышающем  $\pm 5\%$ , практически цель считается достигнутой.

Практика подтверждает, что проведение двух — трех операций приводит к цели.

На основе изложенного можно установить, что определение двух наиболее важных параметров горного предприятия не простая задача. Естественно так же, что точность этого определения является функцией точности исходных данных. В свою очередь, из этого следует, что в интересах ускорения расчетов можно оперировать округленными числами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Замбо, Я.: Оптимальная производственная мощность горных предприятий при процентной амортизации. *Acta Techn. Hung.* **45** (1964), 1—2.
2. ZAMBÓ, J.: Bányászati telepítések analitikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1960.
3. Analitici sni metodi pri proektiánye na rudnici. *Technika*, Sofia 1962.

#### THE PRINCIPAL BASES FOR THE PLACING OF MINING PLANTS IN THE CASE OF AMORTIZATION WITH INTEREST

J. ZAMBÓ

#### SUMMARY

The author further develops his earlier investigations. The two most important parameters of the mining plant to be placed are: the production capacity and the extension of the field. The investment costs are considered together with amortization, including interest, and thus complicated relations are obtained, but the author also presents the practically completely satisfactory simple solutions. The two most important parameters are not separately analyzed, but together, taking their mutual action into consideration. The multilateral functional relations are considerably simplified by an iteration method. Finally the author publishes a numerical example.



DIE HAUPTBEDINGUNGEN FÜR DIE ANLEGUNG VON BERGBAUBETRIEBEN  
BEI VERZINSLICHER AMORTISATION

J. ZAMBÓ

## ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser entwickelt seine früheren Untersuchungen weiter. Die beiden wichtigsten Parameter eines Bergbaubetriebes: die Produktionskapazität und die Ausdehnung des Feldes werden bestimmt. Die Investitionskosten werden mit verzinslicher Amortisation in Betracht gezogen, und der Verfasser kommt so zu komplizierten Ausdrücken; jedoch werden auch die praktisch vollkommen genügenden einfachen Lösungen angegeben. Die beiden wichtigsten Parameter werden nicht gesondert analysiert, sondern zusammen, unter Berücksichtigung ihrer Wechselwirkung. Die mehrfachen funktionellen Zusammenhänge werden mittels Iteration wesentlich vereinfacht. Auch ein Zahlenbeispiel wird durchgearbeitet.

LES PRINCIPAUX PARAMÈTRES DE L'EMPLACEMENT DES EXPLOITATIONS  
MINIÈRES EN CAS D'AMORTISSEMENT AVEC INTÉRÊTS

J. ZAMBÓ

## RÉSUMÉ

L'auteur développant ses examens antérieurs, détermine les deux principaux paramètres de l'exploitation minière avant l'emplacement: la capacité de production et l'étendue du champ. Les frais d'investissement étant calculés avec amortissement à intérêt, l'auteur aboutit à des relations complexes, mais donne aussi des solutions simples parfaitement satisfaisantes dans la pratique. Les deux principaux paramètres sont analysés conjointement, compte tenu de leur effet réciproque. Les relations fonctionnelles sont nettement simplifiées par le procédé d'itération. L'étude se termine par un exemple numérique.





## INDEX

Preface — Vorwort — Préface — Предисловие.....	1
<i>Barta, J.</i> : Über die Berechnung der Durchbiegung einer Membran — On the Deflection Analysis of a Membrane — Calcul du déplacement d'une membrane — <i>Барта, Й.</i> : О расчете перегиба пленки .....	5
<i>Bogárdi, J. L.</i> : Some Concepts of Model Investigations on Sediment Transporting Watercourses — Die Frage der Ähnlichkeit, unter besonderer Berücksichtigung der Modellversuche an geschiebeführenden Wasserläufen — Le problème de la similitude, avec considération particulière des essais sur modèles réduits des cours d'eau transportant des matières solides — <i>Богарди, Я.</i> : Вопрос подобия, уделяя особое внимание проводимым на моделях исследованиям водных потоков с наносами .....	11
<i>Bognár, G.</i> : The Increase of Information Capacity of Long-Distance Broad Band Microwave Radio Relay Systems — Die Erhöhung der Informationskapazität von Breitband-Weitverkehrs-Richtfunkverbindungen — L'accroissement de la capacité d'information des faisceaux hertziens à large bande — <i>Богнар, Г.</i> : Увеличение информационной емкости широкополосных магистральных радиорелейных линий .....	25
<i>Csonka, P.</i> : Cross Vault Shaped Sectorial Shells with Cantilever-Like Overhanging Free Boundary — Kreuzgewölbeartige Schalen mit auskragendem freiem Rand — Voiles composés en voûte d'arêtes, à bords libres en porte-à-faux — <i>Чонка, П.</i> : Сегментные оболочки в виде поперечного свода со свободным краем, выступающим вперед консолеобразно .....	43
<i>Fonó, A.—Makkai, E.</i> : The Dimensioning of Gas Pipe Lines — Die Dimensionierung von Gasfernleitungen — Le dimensionnement des lignes de transport de gaz à longue distance — <i>Фоно, А.—Маккаи, Е.</i> : Расчет газопроводов.....	53
<i>Geleji, A.</i> : Das elastisch-plastische Biegen von Rundstäben — The Elastic-Plastic Flexure of Bars with Circular Cross-Section — Flexion élasto-plastique des barres de section circulaire — <i>Гелеи, А.</i> : Эластично-пластичный изгиб стержней круглого сечения .....	69
<i>Gillemot, L.</i> : Simplified Method to Plot Haigh and/or Smith Graphs — Ein vereinfachtes Verfahren für die Konstruktion des Haigh- bzw. Smith-Diagramms — Une méthode simplifiée pour le tracé du diagramme de Haigh resp. de Smith — <i>Жильмо, Л.</i> : Упрощенный метод построения диаграмм по Гайг или Смит..	81

<i>Heller, L.:</i> New Power Station System for Unit Capacities in the 1000 MW Order — Ein neues Kraftwerkssystem für Einheitsleistungen in der Größenordnung von 1000 MW — Un nouveau système de centrales thermiques pour puissances unitaires de 1000 MW — <i>Хеллер, Л.:</i> Новая система электростанций с агрегатами мощностью 1000 мвт .....	93
<i>Kovács, K. P.:</i> Über Asynchronmaschinen mit einachsigem Läufer — Asynchronous Machines with One-Axis Rotor — Sur les machines asynchrones avec rotor à un axe — <i>Ковач, К. П.:</i> Об асинхронных машинах с одновальным ротором...	125
<i>Kovácszay, L. S. G.:</i> The Hot-Wire Anemometer — Hitzdrahtanämometer — Anémomètres à fil chaud — <i>Коваснаи, Л. Ш. Г.:</i> Термоанемометр.....	131
<i>Kozma, L.:</i> Speeding up of Digit Transmission by Telephone Subscribers — Beschleunigung der Zahlenübertragung von Fernsprech-Teilnehmern — Accélération des transmissions de chiffres par les abonnés au téléphone — <i>Козьма, Л.:</i> Ускорение посылки телефонных абонентских кодов .....	153
<i>Levi, F.:</i> Contrôle des conditions de fissuration et de déformation de dalles dimensionnées à l'état limite ultime — Control of the Conditions of Cracking and of Deformation of Plates Dimensioned for Ultimate Stress — Kontrolle der Bedingungen für die Ribbildung und die Verformung von für den Bruchspannungszustand dimensionierten Platten — <i>Леви, Ф.:</i> Проверка условий образования трещин и деформации пластин, рассчитанных на напряжение излома .....	167
<i>Lévai, A.:</i> Efforts to Raise Temperatures in Conventional and Nuclear Power Stations — Bestrebungen zur Erhöhung der Temperatur in konventionellen und in Atomkraftwerken — Tendances à l'accroissement de la température dans les centrales thermiques conventionnelles et atomiques — <i>Леваи, А.:</i> Стремления повышения температуры на конвенциональных и атомных электростанциях .....	181
<i>Millner, T.:</i> Über das Verhalten von Fremdstoffspuren in pulvermetallurgischen Wolframmetallsorten — About the Behaviour of the Dopes in Powdermetallurgical Tungsten — Comportement des traces de substances étrangères dans le tungstène métallique — <i>Мильнер, Т.:</i> Поведение следов присадки в металлическом вольфраме .....	203
<i>Mortada, S. A.:</i> Beitrag zur Untersuchung der Fachwerke aus Stahlbeton unter statischen und Dauerbeanspruchungen — Contributions to the Behaviour of Concrete Lattice Girders during Static and Fatigue Tests — Contribution à l'étude du comportement aux essais statiques et de fatigue des poutres à treillis en béton armé — <i>Мортада, С. А.:</i> К поведению железобетонных арок при статических испытаниях и испытаниях на усталость .....	229
<i>Никольский, Е. Н.:</i> Напряжения в цилиндрических оболочках с симметричным неизгибаемым контуром поперечного сечения — <i>Nikolski, J. N.:</i> Stresses in Cylindrical Shells with Symmetrical Cross-Section — Spannungen in Zylinderschalen mit symmetrischem Querschnitt — Les contraintes engendrées dans les voiles cylindriques de section symétrique .....	251
<i>Olszak, W.:</i> On Anisotropic Twisted Bars — Über die Torsion von anisotropen Stäben — Sur la torsion des barres anisotropes — <i>Олшак, В.:</i> Торсионные явления анизотропных стержней .....	263



- Ratkovszky, F.*: Die ungarische und die internationale Weiterentwicklung der 50 HZ-Vollbahnfahrzeuge — The Future Development of the 50 Hz Railway Vehicles in Hungary and Abroad — Le développement des véhicules de chemin de fer à 50 Hz — *Ратковски, Ф.*: Развитие в Венгрии магистральных железнодорожных подвижных средств, питаемых током промышленной частоты . . . . . 283
- Rázsó, J.*: Study on the Mechanized Cultivation of Drift Sand Lands — Einige Fragen der Mechanisierung der Bearbeitung von Flugsandgebieten — Problèmes de la mécanisation sur les terrains de sables mouvants — *Раждо, И.*: Некоторые вопросы механизации сельскохозяйственных работ на территории зыбучих песков . . . 303
- Seidner, M.*: Economics of Water-Cooled Turbogenerators — Die Wirtschaftlichkeit von wassergekühlten Turbogeneratoren — L'économie des turbo-générateurs refroidis par l'eau — *Сеиднер, М.*: Экономичность турбогенераторов водяного охлаждения . . . . . 317
- Svéd, G.—Brooks, D. S.*: Elasto-Plastic Behaviour of a Round Bar Subjected to Axial Force and Torque — Das elasto-plastische Verhalten des mit einer axialen Kraft und einem Torsionsmoment belasteten Stabes mit Kreisquerschnitt — Comportement élasto-plastique des barres de section circulaire chargées par une force axiale et par un moment de torsion — *Швед, Г.—Брукс, Д. С.*: Эластопластичное поведение круглого стержня, нагруженного аксиальной силой и крутящим моментом . . . . . 337
- Széchy, K.*: Bestimmung der Stahlbewehrung und der Rammspannungen von Stahlbetonpfählen — Determination of Driving Stresses in Piles — Détermination des contraintes survenant dans les pieux pendant le battage — *Сечи, К.*: Определение напряжений при забивании, возникающих в сваях . . . . . 353
- Szmodits, K.*: Examen numérique de membranes construites sur une base rectangulaire — Numerical Investigation of Membrane Shells with Rectangular Plan — Numerische Behandlung von Membranschalen mit rechteckigem Grundriß — *Смодич, К.*: Численный анализ мембранной оболочки прямоугольного плана . . . . . 371
- Tarján, G.*: Enrichment of Coal Slime by In-Series Connected Hydrocyclones — Anreicherung von Kohenschlammern durch in Reihe geschaltete Hydrozyklone — Concentration des schlamm de charbon par des hydrocyclones connectés en série — *Тарьян, Г.*: Обогащение угольных шламов последовательно соединенными гидроциклонами . . . . . 377
- Vásárhelyi, D. D.*: Shakedown. New Viewpoint in Structural Analysis — Anpassung. Ein neuer Gesichtspunkt für die Analyse von Konstruktionen — La stabilisation. Un nouveau point de vue pour l'analyse des constructions — *Вашархеи, Д. Д.*: Установление — новая точка зрения исследования конструкций . . . . . 383
- Winter, E.—Szelényi, T. Z.*: The Problem of Arc-Failure in Gas-Filled Incandescent Lamps — Das Problem des Lichtbogenabbrands in gasgefüllten Glühlampen — Le problème de la défectuosité due à l'arc dans des lampes à incandescence remplies de gaz — *Винтер, Э.—Селени, Т. З.*: Вопрос дугового сгорания газонаполненных ламп накаливания . . . . . 389
- Ylinen, A.*: The Effect of Shearing Force on the Buckling Load beyond the Limit of Proportionality — Der Einfluß der Schubkraft auf die Knickkraft über der Proportionalitätsgrenze — L'influence des efforts tranchants sur la force de flambage, au-

dessus de la limite de proportionnalité — Илинен, А.: Влияние сдвигающего усилия, оказываемое на прогибающее усилие за пределом пропорциональности	403
Замбо, Я.: Важнейшие основы заложения горных предприятий при процентной амортизации — <i>Zambó, J.</i> : The Principal Bases for the Placing of Mining Plants in the Case of Amortization with Interest — Die Hauptbedingungen für die Anlegung von Bergbaubetrieben bei verzinslicher Amortisation — Les principaux paramètres de l'emplacement des exploitation minières en cas d'amortissement avec intérêts	415



*Printed in Hungary*

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1965. II. 18. — Terjedelem: 37,75 (A/5) ív, 198 ábra

---

65. 60337 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György





The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Hungary*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Hongrie*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*  
*Nádor u. 7.*  
*Budapest V.*  
*Венгрия*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

**108, —Ft**

**Index: 26.025**