

2131

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 49

FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1964

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

Tomus 49

INDEX

- Balogh, A.*: Die Berechnung der Geschwindigkeiten von Planetenrädern — A New Method for Calculations Related to Planetary Gears — Un nouveau procédé de calcul relatif aux engrenages planétaires — *Балог, А.*: Расчеты планетарных колес новым методом 425
- Béda, Gy.*: Über eine Frage der experimentellen Untersuchung des dynamischen plastischen Zuges — A Problem Concerning Experimental Investigation of Dynamic Plastic Traction — Un problème relatif à l'essai dynamique de traction plastique — *Бёда, Дь.*: Один из вопросов опытного исследования динамического пластического волочения 311
- Csonka, P.*: On the Internal Edge Beam of Paraboloidal Shells of Revolution Having a Circular Skylight Opening — Über den inneren Randträger der mit einem kreisförmigen Oberlicht versehenen Rotationsparaboloid-Schalen — De l'anneau de rive supérieur des voiles en parabolöide de révolution ayant une ouverture circulaire — *Чонка, П.*: О внутренней краевой балке оболочек с фонарем, имеющих форму параболоида вращения и опирающихся на кругообразное основание 219
- Csonka, P.*: Calculation of Conoid Shells Having a Parabolic Generating Curve — Berechnung von Konoidschalen mit parabolischer Leitlinie — Calcul de voiles minces conoïdes à directrice parabolique — *Чонка, П.*: Расчет коноидных оболочек с параболообразными ведущими кривыми 463
- Goschy, B.—Balázs, G.*: Über den Einfluß des Verbundes auf die Bruchsicherheit der Spannbetonbalken — Influence of Bond on the Ultimate Moment of Prestressed Concrete Beams — L'influence de l'adhérence sur le moment de rupture des poutres en béton précontraint — *Гоши, Б.—Балаж, Д.*: Влияние сцепления между бетоном арматурой на разрушающий момент последующе-напряженной бетонной балки 453
- Harkányi, I.*: Determination of Optimum Conditions of Capillary Compensated Hydrostatic Slideways — Die Bestimmung der optimalen Verhältnisse der durch kapillare Drosselung kompensierten hydrostatischen Leitungen — Détermination des conditions optima de conduites hydrostatiques compensées par obturation — *Харкани, И.*: Определение оптимальных режимов гидростатических проводников, компенсированных капиллярной заглушкой 67
- Halász, D.—Szendy, K.*: Losses Caused by the Hall Effect and their Influence on the Efficiency of the Thermal Cycle in MHD Generators — Die durch den Hall-Effekt verursachten Verluste und ihr Einfluß auf den Wirkungsgrad des Wärmekreislaufs — Les pertes dues à l'effet Hall et leur influence sur le rendement du cycle thermique — *Халас, Д.—Сенди, К.*: Потери, вызванные эффектом Холла, и их влияние на к. п. д. теплового цикла 373
- Klimow, B.*: Zur Berechnung der flachen, doppelt gekrümmten Schalen mit veränderlicher Krümmung — On the Calculation of Shallow Shells with Double, Varying Curvature — Calcul de voiles plats doublement courbes à courbure variable — *Климов, Б.*: К расчету оболочек двоякой и переменной кривизны 37
- Kozák, R.*: Résistance du béton et des fils employés dans les bétons précontraints par adhérence, soumis à des charges pulsatives — The Strength of the Concrete and Bond Stressing Wires of Stressed Concrete Structures Affected by Pulsating Forces — Die Festigkeit des Betons und der Drahteinlagen von durch pulsierende

Kräfte beanspruchten Spannbeton-Verbundkonstruktionen — Козак, Р.: Прочность проволочной арматуры и бетона напряженных бетонных конструкций с прилипающей арматурой, подверженных пульсирующим воздействиям ...	91
Kuczogi, E.: Die Halbleitertheorie der Schleifkontakte elektrischer Maschinen — Semiconductor Theory for the Sliding Contacts of Electrical Machines — Application de la théorie de la semi-conductivité aux contacts à frottement des machines électriques — Куцоги, Э.: Полупроводниковая теория скользящих контактов электрических машин	191
Lévai, Z.: Analytische Untersuchung elementarer Planetengetriebe — Analytic Examination of Planetary Drives — Examen analytique des trains d'engrenages planétaires — Левай, З.: Аналитический анализ планетарных механизмов	357
Lőrinczi, A.—Sebeni, P.: Новый датчик перемещения с использованием полупроводника — Lőrinczy, A.—Szebeni, P.: A New Displacement Transducer Using Semiconductors — Eine neuer Wegumformer mit Halbleitern — Nouveaux transmetteurs de déplacement utilisant des semi-conducteurs	291
Nándori, Gy.: Untersuchung von kennzeichnenden Daten der linearen Schwindung von Grauguß — Investigation of the Characteristic Data of Linear Shrinkage of the Gray Iron — Étude des données caractéristiques du retrait linéaire de la fontes grise — Нандори, Д.: Исследование характерных данных линейной усадки серого чугуна	111
Neugebauer, J.—Simon, T.—Tremmel, J.: Die Ausbildung von Kristallen aus den Metallpulverkörnchen beim Sintern von Wolframstäben — The Growing of Crystals out of Metalpowder Grains in the Sintering Process of Tungsten Rods — Cristallisation à partir de grains de poudres métalliques pendant la frittage des barres de tungstène — Нейгебауэр, Й.—Шимон, Т.—Треммел, Й.: Образование кристаллов из зерен металлического порошка при спекании вольфрамовых прутков	233
Öllös, G.—Deli, M.—Szolnoky, Cs.: Ergebnisse von Modellversuchen über die Grundwasserabsenkung durch Vakuumbrunnen — Results of Model Tests on Ground Water Level Lowering by Vacuum Wells — Résultats d'essais sur modèles réduits concernant l'abaissement par le vide de la nappe phréatique — Эллиш, Г.—Дели, М.—Сольньски, Ч.: Результаты модельных опытов с целью понижения уровня грунтовых вод вакуумными колодцами	163
Öllös, G.: Model Investigations into Seepage — Modelluntersuchung von Sickervorgängen — Étude de la filtration sur modèles réduits — Эллиш, Г.: Модельные исследования явлений фильтрации	327
Palotás, L.: Allgemeiner Spannungszustand des Betons — The Spatial State of Stress of Concrete — L'état de contrainte tridimensionnel du béton — Палоташ, Л.: Пространственное напряженное состояние бетона	399
Pásztor, E.: Baustatische Berechnung von radial beschauften Laufrädern mittels der »Beck«-schen Methode — Calculation of the Strength of the Running Wheels with Radial Blading by the Method of Beck — Calcul de la résistance des roues à aubes radiales par la méthode de Beck — Пастор, Э.: Расчет механической прочности рабочих колес с радиальными лопастями методом Бекк-а	149
Ripianu, A.—Sirbu, N.: Contribution to the Investigation of Transitory Movements of Rotors on Passing through the Critical Revolution — Beitrag zum Studium der transitorischen Bewegungen der Rotoren bei dem Durchgang durch die kritische Geschwindigkeit — Contribution à l'étude des mouvements transitoires des rotateurs à leur passage par la vitesse critique de rotation — Рипиану, А.—Сырбу, Н.: К вопросу изучения переходных движений роторов при переходе через критическую скорость	3
Rózsa, M.: Stability Analysis of Arches with Vertical Load — Stabilitätsuntersuchung von Bogenträgern mit vertikaler Last — Examen de la stabilité des arcs soumis à des charges verticales — Рожса, М.: Исследование устойчивости арочных балок с вертикальной нагрузкой	387
Sasvári, Gy.—Seitz, K.: De la différence moyenne des températures des deux milieux dans le traitement thermique à contrecourant et à courant parallèle — On the Mean Temperature Difference between the Two Media in Counter-Flow and in Parallel-	

- Flow Heating — Über den mittleren Temperaturunterschied zwischen zwei Medien bei Gegenstrom- und bei Gleichstromerwärmung — *Шаувару, Дь.—Сейту, К.:* О разности средней температуры, возникающей между двумя средами при противоточном и прямоточном нагреве 319
- Schedel, A.:* Study of the Direct Reduction — Über die direkte Reduktion — Recherches sur la réduction directe — *Шедель, А.:* Исследование прямого восстановления 131
- [Schleicher, A.:** Data on the History of Metallurgy in Hungary. IX. Results of Metallurgical Researches Carried out on the Territory of the Vas County until the End of 1961 — Beitrag zur Geschichte des Hüttenwesens in Ungarn. IX. Die Ergebnisse der im Gebiete des Komitats Vas bis Ende 1961 durchgeführten Geschichtsforschung über das ungarische Hüttenwesen — Contribution à l'histoire de la métallurgie en Hongrie. IX. Résultats des recherches historiques effectuées jusqu'à la fin de 1961 sur la métallurgie dans le département de Vas — *Шлейхер, А.:* К истории металлургии в Венгрии, IX. Результаты исследований по истории металлургии, проводившихся до конца 1961 г. в области Ваш 245
- [Schuertner, A.:** Beitrag zur Theorie der vierseitig gestützten Rechteckplatten — Contributions to the Theory of Rectangular Slabs Supported along All Four Sides — Contribution à la théorie des plaques rectangulaires appuyées sur les quatre côtés — *Швертнер, А.:* К теории четырехугольной пластины, опирающейся с четырех сторон 55
- Szmodits, K.:* Hyperbolic Paraboloidal Shells over Polygonal Plan — Zusammen- gesetzte hyperbolische Paraboloidschale über einem Vieleckgrundriß — Voiles composés en paraboloides hyperboliques construits sur une base polygonale — *Смодиц, К.:* Комбинированная гипероболочка на многоугольном основании 83
- Tarján, I.:* Warming up of Wet Mine Air — Die Erwärmung von nassen Grubenwettern — L'échauffement de l'air de mine humide — *Тарьян, И.:* Нагрев влажного воздуха в шахтах 297
- Terplán, Z.:* Der Wirkungsgrad eines Planetengetriebes mit Doppelantrieb — Efficiency of Planetary Gears with Two Drives — Le rendement des engrenages planétaires à double commande — *Терплан, З.:* Коэффициент полезного действия планетарной передачи с двойным приводом 207
- Terplán, Z.:* Verschiedene Methoden für die analytische Untersuchung der einfachsten Planetenräder-Getriebe — Different Methods of Analytic Examination of the most Simple Epicycloidal Drive — Différentes méthodes pour l'examen analytique des trains d'engrenages épicycloïdaux les plus simples — *Терплан, З.:* Различные методы аналитического исследования простейших эпициклических приводных механизмов 437
- Vasy, G. S.:* The Permissible Deviation of the Inner Diameter of a Main Upstream and Downstream from a Pressure Difference Device for Flow Measurement — Toleranzen des inneren Rohrdurchmessers bei Durchflußmessung mit Drosselgeräten — Les tolérances du diamètre intérieur d'une conduite en cas mesure du débit à l'aide d'un système déprimogène — *Ваши, Г. Ш.:* Допускаемое отклонение диаметра трубопроводов при измерении расхода с помощью сужающего устройства 271
- [Vidéky, E.:** Historical Data Concerning the Development of Gear Wheels before the World War I. — Historische Daten bis zum I. Weltkrieg über die Entwicklung der Zahnräder — Données historiques relatives au développement des engrenages avant la 1^{re} guerre mondiale — *Видеки, Э.:* Исторические данные касающиеся развития зубчатых колес до первой мировой войны 241
- Voith, M.:* Berechnung des Walzdruckes und Walzmomentes bei Feinwalzstraßen — Calculation of the Rolling Pressure and Torque on Small-Section Roll Trains — Calcul pour la détermination de la pression et du couple de laminage sur les trains de laminoirs finisseurs — *Войт, М.:* Расчетное определение давлений и моментов прокатки на мелкосортных прокатных станах 251

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 49



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1964

ACTA TECHN. HUNG.

CONTRIBUTION TO THE INVESTIGATION OF TRANSISTORY MOVEMENTS OF ROTORS ON PASSING THROUGH THE CRITICAL REVOLUTION

A. RIPIANU and N. SIRBU
CLUJ, ROMANIA

[Manuscript received January 11, 1961]

We consider a shaft sustained at its extremities by two supports. In the middle of the shaft a rotor is fixed, whose plane of symmetry is normal to the geometrical axis of the shaft.

It is carried out a qualitative and quantitative study of the relative rotary motion which is executed by the plane of flexion of the shaft in comparison with the rotary motion of the rotor, when the velocity of the shaft is equal or near to the critical rotary motion. Here it is performed an analytical study of the curve which represents the variation of value of the ratio ω_f/ω_{cr} between the angular velocity ω_f of the plane of flexion of the shaft, and the angular critical velocity ω_{cr} depending on the time t .

In the last part of the article, the general formulae found as part of a numerical example are applied and it is drawn the curve of variation of the ratio $\omega_f/\omega_{cr} = f(t)$ which permits us to deduce the transitory movements.

I. The General Treatment of the Problem

1. Introduction

A rotor passing through the critical revolution is accompanied by transitory movements which do not appear when the rotary velocity of the rotor is removed from the critical velocity of rotation.

In order to effectuate the investigation of transitory movements a shaft will be considered having a circular section sustained by two supports situated at the extremities.

A disk is fixed to the middle of the shaft which represents the rotor having the eccentricity e in comparison with the axis of the shaft. The plane of the disk is perpendicular to the geometrical axis of the shaft and e represents the distance between the centre of gravity of the disk and the axis of the shaft.

In Fig. 1, A was noted as the point of intersection between the geometrical axis of the flexional shaft and the plane of the disk, and with G the centre of gravity of the disk.

In the following investigation of the elastic hysteresis of the material out of which the shaft is constructed will be neglected the effect, as well as the effect of the proper weight of the shaft, considering as negligible the mass of the shaft as compared to the mass of the disk.

Through the fastening of the disk in the centre of the shaft, the plane of the disk does not change during the rotary motion, and thus the gyroscopic effect is removed (cleared away).

As long as the rotary velocity ω of the shaft (of the disk) is constant and removed from the critical velocity ω_{cr} , the plane of flexion of the shaft turns (round) with the same rotary velocity as that of the shaft, so that the centre

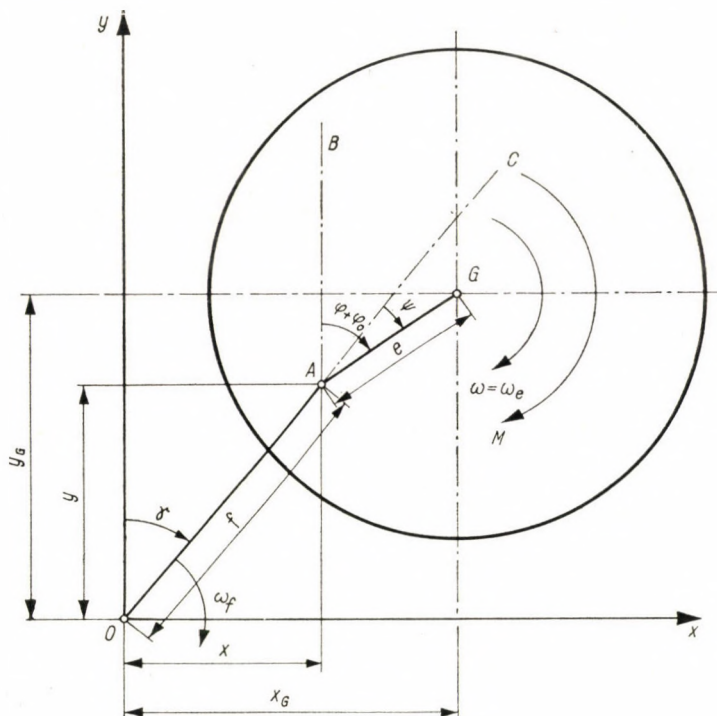


Fig. 1

of gravity G of the disk remains placed constantly in the plane of flexion of the shaft, in the position represented in Fig. 2a, when $\omega < \omega_{cr}$ and in Fig. 2b when $\omega > \omega_{cr}$.

When the rotary velocity ω of the shaft (of the disk) is constant and equal with the critical velocity ω_{cr} , the rotary velocity of the flexional plane of the shaft ω_f is no longer equal with the critical velocity of rotation of the disk ω_{cr} , but varies, oscillating somewhere about the constant value ω_{cr} which provokes from the initial plane of flexion alternative flexions of the shaft on different levels. Because of these movements the centre of gravity G of the disk does not remain permanently placed in the flexional plane of the shaft (Fig. 1).

In the following the transitory movement will be studied, which is represented by the relative rotary motion of the flexional plane of the shaft in comparison to the shaft (disk), which turns (round) with a critical constant velocity of rotation ω_{cr} .

We adopted a Cartesian guide mark of reference $Oxyz$ (Fig. 1) of which axis Oz coincides with the geometric axis of the unflexional shaft (the geometric axis of the supports) and the axes of which Ox and Oy are placed in the plane of the disk.

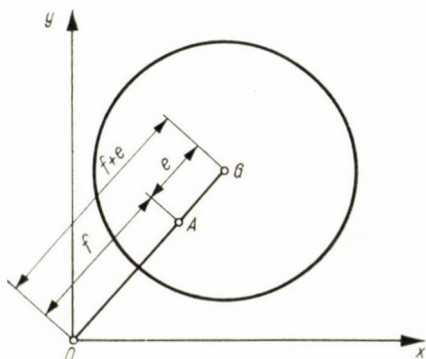


Fig. 2/a

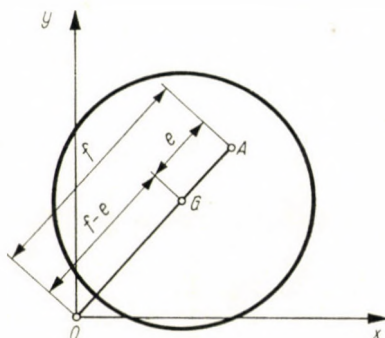


Fig. 2/b

2. Notations

The following notations will be used:

x, y	the co-ordinates of intersection point A between the geometric axis of the flexional shaft and the plane of the disk (Fig. 1).
$x_G; y_G$	the co-ordinates of the centre of gravity G of the disk.
$f = OA$	the maximum arrow of the shaft, representing the distance from point A to the geometric axis of the unflexional shaft (the geometric axis of the supports)
$e = AG$	the eccentricity of calage of the disk on the shaft.
$\gamma = \sphericalangle AOy$	the rotary angle of the flexional plane of the shaft, formed by the arrow $f = OA$ and axis Oy .
$\varphi + \varphi_0 = \sphericalangle GAB$	the rotary angle of the shaft (of the disk), formed by the eccentricity e and axis Oy .
φ_0	the value of the angle $(\varphi + \varphi_0)$ at the initial moment, when $\varphi = 0$.
$\psi = \sphericalangle GAC$	the relative rotary angle of the shaft (of the disk) in comparison with the flexional plane of the shaft.
ω_{cr}	the velocity of critical rotation of the shaft (of the disk).
$\omega = \omega_e = d(\varphi + \varphi_0)/dt$	the rotary velocity of the shaft (of the disk) equal the rotary velocity of eccentricity e .
$\omega_f = d\gamma/dt$	the rotary velocity of the flexional plane of the shaft equal with the rotary velocity of the arrow f .
m	the mass of the disk fixed on the shaft.

M	the moment of couple applied to the disk which provokes the rotary motion of the disk (of the shaft).
I_G	the moment of mechanical inertia of the disk in comparison to the normal axis of the plane of the disk and passing through its centre of gravity G .
k	the elastic constant of the shaft.

3. The deduction of the mathematical expression of the transitory movements in the general case

The differential equation of the rotary motion of the disk, in the general case of a variable rotary velocity $\omega = d\varphi/dt$, is:

$$I_G \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M - m e \omega_{cr}^2 [x \cos(\varphi + \varphi_0) - y \sin(\varphi + \varphi_0)].$$

The equations of dynamic equilibrium of the disk in relation to axis Ox and Oy are:

$$m \frac{d^2 x_G}{dt^2} + kx = 0,$$

$$m \frac{d^2 y_G}{dt^2} + ky = 0.$$

According to Fig. 1

$$x_G = x + e \sin(\varphi + \varphi_0),$$

$$y_G = y + e \cos(\varphi + \varphi_0).$$

We know that

$$\frac{k}{m} = \omega_{cr}^2.$$

Introducing these terms into the equation of dynamic equilibrium of the disk, the system of differential equations is obtained:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_{cr}^2 x = -e \frac{d^2}{dt^2} \sin(\varphi + \varphi_0), \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_{cr}^2 y = -e \frac{d^2}{dt^2} \cos(\varphi + \varphi_0), \quad (2)$$

where ω_{cr} , e and φ_0 represent constants and $\varphi = \varphi(t)$ represent a function given by time t .

Equation (2) is inferred from (1) replacing φ_0 by $\varphi_0 + \pi/2$.

The equations (1) and (2) may also be written in the form:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_{cr}^2 x = -e \left(\cos \varphi_0 \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi + \sin \varphi_0 \frac{d^2}{dt^2} \cos \varphi \right), \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_{cr}^2 y = -e \left(\cos \varphi_0 \frac{d^2}{dt^2} \cos \varphi - \sin \varphi_0 \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi \right). \quad (4)$$

Let us write:

$$X(t) = -x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0, \quad (5)$$

$$Y(t) = x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0.$$

From (3) and (4) using (5) we obtain:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_{cr}^2 X = e \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \omega_{cr}^2 Y = -e \frac{d^2}{dt^2} \cos \varphi. \quad (7)$$

The modification of variable is performed:

$$t = t_0 s,$$

where t_0 is a positive constant.

Let us write:

$$\frac{X(t)}{e} = X_1(s); \quad \frac{Y(t)}{e} = Y_1(s); \quad \varphi(t) = \varphi_1(s). \quad (8)$$

Hence

$$\frac{1}{e} \frac{d^2}{dt^2} X(t) = \frac{1}{t_0^2} \frac{d^2}{ds^2} X_1(s); \quad \frac{1}{e} \frac{d^2}{dt^2} Y(t) = \frac{1}{t_0^2} \frac{d^2}{ds^2} Y_1(s);$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{t_0} \frac{d\varphi_1(s)}{ds}.$$

We write:

$$p = \omega_{cr} t_0 > 0.$$

Equations (6) and (7) become:

$$-\frac{d^2}{ds^2} X_1(s) + p^2 X_1(s) = \frac{d^2}{ds^2} \sin \varphi_1(s), \quad (9)$$

$$-\frac{d^2}{ds^2} Y_1(s) + p^2 Y_1(s) = -\frac{d^2}{ds^2} \cos \varphi_1(s). \quad (10)$$

These two differential equations are in the form of equation

$$\frac{d^2 Z(s)}{ds^2} + p^2 Z(s) = f(s),$$

the general integral of which is:

$$Z = A \cos ps + B \sin ps + \frac{1}{p} \int_0^s f(\sigma) \cdot \sin p(s - \sigma) \cdot d\sigma. \quad (11)$$

Let us assume that

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$

consequently in (8)

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0. \quad (12)$$

To find the general integrals of differential equations (9) and (10), will be used (11) and will be twice integrated by the method of parts. We obtain:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= A \cos ps + B \sin ps + \sin \varphi_1(s) - p \int_0^s \sin \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma, \\ Y_1(s) &= C \cos ps + D \sin ps - \cos \varphi_1(s) + p \int_0^s \cos \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

A, B, C, D , representing constants of integration. We assume that the conditions:

$$x(t) = x'(t) = y(t) = y'(t) = 0 \quad (14)$$

are fulfilled in the moment $t = 0$. In that case from (5) results

$$X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = 0,$$

and from (8) results:

$$X_1(0) = X_1'(0) = Y_1(0) = Y_1'(0) = 0.$$

Introducing these conditions into (13) we obtain the values of integration constants

$$A = 0, B = 0, C = 1, D = 0.$$

The general integrals (13) become:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \sin \varphi_1(s) - p \int_0^s \sin \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma \\ Y_1(s) &= \cos ps - \cos \varphi_1(s) + p \int_0^s \cos \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (15)$$

In accordance with (8) we write:

$$\frac{x(t)}{e} = x_1(s), \quad \frac{y(t)}{e} = y_1(s). \quad (8_1)$$

From (5), (8) and (8₁) it is inferred:

$$\begin{aligned}x_1(s) &= -X_1(s) \cos \varphi_0 + Y_1(s) \sin \varphi_0, \\y_1(s) &= X_1(s) \sin \varphi_0 + Y_1(s) \cos \varphi_0.\end{aligned}\quad (16)$$

We assume:

$$\varphi_0 = 0. \quad (17)$$

From Fig. 1, taking (16) into consideration, we obtain the term of rotation angle γ of the shaft sag:

$$\gamma(t) = \arctan \frac{x(t)}{y(t)} = \gamma_1(s) = \arctan \frac{-X_1(s)}{Y_1(s)}.$$

The function is defined as

$$f_1(s) = \frac{\omega_f}{\omega_{cr}}, \quad f_2(s) = \frac{\omega}{\omega_{cr}}.$$

Successively we obtain:

$$\begin{aligned}f_1(s) &= \frac{\omega_f}{\omega_{cr}} = \frac{1}{\omega_{cr}} \frac{d}{dt} \gamma(t) = \frac{1}{\omega_{cr}} \frac{d}{ds} \gamma_1(s) \frac{ds}{dt} = \\&= \frac{1}{\omega_{cr} t_0} \frac{X_1(s) Y_1'(s) - Y_1(s) X_1'(s)}{X_1^2(s) + Y_1^2(s)},\end{aligned}\quad (18)$$

$$f_2(s) = \frac{\omega}{\omega_{cr}} = \frac{1}{\omega_{cr}} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{\omega_{cr}} \frac{d\varphi_1(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\omega_{cr} t_0} \varphi_1'(s). \quad (19)$$

Introducing into (18) the expressions (15) we obtain:

$$\begin{aligned}\varphi_1'(s) [1 - \cos ps \cos \varphi_1(s)] - p \sin ps \sin \varphi_1(s) - \\- p \varphi_1'(s) \int_0^s \cos [\varphi_1(s) - \varphi_1(\sigma)] \sin p(s - \sigma) d\sigma + p^2 \int_0^s \{ \sin [\varphi_1(s) - \\- \varphi_1(\sigma)] \cos p(s - \sigma) + \sin \varphi_1(\sigma) \cos p\sigma \} d\sigma + \\+ p^3 \left[\int_0^s \cos \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma \int_0^s \sin \varphi_1(\sigma) \cos p(s - \sigma) d\sigma - \right. \\- \left. \int_0^s \sin \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma \int_0^s \cos \varphi_1(\sigma) \cos p(s - \sigma) d\sigma \right] - f_1(s) = \frac{1}{p} \quad (20) \\1 - 2 \cos ps \cos \varphi_1(s) + \cos^2 ps + 2p \int_0^s \{ \cos ps \cos \varphi_1(\sigma) - \\- \cos [\varphi_1(s) - \varphi_1(\sigma)] \} \sin p(s - \sigma) d\sigma + \\+ p^2 \left\{ \left[\int_0^s \sin \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma \right]^2 + \left[\int_0^s \cos \varphi_1(\sigma) \sin p(s - \sigma) d\sigma \right]^2 \right\}\end{aligned}$$

4. *The deduction of the mathematical expression of the transitory movements in the particular case, when $\varphi_1(s) = ps$*

For drawing the curve (C_1) having the equation $S = f_1(s)$ the particular case:

$$\varphi_1(s) = ps \quad (21)$$

will be adopted corresponding to a uniform rotation of the shaft (disk) with the critical angle velocity ω_{cr} .

The branch of the curve (C_1) will be constructed corresponding to the positive values of s , namely, the branch situated on the right side of the axis OS.

Introducing into (20) the expression $\varphi_1(s)$ given by (21), effectuating the integrations and introducing the notation

$$u = ps,$$

we obtain the equation:

$$f_1(s) = \frac{u^2 + \sin^2 u}{u^2 + 2u \sin u \cos u + \sin^2 u}. \quad (22)$$

5. *The study of the variation of the function $S = f_1(s)$ and of its derivatives and the drawing of the representative curves of variation corresponding to these functions*

Deriving from this we obtain:

$$f_1'(s) = 2p \frac{A}{B}. \quad (22a)$$

Here are

$$\begin{aligned} A &= -u^3(\cos^2 u - \sin^2 u) + u^2 \sin u \cos u + u \sin^2 u - \sin^3 u \cos u, \\ B &= (u^2 + 2u \sin u \cos u + \sin^2 u)^2. \end{aligned}$$

Let us introduce the notation:

$$r = 2u = 2ps.$$

Equation $f_1'(s) = 0$ may be written in the form:

$$\frac{r^2}{2(1 - \cos r)} = \frac{r - \sin r}{r \cos r - \sin r}, \quad (22b)$$

or

$$\left(\frac{\frac{r}{2}}{\sin \frac{r}{2}} \right)^2 = f_3(r),$$

where

$$f_3(r) = \frac{r - \sin r}{r \cos r - \sin r}. \quad (23)$$

Omitting the derivative,

$$f_3'(r) = \frac{r^2 \sin r - (1 - \cos r)(r + \sin r)}{(r \cos r - \sin r)^2} = 0.$$

We obtain

$$r = f_4(r) = \frac{1}{2} \tan \frac{r}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{9 + \tan^2 \frac{r}{2}}{1 + \tan^2 \frac{r}{2}}} \right],$$

or

$$r = f_5(r) = \frac{1}{2} \tan \frac{r}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{9 + \tan^2 \frac{r}{2}}{1 + \tan^2 \frac{r}{2}}} \right]. \quad (24)$$

Let us draw the curve (C_4) having the equation $R = f_4(r)$ (Fig. 3) and introduce the notation:

$$a = \tan^2 \frac{r}{2}.$$

Having twice derived successively function $f_4(r)$, we obtain:

$$f_4'(r) = \frac{1}{4} \left(1 + a + \frac{9 + 2a + a^2}{\sqrt{(1+a)(9+a)}} \right),$$

$$f_4''(r) = \frac{1}{4} \sqrt{a} (1+a) \left[1 - \frac{27 - 19a - 15a^2 - a^3}{(1+a)(9+a)\sqrt{(1+a)(9+a)}} \right]. \quad (25)$$

Equation $f_4''(r) = 0$ leads to:

$$64a(a^3 + 16a^2 + 53a + 54) = 0.$$

As $a \geq 0$, the result of this is that the points of inflexion of curve (C_4) have abscissa $r = 2k\pi$ (k whole number).

For $0 < r < \pi$ from (25) results in $f_4''(r) > 0$. Let us draw the curve (C_5) having the equation $R = f_5(r)$ (Fig. 4). For this, the sign of

$$\sqrt{(1+a)(9+a)}$$

will be changed into (25). The points of inflexion of the curve have the abscises $r = 2k\pi$ (k whole number).

The equation: $f'_5(r) = 0$ is written:

$$P(a) = a^3 + a^2 - a - 9 = 0.$$

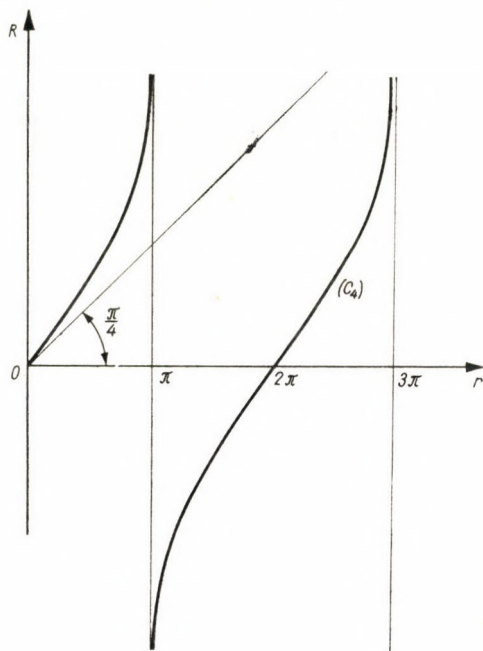


Fig. 3

The equation $P(a) = 0$ has a positive root:

$$a_1 (1 < a_1 < 2).$$

We introduce the notation: $v = \tan(r/2)$

From (24) we obtain:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow (2k+1)\pi \\ (k \text{ whole number})}} f_5(r) = \frac{1}{2} \lim_{|v| \rightarrow \infty} v \left(1 - \sqrt{\frac{9+v^2}{1+v^2}} \right) = 0.$$

Table I is drawn up so as to introduce the notation:

$$\frac{\pi}{4} < r_1 = \arctan \sqrt{a_1} < \frac{\pi}{2}.$$

Table I

r	0	$2r_1$	π	$2\pi - 2r_1$	2π
$f'_5(r)$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
$f_6(r)$	0	$f_5(2r_1)$	0	$-f_5(r_1)$	0

On the basis of this table the curve (C_5) (Fig 4) is drawn.

We can observe from Fig.4, that the curve (C_5) cannot intersect the first bisectrix having equation $R = r$, because for $\pi < r < 2\pi, f''_5(r) < 0$ is obtained

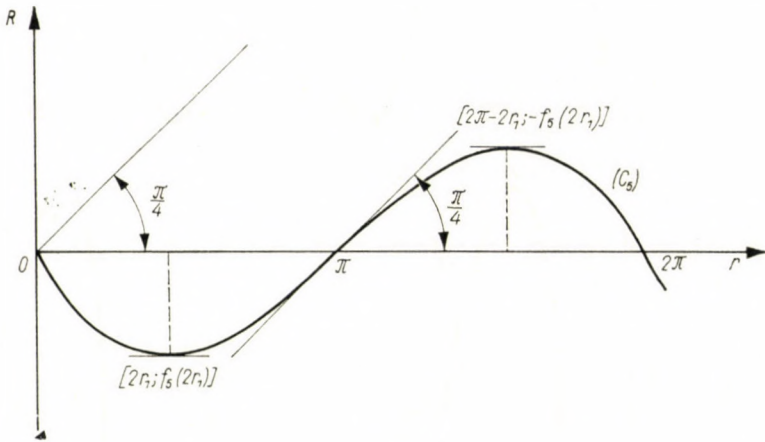


Fig. 4

so that those of curve (C_5) remain placed under the tangent drawn at curve (C_5) at the point of co-ordinates $(\pi, 0)$ which is parallel to the first bisectrix. As $f_5(2\pi + r) = f_5(r)$, the result is that curve (C_5) is made of identical areas with that comprised from among the points of abscissa $r = 0; r = 2\pi$.

Therefore, in (24) the relation $r = f_5(r)$ does not hold, so that the roots of $f'_3(r)$ are the abscissa of the intersection points of the first bisectrix with the curve (C_4) which is represented in fig 3. These roots will be noted with:

$$r_{2k}[2k \pi < r_{2k} < (2k + 1) \pi; k = 1; 2; 3; \dots].$$

Besides these roots, equation $f'_3(r) = 0$ has also the roots: $r = 2 k \pi (k = 1; 2; 3; \dots)$.

The curve (C_3) will be drawn having the equation $R = f_3(r)$ (Fig 5).

The function $f_3(r)$ from (23) takes an infinite great value for

$$r = \bar{r}_k \left[k\pi < \bar{r}_k < \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k = 1; 2; 3; \dots \right], \tag{25}$$

where \bar{r}_k represents the roots of the equation: $r = \tan r$.

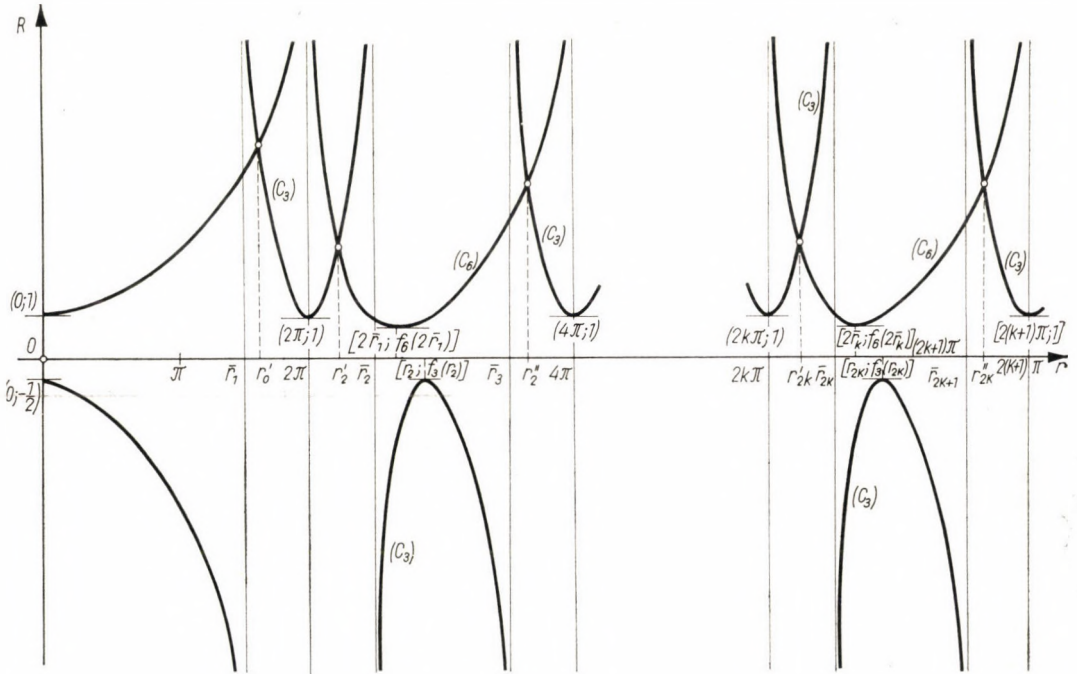


Fig. 5

Table II. is constructed. On the basis of Table II, the curve (C_3) is drawn (Fig 5).

In Table II: $\bar{r}_{2k} < r_{2k}$ ($k = 1; 2; 3; \dots$). Indeed, to assume this, contrary to all reason, that $\bar{r}_{2k} > r_{2k}$. In this case according to Table III, it could be deduced that $f_3(r)$ is annulled for a value of r comprised between \bar{r}_{2k} and $(2k + 1)\pi$, what is excluded by the formula (23) taking into consideration that $r > \sin r$.

Let us put:

$$f_6(r) = \left(\frac{r}{2 \sin \frac{r}{2}} \right)^2. \tag{26}$$

Table II

r	0	π	\bar{r}_1	2π	\bar{r}_2	r_2	3π	\bar{r}_3	4π	\bar{r}_4
$f_3'(r)$	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+
$f_3(r)$	$-\frac{1}{2}$	$\downarrow\downarrow$	$\mp\infty$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$f_3(r_2)$	$\downarrow\downarrow$	$\mp\infty$	$\downarrow\downarrow$	$\pm\infty$
r	\bar{r}_4	r_4	$5\pi \dots$	$2k\pi$	\bar{r}_{2k}	r_{2k}	$(2k+1)\pi$	\bar{r}_{2k+1}	$2(k+1)\pi$	
$f_3''(r)$	+	+	—	0	+	+	—	—	—	+
$f_3(r)$	$\pm\infty$	$\uparrow\uparrow f_3(r_4)$	$\downarrow\downarrow$	$-1 \dots +1$	$\uparrow\uparrow$	$\pm\infty$	$\downarrow\downarrow$	$\mp\infty$	$\downarrow\downarrow$	$+1$

Derivating from this we obtain:

$$f'_6(r) = \frac{r}{2 \sin^3 \frac{r}{2}} \left(\sin \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} \right).$$

Table III

r	$2k\pi$			r_{2k}			r_{2k}			$(2k+1)\pi$
$f'_3(r)$	0	+	+	0	-	-	-	-	-	-
$f_3(r)$	+1	↑	↑	$f_3(r_{2k})$	↓	↓	$\mp \infty$	↓	↓	-1

Table IV is constructed. From Fig 5, we infer:

$$\bar{r}_{2k} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2\bar{r}_k \quad (k = 1; 2; 3; \dots).$$

Thus, representing the curve having the equation: $R = \tan r$ (Fig. 6) we observe that:

$$r = k\pi + \frac{\pi}{4} > \tan r = 1,$$

hence

$$\bar{r}_k > k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

In Fig. 5 the curve (C_3) has been represented having equation $R = f_3(r)$ and curve (C_6) having $R = f_6(r)$. From the two curves, position the points of intersection we infer that equation (22₁) has the roots:

$$\begin{aligned} r &= r'_0 \quad (\pi < r'_0 < 2\pi) \text{ and } r = r'_{2k} \text{ and} \\ r &= r''_{2k} [2k\pi < r'_{2k} < (2k+1)\pi < r''_{2k} < 2(k+1)\pi], \\ k &= 1; 2; 3; \dots \end{aligned}$$

This results in equation $f'_1(s) = 0$ given by (22) having the roots:

$$\begin{aligned} s'_0 &= \frac{r'_0}{2p} \left(\frac{\pi}{2p} < s'_0 < \frac{\pi}{p} \right) \text{ and } s = s'_{2k} \text{ and} \\ s &= s''_{2k} \left[\frac{k\pi}{p} < s'_{2k} < \frac{2k+1}{2p} \pi < s''_{2k} < \frac{k+1}{p} \pi; k=1; 2; 3; \dots \right]. \end{aligned}$$

Table IV

r	0	2π	$2\bar{r}_1$	3π	4π	$2\bar{r}_2$	5π
$f_6'(r)$	0	∞	0	$+$	$+$	0	$+$
$f_6(r)$	1	$\frac{+\infty}{+}$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\frac{+\infty}{+}$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$
r	5π	6π	$2k\pi$	$2\bar{r}_k$	$(2k+1)\pi$	$2(k+1)\pi$	
$f_6'(r)$	$+$	$+$	∞	$-$	$+$	$+$	$-$
$f_6(r)$	$\uparrow\uparrow$	$\frac{+\infty}{+}$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\frac{+\infty}{+}$	$\downarrow\downarrow$

Table V

s	0	$\frac{\pi}{2p}$	s'_0	$\frac{\pi}{p}$	s'_2	$\frac{3\pi}{2p}$	s''_2
$f_1'(s)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f_1(s)$	$\frac{1}{2}$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$f_1(s''_2)$
s	s''_2	$\frac{2\pi}{p}$	$\frac{k\pi}{p}$	s'_{2k}	$\frac{2k+1}{2p}\pi$	s''_{2k}	$\frac{k+1}{p}\pi$
$f_1'(s)$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f_1(s)$	$f_1(s''_2)$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$	$f_1(s'_{2k})$	$\downarrow\downarrow$

Table V is constructed. On the grounds of Table V, curve (C_1) is so constructed as to have the equation $S = f_1(s)$ (Fig. 7), where $f_1(s)$ is given by (18) and (22). In the same figure curve (C) has been drawn having the equation $S = f_2(s) = 1$ where $f_2(s)$ is given by (19) and (21).

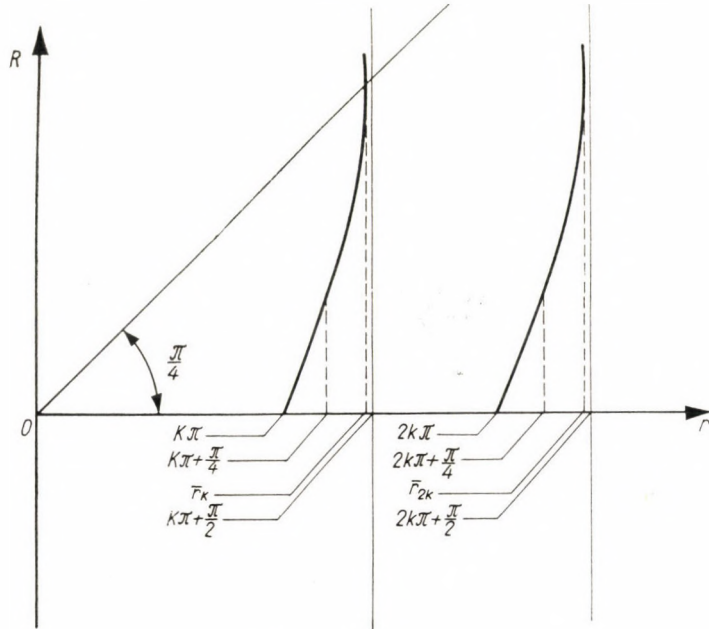


Fig. 6

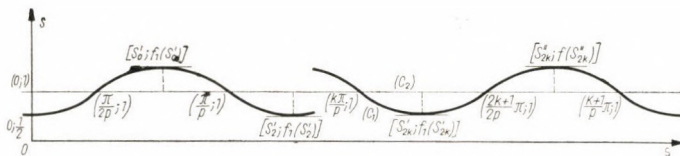


Fig. 7

To determinate the points of inflexion of curves (C_3) and (C_6) the sign of $f_3''(r)$ and $f_6''(r)$ must be studied. From (26) we obtain:

$$f_6''(r) = \frac{1}{4 \sin^4 u} [\sin^2 u - 4u \sin u \cos u + u^2 (1 + 2 \cos^2 u)],$$

where $u = r/2$.

For $f_6''(r) = 0$ it is necessary that:

$$\frac{u}{\sin u} = \frac{2 \cos u \pm \sqrt{2 \cos^2 u - 1}}{1 + 2 \cos^2 u} \tag{27}$$

But

$$\left| \frac{u}{\sin u} \right| > 1$$

for $u \neq 0$. We introduce the notation: $\beta = \cos u$. If $\beta > 0$ we obtain:

$$0 < \frac{2\beta + \sqrt{2\beta^2 - 1}}{1 + 2\beta^2} \leq 1,$$

this relation can be written in the form:

$$(\beta - 1)^2 (2\beta^2 + 1) > 0.$$

Having the same condition $\beta > 0$, we obtain

$$0 < \frac{2\beta - \sqrt{2\beta^2 - 1}}{1 + 2\beta^2} < 1,$$

since

$$2\beta^2 - 2\beta + 1 > 0.$$

When $\beta < 0$, we write $\beta = -\delta$ ($\delta > 0$). In this case

$$-1 < \frac{2\alpha + \sqrt{2\beta^2 - 1}}{1 + 2\beta^2} = \frac{-2\delta + \sqrt{2\delta^2 - 1}}{1 + 2\delta^2} < 0,$$

and

$$-1 \leq \frac{2\beta - \sqrt{2\beta^2 - 1}}{1 + 2\beta^2} = \frac{-2\delta - \sqrt{2\delta^2 - 1}}{1 + 2\delta^2} < 0,$$

as this relation can be written in the form:

$$(\delta - 1)^2 (2\delta^2 + 1) > 0.$$

As a result the relation (27) cannot take place for $u \neq 0$ so that $f_6''(r) \neq 0$ for $r \neq 0$, and thus in Fig. 5 the curve (C_6) having the equation $R = f_6(r)$ has no points of inflection.

From (23) effectuating a double derivation we obtain:

$$f_3''(r) = \frac{C}{D} \quad (27_1)$$

Here are

$$\begin{aligned} C &= r^3(1 + \sin^2 r) - 2r^2 \sin r(1 - \cos r) - 3r \sin^2 r + 2 \sin^3 r \\ D &= (r \cos r - \sin r)^3. \end{aligned}$$

It should be analysed if the function

$$f_7(r) = r^3(1 + \sin^2 r) - 2r^2 \sin r(1 - \cos r) - 3r \sin^2 r + 2 \sin^3 r \quad (28)$$

may change its sign.

For this the equation $f_7(r) = 0$ will be written in the form:

$$(2 - \cos^2 r) \left(\frac{r}{\sin r} \right)^3 - 2(1 - \cos r) \left(\frac{r}{\sin r} \right)^2 - 3 \frac{r}{\sin r} + 2 = 0.$$

Let us introduce the notations:

$$z = \frac{r}{\sin r}, \quad \varrho = \cos r.$$

The former equation becomes:

$$P_\varrho(z) = (2 - \varrho^2)z^3 - 2(1 - \varrho)z^2 - 3z + 2 = 0. \quad (29)$$

If we write

$$f_8(z) = \frac{(z-1)^2}{z}; \quad f_9(z) = (1-\varrho) \frac{2-(1+\varrho)z}{2+z}.$$

The former equation may also be written:

$$f_8(z) = f_9(z).$$

By derivation we obtain:

$$f_8'(z) = \frac{2}{z^2} \frac{z-1}{z}; \quad f_9'(z) = -2(1-\varrho) \frac{2+\varrho}{(2+z)^2} < 0.$$

Assuming $0 < \varrho < 1$ we draw the curve (C_8) having the equation $Z = f_8(z)$ and the curve (C_9) having the equation $Z = f_9(z)$ (Fig 8). We infer from Fig. 8, that equation (29) has the following roots:

$$\varphi_1(r) < 0 \text{ (which can be greater or less than } -1\text{);}$$

$$0 < \varphi_2(r) < +1; \quad \varphi_3(r) \geq +1.$$

We observe that

$$\frac{d}{d\varrho} f_9(z) = 2 \frac{\varrho z - 1}{2+z}. \quad (30)$$

In Fig. 9, 10, 11, the curves (C_8) and (C_9) were represented respectively for the following cases:

$$-1 < \varrho < 0; \quad \varrho = 0; \quad \varrho = -1;$$

We observe that also in these cases the distribution of the roots $\varphi_1; \varphi_2, \varphi_3$; is maintained like in the case $0 < \varrho < +1$ represented in Fig 8.

For $\varrho = 1$ the equation (29) becomes:

$$P_1(z) = (z - 1)^2 (z + 2) = 0$$

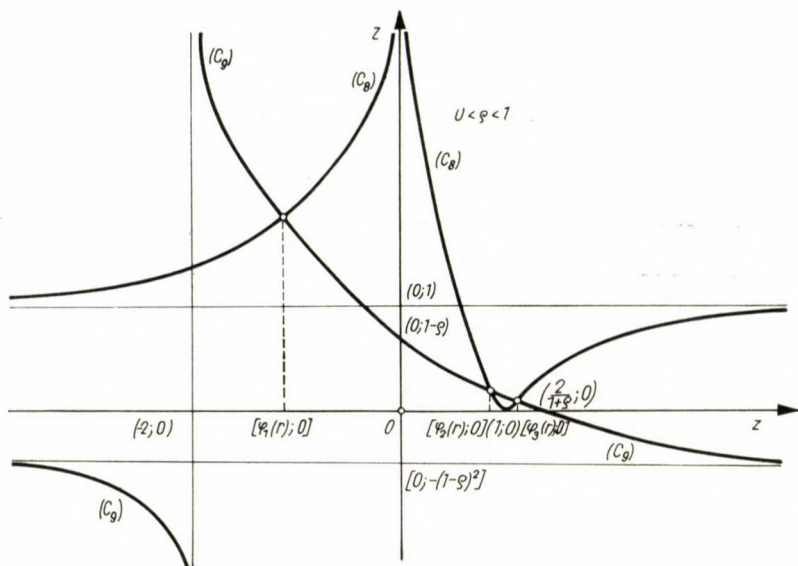


Fig. 8

For $0 < \varrho < +1$ according to Fig. 8, we obtain:

$$\varphi_3(r) < \frac{2}{1 + \varrho} < \frac{1}{\varrho},$$

such as the portion (P_3) from (C_9) which intersects (C_8) in the point of intersection having the abscissa $\varphi_3(r)$, is included in the interval $+1 < z < 1/\varrho$ for which from (30) is inferred

$$\frac{d}{d\varrho} f_9(z) < 0.$$

The portion (P_1), similarly defined as (P_3), is included in the interval $-2 < z < 0$ for which from (30) we infer

$$\frac{d}{d\varrho} f_9(z) < 0.$$

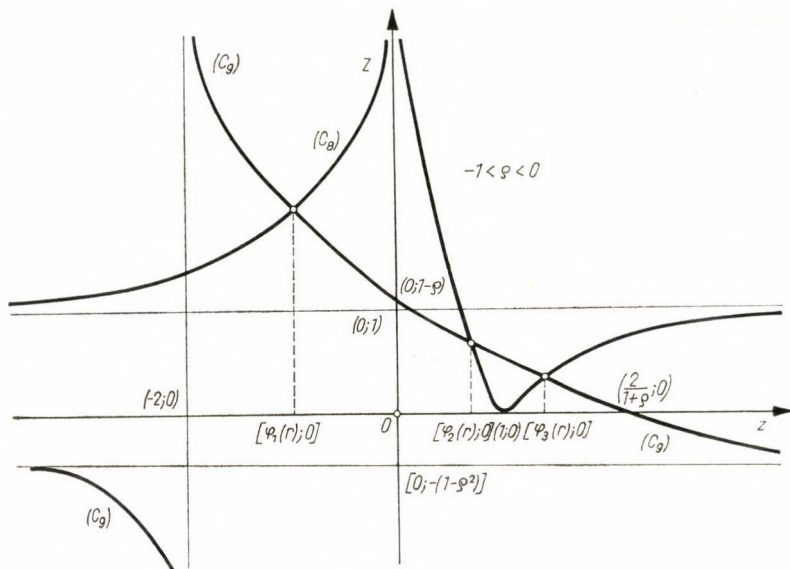


Fig. 9

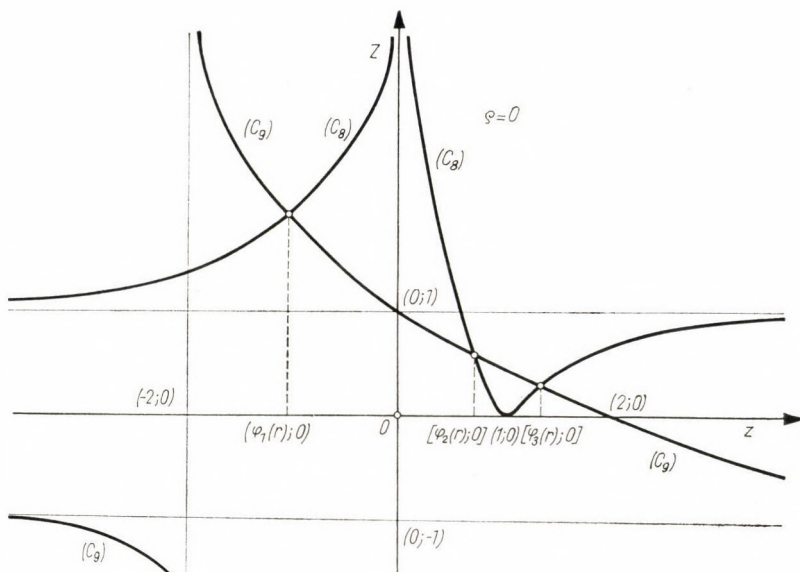


Fig. 10

For $\varrho = 0$ the equation (29) becomes

$$P_0(z) = 2z^3 - 2z^2 - 3z + 2 = 0,$$

having the roots:

$$\varphi_1(0) = z_1 \quad (-2 < z_1 < -1),$$

$$\varphi_2(0) = z_2 \quad (0 < z_2 < 1),$$

$$\varphi_3(0) = z_3 \quad (1 < z_3 < 2).$$

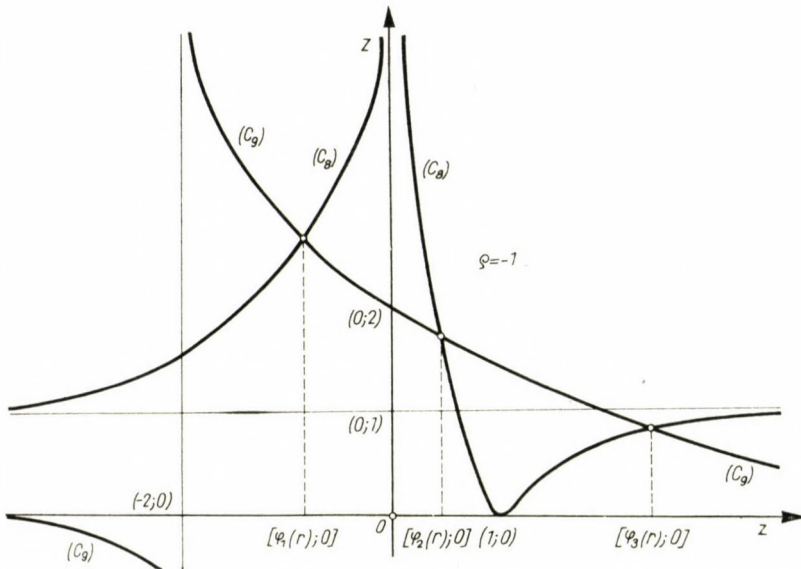


Fig. 11

For $\varphi = -1$ (29) becomes

$$P_{-1}(z) = z^3 - 4z^2 - 3z + 2 = 0,$$

having the roots:

$$\varphi_1(-1) = -1, \quad \varphi_2(-1) = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \quad \varphi_3(-1) = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

For $\varrho = -1/2$ (29) becomes

$$4P_{-\frac{1}{2}}(z) = 7z^3 - 12z^2 - 12z + 8 = 0,$$

having the roots:

$$\varphi_1\left(-\frac{1}{2}\right) = z_4 \quad (-2 < z_4 < -1),$$

$$\varphi_2\left(-\frac{1}{2}\right) = z_5 \quad (0 < z_5 < 1),$$

$$\varphi_3\left(-\frac{1}{2}\right) = z_6 \quad (1 < z_6 < 2).$$

From this the result is that if ϱ grows from 0 to 1 (namely r falls from $\pi/2$ to 0) the portions (P_1) and (P_3) of the curve (C_9) from Fig. 8, approaches Oz axis, so that $\varphi_1(r)$ falls from z_1 to -2 and $\varphi_3(r)$ falls from z_3 to 1.

From (29) the result is

$$f_8\left(\frac{1}{\varrho}\right) - f_9\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 2(1 - \varrho)^2 \frac{1 + \varrho}{1 + 2\varrho}.$$

If

$$-1 < \varrho < -\frac{1}{2},$$

that is

$$-2 < \frac{1}{\varrho} < -1,$$

in Fig. 9,

$$f_8\left(\frac{1}{\varrho}\right) < f_9\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

therefore,

$$\frac{1}{\varrho} < \varphi_1(r).$$

From (30) the result is that (P_1) corresponds to

$$\varrho z - 1 < 0; \quad \frac{d}{d\varrho} f_9(z) < 0.$$

If

$$-\frac{1}{2} < \varrho < 0,$$

(P_1) corresponds to

$$\frac{d}{d\varrho} f_9(z) > 0.$$

Having in (30) $\varrho < 0; z > 0$, (P_3) corresponds to

$$\frac{d}{d\varrho} f_3(z) < 0.$$

And so the result is that if ϱ grows from -1 to 0 (that is r falls from π to $\pi/2$) $\varphi_3(r)$ this falls from

$$\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

to z_3 . If ϱ grows from -1 to $-1/2$ (that means that r falls from π to $2\pi/3$) $\varphi_1(r)$ falls from -1 to z_4 .

If ϱ grows from $-1/2$ to 0 (that means r that falls from $2\pi/3$ to $\pi/2$) $\varphi_1(r)$ falls from z_4 to z_1 .

Table VI is constructed. We note

$$f_{10}(r) = \frac{r}{\sin r}.$$

Table VI

r	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\varphi_1(r)$	-2	↑ ↑	z_1	↑ ↑	z_4	↑ ↑	-1
$\varphi_3(r)$	+1			↑ ↑			$\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$

We obtain through derivation

$$f'_{10}(r) = \frac{\sin r - r \cos r}{\sin^2 r}.$$

Using for \bar{r}_k the adopted notation in (25₁) Table VII is constructed.

Considering that $\bar{r}_k = \tan \bar{r}_k$ according to (25₁) we can see that:

$$|f_{10}(\bar{r}_k)| = \left| \frac{\bar{r}_k}{\sin \bar{r}_k} \right| = \frac{\bar{r}_k}{\frac{\tan \bar{r}_k}{\sqrt{1 + \tan^2 \bar{r}_k}}} = \sqrt{1 + \bar{r}_k^2}, \quad (k = 1; 2; 3; \dots).$$

If in (29) we change r with $2\pi - r$ or $2\pi + r$ this does not become modified, so that in Table VI:

$$\begin{aligned} \varphi_1(2\pi - r) &= \varphi_1(2\pi + r) = \varphi_1(r); \\ \varphi_3(2\pi - r) &= \varphi_3(2\pi + r) = \varphi_3(r); \end{aligned} \quad (k = 1; 2; 3; \dots)$$

$$\text{For any } r: |\varphi_1(r)| \leq 2; 1 \leq |\varphi_3(r)| \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

Table VII

r	0	π	\bar{r}_1	2π	\bar{r}_2	3π	\bar{r}_3	4π
$f'_{10}(r)$	-	+	0	-	0	+	0	-
$f_{10}(r)$	+1	$\uparrow\uparrow$	$f_{10}(\bar{r}_1)$	$\downarrow\downarrow$	$f_{10}(\bar{r}_2)$	$\uparrow\uparrow$	$f_{10}(\bar{r}_3)$	$\downarrow\downarrow$
r	4π	\dots	\bar{r}_{2k}	$(2k+1)\pi$	\bar{r}_{2k+1}	$2(k+1)\pi$		
$f'_{10}(r)$	\dots	-	0	+	0	-		
$f_{10}(r)$	$\mp\infty$	$\downarrow\downarrow$	$f_{10}(\bar{r}_{2k})$	$\uparrow\uparrow$	$f_{10}(\bar{r}_{2k+1})$	$\downarrow\downarrow$		$\mp\infty$

For $r \geq 2\pi$: $|f_{10}(r)| \geq \sqrt{1+r_2^2}$, hence:

$$0 < \varphi_3(r) \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{2} < 5 < \sqrt{1+4\pi^2} < \sqrt{1+r_2^2} \leq |f_{10}(r)| = \left| \frac{r}{\sin r} \right|. \quad (31)$$

For $r \geq \bar{r}_1$: $|f_{10}(r)| \geq \sqrt{1+\bar{r}_1^2}$, hence:

$$|\varphi_1(r)| < 2 < \sqrt{1+\bar{r}_1^2} \leq |f_{10}(r)| = \left| \frac{r}{\sin r} \right|. \quad (32)$$

After having in (27₁): $f_3''(r) = 0$ it is necessary in (28) $f_7'(r) = 0$ and then in (29):

$$\frac{r}{\sin r} = \varphi_1(r) \quad \text{respectively} \quad \frac{r}{\sin r} = \varphi_3(r) \quad \text{or:}$$

$$\left| \frac{r}{\sin r} \right| = |\varphi_1(r)| \quad \text{respectively} \quad \left| \frac{r}{\sin r} \right| = |\varphi_3(r)|.$$

These relations are excluded by (32) respectively, by (31) for $r \geq r_1$ respectively $r \geq 2\pi$.

For $r_1 \leq r \leq 2\pi$ the relation $f_3''(r) = 0$ should lead to

$$\left| \frac{r}{\sin r} \right| = |\varphi_1(r)|,$$

because in this case $r/\sin r \leq 0 < \varphi_3(r)$, therefore, also the relation $r/\sin r = \varphi_3(r)$ is excluded for $r \geq r_1$.

This means that for $r \geq r_1$ from (23) is obtained: $f_3''(r) \neq 0$ and in consequence the branch of the curve (C_3) from Fig. 5, corresponding by the values $r > r_1$ of the abscissa do not present points of inflexion.

6. Conclusions

The relation (22), Table V and the curves traced in Fig. 7, permit the determination of the variation of the rotary velocity ω_f of the flexional plane of the shaft somewhere round the constant value of the critical rotary velocity ω_{cr} of the shaft (of the disk).

It can be observed that the rotary velocity ω_f of the flexional plane of the shaft oscillates somewhere round the constant value ω_{cr} of the critical revolution of the shaft.

On the basis of the results obtained in this work, we may determine quantitatively the transitory movements which take place on the passing of a rotor through the critical velocity, indifferent to which case it may appear in the mechanical engineering.

In the case of rigid shafts of a turbine the revolution of working conditions n rot/min must be smaller than the critical revolution n_{cr} rot/min with at least 500—800 rot/min, that is:

$$n_{cr} = n + 500 - 800 \text{ rot/min.}$$

In the case of an elastic shaft of a turbine the revolution of working conditions n rot/min must be greater than the critical revolution n_{cr} rot/min with at least 500—800 rot/min, that is:

$$n = n_{cr} + 500 - 800 \text{ rot/min.}$$

Knowing from the quantitative point of view the transitory movements which arose during the passing of rotors through the zone of critical revolution, we can determine the supplementary stresses which arise in the shaft of the turbine.

7. The taking again under a new form of the relations (22) and (22a)

In this work the following substitution were used:

$$t = t_0 s; p = \omega_{cr} t_0; u = ps.$$

Adopting for the constant t_0 the value $t_0 = 1$, we obtain:

$$t = s; p = \omega_{cr}; u = \omega_{cr} t.$$

In this case:

$$\varphi_1(s) = \varphi(t) \quad \text{and} \quad f_1(s) = f_1(t) = \frac{\omega_f}{\omega_{cr}}.$$

The relation (22) becomes

$$f_1(t) = \frac{\omega_{cr}^2 t^2 + \sin^2 \omega_{cr} t}{\omega_{cr}^2 t^2 + 2 \omega_{cr} t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t + \sin^2 \omega_{cr} t}, \quad (33)$$

or

$$f_1(t) = 1 - \frac{2 \omega_{cr} t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t}{\omega_{cr}^2 t^2 + 2 \omega_{cr} t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t + \sin^2 \omega_{cr} t}. \quad (33a)$$

By derivation we obtain

$$f_1'(t) = 2\omega_{cr} \frac{-\omega_{cr}^3 t^3 (\cos^2 \omega_{cr} t - \sin^2 \omega_{cr} t) + \omega_{cr}^2 t^2 \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t + \omega_{cr} t \sin^2 \omega_{cr} t - \sin^3 \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t}{(\omega_{cr}^2 t^2 + 2 \omega_{cr} t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t + \sin^2 \omega_{cr} t)^2}. \quad (34)$$

II. Numerical Examples

1. The calculation of the maximum values of the angle of rotation corresponding to the relative movement between the flexional plan of the shaft and the rotor when the revolution of the shaft is in the close vicinity of the critical revolution or is equivalent to this one

We adopt for the critical revolution of the turbine the value

$$n_{cr} = 2200 \text{ rot/min.}$$

The corresponding critical angular velocity will then have the value:

$$\omega_{cr} = \frac{\pi n_{cr}}{30} = \frac{\pi \cdot 2200}{30} = 230,3832 \text{ rad/sec.}$$

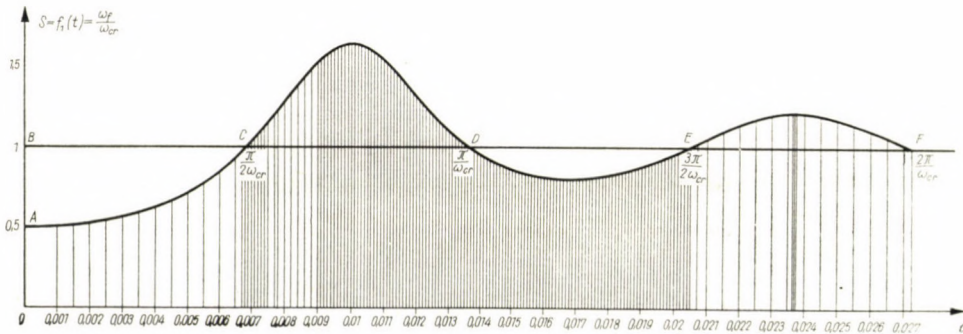


Fig. 12

In order to set up the curve given by relation (33) or (33a):

$$S = f_1(s) = f_1(t),$$

we can successively give for t growing values and can calculate the corresponding values for $f_1(t)$ with the help of the relation (33) or (33a). Thus, Table VIII is drawn in which were put down the values given to t and the corresponding values found for $f_1(t)$.

On the basis of the figures from Table VIII, the curve $S=f_1(t)$ is drawn, representing both qualitatively and quantitatively just those transitory movements which arise during the passing of rotor through zone of critical revolution $n_{cr} = 2200$ rot/min (Fig 12). From this figure we find that the maximum value which can be attained by $S = f_1(t)$ is:

$$S = f_1(t) = 1,6428,$$

namely

$$\frac{\omega_f}{\omega_{cr}} = 1,6428,$$

and hence

$$\omega_f = 1,6428 \omega_{cr} = 1,6428 \cdot 230,3832 = 378,4735 \text{ rad/sec}$$

This is the highest value achieved by the angular velocity ω_f of the flexional plane of the shaft of the turbine.

From relation (33a) it can be seen that in proportion to the growing of the time t the value of the function $f_1(t)$ approaches the unit, and at the limiting value when the time t takes values infinitely great:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = 1$$

Table VIII

Nr	t sec	$f_i(t)$	Nr	t sec	$f_i(t)$
1	0.0001	0.500065	21	0.0097	1.6296
2	0.001	0.5067	22	0.0098	1.63606
3	0.0015	0.5153	23	0.0099	1.6402
4	0.002	0.5277	24	0.00995	1.6414
5	0.0025	0.54426	25	0.00999	1.624388
6	0.003	0.565613	26	0.01	1.6420071
7	0.035	0.59245	27	0.01001	1.6420223
8	0.004	0.62569	28	0.01002	1.642114
9	0.0045	0.66651	29	0.01003	1.642121
10	0.005	0.7163	30	0.01004	1.642109
11	0.0055	0.77676	31	0.0101	1.6415
12	0.006	0.84965	32	0.0102	1.63865
13	0.0065	0.92288	33	0.0103	1.63402
14	0.0067	0.9755	34	0.0104	1.62633
15	0.0068	0.9961	35	0.0105	1.617091
16	0.0068182	1.0000	36	0.0106	1.605775
	0.0069	1.0173	37	0.0107	1.59254
			38	0.0108	1.57762
1	0.007	1.0000	39	0.0109	1.56112
2	0.0071	1.06122	40	0.011	1.543206
3	0.0072	1.08407	41	0.0112	1.50381
4	0.0073	1.1075	42	0.0114	1.46072
5	0.0074	1.1314	43	0.0115	1.438187
6	0.0075	1.15578	44	0.0116	1.415232
7	0.0078	1.23145	45	0.0117	1.39196
8	0.0077	1.20596	46	0.0118	1.3685
9	0.008	1.2536	47	0.0119	1.344978
10	0.0082	1.33552	48	0.012	1.32152
11	0.0084	1.38714	49	0.0121	1.298255
12	0.0086	1.43731	50	0.0122	1.275134
13	0.0088	1.484541	51	0.0123	1.252358
14	0.009	1.524	52	0.0124	1.229991
15	0.0091	1.5476	53	0.0125	1.208068
16	0.0092	1.5659	54	0.0126	1.18662
17	0.0093	1.58258	55	0.0127	1.165715
18	0.0094	1.59725	56	0.0128	1.1453912
19	0.0095	1.61013	57	0.0129	1.125654
20	0.0096	1.62094	58	0.013	1.106528

Nr	t sec	$f_1(t)$	Nr	t sec	$f_1(t)$
59	0.0131	1.088043	36	0.017	0.801684
60	0.0132	1.07021	37	0.0172	0.804246
61	0.0133	1.053014	38	0.0174	0.808058
62	0.0134	1.036482	39	0.0176	0.813103
63	0.0135	1.020602	40	0.0178	0.819355
64	0.0136	1.005371	41	0.018	0.826043
65	0.0136364	1.0000	42	0.0182	0.83536
1	0.0137	0.990802	43	0.0184	0.845058
2	0.0138	0.97686	44	0.0186	0.855856
3	0.0139	0.963551	45	0.0188	0.86772
4	0.014	0.950866	46	0.019	0.880569
5	0.0141	0.938797	47	0.0192	0.89447
6	0.0142	0.91858	48	0.0194	0.909272
7	0.0143	0.916443	49	0.0196	0.924955
8	0.0144	0.906133	50	0.0198	0.941446
9	0.0145	0.896378	51	0.02	0.95867
10	0.0146	0.997183	52	0.0201	0.967524
11	0.0147	0.878521	53	0.0202	0.97653
12	0.0148	0.870382	54	0.0203	0.985662
13	0.0149	0.862756	55	0.0204	0.994913
14	0.015	0.855624	56	0.0204546	0.999999
15	0.0151	0.84898	1	0.0205	1.00426
16	0.0152	0.84281	2	0.0207	1.023197
17	0.0153	0.837242	3	0.021	1.051886
18	0.0154	0.831848	4	0.0215	1.095984
19	0.0155	0.827026	5	0.022	1.14241
20	0.0156	0.822651	6	0.0225	1.17868
21	0.0157	0.818687	7	0.023	1.2045
22	0.0158	0.81553	8	0.0235	1.217384
23	0.0159	0.812	9	0.02375	1.218516
24	0.016	0.00922	10	0.237	1.21861
25	0.0161	0.80628	11	0.02375	1.218557
26	0.0162	0.80515	12	0.024	1.216212
27	0.0164	0.801965	13	0.0245	1.20154
28	0.0166	0.800507	14	0.025	1.175415
29	0.01672	0.800322	15	0.0255	1.140925
30	0.01673	0.800302	16	0.026	1.10733
31	0.01675	0.80032	17	0.0265	1.0665
32	0.01679	0.8004	18	0.027	1.026376
33	0.0168	0.800428	19	0.02725	1.001672
34	0.01685	0.800614	20	0.0272728	1.000000
35	0.0169	0.800888			

that is, at the limiting value when $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{\omega_f}{\omega_{cr}} = 1 \text{ therefore, } \omega_f = \omega_{cr}$$

namely, the transitory movements disappear and the flexional plane of the shaft revolves with the same angular velocity as the rotor, i.e. the critical angular velocity ω_{cr} .

From Fig 12, we find that the amplitude of the ringlets of the curve $S = f_1(t)$ somewhere round the straight line $S = 1$ is progressively subtracted in proportion to the growing time t . At the moment $t = 0$ it was assumed that $\varphi(t) = 0$ and that $\gamma(t) = 0$ (Fig 1) therefore, the angle of difference:

$$\psi(t) = \varphi(t) - \gamma(t) = 0.$$

From Fig 12, we find that the angles of maximum difference ψ take place at the points C, E, G a.s.o., i.e. adopting as above $t_0 = 1$, at the moments:

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_{cr}} = \frac{\pi}{2.230.3832} = 0,0068182 \text{ sec,}$$

$$t_3 = \frac{3\pi}{2\omega_{cr}} = \frac{3\pi}{2.230.3832} = 0,0204546 \text{ sec,}$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{2\omega_{cr}} = \frac{5\pi}{2.230.3832} = 0,034091 \text{ sec.}$$

At the moment t_1 the angle of rotation of the flexional plane has the value:

$$(\gamma)_{t_1} = \omega_{cr} \int_0^{t_1} f_1(t) dt,$$

and the angle of rotation φ of the rotor:

$$(\varphi)_{t_1} = \omega_{cr} t_1.$$

The angle of difference ψ attains the highest value at the moment t_1 :

$$(\psi)_{t_1} = (\varphi)_{t_1} - (\gamma)_{t_1} = \omega_{cr} \left[t_1 - \int_0^{t_1} f_1(t) dt \right], \quad (35)$$

and is graphically represented by the area of the ringlet ABC from Fig. 12 which must be multiplied with ω_{cr} . Replacing the expression of $f_1(t)$ from (33a) into (35) we obtain:

$$(\psi)_{t_1} = 2\omega_{cr}^2 \int_0^{t_1} \frac{t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t}{\omega_{cr}^2 t^2 + 2\omega_{cr} t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t + \sin^2 \omega_{cr} t} dt, \quad (36)$$

But

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_{cr}} = \frac{\pi}{2 \frac{\pi n_{cr}}{30}} = \frac{15}{n_{cr}} = \frac{15}{2200} = \frac{3}{440} = 0,0068182 \text{ sec.}$$

We had previously found: $\omega_{cr} = 230,3832$ rad/sec.

The integral (36) cannot be effected. In order to find the value of $(\psi)_{t_1}$ the area is planimetric by the ringlet ABC from Fig. 12 and we find $49,2166 \text{ cm}^2$.

The scales which had been used were:

the scale of abscissa $1 \text{ cm} \rightarrow 0,0005 \text{ sec}$,

the scale of ordinates $1 \text{ cm} \rightarrow 0.1$.

We obtain: $t_{ABC} = 49,2166 \cdot 0,00005 = 0,00246083 \text{ sec}$.

We calculate the value of the angle of difference $(\psi)_{t_1}$ at point C:

$$(\psi)_{t_1} = \omega_{cr} t_{ABC} = 230.3832 \cdot 0.00246083 = 0.56693 \text{ rad}$$

representing the maximum difference ψ_{\max} at point C.

At point E for

$$t = t_3 = 3t_1 = \frac{3\pi}{2\omega_{cr}} = \frac{3\pi}{2 \cdot \frac{\pi n_{cr}}{30}} = \frac{3 \cdot 30}{2n_{cr}} = \frac{3 \cdot 30}{2 \cdot 2200} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 220} = 0.0204546 \text{ sec}$$

the angle of difference $(\psi)_{t_3}$ will have the value:

$$(\psi)_{t_3} = 2\omega_{cr}^2 \int_0^{t_3} \frac{t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t}{\omega_{cr}^2 t^2 + 2\omega_{cr} t \sin \omega_{cr} t \cos \omega_{cr} t + \sin^2 \omega_{cr} t} dt. \quad (37)$$

The integral (37) cannot be effected. In order to find the value of $(\psi)_{t_3}$ the areas of the ringlets ABC and DE are planimetric and totalized from which the area of the ringlet CD is subtracted, the whole being then multiplied again with the critical angular velocity ω_{cr} .

The area of the ringlet CD is equivalent to the number of seconds:

$$t_{CD} = 48.9562 \cdot 0.00005 = 0.00244781 \text{ sec.}$$

The area of the ringlet DE is equivalent to the number of seconds

$$t_{DE} = 18.0927 \cdot 0.00005 = 0.000904635 \text{ sec.}$$

We have calculated the value of the angle of difference $(\psi)_{t_3}$ at point E:

$$\begin{aligned} (\psi)_{t_3} &= \omega_{cr}(t_{ABC} + t_{DE} - t_{CD}) = \\ &= 230.3832(0.00246083 + 0.000904635 - 0.00244781) = 0.21141 \text{ rad.} \end{aligned}$$

At points D and F the values of the angle of difference ψ are much smaller. So, at the moment

$$t = t_2 = 2t_1 = 0.0136364 \text{ sec,}$$

the angle of difference ψ has the value:

$$\begin{aligned} (\psi)_{t_2} &= \omega_{cr}(t_{ABC} - t_{CD}) = \\ &= 230.3832(0.00246083 - 0.00244781) = 0.002999589 \text{ rad.} \end{aligned}$$

The area of the ringlet EF is equivalent to the number of seconds

$$t_{EF}' = 18.2749 \cdot 0.00005 = 0.000913745 \text{ sec.}$$

At the moment

$$t = t_4 = 4t_1 = 0.0272728 \text{ sec,}$$

the angle of difference ψ has the value:

$$\begin{aligned} (\psi)_{t_4} &= \omega_{cr}(t_{ABC} + t_{DE} - t_{CD} - t_{EF}') = \\ &= 230.3832(0.00246083 + 0.000904635 - 0.00244781 - \\ &\quad - 0.000913745) = 0.000901 \text{ rad.} \end{aligned}$$

2. Conclusions

Owing to these transitory movements which are quantitatively measured by the above prescribed method, the shaft of the turbine is subjected to influences of torsion and to alternating bends.

On the basis of a resistance calculation, we will be able to precisely determine the united supplementary efforts which appear in the shaft owing to these influences. On the basis of the calculation of the united supplementary efforts we will be able to draw a conclusion in connection with the possibility of restricting the critical domain somewhere round the critical revolution which is now $1000 \div 1600$ rot/min thus being able to bring the revolution of working conditions near to that of critical revolution.

REFERENCES

1. Академия Наук СССР. Институт Машиноведения: Колебания в турбомашинах, Издательство Академии Наук СССР, Москва 1956.
2. Чудновский, В. Г.: Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Изд. Академии Наук УССР, Киев 1952.

BEITRAG ZUM STUDIUM DER TRANSISTORISCHEN BEWEGUNGEN
DER ROTOREN BEI DEM DURCHGANG DURCH DIE KRITISCHE
GESCHWINDIGKEIT

A. RIPIANU u. N. SIRBU

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine gerade Welle angenommen, deren beide Enden auf Lager gestützt sind. In der Mitte der Welle wird ein Rotor befestigt, so daß seine Symmetrieebene senkrecht zur geometrischen Achse der Welle liegt. Man unternimmt ein qualitatives und quantitatives Studium der relativen Bewegungen, die die Biegungsebene der Welle in Bezug auf die Rotationsbewegung derselben, also auch die des Rotors, ausführt, wenn die Geschwindigkeit der Welle gleich oder in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit ist.

Zu diesem Zwecke wird eine analytische Untersuchung der Kurve durchgeführt, die die Variation des Verhältnisses ω_f/ω_{cr} der Winkelgeschwindigkeit ω_f der Biegungsebene der Welle und der kritischen Winkelgeschwindigkeit ω_{cr} der Welle in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. Im letzten Teil des Ausfatzes wendet man die gefundenen allgemeinen Beziehungen auf ein numerisches Beispiel an und man zeichnet die Kurve des Verhältnisses $\omega_f/\omega_{cr} = f(t)$, die die transistorischen Bewegungen zu ermitteln erlaubt.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS TRANSITOIRES DES ROTEURS
A LEUR PASSAGE PAR LA VITESSE CRITIQUE DE ROTATION

A. RIPIANU et N. SIRBU

RÉSUMÉ

On considère un arbre appuyé aux extrémités sur deux paliers. Au milieu de l'arbre est fixé un rotor, dont le plan de symétrie est normal à l'axe géométrique de l'arbre.

On entreprend une étude qualitative et quantitative du mouvement relatif de rotation exécuté par le plan de flexion de l'arbre par rapport au mouvement de rotation de celui-ci, et donc du rotor, lorsque la vitesse de l'arbre est égale ou rapprochée de la vitesse critique de rotation. A cette fin, on fait une étude analytique de la courbe qui représente la variation de la valeur du rapport ω_f/ω_{cr} entre la vitesse angulaire ω_f du plan de flexion de l'arbre et la vitesse angulaire critique ω_{cr} , en fonction du temps t .

Dans la dernière partie de l'article, on applique les formules générales trouvées dans le cadre d'un exemple numérique et l'on trace la courbe de variation du rapport $\omega_f/\omega_{cr} = f(t)$, qui permet de déduire les mouvements transitoires.

К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ДВИЖЕНИЙ РОТОРОВ
ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ

А. РИПИАНУ и Н. СЫРБУ

Берется вал, опирающийся на два подшипника. В середине вала прикреплен ротор, плоскость симметрии которого нормальна геометрической оси вала. Проводится качественное и количественное изучение относительно вращательного движения плоскости изгиба вала по сравнению с его вращательным движением и, значит, с вращением ротора, когда оборот вала равен или приближается к критическому обороту. Для этого аналитически изучается кривая, представляющая изменение соотношения ω_f/ω_{cr} между угловой скоростью ω_f плоскости изгиба вала и критической угловой скоростью ω_{cr} , в зависимости от времени t . В заключительной части статьи полученные общие формулы применяются в числовом примере и приводится кривая изменения соотношений $\omega_f/\omega_{cr} = f(t)$, что позволяет вывести переходные движения.

ZUR BERECHNUNG DER FLACHEN, DOPPELT GEKRÜMMTEN SCHALEN MIT VERÄNDERLICHER KRÜMMUNG

B. KLIMOW

HOCHSCHULE FÜR BAUWESEN LEIPZIG

[Eingegangen am 2. Oktober 1962]

In der vorliegenden Arbeit wird die Wlassowsche Theorie der flachen, doppelt gekrümmten Schalen auf den Fall veränderlicher Krümmungen ausgedehnt. Die von Wlassow angegebenen Formeln ergeben sich als Spezialfall aus den hier entwickelten Gleichungen. Die Torsion der Fläche wird bei den vorliegenden Untersuchungen vernachlässigt. Mit dieser Arbeit wird ein sehr großer Teil der doppelt gekrümmten Schalen, die in der Praxis vorkommen oder vorkommen können, erfaßt. Unter anderen wird auch eine Buckelschale behandelt. Diese Schale kann als Dach- oder Zwischendecke angewendet werden. Die Aufgabe wird mit Hilfe der Galerkinschen Methode unter Verwendung unendlicher trigonometrischer Reihen gelöst. Es ist bekannt daß die trigonometrischen Reihen, vom Standpunkt des Ingenieurs aus gesehen, schlecht konvergieren und einen relativ großen Rechenaufwand erfordern. Ihr Vorteil ist jedoch die schnelle und einfache Entwicklung der Lösung. Am Schluß werden einige Zahlenbeispiele angegeben.

1. Einleitung und Grundlagen der Berechnung

Das Problem der Berechnung doppelt gekrümmter Schalen mit veränderlicher Krümmung hat für die Ingenieurpraxis große Bedeutung. Die Lösung dieses Problems ist vor allem darum interessant, da sich aus der ergebenden Lösung alle Spezialfälle konstanter Krümmung ableiten lassen.

Den Ausgangspunkt der folgenden Behandlungen bilden die Wlassowschen Gleichungen ([1] Seite 250):

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \nabla_k^2 w = 0, \quad (1)$$

$$\nabla_k^2 \varphi + K \nabla^2 \nabla^2 W - Z(x, y) = 0. \quad (2)$$

Die erste dieser Gleichungen (1) ist eine geometrische und stellt die Verträglichkeitsbedingungen der Verrückungen dar, die zweite (2) ist eine statische. Dabei ist $\varphi(x, y)$ die Spannungsfunktion, die die Kräfte N_x , N_y , und N_{xy} bestimmt,

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (4)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (5)$$

und $w(x, y)$ — die Verschiebungsfunktion — die alle Momente und Querkräfte bestimmt:

$$M_x = K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

$$M_y = K \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad (7)$$

$$M_{xy} = -K (1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}, \quad (8)$$

$$Q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W, \quad (9)$$

$$Q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W. \quad (10)$$

Hier ist K die Biegesteifigkeit

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (11)$$

und ∇^2 , ∇_k^2 -Differentialoperatoren zweiter Ordnung:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (12)$$

$$\nabla_k^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_1 \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Die Grundgleichungen sind auf Grund der Annahme aufgestellt, daß die Krümmungen der Mittelfläche nur bei der Berechnung der inneren Kräfte berücksichtigt werden, so daß der Ausdruck für das Quadrat des Linienelements der Mittelfläche

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$$

unabhängig vom Gauß'schen Krümmungsmaß dieser Fläche ist. Die Beziehungen (3) bis (13) gelten für kartesische Koordinaten

$$\alpha = x, \quad \beta = y \quad \text{und} \quad A = B = 1.$$

Wenn man in ein kleines Flächenstück ein orthogonales Koordinatensystem legt, so unterscheidet sich dieses nicht von einem entsprechenden Koordinatensystem der Grundrißebene dieser Fläche. Die positiven Richtungen der

inneren Schnittkräfte sind am Bild 1, die positiven Richtungen der äußeren Kräfte und Verschiebungen sind in Bild 2 dargestellt.

$Z(x, y)$ ist eine beliebige vertikale Belastung der Schale. Als flache Schalen werden von Prof. WLASSOW [1] solche Schalen bezeichnet, bei welchem

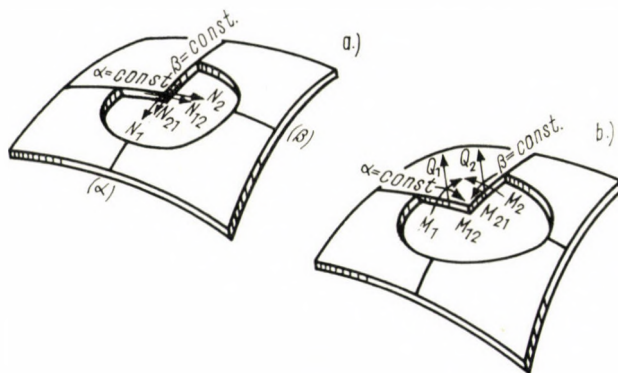


Bild 1. Positive Richtungen der Schnittkräfte

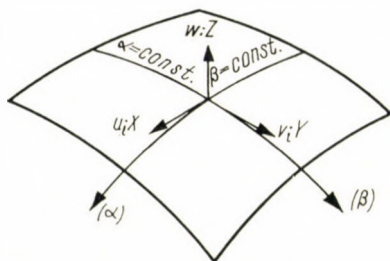


Bild 2. Positive Richtungen der äußeren Kräfte und Verschiebungen

das Verhältnis der Schalenpfeilhöhe zu der kleinen Seite (Bild 3)

$$\frac{f}{a} \leq \frac{1}{5}$$

beträgt.

Bei unseren weiteren Entwicklungen ist auch der Einfluß der Torsion der Fläche vernachlässigt.

2. Randbedingungen

Die Aufgabe lösen wir für den Fall, daß die Schalenränder in der eigenen Ebene absolut steif, senkrecht dazu als absolut nachgiebig abgestützt sind. So erhält man folgende Randbedingungen (Bild 3):

$$\text{für } x = 0, \quad x = a: \quad N_x = M_x = v = W = 0, \quad (14)$$

$$\text{für } y = 0, \quad y = b: \quad N_y = M_y = u = W = 0, \quad (15)$$

das heißt, daß an den Schalenrädern die Normalkräfte, die Biegemomente, die Normalverschiebungen w , welche bei schwach geneigten Schalen mit den vertikalen Durchbiegungen identisch sind, und die Tangentialverschiebungen in Richtung des Schalenrandes Nullwerte haben.

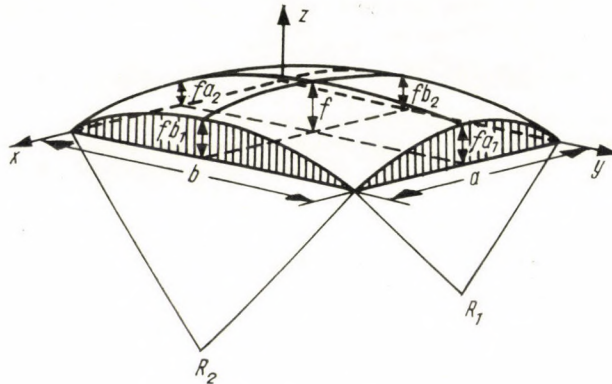


Bild 3. Doppelt gekrümmte Schale

3. Lösung der Aufgabe

Für die gegebenen Randbedingungen (14) und (15) kann man die Lösung in der Form einer doppelt trigonometrischen unendlichen Reihe angeben, wenn man

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{und} \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b} \quad \text{stellt:} \quad (15a)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad (16)$$

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y. \quad (17)$$

Diese Gleichungen erfüllen die Randbedingungen.

Die vertikale Belastung können wir auch mit einer ähnlich gebildeten Reihe darstellen:

$$Z(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y. \quad (18)$$

Die Verwendung von doppelt trigonometrischen unendlichen Reihen für das Gleichungssystem (1) und (2) gibt für konstante Krümmung und Schalendicke eine einfache und schnelle Lösung. Aber im Falle einer veränderlichen Krümmung kann Methode nicht angewendet werden. In diesem Falle kann aber

die Lösung mit der Variationsmethode nach GALERKIN leicht entwickelt werden [2]. Dann wird das Gleichungssystem (1) und (2) folgenderweise dargestellt:

$$\iint_F \left\{ \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy = 0, \quad (19)$$

$$\iint_F \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + K \nabla^2 \nabla^2 w - Z(x_1, y) \right\} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy = 0. \quad (20)$$

Die erste Gleichung (19) drückt den Gedanken aus, daß die Arbeit der Membrankräfte auf die elementaren Verrückungen der Schalenmittelfläche gleich Null ist. Die zweite Gleichung (20) besagt, daß die Arbeit der radial gerichteten äußeren Kräfte, die mit den vertikalen Kräften identisch ist, auf die normalen Verschiebungen auch Null ist.

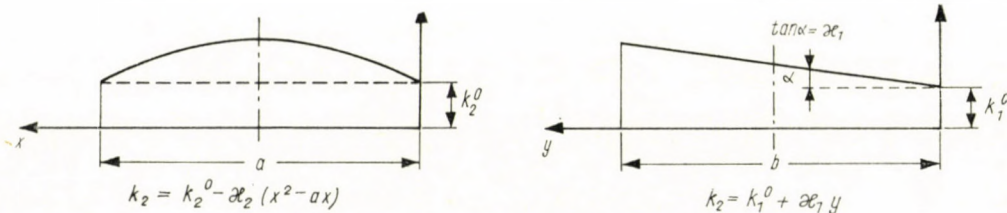


Bild 4. Das Gesetz der Krümmungsänderungen

4. Krümmungsveränderungen

Als allgemeinen Fall nehmen wir eine doppelt gekrümmte Schale mit den veränderlichen Krümmungen

$$k_1 = k_1^0 + \varkappa_1 y \quad (21)$$

$$k_2 = k_2^0 - \varkappa_2(x^2 - ax) \quad (22)$$

an (Bild 4), wobei k_1^0 und k_2^0 die Krümmungen in xz - und yz -Ebene und \varkappa_1 bzw. \varkappa_2 -willkürliche Beiwerte sind.

Für den Fall $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, erhält man eine doppelt gekrümmte Schale mit konstanten Krümmungen. Mögliche Formvariationen sind in Bild 5 angegeben. Sind auch die Krümmungen $k_1^0 = k_2^0 = 0$, so bekommt man die gelenkig gelagerte Rechteckplatte. Weitere Formvariationen sind im Bild 6 und 7 für $\varkappa_1, \varkappa_2 \neq 0$ dargestellt.

5. Numerische Auswertung der Variationsgleichungen

Zur Lösung der Variationsgleichungen (19) und (20) müssen wir folgende Doppel-Integrale berechnen:

$$J_1 = \frac{1}{Eh} \iint_{00}^{ab} \nabla^4 \varphi \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx \, dy ; \quad (23)$$

$$J_2 = \iint_{00}^{ab} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx \, dy ; \quad (24)$$

$$J_3 = \iint_{00}^{ab} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx \, dy ; \quad (25)$$

$$J_4 = K \iint_{00}^{ab} \nabla^4 W \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx \, dy ; \quad (26)$$

$$J_5 = \iint_{00}^{ab} Z(x, y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx \, dy \quad (27)$$

Die Auswertung gibt für das m, n -te Glied der Reihe folgende Resultate:

$$J_1 = \frac{ab}{4} \frac{A_{mn}}{Eh} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2, \quad (28)$$

$$J_2 = -\frac{ab}{4} \left[k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2 + \frac{b}{2} \varkappa_1 \mu_n^2 + \varkappa_2 \left(\frac{\lambda_m^2 a^2}{6} - \frac{1}{2} \right) \right] B_{mx}, \quad (29)$$

$$J_3 = -\frac{ab}{4} \left[k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2 + \frac{b}{2} \varkappa_1 \mu_n^2 + \varkappa_2 \left(\frac{\lambda_m^2 a^2}{6} - \frac{1}{2} \right) \right] A_{mr}, \quad (30)$$

$$J_4 = \frac{ab}{4} K (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 B_{mn}, \quad (31)$$

$$J_5 = \frac{ab}{4} C_{mn}. \quad (32)$$

Werden die verkürzten Bezeichnungen

$$L_1 = \lambda_m^2 + \mu_n^2, \quad (33)$$

$$L_2 = k_2 \lambda_m^2 + k_1 \mu_n^2 + \frac{b}{2} \varkappa_1 \mu_n^2 + \varkappa_2 \left(\frac{\lambda_m^2 a^2}{6} - \frac{1}{2} \right). \quad (34)$$

und die Integralwerte (28)—(32) eingeführt, so verändern sich die Variationsgleichungen (19) und (20) folgendermaßen:

$$\frac{L_1^2}{Eh} A_{mn} + L_2 B_{mn} = 0, \quad (35)$$

$$-L_2 A_{mn} + KL_1^2 B_{mn} - C_{mn} = 0. \quad (36)$$

Hieraus erhält man:

$$A_{mn} = - \frac{L_2 C_{mn}}{L_2^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} L_1^4}, \quad (37)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{K} \cdot \frac{L_1^2 C_{mn}}{L_1^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_2^2}. \quad (38)$$

Sind die Beiwerte A_{mn} und B_{mn} bekannt, so folgen für die Spannungs- und Verschiebungsfunktionen die Ausdrücke

$$\varphi(x_1 y) = - \sum_m \sum_n \frac{L_2 C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_2^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu)} L_1^4}, \quad (39)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{K} \sum_m \sum_n \frac{L_1^2 C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_1^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_2^2}. \quad (40)$$

Im Falle konstanter Krümmungen setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, und erhält die Werte:

$$\varphi(x_1 y) = - \sum_m \sum_n \frac{(k_2 \lambda_m^2 + k_1 \mu_n^2) C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{(k_2 \lambda_m^2 + k_1 \mu_n^2)^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4}, \quad (41)$$

$$w(x_1 y) = \frac{1}{K} \sum_m \sum_n \frac{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2 \lambda_m^2 + k_1 \mu_n^2)^2}. \quad (42)$$

Liegt eine ebene Platte vor, so ist $k_1^0 = k_2^0 = 0$. Damit erhält man die $w(x, y)$ — Funktion in folgender Form:

$$W(x_1 y) = \sum_m \sum_n \frac{C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{K(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}. \quad (43)$$

Das ist ein bekannter Ausdruck für die Durchbiegungsfunktion der ebenen Platte und dient daher als gute Kontrolle für unsere Abhandlung.

In allen obigen Ausdrücken sind die Doppelreihen mit $m, n = 1, 3, 5 \dots$ zu berechnen.

6. Bestimmung des Belastungsbeiwertes C_{mn}

Für den praktisch tätigen Ingenieur ist es wichtig, die Beiwerte C_{mn} für gleichmäßig über die gesamte Schalenfläche verteilte Belastung und für eine konzentrierte Last — P an beliebiger Stelle der Schale zu kennen. Auch die einseitige teilweise Belastung der Schale mit gleichmäßig verteilter Last ist wichtig. Die Beiwerte der zwei ersten Belastungsfälle sind bekannt, sie sind unter anderem auch in der Arbeit [1] zu finden.

a) *Gleichmäßig verteilte Belastung — q über die gesamte Grundrißfläche der Schale:*

$$C_{mn} = -\frac{16q}{mn\pi^2}, \quad (44)$$

$$m, n = 1, 3, 5 \dots$$

b) *Einzelkraft $Z(x, y) = -P$ an irgendeinem Punkt der Schale mit den Koordinaten x_0, y_0 , normal zur Schalenfläche, was mit unseren Hypothesen normal zur xy -Ebene identisch ist*

$$C_{mn} = -\frac{4P}{ab} \sin \lambda_m x_0 \sin \mu_n y_0, \quad (45)$$

$$m, n = 1, 3, 5 \dots$$

c) *Gleichmäßig verteilte Belastung — q nur über Hälfte der Schalenfläche.* Den Beiwert C_{mn} bestimmt man in diesem Falle als Beiwert der Fourier-Reihe

$$q(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

nach der Formel

$$C_{mn} = -\frac{4q}{ab} \iint_{00}^{a/2 b} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy = -\frac{8q}{mn\pi^2} \quad (46)$$

$$m, n = 1, 3, 5 \dots$$

7. Berechnung der inneren Schnittkräfte und Biegemomente für den allgemeinen Fall doppelt gekrümmter Schalen mit veränderlichen Krümmungen

Nach der Bestimmung der Beiwerte A_{mn} , B_{mn} und C_{mn} kann man leicht die inneren Kräfte der Schale nach (3) bis (10) auswerten. Dabei werden die Zwischenwerte (33) und (34) verwandt.

a) Membrankräfte:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \mu_n^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y = \\ &= \sum_m \sum_n \frac{L_2 C_{mn} \mu_n^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_2^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} L_1^4}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} N_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \lambda_m^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y = \\ &= \sum_m \sum_n \frac{L_2 C_{mn} \lambda_m^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_2^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} L_1^4}. \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} N_{xy} = N_{yx} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum_m \sum_n A_{mn} \lambda_m \mu_n \cos \lambda_m x \cos \mu_n y = \\ &= \sum_m \sum_n \frac{L_2 \lambda_m \mu_n C_{mn} \cos \lambda_m x \cos \mu_n y}{L_2^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} L_1^4}. \end{aligned} \quad (49)$$

b) Biegemomente:

$$\begin{aligned} M_x &= K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= - \sum_m \sum_n \frac{\lambda_m^2 + \nu \mu_n^2}{L_1^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_2^2} L_1^2 C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} M_y &= K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= - \sum_m \sum_n \frac{(\mu_n^2 + \nu \lambda_m^2) L_1^2 C_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_1^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_2^2}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} = M_{yx} &= -K(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\
 &= -(1-\nu) \sum_m \sum_n \frac{\lambda_m \mu_n L_1^2 C_{mn} \cos \lambda_m x \cos \mu_n y}{L_1^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_2^2}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

c) *Querkräfte:*

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -K \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
 &= + \sum_m \sum_n \frac{(\lambda_m^3 + \lambda_m \mu_n^2) L_1^2 C_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_1^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_2^2},
 \end{aligned} \tag{53}$$

und analog

$$Q_y = + \sum_m \sum_n \frac{(\mu_n^3 + \mu_n \lambda_m^2) L_1^2 C_{mn} \cos \mu_n y \sin \lambda_m x}{L_1^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_2^2}. \tag{54}$$

6. Einige Formvariationen der Flächen der doppelt gekrümmten Schalen als Spezialfälle der allgemeinen Lösung

a) *Flache elliptische Paraboloid-Schale* (Bild 5a)

In diesem Falle ist:

$$k_1 = k_1^0 = \text{const.}, \tag{55}$$

$$k_2 = k_2^0 = \text{const.} \tag{56}$$

Damit bekommt man die folgenden Werte aus (47), (48) und (49) für die Schnittkräfte:

$$N_x = - \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2) \mu_n^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{mn \left[(k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2)^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 \right]}, \tag{57}$$

$$N_y = - \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2) \lambda_m^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{mn \left[(k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2)^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 \right]}, \tag{58}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = - \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2) \lambda_m \mu_n \cos \lambda_m x \cos \mu_n y}{mn \left[(k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2)^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 \right]}. \tag{59}$$

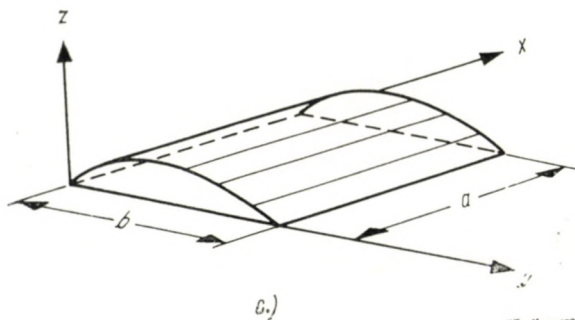
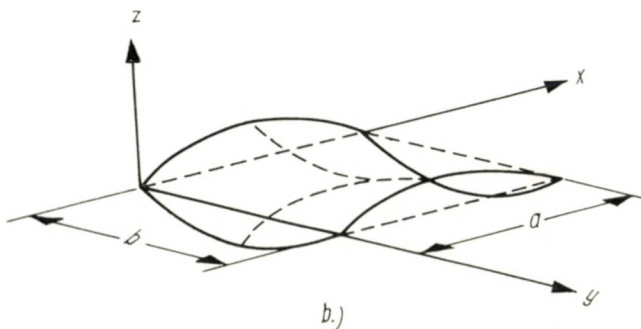
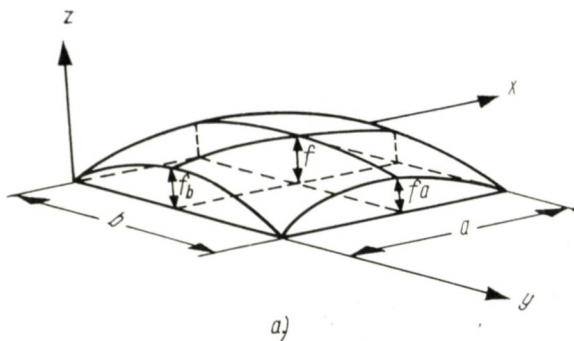


Bild 5. Formvariationen für $x_1 = x_2 = 0$ (konstante Krümmungen)

Biegemomente:

$$M_x = \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(\lambda_m^2 + \nu\mu_n^2)(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2)^2}, \quad (60)$$

$$M_y = \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(\mu_n^2 + \nu\lambda_m^2)(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2)^2}, \quad (61)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = (1-\nu) \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\frac{1}{mn} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \lambda_m \mu_n \cos \lambda_m x \cos \mu_n y}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2^0 \lambda_m^2 + k_1^0 \mu_n^2)^2}. \quad (62)$$

Analog vereinfachen sich die Ausdrücke (53) und (54) für Querkräfte.

Ist die Schale ein Teil der Kugelfläche mit dem Radius R , so wird in den obigen Formeln $k_1 = k_2 = 1/R$.

b) *Hyperbolische Paraboloid-Schale* (Bild 5b)

In diesem Fall haben die Krümmungen k_1 und k_2 verschiedene Vorzeichen. Wenn wir die Schale nach Bild 5b nehmen, d. h. die Krümmung k_1 nach unten gewölbt und die Krümmung k_2 nach oben gewölbt, so müssen wir in den Ausdrücken für die Schnittkräfte (57) bis (59) und für die Momente (60) bis (62) folgende Krümmungswerte einsetzen:

$$k_1 = -k_1^0,$$

$$k_2 = +k_2^0.$$

Im Sonderfall einer Pseudosphäre stellt man

$$-k_1^0 = k_2^0 = \text{const.}$$

c) *Zylinderschale* (Bild 5c)

Liegt eine Zylinderschale vor, so setzt man in den Gleichungen für die Kräfte und Momente die Krümmungen

$$k_1 = \frac{1}{R},$$

$$k_2 = 0$$

ein. Ersetzt man dazu auch x durch $a R$ und y durch βR , so erhält man auch die Lösung für die stark geneigte Zylinderschale. Die geometrischen Hypothesen ($A = B = 1$) fallen bei der Zylinderschale fort.

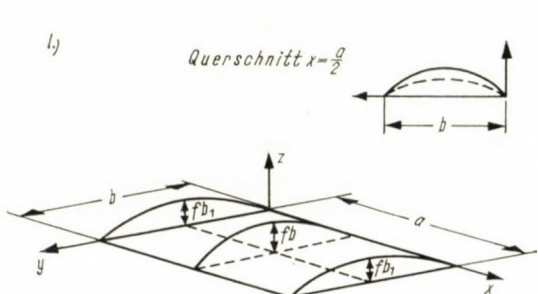
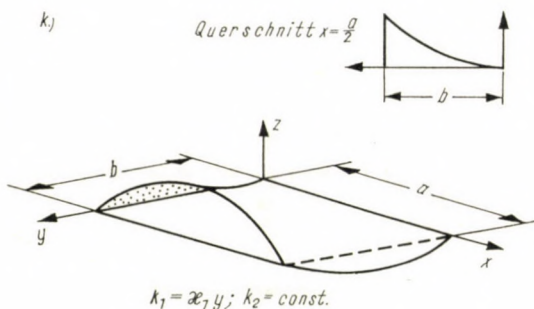
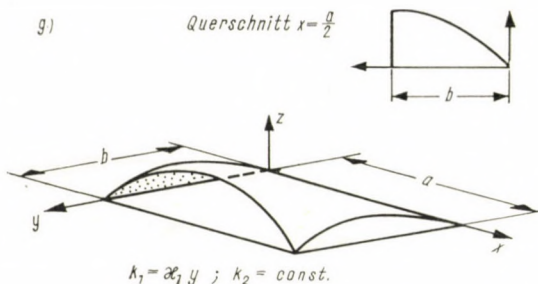
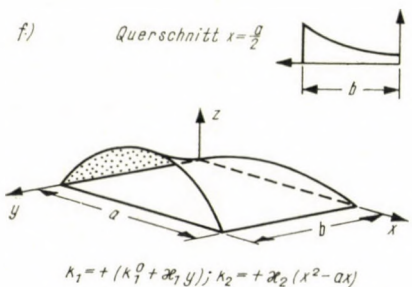
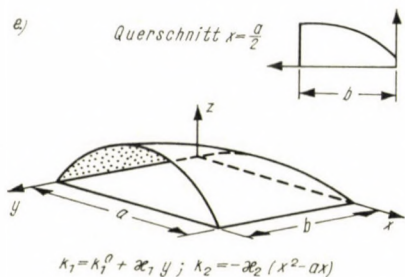
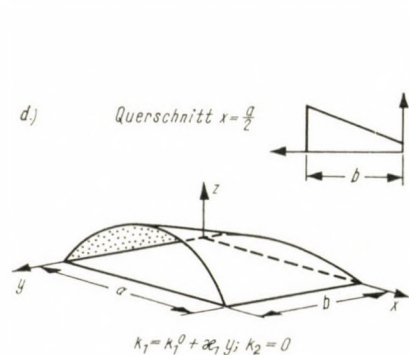


Bild 6. Einige Formvariationen doppelt gekrümmter Schalen

Bild 7. Weitere Formvariationen doppelt gekrümmter Schalen

d) Schalen mit veränderlichen Krümmungen (Bild 6 und Bild 7)

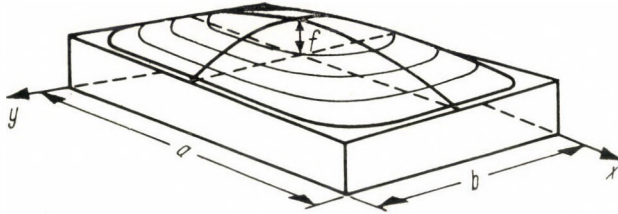
Für verschiedene Formvariationen der flachen doppelt gekrümmten Schalen (Konoidschale, Shedartige Schale, Zylinderschale mit veränderlicher Krümmung) erhält man die Schnittkräfte und Momente aus den Gleichungen (47) bis (52) mit dem zugehörigen Belastungsglied C_{mn} nach (44), (45) und (46), wenn man in diese Formel die entsprechenden Krümmungen einsetzt.

e) *Buckelschale* (Bild 8)

Im Falle einer *Buckelschale* können die Krümmungen in folgender Weise angegeben werden

$$k_1 = \varkappa_1(by - y^2), \quad (63)$$

$$k_2 = \varkappa_2(ax - x^2). \quad (64)$$

Bild 8. *Buckelschale*

Dann bekommt man an stelle der Gleichungen (33) und (34) die Ausdrücke für L_{1B} - und L_{2B} -Werte, die man ohne Ableitungen sofort schreiben kann:

$$L_{1B} = \lambda_m^2 + \mu_n^2, \quad (65)$$

$$L_{2B} = \varkappa_1 \left(\frac{\mu_n^2 b^2}{6} - \frac{1}{2} \right) + \varkappa_2 \left(\frac{\lambda_m^2 a^2}{6} - \frac{1}{2} \right). \quad (66)$$

Dieses Ergebnis beruht auf zwei Voraussetzungen: 1. Die Torsion der Fläche wird vernachlässigt, 2. Die Hauptkrümmungen sind durch die Gleichungen (63) und (64) gegeben.

Die Durchbiegungsfunktion (negativ nach unten) hat dann die Form (für Fall gleichmäßig verteilter Last)

$$w(x, y) = - \frac{16q}{K\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\frac{1}{mn} (\lambda_m^2 + \mu_n^2) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{R} \quad (67)$$

wo

$$R = (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + \frac{12(1 - \nu^2)}{h^2} \left[\varkappa_1 \left(\frac{\mu_n^2 b^2}{6} - \frac{1}{2} \right) + \varkappa_2 \left(\frac{\lambda_m^2 a^2}{6} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

ist. Setzt man den Wert (44) und die L_{1B} und L_{2B} -Werte nach (63) und (64) in die Gleichungen (47)–(54) ein, so ergeben sich die Ausdrücke für die Schnittkräfte, Biegemomente und Querkräfte der *Buckelschale*.

9. Zahlenbeispiel

Zur Verdeutlichung der Anwendung der oben entwickelten Formel und zur Prüfung der Konvergenz der Reihen sollen zwei Beispiele durchgerechnet werden.

1. *Beispiel Elliptische Paraboloid-Schale über quadratischem Grundriß mit konstanten Krümmungen (Bild 5a).*

Abmessungen:

$$a = b = 10,00 \text{ m}, k_1 = k_2 = \frac{1}{25} = 0,04, h = 0,08 \text{ m}, f_a + f_b = f = 2 \cdot 0,50 = 1,00 \text{ m},$$

q = gleichmäßig verteilte Belastung über die gesammte Schalenfläche,
 $\nu = 0,3$ = Poisson'sche Zahl.

a) *Membrantheorie.* Die Schnittkräfte sind mit folgendem Ausdruck gegeben (Wlassow):

$$N_x = N_y = -\frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{n}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{k(m^2 + n^2)}$$

(für $a = b$ und für den Punkt $x = y = a/2$).
 Nach Ausrechnung erhält man folgende Werte:

für $m, n = 1, 3$	$N_x = N_y = -9,00 q$,
$m, n = 1, 3, 5$	$N_x = N_y = -15,00 q$,
$m, n = 1, 3, 5, 7$	$N_x = N_y = -10,80 q$.

Der letzte Wert zeigt eine Abweichung von 15,8% gegenüber dem aus der Differentialgleichung ermittelten Wert

$$N_x = N_y = -\frac{q}{2k} = -12,5 q.$$

b) *Biegetheorie.* Nach Einsetzen der Werte

$$a = b, \\ k_1 = k_2 = k,$$

ergibt sich aus (57)–(58) für den Punkt $x = y = a/2$ der Ausdruck

$$N_x = N_y = -\frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{n}{m} \frac{k \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{k^2 (m^2 + n^2) + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\pi^4}{a^4} (m^2 + n^2)^3}$$

Der Einfluß des zweiten Gliedes im Nenner kann vernachlässigt werden, weil es gegenüber dem ersten Glied verschwindend klein ist. Auf diese Weise bekommt man praktisch gleiche Werte wie nach der Membrantheorie oben.

Die Biegemomente im Punkt $x = y = a/2$ sind durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$M_x = M_y = \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\frac{n}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{\pi^4}{a^4} (m^2 + n^2)^2 + 12 \frac{(1-\nu^2)}{h^2} k^2}$$

Setzt man $\nu = 0$, so erhält man für

$$\begin{aligned} m, n = 1, 3 & & M_x = M_y = -0,056 q, \\ m, n = 1, 3, 5 & & M_x = M_y = +0,011 q, \\ m, n = 1, 3, 5, 7 & & M_x = M_y = -0,0195 q, \\ m, n = 1, 3, 5, 7, 9 & & M_x = M_y = -0,0010 q \approx 0,00. \end{aligned}$$

Diese Schale mit $f/a = 1/10$ trägt also praktisch als Membran.

2. Beispiel. Buckelschale (Bild 8)

Abmessungen:

$$\begin{aligned} a = b = 10,00 \text{ m}, f = 0,50 \text{ m}, k_1 = k_2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0,0016 = \alpha, h = 0,08 \text{ m}, \\ q = \text{gleichmäßig verteilte Belastung in Mp/m}^2 \\ \nu = 0,3 \end{aligned}$$

Durchbiegung im Mittelpunkt der Schale nach Gl. (67)

$$w_B = -\frac{16q}{\pi^2 K} \sum_m \sum_n \frac{L_{1B}^2 \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{L_{1B}^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} L_{2B}^2} = -\frac{1,50q}{K}$$

für $m, n = 1, 3$, als erste Näherung.

Zum Vergleich sei die Durchbiegung der ebenen Platte mit gleichen Abmessungen angegeben

$$w_P = -0,0443 q \frac{a^4}{E h^3} = -\frac{40,6 q}{K}.$$

Die Durchbiegung der Buckelschale beträgt also nur 1/27 von derjenigen der Platte.

Biegemomente:

$$M_x = M_y = \frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{(\lambda_m^2 + \nu \mu_n^2) L_{1B}^2 \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_{1B}^4 + 12 \frac{(1-\nu^2)}{h^2} L_{2B}^2}.$$

Im Punkt $x = y = a/2$ ergibt sich für $m, n = 1, 3$

$$\max M_x = \max M_y = +0,0425 q.$$

Normalkräfte:

$$N_x = N_y = -\frac{16q}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{\mu_n^2 L_{2B} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y}{L_{2B}^2 + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} L_{1B}^4}.$$

Im Punkt $x = y = a/2$ wird für $m, n = 1, 3$,

$$\max N_x = \max N_y = -29,65 q.$$

Bei einer $10,0 \times 10,0$ m weit gespannten Decke mit einer Belastung von $0,500 \text{ Mp/m}^2$ wird also $N_x = N_y = -14,825 \text{ Mp/m}$. Bei einer Schalendicke von $8,0 \text{ cm}$ ergibt sich die Betondruckspannung

$$\sigma_{bd} = \frac{14\,825}{8 \times 100} = 18,5 \text{ kp/cm}^2.$$

Wählt man die Schalendicke zu 3,0 cm, so werden die Betonspannungen etwa 50,0 kp/cm² erreichen, und die Schale erhält nur eine leichte konstruktive Bewehrung. An den Rändern der Schale treten Schubspannungen auf, die das Randgebiet auf Zug beanspruchen. Diese Kräfte erreichen beträchtliche Werte, trotzdem bleibt die Lösung wirtschaftlich.

Es muß noch gesagt werden, daß ein ähnlicher Schalentyp von Prof. PUCHER entwickelt wurde [3]. Der Unterschied zu der hier behandelten Schale besteht nur in der Lagerung der Schale. Bei PUCHER stützt sich die Schale über elastische Randglieder auf vier Eckstiele ab. In der vorliegenden Arbeit dagegen werden die Schalenräder durch vier Binderscheiben unterstützt, die in ihrer Ebene unendlich steif, normal dazu aber unendlich weich angenommen wurden.

SCHRIFTTUM

1. WLASSOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1958.
2. KANTOROWITSCH, L. W.—KRYLOW, W. I.: Näherungsmethode der höheren Analysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.
3. PUCHER, A.: Lehrbuch des Stahlbetonbaues. Springer-Verlag, Wien 1949.

ON THE CALCULATION OF SHALLOW SHELLS WITH DOUBLE, VARYING CURVATURE

B. KLIMOW

SUMMARY

In the present paper the author extends WLASSOW's theory of shallow shells with a double curvature to the case of a varying curvature. The formulae of VLASOV are special cases for equations developed in this paper. In these investigations the torsion of the surface is neglected. The paper covers a very large section referring to shells with double curvature, or possibly encountered in practice. Amongst others a buckle shell is treated. This shell can be used as roof or an intermediate ceiling. The problem is solved with the aid of Galerkin's method using infinite trigonometric series. It is well known that from the point of view of the engineer, the trigonometric series do not converge well and that they require a relatively large amount of computation work. Nevertheless, they have the advantage of simple and quick development of solutions. Finally, several numerical examples are dealt with.

CALCUL DE VOILES PLATS DOUBLEMENT COURBES A COURBURE VARIABLE

B. KLIMOW

RÉSUMÉ

La théorie de Vlassov, valable pour les voiles plats à double courbure, est étendue au cas des courbures variables, les formules données par Wlassow apparaissant comme des cas particuliers des équations développées par l'auteur. La torsion de la surface médiane est négligée. L'étude embrasse un groupe extrêmement étendu de voiles à double courbure intéressant ou pouvant intéresser la pratique. Elle porte, entre autres, sur les voiles nommés «Buckelschale» par Pucher, qui peuvent être utilisés comme toitures et comme planchers. Le problème est résolu par la méthode de Galerkin, à l'aide de séries trigonométriques infinies. On sait que les séries trigonométriques convergent mal, et exigent de l'ingénieur un calcul assez fastidieux. Elles présentent cependant l'avantage d'une déduction rapide et simple des formules. Quelques exemples numériques donnés par l'auteur terminent l'étude.

К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Б. КЛИМОВ

РЕЗЮМЕ

В работе теория пологих оболочек двойкой кривизны, созданная проф. Власовым, распространяется на случай оболочек переменной кривизны. Формулы, полученные Власовым для постоянной кривизны, рассматриваются как частный случай решения оболочек переменной кривизны. При этом автор пренебрегает кручением плоской поверхности. Работа охватывает большую часть оболочек двойкой кривизны, которые встречаются или могут встретиться в практике. Задача решается методом Бубнова—Галеркина при помощи двойных тригонометрических рядов. Известно, что эти ряды плохо сходятся и требуют громоздких вычислений. Однако, эти ряды обладают и несомненным достоинством, так как дают возможность быстро и просто получить решение. В конце работы даны числовые примеры.

BEITRAG ZUR THEORIE DER VIERSEITIG GESTÜTZTEN RECHTECKPLATTEN

A. SCHWERTNER

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
PLANUNGSBÜRO FÜR TIEFBAU DER HAUPTSTADT BUDAPEST

[Eingegangen am 5. März 1962]

Verfasser gibt eine Näherungsmethode für die Lösung des Problems der in zwei Richtungen tragfähigen Platte. Er ersetzt die Platte durch einen Trägerrost, der aus unendlich vielen sich senkrecht kreuzenden Trägern besteht. Zum lückenlosen Zusammenpassen der Trägerelemente werden außer vertikalen Kräften auch Drehmomente herangezogen. Die Wirkung letzterer wird durch die Einführung eines annähernden fiktiven Kräftesystems ersetzt. Die Anwendung des mitgeteilten Näherungsverfahrens wird an einem Zahlenbeispiel erläutert.

Die LAGRANGE-schen Differentialgleichungen der Plattentheorie

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{k}{N}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = p \quad (2)$$

erwiesen sich in der Ingenieurpraxis im allgemeinen als schwerfällig für die Berechnung der vierseitig gestützten Rechteckplatten. Es ist daher wünschenswert, ein einfacheres Rechnungsverfahren zu entwickeln. Die folgenden Erörterungen, in welchen ein abgeändertes Rechnungsverfahren vorgeschlagen wird, sollen als ein solcher Versuch aufgefaßt werden.

Im Laufe des vorzuschlagenden Berechnungsverfahrens wird die Platte zuerst als ein torsionsfreier Balkenrost betrachtet und es werden ihre Biegemomente ermittelt. Den Balkenrost bilden unendlich viele, dx und dy breite, sich rechtwinklig kreuzende Balken. Es wird vorausgesetzt, daß das Problem des aus übereinander liegenden Balken aufgebauten Balkenrostes einwandfrei oder mit einer für die Ingenieurpraxis genügenden Genauigkeit gelöst werden kann (Bild 1).

Die Balkenachsen des soeben erwähnten Rostes bilden im belasteten Zustand die Fläche:

$$w_p = F_p(x, y).$$

Die Biegemomente m_{px} und m_{py} der Balken müssen die Gleichung

$$\frac{\partial^2 m_{px}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{py}}{\partial y^2} = p \quad (3)$$

befriedigen. Gelingt die einwandfreie Lösung des Balkenrostes, dann ist auch

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{N} \quad (4)$$

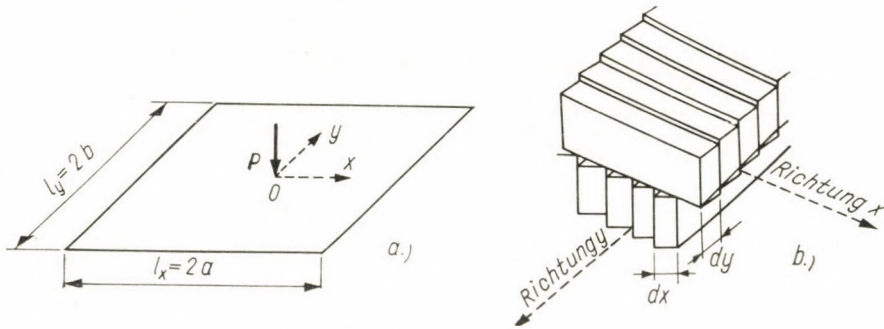


Bild 1

Bei dem torsionsfreien Balkenrost bilden aber die Unter- und Oberflächen der Balken keine zusammenhängenden Flächen. Die gleichgerichteten Balken liegen nach Bild 1b. stufenweise nebeneinander. Die einwandfreie Fläche benötigt in beiden Reihen der Balken Torsion.

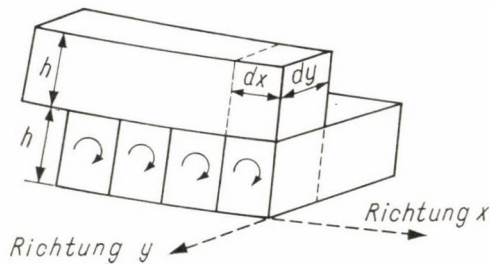


Bild 2

Den endgültigen Zustand eines nach x gerichteten und mehrerer nach y gerichteter Balken, veranschaulicht Bild 2. Zur Verwirklichung dieses Zustandes genügt es, die nach y gerichteten Balken mit den Torsionsmomenten t_{yx} zu belasten. Dies benötigt aber eine gewisse Änderung der Biegemomente.

Zur Untersuchung der Aufeinanderwirkung der nach x und y gerichteten Balken dient Bild 3. Die Bilder 3a und 3b veranschaulichen die im Bild 2 übereinander liegenden Elemente $dx \cdot dy \cdot h$ der nach x und y gerichteten Balken, im geteilten Zustand. Die Flächen der Elemente übertragen die eingezeichneten inneren Kräfte.

Nach Bild 3b bestehen zwischen der Last p_{cx} , der Querkraft r_x und dem Torsionsmoment t_{yx} die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial t_{yx}}{\partial y} = r_x, \quad \frac{\partial r_x}{\partial x} = p_{cx}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 t_{yx}}{\partial x \partial y} = p_{cx}. \quad (5)$$

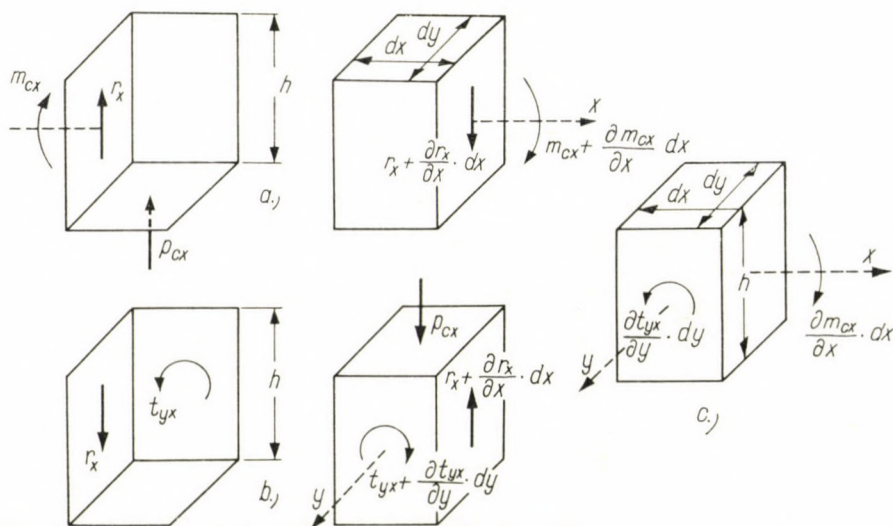


Bild 3

Die Last p_{cx} wirkt auf das Balkenelement des Bildes 3a in entgegengesetzter Richtung, denn diese Last ist eine innere Kraft im Balkenrost. Diese Last sowie die Querkraft r_x und das Biegemoment m_{cx} genügen den Gleichungen

$$\frac{\partial m_{cx}}{\partial x} = r_x, \quad \frac{\partial r_x}{\partial x} = p_{cx}$$

und hieraus abgeleitet ist:

$$\frac{\partial^2 m_{cx}}{\partial x^2} = -p_{cx}. \quad (6)$$

Werden die Balkenelemente der Bilder 3a und 3b — der Wirklichkeit entsprechend — in das Element des Bildes 3c vereinigt, so verschwinden in diesem die einander gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten, mit r_x und

p_{cx} benannten Kräfte, und man sieht, daß durch die Torsionsmomente t_{yx} die Biegemomente m_{px} verändert werden. Im Bild 3c sind nur die Änderungen der Biegemomente sowie der Torsionsmomente eingezeichnet. Zwischen diesen gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\partial m_{cx}}{\partial x} = \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} . \quad (7)$$

Hieraus folgt, nach Differenzierung

$$\frac{\partial^2 m_{cx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 t_{yx}}{\partial x \partial y} = 0 . \quad (8)$$

Wird derselbe Gedankengang mit den Torsionsmomenten t_{xy} der nach x gerichteten Balken sowie mit den inneren Kräften p_{cy} und den Änderungen m_{cy} der Biegemomente m_{py} der nach y gerichteten Balken durchgeführt, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 t_{xy}}{\partial x \partial y} = p_{cx} , \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 m_{cy}}{\partial y^2} = - p_{cy} , \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 m_{cy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 t_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 . \quad (11)$$

Da $t_{xy} = t_{yx} = t$ ist, folgt als Summe der Gleichungen (8) und (11):

$$\frac{\partial^2 m_{cx}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{cy}}{\partial y^2} = 0 . \quad (12)$$

Es ist selbstverständlich, daß die Biegemomente der Platte gleich jenen des Balkenrostes sind, wenn außer der tatsächlichen Last auf die Balken der Richtung x noch die Last p_{cx} und auf jene der Richtung y noch die Last p_{cy} , aber in entgegengesetzter Richtung wirkt. Die Biegemomente bestimmen aber auch eindeutig die Durchbiegung der Platte. Nach diesem Gedankengang ist sie die Differenz der Durchbiegungen w_p und w_c des Balkenrostes:

$$w = w_p - w_c . \quad (13)$$

Der Durchbiegungsteil w_c kann aber als Folge einer in Rechnung zu stellenden *fiktiven Last* p_c betrachtet werden, es ist daher

$$\frac{\partial^1 w_c}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_c}{\partial y^4} = \frac{p_{cx}}{N} + \frac{p_{cy}}{N} = \frac{p_c}{N} . \quad (14)$$

Weiter muß

$$\frac{\partial^2 m_{cx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{cy}}{\partial y^2} = p_c$$

sein. Dieses Resultat in die Gleichung (12) eingesetzt, liefert

$$2 \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = p_c.$$

Die Torsionsmomente benötigen somit dieselbe gedachte Last als die Biegemomente m_{cx} und m_{cy} . Sie müssen auch dieselbe Durchbiegungsfläche liefern. Es muß also

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p_c}{N} \quad (15)$$

sein. Die durch Torsion erzeugte Plattenfläche w_c ist aber gleich der endgültigen Fläche w . Teilt man daher die Last p der Platte in die Teile p_t und p_m — p_t , so kann die Gleichung (1), in zwei Teile gespaltet, wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{p - p_t}{N}, \\ 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{p_t}{N}. \end{aligned} \quad (16)$$

Es muß natürlich $p_t = p_c$ sein, da sowohl im Falle der Gleichung (15) als auch im Falle der Gleichung (16) die gleiche Last Drehung hervorruft. Dann ist aber auch

$$w = w_c = w_p - w_c$$

und

$$w_c = \frac{w_p}{2}. \quad (17)$$

Wird an Stelle von p_t der Wert p_c eingesetzt, so folgen aus den Gleichungen (15) bzw. (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_c}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_c}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_c}{\partial y^4} &= 0, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{p - 2p_c}{N}. \end{aligned} \quad (18)$$

Dies sind die Zusatzgleichungen, mit welchen die unter (1) genannte Lagrange-sche Gleichung erweitert, die Grundlage des neuen Berechnungsverfahrens bildet. Die Zusatzgleichung des unter (2) genannten ist die Gleichung (12).

Wenn $p_c = p/2$ ist, wird die Lösung besonders einfach, denn in diesem Falle ist

$$\frac{\partial^2 m_{px}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{py}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 m_{cx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{cy}}{\partial y^2} = \frac{p}{2},$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{p}{2}.$$

Die fiktive Last

Im Koordinatensystem des Bildes 1 genügt im allgemeinen als Zusatzgleichung:

$$w_c = p_{cb} \frac{A}{N} \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y. \quad (19)$$

Da es sich um Balken handelt, muß einerseits

$$\varphi_{cx} = \frac{\partial w_c}{\partial x} = -p_{c0} \frac{A}{N} \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y, \quad (20a)$$

$$m_{cx} = N \frac{\partial \varphi_{cx}}{\partial x} = -p_{c0} A \frac{\pi^2}{(2a)^2} \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y, \quad (21a)$$

$$r_{cx} = \frac{\partial m_{cx}}{\partial x} = p_{c0} A \frac{\pi^3}{(2a)^3} \sin \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y, \quad (22a)$$

$$p_{cx} = \frac{\partial m_{cx}}{\partial x} = p_{c0} A \frac{\pi^4}{(2a)^4} \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y, \quad (23a)$$

und anderseits

$$\varphi_{cy} = \frac{\partial w_c}{\partial y} = -p_{c0} \frac{A}{N} \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{\pi}{2b} y, \quad (20b)$$

$$m_{cy} = N \cdot \frac{\partial \varphi_{cy}}{\partial y} = -p_{c0} A \frac{\pi^2}{(2b)^2} \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y, \quad (21b)$$

$$r_{cy} = \frac{\partial m_{cy}}{\partial y} = +p_{c0} A \frac{\pi^3}{(2b)^3} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \sin \frac{\pi}{2b} y, \quad (22b)$$

$$p_{cy} = \frac{\partial r_{cy}}{\partial y} = p_{c0} A \frac{\pi^4}{(2b)^4} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y \quad (23b)$$

sein.

Die Summe der Lasten p_{cx} und p_{cy} unter (23a) und (23b) liefert die Last

$$p_c = p_{c0} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y, \quad (24)$$

wenn

$$A = \frac{1}{\frac{\pi^4}{(2a)^4} + \frac{\pi^4}{(2b)^4}} = \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{a^4 \cdot b^4}{a^4 + b^4} \quad (25)$$

ist. Das Torsionsmoment wird durch die Gleichung (12) bestimmt. Es muß also

$$2 \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2 m_{cx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{cy}}{\partial y^2} = p_{cx} + p_{cy} = p_c$$

sein. Durch Integration folgt:

$$t = \frac{1}{2} p_{c0} \cdot \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2b}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{\pi}{2b} y. \quad (26)$$

Man erkennt, daß alle Daten für die Berechnung der vierseitig gelagerten Platte zur Verfügung stehen, wenn der Wert p_{c0} der fiktiven Last ermittelt ist. Diesen Wert hat die fiktive Last an der Stelle $x = y = 0$, also im Koordinatenanfangspunkt. Zur Bestimmung dieses Wertes dient die Gleichung (17). Allgemein ist:

$$p_{c0} = \frac{A}{N} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y = \frac{w_p}{2}.$$

Gelinkt es, die Durchbiegung des Balkenrostes in der Form

$$w_p = w_{p0} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y$$

anzuschreiben, dann ist:

$$p_{c0} = \frac{N}{2A} \cdot w_{p0}. \quad (27)$$

Beispiel

Als Beispiel dient eine in der Mitte mit der Kraft P belastete Platte. Die Platte hat die Seitenabmessungen $l_x = 2a$ und $l_y = 2b$ (Bild 4a). Die Biegemomente des Balkenrostes die zuerst zu bestimmen sind, werden wie folgt ermittelt. Die Last P wird, schon im vorhinein in zwei Streckenlasten geteilt, in Rechnung gestellt, wie dies bei der Berücksichtigung der sogenannten mitwirkenden Plattenbreite in der Ingenieurpraxis auch sonst üblich ist.

Am Balkenrost wirken alle Balken am Tragen mit. Die den Forderungen genügenden Streckenlasten sind nach Bild 4b:

$$p_x = p_{x0} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x, \quad (28)$$

$$p_y = p_{y0} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} y.$$

Die einzelnen Balken des Rostes sind also in ihrer Mitte mit p_x , bzw. p_y belastet. Unter diesen Lasten kann man die Durchbiegungen der Balken mit den Gleichungen

$$w_x = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{48} \cdot p_y (2a)^3 \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x, \quad (29)$$

$$w_y = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{48} \cdot p_x (2b)^3 \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y$$

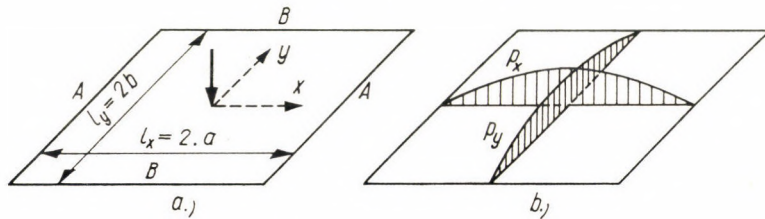


Abb. 4

in Rechnung stellen. Die tatsächlichen Durchbiegungen eines Balkens mit der Öffnung $l_x = 2a$ folgen zwar der Gleichung

$$w = \frac{P}{N} \cdot [0,25a^2(a-x) - 0,0833(a-x)^3], \quad (30)$$

der durch die Anwendung der Gl(29) begangene Fehler ist aber bedeutungslos, er hat nämlich in den Zehnteln der Öffnung die Werte 0%, +0,72%, +1,51%, +2,86%, -1,95% und 0%. Solche kleine Fehler beeinträchtigen die Resultate der Ingenieurpraxis nicht. Die Bedingung, daß an jeder Stelle $w_x = w_y$ sei, wird erfüllt, wenn

$$p_{y0} = \frac{b^3}{a^3} \cdot p_{x0} \text{ (t/m)} \quad (31)$$

ist. Die Summen der Streckenlasten

$$P_x = \int_{-a}^{+a} p_x dx = p_{x0} \frac{2a}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{2a} x \right]_{-a}^{+a} = \frac{4a}{\pi} p_{x0}$$

$$P_y = \int_{-b}^{+b} p_y dy = \frac{4b}{\pi} p_{y0} \quad (t)$$

müssen aber auch die Last P liefern. Es muß somit

$$P = P_x + P_y = \frac{4}{\pi} (P_{x0} a + p_{y0} b) \quad (32)$$

sein. Aus den Ergebnissen unter (31) und (32) folgt:

$$p_{x0} = \frac{\pi}{4} \frac{a^3}{a^4 + b^4} P, \quad \text{(t/m)} \quad (33)$$

$$p_{y0} = \frac{\pi}{4} \frac{b^3}{a^4 + b^4} P. \quad \text{(t/m)} \quad (34)$$

Somit wird die Durchbiegungsfläche des Balkenrostes eindeutig durch die Gleichung

$$w_p = \frac{1}{N} \cdot \frac{\pi}{24} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^4 + b^4} P \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y$$

bestimmt. In der Mitte der Platte, also im Koordinatenursprung $x = y = 0$ ist:

$$w_{p0} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\pi}{24} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^4 + b^4} P.$$

Nach der Formel (27) berechnet sich nun die Konstante p_{c0} der gedachten Last zu

$$p_{c0} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^4}{(2a)^4} + \frac{\pi^4}{(2b)^4} \right] \frac{\pi}{24} \cdot \frac{a^3 + b^3}{a^4 + b^4} \cdot P = \frac{\pi^5}{768} \cdot \frac{P}{ab}, \quad (\text{t/m}^2) \quad (35)$$

und es sind weiter, nach (23a) und (23b).

$$p_{cx} = \frac{\pi^5}{768} \cdot \frac{a^3}{a^4 + b^4} \cdot \frac{P}{b} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y, \quad (\text{t/m}^2) \quad (36)$$

$$p_{cy} = \frac{\pi^5}{768} \cdot \frac{b^3}{a^4 + b^4} \cdot \frac{P}{b} \cdot \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y. \quad (\text{t/m}^2) \quad (37)$$

Die Biegemomente m_x der Platte sind nach den vorangehenden Ausführungen gleich denen der Balken mit den Öffnungen $l_x = 2a$ des Balkenrostes, und es ist:

$$m_x = m_{px} - m_{cx}.$$

Hier ist

$$m_{px} = \frac{1}{2} p_y (a - x) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{b^3}{a^4 + b^4} (a - x) P \cos \frac{\pi}{2b} y \quad (\text{tm/m})$$

und nach der Formel (21a) gilt:

$$m_{cx} = \frac{\pi^3}{192} \cdot \frac{a \cdot b^3}{a^4 + b^4} P \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y. \quad (\text{tm/m})$$

Die größten Biegemomente ergeben sich an der Stelle $x = 0$ mit dem Werte

$$m_{x \max} = \frac{ab^3}{a^4 + b^4} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi^3}{192} \right) P \cos \frac{\pi}{2b} y = 0,2313 \frac{ab^3}{a^4 + b^4} P \cos \frac{\pi}{2b} y. \quad (38)$$

Die analoge Berechnung, durchgeführt mit Balken der Öffnungen $l_y = 2b$ liefert das Resultat

$$m_{y \max} = 0,2313 \frac{ba^3}{a^4 + b^4} P \cos \frac{\pi}{2a} x. \quad (38a)$$

Die Torsionsmomente werden durch die Formel unter (26) bestimmt:

$$t = \frac{\pi^3}{384} P \sin \frac{\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{\pi}{2b} y. \quad (\text{tm/m})$$

Der Größtwert liegt an der Stelle $x = a, y = b$, mit

$$t_{\max} = 0,806 P. \quad (\text{tm/m})$$

Dieser Wert des Torsionsmomentes ist also unabhängig von den Abmessungen der Platte.

Der Stützdruck auf der Seite A der Platte setzt sich aus drei Teilen zusammen. Die Teile sind Reaktionen von Balken mit den Öffnungen $l_x = 2a$. Der Stützdruck aus der tatsächliche Last ist:

$$A_p = \frac{p_y}{2} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{b^3}{a^4 + b^4} P \cos \frac{\pi}{2b} y.$$

Die fiktive Last p_{cx} liefert entgegengesetzt gerichtete Stützendrücke. Diesen Wert bestimmt die Formel (22a), an der Stelle $x = a$. Es ist

$$A'_c = -\frac{\pi}{48} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{a^4 + b^4} \cdot \frac{\pi^3}{(2a)^3} \cos \frac{\pi}{2b} y = -\frac{\pi^4}{384} \cdot \frac{b^3}{a^4 + b^4} P \cos \frac{\pi}{2b} y.$$

Die fiktive Last p_{cy} , welche in diesem Falle Torsion bewirkt, liefert mit A_p gleichgerichtete Stützendrücke. Aus (23b) bestimmt, ist ihr Wert:

$$\begin{aligned} A''_c &= \int_0^a p_{cy} dx = \frac{\pi}{48} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^4 + b^4} \cdot \frac{\pi^4}{(2b)^4} \cdot \frac{2a}{\pi} P \cos \frac{\pi}{2b} y = \\ &= \frac{\pi^4}{384} \cdot \frac{b^3}{a^4 + b^4} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^4 P \cos \frac{\pi}{2b} y. \end{aligned}$$

Als Summe der drei Teilwerte ist

$$\begin{aligned} A &= A_p + A'_c + A''_c = \\ &= \frac{b^3}{a^4 + b^4} P \left[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi^4}{384} + \frac{\pi^4}{384} \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \cos \frac{\pi}{2b} y = \\ &= \frac{b^3}{a^4 + b^4} P \left[0,1393 + 0,2538 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \cos \frac{\pi}{2a} x. \quad (t/m) \end{aligned} \quad (39a)$$

An der Seite B der Platte folgt der Stützendruck der Formel

$$B = \frac{a^3}{a^4 + b^4} P \left[0,1393 + 0,2538 \left(\frac{b}{a}\right)^4 \right] \cos \frac{\pi}{2a} x. \quad (t/m) \quad (39b)$$

Man muß aber die Stützen so gestalten, daß sich dort die Torsionsmomente ausbilden können. Ist dies nicht der Fall, dann heben sich die Plattenecken von den Stützen ab. Es kann sich dann das Kräftespiel der Platte nicht einwandfrei ausbilden, wie dies aus Versuchen wohlbekannt ist.

Tafel I

a	$1+a^4$	$\frac{1}{1+a^4}$	$\frac{a}{1+a^4}$	$\frac{a^3}{1+a^4}$
1,0	2,000	0,5000	0,5000	0,5000
1,1	2,464	0,4058	0,4464	0,5402
1,2	3,045	0,3284	0,3941	0,5675
1,3	3,856	0,2593	0,3371	0,5698
1,4	4,842	0,2065	0,2891	0,5667
1,5	6,063	0,1649	0,2474	0,5567
1,6	7,554	0,1324	0,2118	0,5422
1,7	9,352	0,1069	0,1818	0,5253
1,8	11,496	0,0870	0,1566	0,5073
1,9	14,032	0,0713	0,1354	0,4888
2,0	17,000	0,0588	0,1176	0,4705

Zur Auswertung der Resultate wird $b = a$ gesetzt. Die Gleichungen der Stützdrücke sind dann

$$A = \frac{a^3}{1 + a^4} \cdot \frac{P}{a} \left[0,1393 + 0,2532 \left(\frac{1}{a} \right)^4 \right] \cos \frac{\pi}{2b} y,$$

$$B = \frac{1}{1 + a^4} \cdot \frac{P}{a} \left[0,1393 + 0,2532 a^4 \right] \cos \frac{\pi}{2a} x,$$

und die der größten Biegemomente:

$$m_{x \max} = 0,2313 \frac{a^3}{1 + a^4} P,$$

$$m_{y \max} = 0,2313 \frac{a}{1 + a^4} P.$$

Unter der Voraussetzung, daß $a \geq b$, also $a \geq 1$ ist, wurden die Koeffizienten der obigen Formeln in der Tafel I. ausgewiesen. Es fällt auf, daß die Werte der letzten Säule kleiner werden, wenn b größer als $1,32a$ ist. Dieser Fehler der lediglich eine Folge der unrichtigen groben Annahme der fiktiven Last ist, kann in der Praxis als bedeutungslos betrachtet werden.

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF RECTANGULAR SLABS SUPPORTED ALONG ALL FOUR SIDES

A. SCHWERTNER

SUMMARY

Author gives an appropriate method related to the solution of the problem of two-way load bearing slabs. He starts out from a beam grid consisting of innumerable elements intersecting each other at right angles. To adjust the two-way load bearing elements author applies, in addition to vertical forces twisting moments too, and replaces the effect of the latter by introducing an approximate fictitious force system. A numerical example proves the expedience of the application of the discussed approximate method.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES PLAQUES RECTANGULAIRES APPUYÉES SUR LES QUATRE CÔTÉS

A. SCHWERTNER

RÉSUMÉ

L'auteur donne une méthode d'approximation pour la solution du problème des plaques ayant une capacité portante en deux directions. Il part d'un grillage composé d'éléments de nombre infini se croisant perpendiculairement. En plus des forces verticales, l'auteur applique aussi des moments de torsion pour la jonction en deux directions des éléments. L'effet de ces moments se trouve remplacé par l'introduction d'un système approché de forces fictives. La possibilité d'une application avantageuse de la méthode approchée décrite par l'auteur est illustrée par un exemple numérique.

К ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОПИРАЮЩЕЙСЯ С ЧЕТЫРЕХ СТОРОН

A. ШВЕРТНЕР

РЕЗЮМЕ

Автор дает приближенный метод решения проблемы пластины, которая способна воспринимать нагрузки в двух направлениях. Метод исходит из пространственной решетки, состоящей из бесконечного множества перпендикулярно секущих друг друга элементов. Кроме сил, перпендикулярных к связям двояконаправленных элементов, применены и крутящие моменты. Влияние этих последних подменяется путем введения приближенной фиктивной системы сил. Возможность целесообразного применения изложенного приближенного метода подтверждается числовым примером.

DETERMINATION OF OPTIMUM CONDITIONS OF CAPILLARY COMPENSATED HYDROSTATIC SLIDEWAYS

I. HARKÁNYI

DEVELOPMENT INSTITUTE OF MACHINE TOOL WORKS, HALÁSZTELEK

[Manuscript received July 19, 1962]

This paper presents the determination of the greatest stiffness and least power consumption of capillary compensated hydrostatic slideways, prestressed and non-prestressed, respectively. Design equations for determining the optimum values of supply pressure, pocket pressure, length of free-periphery of slideways rim, thickness of land of slideways rim, viscosity, capillary-discharge coefficient and power consumption are determined, other variables held constant. The paper determines the operative conditions which correspond strictly or approximately to the conditions assumed in the equations. Diagrams show the effect of discrepancy between optimum and actual conditions on the stiffness of slideways.

Symbols

C_c [cm ⁵ /kpsec]	capillary discharge coefficient;
F [cm ²]	total area of slideway surface;
F_l [cm ²]	area of land of slideway surface without corners;
F_{red} [cm ²]	reduced (effective) area of slideway surface;
F_p [cm ²]	area of pockets;
K, K_1	constants;
L [cm]	width of land;
N [HP]	total power consumption;
N_1 [HP]	power consumption of pumps;
N_2 [HP]	power used for moving with uniform speed;
P [kp]	total load on the slideways;
P_{ps} [kp]	prestress;
Q_c [cm ³ /sec]	flow through capillary;
Q_l [cm ³ /sec]	flow through land of slideway surface;
b [cm]	$b = 2b_1 + 2b_2$, length of free-periphery of slideways (where fluid flows out of pocket);
d_c [cm]	diameter of capillary;
h [cm]	clearance of slideways;
l_c [cm]	length of capillary;
p_s [kp/cm ²]	supply pressure;
p_p [kp/cm ²]	pocket pressure;
s [kp/cm]	stiffness of non-prestressed slideways;
s_{ps} [kp/cm]	stiffness of prestressed slideways;
v [cm/sec]	translatory speed of moving part of slideways;
η [kpsec/cm ²]	absolute viscosity of lubricant;
η_{pump}	efficiency of supply pump;
opt (index)	optimum, optimum value.

I. Introduction

The demands in slideways of some high precision machine tools aroused considerable interest in hydrostatic slideways.

The slideways, the moving part of which is permanently (or temporarily) floated by a fluid medium pressed between the adjacent surfaces, mostly into pockets formed in them, are called hydrostatic slideways. Only pure fluid-friction is generated between the adjacent surfaces which scarcely resists their relative movement.

The plan of a four-pocket hydrostatic slideways is shown in Fig. 1a; Fig 1b. shows the axonometric representation of the pressure distribution of the same slideway made perspective

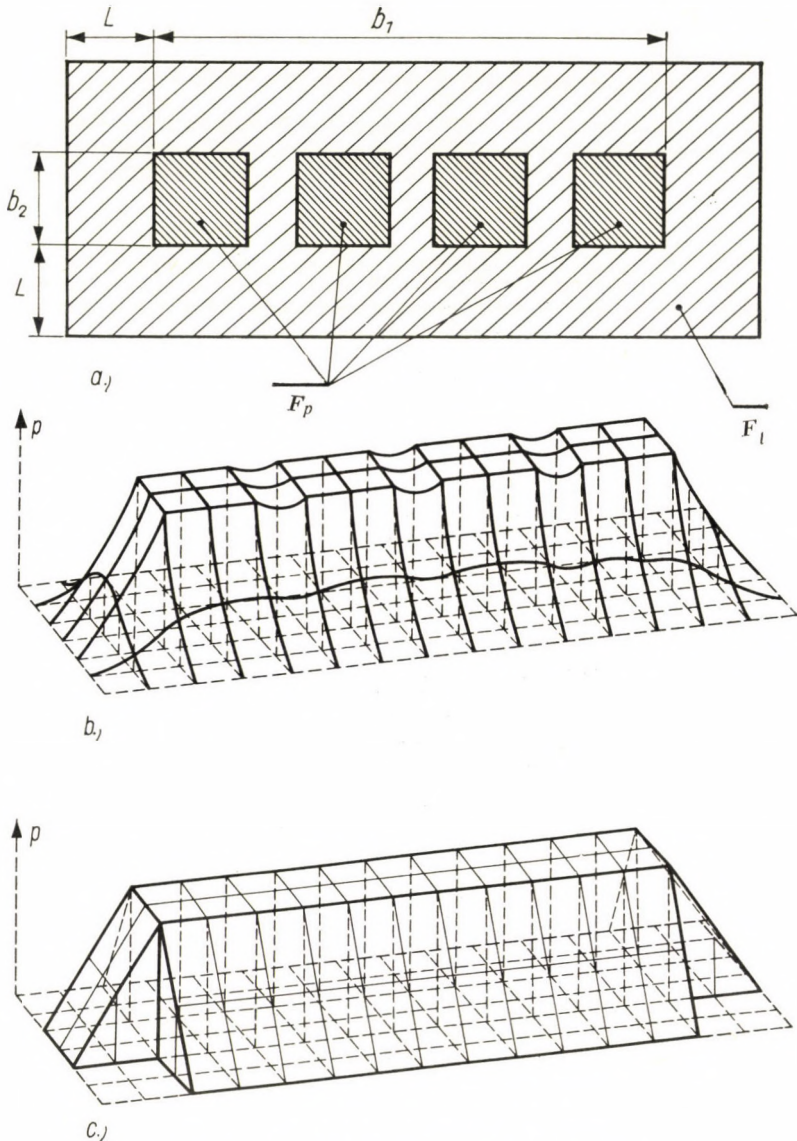


Fig. 1. Principle of hydrostatic slideways

- a) Plan of the slideway, F_p surface of pockets; F_l surface of land;
 b) pressure distribution of the slideway shown in Fig. a) represented by section lines;
 c) simplified pressure distribution which replaces the one seen in Fig. b) to facilitate computation

by a few section lines; Fig 1c shows a rough approximation of pressure distribution used in computations.

The advantage of this type of slideway against the usual ones operating fully or partially on boundary friction is the pure fluid-friction, and the resulting much smaller friction coefficient proportional to the translational speed. The friction coefficient, as it is directly proportional to the translational speed, eliminates stick slip.

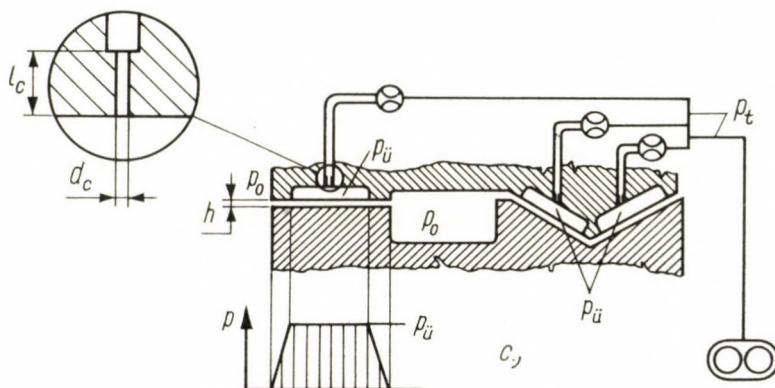


Fig. 2. Sketch of non-prestressed hydrostatic slideways

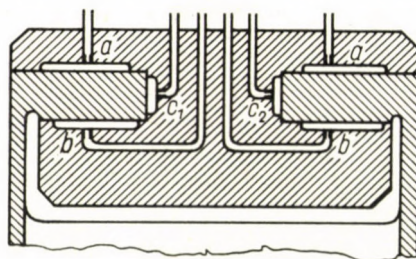


Fig. 3. Sketch of prestressed slideways a = load carrying pockets; b = prestressing pockets; c = side guide pockets

The complete freedom from stick slip renders the hydrostatic slideways exceptionally suitable for precise adjustments. The stiffness of the hydrostatic slideways is generally much smaller than that of the usual ones; so in cases when fluctuating forces act on them e. g. grinding or cutting, it is advantageous to make the slideways as stiff as possible.

The hydrostatic slideways may be made in two ways; usual (non-prestressed) and prestressed.

Fig. 2 shows the sketch of the simplest form of the usual hydrostatic slideways, the load acting on them is constant. The clearance is determined by the fluid-flow and the difference between pocket pressure and ambient pressure, therefore it may be constant or variable. Fig. 3 shows the sketch of prestressed hydrostatic slideways. It is assumed that the external load is negligible compared to the rate of prestress, that means the forces generated by the pressures acting on the opposing surfaces, thus the clearance is constant. This assumption is based on easier mathematical manageability and is fulfilled to a very good approximation in the case of structures applied in machine tools.

This paper determines the optimum conditions of both prestressed and non-prestressed capillary compensated hydrostatic slideways; when determining optimum pressure ratio, not the pressure ratio directly but the optimum supply pressure or pocket pressure is determined, depending on operative conditions. It also deals with the optimum geometrical dimensions, viscosity, capillary discharge coefficient and power consumption. Later the determination of optimum conditions will be extended to orifice compensated hydrostatic slideways.

II. Stiffness of Slideways in the Case of Capillary Compensation

Fluid consumption of slideways according to [1, p. 17 (12)] is:

$$Q_v = \frac{bh^3 p_p}{12 \eta L} \quad (1)$$

and the flow through capillary according to [2, p. 148 (5—13)]:

$$Q_c = \frac{\pi d_c^4}{128 \eta l_c} (p_s - p_p) = C_c (p_s - p_p) = C_c \left(p_s - \frac{P}{F_{red}} \right), \quad (2)$$

where C_c will subsequently be named capillary discharge coefficient as reciprocal of hydraulic resistance.

Load capacity of slideways may be determined by formula

$$P = \left(F_p + \frac{F_l}{2} \right) p_p = F_{red}, \quad (3)$$

if width of land L is small compared to pocket dimensions, the pressure drop along the width of land is then approximately linear. As it will subsequently be seen, endeavoring for great stiffness means great load capacity and the latter is greater when considering the same effective area (F_{red}) and pocket pressure (p_p) in the case of small width of land, consequently computing with a linear pressure drop is a good approximation. For the sake of compensating the non-linear pressure drop, the pressure at the corners are to be neglected as shown in Fig. 1 [1].

Substituting (1) into (3), and considering the continuity theorem $Q_l = Q_c$:

$$Q_c = \frac{bh^3 p_p}{12 \eta L} = C_c (p_s - p_p), \quad (4)$$

from this

$$P_p = \frac{C_c P_s}{bh^3/12 \eta L + C_c}$$

and resetting this into (3)

$$P = F_{red} P_p = \frac{C_c P_s F_{red}}{bh^3/12 \eta L + C_c} \quad (5)$$

As the stiffness of the slideways is the first derivative of the load on the slideways with respect to displacement, this means the clearance variation may be written after reduction:

$$S = \frac{dP}{dh} = \frac{36 \eta F_{red} L C_c P_s bh^2}{b^2 h^6 + 24 \eta L bh^3 C_c + 144 \eta^2 L^2 C_c^2} \quad (6)$$

Equation (6) may be applied to the usual, this means, non-prestressed hydrostatic slideways (Fig. 2).

In the case of prestressed slideways (Fig. 3), where the opposing parts of slideways load each other

$$s_{ps} = 2s,$$

taking into consideration that from a practical point of view

$$P_{ps} + \frac{P}{2} \approx P_{ps} - \frac{P}{2}, \quad \text{if } P_{ps} \gg P.$$

III. Optimum Pressure Ratio of Capillary Compensation

Substituting the doubled equation (6) into (4) after reduction we obtain

$$s_{ps} = \frac{6 F_{red}}{h} \left(P_p - \frac{P_p^2}{P_s} \right) \quad (7)$$

If h is constant in the case of prestressed slideways, then p_s supply pressure is constant, the first derivative of the stiffness of slideways s_{ps} with respect to pocket pressure p_p is:

$$s'_{ps} - \frac{ds_{ps}}{dp_p} = \frac{6 F_{red}}{h} \left(1 - \frac{2p_p}{P_s} \right)$$

at the extreme value $s'_{ps} = 0$ consequently

$$1 - \frac{2p_p}{P_s} = 0,$$

$$P_s = 2p_p,$$

from this $p_p = p_s/2$. The second derivative:

$$\frac{d^2 s_{ps}}{dp_p^2} = \frac{6 F_{red}}{h} \left(-\frac{2}{p_s} \right) < 0,$$

consequently the extreme value is maximum, that means optimum value.

The stiffness of prestressed slideways is optimum when the pocket pressure equals the halved supply pressure, assuming fixed supply pressure and fixed clearance. In the case of prestressed slideways the above conditions are exactly fulfilled, the clearance is constant (for manufacturing reasons), the supply pressure is constant (given supply unit) and the pocket pressure is variable. Substituting $p_p = p_s/2$ into (7), the equation which gives the greatest stiffness, we obtain the greatest stiffness of slideways

$$s_{ps \max} = \frac{1.5 F_{red} p_s}{h}.$$

The stiffness of non-prestressed slideways by the same reason is

$$s = \frac{3 F_{red}}{h} \left(p_p - \frac{p_p^2}{p_s} \right).$$

When the pocket pressure is constant and the supply pressure is variable, the extreme value of slideway stiffness equals:

$$s' = \frac{ds}{dp_s} = \frac{3 F_{red}}{h} \left(-\frac{2p_p}{p_s^2} \right) = \frac{3 F_{red}}{h} \cdot \frac{2p_p}{p_s^2} = 0;$$

the second derivative is:

$$s'' = \frac{d^2 s}{dp_s^2} = \frac{3 F_{red}}{h} \left(\frac{-4p_p p_p}{p_s^3} \right) < 0,$$

consequently s' is maximum, that means optimum value. Extreme value appears this time at $p_s = \infty$, so $s' = 0$ cannot be fulfilled; but this expression refers to the fact that in the case of non-prestressed slideways, where $p_p = p/F_{red}$ is determined by the weight (plus load) and construction of the whole structure, the greatest possible supply pressure ought to be reached to attain the greatest possible slideway stiffness.

Non-prestressed slideways with constant clearance generally cannot be operated because taking into consideration formula (1) in the practice a flow which varies proportionately to pocket pressure p_p does not occur that means the load according to formula is $p_p = p/F_{red}$ so the above optimum can only be taken from design viewpoint into consideration.

In the case of variable clearance, substituting h from Equ. (1) into the doubled formula (6), considering (4) we obtain

$$s_{ps} = K \frac{(P_s P_p^2 - P_p^3)^{2/3}}{P_s}, \quad (8)$$

where

$$K = \frac{2.625 F_{red} b^{1/3}}{\eta^{1/3} L^{1/3} C_c^{1/3}} = \text{const.} \quad (9)$$

The stiffness of prestressed slideways has an extreme value where its first derivative with respect to pocket pressure p_p is equal to zero, thus:

$$s'_{p_s} = \frac{ds_{p_s}}{dp_p} = K \left(\frac{(p_s p_p^2 - p_p^3)^{2/3}}{p_s} \right)' = \frac{K \cdot 2/3 (p_s p_p^2 - p_p^3)^{-1/3} (2p_s p_p - 3p_p^2) p_s}{p_s^2}$$

simplifying and setting equal to zero:

$$K \frac{2}{3} \frac{2p_s p_p - 3p_p^2}{(p_s p_p^2 - p_p^3)^{1/3} p_s} = 0$$

divided by

$$\frac{2}{3} K \frac{1}{(p_s p_p^2 - p_p^3)^{1/3}},$$

and

$$2p_s p_p - 3p_p^2 = 0$$

from this

$$2p_s = 3p_p,$$

$$p_p = \frac{2}{3} p_s.$$

Substituting this into the second derivative and neglecting the coefficients of the binomial expression:

$$(3p_p - 6p_p)(1.5p_p^3 - p_p^3) - \frac{1}{3} (3p_p^2 - 3p_p^2)(3p_p^2 - 3p_p^2) = -3p_p \cdot 0.5p_p^3 < 0,$$

thus the extreme value is a maximal one, so this is the greatest stiffness required.

Prestressed slideways cannot be operated with variable clearance because the clearance can only be a defined value for constructional reasons, so this expression is only a help from the design viewpoint.

The supply pressure was constant in the above investigations, while the pocket pressure was variable to determine the optimum stiffness. Variable pocket pressure develops only in prestressed slideways, because only the pocket pressure varies in this type of slideways (naturally simultaneously in both sides of the pockets, so that the load capacity generated by the pressure in one set of pockets equalizes the external load, besides the load capacity of the opposing prestressing-pockets).

In non-prestressed slideways pocket pressure p_p is a constant value determined by the load and other operative conditions, and supply pressure p_1 may be a variable value.

The slideway stiffness based on analogy with formula (8) is:

$$s = K_1 \frac{(p_s p_p^2 - p_p^3)^{2/3}}{p_s}, \quad (10)$$

where

$$K_1 = \frac{k}{2}.$$

From $s' = ds/dp_s$

$$\frac{2}{3} p_p^2 p_s - (p_s p_p^2 - p_p^3) = 0$$

is gained, from which $p_s = 3p_p$. The second derivative is:

$$s'' = -\frac{2}{9} \frac{p_p^2 [p_p^2 p_s + (p_s p_p^2 - p_p^3)^{1/3}]}{(p_s p_p^2 - p_p^3)^{1/3} p_s^2} < 0.$$

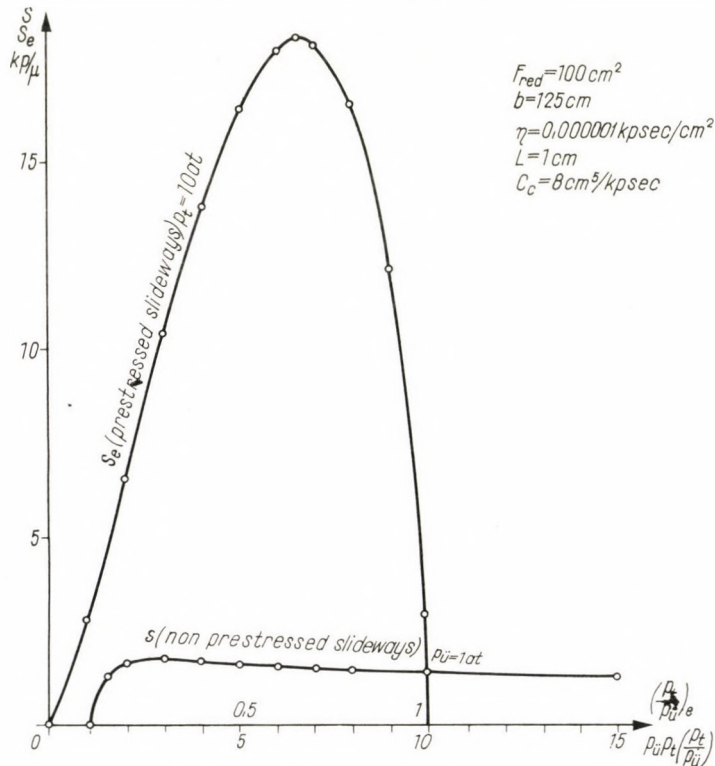


Fig. 4. Slideway stiffness versus pressure ratio p_s/p_p in the case of prestressed and non-prestressed slideways and capillary compensation

The above inequality is fulfilled whenever $(p_s p_p^2 - p_p^3) > 0$ that means $p_s > p_p$, which is naturally fulfilled in the case of $p_s = 3p_p$; so $p_s = 3p_p$ means a maximum value.

From (10) substituting K_1 and $p_s = 3p_p$ after reduction we obtain:

$$S_{opt} = \frac{0.696 F_{red} b^{1/3} p_0}{\eta^{1/3} L^{1/3} C_c^{1/3}}$$

Fig. 4 shows the characteristic of the stiffness of prestressed hydrostatic slideways plotted against pocket pressure p_p assuming $p_s = 10 \text{ kp/cm}^2$

supply pressure; moreover it represents the characteristics of the stiffness of non-prestressed slideways assuming 1 kp/cm² pocket pressure.

The features of the slideways are represented on Fig. 4.

IV. Optimum Constructional Features and Operative Conditions

Derivating Equ. (6) with respect to the different variables we can determine the value of each variable giving optimum slideway stiffness. From Equ. (6) derivating with respect to L after reduction we arrive at:

$$S'_L = \frac{ds}{dL} = \frac{36 \eta F_{red} C_c p_s b h^2 (b^2 h^6 - 144 \eta^2 L^2 C_c^2)}{(b^2 h^6 + 24 \eta L b h^3 C_c + 144 \eta^2 L^2 C_c^2)^2} . \quad (11)$$

Equalizing (11) to zero we obtain:

$$L = \frac{b h^3}{12 \eta C_c} . \quad (12)$$

After determining the second derivative, neglecting deduction and inserting (12), the numerator is

$$-48 \eta C_c b^3 h^3 < 0 ,$$

so the extreme value is maximum, thus L in (12) represents the optimum value, $L = L_{opt}$.

η and C_c in Equ. (6) are like terms to L , thus we may simply write:

$$\eta_{opt} = \frac{b h^3}{12 L C_c} ; \quad C_{c\ opt} = \frac{b h^3}{12 \eta L} . \quad (13)$$

Equ. (12) and (13) may be applied to both the usual and prestressed hydrostatic slideways since difference in the stiffness of the slideway types appears in the coefficients only.

The length of free-periphery b appears in an other combination than L , η or C_c , so the extreme value has to be determined separately. Differentiating Equ. (6) with respect to b and simplifying it we obtain:

$$S'_b = \frac{ds}{db} = \frac{A}{B} , \quad (14)$$

where

$$A = 36 \eta L F_{red} C_c p_t h^2 [(b^2 h^6 + 24 \eta L b h^3 C_c + 144 \eta^2 L^2 C_c^2) - b(2b h^2 + 24 \eta L h^3 C_c)]$$

and

$$B = (b^2 h^6 + 24 \eta L b h^3 C_c + 144 \eta^2 L^2 C_c^2)^2 .$$

To determine the extreme value it is sufficient to examine the bracketed term of the numerator, equating this to zero we arrive at:

$$b = \frac{12 \eta L C_c}{h^3} \quad (15)$$

Differentiating (14) with respect to b it is again sufficient to examine the numerator of the resulting differential quotient. Omitting the particulars of the investigation

$$-24 \eta L h^3 C_c 496 \eta^2 L^2 C_c^2 - (496 \eta^2 L^2 C_c^2 - 288 \eta^2 L^2 C_c^2 + 288 \eta^2 L^2 C_c^2) 96 \eta L C_c h^3$$

is the result, thus the free-periphery of the slideways determined by Equ. (15) gives the greatest, that means optimum stiffness of slideways, therefore $b = b_{\text{opt}}$.

Differentiating Equ. (6) of slideway stiffness with respect to clearance h no extreme value results, this also follows from the consideration that by suitably decreasing the clearance the possible displacement can be reduced beyond all limits, thus according to relation $s = d_p/d_h$ the stiffness increases monotonously.

As can be seen from Equ. (6) slideway stiffness varies proportionally to the surface area of slideways F_{red} and supply pressure p_s , consequently no extreme value can be found by modifying these variables.

As it can be seen from the formulae of optimums with respect to whichever variable, the equations for determining optimum slideway stiffness are identical to each other, should we want to determine the greatest stiffness. This means that there is no simultaneous extreme value with respect to variables L , η , C_c , and b therefore if the optimum is fixed with respect to one of the variables, so modifying any one of the other variables (L , C_c and b) in any sense the slideway stiffness decreases. Modifying with the proper amount two or more variables (referred to, L , η , C_c and b) in the formula determining optimum stiffness this naturally brings about another optimum, which might be identical to the optimum stiffness attained by another combination of variables.

Fig. 5 shows a few calculated values of slideway stiffness plotted against width of land L . It can be seen from the course of curves 3—7, that changing viscosity η or discharge coefficient C_c the value of greatest stiffness is the same, but the locus of optimum is changed, this means that it can be found at different values of width of land. Modifying the clearance h , as can be seen from curves 1—3, this influences not only the locus but also the numerical value of optimum stiffness.

V. Least Power Consumption of Hydrostatic Slideways

Power consumption of hydrostatic slideways is composed of the pumping and friction power loss:

$$N = N_1 + N_2 = \frac{Q_v p_s}{7500 \eta_{\text{pump}}} + \frac{\eta F_l v^2}{75 h}$$

No	1	2	3	4	5	6	7
η	0.000 0005	0.000 000 5	0.000 000 5	0 000 000 2	0.000 000 1	0.000 000 1	0.000 000 1
C_c	20	20	20	20	20	50	10
b	24	24	24	24	24	24	24
h	0.002	0.005	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
F_{red}	80	80	80	80	80	80	80
p_s	10	10	10	10	10	10	10
p_p	5	5	5	5	5	5	5

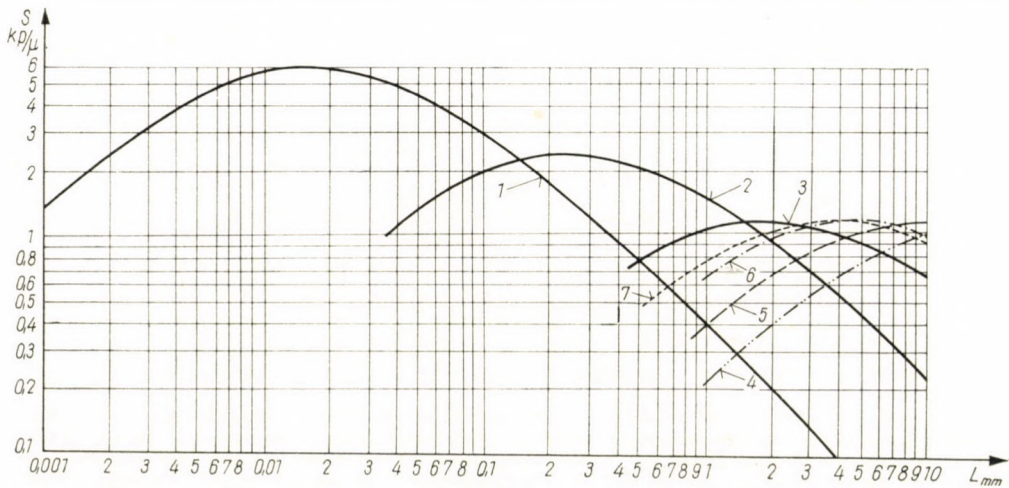


Fig. 5. Slideway stiffness versus width of land L , in the case of different operating characteristics

Since the shearing force generated between the surface of the slideways according to [1] p. 6. is

$$P_{fr} = \eta F_l \frac{v}{h}.$$

based on this, the power loss generated between the surfaces of the slideways during the travel of the moving part

$$N_2 = \frac{P_{fr} v}{75} = \frac{\eta F_l v^2}{75 h}.$$

Inserting formula (1)

$$N = \frac{bh^3 p_p p_s}{12 \eta L 7500 \eta_{pump}} + \frac{\eta F_l v^2}{75 h} = \frac{bh^3 p_p p_s}{90\,000 \eta L \eta_{pump}} + \frac{\eta F_l v^2}{75 h}. \quad (16)$$

We can determine from formula (16) a clearance h at which the power loss of the hydrostatic slideways is the least, other variables held constant. Differentiating Equ. (16)

$$N' = \frac{dN}{dh} = \frac{bh^2 p_p p_s}{30\,000 \eta L \eta_{\text{pump}}} - \frac{\eta F_l v^2}{75 h},$$

equating to zero and regrouping:

$$\frac{bh^4 p_p p_s}{400 \eta L \eta_{\text{pump}}} = \eta F_l v^2,$$

from this

$$h^4 = \frac{\eta^2 F_l v^2 400 \eta_{\text{pump}}}{b p_p p_s}$$

and

$$h = h_{\text{opt}} \sqrt[4]{\frac{\eta^2 F_l v^2 400 L \eta_{\text{pump}}}{b p_p p_s}} = 4.47 \frac{\eta^{1/2} v^{1/2} F_l^{1/4} L^{1/4} \eta_{\text{pump}}^{1/4}}{b^{1/4} p_p^{1/4} p_s^{1/4}}.$$

Since

$$N'' = \frac{d^2 N}{dh^2} = \frac{2 bh^3 p_p p_s}{30\,000 \eta L \eta_{\text{pump}}} + \frac{\eta F_p v^2}{37.5 h^3} > 0$$

consequently at clearance h determined by Equ. (17) the value of power loss is the least, that means the optimum.

In the practice it is of secondary importance to attain the optimum clearance regarding, power loss beside other requirements, namely, slideway stiffness, precision of manufacture, oil consumption. Besides its value generally cannot be freely fixed in the case of non-prestressed hydrostatic slideways, because h_{opt} depends on the load besides the variables in its formula.

Differentiating Equ. (16) of power loss with respect to viscosity of lubricant we can find an extreme value:

$$N' = \frac{dN}{d\eta} = \frac{bh^3 p_p p_s}{90\,000 L \eta_{\text{pump}}} \left(-\frac{1}{\eta^2} \right) + \frac{F_p v^2}{75 h} = 0; \quad (18)$$

regrouping

$$\frac{bh^3 p_p p_s}{90\,000 L \eta_{\text{pump}}} = \frac{F_l v \eta^2}{75 h};$$

expressing η

$$\eta = \eta_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{bh^4 p_p p_s}{1\,200 L \eta_{\text{pump}} F_l v^2}} = \frac{b^{1/2} h^2 p_p^{1/2} p_s^{1/2}}{34.63 L^{1/2} \eta_{\text{pump}}^{1/2} F_l^{1/2} v}. \quad (19)$$

since the second derivative is:

$$N'' = \frac{bh^3 p_p p_s}{90\,000 L \eta_{\text{pump}}} \left(+\frac{2}{\eta^3} \right) > 0.$$

Equ. (18) gives the least value of N , so (19) gives the optimum viscosity.

The lubricant viscosity giving the least power loss is an attainable optimum in the case of prestressed slideways provided that all other variables are known; in the case of non-prestressed slideways the determination of η_{opt} might be inexact because of the modification of clearance due to incidental load variation.

Example. Let us investigate the prestressed slideways of the table of a surface grinder. Length of guideways is 200 cm. Length of free-periphery of slideways $b = 1650$ cm. Further data: $L = 1$ cm, $\eta = 2 \cdot 10^{-7}$ kp sec/cm², $p_s = 15$ kp/cm², $p_p = 10$ kp/cm² based on formula $p_p/p_s = 2/3$ valid at the optimum stiffness of prestressed slideways $F_{red} = 1400$ cm², $h = 10^{-3}$ cm Based on (4)

$$C_c = \frac{bh^3 p_p}{12 \eta L(p_s - p_p)} = \frac{1650 \text{ cm}(10^{-3})^3 \text{ cm}^3 10 \text{ kp/cm}^2}{12 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ kpsec/cm}^2 1 \text{ cm } 5 \text{ kp/cm}^2} \approx 1.375 \frac{\text{cm}^5}{\text{kpsec}}.$$

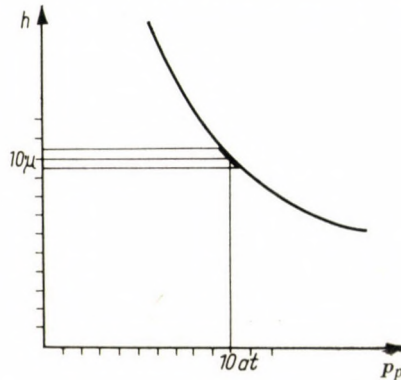


Fig. 6. Variation of clearance versus pocket pressure

Capillary throttling based on (2)

$$\frac{d_c^4}{l_c} = \frac{128 \eta C_c}{\pi} = \frac{128 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ kpsec/cm}^2 1.375 \text{ cm}^5/\text{kpsec}}{\pi} \approx 112 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3.$$

E.g. if $l_c = 2.28$ cm, $d_c = 0.04$ cm.

This capillary can be manufactured similarly to printed circuits. Oil consumption also based on (2)

$$Q_c = C_c(p_s - p_p) = 1.375 \frac{\text{cm}^5}{\text{kpsec}} 5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \approx 6.88 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}} \approx 0.413 \text{ l/min.}$$

The stiffness of slideways from the doubled (6)

$$s_{ps} = 2s = \frac{72 \eta F_{red} L C_c p_s b h^2}{b^2 h^6 + 24 \eta L b h^3 C_c + 144 \eta^2 L^2 C_c^2} =$$

$$= \frac{72 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1400 \cdot 1 \cdot 1.375 \cdot 15 \cdot 1650 \cdot (10^{-3})^2}{1650^2 \cdot (10^{-3})^6 + 24 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1650 \cdot (10^{-3})^3 \cdot 1.375 + 144 \cdot (2 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 1 \cdot 1.375^2} \approx$$

$$\approx 12.8 \cdot 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}} = 1280 \frac{\text{kp}}{\mu\text{m}}.$$

If the weight of the table is 500 kp, the external load (cutting force) is 50 kp so the slideway is displaced $550 \text{ kp}/1280 \text{ kp}/\mu\text{m} = 0.43 \mu\text{m}$ in its counterpart, thus the initial clearance of $10 \mu\text{m}$ becomes $9.57 \mu\text{m}$ at the lower surface and $10.43 \mu\text{m}$ at the upper surface, assuming that the hydrostatical pressure varies inversely proportionally to the clearance variation, which is a good approximation according to Fig. 6 in case of such a small change.

REFERENCES

1. FULLER, D. D.: Theory and Practice of Lubrication for Engineers. Wiley & Sons, New York—London 1956. Chapter 3.
2. SHAW, M. C.—MACKS, F.: Analysis and Lubrication of Bearings. Mc. Graw-Hill, New York—Toronto—London 1949. Chapter 7, Section 24.
3. WILCOCK, D. F.—BOOSER, E. R.: Bearing Design and Application. Mc. Graw-Hill, New York—Toronto—London 1957. Chapter 12.
4. MALANOSKI, S. B.—LOEB, A. M.: The effect of the Method of Compensation on Hydrostatic Bearing Stiffness. *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)* (1961), 179—187.
5. LING, M. T. S.: On the Optimization of the Stiffness of Externally Pressurized Bearings. *Transactions of the ASME (Journal of Basic Engineering)* (1962), 119—122.
6. RAIMONDI, A. A.—BOYD, J.: An Analysis of Orifice and Capillary-Compensated Hydrostatic Journal Bearing. *Lubrication Engineering* (1957), 28—37.

DIE BESTIMMUNG DER OPTIMALEN VERHÄLTNISSE DER DURCH KAPILLARE
DROSSELUNG KOMPENSIERTEN HYDROSTATISCHEN BETTFÜHRUNGEN

I. HARKÁNYI

ZUSAMMENFASSUNG

Im vorliegenden Aufsatz wird die Bestimmung der größten Starrheit und der geringsten Leistungsaufnahme der durch kapillare Drosselung kompensierten, vorgespannten bzw. nicht vorgespannten hydrostatischen Bettführung vorgeführt. Das Studium erstreckt sich, unter sonst festgelegten Bedingungen, auf die Bestimmung des optimalen Wertes für den Förderdruck, den Kammerdruck, den freien Umfang der Dichtungsfläche, die Breite der Dichtungsfläche, die Viskosität, die kapillare Durchlässigkeit sowie für den Leistungsverbrauch. Im Aufsatz werden die Betriebsverhältnisse festgestellt, unter denen die im Laufe der Ableitung vorausgesetzten Bedingungen annähernd oder genau vorherrschen. Der Einfluß, den das Maß der Abweichung von den optimalen Verhältnissen auf die Starrheit der Bettführung ausübt, wird durch Diagramme veranschaulicht.

DÉTERMINATION DES CONDITIONS OPTIMA DE CONDUITES HYDROSTATIQUES
COMPENSÉES PAR OBTURATION CAPILLAIRE

I. HARKÁNYI

RÉSUMÉ

L'étude présente la détermination de la rigidité maximum et du débit minimum des conduites hydrostatiques prétendues ou non, compensées par obturation capillaire. Elle s'étend également à la détermination, dans des conditions données, des valeurs optima de la pression d'alimentation, de la pression de cavité, de la longueur de la circonférence libre de la bride, de l'épaisseur de bride, de la viscosité, de la perméabilité capillaire et du débit. L'auteur définit les conditions de service dans lesquelles les conditions supposées au cours de la déduction sont approximativement ou exactement produites. L'influence que l'écart par rapport aux conditions optima exerce sur la valeur de la rigidité de conduite est illustrée par des diagrammes.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ
ПРОВОДНИКОВ, КОМПЕНСИРОВАННЫХ КАПИЛЛЯРНОЙ ЗАГЛУШКОЙ

И. ХАРКАНИ

РЕЗЮМЕ

В данной работе показано определение наибольшей жесткости и наименьшей потребляемой мощности предварительно напряженного или не имеющего предварительного напряжения гидростатического провода, компенсированного капиллярной заглушкой. Рассматривается также определение наиболее выгодных значений давления питания, полостного давления, длины свободного периметра края провода, толщины края провода, вязкости, капиллярной пропускаемости, а также расхода мощности при прочих неизменных условиях. В работе определяются производственные режимы, при которых принятые для вывода условия удовлетворяются приближенно или полностью. Влияние масштаба отступления от оптимального режима на значение получающейся жесткости провода наглядно изображено диаграммами.

HYPERBOLIC PARABOLOIDICAL SHELLS OVER POLYGONAL PLAN

K. SZMODITS

DOCTOR OF TECHNICAL SC.
BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received August 21, 1962]

The paper deals with the dimensioning of shell structures the plan form of which is a regular polygon. The shells in question consist of hyperbolic paraboloidal shell sectors joined to each other along the diagonal ribs. The edges of these shells lying above the lateral sides of the investigated polygonal sectors are entirely free, where in compliance with boundary conditions all edge forces have to disappear. However, owing to reasons of symmetry axial forces acting along the edges joined to the ribs are in equilibrium, while membrane shear forces are borne by the ribs themselves. Therefore, no boundary conditions are to be found here. For a constant load and dead load approached by a polynom the deduced stress function constitutes an exact and closed solution. The paper further deals with the dimensioning of the ribs and is completed by a numerical example.

1. Introduction

Shells consisting of hyperbolic paraboloidal elements and used to cover plans of regular polygonal shape may present aesthetically attractive solutions of great variety. The identical hyperbolic paraboloidal elements building up the shell are joined along the diameters of the regular polygon and one of their geometrical main axes is the axis of symmetry of the triangle included by adjacent diameters (Fig. 1). Arches resting on discreet foundations are formed along the joint line of each pair of adjacent shell elements, *i.e.*, over each diameter. Owing to symmetry the components normal to the plane of the arches of forces transmitted from the elements to the arches are balanced, while the component lying in the plane of the arches is carried by the arch itself. In keeping with the boundary conditions of support of the hyperbolic, paraboloidal elements, the edges along the sides of the polygon are free edges where no edge forces develop. The boundary conditions contain no criteria concerning the edge forces developing along the arches. Accordingly the vertical load on the shell elements is carried by the diagonal arches.

For dead load the shell can be analysed by the membrane theory, *i.e.*, without taking the bending strength of the shell element into consideration. A solution of this problem was published by F. CANDELA in the *Journal of the ACI*, V. 32 (1960), october, pp. 353—371 (General Formulae for Membrane Stresses in Hyperbolic Paraboloidal Shells). A disadvantage to this solution is the involved numerical work resulting from the use of the oblique coordinate

system in satisfying the boundary conditions. An orthogonal coordinate system is used in the solution to be described hereafter in which the stressing forces are expressed in a closed, finite form and which is consequently appreciably simpler than the solution by CANDELA.

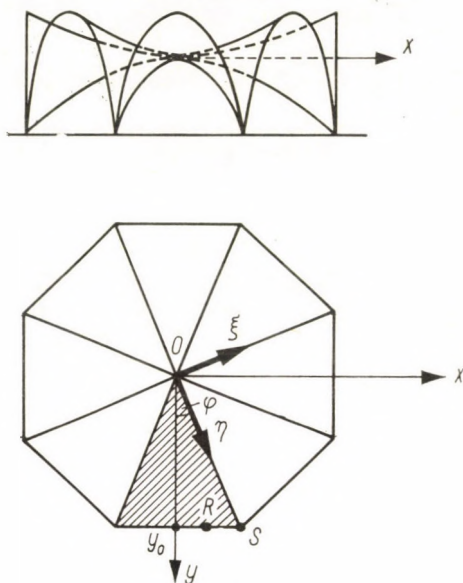


Fig. 1

2. Calculation of the Shell Elements

The shell element over the polygon segment should be described by the formula:

$$z = \frac{a}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}y^2. \quad (1)$$

The dead load on this surface should be approximated by the function

$$\begin{aligned} q &= p \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = p \sqrt{1 + a^2 x^2 + \beta^2 y^2} \approx \\ &\approx p(1 + ax^2 + by^2), \end{aligned}$$

where p is the weight of a shell element of unit surface area. The constants a and b are determined by perimetral collocation in a way as to yield identical values for the exact and approximating dead weights at the points R and δ .

Pucher's well known equations defining the membrane forces are, for the approximating dead weight are

$$\begin{aligned} \bar{N}'_x + N'_{xy} &= 0; \quad \bar{N}'_y + N'_{xy} = 0, \\ a \bar{N}'_x - \beta \bar{N}'_y + p(1 + ax^2 + by^2) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

where the overhead dash denotes reduced stressing forces obtained by projecting the stressing forces to the x, y plane and by relating the stressing force to the projected infinitesimal element, while comma and point indices denote differentiation according to x and y , respectively.

Eqs. (2) and the above boundary conditions are satisfied by the following stressing forces:

$$\begin{aligned} \bar{N}_y &= -\frac{pa}{a}(y_0 - y)^2, \\ \bar{N}_x &= -\frac{p}{a} \left[1 + ax^2 + by^2 + \frac{a\beta}{a}(y_0 - y)^2 \right], \\ N_{xy} &= -\frac{2pa}{a}x(y_0 - y). \end{aligned} \tag{3}$$

The above Eqs. (3) thus form the solution of the structural shell problem.

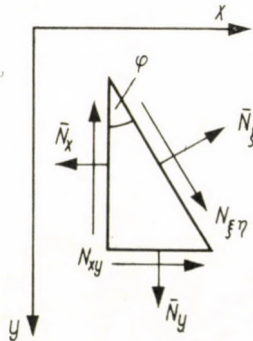


Fig. 2

3. Calculation of the Arches

In an inclined plane including the angle ϱ with the y axis, *i.e.*, along the parabolical arches between the shell elements, the stressing forces N_{ξ} and $N_{\xi\eta}$ of the membrane stress condition described by Eq. (3) can be expressed with the familiar relationship relating to plane stress conditions (Fig 2) in the following manner:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\xi} &= \bar{N}_x \cos^2 \varphi + \bar{N}_y \sin^2 \varphi - N_{xy} \sin 2 \varphi, \\ \bar{N}_{\xi\eta} &= (\bar{N}_x - \bar{N}_y) \sin \varphi \cos \varphi + N_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \tag{4}$$

The equation

$$z = \frac{a}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}y^2$$

of the shell surface is in the ξ, η system of coordinates (Fig. 1):

$$z = \frac{\alpha}{2} (\xi^2 \cos^2 \varphi + \xi\eta \sin 2\varphi + \eta^2 \sin^2 \varphi) - \frac{\beta}{2} (\eta^2 \cos^2 \varphi - \xi\eta \sin 2\varphi + \xi^2 \sin^2 \varphi),$$

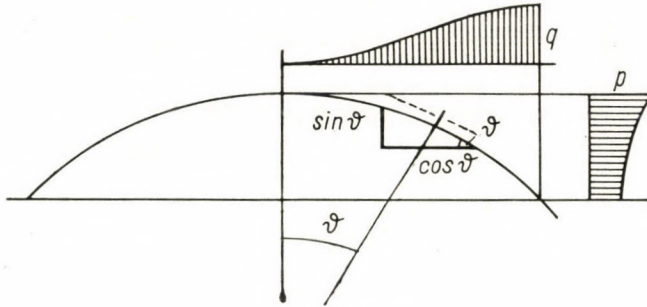


Fig. 3

whence for $\xi = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \tan \varrho = \frac{\eta}{2} (a + \beta) \sin 2\varphi.$$

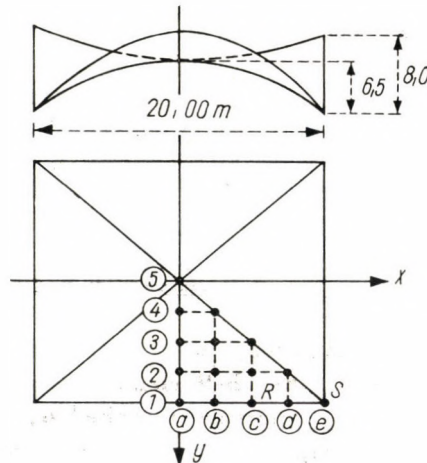


Fig. 4

The arch is subjected to the vertical component $2\bar{N} \xi \tan \varrho$ of the forces $\bar{N} \xi$ acting from two sides and to the shearing forces $2N_{\xi\eta}$. The vertical load on the arch is thus (Fig 3.):

$$q = 2N \xi \eta \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} + 2\bar{N}_{\xi} \tan \varrho = 2N_{\xi\eta} \tan \vartheta + 2\bar{N}_{\xi} \tan \varrho \quad (5)$$

where $\delta = \delta(\eta)$ is the slope of the arch. The horizontal force on the arch is:

$$p = 2 N_{\xi\eta} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = 2 N_{\xi\eta} \cot \vartheta. \tag{6}$$

4. Numerical Example

Let us determine the stressing forces in the shell elements of the shell roof over the quadratic plan shown in Fig. 4 for case of dead load. The weight of the unit surface of the shell is $p = 0.3 \text{ Mp/m}^2$.

The equation describing the shell surface is:

$$z = 0.08x^2 - 0.015y^2.$$

The exact dead-load function is

$$q = 0.3 \sqrt{1 + 0.0256x^2 + 0.0009y^2}.$$

Determination of the approximating dead weight by peripheral collocation:

$$\sqrt{1 + 2.56 + 0.09} = 1.910,$$

$$\sqrt{1 + 0.64 + 0.09} = 1.315.$$

The collocation functions are thus:

$$1 + 100a + 100b = 1.91$$

$$1 + 25a + 100b = 1.315$$

$$a = 0.00794 \frac{1}{\text{m}^2}; \quad b = 0.00116 \frac{1}{\text{m}^2}$$

Table I

Sign of point	x_m	y_m	$q \frac{MP}{\text{m}^2}$	$\overline{N_x} \frac{MP}{\text{m}^2}$	$\overline{N_y} \frac{MP}{\text{m}}$	$N_{xy} \frac{NP}{\text{m}}$
1a	± 0.0		0.335	-2.095		
1b	± 2.5		0.350	-2.185		
1c	± 5.0	10.0	0.394	-2.460	0.00	0.00
1d	± 7.5		0.469	-2.930		
1e	± 10.0		0.572	-3.580		
2a	± 0		0.320	-2.0174		0.00
2b	± 2.5	7.50	0.334	-2.1024	-0.0931	∓ 0.186
2c	± 3.0		0.379	-2.3824		∓ 0.372
2d	± 7.5		0.454	-2.8574		∓ 0.559
3a	± 0.0		0.308	-1.9948		0.00
3b	± 2.5	5.0	0.323	-2.0898	-0.3725	∓ 0.372
3c	± 5.0		0.368	-2.3698		∓ 0.745
4a	± 0.00	2.5	0.302	-2.0420	-0.838	0.00
4b	± 2.50		0.317	-2.1370		-0.559
5a	0.0	0.0	0.300	-2.1540	-1.490	0.00

and the approximating dead weight is

$$q = 0.3(1 + 0.00794x^2 + 0.00116y^2).$$

The stressing forces:

$$\bar{N}_x = -1,875(1 + 0.00794x^2 + 0.00116y^2) - 0.00279(10 - y)^2,$$

$$\bar{N}_y = -0.0149(10 - y)^2,$$

$$\bar{N}_{xy} = -0.0298x(10 - y).$$

The stressing forces at different points of the shell are presented in Table I.

ZUSAMMENGESETZTE HYPERBOLISCHE PARABOLOIDSCHALE ÜBER EINEM VIELECKGRUNDRISS

K. SZMODITS

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz wird die Bemessung von über einem regulären Vieleckgrundriß aufgebauten Schalenkonstruktionen behandelt, die aus entlang der Diagonalrippen aneinander angeschlossenen hyperbolisch paraboloidalen Schalensektoren zusammengesetzt sind. Die Ränder der über den untersuchten Grundriß-Sektoren liegenden Schalen, die über den Seiten des Vieleckgrundrisses liegen, sind vollkommen frei, wo im Sinne der Randbedingungen sämtliche Randkräfte zu verschwinden haben. Entlang der an die Diagonalen angeschlossenen Ränder sind aber die Axialkräfte auf Grund der Symmetrie im Gleichgewicht, während die Membran-Scherkräfte von den Rippen aufgenommen werden, daher bestehen hier überhaupt keine Randbedingungen. Die abgeleitete Spannungsfunktion liefert im Falle einer ständigen Belastung und einer durch ein Polynom angenäherten Eigenlast eine exakte, geschlossene Lösung. Der Aufsatz befaßt sich ferner mit der Bemessung der Rippen und ist auch durch ein Zahlenbeispiel ergänzt.

VOILES COMPOSÉS EN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE CONSTRUITS SUR UNE BASE POLYGONALE

K. SZMODITS

RÉSUMÉ

L'auteur traite du calcul de voiles composés de paraboloides hyperboliques construits sur un polygone régulier et se recontrant le long des arcs diagonaux de ce dernier. Dans les voiles étudiés construits sur les segments du plan, le bord correspondant au côté de la base polygonale est un bord libre, où toutes les forces de rive doivent disparaître selon les conditions au contour. Mais comme pour des raisons de symétrie, les forces axiales sont en équilibre le long des bords situés le long des diagonales et les cisaillements de membrane sont équilibrés par les arcs, il n'existe pas ici de conditions au contour. La fonction de tension donnée pour une charge constante et un poids propre approché par un polynome permet une solution de forme finie. L'auteur traite encore du dimensionnement des arcs et termine l'étude par un exemple numérique.

КОМБИНИРОВАННАЯ ОБОЛОЧКА ИЗ ГИПЕРБОЛУЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ
НАД МНОГОУГОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

К. СМОДИЧ

РЕЗЮМЕ

Статья занимается расчетом оболочек, состоящих из гиперболических параболоидов, сопряженных вдоль диагональных ребер правильного многоугольника, служащего основанием. Край оболочек над исследованными сегментами основания представляет собою свободный край, где по краевым условиям должны исчезнуть все действующие по краю силы. Однако, вдоль краев, расположенных вдоль диагоналей, по причинам симметрии осевые силы находятся в равновесии, а мембранные срезающие усилия поглощаются ребрами, и поэтому здесь нет краевых условий. Сообщенная функция напряжения для постоянной нагрузки и нагрузки от собственного веса, приближенного многочленом, дает строгое замкнутое решение. Статья занимается также расчетом ребер и приводится числовой пример.

RÉSISTANCE DU BÉTON ET DES FILS EMPLOYÉS DANS LES BÉTONS PRÉCONTRAINTS PAR ADHÉRENCE, SOU MIS A DES CHARGES PULSATIVES

R. KOZAK

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE POZNAN

[Manuscript présenté le 5. Octobre, 1962]

Les recherches décrites portaient en principe sur les matériaux employés dans les bétons précontraints par adhérence. Les résultats de ces recherches ainsi que la méthode employée par l'auteur peuvent être appliqués, pour la plupart, aux bétons précontraints par clavetage. On peut constater en général qu'en cas d'influences dynamiques et pulsatives, la résistance des matériaux employés dans les bétons précontraints diminue en moyenne de 50% en comparaison de la résistance à la charge statique.

Introduction

Les éléments et constructions précontraints sont soumis à des charges non seulement statiques, mais, à un degré variable, dynamiques aussi.

Les éléments de planchers et de fondations de l'architecture industrielle, les fondations des machines, les revêtements précontraints des routes, les traverses et les ponts de tous types subissent des réactions dynamiques constantes.

Les réactions dynamiques ayant une grande influence sur la durée des constructions précontraintes, l'auteur a fait des études systématiques sur les principaux matériaux employés dans les bétons précontraints.

Le but de ses recherches était l'établissement des tensions-limites maximales jusqu'auxquelles des tensions augmentées par des influences dynamiques peuvent paraître périodiquement, à part les tensions statiques. Les résultats de ces recherches permettent aussi de déterminer les coefficients de sécurité de la construction en béton précontraint pour les charges dynamiques.

Comme l'étendue des quantités de charges a été fixée, sur la base des types étrangers, au nombre de 2 millions de vibrations pour les différents cas de charges, les recherches auraient exigé des expériences de longues années. Aussi l'auteur a-t-il adopté l'usage d'un certain nombre d'appareils nouveaux d'une conception originale, qui ont permis de simplifier la méthode et réduire ainsi la durée des recherches à quelques années à peine.

1. Étude du béton

En état non chargé, le béton subit généralement une précontrainte qui s'élève de 150 à 250 kg/cm².

En vue de constater la résistance des bétons aux vibrations dynamiques, l'auteur a fait des essais de résistance à la charge statique ainsi qu'aux charges pulsatives variables, sur des éprouvettes cylindriques de \varnothing 8 cm. Ces essais ont été faits sur un pulsateur universel prévu pour les forces de:

0 à 20 tonnes,
0 à 50 „
0 à 100 „

Le pulsateur travaille aux fréquences de 250 et 500 vibrations/min. La résistance aux vibrations dynamiques a été choisie telle que le béton soit écrasé à deux millions de vibrations.

La résistance du béton à la striction statique, établie comme moyenne de 6 cylindres d'essai de 8 cm, s'élevait à 570 kg/cm². Le béton utilisé pour les bétons précontraints doit avoir une résistance de 500 à 600 kg/cm².

a) Admettant une précontrainte du béton de $\sigma_d = 150$ kg/cm², on a soumis 6 cylindres d'essai de 8 cm de $R_w = 570$ kg/cm² à des vibrations dynamiques à partir de $\sigma_d = 150$ kg/cm² jusqu'aux différentes limites augmentées graduellement, chaque fois pour 2 millions de vibrations.

Après 2 millions de vibrations, les éprouvettes étaient usées à $\sigma_g = 380$ kg/cm². La résistance destructive s'élevait à $\sigma_g = 380$ kg/cm². = 0,666 R_w .

Les quotients des tensions correspondantes s'élèvent à:

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_g} = \frac{150}{380} = 0,395,$$

$$\frac{\sigma_d}{R_w} = \frac{150}{570} = 0,263,$$

$$\frac{\sigma_g}{R_w} = \frac{380}{570} = 0,666.$$

b) Admettant une précontrainte du béton de $\sigma_d = 250$ kg/cm², on a soumis 6 cylindres d'essai de 8 cm de $R_w = 570$ kg/cm² à des vibrations dynamiques à partir de $\sigma_d = 250$ kg/cm² jusqu'aux différentes limites augmentées graduellement, chaque fois pour 2 millions de vibrations.

La destruction avait lieu après 2 millions de vibrations à $\sigma_g = 425$ kg/cm². La résistance destructive s'élevait à $\sigma_g = 425$ kg/cm² = 0,740 R_w .

Les quotients des tensions correspondantes s'élèvent à :

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_g} = \frac{250}{425} = 0,588,$$

$$\frac{\sigma_d}{R_w} = \frac{250}{570} = 0,440,$$

$$\frac{\sigma_g}{R_w} = \frac{425}{570} = 0,745.$$

Les figures 1 et 2 représentent l'installation utilisée pour les recherches. Les recherches décrites, ainsi qu'un certain nombre d'études indirectes ont permis de fixer l'étendue des résistances maxima σ_g du béton en cas d'augmentation des tensions inférieures σ_d de zéro à $0,9 R_w$ statique.

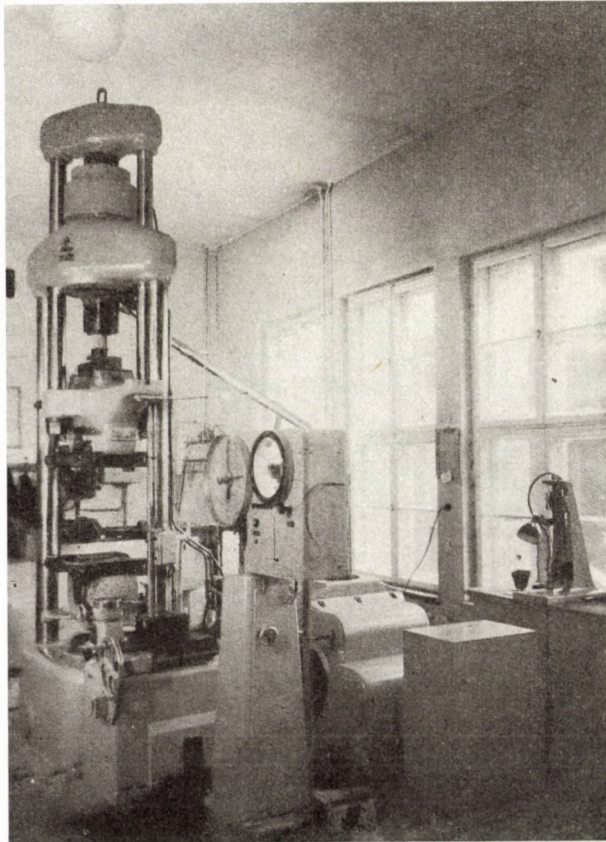


Fig. 1. Pulsateur universel de 250 et 500 vibrations/min. L'éprouvette cylindrique de béton de \varnothing 8 cm y est soumise à 2 millions de vibrations pulsatives

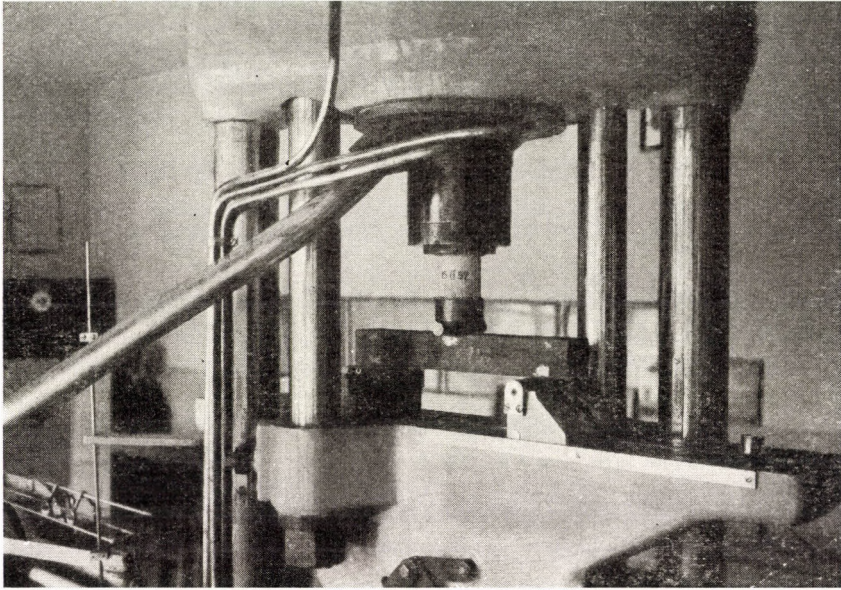


Fig. 2. Dispositif spécial pour l'étude pulsative de cylindres de béton dans un pulsateur universel

La fig. 3 illustre les résultats de ces recherches.

Ils ne sont valables, en principe, que pour le béton de qualité $R_w = 570$ kg/cm², mais concordent assez bien avec les résultats d'autres auteurs.

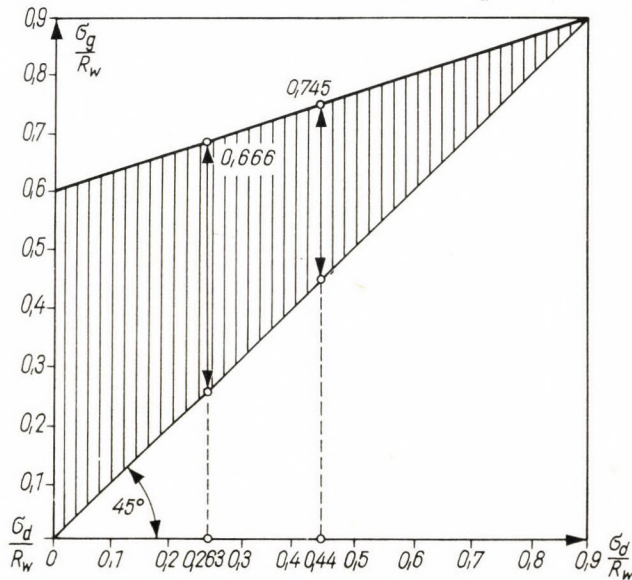


Fig. 3. Limites de résistance du béton type 570 à 2 millions de vibrations pulsatives

Le diagramme permet d'établir les conclusions suivantes:

1° En fonction de l'augmentation de la précontrainte du béton σ_d , la résistance à la striction du béton soumis à une charge dynamique s'accroît; par contre, la différence entre la tension précontrainte initiale σ_d et écrasante σ_g diminue.

2° L'augmentation effective des tensions dans le béton soumis à des charges dynamiques équivaut en pratique à 5—10% tout au plus des tensions statiques; on peut donc admettre que pour cette qualité de béton, la résistance à la fatigue du béton se trouve bien au-dessus de la limite de précontrainte.

3° La résistance du béton, au moins deux fois plus grande que la précontrainte, suffit pour l'admission des accroissements de tensions produites par une réaction dynamique, si l'on dispose de coefficients de sûreté de valeur assez élevée.

2. Étude des fils

2.1. Caractéristique des fils employés dans les bétons précontraints

Les fils d'acier de petit diamètre et de haute résistance sont les éléments de la précontrainte du béton. On obtient des fils de haute résistance par un étirage répété à froid. A mesure de la diminution du diamètre, on obtient des fils d'une plus haute résistance à la rupture. Ces fils sont caractérisés par:

- a) le coefficient d'élasticité E , qui s'élève de 1,900 000 à 2,100 000 kg/cm²;
- b) $\sigma_{0,01}$ la limite d'élasticité à l'allongement résiduel $\Delta l_1 = 0,01\%$ s'élève de 40 à 70% de la résistance à la rupture du fil;
- a) $\sigma_{0,2}$ la limite de plasticité à l'allongement résiduel $\Delta l_2 = 0,2\%$ s'élève de 80 à 90% de la résistance à la rupture du fil;
- d) $\varepsilon = (\Delta l)/l$ — allongement unitaire du fil;
- e) R_{gr} — limite de rupture du fil.

En Pologne, on utilise pour les bétons précontraints des fils de 1,0, 1,5 et 2,5 mm de diamètre, et à l'étranger des fils lisses et entaillés jusqu'à un diamètre de 5 mm, inclusivement. On a constaté expérimentalement qu'à 2,0 mm de diamètre, des glissements de fils peuvent déjà se produire. En général, les fils arrangés dans le béton sont simples et droits. Pour améliorer l'adhésion du béton, on peut aussi faire usage de fils entrelacés et entaillés. En Pologne, on emploie ordinairement des fils étirés à froid sans traitement final. Le procédé de relâchement aurait considérablement amélioré l'homogénéité du fil, ainsi que toutes les caractéristiques de la résistance.

2.2. Résistance des fils à la rupture statique

Afin d'étudier les caractéristiques de résistance des fils de haute résistance produits en Pologne, on a d'abord soumis à la rupture des fils de 1,0, 1,5 et 2,5 mm de diamètre.

Les recherches devaient démontrer les limites d'élasticité, de plasticité et de résistance à la rupture statique. Conformément à la norme polonaise PN-H. 04310 concernant les fils fins d'un diamètre inférieur à 6 mm, on a mesuré l'allongement sur une longueur de 250 mm, quand les normes détaillées des recherches ne prévoyaient pas une autre longueur. En dehors des essais de résistance sur fils simples, on a aussi soumis à la rupture des fils doublement entrelacés, les fils entrelacés étant également utilisés dans les bétons précontraints.

2.3. Recherches sur fils simples

Des essais statiques d'étirage des fils ont été effectués sur une machine de traction hydraulique, entre les limites de force étirante de 500 kg et de

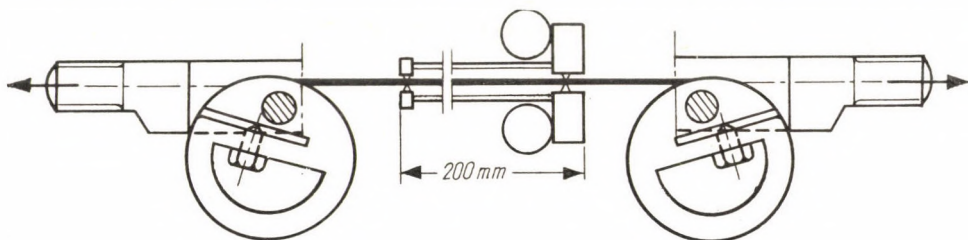


Fig. 4. Dispositif spécial pour la fixation des fils sur des roues à coulisses de \varnothing 100 mm, éminant la fissuration prématurée des fils dans les mâchoires

1000 kg, selon le diamètre des fils. La filtration des fils de haute résistance par des mâchoires coniques normales est difficile. Les résultats sont divers, leur dispersion est considérable, la rupture se produit tout près de la mâchoire.

En vue de réduire l'influence défavorable de la fixation par coins, on a fixé les fils dans un appareil spécialement construit, dans lequel les extrémités de fils sont bobinées à deux tours sur des poulies de 100 mm de diamètre (fig. 4). La longueur mesurable était de 250 mm.

Tableau 1

Caractéristiques mécaniques des fils

Valeurs normatives

Valeurs réelles

Moyenne en mm	Écarts admissibles en mm	Limite		Allongement minimum a_{20}	Expérimentales		
		de plasticité $\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	de résistance R_{2r} kg/mm ²		$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	R_{2r} kg/mm ²	Allongement a_{20}
1,0	$\pm 0,02$	200	250	3	185	250	2,8
1,5	$\pm 0,03$	190	240	3	233	248	3
2,0	$\pm 0,04$	180	230	3			non étudié
2,5	$\pm 0,05$	170	220	3	186	214	2,8

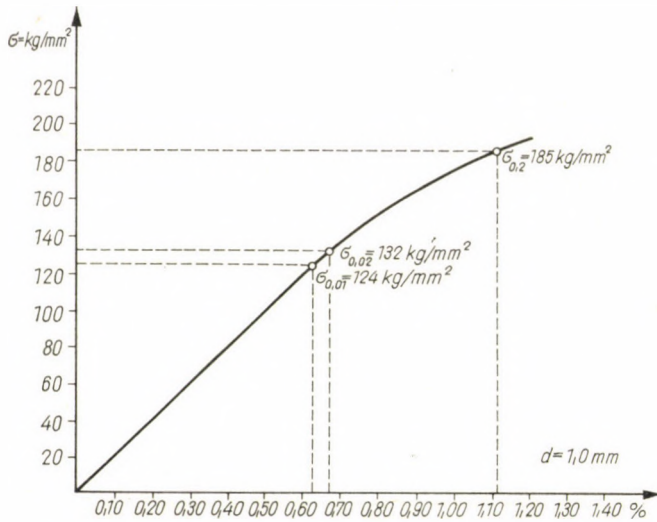


Fig. 5. Diagramme tensions-allongements des fils de \varnothing 1,2 mm

$R_{zr} = 205 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{0,2} = 185 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{0,02} = 132 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{0,01} = 124 \text{ kg/mm}^2$.
 $a = 2,8\%$ de l'allongement mesuré après la rupture du fil, pour une longueur mesurable
 $l_0 = 150 \text{ mm}$.

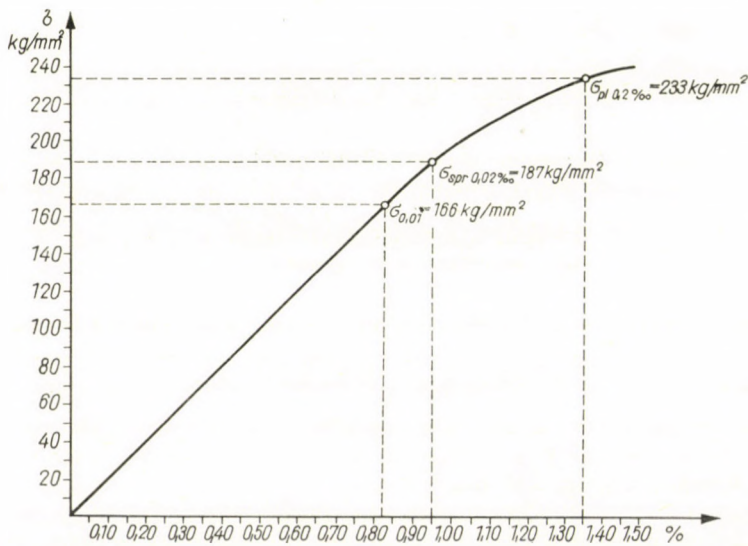


Fig. 6. Diagramme tensions-allongements des fils de \varnothing 1,5 mm

$R_{zr} = 248 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{0,2} = 233 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{0,02} = 187 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{0,01} = 166 \text{ kg/mm}^2$
 $a = 3\%$ de l'allongement mesuré après la rupture du fil,
pour une longueur mesurable $l_0 = 250 \text{ mm}$.

Le Tableau I met en vue les moyennes de 5 essais de rupture de fils de différents diamètres, en comparaison avec les exigences normatives.

Les mesures des déformations ont été effectuées à l'aide d'extensomètres de 200 mm de base.

Les diagrammes des tensions et allongements des fils de 1,5 et 2,5 mm sont représentés sur les figures 5, 6 et 7.

Les mesures des allongements après rupture ont donné,

pour la longueur mesurable $l = 150$ mm, un allongement de 3,0%,
 " " " " " $l = 250$ mm " " " 2,8%.

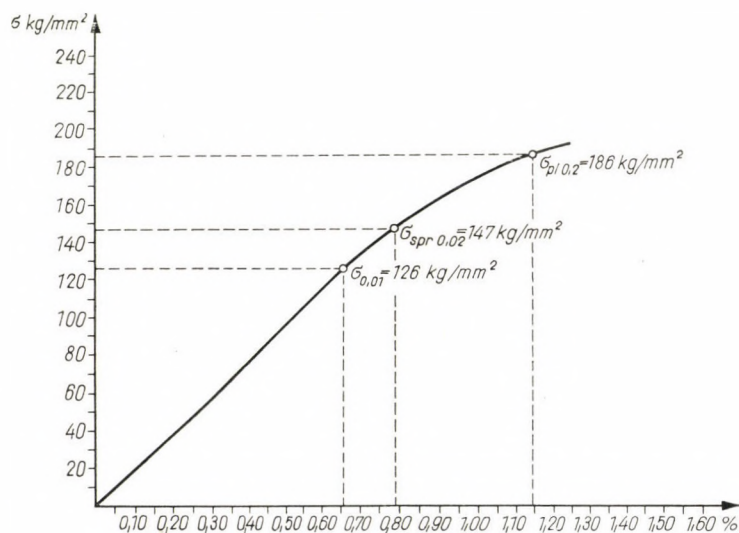


Fig. 7. Diagramme tensions-allongements des fils de \varnothing 2,5 mm

$R_{zr} = 214$ kg/mm² $\sigma_{0,2} = 186$ kg/mm² $\sigma_{0,02} = 147$ kg/mm² $\sigma_{0,01} = 126$ kg/mm²

- a — 2,8% de l'allongement mesuré après la rupture du fil, pour une longueur mesurable $l_0 = 250$ mm
 c — 56% réduction de la diamètre

Sur le base des recherches effectuées, on a pu constater qu'avec l'augmentation de la longueur mesurable, l'allongement mesuré après la rupture diminue.*

2.4. Recherches sur fils entrelacés

En vue d'augmenter l'adhésion des fils dans les bétons précontraints, on emploie parfois des fils entrelacés. Dans le cas donné, on utilisait des fils

* Pour plus de détails, voir l'article Problèmes de résistance et technologie des fils de haute résistance. — ROMAN KOZAK, *Inzynieria i Budownictwo* (1961), Nr. 4.

entrelacés deux à deux, d'un diamètre de 1,2 ou de 1,5 mm, chaque paire de fils ayant un pas différent dépendant du diamètre.

La tresse en fil double \varnothing 1,2 mm avait un pas de 5 cm
 " " " " " \varnothing 1,5 mm " " " " 10 cm

Afin de définir les caractéristiques de résistance des fils doublement entrelacés, et plus spécialement pour déterminer la différence entre la résistance à la rupture aux charges statiques des fils simples et des fils entrelacés, on s'est servi d'une machine de traction hydraulique pour tendre les fils doublement entrelacés. La fixation des fils a été effectuée au moyen de poulies, avec le dispositif déjà décrit. Les résultats des recherches étaient les suivants:

Fils de \varnothing 1,2 mm doublement entrelacés

La résistance à la rupture du fil s'élève à $R'_r = 186/\text{mm}^2$. Par contre, la résistance d'un fil droit $R_r = 205 \text{ kg}/\text{mm}^2$.

Les résultats d'essais démontrent que

1° la résistance à la rupture des fils entrelacés de \varnothing 1,2 mm est de 10% inférieure à celle des fils droits.

Fils de \varnothing 1,5 mm doublement entrelacés

La résistance à la rupture du fil s'élève à $R'_r = 212 \text{ kg}/\text{mm}^2$. Par contre, la résistance d'un fil droit $R_r = 248 \text{ kg}/\text{mm}^2$.

Les résultats d'essais démontrent ici que

2° la résistance à la rupture des fils entrelacés de \varnothing 1,5 mm est de 15% inférieure à celle des fils droits.

2.5. Recherches sur fils soumis à des tractions alternées

En vue de définir les résistances maxima des fils à des charges dynamiques alternées, l'auteur a fait des recherches sur des fils sollicités par des forces de traction pulsatives.

Dans ce but, on a fait une installation spécialement conçue pour les recherches sur la rupture par fatigue des fils. Cette installation permet de rompre des fils de différentes longueurs, et aussi des fils doublement entrelacés, utilisés dans les structures précontraintes. La figure 8 illustre le schéma de l'installation travaillant avec des forces de traction alternées.

L'appareil de fatigue des fils est continué par deux poutres en C formant deux caisses, dans lesquelles sont disposées 4 roues prévues pour 2 fils, à savoir deux roues d'ancrage et deux roues de tension. Au milieu de l'appareil se trouve placé un moteur électrique de 1500 tours/min d'une puissance de 0,25 HP, dont l'arbre placé excentriquement fait tourner des disques tendeurs de fils. Un compteur enregistre le nombre de tours du moteur et le nombre

des cycles produits. Pour éviter la fissuration des fils dans les coins, on enroule les extrémités de ceux-ci sur des disques de 100 mm de diamètre. La fixation des extrémités des fils se fait sur le côté d'un disque rond rainuré, à l'aide d'une vis de serrage. Les détails de cette installation sont illustrés sur les figures 9, 10 et 11.

Pour la précontrainte des éléments de béton, les fils sont tendus jusqu'à une valeur défini. Des tensions supplémentaires peuvent apparaître dans les fils à la suite de vibrations dynamiques. Le but principal des expériences était la détermination de la différence entre les tensions initiales des fils, dites limite inférieure de tension, et la limite supérieure des tensions de rupture

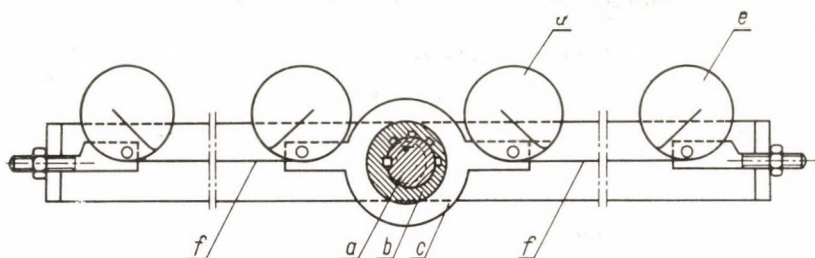


Fig. 8. Schéma d'un dispositif mécanique spécial pour la rupture pulsative des fils de haute résistance

- a — cylindre excentrique
- b — anneau de réglage excentrique
- c — anneau retenant le disque de fixation des extrémités de fils
- d — disque pulsatif
- e — disque fixe (pour le réglage de la prétension du fil)
- f — fil

après deux millions de vibrations. On a effectué deux millions de changements de tensions, conformément aux normes étrangères. La tension initiale des fils est obtenue, après fixation de leurs extrémités, à l'aide d'une vis de petit pas disposée sur la traverse du cadre. Le mesurage des tensions initiales, c'est-à-dire de la limite inférieure de tension a été effectué au moyen d'un extensomètre Huggenberger de 200 mm de base. La régulation, dans des limites définies, des tensions supérieures dites limite supérieure de tension σ_g , a été fait à l'aide de roues excentriques réglées sur lesquelles avaient été fixées les extrémités des fils. Une machine de traction rend possible l'étude de fils d'une longueur allant de 0,5 à 4,0 m. Par conséquent, l'appareil permet de déterminer les résistances à la rupture à des charges variables de fils de différentes longueurs. La prétension des fils produisant la précontrainte peut varier dans des limites considérables suivant la résistance à la rupture du fil.

Pour les fils de \varnothing 1,2, 1,5 et 2,5 mm utilisés dans les structures précontraintes $\sigma_d = 105 \text{ kg/mm}^2$, on a adopté comme minimum une tension appelée tension initiale inférieure, qui correspond à la tension moyenne des fils.

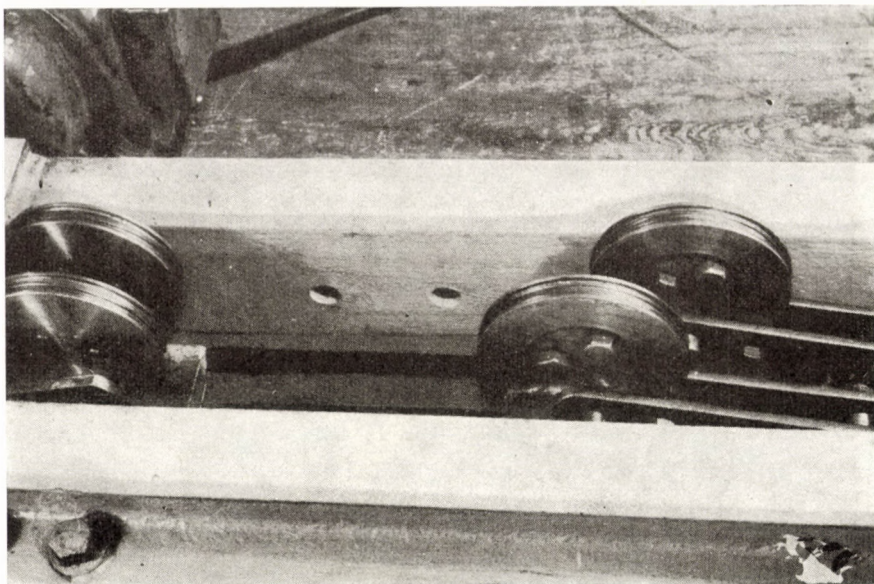


Fig. 9. Disques servant à fixer les fils de chaque côté de la commande électrique de la machine pulsative

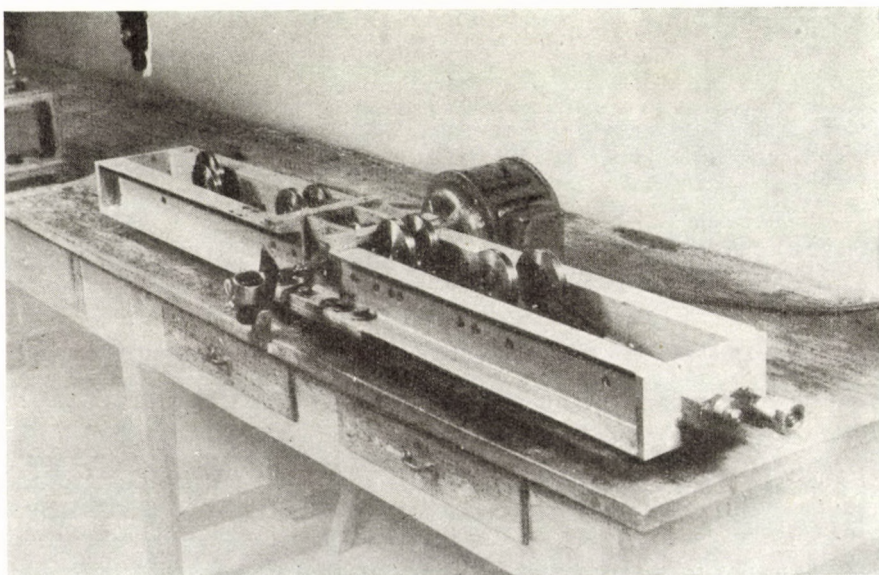


Fig. 10. Prototype d'un dispositif mécanique pour l'étude des charges pulsatives de quatre fils de 0,5 m de longueur. Les vis placées en bout servent à la prétension des fils

2.5.2. Fils droits

Les recherches sur la rupture des fils à des tensions variables ont donné les résultats suivants:

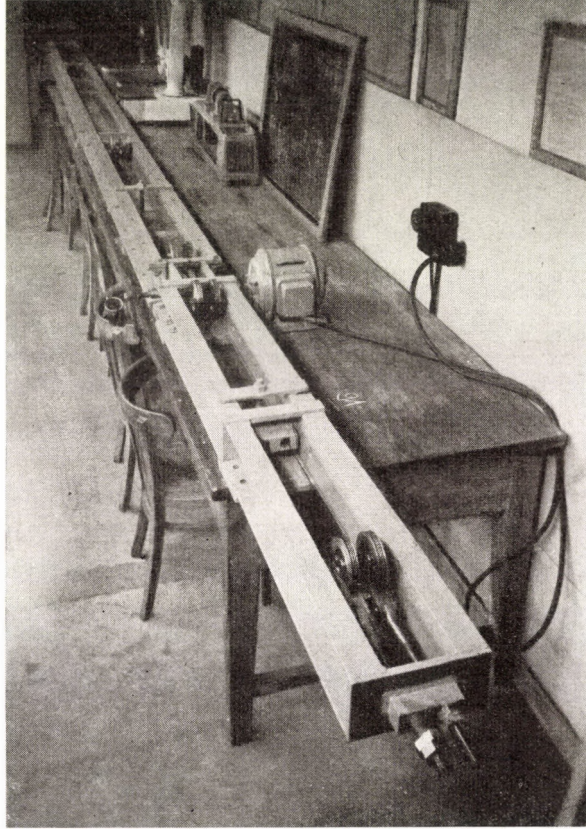


Fig. 11. Prototype d'un dispositif mécanique pour l'étude des charges pulsatives de quatre fils longs de 0,5 à 4 m. Ce dispositif permet la rupture de fils de n'importe quelle longueur, à droite et à gauche de la commande

Fil de $\varnothing 1,2$ mm

d'une résistance à la rupture statique $R_{zr} = 205$ kg/mm² (fig. 5), pré-contraint jusqu'à $\sigma_d = 105$ kg/mm² et étiré ensuite à plusieurs reprises à partir de la plus haute tension $\sigma_g = 162$ kg/mm². A la tension max $\sigma_g = 128$ kg/mm², ce fil s'est rompu après 2 millions de tensions variables. Les quotients des tensions s'élèvent à

$$\frac{\sigma_d}{R_{zr}} = \frac{105}{205} = 0,51,$$

$$\frac{\sigma}{R_{zr}} = \frac{23}{205} = 0,11,$$

$$\frac{\sigma_g}{R_{zr}} = \frac{133}{205} = 0,65.$$

Il s'ensuit de là qu'un fil droit de $\varnothing 1,2$ mm peut être tendu, en plus des vibrations dynamiques de $\sigma = \sigma_g - \sigma_d = 128 - 105 = 23$ kg/mm², si la tension initiale s'élève à $\sigma_d = 105$ kg/mm².

Tableau II

Résistance finales des fils de $\varnothing 1,2$ mm à $R_{zr} = 205$ kg/mm² en cas de tensions variables

N° d'ordre des éprouvettes	Tensions en kg/mm ²		Nombre des vibrations
	σ_d	σ_g	
1	105	122	> 2 000 000
2	105	123	> 2 000 000
3	105	128	2 052 400
4	105	134	711 400
5	105	138	444 300
6	105	162	47 000

Le Tableau II et le diagramme de la fig. 12 résument les résultats numériques des recherches.

Il ressort de ces expériences que la résistance du fil soumis à des tensions variables s'élève à 65% de la résistance à la rupture statique.

Fil de $\varnothing 1,5$ mm

d'une résistance à la rupture statique $R_{zr} = 248$ kg/mm² (fig. 6), précontraint jusqu'à $\sigma_d = 105$ kg/mm² et étiré ensuite à partir de la tension max. $\sigma_g = 197$ kg/mm². A la tension max. $\sigma_g = 138$ kg/mm² ce fil s'est rompu après 2 millions de tensions. Les quotients des tensions s'élèvent à

$$\frac{\sigma_d}{R_{zr}} = \frac{105}{248} = 0,42,$$

$$\frac{\sigma}{R_{zr}} = \frac{33}{248} = 0,133,$$

$$\frac{\sigma_g}{R_{zr}} = \frac{138}{248} = 0,555.$$

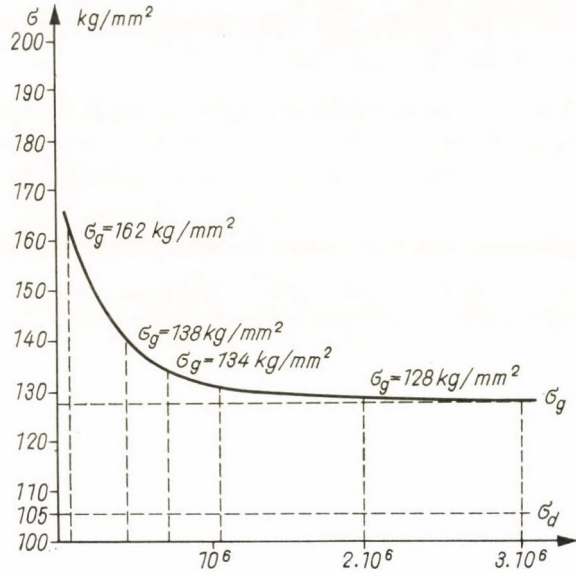


Fig. 12. Diagramme de la résistance du fil de $\varnothing 1,2$ mm aux charges pulsatives $\sigma_{inf} = 105$ kg/mm², $\sigma_{sup} = 128$ kg/mm². Résistance du fil aux charges statiques $R_{zr} = 205$ kg/mm²

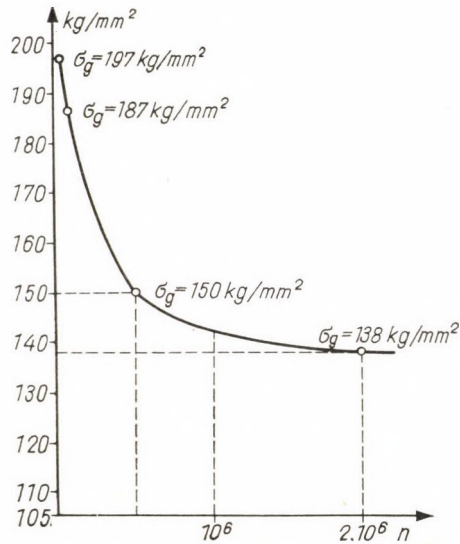


Fig. 13. Diagramme de la résistance du fil de $\varnothing 1,5$ mm aux charges pulsatives $\sigma_{inf} = 105$ kg/mm², $\sigma_{sup} = 138$ kg/mm². Résistance du fil aux charges statiques $R_{zr} = 248$ kg/mm²

Il s'ensuit de là qu'un simple fil droit de $\varnothing 1,5$ mm peut être tendu, en plus des vibrations dynamiques de $\sigma = \sigma_g - \sigma_d = 138 - 105 = 33$ kg/mm², si la tension initiale s'élève à $\sigma_d = 105$ kg/mm².

Le Tableau III et le diagramme de la fig. 13 illustrent les résultats numériques des expériences.

Tableau III

Résistances finales des fils de $\varnothing 1,5$ mm à $R_{zr} = 248$ kg/mm² en cas de tensions variables

N° d'ordre des éprouvettes	Tensions		Nombre des vibrations
	σ_d	σ_g	
1	105	128	> 2 000 000
2	105	132	2 052 400
3	105	138	2 000 100
4	105	150	598 900
5	105	187	40 000
6	105	197	14 200

Fil de $\varnothing 2,5$ mm

d'une résistance à la rupture statique $R_{zr} = 214$ kg/mm² (fig. 7), précontraint jusqu'à $\sigma_d = 105$ kg/mm² et étiré ensuite à plusieurs reprises à partir de la tension max. $\sigma_g = 170$ kg/mm². A la tension max. $\sigma_g = 123$ kg/mm², le fil s'est rompu après 2 millions de tensions variables.

Les quotients des tensions s'élèvent à

$$\frac{\sigma_d}{R_{zr}} = \frac{105}{214} = 0,49,$$

$$\frac{\sigma}{R_{zr}} = \frac{18}{214} = 0,084,$$

$$\frac{\sigma_g}{R_{zr}} = \frac{123}{214} = 0,575.$$

Il s'ensuit de là qu'un fil de $\varnothing 2,5$ mm peut être tendu en plus des vibrations dynamiques de $\sigma = \sigma_g - \sigma_d = 123 - 105 = 18$ kg/mm², si la tension initiale s'élève à $\sigma_d = 105$ kg/mm².

Le Tableau IV et le diagramme de la fig. 14 mettent en vue les résultats numériques des expériences.

Le Tableau V met en comparaison la résistance des fils de $\varnothing 1,2$, 1,5 et 2,5 mm à des tensions variables, à 2×10^6 vibrations.

Le diagramme de la figure 15 donne la comparaison des résultats.

Tableau IV

Résistance finale des fils de $\varnothing 2,5$ mm à $R_{zr} = 214$ kg/mm² en cas de tensions variables

N° d'ordre des éprouvettes	Tensions		Nombre des vibrations
	σ_d	σ_g	
1	105	170	162 000
2	105	147	500 000
3	105	133	1 000 000
4	105	126	1 500 000
5	105	123	2 000 000

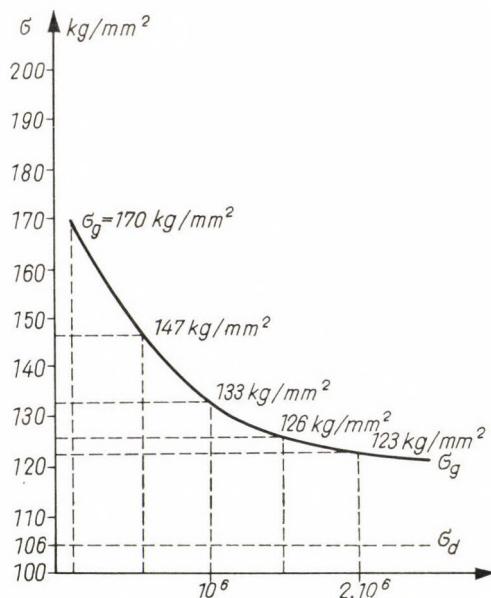


Fig. 14. Diagramme de la résistance du fil de $\varnothing 2,5$ mm aux charges pulsatives $\sigma_{inf} = 105$ kg/mm², $\sigma_{sup} = 123$ kg/mm². Résistance du fil aux charges statiques $R_{zr} = 214$ kg/mm²

2.5.3. Fils entrelacés ($2 \times \varnothing 1,5$ mm)

Afin de déterminer la résistance des fils doubles tordus à des tensions variables, on a dans une machine de traction, soumis à la rupture des fils doubles entrelacés de $\varnothing 1,5$ mm, de $R_{zr} = 248$ kg/mm², à pas de tresse de 5 cm. Les fils soumis à une tension initiale jusqu'à $\sigma_d = 105$ kg/mm² se sont rompus

à la tension $\sigma_g = 121 \text{ kg/mm}^2$ après 2 millions de tensions variables. Les quotients des tensions s'élèvent à

$$\frac{\sigma_d}{R_{zr}} = \frac{105}{248} = 0,425,$$

$$\frac{\sigma}{R_{zr}} = \frac{16}{248} = 0,0645,$$

$$\frac{\sigma_g}{R_{zr}} = \frac{121}{248} = 0,49, \quad \sigma_g = 0,5 R_{zr}.$$

Tableau V

Comparaison des résistances des fils de \varnothing 1,2; 1,5 et 2,5 mm en cas de tensions pulsatives

\varnothing et R_{zr} du fil	Tensions		Différence de tensions
	σ_d -inférieures σ_g -supérieures en kg/cm^2	Baisse	
Fil de \varnothing 1,2 mm $R_{zr} = 205 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_d = 10\ 500$ $\sigma_g = 12\ 800$	$R_1 = 0,62 R_{zr}$	2300
Fil de \varnothing 1,5 mm $R_{zr} = 248 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_d = 10\ 500$ $\sigma_g = 13\ 800$	$R_1 = 0,56 R_{zr}$	3300
Fil de \varnothing 2,5 mm $R_{zr} = 214 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_d = 10\ 500$ $\sigma_g = 12\ 300$	$R_1 = 0,57 R_{zr}$	1800

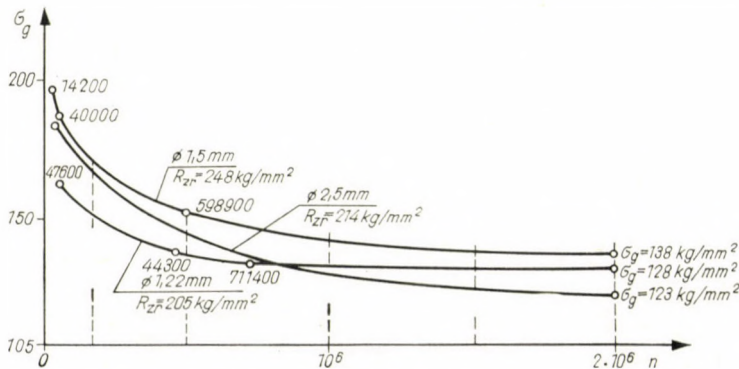


Fig. 15. Comparaison de la résistance aux charges pulsatives des fils de \varnothing 1,2 mm, 1,5 mm et 2,5 mm

Il s'ensuit de ces essais que les fils entrelacés de $\varnothing 1,5$ mm se rompent plus vite que les fils droits de même diamètre. La baisse de la résistance à la rupture par rapport aux fils droits est de 10% environ.

$$\sigma = \sigma_g - \sigma_d = 121 - 105 = 16 \text{ kg/mm}^2.$$

La figure 16 illustre les résultats des essais.

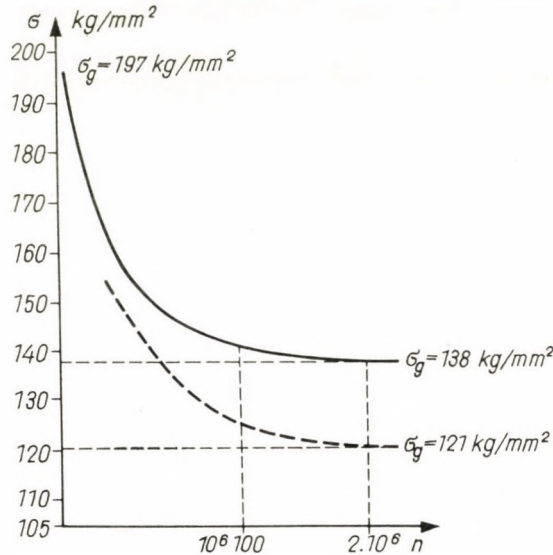


Fig. 16. Comparaison de la résistance des fils droits de $\varnothing 1,5$ mm et des fils doubles entrelacés ($2 \times \varnothing 1,5$ mm). Ligne pleine: résistance d'un simple fil droit $\sigma_d = 105 \text{ kg/mm}^2$; $\sigma_g = 138 \text{ kg/mm}^2$. Ligne interrompue: résistance d'un fil dans les fils doubles entrelacés $\sigma_d = 105 \text{ kg/mm}^2$; $\sigma_g = 121 \text{ kg/mm}^2$. Résistance du fil aux charges statiques $R_{zr} = 248 \text{ kg/mm}^2$

2.5.4. Fils entrelacés ($2 \times \varnothing 2,5$ mm)

On a soumis à des essais de traction des éprouvettes de fils doubles entrelacés de $\varnothing 2,5$ mm, de $R_{zr} = 214,0 \text{ kg/mm}^2$, à pas de tresse de 5 cm. Les fils soumis à une tension initiale jusqu'à $\sigma_d = 105 \text{ kg/mm}^2$ se sont rompus à la tension $\sigma_g = 110 \text{ kg/mm}^2$, après 2 millions de tensions variables. Les quotients des tensions s'élèvent à

$$\frac{\sigma_d}{R_{zr}} = \frac{105}{214,0} = 47$$

$$\frac{\sigma}{R_{zr}} = \frac{5}{214,0} = 0,0234$$

$$\frac{\sigma}{R_{zr}} = \frac{110}{214,0} = 0,515 \quad \sigma_g = 0,5 R_{zr}.$$

Il ressort de ces essais que les fils entrelacés de $\varnothing 2,5$ mm se rompent plus vite que les fils droits de même diamètre. La baisse de la résistance à la rupture par rapport aux fils droits est de

$$\sigma = \sigma_g - \sigma_d = 110 - 105 = 5 \text{ kg/mm}^2 \text{ environ.}$$

La figure 17 donne les résultats des essais.

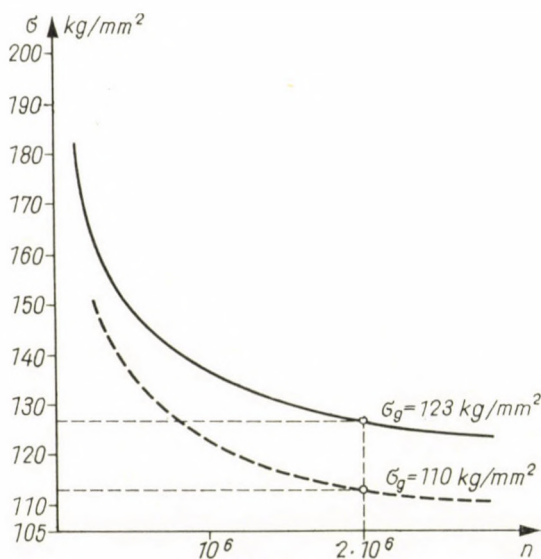


Fig. 17. Comparaison de la résistance des fils droits de $\varnothing 2,5$ mm et des fils doubles entrelacés ($2 \times \varnothing 2,5$ mm). Ligne pleine: résistance d'un simple fil droit $\sigma_d = 105 \text{ kg/mm}^2$; $\sigma_g = 123 \text{ kg/mm}^2$. Ligne interrompue: résistance d'un fil dans les fils doubles entrelacés. Résistance du fil droit aux charges statiques $R_{2r} = 214,0 \text{ kg/mm}^2$

THE STRENGTH OF THE CONCRETE AND BOUND STRESSING WIRES OF STRESSED CONCRETE STRUCTURES AFFECTED BY PULSATING FORCES

R. KOZAK

SUMMARY

The investigations dealt with in the paper refer chiefly to the strength of materials of stressed concrete structures with bound wires, the stressing of which was performed with the aid of wedging. It can be established, in general, that the strength of stressed concrete subjected to the effect of dynamic and pulsating forces is by 50% lower than if the same concrete is affected by static forces.

DIE FESTIGKEIT DES BETONS UND DER DRAHTEINLAGEN
VON DURCH PULSIERENDE KRÄFTE BEANSPRUCHTEN SPANNBETON-
VERBUNDKONSTRUKTIONEN

R. KOZAK

ZUSAMMENFASSUNG

Die im Aufsatz behandelten Untersuchungen beziehen sich hauptsächlich auf die Festigkeit der mit Hilfe von Haftung vorgespannten Spannbeton-Verbundkonstruktionen. Es kann im allgemeinen festgestellt werden, daß im Falle der Wirkung dynamischer und pulsierender Kräfte die Festigkeit des Spannbetons um 50% niedriger liegt als im Falle statischer Beanspruchungen.

ПРОЧНОСТЬ ПРОВОЛОЧНОЙ АРМАТУРЫ И БЕТОНА НАПРЯЖЕННЫХ
БЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИЛИПАЮЩЕЙ АРМАТУРОЙ, ПОДВЕРЖЕН-
НЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

Р. КОЗАК

РЕЗЮМЕ

Исследования, описываемые в данной статье, рассматривают прочность материалов напряженных расклиной бетонных конструкций. Вообще можно установить, что под воздействием динамических и пульсирующих нагрузок прочность напряженного бетона уменьшается на 50% по сравнению с прочностью при статической нагрузке.

UNTERSUCHUNG VON KENNZEICHNENDEN DATEN DER LINEAREN SCHWINDUNG VON GRAUGUSS

GY. NÁNDORI

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR EISENHÜTTENKUNDE DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE,
MISKOLC

[Eingegangen am 2. November 1962]

Die chemische Zusammensetzung, enthaltend die üblichen fünf Begleitelemente, das Gefüge und die Untersuchung der Festigkeitseigenschaften genügen in den meisten Fällen nicht zur Aufklärung der Unregelmäßigkeiten hinsichtlich der Schwindung von Graugußteilen. Zur näheren Untersuchung der Schwindungseigenschaften von Grauguß wurde das Verfahren zur Messung der linearen Schwindung verwendet. Auf Grund der aus den Versuchen gewonnenen Ergebnisse wurde nachgewiesen, daß eine unmittelbare Beziehung zwischen der gesamten vorperlitischen Schwindung (f), gemessen am Probekörper mit genormtem Durchmesser, und der Änderung der Festigkeitseigenschaften, ferner der des Gefüges besteht. Diese drei kennzeichnenden Eigenschaften des Graugusses ändern sich gemeinsam zwischen engen Grenzen. Auf Grund der Meßergebnisse wurde festgestellt, daß die Brinellhärte mit der gesamten vorperlitischen Schwindung (f), in folgender Beziehung steht: $HB = 322f + 52$. Auf Grund des Zusammenhanges, ($f = -0,6 l_{vp} + k$) errechnet aus den Daten der gesamten vorperlitischen Schwindung (b) und der Dehnung (d), kann man nützliche Folgerungen erhalten hinsichtlich der Beurteilung von Faktoren, die Schwindungshohlräume und innere Spannungen im Grauguß verursachen. Vorliegender Arbeit wünscht jene in der Gießerei auftretende Erscheinung zu erklären, wonach zwischen dichten Gußstücken und Gußstücken mit Kontraktionshohlräumen hinsichtlich der chemischen Zusammensetzung oft keine wesentlichen Abweichungen zu finden sind; die Untersuchungsmethode der linearen Schwindung ist auch in diesen Fällen für den Nachweis der Schwindungseigenschaften geeignet.

I. Einleitung

Beim Erstarren von Grauguß tritt ein wesentlich geringeres Schwinden ein als im Falle von Stahl; daher eignet sich der Grauguß für die Herstellung von Gußstücken mit komplizierter Form, oft sogar ohne die Verwendung von Aufgüssen. Die Art der Speisung ist einfacher und billiger als diejenigen Verfahren, die beim Stahl verwendet werden.

Die Erstarrung von Grauguß beginnt mit der Dehnung, verursacht durch das Ausscheiden des Kohlenstoffes in Form von Graphit. Dieser Vorgang ist verantwortlich für die bekannte Erscheinung, daß das Schwinden des Graugusses beim Übergang von der Schmelze bis zum Erstarren wesentlich geringer ist als das Schwinden des Stahles. Die genannte günstige Schwindungseigenschaft bedeutet jedoch nicht soviel, daß die Gießereifachleute, die sich mit der Herstellung von Graugußstücken beschäftigen, nicht oft durch unregelmäßige Schwindungsercheinungen vor schwierige Aufgaben gestellt werden. Durch das Schwinden können innere und äußere Lunker im

Grauguß auftreten, sehr oft jedoch werden die Gußstücke durch Mikrolunker und durch poröse Stellen (Bild 1), die zwischen den Dendriten auftreten und bereits bei kleiner Vergrößerung zu erkennen sind, unbrauchbar gemacht. Derartige Fehler kommen auch häufig bei Gußstücken vor, die man während langer Zeit fehlerlos hergestellt und an deren Herstellungsverfahren keine wesentlichen Änderungen vorgenommen hat. Die chemische Zusammensetzung, unter Berücksichtigung der üblichen fünf Elemente, gibt keine ausreichende Erklärung, und auch die Gefügeuntersuchung eignet sich nicht zur Feststellung der unmittelbaren Zusammenhänge. In den vergangenen Jahrzehnten



Bild 1. Kennzeichnende Gestalt der interdendritischen Porosität in Graugußstücken

sind viele Veröffentlichungen erschienen, die sich mit den Eigenschaften und Unregelmäßigkeiten der Schwindungserscheinungen beim Grauguß beschäftigen. Die Feststellung der Ursachen von Schwindungs-Unregelmäßigkeiten und interdendritischer Porosität läßt noch eine Reihe von ungelösten Fragen für die Forschung offen.

II. Vergleich der Meßverfahren zur Messung der räumlichen und linearen Schwindung von Grauguß

Der Grauguß, auf Normaltemperatur abgekühlt, nimmt ein kleineres Volumen ein als im flüssigen Zustand; diese Raumverminderung ergibt sich aus drei Hauptkomponenten:

- a) Raumverminderung im flüssigen Zustand bis zum Beginn der Erstarrung;
- b) Raumverminderung während der Erstarrung;
- c) Raumverminderung während der weiteren Abkühlung von der Erstarrung bis zur Zimmertemperatur.

Die Volumenverminderung im Schmelzzustand ist für die Beurteilung der Ausbildung von Schwindungshohlräumen nicht von Bedeutung, denn während dieses Vorgangs vermindert sich lediglich das Niveau des Metallspiegels.

Der Kontraktionslunker entsteht während der Kristallbildung; die innere Struktur, die Dichtigkeit des Gußstückes bildet sich in dieser Phase aus.

Während der Abkühlung, die der Erstarrung folgt, vermindert sich das Volumen des Gußstückes weiter, im Prinzip dem Dehnungskoeffizienten entsprechend. Dieser Vorgang beeinflusst jedoch nicht mehr wesentlich die Größe der Schwindungslunker, die während der Kristallbildung entstanden sind.

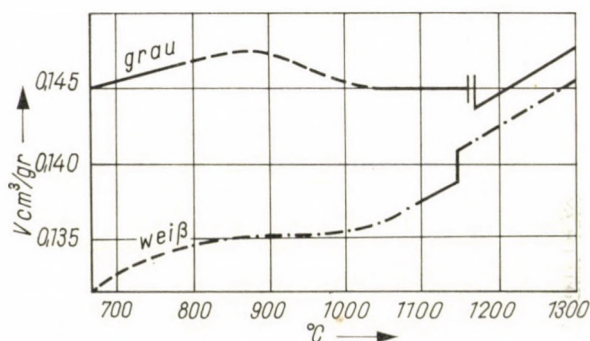


Bild 2. Änderung des spez. Volumens von weißem und grauem Gußeisen in Abhängigkeit von der Temperatur [1]

Das Volumen des Graugusses vermindert sich im flüssigen Zustand bis zum Beginn der Erstarrung; während der hierauf folgenden Abkühlungsperiode verursacht der ausscheidende Graphit eine bedeutende Vergrößerung des Volumens (Bild 2). Diese Volumenvergrößerung (Dehnung) verhindert die Ausbildung von zusammenhängenden Schwindungslunkern.

Die Größe des sich bildenden Schwindungslunkers im Grauguß hängt von der Menge des ausscheidenden Graphits (MEG) ab; je größer die eutektische Graphitmenge ist, mit um so kleinerem Schwindungslunker kann man rechnen [2]. Die im Grauguß vorhandene eutektische Graphitmenge hängt von den die Graphitbildung fördernden Komponenten, hauptsächlich von Si-Gehalt und von der Abkühlungsgeschwindigkeit ab. Eine in idealer Weise langsame Abkühlung vorausgesetzt, gibt das Bild 3, das lediglich von grundsätzlicher Art ist und viel Fragliches enthält, die ausscheidende Graphitmenge in Abhängigkeit vom Si-Gehalt an. Den größten Betrag von MEG wird durch die Sättigungsgrenze ($S_c = 1$), der kleinste Betrag durch das Lösungsvermögen für austenitischen Kohlenstoff bestimmt; die maximale theoretische Graphitmenge kann sich zwischen den beiden Grenzen ändern [3].

Zwischen der MEG und der Größe der im Grauguß entstandenen Schwindungshohlräume kann man einen unmittelbaren Zusammenhang feststellen (Bild 4). Auf diesem Zusammenhang beruhen im wesentlichen die Meßmethoden zur Messung der räumlichen Schwindung [4—5].

Die Schwindungslunker werden an zweckmäßig ausgebildeten technologischen Probekörpern gemessen, deren Form und Abmessungen in verschiedenen Variationen bekannt sind und deren eingehende Beschreibung in den einzelnen zusammenfassenden Arbeiten und Fachbüchern zu finden sind [6].

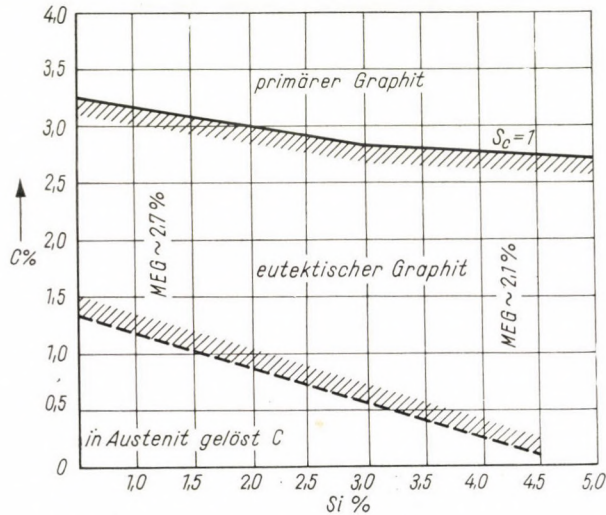


Bild 3. Im grauen Gußeisen gebildete eutektische Graphitmenge in Abhängigkeit vom Si- und C-Gehalt [3]

Der Zusammenhang, gezeigt im Bild 4, enthält neben seiner grundsätzlichen Bedeutung eine Reihe von Unsicherheiten. In der Praxis geht die Ausscheidung des eutektischen Graphits, infolge der veränderlichen Abkühlungsgeschwindigkeit, ferner infolge der spezifischen Eigenschaften der Einsatzstoffe, nicht ungehindert vor sich, daher ist die Größe der Schwindungslunker in der Praxis immer größer, als sie auf Grund des vorher genannten Zusammenhangs zu erwarten wäre.

Die Bestimmung der MEG ist eine schwerfällige und langwierige Aufgabe. Der räumliche Lunker kann nur in dem Fall richtig gewertet werden, wenn am Probekörper keine Porosität entsteht und die gesamte Schwindung konzentriert, in einem Hohlraum entsteht.

Es ist schwer, für den Meßwert der räumlichen Schwindung eine Beziehung mit den Ergebnissen der übrigen Untersuchungsverfahren, die für die Qualität des Graugusses kennzeichnend sind, zu finden. Die während der Prüfungen erhaltenen Meßwerte bewegen sich in engen Grenzen und daher

kann man keine gut auswertbare Ergebnisse erhalten. Das Verfahren, das die lineare Schwindung mißt, gibt bereits ausführlichere Aufklärung über die Volumenänderungen im Grauguß und ihr zeitlicher Verlauf kann mit großer Genauigkeit verfolgt werden. Die Prüfungen kann man an genormten Probekörpern durchführen, in dieser Weise können die gemessenen Werte mit den übrigen, für die Qualität des Gußeisens charakteristischen Daten verglichen werden.

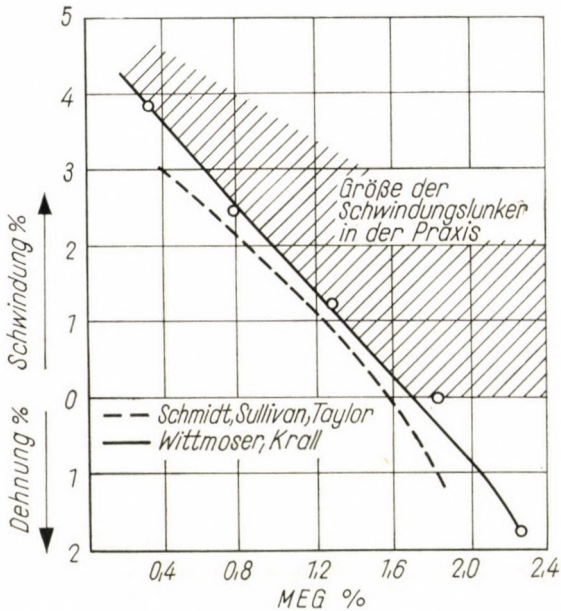


Bild 4. Gerechnete Werte der Volumenänderungen bei Grauguß in Abhängigkeit von der Menge des eutektischen Graphits [4—5]

Zwecks Messung der linearen Schwindung wurden viele Apparate konstruiert, die alle ein gemeinsames Hauptmerkmal besitzen, nämlich, daß man die lineare Längenänderung eines — meistens in Sand gegossenen — stabförmigen Probekörpers in Funktion der Zeit, vom Schmelzzustand bis zur vollkommenen Abkühlung mißt. Für die Messung der Längenänderungen werden konstruktive Ausführungen von verschiedener Anordnung, zur Erhöhung der Meßgenauigkeit, verwendet [7—8].

Bild 5 zeigt die charakteristischen Kurvenformen der linearen Schwindung. Die vertikale Achse zeigt die Längenänderungen des Probekörpers in mm, oder die Dehnung bzw. Verkürzung des Probekörpers in Prozenten, bezogen auf seine ursprüngliche Länge:

$$\Delta l[\%] = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100. \quad (1)$$

Hier bedeuten

Δl die Längenänderung in Prozenten, %;

l_1 die Länge des Probekörpers zum Zeitpunkt der Messung;

l_0 die Länge des eingeformten Probekörpers.

Die horizontale Achse stellt die Abkühlungszeit dar.

Die einfachste Form der Schwindungskurve im Falle von Gußeisen mit weißer Bruchfläche zeigt die Kurve 1 in Bild 5. Die anfängliche Dehnung des

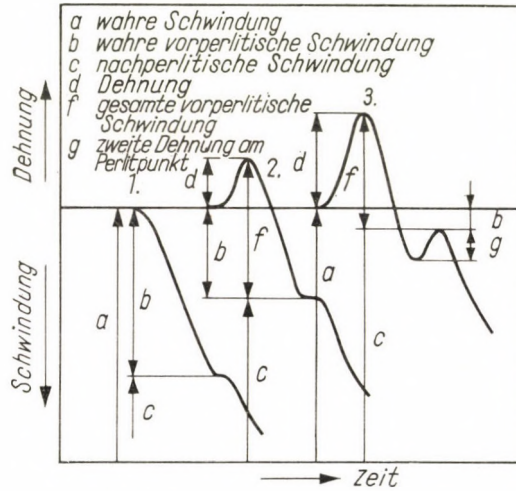


Bild 5. Kennzeichnende Daten der linearen Schwindungskurven von Gußeisen

Graugusses stellt die Entfernung (d) auf Kurve 2 und 3 dar. Die Schwindungskurve zeigt deutlich die eutektoide Umwandlung $\gamma - a$, wodurch die Kurve auf je einen Abschnitt vor und nach dem Perlitpunkt geteilt wird. Die Größe (f) zeigt die gesamte vorperlitisches Schwindung, die um den Betrag der mit (d) bezeichneten Dehnung größer ist als die mit (b) bezeichnete, wahre vorperlitisches Schwindung. Im Grunde genommen deutet der Betrag (b) an, bis zu welchem Grad sich die Länge des untersuchten Probekörpers im Vergleich zum eingeformten Probekörper während des Abkühlens bis zum Perlitpunkt verkürzte. Den Betrag (a) nennt man die wahre oder die technische Schwindung, der die Verminderung über die volle Länge des untersuchten Probekörpers im Vergleich zur Probe während der vollen Abkühlungszeit zeigt. Dieser Wert bedeutet bei der Modell-Herstellung das sog. Schwindmaß, um das man die Modellkanten vergrößert. Der Betrag (c) bezeichnet die Größe des Schwindens nach dem Perlitpunkt; er beträgt bei Metallen auf Eisenbasis, bei Stahl, bei Gußeisen von weißer und grauer Bruchfläche etwa 1%. Wenn am

Perlitpunkt im Verlauf der eutektoiden Umwandlung eine sekundäre Graphitausscheidung stattfindet, kann man auch über diesen Vorgang durch die Größe des Betrages (g) Aufklärung erhalten.

Aus den Daten der linearen Schwindungskurven kann man leicht erkennen, daß der Grauguß sich lediglich durch die vorperlitische Schwindungsgröße von der Schwindung des Gußeisens mit weißer Bruchfläche und des Stahles unterscheidet.

Aus den Daten der linearen Schwindungskurven kann man jedoch bedeutend mehr Aufschlüsse erhalten, als das im Falle der Untersuchung der räumlichen Schwindung allein möglich wäre. Die Dehnung, verursacht durch die Ausscheidung des Graphits während des eutektischen und eutektoiden Umwandlungsprozesses, wird von der Längenänderung des Probekörpers angezeigt; die beiden Vorgänge können voneinander zeitlich getrennt werden. Man kann die Änderung der Dehnung (d) und die wahre vorperlitische Schwindung (b) im Rahmen von Untersuchungen, die unter verschiedenen Bedingungen durchgeführt wurden, vergleichen, wenn die Abkühlungsgeschwindigkeit identisch ist. Zwischen der Längenänderung und dem Gefüge kann ein unmittelbarer Zusammenhang festgestellt werden, der wiederum in unmittelbare Beziehung gebracht werden kann zu den Festigkeitswerten, gemessen am genannten Probekörper. Wenn der Wert der wahren vorperlitischen Schwindung (b) wächst, so wächst auch die Menge des gebundenen Kohlenstoffs C zu Lasten des eutektischen Graphits, und dieser Vorgang steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Erhöhung der Brinnellhärte und der Zerreißfestigkeit [9].

Im Verlauf der Untersuchung der linearen Schwindung kann man zu der Feststellung gelangen, daß es bei der Prüfung des Gußeisens genügt, sich nur auf die Daten des Abschnitts zu beschränken, der vor dem Perlitpunkt liegt, da während der nach dem Perlitpunkt sich vollziehender Abkühlung eine Umwandlung nicht mehr vorkommt, neue Werte für die Auswertung nicht gewonnen werden, nur die Prüfzeit wird in unnützer Weise verlängert.

III. Zusammenhang zwischen Daten der linearen Schwindung und den Festigkeitseigenschaften des Graugusses

Die Daten der linearen Schwindung von Grauguß sind im wesentlichen Längenänderungswerte, die an einem stabförmigen Probekörper festgestellt wurden; diese Werte stehen im Zusammenhang mit der Ausbildung des Gefüges. Demzufolge kann man auf eine unmittelbare Beziehung folgern, die zwischen den am Probekörper feststellbaren Meßwerten und den Festigkeitseigenschaften besteht. Zur Untersuchung dieser Beziehungen wurden Versuche ausgeführt. Im Rahmen dieser Versuchsreihe wurden nahezu 200 Messungen zwecks Bestimmung der linearen Schwindung an Probekörpern

von 30 mm Durchmesser, 350 mm Länge, die in nasse Sandformen gegossen wurden, durchgeführt. Die Beschreibung der Versuchseinrichtung und der Versuchsmethode ist in einer früheren Arbeit eingehend beschrieben worden [9]. Das für die Versuche erforderliche flüssige Gußeisen wurde unter Betriebsverhältnissen in Kaltwind-Kupolöfen (von 700—800 mm Durchmesser) mit saurerer Ausfütterung und in einem Laboratoriumsofen nach Tamman von 8 kg Inhalt geschmolzen. Die chemischen und mechanischen Gefügeuntersuchungen wurden an den gegossenen Probekörpern durchgeführt, und es wurde versucht, zwischen den in dieser Weise gewonnenen Werten eine Beziehung zu finden.

Im Verlauf der Auswertung der Versuchsergebnisse konnte eine lineare Beziehung zwischen der gesamten vorperlischen Schwindung (f) und der Brinellhärte ermittelt werden. Diese Beziehung ist aus dem Bild 6 zu ersehen. Die Gleichung der Geraden, die durch den Punktschwarm der Meßwerte gelegt wurde, lautet:

$$HB = 322 f + 52, \quad (2)$$

$$f = \frac{HB}{322} - 0,16. \quad (3)$$

Die Gleichungen ergeben mit einer Streuung von ± 5 — 10% die zwischen der Brinellhärte und der gesamten vorperlischen Schwindung (f) bestehende Beziehung, und zwischen Chargen, die in den verschiedenen Öfen geschmolzen wurden, zeigt sich gleichfalls keine wesentliche Abweichung. Dieser Zusammenhang beleuchtet deutlich den Sinn des mit (f) bezeichneten Abschnitts der Schwindungskurve. (f) bedeutet nämlich die Summe ($d + b$) der Dehnung und der wahren vorperlischen Schwindung. Der Wert von (f) wächst proportional der Brinellhärte, mit anderen Worten, wenn im Gußeisen der Inhalt an gebundenem C wächst, so vermindert sich proportional die MEG; die Vergrößerung von (f) wird bei Verminderung von (d) durch die Erhöhung von (b) verursacht; die Verminderung der Dehnung ist geringer als die Vergrößerung von (b).

Bei den niedrigen Werten von (f) enthält bei einem Ferrit-Grundmaterial das Gefüge viel Graphit; dieser Zustand wird durch kleine Brinellhärte, ferner in der Schwindungskurve durch einen großen Wert von (d) und einen kleinen Wert von (b) gekennzeichnet.

Die Beziehung zwischen der Brinellhärte und der Zerreißfestigkeit des Gußeisens wird durch folgende Gleichung [10] ausgedrückt, die im Bereich von 15—40 kg/mm² für die Praxis verwendbare Werte liefert:

$$HB = 100 \cdot 4,3\sigma_B. \quad (4)$$

Die Beziehung, ausgedrückt durch die Gleichung (4) kann auch im Rahmen ihres Gültigkeitsbereiches mit den Werten der gesamten vorperlischen Schwindung (f) in Verbindung gebracht werden:

$$HB = 322 f + 52 = 100 + 4,3 \sigma_B,$$

woraus

$$f = 0,15 + 0,013 \sigma_B \quad (5)$$

und

$$\sigma_B = 75 f - 11. \quad (6)$$

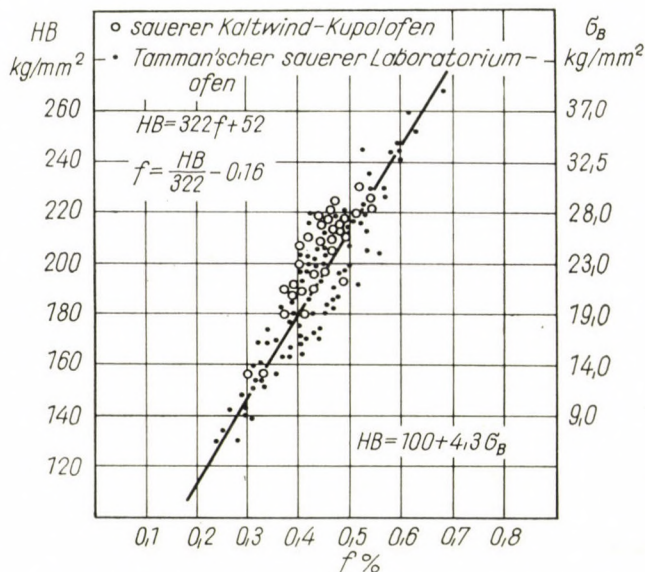


Bild 6. Beziehung zwischen der gesamten vorperlischen Schwindung (f) und der Brinellhärte, festgestellt an Gußeisenstäben von 30 mm Durchmesser und 350 mm Länge

Die Werte der Zerreißfestigkeit, die an einem genormten Probekörper von 20 mm Durchmesser, entnommen aus dem untersuchten Probekörper, gemessen wurden, ergeben die durch die Gleichungen (5) und (6) dargestellten Beziehungen mit einer Streuung wie sie bei der Brinellhärte auftrat. Eine Abweichung ergibt sich lediglich im Falle des weichen Roheisens und des Gußeisens, da die Beziehung in der Gleichung (4) bei Werten unter 15 kg/mm² ungenau wird. So z. B. kann die Härte von Probekörpern, mit einer Zerreißfestigkeit von 10—14 kg/mm², die aus weichem Roheisen gegossen wurden, zwischen 90—130 HB schwanken. In diesen Fällen bietet die Beziehung, die im Bild 6 dargestellt wurde, keine genauen Werte in bezug auf Zerreißfestigkeit und gesamte vorperlische Schwindung (f). Die bestehende Beziehung zwischen (f) und der Brinellhärte bietet auch in diesen Fällen reale Werte.

Aus dem im Bild 6 dargestellten Zusammenhang geht nicht hervor, in welchem Verhältnis die Größen (d) und (b) im Wert von (f) vertreten sind. Die in den Gußeisenstücken sich bildenden Lunker und Poren stehen nämlich in engem Zusammenhang mit der anfänglichen Größe der Dehnung. In der letzten Zeit beschäftigten sich viele Veröffentlichungen gerade mit dieser Frage.

Es ist bekannt, daß Gußeisen mit Kugelgraphit sich nur darin vom Gußeisen mit lamellarem Graphit hinsichtlich der Volumenänderung unterscheidet, daß seine anfängliche Dehnung fünf- bis zehnmal größer ist. Je größer die anfängliche Dehnung des Gußeisens mit Kugelgraphit ist, in um so höherem Maße entstehen in ihm Lunker und Porosität [11]. Mehrere Veröffentlichungen erläutern die neuartige Feststellung, daß für die Entstehung von äußeren und inneren, durch die Schwindung hervorgerufenen Lunkern auch die übertrieben große, anfängliche Dehnung verantwortlich sein kann. Formen von kleiner Festigkeit können nicht der Dehnung des erstarrenden Metalls widerstehen; Formen von großer Festigkeit, wie z. B. mit Zement-, und Wasserglasbindung, beschränken die anfängliche Dehnung und dadurch unterstützen sie die dichte Strukturausbildung der Gußstücke [12]

Bei der Ausbildung der Schwindungshohlräume der Graugußstücke spielt die Dehnung eine größere Rolle als die darauffolgende Schwindung. Diese scheinbar widersprechende Feststellung erscheint immer häufiger in der Literatur; sie wird jedoch auch durch die Ergebnisse einer bereits vorher veröffentlichten Arbeit bestätigt [13].

Bei der gesamten vorperlischen Schwindung der Gußeisensorten von verschiedener Qualität ändert sich das Verhältnis von (d) zu (b). Nach den oben erläuterten Ansichten erscheint es sehr wichtig, daß neben dem Wert von (f) auch das Verhältnis zwischen der wahren vorperlischen Schwindung (b) und der Dehnung (d) berücksichtigt wird.

Das Verhältnis zwischen der Dehnung und der wahren vorperlischen Schwindung steht mit dem Gefüge und den Festigkeitseigenschaften in engem Zusammenhang. Dieser Zusammenhang ist im Bild 7 zu sehen.

Wenn man aus den Werten der Schwindungskurven die Differenz $d - b$ bildet, dann können die Gußeisensorten in zwei große Gruppen geteilt werden:

$$1. d - b = (-)$$

der zahlenmäßige Wert der wahren vorperlischen Schwindung ist größer als der Betrag der Dehnung, der Wert von $d - b$ ist hierbei negativ. Eine derartige Eigenschaft besitzt der Perlitguß und die Stoffe des Maschinengusses von guter Qualität (Bild 7, Kurve 1).

$$2. d - b = (+)$$

der zahlenmäßige Wert der wahren vorperlischen Schwundung ist geringer als der von der Dehnung, demnach ist der Betrag $d - b$ positiv (Bild 7, Kurve 2).

Bei einigen besonderen weichen Roheisensorten gibt es keine meßbare Schwundung vor dem Perlitpunkt (Bild 7, Kurve 3), da die Erstarrung des Probekörpers bei einer so starken Dehnung stattfand, daß die gemessene

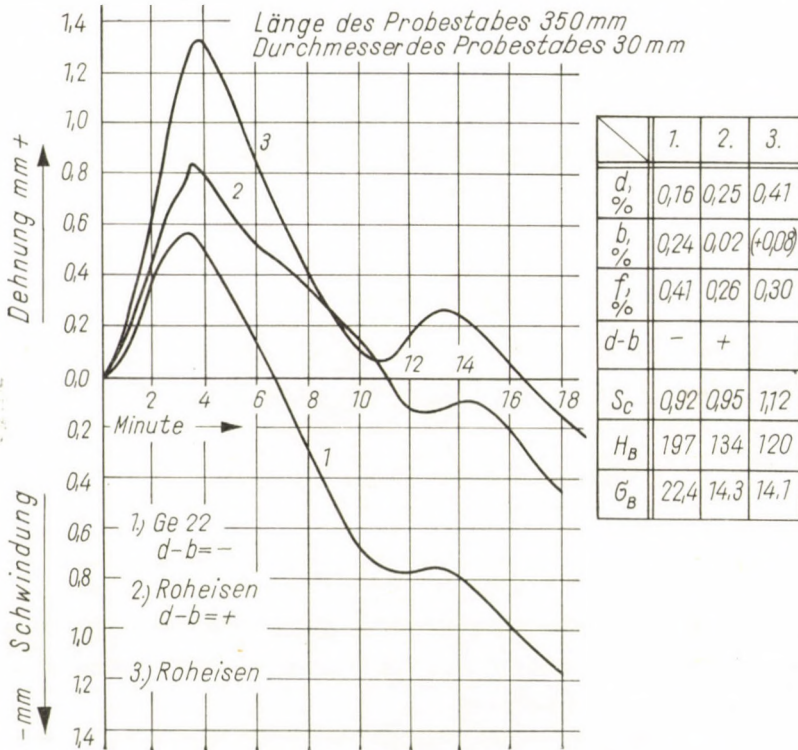


Bild 7. Änderung des Verhältnisses der gesamten vorperlischen Schwundung (f) zu der Dehnung (d), ferner der wahren vorperlischen Schwundung (b) im Falle verschiedener Gußeisensorten

Länge am Perlitpunkt größer war als das Längenmaß der Probe. In der täglichen Praxis trifft man allerdings sehr selten einen ähnlichen Fall an.

Man stelle die Differenz der Dehnung (d) und der wahren vorperlischen Schwundung (f) in folgender Form dar und bezeichne sie als *Schwundungsfaktor*:

$$\pm \Delta l_{vp} = d - b. \tag{7}$$

Der doppelte Wert von $\pm \Delta l_{vp}$ bedeutet, daß im Falle des Gußeisens bei der gesamten vorperlischen Schwundung (f) der Wert von (d) oder der von (b) den größeren Anteil ausmacht.

Wenn man die im Verlauf der Versuche erhaltenen Werte von (f) und der Brinellhärte als Funktion von $\pm \Delta l_{vp}$ darstellt, so erhält man, ähnlich dem Bild 6, eine lineare Beziehung, wie sie aus dem Bild 8 ersichtlich ist. Die Gleichung der Geraden, die durch den Punktschwarm gelegt werden kann, lautet:

$$f = -0,6\Delta l_{vp} + 0,4. \quad (8)$$

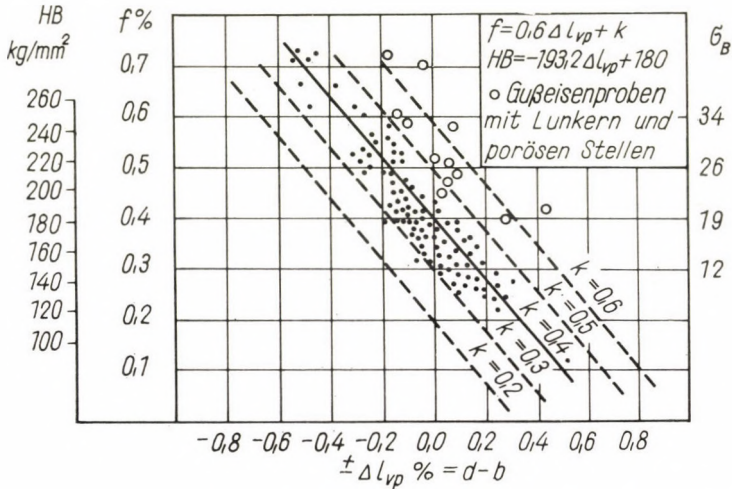


Bild 8. Änderung der gesamten vorperlitischen Schwindung (f) und der Brinellhärte in Abhängigkeit von dem Schwindungsfaktor (Δl_{vp})

Wenn man diese Gleichung und die Gleichung (3) zusammenzieht, dann ergibt sich folgende Beziehung

$$\frac{HB}{322} - 0,16 = -0,6 \Delta l_{vp} + 0,4.$$

Aus ihr ergibt sich die Beziehung zwischen dem Schwindungsfaktor $\pm \Delta l_{vp}$ und der Brinellhärte in Form der folgenden Gleichung:

$$HB = -193,2 \Delta l_{vp} + 180. \quad (9)$$

Die Gleichungen (8) und (9) fassen anschaulich die Beziehung zwischen den vor dem Perlitpunkt meßbaren Werten der linearen Schwindungskurven und den Festigkeitseigenschaften zusammen. Die Änderung des Vorzeichens vom Schwindungsfaktor (Δl_{vp}) zeigt an, welchen Anteil die Dehnung (d) und die wahren vorperlitische Schwindung (b) an der gesamten vorperlitischen

Schwindung des Gußeisens hat. Daher kann die Änderung der Werte von (d) und (b) in mit den Festigkeitseigenschaften Zusammenhang gebracht werden. Die im Bild 8 dargestellte Beziehung zeigt ferner, daß sich der absolute Wert von (f) vermindert, wenn die Dehnung des Gußeisens im Vergleich zur wahren vorperlitischen Schwindung wächst. Das bedeutet mit anderen Worten, daß wenn die Graphitausscheidung wächst (die gebundene C-Menge vermindert sich), so vermindert sich, infolge der größeren Menge an eutektischem Graphit oder der geringeren Abkühlungsgeschwindigkeit, im gleichen Verhältnis die Brinellhärte und der absolute Wert von (f).

Der Schwindungsfaktor (Δl_{vp}) des Perlit-Gußeisens ist negativ, d. h. die lineare Schwindungskurve enthält einen größeren (b) und einen kleineren (d) Abschnitt. Diese Erscheinung ist die Folge von der größeren, gebundenen Menge an C und der kleineren Menge an eutektischem Graphit. Je negativer der Wert von Δl_{vp} ausfällt, um so größer wird die Brinellhärte und der absolute Wert von (f).

Der Schwindungsfaktor (Δl_{vp}) der weichen Ferrit-Roheisen und Gußeisen ist positiv, d. h., in der linearen Schwindungskurve ist der zahlenmäßige Wert von (d) größer als der von (b), infolge des Ausscheidens einer großen Menge an eutektischem Graphit und wegen des geringeren Gehalts an gebundenem Kohlenstoff. Je größer der positive Wert von Δl_{vp} ausfällt, um so kleiner wird der Wert von (f) und die Brinellhärte.

Wenn man die Gleichung (8) in folgende Form bringt:

$$f = -0,6 \Delta l_{vp} + k \quad (10)$$

und den Wert der Konstanten mit k bezeichnet, so kann man bei verschiedenen Werten von k parallele Geraden ziehen (Bild 8).

Wenn

$$k > 0,4$$

ist, dann verschieben sich die Geraden nach den positiven Werten von Δl_{vp} , in diesem Fall wächst der Betrag von (d) im Vergleich zu (b) auf der linearen Schwindungskurve. Im Bild 8 sind die Ergebnisse von Untersuchungen hinsichtlich der linearen Schwindung dargestellt, die an Gußstücken mit großen äußeren und inneren Lunkern und porösen Stellen ausgeführt wurden; sämtliche Punkte fallen in das Gebiet $k > 0,4$. Dieser Umstand bekräftigt die oben erläuterten Ansichten, wonach die Dehnung von großem Ausmaß in enger Beziehung mit den Schwindungsanomalien des Graugusses steht.

Wenn die Konstante der Gleichung (10)

$$k < 0,4$$

ist, dann wächst der Wert von (b) im Vergleich zu (d) auf der linearen Schwindungskurve. In diesem Fällen wird der negative Wert von Δl_{vp} größer. Je größer

der negative Wert von Δl_{vp} ist, in um so stärkerem Maß wachsen (f) und (b); das heißt soviel, daß die während der Zeiteinheit stattfindene Kontraktion hiermit verhältnismäßig wächst. Dieser Vorgang kann zur Ursache von inneren Spannungen in den Gußstücken werden und mit der Entstehung von Rissen in Zusammenhang stehen.

Auf Grund des bisher Gesagten ist es ersichtlich, daß die vorperlitische Längenänderung des Probekörpers von normtem Durchmesser, der im Rahmen der Messungen der linearen Schwindung geprüft wurde, in Zusammenhang steht mit der Ausbildung des Gefüges und der Festigkeitseigenschaften. In der Kenntnis der gesamten vorperlitischen Schwindung (f) erhält man nützliche Folgerungen hinsichtlich der Beurteilung von Faktoren, die die Schwindungslunker des Graugusses und die inneren Spannungen verursachen, sofern letztere eingehender untersucht werden.

IV. Der Zusammenhang zwischen den Werten der linearen Schwindung und der chemischen Zusammensetzung

Es wurde versucht, zwischen den im Laufe der Versuche gewonnenen Werten der linearen Schwindung und der chemischen Zusammensetzung der Probekörper genau denselben Zusammenhang zu finden, wie er im Falle der Festigkeitseigenschaften erhalten wurde.

Die chemische Zusammensetzung sollte in verschiedener Weise gekennzeichnet werden, d. h. durch den Si-Gehalt oder den äquivalenten Kohlenstoff ($C + 1/3 Si$). Am zweckmäßigsten erschien es, die Daten der linearen Schwindung in Abhängigkeit von dem allgemein bekannten Sättigungsgrad (S_c) zu untersuchen. Diese Vergleiche zeigten nicht mehr dieselben eindeutigen Zusammenhänge, wie sie durch die Gleichungen (2), (5), (9) und (10) dargestellt werden. Dieser Umstand bedeutet keineswegs soviel, daß kein enger Zusammenhang zwischen der chemischen Zusammensetzung des Gußeisens und der Änderung der Schwindungs- und Festigkeitseigenschaften besteht und in dieser Beziehung in der Literatur und in der Praxis eingebürgerten Zusammenhänge nicht zutreffend wären. Die chemische Zusammensetzung des Gußeisens bedeutet aber in der täglichen Praxis die Kenntnis der üblichen fünf Elemente, außerdem üben jedoch noch andere Faktoren einen Einfluß auf die Ausbildung des Gefüges, auf die Festigkeits- und gießtechnischen Eigenschaften aus, so z. B. die frei gewordenen Gase, die Spurenelemente und die nichtmetallischen Einschlüsse. Ihr Einfluß ist schwer kontrollierbar, und sie können Änderungen verursachen, für die man durch die Kenntnis der fünf Elemente allein ausreichende Erklärung erhalten kann.

Aus den Arbeiten von A. WAGNER [14] und F. ROLL [15] ist die Tatsache bekannt, daß unter Berücksichtigung der üblichen fünf Elemente im gegos-

senen Roheisen bei derselben Zusammensetzung und unter denselben Bedingungen, der Gehalt an gebundenem Kohlenstoff verschieden sein kann. Auf Grund des gebundenen C-Gehaltes hat man die Roheisensorten in zwei Gruppen geteilt, je nach ihren harten und weichen Eigenschaften; ihre Wirkung kommt auch nach dem Umschmelzen zur Geltung.

Es ist eine bekannte Erscheinung in der Gießerei, daß die Härte, die gießtechnischen Eigenschaften von Gußstücken identischer Zusammensetzung veränderlich sein können, also an Gußstücken, von gleichen Abmessungen und in derselben Gießerei hergestellt, zeitweise abweichende Härten gemessen werden können [16].

Die hier erläuterten Erscheinungen wurden in der letzten Zeit von W. PATTERSON [10] zusammengefaßt, und die Schwankungen in der Härte der Graugußstücke durch folgende mathematische Beziehung gekennzeichnet:

$$RH = \frac{HB}{100 + 4,3 \sigma_B} \quad (11)$$

und er nannte diese, für die Qualität des Gußeisens kennzeichnende Größe die »relative Härte«. Demnach ist die Qualität einer Gußeisensorte um so besser, je kleiner die Brinellhärte im Vergleich zur Zerreißfestigkeit ist. Nach Ansicht von W. PATTERSON können vor der linearen Beziehung zwischen Brinellhärte und Zerreißfestigkeit Abweichungen auftreten, die mit den spezifischen Eigenschaften der Einsatzstoffe und den metallurgischen Verhältnissen (z. B. Überhitzung, Impfung des Schmelzens) in Zusammenhang stehen.

A. COLLAUD [17] betrachtet diese Schwankungen nicht als anomal; außerordentliche Abweichungen fand er selbst dann nicht, wenn er die relative Härte als Funktion des Sättigungsgrades untersuchte.

Bei der Auswertung der im Verlauf der Versuche gewonnenen Ergebnisse wie es in den Bildern 6 und 8 zu sehen ist, konnte die in der Gleichung (4) ausgedrückte Beziehung zwischen der Zerreißfestigkeit und der Brinellhärte den Werten aus der Literatur entsprechend dargestellt werden, darüber hinaus jedoch wurde eine lineare Beziehung zwischen der Brinellhärte und der gesamten vorperlischen Schwindung (f) nachgewiesen.

Als es versucht wurde, die im Verlauf der eigenen Versuche gewonnenen Daten in Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung darzustellen, wurde eine derartige Streuung der Ergebnisse gefunden, daß ihre Darstellung in einem Diagramm als nicht erforderlich erschien. Zwecks weiterer Klärung dieser Frage wurden aus den Versuchsdaten 30 verschiedene Meßergebnisse ausgewählt, deren chemische Zusammensetzung, unter Berücksichtigung der üblichen fünf Elemente, fast die gleiche war, und die Brinellhärte wurde in Funktion der gesamten vorperlischen Schwindung (f) dargestellt. Die so gewonnene Beziehung ist dem Bild 9 zu entnehmen.

Aus den extremen Werten der chemischen Zusammensetzung wurde die untere und obere Grenze des Sättigungsgrades (S_c) errechnet. Die Abbildung zeigt in auffallender Weise, selbst bei annähernd identischer Zusammensetzung, die Beziehung, die zwischen der gesamten vorperlischen Schwindung (f) und der Brinellhärte festgestellt wurde (Bild 6, Gleichung 2). Die Zerreifestigkeitswerte, gemessen an den Probenkörpern, entsprechen innerhalb der Gültigkeitsgrenze der Beziehung, die in der Gleichung (4) ausgedrückt wurde.

Aus den Werten des Bildes 9 kann festgestellt werden, daß eine *unmittelbare Beziehung zwischen dem Gefüge, den Festigkeitseigenschaften des Gueiseis und der linearen Schwindung in dem vorperlischen Abschnitt vorhanden ist*, und daß sich diese drei kennzeichnenden Eigenschaften innerhalb enger Grenzen gemeinsam ändern. Die gemeinsame Änderung von diesen drei Faktoren, unter Berücksichtigung gleicher Abkühlungsgeschwindigkeit, ist eine Funktion der chemischen Zusammensetzung, die sich jedoch nicht allein auf die Kenntnis der fünf Elemente beschränken kann. Mit anderen Worten, die gemeinsame Änderung von den genannten drei Faktoren ist nicht unbedingt eine Funktion der chemischen Zusammensetzung, ausgedrückt durch die üblichen fünf Elemente.

Im Interesse der eingehenderen Untersuchung dieser Frage kann die Brinellhärte mit dem Sättigungsgrad in Beziehung gebracht werden. Diese Verknüpfung kann auf Grund der Gleichung (4), sowie unter Berücksichtigung der von P. HELLER und H. JUNGBLUTH [17] erläuterten Beziehung erfolgen, wonach die am genormten Probekörper von 30 mm Durchmesser gemessene Zerreißfestigkeit mit dem Sättigungsgrad in folgender Beziehung steht:

$$\sigma_B = 100,6 - 80 S_c . \quad (12)$$

Da

$$\sigma_B = \frac{HB}{4,3} - 23,5 = 100,6 - 80 S_c ,$$

so ist

$$HB = 532,5 - 344 S_c . \quad (13)$$

Wenn man mit der in dieser Weise erhaltenen, als normal anzusehenden Brinellhärte die von W. PATTERSON definierte relative Härte ausdrückt, so erhält man folgende Beziehung:

$$RH = \frac{HB}{532,5 - 344 S_c} . \quad (14)$$

In diesem Fall wurde eine Beziehung zwischen der relativen Härte und dem Sättigungsgrad, der die üblichen fünf Elemente enthält, dargestellt.

Im Bild 9 wurden die Werte der relativen Härte, die mit Hilfe der Gleichung (14) errechnet werden konnten, angegeben. Die zur Berechnung erforderlichen Daten enthält auch die Abbildung. Aus der Beziehung, die im Bild dargestellt ist, geht deutlich hervor, daß Gußeisensorten mit nahezu derselben Sättigung und Zusammensetzung (allerdings nur die fünf Begleitelemente berücksichtigter d) voneinander sehr abweichende Festigkeits- und Schwindungseigenschaften aufweisen können. Das Bild 9 veranschaulicht auch die Beziehung, die von A. WAGNER und F. ROLL auf Grund von praktischen

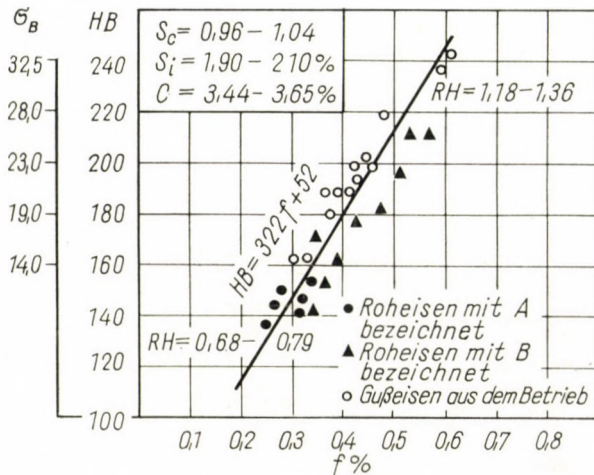


Bild 9. Beziehung zwischen der Brinellhärte und der vollen gesamten vorperlitischen Schwindung bei Gußeisen von annähernd gleicher chemischer Zusammensetzung und Sättigung

Beobachtungen festgestellt wurde, und wovon man sich in der täglichen Praxis überzeugen kann. Unter Betriebsverhältnissen kann man erhebliche Schwankungen hinsichtlich der Festigkeitseigenschaften des Gußeisens, ferner der errechneten und tatsächlichen Zusammensetzung der Ofenbeschickung beobachten. Unter Zugrundelegung der gleichen chemischen Zusammensetzung kann man genau so spröde Gußstücke von großer Härte oder weiche Gußstücke mit nicht ausreichender Härte erhalten. In kennzeichnender Weise werden diese Verhältnisse von den Schwindungskurven und von den übrigen Daten im Bild 10 veranschaulicht. Einer Schmelze von Hämatit-Roheisen wurde in verschiedenen Mengen Metall-As zugegeben; dieser Zusatz veränderte die ursprünglichen Eigenschaften des Roheisens. Mit diesem Beispiel sollte demonstriert werden, daß Roheisen und Gußeisen außer den fünf Begleitelementen immer noch Spurelemente in geringer Menge enthalten, die man in der täglichen Praxis nicht beachtet, obzwar sie auf das Gefüge, auf die Schwindungs- und Festigkeitseigenschaften des Gußeisens eine Wirkung ausüben können, über welche die Kenntnis der üblichen chemischen Zusammen-

setzung keine ausreichende Erklärung gibt. Es ist bekannt, daß die anfängliche Dehnung auch mit der Menge der gelösten und frei gewordenen Gase im Zusammenhang steht. Mit vorliegenden Ausführungen sollte eine Erklärung für die allgemein bekannte Gießerei-Erfahrung gegeben werden, wonach zwischen der chemischen Zusammensetzung von dichten und Lunker enthaltenden Gußstücken kein wesentlicher Unterschied besteht. Die Untersu-

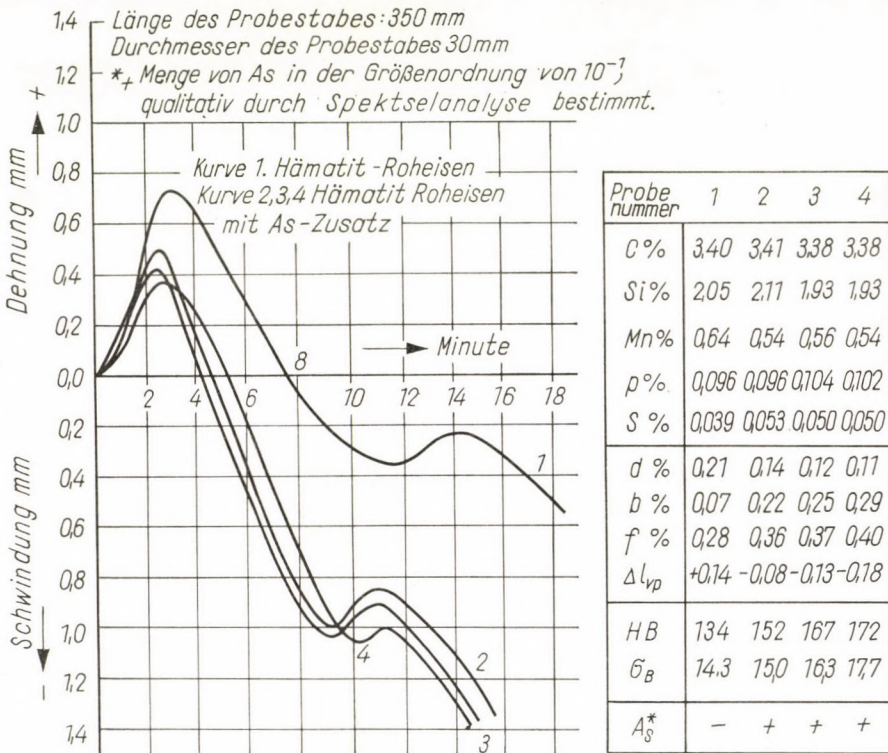


Bild 10. Änderung der Schwindungs- und Festigkeitseigenschaften eines grauen Gießereiroheisens durch Einwirkung eines As-Zusatzes

chung der linearen Schwindung eignet sich, selbst bei annähernd gleicher Zusammensetzung, zum Nachweis der Veränderungen von Schwindungseigenschaften.

SCHRIFTTUM

1. SAUERWALD, F.: *Z. Anorg. Allg. Chem.* (1924), 327; (1925), 273. *Berichter PIWOWARSKY, E.: Gußeisen.* Springer Verlag, 1951.
2. HÜTTER, L.: *Gießerei* **40** (1953), 455—457.
3. HANEMANN, H.: *Stahl und Eisen* **47** (1927), 633—695. JASS, H.—HANEMANN, H.: *Gießerei* **25** (1938), 293—299.
4. WITTMOSER, A.—KRALL, A.—HÜTTER, L.: *Gießerei* **43** (1956), 409.

5. SCHMIDT, W. A.—SULLIVAN, E.—TAYLOR, H. F.: *Trans. Am. Foundrymen Soc.* **62** (1954), 70—77.
6. SCHLEICHER, A.: *Vaskohászati Enciklopédia VIII/1*, 97. Akadémiai Kiadó, Budapest 1961.
7. BARDENHEUER, P.—EBBENFELD, C.: *Mitt. K. W. Inst. für Eisenforsch.* **6** (1926), 45.
8. BARDENHEUER, P.—BOTTENBERG, W.: *Mitt. K. W. Inst. für Eisenforsch.* **13** (1931), 149.
9. NÁNDORI, GY.: *Kohászati Lapok—Öntöde* (Gießerei) (1960), 241—247.
10. PATTERSON, W.: *Gießerei* **45** (1958), 385—387.
11. WASCHENKO, K. T.—TODOROV, R. P.—SISCSENKO, W.: *Freiberger Forschungshefte* **24/III** (1958), 46.
12. ADAMS, C.—FLEMMINGS, M. C.—TAYLOR, H. F.: *British Foundrymen* (1958), 625.
NICOLAS, K. E.—HUGHES, C. H.: *British Foundrymen* (1958), 429.
HUGHES, C. H.: *Foundry Trade Journ.* (1961), 491.
13. NÁNDORI, GY.: *Nyomelemek hatása az öntöttvas zsgorodási tulajdonságaira* (Wirkung der Spurelemente auf die Schwindungseigenschaften von Gußeisen). Vortrag, gehalten auf der II. Ung. Gießerei Konf. Okt. 1961, Budapest.
14. WAGNER, A.: *Stahl und Eisen* (1926), 1005; (1927), 1081.
15. ROLL, F.: *Gießerei* (1938), 321.
16. FEIL, E.: *Die Neue Gießerei* **16** (1950), 313.
17. COLLAUD, A.: *Kohászati Lapok—Öntöde* (Gießerei) **12** (1961), No. 4—5, 47. Vortrag, gehalten auf dem 27. Int. Gießerei Kongr. Zürich, 1960.

INVESTIGATION OF THE CHARACTERISTIC DATA OF LINEAR SHRINKAGE OF THE GRAY IRON

GY. NÁNDORI

SUMMARY

The chemical composition concerning the five commonly known elements are not always suitable to determine directly the irregular shrinkage behaviour of the gray iron. The method of linear shrinkage measuring have been used for the investigation of the shrinkage behaviours of the gray iron. According the results of the investigations carried out on the standard specimen bars may be seen that the whole linear shrinkage measured before the perlit point (f) is in close relation with the change of the microstructure and the mechanical properties. These typical properties of the gray iron are changing within close limits. According the results of the measuring of the linear shrinkage may be found the connection between Brinell hardness and the whole linear shrinkage before the perlit point (f) and may be expressed by the next equation: $HB = 322f + 52$. The relation $f = -0,6 \Delta l_{vp} + k$ calculated from the data of the real linear shrinkage before the perlit point (b) and the expansion (d) shows useful conclusions for the origin of of the inside porosity and stresses of gray iron castings. This paper presents informations for the foundry experiences in the case if the chemical composition of the casting containing deleterious shrinkage porosity and castings without these defects are nearly the same. The method of the measuring of the linear shrinkage are suitable in these case for the shrinkage properties of the gray iron.

ÉTUDE DES DONNÉES CARACTÉRISTIQUES DU RETRAIT LINÉAIRE DE LA FONTE GRISE

GY. NÁNDORI

RÉSUMÉ

L'étude de la composition chimique contenant les cinq éléments habituels et celle de la microstructure et des propriétés mécaniques ne permettent pas, dans la plupart des cas, de découvrir les anomalies du retrait de la fonte grise. En vue de l'étude plus détaillée des propriétés de retrait de la fonte, l'auteur a appliqué la méthode de mesure du retrait linéaire. Les résultats des essais effectués permettent de démontrer que le retrait total jusqu'au point perlitique (f)

mesuré sur une éprouvette de diamètre standard est en relation directe avec la variation de la microstructure et des propriétés mécaniques. Ces trois propriétés caractéristiques de la fonte grise varient ensemble dans d'étroites limites. Les résultats d'essais ont permis de constater qu'entre la dureté Brinell et le retrait total avant le point perlitique, existe la relation suivante: $HB = 322f + 52$. Sur la base de la relation ($f = -0,6 \Delta l_p + k$), calculée des données du retrait réel avant le point perlitique (b) et la dilatation (d), on peut faire des conclusions utiles pour l'évaluation des facteurs produisant les retassures et les contraintes intérieures de la fonte. L'étude se propose d'expliquer ce phénomène observé lors de la fonte, que des fontes compactes ou renfermant des retassures présentent souvent une composition chimique peu différente. La méthode d'examen du retrait linéaire permet, même dans ce cas, de relever la variation des propriétés de retrait.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРНЫХ ДАННЫХ ЛИНЕЙНОЙ УСАДКИ СЕРОГО ЧУГУНА

Д. НАНДОРИ

РЕЗЮМЕ

Химический анализ по обычно принятым пяти элементам, определение структуры и механических свойств в большинстве случаев не могут служить для непосредственного выяснения аномальной усадки чугуновых отливок. Для более тщательного исследования усадочных свойств чугуна, применен метод замера линейной усадки. Из результатов исследований сделан вывод, что полная усадка до перлитной точки (f), замеренная на образце стандартного диаметра, непосредственно связана с изменением структуры и механических свойств. Эти три характерных свойства серого чугуна в узких пределах изменяются совместно. На основе результатов измерений установлено, что твердость по Бринеллю связана с усадкой до полной перлитной точки следующим образом: $HB = 322f + 52$. Действительная усадка (b) до полной перлитной точки и разбухание (d) на основе рассчитанной по этим данным зависимости ($f = -0,6 \Delta l_{ep} + k$) позволяют сделать полезные выводы относительно оценки факторов, приводящих к образованию усадочных раковин и внутренних напряжений в сером чугуне. Работа дает ответ на вопрос о том, что зачастую между химическим составом плотных и содержащих усадочные раковины отливок нет существенной разницы, и что метод исследования линейной усадки и в таких случаях пригоден для выявления изменений усадочных свойств.

STUDY OF THE DIRECT REDUCTION

A. SCHEDEL

[Manuscript received November 13, 1962]

Author describes the theoretical reasons which had justified the examination of the action of reducing agents introduced into the interior of the iron ore by grinding and briquetting. In course of the reduction under laboratory conditions of iron oxides briquettes containing breeze in city gas, it was found that a coke powder quantity containing not more than 11% carbon was enough to bring about the complete reduction of the iron oxide to metallic iron at temperatures below 1100° C, that is, in the solid phase. Examination of the process has shown that, as a result of the processes of reduction, uniformly distributed elementary carbon is deposited within the briquette, that is the briquette is carbonized, whereby a favourable physical state for direct reduction arises. The author calls the above process "fluidity in the solid state". In the process the reduction of CO₂, formed by the reduction process and the decomposition of the carbonates to CO, initiates an autocatalytic process in which the same carbon atom may repeatedly participate in the reduction process. The experiments carried out so far are not sufficient to allow for final conclusions, therefore, the author suggests that further experiments should be carried out.

The extensive study of the reaction mechanism of iron ores raised a number of new viewpoints which has made it necessary to reconsider how closely the conditions of ideal reduction could be realized in the classic blast furnace and how these conditions could be met with by physical composition, preparation and method of addition of the furnace mixture. In addition, an ever increasing number of specialists maintain that the present system of pig iron and steel production is out of date, as more and more processes have become known by-passing the production of pig iron in the direct production of steel. They are, therefore, of the opinion that the time is ripe for the fundamental reassessment of the conservative method of iron and steel production. Let us now consider the details of these questions:

Three quarters of the heat requirement of the blast furnace are, in general met with by the oxidation of carbon, and one quarter by the heat content of the blast. In principle, there is no difference between the two, as the air heaters are also heated by the top gas which is formed through the oxidation of carbon. In the customary blast furnaces 76.3% of the carbon used is firing coal, while 19.3% is used for reduction and 4.4% for the carbonization of pig iron. The energetically ideal state would be reached if heating and reduction could be separated. In this case the carbon oxidized to CO₂ could be utilized for heating, thus providing the greatest heat production, while reduction would be performed by pure carbon, carbon monoxide and hydrogen.

Essentially, reduction is the removal of the oxygen of iron oxide. As one C atom binds two oxygen atoms, while CO binds only one, thus — neglecting thermodynamic considerations — only half the quantity of carbon is needed for direct reduction as for the indirect one. The quantity of carbon necessary for the reduction of one atom or one equivalent Fe from the various iron oxides is shown in Table I.

Table I

Iron oxide	Reduction			
	Indirect	Direct	Indirect	Direct
	Atom		Weight, %	
Fe ₂ O ₃	1.50	0.75	32.20	16.10
Fe ₃ O ₄	1.33	0.67	28.64	14.32
FeO	1.00	0.50	21.46	10.73

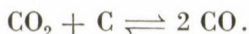
The greater efficiency of direct reduction justifies the search for a technical solution which would correspond to the best possible physical conditions of direct reduction.

There are still a number of specialists who are of the opinion that from the viewpoint of the utilization of heat, and thus of general economy, direct reduction is less favourable than indirect reduction. To say the least these views are biased and not confirmed by facts. According to PAVLOV [1] there are already such furnaces which consume less heat in the *overall* process than the theoretical requirement calculated for indirect reduction alone.

For the sake of accuracy we wish to deal here with the unequivocal definition of direct and indirect reduction. According to older textbooks, during direct reduction CO is formed which indirectly carries on the reduction. This erroneous conception was, however, refuted by the experiments carried out in vacuo by BAUKLOH and DURRER [2] who proved that in direct reduction CO₂ is also directly formed. If the quantity of carbon is not more than is needed for the binding of the oxygen of the iron oxide in the form of CO₂ and the contact between the carbon and iron oxide particles is sufficiently intimate, then *at the appropriate temperature only CO₂ can be formed theoretically*. Naturally, this is but the theoretical limit which is valid for mixtures of molecular dispersity. It would be difficult to imagine that in the presence of sufficient quantity of oxygen at an appropriate temperature the oxidation process were to take place not in one step, but according to oxide stages step by step, separately.

This mistake of the older textbooks might perhaps be explained by the fact that direct reduction does not take place at temperatures below 900° C,

and at higher temperatures the formed CO_2 is no longer stable in the presence of carbon, but is reduced to CO according to the following process



However, this is no longer the reduction of the *iron ore*, but of the *carbon dioxide* formed, and thus, no longer an initial but a secondary process. Therefore, in the present study we understand by direct reduction the reduction initiated by the solid carbon and by indirect reduction the reduction due to the carbon monoxide gas, both resulting in carbon dioxide.

In the blast furnace there is so little possibility of contact between ore and carbon is so small that direct reduction based on such a contact can only be but slight. Thus, direct reduction is mainly based on elementary carbon precipitated by the Boudouard reaction. The experiments carried out by HORUNOV [3] have, however, shown that elementary carbon is precipitated on the surface of the ore particles and only penetrates the ore itself to a negligible extent. In their extensive study BAUKLOH and EGER [4] have found a correlation between the porosity of the ore and the quantity of precipitated elementary carbon. BONE et al. [5] have made somewhat different observations. Namely these authors have found that there are absolutely no precipitates on the surface of solid magnetite and sintered glassy particles in the furnace, while large quantities of the carbon formed by cleavage is deposited in the pores of the soft, crumbly, sintered particles. It is quite probable that the reason of this difference in points of view might be found in the experimental methods. BONE examined samples taken from the furnace where the high velocity of the gas blew the carbon off the smooth surfaces and in accordance with the laws of turbulency this carbon was deposited on the particles having less velocity, i.e. in the pores and voids of the ore. The experiments mentioned first were, on the other hand, carried out in the laboratory.

EDSTRÖM [6] studied the dimensional changes of iron oxide crystals during reduction and found that when 4 mm long Fe_2O_3 crystals were reduced at 1000°C in CO the ore considerably expanded and the characteristic porous structure developed. The apparent increase in volume reached 40 to 50%. According to EDSTRÖM "the formation of gaps is an essential part of the diffusion process. The metallurgical examination of so-called diffusion pairs of elements, with different and characteristic diffusion coefficients has shown that considerable porosity develops in that part of the sample which loses material and thereby suffers a loss of weight, as a consequence of nonuniform diffusion. This is the so called Kirkendall effect. In WIBERG's opinion material migration takes place through diffusion in the solid solution".

According to these experiments the iron formed from magnetite is finely porous, while the one formed from Fe_2O_3 has large elongated pores. This structure can already be observed in the wüstite stage. At the Fe_2O_3 - Fe_3O_4

reduction stage the increase of the pores is negligible. At the wüstite and metallic iron reduction state the increase of the pores can, however, be greater than the space set free by the reduction and the ore may expand to an even greater extent. This is probably due partly to the fact that the oxygen liberated by the reduction of the iron ore needs at this temperature far more space than when bound to iron.

EDSTRÖM assumes that existence of three types of bounds in calcined pellets and briquettes, namely: a slag, a magnetite and a hematite type of bond. In thoroughly oxidized pellets and briquettes there are only hematite bonds, which are opened at the beginning of reduction, in the wüstite stage, and a very coarse, porous structure develops. When Fe_2O_3 is reduced, the porosity of the ore will be considerably greater than might be expected from the changes of the specific volume. Thus, in the Fe_2O_3 — wüstite reduction — without change in volume — the wüstite contain 16% pores. On the otherhand Fe_2O_3 -magnetite reduction results in 20% porosity and Fe_2O_3 -wüstite reduction in 38% actual porosity. This extensive expansion has a highly detrimental effect on the strength of the ore, but the addition of 0.5% CaO is already sufficient to have a strong inhibiting effect on the expansion of the pellets. According to microscopic examinations the hematite particles are joined by a grey membrane, probably of calcium ferrites, which acts as a good binding medium during reduction.

However, in the blast furnace not only the carbon, but also the hydrogen which is always present in a bigger or smaller quantity, will exert a reducing effect. According to the experiments carried out by STALHANE and MALMBERG [7] hydrogen reduces with a four times greater velocity than carbon monoxide. EUCKEN [8] attributes the higher reduction velocity of hydrogen to the greater mobility of the H_2 molecule and consequently to the greater diffusion velocity of the latter according to the following formula:

$$w = 0.92 \sqrt{3 \cdot R \cdot T / M}$$

where w is the mean velocity of the gas molecule, R the gas constant, T the absolute temperature and M the molecular weight of the gas. If this formula is applied to two gases under identical conditions then

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{0.92 \sqrt{3 \cdot R \cdot T / M_1}}{0.92 \sqrt{3 \cdot R \cdot T / M_2}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

Thus, the ratio between the reduction velocity of hydrogen and the reduction velocity of carbon monoxide is:

$$\frac{w_{\text{H}_2}}{w_{\text{CO}}} = \sqrt{\frac{28}{2}} = 3.74$$

TSELISHEV investigated the reducing effect of mixtures composed of carbon monoxide and hydrogen [9]. Table II gives the results which TSELISHEV obtained with gases containing varying quantities of hydrogen and carbon monoxide at 600° C.

Table II

Compositions of gas		Duration of reduction, minutes										
CO %	H ₂ %	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
		Progress of reduction, %										
39.2	—	14	21	27	32	37	41	44	47	50	54	—
41.6	0.90	11	21	28	36	42	47	52	57	60	63	66
39.5	1.90	18	30	38	46	53	59	65	69	73	77	80
39.0	4.15	22	35	44	52	59	63	69	73	76	80	82

If from Table II the quantity of H₂ is expressed in per cent CO + H₂ and the velocity of the reduction is calculated by taking the reduction with pure CO (without H₂) as being 100% and the results compared to this value, the data of Table III are obtained.

Table III

$\frac{H_2}{CO+H_2} 100, \%$	Duration of reduction, minutes										Average
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
	Progress of reduction, %										
—	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	—
2.11	79	100	104	113	114	144	118	121	120	117	112.5
4.58	129	143	141	144	143	144	147	147	146	143	143.9
9.62	157	167	163	163	160	154	157	155	152	148	157.6

In the calculation of averages the lowest and highest figures were left out of consideration.

Table IV shows the values obtained the percentage reductions by CO and H₂, respectively, when the reduction with pure carbon monoxide is taken

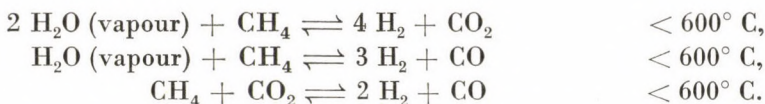
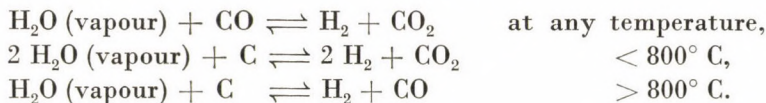
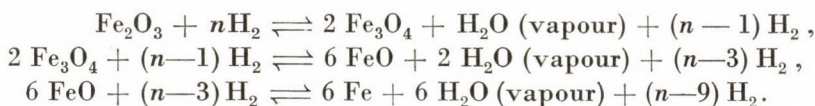
Table IV

Composition of gas		Participation in reduction		Overall, %	Tselishev's data	Surplus, %
CO %	H ₂ %	CO %	H ₂ %		Average, %	
100.00	—	100.00	—	100.00	100.00	—
97.89	2.11	97.89	7.89	105.78	112.50	6.77
95.42	4.58	95.42	17.13	112.55	143.90	31.35
90.38	9.62	90.38	35.98	126.36	157.60	31.27

as being 100% (calculated with a 3.74 times greater H_2 reduction velocity than the CO reduction velocity as obtained from the Eucken formula).

In addition to the calculated values of Table IV this also shows Tselishev's data. The comparison of these values shows a far higher reduction than might have been concluded from the reduction velocities of the gases in the mixture, indicating a synergetic, autocatalytic action of H_2 . The optimum of this synergetic effect can only be approximately determined from the data at our disposal. Apparently this optimum lies at 600° C round a H_2 content, corresponding to 5% CO content, where the reduction velocity of H_2 is 10.58 times the reduction velocity of CO.

Hydrogen gas contributes in three ways to the reduction. First it has a direct reducing effect, second from the water vapour, which results from the reduction, hydrogen and carbon monoxide or carbon dioxide are formed under the action of carbon and finally under the action of water vapour of CO_2 hydrogen and carbon monoxide are formed from the hydrocarbons. These reactions are as follow:



The introduction of the reducing medium into the interior of the ore appeared the simplest solution for increasing direct reduction, i.e. the autocatalytic effect of H_2 . It is possible to achieve this during the briquetting of the ore powders. The Humboldt-Demag process for low shaft furnaces indeed involves the preparation of briquettes containing coal powder which are bound with lime.

At the Research Institute for Iron and Steel Industry we wished to study the effect of-reducing agents introduced into the ore. The following experiments were carried out in collaboration with L. VISNYOVSKY and Mrs. J. HOLLÓ:

Twenty five millimetre high cylinders with 25 mm diameter were prepared of 97% per cent purity iron oxide and gas works coke containing 75.4% carbon with the addition of 0, 5, 10, 15 and 20% 2 mm diameter ground coke powder (breeze). These cylinders were preheated 15 minutes in air and then kept for 45 minutes at the desired temperature in such a way that the combustion boat

which held one each of the pellets containing 0, 5, 10, 15 and 20% coke powder, was introduced into a quartz tube and placed into the silite rod furnace. A current of city gas passed at a rate of 3 cm per sec through the quartz tube. According to the Gas Works the composition of this gas was the following

CO ₂	4.20%,
Heavy hydrocarbons	1.60%,
O ₂	0.20%,
CO	15.00%,
CH ₄	23.20%,
H ₂	32.10%,
N ₂	23.70%.

The degree of reduction was calculated from the decrease of the quantity of oxygen present in the iron-oxide. The results are summed up in the following Tables V—X. As there is no significant difference between the reduction at 400° and 500° C, in Table V only the reduction calculated from the overall oxygen loss is given. The distribution of the various oxides and metallic iron is given for the higher temperatures. Under "Total" the reduction of the oxygen content of iron oxide is shown.

Table V
Reduction of iron oxide — coke powder mixtures

Composition, %		Percentage reduction at	
Iron oxide	Coke powder	400° C	500° C
100	—	12.50	17.69
95	5	12.99	23.92
90	10	11.01	16.92
85	15	10.82	16.40
80	20	10.25	16.80

Table VI
100% iron oxide

Temperature, °C	Degree and distribution of reduction, %			
	Fe III	Fe II	Fe metal	Total
600	47.83	40.65	11.25	26.97
700	0.30	45.20	54.50	72.00
800	—	51.50	49.30	68.80
900	2.30	52.80	44.90	67.70
1000	0.22	78.50	21.28	52.50
1100	—	47.50	53.10	70.66
1200	1.00	41.30	57.70	73.28

Table VII
95% iron oxide, 5% coke powder

Temperature, °C	Degree and distribution of reduction, %			
	Fe III	Fe II	Fe metal	Total
600	45.67	42.70	11.66	27.80
700	—	49.70	50.30	69.30
800	—	63.90	36.52	60.80
900	0.38	62.80	36.82	60.90
1000	1.80	76.70	21.50	50.50
1100	0.31	32.19	67.50	82.60
1200	—	15.72	80.60	87.44

Table VIII
90% iron oxide 10% coke powder

Temperature, °C	Degree and distribution of reduction, %			
	Fe III	Fe II	Fe metal	Total
600	35.12	50.60	14.28	34.10
700	0.35	61.25	38.40	61.30
800	—	63.80	37.80	61.80
900	0.44	64.28	35.28	59.50
1000	0.65	73.30	26.05	53.80
1100	—	11.40	88.90	92.30
1200	1.16	3.49	94.90	97.50

Table IX
85% iron oxide, 15% coke powder

Temperature, °C	Degree and distribution of reduction, %			
	Fe III	Fe II	Fe metal	Total
600	32.80	49.10	18.10	37.20
700	2.78	60.30	36.92	60.00
800	4.00	62.60	33.40	57.50
900	0.29	60.28	39.43	62.40
1000	2.90	72.80	24.30	51.90
1100	—	—	100.00	100.00
1200	—	—	100.00	100.00

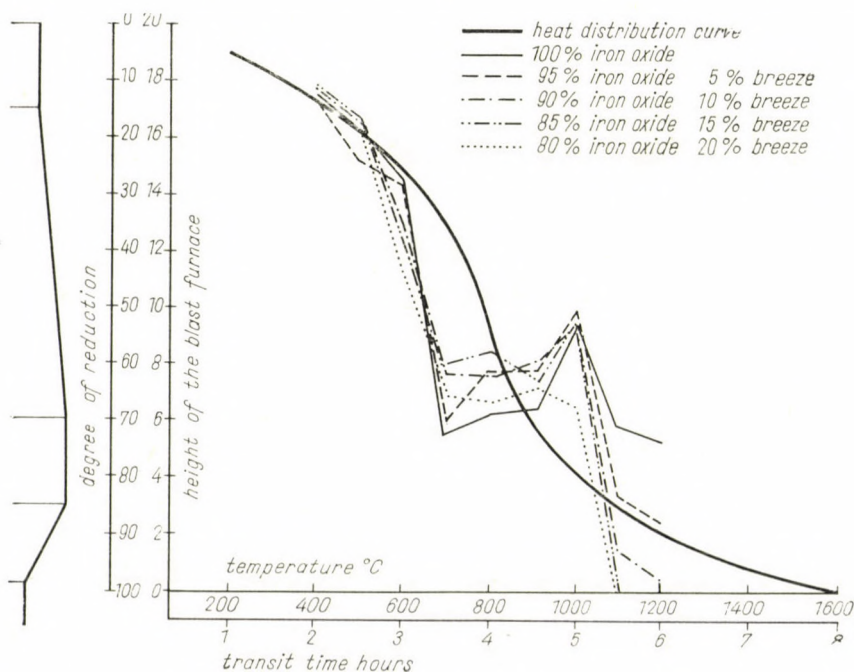
Table X

80% iron oxide, 20% coke powder

Temperature, C°	Degree and distribution of reduction, %			
	Fe III	Fe II	Fe metal	Total
600	24.78	51.70	23.52	43.60
700	9.62	48.00	42.38	65.20
800	0.15	54.50	45.38	66.70
900	0.60	58.80	40.60	63.80
1000	1.80	50.50	47.70	67.16
1100	—	—	100.00	100.00
1200	—	—	100.00	100.00

The results of these experiments were checked repeatedly and in one of the control experiments the rate of heating after 350° C was 200° C per hour. The results did not alter the slope of the curves, except that as the time needed to reach the desired temperature was longer, the ratio of indirect reduction increased.

The results cannot be applied to the conditions in the blast furnace, because the reducing power of the city gas used is several times greater than

**Fig. 1**

that of the furnace gas and neither is the iron ore a pure iron oxide. It is, however, probable that in the furnace gas the ratio of the direct reduction of the pieces with breeze would be greater, consequently the error involved is not great, when in Fig. 1 the results are presented for the heat distribution of a hypothetical blast furnace.

It can be seen Fig. 1 that up to about 600° C the breeze added to the briquette has no significant effect, while between 650° and 900° C it hinders reduction. In this temperature interval the briquettes which contain breeze were not reduced to the same degree as those without it. Above this temperature the breeze accelerated the reduction process to such a degree, that approximately 40—50 per cent of the remaining reduction was completed at a 100° C temperature interval.

It is very remarkable that between 600° and 1000° C the quantity of the reduced metallic iron drops considerably and a re-oxidation zone develops. The re-oxidation of the metallic iron does not exceed the ferrous oxide stage and the quantity of the re-oxidized metallic iron expressed in percentage of the previously reduced metallic iron is as follows:

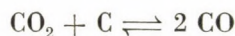
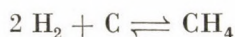
without breeze	61.00%,
with 5% breeze	57.30%,
with 10% breeze	32.20%,
with 15% breeze	31.50%,
with 20% breeze	10.46%.

Only in the temperature interval between 900° and 1000° C was any evidence of a re-oxidation up to the stage of ferric oxide found.

In briquettes without breeze, re-oxidation is probably caused by the reduction of the CO₂ due to the metallic iron at temperatures above 600° C, according to the following equation:



The data of the experiments so far carried out are not sufficient for the determination of the minor oxidation observed with briquettes containing breeze, but it is probable that part of the oxidizing capacity of vapour and CO₂ are used up by the carbon present. The processes which take part are first



Gumz's diagrams [10] for these main states of equilibrium are shown in Fig. 2.

In order to establish the direction of the processes for the reestablishment of the equilibrium, the carbon content of the reduced briquettes was also determined. Table XI gives the carbon contents for the experiments of Table V—X, while the carbon contents for those experiments, where the rate of heating was 200° C per hour, are shown in Table XII.

Table XI

Iron oxide, %	Breeze, %	Quantity of carbon, %								
		400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200° C
100	—	0.42	0.50	0.56	1.00	0.55	0.54*	0.50	0.41	0.25
95	5	4.30	4.03	3.61	4.28	4.08	3.72	3.90	2.83	0.56
90	10	6.47	7.20	7.18	9.85	6.99	6.43	7.80	6.50	1.47
85	15	10.16	9.58	9.48	11.47	9.49	9.95	10.78	10.44	3.85
80	20	14.73	12.95	12.77	12.90	16.12	17.81	16.97	13.41	9.15

Table XII

Iron oxide, %	Breeze, %	Quantity of carbon, %					
		original	800	900	1000	1100	1200° C
100	—	—	0.47	1.10	0.42	0.56	5.51
95	5	3.77	3.20	5.05	5.35	3.50	11.89
90	10	7.54	7.40	11.04	7.90	5.35	15.34
85	15	11.31	10.60	12.50	12.00	7.58	15.52
80	20	15.08	13.80	14.90	17.10	14.56	19.97

It is noteworthy that after 45 minutes heat treatment the amount of carbon introduced by the breeze did not decrease up to 1000—1100° C, even increasing at certain stages, but above 1100° C it began to decrease rapidly. On the other hand, in the case of slow heating the recipitation of elementary carbon was far more rapid 100% reduction. *The most important fact however, is that if the breeze exceeds 10%, the quantity of the carbon added does not decrease up to the completion of reduction and can, therefore, be used afterwards for heating purposes.*

The measured quantities of carbon seem to confirm the assumption that briquettes with breeze gain in carbon content over 1000° C and not only on the surface, but uniformly distributed within the briquette. The data so far are not sufficient to support this process by thermodynamic calculations, but there is no need for this, for if the briquette which contains breeze is

considered as a closed system then only the initial and terminal stages are the decisive ones. The intermediate changes in state, however numerous or whatever their direction — are expressed in the final state. *The intermediate changes of state might, however, change the physical composition of the briquette, because by increasing its carbon content they modify it in a direction which corresponds to the ideal state necessary for direct reduction.* Namely the precipi-

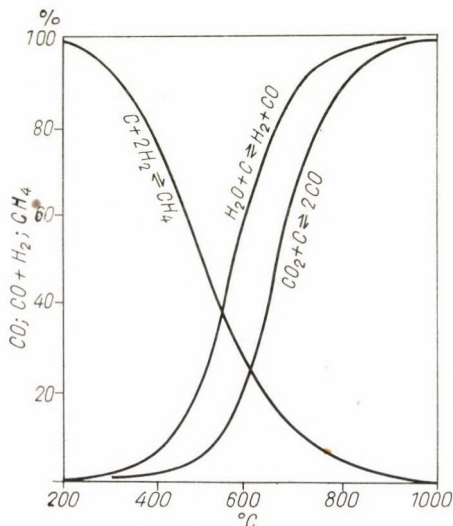
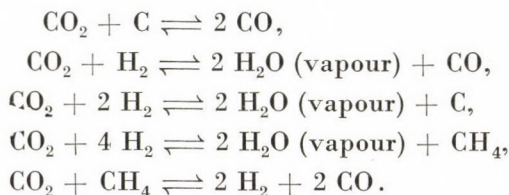


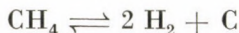
Fig. 2

tated carbon surrounds the ore particles with a layer of elementary carbon and thus direct reduction is accelerated.

The following reactions participate in carbonization:



In addition methane decomposes according to the equilibrium equation



as shown on the diagram of Fig. 2. At temperatures higher than 800° C H_2 reacts with CO and water vapour and carbon are formed. This shows that there are several ways of reducing CO_2 to CO or carbon. Further there is a process taking place within the ore briquette to which so far not enough attention has been paid. At temperature above 600° C, CO_2 it is already highly oxidative and oxidizes the precipitated metallic iron according to the equation



Thus, as CO_2 might have a further useful role in reduction, it seemed appropriate to investigate whether the addition of limestone powder to the briquetted ore powder will help to promote the reduction of CO_2 produced by the calcination of CaCO_3 or not. To clarify this problem I asked I. HOLLÓ of the Research Institute of the Steel Industry to carry out the following experiments:

Four briquettes each were pressed with water of

a) pure hematite;

b) 83.33% hematite and 16.67% limestone ground to particles of less than 1 mm diameter;

c) 76.92% hematite, 15.39% limestone ground to particles of less than 1 mm diameter and 7.69% coke powder ground to particles of less than 0.5 mm.

These briquettes were heated in the tube furnace described above in a current of town gas to 900°C and 1000°C respectively, kept at these temperatures for one hour and cooled in a current of town gas. The degree of reduction was calculated from the O_2 loss. The results are shown in Table XIII.

It can be stated that there is no doubt that the addition of limestone powder to the ore powder promotes reduction. The experiments did not include the clarification of the problem whether this phenomenon can be traced back to any of the above mentioned chemical reactions, or whether there are any contributing physical causes. The firmness of the reduced briquettes which contained limestone was much higher than the firmness of those made of pure hematite. Thus the conclusion might be drawn that limestone had a favourable effect also on the physical properties of the ore briquette.

Table XIII

	Reduction degree, %	C content, %
a) Pure hematite:		
900°C	82.1	0.38
1000°C	81.9	0.40
b) Hematite + limestone:		
900°C	87.4	0.60
1000°C	96.5	0.68
c) Hematite + limestone + + coke:		
900°C	63.5	5.72
1000°C	98.7	5.00

The reduction of CO_2 to CO in the presence of carbon is highly important from the viewpoint of improving the efficiency of shaft furnaces in the cement industry, where several experiments were carried out with this aim. JUNG [11] in the Mendeleev Institute for Chemical Technology, ground 10% anthracite with 90% lime stone so that when passed through a No. 4900 mesh the residue was not more than 10%. This mixture was heat treated in an oxygen free atmosphere where 57% of the CO_2 resulting from the dissociation of CaCO_3 was reduced to CO . The efficiency of this process obviously depends on the mesh size of the powder obtained by grinding.

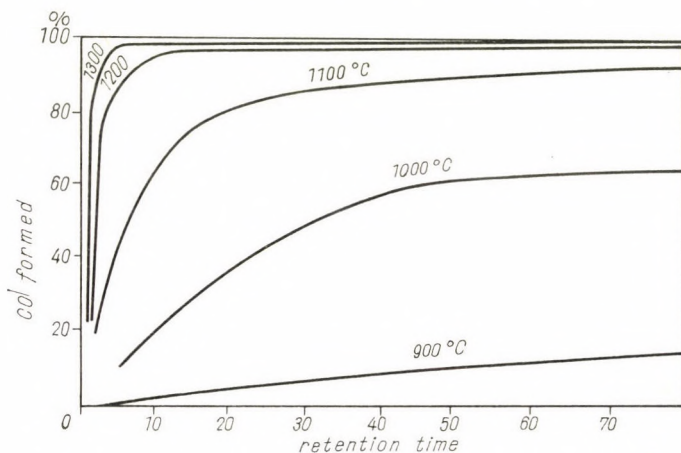


Fig. 3

The effect of temperature and contact time on the reduction of CO_2 was studied in detail in the production of producer gas. The diagram of this process, as given by FABER [12], is shown in Fig 3.

The quantity of CO_2 reduced in unit time is, however, a function not only of temperature but also of the physical state, the particle size of coal. Theoretically, when carbon of molecular dispersity is gasified, the question of time does not arise, only temperature is involved. This is the basis of gas manufacture by fluidity.

Thus the carbon dioxide, which is formed during reduction, regains its reductivity according to the above equations and an autocatalytic process takes place in which the same carbon atom might participate several times in the reduction process.

If the briquettes containing breeze are considered as closed systems and the CO_2 formed during the reduction of the iron oxide is completely reduced to CO , at temperatures over 900°C by the carbon in the briquette, the number of carbon atoms which participate repeatedly in the reduction of the iron

Table XIV

Number of reduced Fe atoms	Carbon atoms used for reduction						
	C ⁰	C ¹	C ²	C ³	C ⁴	C _s	C ⁶
2	2	1	—	—	—	—	—
8	6	3	2	1	—	—	—
32	24	12	6	3	2	1	—
128	96	48	24	6	3	2	1
...

oxides increases as in a chain reaction according to the arithmetical progression shown in Table XIV.

In the present case the exponents of C represent the number of times the same carbon atom has participated in the reduction cycle. In the case of indirect reduction 1.5 carbon atoms, in the case of direct reduction 0.75 carbon atoms are necessary for the reduction of one Fe atom. If, however, the CO₂ formed in the closed system is reduced to CO, then 0.75 C atoms are also enough for indirect reduction. The *theoretical* saving in carbon which can be achieved by the reduction of CO₂ is 50% maximum.

In the preceding experiments the microscopic examination has shown that in the pore formed within the briquette an evenly distributed layer of fine elementary carbon was deposited, which completely coated the iron oxide particles. By carbonization of the briquette a favourable situation arose for direct reduction, whereby with the addition of 15% breeze (11.31% carbon) complete reduction was achieved at a temperature below 1100° C. This state might be called *fluidity in the solid state*, because as in fluidity, where every particle is surrounded by gas, here every particle is surrounded by solid carbon.

The production of briquette is simply a question of binder and it seems that by the production of an adequate quality of ferrocement the problem could be solved. Preparation for experiments on the commercial scale are now in progress and these experiments are destined to decide how far the laboratory results can be reproduced in commercial plants. If, however, only some of the laboratory results can be realized in commercial plants, this might be enough to cause a fundamental change in the present metallurgical procedures, because already so much could be established that the introduction of the reducing agent into the interior of the ore accelerates the reduction process. The advantages which can be achieved in this way raise the question whether it might not be possible to briquette on the analogy of the ferrocoke all furnace mixtures, including furnace coke, in a ground and in mixed state. Namely this would offer the possibility of approaching the ideal composition

of the mixtures by using dressed ores with the necessary and sufficient quantity of slag and basicity, and eventually to automatize the entire metallurgical plant. In this process the question of furnace coke does not arise, as any coke with low ash and sulphur content is adequate, as there are no requirements with respect to strength.

Finally it is of remarkable interest that total reduction takes place in the solid phase without fusion of the mixture, thus if a suitable technology is developed, a possibility of direct steel production, similar to pig furnaces, arises.

REFERENCES

1. PAWLOW, M. A.: Metallurgie des Roheisens. Berlin 1953.
2. DURRER, R.: Die Metallurgie des Eisens. Berlin 1942. 2. Aufl.
3. HORUNOV, D. S.: *Metallurgie* (1937), Nr. 9—15.
4. БАУКЛО, В. — ЕГЕР, Ф.: *Сталь* (1939), № 11.
5. MAC LEOD, I. M.: Preparation of Ores. *Iron and Steel* (1954), February—May.
6. EDSTRÖM, J. O.: Symposium on Sinter. Special Report 53.
7. STAHLHANE, B. — MALMBERG, T.: Untersuchungen über den Verlauf der Eisenerzreduktion. *Jernkon. Ann.* 1929.
8. EUCKEN, A.: Grundriß der physikalischen Chemie. 5. Aufl.
9. ЧЕЛЫШЕВ, М.: Результаты исследования. (Архив кафедры металлургии чугуна ЛПИИ).
10. GUMZ, W.: Gasproducers and Blast Furnaces, 1950.
11. JUNG, V. N.: Technology of Lime and Cement Industry.
12. FABER: Braunkohlen-Generatorgas, 1928.

ÜBER DIE DIREKTE REDUKTION

A. SCHEDEL

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser berichtet über die theoretischen Grundlagen, die zur Untersuchung der Wirkung von Reduktionsmitteln führten, die in das Innere des Eisenerzes durch Mahlen und Brikettieren eingeführt wurden. Bei der unter Laboratoriumsverhältnissen durchgeführten Reduktion in Leuchtgas des mit Kokspulver vermischten Eisenoxydbriketts wurde das ganze Eisenoxid bereits bei Zugabe von 11% Kohlenstoff enthaltender Kokspulvermenge unter 1100° C, also noch in fester Phase, zu metallischem Eisen reduziert. Im Laufe der Untersuchung konnte der Verfasser feststellen, daß als Ergebnis der Vorgänge innerhalb des Briketts die Ausscheidung von gleichmäßig verteiltem elementarem Kohlenstoff erfolgt und ein für den Verlauf der unmittelbaren Reduktion günstiger physikalischer Zustand erreicht wird. Dies nennt der Verfasser »Fluidisation in fester Phase«. Durch Reduktion des im Laufe der Reduktion und der Zersetzung der Karbonate entstehenden CO₂ zu CO wird ein autokatalytischer Vorgang in Gang gesetzt, in dem dasselbe Kohlenstoffatom mehrmals an der Reduktion teilnimmt. Die bislang durchgeführten Versuche sind noch nicht ausreichend, um endgültige Folgerungen ziehen zu können, deswegen empfiehlt der Verfasser die Durchführung weiterer Experimente.

RECHERCHES SUR LA RÉDUCTION DIRECTE

A. SCHEDEL

RÉSUMÉ

L'auteur fait connaître les raisons théoriques ayant nécessité l'examen de l'action des agents réducteurs introduits dans le minerai de fer par broyage fin et par briquetage. Au cours de la réduction en gaz d'éclairage de briquettes d'oxyde de fer à fines de coke, effectuée dans

des conditions de laboratoire, tout l'oxyde de fer s'est réduit jusqu'au fer métallique au-dessous de 1100° C, c'est-à-dire en phase solide, en cas d'addition de fines de coke contenant 11% de carbone. Au cours de son examen, l'auteur a constaté qu'en résultat des processus qui se déroulent, le carbone élémentaire uniformément réparti dans la briquette se précipite, en créant ainsi un état physique favorisant la réduction directe, appelé «fluidisation en phase solide» par l'auteur. Au cours de ce processus, la réduction en CO du CO₂, produit lors de la réduction et de la décomposition des carbonates, déclenche un processus autocatalytique où le même atome de charbon participe plusieurs fois à la réduction. Les essais déjà effectués étant insuffisants pour permettre de tirer des conclusions définitives, la réalisation de nouveaux essais est proposée par l'auteur.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. ШЕДЕЛЬ

РЕЗЮМЕ

Автор знакомит с причинами, обусловившими необходимость исследования действия восстановителей, вводимых в железную руду путем размола и брикетирования. При лабораторном восстановлении в светильном газе брикетов окиси железа, содержащих коксовую пыль, введение кокса уже в количестве, содержащем 11% углерода, дает в результате полное восстановление всей окиси железа до чистого металла при температуре ниже 1100° C, то есть еще в твердой фазе. При исследовании этого явления оказалось, что в результате происходящих реакций в брикетах выделяется равномерно распределенный элементарный углерод, то есть брикет насыщается углеродом и, таким образом, создаются физические условия, благоприятные для протекания прямого восстановления. Автор называет это явление «флюидизацией в твердой фазе». В этом процессе восстановление углекислого газа, образующегося при восстановлении и при распаде карбонатов, до угарного газа является началом такого автокаталитического процесса, при котором один и тот же атом углерода несколько раз участвует в реакции восстановления. Проведенные опыты еще не дают достаточного основания для окончательных выводов, поэтому автор предлагает продолжение опытов.

BAUSTATISCHE BERECHNUNG VON RADIAL BESCHAUFELTEN LAUFRÄDERN MITTELS DER BECK'SCHEN METHODE

E. PÁSZTOR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

LEHRSTUHL FÜR KALORISCHE MASCHINEN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 17. Dezember 1962]

Die vorliegende Arbeit entwickelt das Becksche baustatische Verfahren für Scheiben in der Weise weiter, daß dieses zur genauen baustatischen Berechnung von Zentrifugalkompressoren und Zentripetalturbinen, bei denen sich das relative spezifische Gewicht in der Funktion des Scheibenradius ändert, geeignet wird soll. Die relative Änderung des spezifischen Gewichtes der radialen Laufräder wird durch die Schaufeln verursacht, die an den Seitenwänden der Scheibe befestigt sind. Die Abhandlung zeigt, daß in dem Fall, wenn $\gamma_{\text{rel}} \neq \text{konst.}$ ist, die Beckschen Hyperbeln durch graphische Integration bestimmbar sind. In dem behandelten gegebenen Fall zeigen diese eine Abweichung von $5 \div 8\%$ von jenen Hyperbeln, die mittels der Annäherungsmethode berechnet wurden.

I. Die Problemstellung

Die Becksche baustatische Berechnung bzw. Kontrolle für Scheiben ist eine bevorzugte Rechnungsart der schnell rotierenden Scheiben mit großer Umfangsgeschwindigkeit. Aus dem Studium der zu Verfügung stehenden Literatur der Beckschen baustatischen Berechnung für Scheiben [1—4] ist festzustellen, daß das gesamte Verfahren, in seinen zur Zeit bekannten Formen, nur für die Berechnung der auf ihrem Umfang gleichmäßig belasteten Scheiben geeignet ist.

Die Schaufeln der Zentrifugalkompressoren und der Zentripetalturbinen (Bild 1) belasten die Scheibe nicht auf ihrem Umfang, sondern auch auf ihrer Seite, so daß ihre Wirkung zusammen mit der scheinbaren Erhöhung des spezifischen Gewichtes des Scheibenwerkstoffes zu berücksichtigen ist. Das relative spezifische Gewicht des auf diese Art zur baustatischen Untersuchung vorbereiteten Scheibenwerkstoffes ändert sich also in der Funktion des Scheibenradius [$\gamma_{\text{rel}} = f(r)$].

Für die genaue baustatische Untersuchung von Scheiben mit veränderlichem spezifischem Gewicht sind die bisher bekannten Variationen der Beckschen Methode ungeeignet. Zweck dieser Arbeit ist es, die Becksche Methode in der Richtung weiterzuentwickeln, daß diese zur baustatischen Berechnung solcher schnell rotierenden Scheiben geeignet wird, die entlang ihres Radius ein veränderliches spezifisches Gewicht haben. Zur zusätzlichen Spannungsänderung der einseitig einmündenden Laufräder, die sich aus der asymmetrischen Belastung ergibt, siehe die Literaturangaben [7] und [5].

II. Bestimmung der sich aus der Schaufelbelastung der Scheiben ergebenden scheinbaren Erhöhung des spezifischen Gewichtes

Aus dem einseitig einmündenden Laufrad nach Bild 2 [6] schneiden wir am Radius r einen Ring mit der Dicke dr aus.

Das Gewicht des Ringes mit der Dicke dr , samt den dazu gehörenden Schaufelelementen, ist

$$dG = \gamma \left(2\pi rh + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} h_1 z \right) dr = \gamma \left[1 + \frac{(\delta_1 + \delta_2)}{2} \cdot \frac{h_1 z}{2\pi rh} \right] 2\pi rh dr, \quad (1)$$

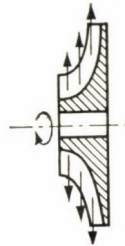


Bild 1

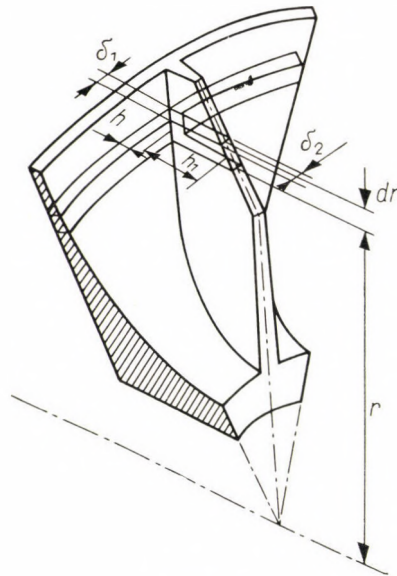


Bild 2

wo γ das tatsächliche spezifische Gewicht der Scheibe, z die Schaufelzahl der Scheibe ist.

Setzen wir das Gewicht der Scheibe und ihres Ringes mit der Dicke dr in Beziehung zu dem Gewicht des gleich dimensionierten Ringes der Scheibe,

so ist die aus der Schaufelbelastung sich ergebende zusätzliche Erhöhung des spezifischen Gewichtes bzw. das unter Berücksichtigung der Schaufelbelastung geltende relative spezifische Gewicht der Scheibe zu bestimmen:

$$\gamma_{\text{rel}} = \gamma \left[1 + \frac{(\delta_1 + \delta_2)}{2} \cdot \frac{h_1 z}{2 \pi r h} \right]. \tag{2}$$

Aus dem Ausdruck (2) ist zu ersehen, daß $\gamma_{\text{rel}} = f(r)$, da γ und z Konstanten sind; $\delta_1, \delta_2, h, h_1$ sind aber einzig und allein Funktionen des Radius.

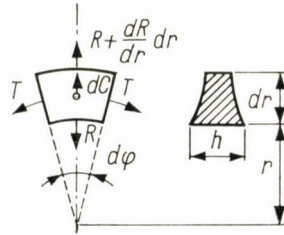


Bild 3

III. Differentialgleichung der schnell laufenden Drehscheibe mit entlang dem Radius veränderlichem spezifischem Gewicht und veränderlicher Temperatur

Die Art der Bestimmung der Differentialgleichung von Scheiben ist in der Literatur ausführlich beschrieben, daher behandelt die vorliegende Arbeit diese nur in den wichtigeren Phasen, im Interesse der Verwirklichung des gesteckten Zieles, unter Berücksichtigung des Zusammenhanges $\gamma_{\text{rel}} = f(r)$.

Auf das Scheibenelement nach Bild 3 wirken folgende Kräfte:

a) Zentrifugalkraft

$$dC = \frac{\gamma_{\text{rel}}}{g} h r^2 \omega^2 dr d\varphi;$$

b) radiale Kräfte

$$R, \text{ bzw. } R + \frac{dR}{dr} dr;$$

$$\text{wo } R = \sigma_r h r d\varphi;$$

c) Tangentialkraft

$$T = \sigma h_l dr.$$

Aus dem Gleichgewicht der Kräfte:

$$dC + dR - 2T \sin \frac{d\varphi}{2} = 0. \tag{3}$$

Da $dR = d(hr \sigma) d\varphi$ und $2 \sin(d\varphi/2) \approx d\varphi$ ist, gestaltet sich die Gleichung (3) folgendermaßen:

$$\frac{d(hr\sigma r)}{dr} - \sigma_t h + \frac{\gamma_{\text{rel}}}{g} \omega^2 hr^2 = 0. \quad (4)$$

Die tangentielle und radiale spezifische Dehnung ist:

$$\varepsilon_t = \frac{\mu}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu\sigma_r) + \Theta, \quad (5)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_t) + \Theta, \quad (6)$$

wo ν die Poissonsche Zahl ist,

u die Radiale Verschiebung des Scheibenelementes mit dem Radius r .

In den Ausdrücken (5) und (6) drückt Θ die aus der ungleichmäßigen Erwärmung stammende zusätzliche Dehnung aus:

$$\Theta = \int_{t_0}^t a dt, \quad (7)$$

wo a die lineare Wärmedehnzahl des Scheibenmaterials ist, $a = f(t)$;

t_0 Temperatur des Anfangsradius r_0 der Scheibe.

Mit Hilfe der Gleichungen (5) und (6) wird σ_t und σ_r folgendermaßen ausgedrückt:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{\mu}{r} - \Theta \right) + \nu \left(\frac{du}{dr} - \Theta \right) \right], \quad (8)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{du}{dr} - \Theta \right) + \nu \left(\frac{u}{r} - \Theta \right) \right]. \quad (9)$$

Die Differentialgleichung der Scheibe kann mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichung (4) sowie der Dehnungsgleichungen (8) und (9) folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{du}{dr} - \left(1 - \nu \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{u}{r^2} + \\ + \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma_{\text{rel}} \omega^2 r}{g} - (1 - \nu) \left[\frac{d\Theta}{dr} + \frac{\Theta}{h} \frac{dh}{dr} \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Der Zusammenhang (10) ist die Differentialgleichung der Scheibe, mit veränderlicher Temperatur und veränderlichem relativem spezifischem Gewicht entlang dem Radius.

Im Falle einer Scheibe mit konstanter Dicke (bei der wirklichen baustatischen Berechnung ist die Scheibe immer in Ringe mit ständiger Dicke

nach Bild 4 aufzuteilen) wird die Gleichung (10), mit Einführung der Bedingung $h = \text{konst.}$, die folgende:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = - \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\gamma_{\text{rel}}}{g} \omega^2 r + (1 + \nu) \frac{d\Theta}{dr}, \quad (11)$$

oder

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = - \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\gamma_{\text{rel}}}{g} \omega^2 r + (1 + \nu) \frac{d\Theta}{dr}. \quad (12)$$

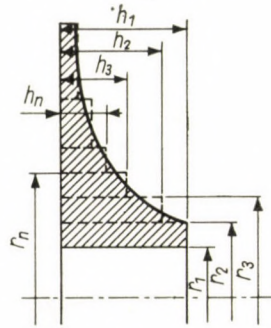


Bild 4

IV. Berechnung der Scheibe mit ständiger Dicke

Wird die Gleichung (12) integriert und der Zusammenhang $\gamma_{\text{rel}} = f(r)$ berücksichtigt, so wird

$$\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} = - \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr + (1 + \nu) \Theta + C_1, \quad (13)$$

wo r_1 der innere Radius der Scheibe mit ständiger Dicke und C_1 die Integrationskonstante ist. Nach einer wiederholten Integration ist:

$$u = - \frac{(1 - \nu^2)}{E_r} \frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^r \left[\int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr \right] r dr + \frac{1 + \nu}{r} \int_{r_1}^r \Theta r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (14)$$

Im Interesse der Bestimmung der Spannungen σ_t und σ_r [Gleichungen (8) bzw. (9), muß der Differentialquotient du/dr gebildet werden.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} = & C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{(1 + \nu)}{r^2} \int_{r_1}^r \Theta r dr + \\ & + (1 + \nu) \Theta + \frac{(1 - \nu^2)}{Er^2} \frac{\omega^2}{g} \cdot \int_{r_1}^r \left[\int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr \right] r dr - \\ & - \frac{(1 - \nu^2)}{E} \frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr. \end{aligned} \quad (15)$$

Werden die Gleichungen (14) und (15) in die Gleichungen der Spannungen σ_t und σ_r , (8) bzw. (9) substituiert, so erhalten wir nach der Durchführung der notwendigen algebraischen Operationen folgende Ausdrücke:

$$\sigma_t = \frac{EC_1}{1-\nu} + \frac{EC_2}{(1+\nu)r^2} + \frac{E}{r^2} \int_r^r \Theta r dr - E\Theta - \frac{\omega^2(1-\nu)}{r^2 g} \int_{r_1}^r \left[\int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr \right] r dr - \frac{\nu\omega^2}{g} \int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr, \quad (16)$$

$$\sigma_r = \frac{EC_1}{1-\nu} - \frac{EC_2}{(1+\nu)r^2} - \frac{E}{r^2} \int_r^r \Theta r dr + \frac{\omega^2(1-\nu)}{r^2 g} \int_r^r \left[\int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr \right] r dr - \frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^r \gamma_{\text{rel}} r dr. \quad (17)$$

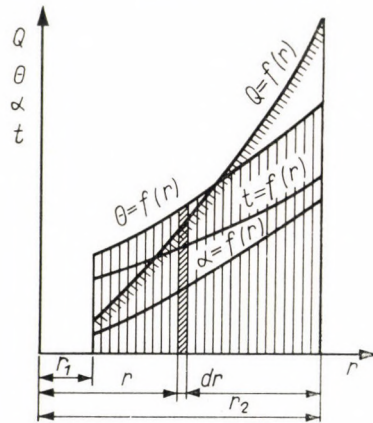


Bild 5

Auf Grund der Zusammenhänge (16) und (17) ist die Spannung der Scheibe mit ständiger Dicke, die in der Funktion des Radius eine veränderliche Temperatur und ein veränderliches spezifisches Gewicht γ_{rel} hat, schon zu errechnen.

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind aus den Randbedingungen der berechneten Scheibe zu ermitteln.

Die in den Gleichungen (16) und (17) vorkommenden Integrale sind mit graphischer Integration zu bestimmen. Für ihre Bestimmung müssen bekannt sein:

- Die Temperaturverteilung entlang den Radius der Scheibe, d. h. die Funktion $t = f(r)$;
- die lineare Wärmedehnzahl in der Funktion der Temperatur, $\alpha = f(t)$;
- die Änderung des spezifischen Gewichtes $\gamma_{r1} = f(r)$;

d) im Interesse der Erhöhung der Rechengenauigkeit ist es zweckmäßig, die Veränderung des Elastizitätskoeffizienten in der Funktion der Temperatur, $E = f(t)$, zu berücksichtigen.

Die graphische Bestimmung des Integrals $Q = \int_{r_1}^r \Theta_r dr$ erfolgt wie im Bild 5.

In Kenntnis der Funktionen $a = f(t)$ und $t = f(r)$ kann Θ in der Funktion des Radius mit graphischer Integration bestimmt werden, da der Zusammenhang $t = f(r)$ bekannt ist, ferner mit Hilfe der graphischen Integration die Funktion $Q = f(r)$.

Die Bestimmung der in den Gleichungen (16) und (17) vorkommenden übrigen graphischen Integrale erfolgt in einer völlig ähnlichen Weise.

V. Spannungsberechnung der Scheibe mit veränderlicher Dicke und veränderlichem spezifischem Gewicht mittels der graphischen Methode von Beck

Die Becksche graphische Konstruktion im Falle $\gamma = \text{konst.}$ wird von einer umfassenden Literatur behandelt, also wird die vorliegende Arbeit, sich auf diese stützend, den Gang der Konstruktion nur in dem Maße beschreiben, wie dies die Behandlung des Falles $\gamma_{rel} \neq \text{konst.}$ erfordert.

Die Bezeichnung $x = 1/r^2$ einführend, lassen sich die Gleichungen (16) und (17) in der folgenden Form aufschreiben:

$$\sigma_t = A + Bx - T(x) \tag{18}$$

und

$$\sigma_r = A - Bx - R(x), \tag{19}$$

wo

$$A = \frac{EC_1}{1 - \nu} x, \quad B = \frac{EC_2}{1 + \nu};$$

$$T(x) = E\Theta - EQ_x + \frac{\omega^2(1 - \nu)}{r^2 g} \int_{r_1}^r \left[\int_{r_1}^r \gamma_{rel} r dr \right] r dr + \frac{\nu\omega^2}{g} \int_{r_1}^r \gamma_{rel} r dr; \tag{20}$$

$$R(x) = EQ_x - \frac{\omega^2(1 - \nu)}{r^2 g} \int_{r_1}^r \left[\int_{r_1}^r \gamma_{rel} r dr \right] r dr + \frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^r \gamma_{rel} r dr. \tag{21}$$

Die Gleichungen (18) und (19) in dem Koordinatensystem laut Bild 6 darstellend, ergeben sich im Falle einer Scheibe mit ständiger Dicke die Span-

nungen als Differenz der Geraden $A + B_x$ bzw. $A - B_x$ sowie der Segmente der Hyperbeln $T(x)$, bzw. $R(x)$.

Die Scheibe mit veränderlicher Dicke nach Bild 4 auf Ringe ständiger Dicke aufteilend — wird der Übergang zwischen den einzelnen Ringen durch die Kontinuität der Spannungen σ_r sowie durch die Gleichheit der Dehnung der sich berührenden Ringflächen gewährleistet.

Aus der Kontinuität der Spannungen σ_r ist

$$\sigma_{rh_1} h_1 = \sigma_{rh_2} h_2, \quad (22)$$

wo σ_{rh_1} bzw. σ_{rh_2} Spannungen sind, die zu gleichem Radius, aber veränderlichen Scheibendicken gehören.

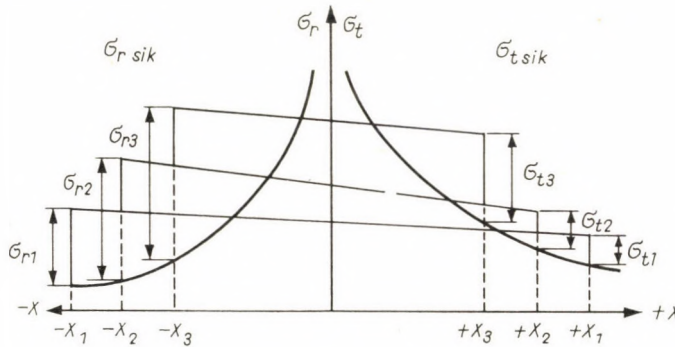


Bild 6

Aus der Gleichheit der Dehnungen ist

$$\frac{\sigma_{th_1} - \nu_{h_1} \sigma_{rh_1}}{E_{h_1}} = \frac{\sigma_{th_2} - \nu_{h_2} \sigma_{rh_2}}{E_{h_2}}. \quad (23)$$

Der Gang der Bestimmung der Spannungen ist der folgende:

a) Mit Hilfe der Zusammenhänge (20) bzw. (21) sind die Hyperbeln $T(x)$ bzw. $R(x)$ zu bestimmen;

b) auf Grund der Randbedingungen bzw. der angenommenen Anfangsbedingungen kann die $+x_1$ und $-x_1$ verbindende Gerade gezogen werden;

c) das in den Punkten x_2 zwischen der Geraden und der Hyperbel gemessene Segment gibt die Spannung im Ringe mit dem Radius r_2 , aber noch der Dicke h_1 erwachende Spannung an;

d) die Spannungssprünge bzw. die in der Scheibe mit dem Radius r_2 , aber schon der Dicke h_2 erwachenden Spannungen lassen sich mit den Zusammenhängen (22) bzw. (23) berechnen;

e) die Spannungssprünge in der Ordinate x_2 bemessend, können die Beckschen Geraden des nächsten Ringes wieder gezogen, dann die Spannungssprünge bestimmt werden;

f) bis zu dem letzten Schnitt der Scheibe anlangend, werden die Randbedingungen des Umfanges im allgemeinen nicht befriedigt; auf Grund des Linearitätsprinzips kann die Konstruktion unter Bedingungen, die von der vorherigen abweichen, wiederholt und aus zwei Konstruktionen der wirkliche Spannungszustand immer bestimmt werden.

VI. Anwendung des Verfahrens

Das in der vorliegenden Arbeit beschriebene Verfahren, das zur Berechnung von Scheiben geeignet ist, die ihrem Radius entlang ein veränderliches spezifisches Gewicht haben, unterscheidet sich im wesentlichen von den in der Literatur mitgeteilten Methoden in der Bestimmung der Hyperbeln $T(x)$ und $R(x)$.

Die Hyperbeln sind, in der Funktion ihres Radius, bei Scheiben mit ständiger Temperatur, im Falle von $\gamma_{rel} = \gamma' = \text{konst.}$, mit den folgenden Zusammenhängen zu bestimmen:

$$T'(x) = \frac{1 + 3\nu}{2} \frac{\gamma'}{g} \frac{\omega^2}{x}, \quad (24)$$

$$R'(x) = \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma'}{g} \frac{\omega^2}{x}. \quad (25)$$

Da sich die Glieder, welche die Temperaturspannung determinieren, bei Berücksichtigung der Veränderung des relativen spezifischen Gewichtes nicht ändern, können die zwei Verfahren am einfachsten im Falle von Scheiben mit ständiger Temperatur verglichen werden.

Zur Berechnung von Scheiben mit veränderlichem spezifischem Gewicht sind — annähernd — auch die Zusammenhänge (24) bzw. (25) geeignet, wenn wir die formelle Substituierung $\gamma_{rel} = \gamma'$ anwenden. Diese Annäherungsmethode berücksichtigt aber nicht, daß γ_{rel} eine stetige Funktion des Radius ist.

Im Interesse des Vergleiches zwischen exaktem und annäherndem Verfahren, von identischen Anfangsbedingungen ausgehend, können bei Scheiben mit veränderlichem spezifischem Gewicht γ_{rel} die Beckschen Hyperbeln nach beiden Methoden bestimmt und die Abweichungen bewertet werden.

Die Ausgangsdaten der Berechnung sind im Falle eines Zentrifugal-kompressors, ohne mittlere Bohrung, Hauptmaße im Bild 7 (der Anlasser paßt gesondert an die Scheibe), die folgenden:

$$n = 50\,000/\text{min}, \quad \omega = 5240/\text{sec.}$$

Der Scheibendurchmesser $D_2 = 180$ mm; $\nu = 0,3$; Schaufelzahl $z = 20$; durchschnittliche Schaufeldicke $\delta = 2,6$ mm.

Die Veränderung des relativen spezifischen Gewichtes entlang dem Scheibenradius ist im Bild 8 zu sehen, das maximale spezifische Gewicht ist das 1,4-fache des spezifischen Gewichtes des Scheibenwerkstoffes.

Die zur Bestimmung der Beckschen Hyperbeln ohne Temperaturspannung notwendigen graphischen Integrale sind im Bild 9, die Hyperbeln

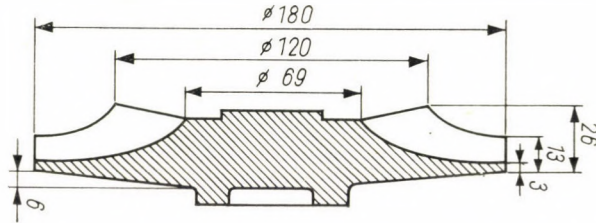


Bild 7

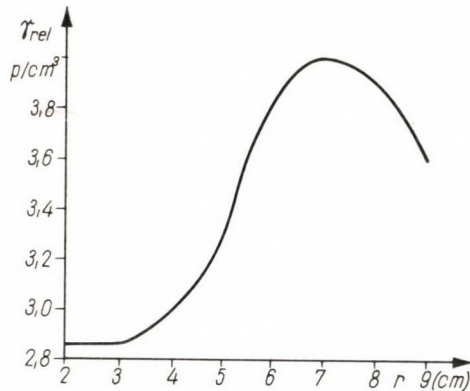


Bild 8

aber im Bild 10 zu sehen. Wir haben die Hyperbeln, infolge der bei den kleinen Abmessungen der Abbildungen notwendigerweise auftretenden darstellungstechnischen Schwierigkeiten, nicht in der Funktion $x = 1/r^2$, sondern in der Funktion des Radius r dargestellt.

Die mit Hilfe der exakten Methode (graphische Integration) erhaltenen Ordinaten der Hyperbeln $R(x)$, $T(x)$ sind um etwa 5—8% kleiner als die mit Hilfe der Gleichungen (24) und (25), nach der Substituierung $\gamma = \gamma_{r-1}$ berechneten Hyperbeln.

Die mit Hilfe der Formeln (24) und (25) der Annäherungsmethode berechneten Segmente der Hyperbeln $R'(x)$ und $T'(x)$ sind notwendigerweise größer als die exakten Werte, da die Annäherungsmethode nur die dem gegebenen Radius zugehörigen Werte des relativen spezifischen Gewichtes

berücksichtigt, während wir den $r = r_1$ zugehörigen Wert der graphischen Integration, unter Berücksichtigung der zwischen $r = 0$ und $r = r_1$ Abschnittes vorhandenen Änderung des relativen spezifischen Gewichtes, erhalten haben. Bei in Funktion des Radius steigendem spezifischem Gewicht ist der durch

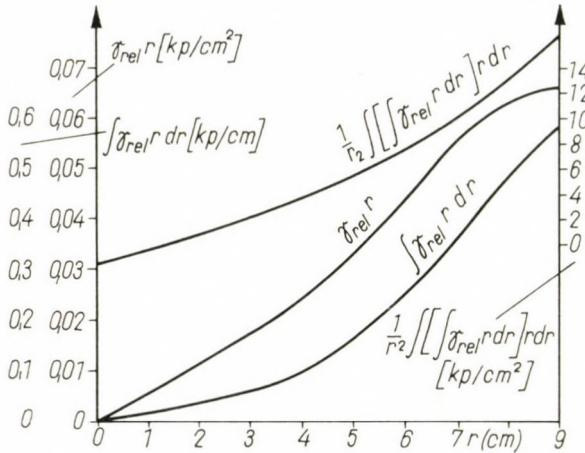


Bild 9

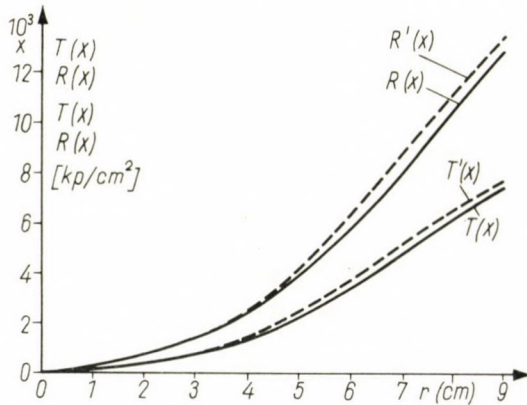


Bild 10

Integration erhaltene Durchschnittswert des relativen spezifischen Gewichtes kleiner als der dem gegebenen Radius zugehörige Wert des spezifischen Gewichtes, die Segmente der Hyperbeln $R(x)$ und $T(x)$ sind also kleiner als die Segmente der Hyperbeln $R'(x)$ und $T'(x)$. Bei dem in Funktion des Radius sich vermindernenden spezifischen Gewicht ist die Lage umgekehrt, die durch graphische Integration gewonnenen Hyperbeln $R(x)$ und $T(x)$ liegen über den Hyperbeln $R'(x)$ und $T'(x)$.

Die sich aus der Modifizierung der Hyperbeln ergebende Änderung der Spannungsverteilung hängt auch vom Profil der Scheibe ab, jedoch sind die hier folgenden allgemeinen Folgerungen ziemlich unabhängig vom Scheibenprofil.

Unter Berücksichtigung, daß die in den Scheiben erwachende Spannung im allgemeinen Fall dem Wert der Ordinaten der Hyperbeln proportional ist, sind — je nach Gestaltung der Funktion $\gamma_{rel} = f(r)$ — zwei grundlegende Fälle möglich.

1. Bei $\gamma_{rel} = f(r)$, in der Funktion des Radius zunehmend, ist $R(x) < R'(x)$ und $T(x) < T'(x)$, also sind die mit Hilfe der in der Abhandlung mitgeteilten exakten Methode (graphische Integration) erhaltenen Scheibenspannungen kleiner als die mittels Substitution $\gamma_{rel} = \gamma$, mit Hilfe der Hyperbelgleichungen (24) und (25) berechneten annähernden Spannungen.

2. Bei $\gamma_{rel} = f(r)$, in Funktion des Radius abnehmend, ist die Lage umgekehrt, $R(x) > R'(x)$, bzw. $T(x) > T'(x)$, also sind die im Falle der exakten Methode erhaltenen Scheibenspannungen größer als die annähernden Spannungen.

SCHRIFTTUM

1. BRODSZKY, D.: Repülőgépjáratóművek II, Gázturbinák (Flugzeug-Triebwerke II, Gasturbinen). Tankönyvkiadó, Budapest 1952.
2. BECK, F.: Zentrifugale Spannungen in Scheiben. *Machine Design* (1949), Nr. 5.
3. BECK, F.: Spannungen in umlaufenden Scheiben — eine Vereinfachung der Berechnung mittels grafischen Verfahren. *Konstruktion* (1950), Heft. 2.
4. С. А. ПОНОМАРЕВ: Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз, 1952.
5. F. JARUBEK: Die Festigkeit von radial beschauelten Laufrädern. *Österreichisches Ingenieur-Archiv, Graz* 7 (1953), Heft 3.
6. Г. С. СКУБАЧЕВСКИЙ: Авиационные газотурбинные двигатели конструкция и расчет деталей. Оборонгиз. 1955.
7. M. J. SCHILHANSL: Stress Analysis of a Radial-Flow Rotor. *Journal of Engineering for Power. P.A.S.M.E* (1962), January.

CALCULATION OF THE STRENGTH OF THE RUNNING WHEELS WITH RADIAL BLADING BY THE METHOD OF BECK

E. PÁSZTOR

SUMMARY

In the paper the author improves the method of Beck for the strength calculation of discs, in order to apply it to the exact strength calculation of discs of centrifugal compressors and centripetal turbines the specific weight of which varies as a function of the disc radius. The variation of the relative specific weight of the radial running wheels is caused by the blades fixed to the side of the disc. The paper shows that in case of $\gamma_{rel} \neq \text{const.}$ the hyperbolae of Beck can be determined by graphical integration; in the case treated by the author they show approx. $5 \div 8\%$ deviation from the hyperbolae calculated by the approximate method.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES ROUES A AUBES RADIALES
PAR LA MÉTHODE DE BECK

E. PÁSZTOR

RÉSUMÉ

L'étude développe la méthode de Beck relative au calcul de la résistance des disques, en l'étendant aussi au calcul exact de la résistance des compresseurs centrifuges et des turbines centripètes à poids spécifique relatif variant en fonction du rayon de disque. La variation du poids spécifique relatif des roues à aubes radiales est due aux aubes fixées sur le côté du disque. L'étude démontre qu'au cas de $\gamma_{rel} \neq const$, les hyperboles de Beck peuvent être déterminées par intégration graphique. Dans le cas étudié, elles montrent une différence de 5 à 8% env. par rapport aux hyperboles calculées selon la méthode approchée.

РАСЧЕТ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ РАБОЧИХ КОЛЕС С РАДИАЛЬНЫМИ
ЛОПАСТЯМИ МЕТОДОМ БЕККА

Э. ПАСТОР

РЕЗЮМЕ

В работе дается дальнейшее усовершенствование способа расчета прочности дисков Бекк-а таким образом, что этот способ становится пригодным для точного расчета механической прочности центробежных компрессоров с относительным удельным весом, меняющимся в зависимости от радиуса диска, и центростремительных турбин. Относительное изменение удельного веса радиальных рабочих колес создается лопастями, прикрепленными к боковой стенке диска. Исследование показывает, что при $\gamma_{отн.} \neq const$, гиперболы Бекк-а могут быть определены путем графического интегрирования, причем определенные таким образом гиперболы в рассматриваемом случае имеют отклонение порядка $5 \div 8\%$ от рассчитанных методом приближения.

ERGEBNISSE VON MODELLVERSUCHEN ÜBER DIE GRUNDWASSERABSENKUNG DURCH VAKUUMBRUNNEN

G. ÖLLÖS

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

M. DELI, CS. SZOLNOKY

LEHRSTUHL I. FÜR WASSERBAU AN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT FÜR BAU- UND
VERKEHRSWESEN, BUDAPEST

[Eingegangen: am 7. Januar 1963]

Der Aufsatz behandelt die Klärung von Grundfragen, wie sie sich bei Vakuumbrunnen, anhand der Sickerung im permanenten Zustand erheben. Es ist zu hoffen, daß diese bereits auf konkreten Messergebnissen beruhende hydraulische Betrachtungsweise grundlegender Bedeutung den Ausgangspunkt einer Zahl theoretischer, im Laboratorium oder in der Praxis durchzuführender Forschungsarbeiten bilden wird, die eine eindeutige und definitive Bestimmung der verschiedenen hydraulischen Gesetzmäßigkeiten zulassen.

1. Einleitung

Gleichzeitig mit der Entwicklung verschiedener Methoden der Grundwasserabsenkung zeigt sich ein immer größeres Interesse für die je exaktere Klärung der Fragen der dazugehörigen Hydraulik. Dies ist durchaus verständlich, da in einem konkreten Fall, ohne die gründliche Kenntnis der Hydraulik, die Wahl der richtigen und zweckmäßigen Wasserabsenkungsmethode kaum getroffen, und die Wasserabsenkung selbst in der Regel auf optimale Weise nicht durchgeführt werden kann. Auf Grund der Erfahrungen, die bei Grundwasserabsenkungsarbeiten im In- und Ausland gesammelt worden sind, haben sich zwar die Gesichtspunkte herausgebildet, die für die Praxis meistens als maßgeblich angesehen werden können, jedoch gibt es in der Hydraulik eine Zahl von Fragen grundlegender Bedeutung, deren theoretische Klärung noch aussteht, oder die nicht eindeutig ausgelegt werden können. Besonders trifft dies eben für die Grundwasserabsenkung durch Vakuumbrunnen zu.

In Ungarn ist die Anschneidung und Lösung zahlreicher vakuumhydraulischer Fragen vor allem mit dem Namen von SZÉCHY, K. [24, 25, 26, 27] und VASTAGH, G. [29, 30] verknüpft. Aus dem ausländischen Fachschrifttum verdienen die Arbeiten von ABRAMOV, K. S. [1], ARUTJUNJAN, N. R. [2], GÄRTNER, G. [3], JESENÁK, J. [6], MARIUPOLSKIJ, G. M. [11], MATSCHAK, H. [9, 10], MÖLLER, B. [12] und SENN, A. [19] besonders hervorgehoben zu werden.

Neben den an Gravitationsbrunnen im Laboratorium durchgeführten Forschungsarbeiten wurden in Ungarn zu Beginn des Jahres 1962 auch Laboratoriumsversuche in bezug auf die Hydraulik angestellt.¹

In der vorliegenden Abhandlung werden die Ergebnisse dieser anfänglichen Forschungsarbeit [18] kurzgefaßt dargelegt, wobei folgende Grundfragen der Hydraulik angeschnitten werden:

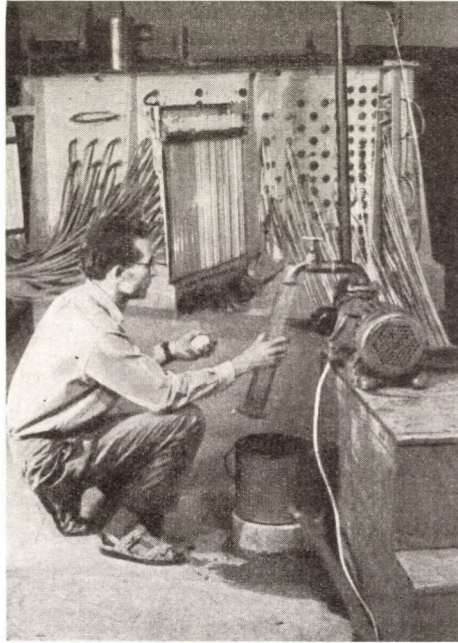


Bild 1. Piezometer-Druckmeßsystem. Im Vordergrund ist die Messung der aus dem Brunnen abgesaugten Wassermenge zu sehen

1. Eingehende Analyse der Druckverhältnisse, wie sie sich in der Brunnenumgebung herausbilden;
2. Unterschied der Depressionskurve für Gravitations- bzw. Vakuumbrunnen und Auslegung der Kurve für die Vakuumbrunnenumgebung;
3. Vergleich der Ergiebigkeit des Gravitationsbrunnens mit der des Vakuumbrunnens;
4. Bemerkungen über die gegenwärtige konstruktive Ausgestaltung der Vakuumbrunnen.

¹Die Forschungsarbeiten im hydraulischen Laboratorium des Lehrstuhls I für Wasserbau wurden im Auftrag des Unternehmens für Kanal- und Wasserleitungsbau des Ministeriums für Bauwesen geleistet. Als technischer Kontrolleur der Forschungsarbeit fungierte Herr G. KARÁDI, dem wir für seine Mitwirkung und wertvollen Ratschläge besten Dank sagen möchten.

Da unseres Wissens vor Beginn der Forschungsarbeit die Vakuumbrunnenhydraulik an Modellen nicht geprüft wurde, dürfte es zweckmäßig sein, das im folgenden zur Anwendung kommende Versuchsverfahren und die Versuchsvorrichtung selbst kurz zu beschreiben.

2. Modellversuchsverfahren

Im Fall des angewandten hydraulischen Sickermodells stellte die Bestimmung der im gesamten Sickersystem auftretenden Piezometerdrücke die vom

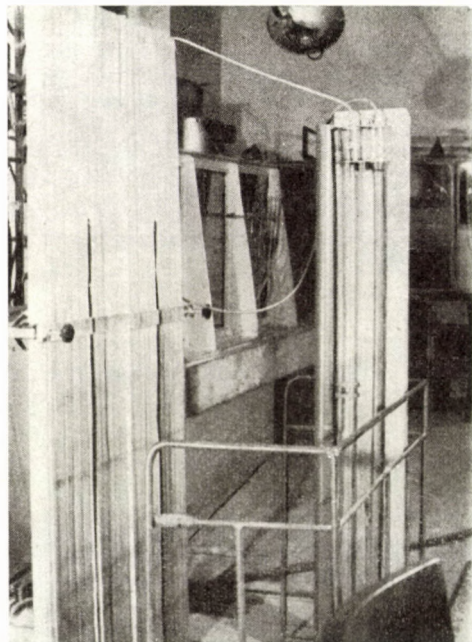


Bild 2. Piezometer Drucktafel zum Messen des Vakuums im körnigen Mittel und Vorrichtung zur Herstellung bzw. Regulierung niedrigeren Vakuums

meßtechnischen Standpunkt aus wichtigste Frage dar. Die zu diesem Zweck durchgeführten Prüfungen ließen die folgende Meßvorrichtung zur Ermittlung der Piezometerdrücke als geeignet erscheinen:

a) Die in einem vom Brunnen entfernt liegenden Feld auftretenden Piezometerdrücke kann man sowohl beim Gravitations- wie auch beim Vakuumbetrieb des Brunnens mit einer bereits zur Untersuchung von Gravitationsbrunnen eingesetzten Druckmeßvorrichtung bestimmen (zwei Drucktafeln im Bild 1 links), bei welcher die Gummischläuche, die sich den in der seitlichen Grenz wand des Modells eingebauten Piezometerdruckhähnen anschließen, mit

den Glasrohren einer vom Niveau der oberen Ebene der wasserundurchlässigen Schicht ausgehenden Drucktafel, die etwas höher als die Höhe H der Grundwasserschicht liegt, verbunden sind.

b) Die vorangehend im Punkt a) geschilderte Meßvorrichtung mußte — um sie zur Messung der Piezometerdrücke, wie sie in der unmittelbaren Umgebung des Brunnens auftreten, geeignet zu machen — vervollkommen

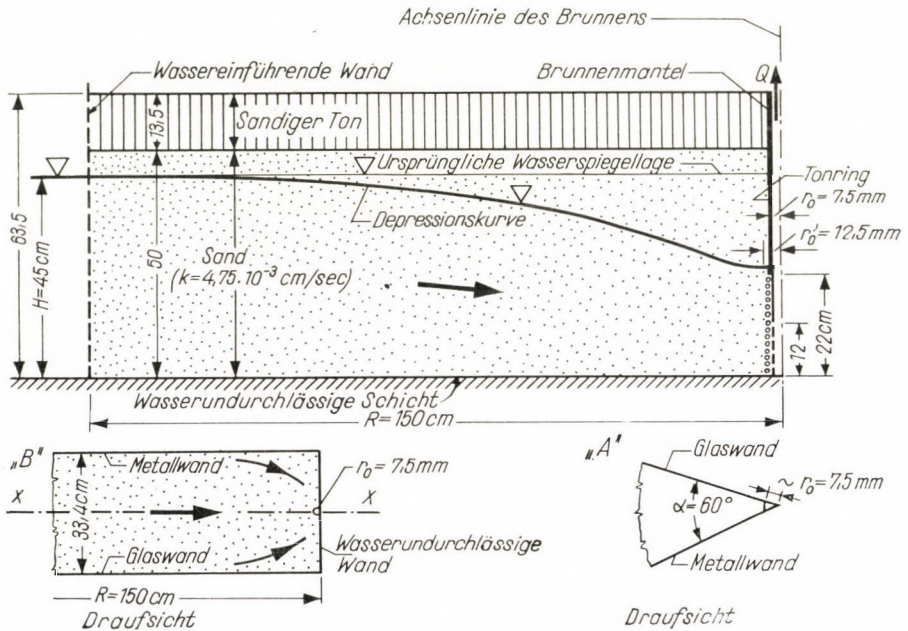


Bild 3. Charakteristische Abmessungen der zur Prüfung eines Einzelbrunnens und einer Brunnenreihe hergestellten Versuchsvorrichtung

werden. Man hatte auch die Drucktafel, wegen des Vakuums im körnigen Mittel, auch unterhalb der oberen Ebene der wasserundurchlässigen Schicht zu verlängern (Bild 2, Drucktafel links).

3. Versuchsvorrichtung

Zur Lösung der im Punkt 2 geschilderten Forschungsaufgabe wurden zwei unterschiedlich aufgebaute Modelle angefertigt.

1. Zur Untersuchung des hydraulischen Vorgangs beim Einzelbrunnen wurde ein Sektorenraum ausgestaltet, der die Grundrißform eines Kreisausschnittes hat (Bild 3, Detail »A«). Die radialgerichtete Abmessung desselben beträgt 150 cm.

Der Radius der im Mittelpunkt des Sektorenraumes angeordneten $1/6$ Brunnenmantelfläche ist $r_0 = 7,5$ mm. Der Brunnenmantel hat einen Abschnitt, der bis zur Höhe von 12 cm hinauf perforiert ist. Der »Kiesfilterzylinder« ist aus Sand aufgebaut, dessen Korndurchmesser zwischen 1 und 2 mm liegt. Der Radius ist $r'_0 = 12,5$ mm, die Höhe des Zylinders beträgt

22 cm. Ein Vergleich der gewählten Werte r_0 und r'_0 des Modells mit den entsprechenden Werten der tatsächlich angewandten Brunnen ergab, daß im Fall des Modells der Umrechnungsbeiwert λ für die geometrischen Abmessungen gleich 6 festgesetzt werden kann.

Die Wasserdurchlässigkeit des Materials der wasserführenden Schicht liegt mit $k = 4,75 \cdot 10^{-3}$ cm/sec eben an der Grenze der Wasserdurchlässigkeit, die nach jetziger Auffassung im allgemeinen die Herstellung eines Vakuumbrunnens noch rechtfertigt. Diese Sachlage aber ist in dem vorliegenden Fall günstig, da der Brunnen auch als Gravitationsbrunnen betrieben wird. Die wasserführende Schicht ist 50 cm stark. Oberhalb derselben befindet sich eine Tonschicht, deren Dicke 13,5 cm beträgt.

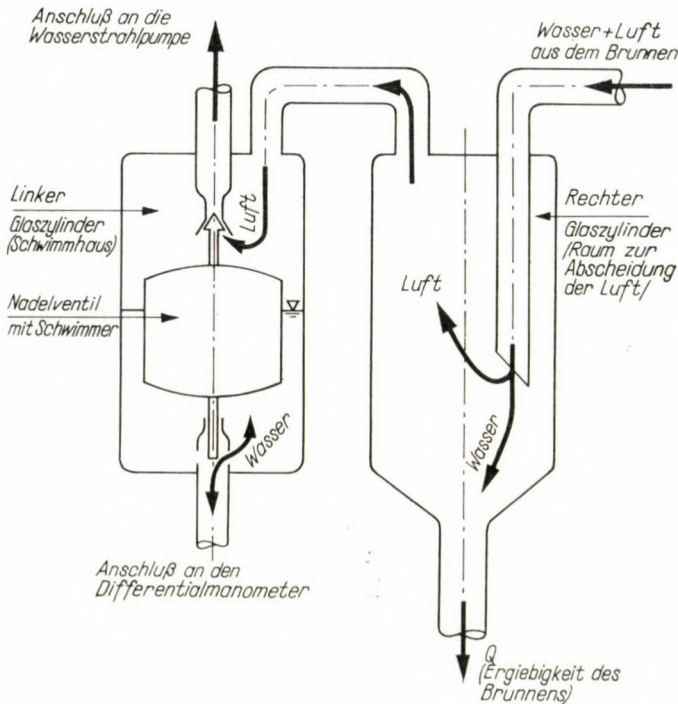


Bild 4. Wirkungsschema der Vorrichtung zur Herstellung und Regulierung niedrigeren Vakuums im Brunnen

Die ursprüngliche Stärke der Grundwasserschicht II, wie sie vor der Absenkung bestanden hatte, war für jede Versuchsvariante gleich und betrug 45 cm. Der kontinuierliche Nachschub des Wassers erfolgte durch eine aus Siebgewebe angefertigte, senkrechte, Kreiszyylinderfläche, die sich 150 cm vor der Mittellinie des Brunnens entfernt befand.

Der Brunnen schloß sich den Grenzänden des Sektorenraumes (Metall- bzw. Luftwand) luftdicht an.

2. Selbstverständlich ist zur Prüfung eines Brunnens der Brunnenreihe eine andersgeartete Vorrichtung erforderlich. In diesem Fall werden die wasserundurchlässigen, zu einander parallel angeordneten Grenzände des Sickerraumes (Bild 3, Detail »B«) unter der Annahme gewählt, daß sich die Brunnen in der Wirklichkeit in Abständen von je 2,00 m voneinander entfernt befinden. Aufbau und Wirkungsweise des Brunnens sind dieselben wie des unter Punkt 1 beschriebenen Brunnens, jedoch wurde dieser nicht zum Sechstel, sondern zur Hälfte ausgebildet.

Das Vakuum im Brunnen wurde bei höheren Depressionen (sowohl im Fall eines Einzelbrunnens wie auch in dem einer Brunnenreihe) mit der im Bild 1 gezeigten Saugpumpe, bei kleineren Depressionen hingegen mit der aus der Bild 4 ersichtlichen Unterdruckregler hergestellt. Dieser hält das Vakuum im Brunnen in gleichbleibender Höhe aufrecht und

zerlegt das aus dem Brunnen kommende Wasser—Luft-Gemisch, wodurch die Vorrichtung auch zur Bestimmung der Wasser-ergiebigkeit herangezogen werden kann. Der linksseitige Glaszylinder wird durch eine Wasserstrahlpumpe angesaugt. Im oberen Teil des Glaszylinders läßt sich das Vakuum, der Differenz der im Manometer hergestellten Wasserspiegellage entsprechend, durch Betätigung eines Nadelventils stabilisieren. Selbstverständlich herrscht auch im rechten Glaszylinderraum derselbe Unterdruck. Dieser entzieht dem Brunnen eine gewisse Menge der aus Wasser und Luft bestehenden Mischung, die sich im rechtseitigen Zylinder zerlegen läßt. Das vom Brunnen gelieferte Wasser entleert sich auf diese Weise in ein unter dem rechtseitigen Zylinder befindlichen Glasrohr. Der untere Abschnitt dieses Rohres ragt in einen Raum hinein, wo die Wasserspiegellage (durch Regelung mittels eines Überfalls) in gleichbleibender Höhe gehalten wird

4. Piezometer Druckverteilung im körnigen Mittel, das den Brunnen umgibt

Die Hydraulik der Gravitationsbrunnen beruht, ebenso wie die eines jeden Sickervorganges, auf dem Strömungsbild. Die Kenntnis desselben ist auch für die Ausgestaltung der Vakuumbrunnenhydraulik von grundlegender Bedeutung. Kommt ja durch den Umstand, daß sich das Vakuum im Brunnen auch auf einen gewissen Teil des körnigen Mittels in der Brunnenumgebung erstreckt, der Kenntnis des im ganzen Sickersystem dadurch verwickelter werdenden Sickerströmungsbildes besondere Bedeutung zu. Der Vakuumbrunnen wirkt sich, bildlich gesprochen, im Vergleich zum Gravitationsbrunnen auf die Wasserdurchlässigkeit des körnigen Mittels erhöhend aus, und die zahlenmäßige Berücksichtigung dieses Umstandes steht, vom theoretischen Standpunkt aus, ohne Zweifel mit dem Strömungsbild (das heißt mit der Verteilung des Piezometerdrucks) in Zusammenhang.

Das »Ansteigen« der Wasserdurchlässigkeit ist darauf zurückzuführen, daß infolge der Anwesenheit eines Vakuumfeldes im körnigen Mittel der hydraulisch tatsächlich wirksame Brunnendurchmesser größer als der geometrische ist. Für die Vakuumhydraulik ist also nicht der geometrische Brunnendurchmesser ausschlaggebend, vielmehr ist es ein anderer, durch die Höhe des Vakuums im Brunnen bedingter, veränderlicher hydraulischer Durchmesser, den man zu berücksichtigen hat.

Ein Vakuumbrunnen kann, solange der Wasserspiegel in ihm nicht unter das Bodenniveau herabgesunken ist, wahrscheinlich noch annähernder als ein Gravitationsbrunnen angesehen werden.² In diesem Fall tritt das größte Druckgefälle in der unmittelbaren Umgebung des Brunnenmantels auf (Bild 5). Da der Durchmesser des Brunnens (und die perforierte Filterfläche des Mantels) äußerst klein ist, bildet sich in der Umgebung des Brunnens bereits im Fall eines Gravitationsbetriebes ein beachtliches hydraulisches Gefälle heraus. Wie bereits aus anderen, von den Verfassern an Gravitations-

² Selbstverständlich gibt es beim Vakuumbrunnen theoretisch — auch für $(S/H) < 1,0$ — nie einen Gravitations-Absaugungsabschnitt.

brunnen angestellten Prüfungen klar hervorging [15, 16], erstreckt sich die Piezometerdruckverteilung auch bis auf eine gewisse Höhe des über dem abgesenkten Grundwasserspiegel befindlichen Raumes, des Kapillarabschnitts hinauf.

Die Depressionskurve (vorläufig handelt es sich in diesem Fall um einen Einzelbrunnen) befindet sich noch auf einem ganz hohen Niveau. Derselbe Fall liegt auch bei dem in der Praxis hergestellten Vakuum vor. Den Beweis hierfür führt das Bild 6; ein Vakuum, welches dem Bild entsprechen würde, läßt sich in der Wirklichkeit im Brunnen überhaupt nicht mehr herstellen.³ Es kann also festgestellt werden, daß eine Grundwasserabsenkung, die den Anforderungen gerecht ist, durch einen einzigen Vakuumbrunnen kaum bewerkstelligt werden kann.

Wie dies aus der Gegenüberstellung der Bilder 5 und 7 hervorgeht, wird im Fall einer Brunnenreihe, wenn $s/H = 1,00$ ist, der Grundwasserspiegel — also schon bei Gravitationssenkung — tiefer zu liegen kommen.

Die günstige Wirkung einer Brunnenreihe tritt besonders beim Vakuumbetrieb klar zutage (Bild 6 und 8). Im Fall eines Einzelbrunnens erstreckt sich das Vakuum, wenn $s/H = 3,84$ ist, noch auf einen verhältnismäßig kleinen Raum der perforierten Filterfläche des Brunnenmantels. Handelt es sich hingegen um eine Brunnenreihe, wird das Vakuum bereits bei einer Verhältniszahl von $s/H = 2,56$, was zugleich einer Verlagerung der ganzen Absaugfläche auf ein ganz tief unten liegendes Niveau zur Folge hat, in beachtlichem Maße auf das umgebende körnige Mittel übergreifen.

Auf Grund der Bilder 5 bis 7 lassen sich die von den Verfassern erbrachten Forschungsergebnisse betreffs der Beschaffenheit der Verteilung des Piezometerdrucks auf das Absaugungsfeld in der Brunnenumgebung folgendermaßen zusammenfassen:

1. Solange $s/H < 1,00$ ist, existieren in der Brunnenumgebung zwei Arten von Druckfeldern (Bild 9a).

a) Unterhalb des abgesenkten Grundwasserspiegels können positive Werte des Piezometerdrucks beobachtet werden.⁴

³ In dem Aufsatz wurde die Höhe des bis zur wasserundurchlässigen Schicht herabgesenkten Brunnenvakuums durch das Verhältnis s/H ausgedrückt (s ist die von der ursprünglichen Grundwasserspiegellage gemessene Absaugung, H die Stärke der Grundwasserschicht über der oberen Ebene der wasserundurchlässigen Schicht). Beim Modell setzt ein beträchtliches Übergreifen des Vakuums auf das körnige Mittel bei $s/H = 1.0$ ein. Wenn angenommen wird, daß für die im Feld erbauten Vakuumbrunnen der Höchstwert des herstellbaren Vakuums bei 6,0 m Wassersäulenhöhe liegt, so entspricht diesem Wert im Modellversuch, da hier $\lambda = 6$ ist, nach der vorangehenden Auslegung der Wert $s = 100$ cm. Diesem Wert von s entspricht also $s/H = 100/45 = 2,2$.

⁴ Die auf Grund unserer Meßmethode erhaltenen positiven p/γ -Werte sind dahingehend auszulegen, daß sich die ihnen entsprechende Wassersäulenhöhe in den Piezometerröhren noch über der oberen Ebene der wasserundurchlässigen Schicht einstellt. Die in der Kapillärzone gemessene Verteilung p/γ wird auf Grund der in diesem Sinne vorgenommenen Auswertung der Druckdaten als positiv bezeichnet.

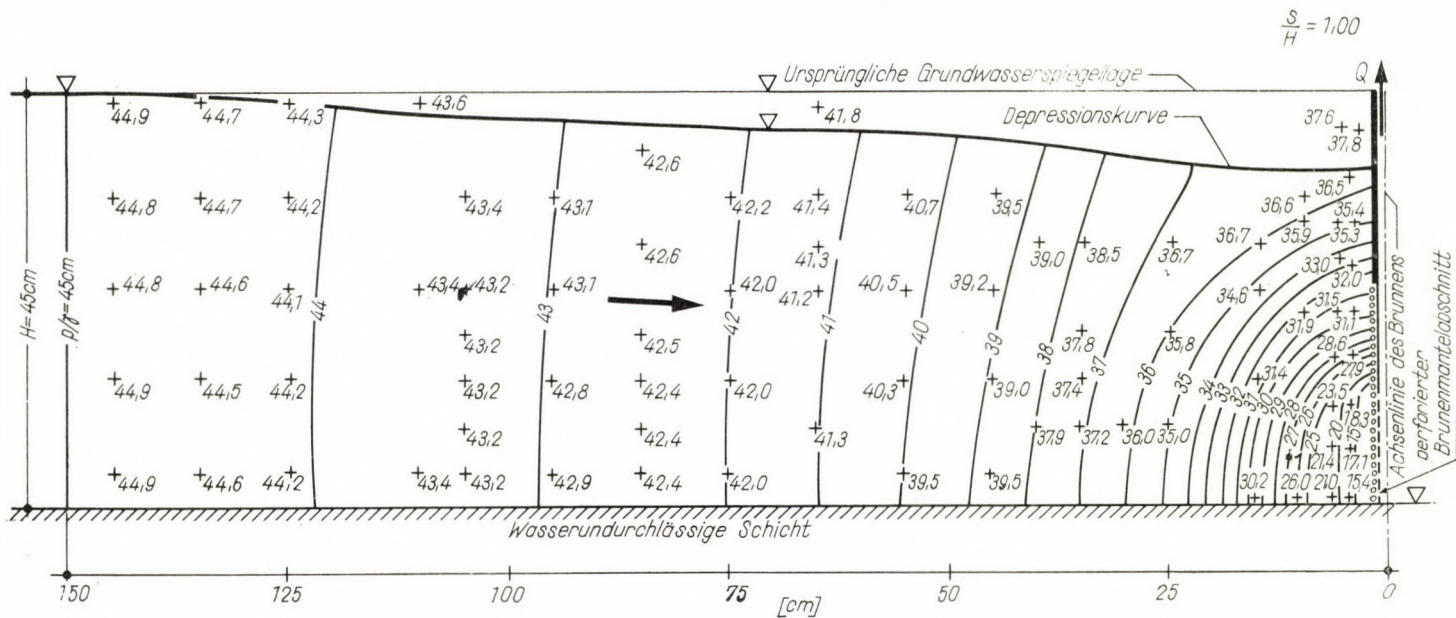


Bild 5

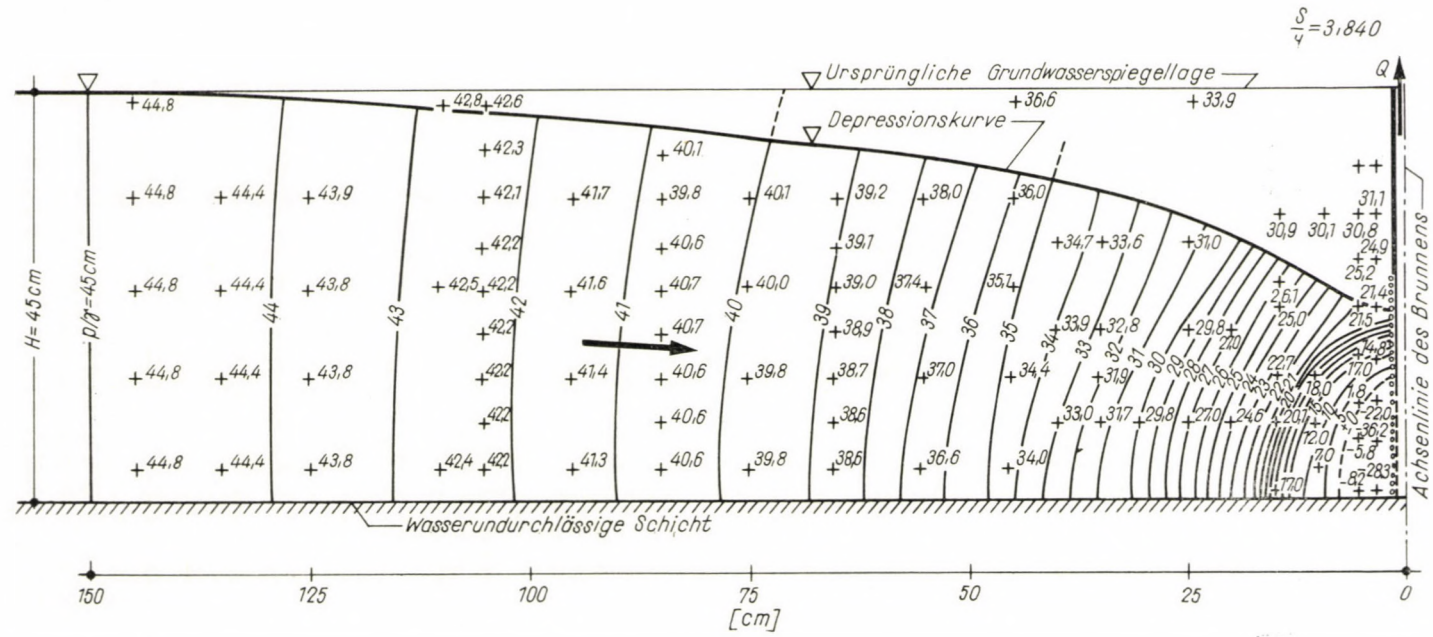


Bild 6

Bild 5. und Bild 6. Verteilung des Piezometerdrucks, wie er um den Einzelbrunnen herum auftritt und Verlauf der Depressionskurve im Fall eines Gravitationsbetriebs (Bild 3, $s/H = 1,00$) und in dem eines Vakuumbetriebs (Bild 4, $s/H = 3,84$) des Brunnens

Jena Techn. Hung. 49 (1964)

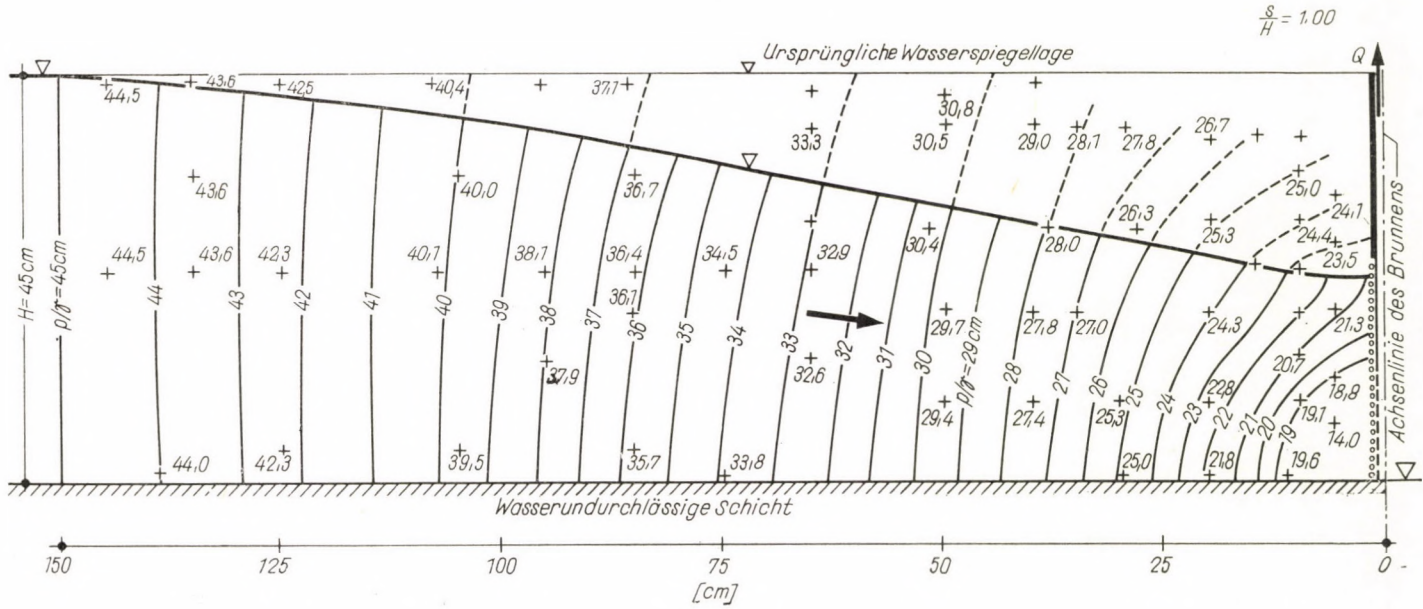


Bild 7

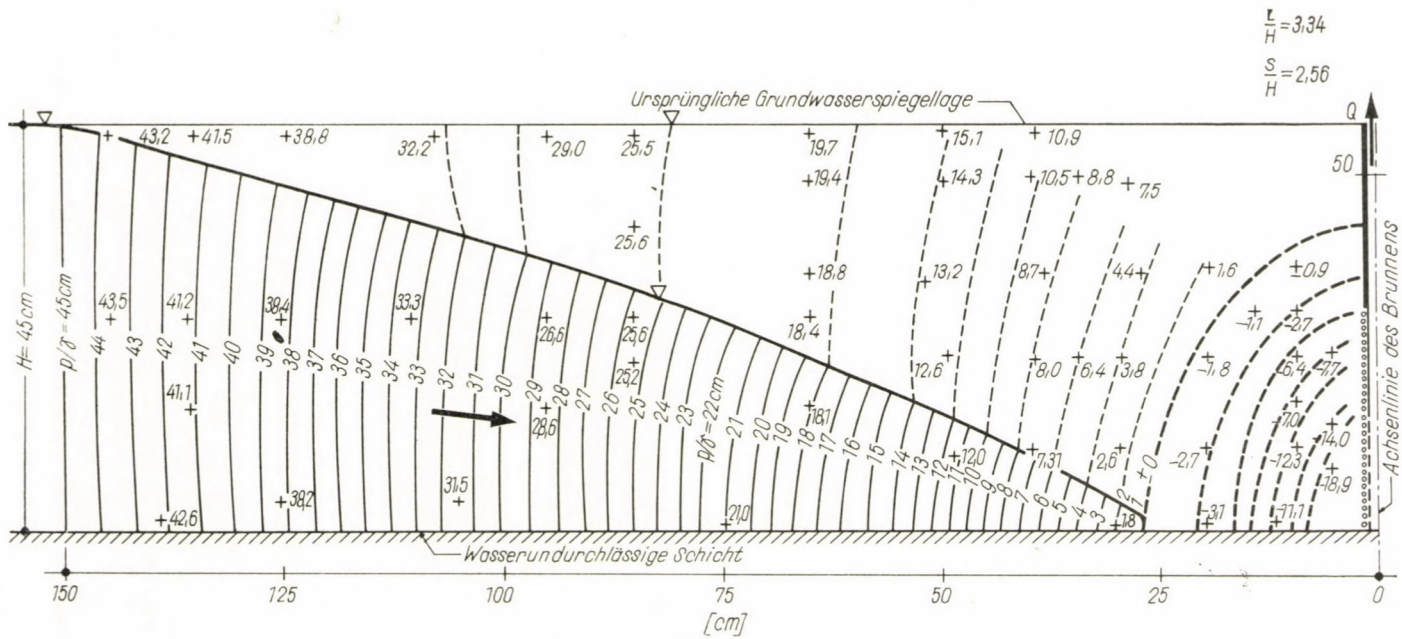


Bild 8

Bild 7 und Bild 8. Verteilung des Piezometerdrucks, wie er um den Brunnen der Brunnenreihe herum auftritt und Verlauf der Depressionskurve im Fall eines Gravitationsbetriebs (Bild 5, $s/H = 1,00$) und in dem eines Vakuumbetriebs (Bild 6, $s/H = 2,56$) des Brunnens

b) Oberhalb des abgesenkten Wasserspiegels, bis zu einer gewissen Höhe der Kapillarzone hinauf, zeigen sich ebenfalls positive Druckwerte. Die Kapillarzone wird im folgenden *oberes Vakuumfeld* genannt.⁵

2. Im Fall, daß $s/H > 1,00$ ist, greift das Vakuum auch auf den Raum des körnigen Mittels über, das sich dem Brunnenmantel anschließt (Bild 9b). Außer der Druckverteilung, wie sie in den Punkten 1a und 1b beschrieben worden ist, tritt auch ein anderes, unteres Vakuumfeld auf. In diesem sind aber die Werte p/γ bereits negativ. Oberes und unteres Vakuumfeld stehen aber, bis im Brunnen das Vakuum eine gewisse Höhe nicht erreicht hat, miteinander nicht in Verbindung (z. B. Bild 6).

3. Von einem Vakuum gewisser Höhe an bilden das obere und untere Vakuumfeld ein miteinander zusammenhängendes System (Bild 9c). Die beiden Felder sind voneinander durch die Linie mit dem Wert $p/\gamma = \pm 0$ getrennt.

Aus dem Bild 2 geht umfassend hervor, daß der Druck zwischen den Feldern oberhalb und unterhalb der Depressionskurve kontinuierlich ist, ferner daß von der Stelle des Wassernachschubs ausgehend das Niveau der Piezometerdrücke in den miteinander in Zusammenhang stehenden oberen und unteren Vakuumfeldern — ähnlich wie dies unter den Umständen, die im Feld unterhalb der Depressionskurve obwalten, der Fall ist — ständig sinkt. Die p/γ -Linie mit dem Wert $+0$ ist also die Linie mit dem höchsten Wert im oberen Vakuumfeld.

5. Die Depressionskurve

Der Kenntnis der Depressionskurve kommt in der Vakuumbrunnenhydraulik aus folgenden Gründen Bedeutung zu:

a) Die Kurve trennt den zweiphasigen Teil des Sickersystems vom oberen Vakuumfeld (Bild 9a).

b) Sie gibt den am tiefsten liegenden Punkt der Wasserspiegelabsenkung an der Außenseite des Brunnenmantels an, dieses Datum ist für die Klärung des vertikalen Abreißen der Wasserspiegel zu beiden Seiten des Mantels von grundlegender Bedeutung.

c) Sie liefert Ausgangsdaten für die Bestimmung der Ausdehnung des körnigen Bereiches, der als Folge der Grundwasserabsenkung als entwässert angesehen werden kann.

Bevor auf die Erörterung der Eigenschaften der Depressionskurve eingegangen wird, soll angenommen werden, daß dieselbe eine krumme Linie darstellt, deren Punkte sich im Niveau der Wassersäulenhöhe befinden, welche zu den durch diese Punkte hindurchgehenden Piezometerdrucklinien gehört.

⁵ Durch diese Benennung der Kapillarzone soll angedeutet werden, daß in dieser Zone dem Vakuum nur dann eine bedeutende Rolle zukommt, wenn es sich mit dem *unteren Vakuumfeld* berührt.

Es werden also die Depressionskurven für den Gravitations- bzw. Vakuumbrunnen auf die gleiche Weise ausgelegt. Mit dieser Anschauungsweise kann in bezug auf die Depressionskurve auf Grund der von den Verfassern durchgeführten Modellversuche das folgende ausgesagt werden:

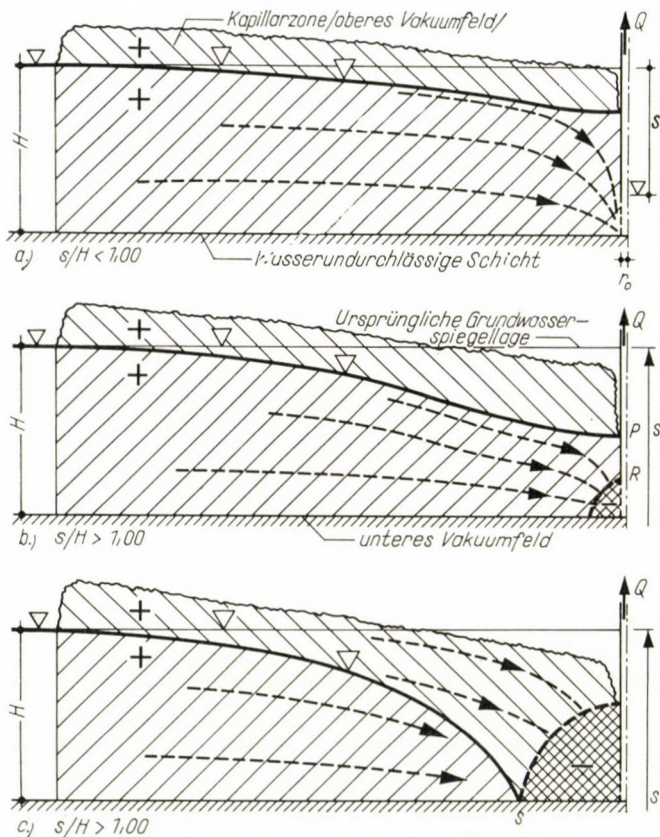


Bild 9. Grundfälle des Depressionskurvenverlaufs um den Vakuumbrunnen herum und die der Ausgestaltung verschiedenartiger Piezometerdruckmesser
Im Feld mit positivem Vorzeichen liegt das p/γ -Niveau über der oberen Ebene, in dem mit negativem unter der oberen Ebene der wasserundurchlässigen Schicht.

1. Beim Gravitationsbrunnen, aber auch unter Anwendung eines Unterdrucks gewisser Höhe, schneidet die Depressionskurve das sich in der Brunnenumgebung befindliche Kiesfilter in der Zone ohne Perforation (Bilder 5 bis 7).

2. Erhöht man den Unterdruck im Brunnen, wird zwar der Punkt der Kurve, welcher sich neben dem Brunnenmantel befindet, entlang der Erzeugenden des Mindestsickerquerschnitts (Zylinders) ebenfalls auf ein tiefer gelegenes Niveau absinken, jedoch nur bis zu einem gewissen Grad. Bei einem über die ganze Höhe der wasserführenden Schicht perforierten

Depressionskurve aller Wahrscheinlichkeit nach auf die im Bild 10 gezeigten Weise — das Bild ist nur als eine schematische Darstellung anzusehen — unter die Brunnensohle herabsinken.

Nach Schilderung der möglichen Arten des Kurvenablaufs, läßt sich folgende Frage grundlegender Bedeutung stellen: bis zu welcher Tiefe herab kann der unter dem ursprünglichen Grundwasserspiegel befindliche Bodenraum vom Standpunkt der Baugrube bzw. der Durchführung der Fundierung

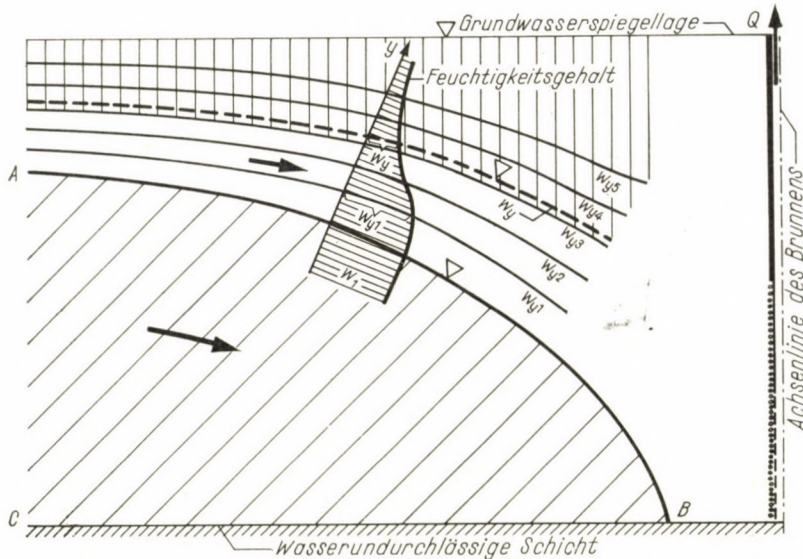


Bild 11. Auslegung der durch verschiedene w_{yi} Feuchtigkeitsgehalte gekennzeichneten Depressionskurvenschar um den Brunnen herum, bei der Beurteilung der Form des vom Standpunkt der Fundierung aus als tatsächlich entwässert anzusehenden Sickerfeldes

aus als im zureichenden Maße entwässert betrachtet werden? Welche Hinweise vermag diesbezüglich die Depressionskurve zu geben?

Die Antwort kann auf Grund des Bildes 11 gegeben werden. Das Feld ABC , welches sich unterhalb des Abschnitts AB der Depressionskurve befindet, besteht aus zwei Phasen (Grund und Wasser), hingegen ist das darüber liegende untere bzw. obere Vakuumfeld, die ein zusammenhängendes System bilden, als ein Dreiphasensystem (bestehend aus Grund, Wasser und Luft) anzusehen. In diesem Feld ist der Feuchtigkeitsgehalt höhenbedingt und ändert sich von Punkt zu Punkt. Wie aus der Kurve, die die Art der Feuchtigkeitsverteilung darstellt, hervorgeht, gehört zum Punkt $y = 0$ der Wert w_1 . In dem unmittelbar darüber liegenden, geschlossenen Kapillarbereich ist der Feuchtigkeitsgehalt von derselben Größenordnung wie w_1 . Die unmittelbar über der Depressionskurve liegende Grundzone ist vom Standpunkt der Fundierung aus

unter keinen Umständen als bereits entwässert anzusehen. Noch in einer beträchtlichen Höhe dieses Vakuumfeldes bewegt sich das Wasser zum Brunnen hin und sickert — ebenso wie dies im unter der Depressionskurve liegenden Feld der Fall ist — ständig nach. Oberhalb der Depressionskurve AB (entlang welcher der Wassergehalt gleich w_1 ist) befindet sich also eine Schar von Depressionskurven und zu einer jeden Kurve gehört ein unterschiedlicher Wassergehalt w_{y1}, w_{y2}, \dots . Diese Wassergehaltswerte sind dadurch gekennzeichnet, daß

$$w_{y1} > w_{y2} > w_{y3} > \dots \quad (1)$$

ist. In Abhängigkeit vom strukturellen Aufbau dieser wasserführenden Schicht gibt es über der Depressionskurve AB in irgend einer Höhe y eine durch den Wassergehalt w_y gekennzeichnete Kurve, oberhalb welcher die Grundzone vom Standpunkt der Fundierung aus praktisch als entwässert angesprochen werden kann. Selbstverständlich erfährt die Lage eine weitere Komplikation in bezug auf die als ausschlaggebend angesehene Depressionskurve mit dem Feuchtigkeitswert w_y im Fall, daß durch Öffnung der Baugrube, bei Abbau der oberen, wasserundurchlässigen Schicht, der atmosphärische Druck in unmittelbarer Nähe der Depressionskurve mit dem Feuchtigkeitsgehalt w_y eingeführt wird.

6. Abreißen des Wasserspiegels zu beiden Seiten des Brunnenmantels

Die Kenntnis der Gesetzmäßigkeit, welcher die beiden, an der Innen- und Außenseite des Brunnens befindlichen Wasserspiegel (h_k bzw. h_b) im vertikalen Abreißen folgen, leistet in der richtigen Beurteilung des Erfolges der Wasserabsenkung wertvolle Hilfe. Der Verlauf des Abreißen stellt auch die Funktion des Einzelbrunnens bzw. die einer Brunnenreihe auf eine durchaus kennzeichnende Weise heraus. Es dürfte auch einleuchten, daß im letzteren Fall die Entfernung der Vakuumbrunnen voneinander vom hydraulischen Standpunkt aus nicht gleichgültig sein kann.

Die von den Verfassern durchgeführten Berechnungen haben gezeigt, daß die Gesetzmäßigkeit des Abreißen im Gravitationsabschnitt des Einzelbrunnens mit der folgenden Gleichung beschrieben werden kann [15]:

$$h_k - h_b = 0,228 \sqrt[3]{\frac{H}{r_0} \frac{(H - h_b)^2}{H}} \quad (2)$$

Es sei nun beispielsweise $h_b = 0$. Die Depressionskurve schneidet in diesem Fall — wie das Bild 12 erkennen läßt — den Brunnenmantel in der Höhe von

$h_k = 37 \text{ cm}$ ($h_k/H = 0,82$); es handelt sich hierbei um einen Einzelbrunnen. Der Wert von h_k ergibt sich aus der Gleichung zu 40 cm ($h_k/H = 0,89$).⁶ Die hohe Wasserspiegellage ist ein klarer Beweis dafür, daß sich durch einen Einzelbrunnen verhältnismäßig kleinen Durchmessers (gleichgültig, ob es sich um einen Gravitations- oder Vakuumbrunnen handelt) eine wirkungsvolle Grundwasserabsenkung kaum durchführen läßt.

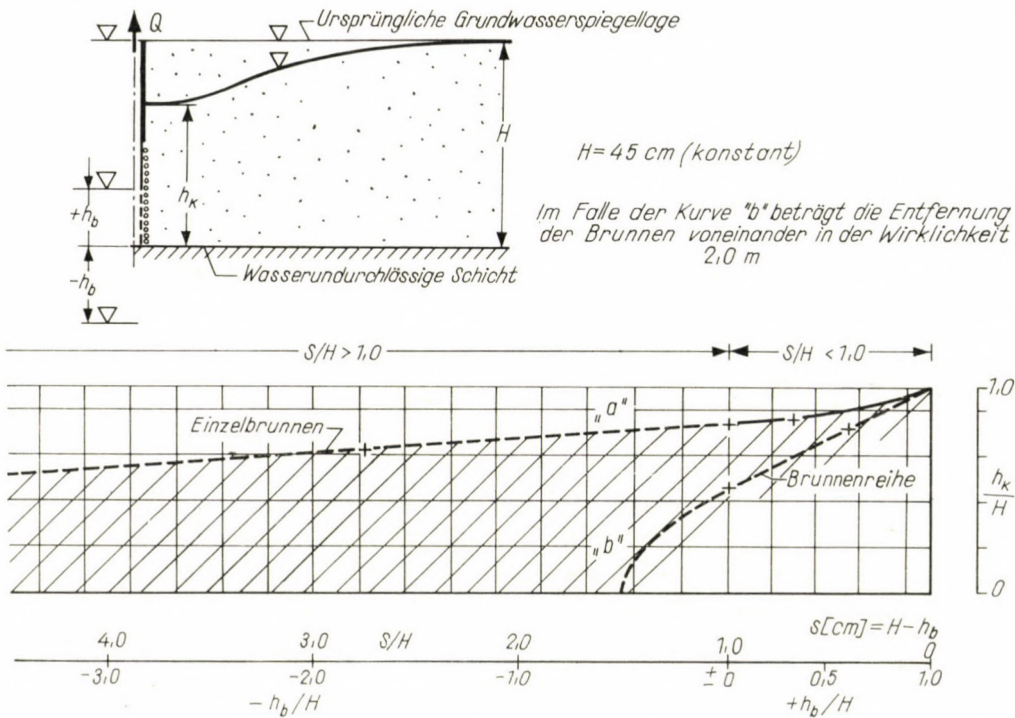


Bild 12. Vertikales Abreißen der Wasserspiegellage (h_k bzw. h_b) an der Innen- und Außenseite des Brunnenmantels beim Einzelbrunnen (Kurve „a“) und bei einem Brunnen der Brunnenreihe (Kurve „b“) in den Abschnitten $S/H \leq 1,0$ und $S/H > 1,0$

Die im Bild 12 gezeigte Kurve „a“ (die sich auf den Fall eines Einzelbrunnens bezieht) läßt klar erkennen, welcher Grad des Abreißens den verschiedenen Vakuumwerten hinzugehört. Der annäherungsweise als eine Gerade anzusehende Kurvenabschnitt führt auch den Beweis, daß die Depressionskurve bereits bei einem Vakuum, das nur im Modellversuch hergestellt werden kann, noch den Brunnenmantel schneidet, dann von der Höhe an, wo sich das obere

⁶ Bei der Wahl von r_0 in der Gleichung sollte der Umstand berücksichtigt werden, daß der Brunnen nur auf dem Unterteil, über 12 cm perforiert ist. Andererseits müßte man der Anwesenheit des Kiesfilters wegen des Brunnenradius r_0 vergrößern. Es ist zweckmäßig, vorderhand annäherungsweise mit einem Wert für r_0 zu rechnen, der den tatsächlichen geometrischen Abmessungen des perforierten Rohres entspricht.

und untere Vakuumfeld aneinander anschließen — die etwa bei $h_k = 15$ bis 20 cm liegen dürfte — ($h_k/H = 0,3 \div 0,445$) den Brunnenmantel jäh verläßt und die obere Ebene der wasserundurchlässigen Schicht schneidet. Dementsprechend krümmt sich dieser untere Abschnitt der Kurve „a“ plötzlich abwärts. Es kann also festgestellt werden, daß ein Abreißen auch im Fall eines Vakuumbrunnens auftritt. Der Wert desselben läßt sich im Vakuumabschnitt auf Grund der von den Verfassern durchgeführten Versuche für einen Einzelbrunnen mit Hilfe der folgenden, annäherungsweise gültigen Beziehung berechnen:

$$h_k = 0,288 H \sqrt[3]{\frac{H}{r_0}} - 0,32 \frac{h_v}{H}, \quad (3)$$

wo h_k das Wasserniveau an der Außenseite des Mantels (oberhalb der wasserundurchlässigen Schicht [m], H die Höhe der ursprünglichen Grundwasserschicht [m], r_0 den zum perforiertem Brunnenmantel gehörenden Radius [m], h_v das Vakuum unterhalb der oberen Ebene der wasserundurchlässigen Schicht [m] (Höhe der Brunnensohle) bedeuten. Die Gleichung (3) bezieht sich auf einen, bis zur wasserundurchlässigen Schicht abgesenkten Brunnen und ein homogenes, körniges Mittel.⁷ In der Formel ist der Wasserundurchlässigkeitsbeiwert k noch nicht mit berücksichtigt.

Im Fall einer *Brunnenreihe* ist das Abreißen der Wasserniveaus — wie aus der Kurve „b“ hervorgeht — bedeutend kleineren Ausmaßes. Die Versuche haben aber gezeigt, daß sich der Fall, wo $h_b = 0$ ist, bei den in der Praxis vorgenommenen Pumparbeiten ohne weiteres herbeiführen läßt.

Der Höhenunterschied zwischen beiden Kurven stellt klar heraus, daß einer richtigen Wahl der Entfernung der Brunnen einer Brunnenreihe voneinander große Bedeutung zukommt. Die Kurve „b“ gehört nämlich zu irgendeinem gegebenen Brunnenabstand. Soll daher die Frage nach dem optimalen Brunnenabstand geprüft werden, ist eigentlich auch die Kenntnis der im gestrichelten Feld befindlichen Kurvenschar „b“ erforderlich. Die gemeinsame Analyse der hier in bezug auf die Hydraulik, den Wassernachschub, die Wasserdurchlässigkeit, die zeitliche Verzögerung der Wasserabsenkung und Betriebskosten obwaltenden Umstände geben also die Gesichtspunkte an, die anhand der Lösung der theoretischen und praktischen Fragen der Vakuumbrunnen stets zu berücksichtigen sind. Die untere Grenzkurve der Kurvenschar gehört der Galerie mit senkrechter Wand an (wo der Brunnenabstand gleich Null ist). Es würde sich aller Wahrscheinlichkeit nach lohnen, im Zuge der

⁷ Hierzu ist zu bemerken, daß in Gleichung (3) zwecks Veranschaulichung des Sickervorganges für r_0 eigentlich der hydraulische und nicht der geometrische Wert einzusetzen wäre.

folgenden Forschungsarbeiten die Kurvenschar bzw. alle die entsprechenden, angeführten hydraulischen Parameter durch Modellversuche zu bestimmen.

Es ist zu bemerken, daß die Verfasser erst bei Beendigung ihrer Meßarbeiten davon unterrichtet wurden, daß ARUTJUNJAN, R. N. Versuche über die Galerie mit senkrechter Wand durchgeführt hatte [2].⁸

7. Wasserergiebigkeit

Die Kenntnis der dem Brunnen zu entnehmenden Wassermenge ist für den Entwurf des gesamten Wasserabsenkungsvorganges und vor allem für die Wahl der geeigneten Vorrichtungen sowie die Voraussage der zu erwartenden Zeitdauer der Wasserabsenkung von fundamentaler Bedeutung.

Wie bereits aus dem vorangehend Gesagten hervorgehen dürfte, gibt es in den einzelnen Teilen des Sickersystems Räume, die in hydraulischer Hinsicht unterschiedlich geartet sind. Dadurch ändern sich die hydraulischen Voraussetzungen für die Bewegung des Wassers zum Brunnen hin. Infolge der Vakuumwirkung ist auch die Durchleitung des oberen Vakuumfeldes viel größer, als dies bei Gravitationsbrunnen mit freier Oberfläche der Fall war (Bild 9c). Anhand der Entfernung der Depressionskurve vom Brunnenmantel erhebt sich sofort die Frage, in welcher Weise die Depressionskurve durch die Brunnenergiebigkeit gekennzeichnet werden könnte. Die Depressionskurve ist zweifellos gewissermaßen auf eine andere Art als die des Gravitationsbrunnens zu handhaben. Der Modellversuch trägt zur richtigen Beurteilung der Frage wesentlich bei (Bild 13).

Die geometrischen Eigenschaften der Wasserergiebigkeitskurve für den Einzelbrunnen führen zu folgenden Feststellungen:

1. Die Wasserergiebigkeitskurve läßt sich in zwei Abschnitte zerlegen: a) in einen, wo $S/H \leq 1,0$ und b) in einem anderen, wo $S/H > 1,0$ ist.
2. Der Übergang von dem einen zum anderen Abschnitt ist kontinuierlich. Dies bedeutet, daß die im Gravitationsbetrieb erzielbare Höchstergiebigkeit (bei $h_b = 0$) zugleich die Mindestergiebigkeit bei Vakuumbetrieb darstellt. Diese Tatsache kann aber auch durch die Analyse des physikalischen Vorganges, wie er sich in unmittelbarer Nähe des Brunnens abspielt, unzweideutig erklärt werden. Bei Erhöhung des Vakuums wird sich gleichzeitig das untere Vakuumfeld kontinuierlich verbreitern und das Vakuum in den darin liegenden Punkten ansteigen. *Nun spielt aber in der Beeinflussung der Wassermenge, die in den Brunnen gelangt, eben dieses Vakuumfeld die entscheidende hydraulische Rolle.*

⁸ Der Aufsatz wurde dem Laboratorium vom Herrn BALLY R. I. dem Direktor-Stellvertreter der Wissenschaftlichen Forschungsanstalt für Wasserwirtschaft, Bukarest, anlässlich einer persönlichen Begegnung zur Verfügung gestellt. Die Verfasser möchten dem genannten Herrn für seine liebenswürdige Hilfe besten Dank sagen.

3. Die Wasserergiebigkeit erhöht sich kontinuierlich. Beim Modellversuch hatte sie ihren Höchstwert (und dies dürfte auch aller Wahrscheinlichkeit nach für den tatsächlichen Brunnenbetrieb zutreffen) im Fall, daß das erreichbare maximale Vakuum hergestellt wurde.

Die Wasserergiebigkeitskurve für einen Brunnen der Brunnenreihe ist im Wesen mit der eines Einzelbrunnens identisch. Die vorangehend in den

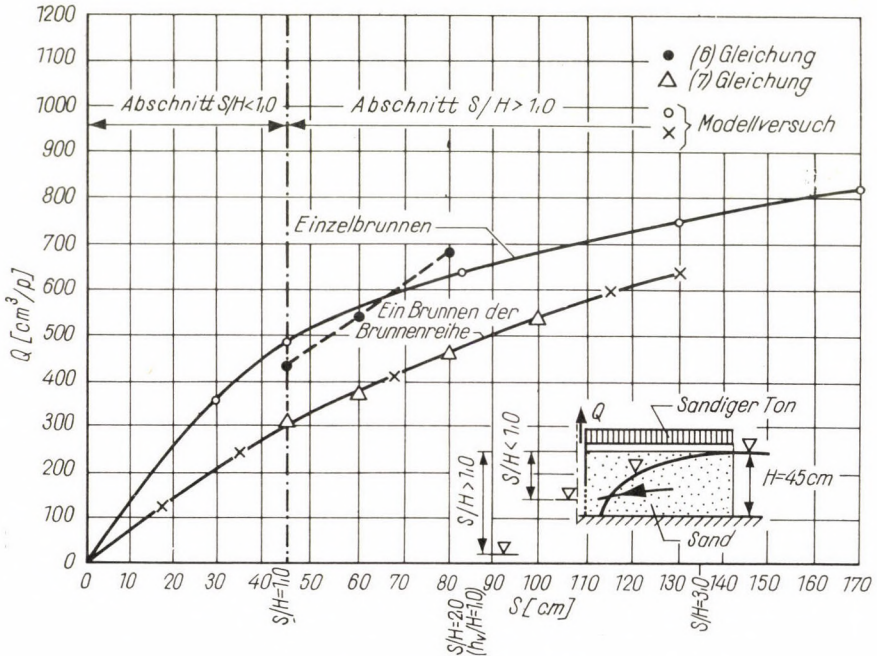


Bild 13. Wasserergiebigkeitskurve

Punkten 1 bis 3 formulierten hydraulischen Grundprinzipien haben auch hier Gültigkeit. Jedoch kommt die Kurve hier bereits einer Geraden näher, als dies beim Einzelbrunnen der Fall ist. Diese Tatsache hat ihre Erklärung in den hydraulischen Umständen, die aus der *Brunnenreihe* resultieren. (Die extreme Kurvenlage stellt die Galerie mit der vertikalen Wand dar.)

Nun soll anhand des Bildes 8 die Frage angeschnitten werden, was für einen Verlauf die Sickerstromlinien beim Entfernen der Depressionskurve von Brunnen nehmen. Das Bild 14 läßt erkennen, daß die Depressionskurve im Wesen keinen Einfluß auf den Verlauf der Stromlinien ausübt; jene wird von diesen sozusagen durchschnitten. Selbstverständlich wird die Form des brunnenseitigen Stromlinienabschnitts von der Depressionskurve ausgehend streng genommen auch von der Wasserdurchlaßfähigkeit beeinflusst, welche vom Feuchtigkeitsgehalt abhängt und sich von Punkt zu Punkt ändert. Letzt-

genannte Wirkung geht jedoch aus dem Bild nicht hervor. Die Klärung dieses Verhaltens der Stromlinien ist von großer Bedeutung, da auf diese Weise der Vorgang, der sich im Sickersystem vollzieht, gewissermaßen vereinfacht und auch theoretisch leichter charakterisiert werden kann.

Auf Grund einer Gegenüberstellung beider Kurven (Bild 13) läßt sich die bekannte Tatsache, daß falls $s/H \leq 1,0$ ist, die Ergiebigkeit eines Einzelbrunnens größer als die eines Brunnens der Brunnenreihe ist, aufs neue unter Beweis stellen. Die Tatsache aber, daß an der Stelle, wo sich die Abschnitte $s/H \leq 1,0$ und $s/H > 1,0$ der Ergiebigkeitskurven einander anschließen, die Geometrie der Kurven kontinuierlich bleibt, hat zur unzweideutigen Folge, daß die Ergiebigkeit des Einzelbrunnens zu Beginn der Herstellung des Vakuums im Brunnen größer als die eines Brunnens der Brunnenreihe ist. Diese Ergebnisse der Modellversuche laufen also den Literaturangaben zuwider [25], die besagen, daß bei einem Vakuum gleicher Höhe einem Brunnen einer Brunnenreihe mehr Wasser als einem Einzelbrunnen entnommen werden kann. Auf Grund von Erfahrungen, die anhand praktischer Wasserabsenkungen gestammelt worden sind, weist SZÉCHY darauf hin, daß der Grund für eine so geartete Wasserergiebigkeit durch die größere Stabilität des Vakuums, also durch den höheren Wert desselben bedingt ist [25]. Da es wünschenswert wäre, die Fragen der Wasserergiebigkeit von Vakuumbrunnen sobald wie möglich eindeutig zu klären, muß der Lösung dieser Aufgabe in den zukünftigen Forschungsarbeiten besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Die Wasserergiebigkeit eines Einzelbrunnens wird von SZÉCHY auf Grund der folgenden Überlegung berechnet: die auf die Vakuumwirkung zurückzuführende zusätzliche Ergiebigkeit wird nach der Analogie der unter artesischem Druck befindlichen, im Wasser stehenden Filterbrunnen berücksichtigt.

Wird die Stärke der Wasserschicht unter artesischem Druck der Höhe m der Filterfläche gleichgesetzt, ergibt sich der Überschuß zu

$$q_2 = \frac{2 \pi \cdot m(s - m)}{\ln R/r_0}, \tag{4}$$

hinzukommt noch die auf Gravitationseinwirkung einströmende Wassermenge

$$q_1 = \frac{H^2 - h_b^2/\pi k}{\ln R/r_0}. \tag{5}$$

Wenn also $h_b = m$ und $s = (p - p_0)/\gamma$ ist, erhält man für

$$q_0 = q_1 + q_2 = \frac{\pi k}{\ln R/r_0} (H^2 + 2 m \cdot s - 3m^2). \tag{6}$$

Aus der Gleichung läßt sich die Ergiebigkeit des in der Wirklichkeit herstellbaren Vakuumabschnitts, der zum Einzelbrunnen gehört (und der, da

$\lambda = 6$ ist, dem Modellwert hinzugehört, welcher der Größe $s = 90 < 100$ entspricht), mit hinreichender Genauigkeit errechnen. (Für s ist der Wert der gesamten Absenkung vom ursprünglichen Grundwasserspiegel einzusetzen.)

Von der Gleichung (5) ausgehend wird — unter Verwendung des Bildes 13 — die einem Brunnen der Vakuumbrunnenreihe zu entnehmende Wassermenge auf Grund der Versuchsdaten annähernd folgendermaßen berechnet:

Wenn die Ergiebigkeiten (q_1 aus der Gleichung (5), bzw. q_i), die zu den Werten $s = H$ beim Einzelbrunnen bzw. bei einem Brunnen der Brunnenreihe gehören, bekannt sind, läßt sich der Quotient q_i/q_1 anschreiben.

Nach Multiplikation der Gleichung mit diesem und unter Berücksichtigung des Umstandes im Bild 13, daß der Kurvenabschnitt, der bei einem Brunnen der Brunnenreihe tatsächlich hergestellt werden kann, beinahe gerade ist, lassen sich die folgenden Gleichungen anschreiben:

$$\frac{q_i}{q_1} \approx 0,9,$$

$$Q = \frac{\pi \cdot k \cdot 0,9}{\ln R/r_0} H^2 + 0,001 H h_v, \quad (7)$$

worin h_v die Depression unter der oberen Ebene der wasserundurchlässigen Schicht,
 H die ursprüngliche Stärke der wasserundurchlässigen Schicht,
 r_0 der zum perforierten Brunnenmantel gehörende Radius ist.

In die Gleichung sind die numerischen Werte [m] und [m/min] einzusetzen. Auf diese Weise wird der durch Addition der rechten Seite der Gleichung erhaltene Zahlenwert die Dimension m^3/min haben (0,001 ist, da er sich auf Grund der Wasserergiebigkeit des Modellversuchs ergab, als ein Wert anzusehen, der die Dimension der Geschwindigkeit hat).

Der bei den Modellversuchen angewandte Beiwert k in Gleichung (7) hat für den Fall Gültigkeit, daß sich die Brunnen in Abständen von 2 m voneinander befinden, und der Sickerraum eine homogene Beschaffenheit aufweist.

8. Hydraulische Gesichtspunkte zur Ausgestaltung von Vakuumbrunnen

Eine grundlegende Voraussetzung ist hier in der luftdichten Verbindung der Leitung mit dem Filterrohr und der Saugpumpe gegeben. Selbst bei einer so gearteten Ausgestaltung wird durch das körnige Mittel und die Oberfläche des Filterrohrs Luft eingesaugt, ein Umstand, der mehr oder minder auch den Wirkungsgrad der Pumpe beeinträchtigt. Die Menge dieser Falschlufft

hängt vor allem von dem strukturellen Aufbau der wasserführenden Schicht und von dem der Deckschicht, selbstverständlich aber auch von der Höhe des Vakuums im Brunnen und davon ab, wie tief die perforierte Mantelfläche unter dem Gelände hinabreicht.

Außerdem soll nun noch die Wirkung geprüft werden, die auf die Anwesenheit der Kiesfilterschicht, die den Brunnenmantel umgibt, zurückzuführen ist.

Die vom Kiesfilter gespielte hydraulische Rolle ist mit derjenigen des Kiesfilters wie es um den Gravitationsbrunnen angewendet wird, identisch. Man soll stets danach trachten, durch Vergrößerung des Brunnendurchmessers günstigere hydraulische Umstände zu schaffen.

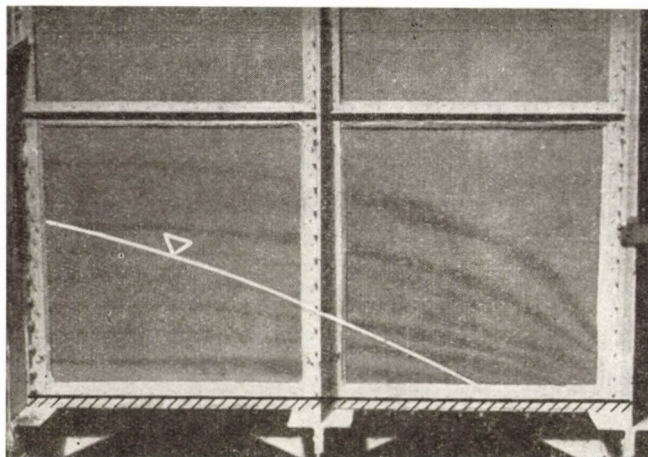


Bild 14. Verlauf der Sickerströmlinien beim Entfernen der Depressionskurve vom Brunnenmantel, wie es Bild 8 zeigt

Beim Vakuumbrunnen kann das Kiesfilter drei verschiedene Wirkungen ausüben:

1. Bei Vergrößerung des Brunnendurchmessers wird die Absaugfläche — unter gleicher Depression — tiefer zu liegen kommen.
2. Die Ergiebigkeit des Brunnens erhöht sich, wodurch die zur Entwässerung eines gegebenen Sickerraumes benötigte Zeit verkürzt wird.
3. Das Wasser wird in der Filterschicht sozusagen gespeichert, was die kontinuierliche Absaugung begünstigt.

Mit Hilfe des Kiesfilters lassen sich alle drei Wirkungen ohne Zweifel leichter erzielen. Auf Grund der in der Studie dargelegten Anschauungsweise ist aber auch auf die wahrscheinlich mehr oder minder stark zutage tretende negative Rolle des Kiesfilters hinzuweisen: er erhöht die in den Brunnen gelangende Luftmenge (es sei denn, daß der Brunnen nach oben hin hermetisch abgedichtet ist).

c) Da es sich um ein Vakuum handelt, ist die Luft bestrebt, bis zu einer gewissen Entfernung vom Brunnen weg, auch durch das Gelände zu der Stelle (Kiesfilter) niedrigeren Potentials, die unmittelbar an das körnige Mittel angrenzt, hinzugelangen [3].

d) Vom Gelände aus wird die Luft — so weit dies möglich ist — größtenteils in der Richtung des Pfeiles 4 zum Kiesfilter zu strömen trachten.

Die Luft wird vom langen Kiesfilter sozusagen gesammelt und in den Innenraum des Brunnens geleitet [5], ein Umstand, der den Wirkungsgrad des Brunnens beeinträchtigt. Ferner ist es auch wahrscheinlich, daß beim beträchtlichen Übergreifen des Brunnenvakuums auf das körnige Mittel die hydraulische Kiesfilterwirkung ohnehin Einbuße erleidet. Die Forschungsergebnisse der Verfasser lassen also erkennen, daß hinsichtlich der Hydraulik das Kiesfilter zweckmäßigerweise eher nur der perforierten Brunnenmantelfläche entlang ausgestaltet werden soll (Bild 3). Das Kiesfilter übt aber mehrere Funktionen aus. Es ist daher auch darauf hinzuweisen, daß falls um den Brunnen herum keine natürliche Filterschicht ausgestaltet werden kann, das Kiesfilter einen wirkamen Schutz gegen die Sohlenauflandung zu gewähren vermag.

Da der Brunnenbau vereinfacht werden könnte, halten die Verfasser dafür, die Forschungsarbeiten zur Klärung dieser Fragen (sowohl im Laboratorium wie auch im Feld) baldmöglichst aufs Programm zu setzen. Durch Sammlung und Auswertung der beobachteten Daten ließe sich dieses Problem der Lösung zuführen.

SCHRIFTTUM

1. Абрамв, С. К.: Гидрогеологические расчеты притока воды в котлованы и искусственного понижения уровня грунтовых вод. Углетехиздат, Москва. 1952.
2. Арутюнян, Р. Н.: Экспериментальные исследования вакуумирования фильтрационного потока. *Специальные способы строительного водопонижения*. 35 (1959), 30—35.
3. GÄRTNER, G.: Neuzeitliche Grundwasserabsenkung in Feinsanden. *Bohrtechnik—Brunnenbau—Rohrleitungsbau* 13 (1962).
4. HERCOG, F.: Přitoky podzemních vod při stavebních pracích a umělé snížení jejich hladiny. *Inženýrské Stavby* 9 (1961), 109—115.
5. HOFFMANN, F. I.: Wellpoints dewater sites for Narrows Bridge piers. *Civil Engineering NY* 30 (1960), 71—73.
6. JESENÁK, J.: Vakuové odvodnenie jemnozrnných zemín (Kandidátska dizertačná práca) Bratislava 1959.
7. LAMPL, H.: Munkagödörök víztelenítése talajvízszínsüllyesztéssel (Entwässerung von Baugruben durch Grundwasserabsenkung). Közlekedési Kiadó, Budapest 1954.
8. LUKÁCS, A.: Talajvízszínsüllyesztési eljárások (Grundwasserabsenkungsmethoden). *Mélyépítési Értesítő III.* (1955), 16—22.
9. MATSCHAK, H.: Überblick über die Vakuumverfahren und ihre Anwendung zur Entwässerung feinsandiger Böden. *Bergakademie* 12 (1961), 171—175.
10. MATSCHAK, H.—STARKE, E.—HOFMEISTER, I.—DRESCH, H.: Betriebsversuche zur Steigerung der Ergiebigkeit und Entwässerungswirkung von Filterbrunnen und Steckfilter durch Anwendung von Vakuum. *Bergbautechnik* 12 (1962), 340—353.
11. Мариупольский, Г. М.: Теоретические основы и расчеты гидромеханического и электроосмотического вакуумирования фильтрационного потока при водопонижения. *Специальные способы строительного водопонижения*. 35 (1959), 5—29.

12. MÖLLER, B.: Das Vakuumverfahren und die Grundwasserabsenkung nach der Wellpointmethode. *Baumaschine und Bautechnik* 4 (1957), 19—27.
13. NÉMETH, E.: Model Studies of Water Seepage. *Acta Techn. Hung.* (1952), 131—177.
14. ÖLLÖS, G.: Kútszűrők és hidraulikai vizsgálatuk (Brunnenfilter und hydraulische Prüfung derselben). *Vízügyi Közlemények XLII* (1960), 33—60.
15. ÖLLÖS, G.: Inhomogén talajok hatása a kutak vízáradékképességére (Wirkung inhomogener Böden auf die Brunnenenergiebigkeit). *Hidrológiai Közöny* 40 (1960), 33—47.
16. ÖLLÖS, G.: A kapilláris sáv hatása a szabad felszíni szivárgó vízmozgásokra (Wirkung der Kapillarzone auf die kapillaren Wasserbewegungen mit freier Oberfläche). *Vízügyi Közlemények* 43 (1961).
17. ÖLLÖS, G.: A kútpaláston levő szabad szivárgási felület (Freie Sickerfläche auf dem Brunnenmantel). *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* 8 (1962), 107—130.
18. ÖLLÖS, G.: A vákuumkutas talajvízszínsüllyesztésre vonatkozó kismintakísérletek (Modellversuche über die Grundwasserabsenkung durch Vakuumbrunnen). Szakvélemény. Kézirat (Gutachten, Manuskript) (1962) Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem I. Vízépítési Tanszéke (Lehrstuhl I für Wasserbau an der Technischen Universität für Bauwesen und Verkehr).
19. SENN, A.: Grundwasserabsenkung nach der Wellpoint Methode. *Schweizerische Bauzeitung* 73 (1955), 565—568.
20. SIEMON, H.: Berechnung von Grundwasserabsenkung unter Berücksichtigung des Grundwasserhaushaltes. *Deutsche Gewässerkundliche Mitteilungen* 2 (1958), 63—71.
21. SIPOS, B.: Munkagödör víztelenítése vákuumos eljárással (Entwässerung von Baugruben nach dem Vakuumverfahren). *Vizgazdálkodási Műszaki Szemle* (1955), 25—32.
22. STADERMANN, G.: Die Grundwasserabsenkung in Erzgebiet. *Deutsche Gewässerkundliche Mitteilungen* 2 (1958), 55—63.
23. SZÉCHY, E.: Alapozás talajvízszínsüllyesztéssel (Fundierung durch Grundwasserabsenkung). Mélyépítőipari Kézikönyvek, Közlekedés és Mélyépítéstudományi Kiadó, Budapest 1950.
24. SZÉCHY, K.: Alapozás (Fundierung). Tankönyvkiadó, Budapest 1963.
25. SZÉCHY, K.: A talajvízszínsüllyesztés egyes kérdéseiről (Über einige Fragen der Grundwasserabsenkung). Hidraulikai Konferencia, Budapest, 1960.
26. SZÉCHY, K.: Talajvízszínsüllyesztéses alapozások Magyarországon (Fundierungen durch Grundwasserabsenkung in Ungarn). *Vízügyi Közlemények* 17 (1935), 35—78.
27. SZÉCHY, K.: Beitrag zur Theorie der Grundwasserabsenkungen. *Bautechnik* 36 (1959), 48—52.
28. TURNER, M. G.—MURPHY, D. W.: Well points win dewatering battle in sewer tunnel. *Civil Engineering NY* 30 (1960) 48—49.
29. VASTAGH, G.: Talajvízszínsüllyesztés vákuum módszerrel (Grundwasserabsenkung nach der Vakuummethode). *Mélyépítéstudományi Szemle* 2 (1952), 514—521.
30. VASTAGH, G.: A talajvízszínsüllyesztés újabb módszereivel kapcsolatos tapasztalatok (Erfahrungen mit den neueren Grundwasserabsenkungsverfahren). Mérnöki Továbbképző Intézet 1954. 2807.

RESULTS OF MODEL TESTS ON GROUND WATER LEVEL LOWERING BY VACUUM WELLS

G. ÖLLÖS, M. DELI and CS. SZOLNOKY

SUMMARY

The object of the paper is the elucidation of the basic questions relating to seepage in the *permanent state*. This *hydraulic treatment* of the problem is of basic importance and is based on concrete measurements; it is hoped that it will be the starting point for numerous theoretical, laboratory and field research, which will permit to establish unambiguously the various hydraulic relations.

RÉSULTATS D'ESSAIS SUR MODÈLES RÉDUITS CONCERNANT L'ABAISSEMENT
PAR LE VIDE DE LA NAPPE PHRÉATIQUE

G. ÖLLÖS, M. DELI, et CS. SZOLNOKY

RÉSUMÉ

L'étude se propose d'élucider les problèmes fondamentaux de l'écoulement *permanent* relatifs à l'abaissement par le vide. Les auteurs espèrent que cette vue hydraulique d'une importance fondamentale servira de point de départ à de nombreuses recherches théoriques, pratiques et de laboratoire sur la base desquelles les différentes lois hydrauliques pourront être déterminées exactement et d'une façon univoque.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛЬНЫХ ОПЫТОВ С ЦЕЛЬЮ ПониЖЕНИЯ УРОВНЯ
ГРУНТОВЫХ ВОД ВАКУУМНЫМИ КОЛОДЦАМИ

Г. ЭЛЛЁШ, М. ДЕЛИ и Ч. СОЛЬНОКИ

РЕЗЮМЕ

Исследовались основные вопросы просачивания *постоянного режима* вакуумных колодцев. Можно надеяться, что этот весьма важный, уже *основывающийся на конкретных замеренных данных гидравлический взгляд послужит исходной точкой* целого ряда теоретических, лабораторных и практических исследовательских работ, на основе которых различные гидравлические закономерности можно будет установить однозначно и определенным образом.

DIE HALBLEITERTHEORIE DER SCHLEIFKONTAKTE ELEKTRISCHER MASCHINEN

E. KUCZOZI

LANDESINSPEKTORAT FÜR ELEKTRIZITÄTSWIRTSCHAFT DES MINISTERIUMS FÜR SCHWERINDUSTRIE,
BUDAPEST

[Eingegangen am 22. Januar 1962]

Anhand von Messungen, die wir an Schleifringen in Funktion der Temperatur vorgenommen haben, konnte bewiesen werden, daß am Schleifring ein Kupferoxydfilm, also bekanntlich ein Halbleiter der Type p sich bilden muß, welcher mit dem ursprünglichen Kupfer eine Sperrschicht bildet und in Abhängigkeit von der Spannung dieselbe Polarisierung bewirkt, wie sie bei der Gleichrichtung auftritt. Bei Anoden-Kohlenbürsten ist die Sperrschicht also durchlaßgerichtet, während sie bei negativen Kohlenbürsten sperrt. Die Punkt- (Nadel-) Gleichrichtung kommt dadurch zustande, daß der Strom nicht durch die ganze Bürstenfläche, sondern nur durch kleine Oberflächen fließt. In den Fällen, in welchen die Kupferbürste auf Stahlring läuft, können die auftretenden Erscheinungen in gleicher Weise erklärt werden.

I. Einleitung

Im Zusammenhang mit dem halbleiterartigen Übergangswiderstand von Kohlenbürsten, die auf Kupfer bzw. Bronzschleifringen laufen, sind in den jüngst vergangenen Jahren mehrere Arbeiten erschienen [1—3], doch konnte die Frage bisher noch nicht zufriedenstellend bereinigt werden. Nachstehend werden wir ausführen, daß diese Erscheinung eben mit Hilfe der Halbleitertheorie restlos erklärt werden kann.

Bei Kohlenbürsten, die auf Kupferingen laufen, nimmt die Charakteristik der Übergangs-Spannung $U(I)$ exponentialen Verlauf, und der auf der negativen Bürste meßbare Spannungsabfall ist mit der positiven Bürste verglichen größer. Die Änderung der Größe der Übergangswiderstände — $R(I)$ — stellt man seit ARNOLD durch eine hyperbelartige Kurve dar. Um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, bezeichnen wir — wie bei jedem zweipoligen Verbraucher üblich — die positive Anoden-Bürste als diejenige, in der der Strom von der Bürste zum Schleifring fließt, und als die negative Kathoden-Bürste, mit der Stromrichtung vom Schleifring zu der Bürste.

II. Die Meßmethode

Um die infolge mechanischer Schwingungen unter den Bürsten event. auftretenden Lichtbogenscheinungen zu eliminieren, wurde zur Durchführung der Messungen eine Akkumulatorenbatterie mit 10 V Klemmenspannung verwendet, mit einem in Reihe geschalteten induktionsfreien Regel-

widerstand [1]. Demzufolge war die Spannung zwischen Kohlenbürste und Schleifring immer kleiner als die Funkenspannung (short arc) $14 \div 15$ Volt des Kupfers. Die Angaben der untersuchten Bürste waren: *Morganite EG 14*, $A = 20 \times 30$ mm, $v = 27$ m/s und $p = 160$ g/cm². Die Anoden-, die Kathoden- sowie eine Hilfsbürste liefen auf drei nebeneinander liegenden Bahnen, so daß die beiden Bürstenspannungen gesondert gemessen werden konnten.

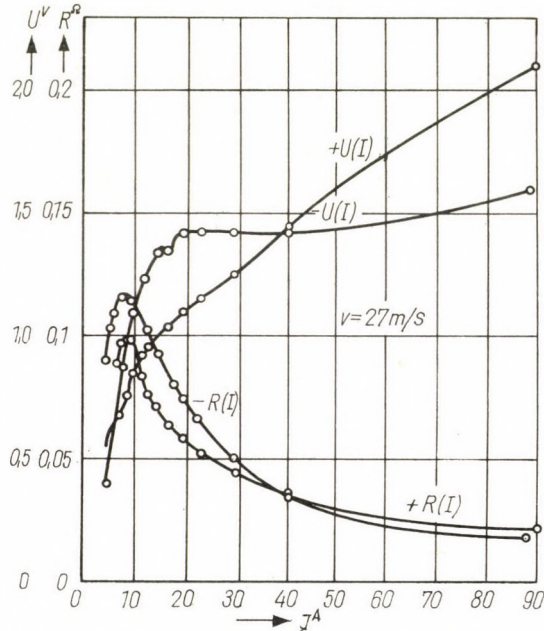


Bild 1. Spannungsfall $U(I)$ der Anoden- und Kathodenbürste der üblichen Darstellungsweise entsprechend. Die Kathoden- und Anodenwiderstands-Charakteristik $R(I)$ zeigt am Anfang der Kurven den für Halbleiter typischen ansteigenden Ast

Alle aufgenommenen Charakteristiken können als dynamisch betrachtet werden, da zwischen der Aufnahme der einzelnen Punkte — um die Kriecherscheinung (creep phenomena) auszuschließen — der Dauerzustand (ca. 30 Minuten) nicht abgewartet, sondern von den kleineren Strömen ausgehend die zusammengehörenden Angaben in möglichst rascher Aufeinanderfolge (die Aufnahme einer Charakteristik dauerte ungefähr zwei Minuten) aufgenommen wurden.

III. Messungen in Abhängigkeit von der Stromstärke

Wenn man die Messungen beliebig oft wiederholt, kann im Bereich der kleinen Ströme (Bild 1) in der Übergangsspannung-Charakteristik der Kathodenbürste eine Mulde, im Bereich der größeren Ströme jedoch ein

Sattel beobachtet werden [2]. Die Übergangs-Charakteristik der Anodenbürste übersteigt bei größeren Strömen (hier bei 40 A) die Charakteristik der Kathodenbürste. In der Widerstandscharakteristik der Kathodenbürste können Anfangsbereiche mit positiven Koeffizienten beobachtet werden. Ähnlich ist es auch bei der Anodenbürste, jedoch in geringerem Maße. Wenn wir die Arbeits-Hypothese von F. SCHRÖTER [3] in Betracht ziehen, läßt sich die Erscheinung folgendermaßen erklären: auf dem Schleifring entsteht eine mit Kohleteilchen bedeckte, Cu_2O Kupferoxydul-Halbleiterschicht (Type p)

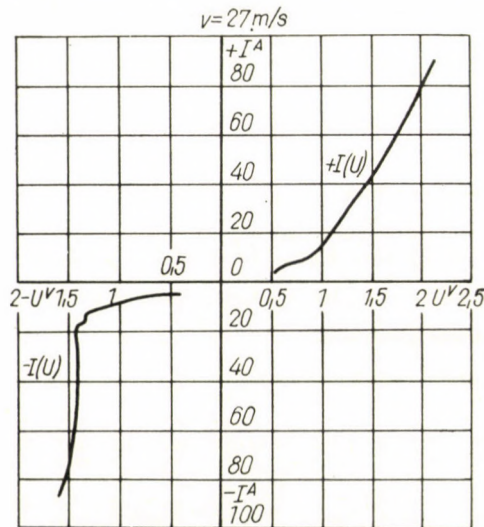


Bild 2. Die Charakteristiken des Bildes 1, dargestellt, wie bei Gleichrichtern üblich

[4], die zusammen mit dem Kupfer des Kupferringes eine Sperrschicht bildet, also eine Gleichrichterwirkung ausübt [5].

Bei Halbleitern (Type p) wächst — wie aus der Halbleitertheorie bekannt — die Dicke der Sperrschicht, wenn der Halbleiter im Vergleich zum Metall negativ ist. Dies entspricht der Sperrichtung. Ist aber der Halbleiter im Vergleich zum Metall positiv, so bedeutet dies Durchlaßrichtung. Wenn nun die Kohlenbürste auf einem Schleifring läuft, so ist die Bürste eine Gegenelektrode, so daß der Kupferoxydul-Halbleiter unter der Anodenbürste dem Metall gegenüber positiv wird. Dies bedeutet nach den vorstehenden Ausführungen die Durchlaßrichtung, unter einer negativen Bürste aber die Sperrichtung.

Wenn man das Bild 1 wie bei Gleichrichtern üblich aufzeichnet, jedoch hier mit gleichen Strom- und gleichen Spannungs-Maßstäben, so entsteht wegen der Abhängigkeit der Stromleitung von der Stromrichtung eine den Gleichrichtern ähnliche Charakteristik.

1. Mathematische Zusammenhänge

Mathematisch lassen sich die Erscheinungen selbst bei technischen Kupferoxydul-Gleichrichtern ziemlich schwer verfolgen.

Der Grund hierfür ist unter anderem, daß das auf dem Schleifring entstandene Kupferoxydul kein Einkristall ist. Die einfachste Gleichung der Charakteristik $U(I)$ ist aufgrund der Diodentheorie [5] im Falle eines Halbleiter-Metallkontaktes:

$$j = n_{pn} e\bar{v} \exp(-eV_D/kT) [1 - \exp(-eV_B/kT)], \quad (1)$$

dabei ist:

$$\bar{v} = (kT/2\pi m^*)^{1/2};$$

j Stromdichte;

V_D das Diffusionspotential;

V_B die auf die Sperrschicht fallende Berührungsspannung; wenn U die ganze Spannung ist, ist $U > V_B$;

n_{pn} die freie Elektronen- oder die Lochladungs-Dichte;

k die Boltzmann-Konstante;

e die Elementar-Ladung des Elektrons.

In Sperrschicht beträgt der Sättigungswert des Sperrstromes

$$j_s = n_{pn} e\bar{v} \exp(-eV_D/kT). \quad (2)$$

Daher lautet die endgültige Gleichung:

$$j = j_s [1 - \exp(-eV_B/kT)]. \quad (3)$$

Für den Strom des Metall-Halbleiter-Kontaktes erhalten wir aufgrund der Diffusionstheorie den Wert:

$$j = \sigma [(V_D + V_B) 8\pi Ne/\kappa]^{1/2} \exp(-eV_D/kT) [1 - \exp(-eV_B/kT)], \quad (4)$$

wobei κ die Dielektrizitätskonstante der Materie und σ den spezifischen Leitungskoeffizienten bedeutet.

Diese Gleichungen gelten jedoch nur für die Anfangsabschnitte der Charakteristik $U(I)$; bei größeren Spannungen aber, also praktisch in unserem Fall, sind sie ungültig. Aus der Charakteristik der *Durchlaßrichtung* läßt sich dennoch vom Gesichtspunkt der quantitativen Wertung das Diffusionspotential V_D bestimmen (Bild 3). Unter Berücksichtigung der Konstruktionen des

Bildes können wir die Größe des in Reihe geschalteten Widerstandes R_a (Ausbreitung) bzw. den Bahnwiderstand erhalten. Störend wirkt hierbei die Wärmewirkung des Stromes. Aus Bild 1 ergibt sich unter Berücksichtigung von Bild 3

$$V_D = 0,75 \text{ V}$$

und

$$R_a = 0,017 \text{ Ohm.}$$

Auch im Falle der Sperrcharakteristik entspricht z. B. die Diodengleichung

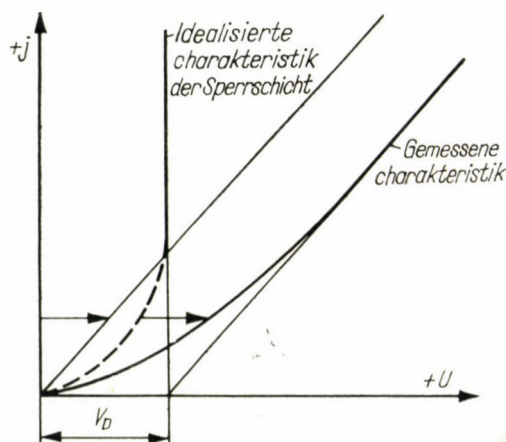


Bild 3. Konstruktion des Diffusionspotentials und des temperaturunabhängigen Ausbreitungswiderstandes aus der Durchlaßcharakteristik

einem stark idealisierten Modell. Wenn man hingegen in der Diodengleichung (3) auch noch die Spiegelkraft und den Tunneleffekt berücksichtigt, dann beschreiben die so erweiterten Gleichungen [(5) bzw. (6)] die Erscheinungen wirklichkeitstreuer. Die vorgenommenen Korrekturen gelten im Sättigungsbereich der Sperrichtung, angegeben durch die »Ist-Wert« Kurve im Bild 4. Wenn z. B. der Tunneleffekt vorherrscht, kann der vorerwähnte Abschnitt der Sperrcharakteristik durch die Korrektionsgleichung

$$j = j_s \exp[(V_D + V_B) 8e^3 \pi N/\kappa] x_c/kT \quad (5)$$

ausgedrückt werden.

Wenn hingegen die Spiegelkraft dominiert, gilt die Gleichung

$$j = j_s \exp[(V_D + V_B) e^7 \pi N/2\kappa^3]^{1/4}/kT. \quad (6)$$

Die in den Gleichungen vorkommenden Konstanten sind für uns nicht von Interesse, und es hat auch nicht viel Sinn, sie aufgrund der vorhandenen Charakteristiken auszurechnen, weil sich sehr große Streuungen ergeben würden. Mit gewissen voraus angenommenen Konstanten [5] können jedoch beliebig gewünschte Charakteristiken in ihrem Verlauf richtig dargestellt werden.

2. Das Phänomen der Punkt-(Nadel-)Gleichrichtung

Bei im Zusammenhang mit Bild 1 und 5 angeführten Erscheinungen komplizieren sich die Verhältnisse noch weiter. Abweichend von den Plattengleichrichtern läßt sich nämlich an der Sperrcharakteristik eine

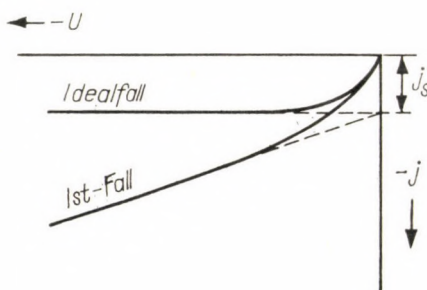


Bild 4. Die Sperrcharakteristik bei kleinen Spannungen im Ideal- und Ist-Fall

entschiedene Höchstspannung beobachten, welche bei der Punktgleichrichtung (bzw. Nadelgleichrichtung) in sehr charakteristischer Weise auftritt (z. B. Kristalldetektor) und die man Umkehrspannung (peak back-voltage, turnover voltage) nennt. Diese Spitzenspannung ist äußerst temperaturabhängig, was wahrscheinlich die bei Punktkontakt auftretende erhöhte Wärmewirkung verursacht. Die Durchlaßcharakteristik gegenüber der Sperrcharakteristik ist weniger temperaturabhängig. Die Größe der Höchstspannung hängt von der Reinheit des Halbleiters (Cu_2O) sowie der Sperrschicht und von der Formierung ab. Die Größe der Höchstspannung und der Gleichrichterwirkung wird, wie die Beobachtungen ergaben, durch Schliff und Polierung der Oberfläche noch weiter verringert. Das gleichzeitige Auftreten dieser Erscheinungen bewirkt, daß die an den Schleifkontakten elektrischer Maschinen meßbare Sperr- und Durchlaßcharakteristik mit demselben Maaßstab dargestellt werden kann.

Die von uns aufgenommenen Hysterese-Charakteristiken (Bild 5) stimmen formell mit den in der Literatur auffindbaren Charakteristiken überein, welche sich auf Nadelgleichrichter beziehen [5].

Vom Gesichtspunkt der Polarität ist jedoch bei Nadelgleichrichtung der Halbleiter-Type p die Metallnadel in Sperrichtung positiv und in der Durchlaßrichtung negativ. Dies bedeutet, daß die Rolle der Metallnadel in allen beiden Fällen eben das Grundmetall (Kupfer) spielt. Diese Erscheinung kann praktisch folgendermaßen aufgefaßt werden. Zwischen der Kohlenbürste

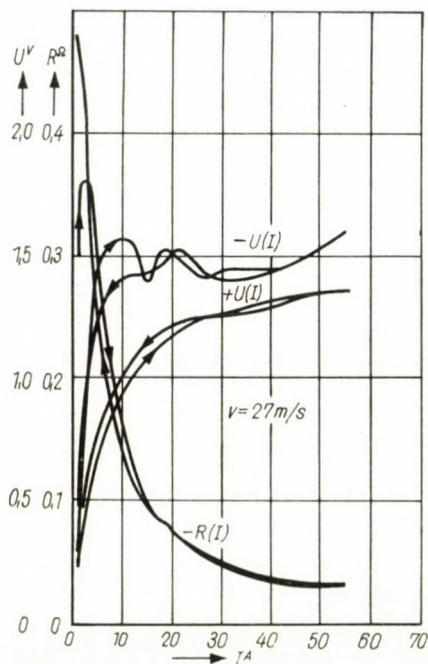


Bild 5. Die Hysterese-Charakteristik $U(I)$ und $R(I)$ der Bürsten. Diese sind mit der Hysterese-Charakteristik der Punktgleichrichtung identisch

(Gegenelektrode) und dem Kupferoxydul (Halbleiter) fließt der Strom durch die von Holm vorausgesetzten, elementaren, kleinen Oberflächen a wie über »Nadelspitzen« gegen das Kupfer-Grundmetall zu. Auf diese Weise wird die Zahl der »Nadelspitzen«, welche sich vom Kupfer her gegen den Halbleiter sozusagen parallel einschalten, in erster Linie durch die Anzahl der zwischen Bürste und Kupferoxydulschicht befindlichen, kleinen Elementarflächen a bestimmt. Oberhalb einer gewissen Anzahl von Punkten haben wir es bereits mit Plattengleichrichtung zu tun.

Vorstehend haben wir qualitativ bewiesen, daß die von uns gemessene Spannung-Strom Charakteristik $U(I)$ den bei Punktgleichrichtung gemachten Erfahrungen entspricht, doch läßt sich die Erscheinung mathematisch, selbst nach den bei den Plattengleichrichtern gebräuchlichen Näherungs-Methoden nicht behandeln.

IV. Messungen, in Abhängigkeit von der Temperatur

1. Die Temperaturabhängigkeit der Halbleiter

Das Leitvermögen der Halbleiter ist

$$\sigma = q(n \mu_n + p \mu_p), \quad (7)$$

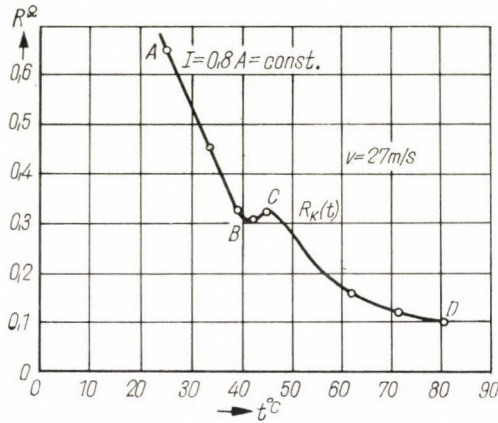


Bild 6. Die Änderung des Kathodenbürsten-Widerstandes in Funktion der Schleifringtemperatur $R_k(t)$

wobei q die Elementarladung des Elektrons;
 n, p die Zahl der Elektronen bzw. der Löcher pro Volumeneinheit;
 μ_n, μ_p die Beweglichkeit der Elektronen bzw. Löcher bedeutet.

Der Wert μ ist von dem Material, der Temperatur und der Beschaffenheit des Ladungsträgers abhängig. Die Temperaturabhängigkeit von μ ist

$$\mu = cT^{-3/2}. \quad (8)$$

Im Ausdruck des Leitvermögens wird der Wert μ bei steigender Temperatur kleiner, die Zahl der Träger wächst jedoch sehr schnell, so daß schließlich der Widerstand, wie für Halbleiter charakteristisch, stark sinken wird.

Das Ansteigen der Zahl der Ladungsträger ist nämlich bei Intrinsicleitung — Kurvenast C — D (Bild 6) — wenn der Potentialunterschied $\Delta_i E$ zwischen der oberen Kante des Valenzbandes und der unteren Kante des Leitbandes herrscht [8]:

$$n = v(T) \exp \left(- \frac{5800 \cdot \Delta_i E}{T} \right), \quad (9)$$

wo n die Elektronenzahl je cm^3 bezeichnet und

$$\nu(T) = 5 \cdot 10^{15} \cdot T^{1,5} \quad (10)$$

ist. Im Falle einer bestimmten Extrinsicleitung der Type n — Kurvenast $A - B$ (Bild 6) — wenn $\Delta_e E$ der Potentialunterschied zwischen dem Donorniveau und der unteren Kante des Leitbandes ist, wo N die Donorzahl je cm^3 bedeutet [8]:

$$n = \frac{\nu(T)}{2} \exp\left(-\frac{11\,600 \Delta_e E}{T}\right) \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{4N}{\nu(T)} \exp\frac{11\,600 \Delta_e E}{T}} - 1\right]. \quad (11)$$

2. Die Temperaturabhängigkeit des Kathodenwiderstandes

Innerhalb des Kupferringes haben wir Heizkörper angebracht, um die vorausgesetzte Halbleitereigenschaft der auf dem Schleifring sich bildenden dünnen patinierten Schicht auch in Abhängigkeit von der Temperatur zu untersuchen. Die Temperatur des Schleifringes wurde mit Hilfe eines Thermoelements gemessen. Die Heizkörper wurden von außen her über zwei kleinere Schleifringe mit Gleichstrom gespeist. Bild 6 zeigt eine zwecks Vermeidung der Stromwärmewirkung mit kleiner Stromstärke ($s = 0,13 \text{ A/cm}^2$, $I = 0,8 \text{ A}$) und somit kleiner Spannung aufgenommene Charakteristik des Kathodenwiderstandes.

Aus (2) folgt, daß die Anfangsleitfähigkeit der Sperrschicht in Sperrrichtung mit der Ladungsdichte n_0 des Halbleiters — nur in der unmittelbaren Umgebung der Metallfläche — also mit der Leitfähigkeit des Halbleiters selbst proportional ist [10]:

$$\left(\frac{dj}{dV_B}\right)_0 = \frac{ej_s}{kT} = \text{const.} \frac{n_0}{T^{1/2}} = \text{const.} T \cdot \exp(-\Phi_{ps}/kT). \quad (12)$$

Aus dieser Gleichung kann auch die Höhe der Sperrschicht Φ_{ps} berechnet werden.

Dem Kurvenast $A - B$ links vom Kurventeil mit positivem Temperaturkoeffizienten ($B - C$) entspricht die Extrinsicleitung des verunreinigten Halbleiters. Am Anfang des Teils mit positiven Temperaturkoeffizienten ist das Akzeptorniveau vollbesetzt. Mit der Temperatur wächst der Widerstand ebenso wie bei metallischer Leitung, jedoch wie bei Cu_2O charakteristisch, im Vergleich zu anderen Halbleitern, in viel kleinerem Temperaturgebiet [11]. Schließlich tritt vollkommene Intrinsicleitung ein, welche im uns interessierenden Betriebsbereich ($C - D$) liegt. Beim Übersteigen der Zimmertemperatur erreicht nämlich die Zahl der Ladungsträger die Menge der durch die Ver-

unreinigung bedingten Ladungsträger, die dominierende Wirkung der Verunreinigung verschwindet und das Verhalten des Halbleiterkristalls Kupferoxydul wird dem Verhalten des reinen Halbleiters entsprechen.

Im Falle der Intrinsicleitung ($C - D$) wenn sich das Fermi-Niveau in der Mitte der verbotenen Bandbreite befindet, geht die Gl. (12) in die Gl. (9) über.

Wenn $\Delta_i E$ die verbotene Bandbreite zwischen der oberen Kante des Valenzbandes und der unteren Kante des Leitbandes in Volt darstellt, ist der Kathodenwiderstand, mit kleiner Sperrspannung gemessen, bei Intrinsiclei-

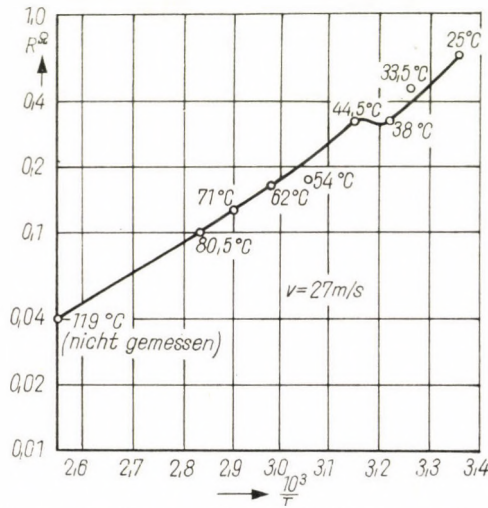


Bild 7. Die Darstellung des Kathodenbürsten-Widerstandes im halblogarithmischen Maßstab

tung aufgrund der Halbleitertheorie

$$R_K = r_0 \exp\left(\frac{\Delta_i E \cdot q}{2 k T}\right), \tag{13}$$

wobei q die Elementarladung des Elektrons $1,602 \cdot 10^{-19}$ Coulomb;
 k die Boltzmann-Konstante $1,38 \cdot 10^{-23}$ Joule/K°;
 r_0 eine Konstante bezeichnet.

Mit diesen Zahlenwerten wird:

$$R_K = r_0 \exp\left(\frac{\Delta_i E \cdot 5800}{T}\right) = r_0 \exp(B/T). \tag{14}$$

Wenn man nun beiderseitig logarithmiert:

$$\ln R_K = \ln r_0 + B/T. \tag{15}$$

Den vorstehenden Zusammenhang in halblogarithmischem Netz dargestellt, erhalten wir eine Gerade, welche die Ordinate im Punkt r_0 schneidet und deren Richtungstangente B ist. Wenn wir nun im Bild 7 die gemessenen Werte in halblogarithmischem Maßstab darstellen, erhalten wir als Bestätigung des erwarteten Halbleiter-Charakters ebenfalls eine Gerade. Unter Berücksichtigung des gemessenen Gesamtwiderstandes R_g ergibt sich aus dem Diagramm

$$B = 3220 \text{ }^\circ\text{K}.$$

Die Größe des Ausbreitungswiderstandes R_a , welcher konstanten Charakter hat, haben wir aufgrund der Durchlaßcharakteristik (Bild 3) bereits im Vorhergehenden festgestellt, er ist:

$$R_a = 0,017 \text{ Ohm}.$$

Nach Abzug dieses Wertes ist die Widerstandsänderung R_f des halbleitenden Kupferoxyduls aus Tafel I zu entnehmen.

Tafel I

t, °C	T, °K	R_g	R_f	$R_{f \text{ ber}}$
62,0	335,0	0,162	0,145	0,145
71,0	334,5	0,125	0,108	0,102
80,5	353,5	0,100	0,083	0,0816

Die Änderung des Widerstandes des auf dem Schleifring entstandenen Kupferoxydul-Halbleiters beschreibt aufgrund der vorstehenden Meßwerte folgende Gleichung:

$$R_{f \text{ ber}} = 2,27 \cdot 10^{-6} \exp(3710/T). \quad (16)$$

Die aus der Gleichung berechneten Werte sind ebenfalls aus Tafel I ersichtlich.

Es ist auf Grund von

$$\Delta_i E \cdot 5800 = 3710,$$

$$\Delta_i E = 0,64 \text{ V}.$$

Dies bedeutet eine günstige Kongruenz mit dem in der Fachliteratur für das Kupferoxydul mitgeteilten Wert $\Delta_i E = 0,72 \text{ V}$ [8].

Die Höhe der Sperrschicht beträgt, nachdem wir in Gl. (12)

$$\Phi_{ps} = \frac{q \cdot \Delta_i E}{2}$$

gesetzt haben

$$\Phi_{ps} = 0,32 \text{ eV},$$

in guter Übereinstimmung mit den für Kuprox-Gleichrichtern in der Literatur auffindbaren Angaben [5, Seite 333].

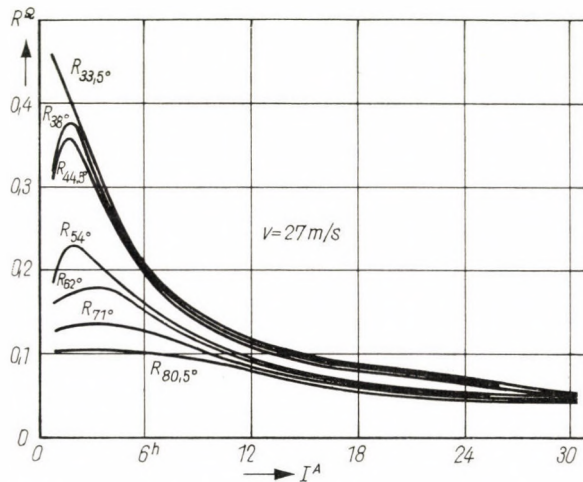


Bild 8. Die Änderung des Kathodenbürsten-Widerstandes in Funktion des Stromes bei verschiedenen Schleifring-Anfangstemperaturen

Wir können also feststellen, daß wenn wir den Kurventeil ($C - D$) intrinsischleitend auffassen, und dementsprechend rechnen, oder aber die Höhe der Sperrschicht, wie oben angegeben berechnen, und die zwei Resultate mit den entsprechenden Veröffentlichungen vergleichen, der Vergleich in beiden Fällen unsere Auffassung gut bestätigen wird.

Nach F. SCHRÖTER soll die Gleichung (14) die Form

$$R_K = r_0 \exp\left(\frac{B}{T_0 + cV_K}\right) \quad (17)$$

haben [2—3], wobei V_K die den Film erwärmende Wärmeleistung bedeutet. Diese Gleichung ist aber, auf Grund der Charakteristik $U(I)$ berechnet, zum Nachweis des Halbleiter-Charakters nicht geeignet, da die aus der Charakteristik $U(I)$ berechneten Kathodenwiderstandswerte in erster Linie Span-

nungsabhängige Widerstände sind, wo zwar die selbsterwärmende Wirkung des Stromes eine Rolle spielt, jedoch nicht in entscheidendem Maße. Diese Behauptung bestätigen die bei verschiedenen Schleifring-Anfangstemperaturen gemessenen Kathoden-Widerstandscharakteristiken in Funktion der Stromstärke — $R_k(I)$ (Bild 8) — durchaus. Der Charakteristik $R_k(t)$ (Bild 6) zufolge sind wir nämlich einer Ringtemperatur von 71°C bereits über den Abschnitt mit positiven Temperaturkoeffizienten hinaus, und trotzdem verringert sich der Widerstand bei Anwachsen der Stromstärke nicht, wie in Bild 6 angegeben, sondern es folgt zuerst ein Kurventeil mit positivem Temperaturkoeffizienten und größerem Widerstand, und erst später schmiegt sich die Charakteristik $R_k(I)$, bei einer Basis des Logarithmus größer als e , wieder der Charakteristik $R_k(t)$ an.

Im vorstehenden haben wir also durch temperaturabhängige Messungen bewiesen, daß der auf dem Schleifring entstehende Film Kupferoxydul-Halbleiter ist, der bekanntlich mit Metall (hier Kupfer) eine für die Type p charakteristische Sperrschicht bildet, die wiederum spannungsabhängig ist und in der beschriebenen Weise Gleichrichterwirkung hat (Bilder 1—2).

V. Weitere Folgerungen

Es ist eine längst bekannte Tatsache, daß die umgebende Atmosphäre auf den Übergangswiderstand von Bürsten, welche auf Kupferingen laufen, Einfluß hat: der Widerstand sinkt zum Beispiel stark in sehr hoch fliegenden Flugzeugen. Die durch Versuche gewonnenen Daten [6] zeigen, daß in normaler Luft, die bei verschiedenen atmosphärischen Drucken aufgenommene Charakteristiken $U(I)$ in Funktion der Luftdruck-Verringerung sich immer mehr einer viel niedriger liegenden, linearen Charakteristik nähern. Dies führt schließlich zu einem konstanten Ohmschen Charakter, das heißt aber, daß die exponentiale Form durch die Oxydation des Schleifringes verursacht wird.

Im Wasserstoff aufgenommene Charakteristiken $U(I)$ bewegen sich auch bei Änderung des Wasserstoffdruckes unverändert auf derselben niedrigen Geraden, weil sich hier kein Kupferoxydulfilm bilden kann.

An Kohlenringen durchgeführte Messungen haben wegen des Fehlens des Kupferoxydul-Filmes gleichfalls lineare Charakteristiken $U(I)$, also konstanten Übergangswiderstand ergeben.

Auf Grund eigener, aber auch sonstiger Messungen [7] ist uns bekannt, daß bei Kupferbürsten, welche auf Stahlringen laufen, die Polarität gegenüber der Kohlenbürste-Kupfering Anordnung eine Umkehrung erfährt. Dies läßt sich nun leicht erklären. Die Kupferbürste überzieht den Kupfering mit einer Kupferoxydulschicht. Im Falle positiver Bürste ist die Kupferoxydulschicht

— Type p — im Verhältnis zur Metallbürste negativ, was Sperrichtung, bei negativer Bürste aber positiv, was Durchlaßrichtung bedeutet.

Die im Artikel beschriebene Theorie vermittelt eine richtige Erklärung der bei Schleifkontakten, aber auch bei ruhenden Kontakten auftretenden Erscheinungen. Es ist daher die Verwendung des durch R. HOLM eingeführten Begriffs »Frittung« nicht erforderlich [8, 9].

SCHRIFTTUM

1. KUCZOZI, E.: Villamosgépek csúszóérintkezőinek félvezetőjellegű átmeneti ellenállása és szikrafeszültsége (Halbleiterartiger Übergangswiderstand und die Funkenspannung von Schleifkontakten elektrischer Maschinen). *Elektrotechnika* **51** (1958), 493—502.
2. SCHRÖTER, F.: Zur Theorie des Stromüberganges bei Schleifkontakten. *ETZ A* **79** (1958), 498—501.
3. SCHRÖTER, F.: Der Übergangswiderstand von Schleifkontakten. *ETZ A* **76** (1955), 498—503.
4. HAUFFE, K.—SCHOTTKY, W.: Deckschichtbildung auf Metallen, Halbleiterprobleme. V. F. Vieweg, Braunschweig 1960.
5. HENISCH, H. K.: Rectifying semi-conductor contacts. Oxford University Press, 1957.
6. SCHLIEPHAKE, A.: Versuche über den Einfluß der umgebenden Atmosphäre auf die Bürstenübergangsspannung. *ETZ* **71** (1950) 32—34.
7. NEUKIRCHEN, J.: Metallgraphitbürsten auf Stahlschleifringen. *ETZ* **73** (1952), 459—60.
8. HOLM, R.: Electric Contacts Handbook. Springer, Berlin 1958.
9. HOLM, R.: Theorie der ungleichen Stromverteilung im Kontakt zwischen Kohlenbürsten und Schleifringen aus Kupfer oder Stahl in Luft. *ETZ A* **81** (1960), 570—571.
10. EHRENBURG, W.: Electric conduction in semiconductors and metals. Oxford University Press, 1958.
11. SHIVE, I. N.: The properties, physics, and design of semiconductor devices. D. van Nostrand Company, 1959.

SEMI-CONDUCTOR THEORY OF THE SLIDING CONTACTS OF ELECTRICAL MACHINES

E. KUCZOZI

SUMMARY

On the basis of measurements carried out on slip rings at various temperatures, it has been proved that the cuprous oxide film is a typical p -type semi-conductor, forming a barrier layer with the base copper. In function of temperature it causes polarity effects as experienced with rectifying. Hence with an anodic carbon brush the barrier layer conductifs, while it blocks with a negative carbon brush. The point contact rectification is caused by the current not flowing on the whole surface of the carbon brush, but only across small contact areas. For a copper brush sliding on a steel ring the phenomena can be explained in a similar way.

APPLICATION DE LA THÉORIE DE LA SEMI-CONDUCTIVITÉ AUX CONTACTS A FROTTEMENT DES MACHINES ÉLECTRIQUES

E. KUCZOZI

RÉSUMÉ

A la base de mesures faites sur des bagues collectrices en fonction de la température, l'auteur prouve la semi-conductivité de type p de la couche d'oxyde de cuivre qui constitue, avec la base de cuivre, une couche de barrage et produit, en fonction de la tension, le phénomène de polarité observé lors du redressement. Donc, en cas de balai de charbon positif,

la couche de barrage est de sens direct, tandis qu'en cas de balai négatif, elle est de sens inverse. Le phénomène du redressement à pointe est dû à ce que le courant circule sur de petites surfaces au lieu de la surface totale du balai. En cas de balai de cuivre glissant sur une bague d'acier, les phénomènes qui se produisent ont une explication analogue.

ПОЛУПРОВОДНИКОВАЯ ТЕОРИЯ СКОЛЬЗЯЩИХ КОНТАКТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Э. КУЦОГИ

РЕЗЮМЕ

На основе измерений, проведенных в функции температуры на контактных кольцах, доказано, что пленка закиси меди относится к полупроводникам типа p , которая с основной медью образует запирающий слой и в функции напряжения создает явление полярности, наблюдаемое при выпрямлении. Следовательно, в случае анодной угольной щетки запирающий слой является пропускающим, а в случае угольной щетки отрицательного полюса — запирающим. Явление точечного выпрямления вызывается тем, что ток течет не через всю поверхность, а через небольшие поверхности угольной щетки. Также в случае медной щетки, скользящей по поверхности стального кольца, явления можно объяснить схожим образом.

DER WIRKUNGSGRAD EINES PLANETENGETRIEBES MIT DOPPELANTRIEB

Z. TERPLÁN

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR MASCHINENELEMENTE AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 13. April 1963]

Diese Arbeit untersucht die Wirkungsgradänderungen des mechanischen Teiles eines konkreten (mechanischen und hydrodynamischen) Getriebes mit Leistungsverzweigung. Der mechanische Teil arbeitet als Planetengetriebe mit Doppelantrieb. Das eine Sonnenrad wird vom Antriebsmotor angetrieben, dessen Drehzahl konstant ist, das andere Sonnenrad wird vom auf veränderliche Drehzahl einstellbaren Turbinenteil angetrieben, die Nutzleistung ist also an dem an die Planetenräder angeschlossenen Steg abzunehmen. Der Verfasser schreibt den allgemeinen Zusammenhang für den Wirkungsgrad des Planetengetriebes mit Doppelantrieb an und dann, nach Festlegung der Bereichsgrenzen des praktischen Betriebes, analysiert und beschreibt er die Kurve der Wirkungsgradänderung.

I. Einleitung

Es kommt oft vor, daß der Wirkungsgrad epizyklischer Getriebe damit erledigt wird, daß er sehr gut sei, woraus folgt, daß bei Anschluß an ein anderes Getriebe der Wirkungsgrad dieses Teiles beinahe als 100% betrachtet werden kann.

Der Wirkungsgrad der Planetengetriebe wie auch der Planetengetriebe mit Doppelantrieb hängt von mehreren Faktoren ab, und unter gewissen günstigen Umständen haben sie wirklich einen guten Wirkungsgrad. Über die Wirkungsgraduntersuchung der Planetengetriebe ist auch in der ungarischen Fachliteratur zu lesen. Literatur über den Wirkungsgrad der Getriebe mit Doppelantrieb ist schon seltener.

II. Schema und Betriebsverhältnisse des zu untersuchenden Getriebes

In Bild 1 z. B. ist das Schema eines Getriebes zu sehen, wo die Leistung P_1 sich in zwei Teile teilt. Der eine Zweig (P_H) geht durch einen hydrodynamischen Drehmomentwandler, der andere Zweig (P_M) durch das außenverzahnte Sonnenrad des Planetengetriebes in Richtung des Steges des Planetengetriebes (P_{II}). So ist das Planetengetriebe eigentlich ein Planetengetriebe mit Doppelantrieb, dessen innenverzahntes Sonnenrad vom Turbinenteil des hydrodynamischen Drehmomentwandlers angetrieben wird. Nehmen wir an,

daß die Leistung P_1 und die Drehzahl n_1 des Antriebsmotors konstant sind, so ist die Drehzahl n_5 des Steges innerhalb gewisser Grenzen dadurch zu ändern, daß durch Schaufelverstellung im hydraulischen Drehmomentwandler die Drehzahl n_4 der Turbine verändert wird.

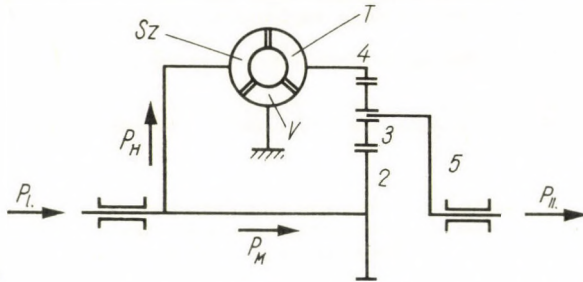


Bild. 1. Schema eines Getriebes mit Leistungsverzweigung, bestehend aus einem hydrodynamischen Getriebe und einem Planetengetriebe mit Doppelantrieb

Bezeichnungen:

P_I ist die Eingangsleistung und P_H die Ausgangsleistung; P_H ist der hydraulische, P_M der mechanische Leistungsteil; Sz ist die Bezeichnung für die Pumpe, T für die Turbine und V für die Leitschaukel, 2 ist die Bezeichnung für das treibende Sonnenrad, 4 für das andere treibende (innenverzahnte) Sonnenrad¹ und 5 für den Steg.

Bild 2 zeigt die auf das Planetenrad wirkenden Umfangskräfte, die von der Bewegung des Planetengetriebes mit Doppelantrieb unabhängig sind.

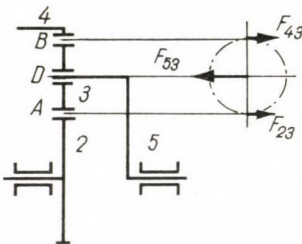


Bild 2. Die auf die Planetenräder wirkenden Kräfte

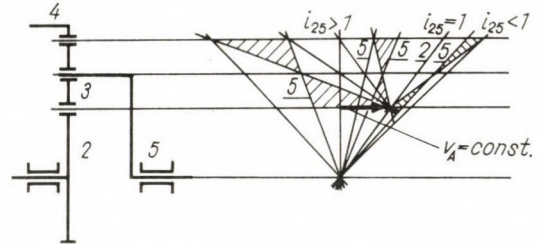


Bild 3. Relative Geschwindigkeitspläne des Planetengetriebes mit Doppelantrieb. Für $i_{25} < 1$ treibt das Getriebe ins Schnelle, für $i_{25} = 1$ ist das Getriebe eine Kupplung, sonst treibt das Getriebe ins Langsame. v_A ist als konstant angenommen, weil das Getriebe an den Motor direkt angeschlossen ist

In Bild 3 ist hingegen der relative Geschwindigkeitsplan des Planetengetriebes mit Doppelantrieb zu sehen. Weil das Planetengetriebe mit Doppelantrieb zwei Freiheitsgrade hat, so kann, falls das Rad 2 vom Antriebsmotor mit konstanter Drehzahl ($n_2 = n_1$) angetrieben wird, das Rad 4 theoretisch im Verhältnis dazu mit einer beliebig großen Drehzahl im gleichen oder entgegengesetzten Sinn laufen, und so ist $i_{25} = n_2/n_5$ beliebig zu ändern. Praktisch haben selbstverständlich die Drehzahlgrenzen des Rades 4 Beschränkungen.

Diese Beschränkungen sind die folgenden:

a) Es ist nicht wahrscheinlich, daß auch eine beschleunigende Übersetzung benötigt wird, das heißt $i_{25} < 1$ kommt selten vor.

b) Wenn n_4 einen n_2 entgegengesetzten Sinn hat, dann ist wegen des unveränderten Kräftegleichgewichts am Planetenrad das Rad 4 nicht mehr ein treibendes Rad, sondern wird ein getriebenes Rad, und deswegen sinkt der Wirkungsgrad bedeutend.

c) Wenn n_4 in entgegengesetztem Sinn so groß wird, daß n_5 Null wird oder auf n_2 bezogen sein Vorzeichen sich umkehrt, dann ist der Steg 5 nicht mehr getrieben, und so hat das Planetengetriebe keinen Sinn mehr.

III. Allgemeiner Wirkungsgrad-Zusammenhang des Planetengetriebes mit Doppelantrieb

Die Grundgleichungen für die Wirkungsgraduntersuchung sind die folgenden:

1. Die auf das Planetenrad wirkenden Momente sind in Gleichgewicht:

$$M_2 + M_4 + M_5 = 0. \quad (1)$$

2. Das Leistungsgleichgewicht des Planetengetriebes mit Doppelantrieb:

$$(M_2 \omega_2 + M_4 \omega_4) \eta_{24 \rightarrow 5} + M_5 \omega_5 = 0. \quad (2)$$

3. Wenn $\omega_5 = 0$ ist, d. h., wenn es sich um ein Zahnradgetriebe handelt, dann ist beim Leistungsfluß $2 \rightarrow 4$

$$M_2 \omega'_2 \eta_{24} + M_4 \omega'_4 = 0, \quad (3)$$

woraus folgt, daß

$$M_2 \frac{\omega'_2}{\omega'_4} \eta_{24} + M_4 = M_2 u_{42} \eta_{24} + M_4 = 0. \quad (4)$$

In dieser Ableitung ist nach Bild 4

$$i'_{24} = \frac{\omega'_2}{\omega'_4} = - \frac{r_4}{r_2} = - \frac{z_4}{z_2} = u_{42}, \quad (5)$$

wo i die Bezeichnung für die kinematische, u für die geometrische Übersetzung, r für den Teilkreis und z für die Zähnezahlnzahl ist.

Mit den erwähnten Zusammenhängen und Bezeichnungen kann aus (2) angeschrieben werden, daß

$$\eta = \eta_{24-5} = \frac{-M_5 \omega_5}{M_2 \omega_2 + M_4 \omega_4} = \frac{-\frac{M_5}{M_2}}{\frac{M_4}{M_2} \frac{\omega_4}{\omega_5} + \frac{\omega_2}{\omega_5}} \quad (10)$$

Da auf Grund von (6)

$$\frac{M_5}{M_2} = -u_{52} \eta_{25}; \quad (11)$$

und auf Grund von (4)

$$\frac{M_4}{M_2} = -u_{42} \eta_{24} \quad (12)$$

geschrieben werden kann, so ist es möglich, den Zusammenhang (10) umzuschreiben:

$$\eta = \frac{u_{52} \eta_{25}}{-u_{42} \eta_{24} \frac{\omega_4}{\omega_5} + \frac{\omega_2}{\omega_5}} = \frac{u_{52} \eta_{25}}{i_{25} - u_{42} \eta_{24} i_{45}} \quad (13)$$

Wenn (11) und (12) in (1) eingesetzt werden, so ist

$$M_2 - u_{42} \eta_{24} M_2 - u_{52} \eta_{25} M_2 = 0,$$

und nach Vereinfachung

$$u_{42} \eta_{24} + u_{52} \eta_{25} = 1. \quad (14)$$

Also wird aus (13)

$$\eta = \frac{1 - u_{42} \eta_{24}}{i_{25} - u_{42} \eta_{24} i_{45}} \quad (15)$$

IV. Die Wirkungsgraduntersuchung

So steht also der allgemeine Zusammenhang für den Wirkungsgrad des Planetengetriebes mit Doppelantrieb zur Verfügung, für den Fall eines Leistungsflusses 24 → 5. Höchstens muß noch kontrolliert werden, ob sich die Richtung des Leistungsflusses des einfacheren Zahnradgetriebes in der Gleichung (4) für $\omega_5 = 0$ umkehrt, weil in diesem Fall statt η_{24} , $\eta_{42} = 1/\eta_{24}$ in der Formel benötigt wird.

Wenn man die Untersuchungen für den Fall $i_{25} = \omega_2/\omega_5 > 0$ durchführt, und den Fall des kupplungsartigen Betriebes mit $i_{25} = 1$ ausschließt, dann

überzeugt Bild 6 und 7 davon, daß mit η_{42} nur für den Fall $i_{25} < 1$, das heißt für den Fall einer beschleunigenden Übersetzung gerechnet werden muß, weil sich das Vorzeichen von ω_2 nur dann ändert.

Auch diesen Fall ausschließend, kann der Zusammenhang (15) auf Grund von (8) weiter vereinfacht werden:

$$\eta = \frac{1 - u_{42} \eta_{24}}{i_{25} - \eta_{24} (i_{25} - 1) - u_{42} \eta_{24}} = \frac{1 - u_{42} \eta_{24}}{(1 - \eta_{24}) i_{25} + (1 - u_{42}) \eta_{24}}, \quad (16)$$

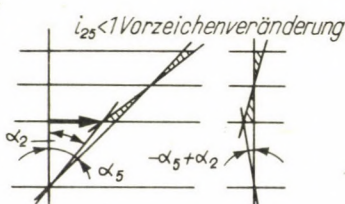


Bild 6. Für den Fall $i_{25} < 1$, also für eine beschleunigende Übersetzung, ändert sich das Vorzeichen des Leistungsflusses des einfachen Zahnradgetriebes, und so muß man statt η_{24} mit $\eta_{42} = 1/\eta_{24}$ rechnen

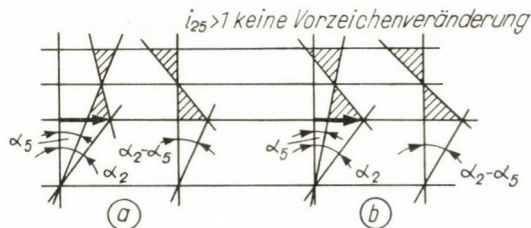


Bild 7. Im Fall $i_{25} > 1$, also für eine Übersetzung ins Langsame ändert sich das Vorzeichen des Leistungsflusses des einfachen Zahnradgetriebes nicht, und so kann man mit η_{24} rechnen, unabhängig davon, ob das Vorzeichen von ω_4/ω_2 positiv oder negativ ist

oder, weil es richtiger ist, in Funktion von $i_{52} = 1/i_{25} = \omega_5/\omega_2$ zu suchen, und in Anbetracht dessen, daß $\omega_2 = \text{konst.}$ und ω_5 veränderlich ist, ferner, um etwaige Vorzeichenverwirrungen zu vermeiden, mit $|u_{42}| = -u_{42}$ rechnend:

$$\eta = \frac{i_{52} (1 + |u_{42}| \eta_{24})}{1 - \eta_{24} + i_{52} \eta_{24} (1 + |u_{24}|)}. \quad (17)$$

In dieser Formel ändert sich i_{52} von 0 bis 1 (weil wir vom Fall, daß $i_{52} > 1$ ist, abgesehen haben). Zwecks Untersuchung der Änderung von $|u_{42}|$ ist es zweckmäßig, die untere und die obere Grenze, die praktisch vorkommen, zu untersuchen. Mit Benützung der Bezeichnungen von Bild 4 und der Tatsache, daß das Maximum der geometrischen Übersetzung der einfachen Zahnradpaare mit elementarer Verzahnung ungefähr 5 ist:

$$|u_{42}| = \frac{z_4}{z_2} = \frac{z_2 + 2z_3}{z_2} = 1 + 2 \frac{z_3}{z_2}, \quad (18)$$

d. h.

$$|u_{42}|_{\min} = 1 + 2 \frac{z_3 \min}{z_2 \max} = 1 + 2(u_{32})_{\min} \approx 1 + \frac{2}{5} = 1,4;$$

$$|u_{42}|_{\max} = 1 + 2 \frac{z_3 \max}{z_2 \min} = 1 + 2(u_{32})_{\max} \approx 1 + 2 \cdot 5 = 11.$$

Mit diesen Bezeichnungen und mit der Annahme $\eta_{24} \approx 0,9$ kann der Zusammenhang (17) schon ausführlicher untersucht werden.

Bild 8 zeigt $\eta_{24 \rightarrow 5}$ in Funktion von i_{52} für den Fall, daß u_{42} die konstanten Werte 1,4; 3; 5 und 11 annimmt (Tafel I). Aus den Diagrammen ist abzulesen,

Tafel I

Der Wert von

$$\eta = \eta_{24 \rightarrow 5} = \frac{i_{52}(1 + |u_{42}| \eta_{24})}{1 - \eta_{24} + i_{52} \eta_{24}(1 + |u_{42}|)} = \frac{A(i_{52}; |u_{42}|)}{B + C(i_{52}; |u_{42}|)}, \text{ in \%}$$

$\eta_{24} = 0,9$

$i_{52} \backslash u_{42} $	1,4	2	3	5	8	11
0,05	54,0	59,5	66,0	74,2	81,2	85,0
0,10	71,5	75,5	80,5	86,0	90,0	92,5
0,25	88,3	90,0	92,5	94,5	96,8	97,0
0,50	95,5	96,5	97,5	98,0	99,2	99,3
0,75	98,3	98,5	98,7	99,0	99,3	99,5

daß der Wirkungsgrad bei einem kleinen Wert von i_{52} (d. h. bei einem großen Wert von i_{25}) schlecht ist. Aber bei bestimmten Werten von i_{52} und i_{42} ist der Wirkungsgrad des Planetengetriebes mit Doppelantrieb besser als der Wirkungsgrad η_{24} des als einfaches Zahnradgetriebe betriebenen Planetengetriebes. Die untere Grenze dieser Punkte kann aus der Bedingung, daß im Zusammenhang (17) $\eta = \eta_{24 \rightarrow 5} = \eta_{24}$ ist, einfach berechnet werden. Aus dieser Gleichheit ist nämlich für $\eta_{24} \approx 0,9$

$$i_{52}^* = \frac{0,09}{0,19 + 0,09|u_{42}|} \tag{19}$$

Tafel II

Der Wert von i_{52}^* , wenn $\eta_{24 \rightarrow 5} = \eta_{24}$

$ u_{42} $	1,4	3	5	11
i_{52}^*	0,284	0,1095	0,14	0,076

Wir haben die selten vorkommenden Kurven für $i_{52} > 1$ nicht eingezeichnet. Dann ist $1 > \eta_{24 \rightarrow 5} > \eta_{24}$, d. h. sehr gut. Nehmen wir den Zusammenhang (17) zur Grundlage, so daß statt η_{24} $1/\eta_{42}$ zu substituieren ist:

$$\eta = \frac{i_{52} \left(1 + \frac{|u_{42}|}{\eta_{42}} \right)}{1 - \frac{1}{\eta_{42}} + i_{52} \frac{1}{\eta_{42}} (1 + |u_{42}|)} = \frac{i_{52} (\eta_{42} + |u_{42}|)}{\eta_{42} - 1 + i_{52} (1 + |u_{42}|)} \tag{20}$$

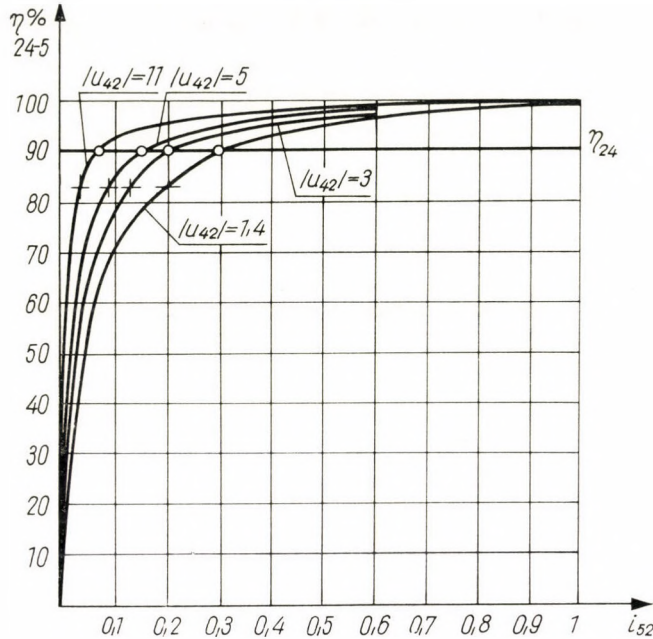


Bild 8. Der Wirkungsgrad des Planetengetriebes mit Doppelantrieb in Funktion von i_{52} , nur für Übersetzung ins Langsame und für einige konstante Werte von $|u_{42}|$. Die Punkte, bei denen sich das Vorzeichen von ω_4/ω_2 ändert, sind besonders hervorgehoben (s. Tafel I—III und Fußnote*)

* Das Vorzeichen von ω_4 ändert sich, wo $v_A/v_D = 2$, d. h. $r_2\omega_2/(r_4 - r_2) \omega_3 = 2$ ist, woraus $i_{52} = 0,5/(1 + |u_{42}|)$ ist

$ u_{42} $	1,4	3	5	11
i_{52}	0,2085	0,125	0,083	0,0415
$\eta_{24 \rightarrow 5}$	0,855	0,842	0,835	0,835

Nachweis des beinahe gleichen Wirkungsgrades:

$$\begin{aligned} \eta_{24 \rightarrow 5} &= \frac{i_{52}(1 + |u_{42}| \eta_{24})}{1 - \eta_{24} + i_{52} |u_{42}| \eta_{24}(1 + |u_{42}|)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + |u_{42}|} (1 + |u_{42}| \eta_{24}) \\ &= \frac{1}{1 - \eta_{24} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + |u_{42}|} \eta_{24}(1 + |u_{42}|)} \end{aligned}$$

Wenn $1 + |u_{42}| \approx 1 + |u_{42}| \eta_{24}$ ist, so ist

$$\eta_{24 \rightarrow 5} = \frac{1}{2 - \eta_{42}} = \frac{1}{2 - 0,9} \approx 0,9$$

Wenn $(1 + |u_{42}| \eta_{24})/(1 + |u_{42}|) \approx \eta_{24}$ ist, dann ist

$$\eta_{24 \rightarrow 5} = \frac{\eta_{24}}{2 - \eta_{24}} = \frac{0,9}{2 - 0,9} \approx 0,82$$

Wenn $i_{52} = 1$ ist, dann ist nach (20) $\eta = 1$; wenn $i_{52} \rightarrow \infty$, dann erhält man als Ergebnis den Zusammenhang

$$\eta = \frac{\eta_{42} + |u_{42}|}{1 + |u_{42}|},$$

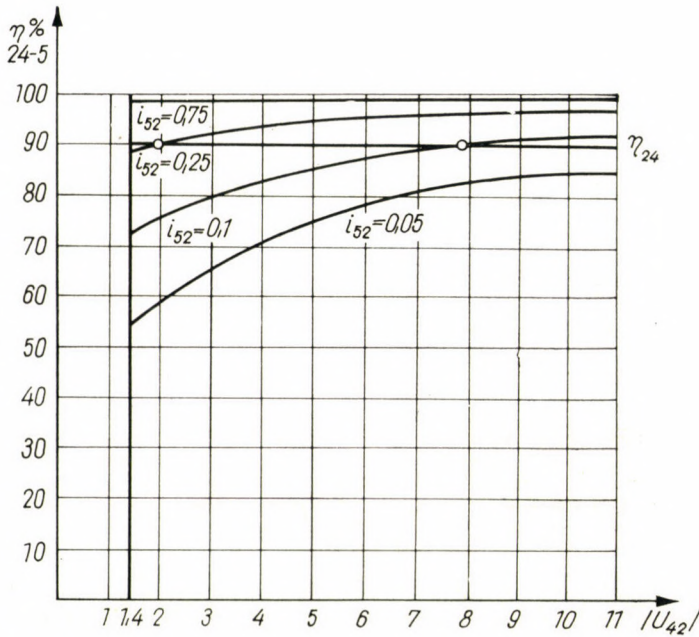


Bild 9. Bild 8 für konstante i_{52} und veränderliche $|u_{42}|$ umgezeichnet

der für den Fall, daß $|u_{42}| = 0$ ist, $\eta = \eta_{42}$ ergibt, während er für $|u_{42}| \rightarrow \infty$ $\eta = 1$ ergibt, d. h. unsere obenerwähnte Behauptung ist bewiesen.

Bild 9 zeigt $\eta_{24 \rightarrow 5}$ in Funktion von $|u_{42}|$ für die konstanten Werte $i_{52} = 0,05, 0,1, 0,25$ und $0,75$ (d. h. für die Übersetzungen $i_{25} = 20, 10, 4$ und $1,33$). Die Schnittpunkte $|u_{42}^*|$ der entsprechenden Kurven mit $\eta_{24} = \text{konst.}$ ergibt die Gleichung

$$|u_{42}^*| = \frac{0,09 - 0,19 i_{52}}{0,09 i_{52}},$$

die aus (19) durch Umordnen gewonnen werden kann (Tafel III). Aus diesen Kurven kann jedenfalls festgestellt werden, daß geometrische Übersetzungen u_{42} mit einem größeren Absolutwert einen besseren Wirkungsgrad sichern, wenn dem nur keine anderen verzahnungsgeometrischen und Festigkeits-Hindernisse entgegenstehen. Dieses Diagramm ist dann von Bedeutung, wenn das Getriebe mit einer konstanten kinematischen Übersetzung in Betrieb ist.

Tafel III

Der Wert von $|u_{42}|$, wenn $\eta_{24 \rightarrow 5} = \eta_{24}$

i_{52}	0,25	0.1
$ u_{42}^* $	1,87	7,9

V. Schlußwort

Diese Arbeit hat sich ausschließlich mit dem Doppelantrieb-Planetengetriebeteil des in Bild 1 schematisch dargestellten zusammengesetzten Getriebes befaßt, während der hydrodynamische Teil unbeachtet blieb. Dieser wird aber in [1] eingehend untersucht, wo jedoch der mechanische Teil außer acht gelassen wird. Die Ausarbeitung beruht auf der in [2] beschriebenen Methode.

SCHRIFTTUM

1. LOTFY, M. H.: Die Berechnung von hydrodynamischen Drehmomentwandlern mit besonderer Rücksicht auf die mit Leistungsverzweigung arbeitenden Systeme. Kandidatur-Dissertation (in ungarischer Sprache), Budapest 1962.
2. TERPLÁN, Z.: Mechanismen, 2. Ausgabe; 27. Punkt »Planetengetriebe« (In ungarischer Sprache). Verlag für Lehrbücher, Budapest 1962.

EFFICIENCY OF PLANETARY GEARS WITH TWO DRIVES

Z. TERPLÁN

SUMMARY

The paper deals with the change in the efficiency of the mechanical part of a given (hydrodynamic and planetary) gear with power flow bifurcation. The mechanical part is a planetary drive with two inputs. One of the sin gears is driven by the constant-speed drive motor, the other one is driven by the adjustable-speed turbine part of the hydrodynamic torque converter; hence the output power is obtained at the crank connected to the satellite wheels. The author establishes the general expression for the efficiency of the twin-drive planetary gear and after establishing the practical limits of the operation, he traces and analyzes the diagrams of efficiency variation.

LE RENDEMENT DES ENGRENAGES PLANÉTAIRES A DOUBLE COMMANDE

Z. TERPLÁN

RÉSUMÉ

L'étude examine les variations du rendement de la partie mécanique d'un réducteur de vitesse hydrodynamique et mécanique avec bifurcation de la puissance. La partie mécanique fonctionne comme un engrenage planétaire à double commande. L'une des roues solaires est commandée par le moteur de vitesse constante, l'autre roue solaire étant commandée par la

partie turbine, de vitesse variable, du convertisseur de couple. La puissance utile est donc obtenue à la barrette porte-satellite tournante. L'auteur établit l'expression générale pour le rendement du réducteur planétaire à double commande, et après fixation des limites pratiques du fonctionnement, fait connaître et analyse les courbes de variation du rendement.

КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ С ДВОЙНЫМ ПРИВОДОМ

З. ТЕРПЛАН

РЕЗЮМЕ

Работа занимается анализом изменения *кпд* механической части одной конкретной передачи с отбором мощности (гидродинамическим и механическим). Механическая часть работает в качестве планетарной передачи с двойным приводом. Одно солнечное колесо приводится приводным двигателем с неизменным числом оборотов, а другое солнечное колесо — турбинной частью гидродинамического трансформатора, которую можно установить на различное число оборотов, следовательно полезную мощность можно получить на коленчатых рычагах, соединенных с солнечными колесами. Автор выводит общую зависимость к. п. д. планетарной передачи с двойным приводом, затем после установления практических границ действия приводятся и анализируются кривые изменения *кпд*.

ON THE INTERNAL EDGE BEAM OF PARABOLOIDAL SHELLS OF REVOLUTION HAVING A CIRCULAR SKYLIGHT OPENING

P. CSONKA

DOCTOR OF TECHNICAL SCIENCES

WORKING COMMUNITY FOR BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
BUDAPEST

[Manuscript received May 3, 1963]

One of the authors' earlier papers [1] referred to a paraboloidal shell of revolution having an eccentrically located skylight opening. The shell was supported by a sole-ring resting on a wall, while the skylight opening was bordered by an edge beam. The load acting on the shell consisted of a uniformly distributed vertical force system.

In the aforementioned paper it was assumed that in the sole-ring as well as in the edge beam of the opening merely axial forces arise. Conditions ensuring the realization of the above assumption could easily be satisfied along the external periphery of the shell. However, on the edge of the opening, boundary conditions could only be fulfilled by applying an edge beam having a varying specific weight, i.e. a varying cross section.

In the present paper the value of the load to be set in action on the edge beam of the opening is established in such a way, that the sum of force components perpendicular to the plane of the edge beam should equal zero at each point of the axis line of same. The satisfaction of this condition as well as of the postulate that the value of the stress function of the shell should be constant everywhere along the edge of the opening, or vary according to a plane, is sufficient to ensure the rise of merely axial forces in the edge beam of the opening.

The numerical example given in the present paper verifies the fact that in cases occurring in practice, thus, if the diameter of the opening is small in comparison to that of the shell, and if the opening is only slightly eccentric, the value of the load obtained for the specific load on the edge beam hardly differs from the average one. In this case the artificial regulation of the load acting on the edge beam of the opening might be neglected.

I. Introduction

In one of his earlier papers [1] author dealt with paraboloidal membrane shells of revolution, having an eccentrically placed circular ventilating or skylight opening (Fig. 1). The investigated shell was supported by a sole-ring resting on a wall, while the opening was bordered by an edge beam.

According to the assumption of the aforementioned paper the sole-ring of the investigated shell as well as the edge beam round the opening do not resist bending and twisting effects, thus, they are merely able to bear axial forces. In respect to the sole-ring of the shell, boundary conditions resulting from the above assumption could be satisfied without any difficulty, while in the case of the edge beam round the opening the satisfaction of these boundary conditions was bound to the application of an edge beam, the specific weight, i.e., the cross section of which varies.

The quoted paper did not give information on the mode how to regulate the specific weight of the edge beam around the opening at different points of same. For the sake of satisfying the boundary condition referring to the edge of the opening a mass compensation is to be applied which requires the change of the specific weight of the edge beam to a certain degree; the paper in question did not contain any indication in respect to the required degree of this change.

The present paper wishes to supplement the abovementioned deficiencies of the earlier paper.

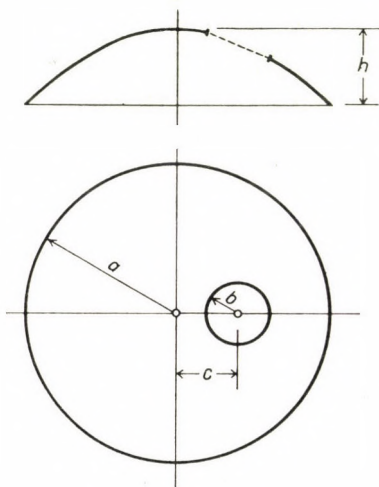


Fig. 1. Paraboloidal shell of revolution having an eccentrically located circular opening

2. Assumptions, notations

The following deductions will start out from the assumptions of paper [1]. As system of coordinates the cylindrical coordinates $\theta (r, \varphi, z)$ or $P(s, \psi, z)$ shown in Fig. 2 will be used. In these systems of coordinates the middle surface of the shell is characterized by the equations

$$z = \frac{h}{a^2} r^2, \quad (1)$$

or

$$z = \frac{k}{a^2} (s^2 + 2cs \cos \psi). \quad (2)$$

The load acting on the shell is assumed to consist of vertical forces which are uniformly distributed over the area of the plan-form of the shell. The specific value of this load related to the area of the plan-form will be

denoted by Z_0 . The specific value of the load acting on the edge beam of the opening, related to the length of the horizontal projection of the edge beam will be characterized by the load function $g = g(\psi)$. The average value of load g will be denoted by the letter g_0 , while the deviation between the actual and the average value of the load by the letter symbol Δg . Accordingly

$$g = g_0 + \Delta g. \tag{3}$$

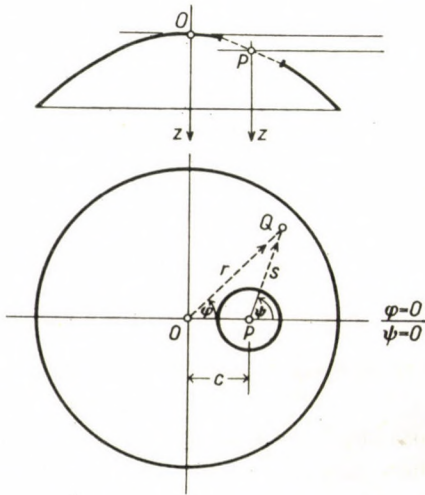


Fig. 2. Coordinates $O(r, \varphi, z)$ and $P(s, \varphi, z)$

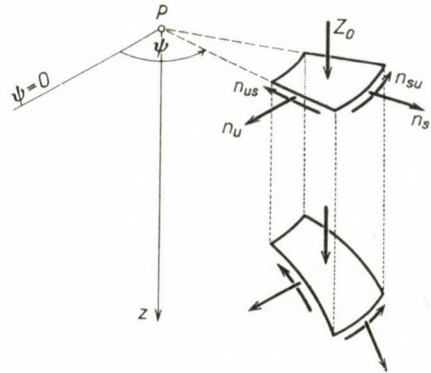


Fig. 3. Reduced internal forces n_s, n_{su}, n_{us} and n_u

The stress state of the shell is to be characterized by Pucher's stress function $F(s, \psi)$. The surface determined by the end points of the ordinates of the stress function is called stress surface.

Pucher's stress function has to satisfy the differential equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} + \frac{Z_0 a^2}{2h} = 0. \tag{4}$$

Knowing this stress function, reduced internal forces n_s, n_{su}, n_{us}, n_u (Fig. 3) can be computed from the following formulae:

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2}, \\ n_{su} = n_{us} &= -\frac{1}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial \psi} \right), \\ n_u &= \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Conditions referring to the edge beam of the opening

As according to assumption the edge beam of the opening does not resist bending and twisting forces, thus, the axis line of same must be the funicular curve of the loading forces. Therefore, the stress surface and the vertical cylinder led through the axis line of the edge beam must intersect each other in a planar curve [2]. Accordingly, in respect to values of the stress function belonging to points lying along the axis line the condition

$$[F]_i = d_0 + d_1 \cos \psi \quad (6)$$

can be set up. In the above formula $[F]_i$ denotes the value of the stress function along the axis line, while quantities d_0 and d_1 are constants.

Although the satisfaction of condition (6) is necessary, yet it is not sufficient to ensure that the axis line of the edge beam of the opening should be the funicular curve of the loading forces. This requires, in addition, for the loading forces nowhere to protrude from the fitting plane of the axis line of the edge beam. The latter condition is satisfied, if at each point of the axis line the sum of force components acting perpendicularly to the fitting plane of same equals zero.

For setting up the aforementioned postulate, first of all forces acting on the edge beam should be determined. These forces are to be characterized by the specific values of same related to the length of the axis line (Fig. 4). The horizontal components of forces transferred from the shell to the edge beam are

$$n_s \text{ and } n_{su},$$

while the vertical components of these forces are

$$n_s \left[\frac{\partial z}{\partial s} \right]_{s=b} \text{ and } n_{su} \left[\frac{\partial z}{\partial \psi} \right]_{s=b}.$$

To these forces the load acting directly on the edge beam should still be added, which should be characterized by the load function

$$g = g(\psi).$$

Thus, the specific value of vertical forces affecting the edge beam is:

$$v = \frac{2h}{a^2} \left[bn_s + c(n_c \cos \psi - n_{su} \sin \psi) + \frac{ga^2}{2h} \right].$$

Knowing the horizontal and vertical forces acting on the beam, their components being perpendicular to the plane of same can also be determined. If the direction of the normal of the plane of the edge beam pointing towards the interior of the opening is denoted by m , and the direction of the tangent of the planar projection of its axis line pointing towards the increasing ψ -direction is denoted by u (Fig. 5), then

$$\cos(ms) = -\sin(mz) \cdot \cos \psi,$$

$$\cos(mu) = +\sin(mz) \cdot \sin \psi.$$

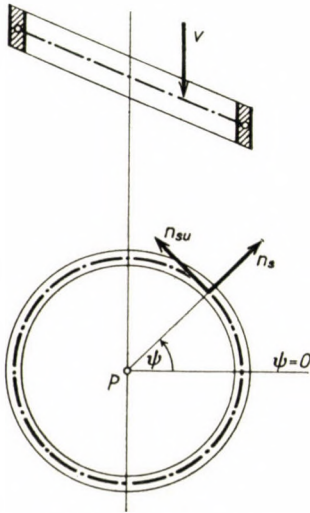


Fig. 4. The edge beam of the opening and forces acting on same

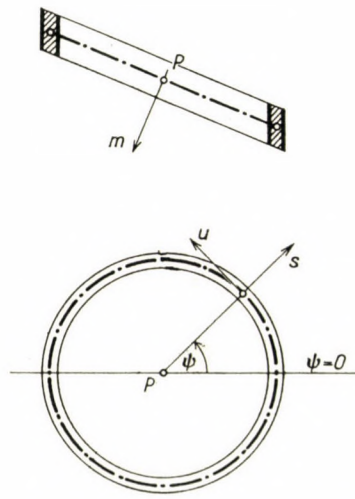


Fig. 5. Directions s , u and m

Thus, the m -directed component of the horizontal force n_s is

$$n_s \cos(ms) = -n_s \sin(mz) \cdot \cos \psi,$$

while the m -directed component of the horizontal force n_{su} can be expressed by the equation

$$n_{su} \cos(mt) = +n_{su} \sin(mz) \cdot \sin \psi,$$

provided t denotes the direction perpendicular to radius r . This direction is to be regarded as positive if pointing towards the increasing, i.e., positive φ -direction. At the same time the m -directed component of the vertical force v is

$$\frac{2h}{a^2} \left[bn_s + c(n_s \cos \psi - n_{su} \sin \psi) + \frac{ga^2}{2h} \right] \cos(mz).$$

Thus, the postulate, that at each point of the axis line the sum of the m -directed force components should be equal to zero, can be expressed as given below:

$$-n_s \sin(mz) \cdot \cos \psi + n_{su} \sin(mz) \cdot \sin \psi + \\ + \frac{2h}{a^2} \left[bn_s + c(n_s \cos \psi - n_{su} \sin \psi) + \frac{ga^2}{2h} \right] \cos(mz) = 0.$$

Herefrom, taking formula

$$\tan(mz) = \left[\frac{\partial z}{\partial s} \right]_{s=\psi=0} = \frac{2hc}{a^2}$$

into consideration, the relation

$$g = -\frac{2bh}{a^2} n_s$$

follows, and using formula

$$n_s = \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2},$$

the equation

$$g = Z_0 b + \frac{2bh}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \quad (7)$$

is arrived at. The realization of the assumption that the edge beam of the opening should not be subjected to bending and twisting forces, requires in addition to the satisfaction of postulate (6) also that of condition (7).

4. Determination of the load function $g = g(\psi)$

In paper [1] the stress function of the problem was set up in the form

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

Among these functions F_0 was one of the particular solutions of the differential equations of the problem having the value

$$F_0 = \frac{Z_0 a^4}{8h} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] + \frac{a^2 b^2}{4h} \left(\frac{Z_0}{2} - \frac{g_0}{b} \right) \ln \left(\frac{s}{b} \right)^2,$$

while $F_1, F_2, F_3 \dots$ were potential functions. Among the latter, those the indices of which are odd numbers, can be abridged inside the external edge

line into a harmonic potential function $G(r, \varphi)$, while, those the indices of which are even numbers, can outside the internal edge line be united into a harmonic potential function $H(s, \psi)$. The general form of these functions are:

$$G(r, \varphi) = C_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2\varphi + C_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos 3\varphi + \dots, \quad (8)$$

$$H(s, \psi) = D_2 \left(\frac{b}{s}\right)^2 \cos 2\psi + D_3 \left(\frac{b}{s}\right)^3 \cos 3\psi + \dots. \quad (9)$$

Using the above notations,

$$F = F_0 + G + H. \quad (10)$$

Knowing functions F_0 , G , H , the load function $g = g(\psi)$ can be determined from formula (7):

$$g = Z_0 b + \frac{2bh}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (F_0 + G + H).$$

It would be expedient to transform this formula with the aid of the easily verifiable relation

$$Z_0 b + \frac{2bh}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} F_0 = g_0$$

into the following form:

$$g = g_0 + \frac{2bh}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (G + H). \quad (11)$$

Thus, the deviation from the average value g_0 is

$$\Delta g = \frac{2bh}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (G + H). \quad (12)$$

The values $\partial^2 H / \partial s^2$ figuring in formula (12) can be computed directly, while the calculation of values $\partial^2 G / \partial s^2$ needs certain consideration. For this calculation it should be known that

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \equiv \cos^2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin^2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial t},$$

furthermore that

$$\cos^2(\psi - \varphi) = \sin^2(\psi - \varphi) + \cos 2(\psi - \varphi).$$

Taking the above relations into consideration,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} &= \sin^2(\psi - \varphi) \cdot \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right) + \\ &+ \cos 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}. \end{aligned}$$

However, the function G is a potential function, thus, the first term on the right-hand side of the above formula is equal to zero. Considering that

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right),$$

it is obvious:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = \cos 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right).$$

Using the above relation formula (12) can be transformed into the form

$$\begin{aligned} \Delta g &= \frac{2bh}{a^2} \left[\cos 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \right. \\ &\left. + \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

However, with respect to (8) and (9)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \left[1.2 C_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos 2\varphi + 2.3 C_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos 3\varphi + \dots \right],$$

and

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) = - \frac{1}{r^2} \left[1.2 C_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin 2\varphi + 2.3 C_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \sin 3\varphi + \dots \right],$$

and so

$$\begin{aligned} \cos 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) &= \\ &= \frac{1}{r^2} \left\{ 1.2 C_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 [\cos 2(\psi - \varphi) \cdot \cos 2\varphi - \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \sin 2\varphi] + \right. \\ &+ 2.3 C_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 [\cos 2(\psi - \varphi) \cdot \cos 3\varphi - \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \sin 3\varphi] + \\ &\left. + 3.4 C_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 [\cos 2(\psi - \varphi) \cdot \cos 4\varphi - \sin 2(\psi - \varphi) \cdot \sin 4\varphi] + \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[1.2 C_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos 2\psi + 2.3 C_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos(2\psi + \varphi) + \right. \\ &\left. + 3.4 C_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \cos(2\psi + 2\varphi) + \dots \right]. \end{aligned}$$

With the above substitution, and taking into consideration that at the place $s = b$ the relation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} = \frac{1}{b^2} [2.3 D_2 \cos 2 \psi + 3.4 D_3 \cos 3 \psi + 4.5 D_4 \cos 4 \psi + \dots]$$

is valid, formula (13) might finally be transformed into the form given hereunder:

$$\Delta g = \frac{2bh}{a^2} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[1.2 C_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos 2 \psi + 2.3 C_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos (2 \psi + \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3.4 C_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \cos (2 \psi + 2 \varphi) + \dots \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{b^2} [2.3 D_2 \cos 2 \psi + 3.4 D_3 \cos 3 \psi + 4.5 D_4 \cos 4 \psi + \dots] \right\} \quad (14)$$

To satisfy the postulate for the edge beam of the opening not to be subjected to bending and twisting effects, still requires in addition to the fulfilment of condition (6), that the specific weight g of the edge beam should deviate from the average value g_0 by the load value Δg which is determined by formula (14).

The above condition, i.e., that the load value g should deviate from the average by the value Δg determined by formula (14), could be ensured, in principle, by the application of an edge beam having a varying cross section. However, if the diameter of the opening is in comparison to that of the shell relatively small and the position of the opening is only slightly eccentric, the value Δg is in comparison to the average value g_0 so small that an artificial regulation of the effective weight of the edge beam might be disregarded. Namely, the modification specified in the sense of formula (14) is less than the deviation in weight, which owing to inaccuracies of the execution might or might not occur when producing the edge beam.

To verify the statement that the above mentioned simplification in cases occurring in practice conduces to an insignificantly small error only, the numerical example given hereunder is presented.

Numerical example

The geometrical data of the shell should be (Fig. 6):

$$\begin{aligned} a &= 20,0 \text{ m,} \\ b &= 4,0 \text{ m,} \\ c &= 8,0 \text{ m,} \\ h &= 10,0 \text{ m.} \end{aligned}$$

The shell should be loaded by a uniformly distributed load

$$Z_0 = 250 \text{ kp/m}^2,$$

and the average load of the edge beam of the opening should be

$$g_0 = 200 \text{ kp/m}.$$

The problem to be solved consists in the determination of the regulation of the load of the edge beam in such a way that the edge beam should not be affected by bending and twisting forces.

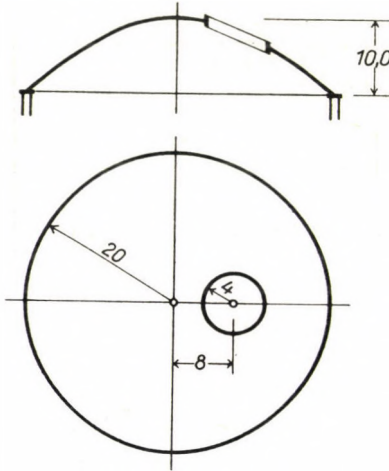


Fig. 6. Numerical example

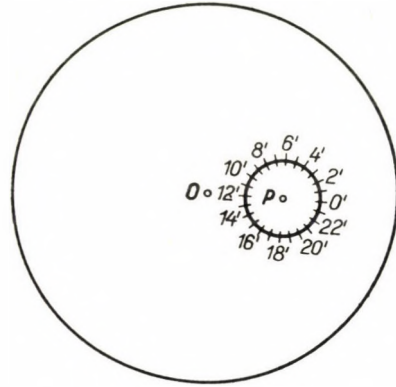


Fig. 7. Points of adjustment

The above numerical example precisely complies with the example dealt with in paper [1], therefore, the required calculative data can be taken over from paper [1] without any modification:

$$C_2 = 1924,32, \quad C_3 = 515,51, \quad C_4 = 155,78, \quad C_5 = 50,36,$$

$$C_6 = 16,97, \quad C_7 = 5,87, \quad C_8 = 2,09,$$

and

$$D_2 = -108,84, \quad D_3 = -6,91, \quad D_4 = -0,49, \quad D_5 = -0,03.$$

The value Δg sought for can be computed according to formula (14):

$$\begin{aligned} \Delta g = & \frac{2 \cdot 4,0 \cdot 10,0}{20,0^2} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[2 \cdot 1924,32 \left(\frac{r}{20,0} \right)^2 \cos 2\psi + \right. \right. \\ & + 6 \cdot 515,51 \left(\frac{r}{20,0} \right)^3 \cos(2\psi + \varphi) + 12 \cdot 155,78 \left(\frac{r}{20,0} \right)^4 \cos(2\psi + 2\varphi) + \\ & + 20 \cdot 50,36 \left(\frac{r}{20,0} \right)^5 \cos(2\psi + 3\varphi) + 30 \cdot 16,97 \left(\frac{r}{20,0} \right)^6 \cos(2\psi + 4\varphi) + \\ & + 42 \cdot 5,87 \left(\frac{r}{20,0} \right)^7 \cos(2\psi + 5\varphi) + 56 \cdot 2,09 \left(\frac{r}{20,0} \right)^8 \cos(2\psi + 6\varphi) \left. \right] - \\ & - \frac{1}{16} [6 \cdot 108,84 \cos 2\psi + 12 \cdot 6,91 \cos 3\psi + \\ & + 20 \cdot 0,49 \cos 4\psi + 30 \cdot 0,03 \cos 5\psi] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Performing the computation at points 0', 2', 4' of the internal edge line (Fig. 7), for the load values $g = g(\psi)$ and $\Delta g = \Delta g(\psi)$ the values compiled in Table I are obtained:

Table I
Values of the load function along the internal edge line

ψ	g kp/m	g kp/m
0	-5,99	194,00
30	-2,68	197,02
60	+3,25	203,25
90	+5,38	205,38
120	+2,23	202,23
150	-2,70	197,30
180	-4,96	195,04

The diagram of values $g = g(\psi)$ plotted on the base of the above calculation is presented in Fig. 8.

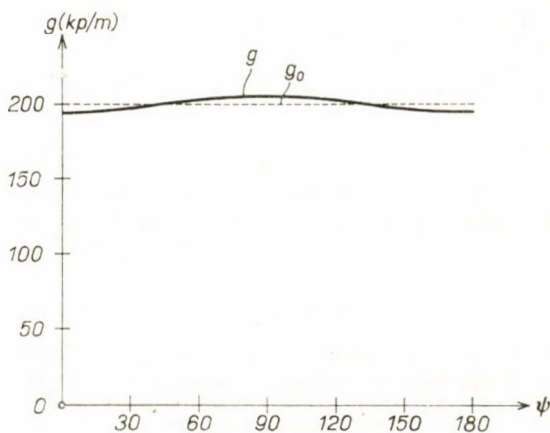


Fig. 8. Diagram of the load function $g = g(\psi)$

As can be seen, the value of g deviates from the average value $g_0 = 200$ kp/m at most by 6 kp/m, i.e., maximum by 3%. This deviation is in comparison to deviations in weight, which are unavoidable in construction really insignificantly small. For this very reason, in the given case as well as in similar cases the regulation of the load of the edge beam by an artificial interference is quite unnecessary.

REFERENCES

1. CSONKA, P.: Paraboloid Shell of Revolution with an Eccentric Skylight Openig. *World Conference on Shell Structures* October 1-4, 1962 Sanfrancisco, California. National Academy of Sciences- National Research Council, Washington, D. C., 1964, 501-508.
2. CSONKA, P.: On the Annular Edge Beam of Membrane Shells. *Acta Techn. Hung.* **33** (1961) 413-430.

ÜBER DEN INNEREN RANDTRÄGER DER MIT EINEM KREISFÖRMIGEN OBERLICHT VERSEHENEN ROTATIONS-PARABOLOID-SCHALEN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Ein früherer Aufsatz des Verfassers [1] bezog sich auf eine Rotationsparaboloid-Membranschale die durch eine ausmittig gelegene, kreisförmige Oberlichtöffnung durchbrochen war. Die Schale war durch einen auf einer Mauer aufliegenden Sohrling gestützt, während der Rand der Öffnung durch einen Randträger begrenzt war. Als Belastung war eine gleichmäßig verteilte, vertikale Belastung berücksichtigt worden.

In dem erwähnten Aufsatz wurde vorausgesetzt, daß im Randträger der Öffnung und im Sohrling bloß Axialkräfte entstehen. Die hierauf bezüglichen Bedingungen konnten am äußeren Rande der Schale leicht befriedigt werden, während am Rande der Öffnung die Randbedingungen nur im Falle der Anwendung eines Randträgers erfüllbar waren, dessen spezifisches Gewicht sich nach einer gewissen Regel änderte, d. h. im Falle eines Randträgers mit veränderlichem Querschnitt.

Im vorliegenden Aufsatz wird der Wert der den Randträger beanspruchenden Belastung derart bestimmt, daß die Summe der auf die Ebene des Randträgers senkrechten Kraftkomponenten in allen Punkten der Achsenlinie des Randträgers gleich Null sei. Die Erfüllung dieser Bedingung und die Befriedigung des Postulates, daß der Wert der Spannungsfunktion der Schale entlang des Öffnungsrandes konstant zu sein, oder sich nach einer Ebene zu ändern hat, ist hinreichend um zu sichern, daß im Randträger der Öffnung bloß Axialkräfte entstehen können.

Im Aufsatz wird an Hand eines Rechnungsbeispiels nachgewiesen, daß in den in der Praxis vorkommenden Fällen, d. h. wenn der Öffnungsdurchmesser im Vergleich zum Schalendurchmesser klein und die Ausmittigkeit der Öffnung bloß gering ist, weicht der Belastungswert der sich für die spezifische Belastung ergibt vom Durchschnittswert kaum ab. In solchen Fällen kann von einer künstlichen Regulierung der Belastung des am Rande der Öffnung befindlichen Randträgers abgesehen werden.

DE L'ANNEAU DE RIVE SUPÉRIEUR DES VOILES EN PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION AYANT UNE OUVERTURE CIRCULAIRE

P. CSONKA

RÉSUMÉ

Une étude antérieure de l'auteur (1) a été consacrée aux voiles en parabolôïde de révolution ayant une ouverture circulaire de position excentrique. Le voile était supporté par un anneau de rive inférieur reposant sur un mur circulaire, le bord de l'ouverture était limité par un anneau supérieur. Comme charge, on a considéré une force verticale uniformément répartie.

L'étude en question supposait que dans les anneaux de rive inférieur et supérieur ne peuvent se produire que des forces axiales. Les conditions de cette hypothèse pouvaient être aisément satisfaites sur la rive extérieure du voile, mais sur la rive de l'ouverture, les conditions de contour ne pouvaient être satisfaites que par application d'un anneau de rive de section variable, donc ayant une charge spécifique variant selon une certaine règle.

Pour la charge à appliquer sur l'anneau de rive de l'ouverture, le présent article détermine une valeur telle, que la somme des composantes de force normales au plan de l'anneau de rive soit égale à zéro dans tous les points de son axe statique. La satisfaction de cette condition et de l'exigence que la valeur de la fonction de tension du voile soit constante le long de la rive de l'ouverture ou varie suivant un plan, suffit pour assurer que des forces axiales seules se produisent dans l'anneau de rive de l'ouverture.

L'auteur présente un exemple numérique pour démontrer que dans les cas pratiques, c'est-à-dire quand le diamètre de l'ouverture est petit par rapport à celui du voile et l'ouverture est peu excentrique, la valeur de charge obtenue pour la charge spécifique de l'anneau de rive ne s'écarte que peu de la valeur moyenne. Dans ces cas, la modification artificielle de la charge appliquée à l'anneau de rive peut être négligée.

О ВНУТРЕННЕЙ КРАЕВОЙ БАЛКЕ ОБОЛОЧЕК С ФОНАРЕМ, ИМЕЮЩИХ
ФОРМУ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ И ОПИРАЮЩИХСЯ НА КРУГООБРАЗНОЕ
ОСНОВАНИЕ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Одна из прежних работ [1] автора занималась эксцентрично расположенной, пробитой отверстием мембранной оболочкой, опирающейся на кругообразное основание и имеющей форму рифленого параболоида вращения. Оболочка опиралась на опорное кольцо, уложенное на стенную кладку, край отверстия был заделан краевой балкой. Нагрузка была принята в виде вертикальной, равномерно распределенной нагрузки.

В упомянутой работе предполагалось, что в опорном кольце и в краевой балке отверстия возникают лишь осевые усилия. Условия, обеспечивающие такое предположение, легко выполнимы для внешнего периметра оболочки, для края отверстия, однако, крайние условия могут быть удовлетворены лишь при наличии удельной нагрузки, меняющейся по определенному правилу, то есть при применении краевой балки переменного сечения.

В настоящей работе нагрузка на краевую балку отверстия выбирается таким образом, чтобы сумма перпендикулярных плоскости балки составляющих сил была равна нулю в любой точке оси краевой балки. Выполнение этого условия, а также того требования, чтобы значение функции было постоянным вдоль края отверстия, достаточно для обеспечения и того, чтобы в краевой балке отверстия возникали лишь осевые усилия.

Приводится числовой пример, подтверждающий, что в практических случаях, то есть тогда, когда диаметр отверстия мал по сравнению с диаметром оболочки и отверстие имеет лишь небольшую эксцентричность, значение нагрузки, определяющей удельную нагрузку, мало отличается от среднего значения. В этих случаях можно отказаться от искусственного регулирования нагрузок краевой балки.

DIE AUSBILDUNG VON KRISTALLEN AUS DEN METALLPULVERKÖRNCHEN BEIM SINTERN VON WOLFRAMSTÄBEN

J. NEUGEBAUER*

Unter Mitwirkung von

T. SIMON** und J. TREMMEL***

Beim Sintern eines Wolframstabes erscheinen zuerst Kristallite, deren Durchmesser der Summe von ungefähr drei Metallpulverkörnchen entspricht. Bei GK-artigen Wolframsorten (K, Si, Al) wachsen diese weiter nicht, oder es gibt ein anomales Kristallwachstum. Bei nicht GK-artigen Wolframsorten wachsen die Kristallite aequiaxial. Einzelne Metallpulverkörnchen bleiben während der Ausbildung der Kristallite bzw. Kristalle unberührt zurück. Es wird angenommen, daß das Kristallwachstum bei GK-(K, Si, Al)-artigem Wolfram durch Anhäufungen von Verunreinigungen an der Korngrenze bedingt ist.

Es ist eine bekannte Tatsache in der Pulvermetallurgie und insbesondere in der Metallurgie des Wolframs, daß die Form und die Größe der Metallpulverkörnchen, neben dem Einfluß der Zusätze, einen sehr bedeutenden, ja sogar vielleicht den wesentlichsten Einfluß auf das Gefüge des daraus durch Sintern hergestellten Metallkörpers darstellen.

Der Sintervorgang wurde sowohl experimentell wie auch theoretisch viel untersucht, doch ist es noch weit nicht möglich, aus den beobachteten physikalischen und chemischen Eigenschaften des Metallpulvers auf das zu erwartende Gefüge des Sinterstabes zu schließen.

Unsere Untersuchungen, welche durch optische bzw. elektronenoptische Beobachtungen an zum Teil oder völlig gesinterten Stäben angestellt wurden, führten zu den folgenden Erkenntnissen.

Wird aus einem Wolframpulver, dessen Korngröße zum größten Teil zwischen 1 und 2,5 μ liegt, mit 1 Tonne/cm² Preßdruck ein Stab gepreßt, so befinden sich die einzelnen Metallpulverkörnchen in diesem Stab noch völlig in ihrer ursprünglichen Form, als etwas abgerundete Rhombdodekaeder.

Wird der Stab durch direkten Strom bis 2000° C erhitzt, was natürlich in Schutzgas, z. B. in Wasserstoff erfolgt, so ändert sich die Korngröße nicht wahrnehmbar, aber zwischen einzelnen Körnchen kommen »Brücken« zustande. Meistens sieht man diese Verbindungen nur zwischen je zwei Körnchen,

* Forschungsinstitut für Technische Physik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, und Wolframlaboratorium der Tungfram A. G.

** Tungfram A. G.

*** Institut für Strukturforschung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Gruppen aus mehreren Körnchen sind selten. Dieses Bild findet man sowohl an der Oberfläche des Stabes wie auch an einer Bruchfläche.

Bei weiterem Sintern wächst die Zahl der Verbindungen zwischen den Körnchen, bei höheren Temperaturen kommen immer mehr solche Gruppen vor, in welchen nicht nur zwei, sondern mehrere Körnchen miteinander verbunden sind. Merkwürdigerweise kommen oft solche Gruppen vor, wo vier Körnchen in einer Lage miteinander Verbunden sind, wie vier benachbarte Ecken eines Rhombododekaeders in und um die dreizählige Symmetriachse. Es scheint die Annahme wahrscheinlich, daß die »Brücken« in solcher Orientierung leichter zustande kommen als in einer anderen Richtung.

Bei weiterem Erhöhen der Temperatur werden kompaktere Formen sichtbar. Diese ragen aus der Oberfläche des Stabes etwas heraus. Ihre Abmessungen sind so, als wenn die oben beschriebenen Gruppen aus einzelnen Pulverkörnchen zu größeren Rhombododekaedern ausgefüllt wären. Das ganze Rhombododekaeder ist nicht sichtbar, nur drei, in einzelnen Fällen vier Flächen ragen aus der Oberfläche heraus. Die Abmessungen dieser Gebilde betragen ungefähr 4–8 μ , was der Summe von drei Körnchendurchmessern der Größenordnung nach entspricht.

Die Vorgänge beim weiteren Kornwachstum weisen bei manchen Wolfram-Metallarten qualitative Unterschiede auf. Diese Unterschiede sind so ausgeprägt, daß man mit ihrer Hilfe zwischen zwei Artgruppen von Wolfram unterscheiden kann.

Diese zwei Gruppen von (übrigens 99,99% reinen oder noch reineren) Wolframarten werden auch in ihrer technischen Verwendung unterschieden. Zu der ersten Gruppe gehören das »undoped« Wolfram, und jene Wolframarten, die als Metallpulver zwar Zusätze enthalten haben, diese aber im kompakten, bearbeiteten und rekristallisierten Metall keine ausgeprägte GK (großkristalline bzw. »non sag«) Eigenschaften hervorrufen. Mit anderen Worten, wenn man aus solchen Metallarten Glühlampenwendeln herstellt, so bestehen diese nach dem Glühen aus kleinen Kristallen, sind brüchig und verformen sich während längeren Glühens unter dem eigenen Gewicht.

Die zweite Gruppe von Wolframmetallarten enthält als Metallpulver solche Zusätze (z. B. K, Si, Al), welche auch im kompakten, bearbeiteten und rekristallisierten Metall so wirksam sind, daß sie die Gk-Eigenschaften hervorrufen. Aus solchen Metallarten hergestellte Glühlampenwendeln z. B. weisen lange, überlappende Kristalle auf, sind weniger brüchig und verformen sich während des längeren Glühens unter dem eigenen Gewicht nicht (GK, NSD Metallarten des Handels).

Was nun das Kornwachstum in der letzten Phase des Sinterns betrifft, so geschieht dies bei der ersten (»undoped«) Gruppe durch normales Wandern der geradlinigen Grenzen der einzelnen Kristallite, wodurch aequiaxiale Kristalle entstehen, die um so größer sind, je mehr Zeit oder je höhere Tem-

peratur zum Wachstum zur Verfügung stand. Im allgemeinen entstehen aber nicht allzu große Kristalle, da die Treibkraft des Wachstums mit der Korngröße abnimmt.

Wenn man solche gesinterte Stäbe, z. B. bei 500—1000facher Vergrößerung, an der Oberfläche beobachtet, so sieht man die ursprünglichen, ungefähr 8μ breiten Kristallite als aus der Oberfläche herausragende Gebilde. Die vor dem Weiterwachsen sichtbar gewesenen Korngrenzen sind aber nicht

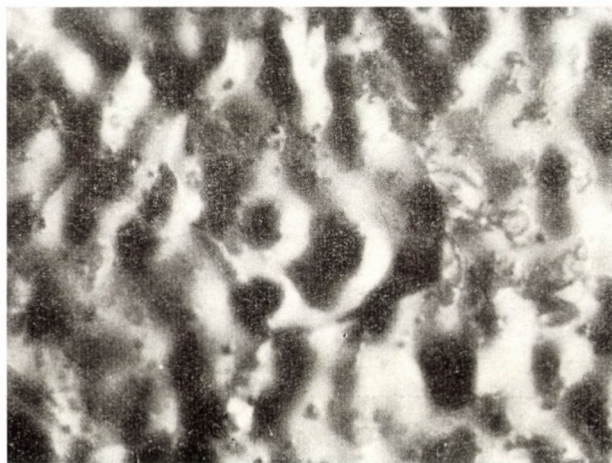


Bild 1. Oberfläche eines gesinterten Wolframstabes ohne Zusätze. Vergrößerung $500\times$. Die Korngrenzen sind durch thermisches Ätzen sichtbar, die früheren, bereits abgerundeten Kristallite sind ebenfalls sichtbar, weil sie aus der Oberfläche herausragen

mehr vorhanden, diese haben sich erweitert und gehen jetzt ziemlich geradlinig nicht selten durch die ursprünglichen Kristallite hindurch. Dies ist im Bild 1 zu sehen.

Bei GK-artigen Wolframmetallen dagegen findet man nie andere Korngrenzen als die der ursprünglichen, ungefähr 8μ breiten Kristallite, auch dann nicht, wenn der Stab bis zum Durchschmelzen erhitzt wurde. (Eine Ausnahme bildet die Schmelze selbst.) Bei einzelnen Metallarten dieser Gruppe kommt es aber vor, daß schon im gesinterten Stab die GK (großkristalline) Eigenschaft zum Vorschein kommt. Das kann man mit dem Mikroskop oder Elektronenmikroskop so beobachten, daß man nach fortgesetztem Sintern immer mehr benachbarte Kristallite findet, zwischen denen die ursprüngliche Grenze nicht mehr sichtbar ist. Nie aber findet man eine neue Grenze. Im Bild 2 ist das gut sichtbar. Dieser Vorgang findet in ganz unregelmäßigem Nacheinander statt, und so entsteht zuerst ein außerordentlich buntes Gebilde von Kristalliten mit zick-zackigen Grenzen. Endlich entsteht aus vielen Tausenden, ja sogar vielen Millionen Kristalliten ein einziger Großkristall.

Durch Beobachtung der Kristallitstruktur, entweder an der Staboberfläche oder an einer Bruchfläche, kann man so immer entscheiden, ob das Metall die Fähigkeit zur Bildung von großen Kristallen und der Formbeständigkeit als Glühkörper bei hohen Temperaturen besitzt.

Als Erklärung für den Unterschied im Kristallitwachstum zwischen GK und nicht GK-Material kann folgendes angenommen werden:

Bei nicht GK-artigem Wolframmetall bestimmen das Wachstum nicht vorwiegend die Verunreinigungen oder Zusätze. Bei GK-artigen aber wirken die Zusätze an der Korngrenzfläche in solchem Maße wachstumshindernd,



Bild 2. Oberfläche eines GK-Wolframstabes (K, Si, Al Zusätze) nicht vollständig gesintert. Elektronenoptisch 1700fach vergrößert. Die Kristallitgrenzen fehlen an mehreren Stellen, und so entstanden größere Kristalle

daß ein Kornwachstum gar nicht stattfindet. Was hier bei der weiteren Kristallisation geschieht, ist vielleicht mit dem Wachsen von Gasblasen in einem Schaum vergleichbar, d. h. nicht der Blaseninhalt, sondern die Wände entscheiden den Vorgang. Wenn diese zerplatzen, kommt der Inhalt der benachbarten Blasen notwendigerweise in Gleichgewicht. Etwas ähnliches geschieht bei den Kristalliten. Die Wände sind hier die an den Kristallitgrenzen angehäuften Verunreinigungen, also die Reste der Zusätze. Wenn durch die erhöhte thermische Energie eine »Wand« durchreißt, also die Anhäufung der Verunreinigungen sich verändert, wird ein sprungartiges Kornwachstum ermöglicht. Die Anhäufung von Verunreinigungen kann sich durch physikalische oder chemische Zustandsänderung verändern. Da nicht die Kristallite selbst, sondern die Anhäufungen der Verunreinigungen den Wachstumsvorgang bestimmen, kommen ganz unregelmäßige Gebilde zustande, und das Wachstum wird durch die Kristallgröße nicht eingeschränkt, so, wie es auch bei der durch Dispersion bedingten sekundären Rekristallisation der Fall ist [1].

Es scheint also, daß eine sich bei höheren Temperaturen auflösende »Schaumstruktur« die wesentliche Bedingung für die GK (NSD) Eigenschaften ist.

Diese Annahme steht mit mehreren Tatsachen und Theorien im Einklang.

Die ursprüngliche Beschreibung des GK-Effektes von T. MILLNER und P. TURY [2] schreibt die Bildung von großen Kristallen inneren Spannungen zu, erregt durch gewisse Zusätze. Diese rühren nach P. TURY [3] daher, daß entsprechend gewählte Zusätze, bei der Temperatur der Kristallisation einen Dampfdruck ausübend, in dem Metallkörper einen Spannungszustand, bzw. bei ihrem Herausdampfen einen Spannungsabfall hervorrufen. Diesbezüglich wird von P. TURY auf die Ähnlichkeit mit dem durch eine Kaltbearbeitung verursachten Kristallisationsprozeß hingewiesen.

Obzwar diese Annahme eine andere ist, als die einer »sich auflösenden Schaumstruktur«, enthält sie ebenfalls den Gedanken, daß dem Kristallwachstum eine chemisch-physikalische Zustandsänderung den Weg bereitet.

Es ist so leicht erklärlich, warum bei Aufeinanderichtung von GK und nicht GK Metallpulvern die großen Kristalle beim Sintern in die nicht-GK Schicht [4] nicht hineinwachsen.

Beim Vermischen dagegen von GK und nicht-GK Metallpulver kann ein GK-artiger Stab erreicht werden. In diesem Fall bekommen nämlich die Korngrenzen der nicht-GK Körner Verunreinigungen von den GK Körnern, und das verunreinigungsbedingte anomale Kornwachstum kann sich ausbilden.

Aus der Annahme der »Schaumstruktur« folgt notwendigerweise, daß diese Struktur nur auf pulvermetallurgischem Wege erreicht werden kann, und beim Schmelzen zugrunde geht. Man kann annehmen, daß sich diese Struktur aus einem geschmolzenen Metall auch dann nicht wieder ausbildet, wenn die chemische Zusammensetzung dazu geeignet wäre.

Die Annahme von J. S. MEIJERING und G. D. RIECK [5—6], wonach in den gezogenen Wolframdrähten die »Dotierungshäute« die Rekristallisation bestimmen, behandelt das Problem der Kristallbildung beim Sintern nicht. Ob die Häute bei der Rekristallisation aus einer fremden Phase bestehen, wie MEIJERING und RIECK [5] das behaupten, ist fraglich. Die Annahme von MILLNER, PROHÁSZKA und NEUGEBAUER [7] sowie von MANNERKOSKI [8], daß die Häute atomdisperser Natur sind, scheint wahrscheinlicher.

Bei den Wolframmetallarten mit GK Charakter konnten wir eine weitere interessante Erscheinung beobachten. Bei der oben beschriebenen Kristallitbildung und dem Wachstum bleiben einzelne ursprüngliche Pulverkörnchen unberührt. Diese erscheinen inmitten der großen Kristalle in ihrer ursprünglichen Form als Insel bestehen. Unser Bild 3 zeigt solche eingelagerte Körnchen an einer Bruchfläche eines GK Stabes, dessen Kristalle den ganzen Querschnitt ausfüllen. (Bekanntlich bricht das Wolfram vorwiegend mit sprödem interkristallinem Bruch.)

Die Ursache dieser Erscheinung kann man sich so vorstellen, daß die Inselkörnchen entweder durch ihre Vorgeschichte oder durch ihre Lage eine Sonderstellung zwischen den anderen Körnchen eingenommen haben. In ihrer chemischen Zusammensetzung konnten sie z. B. dadurch von den übrigen abweichen, daß sie Fremdstoffe in anderer Verteilung und Art an der Oberfläche enthalten. Das kann vom Entstehungsweg der Körner herrühren [9]. Ihre Lage konnte dadurch eine besondere sein, daß sie mit allen Nachbar-

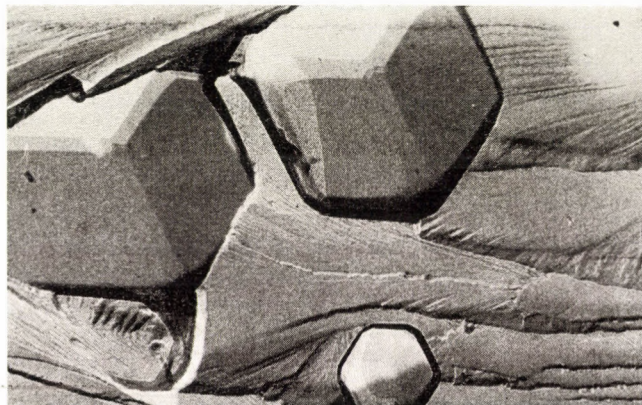


Bild 3. Bruchfläche eines gesinterten GK-Stabes, elektronenoptisch 18 000fach vergrößert. Im großkristallinen Gefüge sind unveränderte Metallpulverkörnchen sichtbar

körnchen und auch mit dem Großkristall einen Winkel bilden, der beim Kristallwachstum ungünstig ist.

MINORU OZASA [10] berichtet darüber, daß ein Zusammenhang von Al_2O_3 -Zusatz und Porenzahl im Sinterstab besteht. Nach meiner Meinung handelt es sich hierbei nicht nur um Poren. Photo 9 des genannten Verfassers zeigt ziemlich gut sichtbar die Umrißformen von Rhombdodekaedern, die der Verfasser für Poren hält.

*

Wir sind P. TURY und TH. MILLNER, die unsere Arbeit mit ihren Erfahrungen unterstützt haben, zu Dank verpflichtet.

SCHRIFTTUM

1. BECK, P. A.—HOLZWORTH M. L.—SPERRY, P. B.: *Trans. AIME* **180** (1949), 163.
2. MILLNER, T.—TURY, P.: Ung. Pat. 106. 268; USA Pat. 2,012.835.
3. TURY, P.: Wolframfabrikation. Mémök Továbbképző Intézet (Institut für Ingenieur-Fortbildung). Budapest 1944, **26/42**, 63, 64, 68.
4. MILLNER, T.: *Acta Techn. Hung.* **27** (1957), 67.
5. MEIJERING, J. L.—RIECK, G. D.: *Philips Techn. Rev.* **19** (1957), 115.

6. RIECK, G. D.: *Acta Met.* **9** (1961), 825.
7. MILLNER, TH.—PROHÁSZKA, J.—NEUGEBAUER, J.: Festkörperphysik. Arbeitstagung in Balatonfüred 1959. Akademie-Verlag, Berlin 1961; 219—226.
8. MANNERKOSKI, M.: *Acta Met.* **10** (1962), 982.
9. NEUGEBAUER, J.—IMRE, L.—MILLNER, TH.: Festkörperphysik. Arbeitstagung in Balatonfüred 1959. Akademie-Verlag, Berlin 1961, 227.
10. MINORU OZASA: *Journ. of Jap. Soc. of Powder Met.* **6** (1959), 213—222.

THE GROWING OF CRYSTALS OUT OF METALPOWDER GRAINS IN THE SINTERING PROCESS OF TUNGSTEN RODS

J. NEUGEBAUER, T. SIMON and J. TREMMEL

SUMMARY

By sintering a tungsten rod, from the powder particles first little crystallites grow, the diameter of which corresponds approx. to three times that of the metal powder particles. These crystallites don't grow further in tungsten species of GK like character (K, Si, Al-dope), but build great crystals by union. In the other, not GK-like tungsten species, the crystallites grow equiaxial. Some particles of the metal powder remains intact through the whole sintering process. It is supposed that the growing of crystals in GK-like tungsten is determined by the walls of the crystallites and not by the crystallites themselves.

CRISTALLISATION A PARTIR DE GRAINS DE POUDRES MÉTALLIQUES PENDANT LE FRITAGE DES BARRES DE TUNGSTÈNE

J. NEUGEBAUER, T. SIMON et J. TREMMEL

RÉSUMÉ

Au frittage des barres de tungstène, il se produit d'abord des cristallites dont le diamètre équivaut à la grosseur de trois grains de poudre métallique environ. Chez les tungstènes de type GK (avec addition de K, Si et Al) on ne constate pas l'accroissement des cristallites, qui se réunissent en formant de gros cristaux. Chez les tungstènes purs ou différant du type GK, l'accroissement des cristallites est équiaxial. Certains grains de poudres métalliques restent inchangés lors de la formation des cristallites et des gros cristaux. L'auteur suppose que dans les barres de tungstène de type GK (avec addition de K, Si, Al), la cristallisation est déterminée non par les cristallites, mais par les parois de celles-ci.

ОБРАЗОВАНИЕ КРИСТАЛЛОВ ИЗ ЗЕРЕН МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПОРОШКА ПРИ СПЕКАНИИ ВОЛЬФРАМОВЫХ ПРУТКОВ

Й. НЕЙГЕБАУЭР, Т. ШИМОН и Й. ТРЕММЕЛ

РЕЗЮМЕ

При спекании вольфрамовых прутков в первую очередь образуются такие кристаллиты, размер которых соответствует размеру трех зерен металлического порошка. В случае вольфрамов GK (с добавками K, Si, Al) их рост не наблюдается, а происходит объединение большого числа кристаллитов в крупные кристаллы. У чистых вольфрамов, не носящих характера GK, рост кристаллитов происходит эквиаксиально. Некоторые зерна металлического порошка при образовании кристаллита и макрокристалла остаются неизменными. Можно предположить, что в прутках вольфрама характера GK (т. е. с добавками K, Si, Al) рост кристаллов определяется не кристаллитами, а их «стенками».

HISTORICAL DATA CONCERNING THE DEVELOPMENT OF GEAR WHEELS BEFORE THE WORLD WAR I*

E. VIDÉKY

D. ENG. SC.

During the first years of the XIXth century, the gear wheel was hardly better known in the world than by the Egyptians or the Chinese some thousands of years ago. Even the brilliant concepts of LEONARDO DA VINCI did not prove to be effective in machinery. On the other hand a sensation was created in the watchmaker's art and particularly in Hungary where Márton SZONTÁGH of Igló, a jack-of-all-trades constructed the world-known church-clock in the town of Rozsnyó.

Hence, the clock of Rozsnyó should be a Hungarian priority! It is true that in Überlingen, a famous church-clock had already existed in 1540, and the epoch of ARCHIMEDES and others were already acquainted with lifting gears — but these have remained the concepts and are not to be considered as practical results.

In course of time, no doubt, already in 1893 Hungary left foreign countries behind; De LAVAL worked with a 30 000 r. p. m. herringbone gear drive mechanism. But in our country there appeared some new constructions, too. A huge bevel gear planer in the *Ganz Works* in Buda is to be remembered by means of which bevel gears were cut for the revolving bed plates of locomotives. This machine-tool was constructed in the days of Director GULDEN and was transferred to the Wagon Works in Kőbánya. I was myself working on it several times, but what became its destiny is not known. My colleague József KONDOROSSY who was engaged in the *Ganz Works* at that time also remembers this tool. There was, besides, a generative bevel gear planer constructed on the basis of the latest principles and working in the *Armaments Factory* which is described in the book "Gear Cutting Machinery" by the American Ralph FLANDERS and which has some resemblance to the Gleason type American machine.

* This is an abstract of the manuscript dated 27th April, 1959 of Prof. D. Eng. Emil VIDÉKY who passed away in the autumn of 1960. The original in Hungarian is guarded by the Group for Recording and Collecting Technical Relics of the Ministry of Education (Budapest IX., Kinizsi u. 39). It was Eng. Béla SZŐKE who called the attention to this manuscript which contains interesting historical data concerning the development of the correct constructional principles of gear wheels, but also to the internationally acknowledged priority of author in pointing out these constructional principles. The Editor

Looking backwards, I well remember another priority-like task I had to solve while assistant at the Budapest Technical University. The gears of tramways in Miskolc and Pozsony deteriorated at a dangerous rapidity and the managers consulted Professor CSERHÁTI of the Technical University who left this problem to me to solve. The gears were the production of the Ganz Wagon Works where the engineer in charge, Mr. SOMMER, directed the works. Whilst working in the drawing class, I discussed with my students deeply and with particular interest the construction of tooth diagrams and realised the limiting necessity of involute gears, called at the time release, impact (later on interference, i.e. undercut). This problem had not yet been published anywhere, I only found from the Reinecker Works catalogues that their machines were not able to cut gears below a certain tooth number. After careful considerations I advised Mr. SOMMER to turn with great care 1,5 mm of the tip circle of the gear tooth belonging to the tramway drive, and to round off the edges of the tooth by means of a blunt file by a further 0,5 mm. The result was startling. The life of tramway gears became more than doubled, that of pinions more than 50-fold.

Whilst continuing to study this problem, I developed the kinematics of undercut and, in connection herewith, the still permissible limit of line pressure with the Hertz equations for stress. All this has been published in the *Z. d. V. Östr. Ing. u. Arch.* in 1908; by this, foreign countries were made to acknowledge my priority in this field.

When I was undergraduate at the Budapest Technical University, just before the turn of the century, the professor of the Chair of Mechanical Units was Mr. Emil ASBÓTH who had left for Riga in his youth and had there obtained his diploma of mechanical engineer. He had an excellent practical sense and great experience and was later invited to be General Manager of the Ganz Works. He talked Hungarian imperfectly and used funny expressions, having almost entirely forgotten his mother tongue.... But I learnt from him Releaux'tooth diagram construction excellently.

The place of professor Emil ASBÓTH was filled by Emil SCHIMANEK who came at the University from the Ganz Works and whose assistant professor I became in 1901, leaving the Locomotive Department of the MÁVAG factory; where I could thoroughly acquire the knowledge of industrial drawing, an important and useful knowledge, from Hubert DVORZSÁK, my severe, but fair chief. Professor SCHIMANEK laid a great stress on theoretical knowledge which again was very useful to me. From among my pupils it was Theodor von KÁRMÁN who later became my assistant and distinguished himself in mathematics. It was he who first called my attention to the study of Hertz stresses which lead to significant results in my researches with gears, and with which I could obtain for my country the priority acknowledged abroad.

The *Ganz Works* started to produce in series cars called *ÁRPÁD* which became spread all over the world, first of all because of the superiority of the Jendrassik motors, but also because of the high quality of transmission gears which hardly ever wore out. These first gears came from Zurich- but the following gears were already produced by the Hungaria method. It was at this time that we prepared the detailed Δ inverse table; my collaborator Mr. POLGÁR gave great assistance in calculations, — a computation required considerably less time with this table than with the computing method called Maag. log. A. The MAAG-gears were already produced at home by means of industrial MAAG-planers. The tooth-cutting machine park had also greatly developed. The Reinecker, Pfauter, Sunderland, Gleason and different MAAG machines enlarged the gear production to a considerable number; even part of rack-shaped cutters was manufactured at home; earliest was the production of Sunderland cutters for grinding-mill gears cast according to patterns. New gear works grew, the small factory of DRABEK was already furnished with a MAAG-machine, the Hungarian Gear Factory *Serényi & Weisz Albin* possessed large equipments, — the Hofherr & Schrantz Works disposed of a Heidenreich-Harbeck bevel gear planer and other up-to-date machines. There was even a time when I myself (earlier, at the very beginning of progress) established a small tooth-cutting shop called *Orthodont*, but lacking any commercial sense, my small invested capital soon melt away and I was bound to give it up, whereas WEISZ Albin, for instance, who during the war worked with me in a military car-repair shop and learnt much from me, succeeded in developing his business into a gigantic concern where he allowed me, out of gratitude, to carry out numerous expensive experiments.

Once, during my researches on the different causes of tooth profile deterioration and pitting, at the station Glion of the Rocher de Nay rack railway near Montreux I detected a rather interesting kind of pitting on the tooth profiles of the cheek, the origin of which could not be understood otherwise than by a voltaic arc induced during the contact of tooth when they are separating and some Foucault current is interrupted; here the voltaic arc sparks over the intermediate oil film. I came to the conclusion of this process from the effect of the pitting crater examined microscopically. At the bottom of the crater a small mound developed with a shining tip which obviously resulted from melting. I thought we could make the oil conductive and thus the current would flow through it without any voltaic arc formation. In this manner, pitting could be avoided. This idea was once successfully used in the *GANZ Works* when the Egyptian agent asked for an expert to come over without delay, since the irrigation of the ricefield was in the greatest danger as a consequence of the deterioration of the gears. The director of the *Ganz Works* had me called and instructed me to leave at once, as the plane was ready to start. I remembered the Glion pitting and asked them by cable

first: 1. whether the tooth profile surface was fluffy from standing iron dust (i.e. whether the tooth had become magnetic), 2. whether there was a mound at the bottom of the pitting crater and whether this mound had a shining tip. — The cable was dispatched the answer was positive. As an answer to the above I cabled them to add graphite to the oil. The reply arrived in no time: the pittings had ceased, everything was in order. — This was how I deprived myself of some pleasant weeks in Egypt. By way of compensation, however, I discovered the urgent necessity of making an intense of the problem of lubrication.

By this time, oil congresses were meeting all over the world. I carefully studied a great amount of these reports, particularly those parts which referred to gear lubrication. I realised that by the immense number of revolutions, with the highly important requirements of space and weight reduction, there was only the oil film remaining uninterrupted and sufficiently thick during operation which could make the perfect liquid friction certain the hydrodynamic conditions of which should be determined and effectuated. Nowadays this is understood and accepted by foreign scientists too. My last publication also discussed this problem, whereas I would rather prefer to leave the Hungarian history of gear perfection to my younger contemporaries, who are moving with fresh energy in the scientific jungle of the new world.

DATA ON THE HISTORY OF METALLURGY IN HUNGARY

IX.

RESULTS OF METALLURGICAL RESEARCHES CARRIED OUT ON THE TERRITORY
OF THE VAS COUNTY UNTIL THE END OF 1961*

A. SCHLEICHER

D. ENG. SC.

[Manuscript received October 1, 1962]

I. Preliminaries

As far as we know, the report of Vilmos LIPP from 1875 is the earliest which concerns metallurgy in the archeological literature of Hungary concerning Vas County [1]. From the archeological and also metallurgical point of view, Vas County is most remarkable because of the bronze occurrence in Velemszentvid known by the experts from all over the world and described in full details by the explorers [2]. This, we shall not discuss here, but — regarding its high significance and intending to complete our study — an abstract is given under [2] from a description of the place of occurrence in Velem [14]. It seems worthwhile to mention here that according to one archival date [8], 42 bronze sickles were found in 1841 in the upper forest of Kőszeg, beneath the "Teufels Tisch" (Table of the Devil). Three of these bronze sickles are now to be seen in the National Museum, the others have become mislaid in Kőszeg. At that time, these finds were qualified as remains from the Celts, another proof in addition to the finds of Velemszentvid, that in the prehistoric age this region had a developed metallurgy of bronze. Even the finds of Sághegy are a proof hereof, though this is already outside the territory of Vas County in Veszprém County, but airline distance of 50 km between Velem and Sághegy is no reason not to compare, to a certain degree, the two finds and thus to prove that the settlement of Sághegy has much in common with that of Velem, and is even equal to it concerning its bronze art. [11] The Hungarian bronze finds of Keresztes should be mentioned here, too [12]. Further data are omitted here, since our explorations chiefly regard the opening of traces of iron furnaces.

At the extreme edge of the Western frontier of Hungary before 1918, in that part of Vas County which was annexed to Austria after 1921, several

* Dr. Aladár SCHLEICHER who in the meantime has passed away had had the intention to use the above paper as an introduction to a series of papers discussing excavations in the Vas County. These excavations were initiated by the Metallurgic-Historical Commission of the Ministry of Metallurgy and Machine Industry and Dr. Aladár SCHLEICHER was charged with their control. The excavations are continued by the Metallurgic-Historical Commission and their results will be reported.

The Editor

traces are known pointing to a developed metallurgy of iron in the historical age. On the territory annexed to Austria and mostly belonging to the former Vas County, BARB reports of no less than 27 places of occurrence [3] where traces of metallurgy of iron, with several other finds but chiefly slag crusts, were found dating from greatly different ages, as atuhor and his collaborators stated.

For a better knowledge of the preliminaries, it is necessary to quote word by word one part of the Secretary's Report of LIPP [1]:

"It for long seemed quite unusual that the hilly-downy region of Vashegy, Egyházás and Gyepűfüzes should be so rich in iron slag, though there nothing known is of iron production, mines or foundries and neither nature itself, nor scripts reveal any traces. This enigma is now solved. Last autumn, whilst digging a ditch in the forest of Gyepűfüzes, there appeared at a depth of 2—3 meters, ten round cone-shaped iron furnaces of 1 m height and 1 m base diameter, one beside the other. It seems these furnaces were built separately for each melting and melting could be carried out only around and below the fire, the furnaces having been provided with short legs. Considering the rather primitive form of these furnaces as well as the great number of tumuli lying in the near neighbourhood which had been dug over several times, we became more and more convinced that we had met one of the notable manifestations of the Iron Age — et nomine et omine".

The club report of 1876 [1] anew discusses the finds of Gyepűfüzes: . . . "The region of Vashegy is covered with iron slag here and there forming layers, although the written relics of the historical age do not anywhere mention iron mines, iron production in our County, neither are they found there today . . .".

Consequently, the people living in the Iron Age brought crude-iron from the neighbouring Noricum in Styria and processed it into different household goods and arms found scattered around everywhere. The other consequence is that Vas ("iron") County got its name from its former flourishing iron industry, i.e. already before the Roman Age."

The territory described by LIPP was annexed after World War I — as already mentioned — to Austria, but the very place, namely the region of the Eastern side of the Vashegy, has remained in our country and thus it can be expected that this ground is still hiding metallurgical finds for coming excavations, the description of LIPP being, at the same time, another proof of how important the cooperation of archeologist and metallurgist is for judging finds of this kind. Namely, the report in question contains some erroneous metallurgical conclusions which will be — in the following — corrected and completed to save explorers the trouble of being misled. LIPP, of course, is to be blamed from a distance of nearly 90 years, such an organised cooperation being, in his days, quite inconceivable.

There is from all the data of LIPP first of all, the date concerning the "iron furnaces" i.e. iron-smelting furnaces, which should be corrected. He believes the ten furnaces standing in a row, one beneath the other, are remains of the Iron Age. It should be known, however, that from among the iron furnaces discovered so far, there were furnaces anywhere having a 1 m height and 1 m base diameter, whereas the attribute "round conical" is misleading, giving the impression as if they were rick-shaped furnaces which were not used for iron-smelting, but for ceremonial purposes. But should the attribute "round" concern cylindrical bodies of uniform diameter, the ratio diameter: height is also unusual, the former furnaces of 1 m height having had a diameter of 0.6 to 0.8 m or, on the contrary, a diameter of 1 m involved a greater height; this latter case being rather rare. For these dimensions the data [4] obtained after GILLES give some information. The hypothesis that there really were ceremonial furnaces is supported by LIPP's statement that the furnaces had short legs and were fed by a fire made under them.

This information entirely excludes the assumption that the furnaces in question could have been used for iron-smelting. First, heating carried out from below and practically in the open air, would involve such an immense loss of heat as would not be sufficient at all for melting iron ore, but would be sufficient for pottery baking; the more so since the two furnaces of the ten placed at the ends suffered the greatest heat loss, whereas the temperature of the other eight furnaces, standing one beside the other — probably sheltered e.g. by a ditch — would be less influenced by radiation loss.

It should be mentioned that it is not quite impossible to use furnaces supported by legs in metallurgy AGRICOLA, for instance, expounds in writing as well as in drawings a furnace standing on legs and heated from below. But this furnace was rather canedron-shaped and served to melt mercury ore [5]. In the course of development of the blast furnace in the first quarter of the XIXth century a blast furnace was built in Scotland with open hearth and its shaft placed at a cast-iron curb based on cast-iron supports [6]. But in our days too, there are examples of blast furnaces placed on iron supports, like those in Chile, where in regions shaken by earthquakes the hearth is fixed by thick steel plates, these steel plates being able to resist even an earthquake of 60 cm movement [7]. Nevertheless, two facts ought not be neglected. First, it is out of question that in ancient times they should have built such an iron or, as a matter of fact, steel structure. In the second place, the hearth — for both the above mentioned types of our days — stood on the same level as the ground and iron legs only supported the curb of the blast furnace.

It can be thus concluded that the furnaces of LIPP, to all appearances served the purpose of ceramics, but since he himself mentioned considerable number of slag occurrences as well as numerous tumuli, it must be assumed

that this region was rather populated and the inhabitants were also occupied with iron-melting.

In his second report LIPP expressed his hope of still finding a considerable number of such furnaces in the region of the Vashegy. This hope was not fulfilled until 1937, year of the publication of the work of BARB [3]. This work discusses in all details (see pages 135 to 138) the results of excavations on the Vashegy carried out on behalf of Austria. These excavations nearly everywhere show nothing but slag remains and 4 to 5 cm diameter clay-pipe fractions covered with slag. There were only two places where the presence of a furnace could be assumed.

It is true that today Vashegy itself and the whole district is a part of Austria, nevertheless the excavations of LIPP has been discussed here in all detail, LIPP being a Hungarian archeologist (he was a Premonstrant canon and professor of a grammar school at Szombathely) whose work has rather been forgotten, although it was the first and — disregarding the literature concerning Velemszentvid and other places of bronze occurrence mentioned in the Preliminaries — the only work done on metallurgy as far as Vas County is concerned.

2. Generalities

After these preliminaries and considering the fact that the former Hungarian, now Austrian part of Vas County has produced findings in hreat numbers which proved iron-smelting — as above mentioned — it seemed incredible that the iron producing activity of the ancients should have ceased beyond the new frontier artificially drawn.

This is the reason why the Committee for the History of Metallurgy, under the auspices of the minister of metallurgy and machine industry, decided to explore the territory in question; the results are given in the following, but already here it should be mentioned that the researches of the first year achieved remarkable results.

When the work started, the Committee sent circulars to the executive council of 110 parish councils in Vas County requesting them to give information as to whether in their district were to be found slag or other remains making it probable that there had been iron-smelting in former times.

The circular was answered by only 18 parishes and 5 thereof were positive. The additional results we obtained later on, in spite of this passivity, are mostly due to private persons whose names will be mentioned when rendering account of the results in all details.

Before coming to this point, it is thought necessary to cite all data published in connection with our subject. Some of the better known works of reference are mentioned here, even if they do not contain data of metallurgical interest, in order to save the future explorers from taking troubles in vain.

As first example let us mention the great work of Mátyás BÉL often cited in our previous studies; it gives detailed information on the Hungarian counties, but does not contain any data concerning our subject. SZENTLÉLEKY writes about the town of Szombathely [9]. It seems peculiar that there is no trace of slag tips or other findings which might prove former iron-smelting in the place-name repertory of PESTY from 1864, which of course, embraces the whole Vas County of those days [10]. However, there have been found, — as already mentioned under source [3] — in the territory annexed to Austria a great number of such traces and — as shall be seen — even the present territory of the County has, so far already shown five places of such occurrence. The indifference of the villagers encountered with even today is quite inexplicable; the more so as in the sixties and seventies of the last century, there was not only LIPP in Szombathely, but also Flóris RÓMER, the excellent archeologist in Kőszeg who was as Benedictine professor, and in those days Ferencz PULSZKY, János ÉRDY, Imre HENSZLMANN, etc. also carried out their archeological works of general interest.

NOTES

1. LIPP, V.: Annual Report of the Archeological Club of Vas County, 1875, Szombathely 134. l. The citation taken from a report in 1876 can be found on page 82.
2. MISKE, K.: The Ancient Settlement in Velemszentvid, Wien, 1907. — MOZSOLICS A.: The second discovery of treasure at Velem. *Books of the Dunántúli Szemle* (Transdanubian Review), 8, 1941: Der Goldfund von Velem St. Vid. Ein Beitrag zur Metallkunst der älteren Hallstattzeit, Basel, 1950. — MOZSOLICS: The development of the bronze age in Transdanubia, *Vasi Szemle* (Review of Vas), 1937, pp. 234—241. It is here stated that in the Western Counties of Transdanubia the problems of the bronze age are still quite unsolved, there being, so far, but sparse finds. We cannot take any stand in this definitely archeological problem. — See: Bergbau, Verhüttung und Metallbearbeitungswerkzeuge aus Velem St. Veit. *Wiener Prähistorische Zeitschrift*, 16 (1929) 81—94. — THIRRING [14] p. 65. gives an excellent picture of Velem here outlined because it is difficult to avail oneself of this book, it being long since sold out: "In St. Vid. . . self-made processed bronze was used for their own appliances. The settlement was a dwelling-place, but at the same time a bronze foundry workshop. . . The first occupation occurred in the late neolithic age, but the settlement became particularly significant in the bronze age, i.e. the third occupation; when the Illyrian population which was not related to the first occupants of the neolithic age and the second occupants of the copper age, discovered antimony and copper ores of the mountains and revealed their excellent properties as a substitute for tin. The glorious days of this settlement spread to the first iron age (Hallstatt Age, 1000 to 450), and even to the beginning of the La Tène age (3rd century). . . In the middle La Tène age when the places for bronze foundry had already lost their significance, the activity of this settlement was continued even more successfully as was proved by the coupling needles often found there. (The last prehistorical layer dates back to the late La Tène age and contains coins of Celtic type). The ancient settlement of St. Vid was the marketing place of bronze and finished bronze wares, being thus one of the commercial centres of prehistorical days. The relics found there prove its commercial connections with Bosnia, Istria, Italy, Carinthia, Tirol, Switzerland, Bavaria, Wurtemberg, Silesia, Western Prussia, Mecklenburg, Sweden and the Sarmatian desert. The ancient population of St. Vid themselves probably discovered how to produce antimony bronze; a proof hereof is that there is hardly another settlement in all Europe which could dispose of such a quantity of tools and appliances for bronze founding and processing as just that of St. Vid."

3. BARB, A.: Spuren alter Eisengewinnung in heutigen Burgenland. *Wiener prähistorische Zeitschrift* (1937) 113—157.
4. HEGEDÜS—NOVÁKI: Fresh Data of the Iron Furnace of Vasvár and of the Siderurgical Past of Vasvár. *Vasi Szemle* (Review of Vas) **2**, 1961, Szombathely, 1961, 9—11.
5. AGRICOLA, G.: Zwölf Bücher vom Berg- und Hüttenwesen. Agricola-Gesellschaft beim Deutschen Museum. In Kommission: VDI-Verlag, Berlin, 1928, 373—374. 1. (Illustrated)
6. JOHANNSEN, O.: Geschichte des Eisens, 3. Aufl., Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 1953, 328 (Illustrated).
7. KOCH, A.: Neuartiges Hochofen-Traggerüst. Ref. *Stahl und Eisen*, **75** (1955), 1269. Original: *Blast Furnace* **42** (1954) 778, 934.
8. Political Minutes of the Town of Kőszeg, May 14, 1941, 21st meeting, p. 219, item 629. This finding is mentioned by Vilmos LIPP too, but he wrote of 44 sickles (*Annual Report of Archeological Club of Vas County*, Szombathely, 1873, 59). Ancient buildings antiquities and archives of the town of Kőszeg.
9. SZENTLÉLEKY, T.: History of the Savaria exploration. Discusses the work of BÉL published in 1746 "Adparatus ad historiam Hungariae", *Vasi Szemle* (Review of Vas), **2**, 1958 and *ibid.* tom. 1959. II. pp. 37—57. BÉL gives the Hungarian translation of the Latin text of the chapter concerning Savaria in the book "Hungariae Novae Notitia, Membrum V., Comitatus Castriferrei".
10. PESTY, F.: Unpublished place name directory, tom 58 and 59, 1864, Archive of Manuscripts of the National Library Széchényi, Fol. Hung. 1114.
11. LAZÁR, J.: Bronze Art of the Ancient Settlement of Sághegy. *Dunántúli Szemle* (Transdanubian Review) **10** (1943) 280—297.
12. FLEISSIG, J.: Finding of Magyarkeresztes, *Dunántúli Szemle* (Transdanubian Review), **10** (1943) 288—296. This volume discusses on pp. 262—263 the literary activity of MISKE KÁLMÁN. — The finding of Magyarkeresztes is talked about by MOZSOLICS A: Bronze finding in Magyarkeresztes, Vas County, *Archeologiai Értesítő* (Archeological Report) (1942) 155—161.
13. CHERNEL, K.: Present and Past of the Free Royal Town of Kőszeg. Part 1. Present time. Szombathely, 1877. SAILER Henrik, p. 63.
14. THIRRING, G.: Detailed Guide of Kőszeg and Surroundings. Budapest, 1928, Publ. by "Turistaság és Alpinizmus", p. 56.
15. LELKES, I.: Kőszeg, Publishers "Képzőművészeti Alap", Budapest, 1960, p. 7.

BERECHNUNGEN DES WALZDRUCKES UND WALZMOMENTES BEI FEINWALZSTRASSEN

33. MITTEILUNG DER ARBEITSGEMEINSCHAFT FÜR HÜTTENWESEN
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

M. VOITH

LEHRSTUHL FÜR HÜTTENMASCHINENBAU, TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DER SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 13. Mai 1963]

Diese Arbeit will eine einfache Methode zur Berechnung der Walzparameter (Q ; P ; M) vermitteln, dabei wird eine neue Methode zur Berechnung der Abhängigkeit der Verformungsfestigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit angegeben

$$k_f = k_{f0} (1 + 0,05 \cdot \dot{\varphi}) \text{ [kg/mm}^2\text{]},$$

wo

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta h_{\text{Durchschn.}}}{h_{\text{Durchschn.}}} \cdot \frac{v}{l_d \text{ Durchschn.}} \text{ [sec}^{-1}\text{]}.$$

ist.

I. Einführung

Beim Walzen von Profilstählen muß der Geleji'schen Theorie entsprechend sowohl das einlaufende, als auch das auslaufende Profil quadriert werden, es ist aber nicht genau bestimmt, wie z. B. dieses Quadrieren auf die Breite angewendet werden muß bzw. wie der Einspannbogen und damit die gedrückte Oberfläche berechnet wird. Der Zweck dieser Arbeit ist, die nötigen Parameter genauer anzugeben. Damit kann man einesteils die Berührungsf lächen des Werkstückes an Stelle geometrischer Konzeption auch durch Berechnungen genügend genau bestimmen und außerdem kann man die Verformungsfestigkeit als Funktion der Verformungsgeschwindigkeit berücksichtigen.

Bei der Ausarbeitung der Berechnungsmethoden hat der Verfasser die diesbezüglichen Versuchsmessungen des Lehrstuhls für Hüttenmaschinenbau und die von G. ZOUHAR [1] veröffentlichten Meßergebnisse benutzt. Im ersten Fall betrug das Endmaß des Walzstückes 8 mm Durchmesser, während es im zweiten Fall quadratischen Querschnitt mit 6,6 mm Kantenlänge hatte.

II. Bestimmung der gedrückten Oberfläche

Beim Walzen quadratischer Stücke kann die gedrückte Oberfläche einfach aus dem Zusammenhang

$$Q = l_d \cdot b_k \text{ [mm}^2\text{]}$$

berechnet werden [2], wo

$$l_d = \sqrt{R \cdot \Delta h} \quad [\text{mm}]$$

der gedrückte Bogen und

$$b_k = \frac{b_1 + b_2}{2} \quad [\text{mm}]$$

die mittlere Breite des Stückes im Walzspalt ist.

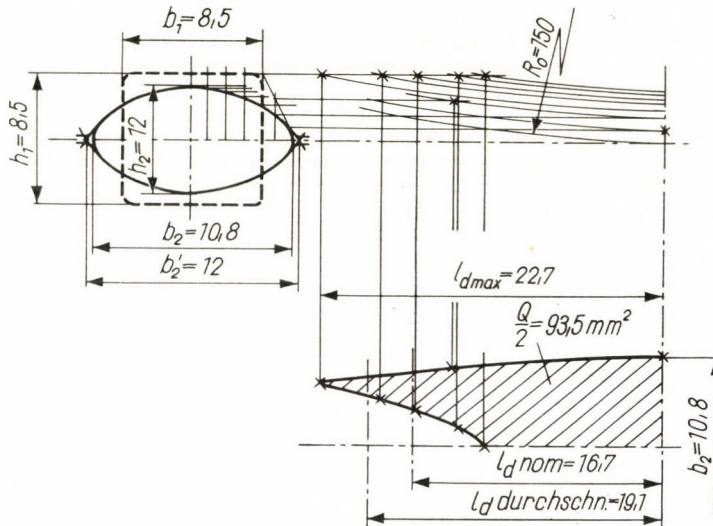


Bild 1

Der Wert von h_2 ist richtig 6,6.

Auch beim Profilwalzen wäre die Anwendung dieser einfachen Formel wünschenswert. Aus Gründen der Genauigkeit müssen aber gegenwärtig die gedrückten Flächen mit Hilfe von Planimetriern bestimmt werden, was jedoch, wie Bild 1 zeigt, schwierig und langwierig ist, und es ist deshalb zweckmäßig, die folgende Berechnungsmethode anzuwenden (Bezeichnungen nach Bild 2).

Das Profil stimmt mit dem Querschnitt des Hohlraumes nicht ganz überein (damit sich kein Grat bildet). Deshalb muß zuerst das wirkliche Profil des Walzstückes bestimmt werden, was mit Hilfe der Hohlraumzeichnung durch Planimetriern erfolgt.

Würde man die Quadratur mit Hilfe der wirklichen Breite b durchführen, so würde man mit dem Ausdruck

$$h_k = \frac{f}{b}$$

und bei Berücksichtigung der Höhenverringerung die durchschnittliche Höhe

des ein- und auslaufenden Stückes bestimmen; dies bedeutet aber eine starke Abweichung von dem durch Messen bestimmten Wert. Dies ist verständlich, weil die Breite überhaupt nicht beachtet werden konnte. Man kann die wirklichen Verhältnisse viel besser annähern, wenn bei der Quadratur und für das einlaufende wie für das auslaufende Profil die mittlere Breite benutzt wird, die durch dem Ausdruck

$$b_k = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

gegeben ist.

Im Zuge der Berechnung muß aber darauf geachtet werden, daß das Stück vor jedem Hohlraum um 90° verdreht wird.

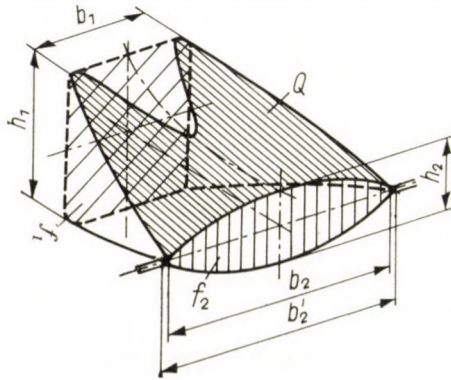


Bild 2

Der Berechnungsgang wird in den Tafeln I und II bekanntgegeben. Mittlere Höhe des quadrierten Profils:

$$h_{k1} = \frac{f_1}{b_k},$$

$$h_{k2} = \frac{f_2}{b_k}.$$

Mittlere Höhenverringeringung:

$$\Delta h_{\text{nom}} = h_{k1} - h_{k2}.$$

Mittlerer aktiver Walzendurchmesser:

$$D_{\text{nom}} = D_0 - \Delta h_{\text{nom}}.$$

Würde man die gedrückte Fläche mit der Formel

$$l_{\text{dnom}} = \sqrt{\frac{D_{\text{nom}}}{2} \cdot \Delta h_{\text{nom}}}$$

bestimmen, so bekäme man kein richtiges Ergebnis, weil die verschiedenen Durchmesser nicht auf einmal an das Werkstück gelangen (aus Bild 1 gut zu ersehen).

Aus den zeichnerischen Bestimmungen ist zu ersehen, daß der gedrückte Bogen annähernd

$$l_{d\text{Durchschn.}} = \frac{l_{d\text{nom}} + l_{d\text{max}}}{2}$$

ist, wo $l_{d\text{max}}$ der größte zu (Δh_{max}) Höhenverringering gehörende gedrückte Bogen ist:

$$l_{d\text{max}} = \sqrt{\frac{D_{\text{min}}}{2} \cdot \Delta h_{\text{max}}},$$

wobei

$$\Delta h_{\text{max}} = h_1 - h_2$$

und

$$D_{\text{min}} = D_0 - \Delta h_{\text{max}}.$$

Die wirkliche gedrückte Oberfläche kann also aus dem Zusammenhang

$$Q = l_{d\text{Durchschn.}} \cdot b_2 \quad [\text{mm}^2]$$

errechnet werden.

Der Q -Wert des fertigen Drahtes von 8 mm Durchmesser, der mit Hilfe des Viereck-Oval-Blockplanes bestimmt wurde, weicht nur wenig von dem zeichnerisch bestimmten Wert ab (Tafel I und Bild 3). Auch bei dem Vierkantstahl von 6,6 mm Kantenlänge bekommt man zwischen berechneter und gemessener gedrückter Oberfläche gute Übereinstimmung (Tafel II und Bild 4). Im letzteren Fall wurde die Messung so durchgeführt, daß das Walzwerk während der Arbeit abgestellt und das freigelegte Stück fotografiert wurde (Bild 5 und 6). Die gedrückte Oberfläche kann dann auf dem Lichtbild planimetriert werden.

Auf Grund der Versuchswerte schlägt G. ZOUHAR eine Formel zur Berechnung der gedrückten Oberfläche vor. Wird ein Vierkant oval gewalzt (Bild 7), so ist

$$Q = K \left[b_1 y l_d + \frac{1}{2} (x b_0 + b_1) \cdot l_d (1 - y) \right],$$

wird aber ein Oval quadratisch gewalzt (Bild 8), so ist

$$Q = b_1 y l_d + \frac{1}{2} (b_0 + b_1) l_d \cdot (1 - y).$$

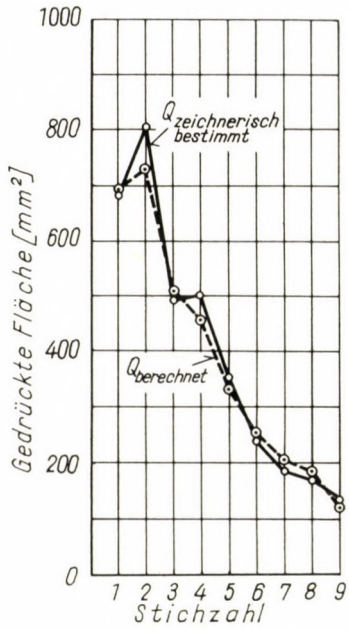


Bild 3

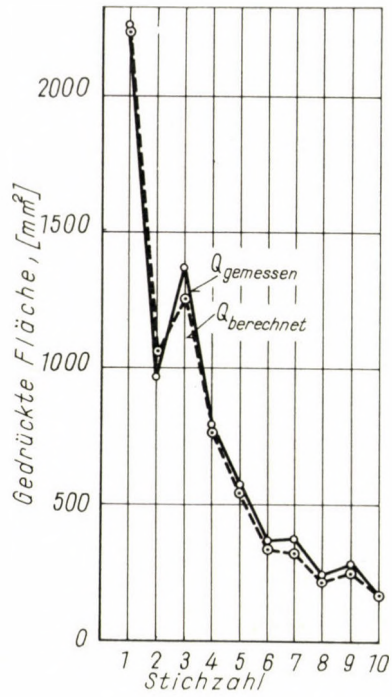


Bild 4

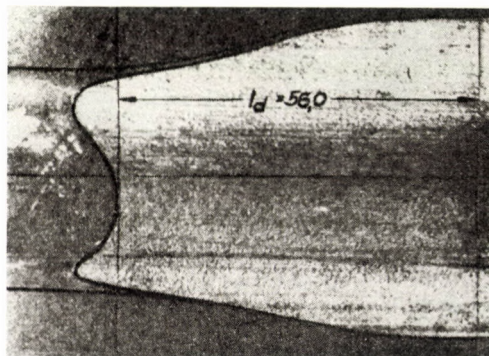


Bild 5

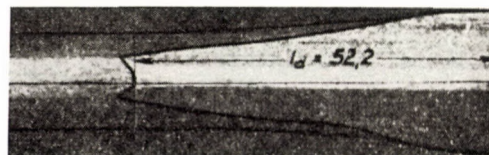


Bild 6

Tafel II

Blockplan des zeichnerisch bestimmten Profils von 6,6 mm Kantenlänge und Berechnung der gedrückten Fläche

Zeichen der Walze	Stichzahl	Profilform	Hohlraumabmessung		Stückmaße								Walzendurchmesser			Gedrückter Bogen			Gedrückte Fläche		Abweichung
			b'	$h' = h$	f	b	$h_k = f/b$	$b_k = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$	$h_{k1} = f_1/b_k$	$h_{k2} = f_2/b_k$	$\Delta h_{nom} = h_{k1} - h_{k2}$	$\Delta h_{max} = h_1 - h_2$	D_0	$D_{nom} = D_0 - \Delta h_{nom}$	$D_{min} = D_0 - \Delta h_{max}$	l_{dnom}	l_{dmax}	$l_{dDurchschn.} = \frac{1}{3}(l_{dnom} + l_{dmax})$	Q (berechnet)	Q (gemessen)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	0		44	44	854	40	21,3														
I	1		46,3	14,8	485	42	11,5	36,5	23,4	13,3	10,1	16,3	445	434,9	428,7	47,0	59,0	53,0	2225	2340	-4,9
I	2		34,4	34,4	376	30,5	12,3	22,6	21,4	16,6	4,8	7,6	445	440,2	437,4	32,4	40,5	36,4	1050	964	+8,9
I	3		36,2	10,2	273	32,0	8,5	28,1	13,3	9,7	3,6	14,1	445	441,4	430,9	28,2	55,0	39,1	1250	1362	-8,2
I	4		22,2	22,2	218	20,5	10,6	15,3	17,8	14,2	3,6	9,8	445	441,4	435,2	28,2	46,1	37,1	760	692	+9,8
II	5		23,1	10,5	159	21,0	7,6	18,0	12,1	8,8	3,3	4,5	360	356,7	355,5	24,3	28,2	26,2	550	579	-5,0
II	6		16,2	16,2	130	14,0	9,3	12,2	13,0	10,7	2,3	4,8	360	357,7	355,2	20,2	29,4	24,8	347	372	-6,7
III	7		17,6	7,4	97	15,5	6,3	13,5	9,6	7,2	2,4	4,1	280	277,6	275,9	18,2	23,8	21,0	326	377	-13,5
III	8		12,6	12,6	78	11,0	7,1	9,2	10,5	8,5	2,0	5,0	280	278	275	16,8	26,2	21,5	237	245	-3,3
III	9		15,1	5,2	52	13,0	4,0	11,0	7,1	4,7	2,4	3,7	280	277,6	276,3	18,3	22,7	20,5	266	288	-7,6
III	10		9,3	9,3	45	9,3	4,8	7,2	7,25	6,25	1,0	3,7	280	279	276,3	11,9	22,7	17,3	161	162	-0,6

Die in nachstehenden Formeln angewendeten Bezeichnungen entsprechen denen der Bilder 5 und 8. Außerdem ist hier

$$l_d = \sqrt{R \cdot (h_0 - h_1)}$$

und y sowie K sind Konstanten, die experimentell bestimmt werden [3].

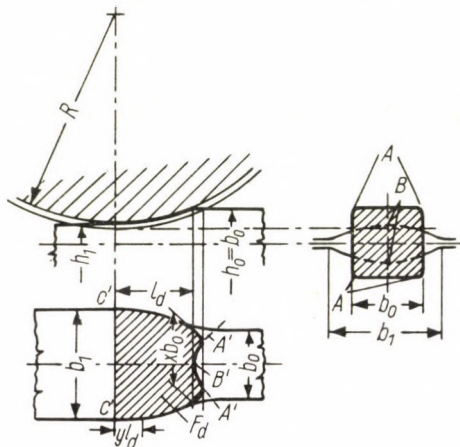


Bild 7

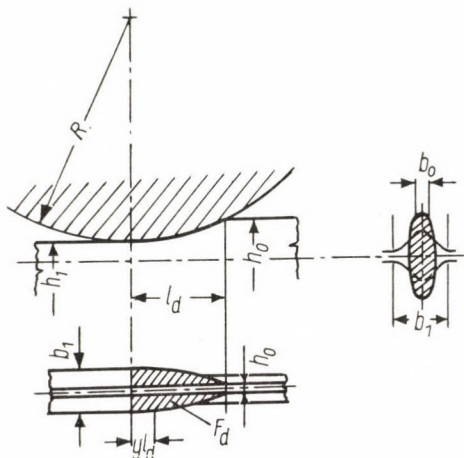


Bild 8

Vorstehende Zusammenhänge sind recht kompliziert und außerdem sind sie bei den einzelnen Profilen unterschiedlich geartet. Auch die Versuchskonstanten hängen vom gewalzten Profil ab, und ihre Bestimmung ist nur durch Messung möglich.

Hingegen hat der Ausdruck

$$Q = l_{d\text{Durchschn.}} \cdot b_2$$

allgemeine Gültigkeit und für seine Anwendung sind Versuchsdaten nicht nötig.

III. Bestimmung des auftretenden Walzdruckes

Bei der Berechnung des Walzdruckes wurden für den Blockplan des Vierkantstahles mit 6,6 mm Kantenlänge zwei verschiedene Methoden zum Vergleich benutzt.

Die durch Berechnung gewonnenen Walzdrücke werden in beiden Fällen mit den gemessenen Werten verglichen.

IV. Bestimmung des Walzdruckes mit der Geleji'schen Theorie

Nach Geleji's Theorie ist die Größe des auftretenden Walzdruckes [2]:

$$P = k_k \cdot b \cdot l_d.$$

Weil das Produkt $(b \cdot l_d)$ beim Walzen viereckiger Stücke die gedrückte Oberfläche gibt

$$P = k_k \cdot Q$$

und da

$$k_k = k_f \cdot \left(1 + C\mu \cdot \frac{l_d}{h_k} \cdot \sqrt[4]{v} \right),$$

$$\mu = 0,94 - 0,056 \cdot v - 0,0005 \cdot t,$$

$$v = \text{Walzgeschwindigkeit [m/sec].}$$

ist, sind die Umlaufgeschwindigkeiten der Walzen (v) in jedem Fall gleich.

Hier seien einige Bemerkungen gemacht. Beim Profilwalzen ist

$$\frac{l_d}{h_k} = \frac{l_{d\text{Durchschn.}}}{h_{\text{Durchschn.}}}$$

und

$$h_{\text{Durchschn.}} = \frac{h_{k1} + h_{k2}}{2},$$

wenn die vorstehenden Bezeichnungen auch hier angewendet werden.

Die Konstante C ist gleichfalls eine Funktion von [4]

$$(l_{d\text{Durchschn.}}/h_{\text{Durchschn.}}).$$

Die Verformungsfestigkeit ist eine Funktion mit vier Veränderlichen:

$$k_f = f(t; \varphi; \dot{\varphi}; \text{Materialbeschaffenheit}),$$

wo

t [°C] die Temperatur der Verformung,

φ die Größe der Verformung und

$\dot{\varphi}$ [sec⁻¹] die Geschwindigkeit der Verformung bedeutet.

Steht beim Warmwalzen zur Rekristallisation Zeit zur Verfügung, so kann die Wirkung von φ vernachlässigt werden. Dann ist

$$k_f = f(t; \dot{\varphi}; \text{Materialbeschaffenheit}).$$

Die Wirkung der Verformungsgeschwindigkeit kann wie folgt berücksichtigt werden [5]:

$$k_f = k_{f0} \cdot \dot{\varphi}^n.$$

Hier ist k_f die Verformungsfestigkeit, die zu einer gegebenen Verformungsgeschwindigkeit gehört, während k_{f0} jene Verformungsfestigkeit ist, die zu derselben Verformung gehört, wobei die Verformungsgeschwindigkeit der Einheit entspricht. $\dot{\varphi}$ bedeutet die Verformungsgeschwindigkeit. Der Exponent n hängt von der Temperatur, von der Materialbeschaffenheit und von der Größe der Verformung ab.

Die Verformungsgeschwindigkeit ist beim Walzen

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta h}{h_k} \cdot \frac{v}{l_d} [\text{sec}^{-1}],$$

und beim Profilwalzen:

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta h_{\text{Durchschn.}}}{h_{\text{Durchschn.}}} \cdot \frac{v}{l_{d\text{Durchschn.}}} [\text{sec}^{-1}],$$

$$\Delta h_{\text{Durchschn.}} = \frac{1}{2} (\Delta h_{\text{max}} + \Delta h_{\text{nom}}) [\text{mm}],$$

$$v = \text{Walzgeschwindigkeit} [\text{mm/sec}].$$

Weil der Exponent n unsicher und schwer bestimmbar ist, nähert man die Änderung der Verformungsfestigkeit innerhalb kleiner Bereiche mit Geraden an.

Beim Schmieden [6] ist

$$k_f = k_{f0} \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \frac{v}{h} \right) = k_{f0} \cdot (1 + c \cdot \dot{\varphi}).$$

Analog dazu beim Walzen ist

$$k_f = k_{f0} \cdot (1 + c' \cdot \dot{\varphi}),$$

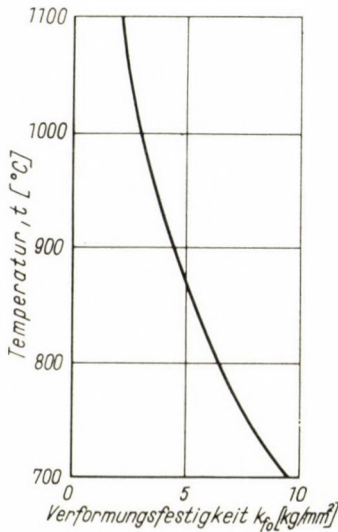


Bild 9

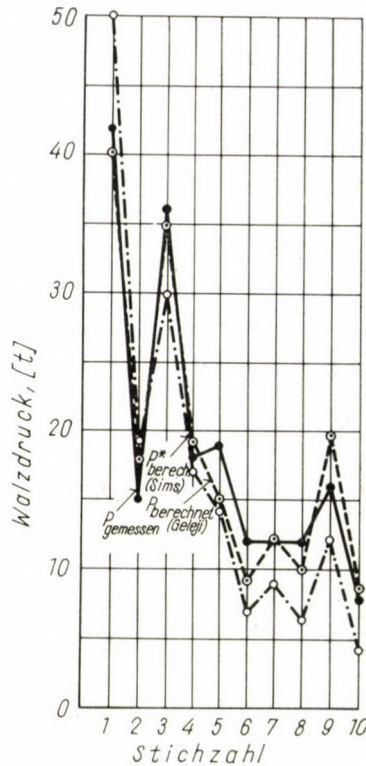


Bild 10

wo nach Versuchen an Feinwalzstraßen $c' = 0,05$. So ist:

$$k_f = k_{f0} \cdot (1 + 0,05 \cdot \dot{\varphi}) =$$

$$= \left(k_{f0} \cdot \left(1 + 0,05 \frac{\Delta h_{\text{Durchschn.}}}{h_{\text{Durchschn.}}} \cdot \frac{v}{l_{d\text{Durchschn.}}} \right) \right) \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \right].$$

Die Abhängigkeit der Verformungsfestigkeit von der Temperatur und der Materialbeschaffenheit wird im Bild 9 veranschaulicht [7]. Die Materialbeschaffenheit ist Mst 3b, bei welchem die kalte Zugfestigkeit $\sigma_B = 40 \text{ kg/mm}^2$ beträgt.

Mit Hilfe des nach dem obigen bestimmten Verformungswiderstandes wurde der Walzdruck berechnet, in Tafel III zusammengefaßt und mit den gemessenen Werten des Bildes 10 verglichen. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung recht gut.

Tafel III

Berechnung des Walzdruckes nach dem Gelejschen Prinzip

Zeichen der Walze	Stichzahl	$h_{\text{Durchschn.}} = h_{k_1} + h_{k_2} / 2$	$l_d \text{ Durchschn.} / h \text{ Durchschn.}$	C	t	μ	$1 + C\mu \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{v}}$	$\frac{\Delta h_{\text{Durchschn.}}}{=} = \frac{1}{2}(\Delta h_{\text{max}} + \Delta h_{\text{nom}})$	$\frac{\Delta h \text{ Durchschn.}}{h \text{ Durchschn.}}$	$\dot{\varphi} = \frac{\Delta h_{\text{Durchschn.}}}{h_{\text{Durchschn.}}} \cdot \frac{1}{v} / l_d \text{ Durchschn.}$	$1 + 0,05 \dot{\varphi}$	k_{j_0}	$k_k = k_{j_0} (1 + 0,05 \dot{\varphi})$	k_k	$P_{\text{berechnet}}$	P_{gemessen}
		mm						mm		sec ⁻¹		kg/mm ²			kg/mm ²	kg/mm ²
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	0															
I	1	18,0	2,94	2,1	1040	0,34	3,34	13,0	0,72	20,0	2,0	2,7	5,4	18,1	40,2	42
I	2	18,0	2,02	2,9	996	0,36	3,23	6,2	0,345	14,2	1,71	3,1	5,3	17,1	17,9	15
I	3	11,5	3,4	1,9	1000	0,36	3,57	9,0	0,78	30,0	2,5	3,1	7,8	27,8	35,0	36
I	4	16,0	2,32	2,6	953	0,38	3,55	7,2	0,45	18,2	1,92	3,7	7,1	25,2	19,1	18
II	5	10,45	2,5	2,4	970	0,37	3,56	3,9	0,373	21,3	2,16	3,5	7,6	27,0	15,0	19
II	6	11,85	2,1	2,8	938	0,39	3,55	3,55	0,299	18,1	1,905	3,9	7,44	26,4	9,2	12
III	7	8,4	2,5	2,4	916	0,40	3,67	3,25	0,387	26,7	2,38	4,2	10,0	36,7	12,0	12
III	8	9,5	2,26	2,6	874	0,42	3,77	3,5	0,368	25,6	2,28	4,9	11,2	42,1	10,0	12
III	9	5,9	3,47	1,85	809	0,46	4,27	3,05	0,517	37,7	2,88	6,1	17,5	74,8	19,8	16
III	10	6,75	2,56	2,3	850	0,44	4,02	2,35	0,348	30,2	2,51	5,3	13,3	53,5	8,6	8

V. Bestimmung des Walzdruckes mit der Sims-Methode

Nach der Methode von Sims ist die Größe des auftretenden Walzdruckes [8], [9]

$$P = k_f^* \cdot \sqrt{R \cdot \Delta h} \cdot b_k \cdot q_P = q_P \cdot k_f^* \cdot Q,$$

wo $b_k \cdot \sqrt{R \cdot \Delta h} = Q$ die gedrückte Oberfläche;

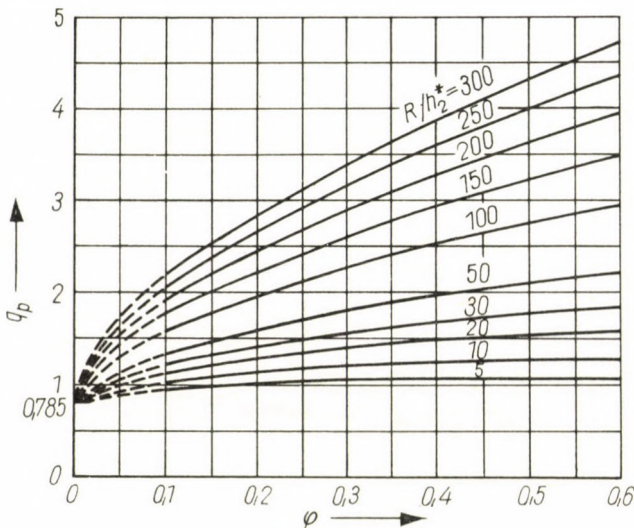


Bild 11

$$q_P = f \left(\frac{R_{nom}}{h_{2nom}^*}; \varphi \right) \text{ Funktion mit zwei Veränderlichen,}$$

$$\varphi = \frac{\Delta h_{Durchschn.}}{h_{1nom}^*};$$

$k_f^* = f^* (\varphi; t; \dot{\varphi}^*; \text{Materialbeschaffenheit})$ Funktion mit vier Veränderlichen bedeutet. Die Werte der Funktionen q_P und k_f sind im erwähnten Schrifttum in ein Nomogrammsystem zusammengefaßt. Das Nomogramm für q_P ist im Bild 11 zu sehen.

Die Mengen, die im vorigen Abschnitt mit demselben Buchstaben bezeichnet wurden, aber zahlenmäßig unterschiedliche Werte haben, wurden im zweiten Fall mit einem Stern bezeichnet. Man sieht z. B. einen Unterschied im Zahlenwert für die Verformungsfestigkeit, weil nach der Simsschen Methode die Verformungsgeschwindigkeit aus der logarithmischen Verformung bestimmt werden muß:

$$\dot{\varphi}^* = \frac{v}{l_{dDurchschn.}} \quad \varphi^* = \frac{v}{l_{dDurchschn.}} \cdot \ln \frac{h_{k1}}{h_{k2}} [\text{sec}^{-1}].$$

Der bedeutende Unterschied zwischen der Gelejschen und Simsschen Methode besteht in der Art der Bestimmung des mittleren Verformungswiderstandes k_k , der nach Sims

$$k_k^* = k_f^* \cdot q_P [\text{kg/mm}^2]$$

ist.

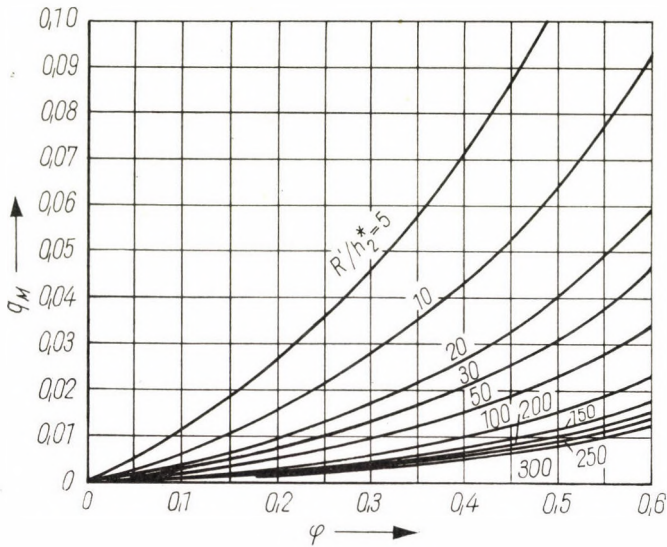


Bild 12

Der Gang der Berechnung kann aus der Tafel IV ersehen werden; die Resultate sind aber in das Bild 10 eingezeichnet.

Es kann festgestellt werden, daß die nach der Gelejschen Methode errechneten Werte die gemessenen Ergebnisse viel besser annähern und zur Vornahme der Berechnung nicht so viele Hilfsdiagramme nötig sind.

VI. Bestimmung des Verformungsmomentes

Nach der Methode von Geleji ist das Verformungsmoment:

$$\begin{aligned} M &= k_k \cdot F \cdot R = k_k \cdot \Delta h \cdot b \cdot R = \\ &= k_k \cdot b \cdot (\sqrt{\Delta h \cdot R})^2 = (k_k \cdot b \cdot \sqrt{\Delta h \cdot R}) \cdot \sqrt{\Delta h \cdot R} = P \cdot l_{\text{Durchschn.}} \end{aligned}$$

Das gleiche nach der Simsschen Methode:

$$M^* = 2 \cdot R^2 \cdot k_f^* \cdot b_k \cdot q_M,$$

wo

$$q_M = f^* \left(\frac{R_{\text{nom}}}{h_{2 \text{ nom}}^*}; \quad \varphi \right)$$

eine Funktion mit zwei Veränderlichen ist (Bild 12).

Tafel IV
Berechnung des Walzdruckes mit der Simsschen Methode

Zeichen der Walze	Stichzahl	Δh Durchschn. mm	$h_{1k}^* = f_1/b_1$ mm	$\varphi = \Delta h \text{ Durchschn.} / h_{1k}^*$	$h_{2k}^* = f_2/b_2$ mm	$D_{\text{nom}} / 2h_{2k}^*$	qP	h_{k1}/h_{k2}	$\varphi^* = \ln h_{k1}/h_{k2}$	l_d Durchschn. mm	$\dot{\varphi}^* = v/l_d \text{ Durchschn.} \cdot \varphi^*$ sec ⁻¹	t C°	k_j^* kg/mm ²	$Q_{\text{berechnet}}$ mm ²	P^* (berechnet) t	P_{gemessen} t
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	0															
I	1	13,0	31,1	0,42	11,5	19,4	1,50	1,76	0,565	53,0	16,0	1040	15	2225	50,0	42
I	2	6,2	32,8	0,19	12,3	18,0	1,22	1,29	0,254	36,4	10,5	996	15	1050	19,2	15
I	3	9,0	24,3	0,37	8,5	26,2	1,55	1,37	0,314	39,1	12,0	1000	15,5	1250	30,1	36
I	4	7,2	26,8	0,27	10,6	21,0	1,40	1,25	0,223	37,1	9,0	953	16	760	17,0	18
II	5	3,9	15,0	0,26	7,6	23,5	1,40	1,38	0,321	26,2	18,4	970	18,5	550	14,2	19
II	6	3,55	15,1	0,235	9,3	19,3	1,30	1,21	0,191	24,8	11,5	938	15,5	347	7,0	12
III	7	3,25	11,5	0,28	6,3	22,2	1,40	1,33	0,285	21,0	20,4	916	19,5	326	8,9	12
III	8	3,5	13,1	0,267	7,1	19,7	1,32	1,24	0,216	21,5	15,0	874	19,8	237	6,2	12
III	9	3,05	8,9	0,342	4,0	35,0	1,75	1,51	0,411	20,5	30,1	809	26	266	12,1	16
III	10	2,35	10,0	0,235	4,8	29,2	1,42	1,16	0,149	17,3	12,9	850	19	161	4,3	8

Tafel V
Bestimmung des Walzmoments

Zeichen der Walze	Stichzahl	Nach dem Gelejschen Prinzip				Nach der Methode Sims									
		l_d Durchschn.	F berechnet.	M berechnet	M gemessen	k_f^*	$R_{\text{nom}} = D_{\text{nom}}/2$	R_{nom}^2	b_k	q_{ln}	$(D_{\text{nom}}/2)/h_{2k}$	q_M	M_b^* berechnet	M gemessen	
		mm	t	mkg	mkg	kg/mm ²	mm	mm ²	mm				mkg	mkg	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	0														
I	1	53,0	40,2	2130	1704	15	217,4	47 100	36,5	0,565	19,4	0,054	2790	1704	
I	2	36,4	17,9	652	576	15	220,1	48 500	22,6	0,254	18,0	0,014	460	576	
I	3	39,1	35,0	1370	1027	15,5	220,7	48 900	28,1	0,314	26,2	0,016	681	1027	
I	4	37,1	19,1	710	538	16	220,7	48 900	15,3	0,223	21,0	0,010	240	538	
II	5	26,2	15,0	393	493	18,5	178,3	31 900	18,0	0,321	23,5	0,0165	350	493	
II	6	24,8	9,2	228	316	15,5	178,8	31 900	12,2	0,191	19,3	0,0095	114	316	
III	7	21,0	12,0	252	270	19,5	138,8	19 200	13,5	0,285	22,2	0,0150	151	270	
III	8	21,5	10,0	215	245	19,8	139	19 300	9,2	0,216	19,7	0,0105	74	245	
III	9	20,5	19,8	405	283	26	138,8	19 200	11,0	0,411	35,0	0,0205	225	283	
III	10	17,3	8,6	148	144	19	139,5	19 400	7,2	0,149	29,2	0,0050	27	144	

Der Gang der Berechnung ist aus der Tafel V zu ersehen.

Nach dem im Bild 13 gegebenen Diagramm nähert das mit der Geleji-schen Methode errechnete Moment die gemessenen Ergebnisse viel besser an als das nach der Simsschen Methode.

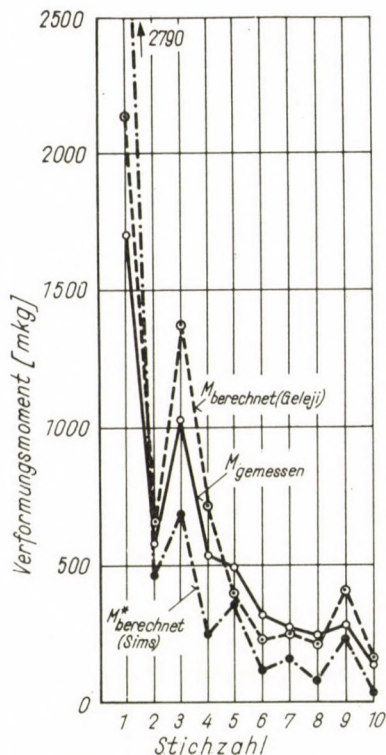


Bild 13

SCHRIFTTUM

1. ZOUHAR, G.: Umformungskräfte beim Walzen in Streckkaliberreihen. *Freiberger Forschungshefte B* 52 (1960), 175.
2. GELEJI, S.: Kohógéptan (Hüttenmaschinenlehre). Tankönyvkiadó, Budapest 1953; 258.
3. ZOUHAR, G.: Detto wie [1], Seite 29–32.
4. GELEJI, S.: Die Berechnung des mittleren Verformungswiderstandes. *Stahl und Eisen* (1957), 931.
5. GELEJI, S.: A nagy alakváltozásokat létrehozó képlékeny fémalakítás mechanikájának továbbfejlesztése (Weiterentwicklung der Mechanik der duktilen Metallbearbeitung durch große Verformungen). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* 17 (1955), 83.
6. GELEJI, S.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademischer Verlag, Berlin 1960, 152.
7. GELEJI, S.: Detto wie [6], S. 90.
8. WEBER, K.: Berechnungsunterlagen zur Ermittlung von Walzkraft und Drehmoment beim Warmwalzen (nach R. B. SIMS). *Freiberger Forschungshefte B* 46 (1959), 10.
9. COOK, P. M.—MC. CRUM, A. W.: The Calculation of Load and Torque in Hot Flat Rolling. BISRA, London 1958.

CALCULATION OF THE ROLLING PRESSURE AND TORQUE
ON SMALL-SECTION ROLL TRAINS

M. VOITH

SUMMARY

Author aims at establishing a simple method for the calculation of the rolling characteristics (Q , P , M) of composite profiles. Amongst others he presents a new method for calculating the dependence of the deformation strength on the speed of deformation

$$k_f = k_{f0} (1 + 0,05 \cdot \dot{\varphi}) \text{ [kg/mm}^2\text{]}$$

where

$$\varphi = \frac{\Delta h_{\text{average}}}{h_{\text{average}}} \cdot \frac{v}{l_d \text{ average}} \text{ [sec}^{-1}\text{].}$$

CALCUL POUR LA DÉTERMINATION DE LA PRESSION ET DU COUPLE
DE LAMINAGE SUR LES TRAINS DE LAMINOIRS FINISSEURS

M. VOITH

RÉSUMÉ

L'étude propose une méthode simple pour la détermination par voie numérique des caractéristiques de laminage des sections profilées (Q ; P ; M). Elle donne également une nouvelle méthode pour le calcul de la relation entre la résistance à la déformation et la vitesse de déformation

$$k_f = k_{f0} \cdot (1 + 0,05 \cdot \dot{\varphi}) \text{ [kg/mm}^2\text{]}$$

où

$$\varphi = \frac{\Delta h_{\text{moy}}}{h_{\text{moy}}} \cdot \frac{v}{l_d \text{ moy}} \text{ [sec}^{-1}\text{].}$$

РАСЧЕТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЙ И МОМЕНТОВ ПРОКАТКИ НА
МЕЛКОСОРТНЫХ ПРОКАТНЫХ СТАНАХ

M. ВОЙТ

РЕЗЮМЕ

В работе сделана попытка дать простой способ расчетного определения характеристик (Q ; P ; M) прокатки сложных профилей. В рамках некоторого отступления дается новый метод расчета зависимости сопротивления деформации от скорости деформации

$$k_f = k_{f0} \cdot (1 + 0,05 \cdot \dot{\varphi}) \text{ [кг/мм}^2\text{]},$$

где

$$\varphi = \frac{\Delta h_{\text{ср}}}{h_{\text{ср}}} \cdot \frac{v}{l_d \text{ ср}} \text{ [сек}^{-1}\text{].}$$

INDEX

- Ripianu, A.—Sirbu, N.*: Contribution to the Investigation of Transitory Movements of Rotors on Passing through the Critical Revolution — Beitrag zum Studium der transistorischen Bewegungen der Rotoren bei dem Durchgang durch die kritische Geschwindigkeit — Contribution à l'étude des mouvements transitoires des rotateurs à leur passage par la vitesse critique de rotation — *Рипиану, А. — Сырбу, Н.*: К вопросу изучения переходных движений роторов при переходе через критическую скорость 3
- Klimow, B.*: Zur Berechnung der flachen, doppelt gekrümmten Schalen mit veränderlicher Krümmung — On the Calculation of Shallow Shells with Double, Varying Curvature — Calcul de voiles plats doublement courbes à courbure variable — *Климов, Б.*: К расчету оболочек двоякой и переменной кривизны 37
- Schwertner, A.:** Beitrag zur Theorie der vierseitig gestützten Rechteckplatten — Contributions to the Theory of Rectangular Slabs Supported along All Four Sides — Contribution à la théorie des plaques rectangulaires appuyées sur les quatre côtés — *Швертнер, А.*: К теории четырехугольной пластины, опирающейся с четырех сторон 55
- Harkányi, I.*: Determination of Optimum Conditions of Capillary Compensated Hydrostatic Slideways — Die Bestimmung der optimalen Verhältnisse der durch kapillare Drosselung kompensierten hydrostatischen Leitungen — Détermination des conditions optima de conduites hydrostatiques compensées par obturation — *Харкани, И.*: Определение оптимальных режимов гидростатических проводников, компенсированных капиллярной заглушкой 67
- Szmodits, K.*: Hyperbolic Paraboloidal Shells over Polygonal Plan — Zusammengesetzte hyperbolische Paraboloidschale über einem Vieleckgrundriß — Voiles composés en parabolöide hyperbolique construits sur une base polygonale — *Смодич, К.*: Комбинированная гипероболочка на многоугольном основании 83
- Kozak, R.*: Résistance du béton et des fils employés dans les bétons précontraints par adhérence, soumis à des charges pulsatives — The Strength of the Concrete and Bound Stressing Wires of Stressed Concrete Structures Affected by Pulsating Forces — Die Festigkeit des Betons und der Drahteinlagen von durch pulsierende Kräfte beanspruchten Spannbeton-Verbundkonstruktionen — *Козак, Р.*: Прочность проволочной арматуры и бетона напряженных бетонных конструкций с прилипающей арматурой, подверженных пульсирующим воздействиям .. 91
- Nándori, Gy.*: Untersuchung von kennzeichnenden Daten der linearen Schwindung von Grauguß — Investigation of the Characteristic Data of Linear Shrinkage of the Gray Iron — Étude des données caractéristiques du retrait linéaire de la fonte grise — *Нандори, Д.*: Исследование характерных данных линейной усадки серого чугуна 111
- Schedel, A.*: Study of the Direct Reduction — Über die direkte Reduktion — Recherches sur la réduction directe — *Шедель, А.*: Исследование прямого восстановления 131
- Pásztor, E.*: Baustatische Berechnung von radial beschauften Laufrädern mittels der Beckschen Methode — Calculation of the Strength of the Running Wheels with Radial Blading by the Method of Beck — Calcul de la résistance des roues à aubes radiales par la méthode de Beck — *Пастор, Э.*: Расчет механической прочности рабочих колес с радиальными лопастями методом Бекк-а 149

- Öllös, G.—Deli, M.—Szolnoky, Cs.:* Ergebnisse von Modellversuchen über die Grundwasserabsenkung durch Vakuumbrunnen — Results of Model Tests on Ground Water Level Lowering by Vacuum Wells — Résultats d'essais sur modèles réduits concernant l'abaissement par le vide de la nappe phréatique — Эллиш, Г. — Дели, М. — Сольнокки, Ч.: Результаты модельных опытов с целью понижения уровня грунтовых вод вакуумными колодцами 163
- Kuczogí, E.:* Die Halbleitertheorie der Schleifkontakte elektrischer Maschinen — Semiconductor Theory of the Sliding Contacts of Electrical Machines — Application de la théorie de la semi-conductivité aux contacts à frottement des machines électriques — Куцогги, Э.: Полупроводниковая теория скользящих контактов элеткрических машин 191
- Terplán, Z.:* Der Wirkungsgrad eines Planetengetriebes mit Doppelantrieb — Efficiency of Planetary Gears with Two Drives — Le rendement des engrenages planétaires à double commande — Терплан, З.: Коэффициент полезного действия планетарной передачи с двойным приводом 207
- Csonka, P.:* On the Internal Edge Beam of Paraboloidal Shells of Revolution Having a Circular Skylight Opening — Über den inneren Randträger der mit einem kreisförmigen Oberlicht versehenen Rotationsparaboloid-Schalen — De l'anneau de rive supérieur des volées en parabolóide de révolution ayant une ouverture circulaire — Чонка, П.: О внутренней краевой балке оболочек с фонарем, имеющих форму параболоида вращения и опирающихся на кругообразное основание 219
- Neugebauer, J.—Simon, T.—Tremmel, J.:* Die Ausbildung von Kristallen aus den Metallpulverkörnchen beim Sintern von Wolframstäben — The Growing of Crystals out of Metalpowder Grains in the Sintering Process of Thungsten Rods — Cristallisation à partir de grains de poudres métalliques pendant le frittage des barres de tungstène — Нейгебауэр, Й. — Шимон, Т. — Треммел, Й.: Образование кристаллов из зерен металлического порошка при спекании вольфрамовых прутков 233
- [Vidéky, É.]** Historical Data Concerning the Development of Gear Wheels before the World War I. — Historische Daten bis zum I. Weltkrieg über die Entwicklung der Zahnräder — Données historiques relatives au développement des engrenages avant la 1^{re} guerre mondiale — Видеки, Э.: Исторические данные касающиеся развития зубчатых колес до первой мировой войны 241
- [Schleicher, A.]** Data on the History of Metallurgy in Hungary. IX. Results of Metallurgical Researches Carried out on the Territory of the Vas County until the End of 1961 — Beitrag zur Geschichte des Hüttenwesens in Ungarn. IX. Die Ergebnisse der im Gebiete des Komitats Vas bis Ende 1961 durchgeführten Geschichtsforschung über das ungarische Hüttenwesen — Contribution à l'histoire de la métallurgie en Hongrie. IX. Résultats des recherches historiques effectuées jusqu'à la fin de 1961 sur la métallurgie dans le département de Vas — Шлейхер, А.: К истории металлургии в Венгрии, IX. Результаты исследований по истории металлургии, проводившихся до конца 1961 г. в области Ваш 245
- Voith, M.:* Berechnungen des Walzdruckes und Walzmomentes bei Feinwalzstraßen — Calculation of the Rolling Pressure and Torque on Small-Section Roll Trains — Calcul pour la détermination de la pression et du couple de laminage sur les trains de laminoirs finisseurs — Воит, М.: Расчетное определение давлений и моментов прокатки на мелкосортных прокатных станах..... 251

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. VI. 19. — Terjedelem: 23,75 (A/5) ív, 134 ábra

64.59089 Akadémia Nyomda, Budapest V, Gerlóczi u, 2. Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

68,— Ft

Index: 26.025

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 49

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

THE PERMISSIBLE DEVIATION OF THE INNER DIAMETER OF A MAIN UPSTREAM AND DOWNSTREAM FROM A PRESSURE DIFFERENCE DEVICE FOR FLOW MEASUREMENT

G. S. VASY

MACHINE DESIGN BUREAU, BUDAPEST

[Manuscript received February 21, 1962]

When designing p. d. devices for flow measurement in pipes, the true (average) inner diameter of the main, on its upstream and downstream side, is, in general, not known. Thus it is important for the designer to know what deviation is permissible in case of standard tubes and what tolerance is to be specified in case of non-standard ones for different types of p. d. devices at various area ratios. In the paper the author describes a method to calculate the permissible percentage deviation $\Delta D\%$ of the inner diameter satisfying the condition that the throat diameters (or in case of segmental orifice plate, the $d_{id} = \sqrt{m} \cdot D$ values) computed with the high and low limits of D are equal to the allowed high and low limits of the throat diameter (or d_{id}), respectively. The results are determined for standard orifice plate with corner taps, the same with D and $D/2$ taps, standard (ISA 1932) nozzle, ISA-nozzle entrance type Venturi tube, conical entrance type Venturi tube, segmental orifice plate, double orifice plate, quarter-circular nozzle, and semicircular nozzle.

Furthermore, the deviations of the height of the throat of segmental orifice plates satisfying the same requirements as $\pm \Delta d\%$ for concentric p. d. devices are also calculated. For comparison the probable deviations of the inner diameter are also given in a diagram for some B. S. tubes.

Symbols

a	height of the throat of a segmental orifice [mm or in.];
a_1	$= a + \Delta a$, permissible high limit of a [mm or in.];
a_2	$= a - \Delta a$, permissible low limit of a [mm or in.];
$\pm \Delta a$	permissible bilateral tolerance of a [mm or in.];
$\pm \Delta \bar{a}$	$= \pm \Delta a/a$;
$\pm \Delta \bar{a}\%$	$= \pm 100 \cdot \Delta \bar{a} = \pm 100 \cdot \Delta a/a$;
B	a constant in Equ. (1), (1a), and in the equation for C^* ; its value depends upon the units of the quantities of these equations; when the metric or British units given in this table are used, it equals numerically 0.01252 or 1890 respectively [m ^{1/2} /sec or British];
C	coefficient of discharge after B. S. 1042: 1943;
C^*	$= Q/(B \cdot \varepsilon \cdot K_R \cdot \sqrt{1/\gamma_1 \cdot (p_1 - p_2)})$ [m ² or British];
D	design value of the inner diameter of the main, after tube standard or drawing [mm or in.];
$D_{o.d.}$	outer diameter of the main, after tube standard or drawing [mm or in.];
D_{mean}	actual mean value of the inner diameter calculated as the arithmetical mean of all $D_{x,\varphi}$ values measured after the prescriptions of a standard for flow measurement [mm or in.];
$D_{x,\varphi}$	a measured inner diameter of pipe cross section at x and φ [mm or in.];
D_1	$= D + \Delta D$, permissible high limit of D [mm or in.];
D_2	$= D - \Delta D$, permissible low limit of D [mm or in.];
$\pm \Delta D$	permissible bilateral deviation of D , calculated with respect to the accuracy of flow measurement [mm or in.];
$\pm \Delta \bar{D}$	$= \pm \Delta D/D$;
$\pm \Delta \bar{D}\%$	$= \pm 100 \cdot \Delta \bar{D} = \pm 100 \cdot \Delta D/D$;

$\pm \Delta D_{\text{mean}}$	prescribed bilateral tolerance of D_{mean} after standard for flow measurement [mm or in.];
$\pm \Delta \bar{D}_{\text{mean}}$	$= \Delta D_{\text{mean}}/D_{\text{mean}}$;
$\pm \Delta D_p$	calculated probable bilateral deviation of D after tube standard [mm or in.];
$\pm \Delta \bar{D}_p\%$	$= \pm 100 \cdot \Delta D_p/D$;
$\pm \Delta D_{st}$	bilateral tolerance of D after tube standard [mm or in.];
$\Delta D_{x,\varphi}$	$= D_{x,\varphi} - D_{\text{mean}}$ [mm or in.];
$\Delta \bar{D}_{x,\varphi}$	$= \Delta D_{x,\varphi}/D_{\text{mean}}$;
$\pm \Delta D^*$	a change of D [mm or in.];
d	in this paper diameter of the throat of an axially symmetric p. d. device calculated with D [mm or in.];
d_{id}	$= \sqrt{m} \cdot D = \sqrt{f/F} \cdot D$; equivalent diameter of throat not having circular cross section [mm or in.];
d_1	$= d + \Delta d$, value of the throat diameter calculated with D_1 [mm or in.];
d_2	$= d \cdot \Delta d$, value of the throat diameter calculated with D_2 [mm or in.];
d^*	value of the throat diameter calculated with D_{mean} [mm or in.];
$\pm \Delta d$	bilateral tolerance of d as prescribed by a standard for flow measurement; in general $= \pm 0.001d$ (in some standards this value is valid only below $m = 0.45$, while $\pm 0.0005d$ is given above $m = 0.45$) [mm or in.];
$\pm \Delta \bar{d}$	$= \pm \Delta d/d$;
$\pm \Delta \bar{d}\%$	$= \pm 100 \cdot \Delta \bar{d} = \pm 100 \cdot \Delta d/d$;
$\pm \Delta d_{id}$	$= 0.001 \cdot d_{id}$, prescribed bilateral tolerance of d_{id} [mm or in.];
$\pm \Delta \bar{d}_{id}\%$	$= \pm 100 \cdot \Delta d_{id}/d_{id}$;
Δd^*	$= d^* - d$ [mm or in.];
$F = D^2\pi/4$	area of pipe [m ² or sq. in.] if D taken in m or in. respectively (in B. S. 1042 A_1 is used);
f	area of throat; for circular cross section: $f = d^2\pi/4$ [m ² or sq. in.] if d taken in m or in. respectively (in B. S. 1042 A_2 is used);
f_1	$= f + \Delta f$, high limit of f [m ² or sq. in.];
f_2	$= f - \Delta f$, low limit of f [m ² or sq. in.];
$\pm \Delta f$	$= \pm \Delta f\%$, prescribed bilateral tolerance of f [m ² or sq. in.];
$\pm \Delta f\%$	$= \pm 2\Delta \bar{d}\%$ or $= \pm 2\Delta \bar{d}_{id}\%$;
G	$= Q \cdot \gamma_1$ rate of flow [kg/hour or lb/hour];
K_c	compressibility coefficient of flow;
K_{bl}	correction factor for bluntness of orifice edge;
K_R	$= K_\eta \cdot K_r \cdot K_{bl} \cdot K_t$;
K_r	correction factor for roughness of the inner surface of the main;
K_t	temperature correction factor for the throat diameter of the p.d. device;
K_η	correction factor for viscosity effects (i.e. for the Reynolds number);
m	area ratio; in general $m = f/F$, and if the throat has a circular cross section: $m = d^2/D^2$;
p_1	absolute pressure, upstream tapping [kp/m ² or lb/sq. in.];
p_2	absolute pressure, downstream tapping [kp/m ² or lb/sq. in.];
$p_1 - p_2$	differential pressure [kp/m ² or lb/sq. in.];
Q	$= G/\gamma_1$ rate of flow [m ³ /hour or cu. ft./hour];
s	design thickness of the pipe wall after standard or drawing [mm or in.];
$\pm \Delta s$	prescribed bilateral tolerance of s [mm or in.];
x	a coordinate measured along the axis of the main [mm or in.];
a	$= C/\sqrt{1 - m^2}$ coefficient of flow, including velocity of approach factor;
a_1	value of a correlated with D_1 ;
a_2	value of a correlated with D_2 ;
$\Delta a/\Delta(ma)$	change ratio of the function $a = f_2(ma)$ at the point (ma, a) ;
γ_1	density of fluid, upstream tapping [kp/m ³ or lb/cu. ft.];
ε	expansion factor;
φ	an angular coordinate in a cross section of the main [degree].

The standards for flow measurement in a main using pressure difference devices¹ prescribe certain requirements for the inner diameter D of the main. Thus, e.g. The German Standard Code DIN 1952 [1] requires a very accurate measuring of $D_{x,\varphi}$ for a certain length of pipe containing the p.d. device, and all this must be done *before calculating* the latter one. The main must be truly cylindrical for a distance of $2D$ on the upstream side of the p.d. device. The deviation $\Delta D_{x,\varphi}$ of any diameter measured in this distance, due either to discrepancies from the circular cross section or to those from the cylindrical shape must lie within $\Delta D_{\text{mean}}\% = \pm 0.5\%$ for $m > 0.3$ and $\pm 2\%$ for $m \leq 0.3$ related to the arithmetical mean value of all diameters measured (D_{mean}). The British Standard Code B. S. 1042 : 1943 [2] gives essentially the same requirements but allows only a difference of 0.5% for all diameters from one another, and at all values of m .

The measuring of all required inner diameters can be made only when metering in existing pipelines is wanted, i.e. when the calculation and the design of the p.d. device is preceded by the construction and in lying down the main. However, in new plans, the main and the p.d. device, in general, are to be designed essentially *at the same time* and thus the required measuring of the inner diameters cannot be previously made. Of course, before the installation of the p.d. device, the $D_{x,\varphi}$ values should be found and their mean, too.² But then a correction factor is to be used for the readings of the secondary device.

However, the use of a correction factor differing considerably from the unity is rather to be avoided. Now, the particular correction factor due to the difference of D and D_{mean} may be taken as approximately equal to unity if the respective partial error of the measurement is small and thus its effect on the total probable error is negligibly small.

The conditions necessary to fulfill this requirement will be now examined.

Assume that the bilateral tolerance $\pm \Delta D$ of the inner diameter is determined so that the diameter d^* of the throat calculated for a D_{mean} lying between the high and low limits $D_1 = D + |\Delta D|$ and $D_2 = D - |\Delta D|$, respectively, will be within the allowed high and low limits of the throat diameter d calculated for the designed inner diameter D , i.e. $|d^* - d| \leq \pm \Delta d$ (Fig. 1). Then, the extra partial error due to the difference $|D_{\text{mean}} - D|$ will not be greater than the partial error due to the permissible deviation of the throat diameter. And as it is, in general, $\Delta \bar{d} = \pm 0.001$ or smaller, the mentioned extra error of the flow measurement — or rather that of producing the working differential pressure — will be ≤ 0.002 . Now this value causes only a small change in the total probable error of the p.d. device (the latter

¹ Referred to as "p. d." devices.

² In practice, this is often omitted.

being of the order ± 0.005), while for the total probable error of the entire flow measurement (including the errors due to the secondary device, etc.) its effect will be quite negligible.

The tolerances of the inner diameter of standard tubes are determined in the respective standards. It is to be noted that the British Standards do not, in general, directly give the tolerances of the inner diameter, but those of the outer diameter and the wall thickness.³ The *probable deviation* of the

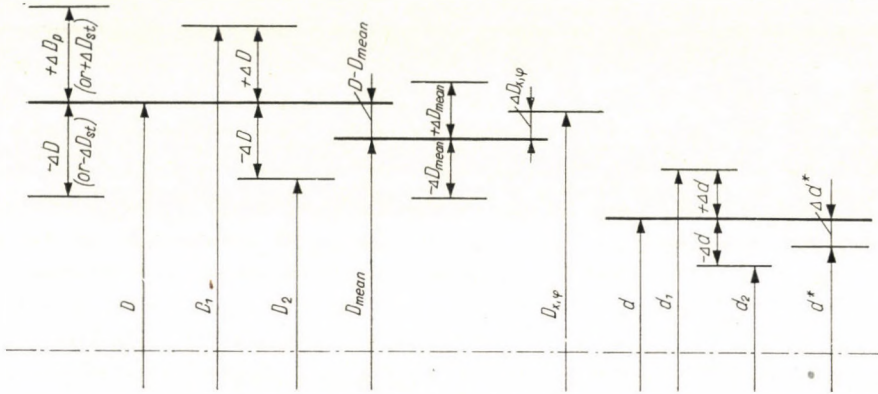


Fig. 1. The inner diameter of the main, the throat diameter, their tolerances and deviations

inner diameter may be calculated from their values [see Equ. (7)]. The i.d. tolerances of non-standard — usually welded — tubes are to be given by the designer.

Now, the designer having due regard for the requirements of one of the above mentioned standards, should have to calculate the p.d. device in such a way that the tolerances of the inner diameter prescribed for the range including the calculated value of m should not be greater than those of the used tube or those to be used. Thus, theoretically, the designer could choose a tube standard fulfilling these requirements or in case of non-standard tubes prescribe the tolerances needed.

However, the deviations $\pm \Delta D_p$ (or $\pm \Delta D_{st}$) determined by the tube standards are in most cases considerably greater than those required by the standards for flow measurement. And, therefore, standard tubes could be applied only in few cases for flow measurement on the upstream and downstream side of a p.d. device (cf. Fig. 5 and Fig. 7).

³ As an exception see e.g. B. S. 3014 : 1958 (Welded Austenitic Stainless Steel Tubes for Mechanical, Structural and General Engineering Purposes), where for cold drawn welded tubes the same permissible variations are given for the outside diameter as for the inside one (p. 12, table 4).

But there are two reasons for not accepting the above mentioned rigorous prescriptions of the standards. First, the tolerances of the inner diameter as given by the requirements of flow measurement must be a continuous function of the area ratio: $\Delta \bar{D} = f(m)$. And, second, $\Delta \bar{D}$ must also depend on the type of the p.d. device. Both conditions follow from the fact that both $a = f_1(m)$ and $a = f_2(ma)$ are continuous functions. This may be visualised better by assuming that a certain value of ma has been calculated for a given value of D , and then the corresponding values of a , m , and d were also determined. If now, a small change is made in the value of D , and the calculation is repeated, the new ma value will also be found to be changed to a small extent. The changes in a , m , and d will, in general, be small, too. Their values will depend on the slope of the curve $a = f_2(ma)$ at the calculated value of ma and, of course, this depends on the type of the p.d. device (see Figs. 2 and 4).

In this way the differences Δd^* corresponding to any given change $\pm \Delta D^*$ might be calculated. Reversely, from many sets of correlative values the allowable deviation $\pm \Delta \bar{D}$ corresponding to a given tolerance of the diameter of the throat $\pm \Delta \bar{d}$ could be determined too, however, in a cumbersome way.

In order to avoid this, a method of calculation has been worked out as follows. As the result, the $\Delta \bar{D} \% = f(m)$ curves are given for standard and for several non-standard p.d. devices. From these curves it is easy to find the bilateral tolerances of the inner diameter $\pm \Delta D$ satisfying the requirement that the diameters of the throat d_1 and d_2 calculated with the corresponding high and low limits D_1 and D_2 , respectively, are just the high and low limits for d as determined by a standard for flow measurement, i.e. $d_1 = d + \Delta d$, $d_2 = d - \Delta d$.

The starting formula is that used for calculating the diameter of the throat when the rate of flow is known. That is, with the symbols used:

$$ma = \frac{Q}{B \varepsilon D^2 K_R \sqrt{1/\gamma_1 \cdot (p_1 - p_2)}} \quad (1)$$

Now, when the inner diameter takes its high and low limits the corresponding limit values of ma will be:

$$(ma)_2 = \frac{Q}{B \varepsilon D^2 \left(1 \pm \frac{\Delta \bar{D} \%}{100}\right)^2 K_R \sqrt{1/\gamma_1 \cdot (p_1 - p_2)}} \quad (1a)$$

There the index 1 belongs to the upper (+) sign and the index 2 to the lower (—) one. The partial correction factors K_η , K_r , and K_{bl} of K_R and the expansion factor ε depend on m ; K_r and K_{bl} moreover also on D . However, for small changes of D as are considered here, the change of m will be small too, and thus

these factors could be taken as constants. Using the symbol

$$C^* = \frac{Q}{B \varepsilon K_R \sqrt{1/\gamma_1 \cdot (p_1 - p_2)}}$$

where, on the right-hand side all factors and quantities in this development are constants or may be considered as constants, we obtain:

$$(ma)_2 = \frac{C^*}{D^2 \left(1 \pm \frac{\Delta \bar{D}^{\circ}/\%}{100}\right)^2} \quad (1b)$$

If $\Delta \bar{D}^{\circ}/\%$ is assumed to be only a small fraction of unity, the right-hand side of (1b) may be written as:

$$\frac{C^*}{D^2 \left(1 \pm \frac{\Delta \bar{D}^{\circ}/\%}{100}\right)^2} \approx \frac{C^*}{D^2 \left(1 \pm 2 \frac{\Delta \bar{D}^{\circ}/\%}{100}\right)} \approx \frac{C^*}{D^2} \left(1 \mp 2 \frac{\Delta \bar{D}^{\circ}/\%}{100}\right).$$

Moreover as substitution of C^* in (1) gives:

$$ma = \frac{C^*}{D^2} \quad (1c)$$

equation (1b) will take the form:

$$(ma)_1 = ma \cdot \left(1 - 2 \frac{\Delta \bar{D}^{\circ}/\%}{100}\right), \quad (ma)_2 = ma \cdot \left(1 + 2 \frac{\Delta \bar{D}^{\circ}/\%}{100}\right), \quad (1d)$$

and hence:

$$\pm \Delta(ma) = \mp (ma) \cdot 2 \frac{\Delta \bar{D}^{\circ}/\%}{100} \quad (1e)$$

It follows, therefore, that the relative change of (ma) is twice that of D but with an opposite sign.

Now, from the definition of m and from (1c) the square of d will be:

$$d^2 = mD^2 = \frac{C^*}{\alpha} \quad (2)$$

and its high and low limits are respectively:

$$d_1^2 = m_1 D_1^2 = \frac{C^*}{\alpha_1}, \quad d_2^2 = m_2 D_2^2 = \frac{C^*}{\alpha_2} \quad (2a)$$

The next step will be to obtain the values of α_1 and α_2 . Now, if the derivative $da/d(ma)$ at the value (ma) corresponding to D or in its vicinity the change ratio

$$\left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(ma)} \right]_{(ma)} \approx \frac{d\alpha}{d(ma)}$$

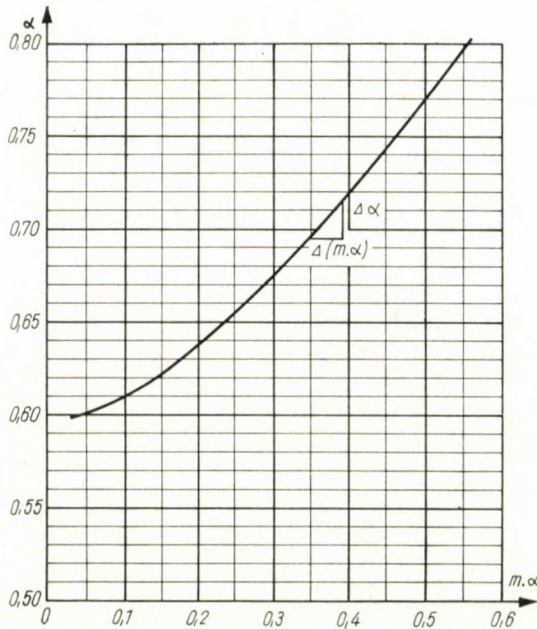


Fig. 2. The curve $\alpha = f_2(ma)$ of a pressure difference device (standard orifice plate with corner taps)

is known [e.g. from a diagram representing $\alpha = f_2(ma)$, see Fig. 2.], as only small changes of α and (ma) are supposed to occur, the values α_1 and α_2 may be calculated as follows. Comparison of the change ratio and equation (1e) gives:

$$\Delta \alpha = \mp (ma) 2 \frac{\Delta \bar{D} \%}{100} \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(m \cdot \alpha)} \right], \tag{3}$$

and hence:

$$\alpha_2 = \alpha \mp ma 2 \frac{\Delta \bar{D} \%}{100} \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(m \cdot \alpha)} \right] = \alpha \left(1 - m 2 \frac{\Delta \bar{D} \%}{100} \right) \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(ma)} \right]. \tag{3a}$$

Whence by substitution into (2a):

$$d_2^2 = \frac{C^*}{\alpha} \left\{ 1 \pm m 2 \frac{\Delta \bar{D} \%}{100} \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(ma)} \right] \right\}. \tag{4a}$$

Finally, with regard to Equ. (2), we shall have:

$$d_2 = d \left\{ 1 \pm m \frac{\Delta \bar{D}\%}{100} \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(m\alpha)} \right] \right\}. \quad (4b)$$

Therefore, the relative change of the diameter of the throat correlative to a given deviation of the inner diameter of the main will be:

$$\Delta \bar{d}\% = \pm \Delta \bar{D}\% m \cdot \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(m\alpha)} \right], \quad (5a)$$

and reversely the permissible deviation of the inner diameter correlative to a given tolerance of the diameter of the throat:

$$\pm \Delta \bar{D}\% = \pm \Delta \bar{d}\% \frac{1}{m \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(m\alpha)} \right]}. \quad (5b)$$

Hence the ratio of both deviations:

$$\frac{\Delta \bar{D}\%}{\Delta \bar{d}\%} = \frac{1}{m \left[\frac{\Delta \alpha}{\Delta(m\alpha)} \right]}. \quad (6)$$

Thus the permissible deviation of the inner diameter of the main, for a given tolerance of the diameter of the throat, depends on the product of the area ratio m and the change ratio $[\Delta \alpha / \Delta(m\alpha)]$. As for any given type of p.d. device the latter one diminishes with the growing of m , the allowable tolerance of the inner diameter will be the greater, the smaller m is.

As the function $\alpha = f_2(m\alpha)$ is mathematically not known but only from data of experimental results (e.g. as a curve represented in a diagram), for the numerical computation of $\Delta \bar{D}\%$ we have to determine the change ratios $\Delta \alpha / \Delta(m\alpha)$ at various values of m (the change ratio has just therefore been used instead of the derivative). In carrying out the computations, "round" values of the area ratio m , differing from each other by 0.05 (in case of the semicircular nozzle by 0.025) were chosen and multiplied by the corresponding value of flow coefficient α . Next, the $\Delta \alpha$ and $\Delta(m\alpha)$ values were computed as the differences of the appropriate adjacent values of α and $(m\alpha)$, respectively⁴, and also their ratio. We then have the change ratios corresponding to the initial values of m as the mean of the adjacent values of the previously determined ratios. The final result is the value of $\Delta \bar{D}\%$ corresponding to $\Delta \bar{d}\% = 0.1$.

⁴ The first and last values of $\Delta \alpha$ and $\Delta(m\alpha)$ were extrapolated.

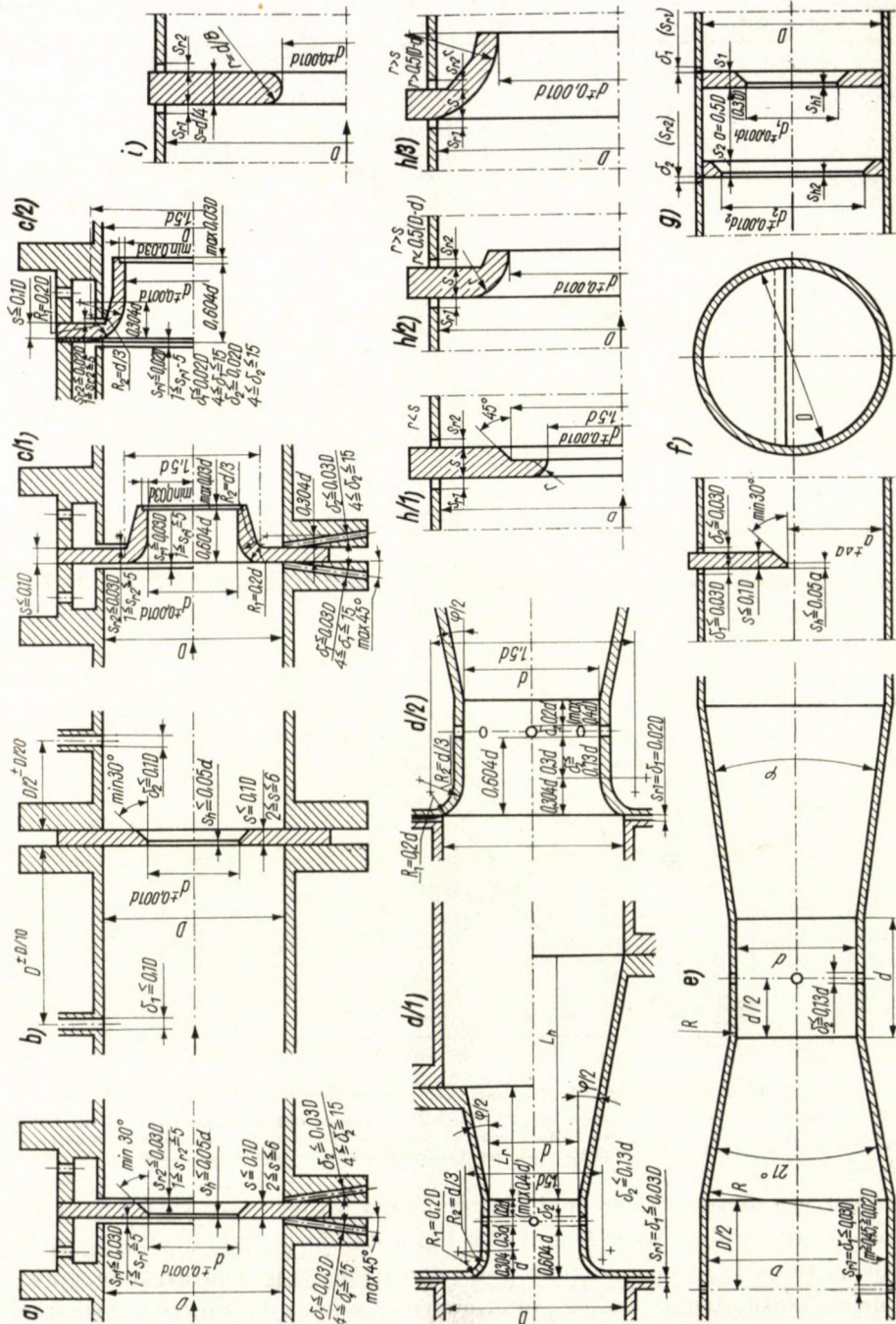


Fig. 3. The pressure difference devices dealt with in this paper

a - standard orifice plate with corner taps; b - standard orifice plate with D and D/2 taps; c/1 and c/2 - standard (ISA 1932) nozzle; d/1 and d/2 - ISA-nozzle entrance type Venturi tube; e - conical entrance type Venturi tube; f - segmental orifice plate; g - double orifice plate; h - quarter-circular nozzle; i - semicircular nozzle

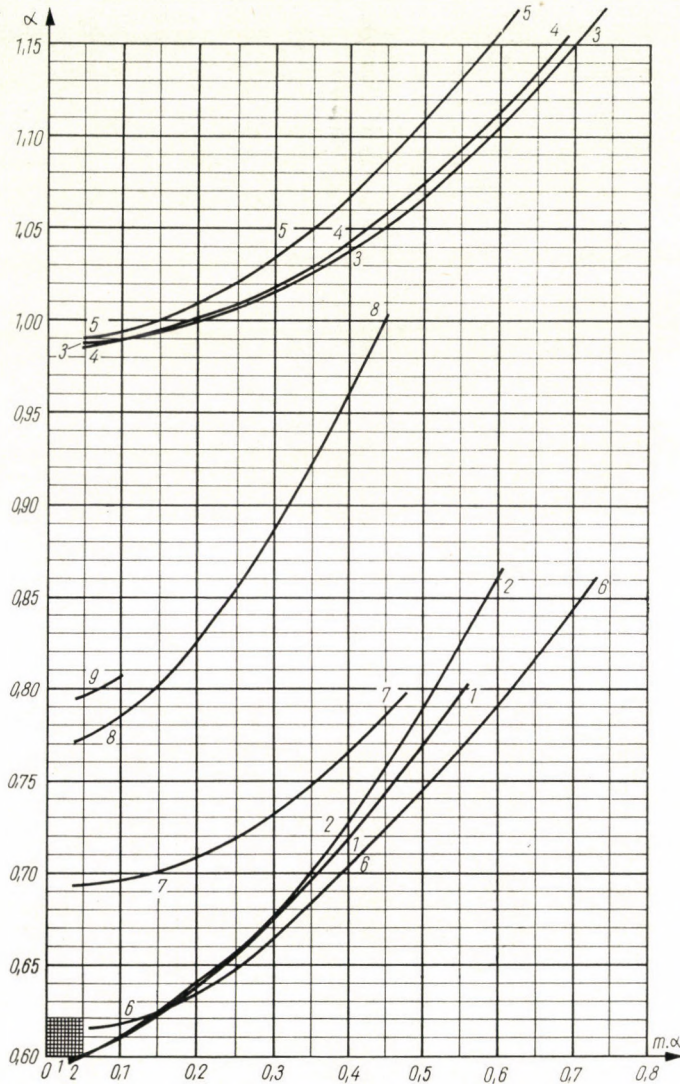


Fig. 4. The curve $\alpha = f_2(m\alpha)$ for various types of pressure difference devices

Symbols: 1 — standard orifice plate with corner taps; 2 — standard orifice plate with D and $D/2$ taps; 3 — standard (ISA 1932) nozzle; 4 — ISA-nozzle entrance type Venturi tube; 5 — conical entrance type Venturi tube; 6 — segmental orifice plate; 7 — double orifice plate; 8 — quarter-circular nozzle; 9 — semicircular nozzle

The calculations were made for standard orifice plate with corner taps, standard orifice plate with D and $D/2$ taps, standard (ISA 1932) nozzle, ISA-nozzle entrance type Venturi tube, conical entrance type Venturi tube, segmental orifice plate, double orifice plate, quarter-circular nozzle, and semicircular nozzle (Figs. 3 and 4)⁵. (Note see on page 282.) The $\Delta \bar{D}\% = f(m)$ curves are represented in Fig. 5. Moreover the data of computation for standard orifice plate with corner taps are given by way of illustration in Table I.

The trend of the curves is similar to that of a hyperbola with axes parallel to the respective coordinate axes. As can be seen from Fig. 5, the decrease of $\Delta\bar{D}\%$ with increasing m below $\Delta\bar{D}\% = 0.5$ is small for all the considered types of p.d. devices. This value belongs to $m \approx 0.5$, with the exception of the quarter-circular nozzle.

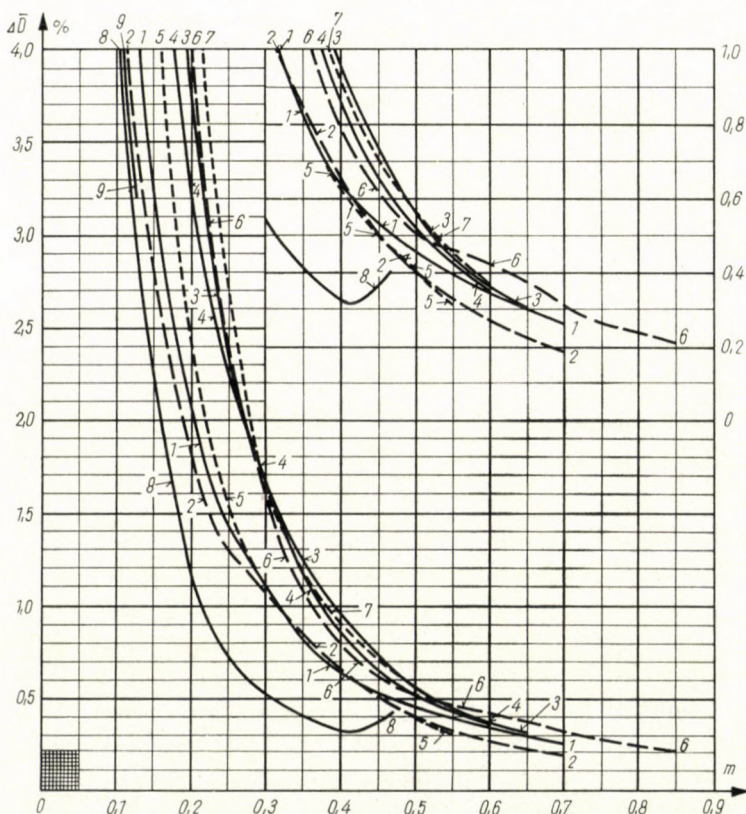


Fig. 5. The permissible bilateral deviation of the inner diameter for various pressure difference devices as a function of the area ratio: $\Delta\bar{D}\% = f(m)$

Symbols: 1 - standard orifice plate with corner taps; 2 - standard orifice plate with D and $D/2$ taps; 3 - standard (ISA 1932) nozzle; 4 - ISA-nozzle entrance type Venturi tube; 5 - conical entrance type Venturi tube; 6 - segmental orifice plate; 7 - double orifice plate; 8 - quarter-circular nozzle; 9 - semicircular nozzle

Now, considering the straight lines representing the tolerances of the inner diameter after DIN 1952 (i.e. $\pm 2\%$ for $m \leq 0.3$ and $\pm 0.5\%$ for $m > 0.3$) and those after B.S. 1042 (i.e. a deviation of 0.5% for all values of m), evidently the calculated values do not agree with these at all. E.g. in case of standard orifice plate (with corner taps) for $m \geq 0.47$ a more rigorous tolerance is necessary, while for $m < 0.2$ a greater tolerance is permissible than that according to DIN 1952.

Table I
 Computation of the permissible deviation of the inner diameter for a standard orifice plate with corner taps

m	α	$m \cdot \alpha$	$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_{t+1} - \alpha_t}$	$\frac{\Delta(m\alpha)}{(m\alpha)_{t+1} - (m\alpha)_t}$	$\frac{\Delta\alpha}{\Delta(m\alpha)}$	$\left[\frac{\Delta\alpha}{\Delta(m\alpha)}\right]_t$	$m \cdot \left[\frac{\Delta\alpha}{\Delta(m\alpha)}\right]_t$	$\Delta\bar{D}\%$
0.05	0.598	0.0299	(0.003)	(0.0297)	(0.101)	0.1165	0.00583	(17.14)
0.10	0.602	0.0602	0.004	0.0303	0.132	0.1628	0.01628	(6.14)
0.15	0.608	0.0912	0.006	0.0310	0.1936	0.2068	0.03102	3.225
0.20	0.615	0.1230	0.007	0.0318	0.220	0.2463	0.04926	2.03
0.25	0.624	0.1560	0.009	0.0330	0.2725	0.2825	0.07061	1.417
0.30	0.634	0.1902	0.010	0.0342	0.2925	0.3008	0.09024	1.108
0.35	0.645	0.2258	0.011	0.0356	0.309	0.351	0.1229	0.814
0.40	0.660	0.2640	0.015	0.0382	0.393	0.3955	0.1582	0.632
0.45	0.676	0.3042	0.016	0.0402	0.398	0.4185	0.1884	0.531
0.50	0.695	0.3475	0.019	0.0433	0.439	0.4465	0.2233	0.448
0.55	0.716	0.3938	0.021	0.0463	0.454	0.466	0.2563	0.390
0.60	0.740	0.4440	0.024	0.0502	0.478	0.4925	0.2955	0.338
0.65	0.768	0.4992	0.028	0.0552	0.507	0.527	0.3426	0.292
0.70	0.802	0.5614	0.034	0.0622	0.547	0.5645	0.3952	0.253
			(0.042)	(0.0722)	(0.582)			

If the prescribed value of $\Delta\bar{D}\%$ is not equal to 0.1, the values of $\Delta\bar{D}\%$ read off in the diagram are to be reduced proportionally (e.g. in case of $\Delta\bar{d}\% = 0.05$, $\Delta\bar{D}\%$ will also be half as large as the read off value).

As for the segmental orifice it should be mentioned that although the throat diameter has no meaning in this case, the method developed can be applied too. Indeed, instead of $m = d^2/D^2$, we have to use $m = f/F$. Now, the requirement for the tolerance of the throat diameter to have a certain value (e.g. $\Delta\bar{d}\% = \pm 0.1\%$) is obviously equivalent to a requirement for the tolerance of the throat area to be twice as large as the former one (e.g. $\Delta f\% = \pm 0.2$). And as

$$\frac{D^2(1 \pm \Delta\bar{D}\%/100)^2}{d^2(1 \pm \Delta\bar{d}\%/100)^2} \approx \frac{D^2(1 \pm 2\Delta\bar{D}\%/100)}{d^2(1 \pm 2\Delta\bar{d}\%/100)}$$

⁵The values of m and α for the standardized p.d. devices (i.e. standard orifice plate with corner taps, standard orifice plate with D and $D/2$ taps, standard (ISA 1932) nozzle, ISA-nozzle entrance type Venturi tube, and conical entrance type Venturi tube) were taken from the Hungarian Standard MNOSZ 1709-56 [3], while for segmental orifice plate data of [4], for double orifice plate those of [5], for quarter-circular nozzle those of [6], and for semi-circular nozzle those of [7] were used; the latter ones after a drawn curve $\alpha = f_1(m)$.

It is to be noted that the data for m and α for standard orifice plate with corner taps, for standard (ISA 1932) nozzle, and for ISA-nozzle entrance type Venturi tube in [3] are the same as in [1]. The data for standard orifice plate with D and $D/2$ taps, and for conical entrance type Venturi tube were taken from [2], the α values being computed from those of the coefficient of discharge C given in the latter.

obviously the ratio of the deviation of $F \sim D^2$ and that of $f \sim d^2$ is according [6] equal to the ratio $\Delta\bar{D}^0/\Delta\bar{d}^0$, i.e. $\Delta\bar{F}^0/\Delta\bar{f}^0 = \Delta\bar{D}^0/\Delta\bar{d}^0$.

Thus it is clear that the calculated value $\pm\Delta\bar{D}^0$ is the permissible deviation, giving the throat areas calculated with the appropriate high and low limits D_1 and D_2 , respectively, differing from that calculated with the design diameter D by the permissible deviation $\pm\Delta\bar{d}^0$. Again introducing the equivalent diameter of throat:

$$d_{id} = \sqrt{m} \cdot D = \sqrt{f/\bar{F}} \cdot D, \quad (7)$$

obviously, the d_{id} values calculated with D_1 and D_2 , respectively, will differ from d_{id} corresponding to D by $\Delta d_{id}^0 = \Delta\bar{d}^0$.

The throat area of the segmental orifice plate is usually given by the height a . We have also to deal with its tolerance $\pm\Delta a$. According to our starting conditions, it must have such a value so as to assure the throat areas f_1 and f_2 corresponding to the high and low limits a_1 and a_2 , respectively, should differ from the throat area f corresponding to the design height a by the permissible deviation of Δf , or the computed d_{id} values by Δd_{id} from d_{id} correlative to a . Therefore, we have to determine the change ratio $\Delta\bar{a}^0/\Delta\bar{d}^0$. The relation between the height of the throat and its area is given by the equation:

$$f = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \arccos\left(1 - 2\frac{a}{D}\right) - 2\left(\frac{D}{2}\right)^2 \left(1 - 2\frac{a}{D}\right) \sqrt{\frac{a}{D} - \left(\frac{a}{D}\right)^2}. \quad (8)$$

Introducing the area ratio, we have:

$$m = \frac{1}{\pi} \left[\arccos\left(1 - 2\frac{a}{D}\right) - 2\left(1 - 2\frac{a}{D}\right) \sqrt{\frac{a}{D} - \left(\frac{a}{D}\right)^2} \right]. \quad (9)$$

First, we have to determine the derivative $d(a/D)/d(d_{id}/D)$, as it gives, multiplied by the ratio $(d_{id}/D)/(a/D)$, approximately the ratio $\Delta\bar{a}/\Delta\bar{d}_{id}$:

$$\begin{aligned} \frac{d(a/D)}{d(d_{id}/D)} \cdot \frac{d_{id}/D}{a/D} &\approx \frac{\Delta(a/D)}{\Delta(d_{id}/D)} \cdot \frac{d_{id}/D}{a/D} = \frac{\Delta a}{\Delta d_{id}} \cdot \frac{d_{id}}{a} = \\ &= \frac{\Delta a/a}{\Delta d_{id}/d_{id}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta\bar{d}_{id}}, \end{aligned} \quad (10)$$

or again if $\Delta\bar{d}_{id} = 0,001$:

$$\frac{d(a/D)}{d(d_{id}/D)} \cdot \frac{d_{id}/D}{a/D} = 10^3 \cdot \Delta\bar{a}. \quad (10a)$$

In order to obtain the derivative, first take the square root on both sides of (9). Thus, we obtain d_{id}/D as a function of (a/D) :

$$d_{id}/D = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\arccos\left(1 - 2\frac{a}{D}\right) - 2\left(1 - 2\frac{a}{D}\right) \sqrt{\frac{a}{D} - \left(\frac{a}{D}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (9a)$$

where only the + sign assures a geometric meaning. Differentiation after (a/D) gives:

$$\frac{d(d_{id}/D)}{d(a/D)} = \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{a/D - (a/D)^2}}{d_{id}/D} \quad (9b)$$

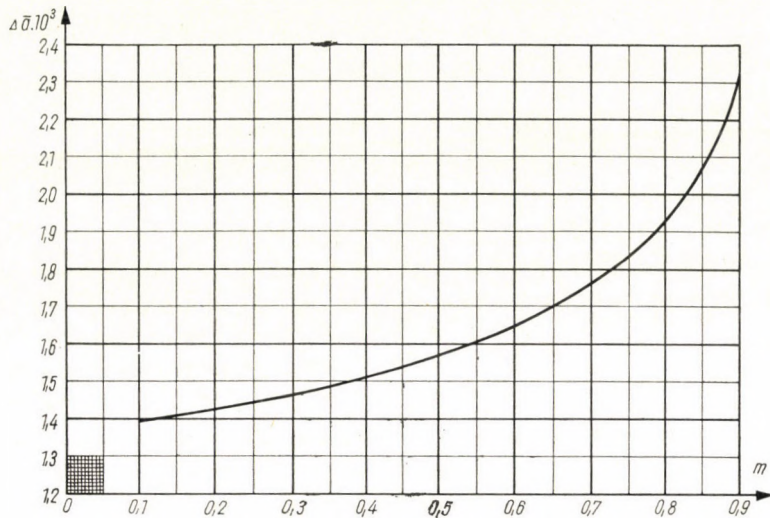


Fig. 6. The permissible bilateral deviation of the height of the throat of segmental orifice plates as a function of the throat ratio: $\Delta \bar{a} \cdot 10^3 = f(m)$

Now, as in the range of definition ($0 < a/D < 1$) the derivative $d(d_{id}/D)/d(a/D)$ is nowhere zero, we have for the inverse function:

$$\frac{d(a/D)}{d(d_{id}/D)} = \frac{\pi}{4} \frac{d_{id}/D}{\sqrt{a/D - (a/D)^2}} \quad (9c)$$

The curve representing $10^3 \cdot \Delta \bar{a} = f(m)$ is shown in Fig. 6. As may be seen, the value of the permissible deviation $\Delta \bar{a}$ is about one and half, two times greater than that of $\Delta \bar{d}_{id}$.

However, it must not be forgotten that while in case of concentric p.d. devices, the satisfaction of the conditions for the deviations of the inner diameter of the main and the throat diameter, and of others prescribed in the standard for flow measurement assures the required accuracy, all this is not enough for a segmental orifice plate. Then the throat area is not entirely determined by the height of the throat but also depends on the true shape of the actual cross section of the main.⁶

⁶ This deficiency cannot be corrected by bordering the bottom of the throat with a piece of tolerated arch, for if the actual cross section of the main is wider, eddies cause an additional error, and if it is narrower, the use of the piece would be senseless.

The developed method of calculation is based on two assumptions. First, not only the value of $|\Delta\bar{d}| \%$, but that of $|\Delta\bar{D}| \%$ is small too. Second, the inner cross section of the main retains its circular shape for all values of D lying between the high and low limit. The first condition means that the calculated values of $\Delta\bar{D} \%$ may be considered as reliable only to a small percentage limit (say $3 \div 4 \%$), and great values of $\Delta\bar{D} \%$ for small values of m are suitable only for approximative information. But in practice these great values are much greater than the tolerances determined by the standards for tubes or — in case of non-standard tubes — the usual ones.

However, the second condition is generally not satisfied in practice except when straight pipe lengths of finished inner surface are used i.e. if the inner diameter is less than approximately 3 inches (usually in case of quarter-circular and semicircular nozzles). The exact shape of the inner surface can in general be determined only just before the installation of the p.d. device. Now, if the actual inner diameter of the main is defined as D_{mean} , it is obvious first that this value must lie between the calculated high and low limits D_1 and D_2 respectively. Second, the deviations $\Delta D_{x, \varphi} = D_{x, \varphi} - D$ must remain within a certain limit. The value of this limit cannot be evaluated. Nevertheless, probably we may attain the necessary accuracy even in the case of single holes, if $D_1 > D_{x, \varphi} > D_2$. The use of annular pressure chambers would possibly make a greater deviation tolerable too.

Now, in case of welded non-standard tubes and internally surface-finished pipe lengths, the tolerance necessary for the inner diameter may be taken from Fig. 5. On the other hand, in case of standard tubes from the figure we have to check the tolerance determined by the tube standard. As the British Standard specifications for tubes in general give the tolerance only for the outer diameter and the wall thickness, the *probably* deviation for the inner diameter is to be calculated by:

$$\Delta D_p = \pm \sqrt{(\Delta D_{o. d.})^2 + 2(\Delta s)^2} \quad (11)$$

or its percentage value by:

$$\Delta\bar{D}_p \% = 100 \cdot \Delta D_p / D. \quad (11a)$$

As an illustration, the probable deviations of the inner diameter of the tube, expressed in percentage, has been calculated for: 1. cast iron flanged pipes after B. S. 2035 : 1953, Classes A and D; 2. steel tubes suitable for screwing to B. S. 21 pipe threads, after B. S. 1387 : 1957, light and medium welded, medium and heavy seamless manufactured, and, 3. steel tubes for mechanical structural and general engineering purposes after B. S. 1775 : 1951, section three, HFS — hot finished seamless steel tubes. The $\Delta\bar{D}_p \%$ values in function of D are shown in Fig. 7. It also illustrates the effect of the greater wall thickness for increasing the $\Delta\bar{D}_p \%$ values.

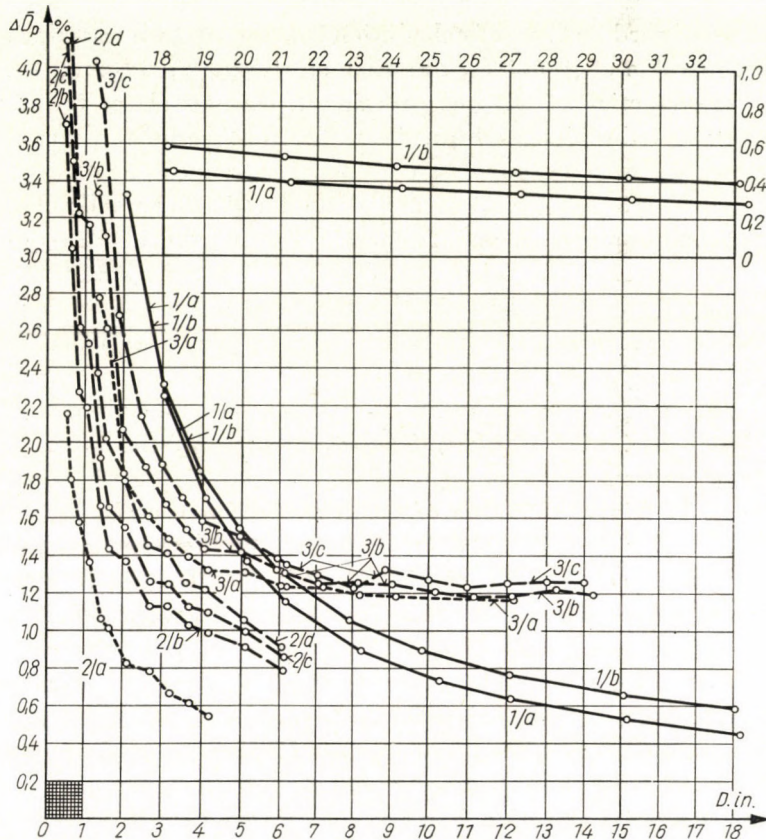


Fig. 7. The probable deviations of the inner diameter of several standard tubes
 1/a and 1/b -- cast iron flanged pipes after B. S. 2035:1953, Classes A and D respectively; 2/a, 2/b, 2/c, and 2/d -- steel tubes suitable for screwing to B. S. 21 pipe threads, after B. S. 1387:1957, light and medium welded, medium and heavy seamless manufactured, respectively; 3/a, 3/b, and 3/c -- steel tubes for mechanical structural and general engineering purposes after B. S. 1775:1951, section three, HFS -- hot finished seamless steel tubes, light, medium, and heavy, respectively.

As can be seen from this figure, for inner diameters less than about 3'' (or ≈ 70 mm), the probable deviation suddenly increases for all types of tubes. Thus the recommendation of B. S. 1042 : 1943 (in para. 29) is justified; the same is established in DIN 1952 for diameters $D < 70$ mm (see [1], p. 14, para. 1,52).

If the tolerances of the outer diameter are not of bilateral system (i.e. the high and low limits do not lie symmetrically to the design o.d.), then, in computing the probable deviation of the inner diameter, it is recommended to consider the average value of the limiting values as a design outer diameter and the deviation of these from the latter ones as bilateral tolerances.⁷

⁷ This has been done for the here considered tubes as regards the outside diameters after B. S. 1387:1957, two series of these after B. S. 1775:1951, and the thicknesses after B. S. 2035:1935. The plus tolerance of the wall thicknesses after B. S. 1387:1957 (not given in the standard) was taken as equal to the minus one.

As may be established from the figure, the probable deviations of the inner diameter of standard tubes satisfy the requirements only for small values of m , with the exception of cast iron tubes of large diameters. The effect of the wall thickness to increase the value of $\Delta \bar{D}_p \%$ can be well seen in the diagram. For this reason, it is more advantageous to use hightensile steel tubes.

On the other hand, it must be kept in mind that the probable deviation of the inner diameter may differ from the average deviation determined by statistical methods. Unfortunately, systematic results are rare, nevertheless, it seems the statistical mean may be considerably smaller than the probable deviation.

Finally, let us note the following: Hitherto it was in general stated in handbooks only, that inaccuracies of manufacturing and deviations from the requirements of the standard for flow measurement, for smaller area ratios cause smaller additional errors than for greater ones. Some authors have overestimated the advantage of decreasing m , as against other advantages connected by increasing it (decrease of pressure loss; e.g. see [6]). Now, an important result of the method developed is to make it possible to numerically determine the largest area ratio allowable for a given (or practically realizable) tolerance of the inner diameter ΔD . Thus it supplements the design method for p.d. devices of small pressure loss (see e.g. [7]).

REFERENCES

1. *DIN 1952 VDI-Durchflussmessregeln; Regeln für die Durchflussmessung mit genormten Düsen, Blenden und Venturidüsen.* 6. Ausgabe, November 1948; Deutscher Ingenieur-Verlag G. m. b. H., Düsseldorf.
2. *British Standard Code B. S. 1042:1943 Flow Measurement.* British Standard Institution.
3. *MNOSZ 1709-56 Csöben áramló folyadék mennyiségének mérése.* Magyar Szabványügyi Hivatal (Standard Code of the Hungarian Popular Republic: Flow Measurement of Fluids in Pipes, Hungarian Bureau of Standards).
4. LOHMANN, H.: Segment-Blenden zur Messung fließender Stoffe in geschlossenen Rohrleitungen. *ATM V1241-5*; Dezember 1938; T155, T156.
5. Миронов, К. А.—Шупетин, Л. И.: Теплотехнические измерительные приборы. Москва 1954.
6. KOENNECKE, W.: Neue Düsenformen für die Durchfluß-Messung bei kleinen und mittleren Reynoldszahlen. *ATM V1242-2*; Januar 1939; T2-T4.
7. KOENNECKE, W.: Durchfluß-Messung mit Drosselgeräten bei kleinen Reynoldszahlen. *ATM V1242-1*; November 1938; T141, T142.
8. HERNING, FR.: Grundlagen und Praxis der Mengenstrommessung. Deutscher Ingenieur-Verlag G. m. b. H., Düsseldorf 1954.
9. VASY, G.: Kis nyomásvesztéséget okozó mérőperemek méretezése (Design of orifices with small pressure loss). *Mérés és Automatika* (1958), 158-163.

TOLERANZEN DES INNEREN ROHRDURCHMESSERS BEI DURCHFLUBMESSUNG MIT DROSSELGERÄTEN

G. S. VASY

ZUSAMMENFASSUNG

Bei dem Entwurf von Drosselgeräten zur Durchflußmessung in Rohrleitungen ist der genaue Wert des inneren Rohrdurchmessers (D) an der Meßstrecke im allgemeinen nicht bekannt, da die Rohrleitung noch nicht gebaut ist. Deshalb ist es für den Konstrukteur von besonderer Bedeutung, welche Abweichungen ($\Delta D\%$) des inneren Rohrdurchmessers bei verschiedenen Arten von Drosselgeräten und bei gegebenen Werten des Öffnungsverhältnisses (m) für genormte Leitungsrohre zugelassen werden können, bzw. welche Toleranzen für nicht genormte Leitungsrohre vorgesehen werden sollen, ohne daß der entsprechende Teil-Meßfehler einen gewissen Wert übersteigt.

Der Verfasser hat zur Bestimmung dieser Toleranzen des inneren Rohrdurchmessers ein Verfahren ausgearbeitet auf dem Grunde der Anforderung, daß der mit dem oberen bzw. unteren Grenzwert von D gerechnete Öffnungsdurchmesser (d ; bzw. im Falle von Segmentblende der Wert $d_{id} = \sqrt{m} \cdot D$) dem mit dem oberen bzw. unteren zulässigen Grenzwert des mit dem geometrischen Wert von D gerechneten Öffnungsdurchmesser gleich ist. Das Ergebnis wurde für Normblenden, Meßblenden mit Druckentnahme in D und $D/2$ (nach B. S. 1042 : 1943), Normdüsen, Venturinormdüsen, konische Venturidüsen (nach B. S. 1042 : 1943), Segmentblenden, Doppelblenden, Viertelkreis- und Halbkreis-Düsen angeführt und als Kurven $\Delta D\% = f(m)$ in einem Diagramm dargestellt (s. Bild 5).

Außerdem bestimmt er, gemäß der oben erwähnten Anforderung die Toleranzen der Öffnungshöhe der Segmentblende (a ; s. Bild 6).

Die angewendete Methode beruht auf zwei Annahmen: 1. $\Delta D\%$ ist klein; 2. der Querschnitt des Rohres an der Meßstrecke ist ein geometrischer Kreis.

Zum Vergleich wurden für einige genormte Rohre (nach B. S.) die wahrscheinlichen Abweichungen des inneren Durchmessers ($\Delta D_p\%$) gegeben (s. Bild 7). Mit Hilfe dieser Diagramme ist es leicht, bei gegebener Toleranz von D und bei gegebener Art des Drosselgerätes den höchsten zulässigen Wert von m zahlenmäßig festzustellen.

LES TOLÉRANCES DU DIAMÈTRE INTÉRIEUR D'UNE CONDUITE EN CAS DE MESURE DU DÉBIT À L'AIDE D'UN SYSTÈME DÉPRIMOGENÈ

G. S. VASY

RÉSUMÉ

L'ingénieur faisant le projet d'un système déprimogène pour la mesure de débit de fluides, ne connaît pas en général à l'avance la valeur vraie des diamètres intérieurs de la conduite (D) à l'amont et à l'aval du système, la conduite n'existant pas encore. C'est pourquoi il lui importe de connaître la tolérance du diamètre intérieur de la conduite ($\Delta D\%$) en cas de divers types de systèmes déprimogènes et de valeurs différentes du rapport des sections ouvertes (m), qu'il s'agisse de la valeur $\Delta D\%$ admissible pour des tuyaux normalisés, ou de celle qui doit être prescrite pour des tuyaux hors norme, sans que l'erreur partielle dépasse une valeur donnée.

L'auteur avait élaboré une méthode de calcul de ces tolérances, compte tenu de la condition que le diamètre d de la section minimum du système déprimogène (ou en cas de diaphragme segmentaire, le diamètre $d_{id} = \sqrt{m} \cdot D$), calculé avec la limite maximum ou minimum de D , soit égal respectivement au maximum ou au minimum admissible de d , calculé avec la valeur géométrique de D . Le résultat est donné dans un abaque (voir fig. 5) pour les systèmes déprimogènes suivants: diaphragme normal (ISA 1932), diaphragme avec prise de pression sur le tuyau à D en amont et $D/2$ en aval (d'après B. S. 1042 : 1943), tuyère normale (ISA 1932), Venturi-tuyère, Venturi classique (du type Herschell), diaphragme segmentaire, deux diaphragmes en séries, tuyère en quart de cercle et tuyère en demi-cercle.

La méthode appliquée repose sur deux hypothèses: 1. la déviation $\Delta D\%$ est petite; 2. les sections de la conduite en amont et en aval du système déprimogène sont des cercles géométriques.

En outre, conformément à la condition mentionnée ci-dessus, il détermine, les tolérances de la flèche de la section ouverte du diaphragme segmentaire (a , voir fig. 6).

Enfin, pour faire une comparaison, la déviation probable du diamètre intérieur ($\Delta \bar{D}_p$ %) est donnée dans un abaque (voir fig. 7.) pour des tuyaux de conduite normalisés (d'après des B. S.). Il est facile de trouver la plus grande valeur de m admissible pour une tolérance probable de D et pour le type du système déprimogène appliqué.

ДОПУСКАЕМОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ДИАМЕТРА ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ РАСХОДА С ПОМОЩЬЮ СУЖАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Г. С. ВАШИ

РЕЗЮМЕ

При проектировании сужающих устройств, служащих для измерения расхода протекающих в трубопроводах флюидов (жидкостей, газов или паров), точное значение внутреннего диаметра вообще в месте монтажа не известно. Поэтому при проектировании важно знать, какой допуск можно принять по внутреннему диаметру трубопровода при различных сужающих устройствах и относительных сечениях, если труба трубопровода является стандартной, или же какой допуск следует задать для нестандартной трубы трубопровода, чтобы удовлетворительная частная погрешность измерения не превысила бы определенное значение. Автор для определения допускаемого отклонения (ΔD %) внутреннего диаметра трубы (D) разработал метод на основе того требования, что диаметр прохода, рассчитанный, исходя из верхнего и нижнего пределов D , (или же в случае сегментной диафрагмы значение $d_{id} = \sqrt{m}D$) равен допускаемым верхним и нижним предельным значениям диаметра отверстия d (соотв. значение d_{id}), рассчитанного на основе геометрического значения D . Результаты даются для двух различных нормальных диафрагм (отбор давления в углах, соотв. на расстоянии D и $D/2$), для нормального сопла (ISA 1932), нормальной расходомерной трубы (ISA 1932), конической расходомерной трубы, сегментной диафрагмы, двойной диафрагмы для соплы с профилям четверти круга. Кроме того, определяется для сегментной диафрагмы допуск на высоту сегментного отверстия, соответствующий упомянутым выше требованиям. Для сравнения сообщается значение расчетного вероятного допуска для стандартных трубопроводных труб.

НОВЫЙ ДАТЧИК ПЕРЕМЕЩЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛУПРОВОДНИКА

А. ЛЁРИНЦИ
ИНСТИТУТ ТЕХНИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ ВЕНГЕРСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

и

П. СЕБЕНИ
НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ ПРОМЫШ-
ЛЕННОСТИ ТЕХНИКИ
СВЯЗИ

[Поступило 9-го апреля 1962 г.]

В данном сообщении описывается два новых вида датчиков перемещения, работающих на основе эффекта Холла. Опытные датчики, разработанные авторами, имеют большую длину действия и выходной сигнал с датчиков в определенном месте полезного диапазона перемещений можно установить на ноль. Один из этих типов датчиков основывается на внешней специальной цепи, а второй — на необычном геометрическом оформлении полупроводниковой монокристаллической пластинки.

При измерениях расстояний, необходимых в области механики, во многих случаях требуется, чтобы измеренное значение можно было бы наблюдать на определенном расстоянии от места выполнения измерения. Эта проблема, входящая в круг дистанционного измерения при автоматизации производственных процессов, приобретает весьма важное значение. Одним из наиболее распространенных методов решения задач по дистанционному измерению является пропорциональное преобразование измеряемых величин в электрические величины [1]. В данном сообщении приводится краткое описание такого датчика перемещения, действие которого основано на использовании эффекта Холла, возникающего на полупроводниках.

Эффект Холла заключается в следующем: кусок проводника помещается в магнитное поле с индукцией B , по этому проводнику пропускается ток силой I , и между его концами перпендикулярно к направлению магнитной индукции и тока возникает напряжение, так называемое напряжение Холла, величина которого будет

$$U_H = A_H \frac{BI}{d},$$

где d — размер образца в направлении магнитного поля;

A_H — характерная для данного материала постоянная Холла, которая в случае германия и кремния равна 0,005—0,5 м³/асек. Для металлов значение этой постоянной меньше на несколько порядков.

Здесь следует отметить, что в дальнейшем мы ограничимся только такими случаями, при которых полупроводниковая пластинка размещается в перпендикулярном к пластинке магнитном поле, а именно в плоскости ней-

трали воздушного зазора магнитной цепи, т. е. параллельно поверхностям, ограничивающим воздушный зазор.

Из приведенной выше зависимости, определяющей значение напряжения Холла, видно, что в случае заданных материала и размеров и при установленной силе тока, U_H пропорционально магнитной индукции. Поэтому принципиально любая конструкция, основанная на эффекте Холла, применима в качестве датчика перемещения, если в перемещении участвует сама пластинка полупроводника, размещенная в поле с неоднородной магнитной индукцией. (В рассматриваемом поле магнитная индукция является строго монотонной функцией места.) Следовательно, в этом случае возникающее напряжение Холла является функцией перемещения, но эта зависимость как правило является нелинейной и асимптотически стремится к нулю, так как вблизи воздушного зазора магнитной цепи изменение магнитной индукции вообще происходит по такой закономерности. В результате этого обстоятельства ноль построенного таким образом прибора будет неопределенным.

Уже известен такой датчик перемещения [2, 3], который использует эффект Холла полупроводников. Однако, описанный Ф. Куртом датчик, имеет тот недостаток, что преобразование перемещения в электрический сигнал требует затраты механической работы из-за перемагничивания, возникающего при работе механизма.

Для решения упомянутых проблем мы считаем подходящим показанный на рис. 1 датчик, который по существу представляет собою два зонда Холла (каждая из двух частей, *a* и *b* полупроводниковой пластинки, размещенной между двумя полюсами магнита, является отдельным зондом Холла). Кривая «а» на рис. 2 показывает напряжение на зонде Холла, расположенного ближе к магниту, как функцию перемещения, а кривая «b» — напряжение на зонде Холла, расположенного дальше от магнита. На рисунке видно, что эти две кривые могут быть совмещены друг с другом при сдвиге их вдоль оси *X*.

Если кривую «а» сжать вдоль оси напряжения с таким расчетом, чтобы ее неизменный участок пересекал кривую «b» на ее прямолинейном участке и если исходить из разности этих двух кривых, тогда получается такая результирующая, которая линейно пересекает линию ноля. Реализуя эти соображения, разработана показанная на рис. 1 схема. Подвод тока примененный в середине полупроводниковой пластины, служит для двух целей. С одной стороны, разделяет два зонда Холла по цепи питания, а вследствие этого становится возможным осуществить сжатие (упомянутое выше) уменьшением тока зонда Холла «а» с помощью сопротивления R_1 . С другой стороны, подвод тока в середине в значительной степени уменьшает напряжение, возникающее на контактах 2 и 5 вследствие непосредственного воздействия тока питания. Естественно, что напряжения U_2 и U_5

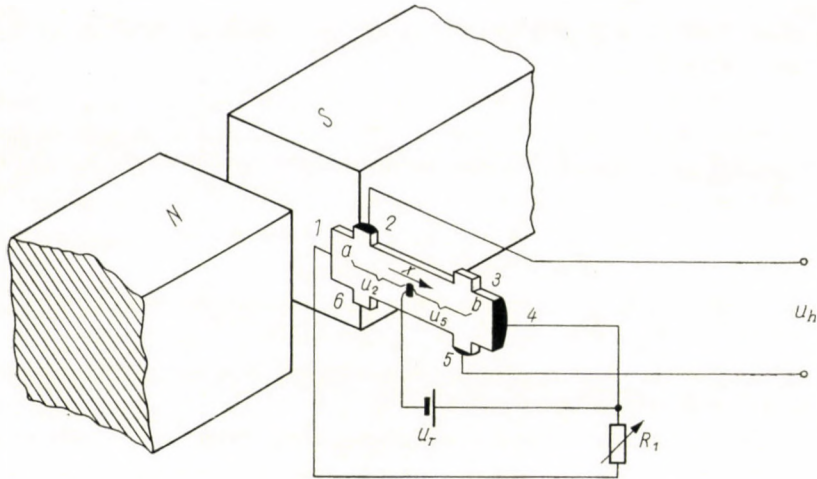


Рис. 1

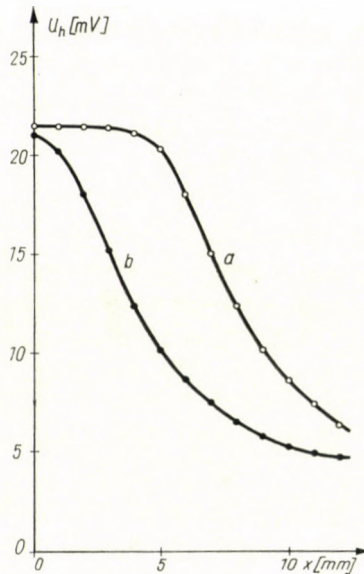


Рис. 2

в случае подходящим образом выбранных расстояний компенсируют друг друга. На рис. 3 показано напряжение, которое возникает между контактами 2 и 5 в зависимости от перемещения. Чувствительность такого датчика перемещения равна 4 мВ/мм , характеристика переходит через ноль и является линейной на участке длиной около 5 мм .

Менее наглядным, но удовлетворительным и более простым является датчик показанный на рис. 4. Прямая, соединяющая контакты, служащие

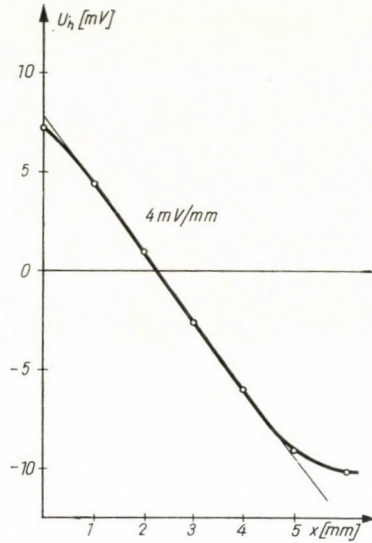


Рис. 3

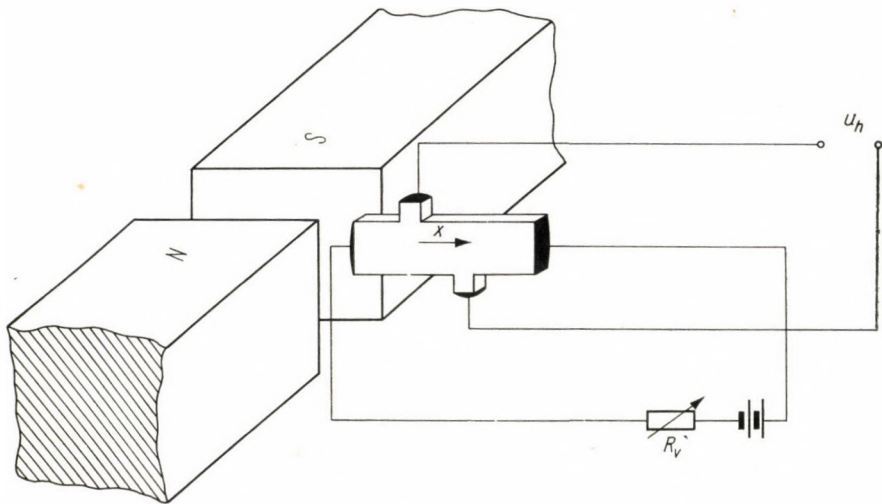


Рис. 4

для отвода пропорционального перемещению напряжения, не перпендикулярна к направлению тока, текущего по длине пластинки полупроводника, поэтому на них даже без магнитного поля возникнет некоторое определенное напряжение. В случае подходящим образом выбранного магнитного поля это напряжение компенсируется напряжением Холла, таким образом получается точка нуля характеристики, которая даже в случае изменения тока питания остается в определенном конструкцией месте.

Характеристика такого датчика перемещения показана на рис. 5. Характеристика имеет линейный участок в несколько миллиметров, чувствительность датчика перемещения равна 20 мВ/мм.

Важно отметить, что у обоих типов чувствительность пропорциональна току питания.

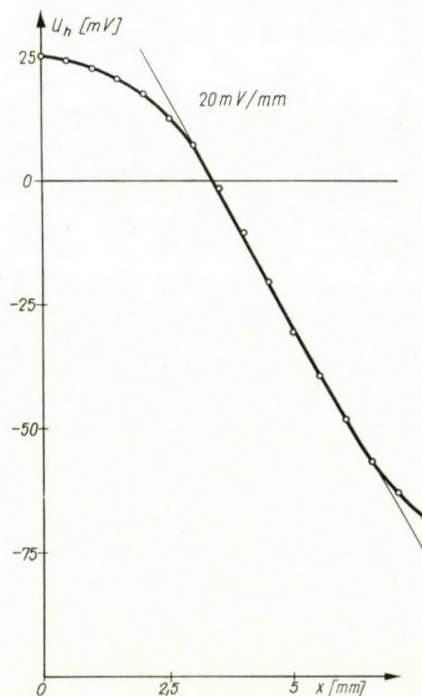


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Туричин, А. М.: Измерение неэлектрических величин электрическим методом. Техиздат, Будапешт 1956.
2. KUERT, F.: Der Hall-Generator und seine Anwendung in der Messtechnik. *Nachrichtentechnische Fachberichte* **20** (1961), 19.
3. GRUBBS, W. J.: Hall effect devices. *Bell System Techn. Journal* **38** (1959), 853.

A NEW DISPLACEMENT TRANSDUCER USING SEMICONDUCTORS

A. LŐRINCZY and P. SZE BENI

SUMMARY

The paper deals with two new types of displacement transducers based on the Hall effect. The experimental transducers have great operating length and can be zeroed. One type is based on a special external circuit, the other is based the special geometric shape of the semi-conducting monocrystal plate.

EIN NEUER WEGUMFORMER MIT HALBLEITERN

A. LÓRINCZY und P. SZEKENI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit beschreibt zwei neue Arten von Wegumformern die auf dem Hall-Effekt beruhen. Die experimentellen Umformer haben einen großen Arbeitshub und können auf Null eingestellt werden. Der eine Typ beruht auf einer äußeren Kunstschaltung, der andere auf einer speziellen geometrischen Ausbildung der Halbleiter-Einkristallplatte.

NOUVEAUX TRANSMETTEURS DE DÉPLACEMENT UTILISANT
DES SEMI-CONDUCTEURS

A. LÓRINCZY et P. SZEKENI

RÉSUMÉ

L'étude présente deux nouveaux transmetteurs de déplacement basés sur l'effet Hall. Les modèles d'essai des transmetteurs ont une grande longueur de fonctionnement et leur zéro est ajustable. L'un des modèles est basé sur un circuit artificiel extérieur, et l'autre sur la forme géométrique spéciale donnée à la plaque monocristalline semi-conductrice.

WARMING UP OF WET MINE AIR

I. TARJÁN

CAND. OF TECHN. SC.

DEPARTMENT FOR MINE MACHINERY TECHNICAL UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRY, MISKOLC

[Manuscript received February 26, 1962]

In the paper relying on measurements carried out in deep mines, the warming up of mine air is dealt with, taking the cooling effect of evaporation into consideration. Under a suitable simplifying condition, verified by experience a solution was found in a form suitable for general computations. The application of the method is shown in a practical example.

The solution of problems emerging with air conditioning of mines, more particularly the computation of the warming up of the air flowing through shafts and drifts, taking besides the rock heat, also the vaporization of water, oxidation and other heating or cooling effects and the annual and daily fluctuations of the intake air temperature into consideration, have been subject of scientific investigations on ventilation of mines carried out in the last decade [1].

In the course of these tests on the conditioning of mine air it was possible to determine the warming of same, both in a single drifts and in a network of drifts as well. The relationships involved are very intricate even in the case when only the heat flowing from rock to drift are taken into consideration, even neglecting the influence of other heat effects and that of evaporation. By introducing the equivalent cylinder the intricate relations were made suitable for practical computations.

Until now the heat effect due to water evaporation was taken into consideration only when an air flow through a horizontal shift or draft was concerned; the discrepancy between the results and measurements however indicate that they do not express with adequate accuracy the actual phenomena involved.

Hitherto it was not possible to determine by computation to which degree air flowing in a network of drifts is warmed up, simultaneously influenced by rock heat and water evaporation. This could be done only if by a single formula the effect of evaporation in a horizontal drift could be taken into consideration duly describing the physical phenomenon involved, one suitable concerning an air flow in a network of drifts.

In the following, based on measurements carried out in deep mines, the cooling effect of evaporation in a horizontal drift is to be discussed.

The differential equation describing the warming up of wet mine air simultaneously considering both the cooling effect of evaporation and the rock heat as well, it follows [2]:

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{q}{V \cdot c_p} + \frac{\varrho}{c_p} \cdot \frac{db}{dz}$$

where $\tau = T_K - T_0$; T_K represents the initial rock temperature at drift level [$^{\circ}\text{C}$], T_0 the air temperature in any optional point of the drift [$^{\circ}\text{C}$], $q = \lambda F(\psi) \cdot \tau$ is the heat flowing from the rock into the drift, while λ stands for the thermal conductivity of the rock surrounding the drift [$\text{kcal/m, h, }^{\circ}\text{C}$].

$$F(\psi) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\psi\beta^2}}{I_0^2(\beta) + Y_0^2(\beta)} \cdot \frac{d\beta}{\beta}$$

The function is a monotonously diminishing one with positive value given in table [5]; $\psi = a \cdot t/R^2$ in which a is the temperature conductivity [m^2/h], t the length of time [m], R the radius of the drift [m], z the length of the drift [m], c_p the specific heat of the air [$\text{kcal/m}^3, ^{\circ}\text{C}$], and V the volume of the air flowing through the drift during a unity of time, while ϱ represents the evaporation heat of water [kcal/g].

The first member in the right side of the differential equation comprises the califying effect of rock heat, the second the cooling effect of evaporation.

Symbol b in the equation stands for the amount of vapour that got into the air from the wet drift by evaporation or in other words, the quantity of vapour taken up at any optional point of the drift by the air flowing through same. The investigations hitherto mentioned concerning this question prescribed a condition of evaporation given by the formula $b = b(z)$ and depending on the form of the function presented an exponential or linear condition of evaporation [3].

If an exponential condition of evaporation prevails, the vapour along a drift being z whose length is Z is established by the equation

$$b = b(Z) \frac{1 - e^{-kz}}{1 - e^{-kZ}}$$

while for a linear condition the formula

$$b = b(Z) \frac{z}{Z}$$

is valid.

Both formulae are approximations, as the evaporation taking place in a mine drift is not a well-defined phenomenon. What can be measured is the vapour content of the air entering the drift and the total amount of vapour having come into being till the end of the drift [$b(Z)$].

Under the linear condition of evaporation the differential equation could be more conveniently handled and the solution more easily found, and in many cases might be found the solutions to most practical demands as to accuracy. Even in the most simple case, however, it has not been possible to take the cooling effect of evaporation when a drift network was concerned into consideration, as the relationships obtained were very intricate and could not be applied for practical purposes.

Both linear and exponential conditions of evaporation had the common feature they both describe i.e. to establish the amount of vapour having got into the air as a function of the shaft length.

From the point of the shaft onwards, where the air has reached the state of saturation at any point of same, so much water would evaporate, that the air would become saturated at the given temperature. Accordingly in this case the condition of evaporation is directly obtained as the function of the mine air temperature

$$b_t = b_t(T_0).$$

In an earlier paper this relationship — the vapour content of the air saturated with vapour — was approximately given with an exaggerated accuracy by a polynom of fourth-degree over the temperature domain between 10 and 50 °C [3]. Accordingly the solution of the differential equation represents an intricate relationship even for the saturated section, one not suitable to be applied for drift networks.

When the warming up of the mine air caused by rock heat and the simultaneous cooling down due to evaporation is to be investigated, one has to start from a condition of evaporation that is equally valid for both the unsaturated as well as for saturated section, one comprising the evaporation as a direct function of temperature. On evaporation only vapour is formed on the liquid surface, getting into the air adjacent to the liquid surface by means of diffusion and convection. In state of equilibrium the amount of heat needed to bring about an increase in the vapour content of the air is eventually covered by the heat content of the air. The effect of evaporation is observable as a change taking place in air temperature; further the change in vapour content is possible only by measuring the dry and wet temperature. As a consequence of this it is correct to give the variation of evaporation taking place along the drift bay be determined indirectly by way of the function temperature vs. drift length.

In the saturated section the evaporation with $\varphi = 1$ relative vapour content is given as a condition. This condition and the vapour content pertaining to the saturated state $b_t = b_t(T_0)$ as determinable by means of the curve $i - x$ can be given with any optional accuracy in tabular form. As the curve $i - x$ shows, the diagram $\varphi = 1$ may be considered as approximately a straight

over the temperature domain lying between 20 and 30 °C, an evaporation condition involving the following relationship to exist within this interval

$$b_t = b_t(T_0) = a_0 + a_1 T_0.$$

Or, in other words, the ratio of heat to moisture taken up by the mine air is constant

$$\frac{db_t}{dT_0} = a_1.$$

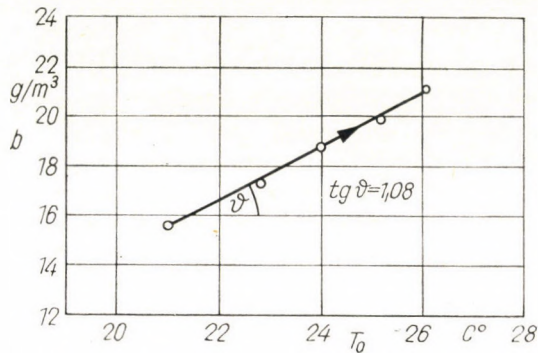


Fig. 1

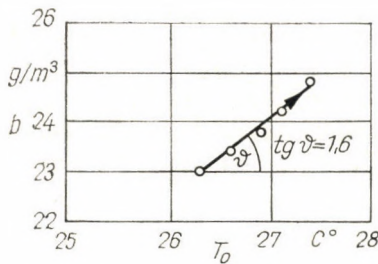


Fig. 2

Let us now examine this assumption in the case of the unsaturated state i.e. when

$$\frac{db}{dT_0} = \xi,$$

from which with the conditions $z = 0$, $T_0 = T_{00}$, $b = b_0$ as evaporation conditions the formula

$$b = b_0 + \xi (T_0 - T_{00})$$

is obtained.

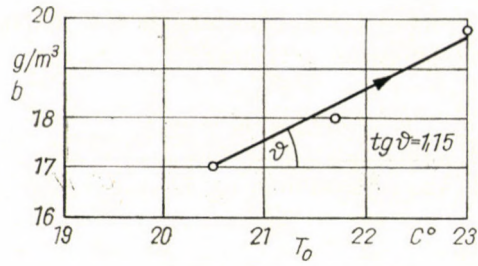


Fig. 3

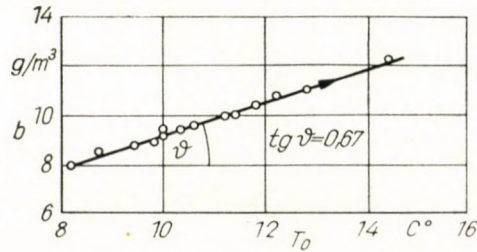


Fig. 4

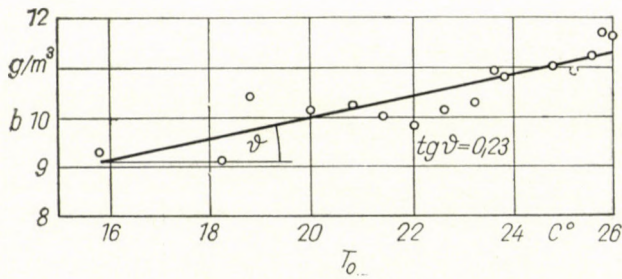


Fig. 5

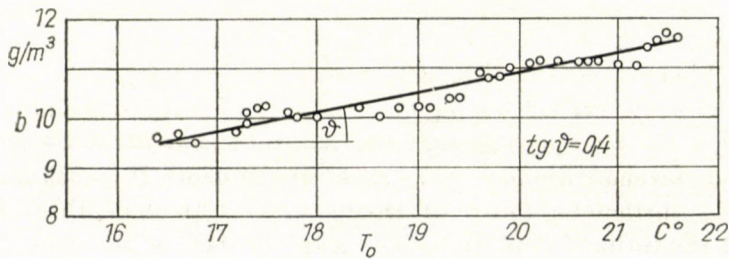


Fig. 6

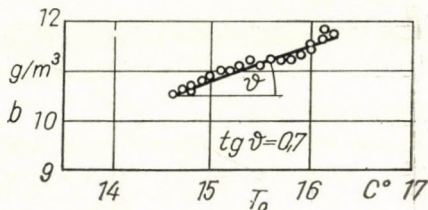


Fig. 7

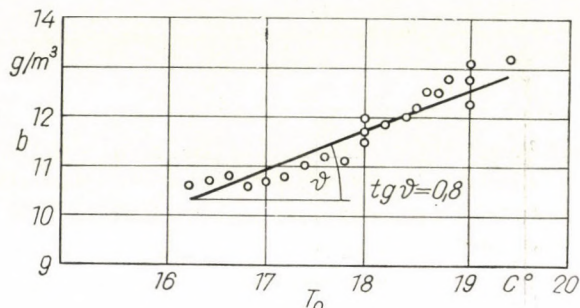


Fig. 8

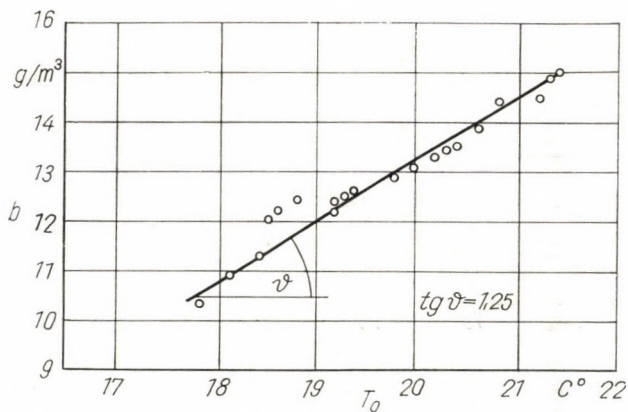


Fig. 9

SCSERBANI and KREMNIÉV in their book "Air Cooling and Drying in Deep Mines" [4] give diagrams for $b = b(z)$ and $T_0 = T_0(z)$, these were taken from measurements carried out in the coal basin Donbass. Eliminating the shift length z the relationships between moisture content and temperature $b = b(T_0)$ for the shaft Donbass No. 17—17 at the depth $H = 855$ m, at deep level (Fig. 1), further for the shaft Donbass No. 4/21 at depth of $H = 680$ (Fig. 2) and the inclined shaft Donbass "Komsomolec" at the depth of 620—533 m (Fig. 3) were plotted.

Based on indigenous measurements the plots representing the moisture content vs. temperature taken for the inclined shaft in Sajószentpéter II. and for Pécs are given in Figs. 4 i.e. 5 to 9.

It is characteristic for all measurements, that the condition

$$b = b_0 + \xi (T_0 - T_{00})$$

is valid, $\xi = \text{constant}$, accordingly

$$\frac{db}{dT_0} = \xi = \text{constant}$$

and the ratio of heat to moisture taken up by the mine air may with a fair approximation be considered as constant in the unsaturated section, too. Thus, as to the unsaturated state the aforesaid condition means, that when the temperature of the air flowing through the drift changes by one °C, the constant moisture intake ξ [g/m³] takes place. Accordingly the cooling effect of the evaporation may generally be taken into consideration if an evaporation factor conforming to experience is chosen.

Thus the relationships obtained for the dry and saturated states appear as special cases when describing unsaturated section.

The differential equation of the warming up of the air under this condition will be as follows:

$$\frac{d\tau}{dz} = - \frac{\lambda F(\psi)}{V \cdot c_p} \tau + \frac{\rho}{c_p} \cdot \frac{db}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz}$$

or arranged in another way

$$\frac{d\tau}{dz} \left(1 - \frac{\rho}{c_p} \cdot \frac{db}{d\tau} \right) = - \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot c_p} \tau.$$

Relying upon the aforesaid

$$\frac{db}{d\tau} = - \frac{db}{dT_0} = - \xi,$$

thus

$$\frac{d\tau}{dz} = - \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot c_p} \cdot \frac{1}{1 + (\rho/c_p)\xi} \cdot \tau.$$

The solution of the differential equation is, when $z = 0$, $T_0 = T_{00}$, $\tau = \tau_0$

$$\tau = \tau_0 \cdot \exp \left[- \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot c_p} \cdot \frac{1}{1 + (\rho/c_p) \cdot \xi} z \right].$$

In the dry case, where there is no evaporation ($\xi = 0$) the well known solution

$$\tau = \tau_0 \cdot \exp \left[- \frac{\lambda F(\varphi)}{V c_p} \cdot z \right]$$

is obtained. The difference between the formulae obtained for the so-called dry and wet case shows itself only in the multiplying factor in the exponent

$$\frac{1}{1 + (\varrho/c_p) \cdot \xi},$$

while in other respects the relationship is identical for both cases.

After the saturated state has been reached $\xi = a_1$ then the formula describing the warming up of the air is as follows:

$$\tau = (T_K - T'_0) \exp \left[- \frac{\lambda F(\psi)}{V \cdot c_p} \cdot \frac{1}{1 + (\varrho/c_p) \cdot a_1} \cdot z \right].$$

The moisture content of the air entering the drift with the initial vapour content b_0 and temperature T_{00} will increase along the drift, its growth is determined by the evaporating coefficient ξ and by means of equation

$$b = b_0 + \xi (T'_0 - T_{00}) = a_0 + a_1 \cdot T'_0 = b_t$$

the temperature T'_0 adequate for the state of saturation to be determined

$$T'_0 = \frac{a_0 - b_0 + \xi T_{00}}{\xi - a_1}.$$

Relying upon the original equation, this will be the case at place

$$z' = - \frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(1 + \frac{\varrho}{c_p} \xi \right) \cdot \ln \frac{T_K - T'_0}{T_K - T_{00}}.$$

The process of evaporation as it occurs along the drift may be computed by the relationship typical of the saturated condition.

The course of the moisture intake along the drift is from the formula $db/d\tau = -\xi$.

$$b - b_0 = -\xi (\tau - \tau_0) = \xi (T_0 - T_{00}) = \xi \cdot \tau_0 \left[1 - \exp \left(\frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot c_p} \cdot \frac{1}{1 + (\varrho/c_p) \cdot \xi} \cdot z \right) \right].$$

As may be seen, this equation is, apart from the factor ξ the same as the one

$$T_0 - T_{00} = \tau_0 \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda F(\psi)}{V \cdot c_p} \frac{1}{1 + (\rho/c_p) \cdot \xi} \cdot z \right) \right]$$

describing the heat intake. Thus the moisture intake along the drift has an exponential character.

Let us now examine in what way the variation of the evaporating coefficient in the relation established for the insaturated state will influence the warming up of the air.

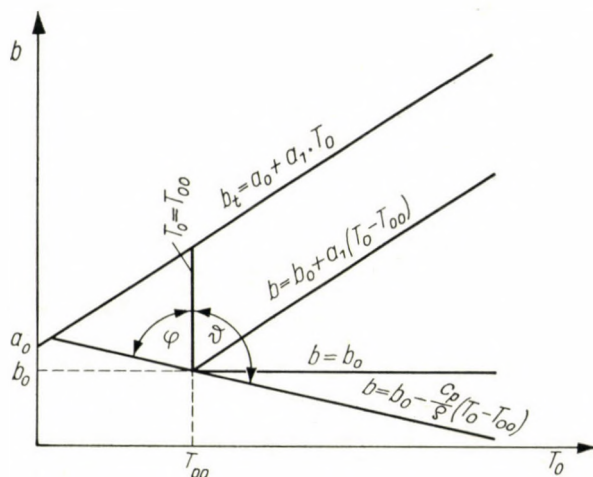


Fig. 10

a) Along the drift the temperature of the mine air will rise, that is to say $T_0 > T_{00}$ when

$$\frac{1}{1 + (\rho/c_p) \cdot \xi} > 0,$$

i.e.

$$\frac{db}{dT_0} = \xi > - \frac{c_p}{\rho}.$$

Reproducing this case on plane $b - T_0$ the straights $b = b_0 + \xi(T_0 - T_{00})$ representing the evaporation process start from point $[b_0; T_{00}]$ and proceed within the angle ϑ marked in figure (Fig. 10) in the direction of the increasing values T_0 .

If the directional tangent of the evaporation straight proceeds within angle ϑ is $\xi = 0$ no change in the vapour content will take place during the warming up of the mine air, this is adequate too, in the case of the dry drift.

When within angle ϑ $0 < \xi < \infty$ determines the direction of the evaporation straight, the mine drift is a wet one, there evaporation is going on and in spite of this the air will warm up as the temperature rise due to rock heat exceeds the cooling effect of evaporation. In this angle range, in case that $0 < \xi \leq a_1$ the vapour content of the mine air will increase due to evaporation without ever reaching the state of saturation. When $a_1 < \xi < \infty$ the intake of moisture by the mine air becomes so vigorous, that somewhere within the drift the air becomes saturated by vapour, whereupon the temperature variation may be determined by means of the relationship valid for the saturated state.

If within angle ϑ $-c_p/\varrho < \xi < 0$, this means, that a decrease in the vapour content of the mine air, a condensation would take place, while the temperature rises. This case was not investigated.

b) The temperature of mine air is constant along the drift, $T_0 = T_{00}$ if $\xi = \infty$. In this case the vapour content of the air will increase, while the temperature remains unchanged until the state of saturation at point

$$z' = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[-\frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(1 + \frac{\varrho}{c_p} \cdot \xi \right) \cdot \ln \frac{T_K - T'_0}{T_K - T_{00}} \right]$$

of the drift is reached, where relying upon the aforesaid, the temperature is as high as

$$T'_0 = \frac{a_0 - b_0 + \xi \cdot T_{00}}{\xi - a_1}.$$

Substituting value T'_0

$$z' = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\frac{V c_p}{\lambda F(\psi)} \left(1 + \frac{\varrho}{c_p} \cdot \xi \right) \ln \frac{(T_K - T_{00}) \xi - (T_K - T_{00}) a_1}{(T_K - T_{00}) \xi - a_0 + b_0 - a_1 T_K} \right]$$

is obtained. Making the substitution $1/\xi = \mu$ and applying the rule of Bernoulli and l'Hospital

$$\begin{aligned} z' &= \frac{V c_p}{\lambda F(\psi)} \cdot \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \frac{(T_K - T_{00}) - (T_K - T_{00}) a_1 \cdot \mu}{(T_K - T_{00}) - (a_0 - b_0 + a_1 T_K) \mu}}{\frac{\mu}{(\varrho/c_p) + \mu}} \right] = \\ &= \frac{V c_p}{\lambda F(\psi)} \cdot \frac{\varrho}{c_p} \cdot \frac{a_0 + a_1 T_{00} - b_0}{T_K - T_{00}}. \end{aligned}$$

c) Along the drift the air temperature will decrease i.e.

$$T_0 < T_{00}.$$

When

$$\frac{1}{1 + (\varrho/c_p) \xi} < 0,$$

thus

$$\frac{db}{dT_0} = \xi < -\frac{c_p}{\rho}$$

Representing this case on plane $b - T_0$ the straights $b = b_0 + \xi(T_0 - T_{00})$ which describe the evaporation process, starting out from the point $[b_0; T_{00}]$ and proceed within the angle domain φ in the direction towards diminishing T_0 -values.

For the computation of the warming up of the wet air a practical example using the following data was worked out:

- $T_K = 40^\circ\text{C}$, original temperature at drift level;
 $a = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$, temperature conductivity of the rock surrounding the drift;
 $t = 10^4 \text{ h}$, length of ventilation time;
 $R = 1 \text{ m}$, radius of the drift;
 $\lambda = 1.7 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$, thermal conductivity of the rock surrounding the drift;
 $V = 23 \text{ 100 m}^3/\text{h}$, amount of air flowing through the drift;
 $T_{00} = 20^\circ\text{C}$, temperature of the air entering the drift;
 $b_0 = 12 \text{ g/m}^3$, moisture content of the air entering the drift;
 $c_p = 0.3 \text{ kcal/m}^3 \cdot ^\circ\text{C}$, specific heat of the air under constant pressure referring to the air volume.
 With these data

$$\psi = \frac{a \cdot t}{R^2} = 28, \quad F(\psi) = 2.72. \quad [5]$$

Further

$$\frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\psi)} = 1500 \text{ m}.$$

Substituting these values into the relationship describing the warming up of the air, the formula

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{z}{1500} \frac{1}{1 + 1.8\xi}\right)$$

that is to say, the warming up of the air as a function of the drift length is described by the relation

$$T_0 = 40 - 20 \cdot \exp\left(-\frac{z}{1500} \frac{1}{1 + 1.8\xi}\right).$$

The curves in Fig. 11 drawn as full lines at the different evaporation coefficients $\xi [1/(1 + 1.8\xi)]$ show the variation coefficients of air temperature as a function of drift length. The air flowing through the drift will become saturated depending the intensity of evaporation when its temperature is as high as

$$T'_0 = \frac{a_0 - b_0 + \xi \cdot T_{00}}{\xi - a_1}.$$

Relying on the $i - x$ diagram with a fairly good approximate linear interpolation valid in the temperature range between 20 and 30°C, the formula

$$b_t = a_0 + a_1 \cdot T_0 = 1.16 \cdot T_0 - 5.7 \text{ g/m}^3$$

is obtained.

By substituting a_0 and a_1

$$T'_0 = \frac{20 \cdot \xi - 17.7}{\xi - 1.16}.$$

The mine air is to have this temperature at point

$$z' = 1500 (1 + 1.8\xi) \ln \frac{40}{40 - T'_0}$$

in the drift.

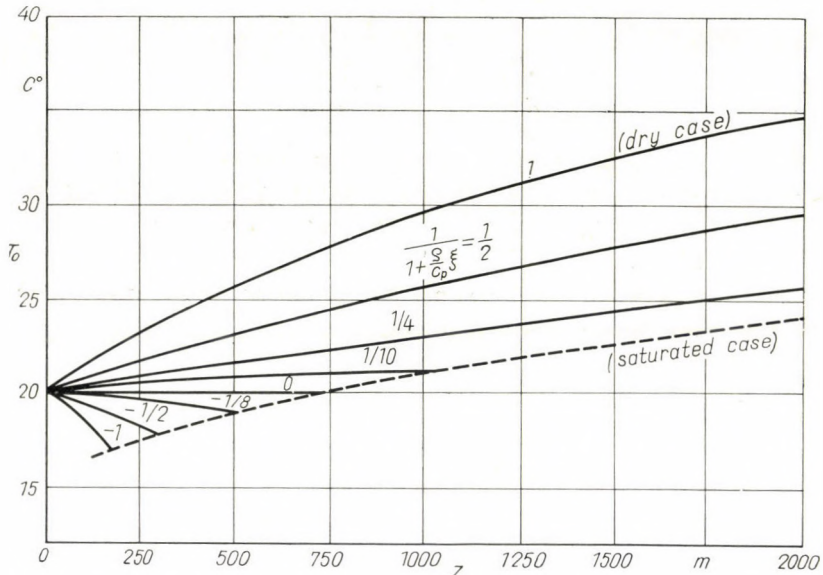


Fig. 11

In the particular case, when $\xi \rightarrow \infty$

$$z'(\xi \rightarrow \infty) = 1500 \cdot 1.8 \frac{20 \cdot 1.16 - 17.7}{20} = 743 \text{ m.}$$

In Figure 11 a dotted line represents the variation in the warming up of the air after the saturated state has been reached. Relying on the figure it can be seen, that without artificial cooling only by evaporation, the lowest temperature that can be obtained is

$$T_0 (Z = 2000 \text{ m}) = 24.4^\circ\text{C.}$$

REFERENCES

1. TARJÁN, I.: Investigations on Air Conditioning and Ventilation in Mines. *Bányászati Lapok* (1961), No. 12.
2. BOLDIZSÁR, T.: Ein numerisch-graphisches Verfahren zur Berechnung der Erwärmung von Grubenwettern. *Bergbau Archiv* 21 (1960), H. 2.
3. TARJÁN, I.: Warming up of Mine Air Saturated by Vapour. *Bányászati Lapok* (1960), No. 4.
4. SCSEBANI—KREMNEV: Air Cooling and Drying in Deep Mines. Ac. of Sc. of the Soviet Union, Kiev 1956.
5. BOLDIZSÁR, T.: The Influence of Heat Transfer from Rock to Air on the Warming up of the Mine Air. *Publications of the Technical University for Heavy Industry, Miskolc* 23 (1960).

DIE ERWÄRMUNG VON NASSEN GRUBENWETTERN

I. TARJÁN

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund von Messungen, die in tiefliegenden Gruben durchgeführt wurden, wird die Erwärmung von Grubenwettern untersucht, wobei die Kühlwirkung des Verdampfens mitberücksichtigt wird. Mit einer zweckmäßigen, durch die Praxis belegten vereinfachenden Bedingung wurde die Lösung in einer allgemeinen und zur Durchführung von Berechnungen geeigneten Form erhalten. Die Anwendung der Berechnungsmethode wird anhand eines praktischen Beispiels gezeigt.

L'ÉCHAUFFEMENT DE L'AIR DE MINE HUMIDE

I. TARJÁN

RÉSUMÉ

L'étude partant de mesures faites dans des mines profondes, examine l'échauffement de l'air de mine en tenant compte de l'effet refroidissant de l'évaporation. Avec une condition de simplification utile et confirmée aussi par la pratique, la solution s'obtient sous une forme générale se prêtant bien aux calculs. Un exemple pratique illustrant l'application est présenté par l'auteur.

НАГРЕВ ВЛАЖНОГО ВОЗДУХА В ШАХТАХ

И. ТАРЬЯН

РЕЗЮМЕ

Исследуется нагрев воздуха шахт, принимая во внимание охлаждающее действие испарения, исходя из данных замеров, проведенных в глубоких шахтах. При целесообразном и поддержанном практикой упрощающем условии получено общее решение, подходящее для проведения расчетов. Применение решения показано автором на практическом примере.

ÜBER EINE FRAGE DER EXPERIMENTELLEN UNTERSUCHUNG DES DYNAMISCHEN PLASTISCHEN ZUGES

GY. BÉDA

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE LEHRSTUHL FÜR MECHANIK, MISKOLC

[Eingegangen am 15. November 1962]

Der im Laufe des dynamischen Zuges entstehende mehrachsige Spannungszustand kann mit Hilfe des Integralmittels der kinematischen und Festigkeitswerte durch die Bewegungs- und Formänderungsgleichungen beschrieben werden, die den einachsigen Spannungszustand kennzeichnen. Das für den Querschnitt gebildete Integralmittel der Geschwindigkeit des Querschnittes des Prüfkörpers kann nach der in [2] beschriebenen Methode mit der besten Annäherung durch die Anwendung eines bandförmigen Prüfkörpers gemessen werden. Auf Grund der in [2] und [3] mitgeteilten Versuchsergebnisse ist der Höchstwert der querverrichteten Geschwindigkeit des Bandes kleiner als 2% des Integralmittels der Geschwindigkeit im entsprechenden Querschnitt.

1. Die Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Materials wird im allgemeinen durch die Herbeiführung der Erscheinung des dynamischen Zuges vorgenommen. Im Laufe der Prüfung wird ein zylindrischer, kurzer oder langer Stab, ein Draht oder ein dünnes Band verwendet, wobei der dynamische Zug durch eine kurz anhaltende Belastung oder einen Schlag hervorgerufen wird. Wenn die die Erscheinung beschreibende Differentialgleichung bezüglich der Geschwindigkeit, des Formänderungs- und Spannungszustandes von erster Ordnung ist, so stellen die im verwendeten Prüfkörper entstandenen Wellen schwache bzw. starke Wellen dar.

Im Bereiche der elastischen Formänderungen können die Untersuchungen dieser Art in vieler Hinsicht als abgeschlossen betrachtet werden. Im Bereiche der plastischen Formänderungen ist dies jedoch bei weitem nicht der Fall. Das Nachstehende soll sich eben an diese Frage anknüpfen.

Wir wollen zunächst die Gleichungen betrachten, die — unter Voraussetzung geringfügiger Formänderungen — die Erscheinung des dynamischen Zuges beschreiben. Es sei zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Koordinatensystem xyz gewählt, und zwar derart, daß die z -Achse mit der Achse des Prüfstabes zusammenfällt, während die x - und y -Achsen im Querschnitt des Prüfstabes liegen.

Wenn die Bewegungen in Richtung der x - und y -Achsen (die Bewegungen in Querrichtung) vernachlässigt und vorausgesetzt wird, daß im Laufe der Formänderung die Querschnitte eben bleiben [1], so wird die Erscheinung

durch das Differentialgleichungssystem

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}, \quad (2)$$

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) = 0 \quad (3)$$

beschrieben, wo v_z die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung z , σ_z bzw. ε_z die Spannung bzw. die spezifische Dehnung in Richtung der z -Achse und ρ die Dichte des Prüfkörpers bedeutet. Bei der Anschreibung dieser Gleichungen wurde das Gewicht des Probestabes vernachlässigt, und so wird auch im nachfolgenden vorgegangen. Selbstredend gehören diesen Gleichungen noch die die Art der Belastung ausdrückenden Anfangs- und Randbedingungen zu. Die dritte Gleichung stellt die Materialgleichung dar, die nach der Fachliteratur mehrere Formen annehmen kann. Die Veränderlichen ξ_1, \dots, ξ_i der Funktion F stellen irgendwelche kinematischen und Festigkeitsparameter dar.

Von den in den Gln. (1), (2) und (3) vorkommenden Funktionen wollen wir voraussetzen, daß sie nach ihren Veränderlichen mindestens einmal differenzierbar sind. Diese Voraussetzung wollen wir auch im nachstehenden immer beibehalten.

Es ist üblich, diese Gleichungen an Stelle der Lagrangeschen Koordinaten mit Hilfe der Eulerschen Koordinaten anzuschreiben. Im weiteren wollen wir stets die Lagrangeschen Koordinaten verwenden, und so geben die Koordinaten xyz stets die Lage irgendeines Punktes des Probestabes vor der Belastung an.

Wenn wir auch weiter nur geringfügige Formänderungen betrachten, wenn wir ferner die Bewegung in der Querrichtung nicht vernachlässigen und über die Formänderung des Querschnittes nichts voraussetzen, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \Phi \nabla, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (\nabla \circ \vec{v} + \vec{v} \circ \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(\xi_1, \dots, \xi_i) = \mathbf{0}.$$

In diesen Gleichungen stellt Φ den Spannungstensor und \mathbf{A} den Formänderungstensor dar.

In den Gleichungen (1) und (2) ist auch der Umstand enthalten, daß im Falle des dynamischen Zuges ein einachsiger Spannungszustand entsteht, und daß die xyz -Achsen die Hauptrichtungen des Spannungs- und Formänderungs-

zustandes angeben. Auf Grund der Gleichungen (4) und (5) trifft dies jedoch nicht zu. Auf Grund der Gleichung (5) kommt nämlich im allgemeinen z.B. eine Winkeländerung γ_{zy} vor, da

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial t}$$

ist, und \vec{v} im allgemeinen eine Funktion von x, y, z und t darstellt.

Wird die Annahme beibehalten, daß die Hauptrichtungen des Spannungs- und des Formänderungszustandes zusammenfallen, so muß im allgemeinen auch die Spannung τ_{zy} auftreten.

2. Das Messen des im Laufe des dynamischen Zuges entstandenen mehrachsigen Spannungszustandes stellt eine äußerst verwickelte experimentelle Aufgabe dar. Eine augenfällige Schwierigkeit wird dadurch verursacht, daß die gemessenen Größen stets das Integralmittel über einen geometrischen Bereich der in den Gleichungen vorkommenden Größen darstellen. Im folgenden wollen wir diese Gleichungen in der Weise anschreiben, daß wir für jede in ihnen vorkommende Größe das Integralmittel über den Querschnitt von der Fläche A des Probestabes berechnen. Das Integralmittel einer Funktion f über den Querschnitt A möge mit \tilde{f} bezeichnet werden, d. h.,

$$\tilde{f} = \frac{1}{A} \iint_A f \cdot dA.$$

Damit erhalten wir durch die Bildung des Integralmittels der beiden Seiten der Gleichung (4):

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \tilde{v} = \frac{1}{A} \iint_A \Phi \nabla dA. \quad (6)$$

Nun wollen wir den Hamiltonschen Operator ∇ als die Summe von zwei Operatoren anschreiben, von denen der eine Operator ∇_0 in der Ebene des Querschnittes, der andere Operator $\partial \vec{k} / \partial z$ in der Richtung z , senkrecht zum Querschnitt wirkt. Damit erhalten wir für die linke Seite der Gl. (6):

$$\frac{1}{A} \iint_A \Phi \nabla dA = \frac{1}{A} \iint_A \Phi \nabla_0 dA + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{A} \iint_A \Phi dA \right) \vec{k}.$$

Wird nun das erste Glied dieser Identität mit Hilfe des Satzes von Gauss-Ostrogradskij umgeformt und im zweiten Glied an Stelle des in Klammer stehenden Ausdruckes $\tilde{\Phi}$ geschrieben, so wird (6) zu

$$\frac{1}{A} \iint_A \Phi \nabla dA = \frac{1}{A} \oint_C \Phi \vec{n} ds + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\Phi} \vec{k},$$

wo \vec{n} die nach außen weisende Normale der den Querschnitt begrenzenden Kurve C und ds das Wegelement der Kurve C darstellt.

Da der Mantel des dynamisch gezogenen Probestabes unbelastet ist, so gilt in jedem Punkt des Mantels

$$\Phi \vec{n} \equiv \vec{0},$$

und damit

$$\oint_C \Phi \vec{n} ds \equiv \vec{0}.$$

Für Gl. (6) ergibt sich schließlich die folgende Form:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial(\Phi \vec{k})}{\partial z}. \quad (7)$$

Wenn die gleiche Rechnung mit Gl. (5) durchgeführt wird, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{2A} \oint_C (\vec{n} \circ \vec{v} + \vec{v} \circ \vec{n}) ds + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{k} \circ \vec{v} + \vec{v} \circ \vec{k}). \quad (8)$$

Der Querschnitt des Probestabes sei ein Rechteck. Die Koordinatenachsen x und y seien in der Weise gewählt, daß sie mit den Symmetrieachsen des Querschnittes zusammenfallen. Wenn die mit der x -Achse parallele Seite des Querschnittes gleich $2a$ und die mit der y -Achse parallele Seite gleich $2b$ ist, so ergibt sich für die Fläche des Querschnittes $4ab = A$, und $\vec{v} \vec{i} = v_x$ stellt eine ungerade Funktion von x und eine gerade Funktion von y , $\vec{v} \vec{j} = v_y$ eine gerade Funktion von x , eine ungerade von y und $\vec{v} \vec{k} = v_z$ eine gerade Funktion von sowohl x wie auch von y dar.

Damit erhalten wir:

$$\vec{v} = \frac{1}{A} \iint_A \vec{v} dA = \vec{v}_z \vec{k}.$$

Für die Gln. (7) und (8) ergibt sich:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z}, \quad (7a)$$

$$0 = \frac{\partial \vec{\tau}_{xz}}{\partial z}, \text{ woraus } \vec{\tau}_{xz} \equiv 0,$$

$$0 = \frac{\partial \vec{\tau}_{yz}}{\partial z}, \text{ woraus } \vec{\tau}_{yz} \equiv 0.$$

(Keine der beiden Größen kann nämlich ausschließlich eine Funktion der Zeit sein)

$$\frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial t}, \quad (8a)$$

$$\frac{2}{A} \int_{-b}^b v_x(a, y, z, t) dy = \frac{\delta \tilde{\epsilon}_x}{\delta t}, \quad (8b)$$

$$\frac{2}{A} \int_{-a}^a v_y(x, b, z, t) dx = \frac{\delta \tilde{\epsilon}_y}{\delta t}, \quad (8c)$$

$$\frac{\delta \tilde{\gamma}_{xy}}{\delta t} = \frac{\delta \tilde{\gamma}_{xz}}{\delta t} = \frac{\delta \tilde{\gamma}_{yz}}{\delta t} = 0.$$

Die Form der Gleichungen (7a) und (8a) stimmt mit der der Gleichungen (1) und (2) überein. Die Gleichungen des dynamischen Zuges für das Integralmittel der über den Querschnitt des Probestabes berechneten kinematischen und Festigkeitskennzahlen sind vom gleichen Typ wie die Gleichungen, die dem einachsigen Spannungszustand entsprechen.

Die in den Gleichungen (7a) und (8a) vorkommende Geschwindigkeit \tilde{v}_z kann mit der besten Annäherung an einem bandförmigen Probekörper gemessen werden. Es sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z derart gewählt, daß die z -Achse in die Längsachse des Bandes und y in die Ebene des Bandes falle. Die x -Achse steht somit senkrecht auf der Ebene des Bandes. Für ein dünnes Band können wir außerdem voraussetzen, daß v_y von x unabhängig ist. Für ein Band ändert sich somit von den Gleichungen (7a), (8a), (8b), (8c) allein die Gl. (8c).

Es ist nämlich

$$\frac{2}{A} \int_{-a}^a v_y dx = \frac{2}{A} v_y \int_{-a}^a dx,$$

d. h., die Gl. (8c) wird von der Form von

$$\frac{2}{A} 2a v_y(b, z, t) = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_y}{\partial t},$$

bzw.

$$\frac{1}{b} v_y(b, z, t) = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_y}{\partial t} \quad (9)$$

sein.

Das Messen der Geschwindigkeit \tilde{v}_z kann mit Hilfe einer in der ganzen Breite des Bandes angeklebten Spule, auf elektrischem Wege, unter Verwendung des Neumannschen Gesetzes vorgenommen werden [2]. Dabei wird die in der Spule induzierte Spannung der Geschwindigkeit \tilde{v}_z proportional sein.

3. Wir wollen nun die Größenordnung der quergerichteten Bewegung für ein 10 mm breites und 0,1 mm dickes Kupferband auf Grund der im Laufe des dynamischen Zuges erhaltenen Meßergebnisse ins Auge fassen [2], [3]. Die kurz andauernde Belastung erregte in dem Band eine schwache plastische

Welle. Die Meßergebnisse ergeben die Geschwindigkeit der Front der schwachen Welle und die Geschwindigkeiten der einzelnen Querschnitte, unter der Voraussetzung, daß die Erscheinung mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) beschrieben werden kann. Aus dem vorangehenden geht es jedoch klar hervor, daß eigentlich nicht die Gleichungen (1) und (2), vielmehr die Gleichungen (7a), (8a), (9) richtig sind. Im weiteren wollen wir unsere Berechnungen unter Berücksichtigung dieses Umstandes vornehmen.

Unter der Voraussetzung, daß das Material des Bandes inkompressibel ist, ergibt sich für die Kontinuitätsgleichungen die folgende Form:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0.$$

Für das Band ist ε_x annähernd ε_y gleich, somit ist

$$2\varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (10)$$

Durch Differenzierung der Gleichung (10) nach der Zeit und unter Berücksichtigung des Integralmittels über den Querschnitt des Bandes erhalten wir:

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_z}{\partial t} + 2 \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_y}{\partial t} = 0,$$

welche Gleichung auf Grund der Gln. (8a) und (9) zu der Gleichung

$$v_y(b, z, t) = -\frac{1}{2} b \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \quad (11)$$

führt. Auf Grund dieser Gleichung können wir nun die Größenordnung der Quergeschwindigkeit einschätzen. $v_y(b, z, t)$ stellt die am Rande des Bandes auftretende Geschwindigkeit y in der Achsenrichtung dar, die mutmaßlich größer als die in den inneren Punkten des Bandes auftretenden Geschwindigkeiten v_y ist. Auf Grund der im Meßbereich erhaltenen Daten [2, 3] ist

$$v_y(b, z, t) < 0,02 \tilde{v}_z(z, t).$$

SCHRIFTTUM

1. Качанов, Л. М.: Основы теории пластичности. Москва 1956.
2. Бёда, Дь.: Метод исследования пластичной волны. *Acta Techn. Hung.* **38** 161—187.
3. BÉDA, Gy.: Methode zur Bestimmung der Materialgleichung. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei* **22**, 271—286.

A PROBLEM CONCERNING EXPERIMENTAL INVESTIGATION
OF DYNAMIC PLASTIC TRACTION

GY. BÉDA

SUMMARY

The multiaxial state of stress arising during dynamic traction can be described, as far as the integral mean of the kinematic and strength values is concerned, by the equations of motion and of deformation characterizing the uniaxial state of stress. The integral mean of the velocity of the cross section, taken over the cross section of the test specimen, can best be measured when using a ribbon-shaped specimen, with the method described in [2]. On the base of the experimental results reported in [2] and in [3], the maximum value of the transversal velocity of the ribbon is smaller than 2% of the integral mean of the velocity taken over the corresponding cross section.

UN PROBLÈME RELATIF A L'ESSAI DYNAMIQUE DE TRACTION PLASTIQUE

GY. BÉDA

RÉSUMÉ

L'état de contrainte multiaxial se produisant au cours de la traction dynamique peut être décrite par les équations de mouvement et de déformation caractérisant l'état de contrainte monoaxial, en se basant sur la moyenne intégrale des quantités cinématiques et statiques. La moyenne intégrale de la vitesse de la section de l'éprouvette, se rapportant à la section transversale, peut être mesurée avec la meilleure approximation en utilisant une éprouvette en forme de ruban, suivant la méthode décrite sous [2]. D'après les résultats expérimentaux [2] et [3], la valeur max. de la vitesse transversale du ruban est moins que 2% de la moyenne intégrale de la vitesse dans la section correspondante.

ОДИН ИЗ ВОПРОСОВ ОПЫТНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО
ПЛАСТИЧЕСКОГО ВОЛОЧЕНИЯ

ДЬ. БЕДА

РЕЗЮМЕ

Многоосевое напряженное состояние, получающееся при динамическом волочении, может быть описано при помощи уравнений движения и деформации, характерных для одноосного напряженного состояния, если воспользоваться интегральным средним значением кинематических и прочностных количеств. Интегральное среднее значение скорости сечения образца, взятое по этому сечению, с наилучшим приближением можно измерить в случае применения лентообразного образца, применяя метод, описанный в (2). Результаты опытов согласно (2) и (3) показали, что наибольшее значение поперечной скорости ленты меньше, чем 2% от интегрального среднего, взятого в соответствующем сечении.

DE LA DIFFÉRENCE MOYENNE DES TEMPÉRATURES DES DEUX MILIEUX DANS LE TRAITEMENT THERMIQUE A CONTRE-COURANT ET A COURANT PARALLÈLE

GY. SASVÁRI et K. SEITZ

INSTITUT DE RECHERCHES CHIMIQUES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE

[Manuscrit présenté le 17 décembre 1962]

La méthode traditionnelle utilisée pour le calcul approximatif du chauffage consiste à considérer la moyenne logarithmique de la différence de température existant entre le milieu chauffant et le milieu chauffé. L'article démontre que cette méthode ne peut s'utiliser si l'on n'a pas la connaissance de la température des deux milieux à l'entrée et à la sortie de l'appareil, et même alors ne permet de calculer que la longueur d'appareil nécessaire. Pour le calcul du chauffage, les auteurs préconisent l'emploi d'une température moyenne calculée par une autre méthode. A la différence de la méthode traditionnelle, en connaissance de deux valeurs de température ainsi que des quantités et constantes thermiques des deux milieux, elle permet le calcul simple des deux valeurs de température inconnues et de la longueur d'appareil nécessaire.

Dans le calcul des récupérateurs et fours à régime continu, la longueur d'appareil nécessaire s'obtient, selon la méthode connue, en utilisant la moyenne logarithmique de la différence de température variable qui existe entre le milieu chauffant et le milieu chauffé. Dans les appareils réels, la température du milieu chauffant (appelé par la suite: gaz de fumée) et du milieu chauffé (appelé: charge) varie dans chaque section de l'appareil, aussi entendra-t-on toujours sous température du gaz, resp. de la charge, la température moyenne. La température moyenne entendue dans ce sens est le quotient du contenu en chaleur et de la capacité thermique. Si la température initiale t'_k et terminale t'_v du gaz, et la température initiale t_k et terminale t_v de la charge sont connues, alors la différence moyenne logarithmique des températures sera, dans les systèmes à contre-courant:

$$\Delta t_M = \frac{(t'_k - t_v) - (t'_v - t_k)}{\ln \frac{t'_k - t_v}{t'_v - t_k}} \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (1)$$

et dans les systèmes à courant parallèle:

$$\Delta t_M^* = \frac{(t'_k - t_k) - (t'_v - t_v)}{\ln \frac{t'_k - t_k}{t'_v - t_v}} \quad [^{\circ}\text{C}]. \quad (2)$$

Désignons par la coordonnée de distance 0 la section initiale de l'appareil correspondant à l'entrée, et par L la section terminale correspondant à la sortie de

la charge. Ainsi, dans les systèmes à courant parallèle, $t'_k = t'(0)$, $t'_v = t'(L)$, $t_k = t(0)$, $t_v = t(L)$, dans ceux à contre-courant $t'_k = t'(L)$, $t'_v = t'(0)$, $t_k = t(0)$, et enfin $t_v = t(L)$. Les expressions (1) et (2) peuvent d'ailleurs être obtenues de la différence des équations (8) resp. (9), de la manière plusieurs fois décrites dans la littérature.

En cas de contre-courant, la température moyenne de la charge est donnée, dans chaque point, par cette équation différentielle simple obtenue du bilan thermique du chauffage:*

$$\frac{dt}{dx} = \frac{ka\tau}{vf\gamma c} (t' - t) \equiv \frac{q}{w} (t' - t). \quad (3)$$

Après substitution des températures moyennes (1) et (2), l'équation (3) s'est transformée en une équation normale. En cas de contre-courant:

$$\frac{t_v - t_k}{L} = \frac{q}{w} \frac{(t'_k - t_v) - (t'_v - t_k)}{\ln(t'_k - t_v) - \ln(t'_v - t_k)} \quad (4)$$

et en cas de courant parallèle:

$$\frac{t_v - t_n}{L^*} = \frac{q}{w} \frac{(t'_k - t_k) - (t'_v - t_v)}{\ln(t'_k - t_k) - \ln(t'_v - t_v)}. \quad (5)$$

Des formules (4) et (5), la longueur d'appareil nécessaire pour le chauffage de la charge à la température t_v sera, dans les systèmes à contre-courant:

$$L = \frac{w}{q} \frac{t_v - t_k}{(t'_k - t_v) - (t'_v - t_k)} \ln \frac{t'_k - t_v}{t'_v - t_k} \quad (6)$$

et dans ceux à courant parallèle:

$$L^* = \frac{w}{q} \frac{t_v - t_k}{(t'_k - t_k) - (t'_v - t_v)} \ln \frac{t'_k - t_k}{t'_v - t_v}. \quad (7)$$

Les notations figurant dans les équations (3)–(7) sont les suivantes:

v	[m/s]	vitesse d'avancement de la charge;
γ	[kp/m ³]	poids spécifique de la charge;
c	[kcal/kp °C]	chaleur spécifique de la charge;
α	[kcal/m ² h °C]	coefficient de transmission de chaleur;
f	[m ²]	section transversale de la charge;
τ		facteur de correction tenant compte de la différence entre la température superficielle et la température moyenne;
w		$v \cdot f \cdot \gamma \cdot c$;
q		$k \alpha \tau$;
k	[m]	circonférence de la charge.

* Pour la déduction et l'explication des facteurs figurant dans les équations (3), (8), (9), (10) et (12), voir notre publication antérieure [1].

L'utilisation des moyennes (1) et (2) présente les désavantages suivants.

Pour calculer les moyennes, il faut connaître les quatre valeurs de température à l'entrée, resp. à la sortie de l'appareil (t'_k , t'_v , t_k et t_v). Or ces quatre températures ne peuvent être déterminées que par des mesures effectuées sur un appareil en fonctionnement. Lors de l'établissement des projets d'un appareil, on ne dispose pour le calcul que de trois températures au plus. On connaît la température initiale t_k de la charge, qui correspond généralement à la température de l'air ambiant à laquelle fonctionnera l'appareil. On peut aussi considérer comme connues la température terminale t_v de la charge, répondant à une prescription technologique, et la température initiale t'_k du gaz de fumée, qui peut être réglée à travers l'installation de chauffage. Par contre, la température terminale t'_v du gaz à la sortie de l'appareil est toujours inconnue.

Des équations (4) et (5) écrites à l'aide des moyennes, seule la longueur d'appareil inconnue peut être déterminée en connaissance des quatre températures en question, mais si, en connaissant la longueur d'appareil et trois points de température, on cherche à établir le quatrième point, celui-ci ne peut pas être déterminé directement des équations transcendentes (6) et (7).

L'utilisation des moyennes selon (1) et (2) présente par contre l'avantage que seules les caractéristiques de la charge doivent être connues, la connaissance de celles du gaz n'est pas nécessaire.

Le chauffage à contre-courant, resp. le gradient thermique se produisant, dans ce cas, le long de l'axe de l'appareil, se trouve caractérisé pour la charge aussi bien que pour le gaz par le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{q}{w} (t' - t), \\ \frac{dt'}{dx} &= -\frac{q}{w'} (t' - t). \end{aligned} \quad (8)$$

Le système d'équations relatif au chauffage à courant parallèle sera:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{q}{w} (t' - t), \\ \frac{dt'}{dx} &= \frac{q}{w'} (t' - t). \end{aligned} \quad (9)$$

Les systèmes d'équations (8) et (9) se rapportent à des appareils fonctionnant sans perte de paroi, donc idéalisés dans ce sens.

La solution du système d'équations (8) sera, avec les conditions aux limites $t(0) = t_k$ et $t'(L) = t'_k$:

Charge	Gaz
$t = Ae^{\omega x} + B,$	$t' = rAe^{\omega x} + B,$

où

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{t_k - t'_k}{1 - re^{\omega L}}; \\
 B &= \frac{t'_k - rt_k e^{\omega L}}{1 - re^{\omega L}}; \\
 \omega &= \frac{q}{w} (r - 1); \\
 r &= \frac{w}{w'}; \\
 w' &= v' f' \gamma' c'; \\
 v' & \text{ [m/s]} && \text{la vitesse du gaz;} \\
 f' & \text{ [m]} && \text{la section d'écoulement du gaz;} \\
 \gamma' & \text{ [kp/m}^3\text{]} && \text{le poids spécifique du gaz;} \\
 c' & \text{ [kcal/kp }^\circ\text{C]} && \text{la chaleur spécifique du gaz.}
 \end{aligned} \tag{11}$$

La solution du système d'équations (9) sera, avec les conditions aux limites $t(0) = t_k$ et $t'(0) = t'_k$:

$$\begin{array}{cc}
 \text{Charge} & \text{Gaz} \\
 t = A^* e^{\omega^* x} + B^*, & t' = B^* - r A^* e^{\omega^* x},
 \end{array} \tag{12}$$

où

$$\begin{aligned}
 A^* &= \frac{t_k - t'_k}{1 + r}; \\
 B^* &= \frac{t'_k + rt_k}{1 + r}; \\
 \omega^* &= -\frac{q}{w} (r + 1).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Sur la base des équations (10), la différence des températures de la charge et du gaz sera, en n'importe quel lieu x :

$$t' - t = (r - 1) A e^{\omega x} = \Delta T. \tag{14}$$

Exprimons la moyenne intégrée de l'expression (14) entre 0 et L , c'est-à-dire le long de la longueur totale de l'appareil:

$$\Delta \bar{T} = \frac{r - 1}{\omega L} A (e^{\omega L} - 1) = (t'_k - t_k) \frac{(r - 1)(1 - e^{\omega L})}{\omega L (1 - re^{\omega L})}. \tag{15}$$

En cas de chauffage à contre-courant, l'expression (15), semblablement à l'expression (1), est la moyenne des différences de température variables qui existent entre les gaz de fumée et la charge, cette moyenne étant déduite non pas de l'équation différentielle, mais de sa solution.

On calcule, de même, la moyenne pour la différence de température obtenue des équations (12) qui se rapportent au chauffage à courant parallèle. La différence des températures sera, en chaque lieu x :

$$t' - t = -(r + 1) A^* e^{\omega L} = \Delta T^* \quad (16)$$

et la moyenne intégrée de l'équation (16), entre 0 et L :

$$\Delta \bar{T}^* = \frac{r + 1}{\omega^* L} A^* (1 - e^{\omega^* L}) \equiv (t'_k - t_k) \frac{e^{\omega^* L} - 1}{\omega^* L} \quad (17)$$

Avec les moyennes (15) et (17), les équations correspondant aux équations (4) et (5) s'écriront sous la forme suivante.

L'équation exprimant la température terminale de la charge, établie à l'aide de la moyenne (15):

$$t_v = (t'_k - t_k) \frac{1 - e^{\omega L}}{1 - r e^{\omega L}} + t_k \quad (18)$$

L'équation exprimant la température terminale de la charge, établie à l'aide de la moyenne (17) et se rapportant au chauffage à courant parallèle:

$$t_v = (t'_k - t_k) \frac{1 - e^{\omega^* L}}{1 + r} + t_k \quad (19)$$

De l'équation (18) se rapportant au chauffage à contre-courant, on exprime la longueur d'appareil nécessaire:

$$L = \frac{1}{\omega} \ln \frac{1 - \frac{t_v - t_k}{t'_k - t_k}}{1 - r \frac{t_v - t_k}{t'_k - t_k}} \quad (20)$$

De l'équation (19), on exprime enfin la longueur d'appareil L :

$$L^* = \frac{1}{\omega^*} \ln \left[1 - (1 + r) \frac{t_v - t_k}{t'_k - t_k} \right] \quad (21)$$

Les équations (18) et (19) établies avec les moyennes (15) et (17) sont d'une application beaucoup plus étendue que les équations correspondantes établies avec les moyennes logarithmiques (1), resp. (2), généralement utilisées.

1° Pour déterminer la longueur d'appareil L nécessaire, il suffit de connaître trois valeurs de température à l'entrée, resp. à la sortie de l'appareil, et comme nous l'avons dit, ces trois valeurs de température peuvent toujours être considérées comme connues.

2° Avec une longueur d'appareil donnée, la température terminale de la charge peut être calculée directement des équations (18) et (19), celle-ci étant contenue explicitement dans les deux équations.

3° On peut considérer comme désavantageux que le calcul des moyennes (15) et (17) nécessite, en plus des caractéristiques de la charge, la connaissance des caractéristiques du gaz de fumée. On doit donc connaître la section libre (f') de l'appareil, à travers laquelle s'effectue l'écoulement du gaz, la vitesse d'écoulement v' du gaz, le poids spécifique γ' du gaz à la température moyenne, et enfin la chaleur spécifique c' moyenne du gaz. C'est seulement en connaissance de toutes ces valeurs que le facteur w' est donné. Il est toutefois évident que par la construction convenable de l'appareil, les caractéristiques du gaz peuvent être choisies de telle sorte qu'elles prennent les valeurs prévues dans l'appareil en fonctionnement.

Nous démontrons enfin que les moyennes (1) et (2), resp. (15) et (17) sont des expressions essentiellement identiques. Le bilan thermique du chauffage total, en contre-courant aussi bien qu'en courant parallèle, s'exprime par la relation simple:

$$w'(t'_k - t'_v) = w(t_k - t_v). \quad (22)$$

Notre démonstration se limitera, par la suite, au système à contre-courant.

De l'équation (10), on peut exprimer l'abaissement de température total du gaz dans l'appareil:

$$t'_k - t'_v = rA(e^{\omega L} - 1). \quad (23)$$

On peut, de même, exprimer l'élévation de température totale de la charge:

$$t_v - t_k = A(e^{\omega L} - 1). \quad (24)$$

De l'équation (22), il s'ensuit directement:

$$v = \frac{w}{w'} = \frac{t'_k - t'_v}{t_v - t_k}. \quad (25)$$

Des équations (10) et (24), on peut déduire la relation ci-dessous:

$$\Delta\bar{T} = \frac{r-1}{\omega L} (t_v - t_k). \quad (26)$$

Des équations (25) et (26), il vient:

$$\Delta\bar{T} = \frac{1}{\omega L} [(t'_k - t'_v) - (t_v - t_k)]. \quad (27)$$

L'équation (27) s'écrit, après regroupement des termes:

$$\Delta\bar{T} = \frac{1}{\omega L} [(t'_k - t_v) - (t'_v - t_k)]. \quad (28)$$

Dans une étape successive, de l'équation (10) on détermine la différence $t'_k - t_v$:

$$t'_k - t_v = A(r - 1) e^{\omega L}. \quad (29)$$

De la même équation, on détermine aussi la différence de température $t'_v - t_k$:

$$t'_v - t_k = A(r - 1). \quad (30)$$

On divise ensuite, l'un par l'autre, les deux côtés des équations (29) et (30).

$$\frac{t'_k - t_v}{t'_v - t_k} = e^{\omega L}. \quad (31)$$

L'équation (31) est écrite sous forme logarithmique:

$$\omega L = \ln \frac{t'_k - t_k}{t'_v - t_k}. \quad (32)$$

Et l'équation (32) est enfin substituée dans l'équation (28):

$$\Delta \bar{T} = \frac{(t'_k - t_v) - (t'_v - t_k)}{\ln(t'_k - t_v) - \ln(t'_v - t_k)} = \Delta t_M. \quad (33)$$

Avec l'équation (33), nous avons obtenu à nouveau la différence moyenne logarithmique des températures, exprimée déjà par la formule (1).

Si au lieu de la solution (10) se rapportant au contre-courant, on part de la solution (12) valable pour le courant parallèle, alors par des étapes correspondant exactement aux équations (22)–(33), on obtient à nouveau la formule de la différence moyenne logarithmique des températures, se rapportant au courant parallèle et décrite par la formule (2).

BIBLIOGRAPHIE

1. SASVÁRI, GY.—SEITZ, K.: *Acta Techn. Hung.* **33** (1961), 359–375.
2. KORACH, M.: *Acta Techn. Hung.* **II** (1955), 161–184.
Id. II. *Ibid.* **25** (1959), 25–62.
3. SCHACK, A.: *Die industrielle Wärmeübertragung*. Düsseldorf 1948.

ON THE MEAN TEMPERATURE DIFFERENCE BETWEEN THE TWO MEDIA IN COUNTER-FLOW AND IN PARALLEL-FLOW HEATING

GY. SASVÁRI and K. SEITZ

SUMMARY

The traditional method for the approximate calculation of heating is based on the logarithmical temperature difference between the heat supplying and the heat receiving medium. The authors show that this traditional method can be used only when the four extreme values of temperature are known and even so, it is suitable only for calculating the necessary dimensions of the apparatus. For the calculation of the warming-up, the authors

propose a mean-temperature calculated by an other method, which permits to calculate, unlike the traditional method, the two unknown extreme temperatures as well as the necessary dimensions of the apparatus, if two extreme temperatures and the quantitative and thermal data of the two media are known.

ÜBER DEN MITTLEREN TEMPERATURUNTERSCHIED ZWISCHEN ZWEI MEDIEN BEI GEGENSTROM- UND BEI GLEICHSTROMERWÄRMUNG

GY. SASVÁRI und K. SEITZ

ZUSAMMENFASSUNG

Die herkömmliche Methode für die annähernde Berechnung der Erwärmung beruht auf dem logarithmischen Unterschied zwischen dem wärmeübergabenden und dem wärmeaufnehmenden Medium. Die Arbeit weist nach, daß die herkömmliche Methode nur in Kenntnis der vier Extremtemperaturen brauchbar ist und auch so sich nur zur Berechnung der notwendigen Apparateabmessungen eignet. Die Verfasser schlagen für die Berechnung der Erwärmung eine nach einer anderen Methode berechnete Mitteltemperatur vor, welche im Gegensatz zum herkömmlichen Verfahren in Kenntnis von zwei Extremwerten der Temperatur sowie der quantitativen und wärmetechnischen Konstanten der beiden Medien die einfache Berechnung sowohl der unbekanntenen zwei Extremtemperaturen als auch der benötigten Apparateabmessungen ermöglicht.

О РАЗНОСТИ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ МЕЖДУ ДВУМЯ СРЕДАМИ ПРИ ПРОТИВОТОЧНОМ И ПРЯМОТОЧНОМ НАГРЕВЕ

Д. ШАШВАРИ и К. СЕЙЦ

РЕЗЮМЕ

Традиционным методом приближенного расчета нагрева является учет логарифмической разности температур между передатчиком и приемником тепла. В данной работе показано, что традиционный метод может быть использован только в случае четырех крайних значений температуры и даже в таком случае пригоден только для расчета необходимых размеров аппарата.

Авторы для расчета нагрева предлагают среднюю температуру, рассчитанную при помощи другого метода; этот метод расчета в противоположность традиционному позволяет произвести простой расчет как двух неизвестных значений температуры, так и необходимых размеров аппарата при заданных двух значениях температуры, а также количественных и термодинамических постоянных данной среды.

MODEL INVESTIGATIONS INTO SEEPAGE

G. ÖLLÓS

CAND. OF TECHN. SC.
TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received December 20, 1962]

From among the laboratory studies carried out in Hungary into seepage phenomena comprehensive information is presented in this paper on those occurring under flood levees, in the environment of gravity wells, horizontal filter wells, as well as in karstic rock media. The references have, however, been extended to encompass all research material available in Hungary on the subject.

Studies into underseepage under flood levees were concerned primarily with the hydraulic gradient line of pressures (uplift) acting on the underside of the levee body and on the cover overlying the waterbearing layer, further with the flood control measures aiming at the aversion of levee ruptures.

The investigation of hydraulic conditions in the environment of gravity vertical wells related in the first order to steady seepage phenomena taking place in the immediate vicinity of the well.

Horizontal filter wells were studied with the aim of determining the relationships between the parameters controlling the hydraulically most advantageous filter length.

The development of a suitable model technique and gaining insight into the fundamental hydraulic phenomena was the purpose of the study conducted on vacuum wells.

Studies on the movement of water in fissured rock included the development of a new model technique, as well as qualitative demonstration of some of the more important hydraulic problems.

I. Introduction

Ever since the development of model laws there has been a tendency towards an increased application of scale models to the detailed investigation of the physical phenomena pertaining to the movement of water. This interest is understandable in the case of seepage in subsurface porous, or fissured rock media as well, since the hydraulic boundary conditions of seepage patterns, the structural composition of the medium, the non-uniform condition of flow, as well as the influence of hydrological, chemical and other factors are in many instances inaccessible to any positive evaluation unless model tests are resorted to.

One of the indications of the rapid gain in popularity of seepage model testing is its impending acceptance even in special fields such as e.g. hydrogeology where the difficulties attending the reproduction of the structural composition of the waterbearing rock formations are widely known.

Model investigations into seepage phenomena were started in Hungary in 1949 by Prof. E. NÉMETH when the particulars of seepage under the Tiszalök

weir and power station were cleared. Seepage models found increasing application from then on for the solution of problems arising both in research and practice.

Owing to the limited space available, the results mentioned in this paper are necessarily restricted to a few problems only, but all material relating to laboratory investigations of seepage has been included in the bibliography attached.

II. Studies into seepage under flood levees

Laboratory studies relating to flood levees [21 — 25] are classified among the important problems of national significance. The aim of these investigations is the determination of the hydraulic gradient of uplift pressures, acting under both natural and artificially influenced conditions on the levee body and on the underside of the top cover overlying the waterbearing layer. An additional object is the determination of the most economical methods and measures for reducing the danger of levee ruptures under conditions prevailing in Hungary.

Experimental work on these problems was carefully founded, thoroughly planned and properly instrumented. From among the results obtained the following ones are deemed worthy of mentioning:

a) The hydraulic gradient characteristic for the levees along the Szigetköz section of the Danube River could be established by model tests and in the knowledge thereof the following design formula could be proposed:

$$h_x = 0.65 h - 0.0033 x,$$

where h_x is the unknown uplift pressure, h is the pressure in metres water column at the point of seepage entry, related to the interface of the two layers, and x is the distance of the point considered from the nearest seepage entry. (This formula applies to a gravel layer of uniform — 62 m — thickness.)

b) Since the waterbearing layer underlying the Szigetköz levees is of variable thickness, it became necessary to determine the effect of the thickness of the gravel layer on pressure conditions. As revealed by model tests, the head loss occurring in the immediate vicinity of the point of seepage entry increases together with the thickness of the waterbearing layer. On the other hand, the initial head loss is smaller in thinner layers, yet the overall slope of the gradient line is steeper.

c) With a view to the potential methods of reducing uplift pressures a further question to be answered was the effect of a sheet wall driven at the water-side toe of the flood levee and the influence of a well row on the protected side.

Model test have shown the effect of the sheet wall alone to be moderate on the magnitude of uplift. Thereupon it has been suggested to create, in addition to the sheet wall a row of pressure relief wells on the protected side of the levee, at a distance of about 8 m from the toe. Pressures determined for one case taken from the model are shown in Fig. 1. The vertical leg $a - c$ in the diagram denotes the head loss over the sheet wall, while the full line b indicates the head loss occurring under the combined effect of the sheet wall and the relief well at the extreme end of the drawdown curve created

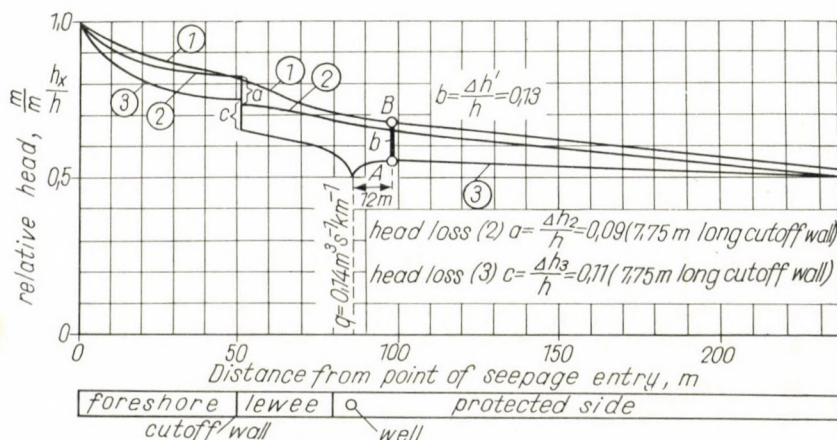


Fig. 1. Hydraulic gradient in the case of a sheet wall and well in a 15 m deep waterbearing layer overlaid by an impervious cover

by the well. The gradient line 1 relates to the undisturbed state existing before the construction of the sheet wall and the well. Gradient line 2 developed under the effect of the sheet wall, while line 3 under the combined effect of the sheet wall and the row of relief wells. As revealed by an inspection of the curves, wells and sheet wall cutoff used in combination are likely to yield favourable results, but the use of a row of wells alone, as could be inferred from these experiments, cannot be recommended even if the waterbearing layer consists of sand with a reduced permeability.

d) The next question to be answered was the distribution of pressure under the levee and in the immediate vicinity thereof without a top cover (Fig. 2a) and in the presence of one (Fig. 2b). The full thickness of the soil layer in the prototype was 14 m in this case overlain by a 1.5 m thick top cover of clay. Figs. 2a—b illustrate the pressure gradients in the two cases for a groundwater level of -1.5 m and the discharge emerging to the surface is also shown. As is clearly to be seen from the figure, if there is no top cover present, then the full head prevailing on the foreshore drops under the levee body itself to a value depending on the groundwater stage (i.e. there is a high

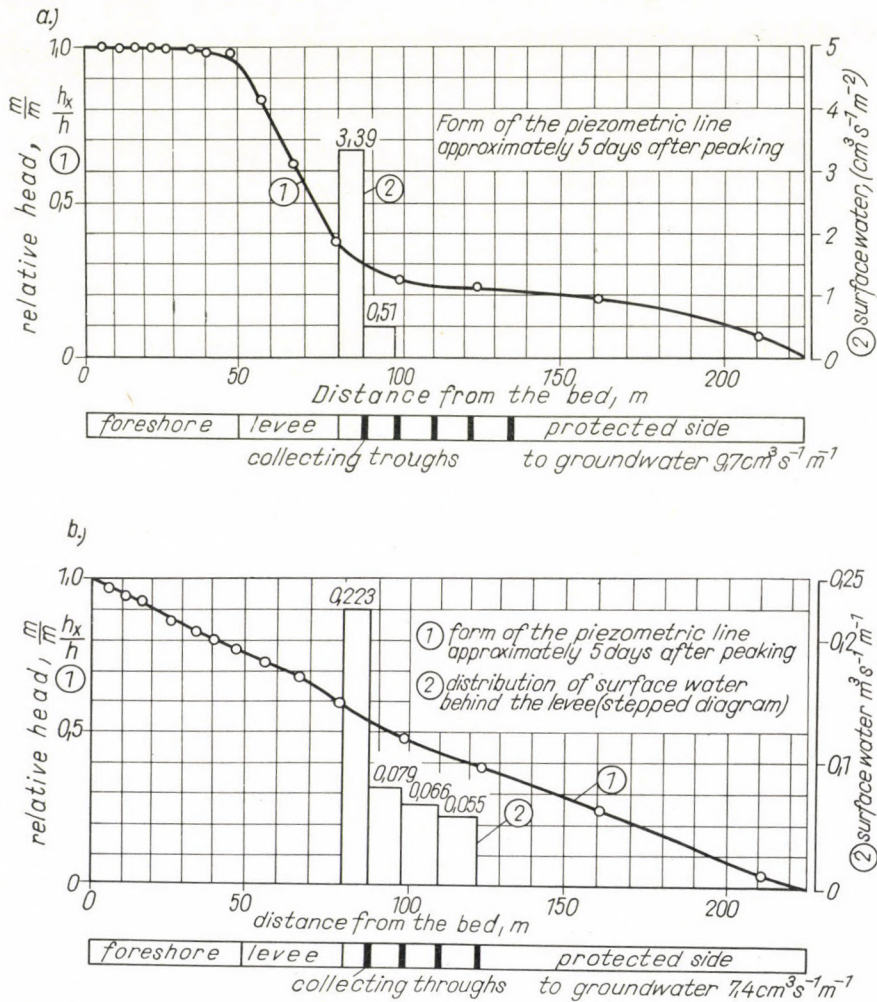


Fig. 2. Hydraulic gradient in a waterbearing layer of coarse sand with no top cover, respectively, under a clay layer of low permeability

hydraulic gradient under the levee). The reduction in pressure is however approximately linear where there is a top cover present, and this reduction starts immediately at the point of seepage entry. The hydraulic gradient is, therefore, lower than in the preceding case. The beneficial effect of the top cover on the safety of the levee could be demonstrated positively.

e) The model tests further yielded much valuable information on the propagation of changes in pressure along the underside of the top cover. Such changes are brought about by variations in the river stage. This information related thus to non-steady phenomena. For these studies the variations in stage were considered as movement of an oscillatory character. Relying on the

theorem adopted in physics, that vibrations in elastic media with internal friction are propagated with a finite velocity to a finite distance, this theorem was assumed to apply to the non-steady movement of groundwater as well. The trend of pressure variations at various distances from the river bed and caused by the periodic changes in head at the point of seepage entry, i.e., in the river bed, is illustrated in Fig. 3. The water level in the river bed varied according to the periodical function I composed of straight sections. This variation was accompanied at different distances from the bed by the changes

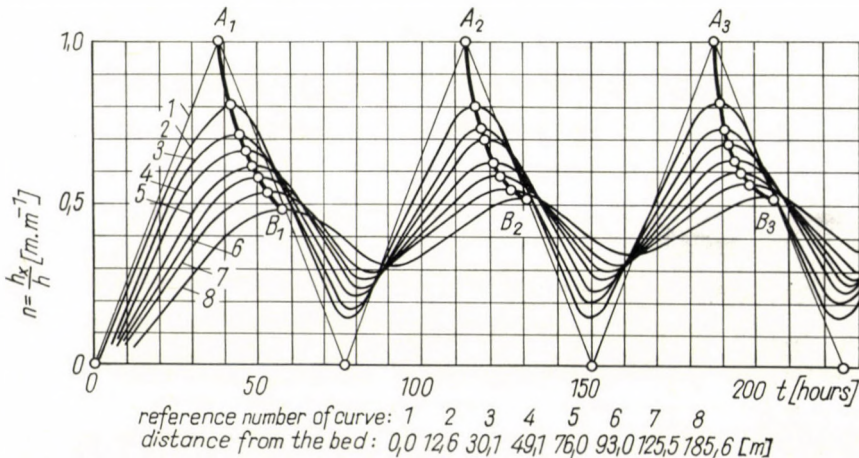


Fig. 3. Variation of pressure with time at different distances from the bed

in pressure represented by the curves 2 to 8. The probable local peak of relative pressure at various distances from the bed can, according to these experiments, be calculated from the relationship:

$$\Pi_{\max} = 0.65 \frac{1.2}{x^{0.12} i^{0.008}},$$

where x is the distance from the river bed [m], and i is the rate of change in stage in the bed [cm/hour].

f) Hydraulic seepage models helped again to predict the movement of groundwater along the lower reach of the Vág River under the influence of backwater from the Nagymaros weir and power station. The problem in this case was to determine the means by which a harmful rise in the groundwater stage at the protected side could be prevented while the levee foreshore was inundated as a result of backwater. The potential alternatives comprised two intercepting canals on the protected side, a row of relief wells, and a combination of relief wells and intercepting canals. It was demonstrated by the experiments that supply to the groundwater from the foreshore can be prevented hydraulically by two intercepting canals running parallel to the bed.

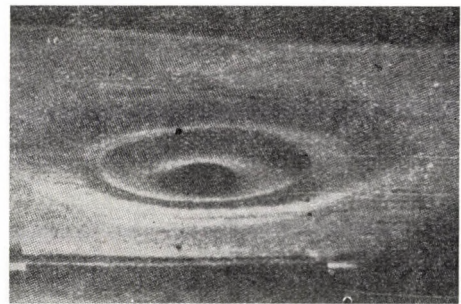
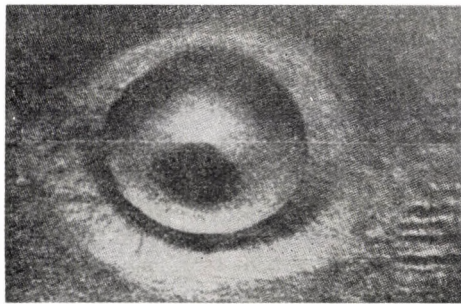
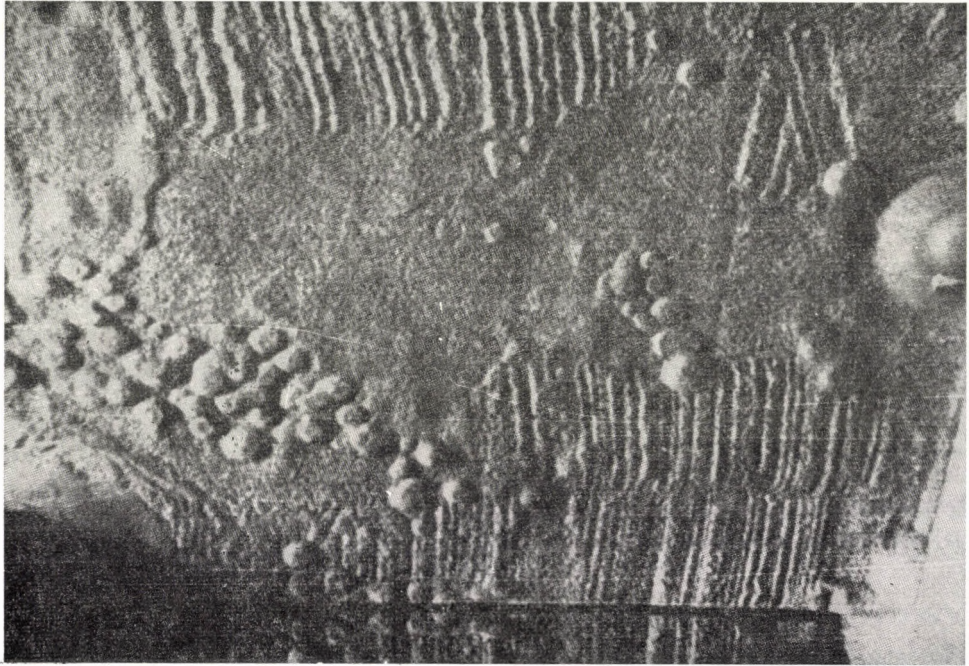


Fig. 4a—b. Elementary and active boils

g) Some of the particulars of non-steady seepage through the levee body could also be studied by scale models, which offered the opportunity for checking the theoretical relationships developed earlier for non-steady seepage across the levee body [26]. Successful investigations were carried out at the Laboratory of the I. Institute for Hydraulics, Technical University, Budapest, by M. SZALAY who on a viscous model studied the seepage conditions under an impermeable foundation slab in the presence of cutoff walls.

h) An indication of impending levee rupture is the formation of boils. Model tests helped to throw light on the relationships governing this phenomenon as well by H. LAMPL [27]. The object of these experiments was to gain

better insight into vertical seepage, and as a result the conditions of boil formation could be visualized.

Elementary boils develop (Fig. 4a) when the water emerging to the terrain surface has sufficient velocity to set the smaller grains of the soil into motion and move them back and forth within a sphere, having a diameter of millimetre order.

As soon as the rising water is capable of carrying the fine grains away, these are replaced by larger ones, which already become an obstacle to the flow of water. Owing to the advancing classification of the soil particles a *live boil* develops, on the external slope of which fine grains originating from the interior of the crater are deposited (Fig. 4b).

Investigations relating to boil formation have been extended to cover also the problem of relieving pressure by means of filter wells.

III. Studies into gravity wells

Research into this problem is of particular interest and actuality as in Hungary the soil cover over the major part of the country consists of porous rock. In view of the large number of wells contemplated, or already existing, the study of economical and technical problems arising in connection with the withdrawal of water therefrom is highly desirable.

These experiments were carried out using a model sector shaped in plan [28—33]. In 1962 an experimental installation was made available, which permitted investigations into seepage, not only around a single isolated well, but also along rows of wells (Fig. 5).

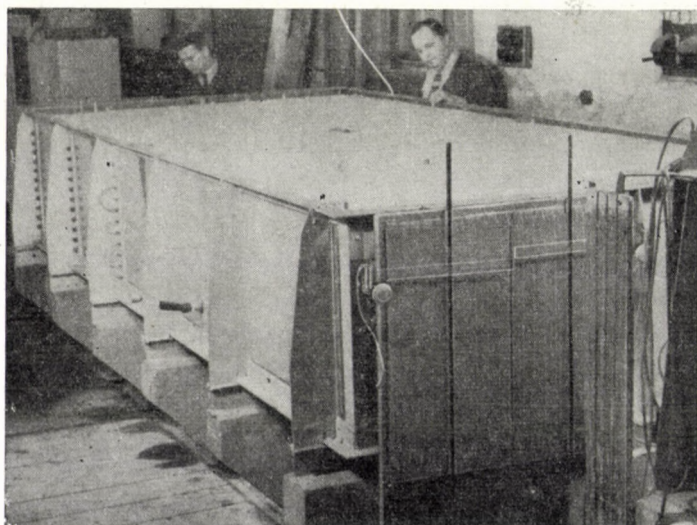


Fig. 5. Experimental equipment for the investigation of well groups

The problems investigated so far by model tests on wells drawing on groundwater include *a)* the free seepage surface on the well mantle; *b)* the drawdown curve; *c)* the discharge (yield); *d)* the hydraulic effects of an inhomogeneous water-yielding medium; *e)* the hydraulics of well filters, and *f)* the effect of the capillary fringe on the free groundwater surface and the hydraulic phenomena taking place in this fringe.

Owing to the nature of the problem the model experiments were concerned primarily with steady seepage occurring in the immediate vicinity of the well mantle.

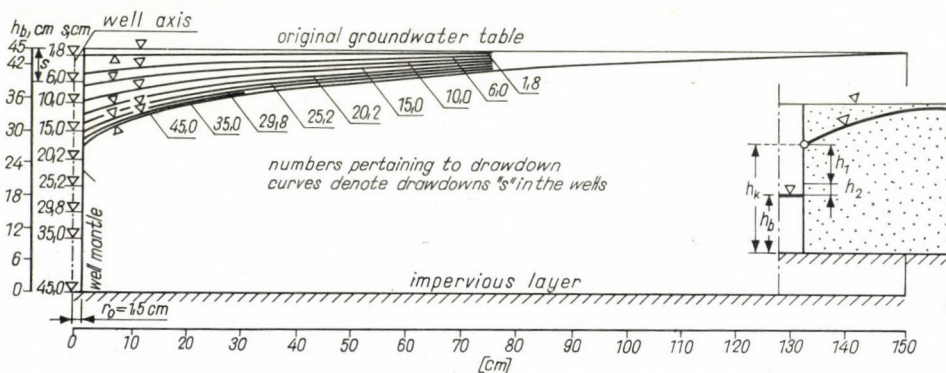


Fig. 6. Vertical position of drawdown curves around a well of small diameter

The significance of investigations of this character is considerable, since the well theories relying on Darcy's seepage theorem do not account for the hydraulic pattern actually observed around the well. The fundamental significance of the smallest seepage cross section, i.e., the one around the well mantle, on the seepage pattern in the entire seepage system was, however, demonstrated by the model tests themselves. Consequently, when studying the hydrodynamic conditions prevailing in the interior of the system in the case of ample water supply, the investigations should be directed from the small seepage cross sections towards the larger ones rather than in the opposite direction. As shown also by the example in Fig. 6, one of the factors governing both the shape and the vertical position of the drawdown curve is r_0 , i.e., the smallest seepage cross section corresponding thereto.

From among the experimental results the following ones are worthy of mentioning:

a) Hungarian research relating to the free seepage surface on the well mantle provided the foundations for a well theory in which the phenomena actually occurring are accounted for.

Once the vertical rift between the water levels h_k and h_b on the external and internal surface of the well mantle and related to the well bottom, has

been explored in detail, the shape of the drawdown curve in the vicinity of the well mantle as well as the vertical distribution of velocity along the well mantle could be determined as the most important fundamental data. For the difference between the water levels on the two sides of the well mantle, ensuing as a result of the head loss in the porous medium the experiments, yielded the following expression:

$$h_k - h_b = 0.228 \sqrt[3]{\frac{H}{r_0}} \cdot \frac{(H - h_b)^2}{H}.$$

In the above expression H is the original depth of the water layer, r_0 is the radius of the well. For the time being this equation does not include e.g. the coefficient k of the waterbearing layer, although obviously, this too will have to be taken into consideration, as demonstrated by the model tests actually performed in 1962 by J. GRČIĆ [34]. As a first step, however, the effect of the well radius r_0 had to be cleared, all the more so as the effect of r_0 is a dominant factor e.g. in the operation of tube wells. As the subsequent step of development in laboratory research, attempts must be made to investigate the combined effect of the gravel filter around the well, the filtered mantle surface and the factors arising from the inhomogeneity of the seepage pattern, during the detailed study of the water level difference.

b) The geometry of the drawdown curves has been cleared by these studies. The drawdown curves have been found to issue from the level h_k defined by the equation given in the preceding paragraph *a)*, rather than from the waterlevel in the well. Just as the value h_k , the vertical position of the drawdown curve is also materially influenced by r_0 . Thus for instance, for a ratio $H/r_0 = 30$ the drawdown curves assume a high position even at a drawdown approaching, or equal to, the full extent (Fig. 6). These results relative to the drawdown curve contributed also to a more exact understanding of the hydraulics of groundwater lowering by gravity wells.

c) As far as the well yield is to be concerned, it could be established positively from these experiments that — for steady seepage conditions — maximum yield can be attained at full drawdown in the well ($h_b = 0$) and not at any intermediate value. Owing to the difference in water levels developing on the two sides of the filter surface, the well yield may be divided into three parts (Fig. 7). Having introduced the principle of the partial model well (Fig. 8), numerical values could be determined for the discharge Q_2 entering into the space below the water level in the well, the discharge $Q_1 = 2 r_0 \pi (h_k - h_b)$ arriving through the so-called free seepage surface on the filter surface, and finally for the discharge Q_3 seeping directly from the capillary fringe into the well at any given drawdown s . The full well yield is thus obtained as the sum:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

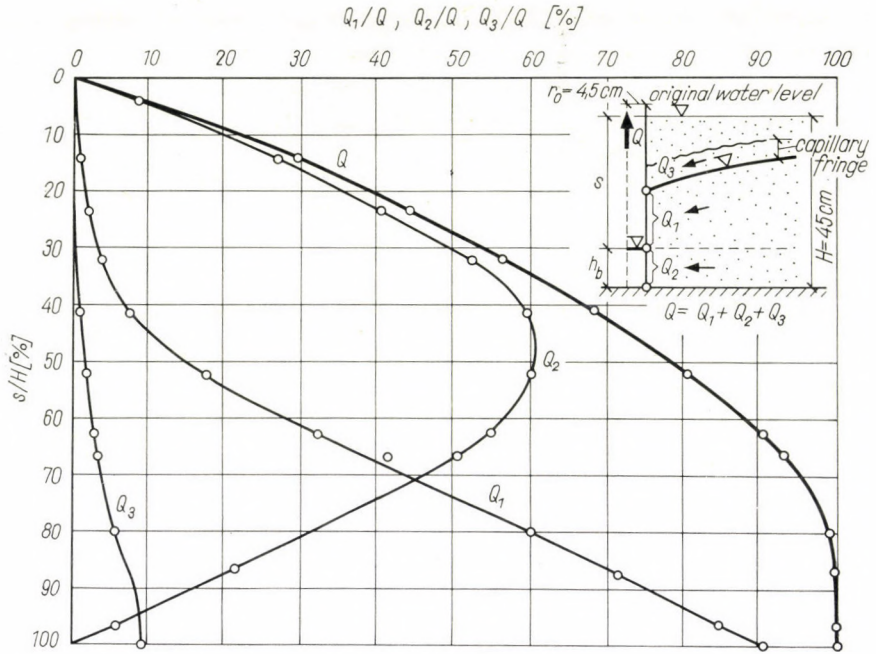


Fig. 7. Changes in yield entering into the well through the free seepage surface on the well mantle and the well mantle under the watersurface in the well (Q_1 , respectively Q_2) plotted against drawdown (s/H). Q_3 is the yield seeping into the well directly from the capillary fringe

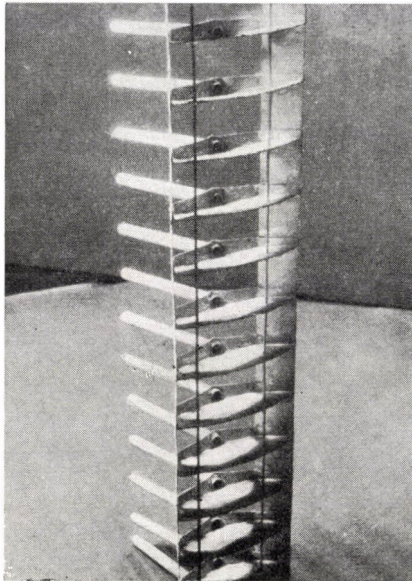


Fig. 8. Model well resolved into parts

In the knowledge of the individual discharge components the seepage velocity along the height of the well mantle can also be calculated.

d) It could be established from the model tests that further extensive tests are desirable both in the laboratory and parallel thereto in the field, for exploring the optimum dimensions of well filters. As indicated, for instance, by the experiments carried out so far, the effect of the well filter on resistances may be quite appreciable. It is, therefore, recommended to continue extended research for replacing the filter fabrics currently used in Hungary with more up-to-date and hydraulically more efficient filter types.

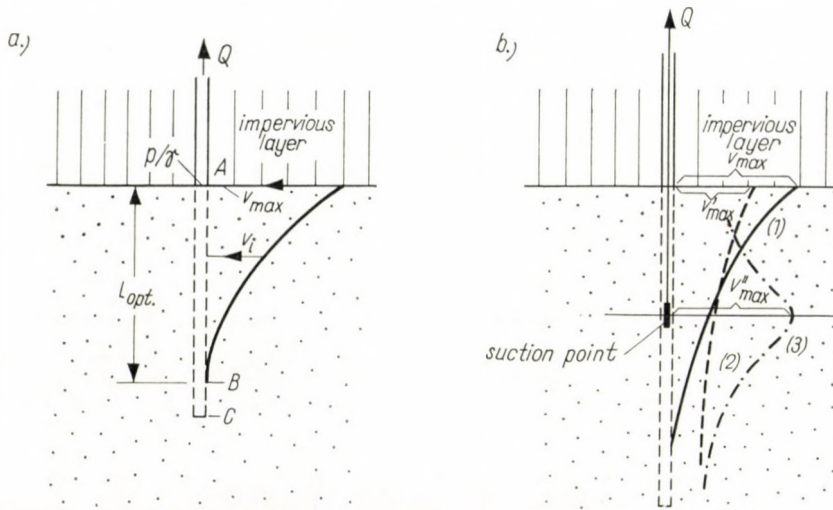


Fig. 9a-b. Basic hydraulic conditions influencing the optimum length of the well filter

e) Another important problem is the determination of the best screen length for the well. It has been positively demonstrated by experiments that the determination of the optimum screen length for wells of smaller diameter is unavoidable for both hydraulic and economical reasons. This point was repeatedly emphasized by the author in his papers read before the Hungarian Hydrological Society. As revealed by Fig. 9a, e.g. in the case of a well sunk into an aquifer under artesian pressure most of the water enters into the well interior at the underside of the upper impermeable layer (point A), consequently this is the point where the highest seepage velocities (v_{\max}) occur in the system. The lowest p/γ value along the section of the well mantle penetrating into the waterbearing layer occurs at the height of this point. It should be obvious therefore, that under the given set of hydraulic conditions the greatest load on the waterbearing layer is at the elevation of point A. Proceeding downwards the seepage velocity of water particles attaining the well mantle decreases until at a certain elevation the seepage velocity v becomes zero. In other

words, the mantle surface between the points *B* and *C* is practically superfluous from the hydraulic point of view.

Of course, the hydraulic criteria outlined above may undergo certain changes during to service life of the well (Fig. 9b). If for instance, the permeability of the layer decreases in the immediate vicinity of the well as a result of internal erosion and chemical action, or the well resistance increases, then the velocity distribution expressed by curve 1 will be replaced by the one according to curve 2, which involves an increased optimum screen length. Another typical case is where the suction point is located within the perforated pipe section. The distribution of velocities is then described by curve 3. The value v''_{\max} occurs at the height of the suction point and therefore the optimum lengths of the perforated mantle surface above and under the suction point must be determined.

It will be perceived from the foregoing that over the upper, unperforated section of the well the discharge Q enters, under the given set of hydraulic conditions, into the interior of the well from the surrounding granular medium by fully complying with the principle of least resistance. The character of the velocity distribution curves 1, 2 and 3 as well as the optimum screen length are governed by this circumstance.

The principle of least resistance applies naturally to any other type of movement of the fluid particles as well.

It can be satisfactorily recorded that beyond laboratory research, field measurements on existing wells have already also been initiated for determining the optimum length of well screens. In view of the large number of wells already operating, or awaiting to be sunk in Hungary, it is desirable to gain a better understanding of the numerous factors governing the optimum length of the well screen of which the radius of the well r_0 and the coefficient "k" of the waterbearing layer are obviously the most important ones.

f) In the capillary fringe the equipotential lines under the drawdown curve were shown beyond doubt to continue up to a certain height [35]. In other words there exists a hydraulic gradient between two adjacent point: (points 1 and 2) on the streamline within the three-phase capillary fringes

$$J = \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} \Big/ \Delta L = \frac{\Delta H}{\Delta L},$$

i.e., the water moves towards the well. Experiments carried out in Hungary with the help of the partial model well demonstrated that from the lower part of the capillary fringe connecting to the well mantle, from the section *E—F* in Fig. 10, water may enter directly into the well interior, that is to say that the water particles in this space are placed under a slight positive pressure which is slightly higher than the atmospheric one and necessary for overcoming

the attractive force of molecular origin prevailing between the particles. This hydraulic phenomenon is naturally equivalent to a slight rise of the free water surface in the vicinity of the well mantle. Having recognized the existence of the discharge from the capillary fringe the following relation was developed for estimating the full discharge Q of the model well:

$$Q = \pi k \left\{ \frac{H^2 - h_b^2}{\ln R/r_0} + h_c \left[\frac{H - h_b - 0.228 \sqrt{\frac{H}{r_0}} \frac{(H - h_b)^2}{H}}{\ln R/r_0} \right] \right\}$$

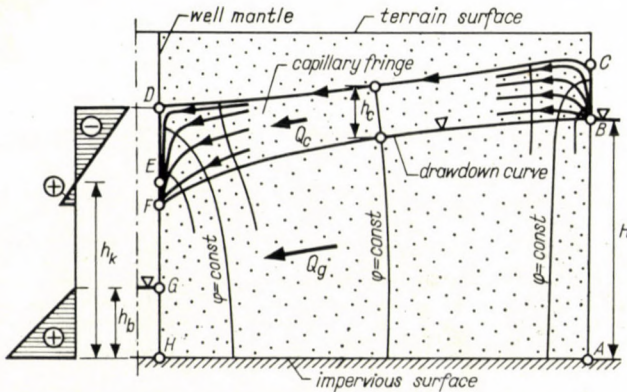


Fig. 10. Hydraulic conditions for seepage into the well from the capillary fringe

In addition to the notations introduced earlier, h_c is the discharging height of the capillary fringe, R is the radius of the range affected by the well. The evidence gained for the discharge from the capillary fringe as well as for the hydraulic conditions within this fringe provides a satisfactory basis for the quantitative evaluation of these influences during the model tests.

g) The condition of seepage in the seepage system around the well is far from uniform. The hydraulic conditions for the occurrence of a seepage range which departs from laminar flow, and is thus either of a turbulent character, or fully turbulent, have been related to the occurrence of a difference in water levels at the two sides of the well mantle. In this respect three cases can be discerned (Figs. 11a—c):

In fine grained soils and at small drawdown values, when there is practically no difference between the external and internal water levels, the seepage occurring over the entire porous surface surrounding the well mantle is in the laminar range of flow (Fig. 11a).

After the departure of water levels seepage flow of a turbulent character occurs at the height of the water level within the well, respectively starts

to spread therefrom (Fig. 11b), still the entire field along the well mantle does not assume simultaneously a turbulent character. There is very likely a close relationship between this problem and the chemical composition of the water and the soil, since the often all too conspicuous process of layer clogging cannot be traced reliably in space and time unless all relevant hydraulic and chemical factors are simultaneously taken into consideration.

In the last stage of development the linear seepage law ceases to be applicable to any part of the porous cross section along the well mantle (Fig. 11c).

The laboratory experiments carried out by I. V. NAGY and G. KARÁDI for determining the validity limits of the linear seepage law should be mentioned

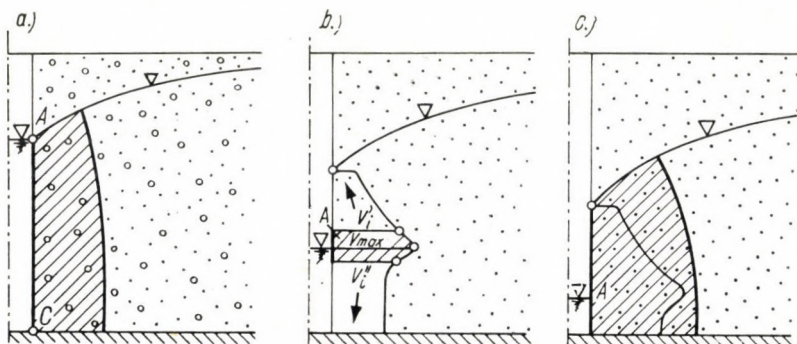


Fig. 11. Basic definitions relating to the seepage pattern around the well

at this juncture [36, 37]. Beyond their appreciable scientific significance these experiments contributed valuable information to the investigations into the development of the non-uniform conditions of seepage around the well, which were outlined above, and into the effects arising therefrom.

As revealed by the laboratory experiments, the upper validity limit of Darcy's law is at $Re \lambda \approx 5$. Experimental results have been plotted in a coordinate system

$$Re \lambda = f(Re)$$

(Fig. 12). The same investigations gave as reasons for the discontinuation of the condition $Re \lambda = \text{const.}$ the increase of the effects due to inertia forces and the development of local turbulence.

The laboratory investigations were extended to the lower validity limit of Darcy's law as well. Seepage was already found to start at the smallest gradient whenever the watercontent of clay was smaller than the limit below which water is present in a bound form only. The relationship between the watercontent and the initial gradient is illustrated in Fig. 13. The conclusion to be drawn from these experiments is that the lower limit is governed essentially

by the rheological properties of the bound water enveloping the soil particles. These results should be interpreted as valuable progress in the direction defined by similar studies made earlier in Hungary [38, 39, 41].

It can be established, in general, that the development of a correct approach to well hydraulics was effectively promoted by the model tests,

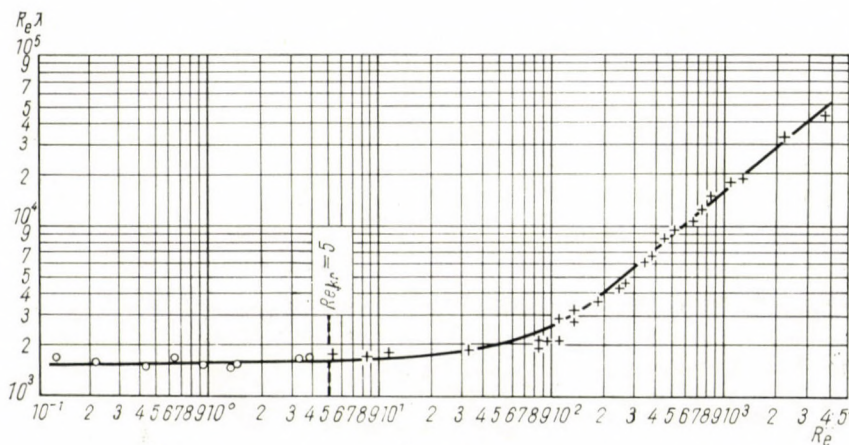


Fig. 12. Experimental data on the upper limit of validity of Darcy's law

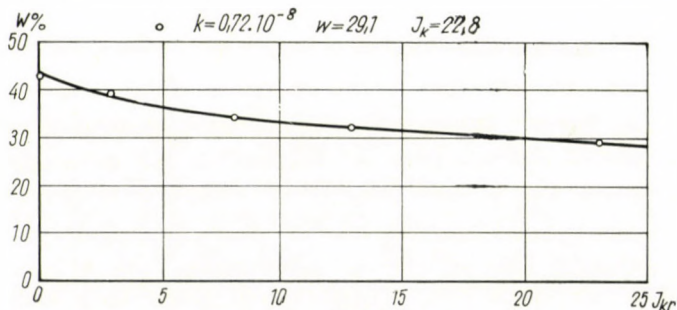


Fig. 13. Relationship between the water content (w) and the initial gradient

inasmuch as they offered insight into the particulars of phenomena which are normally inaccessible to observation in nature, and provided actual data on hydraulic parameters which could otherwise not have been measured for economical reasons.

In evaluating the results of model tests on problems relating to wells it should be conceded without bias in the interest of further development, that these results primarily affect the hydraulic aspects of the problem. There remain however, further questions unanswered in this field, which can be cleared by field observations only. An example for these is the selection

of the significant part of the drawdown curve for the calculation of the coefficient "k". As was clearly demonstrated by K. UBELL, only an intermediate section of the drawdown curve can be represented by a mathematical curve which is truly suitable for the calculation of the coefficient "k" [41].

Allowance for the hydrological factors which affect the seepage phenomenon besides the hydraulic ones is at present hardly feasible in model tests. However, in full appreciation of the role played by these factors it should be emphasized here again, that model tests and field observations on well problems must be evaluated by a uniform, closely related approach. In this manner it will be possible to develop on the basis of subsequent research a general well theory in which all relevant factors are accounted for. These investigations will probably reveal some factors or presently unknown order of magnitude to be unimportant and practically negligible.

The circumstance that the condition of seepage in the system around the well varies with distance, presents a further important field for research. Beyond a few initial attempts [41, 42] hardly any theoretical knowledge is available which could lead to a solution.

IV. Investigations into horizontal filter wells

The object of the corresponding model tests [44] was to review the fundamental hydraulic problems of isolated horizontal filter wells in an inclusive manner. The necessity of such investigations was made necessary by the diversity of opinion — reflected by accounts in the literature — on the hydraulic approach to the operation of horizontal filter wells.

The experimental results obtained relate primarily to *a)* the exploitability of the filter cylinder around the horizontal branch; *b)* the study of the factors affecting the optimum length of the branch; *c)* the particulars of infiltration from the bed towards the branch; and *d)* the yield of individual branches.

a) The analysis of seepage conditions around the branch revealed that the seepage field around branch can, in most cases, be dissolved into three typical parts even if the filter cylinder around the horizontal branch is perfectly developed (Fig. 14). In general, most of the water enters into the horizontal branch at its end away from the shaft, from space I. Water from space II filters at a slower rate into the filter cylinder, respectively into the interior of the branch. Where the waterbearing layer is rather deep and the original groundwater flow was in the direction of the branch axis, groundwater layer III may percolate away completely unused over the branch.

Thus, it could be established that the full exploitation of the filter cylinder from the point of view of infiltration is usually impossible.

b) The determination of the optimum branch length is important from technical and economical points of view alike. As was revealed by thorough analyses the optimum branch length must never be neglected, regardless of the hydraulic boundary condition. Where for instance excessive hydraulic interference between the perforated branch sections around the shaft is to be avoided, the optimum and at the same time economical branch length can be

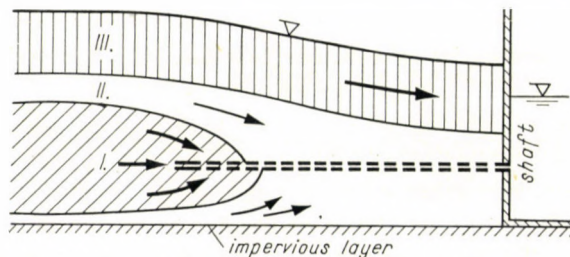


Fig. 14. Seepage field around the horizontal filter branch and its hydraulically practicable division

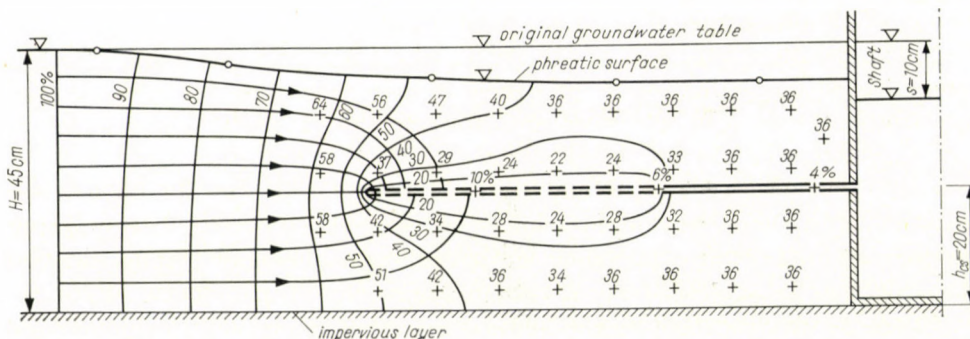


Fig. 15. Seepage pattern. The section of the branch surface adjacent to the shaft is unperforated. $\varnothing = 1 \text{ cm}$

attained by the inclusion of an unperforated section. The development of the seepage pattern around the branch in this case is illustrated in Fig. 15.

c) A well defined discreet influence range pertains to each of the branches in intercepting the water infiltrating from the bed. The question of optimum branch length naturally arises in this case, too.

d) As far as the yield of individual branches is concerned, the experiments offered valuable information and concrete comparable data on the interference between branches, as well as on the important role of hydraulic boundary conditions in the case of branches drawing on groundwater, or on the river bed.

As revealed by research carried out so far and experience gained in measuring techniques, properly selected model tests are likely to prove suitable for investigations into the properties of rows of filter wells arranged along

river beds, in addition to the almost complete range of hydraulic detail problems associated with isolated horizontal filter wells.

One of the most important problems remaining to be solved in the near future is the arrangement of the branches in plan, and the location of the screen surfaces along the branches for obtaining truly optimum hydraulic well efficiency under any given set of boundary conditions of seepage. In the case of horizontal filter wells sited along a river bed, another way of stating the problem could be how to intercept a bed section with horizontal filter wells in the hydraulically most favourable manner.

V. Investigations into vacuum wells

The object of these model experiments is the study of the fundamental problems in the hydraulics of vacuum wells arranged *a)* singly, or *b)* in a row [45, 46]. The primary aim of these investigations was the determination of *a)* the drawdown curve, *b)* the piezometric head and *c)* the hydraulic parameters of the depression field in the granular medium.

The problem attacked by these studies was significant from both the theoretical and practical aspect, yet the hydraulic conditions for the successful operation of vacuum wells were not subjected to laboratory investigations either at home or abroad. Field pumping tests, on the other hand, usually failed to provide a detailed and positive information on the phenomena involved. The divergence of opinion concerning the selection of the proper method of groundwater lowering the proper operation and arrangement of the wells can be explained by this circumstance.

The results obtained by the hydraulic seepage model can be summarized as follows:

a) Adopting for the drawdown curve the definition commonly used in connection with gravity wells — according to which the drawdown curve is made up of a series of points which are located at the height of the water column pertaining to the piezometric gradient lines of equal value passing through them — it was found that under a certain vacuum within the well the drawdown curve still intersects the unperforated well mantle, while above a certain vacuum it departs from the latter (Fig. 16), i.e. does not intersect it any longer. This is the essential difference between a gravitational drawdown curve and one around a vacuum well.

This principle relating to the drawdown curve retains its validity if the impermeable layer is at a great depth under the well bottom, when the drawdown curve may even descend below the height of the latter.

β) From the point of view of groundwater lowering there is thus, according to the notations of Fig. 17, above the drawdown curve defined in paragraph

In the case of a small vacuum in the well the lower, similarly three-phase vacuum field also becomes noticeable around the screen surface of the well in addition to the two fields mentioned before (Fig. 18b).

Three fields develop also in the case of a higher vacuum in the well, but the upper and lower vacuum fields already merge and a coherent system is formed (Fig. 18c).

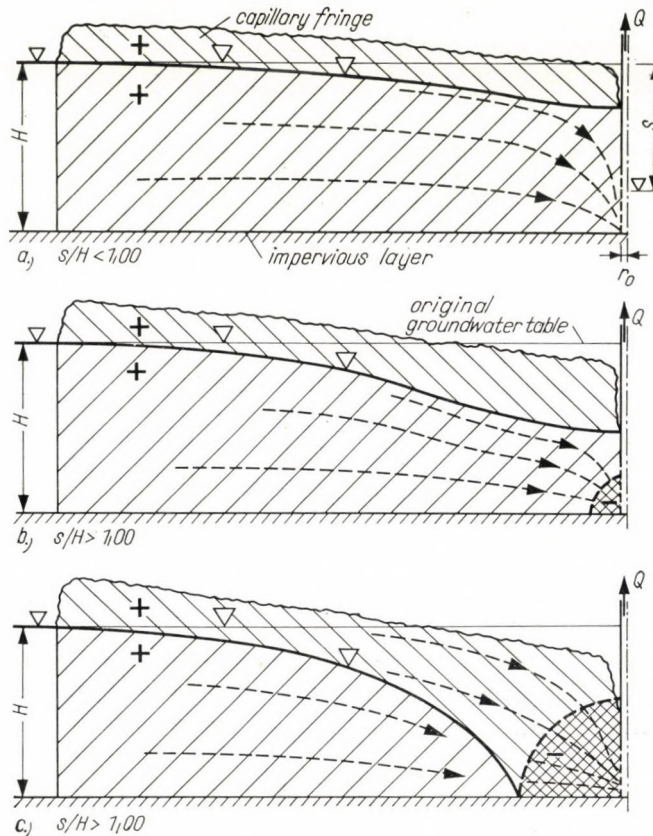


Fig. 18. Fundamental cases of the character of the distribution of piezometric pressures around vacuum wells

The expansion of the depression into the granular medium implies that the permeability (k) of the seepage system may be regarded as increasing, meaning at the same time that the geometrical radius (r_0) of the vacuum well must be replaced by a so-called hydraulic radius, which depends on the magnitude of the depression in the well, and is thus variable. This replacement is justified since the effect of the vacuum on the well yield is equivalent to the increase of the geometrical well diameter.

As already demonstrated by the above preliminary research results, the model tests may well be regarded suitable for gaining a better insight into further, at present, not all too clearly understood problems of the hydraulics of vacuum wells.

VI. Investigations into the movement of water in fissured rocks

The prerequisite for the practical realization of any reasonable water policy is the exploration of the available water resources as to their quality and quantity. Beyond the structural composition of waterbearing rock formations the role of hydraulics also becomes significant as soon as the water starts to move since this movement is governed by the laws of fluid motion. The necessity of relating hydrology and hydraulics is thus evident.

The laws controlling the movement of water in porous rocks are relatively much better understood than those applying to phenomena in fissured rocks, since the former may usually be considered to be uniform.

The relationships governed by *a*) the geometry of the fissures, *b*) the kinetics of water movement and *c*) the material properties of the fluid are more involved in the case of fissured rocks. The relationship for any particular fissure may be expressed in the following general form:

$$\lambda = \varphi \left(\text{Re}, \frac{e}{\delta}, \Phi_1 \right),$$

where *e* is the absolute roughness of the fissure in the case of any particular type of surface roughness, δ is the appropriately selected characteristic length relating to the cross section of the individual fissure, while Φ_1 is a dimensionless term expressing the effect of a particular type of roughness.

For any particular type or roughness $\Phi_1 = \text{const.}$ and thus the problem is essentially reduced to the determination of the function

$$\lambda = \psi \left(\text{Re}, \frac{e}{\delta} \right)$$

which applies to either the laminar, transitory, or, the turbulent range of motion.

In any system of fissures composed of individual fissure elements, various losses occur as a result of wall friction, bends and local contractions.

All these losses of different origin, as well as the terms expressing all the geometrical, kinetic properties of the fissured system and the material properties of water are, however, subject to variation with both time and location. For this reason the statistical average of all these terms must be used in changing over from the investigation of water movement in the individual fissure to that of phenomena occurring in the entire system. Depending on local conditions

the truly effective and significant hydraulic parameters can be determined on the basis of actual field measurements. Yet an increasing tendency can in recent years be observed all over the World towards studying hydrogeological phenomena in reduced scale systems, i.e. on scale models. This tendency became manifest when the National Geological Authority placed an order with the Hydraulic Laboratory of the I. Institute for Hydraulics, Technical University, Budapest, for the performance of certain model investigations.

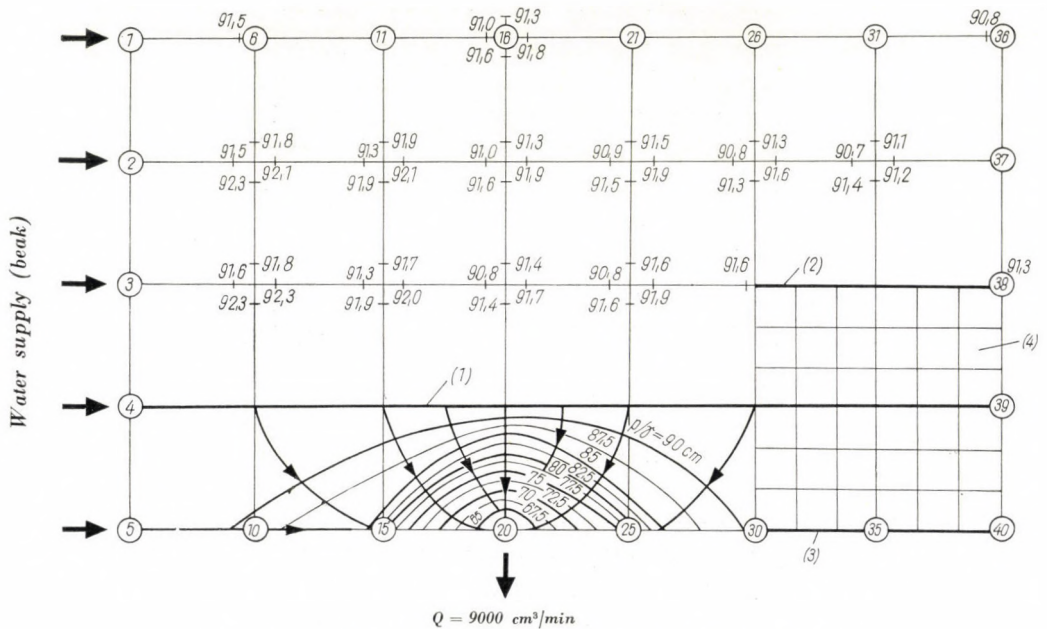


Fig. 19. The effect of a horizontal fissure on the seepage pattern

In the model technique developed by the author [47, 48] reliance is put on the analogy existing between the movement of water within the system of fissures under pressure and the pipe system of the model.

The idealized fissure system in the two-dimensional model is made up of PVC plastic pipes and the geometrical properties of the fissures in the prototype can be reproduced to a fair extent in the model.

In the model thus created the occurrence and development of losses due to friction, bends and contractions can be observed, their magnitude can be determined, the condition of flow, i.e. whether laminar, transitory, or fully turbulent can be established, and the non-uniformity of the fissure pattern as well as the inertia force can be allowed for to the desired degree.

From among the experiments carried out on the two dimensional model the following are deemed worthy of mentioning:

a) In the case of a homogeneous system hydraulic conditions pertaining to the immediate vicinity of a tapping point may be considered as being approximately identical, regardless of the location of the tapping point along the perimeter of the system. These experimental results clearly point to the conclusion that in the case of any fluid movement, regardless of the quality of the medium, the most important task is to determine the hydraulic condi-

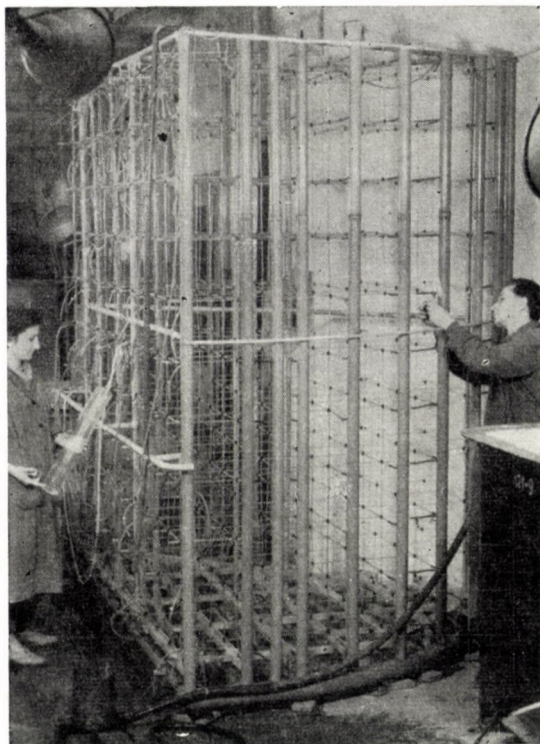


Fig. 20. Three-dimensional model constructed for the study of water movement in fissured rocks

tions in the smallest cross section of a hydrodynamically coherent water system, respectively, in the immediate vicinity thereof.

β) If a system of fissures in which the water under pressure is tapped at several points, then individual seepage influence fields equal in number to that of the tapping points is created. This situation may arise e.g. in the case of springs situated close to each other.

As far as the optimum depth of exploratory boreholes is concerned it could be established that in a system under uniform hydrostatic pressure the extension of the wells beyond a certain depth is not practicable any more since a greater depth is practically not accompanied by any increase in yield.

A non-uniform fissure pattern, which is most often encountered in nature can also be simulated by a scale model (Fig. 19): the large horizontal fissure connecting it to the left-hand fault was found to govern hydraulic conditions if the system is tapped under the fissure. The almost identical order of magnitude of piezometric heads in the space above is an indication of the fact that

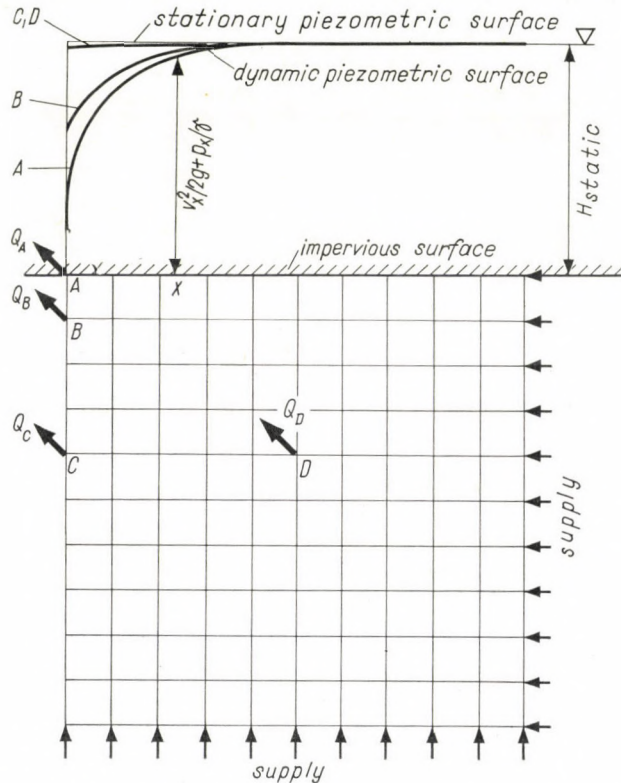


Fig. 21. Definition of the piezometric surface above a karstic system

the water from this space practically does not contribute under the given set of conditions to the yield, although its permeability is also appreciable.

A three-dimensional scale model was also constructed during 1962 at the I. Institute for Hydraulics (Fig. 20). The fundamental hydraulic problems related to faults have also been studied.

From among the results obtained during the investigation into three-dimensional phenomena the shape of the piezometric surface should briefly be mentioned in this report (Fig. 21). The three-dimensional model shown in Fig. 20 is tapped at the points A, B, C and D. The horizontal plane bounding the waterbearing system of fissures from above, i.e. passing through point A is assumed to be impermeable. Above this plane the static head H acts on the

waterbearing system. A continuous supply of water is ensured through the lateral and bottom surface to the segment space. The piezometric surfaces pertaining to the p/γ values which ensue in the impermeable plane defined above, will be different depending on the point where a karstic system under a similar pressure is tapped (e.g. by a pumping test after the drilling of an exploratory borehole). The character of the shape of these surfaces should be interpreted in the following manner (Fig. 21).

a) With the tapping point located in the impermeable plane (in point *A*) the relatively short section of the corresponding piezometric plane, denoted plane *A*, adjacent to the point of tapping, will be very steep. This steep section approaches almost asymptotically the vertical passing through point *A*, which is due to the fact that the role played by the inertia force is significant in the immediate vicinity of the point of tapping only.

b) With the tapping point located lower than, but still in the vicinity of, the previous level (in point *B*), the shape of the corresponding piezometric surface will be similar to the former, but will be situated above it.

c) With the system tapped at considerable depth below the upper impermeable plane (e.g. at points *C* or *D*), there will be according to the experiments hardly any drop in the piezometric surface, and even this slight lowering will follow a slightly inclined straight line.

From the analysis of the above fundamental cases the following basic principle can be derived for the practice: the use of the piezometric surface as parameter is essentially impossible unless the system is tapped in its upper boundary plane (in point *A* in Fig. 21). With tapping effected at a certain level, or point (e.g. points *C* or *D*) the geometry of the piezometric surface does not yield any more information on the nature of hydraulic phenomena taking place in the immediate vicinity of the point of tapping.

It is expected that the development of the model testing method introduced for the investigation of hydraulic phenomena in karstic systems, will eventually permit the realization of the scale model idealized of karstic systems of different structural patterns. The model law applying to these model tests is not yet known, the data derived from the experiments are, therefore, primarily of a qualitative character. In the interest of the undelayed exploration of a suitable model law the necessity of constructing a scale model arises, in which the extensive investigation of a prototype karstic system would be possible. The prototype system should naturally be known sufficiently from both structural and hydraulic points of view. The quantitative evaluation of parameters in the scale models should become possible by the comparison of the corresponding hydraulic data.

VII. Concluding remarks

The scientific results presented in this paper which cover a fairly wide field reflect the great interest which was for the last decade shown in Hungary towards investigations with the seepage model. Such investigations are naturally the more valuable, the better the laws of mechanical similarity can be complied with in simulating the prototype phenomenon in the model. It should therefore be regarded as a welcome development that the laws governing seepage models have been explored at the same rapid rate as the model tests themselves, and that the corresponding studies were initiated in Hungary.

It will be recalled that the seepage model law relating to two-phase seepage was established by E. MOSONYI and G. KOVÁCS [49, 50]. In the derivation the relationship gravity and frictional forces were allowed for simultaneously.

Along with the extension of seepage model testing to the study of increasingly involved phenomena, a process urged and controlled by the development of water-resources management, the investigation of model laws must of necessity be intensified and model laws concerning experiments in connection with vacuum wells and water movement in fissured rocks must be developed in the near future.

Proceeding in this direction the seepage model tests will certainly be able to play the role assigned to them in general hydraulics.

REFERENCES

1. NÉMETH, E.: Gátalatti szivárgás kísérleti úton való vizsgálata (Experimental Investigation of Under-Seepage under Levees). Budapesti Műszaki Egyetem I. Vízépítéstani Tanszékének Közleményei, Budapest 1952.
2. NÉMETH, E.: Gátalatti szivárgás kísérleti úton való vizsgálata (Experimental Investigation of Under-Seepage under Levees). *Magyar Közlekedés, Mély- és Vízépítés* (1949), 26—42.
3. NÉMETH, E.: Model Studies of Water Seepage. *Acta Techn. Hung.* **3** (1952), 131—151.
4. ÖLLŐS, G.: Vízépítési műtárgyak alatti szivárgás vizsgálata homogén altalaj esetén (Investigation of Underseepage under Hydraulic Structures in the Case of a Uniform Subsoil). *Hidrológiai Közlöny V. 34* (1954), 438—444, 486—492.
5. ÖLLŐS, G.: Vízépítési műtárgyak alatti szivárgás vizsgálata inhomogén altalaj esetén (Investigation of Underseepage under Hydraulic Structures in the Case of a Non-Uniform Subsoil). *Hidrológiai Közlöny V. 35* (1955), 3—5, 117—126.
6. NÉMETH, E.: L'importance de la loi de filtration de Darcy à la lumière des résultats de quelques essais sur modèles réduits. L'Association Internationale d'Hydrologie; Symposia Darcy; Publication No. 41. Dijon.
7. NÉMETH, E.: Szemelvények az I. sz. Vízépítéstani Tanszék kutatómunkájából (Report on Research at the I. Institute for Hydraulics). Presented at the Scientific Session of the Technical University for Building and Traffic, 1955 November.
8. MOLNÁR, L.: Folyadékáramlások törvényszerűségeinek meghatározása elektromos analógia segítségével (Laws of Fluid Motion Determined by Electric Analogy). *Hidrológiai Közlöny V. 37* (1957), 306—317.
9. KOVÁCS, GY.: A gát alatt átszivárgó vízhozam megoszlása a mentett oldalon (Distribution of Underseepage on the Protected Side of the Levee). *Hidrológiai Közlöny V. 39* (1959), 392—394.
10. NÉMETH, E.: Experiments of Lowering Groundwater. *Acta Techn. Hung.* (1952), 151—177.

11. SZABÓ, L.: Az öntözési normák helyszíni meghatározása nagyüzemi szántóföldi öntözésnél (Field Determination of Irrigation Standards in Largescale Crop Irrigation). Thesis for Candidature (Manuscript). Budapest 1957.
12. SÁRROSI, L.—SOHA, I.—KELEMEN, J.: Bentonit az építőiparban (Bentonite in the Building Industry). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1962.
13. SÁRROSI, L.: Bentonitos vízelzárási eredmények helyszínen előkészített anyaggal (Bentonite Seals with the Material Prepared at the Site). *Hidrológiai Közöny V. 40* (1960), 430—433.
14. ÖLLÖS, G.: Öntöző és befogadócsatornák hatása a talajvízszín alakulására (Effect of Irrigation and Drainage Canals on the Groundwater Level). *Hidrológiai Közöny V. 39* (1959), 123—139.
15. ÖLLÖS, G.: Öntözőcsatornákból történő beszivárgás vizsgálatának néhány hidraulikai szempontja (Hydraulic Aspects of Infiltration from Irrigation Canals). Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa, 3670; (1959), 25—48.
16. KOVÁCS, GY.: Groundwater household. International Commission on Irrigation and Drainage. *Annual Bulletin* (1959), 65—75.
17. UBELL, K.: Moisture Movement in Saturated (Three Phase) Soils with Special Regard to the Utilization of Lysimeter Observation. Symposium Hannover—Münden. Gentbrugge 1959.
18. ÖLLÖS, G.: An Investigation into the Effect of Paddy-Fields on Ground-Water Conditions. International Commission on Irrigation and Drainage. *Annual Bulletin* (1959), 22—29.
19. ÖLLÖS, G.: Beszivárgás rizstelepekről (Infiltration from paddy fields). *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* (1960), 43—61.
20. ÖLLÖS, G.—VÁGÁS, I.: A rizstelepek alakjának és méreteinek hatása a beszivárgásra (The Effect of the Shape and Dimensions of Paddy Fields on Infiltration). *Hidrológiai Közöny V. 41* (1961), 31—42.
21. VARRÓK, E.: Kísérletek az árvédelmi gátak alatt kialakuló nyomásvonal meghatározására (Experiment Determination of the Gradient Line under Flood Levees). VITUKI Annual Report, 1957.
22. VARRÓK, E.: A mentett oldalon levő szivárgó és kút nyomáscsökkentő hatása (The Pressure Reducing Effect of Drainage and Well on the Protected Side). Expert treatise, VITUKI, Budapest 1957; Manuscript.
23. VARRÓK, E.: A nem permanens talajvízmozgás vizsgálata—különös tekintettel a nyomásváltozás terjedésére (Investigation of Non-Steady Groundwater Movement with Special Regard to the Propagation of Pressure Waves). *Hidrológiai Közöny V. 40* (1960), 149—154.
24. VARRÓK, E.: Kísérletek a hidraulikus nyomás csökkentésére árvédelmi töltéseknél (Experiments Aiming at the Reduction of Hydraulic Pressures on Flood Levees). VITUKI Annual Report, 1958.
25. VARRÓK, E.: Szakvélemény a nagymarosi vízlépcső visszaduasztálásának hatására a Vág alsó szakasza mellett kialakuló talajvízmozgásról (Groundwater Movement along the Lower Reach of the Vág River under the Influence of the Backwater of the Nagymaros Power Station). Manuscript. VITUKI, Budapest 1959.
26. SZALAY, M.: Árvédelmi töltések méreteinek ellenőrzése különös tekintettel azok átázására. (Checking the Dimensions of Flood Levees with Special Regard to their Soaking). *Hidrológiai Közöny V. 33* (1953), 108—122.
27. LAMPL, H.: Buzgárképződés és a talajtörés (Boiling and Hydraulic Soil Failure). *Vízügyi Közlemények* (1959), 25—49.
28. ÖLLÖS, G.: A talajrétegződés hatása a kutakkal kapcsolatos talajvízmozgásra (The Effect of Soil Stratification on the Groundwater Movement around Wells). *Hidrológiai Közöny V. 36* (1956), 274—285.
29. ÖLLÖS, G.: A kútpaláston kialakuló vízmozgásnak és a kút vízhozamának vizsgálata (Investigation of Water Movement on the Well Mantle and the Yield of the Well). *Hidrológiai Közöny V. 37* (1957), 26—33.
30. ÖLLÖS, G.: A kútpalást melletti hidraulikai viszonyok részletes vizsgálata (A Detailed Study of Hydraulic Conditions in the Vicinity of the Well Mantle). *Hidrológiai Közöny V. 38* (1958), 1—20.
31. ÖLLÖS, G.: Inhomogén talajok hatása a kutak vízádóképességére (The Influence of Non-Uniformity of Soil on the Well Yield). *Hidrológiai Közöny V. 40* (1960), 33—47.
32. ÖLLÖS, G.: A kútpalást környezetében fellépő hidraulikai viszonyok vizsgálata (The Investigation of Hydraulic Conditions in the Vicinity of the Well Mantle). Thesis for Candidature (Manuscript) Budapest 1960.
33. ÖLLÖS, G.: Dimenzió nélküli mennyiségek alkalmazása a kút-hidraulikában (The Application of Dimensionless Parameters in Well Hydraulics). *Vízügyi Közlemények* (1960), 581—589.

34. GRČIĆ, J.: A kútpaláston levő szabad szivárgási felületre vonatkozó vizsgálatok vízszintes fenék felett egy kúthoz történő áramlás esetén (Investigations into the Free Seepage Surface on the Well Mantle, in the Case of Flow to a Single Well over a Horizontal Bottom). Presented at the Conference held at the 75th Anniversary of the Hungarian Hydrographic Service and the 10th Anniversary of the Research Institute for Water Resources in 1962.
35. ÖLLÖS, G.: A kapilláris sáv hatása a szabad felszíni szivárgó vízmozgásokra (The Effect of the Capillary Fringe on Free-Surface Seepage). *Vízügyi Közlemények* (1961), 127—149.
36. NAGY, I.—KARÁDI, G.: A Darcy-törvény érvényességének vizsgálata (Considerations on the Validity of Darcy's Law. Hydraulic Conference. Budapest (1960), Group 3.
37. NAGY, I.—KARÁDI, G.: Untersuchungen über den Gültigkeitsbereich des Gesetzes von Darcy. *Österreichische Wasserwirtschaft* (1961), 25—32.
38. KOVÁCS, GY.: A mikroszivárgás elméleti vizsgálata (Theoretical Considerations on Micro-seepage). *Hidrológiai Közöny* 37 (1957), 210—222.
39. JUHÁSZ, J.: Talajvízháztartás. I. rész. Beszivárgás (Groundwater Household. Part I. Infiltration). Thesis for Candidature (Manuscript) Budapest 1957.
40. MOSONYI, E.: Vízépítési műtárgyak (Hydraulic Structures). Textbook. Budapest. 1950.
41. UBELL, K.: Az elméleti kúthidraulika módszereinek gyakorlati alkalmazásai (Practical Applications of Theoretical Well Hydraulics). *Vízügyi Közlemények* (1958), 306—333.
42. ÖLLÖS, G.—UBELL, K.: Relation between discharge and hydrodynamic conditions in the vicinity of the well. *IASH. A. Athén* 1961. Publication No. 57, 382—390.
43. MOSONYI, E.: Vízérőhasznosítás (Water Power Development). Budapest.
44. ÖLLÖS, G.: A csáposkutak hidraulikai kérdései (Hydraulic Problems of Horizontal Filter Wells). *Vízügyi Közlemények* (1962), 233—267.
45. ÖLLÖS, G.: A vákuumkutas talajvízszínsüllyesztésre vonatkozó kismintakísérletek (Model Tests on Groundwater Lowering with Vacuum Wells). Expert treatise on the I. Institute for Hydraulics, Budapest 1962.
46. ÖLLÖS, G.—DELI, M.—SZOLNOKY, CS.: A vákuumkutas talajvízszínsüllyesztésre vonatkozó kismintakísérletek eredményei (Results of Model Tests on Groundwater Lowering with Groundwater Wells). *Hidrológiai Közöny* V. 43 (1963), 19—30.
47. ÖLLÖS, G.: Possibilities of Model Investigations into Water Movements Occurring in Fissured Rocks. *Neuvième Assemblée Générale de l'AIHR. Belgrád* (1961), 1—10.
48. ÖLLÖS, G.: Repedezett kőzetekben fellépő vízmozgás hidraulikai vizsgálata (Hydraulic Investigation of Water Movement in Fissured Rocks). *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* (1961), 537—562.
49. MOSONYI, E.—KOVÁCS, GY.: Kismintatörvények a nehézségi és súrlódóerő együttes figyelembevételével (Model Laws Accounting for Gravity and Friction Simultaneously). *Hidrológiai Közöny* V. 32 (1952), 274—277.
50. MOSONYI, E.: A méretarány szerepe a kismintakísérleteknél (The Role of the Scale Factor in Model Testing). *A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztály-közleményei* (1953), 216—222.
51. ÖLLÖS, G.: Alkalmazott hidraulika (Applied Hydraulics). Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványa, Mé. 48; Budapest 1963.

MODELLUNTERSUCHUNG VON SICKERVORGÄNGEN

G. ÖLLÖS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit informiert über diejenigen ungarischen Laboruntersuchungen von Sicker-vorgängen, welche unter Sickerergänge unter Hochwasserschutzdämmen, in der Umgebung von Brunnen mit freiem Wasserspiegel, in Horizontalbrunnen, in Vakuumbrunnen und in Karstsystemen Überblick bieten. Das Literaturverzeichnis umfaßt jedoch das gesamte unga-rische Forschungsmaterial.

Die Untersuchungen der Sickererscheinungen unter Hochwasserschutzdämmen er-strecken sich in erster Linie auf die hydraulische Drucklinie, welche auf den Dammkörper bzw. auf die untere Ebene der über der wasserführenden Schicht liegenden Deckschicht wirkt, des weiteren auf die Hochwasserschutzbauten, welche die Abwehr der Dambruchgefahr be-zwecken.

Die Untersuchung der hydraulischen Probleme bei Brunnen mit freiem Wasserspiegel bezieht sich in erster Linie auf die permanenten Sickererscheinungen in unmittelbarer Um-gebung des Brunnens.

Die Untersuchung der Horizontalbrunnen hat in erster Reihe die Klärung der Zusammenhänge zwischen den Parametern zum Gegenstand, die die günstigste Länge der Fassungen beeinflussen.

Die Untersuchungen über Vakuumbrunnen bezwecken die Ausarbeitung des Modellversuchsverfahrens sowie die Klärung der grundlegenden hydraulischen Vorgänge.

Die bisherigen Untersuchungen über die Wasserbewegung in rissigem Gestein erstrecken sich auf die Ausarbeitung des neu eingeführten Modellversuchsverfahrens, ferner auf die qualitative Darstellung einiger wichtigsten hydraulischen Grundprobleme.

ÉTUDE DE LA FILTRATION SUR MODÈLES RÉDUITS

G. ÖLLÖS

RÉSUMÉ

Certaines recherches de laboratoire sur la filtration, et notamment la filtration sous les digues et au voisinage des puits à surface libre, dans les puits à drains horizontaux et les puits à vide, enfin sur la filtration se produisant dans les calcaires est décrite dans un exposé sommaire suivi d'une notice bibliographique embrassant l'ensemble des travaux de recherches effectuées en Hongrie.

Les recherches concernant la filtration sous les digues portaient avant tout sur la ligne de pression hydraulique agissant sur le plan inférieur du recouvrement, ainsi que sur les travaux de protection contre le danger de rupture de la digue.

L'examen des problèmes hydrauliques des puits verticaux à surface libre se rapportait en premier lieu à la filtration permanente se produisant dans le voisinage immédiat du puits.

L'étude des puits à drains horizontaux se proposait surtout d'élucider les rapports des paramètres déterminant la longueur de drain la plus favorable du point de vue hydraulique.

Les recherches sur l'hydraulique des puits à vide avaient pour objet l'élaboration du procédé d'essai sur modèles et l'éclaircissement des phénomènes hydrauliques fondamentaux.

Les recherches relatives à l'écoulement d'eau dans les roches fissurées se rapportaient au procédé d'essais sur modèles nouvellement introduit, ainsi qu'à l'examen qualitatif de quelques problèmes hydrauliques fondamentaux.

МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВЛЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Г. ЭЛЛЁШ

РЕЗЮМЕ

Исследование дает обобщенные сведения о проводившихся в Венгрии лабораторных исследованиях, касающихся явлений фильтрации, наблюдающихся под паводковыми плотинами, вокруг колодцев со свободной поверхностью, в дренажных колодцах, вакуумных колодцах, а также в карстовых системах. Перечень литературы, однако, дает полный материал по проведенным в Венгрии исследованиям.

Исследования фильтрации под паводковыми плотинами рассматривают, в первую очередь, тело плотины и гидравлическую линию давления, влияющую на нижнюю плоскость покровного слоя над водоносным слоем, а также сооружения, предназначенные для предотвращения опасности прорыва плотины.

В отношении отвесных колодцев со свободной поверхностью исследования гидравлических явлений, в первую очередь, рассматривают постоянные процессы фильтрации, происходящие в непосредственном окружении колодца.

Исследование дренажных колодцев, в первую очередь, рассматривает вопрос выяснения зависимости параметров, влияющих на гидравлически наиболее выгодную длину дрена.

Исследования вакуумной гидравлики преследуют цель разработки метода выполнения опытов на моделях, а также относятся к выяснению основных явлений гидравлики.

Проведенные до сих пор исследования движения воды в пронизанных трещинами породах распространяются на разработку нововведенного метода опытов на моделях, а также на показ качественного смысла некоторых наиболее важных основных вопросов гидравлики.

ANALYTISCHE UNTERSUCHUNG ELEMENTARER PLANETENGETRIEBE

Z. LÉVAI

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR KRAFTFAHRZEUGE TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAUINDUSTRIE UND VERKEHR,
BUDAPEST

[Eingegangen am 7. März 1963]

Die Planetengetriebe können in zwei große Gruppen geteilt werden, je nachdem ob die verwendeten Planetenräder mit beiden Sonnenrädern unmittelbar kämmen, oder ob sie paarweise, übereinander, mittelbar gekoppelt sind (Bild 4). Im Bild 5 sind sämtliche Variationen beider Gruppen dargestellt. Das Kegelradplanetengetriebe bedeutet qualitativ keinen neuen Typ, denn jedes seiner Ausführungen entspricht irgendeinem Stirnradplanetengetriebe (Bild 6). Jedes Planetengetriebe ist demnach irgendeine Abart der im Bild 8 gezeigten zwei Grundtypen.

Die kinetische Untersuchung des Planetengetriebes kann mittels analytischer oder graphischer Methode durchgeführt werden. Für die erstere verwendet man die von WILLIS [2] vorgeschlagene Gleichung, für die zweite Art lieferte KUTZBACH die entsprechende Grundlage. Die Kutzbachsche Methode kann jedoch nicht bei Planetenrädernpaaren (Bild 4) verwendet werden. Für den letzteren Fall wird die in den Bildern 13—14 gezeigte Methode vorgeschlagen. Das wesentliche dieser Methode besteht darin, daß man den mit Strich bezeichneten Vektor der Umfangsgeschwindigkeit des Sonnenrades — das nicht unmittelbar mit dem untersuchten Planetenrad kämmt — nicht auf dem wirklichen Umfang des Sonnenrades aufträgt, sondern auf dem Radius, der von einer Geraden abgetrennt wird, die durch die Berührungspunkte des zwischengeschalteten Planetenrades gelegt wurde. Im weiteren Verlauf stimmt dieses Verfahren mit der Kutzbachschen Methode überein.

Die Planetengetriebe sind allgemein bekannte Mechanismen. In jedem Planetengetriebe (Bild 1) sind zwei selbständige Zahnräder 1 und 2, jedoch

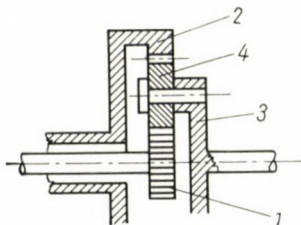


Bild 1

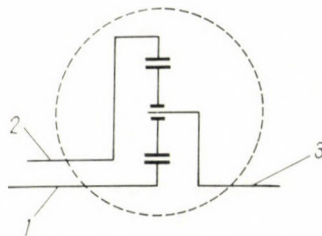


Bild 2

mit einer gemeinsamen Achse, zu finden, die miteinander nicht unmittelbar kämmen, sondern über die sog. Planetenräder 4. Diese letzteren nennt man deswegen Planetenräder, weil sie nicht nur um ihre eigene Achse rotieren, sondern auch um die beiden Sonnenräder umlaufen können. Die Planetenräder sind nämlich am sog. Steg 3 gelagert, im Vergleich zu den Sonnenrädern exzentrisch, und dieser Steg kann gleichfalls eine Drehbewegung ausführen.

Aus jedem Planetengetriebe führen drei Wellen heraus, von denen zwei zu den Sonnenrädern gehören und eine Welle zum Steg (Bild 2). Die wichtigsten Bauteile des Planetengetriebes sind die Sonnenräder und der Steg. Diese werden die Hauptelemente des Planetengetriebes genannt.

Sowohl die Sonnenräder als auch die Planetenräder können innen- oder außenverzahnt sein. Planetenräder mit Innenverzahnung fanden keine

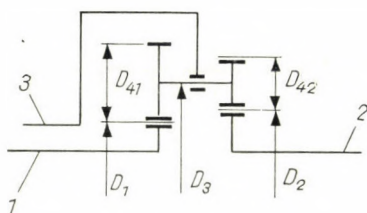


Bild 3

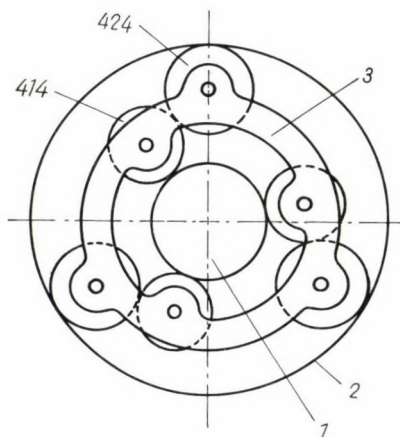


Bild 4

praktische Anwendung. Planetenräder mit Außenverzahnung können von einfacher oder doppelter Ausführung sein. Die letztere ist dann von Bedeutung, wenn die Durchmesser der beiden vereinten Räder ungleich sind, d.h. $D_{41} \neq D_{42}$ (Bild 3).

Die Planetengetriebe können in zwei große Gruppen geteilt werden, je nachdem, ob die in ihnen verwendeten Planetenräder mit beiden Sonnenrädern unmittelbar oder nur mit dem einen kämmen. Im letzteren Fall sind die Planetenräder paarweise auszuführen, und hierbei wird von Planetenraderpaaren gesprochen (Bild 4).

Im Bild 5 sind sämtliche Variationen der beiden Gruppen veranschaulicht. In den beiden Feldern links sind die Planetengetriebearten zu sehen, bei denen

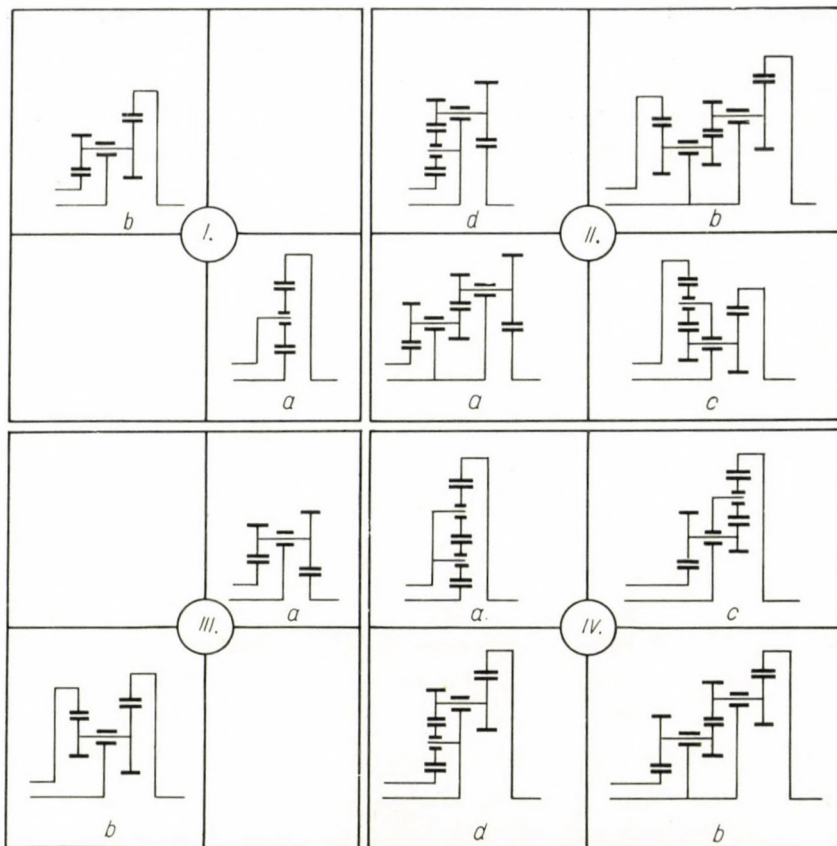


Bild 5



Bild 6

die Planetenräder (die einfachen oder die doppelten) mit beiden Sonnenrädern kämmen. In den rechts gezeigten Planetengetrieben sind die Planetenräder paarweise zu finden; sie kämmen einerseits miteinander, andererseits mit einem der Sonnenräder.

Oft verwendet man in den Planetengetrieben Kegelräder, diese Anordnung bedeutet jedoch qualitativ keine neue Bauart, denn jedes Kegelrad-Planetengeräte entspricht irgendeinem Stirnrad-Planetengeräte, Unterschiede bestehen lediglich hinsichtlich der Werte der mit ihnen erreichbaren

Übersetzungen (Bild 6). Aus diesem Grund wird in den weiteren Ausführungen auf die Kegelrad-Planetengetriebe nicht weiter eingegangen.

In der Praxis kann es auch vorkommen, daß die drei Achsen der Planetengetriebekonstruktion nicht nach den am Anfang vorliegender Studie erwähnten Kriterien ausgeführt sind, wonach nämlich zwei Achsen zu den Sonnenrädern, eine dagegen zum Steg gehören sollen. In diesem Fall handelt es sich immer um ein zusammengesetztes Planetengetriebe, d. h. die Konstruktion kann in zwei oder mehrere einfache Planetengetriebe zerlegt werden (Bild 7).

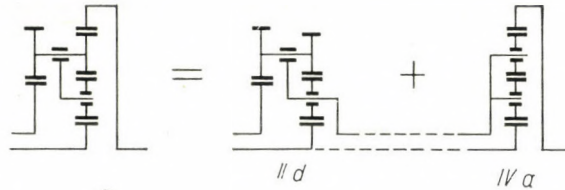


Bild 7

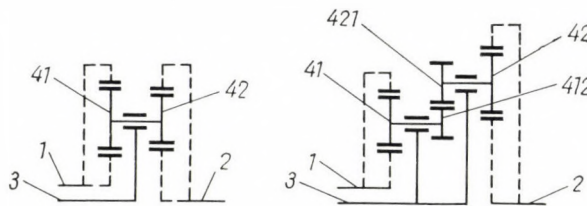


Bild 8

Die Bauarten der Planetengetriebe zusammenfassend, kann man ausagen, daß jedes Planetengetriebe irgendeine spezielle Variation der im Bild 8 gezeigten zwei Grundtypen darstellt. So z. B., wenn man aus der Abbildung von der linken Seite ausgeht, und das eine Sonnenrad mit Außenverzahnung, das andere mit Innenverzahnung versieht, erhält man die Variation, die im Bild 5 unter Ib veranschaulicht ist. Wenn außerdem noch $D_{41} = D_{42}$ ist, dann gelangt man zur Bauart Ia. Genau so gewinnt man aus dem Grundtyp der rechten Seite z. B. die Bauart IVd, im Falle eines innen- und eines außenverzahnten Sonnenrades, wenn $D_{41} = D_{412}$ ist, bzw. die Bauart IVa, wenn obendrein noch die Beziehung $D_{42} = D_{421}$ besteht.

Die Planetengetriebe können kinematisch nach der Methode von Willis durch die Grundübersetzung gekennzeichnet werden, worunter man den Quotienten der relativen Winkelgeschwindigkeiten der beiden Sonnenräder im Vergleich zum Korb versteht, d. h.

$$b = \frac{\omega'_2}{\omega'_1},$$

oder in absoluter Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt, da

$$\begin{aligned}\omega_2' &= \omega_2 - \omega_3, \\ \omega_1' &= \omega_1 - \omega_3, \\ b &= \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3}.\end{aligned}\quad (1)$$

Die Indexe 1 und 2 werden hier — und auch weiterhin stets — den zentralen Rädern, der Index 3 dem Steg zugeordnet.

Wenn man die Gleichung (1) umformt, erhält man die kinematische Grundgleichung des Planetengetriebes:

$$b\omega_1 - \omega_2 - (1 - b)\omega_3 = 0. \quad (2)$$

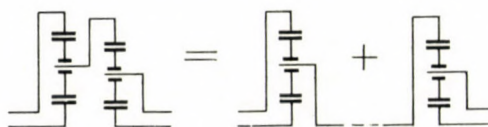


Bild 9

Wie ersichtlich, besitzt ursprünglich jedes Planetengetriebe zwei Freiheitsgrade. Mitunter begegnet man Konstruktionen, bei denen das Planetengetriebe mehrere Freiheitsgrade besitzt, diese sind jedoch ebenfalls zusammengesetzte Planetengetriebe (Bild 9). Planetengetriebe-Ausführungen mit einem Freiheitsgrad gewinnt man gleichfalls aus Planetengetrieben mit zwei Freiheitsgraden dadurch, daß man den einen Freiheitsgrad unterbindet (durch Verriegelung des einen Hauptelementes).

Die Konstante b , die in der kinematischen Grundgleichung vorkommt, hängt von den geometrischen Abmessungen des Planetengetriebes ab. Ihr Wert kann am einfachsten bei $\omega_3 = 0$ bestimmt werden, denn in diesen Fällen verwandelt sich das Planetengetriebe in ein einfaches Zahnradgetriebe, bei dem die Übersetzung zwischen den Rädern 1 und 2 aus dem Quotienten der Zahnrad Durchmesser in elementarer Weise bestimmt werden kann:

$$b = \frac{D_1}{D_2} \frac{D_{42}}{D_{41}} \quad (3)$$

oder im Falle von Planetenrädernpaaren:

$$b = - \frac{D_1}{D_2} \frac{D_{42}}{D_{41}} \frac{D_{412}}{D_{421}}. \quad (4)$$

Die Durchmesser sind mit einem Vorzeichen anzusetzen, und zwar der des außenverzahnten Rades positiv, der des innenverzahnten Rades negativ.

Dementsprechend kann auch das Vorzeichen der Grundübersetzung positiv oder negativ sein. Im Bild 5 wurden die Planetengetriebe so geordnet, daß in den beiden oberen Feldern die Getriebe mit negativer, in den beiden unteren Feldern die mit positiver Grundübersetzung untergebracht sind. Wenn die geometrischen Abmessungen bekannt sind, kann mit Hilfe der Grundgleichung die Kinematik eines jeden beliebigen einfachen oder zusammengesetzten Planetengetriebes bzw. einer Planetengetriebekonstruktion (z.B. eines Schaltgetriebes) einfach untersucht und genau berechnet werden. In der Praxis wird jedoch oft eine Schnelluntersuchung benötigt, bei der die Genauigkeit

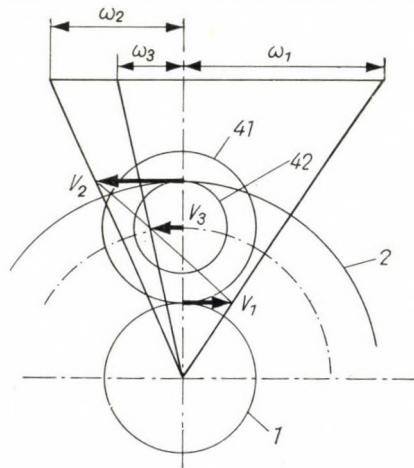


Bild 10

von keiner entscheidenden Bedeutung ist. Für diesen Zweck entspricht am besten die graphische Methode.

Zur Untersuchung des Grundtyps, dargestellt im Bild 8 links, fand die von KUTZBACH vorgeschlagene Methode eine verbreitete Anwendung, die auf dem Grundsatz der Kinetik beruht, wonach, wenn die Geschwindigkeit eines in einer Ebene sich bewegenden starren Körpers in zwei Punkten bekannt ist, sie an jeder beliebigen Stelle bestimmt werden kann. KUTZBACH betrachtete das Planetenrad als einen derartigen starren Körper, da es mit allen drei Hauptelementen des Planetengetriebes einen gemeinsamen Punkt besitzt: sein Mittelpunkt befindet sich am Steg, und an seinem Umfang kämmt es mit den Sonnenrädern. Von diesen drei Punkten kann man zweien eine beliebige Umfangsgeschwindigkeit verleihen, die durch einen Vektor dargestellt wird (Bild 10). Jeder Vektor der Umfangsgeschwindigkeit steht natürlich senkrecht auf der Geraden, die die Mittelpunkte des Planetengetriebes und des Planetenrades verbindet. Die Gerade, die die Endpunkte der beiden Vektoren verbindet,

trennt einerseits den Geschwindigkeitsvektor des dritten Berührungspunktes ab, andererseits das Momentanzentrum des Planetenrades (O_4).

Die Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Elemente des Planetengetriebes bzw. die mit ihnen verhältnismäßigen Strecken werden durch Radien, die durch den Mittelpunkt des Planetengetriebes und die Endpunkte der Vektoren gezogen werden, auf einer Geraden ausgeschnitten, die an einer beliebigen Stelle, parallel zur Vektorenrichtung gezogen wird.

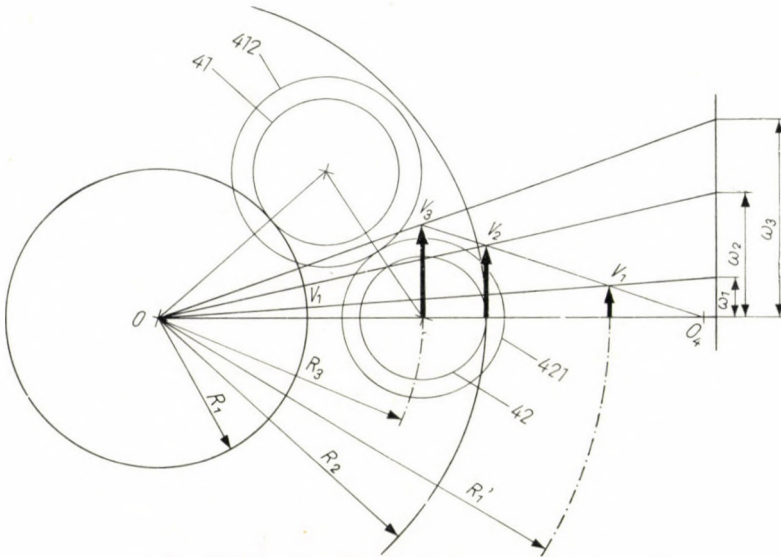


Bild 11

Diese Methode kann jedoch — wie bereits oben erwähnt — nur dann verwendet werden, wenn die Planetenräder mit beiden Sonnenrädern unmittelbar kämten. Im nachfolgenden wird ein neues graphisches Verfahren beschrieben, das auch im Falle von Planetenraderpaaren verwendet werden kann.

Im Bild 11 wurde der zu untersuchende Grundtyp in Seitenansicht dargestellt.

Den zwei Freiheitsgraden entsprechend nehme man die Winkelgeschwindigkeiten ω_2 und ω_3 bzw. die Vektoren \bar{V}_2 und \bar{V}_3 an. Von den beiden Planetenrädern sollen z. B. die 42—421 untersucht werden, und dementsprechend soll der Vektor \bar{V}_3 auf seinen Mittelpunkt bezogen werden. Das andere Planetenrad — im vorliegenden Fall 41—412 — kann auch als zwischengeschaltetes Rad genannt werden. Die Gerade, die die Endpunkte der beiden Vektoren verbindet, ergibt mit ihrem Schnittpunkt das Momentanzentrum (O_4) des Rades 42—421, die Umfangsgeschwindigkeit des dritten Elementes — im gegebenen Fall die

des einen Sonnenrades — wird nicht angegeben, weil es mit ihm keinen gemeinsamen Punkt besitzt.

Der Endpunkt des Vektors \bar{V}_1 liegt nicht auf der Geraden, die die Endpunkte der Vektoren \bar{V}_2 und \bar{V}_3 verbindet. Da jedoch zwischen den Umfangsgeschwindigkeiten — ähnlich den Winkelgeschwindigkeiten — eine lineare Beziehung besteht, gehört zur Winkelgeschwindigkeit ω_1 auch noch ein Vektor \bar{V}'_1 , dessen Endpunkt mit den Endpunkten der Vektoren \bar{V}_2 und \bar{V}_3 auf derselben Geraden liegt, wobei letztere einen beliebigen Wert haben können.

Dieser Vektor \bar{V}'_1 ist natürlich nicht die Umfangsgeschwindigkeit des Rades I , sondern die Geschwindigkeit eines mit ihm rotierenden gedachten Rades mit dem Radius R'_1 . Nun soll der Wert von R'_1 bestimmt werden. Entsprechend der linearen Beziehung:

$$\frac{\bar{V}_2 - \bar{V}'_1}{R'_1 - R_3 - R_{42}} = \frac{\bar{V}_3 - \bar{V}_2}{R_{42}},$$

woraus sich

$$R'_1 = R_3 + R_{42} \frac{\bar{V}_3 - \bar{V}'_1}{\bar{V}_3 - \bar{V}_2}.$$

ergibt.

Die Umfangsgeschwindigkeiten durch die Winkelgeschwindigkeiten ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\bar{V}'_1 &= R'_1 \omega_1, \\ \bar{V}_2 &= (R_3 + R_{42}) \omega_2, \\ \bar{V}_3 &= R_3 \omega_3.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werte und nach der entsprechenden Umordnung erhält man:

$$R'_1 = R_3 \frac{(R_3 + R_{42})(\omega_3 - \omega_2)}{R_3 \omega_3 - (R_3 + R_{42}) \omega_2 + R_{42} \omega_1}.$$

Den beiden Freiheitsgraden entsprechend soll angenommen werden:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 1, \\ \omega_3 &= 0.\end{aligned}$$

Dann erhält man nach der kinematischen Grundgleichung (2), daß

$$\omega^2 = b$$

ist, d. h.

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_{41}} \cdot \frac{R_{412}}{R_{421}} \cdot \frac{R_{42}}{R_3 + R_{42}}.$$

Nach Einsetzen der Winkelgeschwindigkeiten erhält man als Endergebnis:

$$R'_1 = \frac{R_3}{1 - \frac{R_{41}}{R_1} \cdot \frac{R_{421}}{R_{412}}} \quad (5)$$

Dieses Ergebnis kann jedoch nicht befriedigen, da ein rein graphisches Verfahren gesucht wird.

Im Bild 12 wurden wieder die Mittelpunkte und Berührungspunkte der Räder dargestellt. Man lege eine Gerade durch die Berührungspunkte des

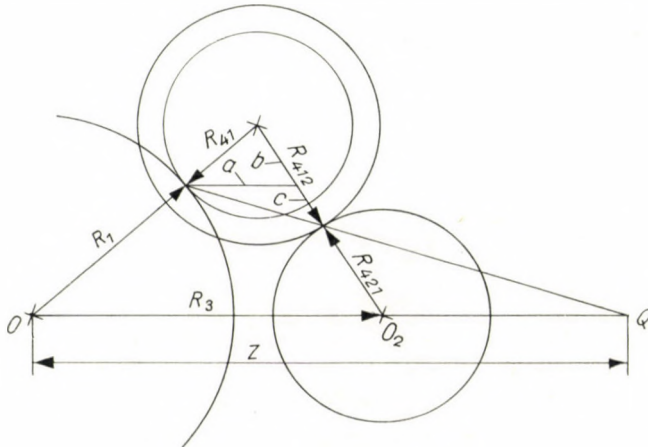


Bild 12

zwischengeschalteten Planetenrades 41—412. Diese Gerade schneidet die Gerade $\overline{O_1O_2}$ im Punkt Q. Nun ziehe man eine Gerade parallel zur Geraden $\overline{O_1O_2}$ durch den Berührungspunkt des Rades 1. Die so gewonnenen Abschnitte bezeichne man mit a , b und c .

Infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke kann angeschrieben werden:

$$\frac{a}{z - R_3} = \frac{R_{412} - b}{R_{421}}$$

Hieraus wird z in folgender Weise ausgedrückt:

$$z = R_3 + \frac{aR_{421}}{R_{412} - b}$$

In diesem Ausdruck sind nur a und b unbekannt. Ebenfalls auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke kann man schreiben:

$$\frac{a}{R_3} = \frac{R_{41}}{R_1 + R_{41}} \quad \text{bzw.} \quad a = R_{41} \frac{R_3}{R_1 + R_{41}}$$

und

$$\frac{b}{R_{412} + R_{421}} = \frac{R_{41}}{R_1 + R_{41}} \text{ bzw. } b = R_{41} \frac{R_{412} + R_{421}}{R_1 + R_{41}}.$$

Wenn man die Werte, die man für a und b erhielt, in die Formel für z einsetzt, so bekommt man nach der entsprechenden Umformung:

$$z = \frac{R_3}{1 - \frac{R_{41} R_{421}}{R_1 R_{412}}}. \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) vergleichend, kann festgestellt werden, daß $z = R'_1$ ist. Der Radius R'_1 kann auch in der Weise graphisch bestimmt werden, daß er mit der Geraden, die durch die Berührungspunkte des dazwischen geschalteten Planetenrades gelegt wird, aus der Geraden, die durch die Mittelpunkte des untersuchten Planetenrades und des Sonnenrades geht, ausgeschnitten wird.

Nach dem vorhergehenden ist der Ablauf des graphischen Verfahrens der folgende:

Von den miteinander kämmenden zwei Planetenrädern wählt man nach Belieben ein Rad aus. An diesem werde die Konstruktion in der Weise durchgeführt, daß man anstelle des nicht kämmenden Sonnenrades ein mit ihm gemeinsam rotierendes, zweites, jedoch gedachtes und kämmendes Sonnenrad mit dem Radius R' annimmt, das von den Koppelungsverhältnissen des Planetenrades abhängt; in dieser Weise erhält man ein einfaches Planetengetriebe, bei dem die Kutzbachsche Methode bereits anwendbar ist. Die Winkelgeschwindigkeiten des gedachten Rades mit dem Radius R' stimmen natürlich mit denen des Sonnenrades überein, das nicht mit dem untersuchten Planetenrad kämmt.

Die Einfachheit des Verfahrens wird an einem Beispiel dargelegt.

Es sei die Bauart IVd der Planetengetriebe gewählt, bei dem $R_{41} = R_{412}$ ist, d. h. das eine Planetenrad ist nicht doppelt ausgeführt. Zuerst wird dieses Planetenrad als Grundlage unserer Konstruktion gewählt, das Rad 42—421 wird nämlich das zwischengeschaltete Planetenrad (Bild 13).

Das zentrale Rad 2 ist nicht unmittelbar mit dem untersuchten Planetenrad gekoppelt. Durch die Berührungspunkte des dazwischengeschalteten Planetenrades gezogene Gerade schneidet den Radius R'_2 des gedachten Sonnenrades ab.

Nehme man die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 an. Man zeichne ein die zu ihnen gehörenden Vektoren \bar{V}_1 und \bar{V}'_2 der Umfangsgeschwindigkeit. (Auch der Vektor \bar{V}_2 kann eingezeichnet werden am wirklichen Umfang des Rades 2, doch das ist von keiner besonderen Bedeutung.) Die Endpunkte der Vektoren \bar{V}_1 und V'_2 verbindende Gerade schneidet den Endpunkt des

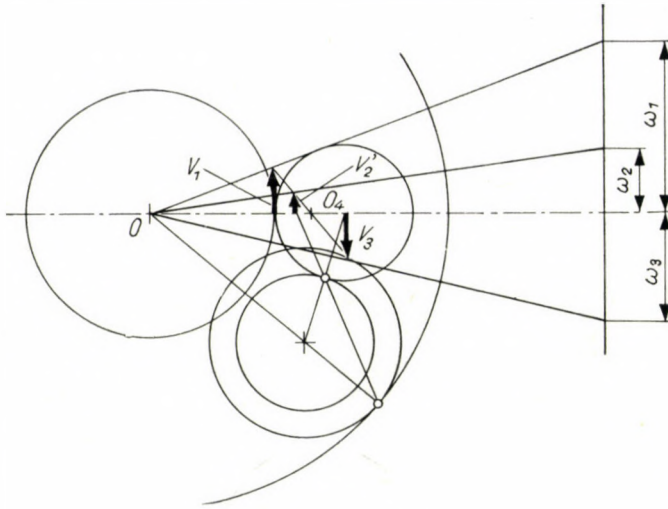


Bild 13

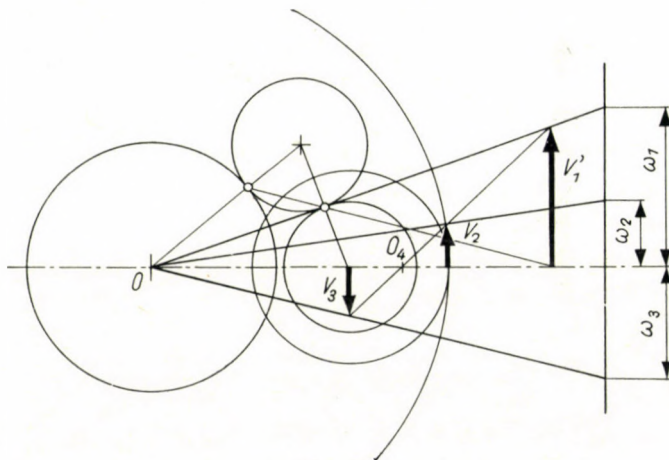


Bild 14

Vektors \bar{V}_3 ab. Wenn man diesen auf die Gerade der Winkelgeschwindigkeiten projiziert, erhält man die mit ω_3 verhältnismäßige Strecke.

Wenn bei demselben Planetengetriebe die Konstruktion für das Planetenrad 42—421 durchgeführt wird, muß man mit den gleichen Ausgangsdaten zu demselben Ergebnis gelangen (Bild 14).

Im zweiten Fall kann man jedoch beobachten, daß der Durchmesser des dazwischengeschalteten Rades — da es kein Doppelrad ist — auf die Kinematik des Planetengetriebes keinen Einfluß ausübt.

Dies ist auch allerdings aus der Formel des R' abzulesen. Die Formel wurde für den Fall angeschrieben, daß das Planetenrad 41—412 als zwischen-

geschaltetes Rad angesehen wurde, wenn nämlich

$$R_{41} = R_{412} \text{ ist,}$$

dann lautet die Formel:

$$R'_1 = \frac{R_3}{1 - (R_{421}/R_1)},$$

d. h., der Radius des gedachten Rades hängt nicht von der Abmessung des zwischengeschalteten Planetenrades ab. Wenn er nicht abhängig ist, dann kann er auch unendlich groß sein. Dieser Umstand vereinfacht noch weiter die Konstruktion, denn er macht das Aufzeichnen des zwischengeschalteten, nicht doppelten Planetenrades überflüssig. Der Radius R' kann auch mit

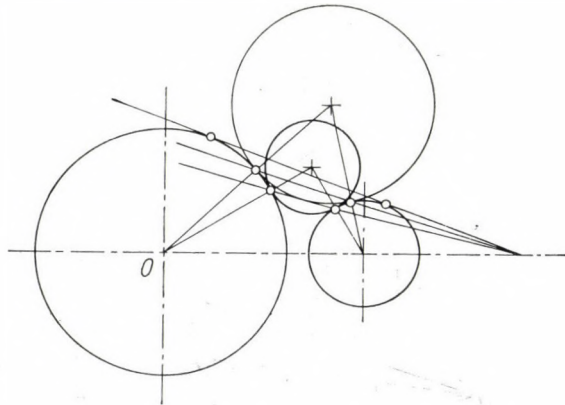


Bild 15

Hilfe der Tangente, die zum kämmenden Sonnenrad und zum anderen Planetenrad gezogen wird, gewonnen werden. Die Tangente entspricht nämlich dem Umfang eines zwischengeschalteten Planetenrades mit einem unendlichen Radius (Bild 15).

Da jedoch das nicht doppelte Planetenrad nach Belieben als zwischengeschaltet oder nicht zwischengeschaltet angesehen werden kann, ist es offensichtlich, daß die obigen Ausführungen verallgemeinert werden können: wenn in einem Planetengetriebe von den miteinander kämmenden Planetenrädern das eine kein Doppelrad ist, dann ist seine Abmessung auf die Kinematik des Planetengetriebes von keinem Einfluß. Wenn keins von den beiden ein Doppelrad ist, dann kann der Durchmesser der beiden Planetenräder — vom Standpunkt der äußeren Kinematik des Planetengetriebes — beliebig sein.

Demnach sind lediglich die Abmessungen der beiden Sonnenräder und des doppelten Planetenrades von Belang. Dasselbe kann aus den Formeln (3) und (4) entnommen werden.

Zuletzt seien die Planetengetriebe noch vom Standpunkt der Momente und der Leistungen untersucht. Es ist offensichtlich, daß die auf die drei Achsen des Planetengetriebes wirkenden Momente unter allen Umständen im Gleichgewicht stehen:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0.$$

Das Verhältnis zwischen den einzelnen Momenten kann man in Kenntnis der geometrischen Abmessungen des Planetengetriebes auf dieser Grundlage leicht angeben, wenn man die inneren Verluste außer acht läßt:

$$M_2 = M_1,$$

$$M_2 = -\frac{1}{b}M_1,$$

$$M_3 = \left(\frac{1}{b} - 1\right)M_1.$$

In Form von Proportionen ausgedrückt:

$$M_1 : M_2 : M_3 = 1 : \left(-\frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{b} - 1\right), \quad (7)$$

und für die Leistungen:

$$P_1 : P_2 : P_3 = \omega_1 : \left(-\frac{1}{b}\right)\omega_2 : \left(\frac{1}{b} - 1\right)\omega_3. \quad (8)$$

Es ist zu ersehen, daß, im Gegensatz zu den zwei kinematischen Freiheitsgraden, bei der Annahme eines einzigen Momentes (einer Leistung) bereits definierte Momentenverhältnisse (Leistungsverhältnisse) erhalten werden.

Mit Hilfe der im Rahmen dieser Arbeit angegebenen Formeln (2), (7) und (8) können Geschwindigkeits-, Momenten- und Leistungsverhältnisse aller Arten von Planetengetrieben und Konstruktionen mit Planetengetrieben einfach und genau untersucht werden; durch das empfohlene graphische Verfahren können andererseits die kinematischen Verhältnisse dieser Ausführungen schnell kontrolliert werden.

SCHRIFTTUM

1. TERPLÁN, Z.: Mechanizmusok (Mechanismen). Tankönyvkiadó, Budapest 1962.
2. VÖRÖS, I.: Gépelemek (Maschinenelemente) III. Tankönyvkiadó, Budapest 1956.
3. JUREK, A.: Gépjárműszerkezetek (Kraftfahrzeug-Konstruktionen). Felsőoktatási jegyzet-ellátó, Budapest 1960.
4. LÉVAI, Z.: Bolygóművek (Planetengetriebe). Technika I (1957), Nr. 1.
5. Зинцев, В. А.: Теория механизмов и машин. МАШГИЗ, Москва 1959.
6. Леваш, Э.: Анализ и выбор принципиальных схем гидромеханических передач. Автореферат и диссертация, Л. П. И. Ленинград 1956.

ANALYTIC EXAMINATION OF PLANETARY DRIVES

Z. LÉVAI

SUMMARY

Planetary gears can be divided into two big groups according to whether the satellite wheels are in direct contact with both sun wheels or whether by pairs, indirectly (Fig. 4) Fig. 5 shows all variants of both groups. The planetary drive with bevel gears is not a qualitatively new type, because each bevel gear planetary drive corresponds to some spur gear planetary drive (Fig. 6). Every planetary drive is therefore some variant of the two basic types shown in Fig. 8.

The kinematic examination of the planetary drive can be carried out analytically or graphically. For the first, Equ. (2) proposed by WILLIS may be used, while the latter method has been founded by KUTZBACH. But the method of Kutzbach cannot be used for pairs of planetary wheels (Fig. 4). For such cases the author proposes the method shown in Figs. 13 and 14, the essential of which is that the vector of circumferential speed, marked by ($\dot{}$), of the sun wheel not being in direct contact with the planetary wheel under examination is not drawn on the real circumference of the sun wheel, but is reported to the radius intersected by a straight which passes through the points of contact of the intermediary gear. For the rest, the method agrees with that of Kutzbach.

EXAMEN ANALYTIQUE DES TRAINS D'ENGRENAGES PLANÉTAIRES

Z. LÉVAI

RÉSUMÉ

Les engrenages planétaires peuvent être classés en deux grands groupes, suivant que leurs roues satellites engrènent directement avec les deux planétaires ou qu'elle engrènent par paires indirectement, l'une à travers l'autre (fig. 4). Sur la fig. 5, on trouve toutes les variantes des deux groupes. Les engrenages planétaires à roues coniques ne constituent pas un type nouveau, car ils correspondent toujours à un train différentiel à roues cylindriques (fig. 6). Chaque train planétaire constitue donc une variante spéciale des deux types fondamentaux représentés fig. 8.

L'examen cinématique de l'engrenage planétaire peut se faire par la méthode analytique ou graphique. Pour la première, l'auteur utilise l'équation (2) proposée par WILLIS. La deuxième méthode, fondée par KUTZBACH, ne saurait être utilisée pour des paires de roues satellites (fig. 4). Pour de tels cas, l'auteur propose la méthode présentée figures 13 et 14, dont l'essentiel est que le vecteur vitesse circonférentielle ($\dot{}$) du planétaire n'engrenant pas directement avec le satellite examiné est tracé, au lieu de la circonférence réelle du planétaire, sur le rayon intersecté par la droite passant par les points de contact du satellite intermédiaire. Par la suite, la méthode à suivre est identique à celle de KUTZBACH.

АНАЛИЗ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

З. ЛЕВАИ

РЕЗЮМЕ

Планетарные механизмы можно разбить на две большие группы — в зависимости от того, сцепляются ли имеющиеся в них сателлиты непосредственно с обоими солнечными шестернями или же попарно друг через друга (рис. 4). На рис. 5 показаны все возможные варианты обеих групп. Планетарный механизм с коническими колесами не представляет собою качественно другой тип планетарного механизма, так как любой такой планетарный механизм соответствует планетарному механизму с цилиндрическим колесом (рис. 6). Следовательно, любой планетарный механизм представляет собою какой-либо специальный вариант показанных на рис. 8 двух основных типов.

Кинематический анализ планетарного механизма можно осуществить аналитическим или графическим методом. Для аналитического исследования можно пользоваться уравнением (2), предложенным *Виллисом*, а второй метод разработан *Кутцбахом*. Однако, метод *Кутцбаха* нельзя применить для пар сателлитов (рис. 4). Для такого случая мы предлагаем метод, показанный на рис. 13—14; суть его заключается в том, что вектор окружной скорости, обозначенный через (*), не сцепленного непосредственно с исследуемым сателлитом солнечного колеса строится не на действительном диаметре солнечного колеса, а на радиусе, отсекаемого прямыми, пересекающимися точки контакта промежуточного сателлита. Дальнейший ход построения совпадает с методом *Кутцбаха*.

LOSSES CAUSED BY THE HALL EFFECT AND THEIR INFLUENCE ON THE EFFICIENCY OF THE THERMAL CYCLE IN MHD GENERATORS*

D. HALÁSZ

D. OF TECHN. SC.

and

K. SZENDY

D. OF TECHN. SC.

POWER STATION ENGINEERING INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received March 16, 1963]

The best mean for the calculation of the two-dimensional phenomena in the MHD generator is the method of complex numbers. With this, the characteristic behaviour of the three principal generator types: the cross-field generator with undivided electrodes, the same type with segmented electrodes and the longitudinal field generator (so-called Hall generator) has been determined. Furthermore, the condition for the Hall generator being identical, independently of the Hall constant, with the segmented cross-field generator and with the cross-field generator having electrodes loaded separately by pairs, and thus working with the best attainable efficiency, has been found by the authors. Those losses which remain in the working gas in the form of heat — amongst others, the Hall loss too — are not total losses from the point of view of the thermodynamic cycle, because heat being introduced into the working gas, the generator uses them anew. Final loss is caused only by the increase of the entropy of the gas and the amount of this loss is equal to the product of the entropy increase and of the mean temperature of heat removal. Taking into account that practically the ratio of the temperatures of heat introduction and of heat removal is about 8–10, the loss in the cycle is 1/8–1/10 of the loss heat.

Symbols

j	$= \sqrt{-1}$;
v_g	gas velocity, meters/second;
B	magnetic induction, weber/meter ² = Vs/m ² ;
E	electric field strength, volts/meter;
E_0	internal electric field strength, volts/meter;
i	current density, amperes/meter ² ;
b_2	electron mobility, meters ² /volts second;
r	gas resistance, ohms meter;
q	electronic charge, 1.6×10^{-19} coulomb;
n	number of free electrons per cubic meter;
β	Hall coefficient ($\beta = b_2 B$), dimensionless;
S	displacement factor defined in Eq. (3);
S, σ	absolute value and the phase angle of displacement factor S ;
ρ	charge density of ionised gas, coulombs/m ³ ;
p, p_l, p_i	specific useful power (output), specific power loss and specific extracted power (input) watts/meter ³ ;
k	loss factor or loss rate, defined as $p_l/p + p_i$, dimensionless.

I. Introduction

The Hall effect and its influence on losses have been the subject of many investigations [1] and have lead to the adoption of special structural elements (e.g. segmented electrodes). Notwithstanding, this problem has not been

* A preliminary short communication of the same object has been published in volume 44, 451–453 of this periodical.

solved either from the point of view of scientific investigations, or with respect to the practical solutions.

Not much has been said concerning the influence of losses on the efficiency of the thermal cycle, i.e. on the kilowatt-hours obtainable from 1 kg of combustible.

In the following an attempt is made to solve the questions raised.

II. The phenomena developing in the MHD generator

The phenomena can be discussed in a two dimensional space, therefore, it is appropriate to investigate the problem by complex values, as can be seen in the paper [2]. For the sake of simplicity the results are shown in the following.

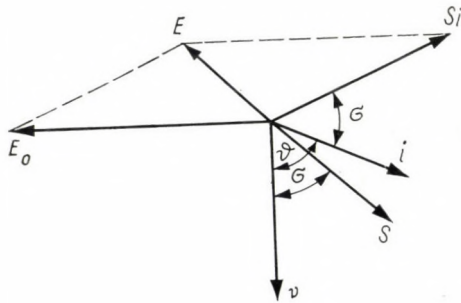


Fig. 1

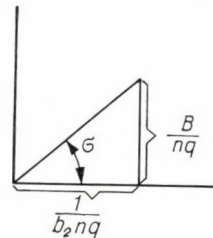


Fig. 2

The basic field equation:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{S} \mathbf{i} \quad (1)$$

where

$$\mathbf{E}_0 = -j B \mathbf{v}_g, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \left(\frac{1}{b_2} + jB \right) \frac{1}{qn}. \quad (3)$$

We can introduce the following values:

$$r = \frac{1}{b_2 n q} \quad (4.1)$$

and

$$\beta = B b_2. \quad (4.2)$$

The relation can be seen in Fig. 1 and 2. Obviously

$$\sin \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (5.1)$$

$$\cos \sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad (5.2)$$

$$\tan \sigma = \beta, \quad (5.3)$$

$$S \cos \sigma = r. \quad (5.4)$$

Further the specific power and power loss can be written in the following form:

$$p = -E i \cos (\varepsilon - \vartheta) \quad (6)$$

and

$$p_l = S i^2 \cos \sigma = r i^2. \quad (7)$$

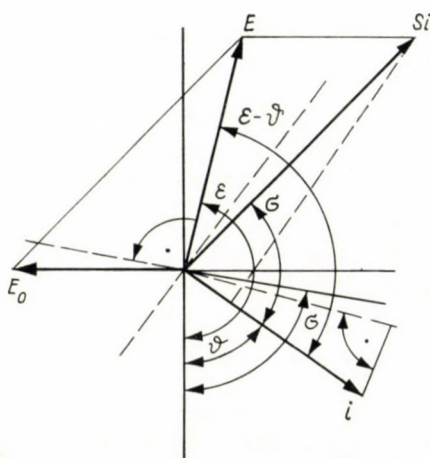


Fig. 3

The angular displacements ϑ , ε , σ can be seen in Fig. 3. Thus, the following relation can be written:

$$E \cos \varepsilon = S i \cos (\vartheta + \sigma)$$

and

$$E \sin \varepsilon = S i \sin (\vartheta + \sigma) - E_0$$

which substituted into the output power equation

$$p = E_0 i \sin \vartheta - S i^2 \cos \sigma.$$

Therefore, the specific input power takes a very simple form:

$$p_i = p + p_l = E_0 i \sin \vartheta = -E_0 i \cos \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta \right). \quad (8)$$

From equation (2) the internal field strength of the MHD generator is perpendicular to gas velocity vector \mathbf{v} . The input power is the negative value of the scalar product of internal field strength vector \mathbf{E}_0 and current density vector \mathbf{i} .

The loss rate can easily be determined from Eq. (7) and (8) in the following form:

$$k = \frac{p_l}{p_i} = \frac{Si \cos \sigma}{E_0 \sin \vartheta} \quad (9)$$

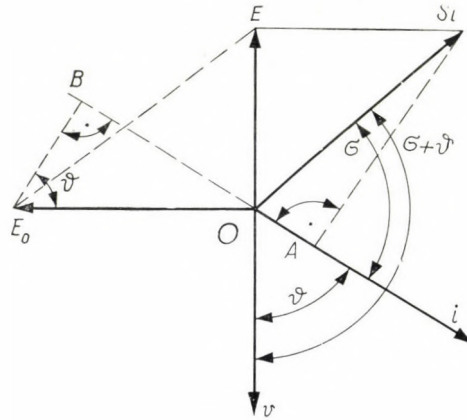


Fig. 4

Substituting Eq. (5.4)

$$k = \frac{ri}{E_0 \sin \vartheta} \quad (10)$$

The loss rate also shown in Fig. 4 can be obtained as:

$$k = \frac{OA}{OB} \quad (11)$$

So, the loss rate is the quotient of two projections, where the denominator is the projection of the internal field strength vector and the nominator the projection of voltage drop vector \mathbf{Si} (see Fig. 4).

III. The loss rate of different MHD generator configurations

The loss rate is defined as the quotient of power loss caused by the internal resistance and the input power of the generator. The internal resistance is the reciprocal value of the conductivity of ionised gas, which is the working medium of the MHD generator. The friction effect of gas to the wall, the heat losses, the magnetizing power loss, etc. are not considered in this paper. The

aim is to show how the basic configuration of this new machine effects the loss rate.

Two basic configurations can be established [1], i.e. the transversally and the axially working generator. In the first configuration the power extraction is transversal to the gas flow; in the second configuration the power extraction is axial. The *transversally working generator* can be seen in Fig. 5 and 6. Fig. 5

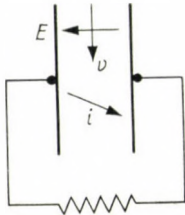


Fig. 5

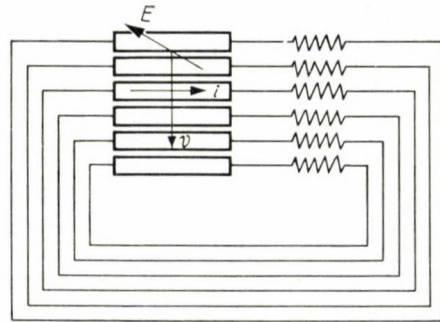


Fig. 6

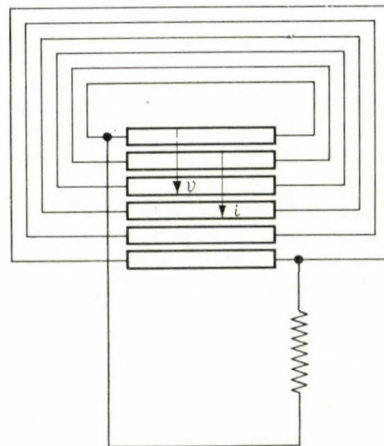


Fig. 7

shows a generator with continuous electrodes, where the electrical field must be transversal. The Fig. 6 the electrodes are split up into isolated pairs of electrode segments. Each segment pair has its separate load. In that case the current density must be transversal, but the electrical field strength may also have an axial component. The *axially working generator* is represented in Fig. 7 and 8 by segmented auxiliary electrodes, where the auxiliary electrodes are short circuited by pairs. Therefore, in this case the power extraction is obtained by

current and voltage components perpendicular to the auxiliary electrode pairs. The generator load is connected to the first and last electrodes only.

On the basis of the relation represented in Chapter II we can derive the following:

a) The internal field strength E_0 depends on external conditions, i.e. the gas velocity v_g and the magnetic induction B determine the internal field strength E_0 as shown by Eq. (2).

b) For securing a low loss rate it is suitable to have a high internal field strength. Further, the loss rate can be decreased if the vectors of internal field strength and current density are parallel. So $\vartheta = \pi/2$ and $\sin \vartheta = 1$, therefore, the denominator of Eq. (10) will be the highest.

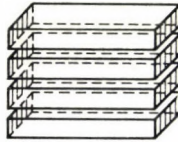


Fig. 8

c) The resultant electric field strength \mathbf{E} must be secured by the electrode system too. The resultant electric field strength can be evaluated from Eq. (1) and Fig. 1.

Condition b) can not be secured in all cases. E.g. the transversally working generator with continuous electrodes, as shown in Fig. 5, can give only a transversal resultant field, and since the internal field strength E_0 is also transversal, the electric field drop \mathbf{Si} must also be transversal to the gas flow. Therefore, the current density vector \mathbf{i} cannot be parallel to the internal field strength, thus $\vartheta \neq \pi/2$, and $\sin \vartheta < 1$.

The current density can be determined from the loss rate on the basis of Eq. (10)

$$i = \frac{k E_0 \sin \vartheta}{r} \quad (12)$$

and the output power from Eq. (8)

$$P = C \frac{E_0^2}{r}, \quad (13)$$

where the output power coefficient

$$C = k (l - k) \sin^2 \vartheta. \quad (14)$$

The following discussion shows the effect of the different configurations on the internal loss or on the loss factors, and so we get the relation for discussing the machine.

a) *Transversally working generator with continuous electrodes (Fig. 5).*

The resultant electric field is transversal to the gas stream. Therefore, $\vartheta + \sigma = \pi/2$, so the output power coefficient will be

$$C = k(l - k) \cos^2 \sigma$$

or, substituting Eq. (5.2)

$$C = \frac{k(1 - k)}{1 + \beta^2} \quad (15)$$

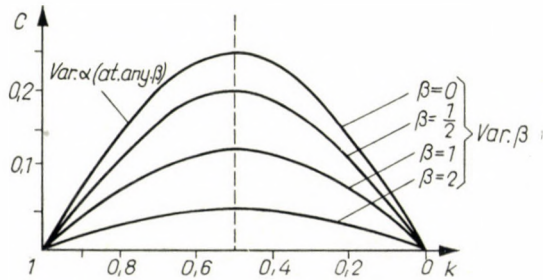


Fig. 9

β) *Transversally working generator with segmental electrodes (Fig. 6).*

In that case the isolated working pairs secure the transversal current density. Therefore,

$$\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

so the output power coefficient

$$C = k(l - k). \quad (16)$$

The output coefficient C is shown for the variants 1. and 2. in Fig. 9.

γ) *Axially working generator with axial resultant electric field.*

The electric field strength vectors \mathbf{E}_0 , \mathbf{E} , the current density vector \mathbf{i} , and the electric field strength drop \mathbf{S}_i can be seen in Fig. 10. So, in that figure

$$\sin[\pi - (\vartheta + \sigma)] = \frac{E_0 \cos \sigma}{r i} \quad (17)$$

If the Hall coefficient β and, so, the displacement angle σ is given, from Eq. (17) the angle ϑ can be determined. The evaluation of the output coefficient can be made by means of the parameter E_0/ri . Further, the loss rate k can be calculated by Eq. (11). The obtained loss rate can be substituted into Eq. (14) to express the output coefficient. E.g. in Table I. the individual values are shown for a Hall coefficient or $\beta = 10$.

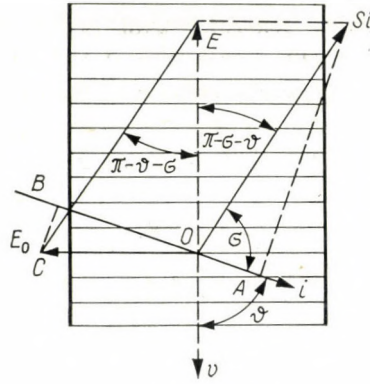


Fig. 10

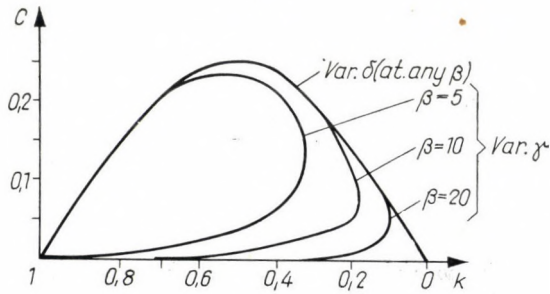


Fig. 11

Table I

Individual values for a Hall coefficient of $\beta = 10$

$\frac{E_0}{r_i}$	k	δ	$C = \frac{k(1-k)}{\sin^2 \delta}$
10.0	1.0	5.7°	0
9.8	0.38	15.7°	0.0173
9.5	0.245	25.7°	0.0345
9.0	0.22	30.2°	0.0445
7.5	0.185	47.2°	0.08
5.0	0.225	65.7°	0.14
2.0	0.505	84.1°	0.25
1.5	0.67	87.0°	0.221
1.2	0.83	88.5°	0.141
1.0	1.0	90.0°	0

The output coefficient for this variant is shown in Fig. 11. If the Hall coefficient β is lower than 10, the performance of the machine can be encounter with difficulties, which can be avoided by the transversal flow of current density. This solution can be called as the variant.

δ) *The axially working generator with transversal current density.*

It is obvious that to obtain the minimum loss in a given condition the angular displacement must be $\vartheta = \pi/2$. This relation is satisfied in this variant. In that case the relation for the coefficient C is identical to that of variant β (Fig. 11).

IV. Valuation of losses, with regard to the efficiency of the heat cycle (or the heat consumption per kilowatt-hour)

In the preceding chapters it has been shown how the output per cu. meter (or, when keeping the output unchanged the volume of the generator) changes with varying Hall factors, and the magnitude of losses per cu. meter has also been examined, but the effect of losses on the overall efficiency of the generator or, in other words, *the number of kilowatt-hours that can be produced by the generator from 1 kg of combustible* has not been dealt with.

This is, however, of utmost importance, since

a) a higher efficiency diminishes the quantity of combustible passing through the generator in a second, and thus the price and size of the generator and the fuel costs are also reduced;

b) the relation between the overall efficiency and specific costs of the generator is not unequivocal. The optimum has to be found for each individual case, and this optimum will hardly fall within the region of low efficiencies;

c) up to the present, the value $k = 0.2$, i.e. the loading factor = 0.8, was preferred for the design. The following examinations clearly prove that it is advisable to approach the value of $k = 0.5$ and loading factor = 0.5 more closely.

From the point of view of the thermal cycle, the MHD generator is essentially a gas turbine having an infinite number of stages, and thus, the thermo-dynamic laws applying to gas turbine can accordingly be made use of. Making use of Eqs. (18) and (19)

$$dV = dQ \frac{T_{1,2}}{T} . \quad (20)$$

This means that the effective cycle loss is only $T_{1,2}/T$ -times the friction heat. If $T_4 = 3300$ °K and $T_{1,2} = 400$ °K, the 0.12-times friction heat will be the effective energy loss. This factor is in point 5 (at 2600 °K) $400/2600 = 0.154$ and its mean value may be about 0.137.

Consequently in Fig. 9 the difference between the peaks of the parabole and that of the $\beta = 0$ parabole has to multiplied by 0.137, i.e. the difference between the paraboles substantially disappears and all the paraboles will lie below that of $\beta = 0$, very close to the latter. This means *that the overall*

ment attached to it, hence in case of this idealized cycle the lower temperature limit ($T_{1,2}$) has to be determined according to the efficiency of the actual cycle.

The losses described above and shown in Figs. 10 and 11 are of such nature that in the form of friction heat they remain in the power generating gas. It is known that in a gas turbine — and the MHD generator as well — the friction heat is partly utilized for power generation, being added to the induced heat of subsequent stages. This, however, implies a certain rise of entropy and thus of losses as well. If the heat loss amounts to dQ , the entropy rise is:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (18)$$

Consequently the loss of the cycle is:

$$dV = T_{1,2} dS \quad (19)$$

if $T_{1,2}$ is the lowest temperature of the cycle. This is valid for the entropy rise as well:

$$\Delta S + \Delta \Delta S = 1.3 \Delta S = AR \ln \frac{p_2'}{p_1}$$

and

$$p_1 = 1 \text{ ata} ,$$

then

$$\frac{\ln p_2'}{\ln p_1} = 1.3 ,$$

i.e.

$$p_2' = p_2^{1.3} .$$

If, for instance, $p_2 = 10$ kg/sq. cm and $p_2' = 20$ kg/εq. cm, the entropy diagram will be that drawn in broken line. The inlet cross section of the generator will be reduced to half, at the same time the outlet cross section remains unchanged, in otherwise identical conditions. Neither will the length change significantly, as the heat utilized in the generator is increased 1.3-times, at the same time n attains an almost double value (not exactly the double, because ionization will decrease, owing to higher pressure).

With a suitable selected scale the area of the ideal diagram (6, 1, 5, 4, 3, 2, 7) is identical with the heat capacity of 1 kg gas-air mixture. The diagram is of a generator working with 30% loss and 1.3-times larger.

V. Conclusions

Making use of the complex calculus the phenomena taking place in the MHD generator are examined by means of relations equally valid for any generator configuration. The influence of the magnitude of the Hall coefficient

upon different generator configurations is shown and values identical with those disclosed in literature are obtained.

The entropy diagram of the generator is represented in idealized form, though very nearly approaching actual conditions. The thermodynamic investigation leads to the conclusion that the influence of the described losses associated with the Hall factor and also the influence of the inlet losses are considerably lower within certain limits, owing to the recovery of heat loss in the generator and neither the specific heat consumption, nor the cost of the generator are substantially effected by these losses.

REFERENCES

1. HARRIS, L. P.—COBINE, I. D.: The Significance of the Hall Effect for Three MHD Generator Configurations. *Trans. ASME, Series A (I. of Eng. for Power)*, **83** (1961), 392—396.
2. SZENDY, K.: Basic Equations of the MHD Generator. *Acta Techn. Hung.* **40** (1962), 431—440.

DIE DURCH DEN HALL-EFFEKT VERURSACHTEN VERLUSTE UND IHR EINFLUß AUF DEN WIRKUNGSGRAD DES WÄRMEKREISLAUFS

D. HALÁSZ und K. SZENDY

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist zweckmäßig, die zweidimensionale Vorgänge im Hall-Generator mit Hilfe der komplexen Zahlen zu untersuchen. Auf diese Weise wurde das charakteristische Verhalten der drei Generator-Haupttypen: des Querfeldgenerators mit ungeteilten und des Querfeldgenerators mit segmentierten Elektroden sowie das des Längsfeld- (sogen. Hall-) Generators bestimmt. Weiterhin wurde die Bedingung für die Identität des Hall-Generators — unabhängig von der Hall-Konstante — mit dem Querfeldgenerator mit segmentierten Elektroden und mit paarweise gesondert belasteten Elektroden festgelegt, und so auch die Bedingung dafür, daß der Hall-Generator mit dem erzielbaren größten Wirkungsgrad arbeitet. Es wurde auch festgestellt, daß diejenigen Verluste, welche als Wärme im Arbeitsgas bleiben — unter anderem auch der Hall-Verlust — vom Standpunkt des energieerzeugenden Kreislaufs nicht gänzlich verloren sind, weil sie der Generator, als ins Arbeitsgas eingeleitete Wärme, von neuem aufarbeitet. Endgültigen Verlust verursacht bloß die Vergrößerung der Entropie des Gases, und dieser Verlust ist gleich dem Produkt aus der Entropievergrößerung und der mittleren Temperatur der Wärmeabführung. Unter Beachtung der Tatsache, daß das Verhältnis der Wärmezufuhr- und Abführungstemperaturen praktisch ungefähr $8 \div 10$ ist, ist der Kreislaufverlust $1/8 \div 1/10$ der Verlustwärme.

LES PERTES DUES A L'EFFET HALL ET LEUR INFLUENCE SUR LE RENDEMENT DU CYCLE THERMIQUE

D. HALÁSZ et K. SZENDY

RÉSUMÉ

Les phénomènes bidimensionnels apparaissant dans le générateur MHD sont à traiter de préférence par le calcul complexe. Par cette méthode, les auteurs ont déterminé le comportement caractéristique des trois principaux types de générateurs: à champ transversal avec électrodes non divisées, resp. avec électrodes segmentées, et à champ longitudinal (générateur dit de Hall). Ils ont déterminé ensuite la condition de l'identité du générateur de Hall — in-

dépendamment de la constante de Hall — avec les générateurs à électrodes segmentées, chargées séparément par paires, identité qui fait que le générateur fonctionne avec un rendement maximum. Du point de vue du cycle thermique produisant l'énergie, les pertes restant dans le gaz de travail sous forme de chaleur ne constituent pas des pertes absolues, car le générateur les utilise à nouveau comme chaleur introduite dans le gaz de travail. Une perte définitive n'est causée que par l'accroissement de l'entropie du gaz; la valeur de cette perte est égale au produit de l'accroissement de l'entropie et de la température moyenne d'enlèvement de la chaleur. Étant donné que le rapport de l'introduction et de l'enlèvement de la chaleur est pratiquement de $8 \div 10$ env., les pertes dans le cycle atteindront $1/8$ à $1/10$ de la chaleur de perte.

ПОТЕРИ, ВЫЗВАННЫЕ ЭФФЕКТОМ ХОЛЛА, И ИХ ВЛИЯНИЕ НА КПД ТЕПЛОВОГО ЦИКЛА

Д. ХАЛАС и К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Двухмерные явления, протекающие в генераторе МНД, целесообразно трактовать при помощи комплексных чисел. Таким способом определено характерное поведение трех основных видов генераторов, а именно: нерасчлененного, далее имеющего сегментированные электроды генератора с поперечным полем и, наконец, с продольным полем (т. н. Холла). Затем установлено и то условие, что генератор Холла независимо от коэффициента Холла является идентичным сегментированному и нагруженному в отдельности по парам электродов генератору с поперечным полем, и таким образом можно добиться, чтобы он работал с максимальными значениями КПД. Далее установлено, что потери, которые в качестве тепла остаются в рабочем газе, — так, между прочим, также потери Холла, — с точки зрения энерговырабатывающего теплового цикла не означают полных потерь, так как генератор, как тепло, переданное рабочему газу, вновь перерабатывает их. Окончательные потери вызваны только ростом энтропии газа, и величина их является произведением роста энтропии и средней температуры отвода тепла. Исходя из того, что отношение средних температур подвода и отвода тепла практически равно прилб. $8 \div 10$, потери теплового цикла составляют всего лишь $1/8 \div 1/10$ часть тепловых потерь.

STABILITY ANALYSIS OF ARCHES WITH VERTICAL LOAD

M. RÓZSA

CAND. OF TECHN. SC.

HUNGARIAN SCIENTIFIC INSTITUTE FOR STRUCTURAL ENGINEERING, BUDAPEST

[Manuscript received April 25, 1963]

This paper presents a new method for computation for the determination of the critical vertical load of arbitrary arches, reducing the stability analysis of fixed and two-hinged symmetrical arches to that of straight, compressed bars.

Technical literature [1—3] gives several tables for the determination of the critical values of the vertical load on arches. These tables, related to parabolic and catenary arches with flexural rigidity, varying according to various rules, have generally been computed on the basis of LOKSHIN's differential equations [4], that is by a statical method, based on the assumption that the angle between the direction of load and the tangent to the center line of the arch remains constant during buckling. This hypothesis, introduced for the simplification of the calculations, is not correct and is likely to give values for the critical load significantly less than the real ones. And even for this assumption, use of the statical method is not justified, a system of rotating forces not being conservative.

Only the tables of HILMAN [5] and DISCHINGER [6], related to parabolic arches of a flexural rigidity varying according to the formula $K = K_c \cos \alpha$ (K_c being the flexural rigidity at the crown, α the angle between the tangent to the center line of the arch and the horizontal) are based on calculations assuming the critical load as remaining vertical during buckling.

This paper describes a computation method for the critical load on arbitrary arches for a load remaining vertical during buckling, and reduces the stability analysis of the fixed and two-hinged arches to that of a straight, compressed bar. The stability analysis is related to the case when the center line of the arch in its original unbuckled shape is the funicular curve for the load, hence no moment, only axial compressive force is acting on the cross-sections of the arch.

The computation is based on the following assumptions:

- a) the arch consists of an ideally elastic material;
- b) axial deformation of the arch produced by compression, is negligible;
- c) shear deformation is negligible;

- d) the direction of the vertical loads and their point of application on the arch remain unchanged during buckling;
- e) displacements can occur only in the plane of the arch;
- f) the displacements produced by the buckling are infinitely small.

The stability analysis has to determine the critical values H_1, H_2, \dots, H_n of the horizontal thrust of the arch. To each of the critical horizontal thrusts belong one (or more) buckling forms. The values H_1, H_2, \dots, H_n form a monotonous increasing series. Generally, however, only the first critical value

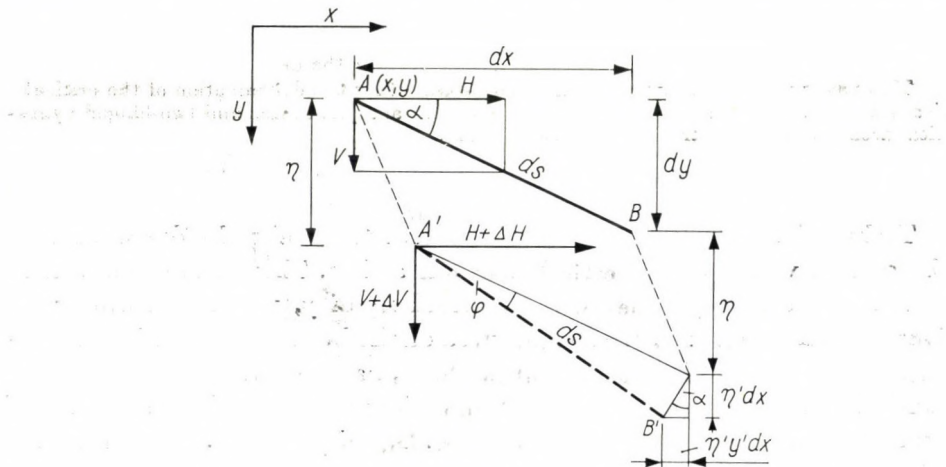


Fig. 1

is of practical importance, hence only determination of $H = H_1$ will be investigated here.

Let us deduce the differential equation of the buckled shape of an arbitrary asymmetrical arch. Let the equation of the unbuckled center line of the arch be $y = f(x)$ in the coordinate system of Fig. 1, and AB an element of the center line. The center line being the funicular curve for the load, in point A of abscissa x the following relation exists (Fig. 1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V(x)}{H} \quad (1)$$

where

$V(x)$ — vertical force transmitted from left to right at the cross-section of point A ;
 H — horizontal thrust.

After buckling of the arch, element AB gets into position $A'B'$. Denoting by η the vertical component of the displacement of a point of the center line, and by φ the angular rotation of the tangent to the center line, the following

relation can be written:

$$\varphi ds = \eta' dx \frac{ds}{dx} = \eta' ds,$$

that is:

$$\varphi = \eta'. \quad (2)$$

Here and in the followings, by ' always the derivative of some variable with respect to the abscissa x of the initial, unbuckled shape of the center line is denoted.

The bending moment produced in the arch is:

$$M = -K \frac{d\varphi}{ds} = -K \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \varphi'$$

where

M — bending moment;
 K — flexural rigidity of the arch.

Twice differentiating the above expression with respect to x and taking into consideration (2), we obtain:

$$M'' = - \left[K \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \eta'' \right]'' \quad (3)$$

After buckling of the arch, in the left-end cross-section additional horizontal reaction ΔH , additional vertical reaction ΔV and — in case of a fixed-end arch — fixed-end moment ΔM will act. Taking these additional forces and this moment into consideration, the increment of the moment at a length dx of the projection of the arch (before buckling) is, according to Fig 1:

$$dM = -(V + \Delta V)(dx - \eta' y' dx) + (H + \Delta H)(dy + \eta' dx).$$

This increment is independent of the fixed-end moment ΔM . Dividing this equation by dx and taking (1) into account, we obtain:

$$M' = (Hy' + \Delta V) \eta' y' - \Delta V + \Delta Hy' + (H + \Delta H) \eta'.$$

For the assumed infinitely small deformation ΔV and ΔH are also infinitely small, therefore, terms $\Delta V \eta' y'$ and $\Delta H \eta'$ as smalls of a higher order, can be neglected, that is:

$$M' = H(1 + y'^2) \eta' - \Delta V + \Delta Hy'.$$

Differentiating this equation with respect to x gives:

$$M'' = [H(1 + y'^2) \eta']' + \Delta Hy''. \quad (4)$$

By eliminating M'' from equations (3) and (4) we obtain the differential equation of the buckled shape of arches:

$$\left[K \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \eta'' \right]'' = - [H(1 + y'^2) \eta']' + \Delta Hy''. \quad (5)$$

Let us examine this differential equation first for the general case of *asymmetrical arches*. Dividing (5) by y'' and differentiating gives:

$$\left\{ \left[K \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \eta'' \right]'' \right\}' = -H \left\{ \frac{[(1+y'^2)\eta']'}{y''} \right\}. \quad (6)$$

This linear differential equation of fifth order is an eigenvalue problem for the function η , having solutions only for definite values of H — i.e. for the eigenvalues.

Solutions of differential equation (6) have to satisfy the following conditions:

a) for *fixed arches*:

$$\eta(0) = \eta'(0) = \eta(l) = \eta'(l) = 0,$$

where $l = \text{span}$; (abscissa of the left end of the arch is taken as 0).

$$\int_0^l \eta' y' dx = 0.$$

The latter condition expresses that the horizontal projection of the arch is constant.

b) for *two-hinged arches*:

$$\eta(0) = \eta''(0) = \eta(l) = \eta''(l) = 0,$$

$$\int_0^l \eta' y' dx = 0.$$

c) for *one-hinged* and *three-hinged* arches two differential equations of type (6) are to be written, and accordingly 10 integration constants are to be determined.

For *parabolic arches* is $y'' = \text{constant}$, therefore (6) can be simplified:

$$\left[K \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \eta'' \right]''' = -H [(1+y'^2)\eta']''. \quad (6a)$$

The determination of the critical force for asymmetric arches can be done the most simply by means of the iteration process according to H. A. SCHWARZ, that can be programmed for electronic digital computers with ease. In the case of differential equation (6) the Schwarz iteration formula is as follows:

$$\left\{ \left[K \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \eta_k'' \right]'' \right\}' = - \left\{ \frac{[(1+y'^2)\eta_{k-1}']'}{y''} \right\}', \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

where η_0 can be assumed arbitrarily, except that it cannot be orthogonal to the first eigenfunction. After a due number of iterations, functions η_{k-1} and

η_k are proportional to each other, and formula

$$H = \frac{\eta_{k-1}}{\eta_k}$$

gives the critical value of the horizontal thrust.

Let us examine *symmetrical arches*. As known from literature, for fixed and two-hinged symmetrical arches *antisymmetrical* buckling always occurs at a load below that of symmetrical buckling, thus only the case of the antisymmetrical buckling will be examined here. At antisymmetrical buckling of symmetrical arches the horizontal thrust remains unchanged, hence $\Delta Hy''$ in Eq. (5) disappears. Thus the differential equation for symmetrical, fixed-end and two-hinged arches is:

$$\left[K \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \eta'' \right]'' = -H [(1+y'^2)\eta']'. \quad (8)$$

Eigenvalue problem (8) is a special case of eigenvalue problem (6). Boundary conditions are

for fixed arches:

$$\eta \left(-\frac{l}{2} \right) = \eta' \left(-\frac{l}{2} \right) = \eta \left(\frac{l}{2} \right) = \eta' \left(\frac{l}{2} \right) = 0, \quad (9a)$$

and for two-hinged arches:

$$\eta \left(-\frac{l}{2} \right) = \eta'' \left(-\frac{l}{2} \right) = \eta \left(\frac{l}{2} \right) = \eta'' \left(\frac{l}{2} \right) = 0 \quad (9b)$$

where axis y of the coordinate system is assumed to be in the axis of symmetry of the arch.

Here condition

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \eta' y' dx = 0$$

expressing the horizontal projection of the arch as being constant is always satisfied, since the integral of the product of symmetric function η' and of antisymmetric function y' always disappears. Instead of boundary conditions at both ends of the arch, conditions for both ends of the half arch can be introduced. Due to antisymmetry of buckling, in the crown there is:

$$\eta(0) = \eta''(0) = 0. \quad (9c)$$

Equations (8) and (9) can be considered as eigenvalue problems of the buckling of a straight, compressed bar. Namely, the differential equation of the buckled

shape of a straight, compressed bar is as follows:

$$[D\eta'']'' = -[N\eta']' \quad (10)$$

where

η — deflection;
 D — flexural rigidity;
 N — axial compressive force.

Comparing differential equations (8) and (10), it appears that for the stability analysis any fixed or two-hinged symmetrical arch can be substituted by a straight compressed bar with a flexural rigidity of:

$$D = K \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad (11)$$

and with an axial compressive force of:

$$N = H(1 + y'^2). \quad (12)$$

The length of the straight bar can be taken as equal to span l of the arch, but in this case only antisymmetrical buckling shapes of the bar could be taken into account, due to conditions (9c). It is more expedient to assume the length of the substituting straight bar to be equal to the half span of the arch, for then all its buckling shapes correspond to the buckling shapes of the arch. For a fixed arch this bar is assumed to be fixed at one and hinged at the other, according to conditions (9a) and (9c), while for a two-hinged arch it is assumed to be hinged at both ends, according to conditions (9b) and (9c).

According to Eqs. (11) and (12) all methods for stability analysis of straight bars can be applied to the stability analysis of fixed-end and two-hinged symmetrical arches. It is especially convenient to use Vianello's method. This method can be applied to any beam in a numerical form, is easily programmable for electronic computers. The iteration formula of Vianello's method in case of differential equation (8) is:

$$\left[K \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \eta_k'' \right]'' = -[(1 + y'^2) \eta_{k-1}']', \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

After a due number of iterations, functions η_{k-1} and η_k will be proportional to each other, and Eq. (7) gives the critical value of the horizontal lateral force.

Example 1. Let us determine the critical horizontal thrust of a two-hinged parabolic arch of equation $y = x^2$ and of span $2a$ according to Fig. 2. The flexural rigidity of the arch is: $K = \sqrt{1 + y'^2}$.

According to Vianello's method, since $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$, Eq. (13) can be written for this case as:

$$[\eta_k'']'' = -[(1 + 4x^2)\eta_{k-1}']', \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Introducing angular rotation φ according to (2):

$$\varphi_k' = - [(1 + 4x^2)\varphi_{k-1}]', \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Let $\varphi_0 = 1$, then integrating according to Eq. (14), gives:

$$\varphi_1 = -\frac{x^4}{3} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

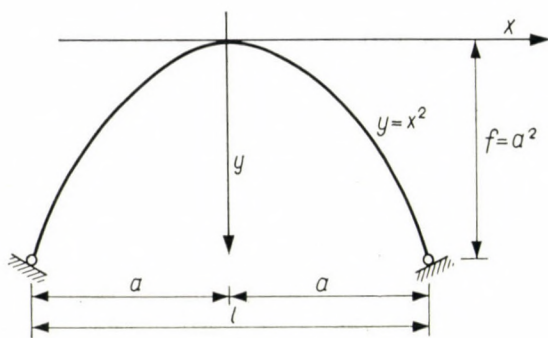


Fig. 2

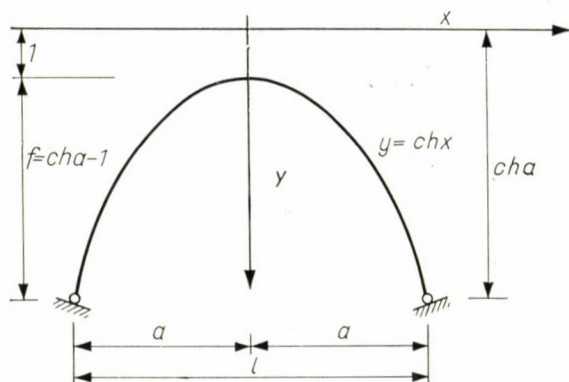


Fig. 3

Determination of constants C_1, C_2, C_3 from conditions

$$\varphi_1'(0) = \varphi_1'(a) = \int_0^a \varphi_1 dx = 0$$

gives:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{3} a^2 x^2 - \frac{7}{45} a^4.$$

Substituting this into the right side of (14), after integrations and determination of the constants of integration we obtain:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{1}{42} x^8 + \left(\frac{1}{90} - \frac{4}{45} a^2 \right) x^6 + \left(-\frac{1}{18} a^2 + \frac{7}{135} a^4 \right) x^4 + \\ & + \left(\frac{7}{90} a^4 + \frac{64}{945} a^6 \right) x^2 - \frac{31}{1890} a^6 - \frac{649}{28,350} a^8. \end{aligned}$$

Instead of further continuing the iteration, we determine the critical value of H by means of the energetic method of TIMOSHENKO [7]. Due to the equality of internal and external works:

$$H = \frac{\int_0^a [\varphi_1'(x)]^2 dx}{\int_0^a [\varphi_2(x)]^2 (1 + 4x^2) dx}$$

Substituting the corresponding functions and integrating, we obtain:

$$H = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1.36818 + 4.40704a^2 + 3.84146a^4}{0.13852 + 0.65993a^2 + 1.11402a^4 + 0.66064a^6}$$

This formula can readily be generalized for the case of an arbitrary two-hinged parabolic arch having a flexural rigidity varying according to

$$K = K_c \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

Introducing the relation f/l gives

$$H = \frac{K_c}{l^2} \psi \left(\frac{f}{l} \right),$$

where

$$\psi(f/l) = \frac{39.508 + 509.043(f/l)^2 + 1774.859(f/l)^4}{1 + 19.0566(f/l)^2 + 128.6769(f/l)^4 + 305.2336(f/l)^6} \tag{15}$$

Values ψ computed from formula (15) are in a good accordance with values given by DISCHINGER, as can be seen from Table I.

Table I

Values of $\psi(f/l)$ for two-hinged parabolic arches

f/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
According to (15)	39.50	37.19	31.55	25.05	19.36	14.95
According to DISCHINGER . .	39.4	37.2	31.6	25.1	19.4	15.0

Example 2. Let us determine the critical horizontal thrust of fixed parabolic arches having a flexural rigidity varying according to

$$K = K_c \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

The computation is the same as for Example 1, only that boundary condition $\varphi'(a) = 0$ is valid instead of $\varphi(a) = 0$. As a final result, the following formula is obtained:

$$\psi(f/l) = \frac{80.821 + 643.487(f/l)^2 + 1477.282(f/l)^4}{1 + 11.3558(f/l)^2 + 47.7535(f/l)^4 + 73.5529(f/l)^6} \tag{16}$$

Table II

Values of $\psi(f/l)$ for fixed parabolic arches

f/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
According to (16)	80.82	78.15	70.95	61.20	51.05	41.90
According to DISCHINGER . .	80.8	78.4	70.8	61.1	51.1	41.8

Values φ computed from formula (15) are in a good accordance with those given by DISCHINGER (Table II).

Example 3. Let us determine the critical horizontal thrust of a two-hinged catenary arch of span $2a$ (Fig. 3), of the equation $y = \cosh x$ and of constant flexural rigidity $K = 1$. Since

$$\sqrt{1 + y'^2} = \cosh x,$$

iteration formula (13) can be written as:

$$\left[\frac{1}{\cosh x} \varphi_k' \right]'' = - [\cosh^2 x \varphi_{k-1}']', \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

Let $\varphi_0 = \cosh 2x + A \cosh x + B$.

Determination of constants A and B from conditions

$$\varphi'(a) = 0$$

and

$$\int_0^a \varphi_0(x) dx = 0$$

gives:

$$A = -4 \cosh a,$$

$$B = \frac{1.5 \sinh 2a}{a}.$$

Substituting expression of φ_0 into formula (17) and integrating, we obtain:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -\frac{1}{160} \cosh 5x - \frac{A}{96} \cosh 4x - \left(\frac{5}{96} + \frac{B}{24} \right) \cosh 3x - \\ & - A \frac{5}{24} \cosh 2x - \left(\frac{B+1}{8} + C \right) \cosh x + Cx \sinh x + D, \end{aligned}$$

where from the given boundary conditions the constants of integration are:

$$C = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{16} \sinh 4a + \frac{A}{12} \sinh 3a + \frac{B+1}{4} \sinh 2a + A \frac{3}{4} \sinh a \right],$$

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{a} \left[\frac{1}{800} \sinh 5a + \frac{A}{384} \sinh 4a + \left(\frac{5}{288} + \frac{B}{72} \right) \sinh 3a + \right. \\ & \left. + A \frac{5}{48} \sinh 2a + \left(\frac{B+1}{8} + 2C \right) \sinh a - C a \cosh a \right]. \end{aligned}$$

Substituting function φ_1 into the right side of (17) and integrating, gives:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{1}{71,680} \cosh 8x + \frac{A}{32,256} \cosh 7x + \left(\frac{116}{403,200} + \frac{B}{5760} \right) \cosh 6x + \\ & + \frac{34}{23,040} A \cosh 5x + \left(\frac{329}{115,200} + \frac{7}{2880} B + \frac{19}{1152} C \right) \cosh 4x + \\ & + \left(\frac{52}{4608} A - \frac{D}{24} \right) \cosh 3x + \left(\frac{364}{11,520} + \frac{35}{1152} B + \frac{23}{72} C \right) \cosh 2x + \\ & + \left(\frac{41}{1536} A - \frac{D}{8} - E \right) \cosh x - \frac{C}{96} x \sinh 4x - \frac{C}{12} x \sinh 2x + \\ & + Ex \sinh x - \frac{C}{16} x^2 + F \end{aligned}$$

with constants of integration:

$$E = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{4480} \sinh 7a - \frac{A}{2304} \sinh 6a - \left(\frac{31}{9600} + \frac{B}{480} \right) \sinh 5a - \right. \\ \left. - \frac{11}{768} A \sinh 4a - \left(\frac{113}{5760} + \frac{5}{288} B + \frac{4}{36} C \right) \sinh 3a - \right. \\ \left. - \left(\frac{41}{768} A - \frac{D}{4} \right) \sinh 2a - \left(\frac{41}{384} + \frac{10}{96} B + C \right) \sinh a + \right. \\ \left. + \frac{C}{12} a \cosh 3a + \frac{C}{4} a \cosh a \right],$$

$$F = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{573,440} \sinh 8a - \frac{A}{225,792} \sinh 7a - \right. \\ \left. - \left(\frac{58}{1,209,600} + \frac{B}{34,560} \right) \sinh 6a - \frac{34}{115,200} A \sinh 5a - \right. \\ \left. - \left(\frac{329}{460,800} - \frac{7}{11,520} B + \frac{66}{13,824} C \right) \sinh 4a - \right. \\ \left. - \left(\frac{52}{13,824} A - \frac{D}{72} \right) \sinh 3a - \left(\frac{182}{11,520} + \frac{35}{2304} B + \frac{26}{144} C \right) \sinh 2a - \right. \\ \left. - \left(\frac{41}{1536} A - \frac{D}{8} - 2E \right) \sinh a + \frac{C}{384} a \cosh 4a + \frac{C}{24} a \cosh 2a - \right. \\ \left. - Ea \cosh a + \frac{C}{48} a^3 \right].$$

Functions φ_2 and φ_1 are nearly proportional to each other, permitting use of formula (7).

Let $a = 1$ m and $K = 1$ Mpm², then from the above formulae:

$$\frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)} = 5.61 \quad \text{and} \quad \frac{\varphi_1(1)}{\varphi_2(1)} = 5.60,$$

hence with a good approximation: $H \approx 5.6$ Mp.

By interpolating values from the table of DINNIK's book [2] $H \approx 5.2$ Mp is obtained. The difference between the two values is due to the fact that DINNIK — similarly to LOKSHIN — assumes the angle between the direction of the load and the tangent to the center line of the arch as being constant during buckling, which gives for the critical load values less than the real ones.

Let $a = 2$ m, then from the given formulae:

$$\frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)} = 0.231 \quad \text{and} \quad \frac{\varphi_1(2)}{\varphi_2(2)} = 0.227.$$

Hence

$$H \approx 0.23 \text{ Mp}.$$

The corresponding table of DINNIK can hardly be used for this case, the interval in the table being excessive. The approximate value obtained by interpolation is $H \approx 0.21$ — 0.25 Mp, in good accordance with the above value.

REFERENCES

1. HAWRANEK, A.—STEINHARDT, O.: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer Verlag, 1958.
2. Динник: Продольный изгиб. Кручение. Изд. Акад. Наук А. Н. СССР 1955.
3. BÖLCSKEI—CSABA—LÁNG—MITICZKY: Vasbetonhidak (Reinforced-concrete bridges). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1959.
4. LOKSCHIN, A.: Über die Knickung eines gekrümmten Stabes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **16** (1936), 49—55.
5. Л. Хилман: Известия Ленинградского Политехнического Института. **33** (1930).
6. DISCHINGER, FR.: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. *Der Bauingenieur* **20** (1939), 286—294.
7. TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability. Mac Graw-Hill Book Comp, 1961.

STABILITÄTSUNTERSUCHUNG VON BOGENTRÄGERN MIT VERTIKALER LAST

M. RÓZSA

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird ein neues Berechnungsverfahren gezeigt, mit dessen Hilfe der kritische Wert des Seitendrucks eines beliebigen Bogenträgers berechnet werden kann, der durch ein verteiltes Kräftesystem belastet wird, das seine vertikale Richtung während der Ausknickung beibehält. Das Verfahren führt die Untersuchung der symmetrischen eingespannten Bogen und der Zweigelenkbogen auf die Untersuchung der Stabilität von geradachsigen gedrückten Stäben zurück.

EXAMEN DE LA STABILITÉ DES ARCS SOUMIS A DES CHARGES
VERTICALES

M. RÓZSA

RÉSUMÉ

L'auteur présente une nouvelle méthode de calcul permettant de déterminer la valeur critique de la poussée latérale d'un arc de forme quelconque, chargé par un système de forces réparties et maintenant sa direction verticale pendant le flambage. Le procédé ramène l'examen de la stabilité des arcs symétriques encastrés ou à deux articulations à celui de la stabilité des barres droites comprimées.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АРОЧНЫХ БАЛОК С ВЕРТИКАЛЬНОЙ
НАГРУЗКОЙ

M. РОЖА

РЕЗЮМЕ

Статья знакомит с новым методом расчета критического значения бокового давления на любую арочную балку, нагруженную распределяющейся системой сил и сохраняющую вертикальность при любом прогибе. Метод приводит исследование устойчивости жестко закрепленной и двухшарнирной симметричной арочной балки к исследованию устойчивости прямоосных сжатых стержней.

ALLGEMEINER SPANNUNGSZUSTAND DES BETONS

L. PALOTÁS

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR BAUSTOFFLEHRE TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR PAU- UND VERKEHRSWESSEN,
BUDAPEST

[Eingegangen am 13. Mai 1963]

Die Bewertung der Festigkeitszustände von Beton- und Stahlbetonkonstruktionen stößt auf manche Schwierigkeiten.

Die möglichen Betrachtungen über Beziehung zwischen Festigkeit und Formänderung sowie über die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Festigkeiten (Bild 3) können nur mit Vorbehalt auf den Beton als einen annehmbar zweiphasigen elasto-viskosen Stoff übertragen werden. Da bleibende viskose Formänderungen vor dem Bruch und auch abklingende plastische Formänderungen bei gleichzeitiger Steigung der eigenen Festigkeit beim Beton eintreten, ist auf die durch eine gemessene, beobachtete Änderung bedingte Spannung nur in Kenntnis der „Vorgeschichte“ zu schließen.

Für den Beton als einen elastoviskosen, spröden Stoff dürfte vor allem die *Mohrsche Bruchtheorie der Hauptschubspannungen* in Frage kommen. Diese Theorie deckt sich am besten mit den Versuchsergebnissen, es dürften aber auch Widersprüche im Laufe der Auswertung der Versuchsergebnisse auftauchen, insbesondere im zwei- oder dreiachsigen Spannungszustand, wo eine wesentlich andere Beanspruchungsmöglichkeit als im einachsigen Spannungszustand des Betons besteht.

Für Klarstellung des Problems legt der Aufsatz die bisherigen Versuchsergebnisse und theoretischen Betrachtungen aus und gibt Vorschläge zur Kennzeichnung der Spannungszustände der Beton- und Stahlbetonkonstruktionen und zu praktisch verwendbaren Beziehungen (S. *Formeln* (22)–(25), *Bilder* 9–10).

I. Allgemeine Bemerkungen

Der Beton kann unter die *elastoviskosen* Stoffe gereiht werden, es bestehen daher keine eindeutigen und reversiblen Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen; bleibende Formänderungen elastoviskosen Charakters treten bereits bei kleinen Spannungen auf, die im Bruchstadium in plastische, bleibende Formänderungen übergehen können. Die Zeit, die rheologischen Eigenschaften spielen bei der Bewertung des Betons hinsichtlich der Festigkeitslehre eine große Rolle. Die üblichen Festigkeitskennwerte der Praxis stellen nur Bewertungsgrößen dar, welche *gegebene Prüfbedingungen*, *gegebene Betonqualität* usw. *kennzeichnen*, sie besitzen aber *keine allgemeine Gültigkeit*. Selbstverständlich besteht die Möglichkeit, Beziehungen zwischen einzelnen Festigkeitskennwerten sowie Festigkeits- und Formänderungskennwerten für die Praxis mit einer gewissen Streuung aufzustellen und mit deren Hilfe die Festigkeitseigenschaften des Betons einheitlich anzugeben.

II. Zusammenhänge auf Grund der Versuchsergebnisse

Die Druckfestigkeit ist der wichtigste Kennwert für Beton, und so wird sie für die Klassifizierung des Betons verwendet. In den verschiedenen Ländern werden verschiedene Prüfungsmethoden, verschiedene Probekörper (Würfel, Zylinder, Prismen) für die Kennzeichnung der Betondruckfestigkeit eingeführt. In Ungarn und auch in anderen Ländern in Europa benützt man für die Bestimmung der Druckfestigkeit Betonwürfel mit einer Kantenlänge von 20 cm (sog. „*Würfelfestigkeit*“, K). Die Ergebnisse der Druckproben werden von der Gestalt und von den Massen der Probekörper beträchtlich beeinflusst.

Den Einfluß der Würfel mit verschiedenen Kantenlängen auf die Bruchfestigkeitswerte haben viele Forscher beobachtet und haben auch versucht, die wahrscheinlichen Ursachen der Verschiedenheit klarzustellen. Die Prüfergebnisse und die daran angefügten Erklärungen sind aber nicht eindeutig. Der größere Teil der Forscher: BURCHARTZ, GRAF, GEHLER, BAUSCHINGER, FÖPPL, WÄSTLUND, WRIGHT, VOELLMY und viele andere haben festgestellt, daß *die Abnahme der Kantenlänge eine Zunahme der Bruchfestigkeitswerte bedingt*. Die Erklärungen: das Verhältnis von Flächen und Rauminhalten nimmt im Falle abnehmender Kantenlänge zu (BURCHARTZ); die Reibung ist zwischen den Druckflächen und Probekörpern ganz verschieden (GEHLER, BAUSCHINGER und FÖPPL); die Erhärtingsbedingungen sind bei Würfeln mit verschiedenen Kantenlängen nicht die gleichen (VOELLMY) [1]; die Deformation der Druckflächen ist bei größeren Würfeln größer (RÜSCH) [2] usw. — sind jedoch nicht völlig befriedigend.

Im Laboratorium für Beton- und Stahlbetonbau wurden Versuche mit Würfeln von verschiedenen Kantenlängen ($a = 2, 4, 7, 10, 15, 20$ und 30 cm) und mit Beton- und Mörtelmischungen von verschiedenen Größtkörnern ($D = 3, 5, 10, 15$ und 30 cm) durchgeführt. Nach der Auswertung der Versuchsergebnisse — durchgeführt und ausgewertet durch HALÁSZ und TEVAN — erhält man die interessante Tatsache, daß die Würfel mit einer Kantenlänge kleiner oder größer als 15 cm gleichfalls abnehmende Würfelfestigkeiten liefern (Bild 1, gestrichelte Linie). Unsere Versuche stehen mit den Versuchen von L'HERMITE in Einklang.

Die baupolizeilichen Vorschriften (Bestimmungen) nehmen im allgemeinen abnehmende Festigkeiten mit zunehmender Würfelkantenlänge an (Bild 1, voll ausgezogene Linie).

Auf Grund verschiedener Versuchsergebnisse wurde es eindeutig festgestellt, daß ein Beton mit kleinerer Festigkeit nahezu die gleiche Prismenfestigkeit (σ_p) liefert wie die Würfelfestigkeit. Im Falle jüngerer Betone und wenn die Richtung der Druckkraft mit der Richtung der Bearbeitung gleichlaufend ist, ergibt sich eine größere Verhältniszahl zwischen der Prismen- und der Würfelfestigkeit. Einige der von den Forschern vorgeschlagenen Zusammen-

hänge zwischen σ_p und K — im allgemeinen ein Verhältnis $h/a = 3$ in Betracht gezogen — wurden im Bild 2 dargestellt.

Die Ergebnisse der am Beton vorgenommenen Druckversuche: Würfel, Prismen (Bild 3b), Zylinder (Bild 3c) haben bewiesen, daß die zwischen der Druckfläche und dem Druckprüfkörper auftretenden Reibungen einen bedeutenden Einfluß auf den Wert der Druckfestigkeit sowie auf die Gestaltung des Bruchbildes ausüben. Versucht man die Reibung der Druckflächen mit

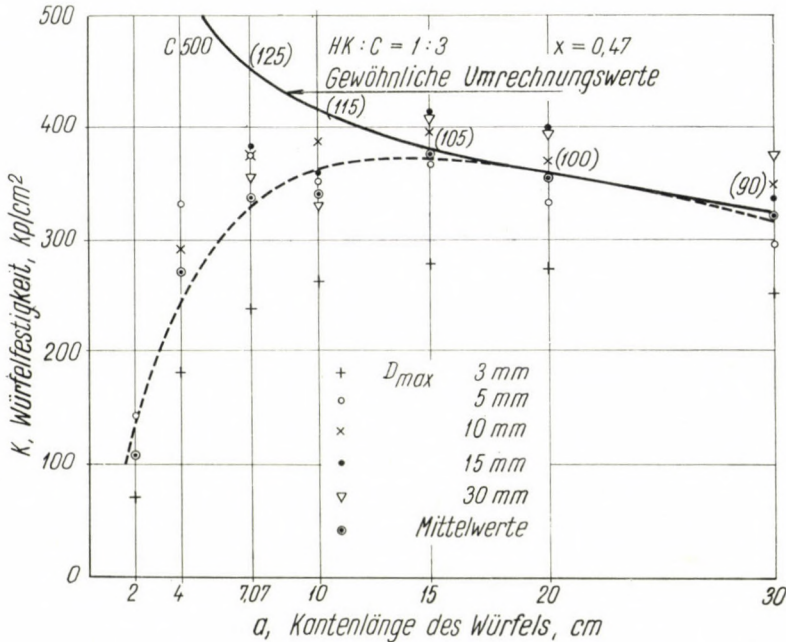


Bild 1. Die Würfel­festigkeit (K) und die Kantenlänge

Hilfe einer zweckmäßig gewählten Mittelschicht auszuschalten, so ergeben die Prüfungen, daß das Bruchbild im Falle von Gummi-, Blei-, PVC-, Stearin- und Fettschichten den Charakter des *Trennbruchs*, nach Einführung eines Kartonblattes und nur zwischen Druckflächen den Charakter des *Gleitbruchs* hatte. Bei Verwendung von Blei- und einer weichen oder mittelmäßig harten Gummischicht konnte man beobachten, daß diese Mittelschicht bei Erhöhung der Druckkraft in die Poren der Betonfläche eingepreßt wurde und eine Spaltbeanspruchung für den Probekörper hervorgerufen hat. Im Falle der Fettschicht war dieser Spaltcharakter nicht ausdrücklich bemerkbar. Die Spaltwirkung der Blei- und ähnlicher weicher Schichten ist um so größer, je größere Grundfestigkeit der geprüfte Stoff besitzt. Infolgedessen hat sich die Druckfestigkeit selbstverständlich bedeutend (um 30 ÷ 50%) vermindert. Gleich-

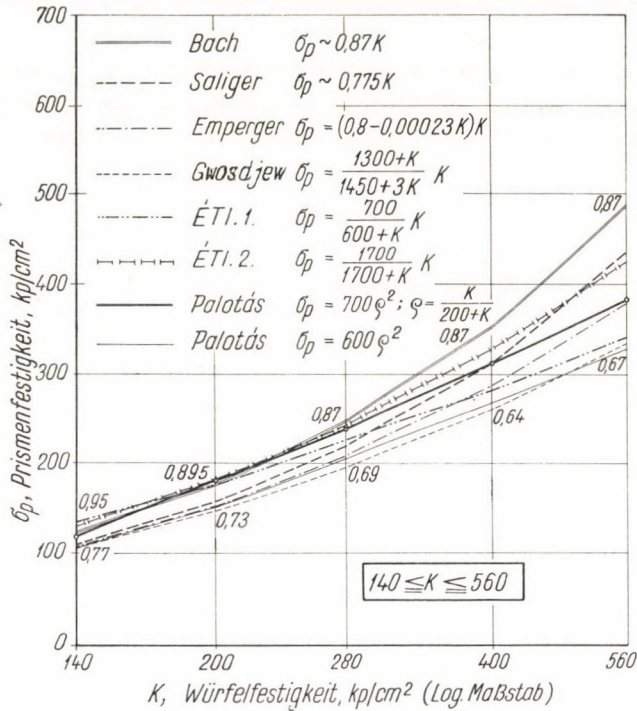


Bild 2. Zusammenhänge zwischen K und σ_p

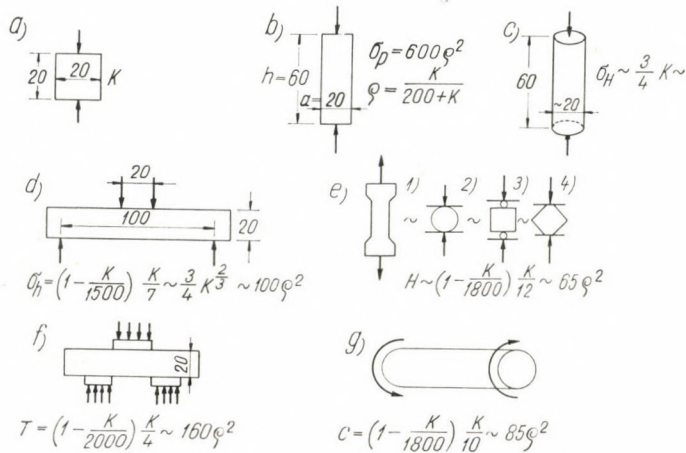


Bild 3. Praktische Zusammenhänge zwischen den Festigkeitswerten

falls kann der Bruch von stämmigen Prismen mit etwa $h/a = 6$ als reibungsfrei, wogegen im Falle von $h/a < 6$ als gleitend angesehen werden (GEHLER [4]).

Zur Bestimmung der *Zugfestigkeit* (H), eines anderen wichtigen Kennwertes des Betons, benützt man Zugprobekörper (ausgebildet nach dem Bild 3e, 1) oder zur Bestimmung der sog. *Zugspaltfestigkeit* einen Zylinder, Würfel, ausgebildet und geprüft nach dem Bild 3e, 2, 3, 4 (S. AKAZAWA [5], CARNEIRO [6], BERTHIER [7] und WAITZMANN [8]). Nach den Versuchsergebnissen können anstatt der reinen Zugfestigkeitswerte (bestimmt nach dem Bild 3e, 1) die *Zugspaltfestigkeitswerte* mit einer guten Annäherung angenommen werden, entsprechende Prüf- und Berechnungsmethoden vorausgesetzt.

Die *Schubfestigkeit* (T) und die *Verdrehungsfestigkeit* (C) des Betons pflegt man im allgemeinen in der im Bild 3f und 3g dargestellten Weise zu bestimmen. Nach der Auswertung von GRAF [9] erreicht die *Schubfestigkeit* (T) den Wert $1/4 \div 1/5$ der Würfelfestigkeit, und die *Verdrehungsfestigkeit* (C) ist ungefähr $1,2 \div 1,7$ -mal größer als die Zugfestigkeit.

Die *Biegezugfestigkeit* (σ_h) wird mittels auf Biegung beanspruchter Probeprismen (Bild 3d) bestimmt. Die Werte σ_h sind im allgemeinen 1,3—1,9-mal größer als die Werte H . Die Versuchsanordnung hat einen bedeutenden Einfluß.

Die in der Baupraxis empfehlbaren Annäherungsformeln für die gegenseitigen Beziehungen der Festigkeitswerte des erhärteten Betons habe ich — nach Auswertung der ausländischen und ungarischen Prüfergebnisse — im Bild 3. zusammengestellt. In demselben Bild sind auch die gebrauchten Bezeichnungen und die zur Feststellung der Festigkeitskennwerte verwendeten Prüfkörper angegeben.

Gültigkeitsbereich: $K = 140 \div 560$ kp/cm². Die Druckprüfung bezieht sich auf einen Würfel mit 20 cm Kantenlänge. Der Biegezugprüfkörper ist ein Prisma von $20 \times 20 \times 130$ cm, der Zylinder hat die Abmessungen von 15×30 cm, Maßverhältnis der Prismen 1 : 3; Verdrehprobekörper mit Kreisquerschnitt.

Schlußfolgerungen: Mit der Zunahme der Würfelfestigkeit nehmen im allgemeinen alle Festigkeitskennwerte zu. Zu den kleineren Würfelfestigkeitswerten gehören im allgemeinen relativ größere Zug-, Biegezug-, Schub- und Verdrehungsfestigkeitswerte.

III. Elementare theoretische Auswertung

Im nachfolgenden werden von den Festigkeitskennwerten diejenigen Zusammenhänge bekanntgegeben, welche mit Hilfe der elementaren theoretischen Erwägungen und der allgemeinen statischfestigkeitstheoretischen Prinzipien abgeleitet werden können.

In den Erörterungen seien die *Prismen-*, eventuell die *Würfel-* und die *Zugfestigkeitswerte* sowie die allgemeinen Beziehungen zwischen den Festigkeits- und Formänderungskennwerten als bekannt vorausgesetzt.

Für die *Schubfestigkeit* (T) kann nach KÖPCKE und MÖRSCH [10, 11] die Formel

$$T = \sqrt{\sigma_p H} \quad (1)$$

hergeleitet werden.

Nach den Erwägungen SEYBOLDS [12] erhalten wir anstatt der Formel (1) einen der Wirklichkeit besser angenäherten Wert mit dem Zusammenhang

$$T = 0,75 \sqrt{\sigma_p H}, \quad (2)$$

und nach der *Bruchtheorie von Mohr* [13]:

$$T = 0,5 \sqrt{\sigma_p H}. \quad (3)$$

LEON [14] schlägt die Formel

$$T = \sqrt{(H + \sigma_p) H} - H = H \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_p}{H}} - 1 \right) = H (\sqrt{1 + \delta} - 1), \quad (4)$$

CHALOS [15] die Formel

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{H(\sigma_p + H)} = \frac{1}{2} H \sqrt{1 + \delta} \quad (5)$$

vor, wo

$$\delta = \sigma_p/H$$

ist.

Nimmt man die *Mohrsche Hüllkurve* zwischen den Hauptkreisen für reinen Zug und reinen Druck als gerade an, so erhält man für die *Verdrehungsfestigkeit* (C) den Zusammenhang

$$C = \frac{\sigma_p H}{\sigma_p + H} = \frac{\sigma_p}{1 + \delta} = \frac{1}{1 + k} \sigma_p = \frac{H}{1 + k}, \quad (6)$$

wo $k = H/\sigma_p$ ist.

Nachdem der Zugfestigkeitswert (H) im Verhältnis zum Wert σ_p klein ist, nimmt man im allgemeinen anstatt C den Wert H an.

Die Werte σ_p und H auf Grund der obigen Annäherungsformel eingeführt, bekommen wir für δ einen Wert von $700/65 = 10,77$ und die Formeln (1)–(6) in der Funktion des Wertes $\varrho = K/(200 + K)$ gestalten sich folgendermaßen:

$$T = \sqrt{\sigma_p H} = 213 \varrho^2 = 0,306 \sigma_p, \quad (7)$$

$$T = 0,75 \sqrt{\sigma_p H} = 160 \varrho^2 = 0,229 \sigma_p, \quad (8)$$

$$T = 0,50 \sqrt{\sigma_p H} = 107 \varrho^2 = 0,153 \sigma_p, \quad (9)$$

$$T = H (\sqrt{1 + \delta} - 1) = 158 \varrho^2 = 0,226 \sigma_p, \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{2} H (\sqrt{1 + \delta}) = 112 \varrho^2 = 0,160 \sigma_p, \quad (11)$$

$$C = \sigma_p / (1 + \delta) = 59 \varrho^2 = 0,085 \sigma_p, \quad (12)$$

$$C = 85 \varrho^2,$$

$$H = 65 \varrho^2 = 0,093 \sigma_p, \quad (14)$$

d. h., für die *Schubfestigkeit* T sind die Formeln nach SEYBOLD und LEON zweckmäßig anwendbar, d. h.

$$T = 160 \varrho^2 = 0,23 \sigma_p. \quad (15)$$

Nachdem die auf Grund der elementaren theoretischen Erwägungen und mit Hilfe der bezüglichen allgemeinen statischfestigkeitstheoretischen Prinzipien ableitbaren Beziehungen als gegeben angesehen werden, sind die Prismenfestigkeiten (σ_p) und Zerreiß- (Zug-) Festigkeiten (H) von den Festigkeitswerten des Betons im Bild 3 zusammengestellt und gleichzeitig brauchbare Werte von T , H und C vorgeschlagen.

IV. Bruchtheorien und allgemeiner Spannungszustand des Betons

Von den bruchtheoretischen Beziehungen: *ältere Hauptspannungstheorie* (GALLILEI, LEIBNITZ, NAVIER, CLAPEYRON, CLEBSCH, RANKINE), *Hauptformänderungstheorie* (MARIOTTE, NAVIER, PONCELET, DE ST. VENANT, GRASHOF, BACH) sowie die neuere *Hauptschubspannungstheorie* (COULOMB, MOHR, MESNAGER, GUEST) und *die Theorie der Formänderungsenergie* (BELTRAMI, GIRTNER, HUBER, MISES, HENCKY, SCHLEICHER), welche einheitlich den gemeinsamen Zweck verfolgen, die Bruchgefahr im vorhinein zahlenmäßig zu erfassen, kann die *Mohrsche Bruchtheorie der Schubspannungen*, d. i. die *Mohrsche-Hüllkurve* für den Beton als einen spröden Stoff, zur Verwendung am ehesten in Frage kommen. Diese Theorie deckt sich am besten mit den Prüfergebnissen, obwohl bei deren Auswertung gewisse Gegensprüche zu verzeichnen sind.

Die *Mohrsche Hauptschubspannungstheorie* nimmt nämlich an, daß alle Stoffe mit einer bestimmten Funktion $\tau = f(\sigma)$ gekennzeichnet werden können, welche in einem Koordinatensystem $\sigma - \tau$ als die Hüllkurve, die sogenannte *Mohrsche Grenz- oder Hüllkurve* der zu den verschiedenen Beanspruchungen ermittelten Spannungskreise dargestellt werden kann (Bild 4). Solange die wirkliche Schubspannung $\tau_0 < f(\sigma)$ ist, befindet sich der Stoff in einem reinen elastischen Gleichgewichtszustand. Beim Spannungszustand, wo die zusammengehörenden τ - und σ -Werte sich auf der Grenzkurve (τ_n, σ_n) befinden, gelangt der Stoff in den Grenzzustand des Bruchs, welcher im allgemeinen Spannungszustand zumeist dem *Gleitbruchzustand* gleichkommt, und σ_n, τ_n sind die in den Gleitebenen erweckten bruchbewirkenden Spannungspaare. MOHR führt das ursprüngliche räumliche Problem auf ein zweiachsiges Problem zurück,

indem er nur das Entstehen von Gleitebenen annimmt, welche durch die mittlere Achse (y, z) des *Festigkeits-Ellipsoids* gehen. Die Gleitflächen entstehen, indem die im betreffenden Punkt wirkenden Hauptspannungen (σ_1 und σ_3) den Winkel 2φ zwischen ihnen halbieren. Im folgenden wird — der Einfachheit halber, nachdem es sich um den Betonstoff handelt — der Zug als eine negative und der Druck als eine positive Belastung betrachtet. Hauptmerkmale des Spannungskreises: Durchmesser des Hauptkreises der einachsigen Zugspannung K_H ist $OA = H$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 = H$), Durchmesser des Haupt-

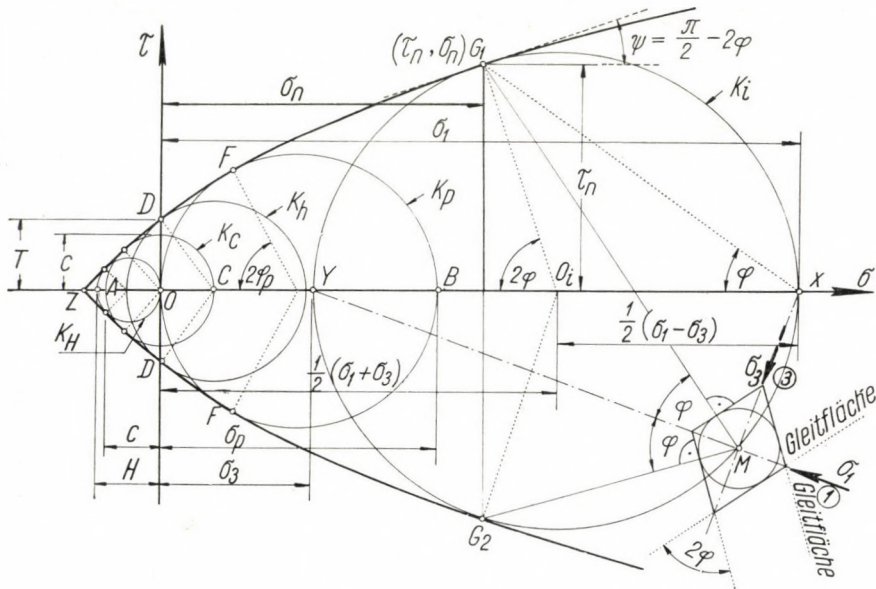


Bild 4. Die Mohrsche-Umhüllungskurven

kreises K_p der einachsigen Druckspannung ist $OB = \sigma_p$ ($\sigma_1 = \sigma_p, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), der Hauptkreis K_c mit dem Radius $OC \leq H$ ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_1$) stellt die Drehspannung beim steifen Stoff dar, wo $H \ll \sigma_p$ und die Drehfestigkeit $C \cong H$ ist. Der Hauptkreis der reinen Schubspannung ($\sigma_n = 0, \tau_n = T$) berührt die Hüllkurve im Punkt D , welcher letzterer sich auf der Achse τ befindet und $OD = T$. Der Hauptkreis mit dem Halbmesser $0,5(\sigma_1 - \sigma_3)$ berührt die Hüllkurve in einem im allgemeinen mit σ_1, σ_3 Hauptspannungen gekennzeichneten Spannungszustand in den Punkten G_1 und G_2 ; σ_n, τ_n sind die den Gleitbruch hervorrufoenden Spannungspaare; der Winkel φ , welchen die Gleitebenen mit der Achse 1 bilden, ist aus dem Bild ersichtlich und mit der Formel

$$\tan \varphi = \frac{\tau_n}{\sigma_1 - \sigma_n} \quad (16)$$

berechenbar. Die im beliebigen Punkt M gebildeten Gleitebenen und deren Bestimmungsmethode werden ebenfalls im Bild 4 angeführt.

MÖRSCH hat festgestellt [16, 17], daß der Probekörper infolge Erreichens der Zugfestigkeit versagt (*Trennbruch*), wenn die Hauptnormalspannungen entgegengesetzte Vorzeichen im zweiachsigen Spannungszustand haben und wenn diese Zug und Druck darstellen und die Größe des letzteren zwischen 0 und $6H$ liegt. So kann der Hauptkreis K_n , gekennzeichnet durch die Haupt-

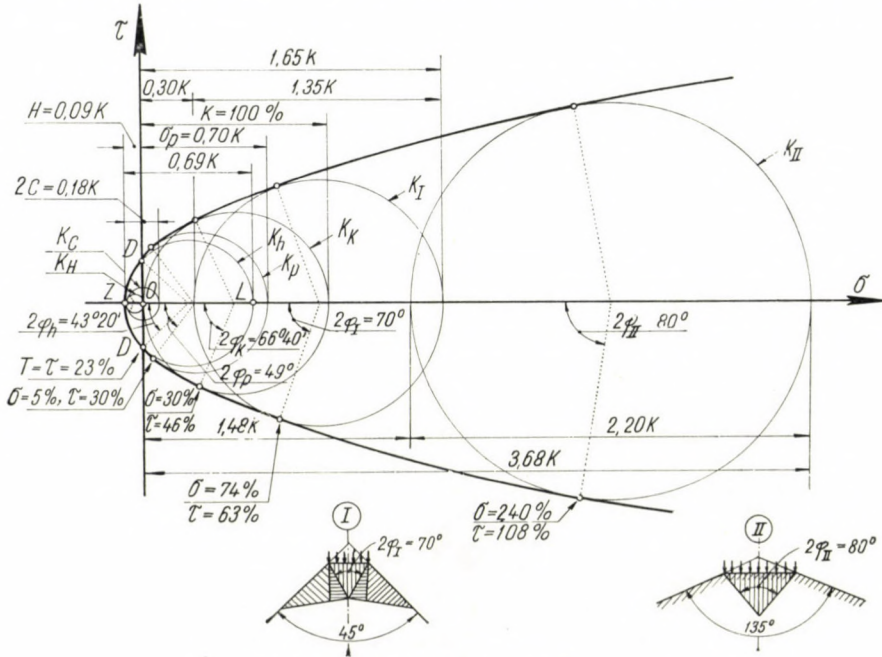


Bild 5. Umhüllungskurven „Mohr—Gehler“

spannungswerte $\sigma_1 = 6H$ und $\sigma_3 = -H$, als der Grenzhauptkreis des Trenn- und Gleitbruchs betrachtet werden. GEHLER nimmt die Grenzfestigkeit des Trenn- und Gleitbruchs mit einem Wert von $0,6K$ an. Dieser Wert scheint — auf Grund des oben Gesagten — zu hoch gewählt zu sein.

Die Auswertung der in Bezug auf den dreiachsigen Spannungszustand durchgeführten Forschungen (CONSIDIÈRE [18], CAQUOT und BRICE [19], RICHART und BRANDTZAEG [20], ROŠ [21], GLOMB [22] usw.) ergibt keine eindeutigen Schlußfolgerungen hinsichtlich der Rolle der mittleren Hauptspannung σ_2 . Die französischen Versuche ergeben einen unbedeutenden Einfluß des σ_2 , die amerikanischen und schweizerischen Versuche lassen aber eine gewisse Wirkung der Mittel-Hauptspannung σ_2 zu. Desgleichen stellte man Abweichungen beim ein- und zweiachsigen Druck fest. Es ist aber zweifelsohne feststellbar, daß die möglichst große Hauptdruckspannung bei der

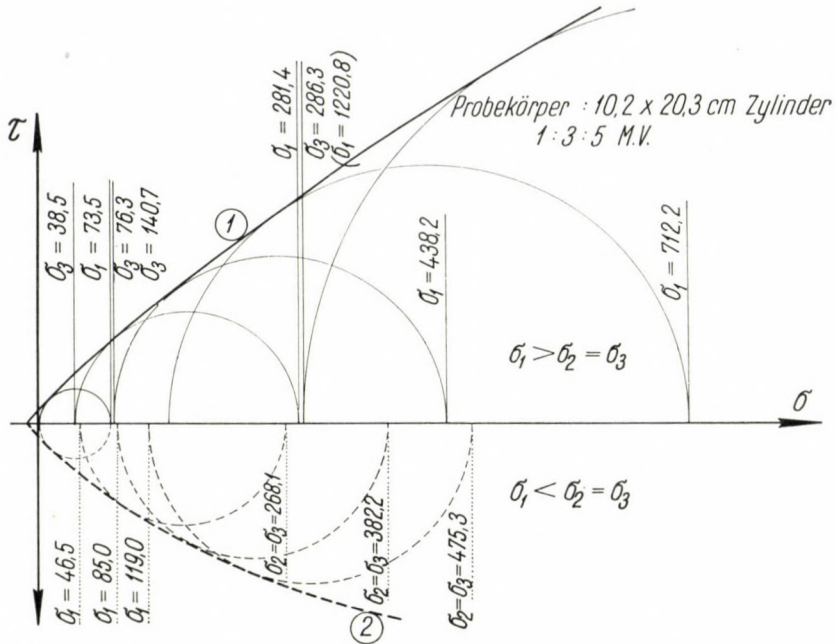


Bild 8. Versuchsergebnisse von RICHART—BRANDTZAEG

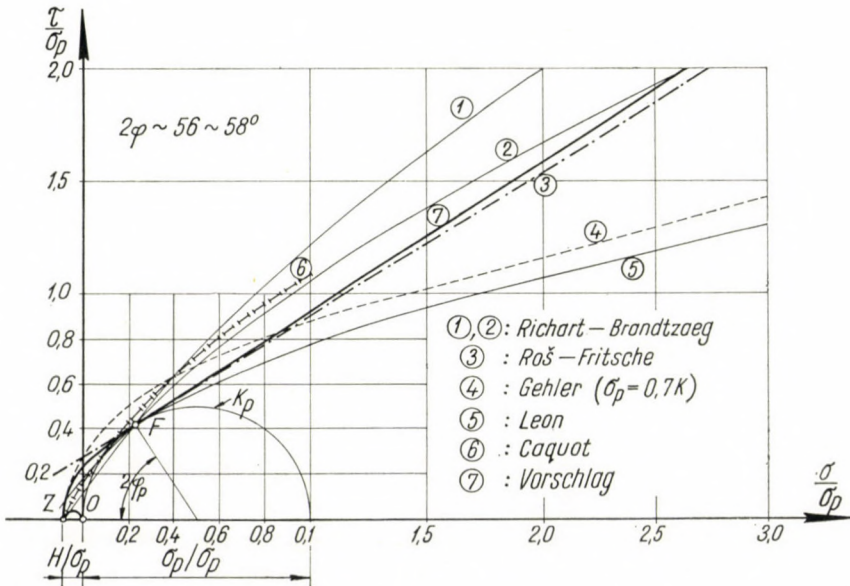


Bild 9. Verschiedene Hüllkurven

wäre, welche durch ebene Spannungszustände gut angenähert werden können (Scheiben, Prismen, Würfel usw.).

Die nach den Prüfergebnissen von GEHLER vorgeschlagene Hüllkurve wird im Bild 5 angeführt. Durchmesser des Hauptkreises K_H der reinen

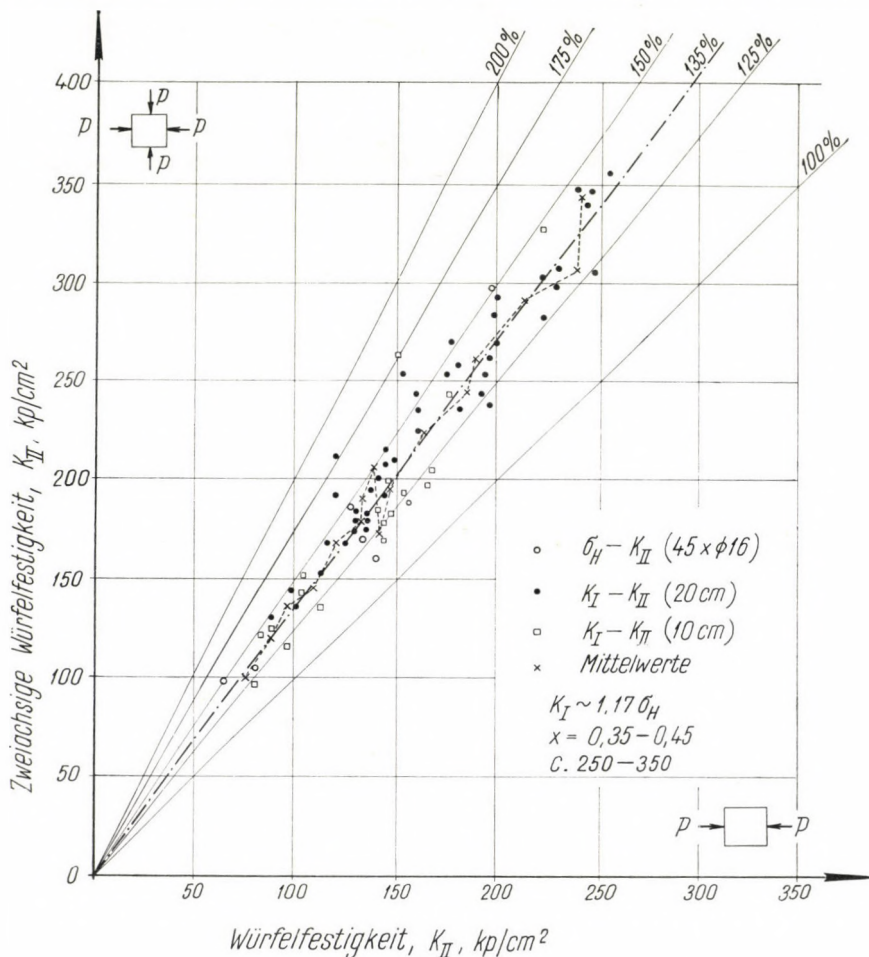


Bild 10. Versuchsergebnisse v. GLOMB für zweiachsigen Druck

Zugbelastung ist $OZ = H = 0,09 K$. Halbmesser des Hauptkreises K_c der reinen Drehbeanspruchung ist $OZ = H$. Laut GEHLER entspricht dem Grenzkreis des Trenn- und Gleitbruchs ein Hauptkreis K_h mit Durchmesser $ZL = 0,69 K$, welcher die Achse τ im Punkt D , im Abstand $OD = T$ schneidet. Der Gleitbruch der Prismen wird durch den Hauptkreis K_p gegeben, wo $\sigma_3 = -H$, $\sigma_1 = 0,7 K$ ist. Zwischen K_h und K_p befindet sich ein Übergangsabschnitt. Zwischen K_p und den Hauptkreisen K_K der Würfel Festigkeit liegen die

üblichen Druckfestigkeiten; K_I und K_{II} sind Abschnitte von größeren Druckbelastungen für Kanten- bzw. Streifendruck (Sohl-, Gelenkstein).

LEON [23] schreibt die Hüllkurve als eine Parabel zweiten Grades gemäß der Formel

$$\tau^2 = a \sigma + b$$

an. Der Einfachheit halber seien die Druckspannung σ als positiver Kennwert

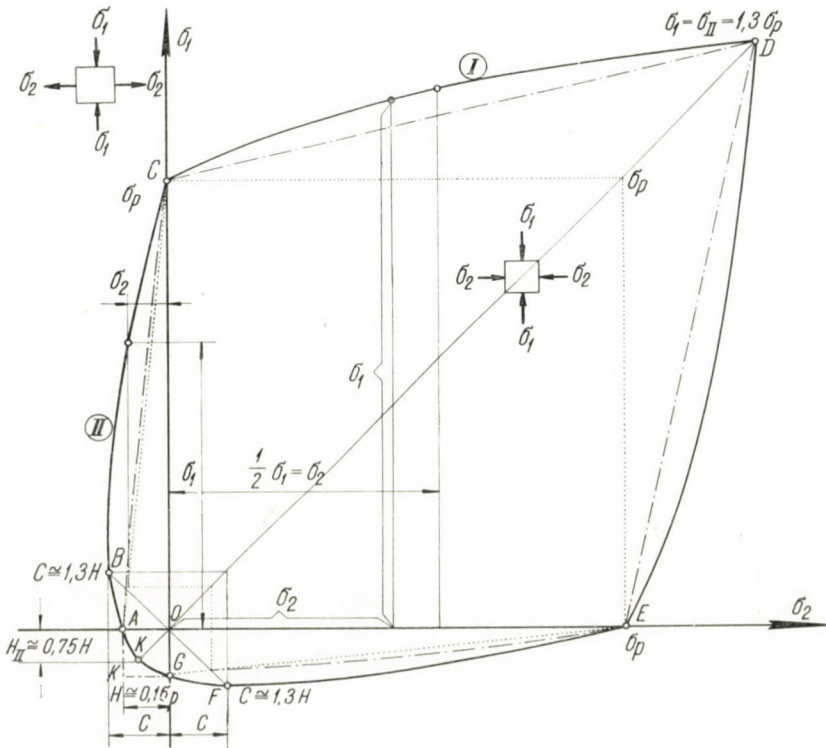


Bild 11. Vorschlag für zweiachsige Beanspruchung

und H , T , σ_p , C usw. als vorzeichenlose Kennwerte des Stoffes betrachtet (Bild 6). Nachdem an Stelle $\sigma = -H$ $\tau = 0$ und an der Stelle $\sigma = 0$ $\tau = T$, $b = T^2$ sowie $a = T^2/H$ ist, stellt die Gleichung der Hüllkurve

$$\tau^2 = \frac{T^2}{H} (\sigma + H) = T^2 \left(1 + \frac{\sigma}{H} \right) \quad (17)$$

den Torsionshauptkreis K_c , d. h. den Kreis mit Halbmesser $OZ = H$ der Hauptspannungen $\sigma_1 = H$, $\sigma_3 = -H$, $\sigma_2 = 0$ dar.

Die Gleichung eines Hauptkreises K_i von beliebigen Spannungen σ und τ ist:

$$\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sigma + \sigma_1 \sigma_3 = 0. \quad (18)$$

Im zweiachsigen Spannungszustand hat die Hüllkurve nur bis zum Punkt F eine Gültigkeit, und $\sigma_3 = 0$, aber σ_1 und $\sigma_2 \neq 0$. Die größte Hauptspannung kann beim einachsigen Druck gleich σ_p sein, beim zweiachsigen Druck hat sie den Wert σ_p in beiden Richtungen.

Die Versuche von GEHLER und ROŠ haben die gleiche Abnahme der als ohne Endflächenreibung angenommenen Druckfestigkeiten und eine ähnliche Änderung des Bruchbildes (Trennbruch anstelle von Gleitbruch) bewiesen. GEHLER und LEON ziehen hiernach die oben geschilderte Schlußfolgerung, d. h., daß der gedruckte Probekörper eigentlich versagt, weil der Querkzug die Zugfestigkeit übersteigt. FRITSCHÉ [24] schreibt die Festigkeitsabnahme der Keilwirkung des eingepreßten Stearins, ROŠ der nach der Mitte zunehmenden Intensität der Druckspannungen entlang der Druckplatte und der damit verbundenen größeren achsrechten Dehnung im Mittelteil des Probekörpers zu. Laut FRITSCHÉ können die Versuchsergebnisse der gedruckten Prismen beim Verhältnis $h/a = 4$ für die Festigkeit ohne Endflächenreibung als weitgehend zuverlässig angesehen werden. Ob die Festigkeitsabnahme der Keilwirkung oder dem unmittelbaren Erschöpfen der Zugfestigkeit oder der gleichzeitigen Wirkung der beiden zuzuschreiben sei, nachdem die oben geschilderten Ergebnisse einander nahestehen, ist die Mohrsche Darstellung und Bewertung gemäß Auffassung von GEHLER und LEON für annähernd zweiachsige Spannungszustände für die Praxis annehmbar.

GEHLER selbst bemerkt in der Bewertung der durch ihn vorgeschlagenen Mohrschen Darstellung, daß diese zur Beurteilung der Sicherheit von Betonkonstruktionen nach unseren heutigen Kenntnissen vorläufig nicht empfohlen werden kann.

Was die Wirkung der mittleren Hauptspannung im räumlichen Spannungszustand betrifft, so sollen die in diesem Zusammenhange durchgeführten wichtigeren Versuche besprochen werden.

Unter Beachtung der durch ROŠ [21] mit Mörtelprismen durchgeführten Versuche kann die *Mohrsche Hüllkurve* als Gerade angesehen werden (Bild 7):

	σ_1	σ_2	σ_3
I.	362 (300)	0	0
II.	935 (650)	100	100
III.	1830 (1460)	350	350
IV.	2490 (1960)	510	510

Die Spannungswerte in Klammern gehören zu den Punkten der $\sigma - \varepsilon$ -Kurve, bei den schon bedeutende plastischen Formänderungen entstanden. Für die so gekennzeichnete Gerade sind $2\varphi = 58^\circ$ und

$$\tau = 0,625 \sigma + 0,277 \sigma_p, \quad (19)$$

ferner gelten für die Berührungspunkte der durch die Hauptspannungen

σ_1, σ_3 gekennzeichneten Hauptkreise

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\varphi = 0,424 (\sigma_1 - \sigma_3), \\ \sigma_n &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\varphi = 0,235 \sigma_1 + 0,765 \sigma_3 \end{aligned} \tag{20}$$

bzw.

$$\sigma_1 = 3,26 \sigma_3 + \sigma_p. \tag{21}$$

Im Falle $\sigma_1 = 0$ bekommt man $\tau = T = 0,277 \sigma_p$, die Verdrehungsfestigkeit $0,848 \cdot 0,277 \sigma_p = 0,235 \sigma_p$. Die Formel (19) ist nur für die Spannungswerte $\sigma_3 > 0, \sigma_1 > \sigma_p$ zu verwenden.

Die Versuchsergebnisse von ROŠ wurden durch die Arbeiten von CAQUOT und BRICE [19] unterstützt. Sie haben die Beziehung zwischen τ und σ auf Grund der eigenen Versuchsergebnisse in der Form

$$\tau^{3/2} = f(\sigma)$$

angegeben. Nach diesen Ergebnissen erzielte die französische *Chambre Syndicale des Constructeurs en Ciment Armé de France*, später CHALOS [15] bzw. CHALOS und BÉTEILLE [25] im allgemeinen ähnliche Beziehungen. DURIEZ [26] schlägt eine der Coulomb-Formel ähnliche Beziehung vor.

Versuche von RICHART und BRANDTZAEG [20] ergeben eine eher gekrümmte Hüllkurve (s. Bild 8). Gemäß der Bewertung von BROD [27] dürfte die Hüllkurve keineswegs als eine Gerade angenommen werden.

Im Bild 9 sind einige Hüllkurven von den obigen zusammen angerissen. Die durch GEHLER vorgeschlagene Kurve wurde für σ_p transponiert, wobei $\sigma_p = 0,7 K$, gemäß Vorschlag von GEHLER, gesetzt wurde. Nach Bewertung der Kurven kann vorgeschlagen werden, die Hüllkurve im Abschnitt $Z - F$ als eine gewöhnliche Parabel anzusehen, solange $\sigma_1 < \sigma_p$ ist,

$$\tau = \sigma_p \sqrt{\beta(\alpha + k)} = \sqrt{\bar{\sigma}(H + \sigma)}, \tag{22}$$

wo

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + 2k - 2\sqrt{k(1+k)}, \\ k &= \frac{H}{\sigma_p}, \quad \bar{\sigma} = \beta\sigma_p, \quad \alpha = \frac{\sigma}{\sigma_p} \end{aligned} \tag{22a}$$

bedeutet.

Ist $\sigma_1 < \sigma_p$, so kann die Hüllkurve als eine Gerade angenommen werden, daher ist

$$\tau = m\sigma + (C), \tag{23}$$

wo

$$(C) = \frac{\sin 2\varphi_p - m(1 - \cos 2\varphi_p)}{2},$$

$$m = \tan \left(\frac{\pi}{2} - 2 \varphi_p \right) \quad (23a)$$

ist. Die Koordinaten des Berührungspunktes (F) sind

$$\sigma_{n,p} = T = b \sigma_p \quad \text{und} \quad \tau_{n,p} = T \sqrt[4]{1 + \delta}, \quad (23b)$$

wo

$$b = \sqrt{k\beta} \quad \text{und} \quad \sigma_p = \delta H$$

bedeutet. Ist $H = 0,093 \sigma_p$, $2 \varphi_p = 56,4$, $\beta = 0,55$

$$\sigma_1 < \sigma_p : \quad \tau = \sigma_p \sqrt{0,051 + 0,55 a},$$

$$\sigma_1 > \sigma_p : \quad \tau = (0,659 a + 0,269) \sigma_p$$

und

$$\sigma_1 = 3,326 \sigma_3 + \sigma_p.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes F sind:

$$\sigma = 0,226 \sigma_p \quad \text{und} \quad \tau = 0,417 \sigma_p.$$

In diesem Vorschlag wird die durch Versuche bewiesene Tatsache nicht berücksichtigt, wonach einerseits im räumlichen Spannungszustand auch der mittleren Hauptspannung eine Rolle zukommt, und andererseits die Bruchspannungen bzw. die Wertepaare σ_1, σ_2 bzw. σ_1, σ_3 im mehrachsigen Spannungszustand mit den für den linearen Spannungszustand bestimmten Grenzwerten (σ_p, H u.s.w.) nicht identisch sind.

V. Zweiachsiger Spannungszustand des Betons

Zur Klärung dieses Problems betrachten wir den praktisch wichtigen Fall, namentlich den zweiachsigen Spannungszustand und untersuchen wir die Prüfergebnisse von GLOMB [22] (Bild 10). Aus einem Vergleich dieser und anderer z. T. bereits angeführten Prüfergebnisse geht hervor, daß die Beanspruchungsfähigkeit des Betons bei zweiachsiger Belastung ($\sigma_1 = \sigma_2$) den Wert der einachsigen Beanspruchung wesentlich übersteigen kann. Vermindert sich P_2 , so geht die Überschußfestigkeit bzw. σ_1 ebenfalls zurück; ist P_2 negativ (d.h. beim Zug), so ist offensichtlich mit einer weiteren Verminderung beim P_1 zu rechnen. Unter Beachtung der oben angeführten Prüfergebnisse dürfte man mit einer Festigkeitsänderung laut Bild 11. zu rechnen haben. Für den Belastungsfall $\sigma_2 = -\sigma_1$ (reiner Schub) kann der Wert $(\sigma_1) = (\sigma_2) = C$ angenommen werden. Nachdem die Torsionsfestigkeit bei Röhren der Zugfestigkeit, bei vollen Stäben aber dem 1,6-fachen der letzteren im Sinne der Versuche gleichkommt, haben wir $C = 1,3 H$ aufgenommen. Meines Wissens

stehen z. Z. keine Prüfergebnisse für zweiachsigen Zug zur Verfügung, und wir haben den Annäherungswert $0,75 H$ auf Grund der durch KÁRMÁN, BÖKER und die EMPA durchgeführten Versuche aufgenommen. Den Wert H haben wir der Einfachheit halber in $0,1 \sigma_p$ angegeben. Die dünne Schaulinie des Bildes 11 führt den Fall an, wo die Mohrsche Hüllkurve zwischen den Hauptkreisen H und σ_p nicht linear verläuft. Die punktierte Linie stellt die Schaulinie der linearen Hüllkurve dar.

Die den dicken Schaulinien entsprechenden Beziehungen seien in Parabeln zweiten Grades ausgedrückt, uzw.:

Für den Schaulinienabschnitt I, wobei die Bedingung gestellt wird, daß die Tangente im Punkt D horizontal liegt, und die Koordinaten der Punkte C und D ($\sigma_p, \gamma \sigma_p$) gegeben sind:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_p} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p} \right)^2 + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p} \right) + 1. \quad (24)$$

Für den Schaulinienabschnitt II, vorausgesetzt, daß die Werte der Punkte A, B und C gegeben sind (H, C, σ_p):

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p} \right) = - \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon) + \varepsilon k}{\varepsilon - k} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p} \right)^2 + \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon) + k^2}{\varepsilon - k} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p} \right) + k, \quad (25)$$

wo

$$\gamma = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_p}, \quad \varepsilon = \frac{H}{C} \sim \frac{1}{\gamma}, \quad k = \frac{H}{\sigma_p}$$

ist.

Die bisherigen Ergebnisse lassen $\gamma \sim 1,3$, $\varepsilon \sim 0,769$ und $k \sim 0,093$ zu. Und dementsprechend

für den Abschnitt I:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p} \right) = - 0,177 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p} \right)^2 + 0,462 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p} \right) + 1, \quad (24a)$$

für den Abschnitt II:

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p} \right) = - 0,369 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p} \right)^2 + 0,276 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p} \right) + 0,093. \quad (25a)$$

An dem Abschnitt I zu dem Wert $\sigma_2 = \sigma_p$ gehört der Wert $\sigma_1 = 1,29 \sigma_p$, an dem Abschnitt II zu dem Wert $\sigma_2 = H = 0,093 \sigma_p$ die Hauptspannung $\sigma_1 = 0$ (trivialer Wert) bzw. $\sigma_1 = 0,75 \sigma_p$.

Praktisch dürfte man nach der im Bild 11 ausgezogenen punktierten Linie rechnen, wobei man

beim Abschnitt I:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p} \right) + 1, \quad (26)$$

beim Abschnitt II:

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p}\right) = \frac{k}{1-k} \left[1 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p}\right)\right] \quad (27)$$

erhält.

Mit den oben gegebenen Daten ist

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p}\right) = 0,231 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p}\right) + 1, \quad (26a)$$

und

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p}\right) = 0,103 \left[1 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p}\right)\right], \quad (27a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_p + 0,231 \sigma_2, \\ \sigma_2 &= 0,103 (\sigma_p - \sigma_1). \end{aligned}$$

Im Falle der punktierten Linien — d. h., wo die Mohrsche Hüllkurve zwischen H und σ_p linear verläuft — gehört im Abschnitt I zu einem beliebigen σ_2 immer $\sigma_1 = \sigma_p$ und im Abschnitt II ist

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_p}\right) = k \left[1 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_p}\right)\right], \quad (27b)$$

und die Torsionsfestigkeit, wenn $\sigma_2 = \sigma_1 = C$ ist:

$$C = \frac{k}{1+k} \sigma_p = \frac{1}{1+k} H. \quad (28)$$

Die obengesagten lassen erkennen, daß die Größtwerte der Bruchfestigkeiten im zweiachsigen Spannungszustand größer als σ_p bzw. H angenommen werden könnten. Die wahrscheinlichen Wertepaare σ_1, σ_2 können aus den Formeln (24)—(27) ermittelt werden. Nachdem die Prüfergebnisse beweisen, daß die Druckgrenzfestigkeit beim zweiachsigen Druck einen größeren Wert zuläßt als im einachsigen Spannungszustand, dürfte man für diesen zweiachsigen Spannungszustand eine Hüllkurve vorschlagen, wo der Halbmesser des Hauptkreises der reinen Schub- (Dreh-) beanspruchung mindestens H oder $C = \gamma H$ und der des einachsigen Drucks $N = 0,5 \gamma \sigma_p$ ist. (Es sei bemerkt, daß die für C bzw. σ_p bezogenen γ -Werte auch unterschiedlich sein können.)

Zur Verallgemeinerung der Ableitung gehe man von der im Bild 12 angezeichneten Hüllkurve aus, welche aus dem Kreisbogen ZA und aus der Geraden AF besteht. Sei Halbmesser OZ die Drehfestigkeit $C = \gamma H$, Berührungspunkt sei A ; Halbmesser $O_N H$ gleich $N = 0,5 \gamma \sigma_p$, d. h. der Hälfte der Bruchfestigkeit $\sigma_{II} = \gamma \sigma_p$ der zweiachsigen Beanspruchung. Unter Verwendung

Der Halbmesser r eines zu einem beliebigen Berührungspunkt G gehörenden Kreises, unter Anwendung der an der Abbildung verwendeten Zeichen, ist

$$r = \frac{\sigma}{2} \cos 2\varphi + C = \frac{1}{2} \sigma (1 - 2k) + k\gamma\sigma_p, \quad (35)$$

die mit der Normalspannung σ definierten Hauptspannungen sind:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= r + \frac{\sigma}{2} = \sigma(1 - k) + k\gamma\sigma_p, \\ \sigma_2 &= -\left(r - \frac{\sigma}{2}\right) = \sigma k - k\gamma\sigma_p. \end{aligned} \quad (36)$$

Das Wertepaar der Bruchspannungen σ_n, τ_n :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma}{2} - r \cos 2\varphi = 2k(1 - k)\sigma - k(1 - 2k)\gamma\sigma_p, \\ \tau_n &= r \sin 2\varphi = (1 - 2k)\sqrt{k(1 - k)}\sigma + 2k\sqrt{k(1 - k)}\gamma\sigma_p. \end{aligned} \quad (37)$$

Die Koordinaten des Tangentialpunktes:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -C \cos 2\varphi = -k(1 - 2k)\gamma\sigma_p, \\ \tau_A &= C \sin 2\varphi = 2k\sqrt{k(1 - k)}\gamma\sigma_p. \end{aligned} \quad (38)$$

Mit den früher verwendeten Werten k und γ

$$\begin{aligned} \sigma_n &= 0,169\sigma - 0,098\sigma_p, \\ \sigma_n &= 0,237\sigma + 0,070\sigma_p \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -0,098\sigma_p, \\ \tau_A &= 0,070\sigma_p. \end{aligned}$$

Bild 12 zeigt, daß die Bruchspannung τ_n einen wesentlich größeren Wert haben kann als die Torsionsfestigkeit (C) bzw. die Schubfestigkeit (T), wenn auf ein Querschnittelement auch eine Druckspannung σ gleichzeitig mit der Spannung τ wirkt. Man stelle die Beziehungen zwischen σ, τ und C bzw. σ_p für den Überschub auf. Für die Ordinate $OB = T$ kann man die Beziehung

$$\tau^2 = (\sigma_1)(\sigma_2) \quad (39)$$

aufschreiben, so daß

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{[\sigma(1 - k) + k\gamma\sigma_p][-\sigma k + k\gamma\sigma_p]} = \\ &= \sigma_p \sqrt{\left[k\gamma + (1 - k)\left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)\right]\left[k\gamma - k\left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)\right]}, \end{aligned} \quad (40)$$

bzw.

$$\tau = C \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{C}\right)(1-k)\right] \left[1 - k \left(\frac{\sigma}{C}\right)\right]}, \quad (41)$$

schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{C} &= \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{C}\right)(1-k)\right] \left[1 - k \left(\frac{\sigma}{C}\right)\right]} = \\ &= \sqrt{1 + (1-2k) \left(\frac{\sigma}{C}\right) - k(1-k) \left(\frac{\sigma}{C}\right)^2} \end{aligned} \quad (42)$$

ist. Die Formel (41) erreicht den Maximalwert an der Stelle

$$\sigma_0 = \frac{1-2k}{1-k} \left(\frac{1}{2} \gamma \sigma_p\right), \quad (43)$$

wo

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{1-k}} \gamma \sigma_p = T, \quad (44)$$

der Hauptkreishalbmesser

$$r = \frac{1}{4} \gamma \sigma_p \frac{1}{1-k} \quad (45)$$

und die Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \gamma \sigma_p; \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2} \gamma \sigma_p \frac{1}{1-k} = -\frac{k}{1-k} \sigma_1, \quad (46)$$

letztlich

$$\frac{\tau}{C} = \frac{1}{2 \sqrt{k(1-k)}} \quad (47)$$

sind.

Im Falle der obigen Werte k und γ beträgt $\tau/C = 1,73$, d. h., die Schubspannung kann einen 1,73-fachen Wert der Verdrehungsspannung erreichen, wenn gleichzeitig auch eine Druckspannung von $\sigma_0 = 0,585 \sigma_p$ auftritt. Dann wird der Bruchzustand mit den Spannungen $\sigma_n = 0$ und $\tau_n = T = 0,208 \sigma_p$ gekennzeichnet.

Untersuchen wir die übliche Hüllgerade, welche die Tangente des Hauptkreises des einachsigen Druckes und des einachsigen Zuges ist, d. h., wenn

$$N = \frac{1}{2} \sigma_p \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{1+k} \quad H = \frac{k}{1+k} \sigma_p,$$

so ergibt sich folgendes (Bild 13)

$$\cos 2\varphi = \frac{\sigma_p - H}{\sigma_p + H} = \frac{1-k}{1+k}; \quad \sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad (48)$$

$$\sigma_N = C = \frac{k}{1+k} \sigma_p, \tag{49}$$

$$\tau_N = \frac{\sqrt{k}}{1+k} \sigma_p, \tag{50}$$

$$T = \frac{C}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{k} \sigma_p, \tag{51}$$

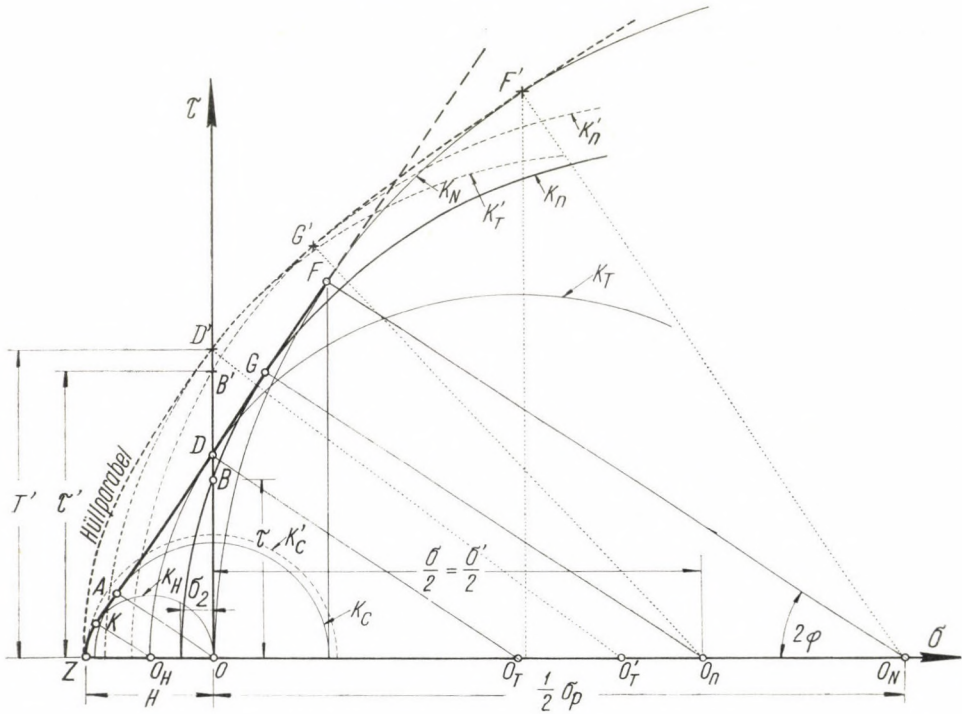


Bild. 13. Umhüllungskurven für ebenen Spannungszustand auf Grund der Werte H und σ_p

$$r = \frac{\sigma}{2} \frac{1-k}{1+k} + \frac{k}{1+k} \sigma_p, \tag{52}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{1+k} \sigma + \frac{k}{1+k} \sigma_p \\ \sigma_2 &= \frac{k}{1+k} \sigma - \frac{k}{1+k} \sigma_p \end{aligned} \right\}, \tag{53}$$

$$\sigma_n = \frac{2k}{(1+k)^2} \sigma - \frac{k(1-k)}{(1+k)^2} \sigma_p$$

und

$$\tau_n = \frac{(1-k)\sqrt{k}}{(1+k)^2} \sigma + \frac{2k\sqrt{k}}{(1+k)^2} \sigma_p, \quad (54)$$

$$\tau = C \sqrt{\left[1 + \frac{1}{1+k} \left(\frac{\sigma}{C}\right)\right] \left[1 - \frac{k}{1+k} \left(\frac{\sigma}{C}\right)\right]} \quad (55)$$

bzw.

$$\tau = \sigma_p \sqrt{\left[\frac{k}{1+k} + \frac{1}{1+k} \left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)\right] \left[\frac{k}{1+k} - \frac{k}{1+k} \left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)\right]}, \quad (56)$$

schließlich

$$\frac{\tau}{C} = \sqrt{1 + \frac{1-k}{1+k} \left(\frac{\sigma}{C}\right) - \frac{k}{(1+k)^2} \left(\frac{\sigma}{C}\right)^2} \quad (57)$$

und

$$\frac{\tau}{\sigma_p} = \sqrt{k^2 + k(1-k) \left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right) - k \left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)^2}. \quad (58)$$

Man erhält den Maximalwert an der Stelle

$$\sigma = \frac{1-k}{2} \sigma_p, \quad (59)$$

wo

$$\tau = \frac{\sqrt{k}}{2} \sigma_p = T, \quad (60)$$

somit

$$\frac{\tau}{C} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}} \quad (61)$$

ist. So ist bei $k = 0,093$

$$C = \sigma_N = 0,085 \sigma_p; \quad \tau_N = 0,279 \sigma_p; \quad T = 0,153 \sigma_p;$$

$$\sigma_0 = 0,453 \sigma_p; \quad \sigma_n = 0; \quad \tau_n = 0,153 \sigma_p;$$

$$\frac{\tau}{c} = 1,79.$$

Das oben angeführte führt zur Schlußfolgerung, daß die Berücksichtigung der Versuchsergebnisse des zweiachsigen Spannungszustandes sowie die Einführung einer gekrümmten Hüllkurve günstiger und wirtschaftlicher ist.

In den Bildern 12 und 13 sind auch die Hüllparabel der maßgebenden Hauptkreise angeführt. Wie bereits erwähnt, stimmen die σ - und τ -Werte der parabolischen Hüllkurve mit den Versuchsergebnissen gut überein, und die Bruchspannungen σ und τ sind günstiger als die, durch die lineare Hüll-Linie gegebenen, wie es aus den Abbildungen hervorgeht. Es wäre daher

zweckmäßig, die Grenzspannungswerte für mehrachsige Beanspruchungen unserer Bemessungsvorschriften auf Grund einer solchen Überlegung abzuändern. Ferner liegt es auf der Hand, daß die Bruchtheorie für Schub- und Verdrehungsprüfungen der auf Biegung beanspruchten Stahlbetonträger unter Beachtung der oben erzielten Ergebnisse günstiger sein dürfte als die klassische Möhrsch'sche Theorie.

SCHRIFTTUM

1. VOELLMY, A.: Festigkeitskontrolle von Betonbelägen, Köln 1957/58. *Betonstraßen-Jahrbuch*.
2. RÜSCH, H.: Specimen size and apparent compressive strength. *Proc. A. C. J.* (1954), 803.
3. L'HERMITE, R.: La résistance du béton et sa mesure. 1950. *Annales I. T. B. T. P.* No 114.
4. GEHLER, W.: Die Würfefestigkeit und die Säulenfestigkeit als Grundlage . . . *Bauing.* (1928), 23; 40; 63.
5. AKAZAWA, T.: Méthode pour l'essai de traction des bétons. *RILEM*. 1953, Bul. 16.
6. CARNEIRO, F. L.: Une nouvelle méthode d'essai pour déterminer la résistance à la traction du béton. *RILEM* 1947.
7. BERTHIER, R. M.: Étude et contrôle des caractéristiques pratiques des ciments et bétons. 1950. *Centre d'Études et de Rech. de l'Ind. des Liants Hydr. Publ. Techn.* No 27. Mesures comparées de traction sur ciments et mortiers et questions connexes. *Revue des Mat. de Constr. et des Travaux Publics* (1951), 431.
8. FÉRET, R.: Relations entre la résistance à la traction et à la compression des mortiers et bétons. IATM Kongr. London 1937. Group B. 331.
9. GRAF, O.: Die Eigenschaften des Betons. Berlin 1950.
10. KÖPCKE: Versuch einer Theorie d. sog. Abscherungsfestigkeit . . . *Zeitsch. Arch. u. Ing. Ver.* (1898), 226.
11. MÖRSCH, E.: Schub- und Scherfestigkeit des Betons. *Schweiz. Bauz.* (1904).
12. SEYBOLD, B.: Über die Scherfestigkeit spröder Baustoffe. *Zeitschr. d. Vereins Deutsch. Ing.* (1934), 30.
13. MOHR, O.: Die Scherfestigkeit des Betons. *Armierter B.* (1911), 14.
14. LEON, A.: Über die Scherfestigkeit des Betons. *Beton und Eisen* (1935), 130.
15. CHALOS, M.: Application de la courbe de résistance intrinsèque du béton au calcul rationnel du béton armé. *Annales des Ponts et Chaussées* (1935), VII. 76.
16. MÖRSCH, E.: Der Eisenbetonbau, Stuttgart 1929. I. 2. t. 300.
17. MÖRSCH, E.: Über den Wert d. reduzierten Spannung beim Beton *Ing. Arch.* 1. (1930), 232.
18. MESNAGER, A.: Matériaux de construction «Pierre», Paris 1923, 91.
19. BRICE, L. P.: Détermination expérimentale et tracé de la courbe intrinsèque du béton. *Science et Industrie* (1934), Jan.
20. RICHART, F. E. and BRANDTZAEG, A.: A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. *Univ. of Illinois. Bull.* (1928), No 185.
21. ROŠ, M.: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Diskussionsbericht. 1928. No. 28. *EMPA*. Die Bruchgefahr. fester Körper. 1949—50. *EMPA-Bericht*. No. 172—173.
22. GLOMB, J.: Die Ausnutzbarkeit zweiachsiger Druckfestigkeit des Betons in Flächentragwerken, Berlin. 1958. *Congr. F. I. P. S. L. Pa.* 1.
23. LEON, A.: Über das Maß der Anstrengung für Beton. *Ing. Arch.* (1933), 4.
24. FRITSCH, J.: Die Festigkeiseigenschaften des Betons. *Beton u. Eisen* (1935), 112.
25. CHALOS, M.—BÉTEILLE: Représentation du domaine de stabilité d'un corps solide élastique. *APCH (Annales des Ponts et Chaussées)* (1938).
26. DURIEZ, M.: Traité de matériaux de construction. Paris 1950, 2. k.
27. BROD, E.: Die Mohrsche Umhüllungslinie für Beton. *Beton u. Eisen* (1956), 104.

THE SPATIAL STATE OF STRESS OF CONCRETE

L. PALOTÁS

SUMMARY

The evaluation of the strength state of concrete and of reinforced concrete structures encounters great difficulties.

The possible concepts concerning the mutual relations between the strengths and deformations, and between the different ultimate strengths can be transferred only with caution to the concrete assumed to be a two-phase elastic-viscous material (Fig. 3). Taking into consideration that in the concrete permanent viscous deformations and damping plastic deformations arise before breaking, while its characteristic strengths rise, conclusions on the stress determined by the measured or observed strains can be drawn only when the antecedents are known.

For the elastic-viscous brittle concrete material first of all *Mohr's maximum shear theory might be considered*. This theory shows the best agreement with experiment, although here too contradictions arise when evaluating the experimental results, mainly for bi- and triaxial states of stress, when stressing essentially different from the uni-axial state of stress of the concrete is possible.

In order to elucidate the problem, the paper evaluates the results of the experiments made, and theories elaborated, up to date. The author forwards proposals for the characterization of the state of stress of the concrete and of the reinforced concrete structures, and for relations which can be used in practice (Eqs. 22—25 and Figs. 9, 10).

L'ÉTAT DE CONTRAINTE TRIDIMENSIONNEL DU BÉTON

L. PALOTÁS

RÉSUMÉ

L'appréciation de l'état de contrainte du béton et des constructions en béton armé rencontre de nombreuses difficultés.

Les hypothèses possibles concernant les relations entre résistances et déformations, et entre les différentes résistances ne sauraient être appliquées qu'avec prudence au béton, matériau probablement élasto-visqueux et biphasé (fig. 3). Étant donné que, dans le béton, des déformations visqueuses permanentes et des déformations plastiques diminuant progressivement se produisent avant rupture avec augmentation simultanée des résistances propres, la contrainte déterminée par les déformations observées ne peut être déduite qu'en connaissance du passé du béton.

Pour les bétons rigides élasto-visqueux, la théorie de rupture de Mohr doit être considérée en premier lieu. C'est elle qui concorde le mieux avec les résultats d'essais, bien qu'ici même certaines contradictions apparaissent au cours de l'évaluation des résultats, surtout dans les états de contrainte bi- et triaxiaux, quand les possibilités de sollicitation sont essentiellement différentes de celles qui sont données dans l'état de contrainte monoaxial du béton.

Les résultats des essais déjà effectués et des solutions théoriques sont évalués. Une méthode servant à caractériser l'état de contrainte des constructions en béton et béton armé, et l'établissement de diverses relations pouvant être utilisées dans la pratique sont enfin proposés par l'auteur (voir formules (22)—(25) et fig. 9—10).

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕТОНА

Л. ПАЛОТАШ

РЕЗЮМЕ

Оценка состояния прочности бетонных и железобетонных конструкций наталкивается на целый ряд трудностей.

Напряжения и деформации, а также возможные соображения относительно взаимосвязи различных видов напряжения, лишь с должной осторожностью могут быть применены к бетону, так как таковой предположительно является двухфазным упруго-вязким материалом (см. рис. 3.). Поскольку в бетоне перед изломом наблюдаются остаточные вязкостные деформации одновременно с затухающими пластическими деформациями, при одновременном возрастании собственных напряжений, измеренные или наблюдаемые деформации не дают возможности делать выводы относительно определенных напряжений. Такая возможность имеется лишь, если известно предшествующее состояние.

Для упруго вязкого хрупкого бетона, в первую очередь, можно принять в расчет теорию излома Мора, касающуюся главных скользящих напряжений. Эта теория наиболее полно согласуется с результатами опытов, хотя и здесь возникает ряд противоречий, связанных с оценкой результатов опытов, особенно по случаю двух- и трехосного напряженного состояния, когда представляется существенно отличная от случая одноосного напряженного состояния возможность нагрузки.

Статья, с целью освещения проблемы, оценивает результаты проведенных до сих пор опытов и теоретических рассуждений. Для характеристики напряженного состояния бетонных и железобетонных конструкций, а также для разъяснения применимых в практике зависимостей делается предложение в виде формул (см. формулы (22) — (25) и рис. 9 и 10).

DIE BERECHNUNG DER GESCHWINDIGKEITEN VON PLANETENRÄDERN

ANWENDUNG VON NEUEN GRUNDLAGEN

A. BALOGH

CAND. OF TECHN. SC.

[Eingegangen am 15. Mai 1963]

Zur Berechnung der Geschwindigkeitsverhältnisse der Planetenräder sind in der Literatur mehrere Methoden verbreitet; hiervon sind die zeichnerischen Methoden, wie z. B. die Methoden von KUTZBACH und POPPINGE, zwar übersichtlich, hingegen im gegebenen Falle nicht genügend genau. Die rechnerischen Methoden aber (wie z. B. die Methoden von WILLIS und SWAMP) sind in verwickelten Fällen schwer übersichtlich. In meiner Arbeit habe ich zur Darstellung der Geschwindigkeitsverhältnisse die anschaulichen Vektoren benützt und habe die Vorteile in der beiliegenden Arbeit in einigen schweren Fällen vorgeführt. Meine Methode ist beinahe seit anderthalb Jahrzehnten aus literarischen Mitteilungen bekannt und ist wegen ihrer Einfachheit sehr verbreitet, ohne daß sich die Benützer meiner Methode jedoch auf mich als Anreger beriefen. Diesen Zustand wünscht Verfasser durch diese Arbeit zu korrigieren.

I. Einleitung

In den letzten Jahren haben sich die Planetenräderkonstruktionen in großem Ausmaße verbreitet, ja sogar werden Ausführungen für ganz große Leistungen mit erfreulich gutem Erfolg verwendet. Der Grund hiezu liegt im Wesen dieser Konstruktion, welche aber so allgemein bekannt ist, daß wir hier auf eine nähere Besprechung dieser verzichten können.

Bei der Ermittlung der Geschwindigkeiten tauchten gewisse Schwierigkeiten auf, und es gelang doch mit mehr oder weniger Erfolg, einige Verfahren einzuführen. Mit dieser schweren Aufgabe wollen wir uns auch hier befassen, da ja die Geschwindigkeit der Räder für die weiteren Rechnungen als Grundlage dient.

Für die Berechnung der Geschwindigkeit der Planetengetriebe haben wir ein einfaches und anschauliches Verfahren ausgearbeitet, welches auf dem bekannten Satz der ineinandergreifenden Räder beruht. Da diese Räder aufeinander rollen, so muß folglich die resultierende Geschwindigkeit im Berührungspunkte gleich Null sein.

Diese Berechnungsmethode wurde von mir im Jahre 1949 im Kreise eines wissenschaftlichen Vereines vorgetragen und zugleich im selben Jahre wurde das ganze Material in einem kleinen Heft veröffentlicht.

Diese Methode wurde auch im Auslande günstig aufgenommen:

In dem Fachblatte *Automobile Engineer* wurde im Februar 1950 unter dem Teil: »*Apicyclic Gears simplified formular for the calculation of velocity ratios*« veröffentlicht.

In der Zeitschrift *Maschinenbau-Technik*, im Heft No. 22. 1954. unter dem Titel: »*Berechnung der Geschwindigkeiten der Planetengetriebe auf einer neuen Grundlage*« veröffentlicht.

In der *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* Jahrgang 1952, No. 6. wurde meine Zuschrift unter dem Titel: »*Planetengetriebe mit großer Übersetzung*« veröffentlicht.

Leider wurde meinem Verfahren hierorts wenig Beachtung geschenkt, dagegen im Auslande hat sich aber diese vektorielle Methode sehr verbreitet. Ja sogar wurde in der Korrespondenz mit einer Westdeutschen Firma meine Anciennität in Frage gestellt.

Dies hat mich dazu veranlaßt, die Veröffentlichungen der Ung. Akademie der Wissenschaften in Anspruch zu nehmen, um die Prinzipien meiner Berechnungsmethode darzulegen und hiemit mein geistiges Eigentum zu fixieren.

Meine Methode soll hier an einigen schweren Beispielen vorgeführt werden. Bei den Berechnungen werden die Geschwindigkeiten als Produkt aus Umdrehungszahl und Zähnezah angegeben.

II. Wilson Getriebe

Eine der interessantesten Anordnungen der Räder. Die Übersetzungen werden berechnet, und hiezu bemerkt werden, daß wir die Bezeichnungen der Herstellerfirmen benützen werden.

a) Im Bild 1 ist der Fall dargestellt, wo nur ein paar Räder eingeschaltet sind. Das Hohlrad A_1 wird gebremst.

Die allgemeine Bewegungsleichungen sollen aufgeschrieben werden.

$$n_{a1} a_1 + n_{p1} p_1 = N_1 a_1 \quad \text{und} \quad n_{s1} s_1 = n_{p1} p_1 + N_1 s_1. \quad (1)$$

Diese Gleichungen bedeuten, daß die resultierende Geschwindigkeit der ineinandergreifender Räder im Berührungspunkte gleich 0 ist. Die Buchstaben in dieser Gleichung entsprechen den Bezeichnungen der Räder. N_1 ist die Umdrehungszahl des Armes. Eliminiert man aus (1) die gleichen Glieder:

$$[n_{a1} a_1 + n_{s1} s_1 = N_1 (a_1 + s_1)]. \quad (2)$$

Da aber die Umfangsgeschwindigkeit des Rades A_1 gleich 0 ist, da ja gebremst wurde:

$$n_{s1} = N_1 \left(\frac{a_1}{s_1} + 1 \right). \quad (3)$$

b) Es soll das Bremsen des Rades A_1 aufgehoben und statt dessen das Rad A_2 gebremst werden, welches wir in der Bild 2 mit B bezeichnet haben. Da: Rad A_1 wird bei dem nächsten Räderpaar mit dem mit P_2 bezeichneten Rad geschaltet.

Folglich ist:

$$N_2 = n_{a1}, \tag{4}$$

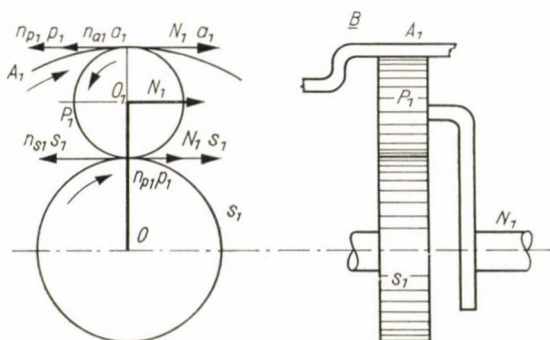


Bild 1

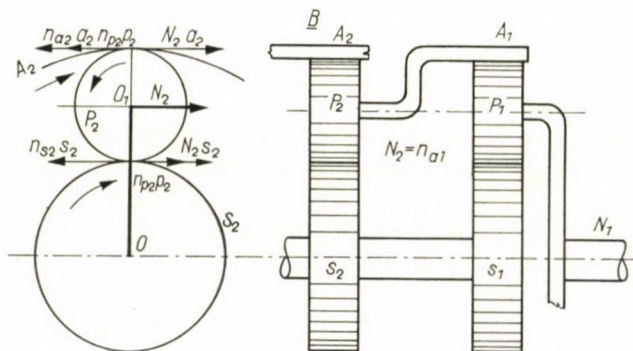


Bild 2

wo N_2 die Umdrehungszahl des Armes ist. Der Fall des zweiten Räderpaares ist in Bild 2 vorgeführt, wo zugleich das hiezu gehörige Vektorbild angegeben ist, woraus folgt, daß

$$N_2 a_2 = n_{a2} p_2 + n_{a2} a_2 \quad \text{und} \quad n_{p2} p_2 + N_2 s_2 = n_{s2} s_2. \tag{5}$$

Eliminiert man die gleichen Glieder aus diesen Gleichungen:

$$N_2 (a_2 + s_2) = n_{a2} a_2 + n_{s2} s_2. \tag{6}$$

Aus dem Bilde ersieht man die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$N_3 a_3 = n_{p3} p_3 + n_{a3} a_3 \quad \text{und} \quad n_{s3} s_3 = n_{p3} p_3 + N_3 s_3. \quad (13)$$

Eliminiert man hieraus ebenfalls die gleichen Glieder:

$$n_{a3} a_3 + n_{s3} s_3 = N_3 (a_3 + s_3). \quad (14)$$

Da aber $n_{s3} = 0$ ist, so folgt:

$$n_{a3} = N_3 \left(1 + \frac{a_3}{s_3} \right). \quad (15)$$

Die weitere Aufgabe ist, in die Formel (15) mittels Verwendung der schon früher abgeleiteten Formeln die Werte N_1 und n_{s1} einzusetzen.

Hierzu sollen die schon abgeleiteten folgenden Formeln benützt werden:

$$n_{a1} a_1 + n_{s1} s_1 = N_1 (a_1 + s_1) \quad \text{und} \quad n_{a2} a_2 + n_{s2} s_2 = N_2 (a_2 + s_2). \quad (16)$$

Benützt man die Formeln (12) und (16), so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$n_{s1} = \left(N_1 \frac{a_1 + s_1}{a_1} - n_{s1} \frac{s_1}{a_1} \right) \cdot \left(\frac{a_2 + s_2}{s_2} - \frac{a_2 a_3}{s_2 (a_3 + s_3)} \right). \quad (17)$$

In diesem Ausdruck sind schon die gewünschten Umdrehungszahlen zu finden, und geordnet erhält man das folgende Endergebnis:

$$N_1 = n_{s1} \left(\frac{s_1}{a_1 + s_1} + \frac{a_1 s_2 (a_3 + s_3)}{(a_1 + s_1) [(a_2 + s_2) (a_3 + s_3) - a_2 a_3]} \right). \quad (18)$$

Zahlenbeispiel. Es sei $a_1 = 60$, $s_1 = 24$. Mit diesen Angaben folgt aus (3):

$$N_1 = n_{s1} \left(\frac{60}{24} + 1 \right) = 3,5 \cdot N_1.$$

Weiterhin sei $a_2 = 60$ und $s_2 = 24$, somit ist mit der Benützung der Formel (10):

$$N_1 = n_{s1} \frac{60 \cdot 24 + 24 (60 + 24)}{(60 + 24) (60 + 24)},$$

hieraus

$$n_{s1} = 2,04 \cdot N_1.$$

Endlich sei $a_3 = 56$ und $s_3 = 20$, und somit berechnet sich N_1 aus (18) zu

$$N_1 = n_{s1} \left(\frac{60 \cdot 24 \cdot 76}{84(84 \cdot 76 - 60 \cdot 56)} + \frac{24}{84} \right) = 0,716$$

und hieraus wird

$$n_{s1} = 1,39 \cdot N_1.$$

III. Mechanic Getriebe*

Das Wesen des Wechselgetriebes zeigt Bild 4. *A* und *B* sind die Kupplungen, *C*, *D* und *E* bedeuten die Bremsen. Mit den kleinen Buchstaben wurden die Räder bezeichnet. Auch in diesem Falle werden nicht sämtliche Über-

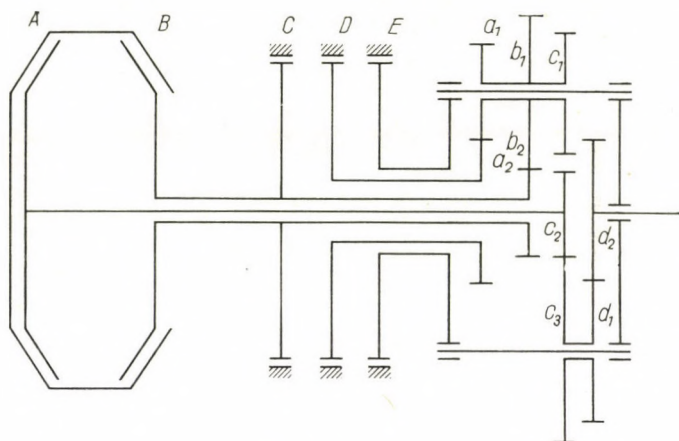


Bild 4

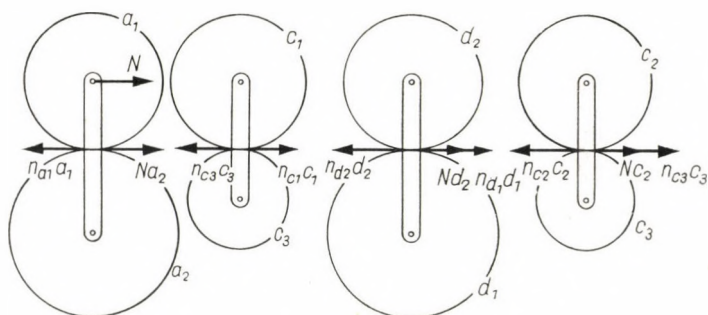


Bild 5

setzungen des Wechselgetriebes behandelt, sondern es werden die zwei wichtigsten Fälle vorgeführt. Es soll noch bemerkt werden — was im Bilde nicht dargestellt werden konnte — daß die mit c_1 bzw. mit c_3 bezeichneten Räder in Eingriff sind.

Der Fall soll vorgeführt werden, wenn Kupplung *A* und Bremse *D* eingeschaltet sind. Das hierzu gehörige Vektorbild zeigt Bild 5. In diesem Fall ist das Rad a_2 festgehalten, das Rad c_2 treibt c_3 , c_3 treibt das Rad d_1 und somit auch das Rad d_2 , welches die Ausgangswelle treibt. Es soll ein Zusammenhang

* Hersteller: Hobbs Transmission Ltd. Leamington, Spa. England.

gefunden werden zwischen der Umdrehungszahl des auf der Eingangswelle befindlichen Rades n_{c_2} und der der Ausgangswelle, welche vom Rade d_2 angetrieben wird, und deren Umdrehungszahl mit n_{d_2} bezeichnet wird. Aus dem Vektorbild liest man die folgende Ausdrücke ab:

$$n_{d_2} d_2 = N d_2 + n_{d_1} d_1 \quad \text{und} \quad n_{c_2} c_2 = N c_2 + n_{c_3} c_3, \quad (19)$$

weiterhin:

$$n_{c_1} c_1 = n_{c_3} c_3, \quad n_{a_1} a_1 = N a_2, \quad n_{d_1} = n_{c_3}, \quad n_{a_1} = n_{c_1}; \quad (20)$$

woselbst die gleiche Umdrehungszahl der auf einer gemeinsamen Welle befindlichen Räder zum Ausdruck gebracht wird.

Unter Benützung der unten (20) aufgestellten Ausdrücke erhält man die folgenden Ergebnisse:

$$n_{a_1} c_1 = n_{c_3} c_3, \quad N \frac{a_2}{a_1} \frac{c_1}{c_2} = n_{c_3} \quad (21)$$

und

$$n_{d_2} d_2 = N d_2 + N \frac{a_2 c_1}{a_1 c_3} d_1 \quad \text{und} \quad n_{d_2} = N \left(1 + \frac{a_2 c_1 d_1}{a_1 c_3 d_2} \right); \quad (22)$$

weiterhin

$$n_{c_2} c_2 = N c_2 + c_3 n_{c_3} = N c_2 + c_3 N \frac{a_2 c_1}{a_1},$$

und geordnet

$$n_{c_2} = N \left(1 + \frac{a_2 c_1}{a_1 c_2} \right). \quad (23)$$

Aus (22) und (23) soll N eliminiert werden:

$$n_{d_2} = n_{c_2} \frac{1 + \frac{a_2 c_1 d_1}{a_1 c_3 d_2}}{1 + \frac{a_2 c_1}{a_1 c_2}}, \quad (24)$$

welcher Ausdruck mit dem von der Herstellerfirma angegebenen vollständig übereinstimmt.

Zahlenbeispiel. In dem Ausdruck (24) sollen jene Zähnezahlen eingesetzt werden, welche von der Herstellerfirma angegeben wurden:

$$\frac{n_{c_2}}{n_{d_2}} = \frac{1 + \frac{37}{17} \frac{25}{19}}{1 + \frac{37}{17} \frac{25}{35} \frac{17}{37}} = \frac{1 + 2,86}{1 + 0,714} = 2,26.$$

Der nächste Fall ist dadurch charakterisiert, daß die Kupplung A und die Bremse C eingeschaltet wird. In diesem Fall sind statt der Zähnezahlen der Zahnräder a_1 und a_2 jene

von b_1 und b_2 zu benützen. Daher ist:

$$\frac{n_{c2}}{n_{d2}} = \frac{1 + \frac{b_2 c_1}{b_1 c_2}}{1 + \frac{b_2 c_1 d_1}{b_1 c_3 d_2}} = \frac{1 + \frac{19 \cdot 25}{35 \cdot 19}}{1 + \frac{19 \cdot 25 \cdot 17}{35 \cdot 35 \cdot 37}} = \frac{1,715}{1,1783} = 1,455.$$

Da wir uns hier mit Planetenrädern befassen und nicht mit Wechselgetrieben, so werden die Untersuchungen über die weiteren Übersetzungen nicht in Betracht gezogen.

IV. Zahnradfabrik Friedrichshafen

Die Anordnung der Wechselgetriebe dieser Firma ist im Bilde 6 angegeben, eine Lösung, welche sehr verbreitet ist. In diesem Falle benützen wir ebenfalls die Bezeichnungen des Herstellers, und die von ihm angegebene Formel soll unter Benützung der hier angegebenen Methode abgeleitet werden.

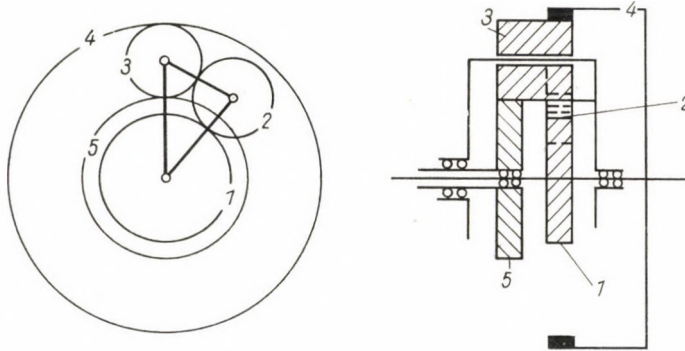


Bild 6

Auf die möglichen Schaltungen des Wechselgetriebes wird hier nicht eingegangen.

Zur Ableitung der Formel ist der konstruktive Teil in zwei Teile zerlegt worden, welche im Bilde 7 und 8 sichtbar sind.

Im Falle von Bild 7 sind die Gleichungen die folgenden:

$$n_3 z_3 + N z_4 = n_4 z_4 \quad \text{und} \quad N z_5 = n_3 z_3 + n_5 z_5. \quad (25)$$

Eliminiert man die gleichen Glieder, so erhält man:

$$n_4 z_4 + n_5 z_5 = N(z_4 + z_5). \quad (26)$$

Im Falle von Bild 7 müssen die Winkelgeschwindigkeiten der zwei Planetenräder — welche zwar gleich sind — auch in Betracht gezogen werden. Die Gleichungen sind diesmal die folgenden:

$$n_3 z_3 + N z_4 = n_4 z_4, \quad n_2 z_2 + N z_1 = n_1 z_1, \quad n_3 z_3 = n_2 z_2. \quad (27)$$

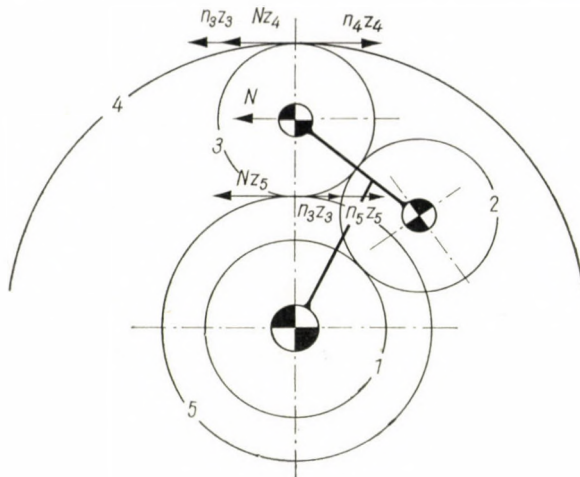


Bild 7

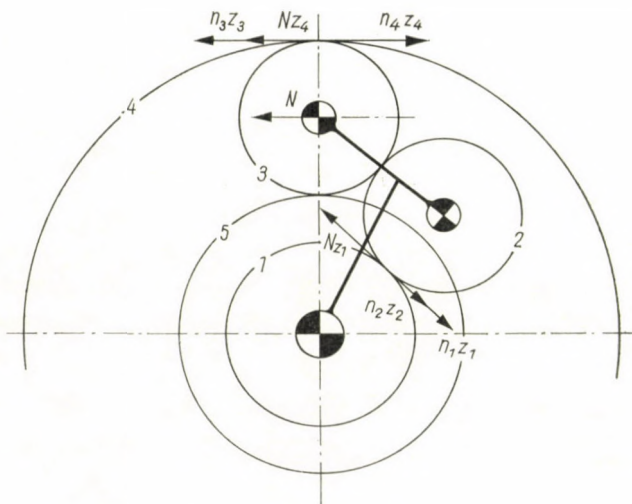


Bild 8

Eliminiert man ebenfalls die gleichen Glieder:

$$n_2 z_4 - n_1 z_1 = N(z_4 - z_1). \tag{28}$$

Aus den Ausdrücken (26) und (28), und zugleich eliminierend N , erhält man:

$$n_5 \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4} \right) = n_4 \left(\frac{1}{z_5} + \frac{1}{z_1} \right) - n_1 \left(\frac{1}{z_5} + \frac{1}{z_4} \right). \tag{29}$$

In jedem Falle muß zwischen der Eingangs-Umdrehungszahl n_1 und der des Ausgangs n_4 ein Zusammenhang gefunden werden.

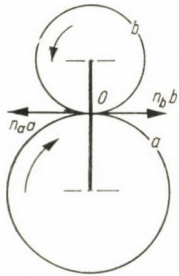


Bild I

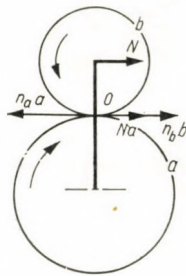


Bild II

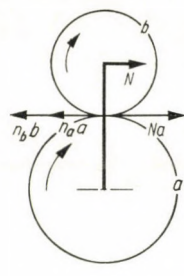


Bild III

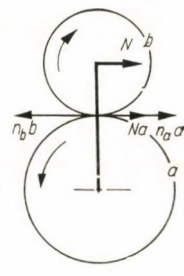


Bild IV

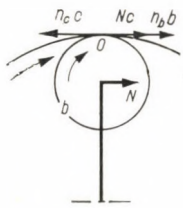


Bild V

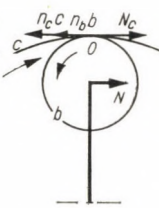


Bild VI

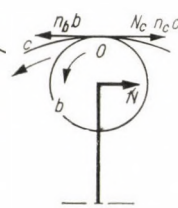


Bild VII

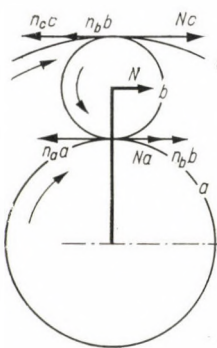


Bild VIII

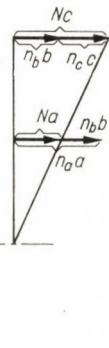


Bild IX

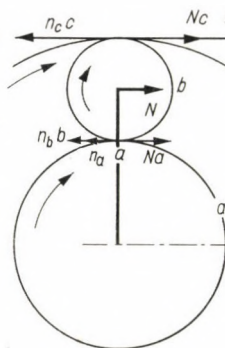


Bild X

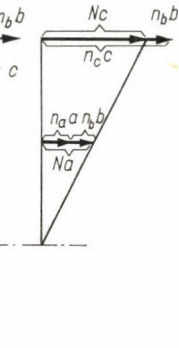


Bild XI

Ein solcher Sonderfall entsteht, wenn $n_5 = 0$ ist d. h., dieses Rad wird gebremst. Die Gleichung für diesen Fall lautet:

$$\frac{z_5 + z_1}{z_4 + z_5} = \frac{n_1 z_1}{n_4 z_4} \quad (30)$$

Geordnet, und zugleich benützend die Angaben des Herstellers, erhält man:

$$\frac{n_1}{n_4} = \frac{1 + \frac{z_5}{z_1}}{1 + \frac{z_5}{z_4}} = \frac{1 + \frac{32}{25}}{1 + \frac{32}{64}} = 1,52,$$

und das Ergebnis stimmt mit dem vom Hersteller angegebenen überein.

ANHANG

Mit Hilfe der Bilder I—XI sollen die Grundlagen der hier angegebenen Methode — auf Wunsch — angegeben werden.

Bild I gibt die Anordnung der Geschwindigkeitsvektoren an, woselbst im Berührungspunkt der Räder-Punkt 0 — die resultierende Geschwindigkeit gleich 0 ist.

1. *Die Umdrehungen des Armes und des Sonnenrades sind gleich*

Im Bild II wird die Umdrehungszahl des Armes N eingeführt:

$$(n_a - N)a = n_b b.$$

Ist $n_a = N$, so dreht sich das Rad um Ihre eigene Welle nicht.

Wächst aber nach Bild III N weiter, so wird die Drehrichtung des Rades b umgekehrt und $n_b b + n_a a = Na$.

2. *Die Drehrichtungen des Armes und des Sonnenrades sind entgegengesetzt*

Im Falle Bild IV ist $n_b b = Na + n_a a$. Der vierte Fall, wenn die beiden Räder die gleiche Richtung haben, gibt für die Gleichung nicht Neues.

Für das Hohlrad sind die Fälle vorgeführt, welche in den Bildern II, III, IV bereits behandelt wurden.

Bild VIII gibt Dreirad-Getriebe an, woselbst die Fälle II und VI benützt worden sind.

Bild IX gibt hiezu ein maßstäbliches Vektorbild.

Bild X Dreirad-Getriebe, woselbst die Fälle III und V benützt worden sind.

Bild XI gibt hiezu ein maßstäbliches Vektorbild.

A NEW METHOD FOR CALCULATIONS RELATED TO PLANETARY GEARS

A. BALOGH

SUMMARY

Two methods are used for calculating the speed relations of planetary gears. One method is that of SWAMP, using a very difficult method of tabulated data, the other one is the graphical method of KUTZBACH, which is ponderous and inaccurate, because important values of r. p. m. must be read off on the plan. According to literature newer methods have been tried, mainly recently, but these did not meet with general acceptance. In the paper the speeds are demonstrated by vectors and their advantages are shown by several difficult examples. The method of the author is known since about fifteen years and because of its simplicity it is widespread and well used, but without reference to the author's initiative. The author wishes to correct this state of affairs.

UN NOUVEAU PROCÉDÉ DE CALCUL RELATIF AUX ENGRENAGES PLANÉTAIRES

A. BALOGH

RÉSUMÉ

Pour le calcul des rapports de vitesses des engrenages planétaires, on utilise habituellement deux méthodes. Celle de SWAMP utilise des tables numériques d'un emploi fort difficile, tandis que l'autre, le procédé graphique de KUTZBACH est également difficile et peu précis, des nombres de tours exacts devant être relevés sur les dessins. On a également tenté, surtout ces derniers temps, d'introduire quelques nouvelles méthodes dont l'emploi reste peu répandu. Pour l'étude des rapports de vitesses, l'auteur utilise des vecteurs démonstratifs, dont les avantages sont présentés sur quelques exemples difficiles. Cette méthode connue depuis une quinzaine d'années est fort répandue et utilisée en raison de sa simplicité, mais le rôle d'initiateur de l'auteur n'étant généralement pas cité, l'article entend réparer cet oubli.

РАСЧЕТЫ ПЛАНЕТАРНЫХ КОЛЕС НОВЫМ МЕТОДОМ

А. БАЛОГ

РЕЗЮМЕ

В области расчета режима скорости планетарных колес нашли широкое применение два метода. Одним из них является метод *Свамп*, в случае которого применяется очень трудный табличный метод, а вторым — графический метод *Кутцбаха*, который является затруднительным и неточным, т. к. с графика необходимо считать точные данные числа оборотов. В литературе, особенно в последнее время, были сделаны попытки введения новых методов, однако ни один из них не мог укорениться. В моей работе для анализа скоростных режимов, используя наглядные векторы и преимущества их демонстрируются мною в приложенной работе рядом трудных примеров. Предлагаемый мною метод известен почти полтора десятка лет и с тех пор вследствие его простоты нашел широкое распространение и применяется на практике, однако не ссылаясь на меня, как инициатора. Это положение желаю я изменить.

VERSCHIEDENE METHODEN FÜR DIE ANALYTISCHE UNTERSUCHUNG DER EINFACHSTEN PLANETEN- RÄDERGETRIEBE

Z. TERPLÁN

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR MASCHINENELEMENTE AN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE,
MISKOLC

[Eingegangen am 28. Mai 1963]

In der Literatur, die sich mit Planetenrädergetrieben beschäftigt, ist selten eine Studie zu finden, die auf die Identität der verschiedenen Untersuchungsmethoden hinweist. In der vorliegenden Arbeit unternahm der Verfasser die Aufgabe, mit Hilfe einer einheitlichen Behandlung die analytischen Untersuchungsverfahren darzustellen, die sich auf das gemeinsame Bauelement der komplizierteren Planetengetriebe, auf das einfachste epizyklische Getriebe beziehen. Die Klassifikation nur kurz berührend werden die kinematischen Untersuchungen nach KUTZBACH, WILLIS, SWAMP und POPPINGA behandelt; es wird ferner auf die Untersuchungsmethode des Ungarn BALOGH eingegangen. Im zweiten Teil der Arbeit findet man die Besprechung der Wirkungsgraduntersuchungen von POPPINGA, STRAUCH und KOSCHEWNIKOW. Es werden ferner zusammenfassende Diagramme für Wirkungsgraduntersuchungen gezeigt, wobei Verfasser auch auf eigene Messungen hinweisen kann.

Welches komplizierte Planetengetriebe auch untersucht wird, z. B. der Doppelantrieb, das Differentialgetriebe, oder das Ausgleichgetriebe (zusammenfassend mit der gemeinsamen Bezeichnung epizyklisches Getriebe), kann es in die in dem Bild 1 dargestellten Einheiten zerlegt werden. Diese Einheiten unterscheiden sich dadurch voneinander, daß das Planetenrad Nr. 3 mit einer äußeren oder inneren Verzahnung kämmt oder mit beiden Arten, eventuell ist das Planetenrad gleichzeitig Gruppenrad, oder zwei Zahnräder mit verschiedenen Zähnezahlen wirken zusammen als Planetenräder.

Da die innere Verzahnung mit mehr Problemen verbunden ist als die äußere Verzahnung, kann im Hinblick auf das Bild 1 schon durch bloße Betrachtung die *einfachste Form* (Bild 1a) gefunden werden, bei der nur eine Zahnradverbindung besteht und auch sie ist von äußerer Verzahnung und besteht aus den wenigsten Gliedern, nämlich aus dem *Sonnenrad* (dem zentralen Rad), aus dem Planetenrad (dem epizyklischen Rad) und dem *Kurbelarm* (Spannarm, Steg).

Unter analytischer Untersuchung verstehen wir im Falle dieser Mechanismen die Untersuchungen des Freiheitsgrades, der Klassifikation, der kinematischen- und der dynamischen Verhältnisse, der Leistungsvorgänge, ferner der Wirkungsgrade.

Die in Bild 1 dargestellten epizyklischen Getriebe besitzen alle *zwei Freiheitsgrade* (unter Weglassung der eingehenden Untersuchung wird nur auf das Schrifttum [1, 2] verwiesen); sie können daher als Ausgleichgetriebe, als Doppelantrieb betrieben werden, ferner als Planetengetriebe, wenn das

Sonnenrad stillgelegt wird, außerdem als einfaches Zahnradgetriebe, wenn man den Kurbelarm festhält.

Vom Standpunkt der Klassifikation können zwar die in Bild 1 gezeigten epizyklischen Antriebe in zwei verschiedene Klassen geteilt werden [1—3], doch erschwert dieser Umstand im Falle der epizyklischen Getriebe keineswegs die analytische Untersuchung, wie das bei der Analyse der ebenen Gelenkmechanismen der Fall ist [1, 2].

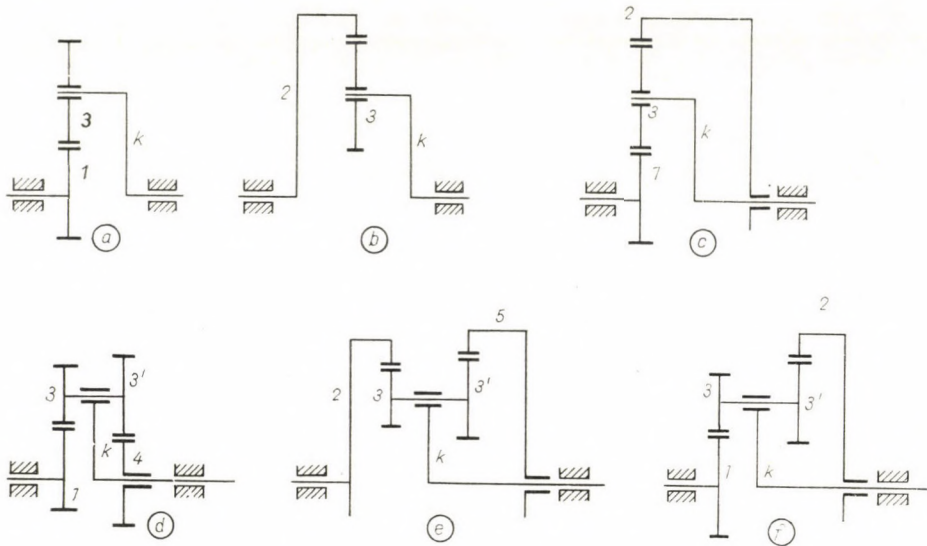


Bild 1. Skizzen von Einheiten der epizyklischen Getriebe

a) Eingriff von nur Außenverzahnung; b) Eingriff von nur Innenverzahnung; c) doppelter Zahneingriff bei dem Planetenrad; d) Planeten-Gruppenrad, beide Eingriffe mit Außenverzahnung; e) Planeten-Gruppenrad, nur mit Innenverzahnung; f) Planeten-Gruppenrad, Eingriff mit äußerer und innerer Verzahnung

In den weiteren Ausführungen werden die kennzeichnendsten Untersuchungsmethoden, die im internationalen Schrifttum zu finden sind, bei den einfachsten, im Bild 1 dargestellten epizyklischen Getrieben angewandt. Es erscheint angebracht, wenn gleich darauf hingewiesen wird, daß dieser Antrieb, bei unveränderten Abmessungen, auf insgesamt 12 Arten betrieben werden kann, in Abhängigkeit davon, welches Glied (oder welche Glieder) treibend und welches Glied oder Glieder getrieben bzw. als ruhend verwendet werden (Tabelle I).

Wenn man von den Formeln der Tabelle I zuerst absieht und die Abmessungen der beiden Zahnräder als unverändert annimmt, dann kann der Bereich der erwähnten 12 Getriebearten noch durch eine weitere Bedingung eingengt werden: daß nämlich eine beschleunigende Übersetzung selten vorkommt, und es wäre schwerfällig, bei der praktischen Ausführung Planetenräder als

treibendes Glied zu verwenden. Dadurch kann bereits ausgesagt werden, daß in der Praxis eher die Reihen 1, 3, 7, 10 und 11 vorkommen (mit der Zähnezahlsbezeichnung $z_3 > z_1$).

Die meisten Artikel oder Bücher der Fachliteratur untersuchen getrennt die Geschwindigkeits- bzw. Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse (mit dem Sammelnamen die *kinematischen Verhältnisse*). Das ist unrichtig, denn nur im

Tabelle I

Art	Glieder mit dem Stand r verbunden	Treibend	Getrieben	Formel	Nr.
Zahnradantrieb	k	1	3	$i_{31} = u_{13}$	1
		3	1	$i_{13} = 1/u_{13}$	2
Planetengetriebe	1	k	3	$i_{3k} = 1 - u_{13}$	3
		3	k	$i_{k3} = 1/(1 - u_{13})$	4
	3	k	1	$i_{1k} = 1 - 1/u_{23}$	5
		1	k	$i_{k1} = 1/(1 - 1/u_{13})$	6
Doppelantrieb	—	1 und k	3	$\omega_3 = (1 - u_{13})\omega_k + u_{13}\omega_1$	7
		1 und 3	k	$\omega_k = (\omega_3 - u_{13}\omega_1)/(1 - u_{13})$	8
		3 und k	1	$\omega_1 = [\omega_3 - (1 - u_{13})\omega_k]/u_{13}$	9
Differential- oder Ausgleichgetriebe	—	1	k und 3	Identisch mit 9	10
		k	1 und 3	Identisch mit 8	11
		3	1 und k	Identisch mit 7	12

Zusammenhang mit der dynamischen Untersuchung kann man mit Bestimmtheit über das eine oder andere Glied aussagen, daß es treibend oder angetrieben ist.

Aus der Reihe der Untersuchungsmethoden ist als übersichtlichstes Verfahren das in dem deutschen Schrifttum angegebene konstruktive Verfahren nach KUTZBACH [4] anzusprechen. Das im Bild 2 erneut dargestellte einfachste epizyklische Getriebe hat zwei Freiheitsgrade, d. h. zwei Gliedern kann man eine Winkelgeschwindigkeit erteilen (Tabelle I, Reihe 7). Wenn jedoch der Gleichgewichtszustand des Kräftespiels bzw. der Momente berücksichtigt wird und man betrachtet den gleichgerichteten Kraft-Geschwindigkeitsausdruck als Kennzeichen der treibenden Anordnung, das Produkt von entgegengesetztem Sinn dagegen als getriebenen Teil, dann sieht man sofort,

daß ω_1 von entgegengesetztem Sinn sein muß als ω_k , wobei ω_3 mit ω_k nur dergleichen Sinn haben kann.

Wenn hierauf nicht geachtet und nur eine kinematische Untersuchung durchgeführt wird, würde man bei der Auftragung des Geschwindigkeitsplanes zu einer Vorstellung mit mehreren Freiheitsgraden kommen, wobei derartige Verhältnisse in Wirklichkeit jedoch nicht auftreten können. Die Betriebsart, das kinematische und dynamische Bild stehen also in engem Zusammenhang miteinander.

Beim Aufzeichnen der Kräfte genügt die Angabe der Umfangskräfte; die in radialer Richtung wirkenden Komponenten belasten lediglich die Lager.

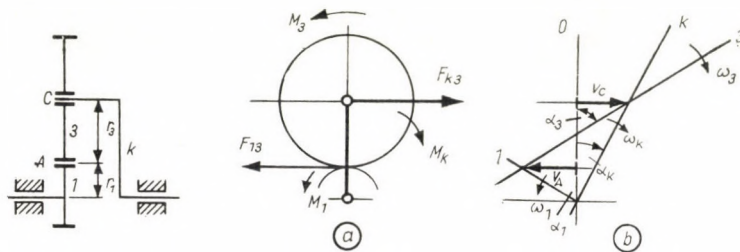


Bild 2. Skizze des einfachsten epizyklischen Getriebes

a) auf das Planetenrad wirkende Kräfte: $F_{k3} = -F_{13}$ und die Momente: M_1 und M_k Antriebsmomente, ferner M_3 Lastmoment; b) Geschwindigkeitsplan: v_A Umfangsgeschwindigkeit des Zahneingriffes, v_C Umfangsgeschwindigkeit am Zapfenmittelpunkt des Planetenrades

Das Bild 2 löst daher das Problem der Reihe 7 in der Tabelle I. Der Kutzbachsche, sog. *Geschwindigkeitsplan* (Bild 2b) kann schnell aufgetragen werden. Die Winkelgeschwindigkeit des Planetenrades kann man in der Weise ermitteln, daß man die bekannten Umfangsgeschwindigkeiten (da es sich um treibende Glieder handelt) der beiden kämmenden Punkte des Planetenrades aufträgt. Die Gerade, die die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren verbindet, ist einerseits der geometrische Ort der Umfangsgeschwindigkeiten, die zu jedem beliebigen Punkt des Planetenrades gehören, andererseits ist die Tangente des Neigungswinkels α_3 von der Geraden 3 gleich der Winkelgeschwindigkeit ($\omega_3 = \tan \alpha_3$). Noch einfacher ist zu überblicken, daß $\omega_1 = \tan \alpha_1$ und $\omega_k = \tan \alpha_k$ ist.

Der Geschwindigkeitsplan eignet sich aber auch dazu, daß man mit seiner Hilfe die zwischen den Winkelgeschwindigkeiten und der geometrischen Übersetzung bestehenden Zusammenhänge ableitet. Die folgenden Ausdrücke können nämlich angeschrieben werden:

$$v_A = -r_1 \omega_1;$$

$$v_C = (r_1 + r_3) \omega_k,$$

d. h.

$$\frac{v_A}{v_C} = - \frac{r_1 \omega_1}{(r_1 + r_3) \omega_k}, \quad (1)$$

ferner

$$v_A + v_C = r_3 \omega_3, \quad (2)$$

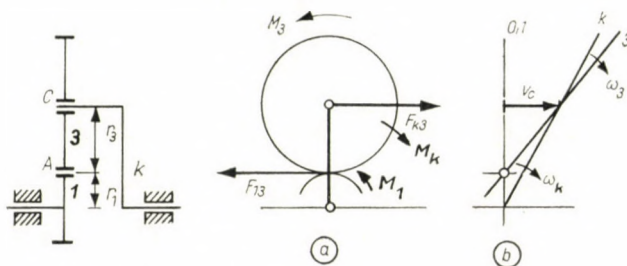


Bild 3. Skizze des einfachsten Planetengetriebes
a) Kräfteplan; b) Geschwindigkeitsplan

d. h.

$$\frac{v_A}{v_C} + 1 = - \frac{r_1 \omega_1}{(r_1 + r_3) \omega_k} + 1 = \frac{r_3 \omega_3}{(r_1 + r_3) \omega_k}, \quad (3)$$

woraus

$$r_3 \omega_3 = (r_1 + r_3) \omega_k - r_1 \omega_1 \quad (4)$$

und

$$\omega_3 = \frac{r_1 + r_3}{r_3} \omega_k - \frac{r_1}{r_3} \omega_1, \quad (5)$$

oder nach Einführung der geometrischen Übersetzung $u_{13} = -r_1/r_3$ (die wegen der Vorzeichenänderung des Eingriffes der Außenverzahnung negativ ausfällt):

$$\omega_3 = (1 - u_{13}) \omega_k + u_{13} \omega_1. \quad (6)$$

Als Planetengetriebe verwendet ($\omega_1 = 0$) erhält man die Reihe 3 der Tabelle I, d. h.

$$\omega_3 = (1 - u_{13}) \omega_k, \quad (7)$$

wobei dieses ω_3 schon sicherlich einen anderen Wert besitzt wie das in der Gleichung (6). Dieselbe Beziehung erhält man, wenn man die Skizze nach Bild 3 anfertigt. In diesem Fall wird nämlich

$$v_C = (r_1 + r_3) \omega_k = r_3 \omega_3, \quad (8)$$

woraus

$$\omega_3 = \frac{r_1 + r_3}{r_3} \omega_k = (1 - u_{13}) \omega_k, \quad (9)$$

d. h.

$$i_{3k} = \frac{\omega_3}{\omega_k} = 1 - u_{13}, \quad (10)$$

man erhält also denselben Wert, wie in (7) und gleichzeitig ist es gelungen, eine eindeutige Beziehung zwischen der kinematischen Übersetzung i_{3k} und der geometrischen Übersetzung u_{13} zu schaffen.

Nach der Kutzbachschen Methode wurden die Formeln der Tabelle I errechnet. Die Formeln der letzten drei Reihen wurden nicht angeführt, da sie aus den Reihen 7—9 abzulesen sind. Z. B. erhält man die Reihe 12 aus Reihe 7 dadurch, daß man das Spiegelbild der Kräfte aus dem Bild 2a nimmt, wobei dann aus dem Planetenrad Nr. 3 ein treibendes Glied wird, aus den Rädern mit der Bezeichnung 1 und k werden dagegen getriebene Glieder. Gleichzeitig bleibt der Geschwindigkeitsplan unverändert, die Formel aus der 7. Reihe behält auch ihre Gültigkeit für die Reihe 12.

Die Kutzbachsche Methode wird in vielen Fachbüchern und Aufsätzen verwendet. So z. B. auch in dem Buch von RUDJENKO [5] werden die Formeln nach dieser Methode entwickelt, lediglich mit anderen Bezeichnungen. In diesem Werk würde man also die Formel der Reihe 3 in der Tabelle I in folgender Form finden:

$$i_{k3}^1 = \frac{\omega_k}{\omega_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_3} = 1 + \frac{r_1}{r_3} = 1 - \left(-\frac{r_1}{r_3} \right) = 1 - i_{13}^k. \quad (11)$$

Obiger Ausdruck stimmt vollkommen mit den Gleichungen (7) oder (10) überein. Richtiger ist jedoch anstelle der Verwendung von i_{13}^k die Einführung der geometrischen Übersetzung u , damit der Leser in der Lage sei, die kinematische Übersetzung sofort von der geometrischen unterscheiden zu können.

Die Anwendung der Kutzbachschen Methode findet man im ungarischen Fachschrifttum [2] und [6].

Nach dem Verfahren von WILLIS gilt für das im Bild 2 dargestellte epizyklische Getriebe

$$i_0 = \frac{\omega_1 - \omega_k}{\omega_3 - \omega_k}, \quad (12)$$

die sog. Willis'sche Grundformel, die das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zum Kurbelarm zum Ausdruck bringt; aus dieser Grundformel kann die kinematische Übersetzung eines beliebigen Getriebetyps abgeleitet werden.

a) In der Reihe 1 der Tabelle I, wenn also $\omega_k = 0$ ist, ergibt sich:

$$i_0 = \frac{\omega_2}{\omega_3} = i_{13} = \frac{1}{i_{31}} \quad \text{d. h.} \quad i_{31} = \frac{1}{i_0}; \quad (13)$$

b) in der Reihe 3 der Tabelle I, wenn $\omega_1 = 0$ ist, wird:

$$i_0 = \frac{-\omega_k}{\omega_3 - \omega_k}, \quad \text{d. h. } i_0 \omega_3 - i_0 \omega_k = -\omega_k, \quad (14)$$

woraus

$$i_{3k} = \frac{\omega_3}{\omega_k} = \frac{i_0 - 1}{i_0} = 1 - \frac{1}{i_0}; \quad (15)$$

c) in der Reihe 7 der Tabelle I:

$$i_0 = \frac{\omega_1 - \omega_k}{\omega_3 - \omega_k} \quad \text{d. h. } i_0 \omega_3 - i_0 \omega_k = \omega_1 - \omega_k, \quad (16)$$

woraus

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 - (1 - i_0)\omega_k}{i_0} = \left(1 - \frac{1}{i_0}\right)\omega_k + \frac{1}{i_0}\omega_1. \quad (17)$$

Wenn man diese Formeln der Reihe nach mit den Formeln aus den entsprechenden Reihen der Tabelle I vergleicht, dann sieht man, daß die sog. Grundformel nach WILLIS nichts anderes darstellt als den reziproken Wert der geometrischen Übersetzung u_{13} , d. h.

$$i_0 = \frac{1}{u_{13}}. \quad (18)$$

Die Methode nach SWAMP [4] faßt die Teile der Bewegungen zusammen. Sie setzt also voraus, daß der Geschwindigkeitsplan des Bildes 2a durch die Superposition von zwei kennzeichnenden Bewegungen zustandekam, und zwar aus der *wellenkupplungartigen* Bewegung des epizyklischen Getriebes (wobei jedes bewegliche Glied eine Drehung mit ω_k ausführt), ferner aus der Bewegung eines einfachen Zahnradgetriebes (mit einem bestimmten Kurbelarm, d. h. das System erhält eine Winkelgeschwindigkeit von $-\omega_k$). Zur Erläuterung dienen nachfolgende Beispiele.

Für die 3. Reihe der Tabelle I kann die Tabelle II angefertigt werden.

Tabelle II

	ω_1/ω_k	ω_3/ω_k	ω_k/ω_k	Art der Bewegung
1. Bewegung	+1	+1	+1	Wellenkupplungartige vollkommene Umdrehung
2. Bewegung	-1	$+\frac{r_1}{r_3}$	0	Bewegung eines einfachen Zahnradgetriebes
Zusammenfassend	0	$1 + \frac{r_1}{r_3}$	+1	

Das Ergebnis ist also

$$i_{3k} = \frac{\omega_3}{\omega_k} = 1 + \frac{r_1}{r_3} = 1 - u_{13}. \quad (19)$$

Für den Fall der Reihe 7 aus der Tabelle I kann die folgende Tabelle III aufgestellt werden:

Tabelle III

	ω_1	ω_3	ω_k	Art der Bewegung
1. Bewegung. . . .	$+\omega_k$	$+\omega_k$	$+\omega_k$	Wellenkupplungartige vollkommene Umdrehung
2. Bewegung. . . .	$\omega_1 - \omega_k$	$-(\omega_1 - \omega_k) \frac{r_1}{r_3}$	0	Bewegung eines einfachen Zahnradgetriebes
Zusammenfassend	$+\omega_1$	$+\omega_k + (\omega_k - \omega_1) \frac{r_1}{r_3}$	$+\omega_k$	

Neben den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_k ist also

$$\omega_3 = \omega_k + (\omega_k - \omega_1) \frac{r_1}{r_3} = (1 - u_{13}) \omega_k + u_{13} \omega_1, \quad (20)$$

und dieser Wert stimmt wieder mit den Gleichungen (6) und (17) überein.

Auf die Anwendung der Swamp'schen Methode in Ungarn wird im Schrifttum [7] hingewiesen.

Mit einer anderen Methode arbeitet POPPINGA [8]. Der Geschwindigkeitsplan des einfachsten epizyklischen Getriebes kann nach dem Bild 4 ergänzt werden.

Wenn die Geraden k und 3 des Bildes 4a verlängert werden, dann stimmt die mit I bezeichnete sog. relative Umfangsgeschwindigkeit des Planetenrades im Punkte A im absoluten Wert gerade mit der mit II gekennzeichneten relativen Umfangsgeschwindigkeit des Punktes B überein. Von dieser Gleichheit ausgehend kann folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$I = -r_1 \omega_1 + r_1 \omega_k = r_3 \omega_3 - r_3 \omega_k = II, \quad (19a)$$

woraus dann, auch nach dieser Methode:

$$\omega_3 = \frac{r_1 + r_3}{r_3} \omega_k - \frac{r_1}{r_3} \omega_1 = (1 - u_{13}) \omega_k + u_{13} \omega_1. \quad (20a)$$

Die 3. Reihe der Tabelle I ist einfacher. In diesem Fall wird nach dem Bild 5

$$I = r_1 \omega_k = r_3 \omega_3 - r_3 \omega_k = II, \quad (21)$$

d. h.

$$i_{3k} = \frac{\omega_3}{\omega_k} = \frac{r_1 + r_3}{r_3} = 1 - u_{13}. \quad (22)$$

Die Anwendung des Verfahrens von POPPINGA im ungarischen Schrifttum wird unter [9] angegeben.

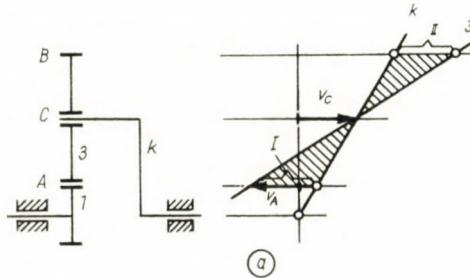


Bild 4. Geschwindigkeitsplan nach POPPINGA für das einfachste epizyklische Getriebe

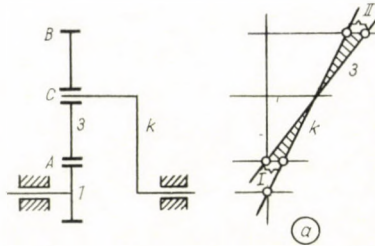


Bild 5. Geschwindigkeitsplan nach POPPINGA für das einfachste Planetengetriebe

Ein neues Verfahren wurde in Ungarn von BALOGH in seinen Aufsätzen eingeführt [10, 11], das von diesem Verfasser hauptsächlich bei komplizierteren Planetengetrieben mit Erfolg angewendet wird. Seine Darstellung kann jedoch in einfachen Fällen Anlaß zu Mißverständnissen geben. Der Grundgedanke dieses Verfahrens wurde daher aus der Arbeit von SZÓKE [12] übernommen und mit den bereits hier besprochenen Methoden in Einklang gebracht.

Das Bild 6 zeigt wieder das einfachste epizyklische Getriebe in Vorderansicht. Die augenblickliche Geschwindigkeit des Planetenrades im Punkte P , im ersten Augenblick des Abrollens, ergibt sich im Bild aus der Auftragung. Der Momentanpol der resultierenden Geschwindigkeit liegt im Punkt A ; die Geschwindigkeit in diesem Punkt ist also Null, in dieser Weise besteht im Punkt A ein Geschwindigkeitsgleichgewicht.

$$-r_1 \omega_1 = r_3 \omega_3. \quad (23)$$

Es muß beachtet werden, daß in bezug auf die Winkelgeschwindigkeit der Uhrzeigersinn als positiv angesehen wurde. Unter Beachtung dieses Prinzips kann wieder der Fall der Reihe 7 aus der Tabelle I aufgebaut werden. Aus dem

Gleichgewicht der Umfangsgeschwindigkeiten im Punkt A , in Bild 7c, folgt (das negative Vorzeichen entsteht wegen des Sinnes von $\omega_1 - \omega_k$, entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung), daß

$$-r_1(\omega_1 - \omega_k) = r_3(\omega_3 - \omega_k), \quad (24)$$

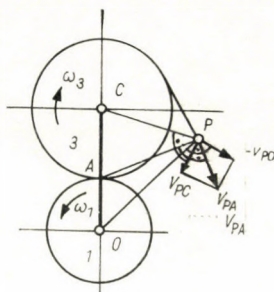


Bild 6. Geschwindigkeitszustand eines beliebigen Punktes P am Planetenrad

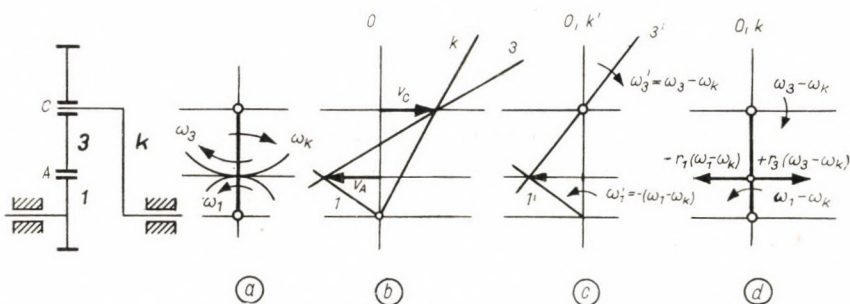


Bild 7. Das einfachste epizyklische Getriebe

a) Winkelgeschwindigkeiten; b) und c) Geschwindigkeitspläne; d) Umfangsgeschwindigkeit im Punkte A nach BALOGH

woraus

$$-r_1 \omega_1 + r_1 \omega_k = r_3 \omega_3 - r_3 \omega_k, \quad (25)$$

d. h.

$$\omega_3 = \frac{r_1 + r_3}{r_3} \omega_k - \frac{r_1}{r_3} \omega_1 = (1 - u_{13})\omega_k + u_{13} \omega_1. \quad (26)$$

In einem einfacheren Fall, der Reihe 3 der Tabelle I entsprechend, nach dem Bild 8, ist

$$-(-r_1 \omega_k) = r_3(\omega_3 - \omega_k), \quad (27)$$

d. h.

$$i_{3k} = \frac{\omega_3}{\omega_k} = \frac{r_1 + r_3}{r_3} = 1 - u_{12}. \quad (28)$$

Man erhält also erneut dasselbe Ergebnis.

Nach den kinematischen und dynamischen Untersuchungen können die Leistungen für jede beliebige Lage errechnet werden. In dieser Studie wird jedoch darauf hingewiesen, daß die zugeführte Leistung innerhalb des epizyklischen Getriebes in die Wellenkupplung- und in die Zahnradleistung zerfällt. Diese Unterscheidung ist wegen der Zahnraddimensionierung, ferner wegen der Wirkungsgraduntersuchung von Bedeutung.

Anstelle der Durchführung einer eingehenden Untersuchung über den *Leistungsverlauf* wird auf eine andere Arbeit verwiesen [13] und dafür die verschiedenen Verfahren der *Wirkungsgrad-Untersuchung* zusammengefaßt.

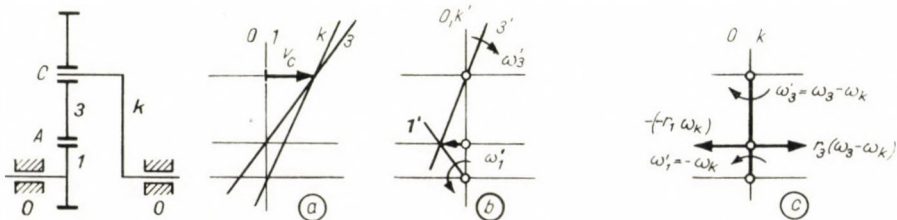


Bild 8. Das einfachste Planetengetriebe

a) und b) Geschwindigkeitspläne; c) Umfangsgeschwindigkeiten am Punkte A nach BALOGH

POPPINGA führte zwar in seinem Buch [8] für den einfachsten Fall den Wirkungsgrad nicht ein, sein Verfahren kann jedoch auf jedes beliebige epizyklische Getriebe ausgedehnt werden. An dieser Stelle soll die Untersuchung jedoch auf das Planetengetriebe beschränkt bleiben.

Wenn $\omega_1 = 0$ ist, dann bestehen folgende Beziehungen

$$\eta_b = \frac{P_h}{P_b}; \quad P_v = P_b - P_h = P_b(1 - \eta_b) = F_{k3}(r_1 + r_3)\omega_k(1 - \eta_b), \quad (29)$$

wobei η_b den gesuchten Wirkungsgrad des Planetengetriebes, P_h die Nutzleistung, P_b die zugeführte Leistung und P_v den Leistungsverlust bedeuten. Beim Anschreiben der Gleichungen wurde vorausgesetzt, daß die Leistung vom Kurbelarm ausgehend in Richtung des Planetenrades schreitet.

Wenn man in diesem Planetengetriebe den Arm ($\omega_k = 0$) festlegt, dann arbeitet das Getriebe in der Art eines einfachen Zahnradantriebes, bei dem ($\omega_1' = |-\omega_k|$) folgendes gilt:

$$\eta_f = \frac{P_f}{P_f + P_v}; \quad P_v = P_f \frac{1 - \eta_f}{\eta_f} = F_{13} r_1 \omega_k \frac{1 - \eta_f}{\eta_f}. \quad (30)$$

Hierbei ist P_f die Nutzleistung des Zahnradgetriebes, P_v dieselbe Verlustleistung, die in (29) vorkam. Im Rahmen dieser Planetengetriebe-Untersuchungen sieht man nämlich von den Lagerverlusten ab und man rechnet lediglich mit dem Reibungsverlust des Zahneingriffes. Für den Leistungsverlust des

Zahnrad es ist jedoch gleichgültig, wie sich kinematisch die Bewegung der zwei Zahnräder zueinander verhält.

In der Beziehung nach Gl. (30) kommt übrigens die *Zahnradleistung* $P_f = F_{13} r_1 \omega_k$ vor, die man meistens auf die zugeführte Leistung $P_b = F_{k3} (r_1 + r_3) \omega_k$ bezogen auszudrücken pflegt:

$$\frac{P_f}{P_b} = \frac{F_{13} r_1 \omega_k}{F_{k3} (r_1 + r_3) \omega_k} = \frac{r_1}{r_1 + r_3} = \frac{-u_{13}}{1 - u_{13}} = \frac{u_{13}}{u_{13} - 1}. \quad (31)$$

Nach Zusammenziehung der Gleichungen (29)–(31) erhält man

$$1 - \eta_b = \frac{r_1}{r_1 + r_3} \frac{1 - \eta_f}{\eta_f} = \frac{-u_{13}}{1 - u_{13}} \frac{1 - \eta_f}{\eta_f}, \quad (32)$$

woraus dann

$$\eta_b = 1 + \frac{1 - \eta_f}{\eta_f} \frac{u_{13}}{1 - u_{13}}. \quad (33)$$

In der ungarischen Fachliteratur findet man, daß Vörös [9] den Wirkungsgrad des Planetengetriebes auf dem Wege der gesonderten Berechnung des Leistungsverlustes ableitete.

Im Buch von STRAUCH [14] findet man eine andere Art der Berechnung; auch wurde von ihm für den einfachsten Fall eine Wirkungsgradermittlung gegeben.

Wenn $\omega_k = 0$, dann ist

$$\eta_f = \frac{P_f}{P_f + P_v} = \frac{1}{1 + (P_v/P_f)}; \quad \eta_f + \eta_f \frac{P_v}{P_f} = 1; \quad \frac{P_v}{P_f} = \frac{1 - \eta_f}{\eta_f}. \quad (34)$$

Wenn $\omega_1 = 0$, dann wird

$$\eta_b = \frac{P_h}{P_f} = \frac{P_h}{P_h + P_v} = \frac{1}{1 + (P_v/P_h)}, \quad (35)$$

woraus

$$\frac{1}{\eta_b} = 1 + \frac{P_v}{P_h} = 1 + \frac{P_v}{P_f} \frac{P_f}{P_h} = 1 + \frac{P_v}{P_f} \frac{P_f}{P_b \eta_b}, \quad (36)$$

d. h. unter Berücksichtigung der Gl. (31)

$$\eta_b = 1 - \frac{P_v}{P_f} \frac{P_f}{P_b} = 1 + \frac{1 - \eta_f}{\eta_f} \frac{u_{13}}{1 - u_{13}}. \quad (37)$$

In den sowjetischen Fachbüchern (z. B. bei KOSCHEWNIKOW [1]) findet man eine andere Methode. Nach dem Bild 2a wirken auf das Planetenrad drei äußere Lastmomente, die miteinander im Gleichgewicht stehen:

$$M_1 + M_3 + M_k = 0. \quad (38)$$

Wenn der Kurbelarm k das Planetenrad 3 antreibt, so lautet die Gleichgewichtsbedingung der Leistungen folgendermaßen:

$$M_k \omega_k \eta_b + M_3 \omega_3 = 0. \tag{39}$$

Wenn dagegen der Kurbelarm k ruht, dann kann für den einfachen Zahnradantrieb folgende Bedingung für das Leistungsgleichgewicht angeschrieben werden:

$$M_1 \omega'_1 \eta_f + M_3 \omega'_3 = 0. \tag{40}$$

Ordnet man die Gl. (39) und (40), so ist

$$-M_k = \frac{\omega_3}{\omega_k} \frac{1}{\eta_b} M_3; \text{ bzw. } -M_1 = \frac{\omega'_3}{\omega'_1} \frac{1}{\eta_f} M_3, \tag{41}$$

und erneut in Gl. (38) eingesetzt:

$$M_3 = \frac{\omega_3}{\omega_k} \frac{1}{\eta_b} M_3 + \frac{\omega'_3}{\omega'_1} \frac{1}{\eta_f} M_3, \tag{42}$$

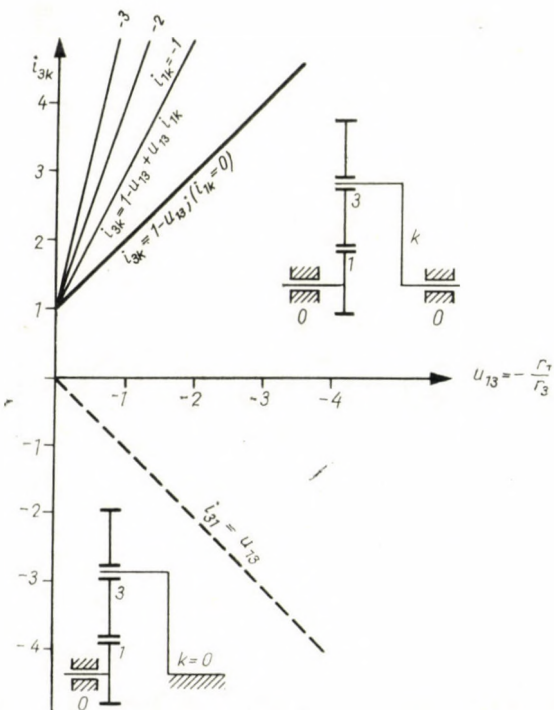


Bild 9. Änderung des im Bild 1a dargestellten einfachsten epizyklischen Getriebes $i_{3k} = f(u_{13})$, wenn als Planetengetriebe betrieben (dicke ausgezogene Gerade, Reihe 3 der Tabelle I); als Doppelantrieb (dünne, ausgezogene Geraden, Reihe 7 der Tabelle I); endlich als einfaches Zahnradgetriebe mit $i_{31} = f(u_{13})$, dargestellt durch gestrichelte Linie (Reihe 1 der Tabelle I)

diese Formel kann auch ausgedrückt werden durch:

$$1 = i_{3k} \frac{1}{\eta_b} + i_{31} \frac{1}{\eta_f} = (1 - u_{13}) \frac{1}{\eta_b} + u_{13} \frac{1}{\eta_f} \quad (43)$$

Hieraus wird

$$\frac{1}{\eta_b} = \frac{1 - (u_{13}/\eta_f)}{1 - u_{13}} = 1 + \frac{u_{13} - (u_{13}/\eta_f)}{1 - u_{13}} = 1 - \frac{u_{13} (1 - \eta_f)/\eta_f}{1 - u_{13}} \quad (44)$$

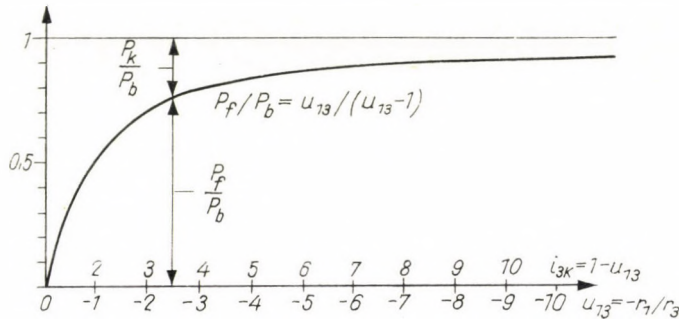


Bild 10. Darstellung von $P_f/P_b = f(u_{13})$ für das im Bild 1a sichtbare einfachste Planetengetriebe, entsprechender Bezeichnung (31), wobei P_f die Zahnradleistung und P_k die Leistung an der Wellenkupplung ist

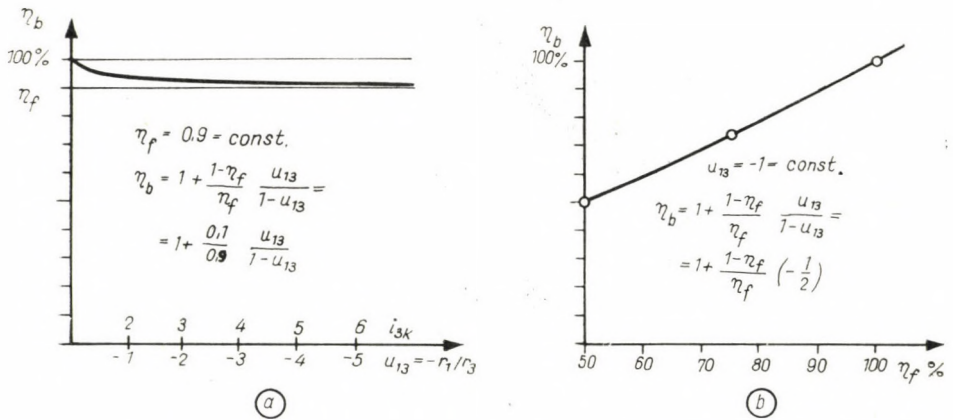


Bild 11. a) Änderung von $\eta_b = f(u_{13})$ im Falle $\eta_f = 0,9$; b) Änderung von $\eta_b = f(\eta_f)$ bei $u_{13} = -1$, für den Fall des einfachsten Planetengetriebe

d. h.

$$\eta_b \approx 1 + \frac{1 - \eta_f}{\eta_f} \frac{u_{13}}{1 - u_{13}} \quad (45)$$

Verfasser verwendete bisher in der ungarischen Fachliteratur diese Methode [2]. Neben verschiedenen theoretischen Untersuchungsmethoden findet man wenig Veröffentlichungen über Wirkungsgradmessungen. Aus diesem

Grund wird auf das entsprechende Schrifttum [15—17] hingewiesen, in dem über Wirkungsgradmessungen des Verfassers und seiner Mitarbeiter am Planetengetriebe, ausgebildet durch Reihenschaltung der im Bild 1c sichtbaren Planetengetriebe-Elemente, berichtet wird.

Ein anderes Verfahren wurde gleichfalls vom Verfasser und einem seiner Mitarbeiter [13] ausgearbeitet, das selbstverständlich dasselbe Endergebnis aufweist.

Es ist zu ersehen, daß jedes Untersuchungsverfahren, jeweils einen anderen Weg beschreitend, zum selben Endergebnis führt; diese gemeinsamen Endergebnisse werden in der vorliegenden Arbeit in Form einiger Diagramme zusammengefaßt (Bild 9—11). Diese Verfahren sind naturgemäß auch auf die übrigen, im Bild 1 dargestellten epizyklischen Arten anwendbar.

Die vorliegende Studie weist nach, daß die verschiedenen Verfahren sich höchstens durch ihren Ausgangspunkt oder durch ihre Bezeichnungen unterscheiden, evtl. nicht durch dieselbe Funktion das Endergebnis zum Ausdruck bringen, das jedoch identisch wird, wenn man die gleichen Begriffe benützt.

SCHRIFTTUM

1. KOSCHEWNIKOW, S. N.: A mechanizmusok és gépek elmélete (Theorie der Mechanismen und Maschinen). Bd. 1—2. Tankönyvkiadó, Budapest 1952, 1953 (Übersetzung aus dem Russ.).
2. TERPLÁN, Z.: Mechanizmusok (Mechanismen). 2. Aufl. Tankönyvkiadó, Budapest 1962.
3. TERPLÁN, Z.: A bolygómű-vizsgálatok alapjai (Grundlagen der Planetengetriebe-Untersuchungen). *Bányászati Kutató Intézet Közleményei* 7 (1962), No. 2.
4. LUEGER: Lexikon der Technik, „Umlaufgetriebe“. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart 1960.
5. Руденко, Н. Ф.: Планетарные передачи, изд. 3. МАШИЗ, Москва 1947.
6. JUREK, A.: A belső fogazás egyes kérdései és a bolygóművek áttételének grafikus szerkesztése (Einige Fragen der Innenverzahnung und die graphische Konstruktion der Übersetzung von Planetenrädern). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* 4 (1952), 2.
7. KORDOSS, J.: Szerszámgépek (Werkzeugmaschinen). Felsőoktatási jegyzetellátó, Miskolc 1954.
8. POPPINGA, R.: Stirnrad-Planetengetriebe. Franck'sche Verl., Stuttgart 1949.
9. VÖRÖS, I.: Gépelemek (Maschinenelemente) III. 3. Aufl. Tankönyvkiadó, Budapest 1961.
10. BALOGH, A.: Bolygókerék számítása különös tekintettel szerszámgépekre és gépjárművekre (Berechnung von Planetenrädern mit besonderer Rücksicht auf Werkzeugmaschinen und Kraftfahrzeuge). Budapest 1950.
11. BALOGH, A.: Berechnung der Geschwindigkeit der Planetengetriebe auf einer neuen Grundlage. *Maschinenbautechnik* 3 (1954), Nr. 12.
11. SZÓKE, B.: Die Grunderscheinung der Kugellagerschwingung. *Maschinenbautechn.* 10 (1961), Nr. 12.
13. TERPLÁN, Z.—APRÓ, F.: Az egyszerű bolygóművek teljesítményviszonyai (Leistungsverhältnisse der einfachen Planetengetriebe). *Nehézipari Műsz. Egy. Közl.* 10 (1964).
14. STRAUCH, H.: Die Umlaufgetriebe. C. Hanser Verl., München 1950.
15. TERPLÁN, Z.: Az Ajtay—Korbuly-féle kaparólánchajtómű hatásfokvizsgálata (Wirkungsgraduntersuchung des Ajtay—Korbuly'schen Kratzkettengetriebes). *Nehézip. Műsz. Egyet. Közl.* 1 (1957).
16. TERPLÁN, Z.—APRÓ, F.: Szakvélemény az A.—K.-féle bolygómű vizsgálatáról a Bányászati Kut. Intézetnek (Gutachten f. die Bergbau Forschungsanstalt über die Untersuchung des A.—K. Planetengetriebes). Miskolc 1962.
17. TERPLÁN, Z.: Grundsätze der Untersuchungen über das Planetengetriebe mit Zahnrädern. *Mitteilungen des Ungarischen Forschungsinstitutes für Bergbau* (1962), Nr. 6.

DIFFERENT METHODS OF ANALYTIC EXAMINATION
OF THE MOST SIMPLE EPICYCLOIDAL DRIVE

Z. TERPLÁN

SUMMARY

In the literature dealing with epicycloidal drives one meets seldom with papers which would bring into evidence the identity of the different methods of analysis. In the present paper the author undertakes to present in unified form the analytic methods dealing with the common element of the more complicated epicycloidal drives, the simple epicycloidal drive. After mentioning only briefly the classification, he deals with the methods of kinematic examination of KUTZBACH, WILLIS, SWAMP and POPPINGA and especially with the method due to the Hungarian BALOGH. In the second part of the paper the author deals with the methods of efficiency analysis of POPPINGA, STRAUCH and KOZHEVNIKOV. The paper contains also synoptic diagrams for the examination of efficiency, containing references to the author's own measurements.

DIFFÉRENTES MÉTHODES POUR L'EXAMEN ANALYTIQUE
DES TRAINS D'ENGRENAGES ÉPICYCLOÏDAUX LES PLUS SIMPLES

Z. TERPLÁN

RÉSUMÉ

La littérature consacrée aux trains d'engrenages planétaires ne comprend que très peu d'études montrant l'identité des différentes méthodes d'analyse. L'auteur s'est proposé de présenter l'ensemble des méthodes analytiques d'examen des trains d'engrenages épicycloïdaux les plus simples, qui constituent l'élément commun aux trains épicycloïdaux plus compliqués. Après un bref rappel de la classification, il traite des méthodes d'examen cinématiques de KUTZBACH, WILLIS, SWAMP et POPPINGA, en examinant à part la méthode d'analyse du Hongrois BALOGH. Dans la deuxième partie de l'étude, l'auteur discute les méthodes d'examen du rendement de POPPINGA, STRAUCH et KOZHEVNIKOV. L'étude contient des diagrammes synoptiques pour l'examen du rendement, avec rappel des mesures faites par l'auteur.

РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТЕЙ-
ШИХ ЭПИЦИКЛИЧНЫХ ПРИВОДНЫХ МЕХАНИЗМОВ

З. ТЕРПЛАН

РЕЗЮМЕ

В литературе, занимающейся планетарными механизмами, редко можно найти такую работу, которая указывала бы на идентичность различных методов исследования. В данной работе автор взял на себя задачу, чтобы для общего элемента сложных планетарных механизмов, а именно для простейшего эпициклического привода продемонстрировать единой трактовкой касающиеся аналитические методы исследований. Только кратко упоминая классификацию, кинематический анализ трактует методы Кутцбаха, Виллиса, Свампа и Поппинга, затем особо занимается изложением метода Балога. Во второй части работы рассматриваются методы исследования кпд Поппинга, Штрауха и Кожевникова. В работе приведены обобщающие диаграммы для исследования кпд, при этом автор ссылается также на данные своих собственных измерений.

ÜBER DEN EINFLUß DES VERBUNDES AUF DIE BRUCHSICHERHEIT DER SPANNBETONBALKEN

B. GOSCHY

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR BAUWISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

UND

G. BALÁZS

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR BAUMATERIALIEN TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAUINDUSTRIE
UND VERKEHR, BUDAPEST

[Eingegangen am 8. Juli 1963]

Bei dem Entwurf und bei der Ausführung der zeitgemäßen Betonkonstruktionen wenden wir eine besondere Sorge auf die Herstellung eines vollkommenen Verbundes zwischen Beton und Stahl an. Die Bedeutung des Verbundes zeigt sich in einem günstigeren Ribbild, Verkleinerung der Ribbreite und Ribabstände, im Korrosionsschutz und in der Erhöhung der Bruchsicherheit.

Aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ist folgendes festzustellen:

1. Das rechnerische Bruchmoment ist bei Vorspannung ohne Verbund niedriger als bei den Spannbeton Verbundquerschnitte bzw. bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund.
2. Die Verminderung der Tragfähigkeit der Spannbetonträger ohne Verbund kann in Abhängigkeit von dem Bewehrungsgrade und der Laststellung ausgedrückt werden und beträgt von 10% bis 20%.
3. Die Berücksichtigung der Reibungskräfte ist bei der Auswertung der statischen Bruchsicherheit selbst im Falle gerader Kabel begründet.
4. Die dynamischen Effekte und die wiederholten Belastungen vermindern die Reibungs- und Haftungskräfte; die Berechnung mit verminderten Reibungswerten führt zu einer weiteren Abnahme (von 5% bis 15%) des statischen Bruchmomentes.

I. Einleitung

Die Spannglieder sind beim Spannen nach dem Erhärten des Betons — wie bekannt — entweder frei, außerhalb des Betonkörpers, oder in Gleitkanälen des Trägers, ohne Verbund bzw. mit nachträglichem Verbund geführt. Wenn die Spanndrähte nicht ausgepreßt sind und dadurch Zugglied und Betonquerschnitt nur teilweise gekoppelt sind, wirken die Spannglieder als Zugbände.

Die Dehnung des Zugglieds führt zu einem sekundären Einfluß im Kräfte-spiele des statisch unbestimmten Tragsystems, der mit der Verminderung der Zugkraft und mit der Zunahme der lotrechten Verformungen des Balkens verbunden ist. Gleichzeitig mit der Zunahme der Durchbiegung klaffen die Risse auf, die Nulllinie wandert rasch nach oben und verkleinert die Druckzone, so daß die Tragfähigkeit des Balkens im Druckgurt frühzeitig erschöpft ist.

Der Zweck dieser Arbeit ist, den Einfluß des Verbundes auf die Bruchsicherheit eines Spannbetonbalkens rechnerisch zu erfassen und die Berechnungsergebnisse mit Versuchen zu unterstützen.

II. Voraussetzungen

a) Die Querschnitte bleiben bis zum Bruch eben (Hypothese von Bernoulli-Navier). Die Richtigkeit des Ansatzes wurde für Drähte mit kleinem Durchmesser und für Querschnitte mit niedrigem Bewehrungsgrad durch die Versuche von R. Walther bestätigt.

b) Die größte Bruchkürzung des Betons ist zu $\varepsilon_B = 2\%$ festgelegt; die Spannungs—Dehnungslinie der Stahldrähte ist gegeben.

c) Die Reibungszahl ist in der ganzen Länge des Kabels konstant.

d) Der Bruch wird durch die Erschöpfung der Biegedruckzone hervorgerufen.

III. Dehnung des Spanngliedes

Die im Kabel des belasteten Spannbetonträgers auftretende Zugkraft besteht aus zwei Teilen, der Ausgangsspannkraft (H_{z_0}) und der Zugkraftzunahme (H_{z_1}) infolge der äußeren Kräfte:

$$H_z = H_{z_0} + H_{z_1}, \quad (1)$$

worin z den Abstand des untersuchten Querschnittes von der Trägermitte bedeutet.

Im folgenden wird die gradachsige Kabelführung untersucht, wo die größte Wahrscheinlichkeit des Gleitens der Drähte besteht. Die Zugkraftzunahme kann in einem gradlinigen Spannglied mit vollkommenem Verbund unter dem Einfluß der äußeren Belastung angenähert aus

$$H_{z_1} = \frac{M_z}{q_z} \simeq \frac{M_1 f(z)}{q_1} = H_1 f(z) \quad (2)$$

berechnet werden, wobei M_1 das maximale Moment, H_1 die maximale Zugkraft, q_1 den Hebelarm der inneren Kräfte bedeutet.

Die Stahldehnung wird unterhalb der Proportionalitätsgrenze durch

$$\varepsilon_{zv} = \frac{H_1}{E_v F_v} f(z) = \varepsilon_{1v} f(z) \quad (3)$$

ausgedrückt. Oberhalb der Proportionalitätsgrenze kann ε_{zv} aus der $\sigma - \varepsilon$ Kurve des Stahls entnommen werden.

Die Gesamtdehnung eines symmetrisch-belasteten Balkens mit der Stützweite L ist durch die Beziehung

$$\Delta L = 2 \int_0^{L/2} \varepsilon_{zv} dz \quad (4)$$

gegeben. Die Durchschnittsdehnung beträgt im Falle einer in der Balkenmitte

wirkenden konzentrierten Last

$$\varepsilon_{10} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\varepsilon_{1v}}{2} \quad (5)$$

und einer gleichmäßig verteilten Belastung

$$\varepsilon_{10} = \frac{2}{3} \varepsilon_{1v} \quad (6)$$

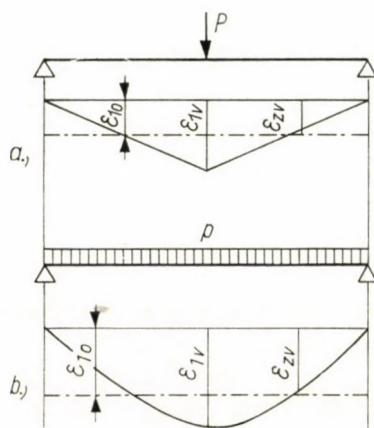


Bild 1

Die Durchschnittsdehnung des geraden, reibungsfreien Zugbandes ist dagegen

$$\varepsilon_{10} = \varepsilon_{1v} \quad (7)$$

Die Dehnung des Zugbandes ist also im Falle einer mittigen Last 2-mal und im Falle der gleichmäßig verteilten Belastung 1,5-mal größer als bei den Stahlunterlagen mit Verbund und Haftung.

Eine vollkommene Reibungslosigkeit kommt auch bei gradlinigen Kabeln selten vor. Beim Verdichten des Betons werden die dünnen Blechhüllen der Gleitkanäle unter der Wirkung des Betondruckes verformt, und dadurch werden die nachgiebigen Blechhüllen gegen den Spannkabel angepreßt. Außerdem erhöht sich der Reibungsbeiwert wegen der Krümmung, die durch die elastische und plastische Biegeverformungen des Balkens zustande kommt.

Die zwei Einflüsse vermindern die zusätzliche Zugkraft des Kabels nach der Beziehung [1]

$$H_{z1} = H_1 e^{-\left(k_1 + \frac{k_2}{\varrho}\right) z} \quad (8)$$

wobei

- $1/\varrho = \varepsilon_b/x$ Krümmung des Balkens;
 ε_b Stauchung der Betonrandfaser;
 x Abstand der neutralen Achse von der gedrückten Randfaser;
 k_1 Reibungswert im geraden Spannglied;
 k_2 Reibungswert im verkrümmten Spannglied.

Unter Berücksichtigung der Reibungswerte, wird die Durchschnittsdehnung aus der in der Balkenmitte wirkenden Kraft (P) durch die Gleichung

$$\begin{aligned}\varepsilon_{20} &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \varepsilon_{zv} dz = \frac{2}{L} \varepsilon_{1v} \int_0^{L/2} e^{-(k_1 - \frac{k_2}{\rho})z} dz = \\ &= \frac{2 \varepsilon_{1v}}{(k_1 + k_2/\rho) \lambda} [1 - e^{-(k_1 + k_2/\rho)L/2}] = \lambda \varepsilon_{1v}\end{aligned}\quad (9)$$

ausgedrückt.

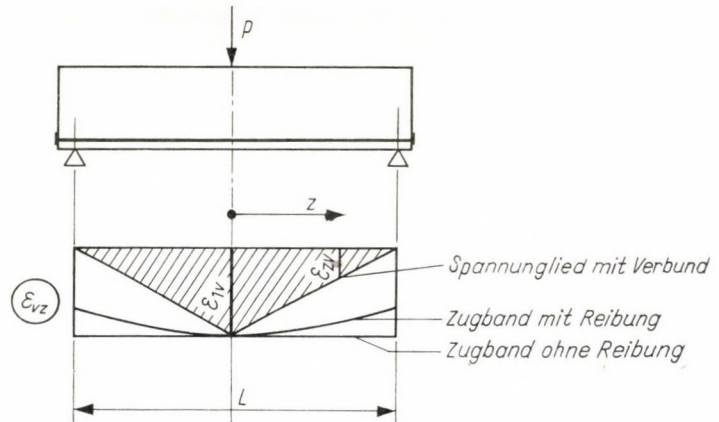


Bild 2

Der Dehnungszuwachs des Spannstahls, im Vergleich zur Dehnung des Kabels mit Verbund ist mit

$$\Delta \varepsilon_{0v} = \varepsilon_{20} - \varepsilon_{10}$$

gegeben. Bei konzentrierter Last ist

$$\Delta \varepsilon_{0v} = (\lambda - 0,5) \varepsilon_{1v}$$

und bei gleichmäßig verteilter Last

$$\Delta \varepsilon_{0v} = (\lambda - 0,667) \varepsilon_{1v}.$$

IV. Berechnung des Bruchmomentes nach DIN 4227

1. Horizontaler Verbundkabel

Zur Berechnung des Bruchmomentes greifen wir an die Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen des Rechteckquerschnitts

$$\sigma_G b x_0 = (\sigma_{00} + \sigma_{0v}) F_v, \quad (10)$$

oder umgeformt

$$\frac{\sigma_G x_0}{\mu h} = \sigma_{00} + \sigma_{0v}, \quad (10a)$$

und

$$k_x = \frac{x_0}{h} = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_B + \varepsilon_{1v}}, \quad (11)$$

wobei (Bild 3)

- σ_G = $0,5 W_{28}$ Grenzspannung des Betons;
 ε_B Bruchstauchung des Betons;
 σ_{00} Ausgangsspannungen im Stahl (nach dem Abzug der Verluste);
 σ_{0v} zusätzliche Stahlspannung beim Erreichen von ε_B ;
 ε_{1v} Stahldehnung zu σ_{0v} ;
 ε_{00} Stahldehnung zu σ_{00} ;
 x_0 Abstand der Nulllinie von der gedrückten Randfaser im Bruchzustand;
 h Nutzhöhe des Querschnitts;
 μ F_v/bh Bewehrungsanteil.

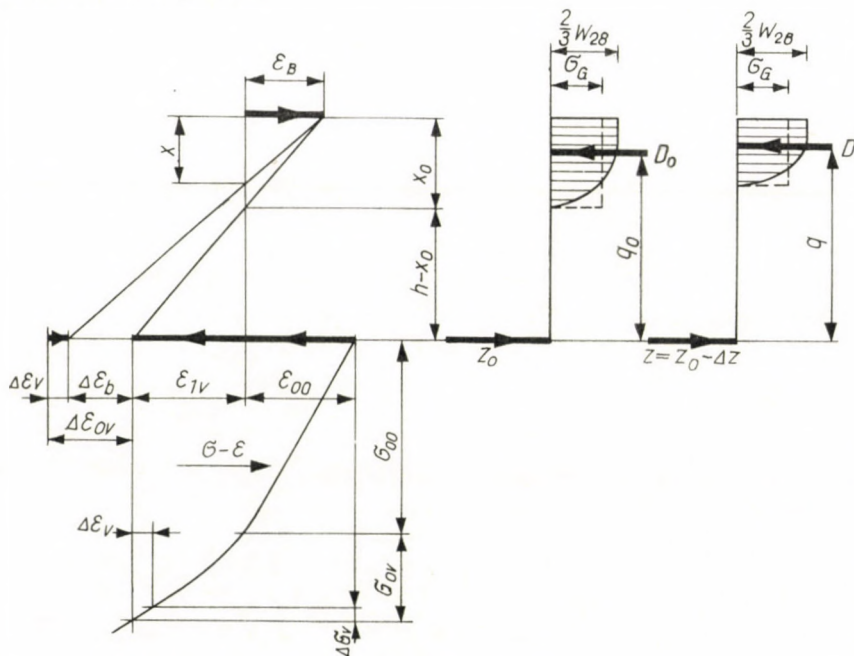


Bild 3

Die Gleichungen (10a) und (11) werden in

$$\frac{\sigma_B}{\mu} = \left(1 + \frac{\varepsilon_{1v}}{\varepsilon_B}\right) (\sigma_{00} + \sigma_{0v}) \quad (12)$$

zusammengefaßt.

Im Besitz des Stahzugdiagrammes werden die zusammengehörigen $\sigma - \varepsilon$ Werte in die Gleichung (12) gesetzt und die Probe solange wiederholt, bis die Gleichheit zustande kommt. Mit ε_{1v} kann die neutrale Achse aus der Gleichung (11) bestimmt werden und schließlich das Bruchmoment aus der

Gleichung

$$M_{B0} = \sigma_G b h^2 k_x (1 - \beta k_x) \quad (13)$$

berechnet werden. In der Gl. (13) ist βx_0 der Abstand der Druckkraft von der Randfaser.

2. Spannglieder ohne Verbund

Der Dehnungszuwachs wird als ein sekundärer Einfluß des statisch unbestimmten Tragwerks (Balke mit Zugband) betrachtet [3].

Die Druckzone bleibt weiter im Grenzzustand mit ε_B an der Randfaser als angenommenes Kriterium für das Versagen des untersuchten Querschnitts. Die in der Höhe der Stahleinlage entstehende zusätzliche Verformung kann nach [2]

$$\Delta\varepsilon_{0v} = \Delta\varepsilon_v + \Delta\varepsilon_b \quad (14)$$

in zwei Anteile zerlegt werden, wobei

$\Delta\varepsilon_v$ Verkürzung des Stahles und
 $\Delta\varepsilon_b$ Verformung der Betondruckzone infolge der Stahldehnung und Querschnittsverdrehung.

Der Wert der Teilverformungen wird aus den Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen abgeleitet.

Die Gleichsetzung der inneren Kräfte liefert

$$\frac{\sigma_G}{\mu} \frac{x}{h} = \sigma_{00} + \sigma_{0v} - \Delta\sigma_v \quad (15)$$

und aus der Proportionalität der Verformungen:

$$k'_x = \frac{x}{h} = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_B + \varepsilon_{1v} + \Delta\varepsilon_{0v} - \Delta\varepsilon_v} \quad (16)$$

Durch die Zusammenfassung der Gleichungen (15) und (16) erhält man

$$\frac{\sigma_G}{\mu} = \left(1 + \frac{\varepsilon_{1v}}{\varepsilon_B} + \frac{\Delta\varepsilon_{0v} - \Delta\varepsilon_v}{\varepsilon_B} \right) (\sigma_{00} + \sigma_{0v} - \Delta\sigma_v) \quad (17)$$

und mit der Gleichung (12) kommt man schließlich zu

$$\frac{\sigma_G}{\mu} = \left[\frac{\sigma_G}{\mu(\sigma_{00} + \sigma_{0v})} + \frac{\Delta\varepsilon_{0v} - \Delta\varepsilon_v}{\varepsilon_B} \right] (\sigma_{00} + \sigma_{0v} - \Delta\sigma_v). \quad (17a)$$

Die Lösung der Aufgabe besteht darin, daß im Besitze der $\sigma - \varepsilon$ Kurve des Stahls die zusammengehörigen Werte σ'_v und ε'_v so gewählt werden, daß die Gleichung (17a) entstehen soll. Für die Aufnahme der Spannungen und Dehnungen gelten

$$\sigma'_v = \sigma_{0v} - \Delta\sigma_v,$$

und

$$\varepsilon'_v = \varepsilon_{1v} - \Delta\varepsilon_v.$$

Die Teilverformung des Stahles beträgt:

$$\Delta\varepsilon_v = \varepsilon_{1v} - \varepsilon'_v = \varphi\varepsilon_{1v}.$$

Das Bruchmoment ist bei den Spanngliedern ohne Verbund aus der Formel

$$M_B = \sigma_G b h^2 k'_x (1 - \beta k'_x) \tag{18}$$

zu berechnen. Die Wandlung der Nulllinie nach oben im Bezug auf die Anfangslage (x_0) ist mit

$$k'_x = \frac{x}{h} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta\varepsilon_{0v}}{\varepsilon_B} (1 - \varphi) k_x} k_x \tag{19}$$

angegeben.

V. Berechnungsbeispiel

Es wird als Beispiel ein aus fünf Fertigteilen zusammengesetzter Spannbeton-Kasten-träger betrachtet. Der Längs- und Querschnitt des untersuchten Balkens ist im Bild 4 dargestellt.

Im Kabelkanal 1 wurden 6 $\varnothing 5$, im Kabelkanal 2 bis 5 je 18 $\varnothing 5$ patentierte und gezogene Drähte (Güteklasse St 130.150) angeordnet. Die Litzen wurden auf den geraden Strecken in Betonkanälen und auf den gekrümmten Strecken in 0,2 m dicken, gewellten Stahlblechrohren gelegt. Die Betonkanäle wurden nicht ausgepreßt, dagegen wurden die Blechrohre injektiert.

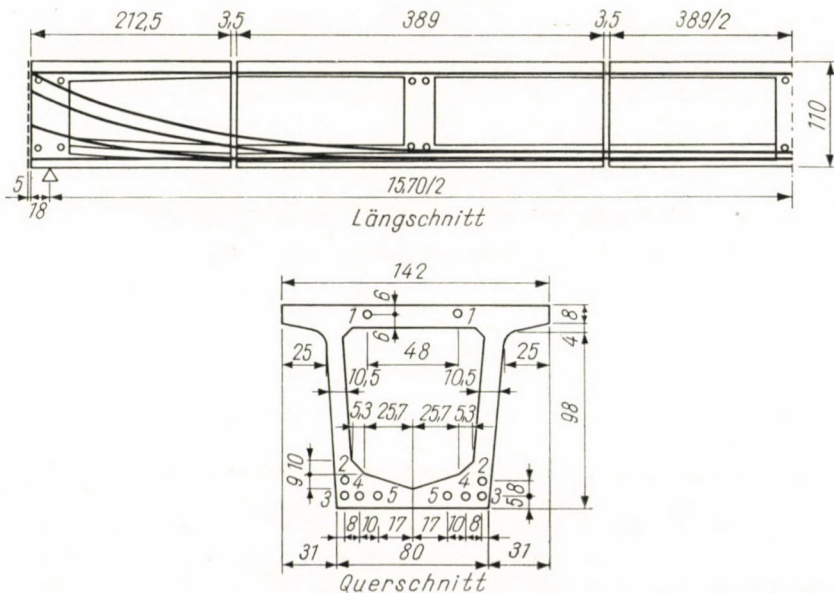


Bild 4

Das Bruchmoment wurde nach dem von Mörsch gezeigten graphischen Verfahren ermittelt. Die Angaben: Betongüte = B 400; Bruchfestigkeit des Betons $\sigma_B = 2/3 \cdot 400 = 266,7 \text{ kp/cm}^2$; Bruchstauchung des Betons $\varepsilon_B = 2\text{‰}$; Anfangsspannung 9900 kp/cm^2 ; Nutzspannung im Zeitpunkt des Versuches $\sigma_{00} = 9130 \text{ kp/cm}^2$ und die zugehörige Stahldehnung $\varepsilon_{00} = 5,05\text{‰}$.

Mit der Annahme des Verbundansatzes beträgt die Tiefe der Druckzone $x_0 = 20 \text{ cm}$, der innere Hebelarm der resultierenden inneren Kräfte $q_0 = 97 \text{ cm}$, die Spannung des Stahles $\sigma_{00} = 6170 \text{ kp/cm}^2$, mit der Dehnung $\varepsilon_{1v} = 8,5\text{‰}$ und schließlich das Bruchmoment $M_{B0} = 433 \cdot 0,97 = 420 \text{ mMp}$. Das berechnete Bruchmoment ist in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen. Die Probelastung wurde nach Bild 5 angeordnet.

Ferner wird angenommen, daß der Kabelkanal nicht injektiert ist, und die Spannglieder waagrecht laufen. Damit ist die Durchschnittdéhnung des Stahls

$$\varepsilon_{10} = 0,681\varepsilon_{1v}.$$

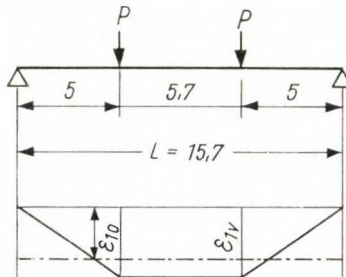


Bild 5

Aus den Messungen ergab sich der Reibungskoeffizient des geraden Abschnittes zu $k_1 = 0,0085$ und für den krummen Abschnitt zu $k_2 = 0,50$. Die Krümmung des Balkens ist mit

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon_B}{x_0} = \frac{0,02}{0,20} = 0,01 \left[\frac{1}{m} \right]$$

in die Rechnung zu setzen.

Aus der Gleichung (9) gewinnt man mit diesen Werten

$$\varepsilon_{20} = \lambda\varepsilon_{1v} = 0,978\varepsilon_{1v}.$$

Der Dehnungszuwachs wird

$$\Delta\varepsilon_{0v} = \varepsilon_{20} - \varepsilon_{10} = (0,978 - 0,681)\varepsilon_{1v} = 2,53\text{‰}.$$

Aus der graphischen Ermittlung des Bruchmomentes folgt:

$$x = 18 \text{ cm}; \Delta\varepsilon_v = 1,7\text{‰}; q = 96,5 \text{ cm};$$

$$\Delta\sigma_v = \frac{3000 - 2860}{0,196} = 714 \text{ kp/cm}^2;$$

$$D = Z = 8 \cdot 18 \cdot 2860 = 412,5 \text{ Mp}$$

und schließlich

$$M_B = 412,5 \cdot 0,965 = 397 \text{ mMp}.$$

Die Abnahme des Bruchmomentes ist dementsprechend:

$$\Delta M = 420 - 397 = 23 \text{ mMp} (5,5\text{‰}).$$

Im Falle des Versuchsbalkens mit konzentrierter Belastung ist die Abnahme $7,85\text{‰}$ des Gesamtmomentes. Beim reibungslosen Zugstab nimmt die Tragfähigkeit um $9,05\text{‰}$ ab. Wie

aus dem Beispiel ersichtlich ist, ist die Verminderung des Bruchmomentes selbst bei den ungünstigsten Annahmen unbedeutend. Bei dem bogenartig geführten Kabel ist dieser Einfluß zu vernachlässigen.

Bei den Versuchsbalken hat man auch die Verformungen gemessen. Die gemessenen Durchbiegungen der Träger mit und ohne Auspressen der Blechröhre waren die gleichen. Diese Tatsache beweist die Richtigkeit der Beurteilung des Einflusses des Verbundes im Bruchzustand.

SCHRIFTTUM

1. LEONHARDT, F.: Spannbeton für die Praxis, W. Ernst u. Sohn, Berlin 1955.
2. SHERMAN, L.: Testing Post-Tensioned Slab and Beam without Grouting, Proc. A. S. C. E. (1957), July; Paper 1317.
3. RÜSCH, H.: Bruchsicherheit bei Vorspannung ohne Verbund. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 130.

INFLUENCE OF BOND ON THE ULTIMATE MOMENT OF PRESTRESSED CONCRETE BEAMS

B. GOSCHY and G. BALÁZS

SUMMARY

This paper deals with the computation and tests of the ultimate moment of prestressed concrete with no bond between wires and concrete.

Experimental results obtained on prestressed concrete box-girders are in good accordance with this theory.

As a result of the investigations the following conclusions can be drawn:

- a) Static ultimate moment of prestressed concrete beams without bond is always lower than that of pre-tensioned or post-tensioned prestressed beams grouted subsequently.
- b) The lack of bond and adhesion stresses reduces bearing capacity from 10 to 20% depending on the steel percentage and loading.
- c) Even for straight-line cables friction has to be taken into consideration.
- d) Dynamic and repetitive loads reduce friction stresses and thereby ultimate moments by about 5 to 15%.

L'INFLUENCE DE L'ADHÉRENCE SUR LE MOMENT DE RUPTURE DES POUTRES EN BÉTON PRÉCONTRAIT

B. GOSCHY et G. BALÁZS

RÉSUMÉ

Cette contribution présente une méthode de calcul du moment de rupture des poutres en béton précontraint sans adhérence, avec les essais reliés.

Les résultats théoriques sont en bonne concordance avec l'expérience.

En résumé, on peut établir que:

- a) Le moment de rupture statique d'une poutre en béton précontraint sans adhérence est inférieur aux poutres précontraintes, ou postcontraintes avec injection.
- b) La capacité portante des poutres précontraintes sans adhérence est de 10 à 20% inférieure à celle des poutres adhérentes, en fonction du pourcentage d'acier et de la position de la charge.
- c) Les efforts de friction doivent être considérés même en cas de cables rectilignes.
- d) Les effets dynamiques et les efforts répétés diminuent la friction et par conséquent le moment de rupture de 5 à 15%.

ВЛИЯНИЕ СЦЕПЛЕНИЯ МЕЖДУ БЕТОНОМ И АРМАТУРОЙ НА РАЗРУШАЮЩИЙ МОМЕНТ ПОСЛЕДУЮЩЕ НАПРЯЖЕННОЙ БЕТОННОЙ БАЛКИ

Б. ГОШИ и Д. БАЛАЖ

РЕЗЮМЕ

В работе излагаются расчет разрушающего момента последующе напряженной бетонной балки, не имеющей сцепления, и связанные с данной темой опыты. Результаты расчетов были подтверждены опытами, проводившимися с использованием последующе напряженных балок. На основе результатов проведенных опытов можно установить:

а) Статически разрушающий момент напряженной бетонной балки без сцепления ниже разрушающего момента балки с сцепляющейся арматурой, или последующе инъектированной балки.

б) Снижение допустимой нагрузки напряженной бетонной балки, у которой не имеется сцепления между бетоном и арматурой, достигает 10—20%-ов в зависимости от коэффициента армирования и места приложения нагрузки.

в) Учет сил трения при оценке прочности разрушения является обоснованным даже в случае прямых кабелей.

г) Динамические воздействия и повторяющееся приложение нагрузки снижают эффективность трения и сцепления, степень снижения указанных воздействий можно принять равным $5 \div 15\%$ -ам.

CALCULATION OF CONOID SHELLS HAVING A PARABOLIC GENERATING CURVE

P. CSONKA

DOCTOR OF TECHN. SC.

WORKING COMMUNITY FOR BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received December 11, 1963]

The paper refers to a conoid shell having a parabolic generating curve, constructed over a rectangular ground plan. The investigated shell is supported along its two sides facing each other on parabolic edge arches which do not resist lateral forces, while along the other two sides the shell is supported by straight edge beams appropriate for bearing lateral forces, too.

The paper contains two tables for the calculation of the shell in question. For loading cases occurring in engineering practice, the stress function of the shell can be directly read off from the tables. One of them refers to customary loads, while the other to special loads caused by the accumulation of snow in the troughs lying between the adjacent conoid shell units of a north-light roofing.

I. Introduction

In engineering practice conoid shells, constructed over a rectangular plan and having a parabolic generating curve, are frequently applied as space covering structures — mainly for the roofing of industrial halls. The shells in question which are built in a row, are very appropriate for the construction of north-light roofings (Fig. 1).

The individual shells themselves are supported along two edges facing each other by parabolic edge arches the own plane of which is vertical, while along the other two edges by straight edge beams. The edge arches do not resist lateral forces, on the other hand the edge beams are able to bear lateral forces, too.

The membrane theory related to conoid shells having a parabolic generating curve has already been dealt with by several scientists [1—8], and the principles of their calculation have been cleared up. In spite of this, tables

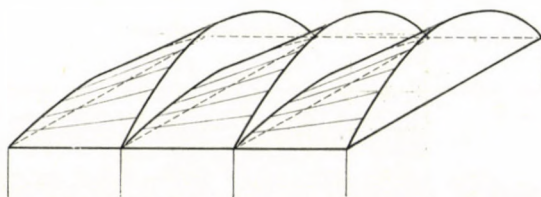


Fig. 1. North-light roof consisting of conoid shells with a parabolic generating curve

containing a compilation of completely working formulae corresponding to different simple loading cases are not available for the time being.

The aim of the following is to make good this deficiency.

2. Fundamental relations

The chosen system of coordinates as well as the dimensional data are shown in Fig. 2. In this system of coordinates the middle surface of the shell is characterized by the equation

$$z = h + cx(y^2 - b^2)$$

where

$$c = \frac{h}{a_2 b^2}.$$

In the following investigations as load acting on the shell merely a vertical distributed force system is taken into consideration. The specific value of same related to the area of the planar projection of the shell is expressed by the load function

$$Z = Z(x, y).$$

Loads acting in the positive z direction are regarded as being positives.

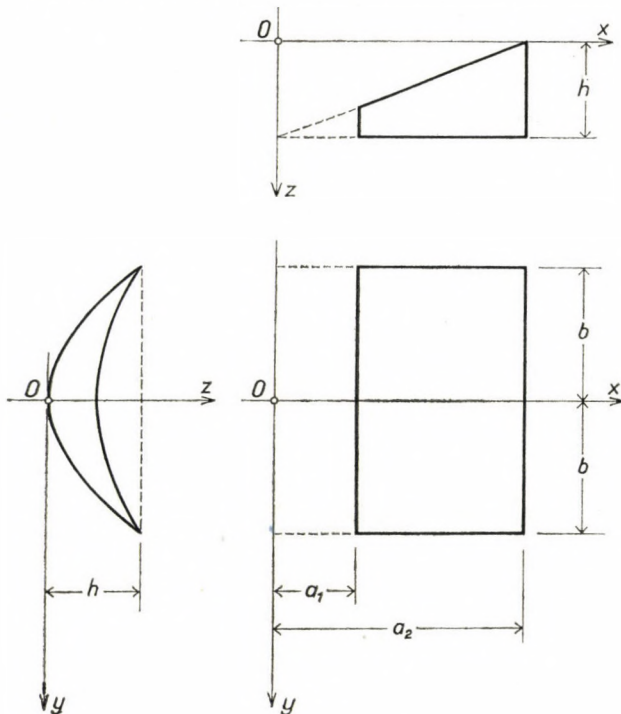


Fig. 2. Dimensional data

To characterize the stress state of the shell *Pucher's* stress function will be introduced. As is well-known, in the case of vertical forces this function has generally to satisfy the differential equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + Z = 0. \quad (1)$$

As in the case dealt with relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} &= 2cy, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2cx \end{aligned}$$

hold, differential equation (1) takes the following simpler form:

$$2cx \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 4cy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + Z = 0. \quad (2)$$

Between the reduced internal forces of the shell and the stress function *F* the following relations hold:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ n_{xy} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

As the edge arches of the shell do not resist lateral forces, along the lines $x = a_1$ and $x = a_2$ the internal force n_x must equal zero. Owing to relation (3) the above demand establishes the boundary conditions given hereunder:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right]_{x=a_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right]_{x=a_2} = 0. \quad (4)$$

3. Solution of the problem

To become acquainted with the stress state of the shell, differential equation (2) is to be solved taking boundary conditions (4) into consideration. However, the determination of the stress function is more or less connected with difficulties. To eliminate the difficulties, the formula of the stress func-

Table I
Formulae of the stress function in customary loading cases

z	F
A_{00}	$-\frac{A_{00}}{2c} (x \ln x - x)$
$A_{10}x$	$-\frac{A_{10}}{4c} x^2$
$A_{20}x^2$	$-\frac{A_{20}}{12c} x^3$
$A_{30}x^3$	$-\frac{A_{30}}{24c} x^4$
$A_{40}x^4$	$-\frac{A_{40}}{40c} x^5$
$A_{02}y^2$	$-\frac{A_{02}y^2}{8c} \left[(a_2 - a_1) \frac{x^5 - a_1^5}{a_2^5 - a_1^5} - (x - a_1) \right]$
$A_{12}xy^2$	$-\frac{A_{12}y^2}{12c} \left[(a_2^2 - a_1^2) \frac{x^5 - a_1^5}{a_2^5 - a_1^5} - (x^2 - a_1^2) \right]$
$A_{22}x^2y^2$	$-\frac{A_{22}y^2}{12c} \left[(a_2^3 - a_1^3) \frac{x^5 - a_1^5}{a_2^5 - a_1^5} - (x^3 - a_1^3) \right]$
$A_{32}x^3y^2$	$-\frac{A_{32}y^2}{8c} \left[(a_2^4 - a_1^4) \frac{x^5 - a_1^5}{a_2^5 - a_1^5} - (x^4 - a_1^4) \right]$
$A_{42}x^4y^2$	$-\frac{A_{42}y^2}{10c} \left[-\frac{(x^5 - a_1^5) a_1^5 \ln a_2}{a_2^5 - a_1^5} - \frac{(a_2^5 - x^5) a_1^5 \ln a_1}{a_2^5 - a_1^5} + x^5 \ln x \right]$
$A_{04}y^4$	$-\frac{A_{04}y^4}{16c} \left[(a_2 - a_1) \frac{x^9 - a_1^9}{a_2^9 - a_1^9} - (x - a_1) \right]$
$A_{14}xy^4$	$-\frac{A_{14}y^4}{28c} \left[(a_2^2 - a_1^2) \frac{x^9 - a_1^9}{a_2^9 - a_1^9} - (x^2 - a_1^2) \right]$
$A_{24}x^2y^4$	$-\frac{A_{24}y^4}{36c} \left[(a_2^3 - a_1^3) \frac{x^9 - a_1^9}{a_2^9 - a_1^9} - (x^3 - a_1^3) \right]$
$A_{34}x^3y^4$	$-\frac{A_{34}y^4}{36c} \left[(a_2^4 - a_1^4) \frac{x^9 - a_1^9}{a_2^9 - a_1^9} - (x^4 - a_1^4) \right]$
$A_{44}x^4y^4$	$-\frac{A_{44}y^4}{40c} \left[(a_2^5 - a_1^5) \frac{x^9 - a_1^9}{a_2^9 - a_1^9} - (x^5 - a_1^5) \right]$

Table II

Formulae of the stress function in certain special loading cases

Z	F
$\frac{B_{10}}{x}$	$\frac{B_{10}}{2c} \ln x$
$\frac{B_{20}}{x^2}$	$-\frac{B_{20}}{4cx}$
$\frac{B_{30}}{x^3}$	$-\frac{B_{30}}{12cx^2}$
$\frac{B_{40}}{x^4}$	$-\frac{B_{40}}{24cx^3}$
$\frac{B_{50}}{x^5}$	$-\frac{B_{50}}{40cx^4}$
$\frac{B_{12}y^2}{x}$	$-\frac{B_{12}y^2}{10c} \left[\frac{x^5 - a_1^5}{a_2^5 - a_1^5} \ln a_2 + \frac{a_2^5 - x^5}{a_2^5 - a_1^5} \ln a_1 - \ln x \right]$
$\frac{B_{22}y^2}{x^2}$	$-\frac{B_{22}y^2}{12c} \left[\frac{(a_2 - a_1) x^5 - (a_2^6 - a_1^6)}{a_1 a_2 (a_2^5 - a_1^5)} + \frac{1}{x} \right]$
$\frac{B_{32}y^2}{x^3}$	$-\frac{B_{32}y^2}{28c} \left[\frac{(a_2^2 - a_1^2) x^5 - (a_2^7 - a_1^7)}{a_1^2 a_2^2 (a_2^5 - a_1^5)} + \frac{1}{x^2} \right]$
$\frac{B_{42}y^2}{x^4}$	$-\frac{B_{42}y^2}{48c} \left[\frac{(a_2^3 - a_1^3) x^5 - (a_2^8 - a_1^8)}{a_1^3 a_2^3 (a_2^5 - a_1^5)} + \frac{1}{x^3} \right]$
$\frac{B_{52}y^2}{x^5}$	$-\frac{B_{52}y^2}{72c} \left[\frac{(a_2^4 - a_1^4) x^5 - (a_2^9 - a_1^9)}{a_1^4 a_2^4 (a_2^5 - a_1^5)} + \frac{1}{x^4} \right]$
$\frac{B_{14}y^4}{x}$	$-\frac{B_{14}y^4}{18c} \left[\frac{x^9 - a_2^9}{a_2^9 - a_1^9} \ln a_2 + \frac{a_2^9 - x^9}{a_2^9 - a_1^9} \ln a_1 - \ln x \right]$
$\frac{B_{24}y^4}{x^2}$	$-\frac{B_{24}y^4}{20c} \left[\frac{(a_2 - a_1) x^9 - (a_2^{10} - a_1^{10})}{a_1 a_2 (a_2^9 - a_1^9)} + \frac{1}{x} \right]$
$\frac{B_{34}y^4}{x^3}$	$-\frac{B_{34}y^4}{44c} \left[\frac{(a_2^2 - a_1^2) x^9 - (a_2^{11} - a_1^{11})}{a_1^2 a_2^2 (a_2^9 - a_1^9)} + \frac{1}{x^2} \right]$
$\frac{B_{44}y^4}{x^4}$	$-\frac{B_{44}y^4}{72c} \left[\frac{(a_2^3 - a_1^3) x^9 - (a_2^{12} - a_1^{12})}{a_1^3 a_2^3 (a_2^9 - a_1^9)} + \frac{1}{x^3} \right]$
$\frac{B_{54}y^4}{x^5}$	$-\frac{B_{54}y^4}{104c} \left[\frac{(a_2^4 - a_1^4) x^9 - (a_2^{13} - a_1^{13})}{a_1^4 a_2^4 (a_2^9 - a_1^9)} + \frac{1}{x^4} \right]$

tion was determined for simple symmetrical loading cases arising in engineering practice and the obtained results were compiled in Tables I and II given herewith. Table I refers to loading cases which can be expressed by a simple polynomial, while Table II contains several formulae, by the use of which the load caused by snow accumulating in the troughs of saw-tooth roofs can be taken into account.

In a given case the load function is to be divided into parts which comply with loading cases figuring in Table I and II, respectively. Hereafter, stress functions corresponding to the individual load members are to be taken from the respective tables and these have to be added.

After the stress function has already been determined, the reduced internal forces can be computed from formulae (3).

4. Example of application

Let us determine the reduced internal forces of the shell depicted in Fig. 3. The dimensional data of the shell to be investigated are:

$$a_1 = 5.0 \text{ m}, a_2 = 15.0 \text{ m}, b = 10.00 \text{ m}, h = 3.6 \text{ m}.$$

In the given case

$$c = \frac{h}{a_2 b^2} = \frac{3.6}{15.0 \cdot 10.0^2} = 0.0024,$$

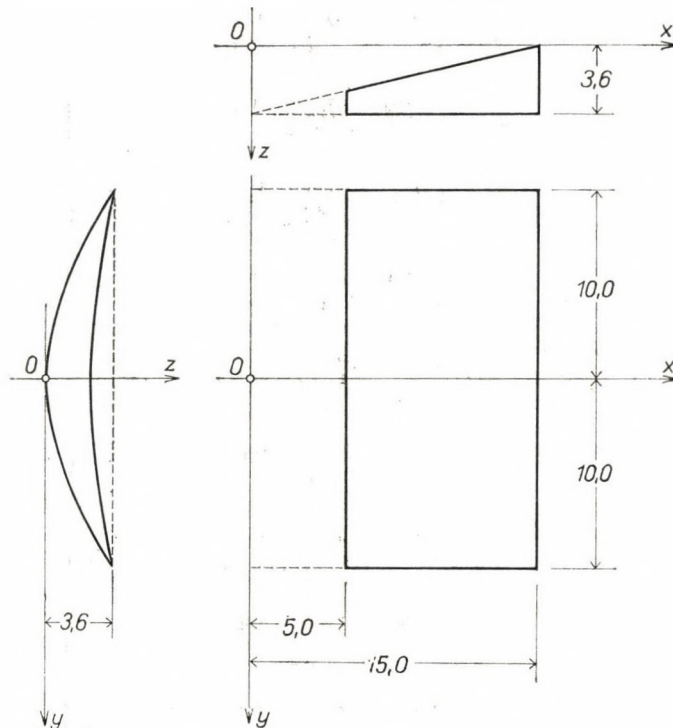


Fig. 3. Numerical example

and so the equation of the middle surface of the shell is

$$z = 3.6 + 0.0024 x (y^2 - 10.0^2).$$

The shell is subjected to the effect of dead load and snow load. The specific value of dead load related to the surface unit of the middle surface is

$$p_D = 300 \text{ kp/m}^2,$$

while the specific value of snow load related to the projected planar area is

$$p_S = 75 \text{ kp/m}^2.$$

Accordingly, the reduced load acting on the shell is

$$Z = p_S + p_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

where

$$\frac{\partial z}{\partial x} = c(y^2 - b^2) = 0.0024 (y^2 - 10.0^2) = 0.0024 y^2 - 0.24,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2cxy = 2 \cdot 0.0024 xy = 0.0048 xy.$$

Substituting the latter two values into the above formula of the specific load the following result is arrived at:

$$\begin{aligned} Z &= 75 + 300 \sqrt{1 + 0.0576 - 0.001152 y^2 + 0.00000576 y^4 + 0.00002304 x^2 y^2} = \\ &= 75 + 300 \sqrt{1.0576 - 0.001152 y^2 + 0.00000576 y^4 + 0.00002304 x^2 y^2} = \\ &= 75 + 308.5 \sqrt{1 - 0.00112 y^2 + 0.0000056 y^4 + 0.0000224 x^2 y^2} = \\ &= 75 + 308.5 \sqrt{1 - 0.00056 y^2 + 0.0000028 y^4 + 0.0000112 x^2 y^2} = \\ &\cong 383.5 - 0.1728 y^2 + 0.003455 x^2 y^2 + 0.0008638 y^4. \end{aligned}$$

This load can be divided into four load components

$$Z = A_{00} + A_{02} y^2 + A_{22} x^2 y^2 + A_{04} y^4,$$

where

$$A_{00} = 383.5; \quad A_{02} = -0.1728; \quad A_{22} = 0.003455; \quad A_{04} = 0.0008638.$$

In compliance with these four components the stress function should also be put together of four components:

$$F = F_{00} + F_{02} + F_{22} + F_{04}.$$

The single function components F_{00} , F_{02} , F_{22} , F_{04} can be taken from the 1st, 6th, 8th and 11th row of Table I. Accordingly

$$\begin{aligned} F &= \frac{A_{00}}{2c} (x \ln x - x) - \\ &- \frac{A_{02}}{8c} \left[(a_2 - a_1) \frac{x^5 - a_1^5}{a_2^5 - a_1^5} - (x - a_1) \right] y^2 - \\ &- \frac{A_{22}}{12c} \left[(a_2^3 - a_1^3) \frac{x^5 - a_1^5}{a_2^5 - a_1^5} - (x^3 - a_1^3) \right] y^2 - \\ &- \frac{A_{04}}{16c} \left[(a_2 - a_1) \frac{x^9 - a_1^9}{a_2^9 - a_1^9} - (x - a_1) \right] y^4. \end{aligned}$$

Substituting the above numerical data, after due reductions the stress function takes the form:

$$\begin{aligned}
 F = & - 79,896 (x \ln x - x) + \\
 & + 9.000\ 00 (1.3223 \cdot 10^{-5} x^5 - x + 4.9568) y^2 - \\
 & - 0.119\ 76 (4.2975 \cdot 10^{-3} x^5 - x^3 + 111.57) y^2 - \\
 & - 0.022\ 48 (2.6014 \cdot 10^{-10} x^9 - x + 4.9995) y^4 = \\
 = & - 79,896(x \ln x - x) - \\
 & - (0.000\ 395\ 66 x^5 - 0.119\ 76 x^3 + 9x - 31.2496) y^2 - \\
 & - (5.8479 \cdot 10^{-10} x^9 - 0.022\ 48 x + 0.112\ 39) y^4.
 \end{aligned}$$

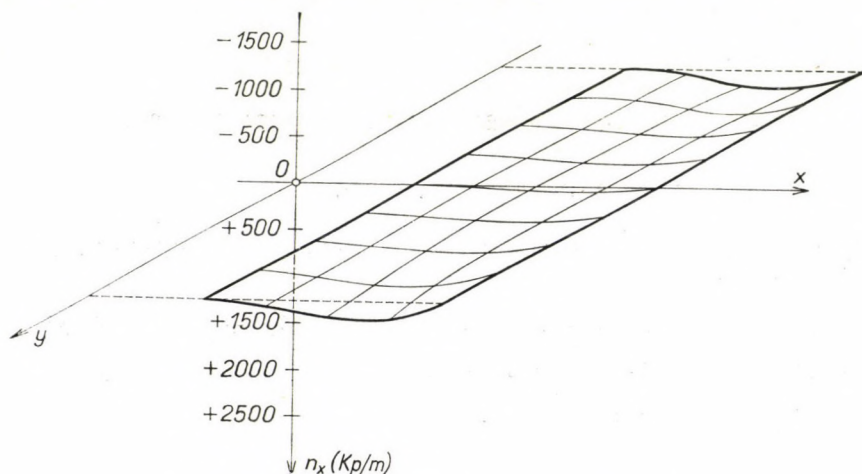


Fig. 4. Diagram of reduced internal forces n_x .

Finally, the reduced internal forces are:

$$\begin{aligned}
 n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = & - (0.000\ 791\ 32 x^5 - 0.239\ 52 x^3 + 18 x - 62.4992) - \\
 & - (7.0175 \cdot 10^{-11} x^9 - 0.269\ 76 x + 1.3487) y^2, \\
 n_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = & + (0.003\ 9566 x^4 - 0.718\ 56 x^2 + 18) y + \\
 & + (2.1052 \cdot 10^{-10} x^8 - 0.089\ 92) y^3, \\
 n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = & - \frac{79,896}{x} - (0.007\ 9132 x^3 - 0.718\ 56) y^2 - \\
 & - 4.210\ 49 \cdot 10^{-10} x^7 y^4.
 \end{aligned}$$

The diagrams of reduced internal forces can be seen in Figs 4–6. On these graphs forces n_x and n_{xy} are drawn using the same scale, while the scale of forces n_y differs from these. As can be seen from these figures, forces n_y are prevalent everywhere in the shell. These are negative along the whole extent of the shell, thus, the arch-directed normal force is at all points a compressive force. Forces n_{xy} are considerably smaller than the n_y ones, while forces n_x are insignificant even in comparison to the former ones. It is interesting to mention that the sign of forces n_{xy} is exactly contrary to the customary one. This apparent awkwardness is not due to some error made in computation, but is a consequence of the special shaping of the shell.

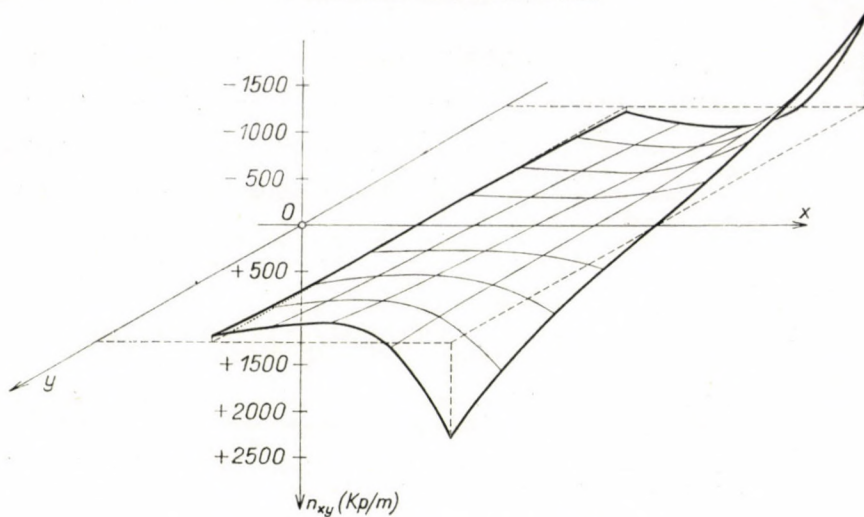


Fig. 5. Diagram of reduced internal forces n_{xy}

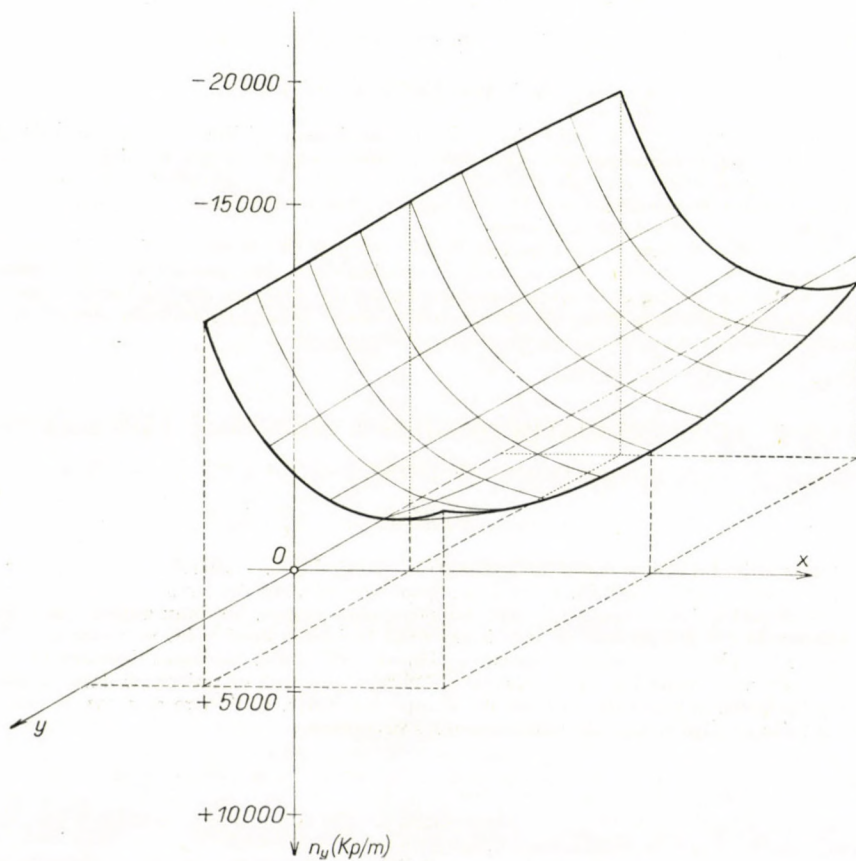


Fig. 6. Diagram of reduced internal forces n_y

REFERENCES

1. MENYHÁRD, I.: Héjszerkezetek elmélete (Theory of Shell Structures, in Hungarian). *Mérnöki Továbbképző Intézet Közleményei* I. rész.
2. SZMODITS, K.: Héjszerkezetek statikája (Structural Analysis of shell Structures, in Hungarian). Akadémiai Kiadó, Budapest 1953.
3. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer Verlag, Berlin (Göttingen) Heidelberg (1957), II. Aufl.
4. SOARE, M.: Die Membrantheorie der Konoidschalen. *Der Bauingenieur* **33** (1958), 256—265.
5. GYENGŐ, T.—MENYHÁRD, I.: Vasbeton szerkezetek elmélete, méretezése és szerkezeti kialakítása (Theory, Dimensioning and Structural Forming of Reinforced Concrete Structures, in Hungarian). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1960.
6. SOARE, M.: Application des équations aux différences finies au calcul des coques. Édition de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest — Éditions Eyrolles, Paris 1962.
7. ROLLER, B.: Csúcsíves konoidhéjak számítása (Calculation of Ogival Conoid Shells, in Hungarian). *Az Építőipari és Közlékező Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* **8** (1962), No. 1.
8. MENYHÁRD, I.—BRAJANNISZ, TH.: Héjszerkezetek statikája (Structural Analysis of Shell Structures, in Hungarian). Tankönyvkiadó, Budapest 1963.

BERECHNUNG VON KONOIDSCHALEN MIT PARABOLISCHER LEITLINIE

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit behandelt Konoidschalen mit parabolischer Leitlinie über einem rechteckigen Grundriss. Die untersuchte Schale stützt sich mit zwei einander gegenüberliegenden Rändern auf vertikale Randbögen mit parabolischer Achse welche Seitenkräften nicht widerstehen; die beiden anderen Schalenränder werden von geraden Randträgern unterstützt welche sich auch zur Aufnahme von Seitenkräften eignen.

Für die Berechnung der genannten Schalen enthält die Arbeit zwei Tafeln aus denen für die praktisch in Betracht kommenden verschiedenen Belastungsfälle die Spannungsfunktion der Schale fertig entnommen werden kann. Die eine der beiden Tafeln bezieht sich auf die üblichen Belastungsfälle, die andere auf spezielle Belastungsfälle der Achsen eines aus aneinandergereihten Konoidschalen bestehenden Sagedaches.

CALCUL DE VOILES MINCES CONOÏDES A DIRECTRICE PARABOLIQUE

P. CSONKA

RÉSUMÉ

On étudie des voiles conoïdes à directrice parabolique, construits sur un plan rectangulaire. Le voile étudié s'appuie, à ses deux bords opposés, sur des arcs de rive à axe parabolique ne résistant qu'aux efforts agissant dans leur plan propre, les deux autres bords du voile étant supportés par des poutres de rive à axe droit résistant aussi à des poussées latérales.

Pour le calcul des voiles en question, l'étude offre deux tableaux donnant la fonction de tension du voile pour les différents cas de charge pouvant se présenter dans la pratique. L'un des tableaux se rapporte aux cas de charges habituels, et l'autre aux cas de charges de neige des toits en shed formés de voiles conoïdes juxtaposés.

РАСЧЕТ КОНОИДНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПАРАБОЛООБРАЗНЫМИ ВЕДУЩИМИ
КРИВЫМИ

П. ЧОНҚА

РЕЗЮМЕ

В статье говорится о коноидных оболочках, построенных над прямоугольными планами и имеющих параболообразные ведущие кривые. Два противоположных края исследованной оболочки опираются на краевые дуги с параболическими осями, не сопротивляющимися боковым усилиям; остальные два края оболочки опираются двумя крайними балками с прямолинейными осями, пригодными для восприятия боковых усилий.

В статье приведено две таблицы для расчета упомянутой оболочки, по которым может быть найдено готовое выражение функции напряжения оболочки для различных возможных в практике случаев нагрузки. Одна из таблиц относится к обычным случаям нагрузки, а другая — к особым случаям нагрузки, когда учитывается задержка снега в складках зубчатой кровли, состоящей из коноидных оболочек, размещенных одна возле другой.

INDEX

- Vasy, G. S.*: The Permissible Deviation of the Inner Diameter of a Main Upstream and Downstream from a Pressure Difference Device for Flow Measurement — Toleranzen des inneren Rohrdurchmessers bei Durchflußmessung mit Drosselgeräten — Les tolérances du diamètre intérieur d'une conduite en cas mesure du débit à l'aide d'un système déprimogène — *Ваши, Г. Ш.*: Допускаемое отклонение диаметра трубопроводов при измерении расхода с помощью сужающего устройства 271
- Лёринци, А.—Себени, П.*: Новый датчик перемещения с использованием полупроводника — *Lőrinczy, A.—Szebeni, P.*: A New Displacement Transducer Using Semiconductors — Ein neuer Wegumformer mit Halbleitern — Nouveaux transmetteurs de déplacement utilisant des semi-conducteurs 291
- Tarján, I.*: Warming up of Wet Mine Air — Die Erwärmung von nassen Grubenwettern — L'échauffement de l'air de mine humide — *Тарьян, И.*: Нагрев влажного воздуха в шахтах 297
- Béda, Gy.*: Über eine Frage der experimentellen Untersuchung des dynamischen plastischen Zuges — A Problem Concerning Experimental Investigation of Dynamic Plastic Traction — Un problème relatif à l'essai dynamique de traction plastique — *Бедя, Дь.*: Один из вопросов опытного исследования динамического пластического волочения 311
- Sasvári, Gy.—Seitz, K.*: De la différence moyenne des températures des deux milieux dans le traitement thermique à contrecourant et à courant parallèle — On the Mean Temperature Difference between the Two Media in Counter-Flow and in Parallel-Flow Heating — Über den mittleren Temperaturunterschied zwischen zwei Medien bei Gegenstrom- und bei Gleichstromerwärmung — *Шашвари, Дь.—Сейтц, К.*: О разности средней температуры, возникающей между двумя средами при противоточном и прямоточном нагреве 319
- Öllös, G.*: Model Investigations into Seepage — Modelluntersuchung von Sickervorgängen — Étude de la filtration sur modèles réduits — *Эллёш, Г.*: Модельные исследования явлений фильтрации 327
- Lévai, Z.*: Analytische Untersuchung elementarer Planetengetriebe — Analytic Examination of Planetary Drives — Examen analytique des trains d'engrenages planétaires — *Леваи, З.*: Аналитический анализ планетарных механизмов 357
- Halász, D.—Szendy, K.*: Losses Caused by the Hall Effect and their Influence on the Efficiency of the Thermal Cycle in MHD Generators — Die durch den Hall-Effekt verursachten Verluste und ihr Einfluß auf den Wirkungsgrad des Wärmekreislaufs — Les pertes dues à l'effet Hall et leur influence sur le rendement du cycle thermique — *Халас, Д.—Сенди, К.*: Потери, вызванные эффектом Холла, и их влияние на КПД теплового цикла 373
- Rózsa, M.*: Stability Analysis of Arches with Vertical Load — Stabilitätsuntersuchung von Bogenträgern mit vertikaler Last — Examen de la stabilité des arcs soumis à des charges verticales — *Розса, М.*: Исследование устойчивости арочных балок с вертикальной нагрузкой 387

- Palotás, L.*: Allgemeiner Spannungszustand des Betons — The Spatial State of Stress of Concrete — L'état de contrainte tridimensionnel du béton — *Палоташ, Л.*: Пространственное напряженное состояние бетона 399
- Balogh, A.*: Die Berechnung der Geschwindigkeiten von Planetenrädern — A New Method for Calculations Related to Planetary Gears — Un nouveau procédé de calcul relatif aux engrenages planétaires — *Балог, А.*: Расчеты планетарных колес новым методом 425
- Terplán, Z.*: Verschiedene Methoden für die analytische Untersuchung der einfachsten Planetenräder-Getriebe — Different Methods of Analytic Examination of the most Simple Epicycloidal Drive — Différentes méthodes pour l'examen analytique des trains d'engrenages épicycloïdaux les plus simples — *Терплан, З.*: Различные методы аналитического исследования простейших эпициклических приводных механизмов 437
- Goschy, B.* — *Balázs, G.*: Über den Einfluß des Verbundes auf die Bruchsicherheit der Spannbetonbalken — Influence of Bond on the Ultimate Moment of Prestressed Concrete Beams — L'influence de l'adhérence sur le moment de rupture des poutres en béton précontraint — *Гоши, Б.* — *Балаж, Д.*: Влияние сцепления между бетоном и арматурой на разрушающий момент последующе-напряженной бетонной балки 453
- Csonka, P.*: Calculation of Conoid Shells Having a Parabolic Generating Curve — Berechnung von Konoidschalen mit parabolischer Leitlinie — Calcul de voiles minces conoïdes à directrice parabolique — *Чонка, П.*: Расчет коноидных оболочек с параболообразными ведущими кривыми 463

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. VIII. 26. — Terjedelem: 18 (A5) ív, 118 ábra

64,59384 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

52,— Ft

Index: 26.025