

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 46

FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendőek:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereich der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die geiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

<i>Barna, J.—Marschalkó, B.</i> : Das rheologische Verhalten wäßriger Bentonitdispersionen, II. — Investigation of the Rheological Properties of Aqueous Bentonite Dispersions, II. — Examen des caractéristiques rhéologiques des dispersions aqueuses de bentonite, II. — <i>Барна, Я.—Маршалко, В.</i> : Исследование реологического свойств водных дисперсий бентонита, II.	391
<i>Csáki, F.—Geszt, P. O.</i> : Synchronizing Methods — Synchronisierungsmethoden — Méthodes de synchronisation — <i>Чаки, Ф.—Гестц, П. О.</i> : Методы синхронизации	197
<i>Csonka, P.</i> : Shells which Cannot be Balanced by Finite Membrane Forces — Schalen, die durch endliche Membrankräfte nicht im Gleichgewicht gehalten werden können — Voiles minces ne pouvant être équilibrés par des forces de membrane finies — <i>Чонка, П.</i> : Оболочки, не уравниваемые конечными мембранными силами	247
<i>Erdélyi, I.</i> : Further Investigation of the Ranque Phenomenon — Weitere Untersuchung der Ranqueschen Erscheinung — Nouvelles recherches sur le phénomène Ranque — <i>Эрдели, И.</i> : Дальнейшее изучение явления Рунке	331
<i>Fodor, J.</i> : New Method for Measuring Gas Flow Speed by Means of Radio-Isotopes — Neue Methode zur Messung von Gasströmungsgeschwindigkeiten mit Hilfe radioaktiver Isotope — Nouvelle méthode pour mesurer la vitesse d'un courant de gaz à l'aide d'isotopes radioactifs — <i>Фодор, Й.</i> : Новый радионуклидный метод измерения движения потоков газов	163
<i>Freudenthal, A. M.</i> : Die Sicherheit der Baukonstruktionen — The Safety of Building Constructions — De la sécurité des structures dans les bâtiments — <i>Фрейденталь, А. М.</i> : О надежности строительных конструкций	417
<i>Geleji, A.</i> : Eine Weiterführung und allgemein gültige Lösung der Kármán'schen Theorie des Walzens — Completion and General Solution of Kármán's Theory of Rolling — Développement et solution de validité générale de la théorie du laminage Kármán — <i>Гелеи, А.</i> : Распространение и общее решение карманской теории прокатки	171
<i>Gerő, L.</i> : Die charakteristischen Epochen des Burgbaues — The Characteristic Epochs of Castle Building — Époques caractéristiques dans la construction des châteaux-forts — <i>Гере, Л.</i> : Характерные периоды архитектуры крепостей	3
<i>Horváth, T.</i> : The Determination of Characteristic Parameters of Microwave Semiconductor Diodes with Variable Capacitance — Die Bestimmung der Kenngrößen von Mikrowellen-Halbleiterdioden mit veränderlicher Kapazität — Détermination des paramètres caractéristiques des diodes semi-conductrices hyperfréquences à capacité variable — <i>Хорват, Т.</i> : Определение характерных параметров полупроводниковых диодов СВЧ переменной емкости	287
<i>Kardos, A.</i> : Comparative Analysis of Some Rapid Tool Life Determination Methods — Vergleichende Untersuchung von Kurzprüfverfahren der Standzeit von Werkzeug-schneiden — Étude comparative des méthodes abrégées de détermination de la durée de coupe des outils — <i>Кардош, А.</i> : Сравнительное исследование сокращенных методов определения срока службы реза	95

- Kovács, G. — Rózsa, L.*: Determination of Stresses in Tunnel Lining Considering Friction between Rock and Tunnel — Ermittlung von Spannungen in der Tunnelmauerung unter Berücksichtigung der Reibung zwischen Gestein und Tunnel — Détermination des contraintes dans le revêtement du tunnel, compte tenu du frottement entre le rocher et le revêtement *Ковач, Г.—Рожса, р.*: Определение напряжений в тоннельной обделке с учетом трения между обделкой и породой 63
- Kovács, K. P.*: Genaue Analogabbildung des mit gesteuerten Organen geregelten Asynchron-Servomotors — Correct Analogous Representation of an Asynchronous Servo-Motor Regulated by Controlled Elements — Représentation analogue correcte d'un servo-moteur asynchrone réglé par des éléments contrôlés — *Ковач, К. П.*: Точно аналоговое копирование асинхронного серводвигателя, регулируемого управляемыми элементами. 151
- Krupkowski, A.—Ptak, W.*: Einfluß des Druckes auf den Reduktionsprozeß von ZnO und CdO mit Kohlenstoff — The Influence of Pressure on the Reduction of ZnO and CdO by Carbon — L'influence de la pression sur la réduction par carbone de ZnO et de CdO — *Крупковски, А.—Итак, В.*: Влияние давления на восстановление ZnO и CdO, восстановленных углеродом 107
- Lázár, J.*: Untersuchung der in der Korngrößenverteilung von Materialhaufen auftretenden Veränderungen während des Fortschreitens des Zerkleinerungsprozesses — Investigation of the Variations in the Granulometric Composition of a Set during the Progress of Crushing — Examen des changements de distribution granulométrique des agrégats pendant le processus de concassage — *Лазар, Й.*: Исследование изменений, происходящих в распределении структуры зерен множества по ходу процесса измельчения 127
- Lehmann, W.*: Ein Beitrag zu den Flugeigenschaften der Segelflugzeuge — Contribution to the Flying Characteristics of Glider Airplanes — Contribution à l'étude des caractéristiques aéronautiques des planeurs — *Леманн, В.*: К летным качествам планеров 447
- Rédei, I.*: Control of Bar-Forces Arising in Plane Trusses — Die Festigkeitsprüfung von ebenen Fachwerkträgern — Contrôle des barres de poutres en treillis plans — *Редеу, И.*: Проверка стержневых усилий плоских решетчатых балок . . . 349
- Rózsa, M.*: Iterative Stability Analysis of Frameworks — Ein Iterationsverfahren zur Untersuchung der Stabilität von Rahmenkonstruktionen — Procédé d'itération pour le calcul de stabilité des systèmes de barres — *Рожса, М.*: Итерационный способ исследования стабильности стержневых конструкций 303
- Szidarovszky, J.*: Two New Practical Methods to Determine the Critical Loads for a Compressed Bar of Variable Flexural Rigidity — Zwei neue praktische Methoden zur Bestimmung der kritischen Kräfte eines gedrückten Stabes mit veränderlichem Querschnitt — Deux nouvelles méthodes pratiques pour déterminer les forces critiques d'une barre comprimée de section variable — *Сидаровски, Я.*: Два новых практических метода определения критических сил сжатого стержня переменного сечения 261
- Szmodits, K.*: Scheibenbemessung auf Grund des Traglastverfahrens — Plastic Design of Disks — Dimensionnement plastique des timpans — *Смодич, К.*: Пластический расчет плосконагруженных пластин 371
- Szuk, G.*: Setting and Hardening of Hydraulic Materials, VI. — Abbindung und Erhärtung hydraulischer Stoffe, VI. — Prise et durcissement des matériaux hydrauliques, VI. — *Сук, Г.*: Схватывание и твердение гидравлических материалов, VI. 317
- Tarján, G.*: Propositions for a Methodology to Make Coal-Washability Surveys and for the Practical Use of Coal-Washability Plots — Vorschläge für die Methodik der Anlage eines Katasters der Kohlenaufbereitarbeit und für die praktische Anwendung der Kohlenwaschkurven — Propositions relatives aux méthodes d'établissement d'un cadastre des caractéristiques d'enrichissement des charbons et à l'application pratique des diagrammes de lavage — *Тарьян, Г.*: Предложения по методике составления перечня показателей обогатимости угля и по практическому применению кривых обогатимости 221

Вамош, Т.—Гертлер, Я.—Вейдингер Л. : Контрольные расчёта методов расчёта потерь в сетях — Vámos, T.—Gertler, J.—Veidinger, L. : Control of the Computation Methods for Network Losses — Kontrolle der Berechnungsverfahren für Netzverluste — Contrôle des différentes méthodes de calcul des pertes en lignes 79

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Budapest, Sept. 24–27, 1963. (*Varga, L.*) 469
Nádai, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume 2. (*Kalishky, S.*) 470

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 46



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1964

ACTA TECHN. HUNG.

DIE CHARAKTERISTISCHEN EPOCHEN DES BURGBAUES

L. GERÓ

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 2. April 1962]

An Stelle der an den Baustil gebundenen Bestimmung des Zeitalters des Burgbaues sind eher die mit der Entwicklung der Belagerungsmittel gleichzeitig entstehenden Schutzbauten charakteristisch. Nach dem Verfasser sind die charakteristischen Zeitabschnitte des Burgbaues die folgenden: I. Erdburgen; II. Wohntürme; III. Burgen mit innerem Turm a) mit regelmäßigem Grundriß – b) mit unregelmäßigem Grundriß; IV. Burgen mit äußerem Turm; V. Burgen mit italienischer Bastei. Die nachfolgende Gruppe umfaßt nicht mehr Burgen, sondern Festungen.

Es werden von dem Verfasser die zur Zeit der Landesnahme (896) in unserem Lande gefundenen Erdburgen und römische Castra kurz behandelt, wobei unter den letzteren ebenfalls a) Erdburgen, b) Planken und c) Steinschutzmauern zu unterscheiden sind.

Die ersten ungarischen Burgen (X.–XI. Jh.) wurden von den Königen erbaut. Die Wohntürme wurden in Ungarn zu einer ziemlich späteren Zeit erbaut, entsprechend der späteren Entwicklung des Feudalismus, parallel mit dem Zerfall der königlichen Güter und der Ausbildung des Privatgroßgrundbesitzes (XII.–XIV. Jh.).

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Verteidigungsbauten, die ersten Erdwerke, mit der Entstehung der ersten Gesellschaften zusammen entstanden und sich mit ihnen zusammen entwickelten. Es sind somit für die jeweiligen Gesellschaften auch ihre Verteidigungsbauten kennzeichnend, doch wurde den letzteren bis zur Zeit wenig Beachtung geschenkt, und auch die Bestimmung der entsprechenden Zeitalter ist noch heute unsicher. Die Baugeschichte der Verteidigungsbauten, d. h. der Burgen, Stadtmauern und Festungen, dürfte dabei das am meisten vernachlässigte Gebiet der Kunstgeschichte darstellen. Bei dem Bau von Burgen ist nämlich die praktische Zweckmäßigkeit in dem Maße entscheidend, daß dabei die Formenwelt der Kunst kaum zur Geltung kommt. Wenn wir jedoch in der Harmonie und Schönheit, in der die der praktischen Zweckmäßigkeit angepaßten Gebäudemassen einer Burg im Stadtbilde oder in der Landschaft erscheinen, auch die Kunst erblicken, so werden wir auch im Burgbau die charakteristischen Züge dieser Kunst entdecken können. Von einem technischen Gesichtspunkte aus kann die Entwicklung des Burgbaues jedenfalls leichter erfaßt werden. In erster Linie müssen wir die Entwicklung der Kampfmethoden berücksichtigen, die die Bautechnik der Verteidigung bedingen.

Die Baustile der aufeinanderfolgenden Epochen können auf Grund der bekannten Grundrißanordnungen, Konstruktionslösungen und der angewandten Detailformen voneinander abgegrenzt werden. In einer ausführlichen

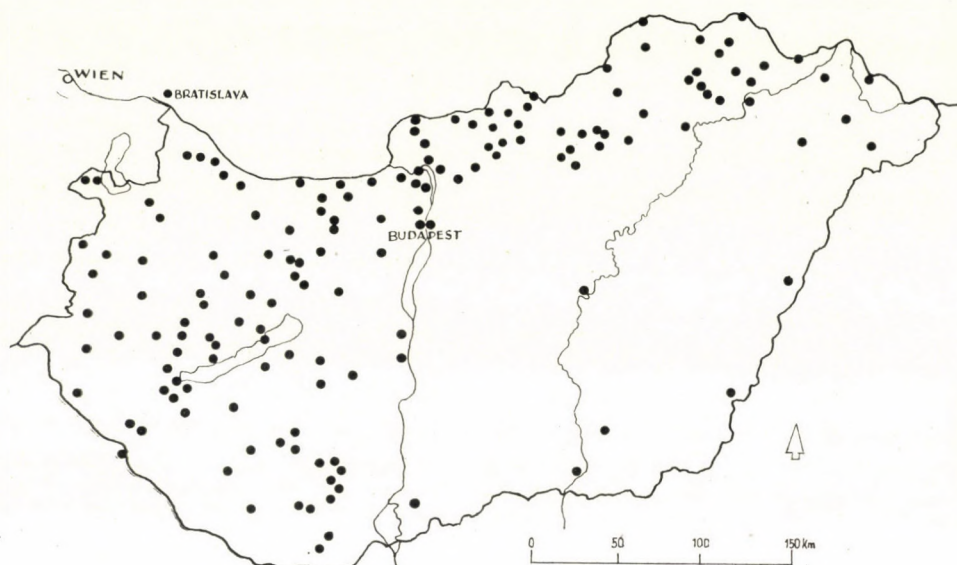


Bild 1. Karte der ungarischen Burgen

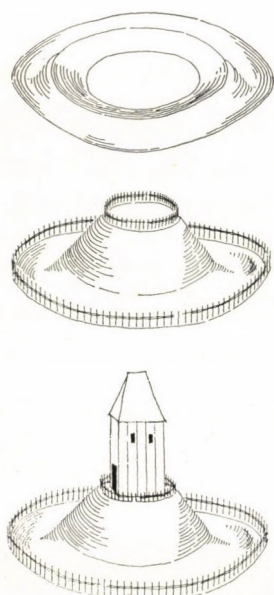


Bild 2. Erdburg. Motte. Purgstall



Bild 3. Römischer Wachturm
(von der Trajans-Säule)

Kenntnis der architektonischen Entwicklung ist es möglich, richtige Aussagen zu machen [1], wobei auch die Entstehung des Baues, die etwaigen Umbauten, der historische Ort des Baues und auch seine Bedeutung bestimmt werden können, woraus auch auf den technisch-kulturellen Entwicklungsgrad der

erbauenden Gesellschaft gefolgert werden kann. Jedoch erteilen diese für die Baugeschichte charakteristischen Kenntnisse keine gehörige Orientierung bei den Burgen, insbesondere dort, wo — wie auch bei dem ungarischen Material — nur wenig solche Details zu finden sind. Um so mehr eignet sich zur Abgrenzung der einzelnen Epochen die Untersuchung der technischen Einrichtungen des jeweiligen Zeitalters, d. h. die Untersuchung der Verteidigungsbauten und ihrer Anordnung.

Die Beschädigungen, die die Burg Buda im Jahre 1944 zu erleiden hatte, führten uns zu dem Gedanken der Konservierung des mittelalterlichen königlichen Palastes und der Burgreste, zugleich aber auch zu deren besserer stadt-bildlicher Präsentierung. Bei dieser Gelegenheit bemerkten wir [2], daß die in der Vergangenheit übliche, an die Baustile gebundene Zeitalterbestimmung der Entwicklung der ungarischen Burgen unrichtig ist. Die Klassifizierung: romanischer Stil = Wohnturm; gothischer Stil = viertürmige Burg, ist falsch. Bezüglich der Bestimmungen der Bauzeitalter der Burgen und der Benennung von Burgteilen begegnen wir sogar in den wissenschaftlichen Werken zahlreichen Irrtümern. Es dürfte genügen, wenn wir auf den Wortgebrauch »Bastei« hinweisen, die bei uns vor dem XVI. Jh. nicht vorkommt [3]. Aus diesem Grunde halten wir es für unumgänglich wichtig, durch die Klärung der im Burgbau herrschenden vielen Irrtümer bezüglich des Wortgebrauches der Verteidigungswerke, der Feststellung ihrer Entstehung und der Zeitdauer ihres Gebrauches eine Grundlage für die Arbeiten zu schaffen, die sich in der Zukunft mit den Burgen befassen wollen. Die Definitionen der Benennungen, die Trennung der Begriffskreise und die Abgrenzung der charakteristischen Entwicklungsperioden können die Fehler ausmerzen helfen, denen wir in der Fachliteratur und in den Werken über Bau- und Kunstgeschichte so oft begegnen, und von denen selbst die ausländischen Werke nicht frei sind.

Der Restaurierung der Budaer Burg folgte die Verhinderung der weiteren Verwüstung der übrigen vernachlässigten Ruinenreste, und so erschien es uns als wünschenswert, uns mit dem Burgbau eingehender zu befassen, um auf diese Art all denen behilflich zu sein, die sich mit der Konservierung von Burgen und in diesem Zusammenhang mit ihrer Geschichte befassen wollen.

Bei der Forschung der Baugeschichte der ungarischen Burgen wurde der Feststellung der nationalen Eigentümlichkeiten und dem Nachweis der ungarischen Charakterzüge eine besondere Beachtung geschenkt. In der derzeitigen Phase der Forschungen konnten wir jedoch einen solchen selbständigen Charakterzug kaum entdecken. Während in den für die verschiedenen Epochen charakteristischen Baustilen die das nationale Gepräge ausdrückenden Nuancen immer aufgefunden werden können, weist der Burgbau — entsprechend den Neuerungen in der Kriegsführung und den neuen Verteidigungsverfahren — auf großen Gebieten ein einheitliches Verfahren auf. Dies

ist der Grund dafür, daß die Entwicklungsperioden des Burgbaues nicht immer mit den Stilepochen der Architektur zusammenfallen, vielmehr hängen sie mit der Entwicklung des Angriffs und der Verteidigung zusammen. Schon aus diesem Grunde ist es verfehlt, von Burgen romanischen oder gothischen Stiles zu sprechen.

Die einheitlichen Entwicklungszüge des Burgbaues umfassen ein viel größeres Gebiet, als es dem Umfang je eines Landes entspricht. Es ist daher



Bild 4. Römisches Lager mit fächerförmigen äußerem Turm. Visegrád

wichtig, die Entwicklung des ungarischen Burgbaues in einem europäischen Rahmen zu betrachten.

Die europäischen Burgen werden oftmals von dem römischen regelmäßigen *Castrum* abgeleitet, die mit den quadratischen Flachlands-Burgen in Beziehung gebracht werden. Von anderen werden wiederum die Burgen einfach »deutsche Wohnungsform« benannt [4], deren wesentlichste Eigenschaft in dem unregelmäßigen, dem Terrain angepaßten Grundriß besteht. Beide Theorien sind verfehlt. Der sich zu dem römischen Ursprung bekennt, rechnet nicht mit den Burgen, die außerhalb des römischen Reiches liegen, so z. B. mit den slavischen Burgen [5], oder mit den anderen Burgen, die die europäische Entwicklung beeinflussten. Es dürfte genügen, wenn wir die noch heute ungelöste Frage der Entstehung der normannischen Burgen (Wohntürme) betrachten, oder die Wirkung der östlichen altertümlichen Burgen erwähnen, ob nun diese östlichen Wirkungen von der frühen byzantinischen

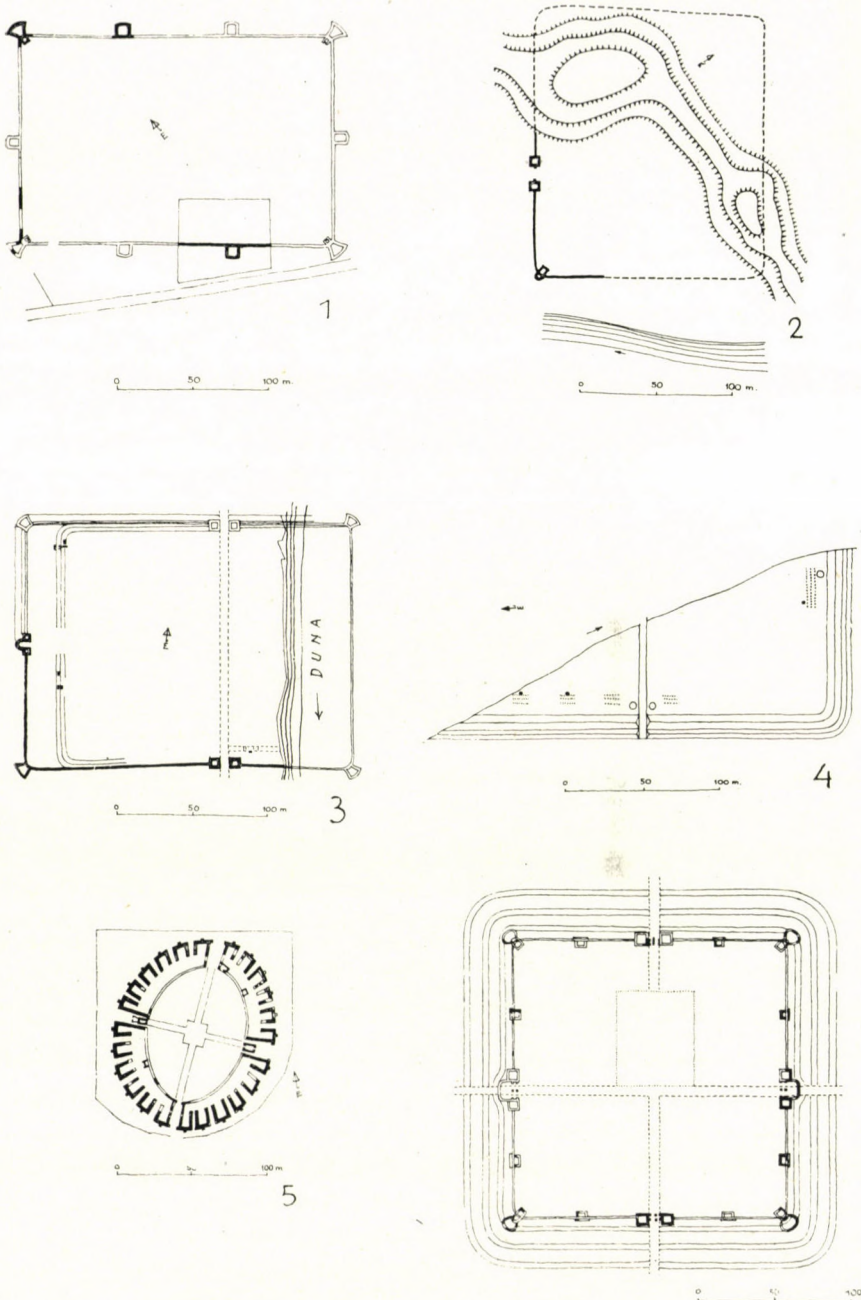


Bild 5

1. Römisches Lager Szentendre (Ulcisia Castra) nach T. Nagy; 2. Römisches Lager Szászhalmobatta—Dunafüred (nach A. Mócsy); 3. Römisches Lager Intercisia-Dunapentele (nach L. Barkóczy); 4. Das IV. Pfahllager Adony (nach Barkóczy—Bónis); 5. Römisches Militär-Amphitheater Óbuda; 6. Römisches Lager Nagytétény (nach F. Fülöp)

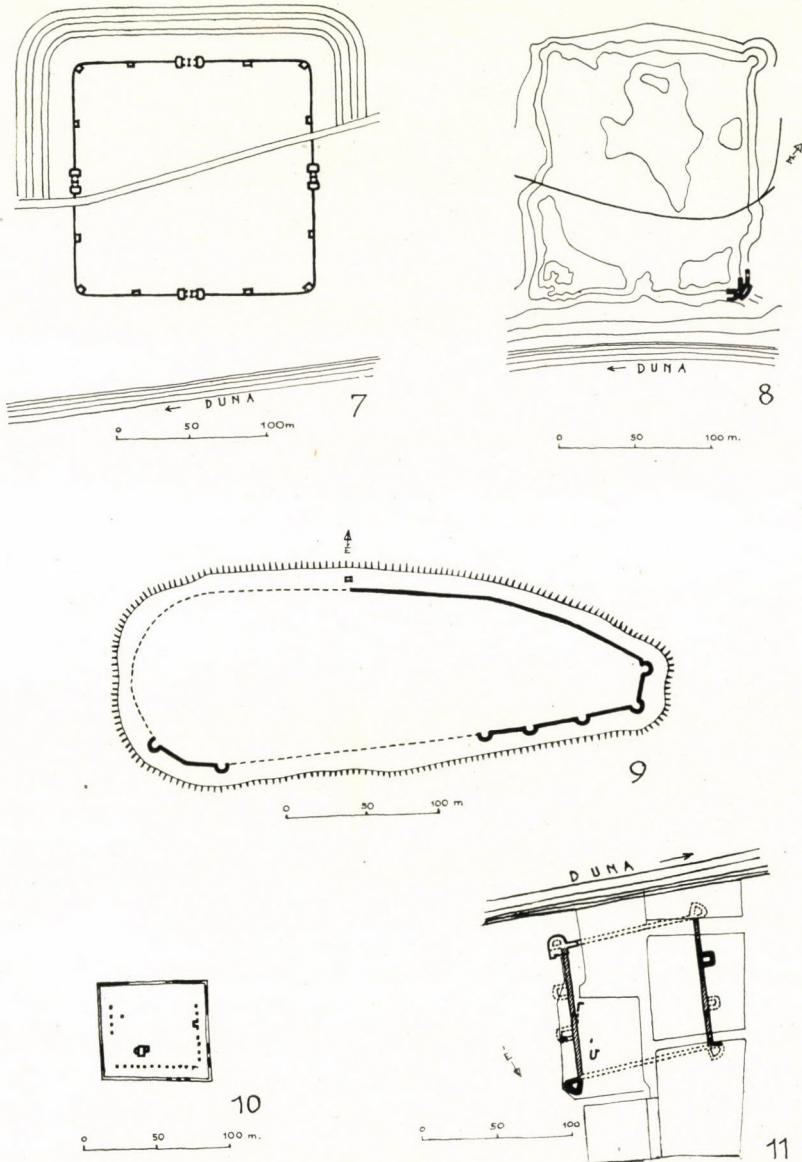


Bild 6

7. Die Gegenfestung (sog. Leányvár), die gegenüber dem Szőnyer römischen Lager, am Donauufer erbaut wurde (nach *Barkóczy*); 8. Römische Lager Dunabogdány (nach *Á. Szalay*); 9. Römische Lager Pilismarót, mit unregelmäßigem Grundriß, verstärkt mit äußeren Türmen (nach *R. Fröhlich*, Arch. Ber. 1893. S. 40); 10. Gegenfestung am linken Donauufer, bei der Mündung des Baches Rákos; (nach *L. Nagy*); 11. Gegenfestung bei dem Pester Brückenkopf des Hafens. Contra-Aquincum (nach *L. Nagy*)

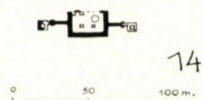
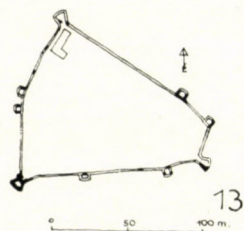
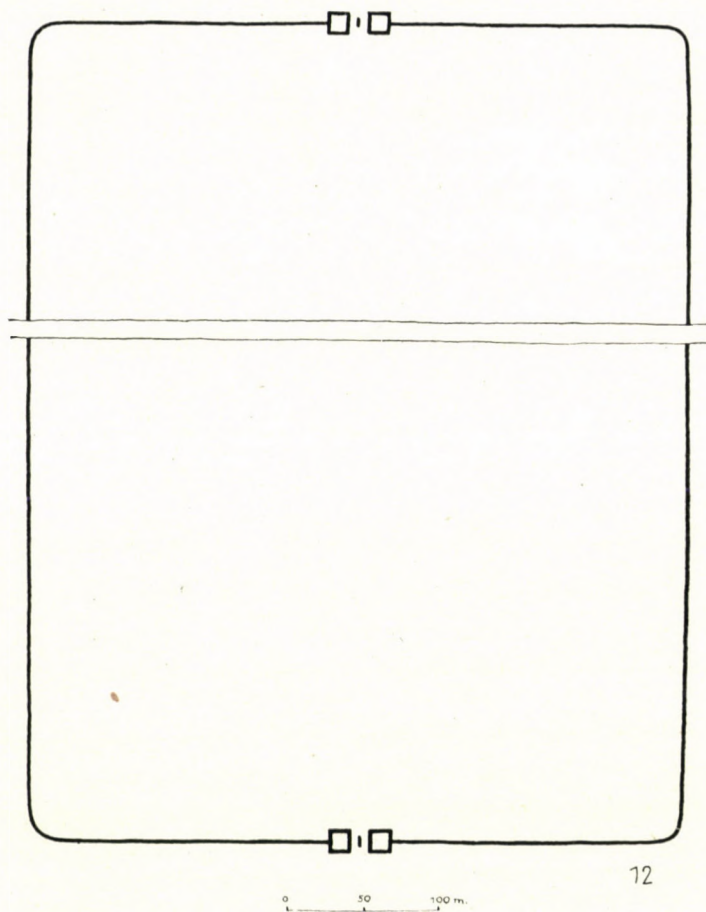


Bild 7

12. Szöny (römisches Militärlager) (nach *L. Barkóczy*); 13. Visegrád, römisches Lager am Sibrik-Hügel (nach *S. Soproni*); 14. Nógrádverőce. Brückenkopf-Lager am linken Donauufer

oder der späteren mohammedanischen Welt nach Europa übermittelt worden sind.

Im Flachland, wo die Verteidigung gleicherweise für die Abwehr des von jeder Seite gleich möglichen Angriffes sorgen muß, ergibt sich von selbst die regelmäßige Burgform. Im Gebirgsterrain aber werden die leichter angreifbaren Stellen besser befestigt. Diese Faktoren entscheiden über die Gestaltung der Burgen nach einem *regelmäßigen* oder *unregelmäßigen* Grundriß.

Aus diesem Grunde müssen wir auch die Ansichten jener abweisen, die sich zu dem *deutschen* Ursprung der Bergburg und dem *italienischen* Ursprung der Burgen des Flachlandes bekennen. Unter dem Blickwinkel der Entwicklungsgeschichte ist auch die Klassifizierung in Bergburg, Wasserburg usw. abzulehnen, da doch auch auf diese Weise Burgen aus den verschiedensten Zeitaltern zusammengefaßt werden können.

Die Ausbildung der verschiedenen Formen der Wehrbauten hängt von der wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Entwicklung, der materiellen und technischen Kultur der Völker ab. Diese Technik hängt mit den Bedürfnissen des Angriffes und der Verteidigung eng zusammen. Die Art und die Mittel der Verteidigung werden durch die Art und die Mittel des Angriffes bedingt. Die für die mit der Entwicklung der Verteidigung schritthaltenden Burgbauten charakteristischen Bauepochen können nach uns wie folgt eingeteilt werden:

I. *Erdburgen*; II. *Wohntürme*; III. *Burgen mit innerem Turm*; IV. *Burgen mit äußerem Turm*; V. *Burgen mit italienischen Basteien*. Die nachfolgende Gruppe ist keine *Burg* mehr, sondern *Festung*.

I. Erdburgen

Zur Zeit der Urgesellschaften zwingen die ständigen Raubanfänge der Nomaden die Ackerbauer-Stämme zur Errichtung von Erdschutzschanzen und Abwehrgräben. Die ältesten mitteleuropäischen Befestigungen greifen in das Neolithikum zurück. In ihrer ursprünglichen Form stellen sie befestigte Siedlungen mit 1—2 oder mehr *Schutzgürteln* dar, die aus den frühesten Formen, d. h. aus dem *dichten, lebendigen Zaun* (1), der *Graben-Erdauffüllung* (2) und der *Pfahlreihe* (3) Schritt für Schritt entwickelt worden sind. Nur allmählich scheiden sich diese in zusammengesetzte, aus selbständigen Werken geschaffene Formen ab: *Vorburgen*, *torschützende Türme* usw. In diesem Zeitalter, vom Neolithikum bis zum Eisenzeitalter, finden wir bei den mediterranen Völkern, neben kleineren kreisförmigen Bauten, oft mächtige *unregelmäßige Ringmauern* aus Steinblöcken. Im allgemeinen wurden diese Mauern aus großen Steinen, sogar riesigen Stücken, *trocken geschichtet*, meistens auf Erhebungen oder im Schutze einer Flußmündung. Von dieser als »mittelmeerisch« zu bezeichnenden altertümlichen *Steinbefestigungsmethode* unterschied sich wesentlich der Typ, der sich in den von den Slaven und Germanen bewohnten

Gegenden entwickelte, und für den es charakteristisch ist, daß das Baumaterial — im Gegensatz zu dem früher verwendeten Stein — aus *Holz* und *gestampfter Erde* besteht. Befestigungen dieser Art sind in Ungarn, aus den Zeiten vor der Landesnahme (896), in großer Zahl zu finden.

Während ihrer Wanderungen dürften die Ungarn die Erd- und Holzburgen der auf der südrussischen Ebene angewandelten Völker kennengelernt haben, ja sogar die von den Griechen in Chersonesos erbauten Steinburgen, die aus regelmäßig geschnitzten Steinblöcken errichtet worden waren, auf Grund der mehrere tausend Jahre alten ägyptischen und babylonischen Überlieferungen. Der Burgbau in dieser Gegend, der bis in die Zeiten von 3200 v. u. Z. zurückgeführt werden kann, zeigt *mächtige, voluminöse Burgmauern* mit starkem *Torschutz*. Die *passive Verteidigung* wurde in vollem Maße den mächtigen Massen und Dimensionen der Burgmauern überlassen. Zur Zeit des neuen ägyptischen Reiches wurde das totale Wehrensemble der antiken Burg entwickelt. Die Mauern werden oft *verdoppelt (Zwinger)*, der Sockel wird nach außen *schräg* gebaut (*scarpa*), die Oberfläche mit Stein verkleidet, das Innere und der obere Teil der Mauer wird aus Ziegeln gebaut. Auf die Krone kommt eine *Zinne* und ein *Schutzkorridor* mit Schießscharten. Zur Verstärkung der Mauerverteidigung erscheint bereits in den frühesten Zeiten der *Turm* mit quadratischem oder kreisförmigem Grundriß. Vor den Mauern wurde zu Beginn ein, später mehrere *Gräben* gegraben, wobei die *Grabenböschung* (*contrescarp*) ausgemauert wurde. Vor dem Burgtor wurde der Graben mit einer *Zugbrücke* überbrückt. Das Burgtor wurde zwischen Türme eingefangen, die vor dem Tor einen gut zu verteidigenden *Torzwinger* bildeten.

Die Entwicklung der Sturmgeräte, Sturmdach (bei der Bestürmung von Platea i. J. 429), Sturmturm, Sturmbock (bei der Bestürmung von Samos im Jahre 440), Wurfmaschinen usw., ferner die Entwicklung der Sturmmethoden brachte eine entsprechende Vervollkommnung der Verteidigungsverfahren mit sich. Die Verteidigung greift immer *aktiver* in die Abwehr des Sturmes ein. Um die Bestürmung der Mauern zu erschweren, wurden die Burgen auf ungangbaren Höhen, auf dem Rand von Schluchten oder auf der Meeresküste aufgebaut, wo die Verwendung der angreifenden Sturmgeräte auf große Schwierigkeiten stieß, wo aber die Abwehr dieser Sturmgeräte verhältnismäßig leicht war [6]. In dem Siracusaer Castello Eurialo können wir ein hochentwickeltes Werk der Verteidigung ansehen, das zur Abwehr der in den Kriegen der Mazedonier und Karthager entwickelten Belagerungsmethoden diente.

Im Gebiete von Europa gelangt die Burgentwicklung bereits vor den Römern bis zu den Steinburgen, in Form des *gallischen Oppidiums* [7]. Die Grundlage des *römischen Lagers (castrum)* bildete die militärische Befestigungsregel des Marius, die am Ende des Tagesmarsches des römischen Heeres den Bau einer *Feldbefestigung* vorschrieb. Diese Feldbefestigung (Lager-

befestigung) versteift sich an den Grenzen (*limes*) des Römischen Reiches, und aus dem *Marschlager* wird ein *stehendes Lager* (*castra stativa*). Die anfänglich aus Erde (1), Planke und Erdwall (2) bestehende Befestigung wird zur Zeit des zweiten Jahrhunderts durch Stein (3) abgewechselt. In Ungarn ist eine ganze Reihe des römischen Verteidigungssystems bekannt, von den aus Stein gebauten Wachtürmen (Nógrádverőcze, Visegrád) über die kleinen Forts (Pester castrum) bis zu den befestigten Lagern (Aquincum, *Intercisa*) und den Schutzmauern der römischen Ansiedlungen, die am Ende des III. Jahrhunderts gegen die Einbrüche der Sarmaten und Quaden erbaut wurden.

Am Anfang der Entwicklung des europäischen Burgbaues finden wir die *Erdhügel* oder die *Erddamburgen*. Im Gegensatz zu der *Erdburg* mit ihrer ausgegrabenen Schanze und ihrem oberen Damm, eventuell mit ihrer Pfahlreihe, stellt die *Erdhügelburg* (1) (*Motte*) eine Ringburg dar, die mit einem breiten Graben umgeben ist, wobei die ausgegrabene Erde im Inneren in Kegelform aufgehäuft wird. Am äußeren Rande, und oft auch auf der oberen Kante des Erdhügels befindet sich eine *Planke* (2). Wir kennen noch eine weitere Burgform aus dieser Zeit, namentlich die *Turmburg* (3) (*Purgstall*). Es handelt sich dabei um einen Turm, der auf einem natürlichen oder künstlichen Hügel errichtet wird und zur Beobachtung der Umgebung dient. Anfänglich wurde der Turm aus Holz gebaut.

Von König Stephan (dem ersten König Ungarns) wurden die von ihm in ein System gefaßten Burgen zum Fundament der ungarischen Staatsorganisation gemacht, wobei diese Burgen auch die Zentren der königlichen Güter bildeten. Über die Konstruktionseigenschaften der bei der Landesnahme hier getroffenen slawischen und der zu dieser Zeit errichteten ungarischen Erdburgen ist uns vorläufig nichts sicheres bekannt. Vermutlicherweise verlief auf der Höhe des Erddammes eine spitzige Plankenreihe, möglicherweise auch an der äußeren Kante des Dammes. Vor dem Graben dürfte ein weit überschaubares Terrain gewesen sein, ferner ein zur Beobachtung der Umgebung geeigneter Holzturm, der zum Schutze des in den Damm eingeschnittenen Weges — des *Tores* — errichtet wurde [8].

In erster Linie bedurfte es der Befestigung der westlichen Grenze, gegen den deutschen Feind, und hier entwickelten sich auch die ersten *Steinburgen* [9].

Zur Zeit der Könige aus dem Hause der Arpaden bildete sich aus und konsolidierte sich der feudale ungarische Staat. Zu Ende des XIII. Jahrhunderts herrschte auch in Ungarn der Ackerbau mit dem Pfluge vor. Dem heimischen Burgbau gaben zweifellos die schrecklichen Erfahrungen des das Land zerstörenden Tatarensturzes (1241) einen Schwung, die Ansicht aber, wonach die Ungarn vor Béla IV. (1235—1270) keine Steinburg hatten, ist völlig verfehlt [10]. Sollten die Angaben des anonymen Notars (Anonymus) des Königs Béla III. nur für das Ende des XII. Jahrhunderts als authentisch hingenom-

men werden, auch in diesem Fall dürfte er eine wahre Urkunde notiert haben, als er von den hier getroffenen (1), nach der Landesnahme errichteten (2) und von den Ungarn angefertigten Burgen (3) schreibt. Aus seinen Ausdrücken ist es deutlich ersichtlich, daß den Ungarn die Erd-, Holz- und Steinburgen bereits bekannt waren. Ihre spezielle Bauart dürfte die *geflochtene Umfriedungsmauer* gewesen sein. Mit diesen Mauern dürften sie die Gespannschaftssitze, die eingelieferten Feld- und Körnerfrüchte und die Depots der Königlichen Regalien (Salz, Gold) verteidigt haben.

Den Bau der deutschen Burgen befahl Heinrich I. um 950, zur Abwehr der »ungarischen Gefahr«. Die nach Westen streifenden Ungarn stießen auf einen stets stärker werdenden Widerstand, und im X. und XI. Jahrhundert wurden die repressiven Rückschläge des Gegners immer häufiger. Nach den Einbrüchen Heinrichs III. beginnen die Ungarn mit dem Bau der ersten Pozsonyer (Bratislava) Burg, die den neueren Angriff i. J. 1052 bereits bestehen konnte.

Die leichtere Verteidigung der massiven Bauten ließ auch den aus Stein gebauten Kirchen eine größere Rolle in der Verteidigung zukommen (Gyulafehértár—Alba Julia, Pécs, Pannonhalma). Dieser Vorzug ist es, der auch die Ungarn zum Aufgeben ihrer bisherigen, aus leichten und lüftigen, geräumigen Zelten bestehenden Wohnungsform zwingt.

Die als Kriegseigenschaft der landnehmenden Ungarn erwähnten *Wagenburgen* und der Bau der die Siedlungsorte der angesiedelten Bewohner sichernden *Erdburgen* dürfte ein fortlebender Gedanke in den frühen Epochen des Feudalismus gewesen sein, doch erscheinen mit den Erdburgen gleichzeitig auch die ersten Steingebilde der feudalen Burgen, namentlich der Wohnturm (Léka—Lockhaus) und die *Burg mit Innenturm* (Esztergom, Pozsony, Veszprém).

Für diese Epoche ist in Ungarn der *Königliche Burgbau* charakteristisch. Obschon bis zu einem gewissen Maße auch die Bauschule der Kirche, in erster Linie die Kirchenfestungen der Bauschule der Benediktiner hierzu gezählt werden können, doch ist das königliche Gut im Übergewicht, und nur dieses verfügt über die zur Erhaltung der zahlreichen Verteidigungswerke erforderliche materielle Kraft. Bis zum Ende des XII. Jahrhunderts entwickelte sich in Ungarn der Großgrundbesitz nicht in dem Maße, daß sich eine zum Bau von Steinburgen fähige Aristokratie hätte ausbilden können.

II. Wohntürme

Mit der vollen Ausbildung des Feudalismus und der Entwicklung der Produktion häuften sich mächtige Vermögen in den Händen eines baulustigen Königs, Fürsten oder Magnaten an. Dieser Reichtum und die Verbreitung

des Steinhandwerkes schufen auch in Europa die Grundlage zur Ablösung des brennbaren und schnell verfallenden Holzbaues durch den haltbareren und widerstandsfähigeren Steinbau. Der Steinbau befestigte auch die Selbstständigkeitsbestrebungen der Aristokratie gegen die Zentralmacht der Könige. Diese Bauart hat alte Traditionen in der mediterranen Gegend, im Raume des ehemaligen römischen und byzantinischen Reiches, von wo ihre Wirkung ausgestrahlt wird.



Bild 8. Vorbild des Wohnturmes (aus den Ausgrabungen von Volci, VI. Jh.)

Zur Wende des X. und XI. Jahrhunderts erscheinen die aus Stein gebauten riesigen *Wohntürme* (1) der Normannen (*keep*), mit denen der Wohnturm-Bergbau beginnt und sich über ganz Europa verbreitet [11]. Bald entwickelt sich auch die nächste Bauform: die Burgform des *mit Mauer umgürtelten Wohnturmes* (2).

Auch die frühen englischen Burgen sind mit den normannischen Burgen von Nord-Frankreich verwandt. Der Wohnturm besteht aus einem Turm großer Grundfläche, mit Seitenlängen von etwa 15—20 m, mit vier- oder vieleckigem, eventuell kreisförmigem Grundriß und mit außerordentlich dicken Wänden. Im Inneren sind vier oder noch mehr Stockreihen, zumeist mit flachen Decken, nur im untersten Stock gewölbt. Im Keller ist ein Brunnen, ebenerdig ein Magazin, im ersten Stockwerk befindet sich der Eingang (mit äußerer Treppe) und die Wache. In den oberen Stockwerken sind die mit Wandnischen erweiterten Wohnräume untergebracht. Stiegen (Wendel-

treppen) bilden die innere Verbindung. Der Wohnturm ist die Wohnung der Familie des Besitzers im Kriege, unter Umständen auch zu Friedenszeiten.

In Ungarn beginnt der Wohnturmbau, entsprechend der späten Entwicklung des Feudalismus, erst in den XII.—XIV. Jahrhunderten, es wurden solche aber auch später gebaut (Pusztapalota, XV. Jh.). In diesen späten Zeiten entwickelt sich in Ungarn der persönliche Großgrundbesitz, parallel mit dem Zerfalle der königlichen Großgüter im XIII. Jh. Der größte Grund-

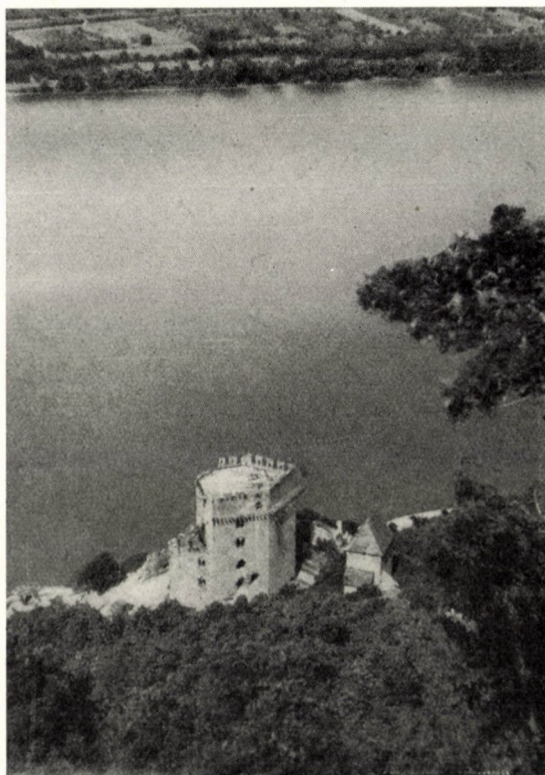


Bild 9. Visegrád. Wohnturm (um 1260)

besitzer bleibt jedoch auch weiter der König, und so blieb die führende Rolle des königlichen Burgbaues auch in dieser Epoche erhalten.

Das Erscheinen der Wohntürme in Ungarn fällt mit dem Bau der von Rundmauern umringten, komplizierter angeordneten *Burgen mit innerem Turm* überein (ebenfalls XIII. Jh.). Die letzteren werden jedoch mit Rücksicht auf die allgemeine europäische Burgentwicklung für sich behandelt, stellen sie doch in der Entwicklung eine gut abgesonderte, selbständige und zweifelsohne entwickeltere, somit eine spätere Gruppe dar.



Bild 10. Sárospatak. Wohnturm. XIII. Jahrhundert



Bild 11. Sárospatak. Großer Saal des Wohnturmes

An der südlichen Ecke des Esztergomer Burgberges wurde ein Wohnturm in Form eines unregelmäßigen Sechseckes gebaut, der den noch heute sichtbaren romanischen Kern des Palastes der Könige Béla III. und Imre vom Ende des XII. Jahrhunderts bildete. Der Grundriß ist noch deutlich erkenntlich, der Aufbau ist jedoch mit den späteren Umbauten verschwommen.

Aus der Zeit der Arpaden stammt der Wohnturm der Rákoczi-Burg in Sárospatak [12]. Der Turm wurde um 1250 gebaut, mit einer Grundfläche von $20 \times 20 \text{ m} = 400 \text{ m}^2$ und mit quadratischem Grundriß. Auffallend sind die Schießcharten des tiefsten Stockwerkes. Hier wird der bei den Wohntürmen in Erscheinung tretende Nachteil der ausschließlich passiven Verteidigung eliminiert. Obwohl dies noch nicht in vollem Maße gelang, doch wurde es versucht, eine aktive Verteidigung zu schaffen.

In der zweiten Hälfte des XIII. Jahrhunderts wurde der Wohnturm von Visegrád erbaut. Ein eigentümlicher Zug dieses Wohnturmes besteht darin, daß sein Grundriß — im Gegensatz zu dem der meisten ungarischen Wohntürme — ein gestrecktes Sechseck darstellt. Die Grundfläche des Turmes beträgt etwa 360 m^2 . Das Innere des Turmes war ursprünglich in 5 Stockwerke geteilt, die voneinander teilweise durch Holzdecken, teilweise durch Gewölbe getrennt waren. Gemäß der allgemein üblichen Anordnung der Wohntürme, hatte auch der von Visegrád einen äußeren Treppenbau. Dieser Wohnturm ist ein kraftvolles Steingebäude mit Fensternischen, Zwillingsfenstern mit mittlerer Säule, verborgenen Notlokalen und Kaminen. Die aus regelmäßigen Quadersteinen angelegte Mauer wurde nach den schönsten Traditionen der Romanik erbaut.

III. Burgen mit innerem Turm

Im mächtigen Kampf der Capeten und Plantageneten folgte ein Burgbau dem anderen. Die Holzburgen werden in Frankreich zwischen 1170 und 1220 in Stein umgebaut. Vermutlicherweise waren es Richard Löwenherz, Augustus Philip und Friedrich Barbarossa, die die neue Art des Burgbaues vom Osten mit sich brachten. Der ausgewählte Ort wird mit einer starken Mauer umfriedet. An den wunden Punkten der Burg werden hohe *hervorspringende* Türme errichtet, was bedeutet, daß die *antike Burg mit äußerem Turm* und unregelmäßigem Grundriß im europäischen Burgbau — bereits gegen Ende des XII. Jahrhunderts — wieder erscheint. Am oberen Teil der Mauern wird eine Wehrzinne angebracht, und die Schutzkorridore werden von Steinkonsolen getragen. Zu dieser Zeit sind noch keine aus Stein gemauerten bogenreihigen Vorsprünge, Schutzerker, Ausgüsse und Zugbrücken vorhanden.

Eine charakteristische Mangelhaftigkeit des Wohnturmes besteht darin, daß er keine Möglichkeit zur Flankierung bietet.



Bild 12. Esztergom. Ansicht der Burg



Bild 13. Esztergom. Burg-Kapelle

Der Wohnturm wird bald mit verschiedenen Wohnräumen, Magazinen und u. a. mit einer Kapelle ergänzt, und das ganze Ensemble wird mit einer Mauer umgürtelt, wie es auch aus der Erweiterung der Burg Esztergom gegen Ende des XII. Jahrhunderts hervorgeht. Die den Burghof umgebende Mauer wird mit *Schutztürmen* befestigt, insbesondere der Eingang mit einem, oft mit zwei *Tortürmen*. Der Weg zur Burg wird durch Tortürme, *Zwinger*, über



Bild 14. Nagyvázsöny. Wohnturm

Wolfsgruben gelegte *Zugbrücken* geführt, um zu verhindern, daß der Feind zum innersten Kern gelange. Der Wohnturm bleibt zumeist unabhängig, damit er sich, selbst nach dem Sturz der übrigen Teile, noch eine Weile halten könne. In der mit Nebengebäuden und mit den diese umgebenden Burgmauern, mit Toren und Schutztürmen ausgestatteten mittelalterlichen Burg erscheint der den repräsentativen Empfängen und Beratungen des wohlhabenden Besitzers dienende *Prunksaal* (*palatium*, *Rittersaal*) und der von den Gebäuden umgeschlossene *Hof*, die Stätte des alltäglichen Lebens der Burg und oft auch der Schauplatz der feierlichen Turniere.

Nunmehr wird nicht immer ein Wohnturm erbaut. Es kommt vor, daß als letzte Obhut der Burg ein im stärksten, meistverteidigbaren Punkt der Burg angeordneter Turm dient, der in Ungarn *Alter-Turm* genannt wird. Der »alte« (oder große) Turm hat einen kleineren Umfang als der Wohnturm,

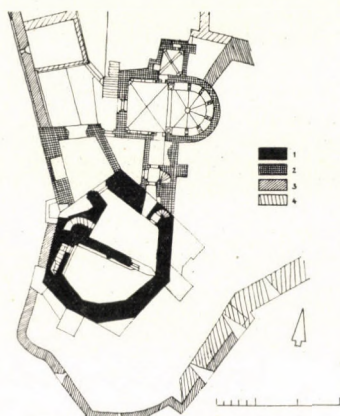


Bild 15. Esztergom. Grundriß des Wohnturmes. XII. Jh.

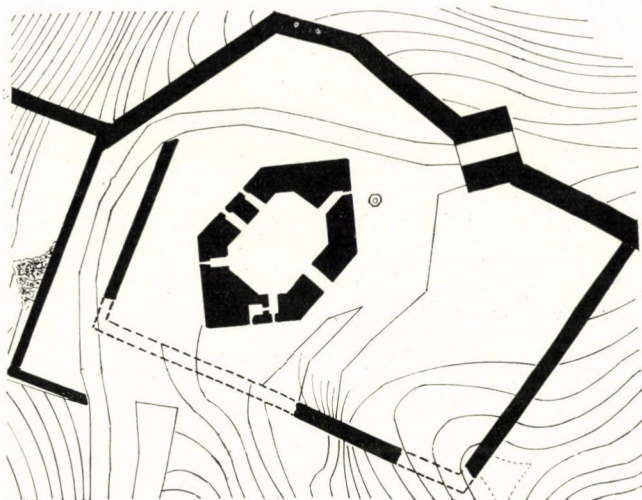


Bild 16. Visegrád. Grundriß des Wohnturmes mit der unteren Burg- und Talspermauer (um 1260)

seine Mauern sind dünner, sein Aufbau einfacher, es wohnt ja nicht die Familie des Besitzers darin, sondern nur die Wache. Aber er ist größer, d. h. »älter« als die übrigen Türme.

Mit dem Ensemble: Turm, Palast, Kapelle, Wehrmauer und Hof bildet sich ein neuer Typ der Burg aus, bei dem der Körper der die Verteidigung der Mauern verstärkenden Türme noch *innerhalb der Mauern* steht.

Der größer gewordene Raum der Burg ist zur Aufnahme von mehr Verteidigern, Lebensmitteln und Waffen geeignet, man kann somit — über die passive Verteidigung hinaus — auch schon mit einer aktiven Verteidigung rechnen. Die Verteidiger können aus der Burg mit Erfolg ausstürzen und die Angreifer verjagen. Bei den Burgen mit innerem Turm hat die Verteidigung jedoch noch immer den Nachteil, daß die *flankierende Verteidigung fehlt*.



Bild 17. Diósgyőr. Burg mit innerem Turm u. regelmäßigem Grundriß (1343—1395)

Die Burgen mit innerem Turm können auf Grund der Anordnung nach dem Grundriß in zwei große Gruppen eingeteilt werden: Burgen mit *regelmäßigem* (im allgemeinen quadratischem) und Burgen mit *unregelmäßigem* Grundriß.

Ungarische Burgen mit regelmäßigem Grundriß sind: Pozsony (Bratislava), Diósgyőr (1343—1395), Tata (Anfang des XV. Jahrhunderts), Várpalota (XV. Jahrhundert) usw.

Die meisten ungarischen Burgen wurden jedoch nach der Eigentümlichkeit der im gebirgigen Terrain erbauten Burgen in der unregelmäßigen Form

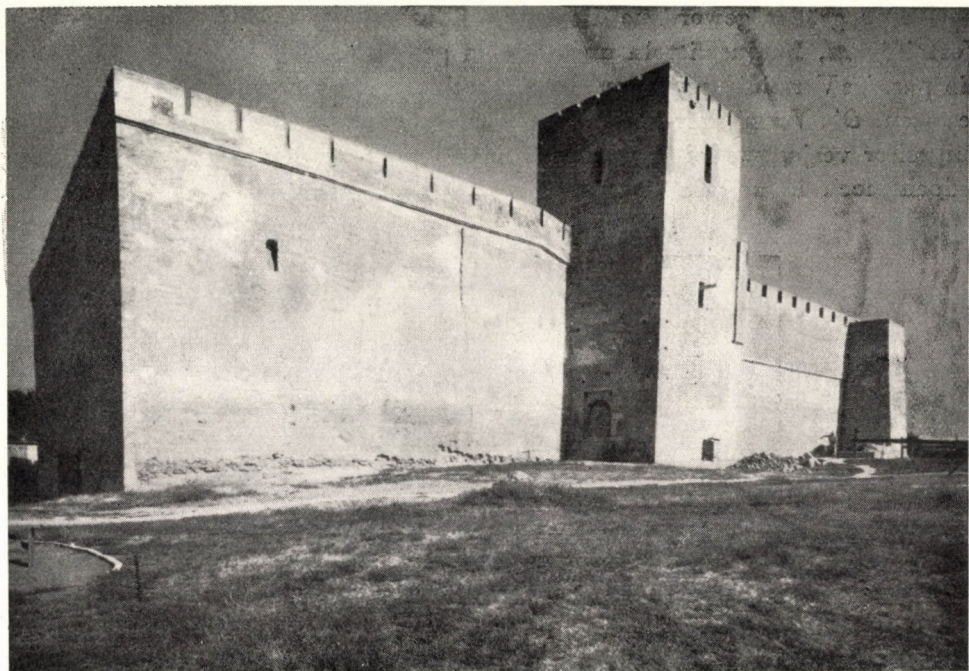


Bild 18. Gyula. Burg mit innerem Turm und regelmäßigem Grundriß

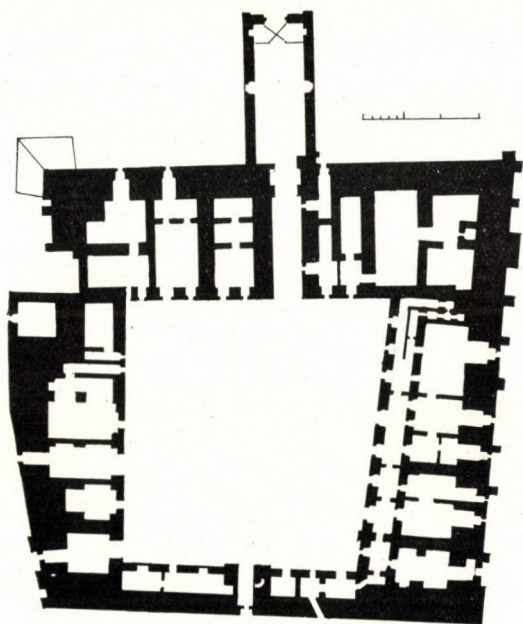


Bild 19. Várpalota. Grundriß der Burg

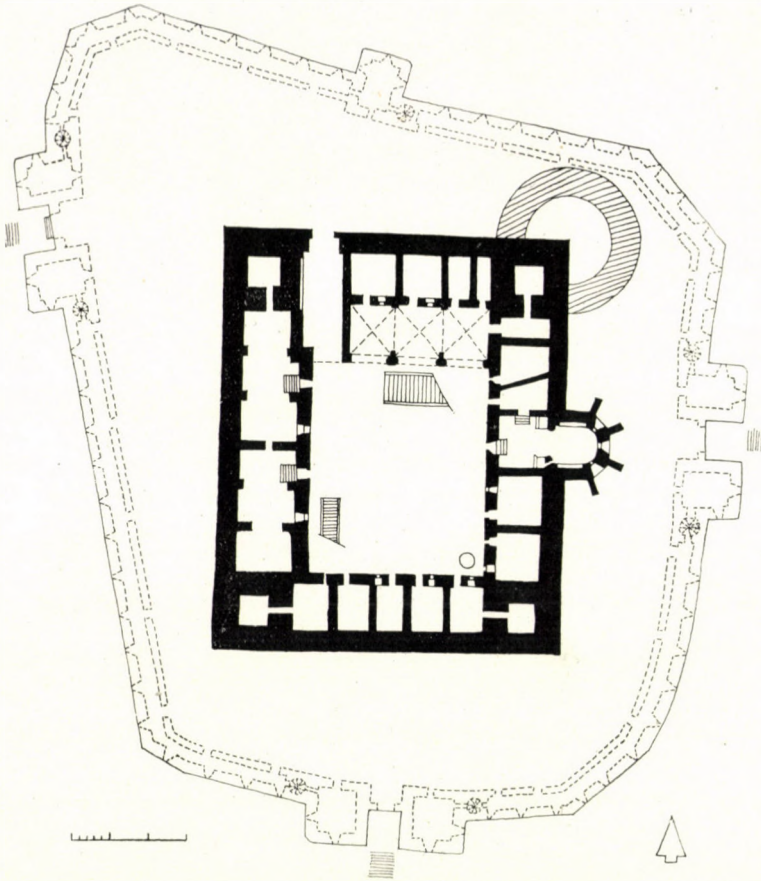


Bild 20. Diósgyőr. Grundriß der Burg mit innerem Turm u. regelmäßigem Grundriß

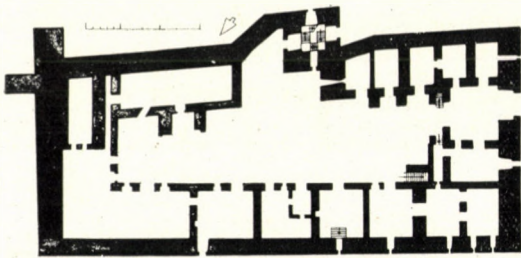


Bild 21. Gyula. Grundriß der Burg

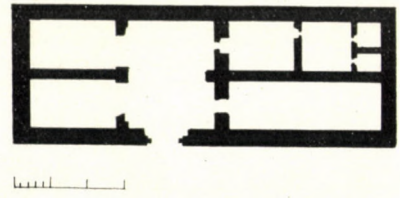


Bild 22. Várgesztes. Grundriß der Burg

der Burgen mit innerem Turm erbaut: Esztergom, Buda, Visegrád und die Burgen in Oberungarn und Transdanubien.

Béla IV. ist nach dem Tatarenzug gezwungen, seinen Standesherrn den Bau von privaten Burgen zu erlauben. Hierdurch wurde selbstredend die spätere feudale Anarchie unterstützt. Diese Phase der Entwicklung trifft

in Ungarn im XV. Jahrhundert mit den durch den wirtschaftlichen Aufschwung bereicherten Großgrundbesitzern ein.

Die Art der Ausbildung der Burgen, ferner die Anordnung von Palast, Prunksaal, Frauenabteilung, Küchen usw. ist äußerst mannigfaltig in dieser

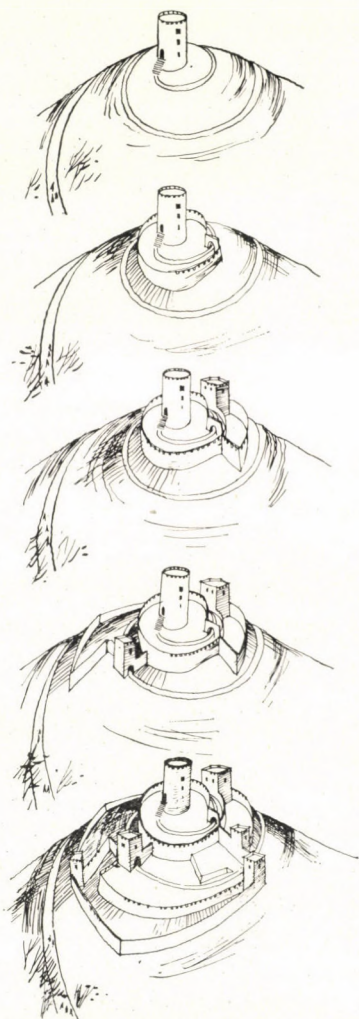


Bild 23. Schema des Grundrisses von in Schneckenform gebauten Burgen

Bild 24. Perspektivisches Bild der in Schneckenform gebauten Burg

Zeit. Eine Ähnlichkeit zwischen den Grundrissen suchen wir vergebens. Die Verteidigungseinrichtung und die Anordnung ist stets von dem Terrain abhängig, dessen natürlicher Schutz so gut wie möglich ausgenutzt werden soll. Die Bauart beruht auf dem Grundprinzip, daß die Verteidigung aus zahlreichen, voneinander unabhängigen Abschnitten bestehe, um den Angreifer



Bild 25. Szigliget. Burg mit innerem Turm u. mit unregelmäßigem Grundriß



Bild 26. Sümeg. Burg mit innerem Turm u. unregelmäßigem Grundriß



Bild 27. Somlyó. Burg mit innerem Turm u. unregelmäßigem Grundriß

beim Eindringen immer wieder aufhalten zu können. In einer auf diese Weise in Abschnitte geteilten Burg standen die Türme mit den inneren Burgmauern nicht in Verbindung, damit der Feind bei etwaiger Einnahme der Türme nur schwer weitergelangen könne. Es erwies sich als zweckmäßig, stellenweise einzelne Brücken einzuschalten, die im Notfall abgerissen, zerlegt eingezogen, bzw. später wieder aufgezogen werden konnten (*Zugbrücke*).

Viele ungarische Burgen wurden in Schneckenform angelegt. Bei diesen führt der Weg zur Berg in Schneckenform, wobei der Kern der Burg in immer

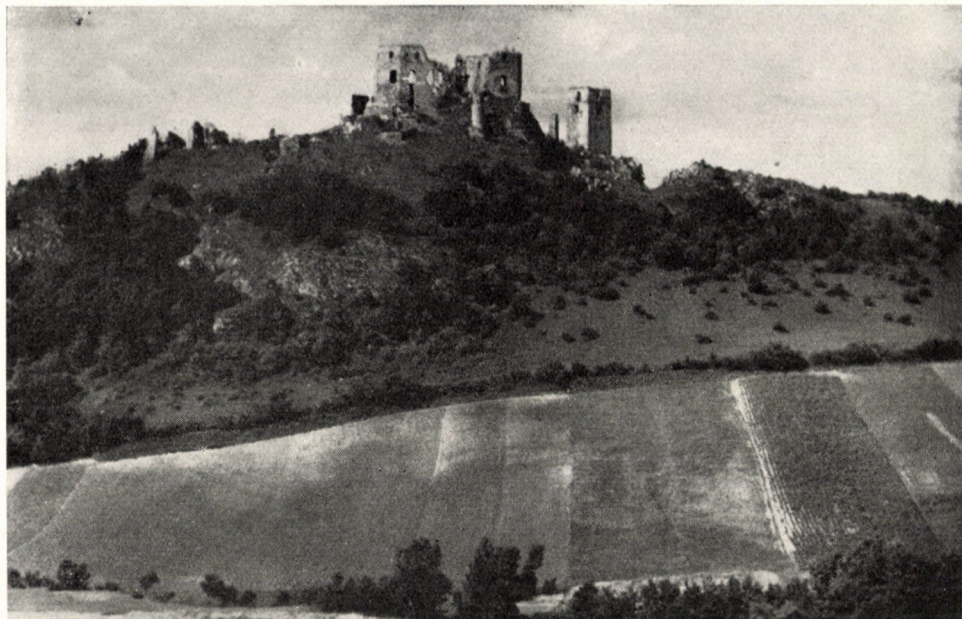


Bild 28. Csesznek. Burg mit innerem Turm u. unregelmäßigem Grundriß

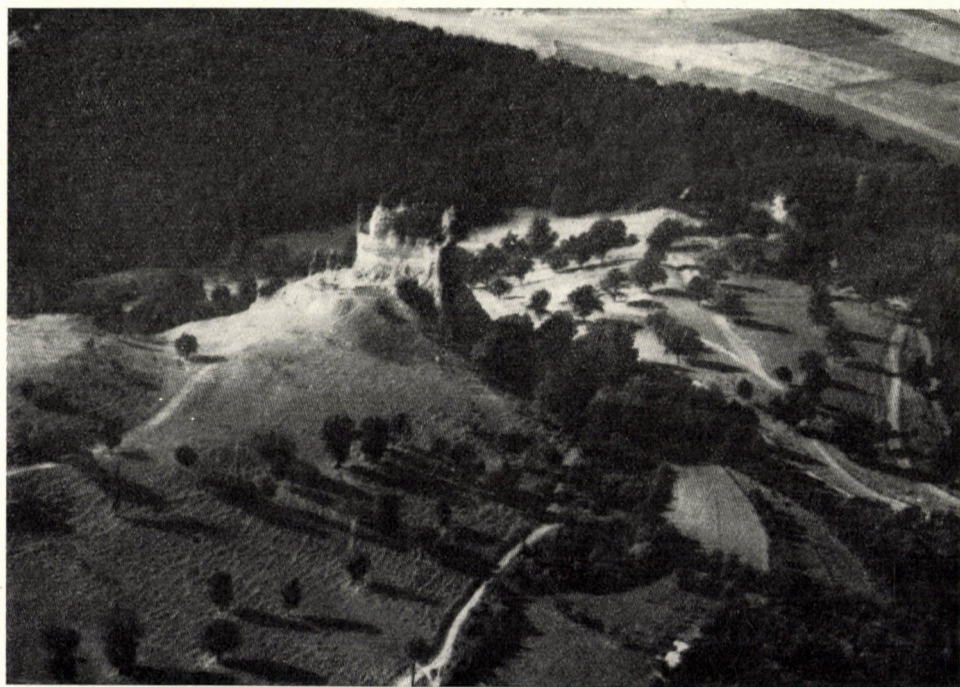


Bild 29. Hollókő. Burg mit innerem Turm u. unregelmäßigem Grundriß

höheren und immer schmaler werdenden Kreisen angenähert wurde. Der auf diese Weise ausgebildete Weg führt in Zwingern durch mehrere Tore zu dem in der Regel an der höchsten Stelle stehenden »alten Turm«. Während der auf-

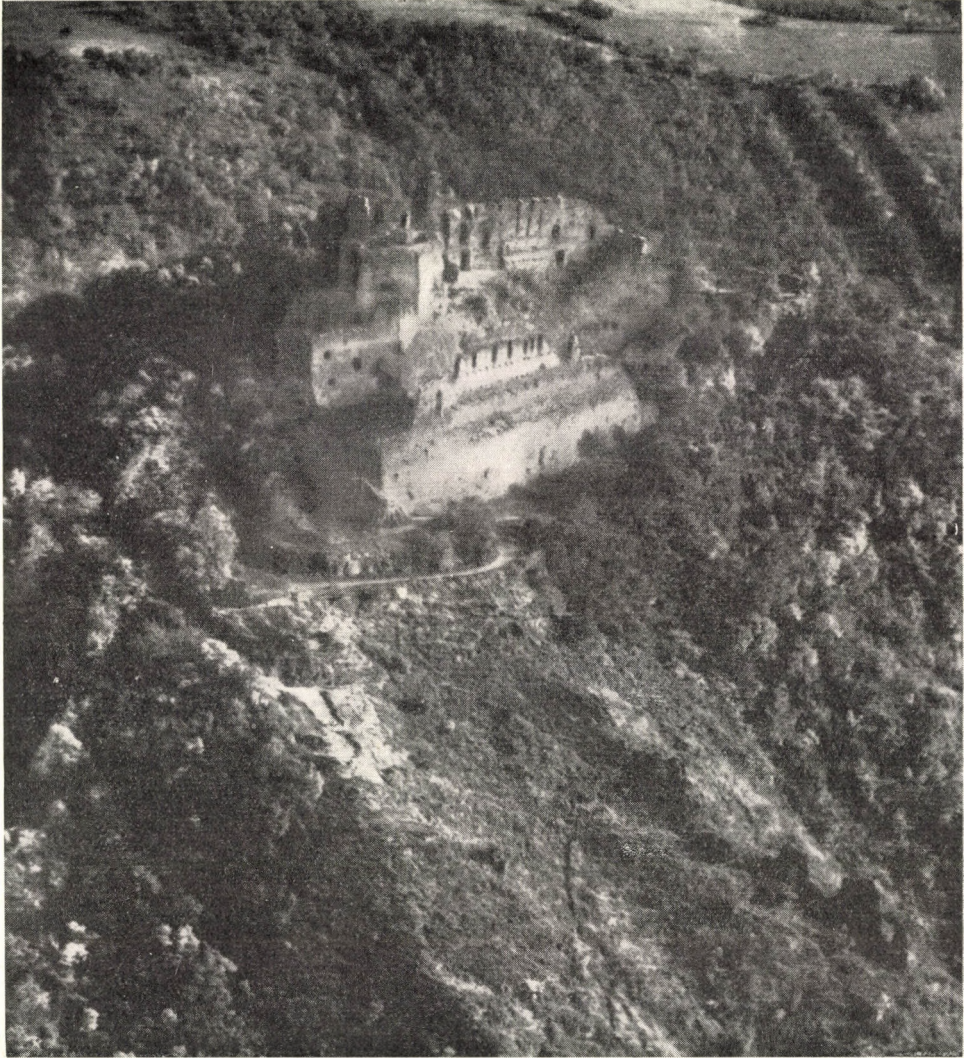


Bild 30. Visegrád. Burg mit innerem Turm u. unregelmäßigem Grundriß

wärts führende Weg in den Zwingern ansteigt, konnten sich die Verteidiger der Burg auf dem Wehrgürtel eines noch höher liegenden Mauerringes postieren (Sümege, Szigliget, Salgó, Hollókő, Buják, Nógrád, Hegyesd, Trencsén—Trencin, etc.).



Bild 31. Sümeg. Burg mit innerem Turm u. unregelmäßigem Grundriß



Bild 32. Kőszeg. Die Burg



Bild 33. Sümeg. Die Burg



Bild 34. Buda. Die Burg

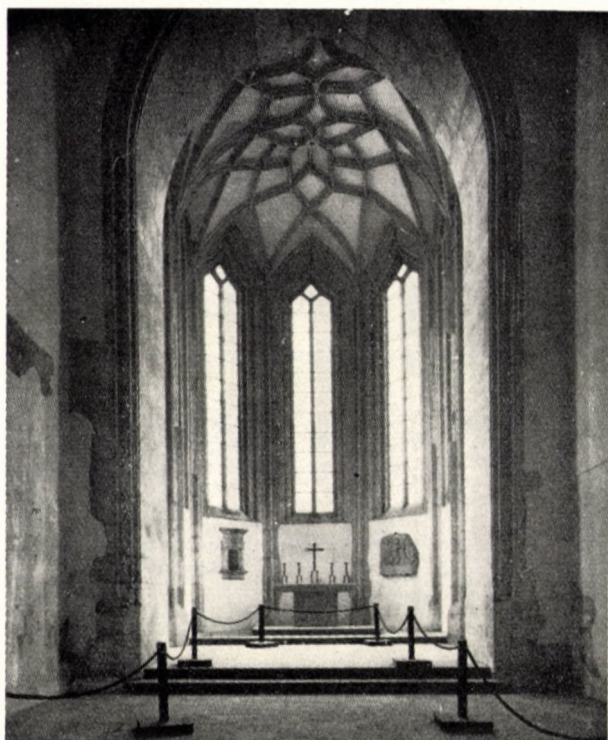


Bild 35. Siklós. Kapelle der Burg

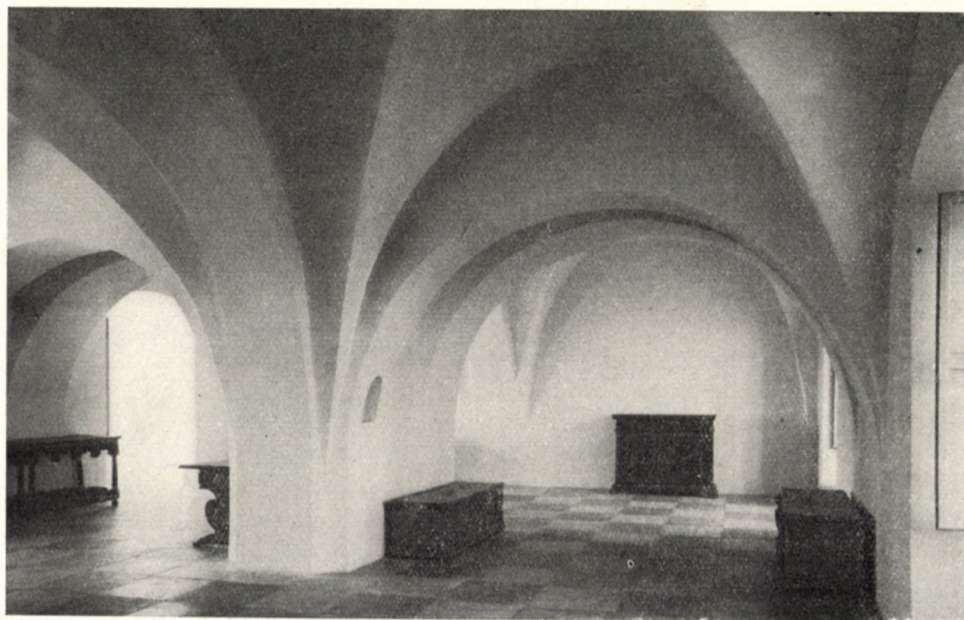


Bild 36. Siklós. Inneres Bild der Burg

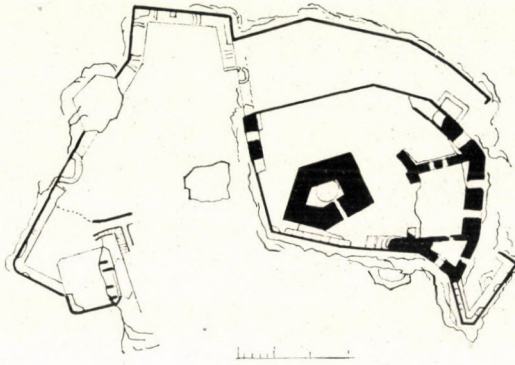


Bild 37. Hollókő. Grundriß der Burg

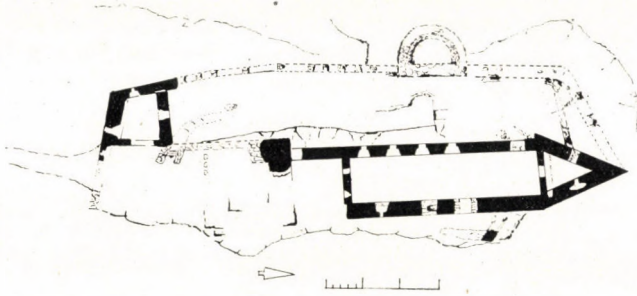


Bild 38. Boldogkő. Grundriß der Burg

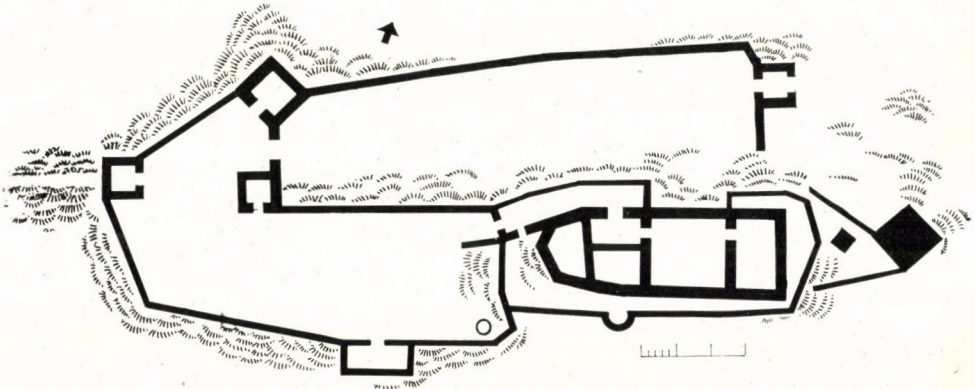


Bild 39. Csesznek. Grundriß der Burg

Von den Burgen mit innerem Turm und unregelmäßigem Grundriß seien als Beispiele angeführt: Esztergom (1198), Veszprém (XI. Jh.), Buda (erste Erw. 1255), Visegrád (erste Erw. 1256), Sümeg (einzelne Teile stehen bereits im Jahre 1241) Hollókő, Boldogkő, Csesznek usw.

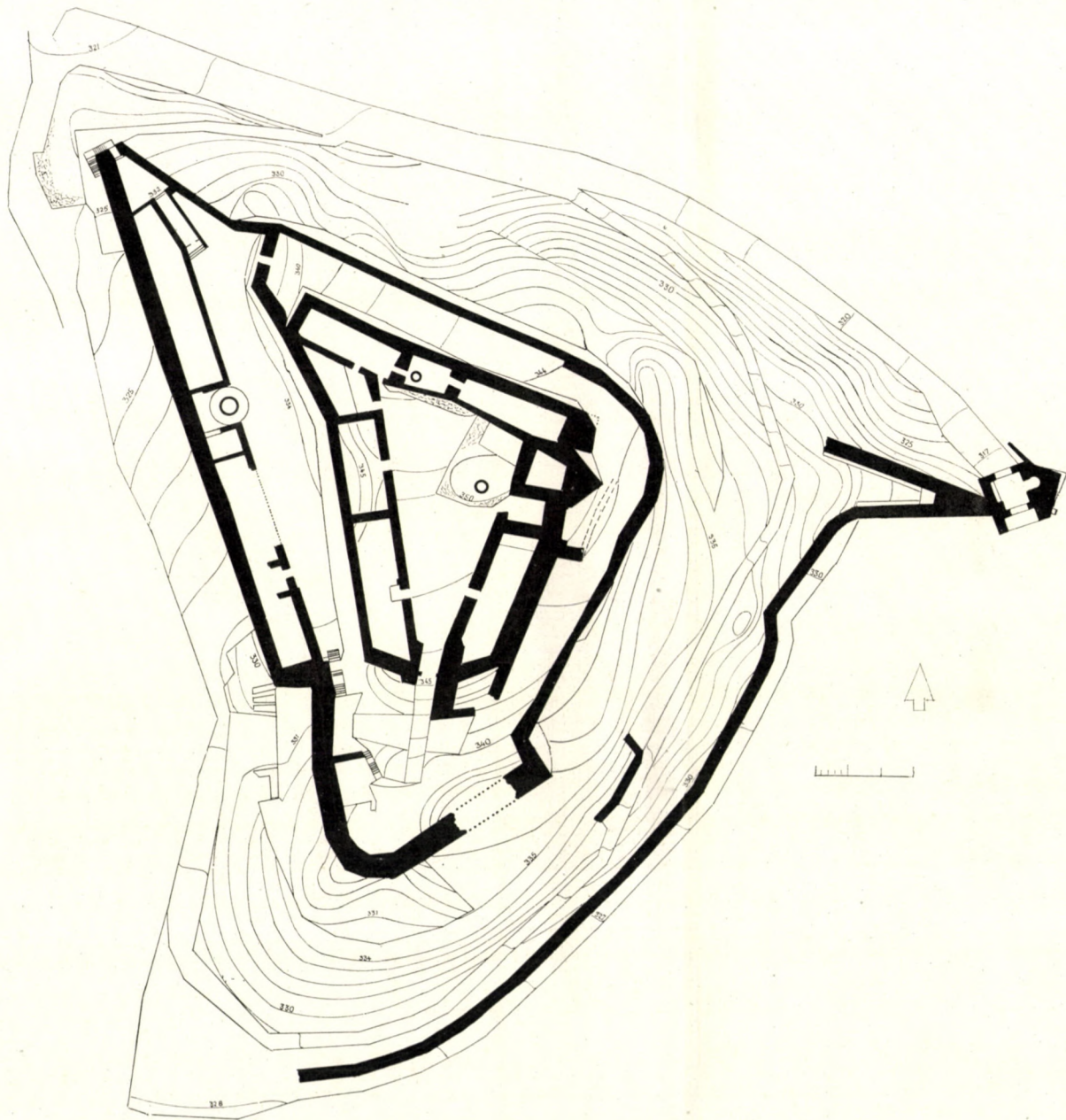


Bild 40. Visegrád. Grundriß der Burg

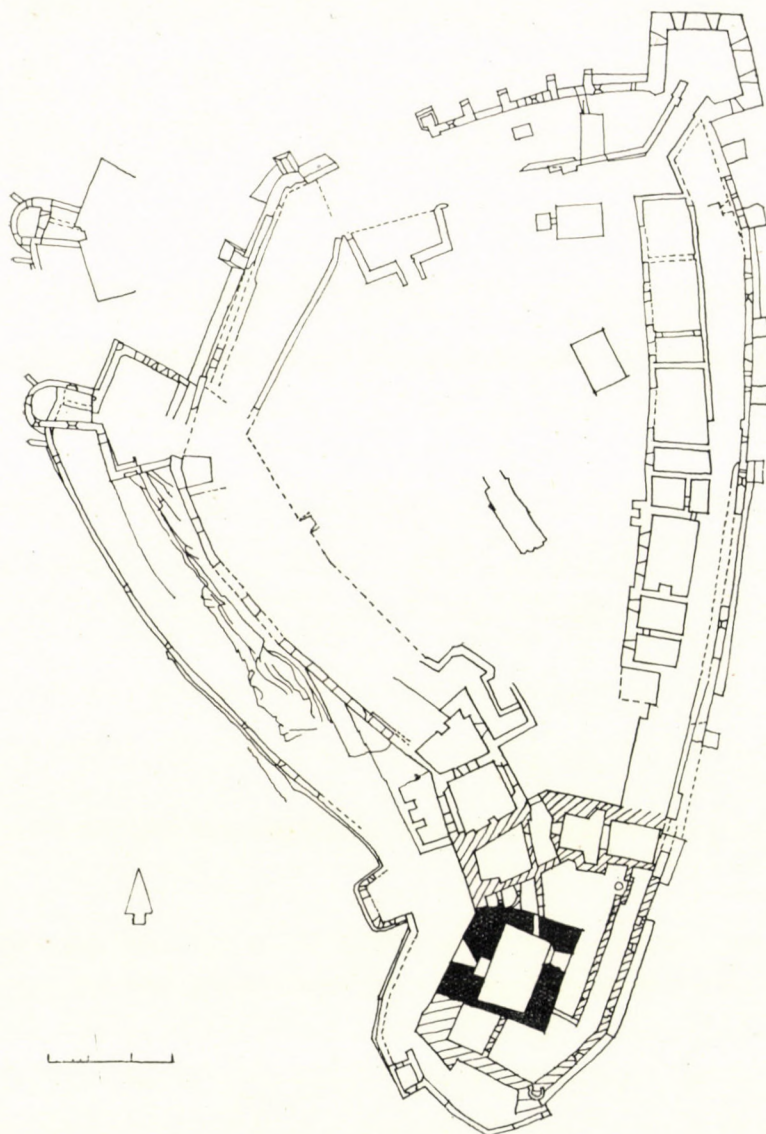


Bild 41. Sümeg. Grundriß der Burg

Auch in Ungarn findet sich in den XIII. und XIV. Jahrhunderten eine Lösung des zur Burg führenden Weges vor, der mit mehreren Hindernissen und einer mehrfachen Verteidigung versehenen engen Torhöfen und schmalen Zwingern, eventuell unter Einschaltung von Zugbrücken und *Wolfsgruben*, errichtet wurde. Auch die Burgtore werden mehrfach gesichert mit *Zugbrücken*, *Fallgittern*, Toren mit sich öffnenden Flügeln, Sicherungsposten, wie sie

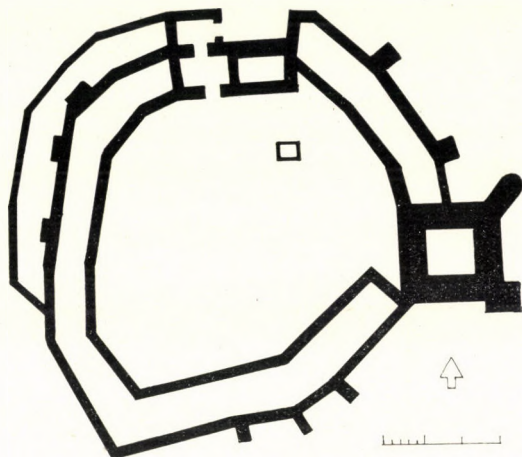


Bild 42. Csobánc. Grundriß der Burg

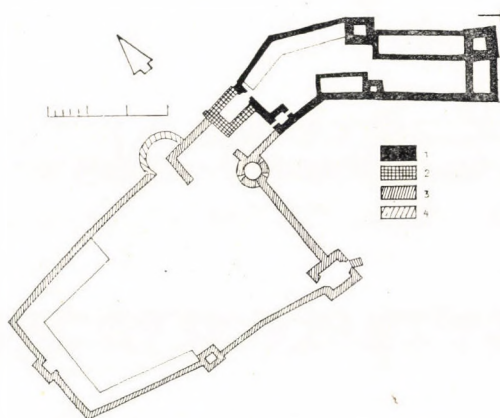


Bild 43. Szigliget. Grundriß der Burg

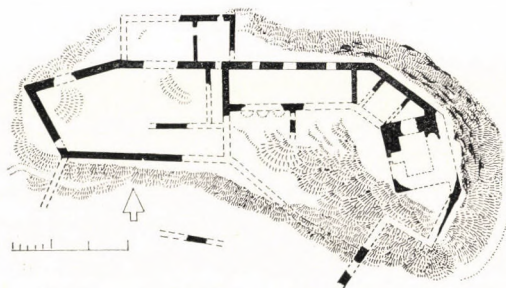


Bild 44. Tátika. Grundriß der Burg

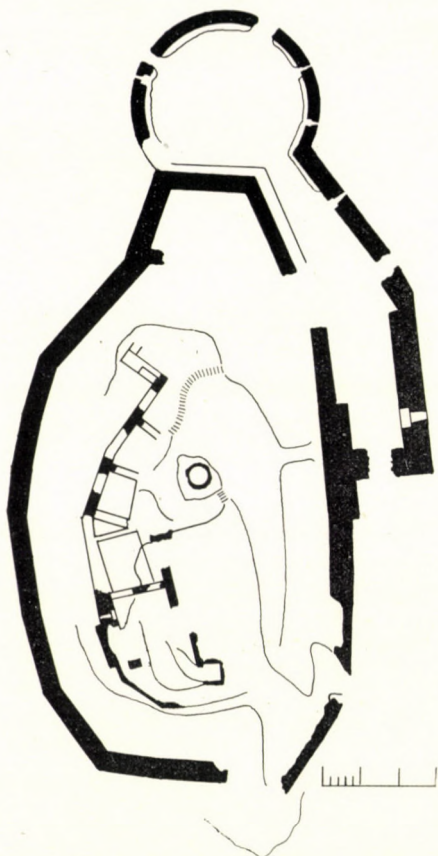
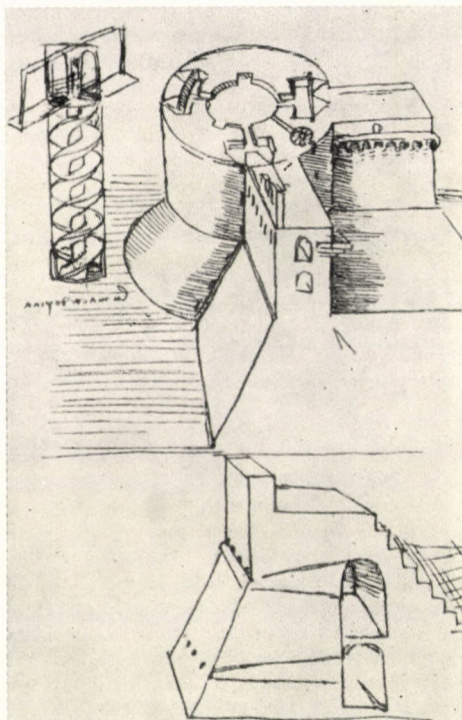


Bild 45. Buják. Grundriß der Burg

Bild 46. Äußerer Turm v. Leonardo da Vinci
(Cod. Atlant. 3.69)

durch die Tore von Buda, Visegrád und anderen Burgen illustriert werden. Häufig findet sich ein Doppeltor für Fußgänger und getrennt für Reiter vor (Buda, Eger). Das Tor befindet sich meistens nicht in der Festungsmauer,

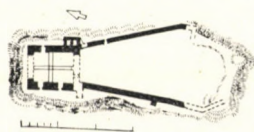


Bild 47. Rezi. Grundriß der Burg

sondern in dem Schutz sichernden *Torturm*. Das Zimmer im Stockwerk des Torturmes bildet das Lager der Torschutzwache, das — da sich die Wache zur Friedenszeit nicht besonders bemühte und die Sonne zur Pflege des Bartes benutzen konnte — mit einem treffenden ungarischen Ausdruck »*Bartrockner*«

benannt wurde. Am Torturm und oft auch an verschiedenen Stellen des zur Burg führenden Weges wurden *Pechgießer* placiert, deren Anordnung mit den in den Burgen üblichen Aborten übereinstimmt (Sárospatak, Nagyvázsöny, Buda, Diósgyőr). Außerhalb der Burgmauer wurden mit der Entwicklung der Verteidigung immer breitere und tiefere *Gräben* gebaut, an deren äußerem Rand die aus spitzigen Pfählen bestehenden *Planken* (*palancato*) überall aufzufinden sind.

IV. Die Burgen mit äußerem Turm

An dieser Stelle wollen wir über die Wehreinrichtungen der Städte sprechen, über die Stadtmauern, auf denen oben eine *Brustwehr* und später *Zinnen* gebaut wurden.

Die Erker mit Steinstützen und die Wehrkorridore wurden in Europa zuerst in Frankreich angewendet. Nach *Viollet-le-Duc* sind die ersten solchen Einrichtungen im XIII. Jahrhundert entstanden, während *Grand* den Bau der namengebenden Burg Machecoul in die Zeit zwischen den Jahren 1170 und 1220 verlegt [13]. *Essenwein* meint, daß die erste deutsche Einrichtung mit Steinstützen im XIV.—XV. Jh. vorkommt. In Ungarn erscheinen diese Anordnungen ziemlich frühzeitig (Buda, Diósgyőr).

Dank den Erfahrungen während der ständigen Kriege der feudalen Monarchie entwickelte sich der Burgbau stürmisch. Die Nachteile der Burgen mit innerem Turm und die Bedeutung der Flankierung in der Verteidigung werden frühzeitig erkannt. Aus diesem Grunde wurde bald mit dem Baue von runden und quadratischen Türmen *vor* den Mauern begonnen, um die Angreifer, die die Mauer besteigen, *von der Seite her* abweisen zu können. In der Burg Gaillard kam der Kriegsbaumeister des Richard Löwenherz in den Jahren 1196—97 zu durchaus neuen Lösungen. Die Entstehung dieser Lösung wird mit dem dritten Kreuzzug in Verbindung gebracht, von wo Richard im Jahre 1196 heimkehrte. Im Osten waren mehrere solche Einrichtungen vorhanden. Auch die Mauern von Byzanz wurden mit flankierenden *äußeren Türmen* erbaut.

Der Schauplatz der weiteren Entwicklung der Burgen mit äußerem Turm wurde allmählich von Frankreich nach Italien verlegt. Der erste historisch authentische Büchschuß ging im Jahre 1331 im italienischen Friaulos [14]. Es war ebenfalls in Italien, daß die ersten mächtig dimensionierten Belagerungsgeschütze um 1320 konstruiert wurden.

Der Bau der Burgen mit äußerem Turm beginnt in Ungarn mit der Zeit Sigmunds (1387—1437). Er ließ in der Ofner Burg (Buda) einen quadratischen Turm mit mächtigen Dimensionen bauen, der *vor* der Mauer steht. Johann Hunyadi läßt in Vajdahunyad (Hunedoara) Mitte des XV. Jahrhunderts

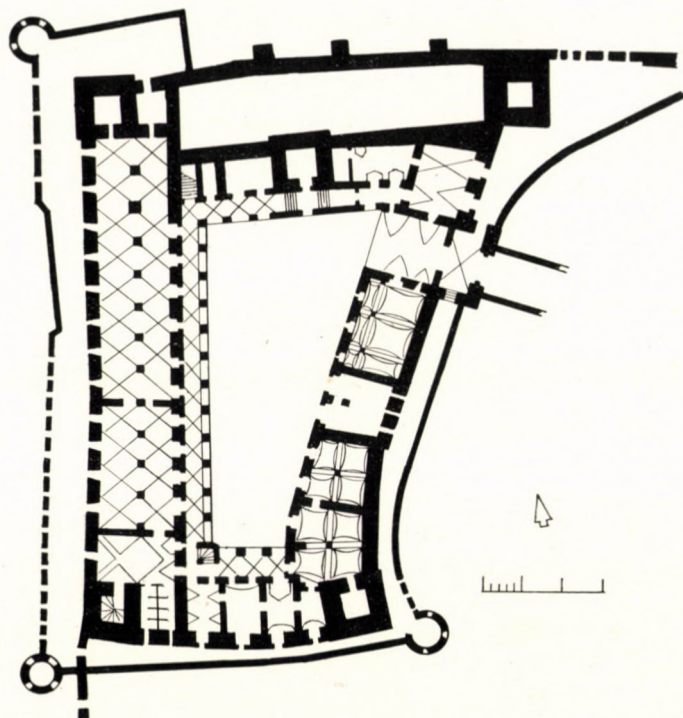


Bild 48. Kőszeg. Burg mit äußerem Turm

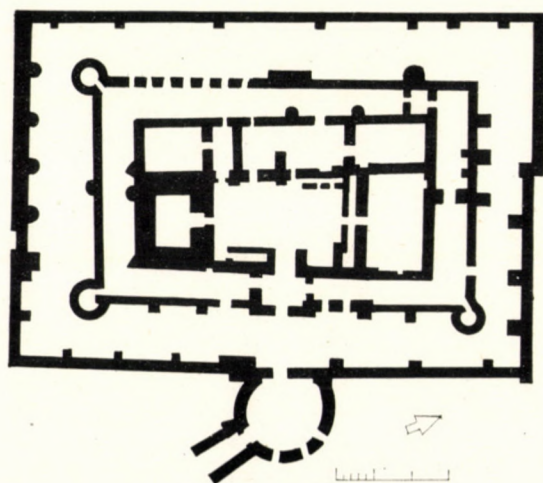


Bild 49. Nagyvázasony. Burg mit äußerem Turm um den früheren Wohnturm

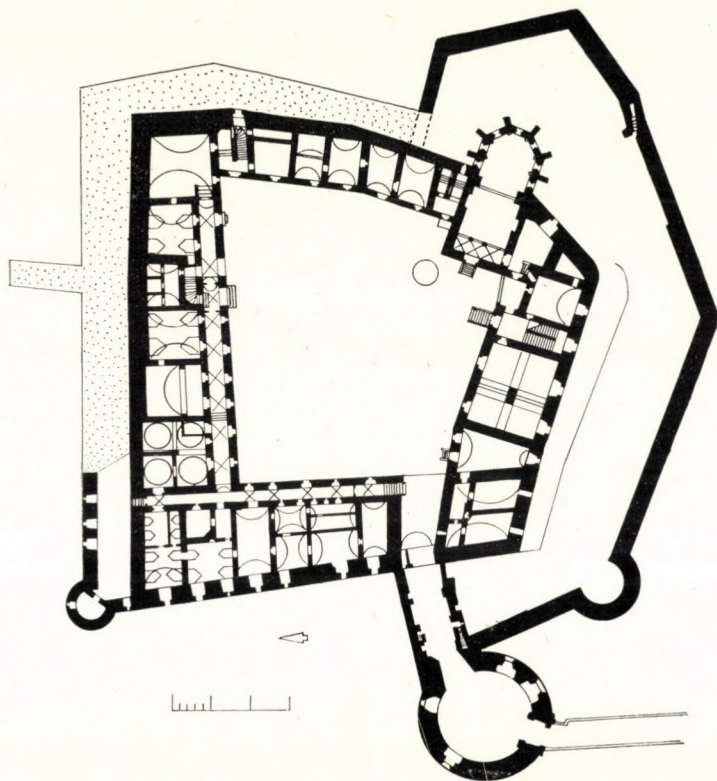


Bild 50. Siklós. Burg mit äußerem Turm und Barbakane

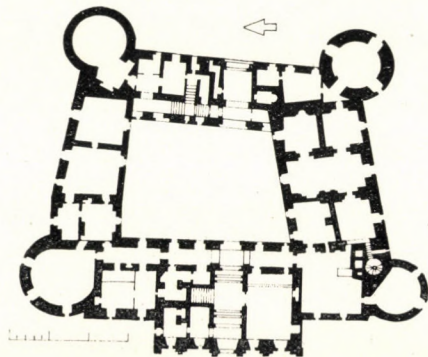


Bild 51. Körömend. Burgkastell mit äußerem Turm

einen zur Hälfte vor der Mauer stehenden Turm mit seitwärts gerichteten Schießscharten und Schießkammern erbauen. Eine charakteristische Burgmauer stellt die am Anfang des XV. Jahrhunderts erbaute Soproner Stadtmauer dar, deren äußere Türme sich in Abständen von je 30 m wiederholen. An Stelle der früheren, innen oder außen angeordneten Ecktürme mit gerin-

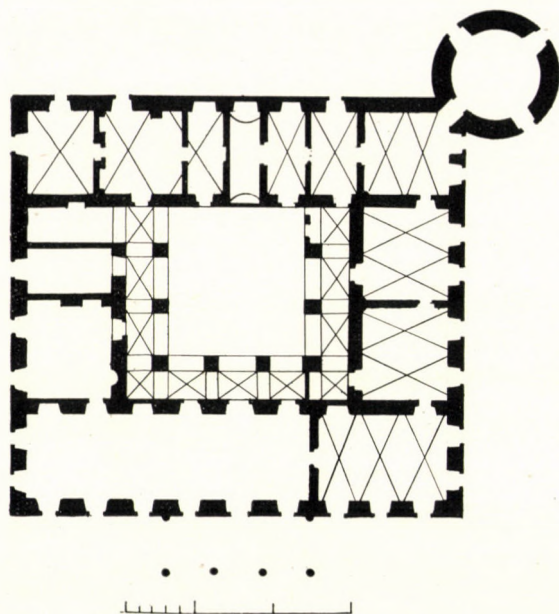


Bild 52. Nagykereki. Burgkastell mit äußerem Turm

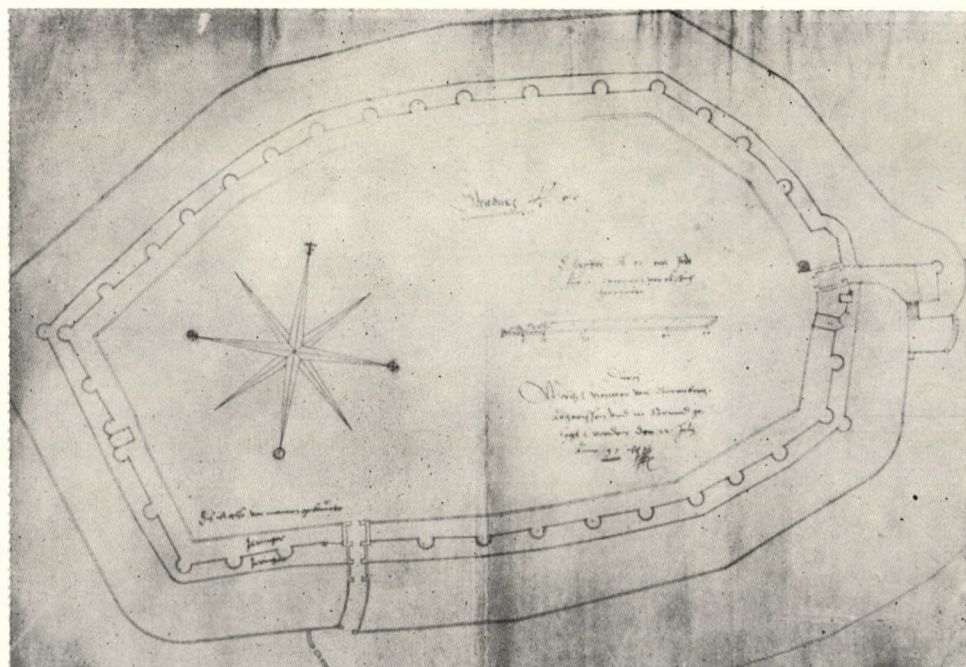


Bild 53. Sopron. Stadtmauer mit äußerem Turm (nach einer Zeichnung v. J. 1597)

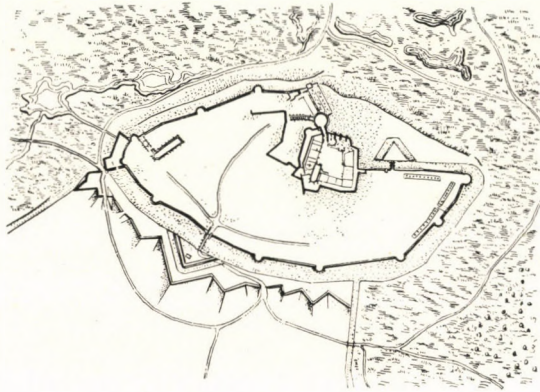


Bild 54. Siklós. Die Burgmauer mit äußerem Turm (nach einer Aufnahme i. J. 1687)

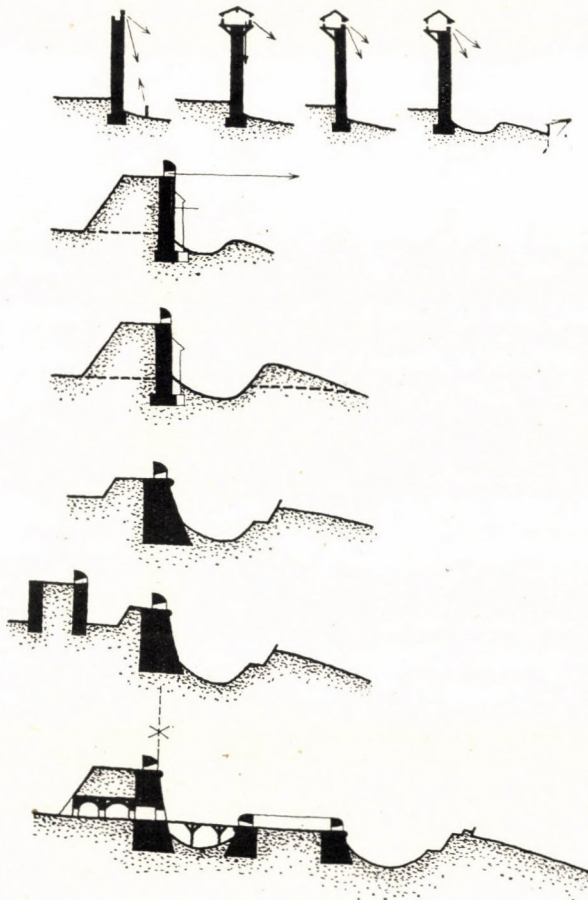


Bild 55. Entwicklung des Hauptwehrgürtels zwischen 1450—1550. Die obere Reihe zeigt die Entwicklung des vertikalen Kampfes (Pfeil-Waffe), die unteren Abbildungen verbildlichen die Entwicklung des horizontalen Kampfes (Feuerwaffen)

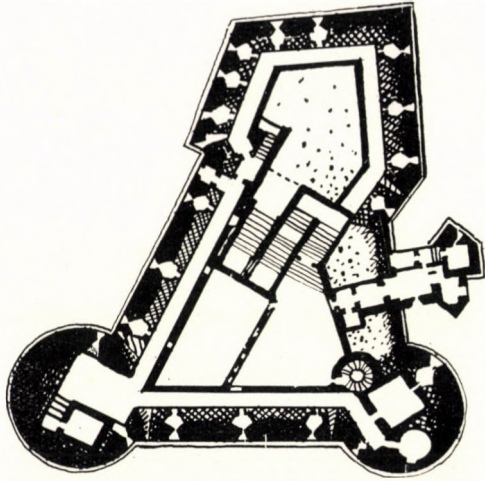


Bild 56. Die Burg Ostia (Baccio Pontelli, 1483)



Bild 57. Die südliche Große Rondelle, Ofen

geren Abmessungen (4—5 m Durchmesser) erscheinen gegen Mitte des XVI. Jahrhunderts die mächtigen *Rondellen* mit 30—40 m Durchmesser. In den breiten, kreisförmigen, niedrigen Rondellen wird die feuerkräftige Artillerie der Verteidigung untergebracht.

Von einem architektonischen Standpunkt aus können wir zu dieser Zeit keinen Unterschied zwischen den Befestigungen von Burg und Stadt machen. An beiden Stellen werden zur Erhöhung der durch die Mauern gebotenen Verteidigungsmöglichkeit Schutztürme errichtet, und bald wird eine zweite, ja sogar dritte Mauer erbaut. Vor den Mauern werden Gräben ausgehoben um die Annäherung der Mauern — insbesondere mit Belagerungsmaschinen — zu erschweren. Zum Schutze der Tore werden besondere Einrichtungen, *Vorbauten* gebaut. Ein solcher Vorbau ist der *Barbakane*. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Schutzwerken der Burg und der Stadt besteht darin, daß die Burg nur ein einziges Tor besitzt, während das Lebensinteresse der Stadt mehrere Tore zur Abwicklung des Verkehrs und des Handels erfordert. Der Verkehr, den das Interesse der *Burg* ausschließt, bildet ein Lebenselement der *Stadt*. Die Reisenden und Kaufleute sollen nicht vor die Stadt, vielmehr in die Stadt selbst geführt werden.

Dem Typ der ungarischen Burgen mit äußerem Turm begegnen wir insbesondere bei den Stadtmauern, deren Ausbildungsepoche in das XV. Jahrhundert fällt. Das Anwachsen der Angriffskraft löste eine stets kräftigere Aktivierung der bisher zum guten Teil passiven Verteidigung aus.

Von der ersten ungarischen Kanone lesen wir bei der Stadt Nagyszeben (Sibiu) um 1390, in Sopron im Jahre 1404. Die Türken werden zu dieser Zeit durch andere Kriegsschauplätze und die glänzenden Siege von Johann Hunyadi von unserem Vaterland ferngehalten.

Hunyadis Sohn, König Matthias (1458—1490), erschuf seine berühmte, ständige, besoldete »*Schwarze Legion*«. In seiner Bibliothek befanden sich mehrere Werke über den Festungsbau, und er berief auch den Bologneser *Aristotele Fieravanti* und viele andere italienische Meister, darunter *Benedetto da Maiano*, *Chimenti Camiccia* und Andere wie auch *Pascoe Michelievič* aus Ragusa. Für die Entwickeltheit des heimischen Bauwesens in dieser Zeit ist es hingegen kennzeichnend, daß der russische Zar Ivan III. von Matthias Ingenieure bzw. Architekten erbat [15].

Inzwischen gewann die Artillerie nur allmählich Boden für sich. Matthias hat die mittelalterlichen, leicht zu schleppenden Wurfmaschinen höher geschätzt als die Kanonen, die übermäßig schwer waren und im durchweichten Boden nur sehr schwer weiterbefördert werden konnten.

Anfänglich wußte man nicht, auf welche Weise die Burgen für die Artillerie geeignet gemacht werden könnten. In Frankreich wurde z. B. die Schutzartillerie möglichst hoch untergebracht, und aus diesem Grunde wurde anfangs die Höhe der Burgtürme gesteigert [16]. Mit der Verbreitung der



Bild 58. Die große und kleine Rondelle der Soproner Stadtmauer



Bild 59. Barbakane der Siklóser Burg



Bild 60. Pápa. Mit Rondellen verstärkter Schutzgürtel (Stich v. Hoefnagel, Anf. d. J. 1600)

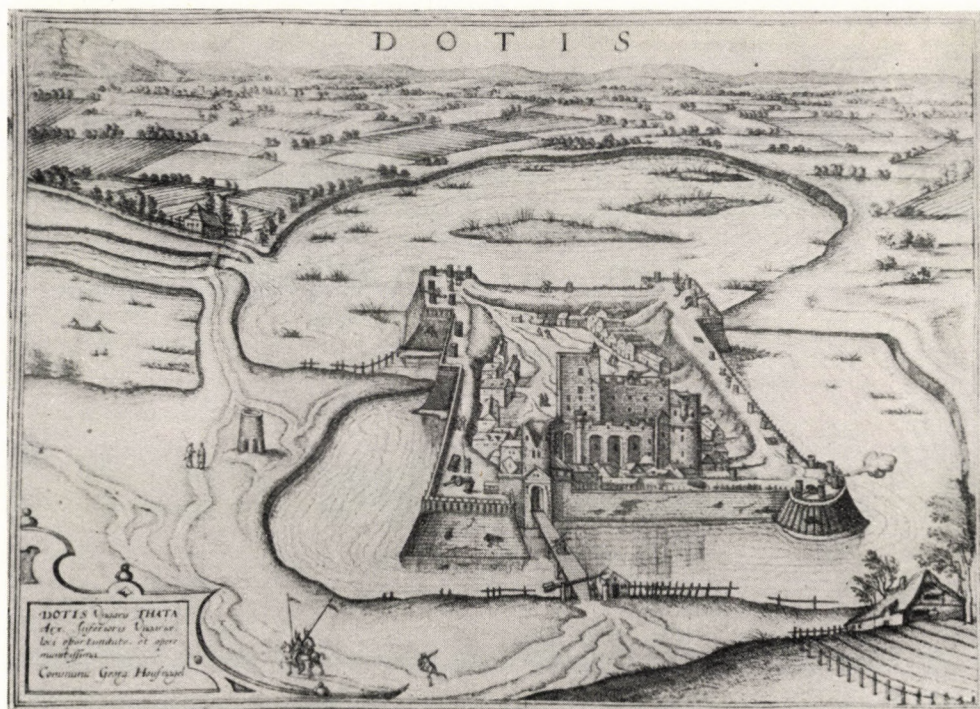


Bild 61. Tata. Mit Rondellen verstärkter Schutzgürtel (Stich v. Hoefnagel, Anf. d. J. 1600)

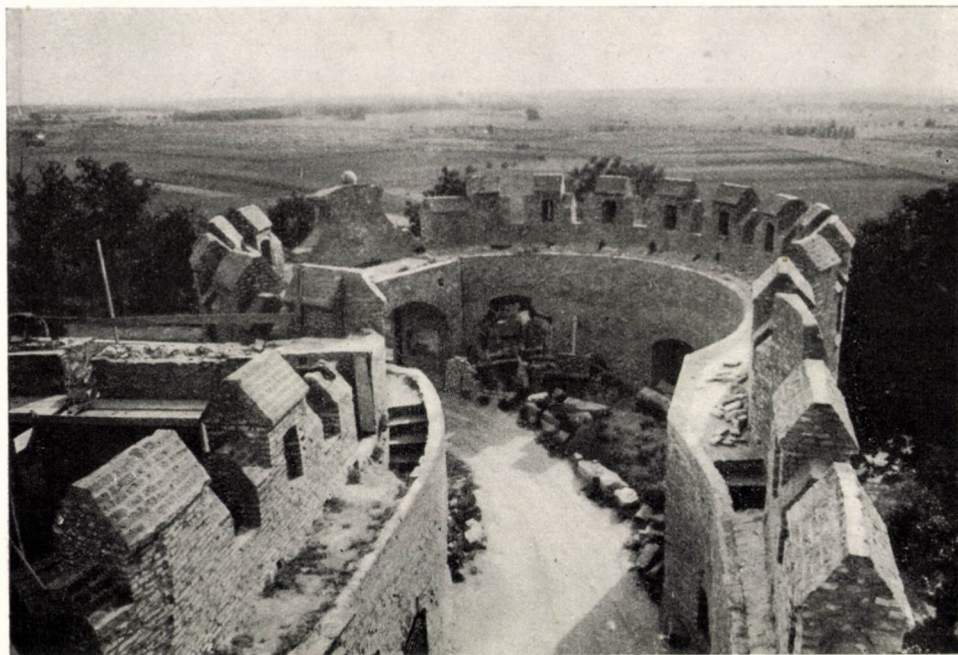


Bild 62. Siklós. Barbakane

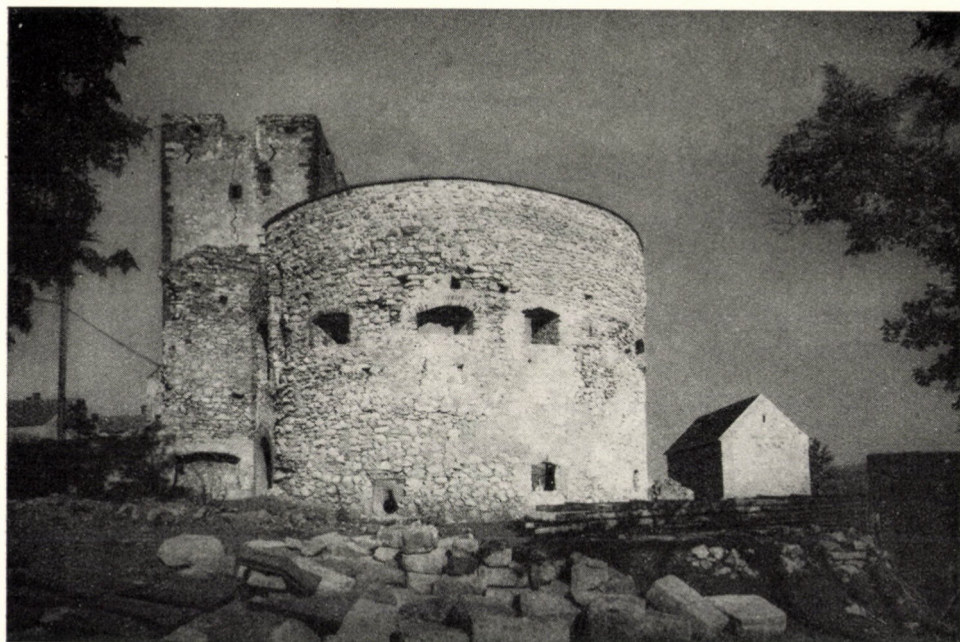


Bild 63. Nagyvázsony. Torschützende Rondelle

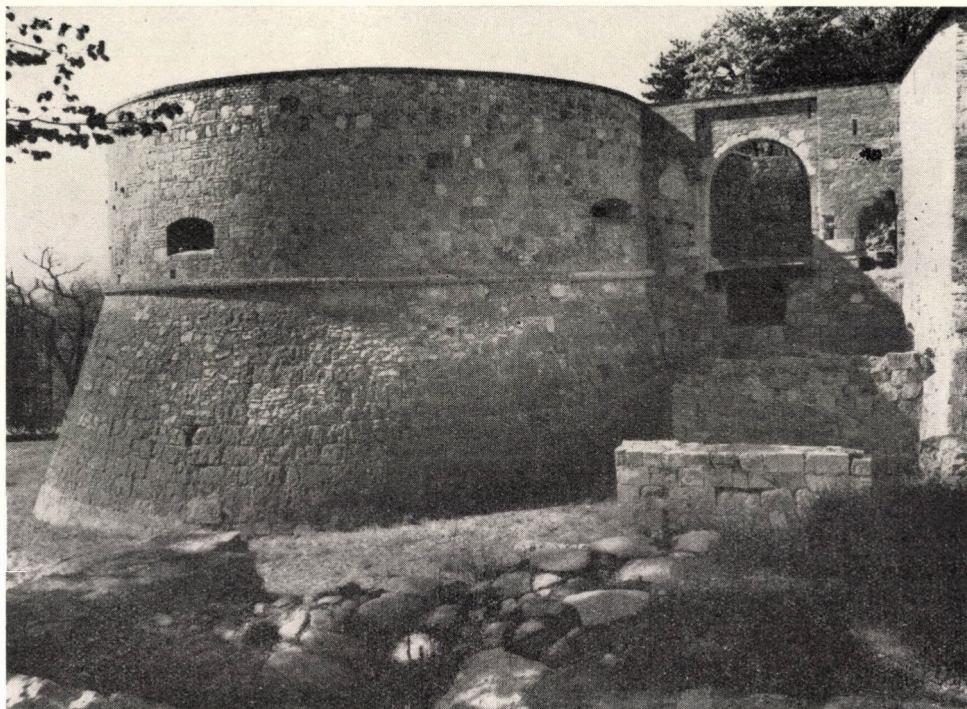


Bild 64. Esztergom. Rondelle



Bild 65. Gyula. Geschützturm

Artillerie hätte es aber niedriger Burgen mit dicken Mauern bedurft, die der Belagerungsartillerie einen Widerstand hätten leisten können. Trotz alledem wurden solche Burgen im XV. Jahrhundert bei uns noch nicht erbaut, vielmehr trachtete man, die bereits existierenden Burgen für das Bestehen der Belagerung geeigneter zu gestalten. Die Mauern werden *verstärkt*, das Innere mit *Erdaufschüttung (terrapieno)* versehen, um die Mauern elastisch zu ma-

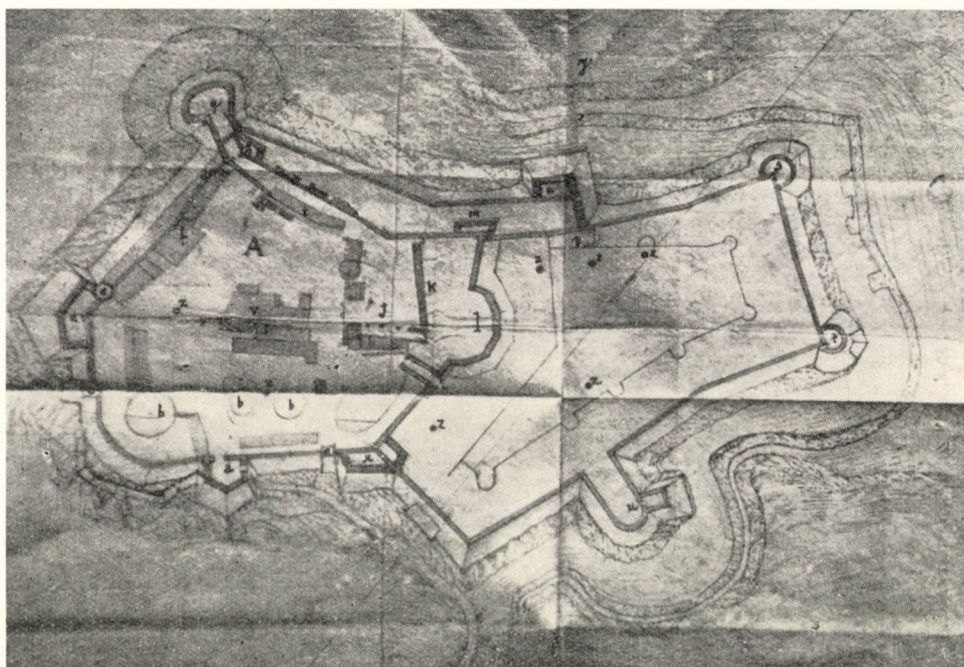


Bild 66. Eger. Grundriß der Burg als Typ der improvisierten Burg, vor dem Umbau mit italienischen Bastionen

chen. Die hohen Türme werden abgetragen, damit diese während der Belagerung nicht auf die Verteidiger stürzen, und die geringe Grundfläche wird zwischen 1510 und 1540 zumeist zu kreisförmigen, niedrigen Rondellen mit breiter Grundfläche umgebaut, um die Artillerie unterzubringen. Einen solchen Turm stellt die große südliche Rondelle der Ofner Burg dar, mit 40 m Durchmesser und 7 trichterförmigen Kanonenschießscharten in der 5 m dicken Mauer.

Der mittelalterliche Burgbau wird im XVI. Jahrhundert umgestaltet, das Burgbild des feudalen Zeitalters verändert sich. Die Unebenheiten des Vorterrains werden fortgeschaffen, damit der Angreifer keine Deckung findet. Bevorzugt werden die sumpfigen Gebiete, die den Gebrauch der Sturmmaschinen und Kanonen erschweren; die Gräben werden mit Wasser aufgefüllt. (Szigetvár, Székesfehérvár, Tata, Gyula usw.) Neben der Anwendung

von Bogen und Armbrust kam früher noch die Höhe der Mauern in Betracht, und man trachtete damals noch die Besteigung der Mauer zu verhindern. Jetzt aber, seit der Anwendung der Kanone, bewährten sich die dünnen hohen Mauern nicht mehr. Nunmehr hat man zu verhindern, daß an den Schutzmauern keine *Bresche* geschlagen wird. Die schlanken Türme, Mauern verschwinden, von ihrer Höhe wird viel abgetragen. Die die äußere Fläche der Burgmauern aufspaltenden äußeren Türme sind anfangs dicht angeordnet, mit dem Anwachsen der Reichweite der Schußwaffen wird aber auch die Entfernung zwischen den Türmen größer. Neben den meistbewährten Rondellen erscheinen auch neue Schutzwerke im Graben: der *gedeckte Weg* und die *Schießbank*.

Zur Steigerung der Verteidigung der mittelalterlichen Burg wurden an den empfindlichsten Punkten die sog. *Geschütztürme* um viele Stockwerke erhöht und mit einer Menge der Schießscharten versehen. Diese Geschütztürme bewährten sich aber aus mehreren Gründen nicht, und deshalb wurde der Bau dieser Türme bald aufgegeben.

V. Burgen mit italienischer Bastion

L. B. Alberti behandelt im Jahre 1452 noch nicht die Schießwaffen, er schreibt nur von Wurfmaschinen [17]. A. Averulino (*II Filarete*) ordnet in seiner Idealstadt, die er zwischen 1451—1464 entwarf, an den Mauerecken runde Geschütztürme an. Der Typ der bastionierten Burgen ist italienischen Ursprungs (*fortificazione a fronti bastionati*). Der erste Verfasser der modernen Befestigungslehre Mariano di Jacopo aus Siena (*detto il Taccola* 1381—1458?) bereitet für den Papst Callixtus in der Zeit zwischen 1455—1460 einen Burgplan, dessen System später *bastioniertes System* (*sistema bastionata*) benannt wurde.

Die Bastion ist ein im Grundriß viereckiges, später fünfeckiges Verteidigungswerk mit in zwei Reihen angeordneten Artilleriestellungen (in der alexandrinischen Burg des Papstes Nicolaus V., in der römischen Engelsburg des Papstes Alexander VI.). Mit der Entwicklung der Kanonen wurden diese Bastionen die stärksten Stellen der Verteidigung und bildeten zusammen mit den Türmen und Mauern das *Bastion-System*. Die Mauer zwischen zwei Bastionen ist die *Kurtine* (*Mittelwall*), anfangs 250—500 m lang.

In der Bastion-Anordnung ist die wichtigste Maßzahl das Verhältnis der Länge der Stirnmauern zur Länge der Kurtine. Im Laufe der Entwicklung wird die Grundfläche der Bastion immer größer, um je mehr Kanonen fassen zu können. Von den vier vorspringenden Seiten sind die in Spitze laufenden zwei Seiten die *Stirnseiten*, die zu diesen senkrechten zwei kurzen Seiten bilden die *Flanken*. Der die Flanken verbindende, das Fünfeck der Bastion schließende Teil ist die *Kehle*.

Der Angreifer kam bald darauf, daß er das Schießpulver auch zur Sprengung der Mauern verwenden kann, wenn er die Mauern unterminiert. Dagegen bauten die Verteidiger *Minenbeobachtungsgänge (sistema controminata)* [18].

Die italienischen Bauingenieure legten den Schwerpunkt der Artillerie-Verteidigung nicht auf die Bastionen, sondern auf die Kurtinen, und oft auf die in deren Mitte errichteten hohen *Schießstände (cavaliero)*. Den Bastionen blieb allein die Aufgabe, die Flankierung der Schutzmauern (Kurtinen) und der vor diesen befindlichen Gräben zu besorgen. Es ist eine Regel, den einen Teil der Mauer von der anderen her vollkommen bestreichen zu können, und aus diesem Grunde wird die Form mit rundem Grundriß abgewiesen. Diese Form kann in Italien nach 1520 nirgendwo aufgefunden werden. Die zum Schutz der übermäßig langen Kurtine gebaute *kleine Bastei* wird im Laufe der Entwicklung selbständig und entwickelt sich zu einem vor die Mauer gebauten selbständigen Schutzwerk, das *Schildwehr (ravelin)* genannt wird [19].

Die vollkommenste Burg des neuen Bastionsystems wurde von dem spanischen Kapitän Karls V., *Pirro Luigi Scriva* (1534) in Aquila mit *Minenbeobachtungsgängen*, *Kasematten* und *Doppelohrenbastionen* erbaut.

In den Bastionflügeln wurden gewölbte Räume: *Schießkammern* errichtet, zur Aufnahme der flankierenden Kanonen, die später hinter die Front der Bastion (hinter's Ohr) zurückgezogen wurden (*Ohrenbastei*). Zur Verstärkung der Verteidigung wurden *Streichwehren (caponniere)* gebaut und *Graben-Caponniere* errichtet, die zum flachböigen Bestreichen des Grabens dienten. Nach und nach wird die Schutzmauer immer niedriger gebaut, und vor ihr das äußere Grabenufer allmählich erhöht, damit die Festungsmauer, hinter dem — oft gemauerten — *Gegenhang (controscarpa)* gleichsam versteckt, gegen die Wirkung der Belagerungsartillerie mehr geschützt wird.

Der zur Verhinderung der Ausbreitung der Türkenmacht gebildete Wiener Hof-Kriegsrat (1556) berief italienische Kriegsingenieure, die das von den berühmten italienischen Architekten erbaute Bastionsystem auch bei uns einführen [20]. Die innere Seite der bisher hohen, dünnen (1,6 m) Mauern wird mit Erde aufgeschüttet, um die Mauern gegen das Kanonenfeuer widerstandsfähiger zu machen und um auf der Krone der Schutzmauern eine breitere Fläche zur Unterbringung der Kanonen zu erhalten, was bisher neben dem hölzernen Schutzgang nicht möglich war. Der Schutzkorridor wird auch erweitert, die zu leichte Konstruktion der auf *Steinstützbalken* überwölbten oder oft nur mit *Holzbohlen* angefertigten Decke hielt jedoch die Last der äußerst gewichtigen Kanonen nicht aus. Die hohen Erdschüttungen übten auf die schlanken Mauern einen sehr starken Druck aus, so daß diese oft einstürzten. Zur Ausgleichung des Erddruckes wurden außen *Stein-Stutzpfeiler* gebaut (Buda, Veszprém, Csobánc).

Das Innere der Bastionen ist meistens nicht *leer*, aber auch nicht gänzlich *gefüllt*, sondern mit gewölbten Räumen belegt.

In der Verteidigung verbreitete sich bald die *hohe Geschützstellung (cavaliero)* in der Regel aus Erde, wie zu dieser Zeit die meisten Schutzwerke in Ungarn aus Erde angefertigt wurden. Nicht anders war es aber auch in den

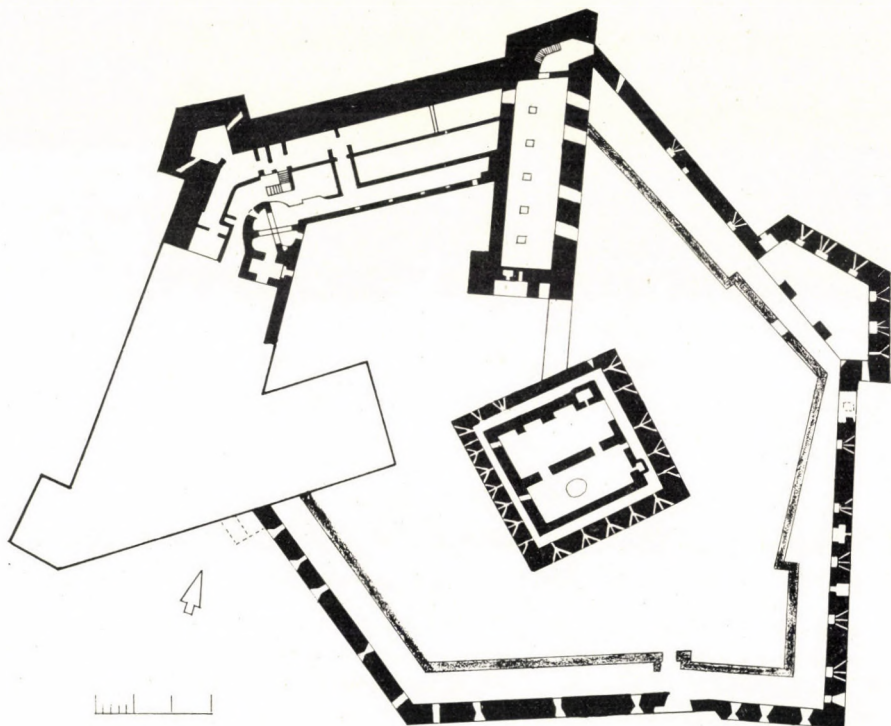


Bild 67. Sárospatak. Altitalienische Bastei vor dem Wohnturm

übrigen Teilen von Europa, da doch die Anfertigung von Mauern zu kostspielig war. Dabei haben sich die Erdschutzwerke vorzüglich bewährt.

In Ungarn können wir drei Erdbefestigungsarten beobachten: 1. *Schurkengarten*, ein Zeun aus Pfählen oder eine Reihe von Balken. 2. *Planke*, zwei Reihen von in die Erde gerammten oder gegrabenen Balken, die mit Weidenruten zusammengeflochten, mit Erde naß gestampft und zur Verhinderung des Entzündens mit Kot beschlagen wurden. 3. Die *gekerbte Planke*, die stärkste Zaunart, besteht aus dicht nebeneinander eingeschlagenen Balken, mit Eisenklammern zusammengefaßt und mit Holzbindungen ineinander gekerbt. Die Bastionen wurden in der Regel auf die letztgenannte Weise gebaut. Wegen des raschen Verfalls der Erdwerke ging man später zum Bau aus gemauertem Material über.

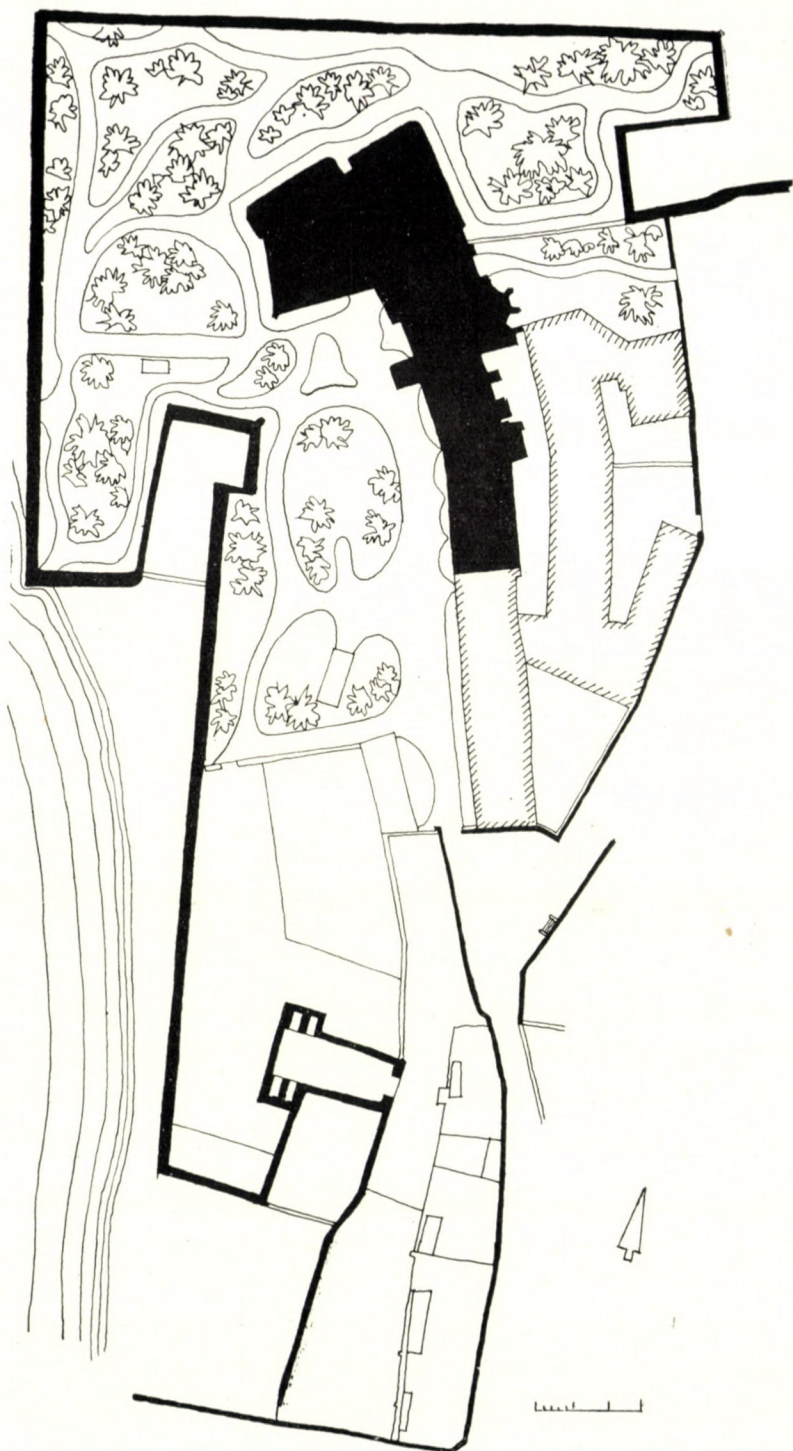


Bild 68. Győr. Bastion mit doppelten Ohren nach neitalienischem System
(P. Ferabosco, 1564—65)

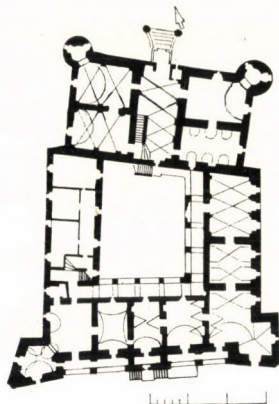


Bild 69. Kéked. Burgkastell, verstärkt mit italienischen Bastionen und Rondellen

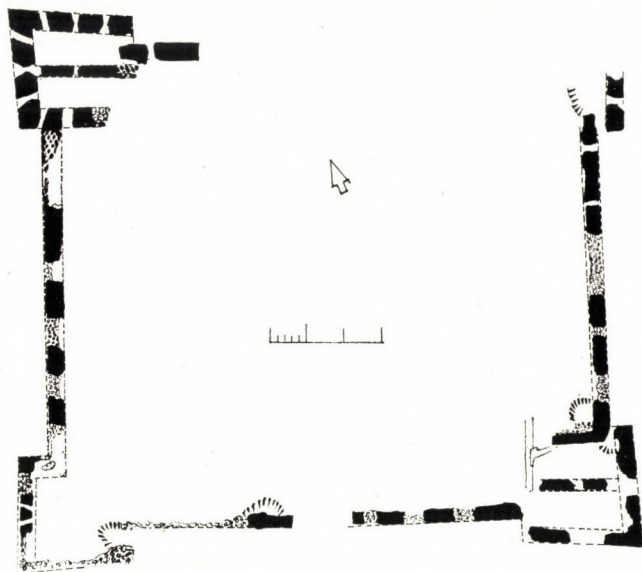


Bild 70. Ónod. Burg mit italienischen Bastionen

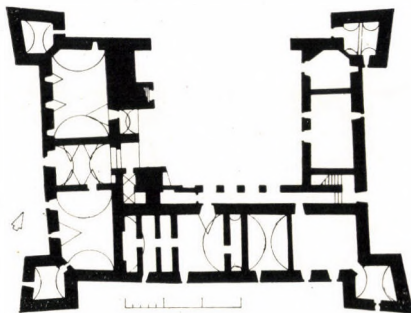


Bild 71. Egervár. Burg-Kastell mit italienischen Bastionen

Die in den Jahren 1557—1558 durchgeführten Untersuchungen befaßten sich ausführlich mit dem Zustande unserer Burgen. Vor dem Beginn der Bauarbeiten ging ein Expertenausschuß zu Rate, und die Pläne wurden von den Bauinspektoren und Genieoffizieren ausgearbeitet, wobei auch die Festungskommandanten Einsprache hatten. Die im XVI. Jahrhundert eingeleiteten

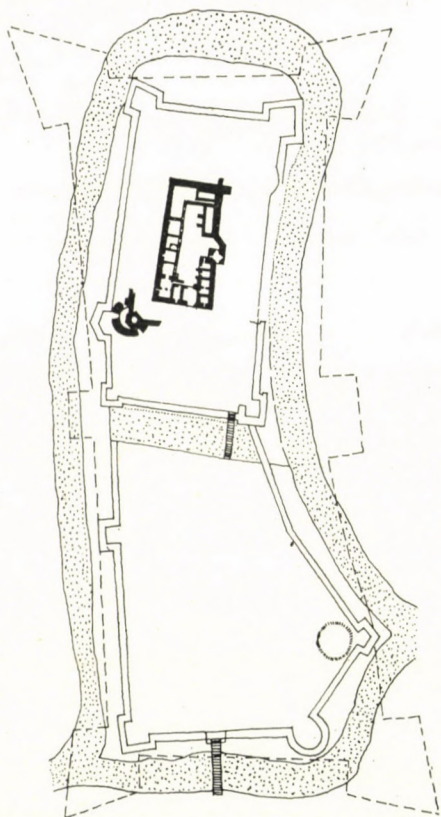


Bild 72. Gyula. Schutzgürtel der Burg mit italienischen Bastionen (Paolo Mirandola, 1560—1564)

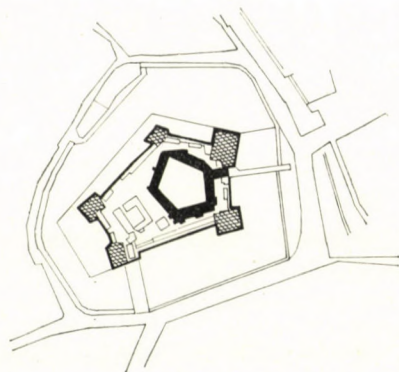


Bild 73. Sárvár. Burg mit italienischer Bastion (Donato Grazioli, 1588—1615)

Modernisierungsarbeiten der ungarischen Grenzburgen können in drei Gruppen eingeteilt werden: 1. Epoche der improvisierten Bauten (1541—1556); 2. Epoche der Bauten des Hofkriegsrates in altitalienischem System (1556—1570); 3. Epoche der Bauten in neitalienischem System (1570—1590) [21]. Alle drei Systeme bedeuten Burgen mit italienischen Bastionen, aber zur Zeit des improvisierten Baues erscheinen nur einzelne Werke in dieser Form. Im altitalienischen System wird bei dem Ausbau des ganzen Burggürtels bereits ein regelmäßiges Gebilde angestrebt, an jeder Ecke mit solchen Bastionen. Die Bastionen des neitalienischen Systems bedeuten geräumigere, einander



Bild 74. Sárvár. Burg (Donato Grazioli, 1588—1615)

näher liegende *Ohren-Bastionen*, den bezeichnendsten Typ der Bastion, wo die die Seiten deckenden Geschützstände in den Flügeln der Bastion versteckt, im sogenannten Ohr der Bastion angebracht wurden [22].

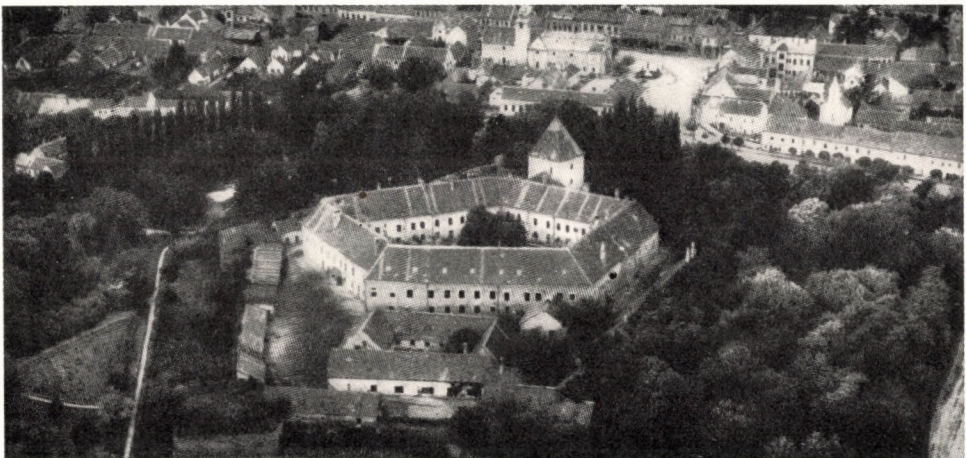


Bild 75. Sárvár. Burg

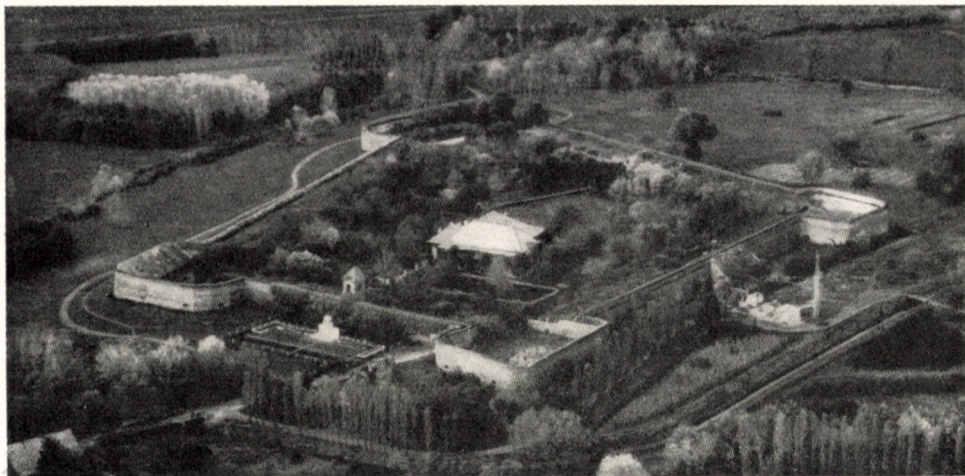


Bild 76. Szigetvár. Burg

Das schönste Beispiel der improvisierten Befestigung bietet die Burg Eger, die auf Grund der Bauten der wohlhabenden Besitzer im Jahre 1460 den Forderungen des damaligen Festungsbaues entsprach. Gegen das Ende des Jahrhunderts konnte sie aber nicht mehr dem Beispiele der nach den neuen Erfahrungen modifizierten Burgen folgen, und so kam es, daß sie zur Zeit der Mohács-Schlacht (1526) ganz veraltet war. Die Burg geriet im Jahre

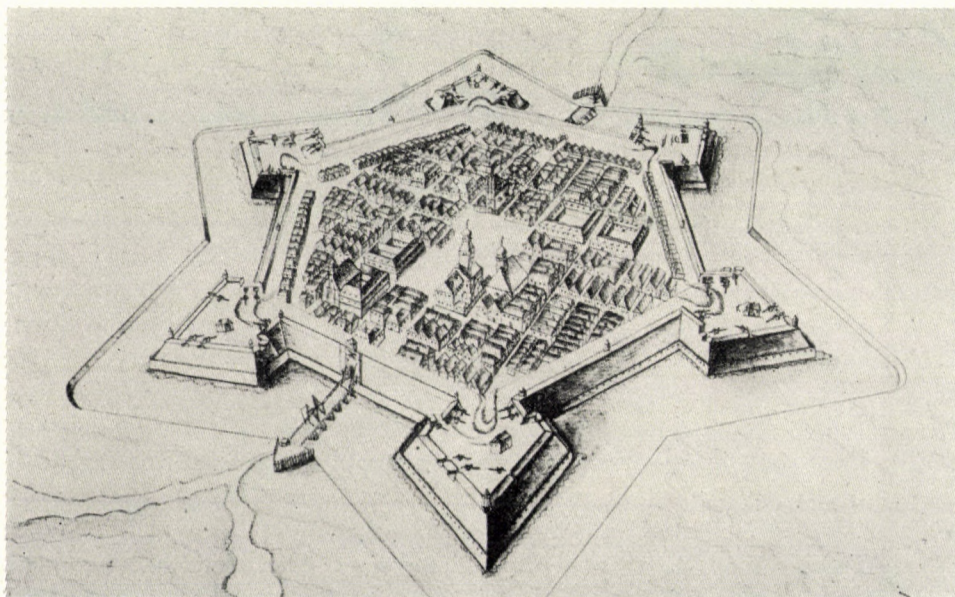


Bild 77. Érsekújvár (Nové Zámky). Burg (1580—1586)

1537 in den Besitz von Péter Perényi, der im Jahre 1526 *Niccolo da Milano* und *Alessandro da Vedano* engagierte. Von diesen wurde der entwickelte italienische Festungsbau nach Eger übermittelt. Im Jahre 1548 übernahm König Ferdinand selbst die Fortsetzung der von Perényi begonnenen Arbeit, die zwischen 1549—1552 von dem legendenhaften Burgkapitän *Stephan Dobó*

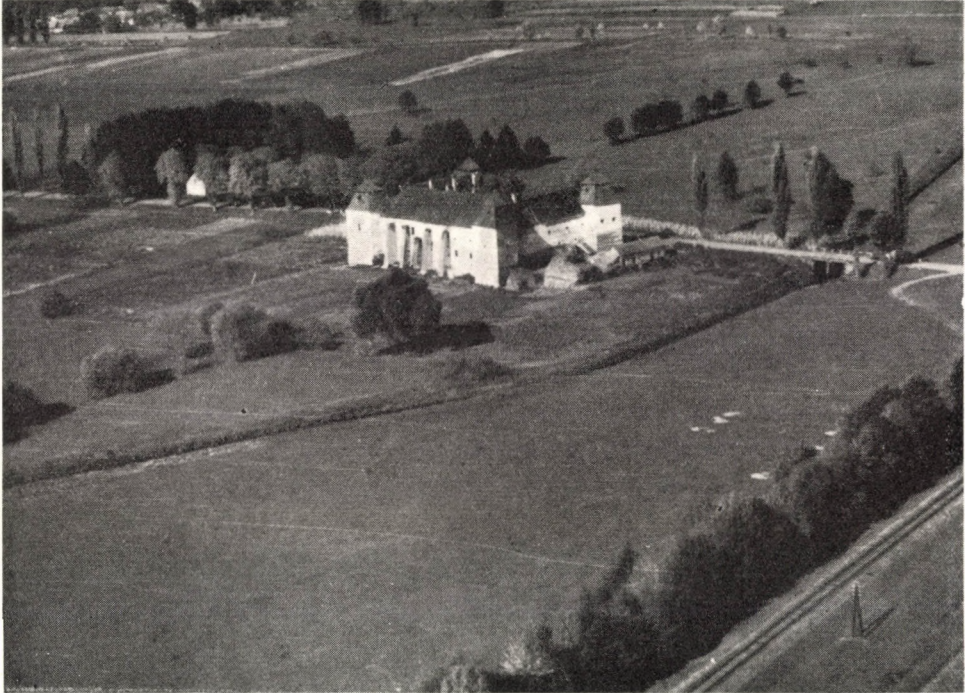


Bild 78. Egervár Burgkastell

geleitet wird, der den langen Sturm des 150 000 Haupt starken türkischen Heeres aus der provisorisch verstärkten Burg Eger mit seinem Häuflein Schutzheer ruhmvoll zurückschlägt (1552).

Eine solche improvisierte Verstärkung der Burg Pápa wurde von *Emmerich Martonfalvi* im Jahre 1543 durchgeführt [23]. Eine zur Gänze nach dem italienischen Bastion-System gebaute Burg stellt die Burg Sárospatak dar (Wassertor, 1541). Zur gleichen Zeit wird auch die Burg Szigetvár befestigt (1543). Über viele unsere Burgen geben die Zeichnungen des Kriegingenieurs *Giulio Turco* aus dem Jahre 1569 Aufschluß. Diese Zeichnungen konnten in den letzten Jahren durch mehrere Ausgrabungen beglaubigt werden. Egervár, Ónod, Tata, Sárvár stellen weitere Beispiele der nach altitalienischem System bastionierten Burgen dar. Die letztere wurde nach den Plänen von *Donato Grazioli* (1588—1615) erbaut.

Im entwickeltsten Typ der Ohren-Bastionen, des sog. neitalienischen Systems, wurde die Burg Győr erbaut, die von ihrer kaiserlichen Besatzung vor den herannahenden Türken 1529 in Brand gesteckt und verlassen wurde. Zur Verteidigung von Wien wurde jedoch ihr Wiederaufbau im Jahre 1557 begonnen. Der Entwerfer ist *Pietro Ferabosco* (1562), der in den Jahren 1564—1565 die Arbeiten selbst leitet. Damit wird Győr die stärkste Burg des ungarischen Grenzschutzsystems. Mit neitalienischen Bastionen befestigt *Ottavio Baldigara* (1573—1583) die Burg Eger. Nach Baldigaras Entwürfen wird die



Bild 79. Pietro Ferabosco nach *Antonio Abondio* (1575)

Hauptfestung der Bergoberhauptmannschaft Érsekújvár (Nové Zámky) in den Jahren 1580—1588 erbaut. Sie stellt die modernste Burg des Landes mit dem Grundriß eines regelmäßigen Sechsecks dar.

Die improvisierten Bastionwerke und Kurtinen-Wände werden bald durch die aus Stein in altitalienischem System erbauten Bastionen, alsdann durch die zur Unterbringung von noch mehr Artillerie geeigneten neitalienischen Bastionen abgelöst, deren Frontseiten beinahe so lang sind wie die der ihrer Verteidigung anvertrauten Kurtinen. Ein großer Vorteil des neitalienischen Systems besteht darin, daß die bestreichenden Geschütze hinter die Ohren der Bastionen zurückgezogen werden können. *Aus alldem ist ersichtlich, daß der im Jahre 1541 noch sehr zurückgebliebene ungarische Burgbau in dem kurzen Zeitraum von 40 Jahren das entwickeltste Niveau der Burgen dieser Zeit erreichte* [24].

Der heutige ungarische Denkmalschutz wendet sich mit gesteigerter Aufmerksamkeit seinen historischen Denkmälern zu, wie es durch die archäologische Aufschließung und Konservierung der in malerischer Umgebung und schöner Landschaft stehenden zahlreichen Burgen verkündet wird.

Anmerkungen

1. Vgl. VIOLLET LE DUC: *Essai sur l'architecture militaire au moyen-âge* (Paris, 1854); M. A. CAUMONT: *Architecture civile et militaire* (Caen, 1896); O. PIPER: *Burgenkunde* (München I. 1905, II. 1906); B. EBHARDT: *Der Wehrbau Europas im Mittelalter* (Berlin I. 1939) und die vorangehenden zahlreichen Studien.
2. GERÓ, L.: *A budai vár helyreállítása* (Restauration der Ofner Burg) (Bp. 1951); *Magyarországi várépítészet* (Der Burgbau in Ungarn) (Bp. 1955); *Development of Castles and Historic Houses* (Bulletin of the Intern. Castl. Inst. Rapperswil, Suisse, 1961. No. 14.).
3. GOMBOCZ, Z.—MELICH, J.: *Lexicon critico etymologicum linguae Hungaricae* (Bp. I. 1914—1930).
4. So im zitierten Werk von B. EBHARDT und in ähnlicher Auslegung bei C. SCHUCHARDT: *Die Burg im Wandel der Weltgeschichte* (Potsdam, 1931).
5. TOLSTOW, S. P.: *Az ősi Chorezm* (Das uralte Chorezm) (Bp. 1950).
6. A. V. GERKAN: *Griechische Städtanlagen* (Berlin u. Leipzig, 1927); NOAK, F.: *Arch. Anz.* (1916, S. 215), vgl. noch GENZMER, F.: *Stadtgrundrisse* (Berlin, 1911); BUNYIN, A. V. und Mitarbeiter: *Városépítés* (Stadtbau), Kap. II. *Városépítés Görögországban* (Stadtbau in Griechenland) (Moskau, 1945); GREMIER, A.: *Archéologie Gallo-Romaine* (Manuel d'archéologie V., Paris, 1931).
7. R. RITTER: *Chateaux, donjons et places fortes* (Paris, 1953). Den Stoff bezüglich des römischen Burgbaues s. in dem zitierten Werk von BUNYIN: *Römische Kapitel*, ferner DELBRÜCK, H.: *Gesch. d. Kriegskunst* (Berlin, 1908. III. Ausg. Kap.: Altertum); GROSSE: *Römische Militärgeschichte von Gallienus* (1920); endl. VEGETIUS: *Epitoma rei militaris* (Teubner Ausg.); Neuestens die Baudaten der Aurelianusschen *Porta Asinaria* in Rom siehe SCARPA, P.: *Porta Asinaria* (Capitolium 1953. Nr. 3. S. 87); bezgl. d. dacischen Burgen DAICOVICIU, C.: *Așezările dacice din munții Orastei* (Cercetări de istorie veche, 1951); *Abbildungen römischer Burgen*: CICHORIUS, C.: *Die Reliefs der Traianssäule* (Berlin, 1896); bezgl. der Burgen in Kleinasien REY, G.: *Etudes sur les monuments de l'architecture militaires des croisades en Syrie et dans l'île de Chypre* (Paris, 1871); ferner die Artikel v. GOTTWALD, J. in den 1940, 1941 Jahrgängen d. *Byzantinischen Zeitschrift*. Über d. Einfluß der Burgen der Kreuzritter in Kleinasien auf die Burgen von Europa siehe noch AGNELLO, G.: *Problemi ed aspetti dell'architettura Sveva* (Palladio, 1960. S. 37—47.).
8. Arad (XII. Jh. Ende); Bars (Tekow 1075); Bihar (X. Jh.); Borsod, Csanád, Csongrád slawische Burgen. Fehérvár (erste Erwähnung der Siedlung 1002, der Burg 1233); Kolon (1002); Somogyvár (1061); Szabolcs (frühere Burg); Szolnok (Erwähnung der »Jobagiones castris« 1075); Ujvár (1075); Veszprém (Gründung d. Bistums 1002, erste Erwähnung der Burgmauern 1086).
9. Moson (X—XI. Jh. Wende); Pozsony (Bratislava dürfte den Namen von dem ersten Gespan erhalten haben; das Jahrbuch von Admont erwähnt seit 907 Bresalauspurc); die Burgen v. Esztergom, Sopron sind auch frühzeitige Burgen.
10. Die Obhut der Burgen Nyitra, Pozsony, Moson u. Sopron überließ Béla IV. seinem Sohne Béla. Über diese bereits existierenden Burgen berichtet ein Dokument aus dem Jahre 1263. Zur gleichen Zeit wird Visegrád als eine unlängst erbaute Burg erwähnt. Über die Nyitraer Burg berichtet ein Dokument aus dem Jahre 1212, über die Pozsonyer Burg Dokumente aus 1221 u. 1239.
11. Der alte Turm von Langeais (989 o. 994); Montbazou (979); Loches (1010); Saumur (1020) sind die frühesten. Der Ursprung der Wohntürme ist noch heute bestritten. Unserer Ansicht nach dürften die inneren, mit den stärksten Mauern versehenen und vermutlich die höchsten, meistgeschützten Bauten, die »Hilani« genannten turmartigen Gebäude der Babylonischen Burg — ähnlich den anderen im Altertum entstandenen Burgformen — die Vorbilder der späteren Wohntürme gewesen sein, die ebenfalls nicht allein standen im mittelalterlichen Verteidigungssystem, das beinahe alle seinen Elemente aus Osten bekam. Wir meinen, daß die obigen Ausführungen eher eine Erklärung über das plötzliche und völlig entwickelte Erscheinen der Wohntürme geben als die Ableitung von den Holztürmen der »Motten«. Die Holztürme und die mächtigen Steintürme weisen lediglich im Grundriß in der Abbildung eine gewisse Ähnlichkeit auf, nicht aber in den Raumverhältnissen, wodoch bei den Bauten die letzteren entscheidend sind. Der Unterschied zwischen den Holztürmen und den steinernen Wohntürmen ist unserer Ansicht nach unüberbrückbar. Auch können wir die Entwicklungstheorie der an Stelle der Holztürme erscheinenden Steintürme nicht annehmen, nach der zunächst nur der untere Teil des Turmes aus Stein bestand, der

- volle Turm aber erst später. Die Existenz derartiger Türme wollen wir nicht in Abrede stellen. Solche Umwandlungen sind auch in den XIII.—XIV. Jahrhunderten möglich. Jedoch gilt dies nicht für die ersten normannischen Türme. Ihre Erbauer bekunden eine hohe Steinmetzschulung. Die Türme, die zur Hälfte aus Stein, zur Hälfte aus Holz bestanden, wurden nach einer anderen Technologie erbaut. Mit solchen Türmen konnten Tore befestigt werden, oder aber dürften sie zur Beobachtung, unter Umständen auch zur Verstärkung der Burgmauern gebaut worden sein, ihre Abmessungen sind aber keinesfalls die der Wohntürme. Die Mauern sind nicht 5—7 m, sondern nur 1—2 m dick. Die Ähnlichkeit der Grundrißformen kann ebenfalls irreführen.
12. DERCSÉNYI, D.—GERŐ, L.: A sárospataki Rákóczi-vár (Die Rákóczi-Burg in Sárospatak) (Budapest, 1953); DERCSÉNYI, D.—ZOLNAY, L.: Esztergom műemlékei (Die Baudenkmäler von Esztergom) (Bp. 1958). Betreffend die Burgen mit regelmäßigen und unregelmäßigen Grundrissen s. noch D. MENZLOVÁ: Közép-európai XIV. és XV. századi szabályos alaprajzú várpaloták (Mitteleuropäische Burgen mit regelmäßigen Grundrissen aus dem XIV. u. XV. Jahrhunderten. Müvtört. Ért. 1958. 81—104.). Vergl. weiter A. MILOBEDZKI: Zamek w Mokrsku Górnym i niektóre problemy Malepolskiej architektury XV i XVI wieku (Buletyn Historii Sztuki 1959. I. S. 30-52).
 13. VIOLLET LE DUC: Dict. d'architecture, S. 196; Grand: op. cit. S. 164; ESSENWEIN: Kriegsbaukunst (Handb. d. Arch. II. 4. I. S. 244).
 14. DELBRÜCK, H.: Geschichte der Kriegskunst (Berlin, 1908); bezüglich der mittelalterlichen Stadtmauern mit äußerem Turm siehe noch ZACHWATOWICZ, J.: Mury i Barbakan stary Warszawy (Ochroņa Zabitoń, 1953. Nr. 2—3.); MENZLOVÁ, D.: O středověkem opevnění našich měst (Zprávy památková Péce, 1950. X. 7.).
 15. BALOGH, J.: Magyarországi renaissance (Die Renaissance in Ungarn) (Bp. 1953. S. 16).
 16. GRAND, M.: L'architecture militaire jusqu'a Vauban (Bull. Mon. Paris, 1951. S. 375.).
 17. »De re aedificatoria« (I. Ausg. Firenze, 1485).
 18. Eine solche ist die v. BACCIO PONTELLI entworfene Burg in Ostia (1483) sowie der bastionierte Wehrgürtel d. Civita Castellana (1494—97). Die Bastionen der quadratischen Nettunoer Burg entwarf Antonio da Sangallo der Aeltere (1501—1503). Im Laufe des Ausbaues der Veroneser Wehrmauer erbaut MICHELE DI SANMICHELI die Maddalenen-Bastion (1527). Die Römische Ardeatino Bastion, die Mauern neben Santo Spirito u. das vatikanische Belvedere baut ANT. DA SANGALLO der Jüngere (um 1536). Zwischen FILARETE und LUIGI PIRRO SCRIVA umwandelt sich der italienische Burgbau (1460—1530). Vergl. U. CHERICI: Il castello de l'Aquila (Boll. d'Arte 1951. S. 225—239).
 19. Zuerst begegnen wir d. Ravelin in den Zeichnungen von LEONARDO DA VINCI aus der Zeit um 1482. Was bei LEONARDO noch ein Versuch ist, wird bei FRANCESCO DI GIORGIO DI MARTINI (1439—1506) schon Praxis. Er erbaut nach der Niederlage bei Ortranto die Küstenbefestigungen v. Aquila, zur Verhinderung des gefürchteten Einbruchs der Türken. Während dieser Arbeit sammelte er die Erfahrungen, die er in seinem effektvollen Werk »Trattato dell'architettura civile e militare« erörtert (Siena, 1504). MICHELANGELO liebte die beißzangenartigen Anordnungen und baute Ohren zur Bastion, zum Schutz der Kurtinen. Vergl. PAPINI, R.: Fr. di Giorgio di Martini (Firenze, 1949).
 20. Maximilian II. beruft die berühmtesten Sachkundigen: Francesco de Marchi und Carlo Theti, dessen Buch in Venedig im Jahre 1575 erschien, darin mit mehreren ungarischen Burgen. Zur Revision beruft er auch den berühmten deutschen Architekten SPÄCKLE. Es treffen ein: SALLUSTIO PERRUZZI u. ALESSANDRO DA VEDANO (im Jahre 1567 »Magister muratorum regius«), GIACOMO FALUBREIUS (1569), OTTAVIO BALDIGARA, GIACOMO DI LOBERSEE (1571), POLO CATTANEO (1583), BARTOLOMEO DA PONTE (1585). Im XV—XVIII. Jh. arbeiten anderthalbundert italienische Burgbauleute bei uns. Deutsche, französische oder niederländische Einwirkungen können wir erst seit der Mitte des XVII. Jh. in Spuren verfolgen, in allmählich stärker werdendem Maße.
 21. PATAKI, V.: A XVI. századbeli várépítés Magyarországon (Der Burgbau im XVI. Jh. in Ungarn) (1932).
 22. GERŐ, L.: Włoskie fortyfikacje bastionowe na Węgrzech (Polska Akademia Nauk, Kwartalnik Architektury i Urbanistyki Warszawa, Tom IV. 1—2., 1959).
 23. GERŐ, L.—SEDLMAYR, J.: Pápa (Bp. 1959). Die Befestigung der Burg Pápa wird glaubwürdig im Tagebuch des Burgkapitäns I. MARTONFALVI (1501—1585) beschrieben (Mon. Hist. Hung. 1881, XXXI).
 24. Die neuen Elemente der späteren Burgentwicklung bedeutet das System der äußeren Schutzwerke. Charakteristische innere Ersatzschutzwerke sind die hohen *Geschützstellungen*, die zur Beobachtung und Beschießung der entfernteren Teile dienen, ferner die *Geschützbank*, die zur Verstärkung des Hauptwehrgürtels angeordnet ist. Die *Wehrkaserne* diente zur Unterbringung der rastenden Wache (caserma difensiva).

Auch diese Kaserne kann mit Artillerie verstärkt sein. Sie wurden in den Bastionen oder hinter den Schutzmauern, in deren Hals oder in der Kehle der Schanzwerke angeordnet. Gleichzeitig dienten sie in der Regel auch als *Asyle (ridotto)*. Äußere Schutzwerke sind die *gedeckten Wege* und die mannigfaltigen Anordnungen der *Wehrschanzen*. Von der *Schießbank*, die auf dem in den Gegenhang eingeschnittenen Wege angeordnet war, konnte das vor dem gedeckten Weg breit planierte *Glacis* vollkommen bestrichen werden. Den schmalen gedeckten Weg nannte man *Streifwachen- (Patrouillen-)weg (cammino di ronda)*, die Ausweitungen, wo die Verteidiger die Truppen, vor dem Feinde verborgen, zum Ausbruch sammeln konnten, waren die *Waffenplätze*. Ein bezeichnendes Ersatzschutzwerk der bastionierten Burg ist der *Schilddamm*, der den hinter ihm liegenden Abschnitt der Burgmauer vor dem äußeren Angriff schützt und zur Kontrollbeobachtung der Waffenplätze des gedeckten Weges dient. Schließlich konnte das vor der Burgmauer liegende *Glacis* von hieraus unter Kreuzfeuer gehalten werden. Zur Verteidigung der Bastionen — insbesondere gegen die auf die Frontseiten abgefeuerten Schüsse — wurden *Hirnwehre* angewendet, die von dem halbkreisförmigen Grundriß des Inneren einer solchen Schanze *Halbmond (Lunette)* benannt wurden. Das alt- und neualienische Bastionsystem wurde von DANIEL SPÄCKLE (1536—1589) weiterentwickelt, der die Burgen Ingolstadt, Hagenau, Ulm, Kolmar, Basel und Strassbourg (letztere seine Geburtsstadt) baute. Von seinem berühmten Buch, *Architettura delle fortezze* betitelt, folgte eine Auflage der anderen. Aus sein System — weder auf das im niederländischen Freiheitskrieg (1586—1640) entstandene *alt-niederländische* System, noch auf das *neu-niederländische* System — wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen. Auch wollen wir uns nicht befassen mit dem System des MENNO VAN COEHORN (1641—1704) und der Entwicklung des französischen bastionierten Systems, mit den drei aufeinanderfolgenden Systemen des VAUBAN (1633—1707), noch mit den Lehren von CORMONTAIGNE (1692—1752) und der im Jahre 1750 gegründeten Militärschule in Mezieres, MONTALEMBERT (1714—1799) u. CARNOT (1753—1817) und deren zahlreichen Schülern, die die neue Wissenschaft des Festungsbaues vollkommen umwandeln. *Auch das altpreußische* Befestigungssystem möge nur erwähnt werden, um auf die neueren Richtungen der Entwicklung hinzuweisen. FRIEDRICH DER GROSSE und sein Baumeister WALRAWE (1692—1773) verliessen das rein bastionierte System, um zu einen vieleckigen Festigungssystem und bald danach zu einem System von selbständigen Festungen überzugehen. Aus diesem entwickelte sich das sog. *neupreußische* System, womit wir an die Kette des Festungsgürtels des XX. Jahrhunderts (Maginot-Linie) gelangten.

Für den sich in Europa in den XVI—XVIII. Jahrhunderten ausbildenden, über umfangreiche Vorwerke verfügenden und einen beinahe gänzlich gedeckten Burgkern besitzenden Burgtyp, für die *Festung*, haben wir in Ungarn nur ein einziges Beispiel, Komárom, womit auch die ungarländische Entwicklung der Burgbau ihr Ende findet.

DIE IM ARTIKEL BENÜTZTEN ILLUSTRATIONEN

- 8 Aus Gefälligkeit d. Soprintendenza alle Antichità dell' Etruria Meridionale — Roma. Dir. A. de Agostino
 4, 9, 10, 11, 13, 14, 25, 28, 58, 64, 65 Photosammlung d. Ung. Denkmalinspektorats — Budapest
 12, 17, 18, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 57, 59, 62, 63, 74 Photosammlung d. Ung. Denkmalinspektorats, Aufn. L. Dobos
 36, 40 Ung. Denkmalinsp. Aufn. I. Borsos
 27, 29, 30, 75, 76, 78 Aufn. d. Luftwaffenkommandos d. Ung. Kriegsministeriums
 66 Staatl. Kriegsarchiv — Wien
 77 Staatl. Archiv — Karlsruhe
 41 Aus Gefälligkeit d. Archeologen K. Kozák und Architekt T. Koppány
 48 Aus Gefälligkeit d. Architekt J. Sedlmayr
 49 Aus Gefälligkeit d. Archeologen I. Éri und Architekt J. Sedlmayr
 50 Aus Gefälligkeit d. Architekt K. Ferenczy
 67 Aus Gefälligkeit d. Architekt M. Détsy
 60, 61 Hist. Bilderhalle des Ung. National-Museums — Budapest

THE CHARACTERISTIC EPOCHS OF CASTLE BUILDING

L. GERÓ

SUMMARY

For the determination of the epochs of castle building, the defence works which arose simultaneously with the development of besieging means are of importance, rather than the architectural styles. According to the author, the characteristic epochs of castle construction are: I) Earthen castles; II) Inhabitation towers; III) Castles with internal towers and a) regular, b) irregular plan; IV) Castles with external towers; V) Castles with Italian bastions. The buildings belonging to the following group are not castles, but fortresses.

The earth castles and roman castrums encountered by the Hungarians when beginning to occupy Hungary (A. D. 896) are briefly dealt with; amongst the castrums were such 1) with earth walls, 2) with wooden walls, 3) with stone walls.

The first Hungarian castles (Xth—XIth century) were built by the then reigning king. According to the late development of feudalism the inhabitation towers were built at a rather late date, parallelly with the decay of the royal estate and the development of the great private estates (XIIth—XIVth century).

LES ÉPOQUES CARACTÉRISTIQUES DE LA CONSTRUCTION
DES CHÂTEAUX-FORTS

L. GERÓ

RÉSUMÉ

Les différentes époques de construction des châteaux-forts se caractérisent non point par les styles architecturaux, mais par les ouvrages de défense reflétant les progrès des instruments de siège. Les principales époques de construction des châteaux-forts correspondent, d'après l'auteur, aux catégories suivantes: I. fortins de terre; II. donjons; III. châteaux-forts à tours intérieures a) de plan régulier b) de plan irrégulier; IV. châteaux-forts à tours extérieures; V. châteaux-forts à bastions italiens. Le groupe suivant est déjà réservé aux forteresses.

L'auteur examine rapidement les fortins de terre et castrum romains trouvés dans le pays par les Hongrois conquérants (en 896), qu'il distingue selon leurs murs 1. en terre; 2. en palissade; 3. en pierre.

Les premiers châteaux-forts de Hongrie (X^e—XI^e siècles) sont élevés par le roi. Conformément à la formation tardive du féodalisme en Hongrie, les donjons se construisent à une époque relativement tardive, parallèlement au morcellement du domaine royal et à la formation de la grande propriété privée (XII^e—XIV^e siècles).

ХАРАКТЕРНЫЕ ПЕРИОДЫ АРХИТЕКТУРЫ КРЕПОСТЕЙ

Л. ГЕРЭ

РЕЗЮМЕ

Вместо определения периодов строительства крепостей в зависимости от архитектурных стилей, характерными являются оборонные сооружения, возникшие с развитием осадных средств. По определению автора характерными периодами в строительстве крепостей являются: 1. Земляные крепости. 2. Башни с жилыми помещениями. 3. Крепости с внутренними башнями а) с правильным и б) с неправильным планом. 4. Крепости с наружными башнями. 5. Крепости с итальянскими башнями. Следующая за этим группа уже не крепость, а форт.

Кратко останавливается на найденных на территории при ее занятии (896) земляных крепостях и римских чатрумах, среди которых также имелись с 1. земляными; 2. тесовыми; 3. каменными защитными стенами.

Первые крепости в Венгрии (в X—XI веках) строит король. Жилые башни, в соответствие с поздним развитием феодализма, строятся в более позднее время, параллельно с процессом развала королевского поместья и со становлением частного крупно-поместного имени (XII—XIV века).

DETERMINATION OF STRESSES IN TUNNEL LINING CONSIDERING FRICTION BETWEEN ROCK AND TUNNEL

G. KOVÁCS—L. RÓZSA

DESIGN OFFICE UVATERV, BUDAPEST

[Manuscript received April 20, 1962]

Calculation of tunnel lining was recently performed considering the interaction of lining and rock, assuming a supporting effect of the surrounding soil. Previously to this Winkler's bedding coefficient was assumed as valid. The task could be solved on the basis of the theory of elasticity by approximation nearer to reality. A solution of similar character was published by authors in *Acta Techn. Hung.* 38, No 3—4 where stresses and displacements were given in finite form.

The treatise in hand presents a development of their previous publication. Since the cavities between tunnel lining and rock are to be grouted, friction also occurs due to loading. The friction significantly influences the diagram of lining and decreases the values of bending moments in the lining. This paper gives a solution for circular beams loaded by normal force varying according to sections and belonging to the tangential force according to Coulomb's relationship. It is assumed, that along the perimeter a constant friction coefficient acts and this equals Coulomb's limit value. The basic system of the calculation model is assumed to be a hinged chain supported by curved bars. The reactive forces, assumed as axis of bars and the interactions of influence diagram are taken into consideration. The solution is given in the form of matrix-calculus which can easily be programmed into electronic computers.

1. Introduction

Calculation methods of circular tunnel linings can be divided into three groups taking into consideration the construction and also that of the surrounding soil:

a) *Freely deformed ring*

The tunnel lining will be dimensioned for the vertical and — in accordance with it — the horizontal load, on the basis of some kind of rock pressure theory without assuming that any force hinders its deformation.

b) *Hindered deformation ring*

This dimensioning method is widespread in the United States, mainly by published procedure of the well known authors — HEWETT and JOHANESSON [1]. This method is a rough approximation which is far from the actual diagram of forces. Contrary to the ring being freely deformed here will arbitrarily assumed an effect of outer force hindering deformation.

c) Ring embedded in elastic medium

This method was elaborated during the designing of the Moscow underground. Principally it makes possible the consideration of the elastically bedded support, produced by the deformation of the tunnel. This procedure is known in the literature as Metroproject-method [2], [3].

According to this method the surrounding medium of the ring is to be substituted by elastic supports without any interconnection as shown in Fig. 1. It appears from this figure that the radial forces acting on certain

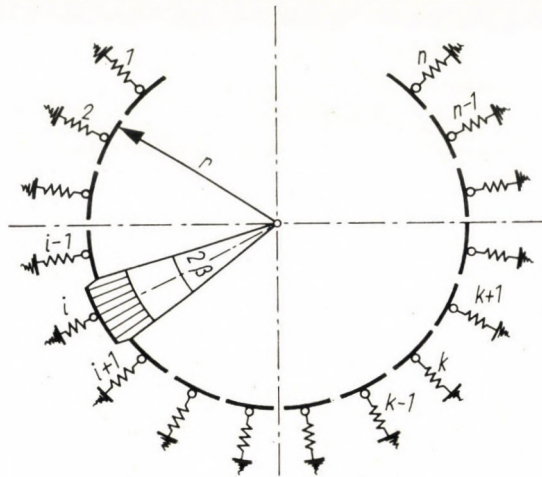


Fig. 1.

sections of the idealized medium around the ring cause displacements only in their influence line, and in case of tangential effect of forces no displacement occurs. The medium around the tunnel, however, has no features similar to this.

Thus, the research work of recent years tended to characterize the elastic behaviour of the soil instead of the bedding coefficient by actual physical constants — by the modulus of elasticity E of the soil and by Poisson's ratio — to replace the theory of Winkler by a relationship in accordance with mathematical elasticity.

ORLOW [4] has substituted for Winkler's theory a displacement which is due to radial and tangential forces acting on certain sections of circular cutout, in elastic infinite space. The solution was given in the form of an infinite series. The practical application may however, encounter difficulties, due to the slow convergence of this series. But the authors succeeded in expressing it by elementary functions in finite form, and thus in ensuring their broader practical application. The authors have already elaborated [5], [6] the displacement functions of circular cutout of infinite space, in a finite form. They

presented its application for dimensioning tunnel linings in that case when the friction on the lining is to be neglected.

For dimensioning of the lining — if we intend to follow the actual effect of forces — it is not practicable to neglect friction either. Namely, the friction increases the load capacity of the tunnel lining, i.e. it is favourable as to the diagram of forces in the structure, the consideration of it making possible the reduction of lining dimensions.

This treatise deals with the simultaneous appearance of elastic bedding support and boundary friction. We assume, that the relationship of Coulomb is valid along the perimeter of the tunnel ring between the radial and tangential bedding reactions.

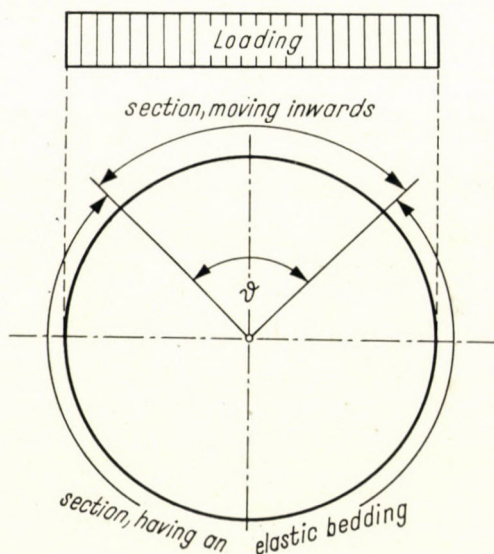


Fig. 2

2. Shaping of the calculation model

Investigations carried out in the Soviet Union proved that the rock not only transmits the loading to the lining, but also supports it on a certain section of its perimeter. The contour of circular tunnel, from this point of view, can be divided into two parts: that of which moves inwards and that which has an elastic bedding (Fig. 2).

On the section moving inwards the displacement of lining due to the effect of rock pressure is directed inwards, that is, it tends to break away from the rock. On the section of elastic bedding, however, the lining due to deformation will be forced against the rock, and as a result of friction, in the radial direction reactive forces arise which include an angle of φ_i (Fig 3).

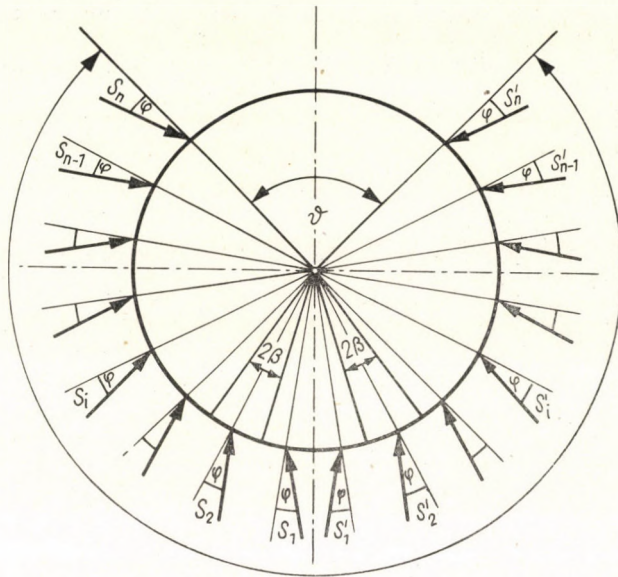


Fig. 3

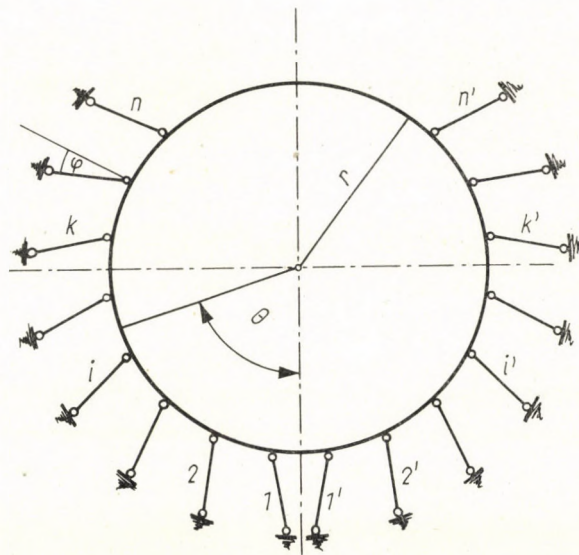


Fig 4

The limits of these sections can be determined by gradual approximation. As starting point the limits will be assumed as being known. Let us divide the section of elastic bedding — as shown in Fig. 3 — to elementary sections of finite — $2r\beta$ — length.

If the reactive forces occurring on the elementary sections which are due to symmetrical external loading are substituted by their resultants, so they can be replaced — from the viewpoint of force diagram of the tunnel lining — with pivoted bars indexed by an angle of φ_i in the direction of outer loading compared with radius (Fig. 4). Thus, we obtain for calculation of circular linings embedded in elastic medium such a simple model, which consists of a circle and of $2n$ supporting bars.

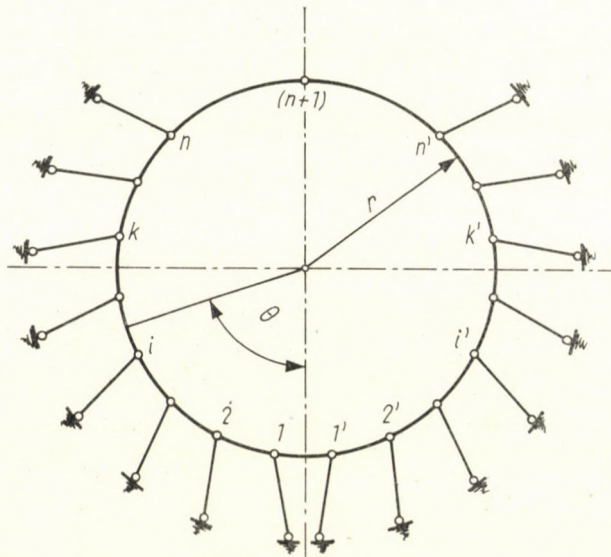


Fig. 5

3. Determination of force diagram for mechanical model

The determination of the force diagram of our multiple indefinite mechanical model will be performed by in statics well-known force method.

Let us consider the moments as unknown effects and the basic system should be so shaped, that one of the hinges arrive to the peak and the others to assemblages of bars and of ring. As a result, we obtain a statically definite system, consisting of straight and curved bars (Fig. 5).

Writing down the canonical set of equations for the basic system shown in Fig. 5 in case of external loading symmetric to the vertical axis,

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + a_{1(n+1)} x_{n+1} + a_{10} &= 0 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + a_{2(n+1)} x_{n+1} + a_{20} &= 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + a_{n(n+1)} x_{n+1} + a_{n0} &= 0 \\
 a_{(n+1)1} x_1 + a_{(n+1)2} x_2 + \dots + a_{(n+1)n} x_n + a_{(n+1)(n+1)} x_{n+1} + a_{(n+1)0} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Here $x_1, x_2 \dots x_{n+1}$ are the unknown moments, a_{ik} denotes the constants of the set of equations. The constants can be determined by the following work equation:

$$a_{ik} = \int_{(s)} \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int_{(s)} \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int_{(s)} \varrho \frac{Q_i Q_k}{GF} ds + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{s}_{jk} \bar{e}_{ji} \quad (2)$$

where $i = 1, 2, \dots, n, n+1$ and $k = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$.

In the first three members of the formula (2) M_i, M_k, N_i, N_k and Q_i, Q_k denote, in accordance with their index, the unit pair of moments,

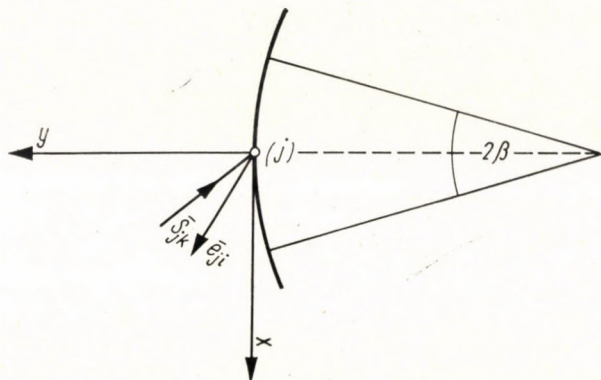


Fig. 6

acting on the hinges i and i' , respectively, k and k' — further in the case of $k = 0$ due to external loading — the functions being momental, normal and shear.

The constants E, G, F, J and ϱ denote the modulus of elasticity, that of shear in the tunnel lining, the cross section area of unit tunnel length, the moment of inertia as well as a coefficient, depending of its form.

The first three members of the formula (2) are connected with the work of tunnel lining. Their determination can be accomplished by known methods of statics. The fourth member of the expression (2) denotes the work of reaction on the tunnel ring, due to displacement of the soil surrounding the lining. After the sign Σ the scalar product of two vectors figures. Here \bar{e}_{ji} denotes the displacement vector of the surrounding soil in the j^{th} section and \bar{s}_{jk} is the reaction vector of the same section (Fig. 6).

The displacement \bar{e}_{ji} originates from a unit pair of moments, acting on the hinge i, i' of the basic system and the reaction \bar{s}_{jk} from the unit pair of moments acting on the hinges k, k' respectively, in the case of $k = 0$ on the effect of external loading.

If the coordinates of the vectors \bar{e}_{ji} and \bar{s}_{jk} are to be determined in vertical y , and normal to it tangential x directions, as shown in Fig. 6:

$$\bar{e}_{ji} = [U_{ji}, V_{ji}],$$

$$\bar{s}_{jk} = [R_{jk}, T_{jk}],$$

so it can be written

$$\bar{s}_{jk} \bar{e}_{ji} = R_{jk} U_{ji} + T_{jk} V_{ji},$$

that is

$$\sum_{j=1}^n \bar{s}_{jk} \bar{e} = \sum_{j=1}^n R_{jk} U_{ji} + \sum_{j=1}^n T_{jk} V_{ji}. \quad (3)$$

However on the basis of aforementioned it is obvious that R_{jk} and T_{jk} , respectively, U_{ji} and V_{ji} figuring in formula (3) denote the radial and tangential components of the reactive force \bar{s}_{jk} originating at the j^{th} scale respectively, those of displacement of the surrounding soil.

Let us introduce the following series and column matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k^* &= [R_{1k}, R_{2k}, \dots, R_{nk}], \\ \mathbf{t}_k^* &= [T_{1k}, T_{2k}, \dots, T_{nk}], \\ \mathbf{u}_i &= \begin{bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{ni} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} V_{1i} \\ V_{2i} \\ \vdots \\ V_{ni} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

These matrices consist of all the components of bar stresses originating in all the swingle bars, respectively, those of displacements originating in all the bars, due to a pair of unit moments acting on points k and k' , respectively, i and i' of the basic system, and in the case of $k = 0$ on the effect of external loading. The relation (3) using the introduced markings, can be expressed with the aid of matrix algebra as follows:

$$\sum_{j=1}^n R_{jk} U_{ji} + \sum_{j=1}^n T_{jk} V_{ji} = \mathbf{r}_k^* \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{t}_k^* \cdot \mathbf{v}_i. \quad (4)$$

The matrix $\mathbf{r}_k \mathbf{t}_k$ can be calculated from a statically determined basic system. In the same way can the specific value of reactive forces be determined which originate on the j^{th} section of $2r\beta$ length, due to a pair of unit moments acting on the point i, i' :

$$q_{ji} = \frac{R_{ji}}{2r\beta} \quad \text{and} \quad p_{ji} = \frac{T_{ji}}{2r\beta} \quad (5)$$

where p_{ji} — the specific distribution of the tangential force,
 q_{ji} — the specific distribution of normal force.

For the complete basic system the following matrix column can be obtained:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

The work of swingle bars according to formula (4), however, may be determined, if the displacement matrices \mathbf{u}_i and \mathbf{v}_i of the medium surrounding the tunnel on the effect of loadings, to be found in matrices \mathbf{q}_i and \mathbf{p}_i (Fig. 7) are known.

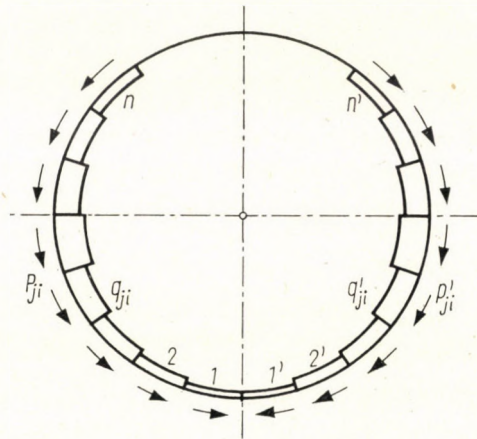


Fig. 7

The former displacement matrices are determined by using the mathematical elasticity aided by the radial $\xi(\theta)$ and $\eta(\theta)$ tangential, respectively, radial $\zeta(\theta)$ and $\nu(\theta)$ tangential displacement functions on the scale section, due to radial, i.e. tangential loading of unit resultant [4].

The displacement functions are as follows:

From radial loading:

$$\xi(\theta) = \frac{1 + \mu}{\pi E} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2[n - \mu(n+1)] + 1}{n(n^2 - 1)} \cos n\alpha \cdot \sin n\beta \cdot \cos n\theta \right]. \quad (6)$$

$$\eta(\theta) = \frac{1 + \mu}{\pi E \beta} \left[\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \theta - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2) - 2\mu(n+1)}{n(n^2 - 1)} \cos n\alpha \cdot \sin n\beta \cdot \sin n\theta \right]. \quad (7)$$

From tangential loading:

$$\zeta(\theta) = \frac{2(1 + \mu)}{\pi E \beta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n + 2) - 2\mu(n + 1)}{n(n^2 - 1)} \sin n\alpha \cdot \sin n\beta \cdot \cos n\theta \quad (8)$$

$$\begin{aligned} v(\theta) = & -\frac{1 + \mu}{\pi E \beta} \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \theta + \\ & + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2[n - \mu(n + 1)] + 1}{n(n^2 - 1)} \sin n\alpha \cdot \sin n\beta \cdot \sin n\theta \quad (9) \end{aligned}$$

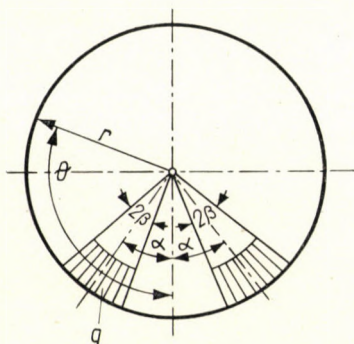


Fig. 8

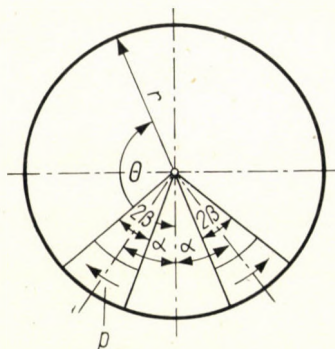


Fig. 9

The above displacement functions express the displacements due to distributed loadings

$$q = \frac{1}{2r\beta}, \quad p = \frac{1}{2r\beta}$$

acting on the section $2r\beta$ symmetrical to the vertical axis as shown in Figs. 8 and 9. The resultant of distributed loadings is the unit which includes an angle α in the initial direction.

Since the radial and tangential loadings act on each section, correspond to scale, the relationship between angles α and β can be expressed as follows:

$$\alpha_h = (2h - 1)\beta.$$

The scale and angle conditions are shown in Figs. 10 and 11.

Let us write down the external odd work equation acting on cutout of Fig. 7, which is due to displacement from loadings as shown in Figs. 10 and 11.

Owing to symmetry and factoring the radius "r" before integration, according to Maxwell-Betti's theorem, can be described:

$$2r \int_{(h)} \frac{u_i(\Theta)}{2r\beta} d\Theta = 2r \sum_{j=1}^n \left[q_{ji} \int_{(j)} \xi_h(\Theta) d\Theta + p_{ji} \int_{(j)} \eta_h(\Theta) d\Theta \right],$$

$$2r \int_{(h)} \frac{v_i(\Theta)}{2r\beta} d\Theta = 2r \sum_{j=1}^n \left[q_{ji} \int_{(j)} \zeta_h(\Theta) d\Theta + p_{ji} \int_{(j)} v_h(\Theta) d\Theta \right], \quad (10)$$

where

$$q_{ji} = -\frac{R_{ji}}{2r\beta}; \quad p_{ji} = \frac{T_{ji}}{2r\beta}.$$

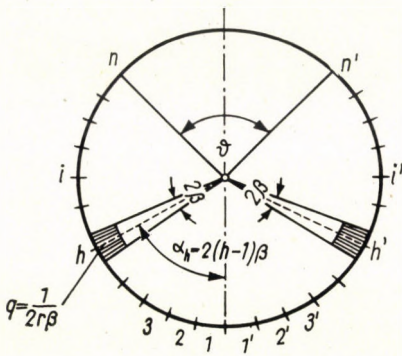


Fig. 10

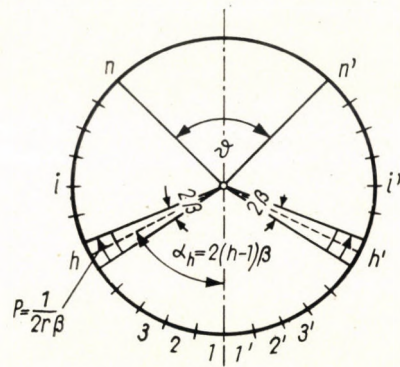


Fig. 11

After substituting of above relationship and regulation of both, former expressions are obtained:

$$\int_{(h)} \frac{u_i(\Theta) d\Theta}{2r\beta} = \sum_{j=1}^n \left[R_{ji} \int_{(j)} \frac{\xi_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta} + T_{ji} \int_{(j)} \frac{\eta_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta} \right], \quad (11)$$

$$\int_{(h)} \frac{v_i(\Theta) d\Theta}{2r\beta} = \sum_{j=1}^n \left[R_{ji} \int_{(j)} \frac{\zeta_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta} + T_{ji} \int_{(j)} \frac{v_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta} \right].$$

Introducing the following markings:

$$U_{hi} = \int_{(h)} \frac{u_i(\Theta) d\Theta}{2r\beta}, \quad V_{hi} = \int_{(h)} \frac{v_i(\Theta) d\Theta}{2r\beta}; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{jh} &= \int_{(j)} \frac{\xi_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta}, & \eta_{jh} &= \int_{(j)} \frac{\eta_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta}, \\ \zeta_{jh} &= \int_{(j)} \frac{\zeta_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta}, & v_{jh} &= \int_{(j)} \frac{v_h(\Theta) d\Theta}{2r\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

U_{hi} denotes the average radial displacement of h^{th} section due to unit load acting on the i^{th} point, respectively, in the case of $i = 0$ on the effect of outer loading.

V_{hi} denotes the average tangential displacement of the h^{th} section due to unit load acting on the i^{th} point, respectively, in the case of $i = 0$ due to the effect of outer loading.

The markings ξ_{jh} , η_{jh} , ζ_{jh} , v_{jh} denote diagram areas, which can be obtained by the integration of the diagram function concerned on the j^{th} section.

Performing the determined integrations, marked under (13) and taking into consideration the following boundaries of integration:

$$\Theta_1 = 2(j - 1) \beta \quad \text{and} \quad \Theta_2 = 2j\beta$$

will be obtained:

$$\begin{aligned} \xi_{jh} &= \frac{1 + \mu}{\pi E \beta} \left[\beta + \frac{2}{\beta} \sum_2^\infty \frac{2[n - \mu(n + 1)] + 1}{n^2(n^2 - 1)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(2h - 1)n\beta \cdot \cos(2j - 1)n\beta \cdot \sin^2 n\beta, \right] \\ \eta_{jh} &= \frac{2(1 + \mu)}{\pi E \beta^2} \left[\cos(2h - 1)\beta \cdot \sin(2j - 1)\beta \cdot \sin^2 \beta - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=2}^\infty \frac{(n + 2) - 2\mu(n + 1)}{n^2(n^2 - 1)} \cos(2h - 1)n\beta \cdot \sin(2j - 1)n\beta \cdot \sin^2 n\beta \right], \quad (14) \\ \zeta_{jh} &= \frac{4(1 + \mu)}{\pi E \beta} \sum_{n=2}^\infty \frac{(n + 2) - 2\mu(n + 1)}{n^2(n^2 - 1)} \sin(2h - 1)n\beta \cdot \cos(2j - 1)n\beta \cdot \sin^2 n\beta, \\ v_{jh} &= - \frac{1 + \mu}{\pi E \beta^2} \left[\sin(2h - 1)\beta \cdot \sin(2j - 1)\beta \cdot \sin^2 \beta + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=2}^\infty \frac{2[n - \mu(n + 1)] + 1}{n^2(n^2 - 1)} \sin(2h - 1)n\beta \cdot \sin(2j - 1)n\beta \cdot \sin^2 n\beta \right]. \end{aligned}$$

By the use of markings (12) and (13) the expression (11) can be expressed in the following form:

$$\begin{aligned} U_{hi} &= \sum_{j=1}^n [R_{ji} \xi_{jh} + T_{ji} \eta_{jh}], \\ V_{hi} &= \sum_{j=1}^n [R_{ji} \zeta_{jh} + T_{ji} v_{jh}]. \end{aligned} \quad (15)$$

The relationship (3), respectively (4) can be expressed by using (10) (work of elastic support) in the following form:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{s}_{jk} \bar{e}_{ji} &= \sum_{j=1}^n R_{jk} U_{ji} + \sum_{j=1}^n T_{jk} V_{ji} = \mathbf{r}_k^* \mathbf{u}_i + \mathbf{t}_k^* \mathbf{v}_i = \\ &= \mathbf{r}_k^* (\mathbf{H}_1 \mathbf{r}_i + \mathbf{H}_2 \mathbf{t}_i) + \mathbf{t}_k^* (\mathbf{H}_3 \mathbf{v}_i + \mathbf{H}_4 \mathbf{t}_i). \end{aligned} \quad (18)$$

Taking into consideration, that the supporting bars of our mechanical model have been turned aside by a constant angle φ as compared with radius (Fig. 4) it can be stated

$$R_{ji} = |\bar{s}_{ji}| \cos \varphi, \text{ respectively } T_{ji} = |\bar{s}_{ji}| \sin \varphi,$$

from which the relationship $T_{ji} = R_{ji} \tan \varphi$ is to be obtained. And this is identical with Coulomb's boundary condition, assuming that the angle φ equals the angle of friction between lining and rock. Assuming Coulomb's boundary condition it follows that $\varphi_i = \varphi = \text{const.}$ and then

$$\mathbf{t}_k^* = \mathbf{r}_k^* \tan \varphi \text{ and } \mathbf{t}_i = \mathbf{r}_i \tan \varphi$$

and thus formula (11) — the work of bedding — takes the following form:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{s}_{jk} \bar{e}_{ji} &= \mathbf{r}_k^* (\mathbf{H}_1 \mathbf{r}_i + \mathbf{H}_2 \mathbf{r}_i \tan \varphi) + \mathbf{r}_k^* \tan \varphi (\mathbf{H}_3 \mathbf{r}_i + \mathbf{H}_4 \mathbf{r}_i \tan \varphi) = \\ &= \mathbf{r}_k^* [\mathbf{H}_1 + (\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3) \tan \varphi + \mathbf{H}_4 \tan^2 \varphi] \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (19)$$

This work occurs only then, when the whole value of friction along the whole perimeter of the circular beam mobilizes itself, namely, the friction having for the moment the character of reactive force, develops only to such an extent, as far as the acting forces produce them.

When formulae (18) i.e. (9) are known, the constants of the canonic equations given by formula (2) can be calculated, and thus the unknown x_1 moments can be determined. In the possession of this knowledge the stresses being at known any point of our mechanical model, characterized by the angle θ known (Fig. 4).

Namely, the following relationships are well known:

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= M_{\theta 0} - \sum_{i=1}^n M_{\theta i} x_j \\ N_\theta &= N_{\theta 0} - \sum_{i=1}^n N_{\theta i} x_j \\ Q_\theta &= Q_{\theta 0} - \sum_{i=1}^n Q_{\theta i} x_j \\ \text{and} \\ S_j &= S_{j 0} - \sum_{i=1}^n S_{ji} x_j \end{aligned} \right\} (20)$$

as from statics, M_0 , N_0 , Q_0 are the values of moments, normal forces, and shearing forces on the point of the circular beam, determined by the angle θ , \bar{S}_j denotes the concentrated supporting force of the j^{th} section, that is the resultant of elastic reaction, acting on the section.

If the reaction of the extreme n^{th} section would be negative, this denotes that there is a tension which cannot exist in soil, and therefore the boundary of the section without bedding was assumed incorrectly. In this case the calculation procedure is to be repeated, increasing the central angle of section moving inwards. According to performed calculations the central angle of the section moving inwards can be assumed to be between $86-90^\circ$.

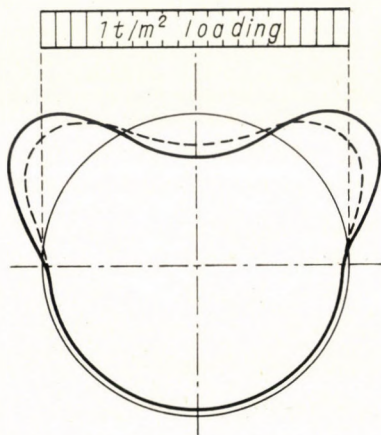


Fig. 12

On Fig. 12 the character of decreasing of the moments is shown in tunnels made of tubings of 6.0 metre dia. used by Budapest underground railway, and the effect of uniformly distributed loading.

The characteristic parameters of the tunnel are:

Inertia $I = 0.00014 \text{ m}^4$; area of section $F = 516 \text{ sq cm}$; the modulus of elasticity for cast iron $E = 1\,000\,000 \text{ kg/sq cm}$; the modulus of elasticity for surrounding soil $E_{\text{soil}} = 5000 \text{ kg/sq cm}$; the Poisson's ratio $\mu = 0.3$ was assumed; the coefficient of friction between lining and soil the value $\tan \varphi = 0.2$ was taken into consideration.

According to calculations performed the consideration of friction results in a 20–40% decrease in peak values of negative and positive moments occurring.

REFERENCES

1. HEWETT—JOHANESSON: Shield and Compressed Air Tunneling. New York 1922.
2. ВОЛКОВ, В. П.: Тоннели. Москва 1945.
3. SZÉCHY, K.: Alagutépítéstan. Budapest 1962.
4. ОРЛОВ, С. А.: Расчет конструкций, лежащих на контуре кругового выреза в плоскости. Исследования по теории сооружений. Выпуск VI. Москва 1944.
5. РОЖА, Л. — КОВАЧ, Г.: Деформация контура кругового выреза в упругой плоскости от действия радиальной нагрузки. *Acta Techn. Hung.* **38** (1962).
6. RÓZSA, L. — KOVÁCS, G. — KOHLMANN, L.: Stresses and Deformations due to Tangential Forces Acting along the Perimeter of a Circular Cut Set in an Elastic Plane. *Acta Techn. Hung.* **42** (1962).

ERMITTELUNG VON SPANNUNGEN IN DER TUNNELMAUERUNG
UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER REIBUNG
ZWISCHEN GESTEIN UND TUNNEL

G. KOVÁCS—L. RÓZSA

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Zeit werden die Tunnel unter Berücksichtigung von Wechselwirkung der Mauerung und des Gesteines sowie von Stützwirkung des umgebenden Gesteines berechnet. Dies wurde früher durch Annahme von Winkler's Bettungsziffer ermittelt. Die Aufgabe konnte auf Grund der Elastizitätstheorie durch eine der Wirklichkeit nahestehende Näherung gelöst werden. Eine Lösung ähnlichen Charakters haben auch die Verfasser in Acta Techn. Hung. 38, Nr. 3—4 veröffentlicht, wo die Spannungen und Verschiebungen in geschlossener Form angegeben wurden.

Dieser Aufsatz gilt als eine Weiterentwicklung der früheren Veröffentlichung. Unter Berücksichtigung der Verpressung von Hohlräumen zwischen der Tunnelmauerung und dem umgebenden Gestein entwickelt sich auch eine Reibung unter der Wirkung der Belastungen. Die Reibung beeinflusst stark das Kräftespiel der Mauerung, sie vermindert die Größe der in der Mauerung auftretenden Biegemomente. In diesem Artikel wird das Kräftespiel eines durch streckenweise veränderlichen Normalkräfte und dementsprechend nach dem Coulombschen Zusammenhang durch tangentielle Kräfte belasteten Kreisbalkens gelöst.

Es wird angenommen, daß ein konstanter Reibungskoeffizient längs des Umfangs wirkt und daß er mit dem Coulombschen Grenzwert übereinstimmt. Das Grundsystem des Berechnungsmodells wird als eine durch verdrehte Stäbe gestützte Gelenkkette aufgenommen. Die in der Achse der Stäbe angenommenen Reaktionskräfte werden durch Integration der Einflußlinie berücksichtigt. Die Lösung wird mit Hilfe von Matrix-calculus gegeben, der für elektronische Rechenmaschine auf einfache Weise einprogrammiert werden kann.

DÉTERMINATION DES CONTRAINTES DANS LE REVÊTEMENT DU TUNNEL,
COMPTE TENU DU FROTTEMENT ENTRE LE ROCHER ET LE REVÊTEMENT

G. KOVÁCS—L. RÓZSA

RÉSUMÉ

Dans le calcul du revêtement des tunnels, on tient compte, ces derniers temps, de l'interaction du rocher et du revêtement, ainsi que de l'appui assuré par la roche environnante. Celui-ci avait été pris en compte, auparavant, par le coefficient de Winkler. Sur la base de la théorie de l'élasticité, le problème pouvait être résolu par une approximation plus proche de la réalité. Les auteurs ont déjà publié une solution analogue dans l'Acta Technica (vol. XXXVIII, n° 3—4), les contraintes et déplacements y étant données sous une forme finie.

La présente étude constitue un développement de la publication précédente. Compte tenu de l'injection de l'intervalle entre le revêtement du tunnel et le rocher, il se produit aussi un frottement sous l'effet de la charge. Le frottement influence considérablement le jeu des forces du revêtement et diminue la valeur des moments de flexion se produisant dans le revêtement.

L'étude donne la solution du jeu des forces d'une poutre circulaire chargée par des forces normales variant par section et par des forces tangentielles y appartenant sur la base de la relation de Coulomb. Elle suppose l'action d'un coefficient de frottement constant le long du périmètre, qui concorde avec la valeur limite de Coulomb. Le système de base du modèle de calcul est conçu comme une chaîne articulée supportée par des barres formant un angle φ avec l'axe radial. Des forces de réaction, supposées dans l'axe des barres, sont prises en considération par l'intégration du diagramme d'influence. La solution est donnée par calcul matriciel, qui peut être facilement programmé sur des calculateurs électroniques.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОННЕЛЬНОЙ ОБДЕЛКЕ
С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ МЕЖДУ ОБДЕЛКОЙ И ПОРОДОЙ

Г. КОВАЧ—Л. РОЖА

РЕЗЮМЕ

Определение размеров тоннельных обделок в последнее время производится с учетом взаимодействия обделки и породы. Учитывается и подпор окружающей среды. Это раньше учитывалось предположением действительности коэффициента постели Винклера. Задача могла быть решена близким к действительности приближением. Решение такого характера опубликовали авторы в *Acta Technica* том 38, № 3—4 где напряжения и перемещения даны в закрытой форме.

Настоящая работа является усовершенствованием их прежней публикации. Учитывая нагнетенное состояние, между тоннельной обделкой и породой от действия нагрузки возникает также трение. Трение в значительной мере влияет на работу обделки, уменьшает величины изгибающих моментов, возникающих в обделке. В статье решается работа круговой балки, нагружаемой нормальной силой переменной по участкам, а также соответствующей касательной силой по соотношению Куломба. Предполагается, что вдоль периметра действует постоянный коэффициент трения и это совпадает с предельной величиной по Кулому. Основная система расчетной модели принимается как шарнирная цепь, поддерживаемая повернутыми стержнями. Реактивные усилия, предполагаемые в оси стержней, учитываются интегрированием линии влияния. Решение дается матрицей-калькулем, который, в свою очередь, может быть легко программирован для электронных вычислительных машин.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПОТЕРЬ В СЕТЯХ

Т. ВАМОШ — Я. ГЕРТЛЕР

ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕШТ

и

Л. ВЕЙДИНГЕР

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСЧЕТНОЕ БЮРО АКАДЕМИИ НАУК ВНР

[Поступило 25-го июня 1962 г.]

Для расчетов экономичного распределения нагрузки с учетом потерь в сети было разработано много методов, которые содержат различные пренебрежения. Так как эти расчеты очень сложны, то оценка величин пренебрежения производится только на цифровых вычислительных машинах. Данная публикация содержит данные для сравнения различных методов расчета. Среди них данные для сравнения различных методов, разработанных в Венгрии.

1. Введение

Определение приращений потерь в сетях является наиболее сложным этапом при расчетах экономичного распределения нагрузки. Поэтому расчеты в этой области обычно содержат различные пренебрежения. Математические методы проверки приближений [1] из-за их сложности не всегда дают возможность оценить пренебрежения с достаточной надежностью. Поэтому при конструировании вычислительной машины постоянного действия (ВИТА) для расчетов экономичного распределения нагрузки в институте ВИЛЛЕНКИ,* нам казалось необходимым произвести расчеты нескольких характерных случаев несколькими способами и сравнить полученные результаты. Расчеты 4-х узловой сети производились на арифмометрах, расчеты 20-ти узловой сети производились на вычислительных машинах МЗ центрального расчетного бюро Академии наук ВНР и ЭЛЛИОТ 803 Министерства Тяжелой Промышленности ВНР.

2. Проверенные методы

Проверенные нами методы являются различными вариантами т. н. методов постоянных В, а также один вариант т. н. метода фазового угла. Ниже дается краткое описание этих методов. Заметим, что в дальнейшем под импедансом следует понимать импеданс фазы, под напряжением напря-

* ВИЛЛЕНКИ, это значит Электроэнергетический Научно-Исследовательский Институт, Будапешт

жение линии, под током ток фазы, умноженный на $\sqrt{3}$. Активная и реактивная мощность индуктивного потребителя положительная, активная и реактивная мощность генератора, работающего на такого потребителя, отрицательна.

Чтоб принятая система направлений была логичной, отдельные знаки величин, например, взаимные импедансы и приращения потерь, отличаются от принятых в литературе. Далее обозначим n — количество узлов, m — количество генераторных узлов ($m \leq n$). Под мощностью узла понимаем результирующую мощность, генерируемую и потребляемую в узле. Наконец, сопряженные величины обозначаем черточкой сверху, а транспонированные звездочкой.

2.1. Точный метод постоянных В

Как известно, потери в сети можно рассчитать следующим образом,

$$P_{\pi} = \mathbf{p}_t^* \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}_t, \quad (1)$$

а вектор приращений потери:

$$\mathbf{g} = 2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}_t, \quad (2)$$

где \mathbf{p}_t — вектор активных генерируемых мощностей ($P_1 \dots P_m$), \mathbf{B} — матрица постоянных В. Последнюю можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{B} = -\operatorname{Re} \{ \mathbf{C}^* \cdot \bar{\mathbf{K}}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{C}} \}. \quad (3)$$

[Векторное уравнение приращения потерь (2) предполагает, что элементы матрицы \mathbf{B} при изменении активной мощности в точках питания не изменяются.] Значение отдельных матриц в уравнении (3) следующее: \mathbf{R} — действительная часть матрицы взаимного импеданса \mathbf{Z} , относящейся к любому узлу сети, если эта сеть не содержит нагрузки. Матрицу взаимного импеданса составляют таким образом, что в матрице адмиттанса сети \mathbf{Y} оставим строчку и колонку, принадлежащие к точке отношения (матрица \mathbf{Y}'), обратим эту матрицу \mathbf{Y}' (матрица \mathbf{Z}'), далее дополняем матрицу \mathbf{Z}' в точке отношения строчкой и столбцом, содержащими только 0-элементы, таким образом

$$\mathbf{R}' = \operatorname{Re} \{ (\mathbf{Y}')^{-1} \}, \quad (4)$$

где

$$Y'_{ij} = \frac{1}{z_{ij}} \quad (5)$$

и z_{ij} импеданс ветви провода ij .

Матрица \mathbf{K} имеет форму:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ (m \times m) \\ -\mathbf{k} \cdot \mathbf{1}^* \\ [(n-m) \times m] \end{bmatrix}$$

Здесь \mathbf{E} единичная матрица, $\mathbf{1}$ единичный вектор а \mathbf{k} — вектор коэффициентов распределения тока потребителей $k_{m+1} \dots k_n$, где

$$k_i = \frac{I_i}{\sum_{j=m+1}^n I_j}; \quad i = (m + 1) \dots n. \quad (7)$$

I_i — ток узла — i .
 \mathbf{C} матрица

$$\mathbf{C} = \text{Diag} \left(\frac{h_i}{V_i} \right), \quad (8)$$

здесь $V_i (i = 1 \dots m)$ напряжения узлов генератора, а коэффициенты h_i рассчитываются по следующей формуле

$$h_i = 1 + j \frac{Q_i}{P_i}; \quad i = 1 \dots m, \quad (9)$$

где Q_i реактивная мощность узла — i .

2.2. Метод первого приближения постоянных B

Общепринят метод, при котором вместо коэффициентов распределения тока потребителей учитывается только их активная составляющая. Таким образом, приближенно матрица \mathbf{K} имеет форму

$$\mathbf{K}_{\pi p} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ /m \times m/ \\ - \text{Re } \mathbf{k} \cdot \mathbf{1}^* \\ [/n - m/ \times m] \end{bmatrix}, \quad (10)$$

далее

$$\mathbf{B}_{II} = - \text{Re} \{ \mathbf{C}^* \cdot \overline{\mathbf{K}}_{\pi p}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_{\pi p} \cdot \overline{\mathbf{C}} \}. \quad (11)$$

2.3. Метод второго приближения постоянных B

Следующим общепринятым методом приближения является метод, при котором коэффициенты h_i и напряжения V_i заменяются их абсолютными значениями. Таким образом

$$\mathbf{C}_{\pi p} = \text{Diag} \left| \frac{h_i}{V_i} \right| \quad (12)$$

и

$$\mathbf{B}_{III} = - \text{Re} \{ \mathbf{C}_{\pi p}^* \cdot \overline{\mathbf{K}}_{\pi p}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_{\pi p} \cdot \overline{\mathbf{C}}_{\pi p} \}. \quad (13)$$

2.4. Метод третьего приближения постоянных B

Наконец, общепринятым является метод аппроксимации матрицы \mathbf{R} , так, что она образуется из матрицы действительной проводимости сети \mathbf{G} следующим образом:

$$\mathbf{R}'_{\pi p} = (\mathbf{G}')^{-1}, \quad (14)$$

где

$$G_{ij} = \frac{1}{r_{ij}}. \quad (15)$$

r_{ij} является активным сопротивлением ветви провода ij (этот метод является точным в случае, если r/x постоянно). Таким образом

$$\mathbf{B}_{IV.} = -\operatorname{Re}\{\mathbf{C}_{\pi p}^* \cdot \bar{\mathbf{K}}_{\pi p}^* \cdot \mathbf{R}_{\pi p} \cdot \mathbf{K}_{\pi p} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{\pi p}\}. \quad (16)$$

2.5. Метод вариаций постоянных B

Чтобы определить, насколько влияет на прерашения потерь, если вместо постоянной B , относящийся к данному состоянию нагрузки сети, производится расчет с помощью постоянных B , относящихся к другому состоянию сети, мы варьировали пары $\mathbf{B} - \mathbf{p}_i$ в 20-ти узловой сети следующим образом:

$$P_{\pi}^{(ij)} = \mathbf{p}_i^{(i)*} \cdot \mathbf{B}^{(j)} \cdot \mathbf{p}_i^{(i)} \quad (i \neq j) \quad (17)$$

и

$$\mathbf{g}^{(ij)} = 2 \cdot \mathbf{B}^{(j)} \cdot \mathbf{p}_i^{(i)} \quad (i \neq j), \quad (18)$$

где верхний индекс относится к определенному состоянию сети.

2.6. Метод фазового угла

Мы произвели проверку метода фазового угла для 4-х узловой сети. В соответствии с этим методом [7] приращение потери приблизительно можно рассчитать нижеследующей формулой

$$g_{iVI.} = -\frac{2}{|V_i|} \cdot \frac{\operatorname{Re}\{V_i - V_n\} + \tau_i \cdot \operatorname{Im}\{V_i - V_n\}}{1 + \tau_i^2}, \quad i = 1 \dots m, \quad (19)$$

где τ_i отношение x/r полного адмиттанса для узла i .

3. Порядок расчета

Обозначим сеть при помощи матрицы адмиттанса \mathbf{Y} , состояние нагрузки с помощью вектора тока \mathbf{i}' ; содержащего токи $I_1 \dots I_{n-1}$ и напряжения V_n . Состояния нагрузки сети не было бы целесообразно обозначить при помощи мощностей, т. к. из них напряжения и токи можно получить только при помощи итерации, и в нашем случае задавать точную конфигурацию

мощностей нет необходимости. Мы отказались от задания состояния нагрузки при помощи данных о напряжениях, потому что в этом случае имела бы место очень сильная зависимость от фазовых углов напряжений и, таким образом, было бы очень трудно выполнить предписанную конфигурацию мощности, даже приближенно.

Этапы расчетов:

а) *Общие предварительные расчеты:*

- определение матриц \mathbf{Z} и \mathbf{R} при помощи метода, указанного в п. 2.1 и формулы (4);
- расчет тока

$$I_n = - \sum_{i=1}^{n-1} I_i;$$

- определение напряжений $\Delta V_i = V_i - V_n$ относящихся к узлу n соответственно $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{i}$;
- расчет напряжений узлов соответственно

$$\mathbf{v} = V_n \cdot \mathbf{1} + \Delta \mathbf{v};$$

- определение узловых мощностей $S_1 \dots S_n$ соответственно $\mathbf{s} = \langle \mathbf{V} \rangle \cdot \bar{\mathbf{i}}$;
- расчет P_π для проверки соответственно

$$P_\pi = - \operatorname{Re} \{ \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{1} \};$$

- определение вектора величин $k_{m+1} \dots k_n$ соответственно формуле (7);
- определение вектора величин $h_1 \dots h_m$ соответственно формуле (9).

б) *Расчеты метода 2.1:*

- составление матрицы \mathbf{K} соответственно формуле (6);
- составление матрицы \mathbf{C} соответственно формуле (8);
- Расчет \mathbf{V}_I соответственно формуле (3);
- расчет \mathbf{g}_I соответственно формуле (2);
- расчет $P_{\pi I}$ соответственно формуле (1).

в) *Расчеты метода 2.2:*

- Расчет $\mathbf{K}_{\pi p}$ соответственно формуле (10);
- расчет \mathbf{V}_{II} соответственно формуле (11);
- расчет \mathbf{g}_{II} и $P_{\pi II}$ соответственно формул (2) и (1).

г) *Расчеты метода 2.3:*

- Расчет $\mathbf{C}_{\pi p}$ соответственно формуле (12);
- расчет \mathbf{V}_{III} соответственно формуле (13);
- расчет \mathbf{g}_{III} и $P_{\pi III}$ соответственно формул (2) и (1).

- д) — *Расчеты метода 2.4:*
 — расчет $\mathbf{R}_{\pi p}$ соответственно формул (14) и (15);
 — расчет \mathbf{B}_{IV} соответственно формуле (16);
 — расчет \mathbf{g}_{IV} и $\mathbf{P}_{\pi IV}$ соответственно формул (2) и (1).
- е) *Расчет метода 2.5 (только для 20-ти узловой сети):*
 — Расчеты $\mathbf{g}^{(ij)}$ соответственно формуле (18);
 — расчеты $\mathbf{P}_{\pi}^{(ij)}$ соответственно формуле (17).
- ж) *Расчеты метода 2.6 (только для 4-х узловой сети):*
 — Определение $\tau_1 \dots \tau_m$;
 — расчет \mathbf{g}_{VI} соответственно формуле (19);
 — расчет $\mathbf{P}_{\pi VI}$ соответственно $\mathbf{P}_{\pi} = 1/2 \cdot \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{p}_t$.

4. Проверенные сети

Контрольные расчеты были произведены для двух сетей. Одна сеть содержит $n = 4$ узла из них $m = 2$ генераторных узла. Расчеты сети производились в двух вариантах. Матрица адмиттанса для первого варианта следующая:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -4 + j 11,5 & 1 - j 2,5 & 2 - j 6 & 1 - j 3 \\ 1 - j 2,5 & -9,7 + j 24 & 0,7 - j 1,5 & 8 - j 20 \\ 2 - j 6 & 0,7 - j 1,5 & -2,7 + j 7,5 & 0 \\ 1 - j 3 & 8 - j 20 & 0 & -9 + j 23 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}.$$

Как видно, отношение x/r находится между 2,15 и 3. При расчетах второго варианта были сильно искажены отношения x/r для того, чтоб сеть была более чувствительна по отношению приближения п.2.4. Матрица адмиттанса для этого варианта следующая:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -5 + j 10 & 2 - j 2 & 2 - j 6 & 1 - j 2 \\ 2 - j 2 & -8 + j 31 & 1 - j 4 & 5 - j 25 \\ 2 - j 6 & 1 - j 4 & -3 + j 10 & 0 \\ 1 - j 2 & 5 - j 25 & 0 & -6 + j 27 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}.$$

Отношение x/r здесь находится между 1 и 5. Состояние нагрузки для обоих вариантов определяется нижеследующими данными:

$$\mathbf{i}' = \begin{bmatrix} -1 & +j 0,8 \\ -1,2 & +j 1,5 \\ 0,8 & -j 1,2 \end{bmatrix} \text{ ка,}$$

$$V_4 = 120 + j 0 \text{ кВ.}$$

Вторая сеть, для которой были произведены расчеты, содержит $n = 20$ узлов из которых первые $m = 7$ генераторные узлы. Матрицу адмиттанса сети содержит таблица 1. Расчеты были произведены для 4-х характерных состояний нагрузки. Данные, характеризующие 4 состояние нагрузки находятся в таблице 2.

5. Результаты расчета

Результаты расчетов 4-х узловой сети проведены полностью. Так как для 20-ти узловой сети имеется слишком большое количество данных, здесь приводится только конечные результаты.

5.1. Первый вариант 4-х узловой сети

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -5,342 - j 14,338 & -0,817 - j 2,255 & -4,634 - j 11,754 & 0 - j 0 \\ -0,817 - j 2,255 & -1,584 - j 3,987 & -0,943 - j 2,628 & 0 - j 0 \\ -4,634 - j 11,754 & -0,943 - j 2,628 & -8,292 - j 21,601 & 0 - j 0 \\ 0 - j 0 & 0 - j 0 & 0 - j 0 & 0 - j 0 \end{bmatrix} \Omega,$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -37,25 & 7,25 & 20,00 & 10,00 \\ 7,25 & -69,16 & 3,91 & 58,00 \\ 20,00 & 3,91 & -23,91 & 0 \\ 10,00 & 58,00 & 0 & -68,00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \Omega^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{np} = \begin{bmatrix} -5,290 & -0,812 & -4,557 & 0 \\ -0,812 & -1,584 & -0,938 & 0 \\ -4,555 & -0,938 & -8,148 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega$$

$$I_4 = 1,4 - j 1,1 \text{ ка;}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 123,3633 + j 7,7025 \\ 126,5943 + j 3,0390 \\ 106,5560 + j 2,4555 \\ 120,0000 + j 0,0000 \end{bmatrix} \text{ кВ,}$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -117,20130 - j 106,39314 \\ -147,35466 - j 193,52820 \\ 82,29820 + j 129,83160 \\ 168,00000 + j 132,00000 \end{bmatrix} \text{ МВА,}$$

*	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	+4,265	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-j 7,440	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	+2,015	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	-j 3,495	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	+0,794	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	-j 2,955	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	+1,205	0	+1,160	0	0	0
	0	0	0	0	-j 2,910	0	-j 2,795	0	0	0
6	0	0	0	0	+2,188	0	0	+1,475	0	0
	0	0	0	0	-j 9,630	0	0	-j 2,332	0	0
7	0	0	0	0	0	+1,020	0	+0,727	+4,130	0
	0	0	0	0	0	-j 2,588	0	-j 1,744	-j 12,130	0
8	+1,530	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-j 2,065	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	+4,075	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	-j 6,560	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	-5,795	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+j 9,505	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	-16,534	0	0	0	0	0	0	0	+15,740
	0	+j 51,755	0	0	0	0	0	0	0	-j 48,800
13	0	0	-4,235	+2,220	0	0	0	0	0	0
	0	0	+j 36,645	-j 33,150	0	0	0	0	0	0
14	0	0	+2,220	-35,553	0	+33,333	0	0	0	0
	0	0	-j 33,150	+j 107,750	0	-j 74,600	0	0	0	0
15	0	0	0	0	-50,093	+22,700	0	0	0	+24,000
	0	0	0	0	+j 140,840	-j 51,100	0	0	0	-j 83,200
16	0	0	0	+33,333	+22,700	-57,053	0	0	0	0
	0	0	0	-j 74,600	-j 51,100	+j 128,288	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	-2,978	+1,818	0	0
	0	0	0	0	0	0	+j 6,070	-j 3,275	0	0
18	0	0	0	0	0	0	+1,818	-4,020	0	0
	0	0	0	0	0	0	-j 3,275	+j 7,351	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	-8,205	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	-j 18,690	0
20	0	+15,740	0	0	+24,000	0	0	0	0	-39,740
	0	-j 48,800	0	0	-j 83,200	0	0	0	0	+j 132,000

Таблица 2
 (Напряжения даны в-кв, токи даны в-ка)

V ₂₀	I. вариант нагрузки	II. вариант нагрузки	III. вариант нагрузки	IV. вариант нагрузки
	122 + j0	122 + j0	122 + j0	122 + j0
I ₁	-0,0968 + j 0,0645	-0,0968 + j 0,0645	-0,2420 + j 0,1210	-0,3390 + j 0,2420
I ₂	-0,3420 + j 0,3180	-0,3420 + j 0,3180	-0,6580 + j 0,5560	-0,5800 + j 0,4770
I ₃	-0,7410 + j 0,2221	-1,1130 + j 0,3340	-0,2970 + j 0,0741	-0,7410 + j 0,2221
I ₄	-0,0977 + j 0,0977	-0,0977 + j 0,0977	-0,5860 + j 0,4070	-0,0977 + j 0,0977
I ₅	-0,1870 + j 0,1628	-0,1870 + j 0,1628	-0,1870 + j 0,1628	-0,1870 + j 0,1628
I ₆	-0,6030 + j 0,6170	-0,7650 + j 0,7430	-0,6030 + j 0,6170	-0,6030 + j 0,6170
I ₇	-1,0620 + j 0,5235	-1,3570 + j 0,6720	-0,6870 + j 0,1490	-1,3600 + j 0,5980
I ₈	+0,0323 - j 0,0242	+0,5210 - j 0,2690	+0,0323 - j 0,0242	+0,0323 - j 0,0242
I ₉	+0,3490 - j 0,1840	+0,3490 - j 0,1840	+0,3490 - j 0,1840	+0,3490 - j 0,1840
I ₁₀	+0,2500 - j 0,1500	+0,5000 - j 0,2920	+0,2500 - j 0,1500	+0,2500 - j 0,1500
I ₁₁	+0,2543 - j 0,1230	+0,3360 - j 0,1630	+0,2543 - j 0,1230	+0,2543 - j 0,1230
I ₁₂	+0,0985 - j 0,0900	+0,0985 - j 0,0900	+0,0985 - j 0,0900	+0,0985 - j 0,0900
I ₁₃	+0,3310 - j 0,2310	+0,3310 - j 0,2310	+0,3310 - j 0,2310	+0,3310 - j 0,2310
I ₁₄	+0,2460 - j 0,1640	+0,2460 - j 0,1640	+0,2460 - j 0,1640	+0,2460 - j 0,1640
I ₁₅	+0,2115 - j 0,1625	+0,2115 - j 0,1625	+0,2115 - j 0,1625	+0,2115 - j 0,1625
I ₁₆	+0,1625 - j 0,0897	+0,1625 - j 0,0897	+0,1625 - j 0,0897	+0,1625 - j 0,0897
I ₁₇	+0,2070 - j 0,1490	+0,2070 - j 0,1490	+0,2070 - j 0,1490	+0,2070 - j 0,1490
I ₁₈	+0,1282 - j 0,0961	+0,1282 - j 0,0961	+0,1282 - j 0,0961	+0,1282 - j 0,0961
I ₁₉	+0,0897 - j 0,0822	+0,0897 - j 0,0822	+0,0897 - j 0,0822	+0,0897 - j 0,0822

$$P_{\pi} = 14,25766 \text{ мвт};$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,44620 - j 0,07897 \\ 0,55380 + j 0,07897 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 + j 0,9078 \\ 1 + j 1,3134 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} 3,4730 & 0,1279 \\ 0,1279 & 4,1564 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (мва)}^{-1},$$

$$\mathbf{B}_{II} = \begin{bmatrix} 3,4113 & -0,0286 \\ -0,0286 & 4,0684 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (мва)}^{-1},$$

$$\mathbf{B}_{III} = \begin{bmatrix} 3,4080 & -0,0298 \\ -0,0298 & 4,0605 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (мва)}^{-1},$$

$$\mathbf{B}_{IV} = \begin{bmatrix} 3,3933 & -0,0251 \\ -0,0251 & 4,0197 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (мва)}^{-1},$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 2,875 \\ 2,474 \end{bmatrix}.$$

Таблица 3

	I. (точно)	II.	III.	IV.	VI. (угол фазы)
g_1	-0,08518	-0,07912	-0,07900	-0,07879	-0,04455
g_2	-0,12549	-0,11923	-0,11897	-0,11787	-0,03130
P_{π}	14,23732 мвт	13,42103 мвт	13,39486 мвт	13,30128 мвт	4,91676 мвт

5.2. Второй вариант 4-х узловой сети

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -7,040 - j 13,521 & -0,486 - j 2,540 & -4,253 - j 9,309 & 0 - j 0 \\ -0,486 - j 2,540 & -0,787 - j 3,620 & -0,624 - j 2,960 & 0 - j 0 \\ -4,253 - j 9,309 & -0,624 - j 2,960 & -5,457 - j 16,046 & 0 - j 0 \\ 0 - j 0 & 0 - j 0 & 0 - j 0 & 0 - j 0 \end{bmatrix} \Omega,$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -29 & 4 & 20 & 5 \\ 4 & -151 & 17 & 130 \\ 20 & 17 & -37 & 0 \\ 5 & 130 & 0 & -135 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \Omega^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{\pi p} = \begin{bmatrix} -5,891 & -0,543 & -3,434 & 0 \\ -0,543 & -0,748 & -0,637 & 0 \\ -3,434 & -0,637 & -4,852 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega,$$

$$I_4 = 1,4 - j 1,1 \text{ кА};$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 127,6768 + j 7,8644 \\ 124,8412 + j 3,6955 \\ 113,2682 + j 2,2342 \\ 120,0000 + j 0,0000 \end{bmatrix} \text{ кВ},$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -121,38528 - j 110,00584 \\ -144,26619 - j 191,69640 \\ 87,93352 + j 137,70920 \\ 168,00000 + j 132,00000 \end{bmatrix} \text{ МВА},$$

$$P_\pi = 9,71795 \text{ МВт};$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0,44620 - j 0,07897 \\ 0,55380 + j 0,07897 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 + j 0,9063 \\ 1 + j 1,3288 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} 4,8588 & -0,6922 \\ -0,6922 & 2,3953 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (МВА)}^{-1},$$

$$\mathbf{B}_{II} = \begin{bmatrix} 4,8207 & -0,8274 \\ -0,8274 & 2,3344 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (МВА)}^{-1},$$

$$\mathbf{B}_{III} = \begin{bmatrix} 4,8194 & -0,8470 \\ -0,8470 & 2,3332 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (МВА)}^{-1},$$

$$\mathbf{B}_{IV} = \begin{bmatrix} 4,2207 & -0,4312 \\ -0,4312 & 2,0300 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (МВА)}^{-1},$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 2,000 \\ 3,875 \end{bmatrix}$$

Таблица 4

	I. (точно)	II.	III.	IV.	VI. (угол фазы)
g_1	-0,09799	-0,09316	-0,09256	-0,09002	-0,07319
g_2	-0,05231	-0,04727	-0,04676	-0,04810	-0,01916
P_π	9,72013 МВт	9,07292 МВт	8,99049 МВт	8,93359 МВт	5,82382 МВт

5.3. 20-ти узловая сеть

Величины $g_1 \dots g_7$ и P_π для 4-х состояний нагрузки 20-ти узловой сети, рассчитанные методами 2.1., 2.2., 2.3. и 2.4., содержит таблица 5. Величины $g_1 \dots g_7$ и P_π для 4-х состояний нагрузки 20-ти узловой сети, рассчитанные методом 2.5., содержит таблица 6.

Таблица 5
(Потери даны в мвт)

	I. точный метод	II. приближ. метод	III. приближ. метод	IV. приближ. метод
I. вариант нагрузки	вектор g — ,0274775892	— ,0272168404	— ,0266064606	— ,0268223415
	— ,0536622646	— ,0527287754	— ,0495039069	— ,0496374189
	— ,1316463570	— ,1315350966	— ,1313862690	— ,1291375421
	+ ,0195507135	+ ,0197572420	+ ,0235478351	+ ,0222897468
	+ ,0149937356	+ ,0149697240	+ ,0170698992	+ ,0155203657
	— ,0490283726	— ,0491579048	— ,0501725739	— ,0472695826
	— ,1416994790	— ,1414561742	— ,1417563930	— ,1402692660
	P_π : +19,29333091	+19,25254422	+19,18190320	+18,88894129
II. вариант нагрузки	вектор g — ,0013827483	— ,0004063438	+ ,0007398433	+ ,0018542453
	— ,0462814512	— ,0441120680	— ,0405612042	— ,0383617942
	— ,2296640305	— ,2290351526	— ,2311967350	— ,2259919955
	+ ,0596135652	+ ,0616317377	+ ,0673707800	+ ,0599439889
	+ ,0170320887	+ ,0177856848	+ ,0198221324	+ ,0164709049
	— ,1219740529	— ,1215477202	— ,1262890010	— ,1200609526
	— ,2459593778	— ,2453488875	— ,2470197670	— ,2429651134
	P_π : +46,71544707	+46,51650274	+46,91888130	+45,87600589
III. вариант нагрузки	вектор g — ,1314281663	— ,1317127421	— ,1336618640	— ,1333637289
	— ,1713811043	— ,1707920562	— ,1693670580	— ,1693600700
	— ,0439167806	— ,0435889587	— ,0410333060	— ,0409527803
	— ,0608751074	— ,0607241917	— ,0592262596	— ,0560085746
	— ,0187349725	— ,0188678536	— ,0168190451	— ,0158731035
	— ,0307425690	— ,0310559830	— ,0316543810	— ,0289359931
	— ,0494028928	— ,0487515546	— ,0460283071	— ,0459483638
	P_π : +16,31807262	+16,26998687	+16,01646630	+15,77475223
IV. вариант нагрузки	вектор g — ,1396060740	— ,1390809109	— ,1375319520	— ,1376844547
	— ,1533219921	— ,1526483479	— ,1504573350	— ,1505549019
	— ,1512688361	— ,1509183231	— ,1504031260	— ,1480475655
	+ ,0108046947	+ ,0110498919	+ ,0149799420	+ ,0141562468
	+ ,0137595360	+ ,0137205715	+ ,0157848530	+ ,0143238044
	— ,0438633744	— ,0438358734	— ,0453050330	— ,0429455516
	— ,1637023538	— ,1632887204	— ,1631666130	— ,1615621089
	P_π : +33,20484984	+33,10882175	+32,95628240	+32,63324499

Таблица 6

		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	Вектор $g^{(ij)}$		-0,02567300 -0,06338900 -0,15743900 +0,03876200 +0,00694700 -0,08952300 -0,17223000	-0,01782400 -0,04342400 -0,14532300 +0,01830700 +0,01166700 -0,04872900 -0,13953000	-0,03473000 -0,05065300 -0,13734600 +0,01098200 +0,00305500 -0,05068600 -0,14318400
	$P_{\pi}^{(ij)}$		+24,3750 МВТ	+19,5740 МВТ	+19,9090 МВТ
$i = 2$	Вектор $g^{(ij)}$	-0,00090275 -0,03030300 -0,19633900 +0,03968800 +0,03120500 -0,06686000 -0,20571100		+0,00478300 -0,02311800 -0,21642800 +0,03531100 +0,02673200 -0,06626200 -0,20222200	-0,01392400 -0,03293000 -0,20275700 +0,02817300 +0,01571800 -0,06912000 -0,20622800
	$P_{\pi}^{(ij)}$	+37,4455 МВТ		+38,5550 МВТ	+38,4800 МВТ
$i = 3$	Вектор $g^{(ij)}$	-0,17082062 -0,20705000 -0,03553300 -0,08939700 -0,02024800 -0,02913400 -0,04421000	-0,15302500 -0,19787300 -0,05839700 -0,04460900 -0,00731600 -0,05427400 -0,06906100		-0,16438500 -0,17959400 -0,04546500 -0,09582000 -0,03214000 -0,03019800 -0,05296400
	$P_{\pi}^{(ij)}$	+19,1887 МВТ	+19,0900 МВТ		+18,8490 МВТ
$i = 4$	Вектор $g^{(ij)}$	-0,13909425 -0,17195100 -0,14222000 +0,02254900 +0,03043100 -0,04039600 -0,15955700	-0,13586900 -0,18108000 -0,17365400 +0,05325500 +0,02604400 -0,08785800 -0,19588200	-0,10412900 -0,14081700 -0,15801300 +0,02038900 +0,02462300 -0,04115400 -0,15829500	
	$P_{\pi}^{(ij)}$	+32,6960 МВТ	+39,4880 МВТ	+31,4640 МВТ	

6. Оценка полученных результатов

Из результатов, опубликованных здесь, видно, что приближенные методы расчета 2.2, 2.3 и 2.4, разработанные для учета потерь сети, дают достаточно точные результаты. Порядок ошибки, полученной при данных расчетах, значительно ниже той, которую можно получить при измерениях мощности, телеизмерениях и тех, которые можно получить из характеристики относительного прироста электростанций, и, таким образом, дальнейшее уточнение их не экономично.

Расчеты, произведенные методом 2.5, показывают, что изменения состояния нагрузки сети оказывают большое влияние на величины постоянных В. Поэтому надо отдать предпочтение таким методом, который хорошо учитывает эти изменения.

Результаты, полученные методом 2.6, в значительной степени отличаются от точных данных. Поэтому этот метод не кажется целесообразным и в дальнейшем его не будем использовать.

Так как с точки зрения создания вычислительной машины для расчета распределения нагрузки из точного метода 2.1, а также из методов 2.2, 2.3 и 2.4 метод 2.4 является наиболее пригодным, по этому при конструировании вычислительной машины ВИТА был принят этот метод, и были приняты меры, чтоб постоянные-В хорошо следовали изменением состояний нагрузки сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вамош, Т. и Гертлер, Я.*: Методы приближенного расчета потерь в электрических сетях и расчет влияния некоторых изменений в сети. *Acta Techn. Hung.* **39** (1962), 451—460.
2. *Крон, Г.*: Tensorial Analysis of Integrated Transmission Systems. The six Basic Reference Frames (I). *Transactions AIEE*, **70** (1951), Pt II, 1239—1248.
3. *KIRCHMAYER, L. K.*: Economic Operation of Power Systems. John Wiley & Sons, New York 1958.
4. *Вамош, Т.*: Новый непосредственный машинный способ экономичного распределения нагрузки между электростанциями и несколько вопросов, связанных с оптимизацией энергосистем. Доклад, зачитанный на пражском симпозиуме «Автоматизация больших энергетических блоков» в 1961 г.
5. *Ужоси, М.*: Новый машинный способ расчета экономичного распределения нагрузки. Материал 1. Колоквиума по автоматизации 1962 г., Будапешт.
6. *Боровский, Л.*: Техническое описание автомата для электрического распределителя нагрузки. Очерк № 392. Вилленки, Будапешт.
7. *Мельников, Н. А.*: Учет потерь в сети при определении наивыгоднейшего режима энергосистемы. *Электричество* (1960), № 2, 78—81.

CONTROL OF THE COMPUTATION METHODS FOR NETWORK LOSSES

T. VÁMOS, — J. GERTLER — L. VEIDINGER

SUMMARY

Numerous methods have been elaborated for the calculation of the economic load distribution taking network losses into account. These methods use various neglections. The neglections can be evaluated only on digital computers, because they are extraordinarily complicated. The paper contains comparative data for comparing the various methods, among others also for methods which have been developed in Hungary.

KONTROLLE DER BERECHNUNGSVERFAHREN FÜR NETZVERLUSTE

T. VAMOS, — J. GERTLER — L. VEIDINGER

ZUSAMMENFASSUNG

Für die Berechnung der wirtschaftlichen Lastverteilung unter Berücksichtigung der Netzverluste sind zahlreiche Verfahren ausgearbeitet worden, bei welchen verschiedene Vernachlässigungen gemacht wurden. Die Bewertung der Vernachlässigungen kann nur mit Hilfe von Digitalrechnern erfolgen, weil die Berechnungen außerordentlich kompliziert sind. Die Arbeit enthält vergleichende Zahlenangaben für den Vergleich der verschiedenen Verfahren, unter anderen für die in Ungarn entwickelten Verfahren.

CONTRÔLE DES DIFFÉRENTES MÉTHODES DE CALCUL
DES PERTES EN LIGNES

T. VAMOS, — J. GERTLER — L. VEIDINGER

RÉSUMÉ

En vue du calcul de la distribution économique des charges, on a élaboré de nombreuses méthodes tenant compte des pertes en ligne, qui utilisent différentes approximations. L'évaluation de celles-ci ne peut se faire qu'à l'aide de calculatrices digitales, les calculs étant extrêmement compliqués. L'étude contient des données numériques grâce auxquelles les différentes méthodes, dont celles développées en Hongrie, peuvent être mises en comparaison.

COMPARATIVE ANALYSIS OF SOME RAPID TOOL LIFE DETERMINATION METHODS

Á. KARDOS

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF TECHNOLOGY OF MACHINE PRODUCTION
TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received June 27, 1962]

This paper deals with the study of three rapid tool life determination methods, namely, the shortened wear, the face turning and the cutting temperature measuring method, in an aluminium alloy. The usefulness of investigations was evaluated comparing them with the results of detailed tool life tests and established that neither of these methods can be advised for research purposes, as a consequence of the inadequate accuracy of the results of the methods.

I. Introduction

Endeavours have been made to work out rapid tool life determination methods in order to decrease the work and material requirements of the tool life measurements. In the case of an aluminium alloy ($\text{Cu} = 2.8\%$; $\text{Zn} = 0.9\%$; hardness $\text{HB} = 61 \text{ kg/mm}^2$; ultimate tensile test $\sigma_B = 24 \text{ kg/mm}^2$) we have studied the usability of the following three methods: the shortened wear-measuring, the face turning and the temperature measuring methods.

At first fundamental tool life measurements were carried out on the test material, in order to plot complete wear curves [1]. For this basic experiment nearly one ton of test material was used. As a result of the experiments the following relation existing between tool life and cutting data was obtained from the evaluation base upon

$$T = \frac{2 \cdot 23 \cdot 10^9}{f^{0.63} \cdot e^{1.70} \cdot v^{3.25}}$$

The usual form of this relation gives the cutting speed as:

$$v = \frac{741}{f^{0.195} \cdot e^{0.52} \cdot T^{0.30}}$$

During the course of our investigation the applicability of methods in question were established by comparing them with the results of the fundamental experiment carried out classically. While making the experiments great care was taken to keep the quality, the form and the sharpening of the test tools identical.

II. Shortened wear measuring method

The common idea of the shortened wear measuring methods is that the cutting process is not carried out until the wear of the tool has reached the over-wear section of the wear curve, but determination of tool life is based on the time which has passed till it reaches a certain amount of wear [2], or on the slope of the first part of the wear curve [3 and others].

Among these methods those have become the most generally used ones recently, which are based on the measurement of qualitatively defined wear. This method was used in the great majority of cases in the comparative life determinations of light metal alloys [4—7].

According to this method wear curves are plotted by means of definite cutting data (e.g. with constant cross section area $q = e \cdot f$ having different cutting speeds v). On each wear curve points are marked which correspond to the selected wear (e.g. $\Delta = 0.1$ mm) and the cutting time (e.g. $T_{0.1}$) which belongs to that wear is determined. Depending on the cutting speed, different cutting times will be obtained for the selected values of wear. From the values of different cutting speeds and times, a diagram can be plotted ($v - T_{0.1}$). The coordinates of the diagram are generally in a logarithmic scale. According to the data of various publications the test points lie — in such diagrams of a logarithmic scale — on a straight line.

If the wear which differs from that previously selected, are determined (e.g. $\Delta = 0.15$; $\Delta = 0.2$ mm) at different cutting speeds the cutting time and these new times against speed values are plotted in the same diagram, so the slope of the straight lines thus obtained, will according to those proposing this method, be equal to that of the originally constructed line. The values of the tool life exponent (m) can be calculated from the slope of the lines in the usual way and the relation of $v - T_{\Delta}$ can also be determined from the diagram (similarly to the $v - T$ relation of the classical method).

The experiments of the shortened wear measuring method was carried out according to the concept mentioned above and the results evaluated in a graphical way.

For the experiments thirteen complete wear curves previously plotted by the fundamental tool life measurement were available, together with the results obtained from their evaluation.

The investigation was based on a wear value of $\Delta = 0.1$ mm generally used for similar tests. The cutting times corresponding to the above quantity of wear was determined from the wear curves and the envelope curves of the measuring points. The aim of the experiments was to determine the three constants as exponents in the relation of

$$v = \frac{C}{e^y f^x T^m}.$$

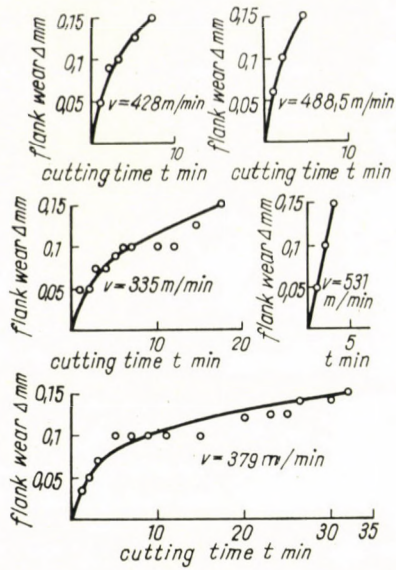


Fig. 1

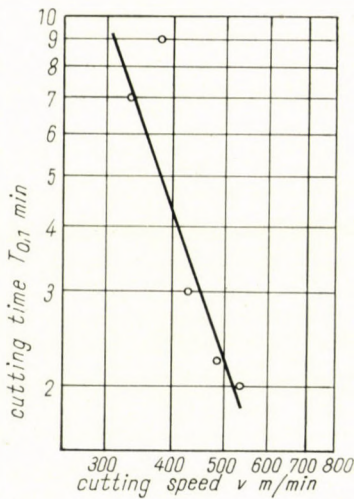


Fig. 2

The successive steps of investigation were the following:

a) To design the $v-T_{0.1}$ diagram five complete wear curves available were determined by filings, having a cross sectional area of $q = 2 \cdot 0.29 \text{ mm}^2$. The utilisable wear curve section was constructed from test points obtained by proceeding to a wear of $\Delta = 0.15 \text{ mm}$. (A similar method was followed later on.) The constructed wear curves can be seen in Fig. 1. In the diagram those points were marked by black points which constitute the basis of evalu-

ation belonging to $\Delta = 0.1$ mm. The $T_{0.1}-v$ diagram of Fig. 2 was drawn by means of cutting times belonging to these test points. The tool life exponent resulting from the diagram is: $m = 0.34$.

b) As the second step the $T_{0.1}-e$ relationship was diagrammatically illustrated, — instead of the conventional $v-e$ relation. The test values should naturally be related to constant velocity. The $v = 330$ m/min was chosen as constant velocity considering the data of wear curves. The conversion can be carried out on the basis of equation $v = C/T^m$ because it was assumed by

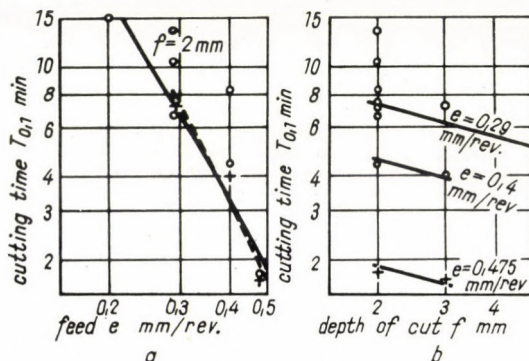


Fig. 3

those who applied this method, that this velocity is valid for the section of wear curve as well. Therefore, in cases of wear curves which are not plotted for the selected constant velocity of $v = 330$ m/min, the $T_{0.1}$ values are converted by means of the $v-T_{0.1}$ relation (Table I).

With the so obtained values the $T_{0.1}-e$ diagram represented in Fig. 3a was plotted by means of feeds given in Table I.

c) Similar considerations have been adopted for constructing the $T_{0.1}-f$ diagram shown in Fig. 3b.

d) The exponent in the expression

$$T_{0.1} = \frac{C}{e^u \cdot f^z \cdot v^{1/m}}$$

can be determined from the diagrams, considering $T_{0.1}$ as a dependent variable in the previous relation,

from diagram 2:

$$1/m = \frac{1}{0.34},$$

from diagram 3a:

$$u = 2.5,$$

from diagram 3b:

$$z = 0.33.$$

The generally used form of the previous relation expressed for v can be determined:

Table I

f , mm	e , mm/rev	$T_{0.1}$, min	v , m/min	$T'_{0.1}$ ($v = 330$) min
2	0.2	7.5	421	15
2	0.29	7	335	7.3
2	0.29	9	379	13.6
2	0.29	3	428	6.6
2	0.29	2.2	488.5	7.1
2	0.29	2	531	10.8
2	0.4	9	320	8.2
2	0.4	2.5	389	4.35
2	0.475	2	319.5	1.8
3	0.29	6	350	7.1
3	0.4	4	328	4
3	0.475	2	310	1.66
4	0.29	4	352	4.7

$$v = \frac{C}{e^y f^x T_{0.1}^m},$$

where $y = um = 0.89$,

$x = zm = 0.11$.

The determination became very uncertain because of the scatter of the test points. Therefore, the exponent u of feed was determined from those points obtained with a depth out of $f = 2$ mm. In Fig. 3 the obtained points with $f = 3$ mm are also represented and over these points another line, marked by a broken line. The scatter of the test points, i.e. the deviation from the results of classical tool life measurement used as fundamental experiment, shows the error in the basic assumption of the applied method. The relative position of lines in Fig. 3b indicates the same.

The required relationship — substituting the obtained numbers — can be written:

$$v = \frac{C}{e^{0.85} f^{0.11} T_{0.1}^{0.34}}.$$

Comparing this relation with the previous one obtained from the basic test, a considerable deviation of constants can be seen. It is quite obvious that the proper and acceptable constants are those formerly obtained from the classical method.

The reason and the principal explanation of the deviation existing in the magnitude of the constants can be found in the shape of the wear curves. If the wear curves would be lines of different slopes, this method would give

correct results. We can similarly expect correct results from this method if all wear curves can be expressed in an identical mathematical form. The shape of wear curves, however, is affected by numerous factors of the cutting process. By changing any of these, the shape of the wear curve will also be changed. That is the reason why the determination of a general equation of wear curves was quite unsuccessful in our mathematical analysis carried out so far, even in a relatively limited scope. (As far as we know, this kind of experiments have not brought much success anywhere yet.) The reason of the negative result of this method is the impossibility of drawing conclusions from separate parts of the wear curve by taking its general course into account, that is to say, to determine the end of the uniform wear section from the initial part of the wear process.

From the results of comparative investigation it can be established in the given case that the shortened wear measuring method is not satisfactory for the determination of the tool life — cutting data relation, is not quite adequately accurate.

Expanding the above conclusions, it can also be stated that the shortened wear measuring method cannot generally be used for tool life measurements in the investigations of absolute machinability. In some cases it happens to give correct results which is properly reflected in reality but — as the accomplished experiments show — it is not reasonable to recommend it for general use.

III. Face turning method

The face turning method is used in such cases of comparative examinations, when the end of the tool life is determined by means of the “fusing” of its edge, i.e. when heat effect directly causes the tool to become blunt (e.g. machining of a steel work with tool made up by high speed steel). It is used in some other instances, too, for comparative examination of tool materials, but in some altered form [8].

The basis of face turning method was worked out by DONGEN [9], KLUSIN [10] extended the adaptability of the method over such cases when the tool edge fuses only after a number of cross turning cut. FELDSTEIN further developed this method and made the calculation more exact [11]. He proposed this method as a complementary experiment in order to determine a standard for steel work machinability on the basis of tool life [12].

For the experiments a disc was used having a suitable diameter with a hole depending on the tool diameters. During the course of experiments the front surface of the disc was cut with definite chip section area starting from the hole towards the circumference. Setting off with a definite revolution number, the tool edge reaching a certain diameter fuses, due to the heat generated by cutting which steadily grows, simultaneously with the diameter to be cut. Working with another revolution number the blunting of the tool

edge will naturally take place at another diameter. Whether using a definite revolution number and the corresponding diameter, or the cutting speeds calculated at the moment when the fusion occurs, relationship was established from which it was possible to determine the values of constants C and m existing in the well known formula $v = C/T^m$ and the value of v_{60} as well, frequently used when comparing machinability of metallic materials.

This method based upon the preceding idea naturally cannot be used in cases of tool-workpiece pairs when the bluntness is not directly caused by heat. It is not used either i.e. for the examination of machinability of light metals.

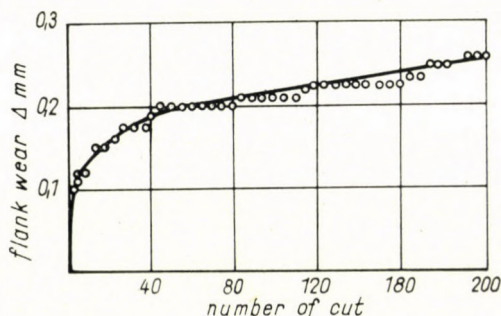


Fig. 4

In case of our fundamental tool life investigations mentioned above, the tool die not "fuse", therefore, instead of the blunting diameter we took another criterium as a basis for the examination of the face turning method; namely, the magnitude of wear resulting on the tool after a certain number of cuts.

We made informative investigations to determine the cut numbers. After each face turning cut we measured the flank wear of the tool and plotted a wear curve from the relation between the flank wear and the cut numbers. Fig. 4 represents a wear curve plotted in the case of cutting the front surface of a disc having the diameter of 215 mm with the chip area of $q = 2 \cdot 0.3 \text{ mm}^2$ and the revolution number of $n = 2000 \text{ rev/min}$. This diagram and the others, which during the course of experiments were similarly plotted, proves the impracticability of the whole wear curve because the requirement of material and work is great (e.g. Fig. 4 was made so as to cut about 14.6 dm^3 material with 200 cuts). The cut numbers in the experiments have been determined so that the wear produced on the tool should coincide as far as possible with the first part of the wear curve.

The experiment was carried out on a disc having the diameter of 215 mm with a hole of 60 mm. All experiments were carried out with 20 cuts.

We measured the amount of wear produced on the inserts after the 10th and the 20th cuts, and evaluated the results diagrammatically.

The results of experiments were found to scatter to a considerable extent. We were unsuccessful in finding out any definite relation between them and the results of classical tool life experiments mentioned previously. Fig. 5 is an example for determination of $v-T$ relation and illustrates the result of experiments carried out by means of chip area of $q = 2 \cdot 0.3 \text{ mm}^2$.

From the completion of experiments it can be stated that the face turning method of rapid tool life determination cannot be used for studying machinability

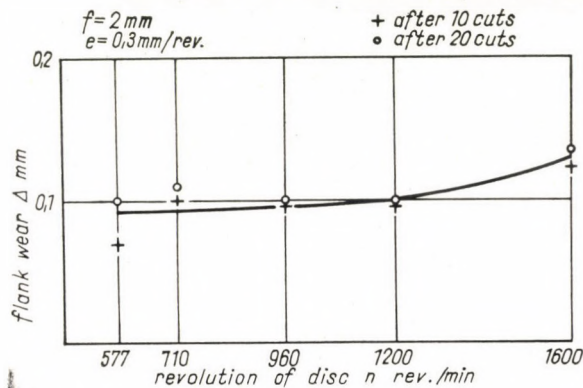


Fig. 5

of the investigated aluminium alloy (and probably of other light metal alloys as well). Similar results were obtained when cutting steel works with sintered carbide [13].

However, this method is also advisable for comparative investigations giving useful informations for workpiece materials, and even for tool forms. In the case of comparative investigations related to the tool materials e.g. the head surface of the test discs having the same diameter and the same material will be turned by means of tools having the same form but different materials. The greater the diameter on which the tool becomes blunt, the better the cutting capacity of the tool materials. This method can similarly be advised for qualitative investigations too, comparing the work piece material with the tool life and for designing the proper shape of the tool.

IV. Temperature measuring method

The application of this method, measuring the cutting temperature in order to determine the tool life, provides experimentally established relations between cutting data and the temperatures measured during the course

of the process. First of all a relation must be defined between cutting speed and tool life by means of a detailed basic experiment, comparing then the results of tool life and temperature measurements, a relationship can be determined between tool life and the cutting data of the material in question.

REICHEL worked out the basis of the applicability of the temperature measurement for studying machinability [14]. In the literature contradictory opinions exist about the usefulness of this method for tool life determination. Positive and negative results supporting these opinions justify our points of view that the rapid tool life determination methods can be used in certain cases, but they cannot give proper results every time, therefore, the applicability of the rapid tool life determination methods must always be accommodated to the experimental circumstances. (This statement relates not only to the temperature measurement, but to the other rapid tool life determination methods as well.)

In order to measure the cutting temperature our investigation concerning adaptability of the methods was carried out by means of a so-called Reichel Thermoduo apparatus, by further developing Reichel's principles. (See it in details [15].) During the investigations not the cutting temperature but the variations of thermo-electric forces were experimentally established, measuring them by the apparatus and relating them to the cutting data. From the investigations the following results were concluded for the relation between tool life and cutting data (written in the usual form):

$$v = \frac{660}{e^{0.60} f^{0.30} T^{0.30}} .$$

Comparing this result with that of the detailed tool life investigation previously mentioned and carried out in the usual way, we have that the use of the results of temperature measurements can produce a deviation of about 78% in the tool life, considering the experimental conditions. This scatter does not exceed the deviation of tool life which can be found in workshops. Therefore, the following conclusion can be drawn: the method of cutting temperature measurement can be recommended in special cases for practical informative measurements, because of its simplicity and the far less material and time requirement than that used in the classical tool life experiments.

For the sake of completion we wish to remark that we determined the cutting temperature originating from the thermo-electric force by means of calibration process worked out in the course of experiments and gained the following relation between cutting temperature and cutting data:

$$\Theta = 64.7 v^{0.33} e^{0.20} f^{0.10} .$$

V. Conclusions

In the course of our experiments the following three rapid methods were studied: the shortened wear, the face turning and the cutting temperature measurement methods. The result of the experiments can be summarised in the following way:

a) The shortened wear measuring method is essentially based on the analysis of the first part of the wear curves. This method can be applied in such cases when it is possible to draw conclusions for the course of the whole wear curve according to its first part.

The results of the experiments carried out have shown that the previous condition did not exist, therefore, we were not able to use that method for the determination of the relation existing between tool life and cutting data.

b) The face turning method is based on the fact, that the tool becomes blunt as a consequence of the heat effect; it is used in cases of steel works and high speed steel tools. Its application can be found in the technical literature in such cases when the edge erosion called "fuseing" indicates that the tool becomes blunt.

To extend the applicability of this method for our special case was quite unsuccessful. The results of experiments have made the applicability of this method questionable on one hand in the case of light metal alloys, and the other hand, generally, in such cases when the heat effect does not directly cause the edge erosion.

c) By means of the third method named cutting temperature measurement, conclusions will be drawn to the tool life from the heat generated by cutting. During our investigations we studied the cutting data — instead of temperature — in the function of thermo-electric forces which can be measured by a suitable apparatus operating on the principle of thermo-couples [15].

The comparison of the results of investigations with that of the classical method has shown, that this rapid method (in our changed form) in some special cases is suitable for the determination of cutting data for practical informative purposes.

REFERENCES

1. KARDOS, Á.: A szerszáméltartam és a forgácsolási adatok összefüggésének vizsgálata alumíniumötvözet esztergálásakor (Analysis of Relation between Tool Life and Cutting Data in Turning of Aluminium Alloys). Manuscript.
2. WALLICHS, A.: Drehbarkeit von Leichtmetallen. *Z. VDI* (1937), 457.
3. *Беспрованый, И. М.*: Основы теории резания металлов. Машгиз, Москва 1948.
4. SCHALLBROCH, H.—WALLICHS, A.: Werkzeugverschleiß, insbesondere an Drehmeiseln. VDI Verlag, Berlin 1938.
5. OPITZ, H.—ZIMMERMANN, W.: Die Zerspanbarkeitseigenschaften der Automaten-Leichtmetall Legierungen. *Metallkunde* (1937), Sept. 96.
6. WALLICHS, A.—HUNGER, F.: Untersuchung der Drehbarkeit von Leichtmetallen. *Maschinenbau* (1937), 81.

7. OPITZ, H.—ZIMMERMANN, W.: Die Zerspanbarkeit einiger Austauschlegierungen für Automatenmessing. *Maschinenbau* (1939), 59.
8. POGÁNY, T.: P. K. 10 keramikus lapkák forgácsolási technológiája (Cutting Technology of P. K. 10 Ceramic Inserts). *Gépipari Technológiai Intézet* 13. 5/2 témajelentése, 1953. Manuscript.
9. DONGEN, R. J.: Ermittlung der zulässigen Schnittgeschwindigkeit aus Plandrehversuchen. *Stahl und Eisen* (1936), 1185.
10. КЛУШИН, М. И.: Вопросы физических основ теории стойкости резцов и новых методов определения режимов резания. Вниргиз, Москва 1938.
11. Фелдштейн, Е. И.: Методы определения обрабатываемости металлов. Машгиз, Москва 1946.
12. ГОСТ 2625-44 *Металлы*. Методика определения обрабатываемости металлов резанием.
13. BAKONDI, K.: A keresztesztergálás alkalmazása acél megmunkálhatóságának meghatározására (The Use of Face Turning Method for Machinability Determination of Steels). *Gép* (1961), 433.
14. REICHEL, W.: Standzeitgeschwindigkeits-Ermittlung von Werkzeuge u. Bearbeitbarkeitprüfung von Werkstoffen. *Maschinenbau* (1936), 187.
15. KARDOS, Á.: Relation of Cutting Temperature to Tool Life in Turning of Aluminium Alloys. *Acta Techn. Hung.* 34 (1961), 71.

VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNG VON KURZPRÜFVERFAHREN DER STANDZEIT VON WERKZEUGSCHNEIDEN

Á. KARDOS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit untersucht drei abgekürzte Verfahren der Standzeitbestimmung: das Verfahren der reduzierten Verschleißmessung, das Plandrehen und die Temperaturmessung, beim Drehen einer Aluminiumlegierung. Die Ergebnisse werden im Vergleich mit denen von ausführlichen Standzeituntersuchungen ausgewertet, und der Verfasser stellt fest, daß wegen der ungenügenden Genauigkeit der Methoden keine von den dreien für Zwecke der Forschung empfohlen werden kann.

ÉTUDE COMPARATIVE DES MÉTHODES ABRÉGÉES DE DÉTERMINATION DE LA DURÉE DE COUPE DES OUTILS

Á. KARDOS

RÉSUMÉ

L'étude examine trois méthodes abrégées de détermination de la durée de coupe des outils au tournage d'un alliage d'aluminium: mesure abrégée de l'usure, essai de coupe en surfacage et mesure de la température pendant la coupe. En comparant les résultats avec ceux des méthodes d'examen usuelles de la durée de coupe des outils, l'auteur constate qu'en raison de leur précision insuffisante, aucune des méthodes abrégées ne saurait être recommandée pour les recherches.

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСКОРЕННЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОЙКОСТИ РЕЗЦА

А. КАРДОШ

РЕЗЮМЕ

В статье разобрано три метода исследования стойкости резца при резании алюминиевого сплава, а именно: метод измерения уменьшенного износа; метод измерения температуры резания; и метод торцевой обточке. Сравнивая применимость данных исследований с результатами подробных исследований стойкости резцов, давая оценку, делается вывод, что для исследовательских целей ни один из методов не может быть рекомендован по недостаточной точности результатов.

EINFLUSS DES DRUCKES AUF DEN REDUKTIONSPROZESS VON ZnO UND CdO MIT KOHLENSTOFF

A. KRUPKOWSKI und W. PTAK

KRAKOW

[Eingegangen am 11. Juli 1962]

Die Reduktionsreaktion von Metalloxyden, wobei die Metalle im Gaszustand gewonnen werden, wird nicht nur durch die Temperatur, sondern auch — in Übereinstimmung mit der Regel von Le Chatelier — durch den Druck beeinflusst. Diese zwei Parameter üben auch einen bedeutenden Einfluß auf die Feststellung des Gleichgewichtes der Reaktion von Boudouard aus, die jedenfalls bei Anwesenheit des Kohlenoxyds und Kohlenstoffs verläuft. In der vorliegenden Arbeit werden allgemeine Beziehungen zwischen den Gleichgewichtszuständen dieser Reaktionen und Faktoren, wie Temperatur und Druck, sowie zwischen dem Druck der Metaldämpfe und des Kohlenoxyds und Kohlendioxyds für den Fall entwickelt, daß der Prozeß in geschlossener Muffel verläuft.

I. Einleitung

Die Untersuchung der Reduktionsreaktion von Metalloxyden mit Kohlenstoff hat große Bedeutung für die Prozesse der industriellen Gewinnung mehrerer Metalle. Der am stärksten den Verlauf und das Gleichgewicht der während der Reduktion von Metalloxyden vorkommenden Reaktionen beeinflussende Faktor ist die Temperatur. Es ist jedoch zu bemerken, daß auch der Druck, besonders unter Bedingungen, wo das als Ergebnis der Reduktion entstehende Metall gasförmig ist, großen Einfluß ausüben kann.

Die allgemein den Einfluß des Druckes auf den Gleichgewichtszustand umfassende Formel wurde von KRUPKOWSKI [1] entwickelt und hat folgende Gestalt:

$$K_{\Phi} = \frac{[\Phi_1^{k_1} \cdot \Phi_2^{k_2} \dots]_B}{[\Phi_1^{k_1} \cdot \Phi_2^{k_2} \dots]_A},$$

wobei K_{Φ} die Gleichgewichtskonstante der Reaktion



und Φ der substitutionelle Druck ist, ein von einem der Verfasser eingeführte Begriff, der nicht nur Gase, sondern auch kondensierte Substanzen betrifft.

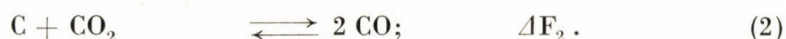
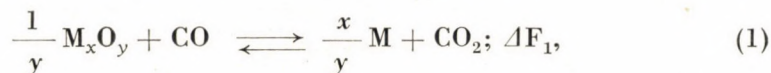
In unserer Arbeit werden die Sonderfälle der Reduktion von Metalloxyden mit Kohlenstoff betrachtet, wobei das Problem des Einflusses des

Druckes und der Temperatur auf die Reduktion mit den Beispielen der Zink- und Kadmiumoxyde analysiert wird. Diesem metallurgischen Problem wurden wenige Arbeiten gewidmet. Unter den Verfassern ist S. HORVÁTH [2] zu erwähnen, der den Einfluß des Druckes auf die Reduktion des Zinkoxyds analysiert hat.

II. Allgemeine Beziehungen

Verläuft die Reduktion des Metalloxyds mit Kohlenstoff mit der Ausscheidung des Metalls im Gaszustand, so übt der Druck einen großen Einfluß auf den Gleichgewichtszustand dieser Reaktion.

Das allgemeine Schema der Reduktion des Metalloxydes kann in folgender Weise dargestellt werden:



Ferner wurden unter Berücksichtigung des Einflusses der Temperatur und des Druckes die Gleichgewichtszustände der Reaktionen (1) und (2) betrachtet.

Die Gleichgewichtskonstanten dieser Reaktionen haben die Gestalt:

$$K_1 = \frac{\bar{P}_M^{\frac{x}{y}} \bar{P}_{CO_2}}{\bar{P}_{CO}}, \quad (3)$$

$$K_2 = \frac{\bar{P}_{CO}^2}{\bar{P}_{CO_2}}, \quad (4)$$

worin \bar{P}_M , \bar{P}_{CO} , \bar{P}_{CO_2} — die Partialdrücke des Metalls, des Kohlenoxyds und des Kohlendioxyds sind; dabei wird zur Vereinfachung angenommen, daß M, $M_x O_y$ und C keine festen oder flüssigen Lösungen darstellen.

Der äußere Druck, bei dem die Reaktionen verlaufen, wird mit dem Symbol P bezeichnet. Wird angenommen, daß die bei den Reaktionen teilnehmenden Gase die Gesetze der idealen Gase erfüllen, so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{P}_M &= N_M P, \\ \bar{P}_{CO} &= N_{CO} P, \\ \bar{P}_{CO_2} &= N_{CO_2} P, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei N_M , N_{CO} , N_{CO_2} die Konzentrationen der einzelnen Komponenten in Molbrüchen sind, für welche

$$N_M + N_{CO} + N_{CO_2} = 1 \quad (6)$$

ist.

Aus Gleichungen (3), (4) und (5) ergibt sich:

$$K_1 = \frac{N_M^{\frac{x}{y}} N_{CO_2}^{\frac{x}{y}} \cdot P^{\frac{x}{y}}}{N_{CO}}, \quad (7)$$

$$K_2 = \frac{N_{CO}^2}{N_{CO_2}} P. \quad (8)$$

Aus Gleichungen (6) und (7) erhalten wir Beziehungen zwischen den Konzentrationen der einzelnen Komponenten im Gleichgewichtszustand der Reaktion (1):

$$N_{CO} = \frac{(1 - N_M) N_M^{\frac{x}{y}} P^{\frac{x}{y}}}{K_1 + P^{\frac{x}{y}} N_M^{\frac{x}{y}}}, \quad (9)$$

$$N_{CO_2} = \frac{K_1 (1 - N_M)}{K_1 + P^{\frac{x}{y}} N_M^{\frac{x}{y}}}. \quad (10)$$

Die aus diesen Gleichungen berechneten Gleichgewichtskurven sind im Bild 1 und 2 durch die Ziffer I bezeichnet.

Da das Metall an der Reaktion von Boudouard nicht teilnimmt, wird es als neutrales Gas betrachtet und in dieser Weise erhalten wir für die Reaktion (2) aus Gleichungen (6) und (8):

$$N_{CO} = -\frac{K_2}{2P} + \sqrt{\frac{K_2^2}{4P^2} + \frac{K_2(1 - N_M)}{P}}. \quad (11)$$

Die daraus für die einzelnen Drücke erhaltenen Kurven sind in Bild 1 und 2 mit der Ziffer II bezeichnet. In Bild 1 und 2 sind schematisch die Gleichgewichtskurven der Reaktionen (1) und (2) für die zwei Drücke P_1 und P_2 , wobei $P_1 > P_2$ ist, angegeben. Außerdem entspricht Bild 1 den Gleichgewichtszuständen bei der Temperatur T_1 und Bild 2 — bei der Temperatur T_2 , wobei $T_1 > T_2$ ist. Werden die Temperatur T_1 , wie aus Bild 1 ersichtlich ist, und der Druck P_1 und P_2 eingehalten, so existieren die den Reduktionsvorgang des M_xO_y — Oxydes sicherstellenden Bedingungen, da die Gleichgewichtszustände der Reaktion (2) höheren Gehalten an N_{CO} als im Falle des Gleich-

gewichts der Reaktion (1) entsprechen. In dieser Weise wird sich bei beliebiger Ausgangszusammensetzung des Gasgemisches als äußerstes Ergebnis der Reaktion (1) und (2) für den Druck P_1 die Gaszusammensetzung zwischen den Kurven I_{P_1} und II_{P_1} , weiters für den Druck P_2 zwischen den Kurven I_{P_2} und II_{P_2} ergeben. Diese Gaszusammensetzungen werden dem Metall gegenüber oxydierend wirken.

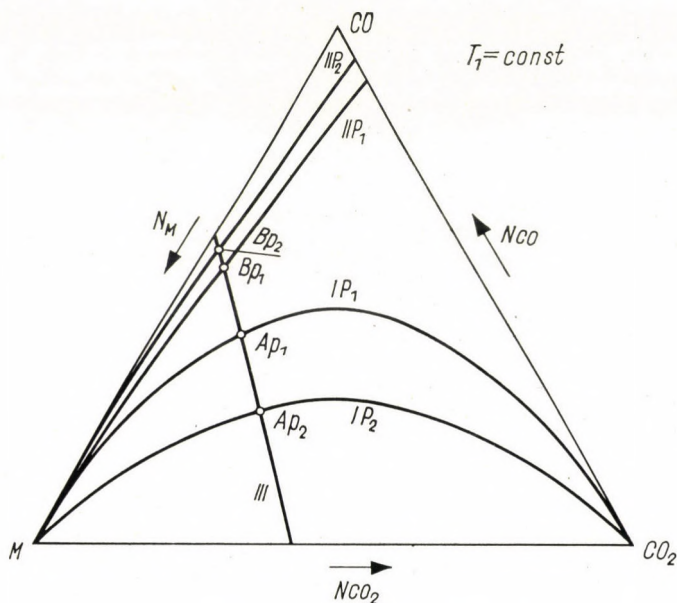
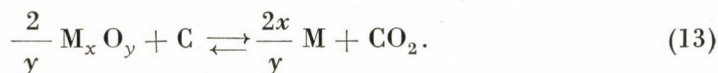
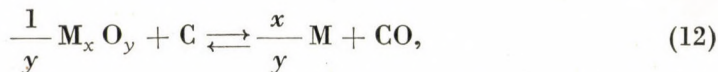


Bild 1. Gleichgewichtszustände der Reduktionsreaktion des Metalloxyds und der Reaktion von Boudouard bei der Temperatur T_1 , unter den Drücken P_1 und P_2 , wobei $P_1 > P_2$ ist

- I — Gleichgewicht der Reduktionsreaktion des Metalloxyds;
 - II — Gleichgewicht der Reaktion von Boudouard;
 - III — Gaszusammensetzung im geschlossenen Gefäß.
- Die Lage der Kurven entspricht den Reduktionsbedingungen

Bild 2 stellt die Gleichgewichtszustände bei der Temperatur T_2 dar. Aus der Lage der Kurven I_{P_1} und II_{P_2} ergibt sich, daß unter dem Druck P_2 die Reduktionsbedingungen weiter existieren. Anders wird sich das Bild im Falle des Druckes P_1 darstellen, da dann eine Änderung der Kurvenlage eintritt, und in gewissen Zonen eine Oxydation des Metalles erfolgt.

Während der Reduktion von Metalloxyden mit Kohlenstoff hängt die Zusammensetzung ebenfalls vom gleichmäßigen Vorgang folgender Reaktionen ab:



In Übereinstimmung mit (12) und (13) wird die Metallkonzentration in den Gasen in folgender Weise ausgedrückt:

$$N_M = \frac{x}{y} N_{CO} + \frac{2x}{y} N_{CO_2}. \quad (14)$$

Mit Rücksicht auf (6) und (14) erhalten wir im Bild 1 und 2 die Gerade III, die den Reduktionsbedingungen im geschlossenen, mit einem Gemisch von

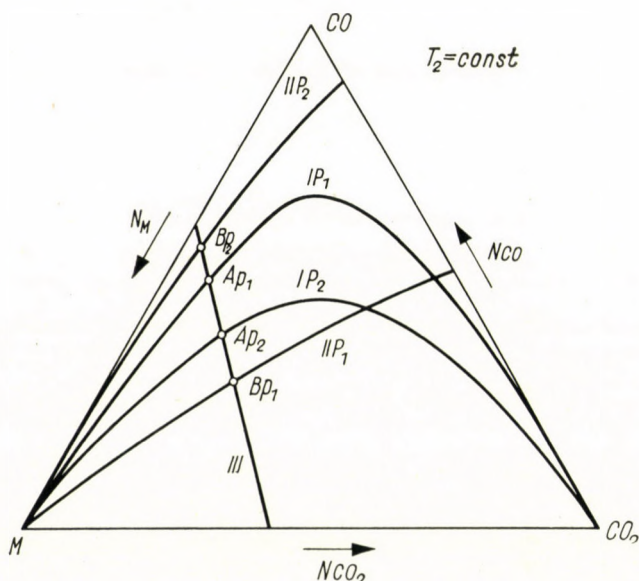


Bild 2. Gleichgewichtszustände der Reduktionsreaktion des Metalloxydes und der Reaktion von Boudouard bei der Temperatur T_2

- I — Gleichgewicht der Reduktionsreaktion des Metalloxyds;
- II — Gleichgewicht der Reaktion von Boudouard;
- III — Gaszusammensetzung im geschlossenen Gefäß.

Unter dem Druck P_2 geht die Reduktion des Metalloxyds und unter dem Druck P_1 die Oxydation des Metalls vor sich

Metalloxyd und Kohlenstoff erfüllten Gefäß entspricht. Gerade III im Bild 1 und 2 betrifft das Oxyd mit der Formel M_2O_3 .

Die Schnittpunkte der Geraden III mit der Kurve I werden unter dem Druck P_1 durch A_{P_1} und unter P_2 durch A_{P_2} , die Schnittpunkte mit der Kurve II durch B_{P_1} und B_{P_2} bezeichnet. Bei der Temperatur T_1 (Bild 1) betrifft der Punkt A das Gleichgewicht der Reaktion (1). Die gegenseitige Lage der Punkte A und B entscheidet unter gegebenen Bedingungen über die Reduktion des Oxydes oder über die Oxydation des Metalls. Die Koordinaten dieser Punkte können aus den oben erwähnten Beziehungen bestimmt werden. Aus

Gleichungen (6), (7) und (14) erhalten wir für die Punkte A:

$$K_1 = \left(\frac{1 + N_{\text{CO}_2}}{1 + \frac{x}{y}} \right)^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{N_{\text{CO}_2} \left(1 + \frac{x}{y} \right)}{1 - \left(1 + \frac{2x}{y} \right) N_{\text{CO}_2}} P^{\frac{x}{y}}. \quad (15)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen den Gleichgewichtskonstanten und der Änderung der freien Energie der Reaktion (1) hat Gleichung (15) folgende Gestalt:

$$\ln \frac{N_{\text{CO}_2} \left(1 + \frac{x}{y} \right)}{1 - \left(\frac{2x}{y} + 1 \right) N_{\text{CO}_2}} + \frac{x}{y} \ln \frac{1 + N_{\text{CO}_2}}{1 + \frac{x}{y}} = - \frac{\Delta F_1^0}{RT} - \frac{x}{y} \ln P. \quad (16)$$

Beziehung (16) erlaubt, die Konzentration des Kohlendioxys im Punkte A in Abhängigkeit von der Temperatur und dem Drucke zu berechnen. Die Konzentration der übrigen Komponenten ergibt sich aus folgenden Gleichungen:

$$N_{\text{CO}} = \frac{1 - \left(1 + \frac{2x}{y} \right) N_{\text{CO}_2}}{1 + \frac{x}{y}}, \quad (17)$$

$$N_{\text{M}} = \frac{1 + N_{\text{CO}_2}}{1 + \frac{y}{x}}. \quad (18)$$

Um die Koordinaten der Punkte B zu bestimmen, kann man sich der Gleichungen (6), (8) und (14) bedienen, aus welchen man erhält:

$$K_2 = \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{2x}{y} \right) N_{\text{CO}_2}}{1 + \frac{x}{y}} \right]^2 \frac{P}{N_{\text{CO}_2}} \quad (19)$$

und bei Berücksichtigung der Änderung der freien Energie der Reaktion (2):

$$2 \ln \left[1 - \left(\frac{2x}{y} + 1 \right) N_{\text{CO}_2} \right] - 2 \ln \left(\frac{x}{y} + 1 \right) - \ln N_{\text{CO}_2} = - \frac{\Delta F_2^0}{RT} - \ln P. \quad (20)$$

Die Konzentration des Kohlendioxyds und die des Metalls wird durch die Beziehungen (17) und (18) bestimmt.

Aus Bild 1 ist zu ersehen, daß bei der Temperatur T_1 das Metalloxyd sowohl unter dem Druck P_1 wie auch P_2 reduziert wird, da die Punkte B_{P_1} und B_{P_2} höheren Konzentrationen an CO als Punkte A_{P_1} und A_{P_2} entsprechen. Bei der Temperatur T_2 (Bild 2) dagegen tritt die Reduktion unter dem Druck P_2 auf, wie aus der Lage der Punkte A_{P_2} und B_{P_2} zu ersehen ist.

Unter dem Druck P_1 geht die Reduktion des Oxydes nicht vor sich, und es existieren Bedingungen, unter welchen Oxydation des Metalls auftritt, da im Gleichgewichtszustand der Reaktion (1) (Punkt A_{P_1}) die Gase mehr CO enthalten, als es dem Punkte B_{P_1} entspricht. Mehrere Untersuchungen über Reduktion von Metalloxyden mit Kohlenstoff haben bewiesen, daß die reelle Zusammensetzung der während der Reduktion (sowohl in Labor- wie auch in Betriebsversuchen) entwickelten Gase dem Punkte A nahe liegt. Dadurch ist bewiesen, daß die Geschwindigkeit der Reduktionsreaktionen des Metalloxydes durch CO größer als die Geschwindigkeit der Reaktion von Boudouard ist.

II. Reduktion von Zink- und Kadmiumoxyden mit Kohlenstoff

Die im vorhergehenden Teile angegebenen Beziehungen lassen die Gleichgewichtszustände der Reduktionsreaktion und der Reaktion von Boudouard bestimmen. Dadurch erzielt man Hinweise, unter welchen Bedingungen diese Reaktionen verlaufen. Da das Zink und Kadmium zweiwertige Metalle sind, so erhält man in diesem Falle $x = 1$ und $y = 1$, und Beziehungen (15) und (19) nehmen die Gestalt an:

$$K_1 = \frac{(1 + N_{\text{CO}_2})N_{\text{CO}_2}}{1 - 3N_{\text{CO}_2}} P, \quad (21)$$

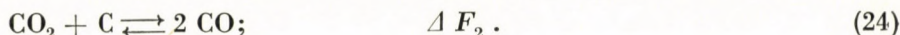
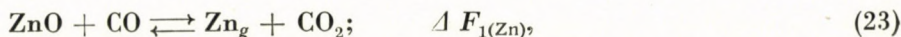
$$K_2 = \frac{(1 - 3N_{\text{CO}_2})^2}{4N_{\text{CO}_2}} P. \quad (22)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man Punkte A und B, die die Bedingungen des Reduktionsprozesses im geschlossenen Gefäß bestimmen.

III. Reduktionsprozesse

1. Reduktion des Zinkoxydes mit Kohlenstoff

Das in Destillationsöfen reduzierte Röstgut enthält vor allem Zinkoxyd. Das Reduktionsschema dieses Oxydes stellt sich, in Übereinstimmung mit (1) und (2), wie folgt, dar:



Die Änderung der freien Energie der Reaktion (23) wird übereinstimmend mit den thermochemischen Daten [3] durch die Beziehung

$$\Delta F_1(\text{Zn}) = 47920 + 10,35 T \log T - 61,63 T \quad (25)$$

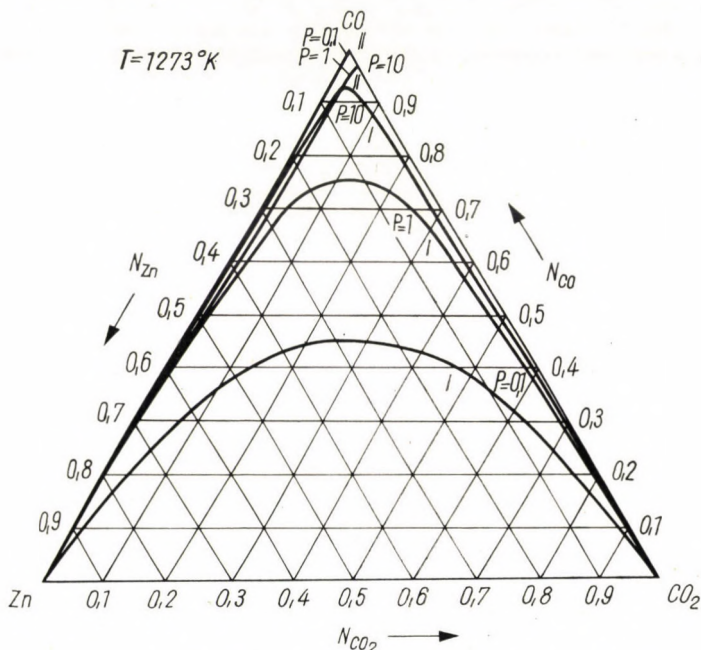


Bild 3. Gleichgewichtszustände der Reaktion $\text{ZnO} + \text{CO} \rightleftharpoons \text{Zn} + \text{CO}_2$ (Kurve I) und der Reaktion von Boudouard (Kurve II) bei der Temperatur 1273° K, unter den Drücken 0,1, 1,0 und 10 Atm.

angegeben. Die daraus berechnete Gleichgewichtskonstante der Reduktionsreaktion (23) bei den Temperaturen 1273° K (1000° C) und 1173° K (900° C) beträgt:

$$T = 1273^\circ \text{ K}; \quad K_{1(\text{Zn})} = 0,01659, \quad (26)$$

$$T = 1173^\circ \text{ K}; \quad K_{1(\text{Zn})} = 0,00398.$$

Die ebenfalls aus thermochemischen Daten [3] erhaltene Abhängigkeit der Gleichgewichtskonstante der Reaktion von Boudouard (24) hat folgende Gestalt:

$$\log K_2 = -\frac{8920}{T} + 9,117. \quad (27)$$

Die daraus erhaltenen Werte betragen:

$$\begin{aligned} T = 1273^\circ \text{ K}; & & K_2 = 129,1, \\ T = 1173^\circ \text{ K}; & & K_2 = 32,58. \end{aligned} \quad (28)$$

Gleichungen (9), (10) und (11) bestimmen nach dem Einsetzen der Werte (26) und (28) die Gleichgewichtskurven der Reaktion (23) und (24). Im Bild 3 und Bild 4 werden die bei den Temperaturen 1273° K und 1173° K unter den

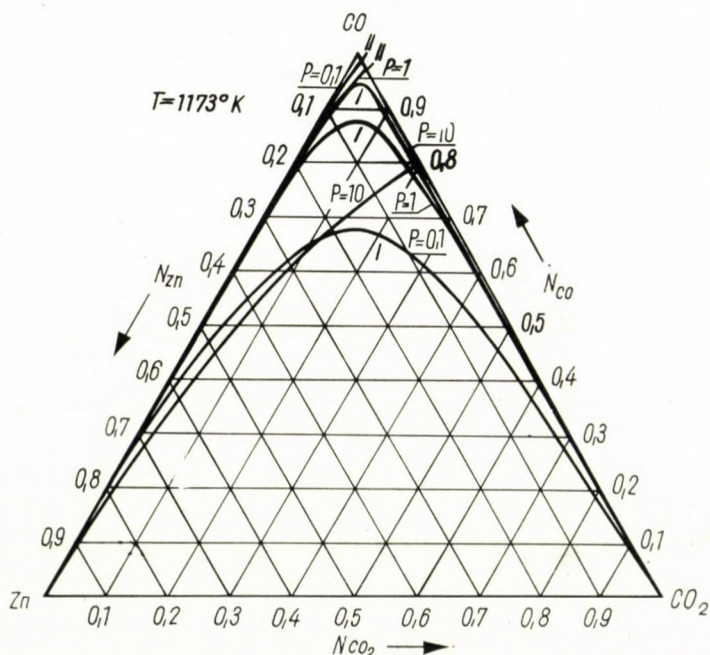


Bild 4. Gleichgewichtszustände der Reaktion $\text{ZnO} + \text{CO} \rightleftharpoons \text{Zn} + \text{CO}_2$ (Kurve I), der Reaktion von Boudouard (Kurve II) bei der Temperatur 1173° K, unter den Drücken 0,1, 1,0 und 10 Atm.

Drücken von $P = 0,1, 1$ und 10 Atm. erhaltenen Ergebnisse dargestellt. Bei der Temperatur 1273° K, unter den Drücken 0,1 und 1 Atm., existieren Bedingungen zur Reduktion des Zinkoxyds im ganzen Konzentrationsbereiche der einzelnen Gase. Auf diese Tatsache wird dadurch hingewiesen, daß die Gleichgewichtskurven der Reduktionsreaktion I für die erwähnten Drücke unterhalb der Gleichgewichtskurve der Reaktion von Boudouard liegen. Etwas anders stellt sich das Problem der Reduktion unter dem Druck 10 Atm., da sich die Kurven I und II schneiden, und der Bereich, in welchem die Kurve I oberhalb der Kurve II liegt, der Oxydation des Zinks durch CO_2 entspricht.

Bei der Temperatur von 1173° K (Bild 4) verläuft die Reduktion von ZnO nur unter dem Druck von 0,1 Atm., unter dem Druck von 1 und 10 Atm. dagegen wird das Zink durch CO₂ oxydiert.

Bei gleichzeitigem Verlauf der Reaktion nach Typus (12) und (13) kann man die Reduktionsbedingungen des Zinkoxyds in der Muffel bestimmen, und unter diesen Umständen, unter Berücksichtigung von (16) und (25), erhalten wir für die Reaktion (23):

$$\log(1 + N_{\text{CO}_2}) - \log(1 - 3N_{\text{CO}_2}) = -\frac{10475}{T} - 2,263 \log T + 13,472 - \log P \quad (29)$$

Tafel I

Die dem Gleichgewichte der Reaktion (23) und (24) entsprechenden Konzentrationen an Kohlendioxyd, Kohlenoxyd und Zink, in Punkten A aus Gleichung (29) erhalten, und in Punkten B aus Gleichung (30) erhalten

T [°K]	P [Atm]	Punkt A			Punkt B		
		N _{CO₂}	N _{CO}	N _{Zn}	N _{CO₂}	N _{CO}	N _{Zn}
1273	0,1	0,104	0,345	0,551	0,00019	0,49971	0,50020
	1	0,0156	0,4767	0,5077	0,0019	0,4971	0,5010
	10	0,00165	0,49752	0,50083	0,0174	0,4739	0,5087
1173	0,1	0,0346	0,4481	0,5173	0,00076	0,49886	0,50038
	1	0,0039	0,4943	0,5018	0,0074	0,4889	0,5037
	10	0,0004	0,4994	0,5002	0,0539	0,4192	0,5269

Die aus dieser Gleichung berechneten Werte der Konzentration an CO₂ entsprechen unter gegebenen Bedingungen dem Gleichgewichtszustand der Reaktion (23) im geschlossenen Gefäß. Der Gleichgewichtspunkt wurde vorher mit dem Buchstaben A bezeichnet.

In ähnlicher Weise erhalten wir für die Reaktion von Boudouard (24) aus (22) und (27):

$$2\log(1 - 3N_{\text{CO}_2}) - \log 4N_{\text{CO}_2} = -\frac{8920}{T} + 9,117 - \log P. \quad (30)$$

Die daraus erhaltenen Konzentrationen an CO₂ entsprechen dem Punkte B. Die Konzentrationen an CO und Zn in den Punkten A und B werden aus Gleichungen (17) und (18) bestimmt. Gleichungen (29) und (30) führen zu den in Tafel I angeführten Ergebnissen.

Im Bild 5 werden die Gleichgewichtszustände des Systems bei der Temperatur 1273° K dargestellt. Mit den Ziffern I sind die die Reaktion (23) betreffenden Kurven, mit den Ziffern II die die Reaktion (24) betreffenden Kurven bezeichnet; die Ziffer III entspricht der Beziehung (14). Die Gleichgewichtszustände beim Druck von 0,1 Atm. werden durch A_{0,1} und B_{0,1} bezeichnet. Die Lage der Punkte weist darauf hin, daß während des Reduk-

tionsvorgangs die Konzentration an CO_2 zwischen den Werten 0,104 ($A_{0,1}$) und 0,00019 ($B_{0,1}$) gehalten wird, d. h. Bedingungen zum Reduzieren von ZnO bestehen. Unter dem Druck von 1,0 Atm. gelten entsprechende Werte 0,0156 (A_1) und 0,0019 (B_1), und das weist ebenfalls auf die Möglichkeit der Reduktion hin. Unter dem Druck von 10 Atm. dagegen erhalten wir folgende Werte: 0,0016 (A_{10}) und 0,0174 (B_{10}); unter diesem Druck wird sich das Zinkoxyd nicht reduzieren.

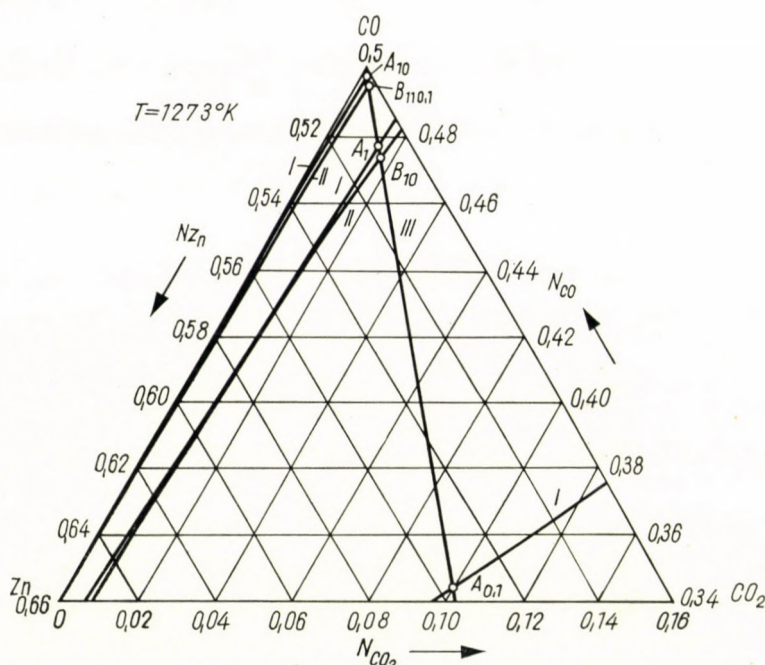


Bild 5. Gleichgewichtszustände der Reaktion (23) (Kurve I), der Reaktion (24) (Kurve II) und Gleichung der Gaszusammensetzung (14) (Kurve III) bei der Temperatur 1273° K, unter den Drücken $P = 0,1, 1,0$ und 10 Atm. Die Lage der Punkte $A_{0,1}$ und A_1 im Verhältnis zu $B_{0,1}$ und B_1 beweist, daß unter diesen Drücken die Reduktion von ZnO stattfindet; die Lage der Punkte A_{10} im Verhältnis zu B_{10} zeugt von der Oxydation des Zinks

Im Bild 6 werden die Gleichgewichtszustände bei der Temperatur von 1173° K dargestellt. Aus der Lage der Punkte A und B ergibt sich, daß die Reduktion von ZnO bei dieser Temperatur nur unter dem Druck 0,1 Atm. verläuft, unter den Druck 1 und 10 Atm. dagegen wird das Metall durch CO_2 oxydiert.

Für jeden Druck kommt eine Temperatur vor, bei welcher sich die Punkte A und B decken. Oberhalb dieser charakteristischen Temperatur geht die Reduktion von ZnO vor, unterhalb die Oxydation des Metalls. A. KRUPKOWSKI und J. TAKLIŃSKI [4] haben berechnet, daß unter dem Druck von 1 Atm. diese Temperatur 1230° K beträgt; die Laborversuche dieser Ver-

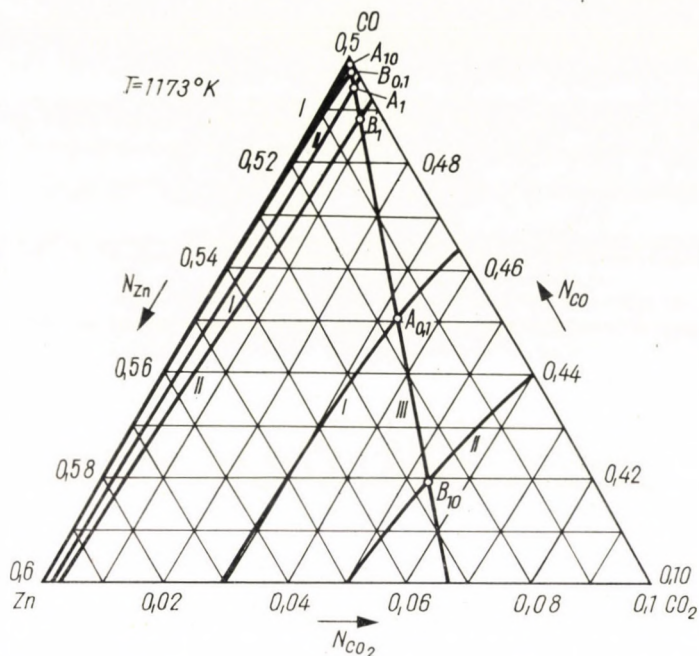


Bild 6. Gleichgewichtszustände der Reaktion (23) [Kurve I], der Reaktion (24) und der Geraden der Gaszusammensetzung (14) [Kurve III] bei der Temperatur 1173°K , unter den Drücken 0,1, 1,0 und 10 Atm.

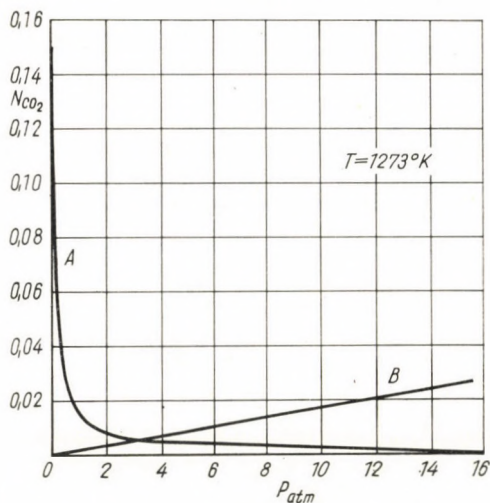


Bild 7. Die den Punkten A und B entsprechende Abhängigkeit der Konzentration an CO_2 vom Druck bei der Temperatur von 1273°K , für den Reduktionsprozeß von ZnO

fasser haben bewiesen, daß in Abhängigkeit von der Art des Reduktionsmittels die Temperaturen zu Beginn der Reduktion zwischen den Grenzen 1263 — 1293°K schwankten. Die in der Muffel eines Destillierofens von A. KRUP-

KOWSKI und J. ŽEMELKA [5] durchgeführten Messungen weisen auf einen endothermischen Verlauf des Reduktionsprozesses hin, wobei die Reduktionstemperatur ungefähr 1233°K beträgt.

Bei konstanter Temperatur kann man unter Ausnutzung der Gleichungen (29) und (30) ebenfalls einen solchen Druck aussuchen, unter welchem sich die Punkte A und B decken werden. Im Bild 7 wird die Konzentrationsänderung N_{CO_2} in Punkten A und B bei der Temperatur 1273°K in Abhängigkeit vom Druck dargestellt. Bei dieser Temperatur erreichen die Reaktionen (23) und (24) gleichzeitig das Gleichgewicht unter dem Druck von ungefähr 3 Atm. Dies bedeutet, daß bei dieser Temperatur unter einem Drucke < 3 Atm. die Reduktion von ZnO vor sich geht, bei höheren Drücken als 3 Atm. dagegen das Metall durch CO_2 oxydiert werden wird.

In ähnlicher Weise werden im Bild die Änderungen der Gaszusammensetzung in Punkten A und B bei der Temperatur 1173°K dargestellt. Der Grenzdruck beträgt in diesem Falle 0,8 Atm.

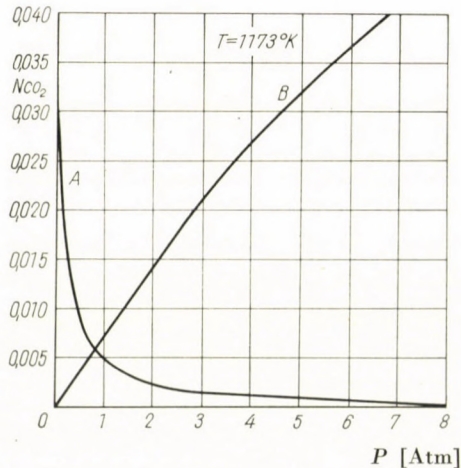
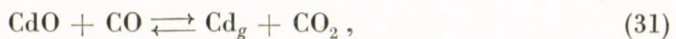


Bild 8. Die den Punkten A und B entsprechende Abhängigkeit der Konzentration an CO_2 vom Druck bei der Temperatur von 1173°K , für den Reduktionsprozeß von ZnO

2. Reduktion des Kadmiumoxyds mit Kohlenstoff

Während der Reduktion des Kadmiumoxydes bei den höher als der Siedepunkt dieses Metalls liegenden Temperaturen wird das Metall im Gaszustand gewonnen. Das Reduktionsschema von CdO kann wie folgt dargestellt werden:



Die Änderung der freien Energie der Reaktion (31) wird durch die auf Grund

der thermochemischen Daten [3] aufgestellte Gleichung angeben:

$$\Delta F_{1(\text{Cd})}^0 = 19120 - 28,51 T, \quad (33)$$

welcher folgende Werte der Gleichgewichtskonstanten entstammen:

$$\begin{aligned} T = 1073^\circ \text{ K}; & \quad K_{1(\text{Cd})} = 217,2, \\ T = 973^\circ \text{ K}; & \quad K_{1(\text{Cd})} = 86,4. \end{aligned} \quad (34)$$

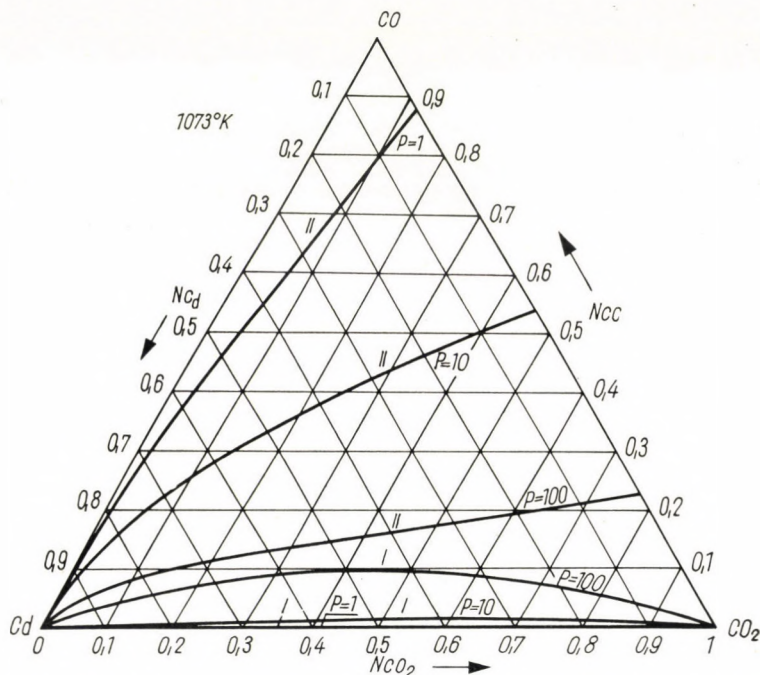


Bild 9. Gleichgewichtszustände der Reduktionsreaktion von CdO (Kurve I) und der Reaktion von Boudouard (Kurve II) bei der Temperatur 1073° K , unter den Drücken 1, 10 und 100 Atm.

Die Änderung der freien Energie der Reaktion (32) wurde durch Gleichung (27) ausgedrückt, die die Gleichgewichtskonstante dieser Reaktion zu bestimmen erlaubt:

$$\begin{aligned} T = 1073^\circ \text{ K}, & \quad K_2 = 6,368; \\ T = 973^\circ \text{ K}, & \quad K_2 = 0,890. \end{aligned} \quad (35)$$

Um die Gleichgewichtszustände der Reaktionen (31) und (32) bei den Temperaturen 1073° K und 973° K unter Berücksichtigung des Druckeinflusses darzustellen, wurden im Bild 9 und 10 die aus Gleichungen (9), (10) und (11) nach dem Einsetzen der Werte (34) und (35) erhaltenen Kurven gezeichnet.

Die Kurven stellen die Gleichgewichtszustände der Reduktionsreaktion (31) unter den Drücken 100, 10 und 1 Atm. dar, wobei in letzterem Falle die Kurve in der Nähe der Dreieckseite Cd—CO₂ liegt. Bei der Temperatur 1073° K (Bild 9) liegen die Kurven II im ganzen Konzentrationsbereiche oberhalb der Kurven I; daraus ergibt sich, daß die Reduktion des Kadmiumoxydes bei dieser Temperatur stattfinden wird. Aus der Lage der Kurven bei der

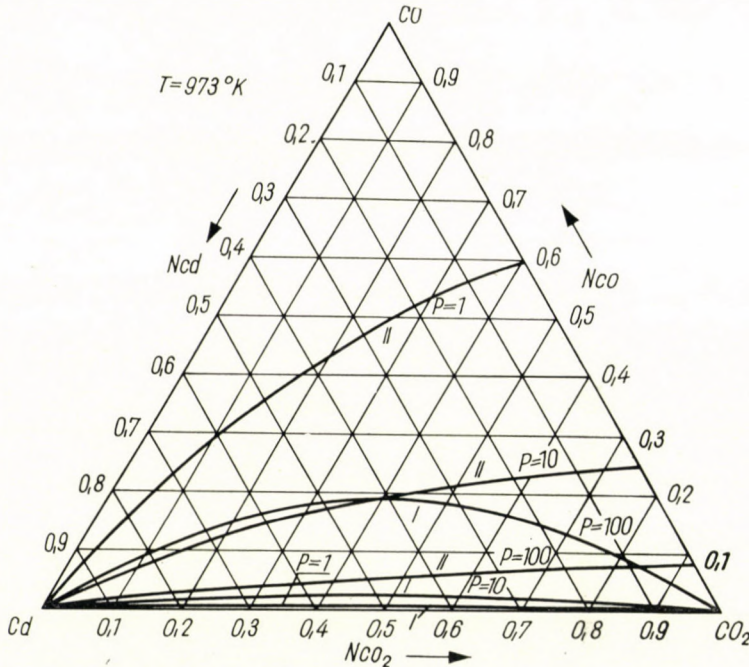


Bild 10. Gleichgewichtszustände der Reduktionsreaktion von CdO (Kurve I) und der Reaktion von Boudouard (Kurve II) bei der Temperatur 973° K, unter den Drücken 1, 10 und 100 Atm.

Temperatur 973° K (Bild 10) kommt man zum Schlusse, daß unter den Drücken 1 und 10 Atm. die Reduktion von CdO vor sich geht, unter dem Druck 100 Atm. dagegen die Oxydation des Metalls.

Unter Ausnutzung der Gleichungen (16) und (33) ergibt sich:

$$\log(1 + N_{\text{CO}_2})N_{\text{CO}_2} - \log(1 - 3N_{\text{CO}_2}) = -\frac{4180}{T} + 6,232 - \log P. \quad (36)$$

Diese Beziehung entspricht den im allgemeinen Teile der Arbeit durch den Buchstaben A bezeichneten Gleichgewichtspunkten. Die Konzentrationen der übrigen Komponenten werden auf Grund der Gleichungen (17) und (18) berechnet.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes B werden Gleichungen (30), (17) und (18) ausgenutzt. In ähnlicher Weise werden die in Tafel II für die Reduktion von CdO angegebenen Ergebnisse erhalten.

Bild 11 und 12 stellen die in dieser Weise erhaltenen Ergebnisse dar, wobei ähnlich wie im Falle des Zinks, die Kurven I den Gleichgewichtszu-

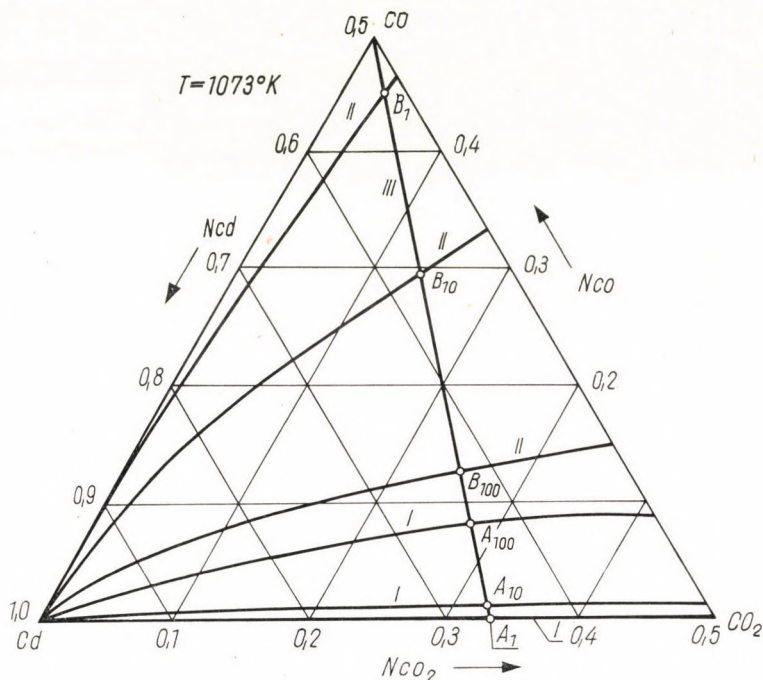


Bild 11. Gleichgewichtszustände der Reaktion (31) [Kurve I], der Reaktion (32) [Kurve II] und die Gerade der Gaszusammensetzung (37) bei der Temperatur 1073° K, unter den Drücken 1, 10 und 100 Atm.

Tafel II

Die Konzentrationen an Kohlendioxyd, Kohlenoxyd und Kadmium für die dem Gleichwichte der Reduktionsreaktion von CdO (31) entsprechenden und aus Gleichung (36) erhaltenen Punkte A sowie für die der Reaktion von Boudouard entsprechenden und aus Gleichung (30) erhaltenen Punkte B

T [° K]	P [Atm]	Punkt A			Punkt B		
		N _{CO₂}	N _{CO}	N _{Cd}	N _{CO₂}	N _{CO}	N _{Cd}
1073	1	0,3327	0,0010	0,6663	0,0321	0,4519	0,5160
	10	0,3267	0,0100	0,6633	0,1367	0,2949	0,5684
	100	0,2787	0,0820	0,6393	0,2493	0,1260	0,6247
973	1	0,3316	0,0026	0,6658	0,1176	0,3236	0,5588
	10	0,3172	0,0242	0,6586	0,2366	0,1451	0,6183
	100	0,2263	0,1606	0,6131	0,2990	0,0515	0,6495

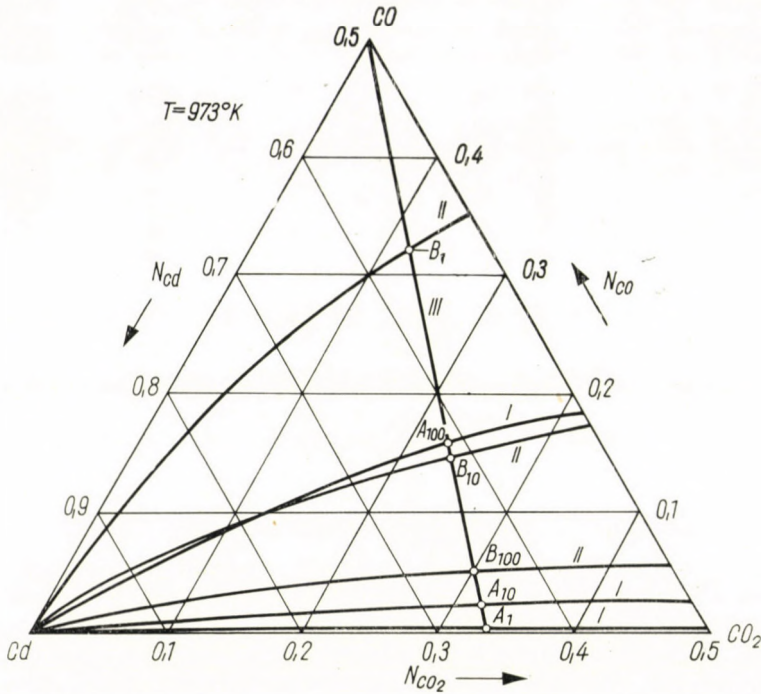


Bild 12. Gleichgewichtszustände der Reduktionsreaktion (31) [Kurve I], der Reaktion (32) [Kurve II] und die Gerade der Gaszusammensetzung (37) bei der Temperatur 973° K, unter den Drücken 1, 10 und 100 Atm.

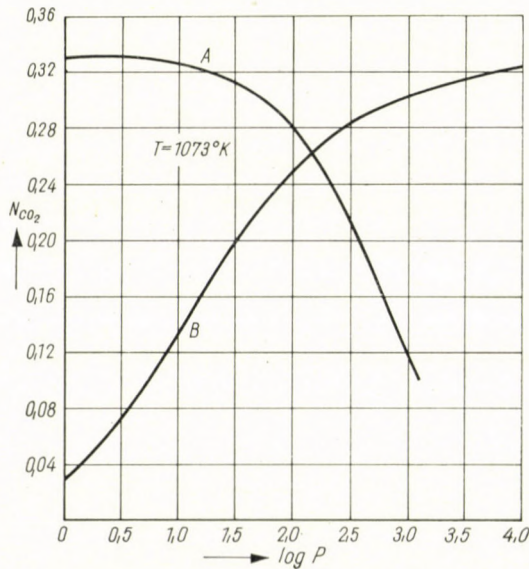


Bild 13. Abhängigkeit der Konzentration an CO_2 in den charakteristischen Punkten A und B vom Druck, bei der Temperatur 1073° K, für den Reduktionsprozeß von CdO

ständen der Reduktionsreaktion (31), die Kurven II der Reaktion von Boudouard und die Geraden III der Beziehung (14), welche in diesem Falle die Gestalt

$$\bar{P}_{\text{Cd}} = \bar{P}_{\text{CO}} + 2 \bar{P}_{\text{CO}_2} \quad (37)$$

annimmt, entsprechen. Bei der Temperatur 1073° K (Bild 11) liegen für alle angenommenen Drücke (Punkte A_1 , A_{10} und A_{100}) die Gehalte an CO_2 im Gleichgewichtszustand der Reaktion niedriger als die Konzentrationen dieses

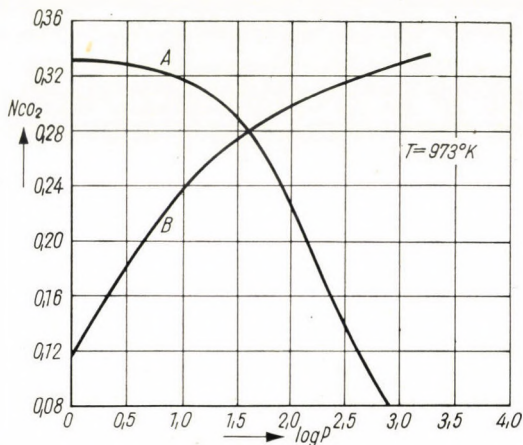


Bild 14. Abhängigkeit der Konzentration an CO_2 in den charakteristischen Punkten A und B vom Druck, bei der Temperatur 973° K, für den Reduktionsprozeß des Kadmiumoxyds

Gases im Falle der Reaktion von Boudouard (Punkte B_1 , B_{10} und B_{100}). Daraus kann man den Schluß ziehen, daß unter den Drücken 1, 10 und 100 Atm. bei der Temperatur von 1073° K die Reduktion von CdO verläuft.

Bild 12 entspricht der Temperatur 973° K. Aus der Lage der Punkte A_1 und A_{10} im Verhältnis zu den Punkten B_1 und B_{10} ergibt sich, daß unter den Drücken 1 und 10 Atm. die Reaktion (31) in Richtung der Reduktion des Kadmiumoxydes verläuft. Unter dem Druck 100 Atm. dagegen entspricht Punkt A_{100} niedrigeren Konzentrationen an CO_2 als Punkt B_{100} ; dies beweist, daß unter diesen Bedingungen das Metall oxydiert wird. Aus Gleichungen (36) und (30) kann man die den Punkten A und B entsprechende Konzentrationsänderung von CO_2 berechnen. Die Änderungen bei den Temperaturen 1073 und 973° K werden durch Bild 13 und 14 dargestellt. Aus Bild 13 ergibt sich, daß die Reaktionen (31) und (32) bei der Temperatur 1073° K gleichzeitig das Gleichgewicht unter dem Druck $P \approx 140$ Atm., bei der Temperatur 973° K dagegen unter dem Druck $P \approx 38$ Atm. erreichen werden.

IV. Schlußfolgerungen

Es wurde festgestellt, daß aus der Lage der Gleichgewichtskurven der Reduktionsreaktion der Zink- und Kadmiumoxyde und des Gleichgewichtes der Reaktion von Boudouard die charakteristische Temperatur für jeden Druck bestimmt werden kann, wobei bei den über dieser liegenden Temperaturen der Reduktionsprozeß des Metalloxydes, bei den niedrigeren Temperaturen dagegen der Oxydationsprozeß des Metalls stattfinden wird.

Der Einfluß des Druckes kann in der Weise dargestellt werden, daß bei niedrigeren Werten dieses Parameters die Reduktionsprozesse bei höheren Konzentrationen an CO_2 verlaufen; dadurch wird natürlich die Metallgewinnung begünstigt. Eine Steigerung des Gehaltes an CO_2 in der Gasphase kann jedoch einen ungünstigen Einfluß auf die Kondensation von Metaldämpfen zur Folge haben und die Oxydation einer großen Metallmenge veranlassen. Vornehmlich betrifft diese Bemerkung den Gewinnungsvorgang von Zink.

SCHRIFTTUM

1. KRUPKOWSKI, A.: *Zasady termodynamiki i ich zastosowanie w metalurgii i metaloznawstwie*. Kraków 1958.
2. HORVÁTH, S.: *A cink kohászata*. Budapest 1961.
3. KUBASCHEWSKI, O.—EVANS, E.: *Metallurgical Thermochemistry*, London 1956.
4. KRUPKOWSKI, A.—TAKLIŃSKI, J.: *Ann. Ac. Sc. Techn.* Warszawa, 2 (1935), 217.
5. KRUPKOWSKI, A.—ZEMEKKA, J.: *Hutn. Listy*, 4 (1949), 695.

THE INFLUENCE OF PRESSURE ON THE REDUCTION OF ZnO AND CdO BY CARBON

A. KRUPKOWSKI and W. PTAK

SUMMARY

The reduction of metal oxides, when the metals are obtained in gaseous state, is influenced not only by temperature, but also — according to Le Chatelier's law — by pressure. These two parameters have considerable influence on the equilibrium of Boudouard's reaction, which takes place in every instance. In the paper there are deduced general relations between the states of equilibrium of these reactions, and such factors as the pressures of metal vapours, of carbon monoxide and carbon dioxide, in the case when the reaction takes place in a muffle furnace.

L'INFLUENCE DE LA PRESSION SUR LA RÉDUCTION PAR CARBONE DE ZnO ET DE CdO

A. KRUPKOWSKI et W. PTAK

RÉSUMÉ

La réduction des oxydes métalliques, au cours de laquelle les métaux sont obtenus à l'état gazeux, est influencée non seulement par la température mais aussi par la pression, conformément à la loi de Le Chatelier. Ces deux paramètres ont une influence considérable sur l'équilibre de la réaction de Boudouard, qui a toujours lieu en présence de carbone et de gaz carbonique. Dans l'étude, des relations générales sont déduites à partir des états d'équilibre de ces réactions et des paramètres tels que les pressions des vapeurs métalliques, du gaz carbonique et de l'oxyde de carbone, pour le cas où la réaction a lieu dans un four à moufle.

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ ZnO
и CdO , ВОССТАНОВЛЕННЫХ УГЛЕРОДОМ

А. КРУПКОВСКИ и В. ПТАК

РЕЗЮМЕ

На восстановление окислов металлов, при котором металлы выделяются в газообразном состоянии, воздействует не только температура, но также давление — соответственно закону Le Chatelier. Эти два параметра имеют значительное влияние на равновесие реакции Boudouard'a, которая происходит во всех случаях присутствия углерода и окиси углерода. В данной работе выведены общие зависимости между состояниями равновесия этих реакций и такими параметрами, как давления паров металлов, окиси углерода и двуокиси углерода в том случае, когда реакция протекает в муфельной печи.

UNTERSUCHUNG DER IN DER KORNGRÖSSENVERTEILUNG VON MATERIALHAUFEN AUFTRETENDEN VERÄNDERUNGEN WÄHREND DES FORTSCHREITENS DES ZERKLEINERUNGSPROZESSES

J. LÁZÁR

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUT FÜR BAUSTOFFE (ÉAKKI), BUDAPEST

[Eingegangen am 28. Sept. 1962]

Der Aufsatz befaßt sich mit der Frage, wie sich die Korngrößenverteilung eines Materialhaufens während des Durchganges durch die Maschine, also des Fortschreitens des Zerkleinerungsprozesses ändert. Die Versuche zeigten, daß die Verteilung des Brechgutes am Anfang des Zerkleinerungsprozesses noch stark rechtsschief ist und noch die Merkmale des zur Zerkleinerung aufgegebenen Materialhaufens zeigt. Je weiter der Zerkleinerungsprozeß fortschreitet, um so mehr verschiebt sich der Scheitelpunkt der Dichtekurve nach links, wobei ihre Ordinate ständig wächst. Der Charakter der Verteilung läßt sich später annähernd durch die Normalverteilung ausdrücken und nähert sich sodann der lognormalen Verteilung. Dieser Prozeß vollzieht sich um so schneller, je mehr der Spalt verengt wird und findet seine Grenze bei vollkommener Schließung des Spaltes, also bei der spaltlosen Maschine. Es ist aber zu bemerken, daß — bei mit Spalt versehenen Maschinen — die Korngrößenverteilung des Endproduktes nicht identisch mit der Verteilung des Zwischenproduktes in irgend einer Phase der Zerkleinerung ist. Der Aufsatz befaßt sich auch mit den Ergebnissen eines Versuches von H. Heywood und weist aus, daß die dort gefundenen Verteilungen einen Spezialfall bilden und nur bei spaltlosen Brechereinrichtungen auftreten, wenn die Zerkleinerung durch viele und verhältnismäßig schwache Einwirkungen erreicht wird.

Wir haben uns in unseren früheren Ausführungen [4] mit der Gestaltung der Korngrößenverteilung (Gewichtsverteilung) von Haufen befaßt, die durch verschiedene Brechmaschinen zerkleinert wurden. Es handelte sich um Haufen, bei denen der Zerkleinerungsvorgang beendet war und der Haufen den Brecher schon verlassen hatte. Wir haben gefunden, daß der Charakter der Verteilungskurve von Materialhaufen, die durch verschiedene Brechmaschinen zerkleinert wurden, verschieden ist.

Es wurden drei charakteristische Arten von Gewichtsverteilungskurven festgestellt (Bild 1a). Die unter I dargestellte linksschiefe Kurve tritt bei Mühlen und Feinbrechern auf, die unter II dargestellte Kurve bei Backen- und Kegeltbrechern (meist mit Aufbuckelung des Vorderteiles der Kurve) sowie bei mit mittleren Zerkleinerungsgraden arbeitenden Walzenbrechern, die unter III dargestellte Kurvenart bei Walzenbrechern mit geringem Zerkleinerungsgrade.

Es zeigte sich aber auch, daß sich der Charakter der Gewichtsverteilungskurven auch bei ein und derselben Maschine ändert, wenn sich die Betriebsverhältnisse der Maschine in starkem Maße verändern. So z. B. sehen wir auf Bild 1 b die Korngrößenverteilung von Haufen, die durch einen Walzenbrecher mit verschiedenen Zerkleinerungsgraden gebrochen wurden. Es wurde

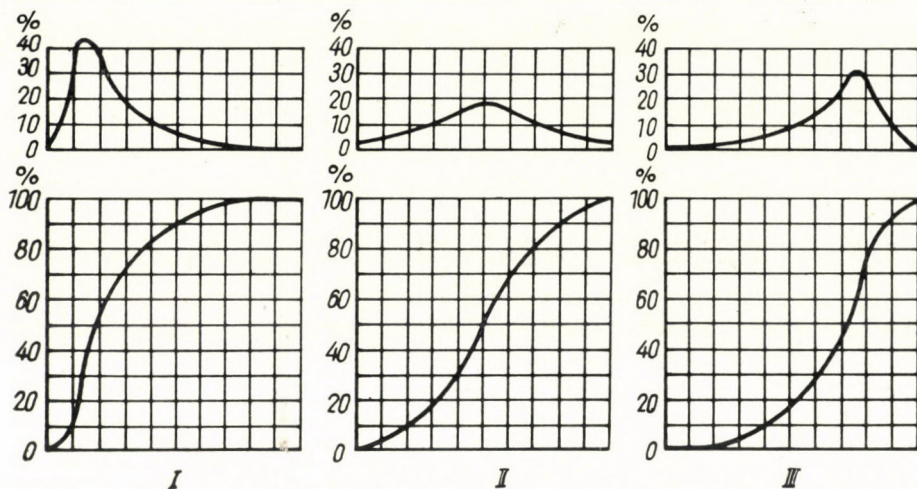


Bild 1a. Charakteristische Arten der Gewichtsverteilungskurven

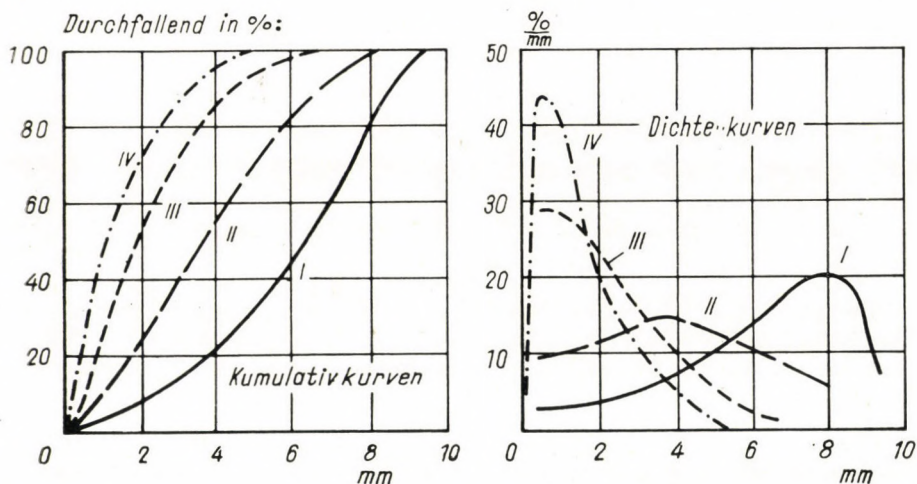


Bild 1b. Änderung des Charakters der Gewichtsverteilungskurven eines Walzenbrechers, bei verschiedenen Zerkleinerungsgraden]

Granit von 7—10 mm Korngröße zerkleinert.¹ Die Spaltöffnung wurde zuerst auf 5 mm, dann auf 3 mm und schließlich auf 2 mm eingestellt. Es ist zu ersehen — besonders aus den Dichtekurven — daß im ersten Falle (I) der Scheitelpunkt der Dichtekurve stark nach rechts verschoben ist (rechtsschief), im zweiten Falle (II) bildet die Kurve einen Abschnitt einer ungefähr symmetri-

¹ Metall und Erz. 16. II. 1937.

sehen Kurve, die sich annähernd durch die Normalverteilung ausdrücken läßt, im dritten Falle (III) fällt der Scheitelpunkt der Dichtekurve schon in die Nähe der Ordinatenachse, obzwar die Kurve noch immer einen Abschnitt einer der Normalverteilung ungefähr entsprechenden Kurve bildet (s. auch Bild 5c). Wenn wir aber den Zerkleinerungsgrad viel größer wählen als es bei den normalen Betriebsverhältnissen der Walzenbrecher üblich ist, also wenn wir z. B. bei 2 mm Spaltöffnung Material von 20—30 mm Korngröße zerkleinern,² so bekommen wir stark linksschiefe Verteilungskurven (IV), die sich ungefähr durch die lognormale Verteilung ausdrücken lassen.

Auf Grund zahlreicher Versuche und anschließender theoretischer Erwägungen sind wir zu dem Ergebnis gelangt, daß der Charakter der Gewichtsverteilungskurven fertig zerkleinerter Haufen eine Funktion der Anzahl der durch den Haufen erlittenen Zerkleinerungseinwirkungen ist. Je größer die Anzahl der Zerkleinerungseinwirkungen ist, um so mehr verschiebt sich der Scheitelpunkt der Dichtekurve nach links [4].

An diese Feststellungen anschließend wollen wir nun die Frage untersuchen, wie sich die Korngrößenverteilung des durch eine Zerkleinerungsmaschine durchgehenden Materialhaufens während der Zerkleinerung verändert.

Die beiden Untersuchungen haben, abgesehen von ihrer Hauptzielsetzung — der wissenschaftlichen Klärung von Problemen des Zerkleinerungsprozesses — auch praktische Resultate. Die Ergebnisse unserer früheren Erwägungen erleichterten unter anderem auch die Lösung der sehr oft vorkommenden Aufgabe, für einen bestimmten Zweck die meist-geeignete Zerkleinerungsmaschine oder Gruppe von Maschinen zu finden. Die Ergebnisse der nun folgenden Untersuchungen sind dagegen für die Konstruktion von Zerkleinerungsmaschinen von Interesse, da sie sich mit Vorgängen beschäftigen, die sich im Innern der Maschine während des Ablaufs des Zerkleinerungsprozesses abspielen.

Nehmen wir z. B. an, daß wir die Zerkleinerung mit einem Backenbrecher durchführen wollen. Wir unterteilen für unsere Untersuchungen den zwischen den beiden Brechbacken befindlichen Raum theoretisch in mehrere Zonen (Bild 2). Das in den Brecher gelangende Gestein erhält in der obersten Zone nur verhältnismäßig wenige Zerkleinerungseinwirkungen, und ihre Korngrößenverteilung erinnert noch stark an die Verteilung des in den Brecher aufgegebenen Materials. Gelangt aber das Brechgut während der Zerkleinerung in immer tiefer liegende Zonen, so wächst die Anzahl der erlittenen Zerkleinerungseinwirkungen ständig an, die Menge und das Gewicht der großen Körner verringern sich, die der mittelgroßen und kleinen Körner nehmen zu. Die Gestalt und — wie es sich aus den folgenden Ausführungen ergeben wird —

² In der Versuchsanstalt der Fabrik »Ganz« durchgeführt.

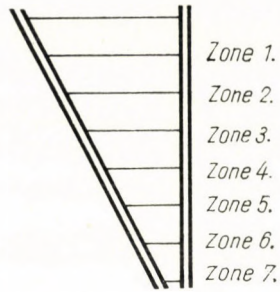


Bild 2. Brechzonen eines Backenbrechers

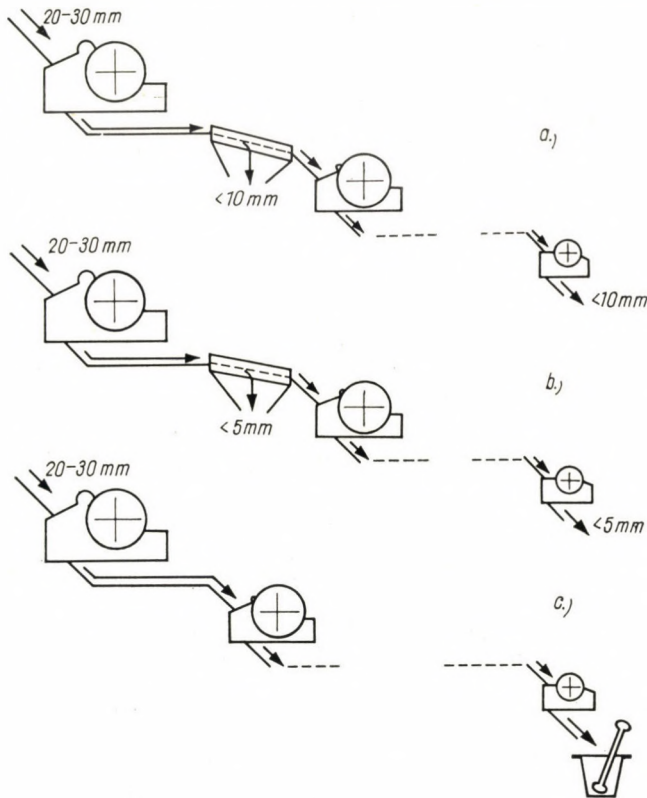


Bild 3. Schematische Skizze des Versuchvorganges

auch der Charakter der Verteilungskurve ändern sich dementsprechend ebenfalls. Zweck unserer Untersuchungen ist, die Gesetzmäßigkeiten dieser Änderungen zu bestimmen.

Als Beispiel haben wir in den obigen Ausführungen einen Backenbrecher gewählt, weil hier das Brechgut, beim Fortschreiten des Zerkleinerungsprozesses in immer tiefer liegende Zonen der Brechmaschine gelangt, und so das

Fortschreiten des Zerkleinerungsprozesses schon durch die räumliche Lage des Brechgutes gekennzeichnet wird. Dieselben Verteilungsverhältnisse treten aber auch bei den anderen Maschinentypen auf, bei denen das Brechgut während der Zerkleinerung nicht in immer tiefer liegende Zonen gelangt. So bewegt sich z. B. bei einem Hammerbrecher das Brechgut im Kreise. In solchen Fällen dient nicht die räumliche Lage des Brechgutes als Kennzeichen des Fortschreitens der Zerkleinerung, sondern es liegen andere Kennzeichen, z. B. die Zerkleinerungszeit oder die Anzahl der durchgeführten Umdrehungen der Maschine vor. Unsere Versuche wurden derart durchgeführt, daß zu jeder Kurvengestaltung die Anzahl der sie hervorrufenden Zerkleinerungseinwirkungen unmittelbar abgezählt werden konnte. Wir verwenden deshalb das Anwachsen dieser Zahl als Kennzeichen des Fortschreitens der Zerkleinerung. Das Schema der durchgeführten Versuche zeigt Bild 3 welches wir bei der Beschreibung der Versuche erörtern werden.

Versuch 1. (Tafel I, Bild 4)

Wir haben in einem Mörser Kohle von 20–30 mm Anfangsgröße zerkleinert, und zwar derart, daß wir nach 10 Schlägen die Verteilung des zerkleinerten Haufens bestimmt haben, dann das Material, das schon unter 10 mm Größe zerkleinert wurde, aussiebt und den Versuch mit dem zurückbleibenden Material fortsetzten. Nach weiteren 10 Schlägen — also insgesamt 20 Schlägen — haben wir die Verteilung des Materials von neuem bestimmt, sodann die inzwischen entstandene Fraktion 0–10 mm ausgesiebt und dieses

Tafel I
(*Versuch 1*)

Schlagzahl	0–10 mm %	10–15 mm %	20–25 mm %	20–25 mm %	25–30 mm %
10	15	8	16	41	20
20	20,5	18	19,5	28	14
30	25,5	23,5	25	15,5	10,5
50	34,5	30	20	8,5	7
75	48,5	31	14	4	2,5
100	50,5	35,5	11	2,5	0,5
150	69	23	6,5	1,5	—
200	81	13	6	—	—

Verfahren nach 30, 50, 75, 100, 150 und 200 Mörserschlägen wiederholt. Dieser Vorgang entspricht der schematischen Skizze in Bild 3a. Damit sich die Menge des zerkleinerten Materials infolge der sich oft wiederholenden Aussiebungen nicht zu sehr verringert, haben wir es nach jeder Aussiebung

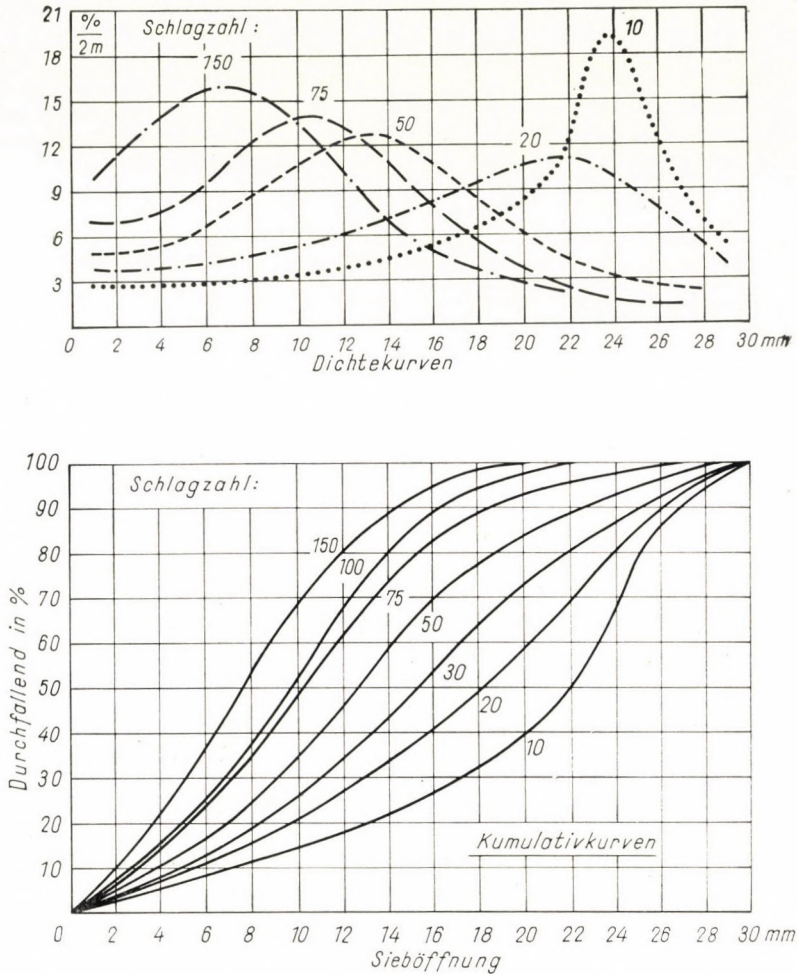


Bild 4. Verteilungskurven, erhalten bei Versuch I

mit dem Material eines zweiten Mörsers, welches parallel mit dem ersten in vollkommen analoger Weise betrieben wurde, wieder aufgefüllt. Da für uns die prozentuelle Verteilung des Haufens maßgebend ist, wird hiedurch an dem Resultate nichts geändert. Die Ergebnisse dieser Siebproben enthält Tafel I, ihre graphische Darstellung zeigt Bild 4 (Kumulativkurven und Dichtekurven).

Wie aus Bild 4b zu ersehen ist, ist die Dichtekurve nach 10 Schlägen (infolge der geringen Zahl der Zerkleinerungseinwirkungen) noch rechtsschief, nach 20 Schlägen bildet sie aber schon den Abschnitt einer Kurve, die näherungsweise durch die Normalverteilung ausgedrückt werden kann (Bild 5a). Diesbezüglich ist zu bemerken: die Normalverteilungskurve verläuft von $-\infty$ bis $+\infty$ und die tatsächliche Verteilungskurve bildet einen Abschnitt dieser Kurve. Die Verteilungskurve eines Backenbrechers z. B. verläuft unter normalen Betriebsbedingungen ungefähr symmetrisch³ (Bild 5b),

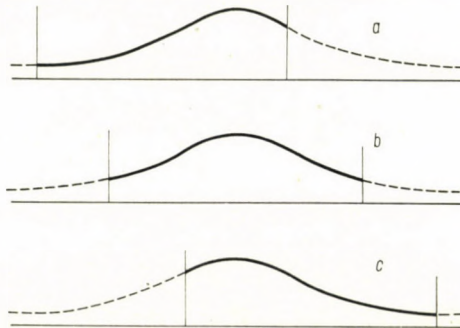


Bild 5. Dichtekurven als Abschnitte einer symmetrischen Normalverteilungskurve

während die von uns nach 20 Mörserschlägen aufgenommene Verteilungskurve ihren Scheitelpunkt auf der rechten Seite der Kurve hat (Bild 5a).

Nach 50 Schlägen befindet sich der Scheitelpunkt der Dichtekurve ungefähr in der Mitte der Kurve, und ihr Anfang buckelt sich auf, wie das bei Kegel- und auch Backenbrechern zu finden ist. Bei 75 (und auch bei 100) Schlägen verschiebt sich der Scheitelpunkt langsam nach links und nach 150 Schlägen fällt er schon stark in die linke Hälfte der Kurve.

Versuch 2. (Tafel II, Bild 6)

Der Vorgang war derselbe wie bei Versuch 1, nur wurde aus dem zerkleinerten Kohlenhaufen jetzt nicht die Fraktion $0 \div 10$ mm, sondern nur die Fraktion $0 \div 5$ mm ausgesiebt. Die Ergebnisse der Siebenanalysen enthält Tafel II, ihre graphische Darstellung ist an der Kurvenserie in Bild 6 (Kumulativkurven und Dichtenkurven) zu sehen. Nach 10 Schlägen ist die Dichtekurve noch rechtsschief, nach 15 Schlägen entspricht ihre Gestaltung ungefähr der Kurve, die wir beim vorigen Versuche nach 20 Schlägen erhielten.

Den Übergang zu den linksschiefen Kurven bilden die zu 20 und zu 30 Schlägen gehörenden Kurven. Diese sind doppelwellig. Nach 20 Schlägen ist

³ Wenn wir von der Aufwellung des Vorderteiles der Kurve jetzt absehen.

noch die rechte Welle höher, nach 30 Schlägen ist es schon die linke. Nach 50 Schlägen erhalten wir bereits linksschiefe Kurven, deren Scheitelpunkt beim Anwachsen der Anzahl der Schläge sich immer mehr nach links verschiebt während ihre Ordinate rasch zunimmt.

Wie aus den entsprechenden Bildern zu ersehen ist, verschob sich der Scheitelpunkt der Dichtekurven bei Versuch 2 viel stärker und viel rascher nach links als bei Versuch 1. Während z. B. bei Versuch 1 die nach 50 Schlägen erhaltene Kurve noch nahezu symmetrisch verläuft, ist sie bei Versuch 2

Tafel II
(Versuch 2)

Schlagzahl	0-5 mm %	5-10 mm %	10-15 mm %	15-20 mm %	20-25 mm %	25-30 mm %
10	9	7,5	7,5	18,5	37,5	20
20	15	16,5	15,5	20,5	20	12,5
30	15	25	19,5	17	13,5	10
50	23	32	20,5	13	5,5	6
75	27	38	20	9,5	3	2,5
100	27,5	43	19,5	8	2	—
150	40,5	39,5	13,5	4,5	2	—
200	43,5	40	12,5	3,5	0,5	—

schon stark linksschief, und wenn die Anzahl der Schläge weiter anwächst, so schiebt sich — wie schon erwähnt — der Scheitelpunkt noch stärker nach links und seine Ordinate wächst rapid an. Dies hat folgenden Grund: Bei Versuch 1 schied die Fraktion 0 ÷ 10 mm ständig vom Zerkleinerungsprozeß aus, erhielt also keine Zerkleinerungswirkungen mehr, während bei Versuch 2 nur die Fraktion 0 ÷ 5 mm aus dem Prozeß ausschied, die Fraktion 5 ÷ 10 mm noch darinnen blieb und weitere Einwirkungen erlitt. Da beim Passieren des Spaltes der ganze Haufen diesen Prozeß durchmacht, erleidet der Haufen bei Versuch 2 wesentlich mehr Zerkleinerungseinwirkungen als bei Versuch 1.

In einer mit Spalt versehenen Maschine erleidet nämlich nur ein Teil des Brechgutes sämtliche erteilten Zerkleinerungseinwirkungen, denn ein Teil des Brechgutes scheidet während des Zerkleinerungsvorgangs fortlaufend von der Maschine aus und erhält keine Zerkleinerungswirkungen mehr.

Wenn wir z. B. untersuchen, wie sich die Verteilung des fertig zerkleinerten Haufens nach 150 Schlägen, bei einer Spaltöffnung entsprechend 10 mm max. Korngröße gestaltet, so muß in Betracht gezogen werden, daß nach

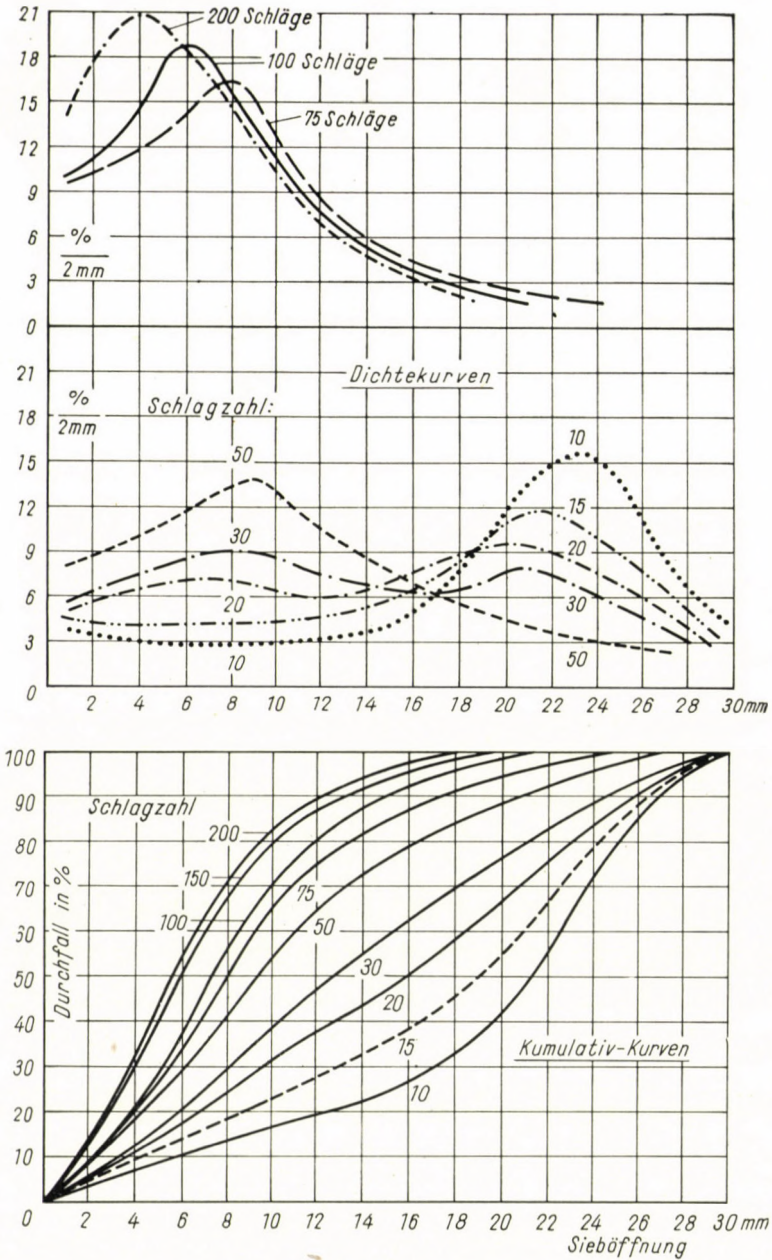


Bild 6. Verteilungskurven, erhalten bei Versuch 2

10 Schlägen schon 15% des aufgegebenen Materials die Maschine verläßt (s. Bild 4) und keine weiteren Schläge mehr erhält, nach weiteren 10 Schlägen verlassen wieder 21% des zurückgebliebenen Materials die Maschine usw., und nur ein kleiner Bruchteil des zur Zerkleinerung aufgegebenen Materials erleidet sämtliche 150 Schläge.⁴

Je mehr wir den Spalt verengen, um so größer wird der Anteil, den die Körner des durch die Brechmaschine durchfließenden Haufens von den erteilten Schlägen auch tatsächlich erleiden. Die Grenze bildet der Fall, wenn wir den Spalt ganz schließen, also bei Mörsern oder anderen spaltlosen Einrichtungen, weil dann nichts den Brecher verläßt, also das Brechgut sämtliche erteilten Schläge auch erleidet. Dies kann in Bild 8 deutlich verfolgt werden, wo die zu 75 erteilten Schlägen gehörenden Verteilungskurven bei 10 mm Spalt, bei 5 mm Spalt und bei einer spaltlosen Einrichtung (Mörser) dargestellt sind.

Versuch 3. (Tafel III, Bild 7)

Bei Versuch 2 gestalteten sich die Übergangskurven von den rechtschiefen zu den linksschiefen Verteilungen (20 und 30 Schläge) doppelwellig. Um festzustellen, ob dies die Regel ist, haben wir den Versuch wiederholt. Die Gestaltung der Kurvenfolge entspricht den bei Versuch 2 erhaltenen Ergebnissen, aber ohne Auftreten von doppelwelligigen Kurven. Es sind also bei der Gestaltung der Übergangskurven beide Fälle möglich.

Tafel III
(Versuch 3)

Schlagzahl	0-5 mm %	5-10 mm %	10-15 mm %	15-20 mm %	20-25 mm %	25-30 mm %
15	13,5	19	22,5	25	17,5	2,5
20	16	30,5	27	14,5	9,5	2,5
30	21,5	41	24,5	8	4	1
50	33,5	43,5	18	2,5	2,5	—
75	46	39,5	12	1,5	1	—
100	65	30	4,5	0,5	—	—

⁴ Es folgt daraus, daß die Verteilung des Fertigproduktes von Maschinen, die einen Spalt besitzen, nicht identisch mit der Verteilung des Zwischenproduktes in irgendeiner Phase der Zerkleinerung ist, denn das Fertigprodukt ist die Summe der in den einzelnen Phasen entstandenen und aus der Maschine ausgeschiedenen Teilprodukte (s. Bild 3). Weiter ist zu bemerken, daß bei unseren Versuchen als Vereinfachung vorausgesetzt wurde, daß das schon genügend zerkleinerte Material nach jeder Phase der Zerkleinerung aus der Maschine ausscheidet. In der Praxis ist dies nicht immer der Fall. Bei einem Backenbrecher z. B. muß es noch die weiter unten liegenden Zonen passieren um zum Spalt zu gelangen, wobei — besonders die größeren Körner der Fraktion — weitere Zerkleinerungseinwirkungen erhalten können.

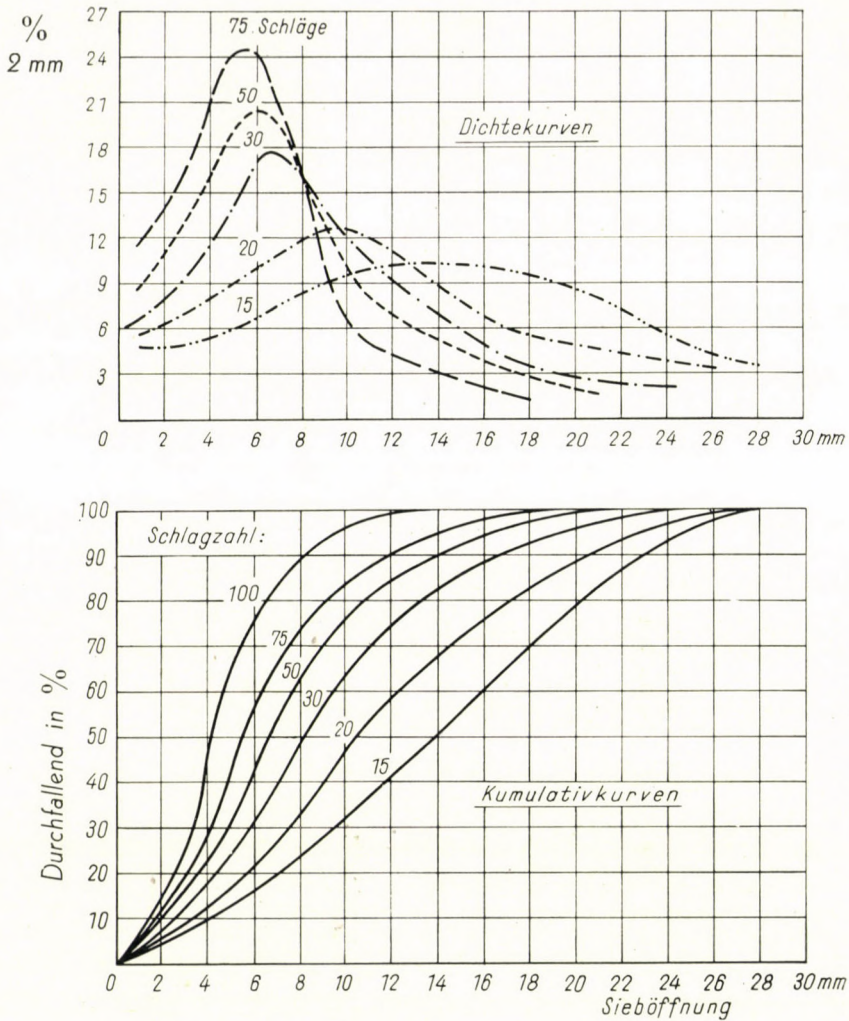


Bild 7. Verteilungskurven, erhalten bei Versuch 3

Versuch 4. (Tafel IV, Bild 9 und 10)

Es wurde Kohle von 20—30 mm Anfangsgröße in einem Mörser zerkleinert, und ihre Verteilung nach 10, 15, 50, 75, 150, 200 und 500 Schlägen durch Siebanalyse bestimmt. Es wurde aber nach den Siebproben nichts entfernt, sondern die gesamte Menge wieder in den Mörser zur weiteren Zerkleinerung zurückgeführt. Wie aus den Verteilungskurven in Bild 9 und 10 hervorgeht, erfolgte die Gestaltung der Verteilung bei zunehmender Schlagzahl nach denselben Gesetzmäßigkeiten wie bei den früheren Versuchen, nur erfolgt die Linksverschiebung des Scheitelpunktes der Dichtekurve viel schneller, und die

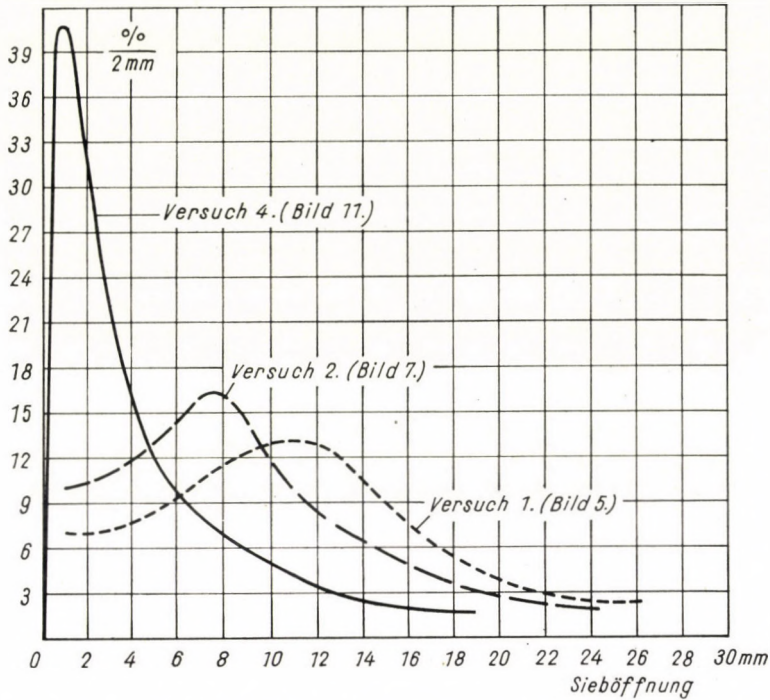


Bild 8. Vergleich der bei 75 erteilten Schlägen erhaltenen Dichtekurven bei Versuch 1, Versuch 2 und Versuch 3

Tafel IV
(Versuch 4)

Schlagzahl	0-5 mm %	5-10 mm %	10-15 mm %	15-20 mm %	20-25 mm %	25-30 mm %
10	9	7,5	7,5	18,5	37,5	20
15	13,5	19	22,5	25	17,5	2,5
50	38	34,5	17	8	2,5	—
75	70,5	19,5	6	4	—	—
100	80	15,5	3,5	1	—	—
200	83,5	14,5	2,0	—	—	—
300	87	11,5	1,5	—	—	—
500	90	10	—	—	—	—

Höhe seiner Ordinate wächst rapid an. Da nämlich aus dem Mörser nichts herausfallen kann, dagegen fortlaufend immer neue kleine Körnungen entstehen, akkumuliert sich ihre Menge immer mehr.

Die Verteilungskurven zeigten keine Doppelwellen. Wir haben aber in unseren früheren Ausführungen [4] gesehen, daß auch doppelwellige Kurven auftreten können. So haben wir bei der Zerkleinerung von Andesit, bei welcher das Material vom Vorbrecher ohne Zwischensiebung in den Nachbrecher gelangte (entspricht dem Versuch in Bild 3c 2. Phase), eine doppelwellige Verteilungskurve erhalten, wenn wir aber das Material sechsmal in die Maschine zurückführten und dabei den Spalt dreimal verengten, so be-

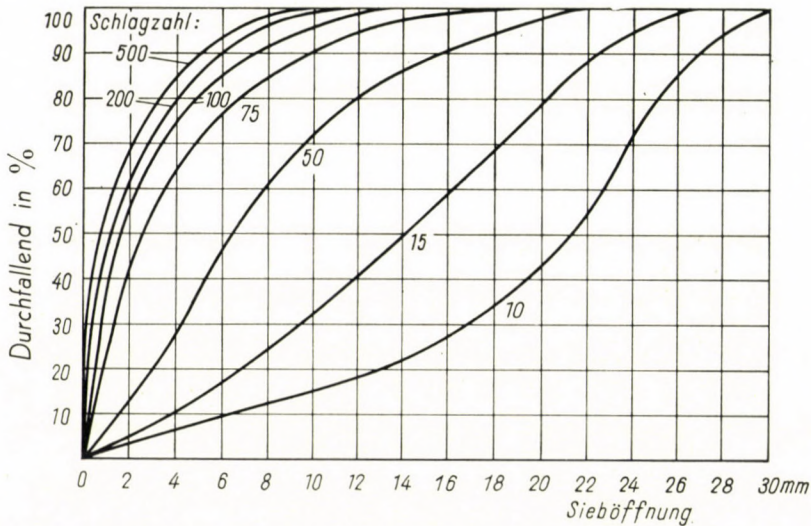


Bild 9. Kumulativkurven, erhalten bei Versuch 4

kamen wir schon eine linksschiefe Verteilung ohne Doppelwelle. Im ersten Falle hatte der Scheitelpunkt der linken Welle die Abszisse 19 mm. Im zweiten Falle lag sie bei ungefähr 1,5 mm [4]. Die Linksverschiebung des Scheitelpunktes tritt also auch bei Auftreten von Doppelwellen auf.

Dieses haben wir hervorgehoben, weil H. HEYWOOD [2] eine ganz andersartige Kurvenserie gefunden hat. HEYWOOD zerkleinerte in einer Kugelmühle Kohle und hat die Korngrößenverteilung des Mahlgutes nach 200, 400, 600, 800, 1000, 1200, 1400 und 1600 Umdrehungen der Mühle immer von neuem bestimmt (Bild 11). Nach jeder Siebprobe kam die gesamte Menge ohne irgendwelche Aussiebung wieder in die Trommel zurück, die Einrichtung war also spaltlos. Wie Bild 11 zeigt, ergaben sich doppelwellige Kurven. Der Scheitelpunkt der rechtsseitigen Welle verschob sich bei Zunahme der Umdrehungszahl (also bei Zunahme der Anzahl der erlittenen Zerkleinerungseinwirkungen) immer mehr nach links und vereinigte sich nach ca. 650 Umdrehungen mit der linksseitigen Welle zu einer einzigen linksschiefen Welle. Die Höhe der linksseitigen Welle nahm mit dem Fortschreiten des Zerkleinerungsprozesses

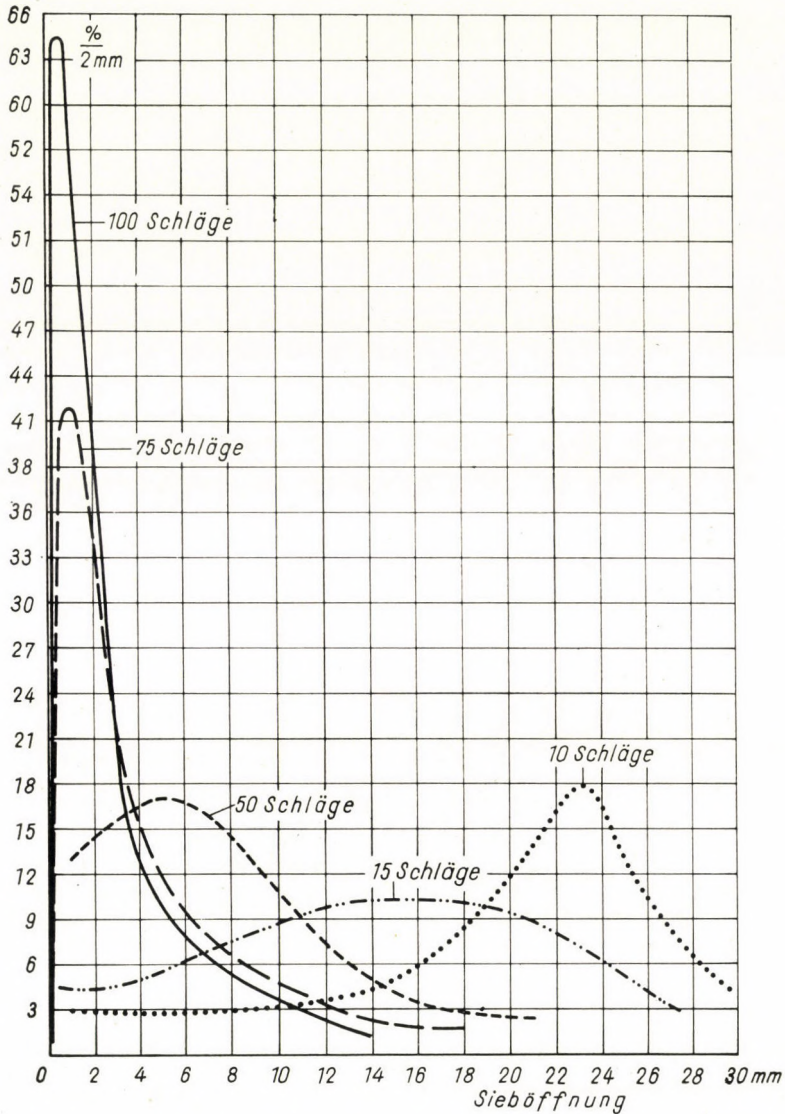


Bild 10. Dichtekurven, erhalten bei Versuch 4

rapid zu, die Abszisse ihres Scheitelpunktes änderte sich aber während des gesamten Zerkleinerungsprozesses nicht merkbar. Diese Gestaltungsart haben wir bei unseren Versuchen weder mit Maschinen mit Spalt noch bei spaltlosen Maschinen gefunden. Dort sind entweder gar keine Doppelwellen entstanden, oder aber, wenn sich auch einige doppelwellige Übergangskurven ergaben, so verschob sich der Scheitelpunkt auch der linksseitigen Welle beim Fortschreiten der Zerkleinerung nach links.

Wir beschreiben aber im folgenden die Ergebnisse eines Versuches, den wir einige Zeit vor den oben beschriebenen Versuchen durchgeführt haben.

Versuch 5. (Tafel V, Bild 12 und 13)

Der Versuch wurde in derselben Weise durchgeführt wie Versuch 4. Während aber bei Versuch 4 die Mörserschläge durch einen kräftigen Laboranten erteilt wurden, wurden sie bei Versuch 5 durch eine Laborantin getätigt.

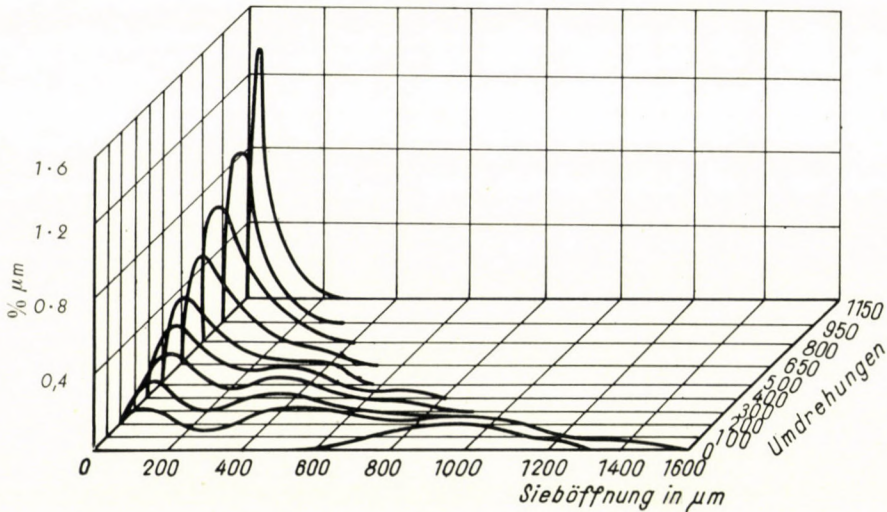


Bild 11. Kurvenserie von HEYWOOD

Die Schläge waren deshalb bei Versuch 5 viel schwächer, und es waren zur Erreichung desselben Ergebnisses wesentlich mehr Schläge notwendig als bei Versuch 4.

Die Ergebnisse des Versuches 5 enthält Tafel V. Die aus dieser Tafel sich ergebenden Kumulativkurven enthält Bild 12, die Dichtekurven sind in Bild 13 zu sehen. Es zeigt sich, daß sich bei diesem Versuch schon nach 100 (schwachen) Schlägen, wenn die Dichtekurve noch stark rechtsschief war, eine linksseitige zweite Welle ausbildete, deren Ordinate sich mit zunehmender Schlagzahl ständig vergrößerte, die zu ihrem Scheitelpunkt gehörende Abszisse blieb aber unverändert. Bei diesem Versuche haben wir also die durch HEYWOOD beschriebenen Verhältnisse gefunden.

Der Grund für die Verschiedenheit der Umstände zwischen Versuch 4 und Versuch 5 ist in der Verschiedenheit der Stärke der bei den beiden Ver-

Tafel V
(Versuch 5)

Schlagzahl	0-1 mm %	1-3 mm %	3-5 mm %	5-10 mm %	10-15 mm %	15-20 mm %	20-30 mm %
5	0,70	1,20	1,35	4,86	6,75	16,36	68,78
10	1,39	2,02	2,16	7,56	8,91	14,45	63,51
15	1,52	2,43	2,83	8,10	9,86	14,18	61,08
20	1,65	2,83	3,24	9,05	11,35	16,75	55,13
30	2,33	3,64	3,91	10,40	12,97	19,05	47,70
40	2,74	4,18	4,45	11,62	12,83	20,27	43,91
50	5,27	5	4,72	12,97	12,83	19,35	39,86
100	7,16	7,83	6,48	16,62	15	19,18	27,73
200	9,59	11,35	9,05	15,59	17,83	17,54	19,5
300	12—	14,45	9,86	20,54	17,02	13,16	12,97
400	13,10	15,54	10,94	20,13	18,24	12,46	9,59
500	16,89	16,89	10,67	20,94	14,86	11,81	7,97
600	20,27	16,62	11,35	20,94	13,15	11,75	5,95
700	20,27	17,16	12,43	21,30	13,24	10,80	5
1000	29,18	18,51	12,97	17,02	11,25	7,97	3,10
2000	37	22,16	13,51	13,56	7,83	4,05	1,89

suchen erteilten Schläge zu suchen.⁵ Bei Versuch 4. wurde die Zerkleinerung mit verhältnismäßig weniger aber kräftigen Schlägen durchgeführt. Bei Versuch 5 wurde ein ähnliches Ergebnis mit viel schwächeren, aber viel zahlreicheren Schlägen erreicht. Dies entspricht den Verhältnissen des Heywood schen Versuches, da in einer Kugelmühle die zurückfallenden Kugeln,

⁵ HEYWOOD begründet das Auftreten von doppelwelligen Verteilungen folgenderweise: Wenn die Zerkleinerung mit einem stumpfen Gegenstand, z. B. mit einem Schlaghammer getätigt wird, so bricht das zerkleinerte Gesteinstück in viele, verschieden große Stücke. In diesem Fall erhalten wir keine doppelwelligen Verteilungen. Erfolgt aber die Zerkleinerung mit einem scharfen Beil, so zerteilt sich das Stück in einige große Stücke, und es entstehen außerdem kleine Partikelchen. In diesem Falle ergibt sich eine doppelwellige Verteilung. Diese Erklärung steht aber in Widerspruch mit dem Versuch von HEYWOOD. Die Kugel einer Trommelmühle erteilen nämlich stumpfe Schläge, und trotzdem ergaben sich doppelwellige Verteilungen.

oder sonstige Mahlkörper, das Zermahlen ebenfalls mit vielen, schwächeren Schlägen durchführen (im Gegensatz z. B. zu dem Backenbrecher). Bei den schwächeren Schlägen des Versuchs 5 waren wesentlich mehr Schläge zur Zerkleinerung der Stücke des Haufens nötig als bei Versuch 4 und es zeigte sich sogar, daß oft mehrere Schläge zum Zerbrechen einzelner Stücke notwendig waren, da sich bei den ersten schwächeren Schlägen nur Haarrisse bildeten und wiederholte Schläge nötig waren, damit das ursprüngliche Stück in mehrere

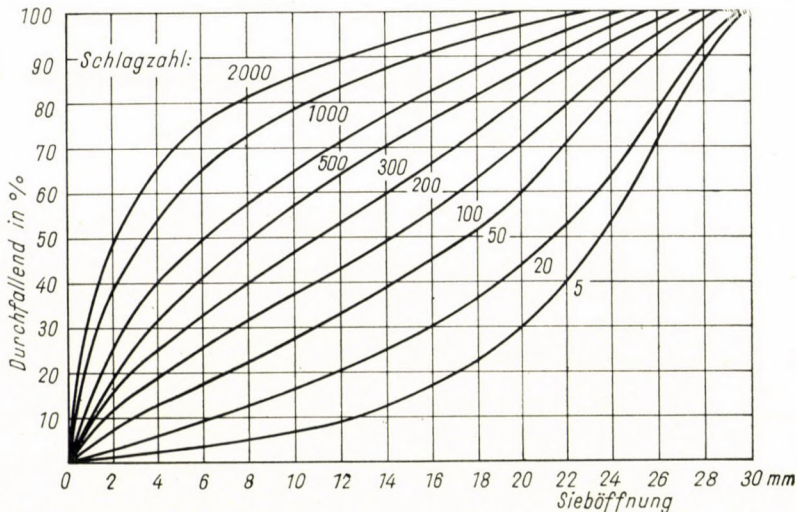


Bild 12. Kumulativkurven, erhalten bei Versuch 5

Stücke zerfällt. Bei jedem Schlage lösen sich aber kleine Partikelchen von der Oberfläche und den Kanten der zu zerkleinernden Stücke ab und ihre Menge nimmt infolge der zahlreichen Schläge sehr schnell zu. Da die Einrichtung keinen Spalt besitzt, akkumulieren sich diese Partikelchen, und die durch sie verursachte linksseitige Welle wächst rapid an.

Wie die Versuche zeigen, zerkleinern sich die entstandenen kleinen Partikelchen nicht wesentlich weiter, deshalb bleibt die Abszisse des Scheitelpunktes der linken Welle ungefähr konstant.

Die durch HEYWOOD ermittelte Kurvenserie bildet also einen Sonderfall. Solche Kurven erhält man wenn:

1. die Zerkleinerung mit einer spaltlosen Einrichtung erfolgt, und
2. wenn die Zerkleinerung mit vielen, verhältnismäßig schwachen Schlägen erfolgt.

Diese Feststellung ist insofern wichtig, weil die Verallgemeinerung der Heywoodschen Kurvengestaltung zu Mißverständnissen führt.

So ziehen z. B. COULSON und RICHARDSON in ihrem Handbuche [1] aus der Kurvenserie von HEYWOOD folgende Folgerung: »Wenn der Brecher auch eine klassifizierende Wirkung ausübt, wenn z. B. das Material zwischen Walzen (Rollen) durchgeht, die einen bestimmten Abstand von einander

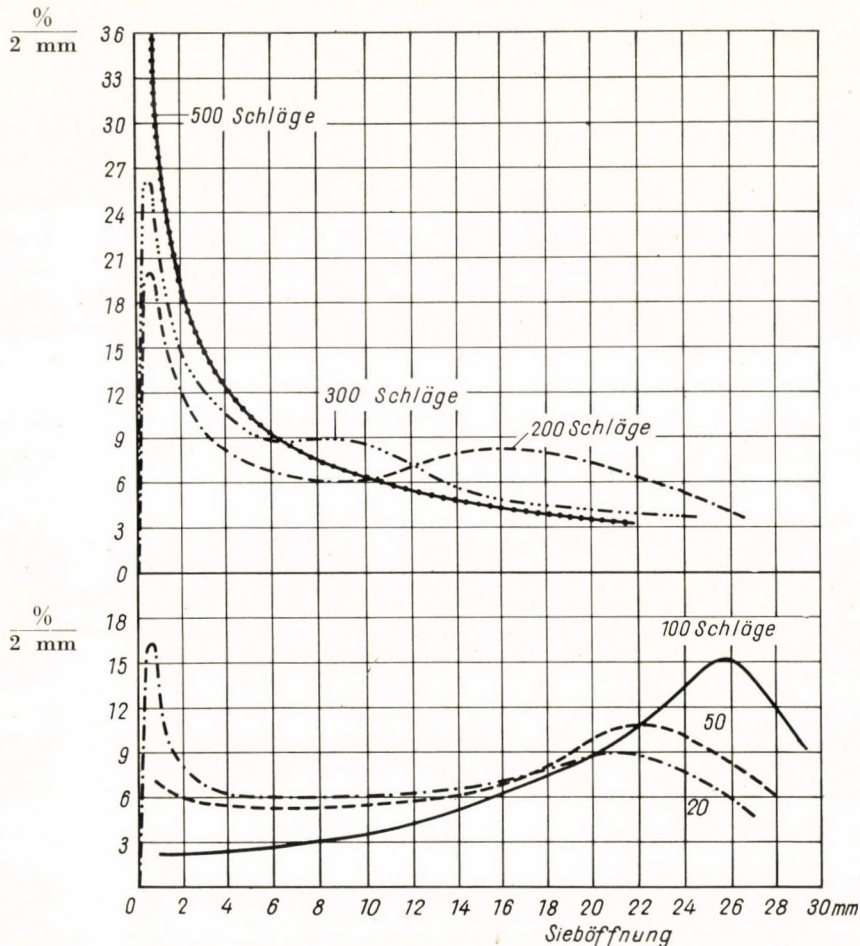


Bild 13. Dichtekurven, erhalten bei Versuch 5

haben, dann hat die Kurve ein zweites Maximum, wie es die rechte Seite von Fig. 24.4 zeigt (Bild 14). Die Dichtekurve bildet in diesem Falle die Summe der beiden strichlierten Kurven.«⁶

⁶ Vol. II. S. 873. »If the crusher exerts a sizing influence, for example, if the material is passed through rollers with a fixed separation, there will be a secondary maximum as shown on the right of Fig. 24.4. The frequency curve here is really formed as the sum of the two dotted lines.«

Es wird also angenommen, daß die mit Spalt versehenen Maschinen solche doppelwellige Kurven erzeugen, wie wir sie beim Versuch von HEYWOOD oder bei unserem Versuch 5 gefunden haben. Gerade das Gegenteil ist aber der Fall, denn diese beiden Versuche wurden mit spaltlosen Maschinen durchgeführt.

Das Mißverständnis beruht auf folgenden Umständen: Verringern wir die Anzahl der Zerkleinerungseinwirkungen, so schiebt sich — wie gezeigt wurde — der Scheitelpunkt der Dichtekurve nach rechts. Diese Verringerung der erlittenen Zerkleinerungswirkungen kann — wie vorhergehend ausgeführt wurde — auch dadurch hervorgerufen werden, daß wir eine spaltlose Maschine

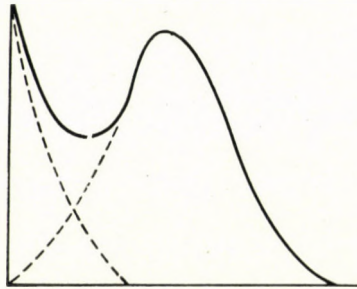


Bild 14. Abbildung aus dem Handbuch von COULSON und RICHARDSON

mit einem Spalt versehen, z. B. eine geschlossene Kugelmühle mit Ausflußöffnungen versehen (Es kann aber auch auf andere Weisen geschehen). In diesem Falle schiebt sich der Scheitelpunkt der Dichtekurve um so mehr nach rechts, je mehr wir den Spalt erweitern. Es entsteht also eine rechtsseitige Welle. Es kann sich aber jetzt die linke Welle nicht ausbilden, da ja die kleinen Partikeln sich jetzt nicht akkumulieren, sondern durch den Spalt durchfallen.

Dies zeigt auch die von COULSON und RICHARDSON erwähnte Abbildung (Bild 14). Es wird dort richtig darauf hingewiesen, daß ein Haufen mit doppelwelliger Verteilung die Summe zweier Haufen ist, deren jede eine einwellige Verteilung besitzt. Der linke Haufen kann sich aber bei Maschinen mit Spalt — wie oben ausgeführt wurde — nicht ausbilden.

Wir finden aber sehr oft, daß sich der Vorderteil der Verteilungskurve von Kegel- und auch von Backenbrechern aufbuckelt. Dies geschieht in viel geringerem Maße als z. B. bei Versuch 5 und hat seinen Grund wahrscheinlich darin, daß bei dem angewendeten Zerkleinerungsgrade das Material nicht schnell genug durch den Spalt durchfließen kann, sondern sich vor dem Spalt anstaut und demzufolge feine Partikeln von den Steinresten abgerieben werden. Wenn wir den Spalt entsprechend verbreitern, so hört die Aufbuckelung auf, wenn wir sie verengen, wird sie stärker.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß nach den Ergebnissen unserer Versuche sich die Gestaltung der Verteilungskurve des Brechgutes

während des Fortschreitens des Zerkleinerungsvorganges nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit ändert. Die Dichtekurve ist am Anfang der Zerkleinerung rechtsschief, je weiter aber der Zerkleinerungsprozeß fortschreitet, also je größer die Zahl der erhaltenen Zerkleinerungseinwirkungen wird, um so mehr verschiebt sich ihr Scheitelpunkt, bei wachsender Ordinate, nach links und nähert sich der lognormalen Verteilung. (Wir haben ein solches Verhalten der Korngrößenverteilung schon theoretisch behandelt und damit begründet, daß die Stücke des zu zerkleinernden Haufens, selbst bei als homogen angesehenen Materialien, nicht die gleiche Festigkeit besitzen [5].)

Die Feststellung bezieht sich nur auf die — in der Praxis angewendeten — Gewichtsverteilungskurven, die angeben, wieviel Prozente des Gesamtgewichtes das Gewicht irgendeiner Fraktion beträgt. Die Gesetzmäßigkeiten

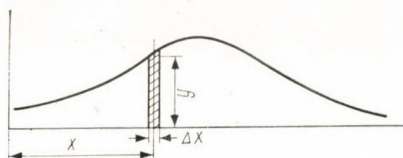


Bild 15. Zusammenhang zwischen Gewichtsverteilung und Anzahlverteilung

der Korngrößenverteilung wurden auch mathematisch untersucht [3], [6], aber nur die der Anzahlverteilung. Diese gibt den prozentuellen Anteil der Kornzahl der verschiedenen Fraktionen an der gesamten Körneranzahl des Haufens an. Die mathematischen Untersuchungen führten zu dem Ergebnis, daß die Anzahlverteilung sich lognormal gestaltet.

Zwischen der Anzahlverteilung und der Gewichtsverteilung eines Haufens besteht aber folgender Zusammenhang [4]: Bild 15 zeigt die Dichtekurve einer Gewichtsverteilung. Die Ordinate y dieser Kurve gibt an wie groß das Gesamtgewicht der Körner ist, deren Größe zwischen $(x - \Delta x/2)$ und $(x + \Delta x/2)$ liegt. Der Mittelwert der Größe dieser Körner ist x . Die Anzahl der Körner erhalten wir, indem wir ihr Gesamtgewicht mit dem Gewichte eines einzelnen Kornes von der Größe x dividieren. Das Gewicht eines solchen Kornes ist:

$$g_x = f\sigma x^3,$$

wobei σ das spezifische Gewicht ist, und f ein Formfaktor, abhängig von der Gestalt der Körner. Für ein und dasselbe Material können σ und f als Konstanten betrachtet werden, deren Wert in den Maßstab einbezogen werden kann. Es ist also

$$y_a = \frac{y}{x^3},$$

wo y_a die Ordinate der Anzahlverteilungskurve bedeutet.

Es läßt sich mathematisch nachweisen [4], daß infolge dieses Zusammenhanges die Gewichtsverteilung lognormal sein muß, wenn die Anzahlverteilung lognormal ist. Unsere Untersuchungen haben aber zu dem Ergebnis geführt, daß bei kleinen und mittleren Anzahlen der Zerkleinerungseinwirkungen die Gewichtsverteilungskurven nicht lognormal sind, sondern ganz andere Verteilungsarten zeigen. Es scheint hier also ein Widerspruch zwischen den Ergebnissen der mathematischen Ableitungen und unseren Versuchsergebnissen zu bestehen. Dies ist aber, entsprechend den folgenden Ausführungen, nicht der Fall.

Die lognormale Verteilung hat ihre Grenzen bei 0 und $+\infty$. Tatsächlich kann aber ein Korn nicht unendlich groß sein. Das rechtsseitige Ende der tatsächlichen Verteilungskurve, welches sich auf die großen Körner bezieht, muß infolgedessen von der lognormalen Verteilung abweichen. Wenn wir die Dichtekurve der Gewichtsverteilung z. B. eines Backenbrechers, der Material von 0—130 mm herstellt, darstellen und mit Hilfe der Formel $y_a = y/x^3$ die Ordinaten ihrer Anzahlverteilungskurve bestimmen, so ergibt sich, daß die zur Abszisse 50 μm gehörende Ordinate ungefähr 7000mal größer ist als die zur Abszisse 1 mm gehörende Ordinate [4]. Wenn wir also z. B. annehmen, daß die zur Abszisse 1 mm gehörende Ordinate 0,1 mm ist, also die Kurve die Abszissenachse praktisch berührt, so ist die zu 50 μm gehörende Ordinate 700 mm lang. Dies zeigt, daß den überwiegend größten Teil der Körneranzahl die Körner kleiner als 1 mm bilden, und die Anzahl der Körner größer als 1 mm kaum $1 \div 2\%$ der Gesamtkörnerzahl ausmacht. Jener Teil der Anzahlverteilungskurve, der rechts von der Abszisse 1 mm liegt und der sich also auf die größten Körner des Haufens bezieht, muß, nach obigen Ausführungen, schon von der lognormalen Verteilung abweichen. Wo aber die Anzahlverteilungskurve nicht mehr lognormal ist — also in unserem Falle im Bereich der Körner größer als 1 mm — kann auch die Gewichtsverteilungskurve nicht mehr lognormal sein. Dieser Bereich ist aber der für die Gewichtsverteilung des obigen Backenbrechers maßgebende Bereich.

Unsere Untersuchungen zeigten, daß in dem Bereiche, wo die Anzahl der Zerkleinerungseinwirkungen groß ist, sich auch die Gewichtsverteilung immer mehr der lognormalen Verteilung nähert, dagegen kann die Gewichtsverteilung (und auch die Anzahlverteilung) im Bereiche der geringen Anzahl der Zerkleinerungseinwirkungen — nach obigen Ausführungen — nicht lognormal sein. Die Ergebnisse unserer Untersuchungen gingen aber über diese lediglich negative Feststellung hinaus. Es wurden die Änderungen in der Gestaltung der Gewichtsverteilungskurve während des Fortschreitens der Zerkleinerung Schritt für Schritt verfolgt, indem zu den einzelnen Kurvengestaltungen die zugehörige Anzahl der erteilten Schläge direkt abgezählt wurde. Es zeigte sich dabei, daß die Gestaltung der Gewichtsverteilungskurven ebenfalls strengen Gesetzmäßigkeiten folgt. Diese festzustellen war die Ziel-

setzung sowohl unserer früheren [4] als auch der jetzt beschriebenen Untersuchungen. Daß die Gesetze der Gewichtsverteilung mathematisch noch nicht verfolgt wurden, hat seinen Grund eben darin, daß nicht genügend Anhaltspunkte über den Verlauf der Zerkleinerung zur Verfügung standen. Je mehr sich unser Wissen diesbezüglich erweitert, um so mehr besteht die Möglichkeit einer mathematischen Verfolgung des Vorganges.

SCHRIFTTUM

1. COULSON, Y. M.—RICHARDSON, I. F.: *Chemical Engineering*. Vol. 2, p. 572. Pergamon Press, London.
2. HEYWOOD, H.: Some Notes on Grinding Research. Dept. of Mechanical Engineering, Imperial College.
3. KOLMOGOROW, A. N.: Über das logarithmisch normale Verteilungsgesetz der Teilchen bei Zerstückelung. *Dokladi Akademii Nauk. CCCP*. 31.
4. LÁZÁR, E.: Die Gesetzmäßigkeiten der Korngrößenverteilung maschinell zerkleinerter Materialhaufen. *Acta Techn. Hung.* 17 (1957)
5. LÁZÁR, E.: Begründung des Verhaltens der Gewichtsverteilungskurven zerkleinerter Materialhaufen. *Acta Techn. Hung.* 28 (1960)
6. RÉNYI, A.: Az aprítás matematikai elméletéről (Über die mathematische Theorie der Zerkleinerung). *Építőanyag* 9—10 (1950).

INVESTIGATION OF THE VARIATIONS IN THE GRANULOMETRIC COMPOSITION OF A SET DURING THE PROGRESS OF CRUSHING

J. LÁZÁR

SUMMARY

The purpose of the paper is to investigate the change of the granulometric composition of a set when passing through the crusher, i.e. during the progress of crushing. The experiments have shown that the distribution graph is strongly biased to the right during the initial phase of crushing and that it still shows the character of the granulometric structure of the initially charged material. As crushing progresses, the peak of the density curve is shifted more and more to the left, and so much the more does the peak of the curve use. The character of the distribution passes through an approximately normal towards an approximately logarithmico-normal one. This process is the quicker, the more the gap is narrowed and its limit is the complete closure of the gap, i.e. the gapless crushing device. It is worth mentioning that with crushers having gaps, the granulometric structure of the final, broken stone or other set does not agree with any of the granulometric structures continually produced during crushing. Finally the paper also deals with an experiment of H. HEYWOOD and shows that the distributions appearing there are special cases and arise only in gapless crushing devices when using numerous but relatively slight crushing actions.

EXAMEN DES CHANGEMENTS DE DISTRIBUTION GRANULOMÉTRIQUE DES AGRÉGATS PENDANT LE PROCESSUS DE CONCASSAGE

J. LÁZÁR

RÉSUMÉ

L'étude essaie de déterminer comment la structure granulométrique d'un agrégat se modifie pendant le passage par le concasseur, c'est-à-dire pendant la marche du processus de concassage. Les expériences ont montré que la courbe de densité de la distribution est encore

fortement inclinée vers la droite pendant les phases de début du concassage, et qu'elle porte encore le caractère granulométrique de la matière chargée dans le concasseur. Plus le concassage avance, plus la crête de la courbe de distribution dévie vers la gauche, en même temps que l'ordonnée de la crête augmente. Le caractère de la distribution présente un passage à travers la distribution approximativement normale, vers la distribution approximative logarithmique normale. Ce processus est d'autant plus rapide que la fente est plus étroite, la fermeture totale de la fente représentant la limite. Il faut remarquer que chez les concasseurs à fente, la composition granulométrique de l'agrégat de pierres ou d'autres matériaux n'est conforme à aucune des compositions granulométriques produites d'une façon continue pendant le procédé de broyage. L'auteur examine aussi une expérience de H. Heywood et démontre que les distributions qu'on y trouve constituent un cas spécial et n'apparaissent que dans les concasseurs sans fente, lors de l'application d'actions de concassages nombreuses, mais relativement faibles.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ, ПРОИСХОДЯЩИХ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ СТРУКТУРЫ ЗЕРЕН ПО ХОДУ ПРОЦЕССА ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

И. ЛАЗАР

РЕЗЮМЕ

Целью работы являлось определение того, как изменяется структура зерен некоторого множества при прохождении через дробилку, т. е. по ходу процесса измельчения. Проведенные опыты показывают, что кривая частоты распределения в начале измельчения еще сильно наклоняется вправо и несет характер структуры зерен заданного материала. Чем дальше продвигается измельчение, тем более смещается вершина кривой частоты влево и тем сильнее возрастает ордината этой вершины. Характер распределения, через приближенно нормальное распределение, приближается к приближенно логнормальному распределению. Этот процесс происходит тем быстрее, чем более закрывается паз, и граничным случаем следует считать полное закрытие паза, т. е. беспазовую дробилку. Следует упомянуть, что для дробилки с пазом готовый продукт камня или другого материала имеет структуру зерна, не соответствующую ни одной структуре зерна дробимого материала, появляющейся непрерывно во время дробления. Наконец, в работе изложены мысли относительно одного опыта Х. Хейвуда, и показано, что появляющиеся там распределения представляют собой исключение и имеют место лишь в беспросветных дробилках при применении большого числа, но относительно слабых дробящих действий.

GENAUE ANALOGABBILDUNG DES MIT GESTEUERTEN ORGANEN GEREGLTEN ASYNCHRON-SERVOMOTORS

K. P. KOVÁCS

KORRESPOND. MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 16. November 1962]

Die Zweiphasen-Asynchron-Servomotoren werden meistens in der Weise geregelt, daß die eine Phasenwicklung des Motors über einen Kondensator an ein Netz von konstanter Spannung gelegt ist, wogegen in den Stromkreis der anderen (steuernden) Phasenwicklung ein Selbstsättigungs-Transduktor geschaltet wird. Der Selbstsättigungs-Transduktor erzeugt dieselbe Betriebsverhältnisse, die auch mit gegen-parallelgeschalteten Thyatronen oder mit gegen-parallelgeschalteten Vierschicht-Siliziumtrioden (Thyristoren) erzielt werden können.

In der Abhandlung ist die genaue Analogabbildung des in dieser Weise geregelten Servomotors gegeben, wobei die vom Transduktor (Thyatron, Thyristor) erzeugten Spannungsverhältnisse mittels eines Rechteckwellengenerators ebenfalls durch eine Analogmethode simuliert werden.

I. Einleitung

Die Zweiphasen-Asynchron-Servomotoren werden gewöhnlich mit Läufern von hohem Widerstand hergestellt, und zwar aus zwei Gründen:

a) zwecks Erreichung linearer oder annähernd linearer Momenten-Drehzahl-Charakteristiken;

b) damit im Falle einer einphasigen Erregung der Läufer des Motors sicher stehen bleibe (das Arbeiten als Einphasenmotor unmöglich sei).

Diese Bedingungen werden am besten von den zweiphasigen Ferraris-Motoren befriedigt, wo das äußerst geringe Trägheitsmoment des becherartigen Läufers die Regelungsbedingungen noch weiter verbessert. Eine der am häufigsten gebrauchten Regelschaltungen des zweiphasigen Ferraris-Motors ist im Bild 1 dargestellt. Hiernach ist die Phasenwicklung a des Zweiphasenmotors m über den Phasenschieberkondensator C an das Wechselstromnetz h von konstanter Spannung geschaltet. Zwischen der Phasenwicklung b des Motors und dem Netz befindet sich der selbsterregende magnetische Regelverstärker me , dessen Gleichstrom-Steuerkreis über den Gleichrichter ei vom Potentiometer p gespeist wird. Selbstverständlich kann der Gleichstrom-Eingang des magnetischen Verstärkers das Regelsignal auch von irgendeinem anderen Punkt, von einem Fühler des Regelkreises, usw. erhalten.

Die Phasenwicklung a des Zweiphasenmotors erhält — von der geringen Rückwirkung des Läufers abgesehen — eine praktisch konstante Spannung,

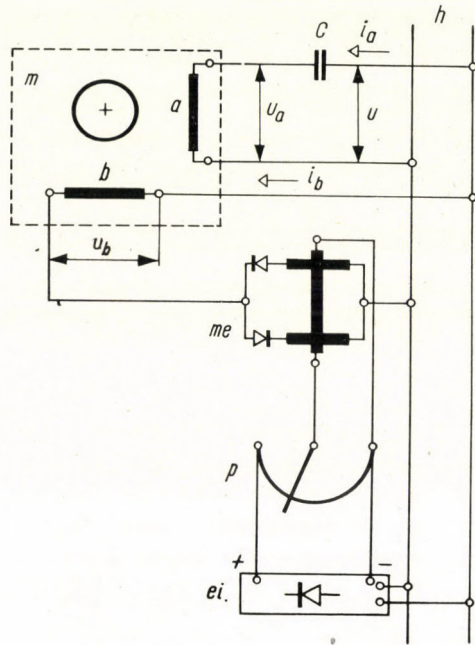


Bild 1

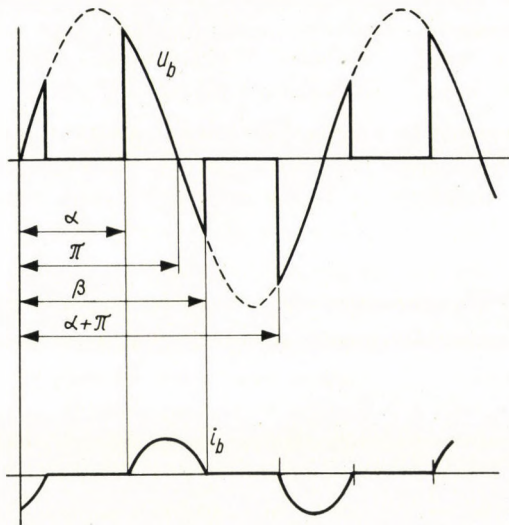


Bild 2

wegen die Speisespannung der Phasenspule b vom Erregungsgrad des magnetischen Verstärkers (Transduktors) abhängt und vom Zustand der vollen Leitung bis zum Zustand der vollen Sperrung (wenn im Stromkreis

der Phasenspule b kein Strom fließt) jeden Wert annehmen kann, wobei sich die Drehzahl, in Abhängigkeit von dem vom Läufer entwickelten Moment bzw. dem gegebenen Gegenmoment, vom erreichbaren Höchstwert bis zur Null ändert.

II. Die geregelte Spannung

Bild 2 zeigt den Verlauf der Spannung und des Stromes der Phase b innerhalb einer vollen Periode für den mit Zündwinkel a gekennzeichneten Betriebszustand des Transduktors. Vorläufig sei die Phase b als passive Impedanz betrachtet, was im Ruhezustand des Motors vollkommen richtig ist, während der Drehung bedeutet dies aber schon — wie es später gezeigt wird — eine gewisse Vernachlässigung. Aus Bild 2 ist ersichtlich, daß in der ersten Halbperiode der eine Eisenkern des Transduktors beim Zündwinkel a in Sättigung gelangt, in welchem Zeitpunkt an den Klemmen der Phasenspule b die Spannung plötzlich erscheint, und auch der Strom zu fließen beginnt. Die Spannung der Phase b stimmt — da der Transduktor (vom eigenen Streuungs- und ohmischen Spannungsabfall abgesehen) im Leitungszustand ist — mit der Netzspannung überein. In dieser Periode ist der Motor mit dem Netz in Zwangsschaltung. Mit Rücksicht auf den induktiven Charakter des Stromkreises fällt die Spannung wieder auf Null ab (die Leitung hört auf), wenn die Stromstärke am Ende der Leitungsperiode den Nullwert erreicht (Zeit β). In der zweiten Halbperiode gelangt beim Erreichen des Winkels $a + \pi$ der zweite Eisenkern des Transduktors in Sättigung, und das ganze Spiel wiederholt sich, von der Spannung entgegengesetzten Vorzeichens ausgehend. Diese wohlbekannte Erscheinung ändert sich beim Motor insofern, daß beim Aufhören der Stromführung die Spannung an den Klemmen der Phase b nicht verschwindet, da ja infolge des Umlaufens des Läufers unter Wirkung des mit der Phase a verketteten Feldes auch in der Phasenspule b eine induzierte Spannung auftritt. Die Verhältnisse sind qualitativ richtig im Bild 3 gezeigt, wo die in der Phase b außerhalb der Leitungsperiode induzierte Spannung durch eine zur Netzspannung um Winkel ε verspätete Sinuswelle dargestellt ist. In den Bildern 2 und 3 wurde der ideale Zustand vorausgesetzt, wo in der Leitungsperiode die Spannung der Phase b mit der Netzspannung genau übereinstimmt (der innere Wirk- und Blindspannungsabfall wurde vernachlässigt).

Hier sei bemerkt, daß die in den Bildern 2 und 3 für Transduktor dargestellten Verhältnisse praktisch in ähnlicher Weise angenähert werden können, wenn im Stromkreis der Phasenwicklung b die im Bild 4 dargestellten gegen-parallelgeschalteten Thyatronröhren oder noch eher die im Bild 5 gezeichneten gegen-parallelgeschalteten Halbleiter-Silizium-Thyatrone (Thyristoren) angewendet werden. Wenn nämlich auf das Gitter der Thyatrone

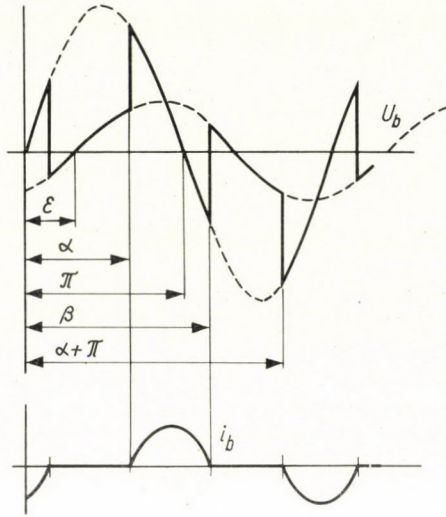


Bild 3

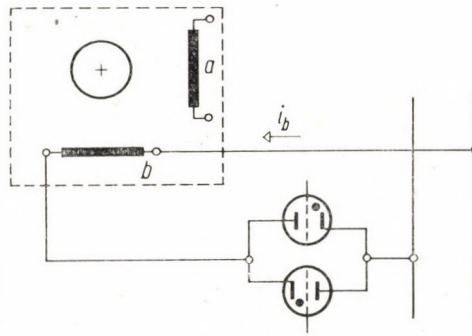


Bild 4

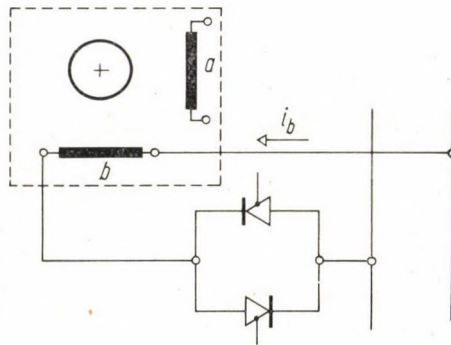


Bild 5

laut Bild 4 oder laut Bild 5 nach der Zeit a bzw. $a + \pi$ abwechselnd der nötige Impuls gegeben wird, gelangt stets die entsprechende Röhre bzw. Siliziumtriode in Leitungszustand, welcher Zustand, ähnlich wie beim Transduktor, im Augenblick des Nullüberganges des Stromes aufhört, und der Unterbrechungszustand bis zum nächsten Gitterimpuls bestehen bleibt.

Es sei jedoch bemerkt, daß besonders bei den Thyatronen von niedrigerer Spannung im Leitungszustand der Thyatrone der innere Spannungsabfall nicht mehr vernachlässigt werden kann, bzw. diese Vernachlässigung einen etwas größeren Fehler verursacht. Selbstverständlich besteht beim Analogrechnungsverfahren stets die Möglichkeit, diesen Fehler zu korrigieren.

Es ist ersichtlich, daß die Verhältnisse bei einer Regelung mit Transduktor, Thyatron oder Thyristor dem Wesen nach übereinstimmen, der Unterschied besteht bloß darin, daß während sich im ersten Fall die Leitungs- und Unterbrechungsstrecken im Falle eines konstanten Gleichstrom-Steuersignals selbsttätig einstellen, die Regelung mittels der kontinuierlichen Regelung des steuernden Gleichstromes erfolgt, bei den Thyatronen und Thyristoren das Maß der Regelung in jeder Halbperiode mit im Zeitpunkt der Phase verschiebbaren diskreten Impulsen von entgegengesetzten Vorzeichen einzustellen ist. Im übrigen kann der Verlauf der Spannungs- und Stromkurve in der Phasenspule b in allen drei Fällen als identisch betrachtet werden.

Dies vorausgeschickt wollen wir uns mit der Analogabbildung des mit Transduktor geregelten Ferraris-Motors befassen, und hiezu sollen vorerst die Gleichungen des Motors angeschrieben werden.

III. Gleichungen des Zweiphasen-Servomotors

Bei der Anschreibung der Gleichungen wird das mit dem Ständer verbundene Koordinatensystem benutzt, und es sei bemerkt, daß — um die Gleichungsschreibung einfacher zu gestalten — ein Servomotor mit symmetrischer Zweiphasenwicklung untersucht wird. In den praktischen Fällen wird jedoch die Windungszahl der über Kondensator gespeisten Phasenwicklung zwecks Erreichung günstigerer Verhältnisse öfters abweichend von jener der steuernden Phase gewählt. Die vektoriellen Formen der Gleichungen sind:

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt}, \quad (1)$$

$$\bar{u}_r = 0 = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} - j\omega \bar{\psi}_r, \quad (2)$$

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} + M_m = \frac{3}{2} \text{Im} (\bar{\psi}_s^* \bar{i}_s). \quad (3)$$

In den Gleichungen (1), (2) und (3) ist, da es sich um eine zweiphasige Maschine handelt:

$$\bar{u}_s = u_a + j u_b, \quad \bar{i}_s = i_a + j i_b, \quad \bar{\psi}_s = \psi_a + j \psi_b; \quad (4)$$

$$\bar{i}_r = i_{ra} + j i_{rb}, \quad \bar{\psi}_r = \psi_{ra} + j \psi_{rb}. \quad (5)$$

Nach Trennung der reellen und imaginären Teile der Gleichungen (1), (2) und (3) erhält man — unter Anwendung der Gleichungen (4) und (5) — die folgenden Beziehungen:

$$u_a = i_a R_s + \frac{d\psi_a}{dt}, \quad (6)$$

$$u_b = i_b R_s + \frac{d\psi_b}{dt}, \quad (7)$$

$$0 = i_{ra} R_r + \frac{d\psi_{ra}}{dt} + \omega \psi_{rb}, \quad (8)$$

$$0 = i_{rb} R_r + \frac{d\psi_{rb}}{dt} - \omega \psi_{ra}, \quad (9)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M_m}{\Theta} + \frac{3}{2\Theta} (\psi_a i_b - \psi_b i_a). \quad (10)$$

Nachdem in der Phase *a* zwischen den Motorklemmen und dem Netz mit Sinusspannung sich der Kondensator von Kapazität *C* befindet, ist die Gleichung (6) in folgender Weise zu ergänzen:

$$u = U \sin \omega_1 t = \frac{1}{C} \int i_a dt + i_a R_s + \frac{d\psi_a}{dt}. \quad (6')$$

Es sei bemerkt, daß der Verlauf der Spannung u_b mit der im Bild 3 dargestellten Spannungskurve übereinstimmt, bzw. ihre Form sich vom Steuerungswinkel α abhängig ändern wird. Zum Zwecke der Analogprogrammierung sollen die Flüsse mit Hilfe der Ströme und Induktivitäten ausgedrückt werden, wonach sich folgende Spannungsgleichungen ergeben:

$$U \sin \omega_1 t = \frac{1}{C} \int i_a dt + i_a R_s + L_{s\sigma} \frac{di_a}{dt} + L_m \frac{di_{ma}}{dt}; \quad (11)$$

$$u_b = i_b R_s + L_{s\sigma} \frac{di_b}{dt} + L_m \frac{di_{mb}}{dt}; \quad (12)$$

$$0 = i_{ra} R_r + L_{r\sigma} \frac{di_{ra}}{dt} + L_m \frac{di_{ma}}{dt} + \omega(i_b L_m + i_{rb} L_r); \quad (13)$$

$$0 = i_{rb} R_r + L_{r\sigma} \frac{di_{rb}}{dt} + L_m \frac{di_{mb}}{dt} - \omega(i_a L_m + i_{ra} L_r), \quad (14)$$

wo i_{ma} und i_{mb} die Momentanwerte des Magnetisierungsstromes der Phase a bzw. b , $L_{s\sigma}$ und $L_{r\sigma}$ die Streuinduktivität des Ständers bzw. Läufers, L_m die Induktivität des Hauptfeldes, und $L_r = L_m + L_{r\sigma}$ die Induktivität des Läufers bedeuten.

Schließlich ergibt sich die zur Programmierung unmittelbar geeignete Form der Gleichungen zu:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_{s\sigma}} \left[U \sin \omega_1 t - \frac{1}{C} \int i_a dt - i_a R_s - L_m \frac{di_{ma}}{dt} \right], \quad (15)$$

$$\frac{di_b}{dt} = \frac{1}{L_{s\sigma}} \left[u_b - i_b R_s - L_m \frac{di_{mb}}{dt} \right], \quad (16)$$

$$\frac{di_{ra}}{dt} = \frac{1}{L_{r\sigma}} \left[-i_{ra} R_r - L_m \frac{di_{ma}}{dt} - \omega(i_b L_m + i_{rb} L_r) \right], \quad (17)$$

$$\frac{di_{rb}}{dt} = \frac{1}{L_{r\sigma}} \left[-i_{rb} R_r - L_m \frac{di_{mb}}{dt} + \omega(i_a L_m + i_{ra} L_r) \right], \quad (18)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M_m}{\Theta} + \frac{3}{2} \frac{L_m}{\Theta} (i_{ra} i_b - i_{rb} i_a). \quad (19)$$

IV. Programmierung des Analogrechners

Bei der Programmierung des Analogrechners sei zunächst vorausgesetzt, daß die Spannung u_b , die qualitativ im Bild 3 dargestellt wurde, genau simuliert werden konnte. Unter dieser Annahme ist das Strukturbild des genauen Analogprogrammes des mit Transduktor geregelten zweiphasigen Ferraris-Motors im Bild 6 gezeigt. Hieraus ist ersichtlich, daß außer den Anfangswerten (im Bild 6 nicht angedeutet) in den Analogrechner auch noch die Spannung $u = U \sin \omega_1 t$ sowie u_b , deren Simulierung im nächstfolgenden Abschnitt behandelt wird, einzuführen sind. Außerdem soll noch die dem mechanischen

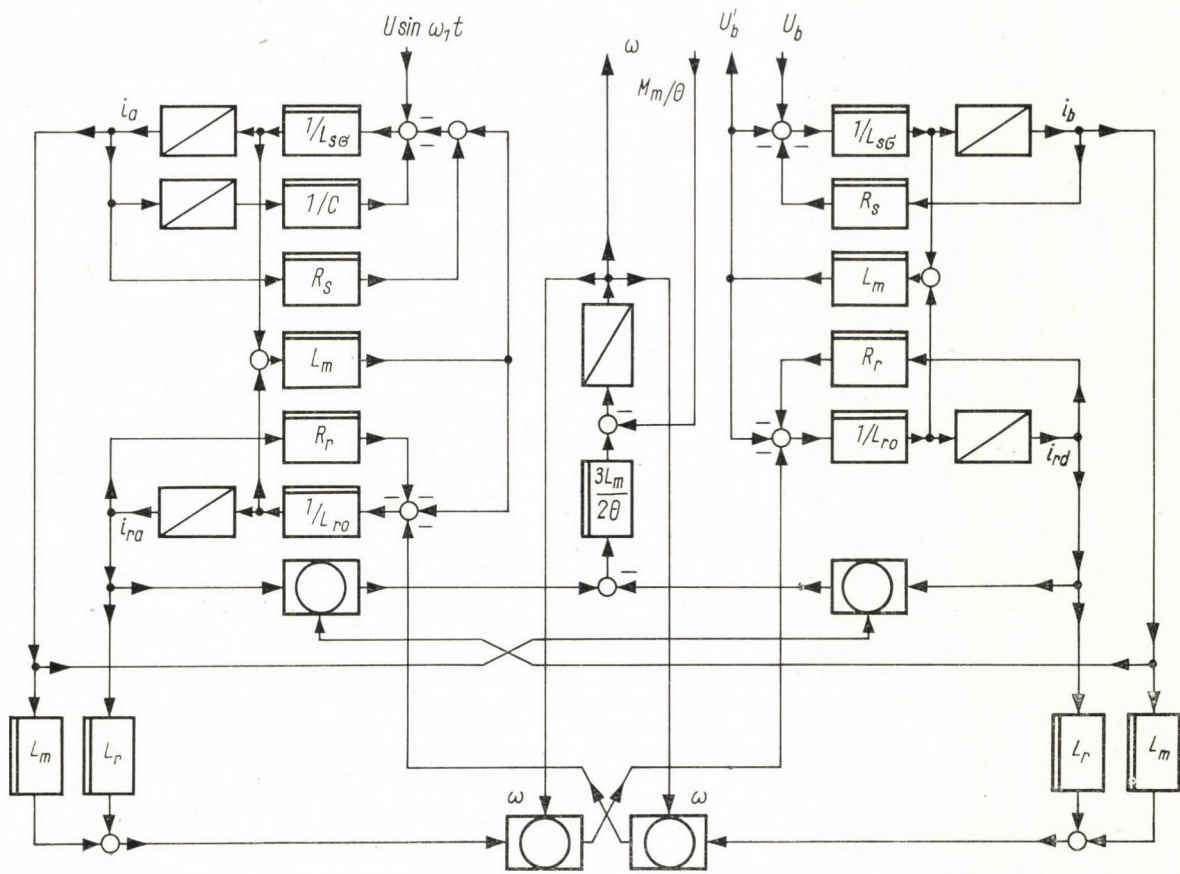


Bild 6

Gegenmoment M_m/Θ proportionale Größe in die Rechenmaschine eingeführt werden. Die Rechenmaschine liefert außer der Winkelgeschwindigkeit ω die zur Simulation der Spannung u_b nötige (siehe Abschnitt V) induzierte Spannung $u'_b = L_m di_{mb}/dt$ und den Strom i_b .

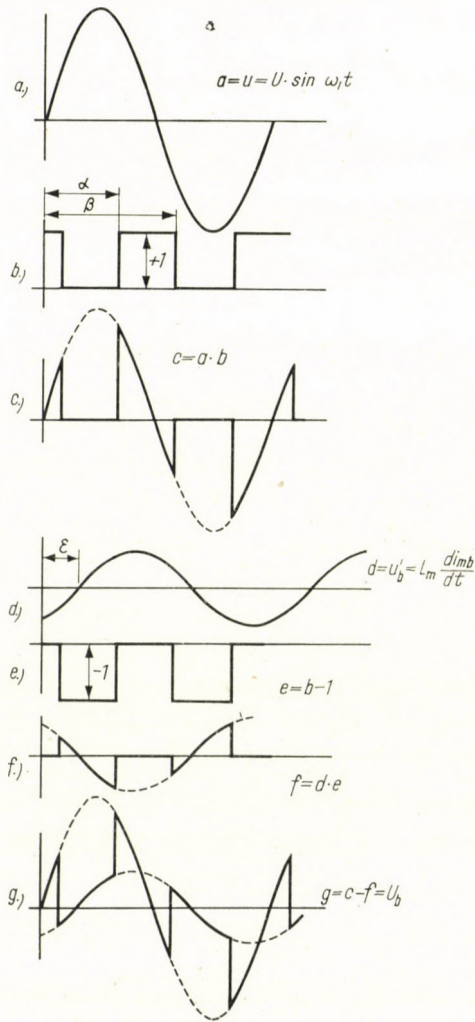


Bild 7

V. Simulation der Spannung u_b

Wie im Bild 3 gezeigt wurde, kann der Spannungsablauf von u_b je Halbwelle in zwei, in der Zeit aufeinanderfolgende Perioden geteilt werden, und zwar:

- Der Transduktor (Thyratron, Thyristor) ist im Leitungszustand.

Die Spannung u_b stimmt in dieser Strecke mit der Netzspannung überein. Diese sich wiederholende Leitungsperiode wird in der Weise simuliert, daß die Sinuswelle der Netzspannung mit einer Rechteckwelle von Amplitude 1 multipliziert wird.

Die Verhältnisse sind im Bild 7 dargestellt. Bild 7a zeigt die Sinuswelle des Netzes. Im Bild 7b ist eine Rechteckwelle dargestellt, deren sprunghafte Stirn beim Zündwinkel α eintritt (siehe auch Bild 3) und deren sprunghafter Rücken durch den Zeitpunkt β je Periode bestimmt ist (die Stromstärke erreicht den Nullwert). Bild 7c zeigt das Produkt der Welle a und der Rechteckwelle b , das eine dem Bild 2 entsprechende Kurvenform gibt.

b) Der Transduktor hat den Stromkreis der Phase b unterbrochen.

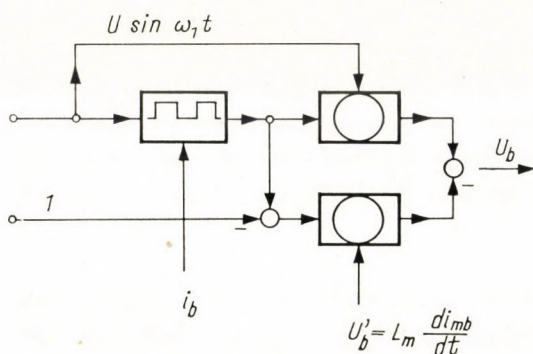


Bild 8

Nun erscheint an den Klemmen der Phasenspule b die zum Zustand $i_b = 0$ gehörende Leerlaufspannung, deren Wert aus Gleichung (12) ($i_b = 0$; $di_b/dt = 0$)

$$u'_b = L_m \frac{di_{mb}}{dt} = L_m \frac{di_{rb}}{dt} \quad (12')$$

ist. Diese Spannung kann aus der Anlogschaltung laut Bild 6 erhalten werden. Jedoch ist diese Spannung nur in den Unterbrechungsstrecken des Transduktors vorhanden, weshalb der Wert der Spannung u'_b mit einer Rechteckwelle zu multiplizieren ist, deren Form mit der im Bild 7b dargestellten Rechteckwelle genau übereinstimmt, nur im Verhältnis zu dieser in Richtung der Ordinate um die Einheit verschoben ist (siehe Bild 7e). Die Strecken von Einheitswert dieser Rechteckwelle entsprechen den Nullwertstrecken der Rechteckwelle laut Bild 7b und umgekehrt. Zwecks leichter Darstellung wurde auch hier die Spannung u'_b durch eine Sinuswelle ersetzt (siehe auch Bild 3) und im Verhältnis zur Netzspannung um die Zeit ε verspätet gezeichnet (Bild 7d). Bild 7f zeigt das Produkt aus der Spannung u'_b und der Recht-

eckwelle laut Bild 7e, das also den Negativwert der Spannung der Leerlaufstrecke liefert. Im Bild 7g ist die Differenz der Spannung der Leitungstrecke laut Bild 7c und jener der Leerlaufstrecke laut Bild 7f aufgezeichnet, die den Wert der in Phase b der Maschine tatsächlich auftretenden Spannung u_b darstellt.

Der die Spannung u_b erzeugende Analogsimulator ist im Bild 8 dargestellt. Die angewandten Multiplizierglieder sind am zweckmäßigsten Hallgeneratoren, deren magnetische Eingänge an das Netz mit Sinuswelle bzw. an die Spannung u'_b gelegt werden. Die so erzeugte Spannung u_b ist in die Analogschaltung laut Bild 6 einzuführen.

Im Rechteckwellengenerator ist die Stirn der Welle vom Nullübergang der Netzspannung gesteuert (bzw. im Verhältnis zu diesem um die Zeit a in Phase verschoben), wogegen der Wellenrücken vom am Ende der Leitungsperiode eintretenden Nullübergang des Stromes i_b gesteuert wird. Für den Rechteckwellengenerator entspricht am besten die bistabile Multivibrator-Schaltung (flip-flop). Der eine Eingang des bistabilen Multivibrators erhält die Impulse vom Impulstransformator, der vom an das Netz geschalteten Phasenschieber gespeist wird, so daß a nach Belieben eingestellt werden kann, wogegen das Ausschaltsignal von der Spannung gesteuert wird, die dem ersten Differentialquotienten der mit dem in der Analogschaltung erscheinenden Strom i_b verhältnismäßigen Spannung proportional ist und sich beim Nullübergang des Stromes sprunghaft ändert.

Die oben beschriebene genaue Analogabbildung des mit einem Transduktor geregelten zweiphasigen Asynchron-Servomotors ermöglicht es, die transienten (und stationären) Betriebsverhältnisse solcher Motoren am Analogrechner unter Berücksichtigung sämtlicher Faktoren zu untersuchen. Es ist selbstverständlich, daß wenn man die auf kleine Änderungen erfolgende genaue Regelung zu untersuchen wünscht, die aus den einschlägigen Literaturquellen bekannten Abänderungen in der Schaltung des Analogrechners durchzuführen sind.

CORRECT ANALOGOUS REPRESENTATION OF AN ASYNCHRONOUS SERVO-MOTOR REGULATED BY CONTROLLED ELEMENTS

K. P. KOVÁCS

SUMMARY

Two-phase asynchronous servomotors are mostly controlled by connecting one phase winding of the motor through a capacitor to a constant-voltage supply and inserting a self-saturating transducer into the circuit of the second (control) phase winding. The self-saturating transducer creates the same operating conditions as can be obtained with a thyatron connected in counter-parallel or with a 4-layer silicone triode (thyristor) connected in the same way.

The paper presents the correct analog representation of the servo-motor controlled in this way, where the voltage conditions created by the transducer (thyatron, thyristor) are simulated with the aid of a square wave generator, also by an analogous method.

REPRÉSENTATION ANALOGUE CORRECTE D'UN SERVO-MOTEUR ASYNCHRONE RÉGLÉ PAR DES ÉLÉMENTS CONTRÔLÉS

K. P. KOVÁCS

RÉSUMÉ

Pour régler les servo-moteurs asynchrones diphasés, on procède généralement en branchant un enroulement de phase du moteur sur un réseau à tension constante à travers un condensateur, et en insérant dans l'autre enroulement (régulateur) un transducteur auto-saturant. Celui-ci crée les conditions de service que l'on peut obtenir avec un thyatron, ou une triode au silicium à 4 couches (thyristor) branchés en contreparallèle.

L'étude offre la représentation analogue correcte du servo-moteur réglé de cette façon, les conditions de tension produites par le transducteur (thyatron, thyristor) étant simulées par une méthode analogue, au moyen d'un générateur d'ondes rectangulaires.

ТОЧНЫЙ МЕТОД АНАЛОГОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АСИНХРОННОГО СЕРВОДВИГАТЕЛЯ, РЕГУЛИРУЕМОГО С ПОМОЩЬЮ УПРАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

К. П. КОВАЧ

РЕЗЮМЕ

В большинстве случаев регулирование двухфазных асинхронных серводвигателей производится так, что одну фазовую обмотку двигателя через конденсатор подключают к сети постоянного напряжения, а к цепи другой (управляющей) фазовой обмотки подключают самонасыщающийся трансдуктор. Этот самонасыщающийся трансдуктор создаёт точно такой же рабочий режим, какой достигается с помощью тиратнов или четырехслойных триодов (тиристоров), работающих в пуш-пульном режиме.

В этой работе даётся точное аналоговое моделирование регулирования регулируемого таким образом серводвигателя, причём режимы напряжений, созданные трансдуктором (тиратроном, тиристором), симулируются также аналоговым методом с помощью генератора прямоугольных волн.

NEW METHOD FOR MEASURING GAS FLOW SPEED BY MEANS OF RADIO-ISOTOPES

J. FODOR

INSTITUTE FOR THE DEVELOPMENT OF VEHICLES, BUDAPEST

[Manuscript received September 27, 1961]

A method is developed for measuring relatively great speeds of gas flow by means of radioactive isotopes. By this method, speed can be measured without sampling. To this end, the isotope $\text{CH}_3^{131}\text{I}$ is applied. By the use of this isotope which has a specific radioactivity of 1~5 mc/ml, gas flow speeds within the range 3.5 to 9.3 m/sec could be measured. The automatized type of this measuring equipment is suitable for the measurement of great speed for a not too long conduct.

I. Introduction

In many cases, gas flow speed measurements (completed with the other parameters of the gas) are practically applied in order to know how heat could be used during the actual technological process. E.g. in analysing the open-hearth process, gas-flow speed in the air duct and in the heating duct can be measured, and on the basis of these results air and gas consumption can be calculated. To this purpose O. VOICE and his collaborators [1] applied radon, in such a way that the radon flask was broken into the gas flow and then by using a special sampling device, gas samples were taken on the spot of examination. Active carbon was used to absorb the radon content of the sample and the activity of the decomposed product was measured on the carbon. This served first to calculate the radon content of the samples, and from the content values of samples taken at various times, the gas flow speed could be calculated. As sampling was slow, and encountered difficulties, by this method acceptable accuracy of measurements could only be reached in the range of low speeds or having long enough flow sections. According to the improved radon method of F. F. KOLESANOV [2] who measured the radioactivity of the samples by means of ionization chambers, a great accuracy could be obtained.

II. Development of the new method

The task in developing this method is, to measure large flow speed by using radioisotopes without relying on sampling.

During research work, the following problems arose:

1. A special radioactive gas had to be found that would be appropriate for recording the speed of the fluid flowing in a conduct or pipe of a rather small wall thickness by means of a scintillation counter, without sampling;

2. an automatic recording device had to be constructed, that would be suitable for securing a simultaneous start of the radioactive substance with time measuring instruments. In case of great flow speed values, when response time of the person who is testing takes too long, and so is likely to cause errors, the locking out of the activity measuring instruments should be carried out automatically, and the same necessity applies to time measuring.

1. *Finding a gas of suitable radioactivity*

There is no knowledge of any gaseous isotope radiating γ rays, thus it was self-evident to rely on ^{131}I either in an organic compound or as an element. Methyl iodide is an organic compound of iodine, the one which has lowest boiling point at 42.5°C . When choosing between iodine and methyl iodide, it was essential to take into consideration the really slow evaporating speed and the most simple way when handling methyl iodide. Furthermore methyl iodide is suitable even at a temperature below the boiling point, only if an effective method of spraying is fulfilled. Containing ^{131}I , methyl iodide radiates γ rays, penetrating the pipe wall and be measured outside the pipe, that cannot be done with radon. Again radon can be considered as a neutral (inert) gas, while methyl iodide does not belong to this group.

2. *Design of an automatic recorder device*

For the design of the automatic recorder device, the automatic counter EKCO (Type No. 630 D) was chosen as a basis, combined with an impulse-generator designed to feed the time circuit of the counter. With 6000 time-signals during 100 seconds, time could be measured as accurately as $1/60$ sec. The closing point of the circuit that actuates the magnetic closer to disintegrate the ampoule, and the starting point of the time-circuit coincides with the start of the counter. A plumbum-shaded scintillation counter adequate to carry out measurements outside the pipe served as the measuring device of the automatic recorder equipment.

III. Application of the new method

1. *Gas flow speed measurement in the air duct of the open-hearth furnace*

The new method has been put to test first in the Iron & Metalworks Csepel, where experiments were carried out on a 20 m section of the air duct of an open-hearth furnace.

a) *Preparation of the compound-specimen.* For measuring purposes a specimen of $\text{CH}_3^{131}\text{I}$ had been prepared from K^{131}I in the following way: panning of K^{131}I , taken up with alcohol, boiling together with CH_3I in a refrigeration cooler, distilling, repeatedly boiling and again distilling. The exchange-reaction went off well, according to particulars known from the literature [3]; after a repeated process as the described one, more than 70% of ^{131}I was taken up by the compound $\text{CH}_3^{131}\text{I}$. — A specified amount of this compound was put into

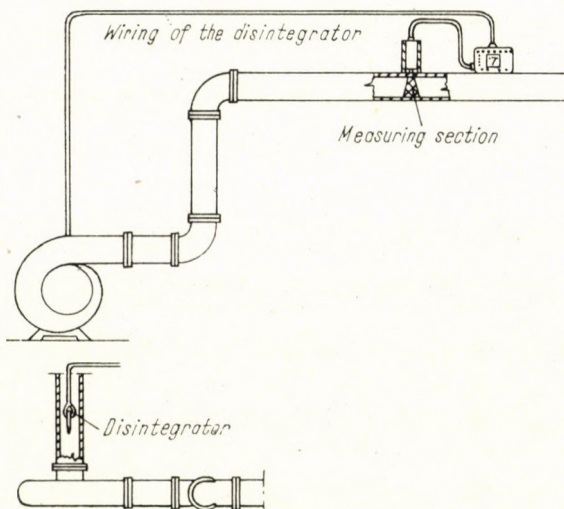


Fig. 1

ampoules, each ampoule containing 8 mc having a specific radioactivity of 1 mc/ml. For carrying out 10 measurements the utilized ^{131}I quantity amounted to 80 mc.

b) *Mixing the compound-specimen into the gas flow.* For this purpose a suction-fan was provided. In a special pipenipple attached to the suction-side of the fan, the magnetic-switch of the ampoule-disintegrator was placed. In this way the fan proved to be satisfactory for a quick and thorough mixing operation.

c) *The new way of measuring:* In Fig. 1 the measuring scheme is illustrated. The time-measuring instrument was stopped when 1000 radioactive impulses had been counted. In time-measuring the following 10 results were obtained: 120 — 125 — 120 — 124 — 122 — 122 — 124 — 125 — 125 — 124, the average of which amounts to 2.15 sec, that can be considered as the most probable value of the time necessary for the radioactive particles to run the length of 20 m; this represents an average speed of $v = 9.3$ m/sec. Notably the radio-active background amounted to 500 impulses per 100 seconds, i.e. for 6000 time units.

d) *The sources of measuring errors may be:* The disintegrator needs some time for breaking the ampoule; it can be assumed that this retardation causes an error far less than the error inherent to the measurement of activity.

The chosen measuring scheme involves the possibility that — considering the rather great potential activity distance of the photons γ — in spite of the screening, signals are always arriving to the scintillation counter. This error acts in reverse to that caused by retardation.

Errors of activity measuring and time measuring, respectively: (Time was measured by electronic method). Apparently the error of activity measuring is the greatest. Therefore, the error of speed measuring depends on the measurement of activity.

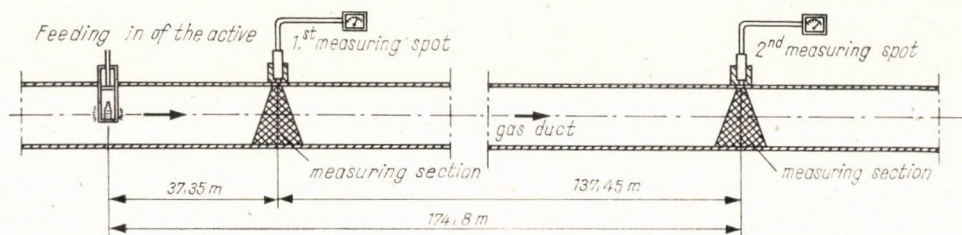


Fig. 2

2. Gas flow measuring in a gas conduct

This new method was applied on the gas conduct in the Iron & Steel Work "Dunai Vasmű" (Hungary), — for gas flow speed measurements. Compared to the air conduct of the open-hearth furnace, the speed is here slower and it was possible to choose a longer testing length than in the above mentioned example. Consequently, the method applied was also different. Lower speed and longer route were considered as factors that proved to be satisfactory even at a state below boiling point. Compared with the former example, when in the open-hearth furnace the measured air had a temperature of 45 °C, in the above mentioned Ironworks the temperature of the measured gas was 22° C only. If the methyl iodide in this state would show retardation relative to the gas flow — either because of evaporation troubles or because of specific weight variations — the three average values, namely, the one on the first measuring place, the other one on the second measuring place, and finally for the section from the 1st to the 2nd place would show considerable deviations.

As can be seen from Table I, which contains the average speed values, the deviations may be considered as being within the possible range of errors. In other words, the applied methyl iodide is suitable for measurements below boiling point (in this case at a temperature 20 °C lower), i.e. no retardation could be observed that should be ascribed to differences of specific weight.

Table I
Gas flow speed measuring results

Number of measurement	Average speed values, obtained		
	at the 1 st measuring place	for the section from the 1 st to the 2 nd measuring place	at the 2 nd measuring place
1.	3.43	3.67	3.64
2.	3.66	3.63	3.64
3.	3.69	3.74	3.72
4.	3.84	3.69	3.72

IV. Evaluation of results obtained by the new method

The maximum deviation of measurements carried out on the air duct of the open-hearth furnace amounts to 5%, this being considered as satisfactory. The effect of the ventilator resulted in a uniform mixing of the active compound into the gas flow; the gas quantity calculated from the measured speed values, was in good accordance with the rated efficiency of the ventilator. The transition of the compound through the measuring place was momentary.

Considering the measurements given in Table I, the following deviation values can be stated:

Deviation of values at the 1st measuring place 12%.

Deviation of values on the section between the two measuring places 3%.

Deviation of the values at the 2nd measuring place 3%.

The greater deviation at the 1st measuring place may be ascribed to a non-uniform operation of the ampoule-breaker device and probably to the section being (from the ampoule to the 1st measuring place) not enough for a complete mixing.

Consequently one may state that this radio-isotopic method is suitable for gas flow measuring without sampling. At a temperature above boiling point of the applied compound, which was thoroughly mixed in the speed range between 3 and 10 m/sec, effected by means of automatized measuring devices operating on a flow length of 20 m, gave results with a maximum error of 5%. Probably, on a greater flow length, the same accuracy could be maintained. At greater speeds, presumably the limit of possible measurements is determined by the resolving power of the counter and by the accuracy of time measuring.

At a lower speed range (abt. 3 m/sec) and at a temperature below boiling point of the applied compound $\text{CH}_3^{131}\text{I}$ it is essential to carry out a thorough mixing operation and to choose a longer flow section, in order to reduce measuring errors.

V. Problems on protective equipments

Measures suitable to protect health are: Routine of operating — which is advisable to secure a dependable measuring activity — to be carried out with inactive accessories, effective shading of the measuring apparatuses. During the measurements, care must be taken that active agents should not be spread beyond the necessary control space and that the chimney carrying the gas should have the necessary height in order to protect the surroundings.

Another problem is to eliminate the danger of contamination through incorporation. In carrying out series of measurements, a specified amount of active compound has to be placed repeatedly into the disintegrator for every single measurement. The minimum quantity of the active methyl iodide sticking to the outer surface of the instrument is, of course, a source of contamination danger. During the measurements carried out on the suction pipe of the open-hearth air-duct there was no case of incorporation apparent. During other measurements carried out on the pressure pipe of the same duct, an incorporation of 1 mc could be observed. A secured position of the operator when making similar measurements, can be ensured only by using an oxygen apparatus.

REFERENCES

1. VOICE, O.—BELL, E.—GLADHILL, P.: *Iron and Steel* **177** (1954), 423—427.
2. Колесанов, Ф. Ф.: Движение газов через слой кисковых материалов. Metallurgizdat 1951.
3. WAHL, A. C.—SOMMER, M. A.: *Radioactivity applied to chemistry*. John Wiley Sons Inc. New York and Chapman Hall Ltd. London 1951.

NEUE METHODE ZUR MESSUNG VON GASSTRÖMUNGSGESCHWINDIGKEITEN MIT HILFE RADIOAKTIVER ISOTOPE

J. FODOR

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser beschreibt eine neue Methode zur Messung von Gasströmungsgeschwindigkeiten mit Hilfe eines radioaktiven Isotops, ohne die Notwendigkeit, vom Gas Probe zu nehmen. Hierzu wurde radioaktives Methyljodid $\text{CH}_3^{131}\text{I}$ von einer Aktivität zu 1 ~ 5 mc/ml verwendet, und es wurden Geschwindigkeiten von 3,5 und 9,3 m/s gemessen. Für höhere Geschwindigkeitswerte bei ziemlich kurzem Strömungsweg wurde die Apparatur automatisiert.

NOUVELLE MÉTHODE POUR MESURER LA VITESSE D'UN COURANT
DE GAZ À L'AIDE D'ISOTOPES RADIOACTIFS

J. FODOR

RÉSUMÉ

L'auteur a élaboré une nouvelle méthode pour mesurer des vitesses relativement grandes de courants de gaz à l'aide d'isotopes radioactifs. La méthode préconisée permet de mesurer la vitesse du gaz sans prélèvement d'échantillons. On utilise du $\text{CH}_3^{131}\text{I}$. Avec des isotopes ayant une activité spécifique de 1—5 mc/ml, on a mesuré des vitesses de 3,5 et de 9,3 m/sec. Pour la mesure des grandes vitesses à faible distance, l'appareil de mesure a été rendu automatique.

НОВЫЙ РАДИОИЗОТОПНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКОВ
ГАЗОВ

И. ФОДОР

РЕЗЮМЕ

Автором разработан новый метод измерения относительно высоких скоростей движения газов, используя радиоизотопы. Метод позволяет измерять скорость движения газов без отбора проб.

Метод основан на использовании движения газов мС/мл. Используя изотоп с удельной активностью 1—5 $\text{CH}_3^{131}\text{I}$, значение замеренных скоростей газов было в пределах 3,5 м/сек и 9,3 м/сек. Для измерения высоких скоростей движения потоков на коротких участках, измерительное устройство автоматизировано.

EINE WEITERFÜHRUNG UND ALLGEMEIN GÜLTIGE LÖSUNG DER KÁRMÁNSCHEN THEORIE DES WALZENS*

BERICHT NR. 27 DER METALLURGISCHEN ARBEITSGEMEINSCHAFT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Prof. Dr. A. GELEJI

ORD. MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 10. Juli 1962]

TH. V. KÁRMÁN stellte seine Walztheorie und damit eine Differentialgleichung für da Walzen im Jahre 1925 auf. Die Lösung dieser Differentialgleichung wurde unter vereinfachenden Voraussetzungen von mehreren Wissenschaftlern durchgeführt. Die verschiedenen Lösungen führten aber nur zu qualitativen Ergebnissen, d. h. die errechneten spezifischen Walzdrücke fielen zu klein aus. Das kommt daher, daß die Kármánsche Theorie nur einen Teil des Walzvorganges in Rechnung zieht. Der Verfasser weist in diesem Aufsatz auf diesen Umstand hin und ergänzt die Kármánsche Vorstellung in der Weise, daß nach seiner Auffassung das Walzgut im Walzspalt nicht nur zusammengedrückt, sondern gleichzeitig auch durch den Walzspalt mit einer von der Walzenumfangsgeschwindigkeit verschiedenen Geschwindigkeit durchgedrückt wird, wobei sich die beiden Vorgänge parallel, aber von einander unabhängig abspielen. Bei dieser Vorstellung gibt der Verfasser für die Ermittlung bzw. Berechnung der Funktion des spezifischen Walzdruckes (Umformungswiderstandes) sowohl für das Warm-, wie für das Kaltwalzen eine Lösung der Differentialgleichung des Walzens.

Die Kármánsche Differentialgleichung des Walzens wurde im Jahre 1925 ([1], S. 139—141) aufgestellt. Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung hat als erster K. HUBER ([2], S. 454—465) durchgeführt. Der dabei erhaltene Ausdruck für den Walzdruck ist sehr unhandlich und ist deshalb für die Berechnung des Walzdruckes nicht geeignet. Für diese Berechnung wurden brauchbare Lösungen mittels gewisser vereinfachenden Voraussetzungen von E. SIEBEL ([3], S. 1295—1298), A. NÁDAI ([4], S. 54—62), A. I. ZELIKOW ([5], S. 61—76), sowie eine graphische Lösung von W. TRINKS ([6], S. 617—619) ausgearbeitet. Bei diesen Lösungen wird vorausgesetzt, daß sich die Formänderungsfestigkeit (k_f) im Walzspalt nicht ändert, sondern konstant bleibt, d. h. diese Lösungen gelten nur für das Warmwalzen. A. I. ZELIKOW ([7], S. 139—142) gibt eine Lösung der Kármánschen Differentialgleichung für das Kaltwalzen, unter stark vereinfachenden Voraussetzungen. Aber auch diese für das Kaltwalzen geeignete Lösung kann nicht als eine allgemeingültige aufgefaßt werden. Dasselbe gilt auch für den Aufsatz von A. TROOST und K. HÖLLING ([8], S. 95—100).

Hier will ich darauf hinweisen, daß die Kármánsche Differentialgleichung, bzw. alle Lösungen dieser Differentialgleichung nur eine qualitative Lösung des Problems geben, die errechneten Werte sind für praktische Zwecke kaum

* Erweiterte Fassung des im *Archiv f. d. Eisenhüttenwesen* 39 (1963), 565—570. erschienenen Artikels.

verwendbar, da die errechneten spezifischen Flächendrücke (Verformungswiderstände) zu klein ausfallen. Nachstehend möchte ich auf die Ursache dieses Umstandes hinweisen.

Die Kármánsche Differentialgleichung wird auf Grund der folgenden Vorstellung abgeleitet (Bild 1).

Das Volumenelement $abcd$ des Walzstabes wird innerhalb der Formänderungszone (im Walzspalt) von den beiden Walzen und von zwei senkrecht

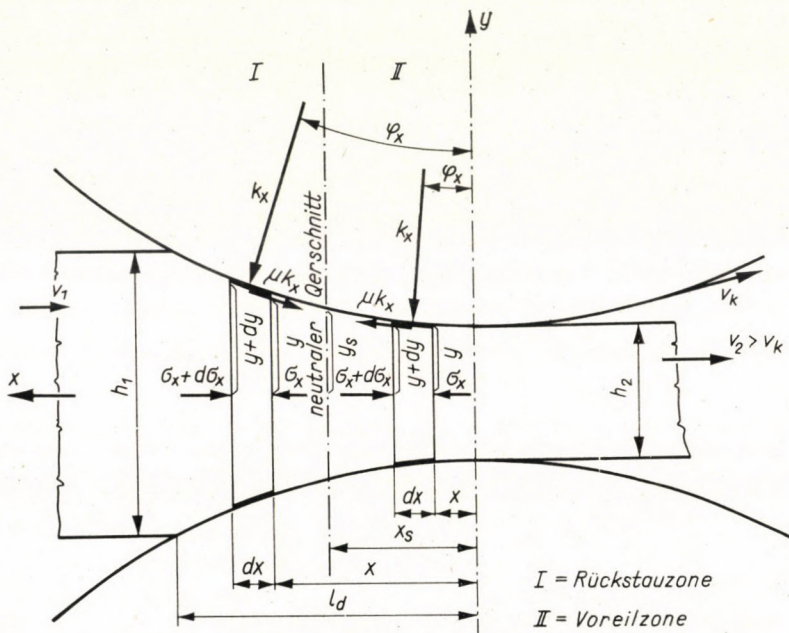


Bild 1. Am Volumenelement des Walzstabes angreifende Kräfte im Walzspalt

zur Walzrichtung liegenden Ebenen begrenzt, die voneinander um den unendlich kleinen Betrag dx entfernt sind. Projiziert man sämtliche daran angreifenden Kräfte auf die Walzrichtung, so wirkt auf die Fläche bd von rechts her die Kraft

$$2 \cdot \sigma_x \cdot y,$$

σ_x ist die in der Walzrichtung entstehende mittlere Normalspannung im Querschnitt bd ; $y = h_x/2$ halbe Dicke des Walzgutes an dieser Stelle.

Die Breite des Walzstabes wird gleich 1 gesetzt. Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung wird zunächst die Breitung des Walzgutes vernachlässigt, d.h. die folgende Rechnung gilt unter der Voraussetzung, daß das Verhältnis von Breite zu Dicke des Walzstabes groß ist.

Auf die Fläche ac wirkt der Richtung von σ_x entgegen die Normalspannung $(\sigma_x + d\sigma_x)$. Die halbe Dicke des Walzstabes an dieser Stelle beträgt

($y + dy$). Auf das betrachtete Volumenelement des Walzgutes wirkt von links nach rechts die Kraft:

$$2 \cdot (\sigma_x + d\sigma_x) \cdot (y + dy).$$

Befindet sich das Volumenelement vor dem neutralen Querschnitt, d. h. innerhalb der sog. »Rückstauzone«, so bewegt es sich langsamer als der Walzenumfang. Innerhalb dieser Zone gleitet die Oberfläche des Walzgutes auf der Walzenoberfläche entgegen der Drehrichtung der Walzen. Von den Walzen wirkt somit auf das Volumenelement des Werkstoffs in Richtung der Abszissenachse die Kraft:

$$2 \cdot \left(k_x \cdot \frac{dx}{\cos \varphi_x} \cdot \sin \varphi_x - k_x \cdot \mu \cdot \frac{dx}{\cos \varphi_x} \cdot \cos \varphi_x \right),$$

k_x spezifischer Druck zwischen Walze und Walzgut im Walzspalt;
 φ_x zum Bogenelement ab gehöriger Winkel, von der Mittelebene der Walzen an gerechnet;
 μ Reibungszahl.

Befindet sich das Volumenelement hinter dem neutralen Querschnitt d. h. in der »Voreilzone«, so bewegt es sich schneller als der Walzenumfang. Innerhalb dieser Zone gleitet die Oberfläche des Walzgutes in der Drehrichtung der Walzen schneller als die Walzenoberfläche. Von den Walzen wirkt somit auf das Volumenelement des Walzgutes in Richtung der Abszissenachse die Kraft:

$$2 \cdot \left(k_x \cdot \frac{dx}{\cos \varphi_x} \cdot \sin \varphi_x + \mu \cdot k_x \cdot \frac{dx}{\cos \varphi_x} \cdot \cos \varphi_x \right).$$

Die Gleichgewichtsbedingung für das Volumenelement $abcd$ in waagerechter Richtung lautet dann:

$$2 \cdot (\sigma_x + d\sigma_x) \cdot (y + dy) - 2 \cdot \sigma_x \cdot y - 2 \cdot k_x \cdot \tan \varphi_x \cdot dx \pm 2 \cdot k_x \cdot \mu \cdot dx = 0. \quad (1)$$

Da x und y die Koordinaten des Bogenelements ab sind, kann man für $\tan \varphi_x$ setzen:

$$\tan \varphi_x = \frac{dy}{dx}.$$

Wenn man diesen Ausdruck in die Gl. (1) einsetzt und die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigt, erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{k_x - \sigma_x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \pm \frac{\mu}{y} \cdot k_x = 0. \quad (2)$$

Wird die Fließbedingung folgenderweise aufgeschrieben:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k_x - \sigma_x = 1,15 \cdot k_f = k_0 = \text{konstant}, \quad (3)$$

pann kann Gl. (2) nach KÁRMÁN auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{dk_x}{dx} - \frac{k_0}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \pm \frac{\mu}{y} \cdot k_x = 0. \quad (4)$$

Diese Differentialgleichung wurde auf k_x von mehreren Wissenschaftlern unter vereinfachenden Voraussetzungen gelöst [1—8], doch führen diese Lösungen nur zu ungenügenden Resultaten.

Woher kommt das? Nach meiner Auffassung stammt die Unzulänglichkeit der Lösungen des Problems daher, daß die Komplexität des Walzprozesses bei der Berechnung des Verformungswiderstandes (k_x) stets außer acht gelassen wird ([9], S. 308—331). Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsgleichung

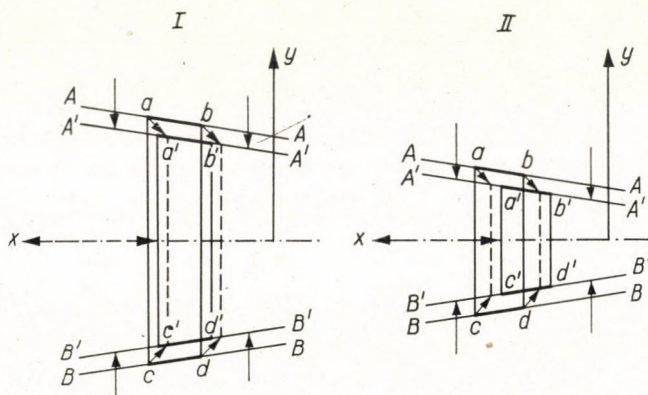


Bild 2. I. Bewegung des Volumenelements des Walzgutes während der Umformung in der Rückstauzone; II. Bewegung des Volumenelements des Walzgutes während der Umformung in der Voreilzone

(1) wird nämlich nur ein Teil des Umformungsvorganges erfaßt, obwohl der Walzprozeß im Walzspalt gleichzeitig aus einer Zusammendrückung sämtlicher Volumenelemente des Walzgutes in Richtung der y -Achse und aus einer Vorwärtsschiebung derselben in Richtung der x -Achse besteht (Bild 2), wobei die gedrückten Walzgutflächen an den Walzdruckflächen rutschen. Die beiden Vorgänge spielen sich vom Standpunkt des Kräftegleichgewichts der Volumenelemente voneinander unabhängig ab ([9], S. 308).

Bei den nachstehenden Betrachtungen darf folgendes nicht vergessen werden: wenn man voraussetzt, daß im Walzspalt an den Druckflächen keine Haftung zwischen Walzgut- und Walzenoberfläche auftritt, dann kann die Relativgeschwindigkeit zwischen Walzenoberfläche und Walzgutoberfläche durch die folgende Gleichung ausgedrückt werden ([9], S. 180) (Bild 3):

$$v_r = v_k \cdot \left(1 - \frac{h_2}{h_x} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi_x} \right), \quad (5)$$

- v_r Relativgeschwindigkeit des Walzenoberflächenelements gegen das mit ihm in Berührung stehende Walzgutflächenelement,
 v_k Umfangsgeschwindigkeit der Walzen,
 $\delta = v_2/v_k$ Voreilungskoeffizient,
 h_x Höhe des zu dem Winkel φ_x gehörenden Walzgutquerschnittes,
 h_1 Höhe des in den Walzspalt eintretenden Walzgutes,
 h_2 Höhe des aus dem Walzspalt austretenden Walzgutes.

Gleichung (1) gibt für ein Volumenelement des Walzgutes denjenigen Gleichgewichtszustand der auftretenden Kräfte an, bei dem sich die zwei aktiven Druckflächen der Walzen einander nähern, ohne daß sich dabei die

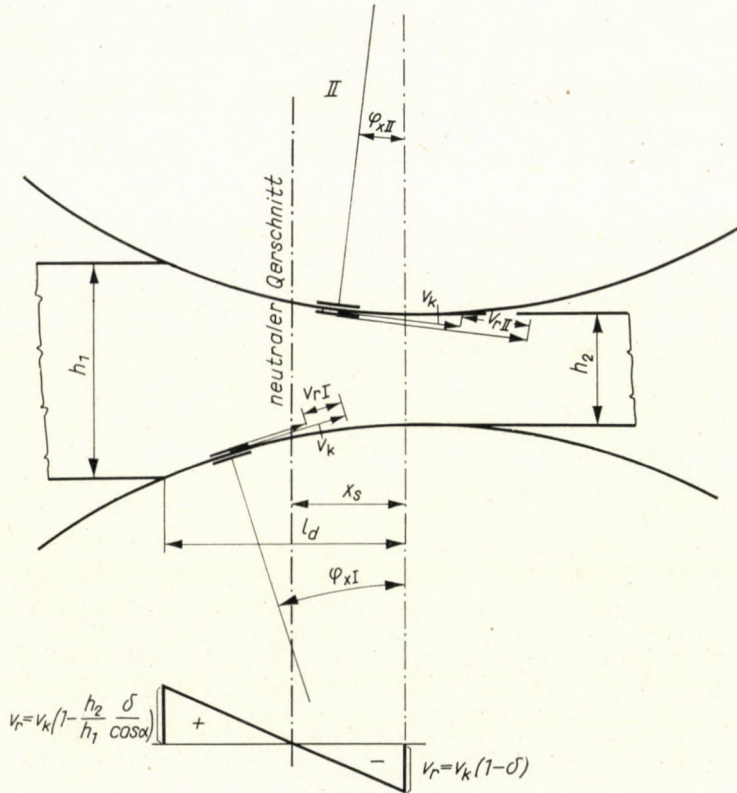


Bild 3. Relative Geschwindigkeit des zu Winkel φ gehörenden Walzenflächenelements

Walzen drehen würden. Aus Gl. (1) kann der in diesem Falle auftretende spezifische Walzdruck (Flächendruck) ermittelt werden. Wenn man aber den tatsächlichen spezifischen Walzdruck an den Druckflächen ermitteln will, so muß man auch denjenigen spezifischen Flächendruck bestimmen, der dadurch entsteht, daß das Walzgut durch den Walzspalt mit einer anderen Geschwindigkeit als die Walzenumfangsgeschwindigkeit durchgedrückt wird. Der tatsächlich auftretende spezifische Walzdruck ist nämlich die Summe der beiden spezifischen Flächendrücke.

Nachfolgend wird die Lösung dieses Problems behandelt. Dabei wird wie bei A. I. ZELIKOW ([7], S. 130—142) die vereinfachende Annahme gemacht, daß der Druckbogen im Walzspalt durch eine Gerade ersetzt wird. Diese Annahme ist für praktische Rechnungen genügend genau.

Ferner wollen wir zunächst annehmen, daß $k_0 = \text{konstant}$ ist, d. h. wir wollen zuerst die Verhältnisse beim Warmwalzen untersuchen.

In der Voreilzone (Bild 1; $0 \leq x \leq x_s$) erhält Gl. (1) nach Durchführung der Operationen die folgende Form:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y + \sigma'_x \cdot \frac{dy}{dx} - (k_0 + \sigma'_x) \cdot (\mu + \tan \varphi_x) = 0. \quad (6)$$

Unter der Annahme, daß der Druckbogen durch eine Gerade ersetzt wird, kann geschrieben werden:

$$y = ax + b = \frac{h_x}{2}, \quad (7)$$

$$b = \frac{h_2}{2}, \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{h_1 - h_2}{2 \cdot l_d} = a, \quad (9)$$

$$\tan \varphi_x = \tan \alpha = a \quad (10)$$

und so kann Gl. (6) folgenderweise geschrieben werden:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y - [\sigma'_x \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu + \tan \alpha)] = 0. \quad (11)$$

Aus Gl. (9) ist

$$dx = \frac{1}{a} \cdot dy,$$

und so wird Gl. (11) wie folgt lauten:

$$a \cdot \frac{d\sigma'_x}{dy} \cdot y - [\sigma'_x \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu + \tan \alpha)] = 0, \quad (12)$$

$$u = \sigma'_x \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu + \tan \alpha), \quad (13)$$

daraus ist:

$$d\sigma'_x = \frac{1}{\mu} \cdot du. \quad (14)$$

Somit bekommt Gl. (12) die folgende Form:

$$\frac{\tan \alpha}{\mu} \cdot \frac{du}{dy} \cdot y - u = 0. \quad (15)$$

daraus:

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u} = \frac{\mu}{\tan \alpha} \cdot \int_{y_0}^y \frac{dy}{y}. \quad (16)$$

Da

$$y = ax + b = x \cdot \tan \alpha + \frac{h_2}{2} = \frac{h_x}{2}.$$

$$y_0 = b = \frac{h_2}{2},$$

$$u = \sigma'_x \cdot \mu + k_0 (\mu + \tan \alpha),$$

und

$$u_0 = k_0 \cdot (\mu + \tan \alpha)$$

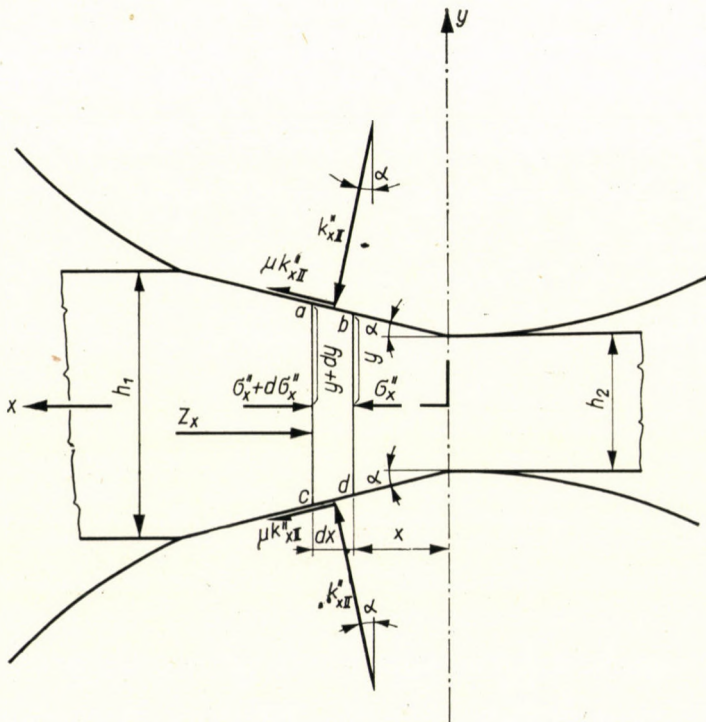


Bild 4. Auf das Volumenelement $abcd$ in der Voreilzone wirkende Kräfte, die durch die Druckkraft Z hervorgerufen werden

sit, beträgt die in der Walzgutachsenrichtung auftretende Spannung σ'_x , welche infolge der Zusammendrückung des Walzgutes durch die Walzen entsteht:

$$\sigma'_{xII} = 1,15 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left(e^{\mu |\tan \alpha \cdot \ln h_x / h_2} - 1 \right). \quad (17)$$

In der Voreilzone läuft das Walzgut mit einer größeren Geschwindigkeit als die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen. Das Walzgut wird von einer, in der Stückachse wirkenden Kraft Z durch den Walzspalt, wie durch ein Ziehwerkzeug herausgedrückt. Diese Kraft ist (Bild 4):

$$Z_x = (\sigma_x'' + d\sigma_x'') \cdot 2 \cdot (y + dy). \quad (18)$$

Die Gleichgewichtsgleichung für das Volumenelement $abcd$ in waagerechter Richtung lautet:

$$(\sigma_x'' + d\sigma_x'') \cdot (y + dy) - \sigma_x'' \cdot y - \mu \cdot k_x'' \cdot dx - k_x'' \cdot dx \cdot \tan \alpha = 0. \quad (19)$$

Nach Durchführung der Operationen erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d\sigma_x''}{dx} \cdot y + \sigma_x'' \cdot \frac{dy}{dx} - (k_0 + \sigma_x'') \cdot (\mu + \tan \alpha) = 0, \quad (20)$$

bzw. da $dy/dx = \tan \alpha$ wird:

$$\frac{d\sigma_x''}{dx} \cdot y - [\sigma_x'' \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu + \tan \alpha)] = 0. \quad (21)$$

Daraus ist die Längsspannung σ_x'' die durch die Druckkraft Z erzeugt wird:

$$\sigma_{xII} = 1,15 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_2} - 1). \quad (22)$$

Die Gleichungen (17) und (21) sind einander gleich, und so wirkt in der Voreilzone in Längsachsenrichtung des gewalzten Stückes eine Spannung

$$\sigma_{xII} = \sigma'_{xII} + \sigma''_{xII} = 2,3 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_2} - 1). \quad (23)$$

Nach der Fließbedingung Gl. (3) ist der spezifische Walzdruck in der Voreilzone den Druckbögen entlang:

$$k_{xII} = k_0 + \sigma_{xII} = 1,15 \cdot k_f \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_2} - 1) \right]. \quad (24)$$

In der Rückstauzone (Bild 1; $x_s \leq x \leq l_d$) wird Gl. (1) nach Durchführung der Operationen die folgende Form annehmen:

$$\frac{d\sigma_x'}{dx} \cdot y + \sigma_x' \cdot \frac{dy}{dx} + (k_0 + \sigma_x') \cdot (\mu - \tan \alpha) = 0, \quad (25)$$

bzw. da $dy/dx = \tan \alpha$ gleichgesetzt wird:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y + [\sigma'_x \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu - \tan \alpha)] = 0. \quad (26)$$

Setzt man

$$u = \sigma'_x \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu - \tan \alpha) \quad (27)$$

und

$$y = ax + b, \quad (7)$$

dann kann Gl. (26) folgenderweise aufgeschrieben werden:

$$\frac{d\sigma'_x}{dy} \cdot y + u = 0, \quad (28)$$

und daraus:

$$-\frac{\mu}{\tan \alpha} \cdot \int_{y_s}^y \frac{dy}{y} = \int_{u_s}^u \frac{du}{u}. \quad (29)$$

Die Rückstauzone beginnt bei dem neutralen Querschnitt, d. h. bei $x = x_s$. Hier ist

$$y_s = a \cdot x_s + b = \frac{h_s}{2}. \quad (30)$$

Die Rückstauzone endet bei l_d , wo

$$y = a \cdot l_d + b = \frac{h_1}{2} \quad (31)$$

ist.

Die Längsspannung an dem neutralen Querschnitt ist laut Gl. (23):

$$\sigma_s = 2,3 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_s/h_2} - 1). \quad (32)$$

Die Grenzen der Integrale nach Gl. (29) sind:

$$u = \sigma'_x \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu - \tan \alpha), \quad (27a)$$

$$u_0 = \sigma'_s \cdot \mu + k_0 \cdot (\mu - \tan \alpha). \quad (27b)$$

Somit ist in der Rückstauzone die Längsspannung σ'_x , die durch den reinen Druckprozeß der Walzen hervorgerufen wird:

$$\sigma'_{xI} = 0,5 \cdot \sigma_s \cdot e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s} + 1,15 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{-\tan \alpha/\mu \cdot \ln h_x/h_s} - 1). \quad (33)$$

In der Rückstauzone wird das Walzstück ebenso durch den Walzspalt gedrückt, wie in der Voreilzone, wobei die gedrückten Flächen des Walzgutes an den Druckflächen des Walzspaltes (Ziehwerkzeuges) rutschen. Die Umformung durch Vorwärtsdrücken ist unabhängig von der Umformung durch Zusammendrücken. Die Längsspannungen können ähnlich wie in der Voreilzone ausgerechnet werden, und die Längsspannung σ_x'' im Abstand x von dem Austrittsquerschnitt ist gleich groß wie die Längsspannung, die mit Gl. (33) angegeben ist. So ist die Längsspannung im Walzgut in der Rückstauzone:

$$\sigma_{x1} = \sigma'_{x1} + \sigma''_{x1} = \sigma_s \cdot e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s} + 2,3 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s} - 1). \quad (34)$$

Nach der Fließbedingung (4) ist der spezifische Walzdruck in der Rückstauzone den Druckbogen entlang:

$$k_{x1} = k_0 + \sigma_{x1} = 1,15 \cdot k_f \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s} - 1) \right] + \sigma_s \cdot e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s}. \quad (35)$$

Die beiden Funktionen, die mit den Gleichungen (24) und (35) ausgedrückt sind, können nur dann ermittelt werden, wenn x_s , d. h. die Lage des neutralen Querschnitts bekannt ist.

Die Lage des neutralen Querschnitts kann aus der Voraussetzung bestimmt werden, daß bei $x = l_d$ die Spannung $\sigma_{x1} = 0$ und $h_x = h_1$ ist.

Setzen wir:

$$d = (\mu + \tan \alpha), \quad (36)$$

$$d' = (\mu - \tan \alpha), \quad (37)$$

$$A = \mu, \quad (38)$$

$$\tan \alpha = a, \quad (39)$$

dann wird Gl. (34) die folgende Form annehmen:

$$\sigma_{x1} = 2,3 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_s/h_x} - 1) e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_1/h_s} + 2,3 \cdot k_f \cdot \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot (e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_1/h_s} - 1). \quad (40)$$

bzw.

$$\frac{d}{A} \cdot (e^{A/a \cdot \ln h_s/h_2} - 1) \cdot e^{-A/a \cdot \ln h_1/h_s} + \frac{d'}{A} \cdot (e^{-A/a \cdot \ln h_1/h_s} - 1) = 0, \quad (41)$$

oder

$$d \cdot \left(\frac{h_s}{h_2}\right)^{A/a} \cdot \left(\frac{h_s}{h_1}\right)^{A/a} - d \cdot \left(\frac{h_s}{h_1}\right)^{A/a} + d' \cdot \left(\frac{h_s}{h_1}\right)^{A/a} - d' = 0, \quad (42)$$

d. h.:

$$\frac{d}{(h_1 \cdot h_2)^{A/a}} \cdot h_s^{2 \cdot A/a} + \left(\frac{d' - d}{h_1^{A/a}}\right) \cdot h_s^{A/a} - d' = 0. \quad (43)$$

Setzt man

$$\frac{d}{(h_1 \cdot h_2)^{A/a}} = U; \quad \left(\frac{d' - d}{h_1^{A/a}}\right) = V, \quad \text{und} \quad -d' = W,$$

dann erhält man die Gleichung:

$$U \cdot h_s^{2 \cdot A/a} + V \cdot h_s^{A/a} + W = 0. \quad (44)$$

Ist

$$h_s^{A/a} = \xi, \quad (45)$$

dann wird

$$U \cdot \xi^2 + V \cdot \xi + W = 0. \quad (46)$$

Daraus ergibt sich die Höhe des neutralen Querschnitts zu

$$h_s^{A/a} = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4 \cdot U \cdot W}}{2 \cdot U}. \quad (47)$$

Da Gl. (7)

$$h_s = 2 \cdot x_s \cdot \tan \alpha + h_2 \quad (48)$$

beträgt, so ist die Entfernung des neutralen Querschnitts von dem Austritts-querschnitt:

$$x_s = \frac{h_s - h_2}{2 \cdot \tan \alpha}. \quad (49)$$

Bisher haben wir angenommen, daß die Umformungsfestigkeit k_f während der Umformung konstant bleibt. Ist die Umformungsfestigkeit in dem Walzspalt ortsabhängig, so können wir das vereinfacht folgenderweise aufschreiben:

$$k_{fx} = k_{f2} - \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d}\right) \cdot x. \quad (50)$$

Hier ist k_{f1} die Umformungsfestigkeit vor dem Stich und k_{f2} nach dem Stich, k_{fx} ist die Umformungsfestigkeit im Abstand x von dem Austrittsquerschnitt, und so ist die Fließbedingung

$$k_x = 1,15 \cdot k_{fx} + \sigma_x, \quad (51)$$

bzw.

$$k_x = k_{0x} + \sigma_x. \quad (52)$$

Im Nachstehenden werden wir

$$c = 1,15 \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) = \frac{k_{02} - k_{01}}{l_d} \quad (53)$$

setzen, und so wird Gl. (50) folgende Form haben:

$$k_{0x} = 1,15 \cdot k_{fx} = 1,15 \cdot k_{f2} - c \cdot x. \quad (50a)$$

In der Voreilzone (Bild 1; $0 \leq x \leq x_s$) wird Gl. (1) nach Durchführung der Operationen folgende Form annehmen:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y + \sigma'_x \cdot \frac{dy}{dx} - (k_{0x} + \sigma'_x) \cdot (\mu + \tan \varphi_x) = 0. \quad (54)$$

Da $dy/dx = \tan a = a$ und $\tan \varphi_x = \tan a = a$ angenommen wird, wird Gl. (54) zu

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y + \sigma'_x \cdot a - (\mu + \tan a) \cdot [(k_{02} - c \cdot x) + \sigma'_x] = 0, \quad (55)$$

bzw.

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y - \sigma'_x \cdot \mu + c \cdot (\mu + \tan a) \cdot x - k_{02} \cdot (\mu + \tan a) = 0. \quad (56)$$

Gl. (56) wird übersichtlicher, wenn man annimmt, daß

$$A = \mu, \quad (57)$$

$$B = c \cdot (\mu + \tan a), \quad (58)$$

$$C = k_{02} \cdot (\mu + \tan a). \quad (59)$$

ist, und so läßt sich Gl. (56) folgenderweise schreiben:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y + B \cdot x - (A \cdot \sigma'_x + C) = 0. \quad (60)$$

Setzt man

$$u = A \cdot \sigma'_x + C, \quad (61)$$

$$d\sigma'_x = \frac{1}{A} \cdot du, \quad (62)$$

so wird Gl. (60) die folgende Form haben:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{du}{dx} \cdot y + B \cdot x - u = 0. \quad (63)$$

Da

$$y = ax + b \quad (7)$$

ist, so ist

$$dx = \frac{1}{a} \cdot dy \quad (8)$$

und aus Gl. (7)

$$x = \frac{y - b}{a} \quad (64)$$

wird Gl. (63) folgende Form annehmen:

$$\frac{a}{A} \cdot \frac{du}{dy} \cdot y + \frac{B}{a} \cdot y - \left(\frac{B \cdot b}{a} + u \right) = 0. \quad (65)$$

Ist

$$w = \frac{B \cdot b}{a} + u, \quad (66)$$

so ist

$$dw = du, \quad (67)$$

und so wird Gl. (65) die folgende Form haben:

$$\frac{a}{A} \cdot \frac{dw}{dy} + \frac{B}{a} = \frac{w}{y}, \quad (68)$$

d. h.

$$\frac{dw}{dy} = \frac{A}{a} \cdot \left(\frac{w}{y} - \frac{B}{a} \right). \quad (69)$$

Setzt man

$$w = y \cdot \tau \quad (70)$$

und demnach

$$\frac{dw}{dy} = y \cdot \frac{d\tau}{dy} + \tau, \quad (71)$$

so wird

$$y \cdot \frac{d\tau}{dy} = f\left(\frac{w}{y}\right) - \tau, \quad (72)$$

wobei

$$f\left(\frac{w}{y}\right) = \frac{A}{a} \cdot \left[\frac{w}{y} - \frac{B}{a} \right] = \frac{A}{a} \cdot \tau - \frac{A \cdot B}{a^2} \quad (73)$$

ist, und so kann geschrieben werden:

$$y \cdot \frac{d\tau}{dy} = \frac{A}{a} \cdot y - \frac{B}{a} - \tau = \tau \cdot \left(\frac{A}{a} - 1 \right) - \frac{A \cdot B}{a^2}. \quad (74)$$

Ist

$$\alpha = \frac{A}{a} - 1 = \frac{A - a}{a}, \quad (75)$$

$$\beta = \frac{A \cdot B}{a^2}, \quad (76)$$

dann wird Gl. (74) zu:

$$y \cdot \frac{d\tau}{dy} = \tau \cdot \alpha - \beta. \quad (77)$$

Integriert:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau \cdot \alpha - \beta}. \quad (78)$$

Die Integrationsgrenzen sind bei x :

$$\tau = \frac{w}{y}, \quad (67a)$$

$$w = \frac{B \cdot b}{a} + u = \frac{B \cdot b}{a} + A \cdot \sigma'_x + C, \quad (61) \text{ bzw. } (66)$$

und bei $x = 0$:

$$w_0 = \frac{B \cdot b}{a} + C, \quad (71)$$

$$y = ax + b = \frac{h_x}{2}, \quad (7)$$

$$y_0 = b = \frac{h_2}{2}, \quad (8)$$

$$\tau = \frac{w}{y} = \frac{2}{h_x} \cdot \left(\frac{B \cdot b}{a} + A \cdot \sigma'_x + C \right), \quad (79)$$

$$\tau_0 = \frac{w_0}{y_0} = \frac{2}{h_2} \cdot \left(\frac{B \cdot b}{a} + C \right), \quad (80)$$

$$\alpha = \frac{A - a}{a}. \quad (81)$$

So wird Gl. (78) nach Durchführung der Integration

$$\alpha \cdot \ln \frac{h_x}{h_2} = \ln \left(\frac{\alpha \cdot \tau - \beta}{\alpha \cdot \tau_0 - \beta} \right), \quad (82)$$

bzw.

$$\frac{\alpha \cdot \tau - \beta}{\alpha \cdot \tau_0 - \beta} = e^{\alpha \cdot \ln h_x/h_2}, \quad (83)$$

und daraus (Gl. 72)

$$\tau = \frac{w}{y} = \left(\frac{B}{a} + \frac{C}{b} - \frac{A \cdot B}{a \cdot (A - a)} \right) \cdot e^{\alpha \cdot \ln h_x/h_2} + \frac{A \cdot B}{a \cdot (A - a)}, \quad (84)$$

somit:

$$\begin{aligned} \sigma'_{xII} = \frac{h_x}{2 \cdot A} \cdot \left(\frac{B}{a} + \frac{C}{b} - \frac{A \cdot B}{a \cdot (A - a)} \right) \cdot e^{\alpha \cdot \ln h_x/h_2} + \\ + \frac{B}{a \cdot (A - a)} \cdot \frac{h_x}{2} - \frac{1}{A} \left(\frac{B \cdot b}{a} + C \right). \end{aligned} \quad (85)$$

In der Voreilzone entsteht durch das Zusammendrücken des Walzgutes von den Walzen die Längsspannung σ'_{xII} , doch entsteht in der Voreilzone außerdem, wie wir gesehen haben, eine ebenso große Längsspannung $\sigma'_{xII} = \sigma''_{xII}$ durch das Herausdrücken des Walzgutes durch den Walzspalt; in der Längsachse des Walzgutes entsteht also die Längsspannung:

$$\sigma_{xII} = \sigma'_{xII} + \sigma''_{xII}. \quad (86)$$

Nach Einsetzen und Durchführung der entsprechenden Operationen erhalten wir für die Längsspannung im Walzgut in der Voreilzone die Funktion:

$$\begin{aligned} \sigma_{xII} = 2,3 \cdot \left\{ \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \cdot \frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \mu} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{f2} \right] \cdot e^{\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_2} + \frac{h_x}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu - \tan \alpha} \right) \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + k_{f2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (87)$$

Wenn $k_{f1} = k_{f2} = k_f$, dann wird Gl. (87) identisch mit Gl. (23).

Nach der Fließbedingung (51) kann die spezifische Druckspannung (Umformungswiderstand) in der Voreilzone den Druckbogen entlang, wenn die Umformungsfestigkeit ortsabhängig ist, mit der folgenden Funktion ausgedrückt werden:

$$k_{x11} = 1,15 \cdot k_{fx} + \sigma_{x11} = k_{0x} + \sigma_{x11}, \quad (88)$$

d. h.

$$\begin{aligned} k_{x11} = & 1,15 \cdot k_{fx} + 2,3 \cdot \left\{ \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \cdot \right. \right. \\ & \cdot \frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \mu} \right) + k_{f2} \left. \right] \cdot e^{\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_2/h_1} + \\ & + \frac{h_x}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu - \tan \alpha} \right) \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \\ & \left. - \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + k_{f2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (89)$$

In der Rückstauzone (Bild 1, $x_s \leq x \leq l_d$) wird Gl. (1), wenn die Umformungsfestigkeit ortsabhängig ist, nach Durchführung der Operationen die folgende Form annehmen:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y + \sigma'_x \cdot \frac{dy}{dx} + (k_{0x} + \sigma'_x) \cdot (\mu - \tan \alpha) = 0, \quad (90)$$

bzw. [vgl. Gl. (52)]:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y + \sigma'_x \cdot a + (\mu - \tan \alpha) \cdot [(k_{02} - c \cdot x) + \sigma'_x] = 0. \quad (91)$$

Setzt man

$$A = \mu, \quad (92)$$

$$B^* = c \cdot (\mu - \tan \alpha), \quad (93)$$

$$C^* = k_{02} \cdot (\mu - \tan \alpha), \quad (94)$$

dann nimmt Gl. (91) folgende Form an:

$$\frac{d\sigma'_x}{dx} \cdot y - B^* \cdot x + A \cdot \sigma'_x + C^* = 0. \quad (95)$$

Setzt man

$$u = A \cdot \sigma'_x + C^*, \quad (96)$$

$$w = \frac{B^* b}{a} + u, \quad (97)$$

$$\tau = \frac{w}{y}, \quad (98)$$

dann wird Gl. (95) ebenso gelöst wie Gleichung (60), und man erhält die folgende Gleichung:

$$\int_{y_s}^y \frac{dy}{y} = \int_{\tau_s}^{\tau} \frac{d\tau}{a - \beta \cdot \tau}, \quad (99)$$

wobei

$$a = \frac{A \cdot B^*}{a^2}, \quad (100)$$

$$\beta = \frac{A + a}{a} \quad (101)$$

ist.

Integriert man die beiden Seiten der Gl. (100), so ergibt sich:

$$-\beta \cdot \ln \frac{h_x}{h_s} = \ln \frac{a - \beta \cdot \tau}{a - \beta \cdot \tau_s}. \quad (101)$$

Hier ist

$$\tau = \frac{w}{y}, \quad (102)$$

$$w = A \cdot \sigma'_x + \frac{B^* \cdot b}{a} + C^*, \quad (103)$$

$$w_s = A \cdot \sigma'_s + \frac{B^* \cdot b}{a} + C^*, \quad (104)$$

$$\tau_s = \frac{w_s}{y_s} = \frac{1}{y_s} \cdot \left(A \cdot \sigma'_s + \frac{B^* \cdot b}{a} + C^* \right). \quad (105)$$

Aus Gl. (101) wird in der Rückstauzone die Funktion der Längsspannung σ'_{x1} , welche durch das Zusammendrücken des Walzgutes von den Walzen entsteht, folgenderweise ausgedrückt:

$$\sigma'_{x1} = \sigma'_s \cdot e^{-A/a \cdot \ln h_x/h_s} + \left[\frac{B^* \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C^*}{A} - \frac{B^*}{a \cdot (A - a)} \cdot \frac{h_s}{2} \right] \cdot e^{-A/a \cdot \ln h_x/h_s} + \frac{B^*}{a \cdot (A - a)} \cdot \frac{h_x}{2} - \left[\frac{B^* \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C^*}{A} \right]. \quad (106)$$

Gleichzeitig mit der Längsspannung σ'_{x1} entsteht in der Rückstauzone eine Längsspannung $\sigma''_{x1} = \sigma'_{x1}$ durch das Durchdrücken des Walzgutes durch den Walzspalt. Die resultierende Längsspannung im Walzgut in der Rückstauzone wird somit:

$$\sigma_{x1} = \sigma'_{x1} + \sigma''_{x1} = 2 \cdot \sigma'_{x1}, \quad (107)$$

d. h.

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} = \sigma_s \cdot e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s} + \\ + 2,3 \cdot \left\{ \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \cdot \frac{\mu \cdot (h_2 - h_s) + h_2 \tan \alpha}{2 \cdot \tan \alpha \cdot (\mu + \tan \alpha)} + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{f2} \right] \cdot e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s} + \frac{h_x}{2 \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu + \tan \alpha} \right) \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \cdot \frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} + k_{f2} \right] \right\}. \quad (108) \end{aligned}$$

Bei $x = x_s$ ist $\sigma_{x1} = \sigma_s$ Gl. (87):

$$\begin{aligned} \sigma_s = 2,3 \cdot \left\{ \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_a} \right) \cdot \frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \mu} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{f2} \right] \cdot e^{u/\tan \alpha \cdot \ln h_s/h_2} + \frac{h_s}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu - \tan \alpha} \right) \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) + k_{f2} \right] \right\}. \quad (109) \end{aligned}$$

Nach der Fließbedingung [Gl. (51) bzw. (52)] ist die Funktion des spezifischen Walzdruckes in der Rückstauzone den Druckbogen entlang, wenn die Formänderungsfestigkeit ortsabhängig ist:

$$\begin{aligned} k_{x1} = 1,15 \cdot k_{fx} + \sigma_{x1} = 1,15 \cdot k_{fx} + \\ + \left\{ \sigma_s + 2,3 \cdot \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \cdot \frac{\mu \cdot (h_2 - h_s) + h_2 \cdot \tan \alpha}{2 \cdot \tan \alpha \cdot (\mu + \tan \alpha)} + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{f2} \right] \right\} \cdot e^{-\mu/\tan \alpha \cdot \ln h_x/h_s} + 2,3 \cdot \left\{ \frac{h_x}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot \left(\frac{\mu - \tan \alpha}{\mu + \tan \alpha} \right) \cdot \left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\mu + \tan \alpha}{\mu} \right) \cdot \left[\left(\frac{k_{f2} - k_{f1}}{l_d} \right) \cdot \frac{h_2}{2 \cdot \tan \alpha} + k_{f2} \right] \right\}. \quad (110) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (108), (109) und (110) können nur dann berechnet werden, wenn die Entfernung des neutralen Querschnittes von dem Austrittsquerschnitt x_s bekannt ist.

h_s bzw. x_s können aus den Gleichungen (85) und (106) bestimmt werden. Bei $x = l_d$ ist nämlich

$$\sigma_{x1} = \sigma'_{x1} + \sigma''_{x1} = 2 \cdot \sigma'_{x1} = 0.$$

Gl. (106) kann auch folgenderweise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sigma'_{x1} = \sigma'_s \cdot \left(\frac{h_x}{h_s} \right)^{-A/a} &+ \left[\frac{B^* \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C^*}{A} - \frac{B^*}{a \cdot (A - a)} \cdot \frac{h_s}{2} \right] \cdot \left(\frac{h_x}{h_s} \right)^{-A/a} + \\ &+ \frac{B^*}{a \cdot (A - a)} \cdot \frac{h_x}{2} - \left(\frac{B^* \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C^*}{A} \right). \end{aligned} \quad (106a)$$

Gl. (85) kann ebenfalls in dieser Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sigma'_{x11} = \left[\frac{B \cdot b}{A \cdot a} + \frac{C \cdot b}{b \cdot A} - \frac{B \cdot b}{a \cdot (A - a)} \right] \cdot \left(\frac{h_x}{h_2} \right)^{A/a} + \\ + \left(\frac{B}{a \cdot (A - a)} \right) \cdot h_x - \left(\frac{B \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C}{A} \right). \end{aligned} \quad (85a)$$

Zur leichteren Übersichtlichkeit setzen wir in Gl. (105a)

$$O = \frac{B^* \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C^*}{A}, \quad (111)$$

$$P = \frac{B^*}{a \cdot (A + a)}, \quad (112)$$

$$R = \frac{B^*}{a \cdot (A + a)}, \quad (113)$$

$$S = \frac{B^* \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C^*}{A}, \quad (114)$$

in Gl. (85a)

$$H = \frac{B \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C}{A}, \quad (115)$$

$$I = \frac{B \cdot b}{a \cdot (A - a)}. \quad (116)$$

$$K = \frac{B}{a \cdot (A - a)}, \quad (117)$$

$$M = \frac{B \cdot b}{a \cdot A} + \frac{C}{A} = H. \quad (118)$$

So kann man schreiben Gl. (85a)

$$\sigma'_s = (H - J) \cdot \left(\frac{h_s}{h_2} \right)^{A/a} + K \cdot \frac{h_s}{2} - M, \quad (119)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma'_{x1} = & \left[(H - J) \cdot \left(\frac{h_s}{h_2} \right)^{A/a} + K \cdot \frac{h_s}{2} - M \right] \cdot \left(\frac{h_x}{h_s} \right)^{-A/a} + \\ & + \left[O - P \cdot \frac{h_s}{2} \right] \cdot \left(\frac{h_x}{h_s} \right)^{-A/a} + R \cdot \frac{h_x}{2} - O. \end{aligned} \quad (120)$$

Bei $x = l_d$, d. h. $h_x = h_1$ muß $\sigma_{x1} = 0$ sein:

$$\begin{aligned} (H - J) \cdot \left(\frac{h_s}{h_1 \cdot h_2} \right)^{A/a} + (K - P) \cdot \frac{h_s}{2} \cdot \left(\frac{h_s}{h_1} \right)^{A/a} + \\ + (O - M) \left(\frac{h_s}{h_1} \right)^{A/a} + \left(R \cdot \frac{h_1}{2} - O \right) = 0. \end{aligned} \quad (121)$$

Setzt man zur leichteren Übersichtlichkeit

$$U = H - J, \quad (122)$$

$$V = K - P, \quad (123)$$

$$W = O - M, \quad (124)$$

$$Z = R \cdot \frac{h_1}{2} - O, \quad (125)$$

so schreibt sich Gl. (109) wie folgt:

$$\left(\frac{U}{h_1^{A/a} \cdot h_2^{A/a}} \right) \cdot h_s^{2 \cdot A/a} + \left(\frac{V}{2 \cdot h_1^{A/a}} \right) \cdot h_s^{(A/a+1)} + \left(\frac{W}{h_1^{A/a}} \right) \cdot h_s^{A/a} + Z = 0, \quad (126)$$

oder einfacher:

$$C_1 \cdot h_s^{2(A/a)} + C_2 \cdot h_s^{(A/a+1)} + C_3 \cdot h_s^{A/a} = C_4, \quad (127)$$

wobei

$$C_1 = \left(\frac{U}{h_1^{A/a} \cdot h_2^{A/a}} \right), \quad (128)$$

$$C_2 = \left(\frac{V}{2 \cdot h_1^{A/a}} \right), \quad (129)$$

$$C_3 = \left(\frac{W}{h_1^{A/a}} \right), \quad (130)$$

$$C_4 = -Z, \quad (131)$$

ist.

Bei der Voraussetzung, daß

$$\eta = C_1 \cdot \xi^{2 \cdot (A/a)} + C_2 \cdot \xi^{(A/a+1)} + C_3 \cdot \xi^{(A/a)} \quad (132)$$

d. h.

$$\eta = f(\xi) \quad (133)$$

ist, und setzt man, daß bei

$$\xi_1 = h_2, \quad \eta_1 = f(\xi_1), \quad (134)$$

$$\xi_2 = \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad \eta_2 = f(\xi_2), \quad (135)$$

$$\xi_3 = h_1, \quad \eta_3 = f(\xi_3) \quad (136)$$

beträgt, so kann die Funktion (132) durch eine Parabel ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{(\xi - \xi_2) \cdot (\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2) \cdot (\xi_1 - \xi_3)} \cdot \eta_1 + \frac{(\xi - \xi_1) \cdot (\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1) \cdot (\xi_2 - \xi_3)} \cdot \eta_2 + \\ & + \frac{(\xi - \xi_1) \cdot (\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1) \cdot (\xi_3 - \xi_2)} \cdot \eta_3 = A_0 + A_1 \cdot \xi + A_2 \cdot \xi^2. \quad (137) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Höhe des neutralen Querschnitts h_s muß

$$A_0 + A_1 \cdot \xi + A_2 \cdot \xi^2 = C_4, \quad (138)$$

bzw.

$$A_2 \cdot \xi^2 + A_1 \cdot \xi + (A_0 - C_4) = 0 \quad (139)$$

sein.

Aus Gl. (127) ist

$$\xi = h_s = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4 \cdot A_2 \cdot (A_0 - C_4)}}{2 \cdot A_2}. \quad (140)$$

Die Entfernung des neutralen Querschnitts von dem Austrittsquerschnitt ist:

$$x_s = \left(\frac{h_s - h_2}{h_1 - h_2} \right) \cdot l_d. \quad (141)$$

In Kenntnis von x_s und h_s können die Funktionen (108), (110) berechnet werden, und somit die Funktionen der Längsspannungen im Walzgut und des spezifischen Walzdruckes (Umformungswiderstandes).

Die oben abgeleiteten Formeln (24) und (36) bzw. (89) und (110) des spezifischen Walzdruckes geben nur dann der Wirklichkeit entsprechende Werte, wenn sich während des Walzens im Walzspalt die zu der Längsachse des Walzgutes vertikal liegenden Querschnitte nicht verbiegen, sondern eben bleiben. Um die Verbindung der Querschnitte des Walzgutes und die damit

zusammenhängenden Werkstoffverschiebungen hervorzurufen, ist ein Mehrbetrag des Umformungswiderstandes erforderlich. Den Mittelwert dieses Mehrbetrages, der zum Hervorrufen der inneren Materialverschiebungen

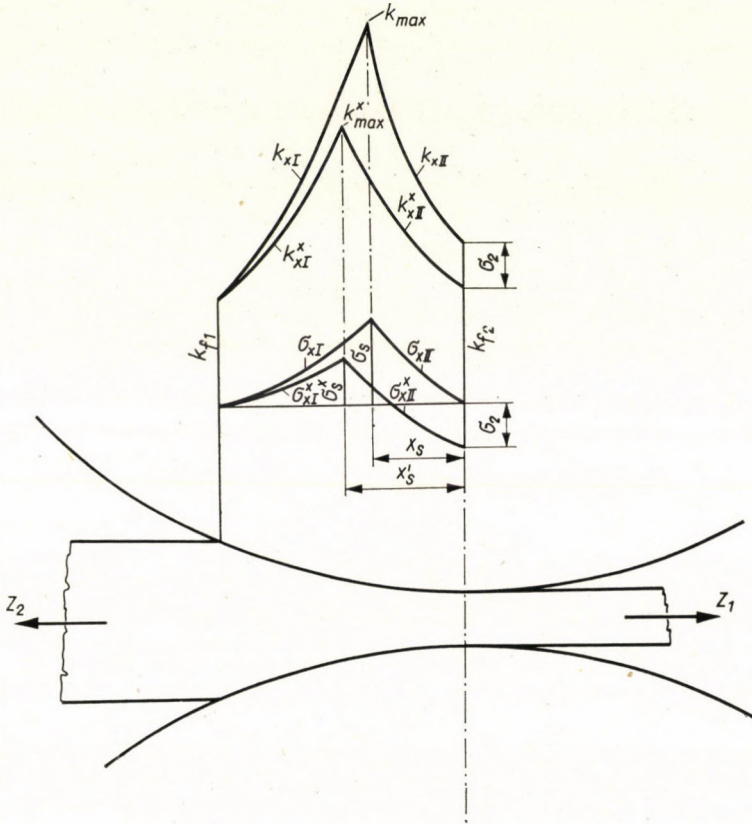


Bild 5. Einfluß des Bandzuges auf die Verteilung des spezifischen Walzdruckes den Druckbogen entlang

nötig ist, habe ich in einer meiner früheren Arbeiten ([9], S. 325—330) ermittelt:

$$k_{sm} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot k_f \cdot \left(\frac{l_d}{r} \right) \cdot \frac{h_2}{(h_1 - h_2)} \quad (142)$$

Der spezifische Walzdruck nach den Gleichungen (24), (36) und (84), (110) muß also mit diesem spezifischen Walzdruck [Gl. (142)] vergrößert werden.

Wird beim Kaltwalzen das Walzgut, das aus dem Walzspalt hinausläuft, mit einer Zugkraft Z_2 bzw. mit einer Zugspannung

$$\sigma_2 = \frac{Z_2}{h_2 \cdot b_2} \quad (143)$$

belastet, so wird dementsprechend σ_{xII} in der Voreilzone und σ_{x2} in der Rückstauzone kleiner und die Entfernung x des neutralen Querschnitts von dem Auslaufquerschnitt größer (Bild 5), womit auch $k_s = k_{\max}$ kleiner wird.

Wird das Walzgut von der Einlaufseite her auch mit einer Zugkraft Z_1 bzw. mit einer Zugspannung

$$\sigma_1 = \frac{Z_1}{h_1 \cdot b_1} \quad (144)$$

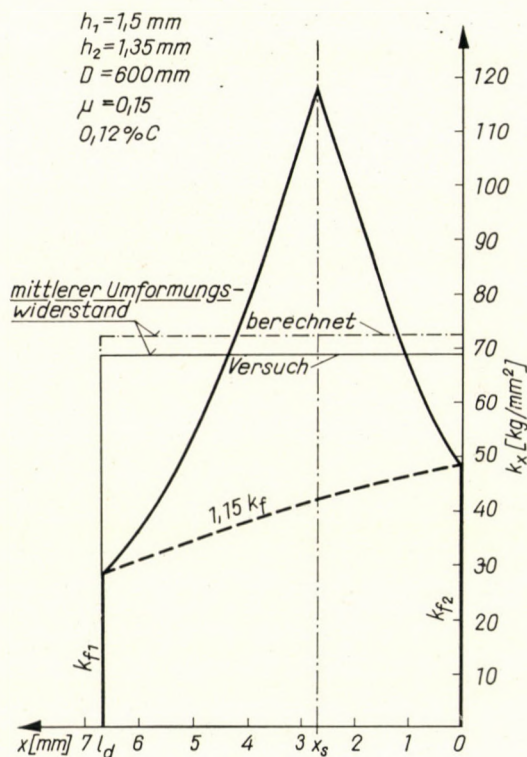


Bild 6. Berechnete Verteilung des spezifischen Walzdruckes den Druckbogen entlang in einem konkreten Kaltwalzbeispiel

belastet, dann werden sich σ_{xI} in der Rückstauzone und σ_{xII} in der Voreilzone verkleinern, und dementsprechend wird sich auch x_s ändern.

Wendet man also eine Zugkraft nur an der Auslaufseite an, so muß die spezifische Längsspannung in der Voreilzone [Gl. (87)] mit der Gleichung

$$\sigma_{xII}^* = \sigma_{xII} - \sigma_2 \quad (145)$$

und der spezifische Walzdruck [Gl. (89)] mit der Gleichung berechnet werden.

$$k_{x_{II}}^* = 1,15 \cdot k_{f_x} + (\sigma_{x_{II}} - \sigma_2) \quad (146)$$

berechnet werden

Wird das Walzgut nur von der Einlaufseite mit einer Zugspannung σ_1 belastet, dann werden die Längsspannung in der Rückstauzone [Gl. (103)] mit

$$\sigma_{x_I}^* = \sigma_{x_I} - \sigma_1 \quad (147)$$

und der spezifische Walzdruck [Gl. (110)] mit

$$k_{x_I} = 1,15 \cdot k_{f_x} + (\sigma_{x_I} - \sigma_1) \quad (148)$$

berechnet.

Wird das Walzgut von der Einlaufseite mit der Spannung σ_1 und von der Auslaufseite mit der Spannung σ_2 belastet, so muß dieser Umstand bei der Berechnung der Längsspannungen und des Umformungswiderstandes in der Voreil- und in der Rückstauzone in Rechnung gezogen werden. h_s und x_s können aus Gl. (111) mit Hilfe der Gleichungen (140) und (141) ausgerechnet und so das Problem gelöst werden.

Bild 6 zeigt die mit dem hier angegebenen Rechnungsverfahren berechnete Verteilung des spezifischen Walzdrucks in einem konkreten Fall des Kaltwalzens. In dem Bild sind der mit dem Diagramm berechnete und der durch Versuch ermittelte mittlere spezifische Walzdruck (Umformungswiderstand) eingezeichnet.

SCHRIFTTUM

1. v. KÁRMÁN, TH.: Beitrag zur Theorie des Walzvorganges. *ZAMM* 5 (1925).
2. HUBER, K.: Versuche zur Ermittlung der Vertikalspannungen beim Walzvorgang. *ZAMM* 9 (1929).
3. SIEBEL, E.: Grundlagen zur Berechnung des Kraft- und Arbeitsbedarfs beim Schmieden und Walzen. *Stahl u. Eisen* 43 (1923).
4. NÁDAL, A.: The Forces Required for Rolling Steel Strip under Tension. *J. Appl. Mechan.* 6 (1939).
5. ZELIKOW, A. I.: Einfluß der äußeren Reibung und des Bandzugs auf den Walzdruck beim Walzen. *Metallurgie* Nr. 6. 1939.
6. TRINKS, W.: Pressures and Roll Flattening in Cold Rolling, *Blast Furnace and Steel Plant* 25 (1937).
7. ZELIKOW, A. I.: Vereinfachtes Berechnungsverfahren zur Berücksichtigung des Einflusses eines Bandzugs auf die Walzkraft beim Walzen. *Stahl* (1945), Nr. 3. Lehrbuch des Walzwerksbaus, VEB Verl. Technik, Berlin 1957.
8. TROOST, A.—HÖLLING, K.: Bemerkungen über einige plastizitätstheoretische Grundlagen des Bandwalzens und eine vereinfachte Berechnung der Fließscheidelage. *Z. Metallkunde* 52 (1961).
9. GELEJI, A.: Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch. Akademie-Verlag Berlin 1960.

COMPLETION AND GENERAL SOLUTION OF KÁRMÁN'S THEORY OF ROLLING

A. GELEJI

SUMMARY

In 1925 Th. v. KÁRMÁN established a theory of rolling and a differential equation for the determination of the forces arising on rolling. This equation has been solved by several authors, who made various simplifying assumptions. But the solutions only lead to qualitative results, the specific rolling pressures calculated in this way were considerably smaller than the real pressures. This is explained by the fact that the Kármán theory considers only part of the phenomena at rolling. In his paper, the author points out this circumstance and completes the ideas of Kármán: in the roll gap, the rolled workpiece is not only compressed, but it is also pushed through the gap at a speed which is different from the peripheral velocity of the rolls. This is proved by the fact that the workpiece emerging from the gap outruns the rolls and by the difference between the peripheral velocity of the rolls and the velocity of the workpiece entering the gap. The author completes the differential equation of rolling by taking into consideration all this and calculates the distribution of the specific rolling pressure along the compressed surface, for cold rolling as well as for hot rolling.

DÉVELOPPEMENT ET SOLUTION DE VALIDITÉ GÉNÉRALE DE LA THÉORIE
DU LAMINAGE KÁRMÁN

A. GELEJI

RÉSUMÉ

Th. v. KÁRMÁN a établi, en 1925, une théorie du laminage et une équation différentielle permettant la détermination des forces intervenant au cours du laminage. Cette équation différentielle a été résolue par plusieurs chercheurs ayant utilisé différentes conditions de simplification. Mais ces solutions n'ont donné que des résultats qualitatifs, les pressions spécifiques de laminage ainsi calculées ayant été sensiblement inférieures à celle déterminée empiriquement. L'explication en est que la théorie de Kármán ne tient compte que d'une partie des phénomènes se déroulant pendant le laminage. Dans son étude, l'auteur met ce fait en évidence et complète la conception de Kármán, dans ce sens que la pièce laminée est non seulement comprimée dans l'écartement des cylindres, mais qu'elle est poussée en même temps dans l'écartement avec une vitesse différente de la vitesse circonférentielle des cylindres. La preuve en est que la vitesse de la pièce est plus élevée à la sortie des cylindres que la vitesse de ces derniers, et que la vitesse d'entrée de la pièce diffère de la vitesse circonférentielle. C'est en tenant compte de ces faits que l'auteur complète l'équation différentielle du laminage, et calcule la répartition de la pression de laminage spécifique le long de la surface comprimée, pour le laminage à froid aussi bien que pour le laminage à chaud.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ КАРМАНСКОЙ ТЕОРИИ ПРОКАТКИ

А. ГЕЛЕИ

РЕЗЮМЕ

Т. Карман в 1925 году создал теорию прокатки, — вернее вывел дифференциальное уравнение для определения сил, действующих при прокатке. Это дифференциальное уравнение, при условии введения различных упрощающих условий, было решено несколькими исследователями. Решения, однако, привели лишь к качественным результатам, т. е. вычисленные таким способом удельные прокатные давления были зна-

чительно меньше, чем определенные опытным путем удельные прокатные давления. Этот факт может быть объяснен тем, что Карманская теория прокатки принимает во внимание лишь часть явлений, имеющих место при прокатке. Автор в своей работе указывает на это обстоятельство, и дополняет соображения Кармана в том смысле, что прокатываемая полоса в прокатной щели испытывает не только сжатие, но одновременно продавливается сквозь прокатную щель со скоростью отличной от окружной скорости валков. Этот факт подтверждается т. н. опережением полосы и скоростью вступления полосы в валки отличной от окружной скорости валков. Автор, приняв во внимание приведенные соображения, дополняет дифференциальное уравнение прокатки и вычисляет распределение удельного давления прокатки вдоль поверхности, подверженной давлению, как для холодной, так и для горячей прокатки.

SYNCHRONIZING METHODS

F. CSÁKI — P. O. GESZTI

DOCTOR OF TECHN. SC. DOCTOR OF TECHN. SC.
INSTITUTE FOR ELECTRICAL POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received September 19, 1962]

In the paper feasible synchronizing methods are compared: the three-phase precise synchronization, self-synchronization and asymmetrical synchronization. As a basis of comparison the currents arising at the high-voltage side in the most unfavourable case serve, further the maximum torques being formed in the generator and the unidirectional torques affecting the system. (For the sake of complete comparison, the currents and torques of the three-phase short-circuit are also considered.) Finally the application field for the individual synchronizing methods is determined.

An important problem concerning alternating current power systems is the realization of parallel connection and parallel operation of the synchronous generators. Since the end of the last century when this was solved by O. T. BLÁTHY, the problem concerning the parallel connection of synchronous generators seemed to have been realized. This so-called precise synchronizing method is based on the comparison of the system voltage and the excited generator terminal voltage. At the instant of parallel connection the above voltages must be equal both in magnitude and phase sequence, as well as in phase angle and their speed of rotation, that is, the frequency of the system and that of the machine must also be the same. Precise synchronization is a widespread method, larger firms had even developed automatic synchronizing equipments, and up to the last few years, this method was the only procedure. Precise synchronizing being perfectly performed, it does not cause any active or reactive power stress, or torque stress neither for the system, nor for the machine itself. In case of disturbances, however, oscillations may arise in the system voltage and frequency, as a consequence of which agreement of the voltage and frequency meet with difficulties both with manual switching-in and with automatic synchronization, and so the synchronization may be late by minutes just when an urgently needed operation of the synchronous generator would be of the greatest importance. Just these circumstances were those which necessitated the development of new synchronizing methods.

In the Soviet Union the so-called self-synchronizing method was elaborated, which has ever increasingly been applied. The essence of this method is as follows: The machine working near to the synchronous speed is connected

to the network in its de-excited state (the deviation in the speed of rotation may even be some per cents, the field is closed through a de-excitation resistance), after being connected parallelly, the generator is excited and becomes synchronous.

Self-synchronization has several advantages; the method is the most simple, the possibility of a faulty connection is practically excluded. Nevertheless, when synchronizing block-connected units, currents exceeding the nominal value appear but these are considerably smaller than the short-circuit currents, consequently in case of machines guaranteed for short-circuits, neither the generator, nor the transformer is exposed to danger.

Table I
Self-synchronization tests of a 26 MVA turbo-generator

Turbogenerator Type OF 26 300 KVA; 10/11 KV; 1520/1380 A; $\cos \varphi = 0.8$; 3000/minute					
Transformer 22 500 KVA; 111/10.5 KV; 9.5%					
R.p.m.	U_{\min} , %	U_{sec} , %	I_{\max}/I_{nom} , %	$t_{I=I_{\text{nom}}}$, sec	Note
3060	76	97	225—205	1.6	Self-synchronization to an unloaded 100 KV transmission line
2940	75	97	280—254	0.6	
3060	94	100	300—270	0.6	Self-synchronization to the 100 KV busbar of the power station
2940	93	99	500—400	0.6	
2910	94	100	360—330	*	

As there is no need for accurate agreement of the voltages, the generator must not be put to an accurate synchronous speed of rotation either, therefore, the parallel connection may be rapidly realized even in case of voltage and frequency oscillation. A further advantage of self-synchronization is that the parallel connection process is suitable for automation.

Besides the advantages of self-synchronization its disadvantages must be mentioned too. When connecting the de-excited synchronous generator to the system an inrush current is formed in all cases, meaning a stress — though not a too great one — for the equipments, further a transient voltage decrease appears in the system, while the generator consumes reactive power. The voltage drop and the reactive power consumption only stops when the generator is excited.

In the Institute for Electrical Power Research tests in the field of self-synchronization were made, which were elsewhere reported by one of the authors [1]. Thus, the measurements are not discussed in detail here, merely reference is made to the summarization in Table I. On the basis of these

* The differential protection operated, faultily

tests it may be stated that the significant voltage drop does not last but for some periods, and within 1 second the generator current is decreased below nominal value and voltage of the busbar is also increased near to its nominal value. It may be mentioned that the generator immediately took up an active load when the self-synchronization realized with super synchronous speed.

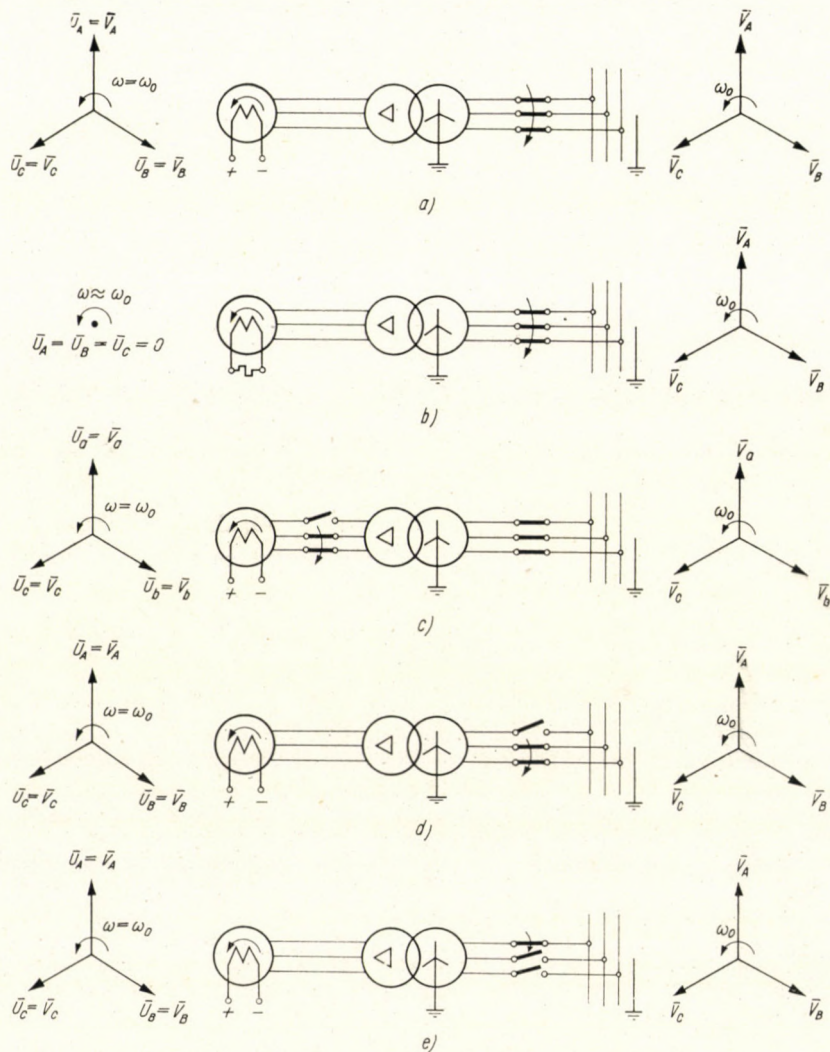


Fig. 1

The self-synchronization may establish unfavourable circumstances from the point of view of the system, because of the reactive power demand, especially under strained system disturbance conditions. Starting out from this [2], one of the authors examined the possibility of asymmetrical syn-

chronizing methods. The basic idea is, that if the reactance between the machine and the network is great, then a precise synchronization may be allowed even with higher angle deviations, i.e., in case of equal angle-deviations, the active power and torque shocks, resp. arising in the system, will be smaller. To increase the reactance, the negative- and zero-sequence networks may be adopted. Namely, in case of an asymmetrical synchronization, a certain combination of these networks is connected in series with the positive-sequence network and reduces the active power shock in the same way as a reactor does.

About the different synchronizing methods of a blockunit working through a common delta-star transformer, an overall picture is given in Fig. 1. The high-voltage system is effectively earthed (U is the generator voltage behind the subtransient reactance, V is the system voltage, i.e. the voltage of the infinite busbar). In Fig. 1a the three-phase-accurate synchronization, in Fig. 1b the self-synchronization, in Figs. 1c and 1d the two-pole synchronization on the generator side and the high-voltage side, resp. while in Fig. 1e the single-pole synchronization on the high-voltage side are illustrated. Except for self-synchronization, the voltages are to be conformed on both sides of the synchronizing circuit-breaker.

The different synchronizing methods will be compared from the point of view of the arising currents and torques.

In Fig. 2 the equivalent circuit diagrams of the individual cases are illustrated. Fig. 2a . . . 2c corresponds by order of succession to the connection of Fig. 1a . . . 1c, while in Fig. 2f the equivalent circuit of the three-phase metal short-circuit arising at the medium-voltage side is shown with the respective positive current directions, internal voltages, reactances and phase shifting transformers.

The dampings and resistances are neglected and the subtransient state is studied.

For the sake of simplicity, the direct-axis and quadrature-axis subtransient reactance of the generator is assumed to be equal and so the negative-sequence reactance is also of the same value. The transformer leakage reactance and the generator subtransient reactance were assumed to be the same. The step-up transformer was chosen, according to custom of high-voltage star-, medium-voltage delta connection, therefore, the positive-, negative- and zero-sequence series reactances are equal to each other:

$$X_d'' = X_q'' = X_2 = X_{t1} = X_{t2} = X_{t0} = X.$$

The high-voltage busbar was regarded as being infinite.

At the instant of synchronization phase-vectors of equal amplitude, phase-sequence and frequency but of different phase-angle have been assumed to be at the poles of the circuit breaker, on the system- and generator side.

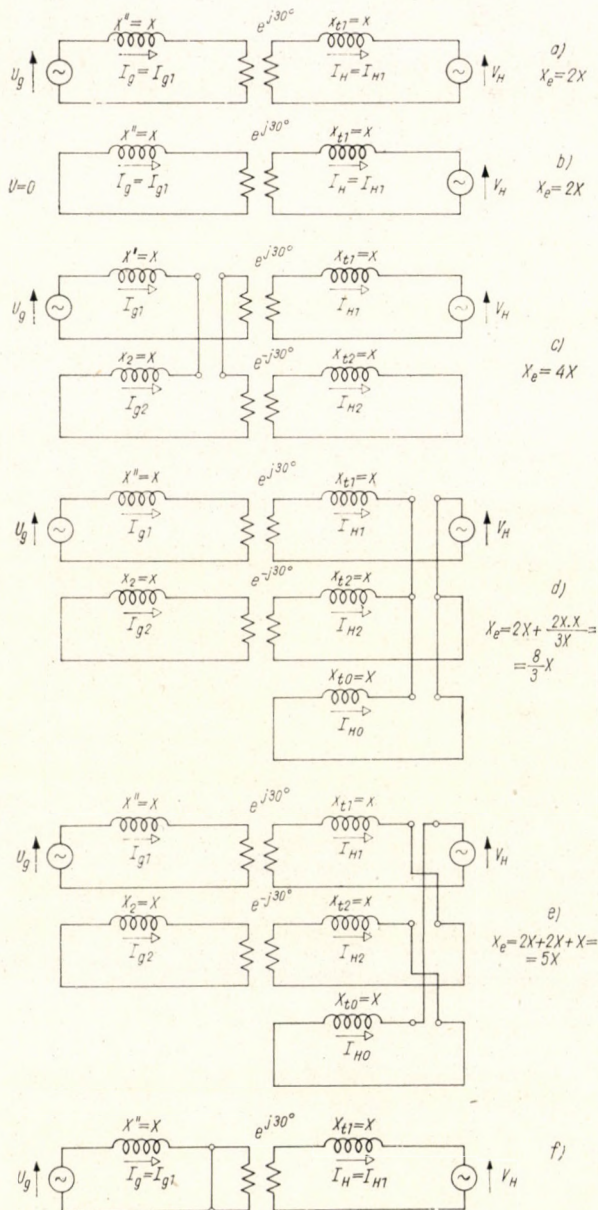


Fig. 2

The speed of rotation of voltage vectors was regarded as constant in the first period.

With these simplifications, for the case of synchronization in opposition (that is, with 180°) this being the most unfavourable from the point of view of currents, the vector diagrams were summarized in Fig. 3. In the same place the vector diagrams of the three-phase short-circuit of the unloaded generator at the medium voltage side are shown, too.

It must be noted that in Figs. 1, 2, 3 and also further on, the currents of both the high-voltage and medium-voltage sides are denoted by I . The upper case letter index refers to the high-voltage side, while the lower case one to the generator side.

The symmetrical component currents may be determined on the basis of equivalent circuits, while the phase currents are obtained by adding the symmetrical components. (It is worth mentioning that due to the star-delta transformer the positive-sequence quantities deviate by $+30^\circ$, while the negative-sequence ones by -30° from each other, on the high-voltage and medium-voltage side.) The highest instantaneous currents are not these, because the direct current component, depending on the moment θ_0 of the switching on, must be taken into consideration, too.

Namely, before closing the circuit-breaker, the value of the currents was equally zero and because of the constant flux-linkage principle the current cannot suddenly change. If the fault arises at the generator terminal point (no-load operation, Fig. 2f), then the instantaneous current fed by the generator is, under the above conditions, with time t (measured in radians)

$$i_a = \frac{U}{X} [\cos(t + \theta_0) - \cos \theta_0], \quad (1)$$

if $\theta_0 = 0$, or π

$$i_a = \frac{U}{X} [\cos t - 1], \quad (2)$$

yielding

$$|i_{a \max}| = \frac{2U}{X}. \quad (3)$$

(The same magnitude of current is fed by the transformer from the system side.)

If the three-phase short-circuit appears on the high-voltage transformer side, then the current furnished by the generator provides half of the current values given in Eqs. (1), (2), (3), because a double reactance value is connected in series.

A current of the same absolute value is obtained in case of a self-synchronization effected by the infinite busbar (Fig. 2b).

If (according to Fig. 2a) a three-phase, so-called precise synchronization is carried out, with a switching-on angle δ , then (assuming $|U| = |V|$)

$$\begin{aligned}
 i_a &= \frac{U}{2X} [\cos(t + \theta_0) - \cos \theta_0 - \cos(t + \theta_0 - \delta) + \cos(\theta_0 - \delta)] = \\
 &= \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \left[\sin \left(t + \theta_0 - \frac{\delta}{2} \right) - \sin \left(\theta_0 - \frac{\delta}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{2U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{t}{2} \cos \left[\theta_0 + \frac{t}{2} - \frac{\delta}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{4}$$

and the current maximum evidently arrives at

$$\theta_0 = \frac{\delta_0}{2} - \frac{t}{2} . \tag{5}$$

The maximum as per δ follows at $\delta = 180^\circ$

$$|i_{a \max}| = \frac{2U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \tag{6}$$

thus, it is of the same value as in case of generator terminal fault. If the two poles of the generator-side circuit breaker are closed (and phase "a" is connected later), then the current of e.g. phase "b"

$$i_b = \frac{\sqrt{3}U}{X} \sin \frac{\delta_0}{2} \sin \frac{t}{2} \sin \left[\theta_0 + \frac{t}{2} - \frac{\delta_0}{2} \right] . \tag{7}$$

From (7)

$$|i_{b \max}| = \frac{\sqrt{3}U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \tag{8}$$

here, too, the highest value appears at $\delta = 180^\circ$.

If the synchronization is effected on the high-voltage side, then there are two possibilities. The synchronization is done by two poles of the circuit breaker (according to Fig. 1d, or by one pole, as per Fig. 1e).

First the synchronization as per Fig. 1d is examined. According to Fig. 3d the currents of the high-voltage side and generator side are to be examined separately. The three current components must amount to zero in phase A, so, based on Fig. 2d, the instantaneous values of the current components are — for θ_0 and t , giving the highest instantaneous values — as before, but only as function of δ

$$i_{A1 \max} = \frac{3}{2} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} , \tag{9}$$

$$i_{A2 \max} = - \frac{U}{2X} \sin \frac{\delta}{2} , \tag{10}$$

$$i_{A0 \max} = - \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} . \tag{11}$$

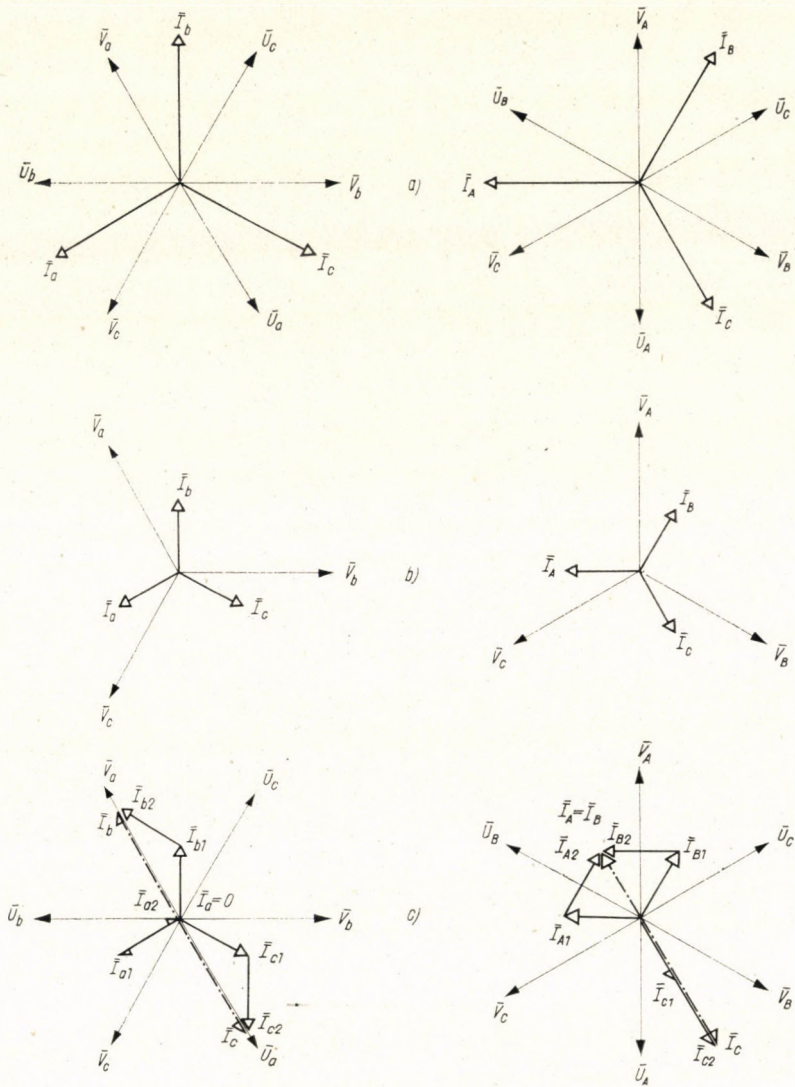


Fig. 3a, 3b, 3c

It can be seen that in accordance with Fig. 3d $|i_A| = 0$, and i_b is obtained by the known formulas from (9), (10) and (11)

$$|I_b| = |I_c|,$$

$$i_{B \max} = \frac{3}{2} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \left[-\frac{2}{3} + a^2 - \frac{a}{3} \right] \quad (12)$$

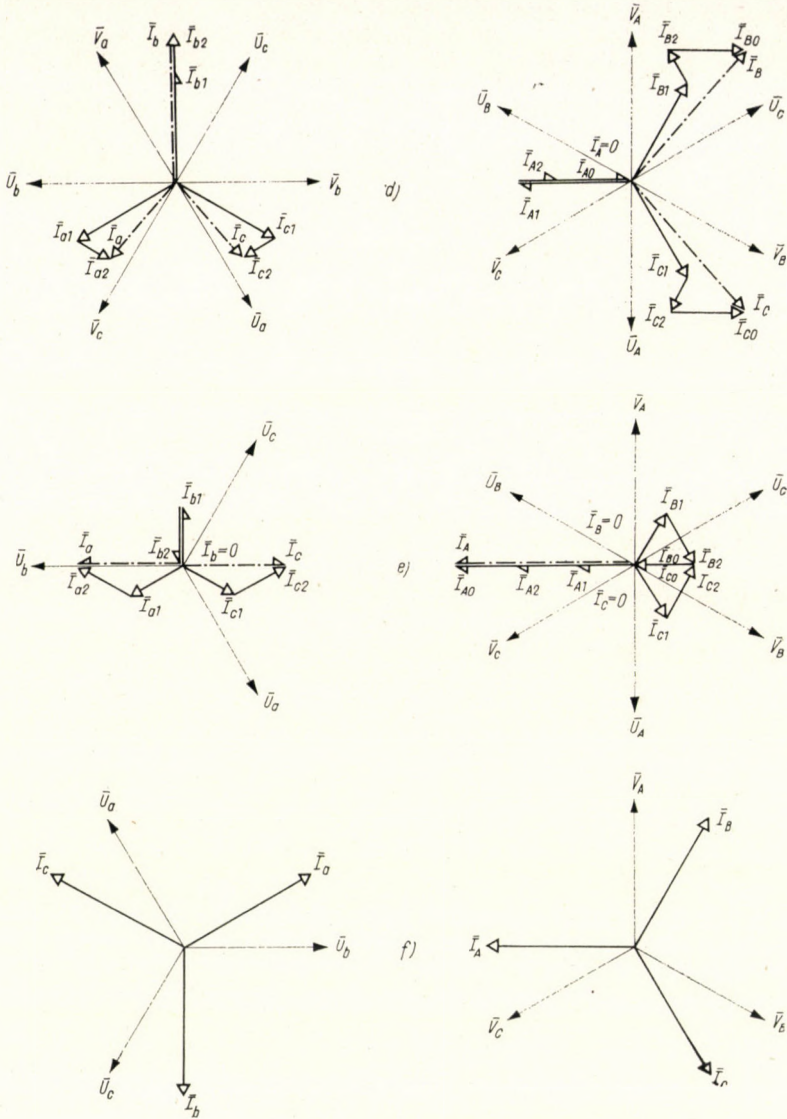


Fig. 3d, 3e, 3f

and the absolute value is

$$|i_{B \max}| = 2.29 \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \quad (13)$$

Through the neutral a current of

$$|I_{N \max}| = -3 \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \quad (14)$$

is flowing — more than in the phase conductor.

At the generator side the procedure is essentially the same, as applied to the high-voltage one. Without details, the highest currents as functions of angle δ :

$$i_{a1 \max} = \frac{3}{2} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \quad (15)$$

and

$$i_{a2 \max} = \frac{a}{3} i_{a1 \max}, \quad (16)$$

$$i_{a0} = 0, \quad (17)$$

$$i_{a \max} = i_{a1 \max} + i_{a2 \max} = \frac{3}{2} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \left[1 + \frac{a}{3} \right] = \quad (18)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \left[\frac{5}{6} + j \frac{\sqrt{3}}{6} \right],$$

$$|i_{a \max}| = |i_{c \max}| = 1.32 \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (19)$$

It becomes evident from Fig. 3d that the highest value is furnished by i_b .

$$i_{b \max} = a^2 i_{a1} + a i_{a2} = \frac{3}{2} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} \left[a^2 + \frac{a^2}{3} \right] = 2 \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} a^2, \quad (20)$$

a^2 does not change the absolute value, so

$$|i_{b \max}| = 2 \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (21)$$

With the single-pole synchronization effected on the high-voltage side (Figs. 1c and 2e) the current on the high-voltage side may be written for the most unfavourable θ_0 and t , as before

$$i_{A1 \max} = i_{A2 \max} = i_{A0 \max} = \frac{4}{4} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2}, \quad (22)$$

yielding

$$i_{A \max} = \frac{12}{5} \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2} = 2.4 \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (23)$$

As shown in Fig. 3e, the values $i_{B \max}$ and $I_{C \max}$ are smaller than $i_{A \max}$.

On the medium-voltage side $i_b = 0$, while $|i_{a \max}| = |i_{c \max}|$.

On the basis of the aforementioned, without going into detail halving the absolute value

$$|i_{a \max}| = \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{4U}{X} \sin \frac{\delta}{2} = 1.38 \frac{U}{X} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (24)$$

Based on the formulas introduced up till now, Fig. 4 may be plotted, where the crest values of the currents are shown as function of angle δ for the most unfavourable case. (Of course, these currents may flow in different places according to the formulas.)

It can be seen that the highest current is established according to Eq. (23) — for the single-pole synchronization effected at the high-voltage side. Then follows the two-pole synchronization also effected at the high-voltage side — see Eq. (13). In the figure were plotted a number of other curves, too.

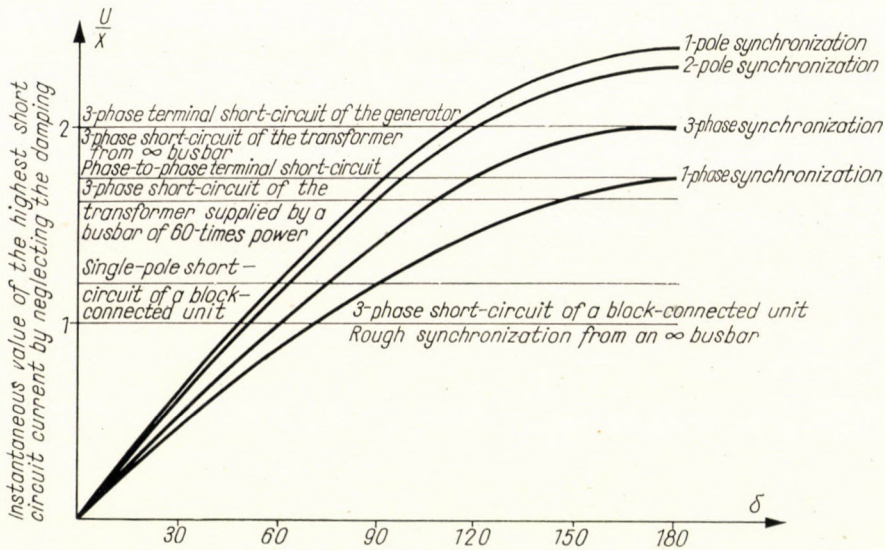


Fig. 4

As seen from the Figures, up to approximately $\delta = 60^\circ$ there is no special problem with any synchronization, from the currents point of view, as the instantaneous value of the highest current is nearly equal to the highest short-circuit current of the block-connected unit, this merely meaning about 25% of the rated stress for the units (generator and transformer).

The torques. The torques arising in the generator are also calculated with the former assumptions ($U = V$; $X_d'' = X_q'' = X_t = X$; $S = 0$ and the dampings are neglected). The torques were calculated from Eq. $T = i_q \psi_d - i_d \psi_q$, the details may be found in the Appendix.

a) Three-phase short-circuit starting from a no-load operation of the generator (short-circuit at the generator terminals, or self-synchronization from an infinite busbar),

$$V = 0.$$

The torque relation is

$$T = \frac{U^2}{X} \sin t. \quad (25)$$

This is a pure pulsating torque having no unidirectional component.

b) Three-phase short-circuit at the transformer high-voltage side for a block-connected unit, or self-synchronization of a block-connected unit

$$T = \frac{U^2}{2X} \sin t. \quad (26)$$

c) Phase-to-phase fault on the generator terminals

$$T = \frac{U^2}{X} \cos(t + \theta_0) [\sin(t + \theta_0) - \sin \theta_0] \quad (27)$$

the maximum torque occurring at $\theta_0 = 90^\circ$ and $t = 120^\circ$. Its value is

$$T_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{U^2}{X} = 1,3 \frac{U^2}{X}, \quad (28)$$

so it is higher by 30% than the three-phase short-circuit torque. There is no unidirectional torque, either. (Only the torque of fundamental frequency was considered.)

d) In case of a three-phase, precise synchronization the torque is (when the generator is connected to an infinite busbar)

$$T = \frac{U^2}{X} [\sin \delta - \sin(t + \delta) + \sin t]. \quad (29)$$

The torque is shown in plane δ, t by Fig. 5 axonometrically, while in Fig. 6 the surface sections are illustrated by a family of curves.

The highest stress occurs at $\delta = 120^\circ$ and $t = 120^\circ$,

$$T_{\max} = 2,6 \frac{U^2}{X} \quad (30)$$

which is more than 2.5-times that of the highest torque caused by a terminal short-circuit. (The highest torque appearing at opposition is not more than twice that of the highest torque occurring at a terminal short-circuit.) The same torque as by a terminal short-circuit occurs with $\delta = 30^\circ$.

In Eq. (29) a part is independent of time, this represents the unidirectional torque, the sign of which depends on the sense of:

$$T_e = \frac{U^2}{X} \sin \delta. \quad (31)$$

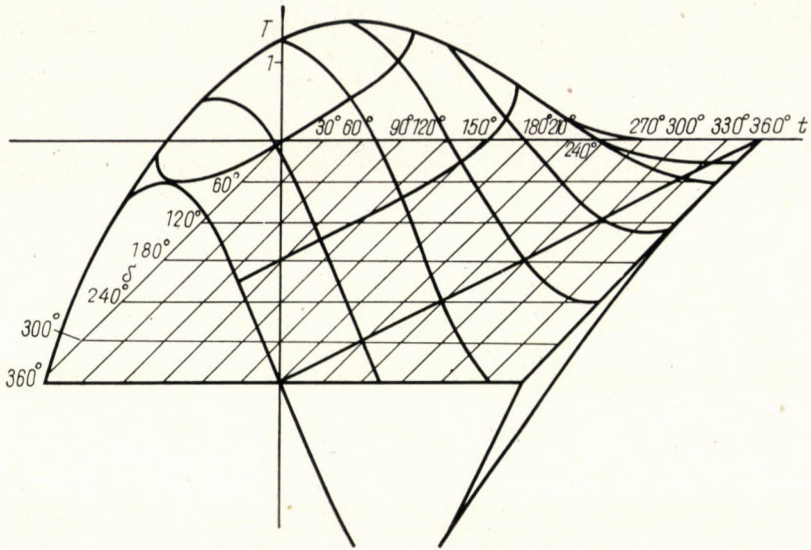


Fig. 5

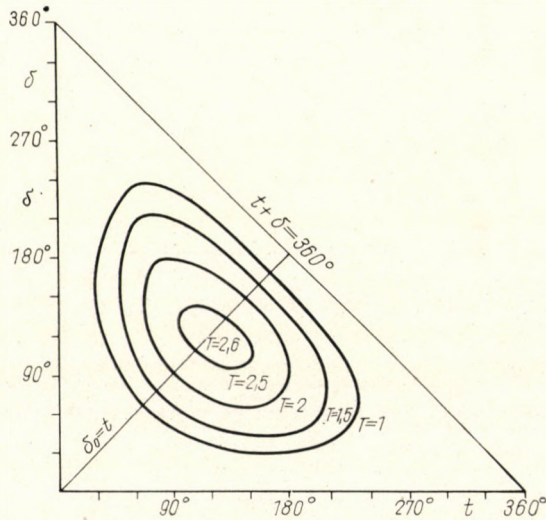


Fig. 6

If the three-phase, precise synchronization takes place in a block-connected unit, instead of X the term $2X$ becomes the denominator, and so instead of Eq. (30)

$$T_{\max} = 1.3 \frac{U^2}{X} \tag{30a}$$

is written. Accordingly, in case of a connection at $\delta = 120^\circ$ a higher torque may arise in the machine, and the unidirectional torque

$$T_e = 0.5 \frac{U^2}{X} \sin \delta \quad (31a)$$

s higher than with a three-phase terminal fault.

e) Single-phase precise synchronization on the generator side (Fig. 1c), the transformer reactance however is taken to be $X_t = 0$ for the time being. The expression of torque is:

$$\begin{aligned} T &= \frac{U^2}{X} \cos(t + \theta_0) [\sin(t + \theta_0) - \sin(t + \theta_0 - \delta) - \sin \theta_0 + \sin(\theta_0 - \delta)] = \\ &= \frac{U^2}{2X} [\sin \delta - \sin(t + \delta) + \sin t + \sin 2(t + \theta_0) - \\ &\quad - \sin 2(t + \theta_0 - \delta) - \sin(t + 2\theta_0) + \sin(t + 2\theta_0 - \delta)] . \end{aligned} \quad (32)$$

Of the terms in square brackets, the first three correspond to Eq. (29). There are other terms also superimposed onto the three-phase torque.

The unidirectional torque is now

$$T_e = \frac{U}{2X} \sin \delta , \quad (33)$$

which is merely half of the three-phase synchronization torque [see Eq. (31)].

At present the highest torque appears at $\delta = 135^\circ$ and $\theta_0 = 0$. Substituting these values, we obtain

$$T_{\max} = 2.91 \frac{U^2}{X} \quad (34)$$

so, in case of a single-phase synchronization comparing the most unfavourable cases, a roundly 12% higher torque may arise than with the three-phase synchronization.

For the most unfavourable θ_0 the torques are illustrated in plane δ, t in Fig. 7.

If a block-connected unit is concerned and $X_t = X$, then the torque values are halved, so the highest torque is

$$T_{\max} = 1.455 \frac{U^2}{X} . \quad (34a)$$

f) Two-pole, precise synchronization on the high-voltage side (Fig. 1d). The torque is expressed by

$$T = \frac{U^2}{8X} \left\{ 3 [\sin t - \sin(t + \delta) + \sin \delta] + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \left[\sin \left[(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} + 30 \right] - \sin \left[t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} + 30 \right] \right] \right\} \quad (35)$$

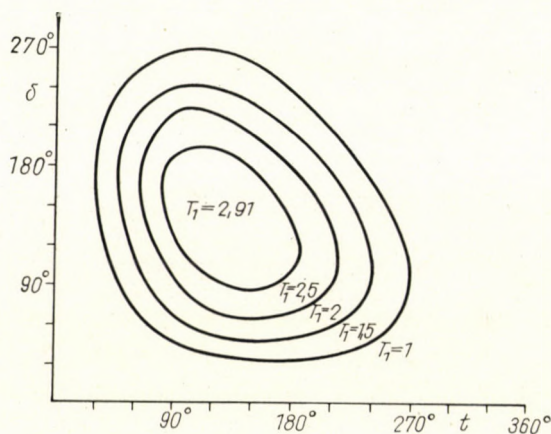


Fig. 7

The unidirectional torque is now

$$T_e = \frac{3}{8} \frac{U^2}{X} \sin \delta = 0.375 \frac{U^2}{X} \sin \delta \quad (36)$$

With respect to the three-phase synchronization, the unidirectional torque was now reduced by 25% [see Eq. (31a)].

If θ_0 in Eq. (35) is eliminated and the value giving the maximum torque is considered, then the curves of the torques may be plotted on plane $\delta - t$ (Fig. 8).

The maximum torque is reached at $\delta = t \approx 126^\circ$:

$$T_{\max} = 1.363 \frac{U^2}{X} \quad (37)$$

Thus, in the case of a two-pole synchronization the highest total torque is by about 4.8% higher than for a three-phase one.

g) Single-pole, precise synchronization on the high-voltage side for a block-connected generator-transformer unit (Fig. 1d).

The torque expression is:

$$T = \frac{U^2}{5X} \left\{ [\sin t - \sin(t + \delta) + \sin \delta] - 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \left[\sin \left[2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} + 30^\circ \right] - \left[\sin t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} + 30^\circ \right] \right] \right\}. \quad (38)$$

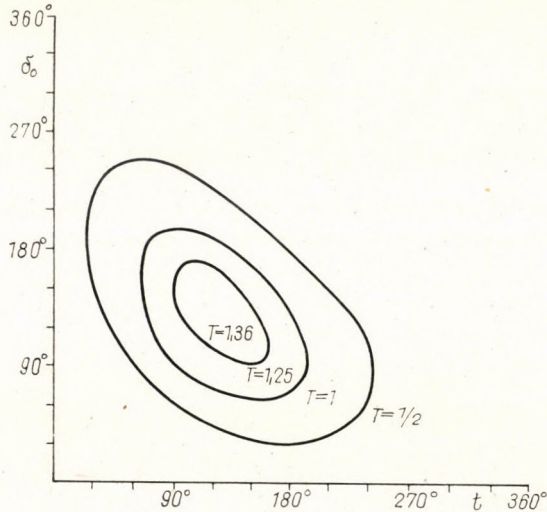


Fig. 8

The unidirectional torque is now

$$T_e = \frac{U^2}{5X} \sin \delta = 0.2 \frac{U^2}{X} \sin \delta. \quad (39)$$

In comparison to the three-phase synchronization, the power shock transferred to the network was now reduced by 60%.

Calculating θ_0 , giving the highest torque, and substituting it into Eq. (38), we can draw Fig. 9 on plane $t - \delta$.

The different synchronizing methods are well compared — from the point of view of the torques — in Fig. 10.

In Table II a summary is given of the different synchronizing methods.

The case — being otherwise quite improbable — when the circuit breaker is first closed in a two-pole way for allowing a maximum direct current flow and then the third pole also establishes a maximum direct current at the switch-in

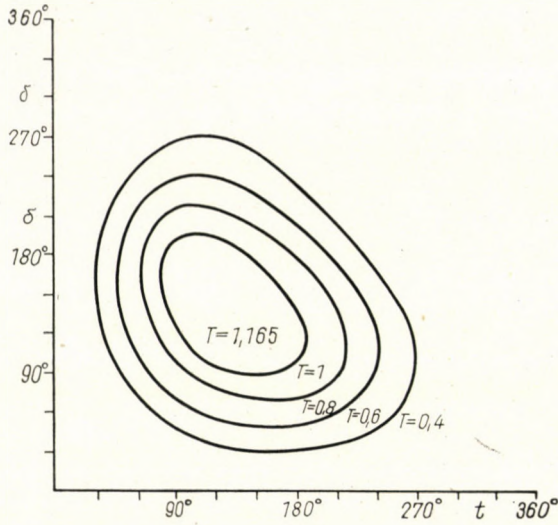


Fig. 9

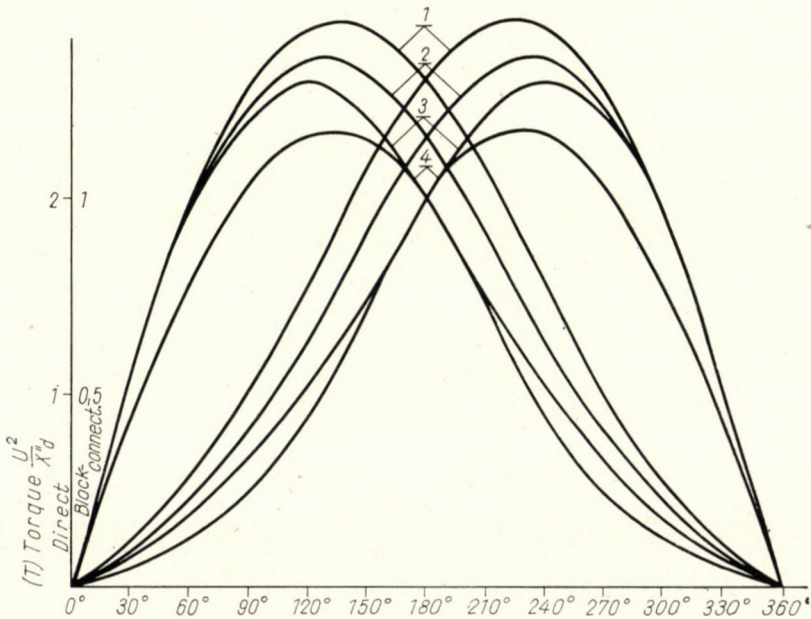


Fig. 10

1. 1-Phase synchronization
2. 2-Pole synchronization
3. 3-Phase synchronization
4. 1-Pole synchronization

has not been considered. (The peak current so formed may be, neglecting the damping, instead of the double value a 2.33-times value, too.)

Summarizing, it may be stated that to the different synchronizing methods different currents, torques belong as well as active and reactive power shocks transmitted to the network. The current and torque values may exceed those arising with the three-phase terminal short-circuit, but for an accurate synchronization, besides fixed initial values, also a synchronization with the most unfavourable value δ is necessary the probability of which is extremely small — as it is a case of great angles — and locking may also be applied.

Table II

Comparison of the maximum stresses at short circuit, or synchronization

Denomination	Subtransient current component on the high-voltage side	Subtransient current component on the generator side	Maximum torque	Maximum unidirectional torque
Three-phase short-circuit from no load on the generator side	$1.00 \frac{U}{X}$	$1.00 \frac{U}{X}$	$1.00 \frac{U^2}{X}$	0.0
Two-phase short-circuit from no load on the generator side		$0.87 \frac{U}{X}$	$1.30 \frac{U^2}{X}$	0.0
Three-phase synchronization (through a block-connected transformer)	$1.00 \frac{U}{X}$	$1.00 \frac{U}{X}$	$1.30 \frac{U^2}{X}$	$0.50 \frac{U^2}{X}$
Self-synchronization (through a block-connected transformer)	$0.50 \frac{U}{X}$	$0.50 \frac{U}{X}$		0.0 only asynchronous torque
Two-pole synchronization on the generator side (through a block-connected transformer)	$1.00 \frac{U}{X}$	$0.87 \frac{U}{X}$	$1.46 \frac{U^2}{X}$	$0.25 \frac{U^2}{X}$
Two-pole synchronization on the high-voltage side	$1.15 \frac{U}{X}$	$1.00 \frac{U}{X}$	$1.36 \frac{U^2}{X}$	$0.375 \frac{U^2}{X}$
Single-pole synchronization on the high-voltage side	$1.20 \frac{U}{X}$	$0.69 \frac{U}{X}$	$1.16 \frac{U^2}{X}$	$0.20 \frac{U^2}{X}$

From the point of view of stability for the system the active and reactive power shocks and unidirectional synchronous torque, respectively, have a role. On the basis of Table II it may be stated, that for a single-pole synchronization only 40% of the maximum, unidirectional torque arising with the three-phase synchronization is being established. As can be seen, the unidirectional torque is proportional to the sine of the angular difference, so its maximum occurs at $\delta = 90^\circ$. The unidirectional torque may be (similarly to the maximum

torque) both positive and negative depending on the circumstance, if the generator going into operation is leading or lagging with respect to the system. In the two cases the direction of the torque and that of the active power is contrary, while the reactive power is the same in both cases. As when judging the unidirectional torques the positive sequence current is of importance, the resultant reactances X_e of Fig. 1 give a picture of the unidirectional shocks being formed. Here the most striking advantage of the asymmetrical synchronization manifests itself, the resultant reactance is, namely, larger than in case of a three-phase synchronization, so the unidirectional torque is proportionally smaller. As the unidirectional torque is unfavourable from the point of view of the transient stability, decrease in the unidirectional torque must be regarded as advantageous. As regards self-synchronization, performing the synchronization with this method there is no unidirectional synchronous torque at all, but a reactive power shock is established in all cases, and, depending on the speed of rotation at switching-in, asynchronous torques may arise.

Summarizing the aforesaid about the different synchronizing methods, the application field of the single procedures may be stated as follows:

1. Under normal conditions the general application of the three-phase precise synchronization may be suggested, because at that times the synchronization may be performed with a minimum angular deviation, as the coming into operation of the generator is not too urgent. This method is even more advisable when the generator is also provided with an automatic synchronizing equipment.

2. In case of system disturbances self-synchronization, being a relatively simple and quick method, may be recommended for block-connected units. Though stresses arise in the individual machines and equipments in all cases these are not considerable. Nevertheless, from the point of view of the system the reactive power shock is unfavourable.

The self-synchronization may be carried out in all cases, when the subtransient formed currents are smaller than five-times the nominal value, that is, the transient currents are smaller than three and a half times. For smaller machines the *general* introduction of self-synchronization may be suggested, too.

3. In case of system disturbances also the asymmetrical synchronizing method, especially the single-phase synchronization, may be adopted, possibly with a reactor in the neutral. The maximum stress and the unidirectional stress are in this case the smallest. To avoid the subtransient current component from exceeding the three-phase short-circuit level on the high voltage side, locking with greater angles is to be used. The general application of the asymmetrical synchronizing method may also come into question, offering the advantage that the same method may be used in normal service and also in case of disturbances.

APPENDIX

In the following the subtransient values of i_d and i_q are given taking into consideration for all cases the simplifications adopted in the paper.

I. Currents

1. Three-phase synchronization

$$i_d = \frac{U}{2X} [1 - \cos t] + \frac{V}{2X} [\cos(t + \delta) - \cos \delta], \quad (\text{A } 1)$$

$$i_q = \frac{U}{2X} \sin t - \frac{V}{2X} [\sin(t + \delta) - \sin \delta]. \quad (\text{A } 2)$$

2. Single-phase synchronization at generator voltage

$$i_d = \frac{\sin(t + \theta_0)}{2X} \{ [U \sin(t + \theta_0) - V \sin(t + \theta_0 - \delta)] - [U \sin \theta_0 - V \sin(\theta_0 - \delta)] \}, \quad (\text{A } 3)$$

$$i_q = \frac{\cos(t + \theta_0)}{2X} \{ U \sin(t + \theta_0) - V \sin(t + \theta_0 - \delta) - [U \sin \theta_0 - V \sin(\theta_0 - \delta)] \}. \quad (\text{A } 4)$$

3. Two-pole synchronization on the higher voltage

$$i_d = \frac{U}{8X} \left\{ 3 [1 - \cos t - \cos \delta + \cos(t + \delta)] - 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sin \left[2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} - 60^\circ \right] - \sin \left[t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} - 60^\circ \right] \right] \right\}, \quad (\text{A } 5)$$

$$i_q = \frac{U}{8X} \left\{ 3 [\sin t - \sin(t + \delta) + \sin \delta] + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sin \left[2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} + 30^\circ \right] - \sin \left[t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} + 30^\circ \right] \right] \right\}. \quad (\text{A } 6)$$

4. Single-pole synchronization on the higher voltage

$$i_d = \frac{U}{5X} \left\{ [1 - \cos t - \cos \delta - \cos(t + \delta)] - 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sin \left[2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} - 60^\circ \right] - \sin \left[t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} - 60^\circ \right] \right] \right\}, \quad (\text{A } 7)$$

$$i_q = \frac{U}{5X} \left\{ [\sin t - \sin(t + \delta) + \sin \delta] - 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sin \left[2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} + 30^\circ \right] - \sin \left[t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} + 30^\circ \right] \right] \right\}. \quad (\text{A } 8)$$

5. The currents of the rough synchronization are obtained from 1. by the substitution $U = 0$.

6. Relations between the phase-currents and i_d and i_q ($i_0 = 0$ in the machine)

$$\left. \begin{aligned} i_a &= i_d \cos(t + \theta_0) - i_q \sin(t + \theta_0), \\ i_b &= i_d \cos(t + \theta_0 - 120^\circ) - i_q \sin(t + \theta_0 - 120^\circ), \\ i_c &= i_d \cos(t + \theta_0 + 120^\circ) - i_q \sin(t + \theta_0 + 120^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 9)$$

II. Flux-linkage equations

(The machine is originally excited to a voltage U at no-load.)

$$\Psi_d = U + \Psi_{ds}, \quad (\text{A } 10)$$

and

$$\Psi_q = + \Psi_{qs} \quad (\text{A } 11)$$

$$\Psi_{ds} = - X_{d''} i_d', \quad (\text{A } 12)$$

$$\Psi_{qs} = - X_{q''} i_q'. \quad (\text{A } 13)$$

REFERENCES

1. CsÁKI, F.: Szinkron generátorok önszinkronozása (Self-synchronization of synchronous generators). *Elektrotechnika* **49** (1956), 36.
2. GESZTI, P. O.: A New Synchronizing Method for Disturbance Conditions (Mainly for Turboalternators). *Acta Techn. Hung.* **21** (1958), 243.
3. DOHERTY, R. E.—NICKLE, C. A.: Synchronous Machines — I: An Extension of Blondel's Two-Reaction Theory. *AIEE Transactions* **45** (1926), 912—926.
4. DOHERTY, R. E.—NICKLE, C. A.: Synchronous Machines — II: Steady-State Power-Angle Characteristics. *AIEE Transactions* **45** (1926), 927—942.
5. DOHERTY, R. E.—NICKLE, C. A.: Synchronous Machines — III: Torque-Angle Characteristics under Transient Conditions. *AIEE Transactions* **46** (1927), 1—18.
6. DOHERTY, R. E.—NICKLE, C. A.: Synchronous Machines — IV: Single Phase Short Circuits. *AIEE Transactions* **47** (1928), 457—487.
7. DOHERTY, R. E.—NICKLE, C. A.: Synchronous Machines — V: Three-Phase Short Circuits. *AIEE Transactions* **49** (1930), 770.
8. PARK, R. H.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines — Generalized Method of Analysis — Part I. *AIEE Transactions* **48** (1929), 716—727.
9. PARK, R. H.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines — Part II. *AIEE Transactions* **52** (1933), 352—355.
10. WARING, M. L.—CRARY, S. B.: Operational Impedances of Synchronous Machines. *General Electric Review* **35** (1932), 578—582.
11. SHILDNECK, L. P.: Synchronous-Machine Reactances, a Fundamental and Physical Viewpoint. *General Electric Review* **35** (1932), 560—565.
12. CONCORDIA, CH.: Synchronous Machines, Theory and Performance. John Wiley and Sons, Inc. New York 1951.
13. Electrical Transmission and Distribution Reference Book. *Westinghouse Electric Corporation*, East Pittsburgh, Pennsylvania, 1950.
14. CLARKE, E.: Circuit Analysis of A—C Power Systems I—II. John Wiley and Sons, Inc. New York 1950.
15. CRARY, S. B.: Power System Stability I—II. John Wiley and Sons, Inc. New York 1950.
16. RÜDENBERG, R.: Elektrische Schaltvorgänge. Springer, Berlin 1953.
17. RÜDENBERG, R.: Transient Performance of Electric Power Systems. New York 1960.
18. RICHTER, R.: Elektrische Maschinen, II. B. Synchronmaschinen und Einankerumformen. *Birkhäuser*, Basel 1953.
19. BÖDEFELD, TH.—SEQUENZ, H.: Elektrische Maschinen. Springer, Wien 1949.
20. ZSDANOV, P. SZ.: Villamos rendszerek stabilitása (Power System Stability). Nehézipari Kiadó, Budapest 1951.
21. KOVÁCS, K. P.: Villamos gépek üzemtana, I. Aszinkron gépek (Operation of Electric Machines I. Asynchronous Machines). Tankönyvkiadó, Budapest 1952.
22. KOVÁCS, K. P.—RÁCZ, I.: Váltakozóáramú gépek tranzien folyamatái (Transient Processes in A. C. Machines). Akadémiai Kiadó, Budapest 1954.
23. VEREBÉLY, L.: Villamos erőátvitel IV. Kapcsoló és védőberendezések, túlárak, túlfeszültségek (Electric Power Transmission IV. Switch- and Protection Equipments, Overcurrents, Overvoltages). Tudományos Könyvkiadó N. V., Budapest 1950.
24. GESZTI, P. O.—KOVÁCS, K. P.—VAJTA, M.: Szimmetrikus összetevők (Symmetrical Components). Akadémiai Könyvkiadó, Budapest 1957.

25. POSTLER, L.: A generátorvédelem és szabályozás készülékei (Instruments of generator protection and control). Nehézipari Könyvkiadó, Budapest 1952.
26. Сыромятников, И. А.: Режимы работы синхронных генераторов. Госэнергоиздат, Москва 1952.
27. Ульянов, С. А.: Короткие замыкания в электрических системах. Госэнергоиздат, Москва 1950.
28. Сыромятников, И. А.: Применение способа самосинхронизации для включения синхронных машин на параллельную работу. *Электричество*, (1954), № 8, 3—9.
29. Л. П. Мамиконяц: Электромагнитные моменты вращения синхронных машин при включении их в сеть способом самосинхронизации. *Электричество* (1954), № 8, 3—9.
30. MAMIKONJANC, L. G.: Connecting Synchronous Machines in Parallel by the Self-Synchronizing Method. CIGRÉ, Paris 1954.
31. CSÁKI, F.: Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines. *Acta Techn. Hung.* 12 (1955), 49.
32. CSÁKI, F.: Szinkron generátorok önszinkronozása. Beszámoló a Bánhidai Erőműben végrehajtott mérésekről (Self Synchronization of Synchronous Generators. Measurements effected at the "Bánhida" Power Station). Report of the Institute for Electrical Power Research VILLENKI, 1955.
33. TUSCHÁK, R.: Szinkron gépek zárlati jelenségeinek vizsgálata a szimmetrikus összetevők módszerével (Test of the Short-Circuit Phenomena of Synchronous Machines by the Symmetrical Components Method). *Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei* 9 (1953), No. 1—4.
34. TUSCHÁK, R.: The Equivalent Circuit of Negative Sequence Reactances of Synchronous Machines and its Application to the Analysis of Short-Circuit Currents. *Acta Techn. Hung.* 6 (1952), No. 1—2.
35. RUSKIN, V. W.: Maximum Short Circuit and Faulty Synchronizing Torques on Generator Foundations. *AIEE Transactions* 74 (1955), 618—624.
36. KIRSCHBAUM, H. S.: Transient Electrical Torques of Turbine Generators During Short Circuits and Synchronizing. *AIEE Transactions* 64 (1945), 65—70.
37. BATCHELOR, J. W.—WHITEHEAD, D. L.—WILLIAMS, J. S.: Transient Shaft Torques in Turbine Generators Produced by Transmission Line Reclosing. *AIEE Transactions* 67 (1948), 159—165.
38. STONE, M.—KILGORE, L. A.: Transient Torques in Synchronous Machines. *AIEE Transactions* 52 (1933), 945—953.
39. Глушко, И. А.: Механизм втягивания генератора в синхронизм при самосинхронизации. *Электричество* (1955), № 4, 30—33.
40. PETERS, W.: Schnellsynchronisierung großer Maschineneinheiten. *ETZ* 52 (1931), 753.
41. RENGIER, N.: Grobsynchronisierung leerlaufender Turbogeneratoren. *AEG Mitteilungen* (1931), 426.

SYNCHRONISIERUNGSMETHODEN

F. CSÁKI—P. O. GESZTI

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz werden die angänglichen Synchronisierungsmethoden, d. h. die dreiphasige, präzise Synchronisierung, die Selbstsynchronisierung und die asymmetrische Synchronisierung verglichen. Als Grund der Vergleichung dienen die an der Hochspannungsseite im ungünstigsten Falle auftretenden Ströme sowie die im Generator entstehenden maximalen Momente und die das System beeinflussenden einwegigen Momente. (Zur vollständigen Vergleichung werden auch die Ströme und Momente des dreiphasigen Kurzschlusses in Betracht gezogen.) Schließlich werden die Verwendungsgebiete der einzelnen Synchronisierungsverfahren dargelegt.

MÉTHODES DE SYNCHRONISATION

F. CSÁKI — P. O. GESZTI

RÉSUMÉ

Les trois modes de synchronisation possibles, à savoir la synchronisation précise triphasée, l'autosynchronisation et la synchronisation asymétrique sont comparées par les auteurs. Les courants se produisant sur le côté haute et moyenne tension dans le cas le plus défavorable, ainsi que les couples maxima se présentant dans le générateur et les couples unilinéaires influençant le réseau servent de termes pour la comparaison. (Pour rendre celle-ci complète, les courants et couples du court-circuit triphasé ont été également pris en considération.) Enfin, les champs d'application des différentes méthodes de synchronisation sont indiqués par les auteurs.

МЕТОДЫ СИНХРОНИЗАЦИИ

Ф. ЧАКИ — П. О. ГЕСТИ

РЕЗЮМЕ

В статье дается сравнение возможных методов синхронизации: точная трехфазная синхронизация, автосинхронизация и асимметрическая синхронизация. В качестве основы для сравнения служат токи, образующиеся в наиболее неблагоприятных случаях со стороны средних и высоких напряжений, далее моменты одного направления, действующие на сеть и, соответственно, максимальные, возникающие в генераторах. (В целях полного сравнения учтены также токи и моменты трехфазного короткого замыкания.) Наконец, в статье определяются области применения отдельных методов синхронизации.

PROPOSITIONS FOR A METHODOLOGY TO MAKE COAL-WASHABILITY SURVEYS AND FOR THE PRACTICAL USE OF COAL-WASHABILITY PLOTS

G. TARJÁN

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MINERAL DRESSING, TECHNICAL UNIVERSITY MISKOLC

[Manuscript received October 4, 1962]

Examination data concerning indigenous coals, among them plotted data for coal washing have been continuously gathered and completed by the Mining Research Institute Budapest during recent years. Under the title "Coal Examination Data" edited by J. BERÉNYI and E. GÁL, analytical data collected during the years 1950 and 1951 and then again in 1952 and 1953 were published in book form in 1953 and 1955 respectively. A number of research reports issued by the section for coal preparation at the Mining Research Institute also comprised plots on coal washing.

The "Standard specification" on the survey of coal characteristics and the recording of data therefrom has not been worked out in detail yet. This paper was intended as a contribution to the establishment of such a standard specification.

I. Sampling

No general rule can be given whether samples for coal washing tests are to be taken separately from each bank, resp. bed or for the whole mining plant or mining district.

If an answer is to be given to the technical and economic questions arising as to the possible improvement of the present quality of the coal from a certain region to be carried out in a central washing plant, it is justified to take samples from the coal produced by each screening plant operated in the mining plant and to mix them in such a way, that the relative amounts of the samples should be in accordance with the contribution rendered by the quality involved to the over-all production, and then to test this "average" sample. If a central screening plant is provided for the mining area, the sample is to be taken here. In case that any variation in the coal quality produced in the mining district were to occur in the course of time — due either to the development or abandonment of any mining plant or to the fact, that the fractions, the individual beds of different qualities contribute to the production undergo changes in the course of time, the results of coal washing in case of such quality variations may only be predicted, if the data on coal washing and grain fall for each bed of the different mining plants are available individually. Based on these data, the results of washing of any future combination of crude coals originating from the mining district concerned may be obtained by *computations* (provided that no changes in the quality and thickness of the

coal located in the beds will occur while winning proceeds). In these cases the samples taken from each bed of the mining plants concerned have to be tested to obtain coal washability data. Sampling has to cover the stone bands, too. In case that the stone bands may come into the crude coal in course of winning, they must not be left out of the sampling. If there are banks in the bed comprising different qualities of coal and these may be fallen individually the samples taken from each bank should all be tested to decide, whether these have to be prepared separately or collectively for coal washing.

It would be very useful if the cores of the investigation drillings representing the over-all bed section were also tested in respect to coal washability, the thickness and specific gravity of the bone coal sheds being determined, and by separating the cores of each single coal bank according to their specific gravities.

A core sample with a uniform cross-sectional area covering the entire section throughout may be considered, on the one hand, the most perfect kerf sample, on the other hand, could provide information on the local variations in the quality and thickness of the coal layer and on the washing data as to the crude coal for the time being inaccessible and which may possibly come to be brought down only after decades.

The amount of samples needed depends on the magnitude of the allowable error. It may be set down that

$$\frac{p[\%]}{100} = \frac{zG_1(c_1 - c)}{Gc},$$

where G represents the weight of the sample needed, c is the *average* value of a sample characteristic (specific gravity, ash or moisture contents, calorific value etc.), c_1 is a special value of the piece weighing G_1 having come into the sample concerning the characteristic involved, while z represents the number of pieces with the feature c_1 and weight G_1 .

$G_1 = kd^3 \delta_1$, where k represents a factor dependent upon the shape of the piece with specific gravity δ_1 and grain size d . E.g. the magnitude of k is for a cube 1, for a sphere $\pi/6 = 0.52$, for an oblong with the edge length ratio 1 : 1, 4 : 2 which is just able to fall through a screen with quadratically shaped apertures (grain size d here is equal to the middle gauge)

$$\frac{1}{1.4} \cdot \frac{1.4}{1.4} \cdot \frac{2}{1.4} = 1,$$

in case of an oblong falling through a bar screen (grain size d is equal to the minimum gauge) 1×1 , $4 \times 2 = 2.8$ etc.

If in the computation it is assumed that the presence of a single piece with a maximum grain size d and an extremely irregular feature c_1 will not affect the value of the feature c more than by p [%], to the minimum weight of the sample material the following relationship applies:

$$G = \frac{100 k \delta_1 d^3 (c_1 - c)}{pc}$$

where p means that the wanted feature c will by absolute values be $r = cp/100$ higher i.e. lower than its actual value, provided that the analysis of the sample material is to be carried out in a correct manner.

By making the substitution $p = 100 r/c$ the formula

$$G_r = \frac{k \delta_1 d^3 (c_1 - c)}{r}$$

may be written.

Calculating with the factor $k = 1$ to $p = 1\%$ $G_1 = 100 d^3 \delta_1 (c_1 - c)/c$ to $r = 1$ $G_{r1} = d^3 \delta_1 (c_1 - c)$ pertains. If d is given in dm, G or G_r is obtained in kg.

The minimum amount of material needed for a *screen analysis* is given by the relationship

$$\frac{p}{100} = \frac{G_1}{G_s} = \frac{100 k \delta_1 d^3}{sG}$$

as obtained from the formula

$$G = \frac{10\,000 k \delta_1 d^3}{sp}$$

where the conjugate values d and s may be read from the cumulative grain size graph $s = f(d)$. $p = 100 r/s$ through which the relationship

$$G_r = \frac{100 k \delta_1 d^3}{r}$$

is come by.

It will be found, that the value of G_r will always, and that of G as a rule, be at its maximum at $d = D$ pertaining to $s = 100\%$; $G = 100 k \delta_1 D^3/p$ i.z. $G_r = 100 k \delta_1 D^3/r$. (If $s = 100\%$, $p = r$ and $G = G_r$)

The quantitative amount of the required *slot samples* depends on the fact to what extent can the unchanged cross section of the slot be maintained. If the width of the section is represented by L , its depths by H , the section of the slot to be caved will be

$$R = LH.$$

The average section actually caved into the different layers with feature c is $R_c = R + \Delta R$. If for each different layer with feature c_x the value of $\Delta R = R_c - R$ is not identic, the slot sample will not represent the average features of the bed in question well.

The percentage error is obtained by the formula

$$p[\%] = 100 \frac{\sum m_x \Delta R_x c_x \delta_x}{\sum m_x R c_x \delta_x},$$

where m represents the length (thickness) of the single layers. The characteristic magnitude ΔR_x for the single layers depends on the fragility, crackedness of the bed, the skill of the person taking the slot sample, the attention paid by him to hollowing out the sample etc. For given values of ΔR_x the greater the R , the slot of the section, the lower will $p\%$ be.

A part of the slot sample will fall to dust, roll off and so cannot be added to the sample. Same is also falsified, if the lost parts do not represent the average feature c of the sample. (E.g. usually a greater part of the material taken off the layers which tend to fall to dust or to split will become lost.) The error occurring in this way is also smaller if the slot section is larger. (Drilling cores having circular sections throughout are the best slot samples.)

The average c value of the bed can be obtained more exactly, if the material originating from layers of different qualities c_x are collected separately and the average c value of the layer (ash, moisture, calorific value etc.) is calculated from the average specific gravity of the single layers, their c_x values and their thicknesses. Thus, the differences as exist in the ΔR values of the individual layers will not affect the final results, nor will the inequalities which were made when the single layers were hollowed out do so (ΔR errors not at all modify, or if so, only to a slight degree) the c_x value of the layer, provided that it is uniform in its entire height or only varies insignificantly.

It was found that the most suitable method was to confine the slot sampling to the individual layers of the bed (to its banks and intercalations) through determining their heights and other different characteristics (specific gravity, ash, moisture, volatile components, coking capacity etc.).

The coal washing tests on slot samples or fractional slot samples may naturally be extended only to fine coal (< 10 mm or < 5 mm), moreover, the amount of sample material available will determine the maximum grain size below which the coarser pieces of the sample material have to be reduced in order to obtain conformity with the washability plot.

The quality of the individual layers of the coal bed have often a uniform character over a great extension of the bed and any change occurring in the

quality of same will be a function of the variations of the thicknesses of the individual layers only, or the quality of the single layers (volatile matter, coking capacity etc.) will show a more or less systematic variation in the different parts of the bed; the determination of these may provide data for coal survey.

Examples

1. Screen analysis

If $k = 1$, $\delta_1 = 2.6$, $100 k \delta_1 = 260$, that is $G = 260 D^3/p$, $G_r = 260 D^3/r$. Consequently, that the weight percentages of our screen tests should not differ more than by $r = 1$ from the actual value of the maximal grain sizes being D (in dm), the following amount of sample material (in kg) must be used (Table I):

Table I

D_{\max} , dm	G_r , kg
3	7000
2	2100
1	260
0.5	33
0.1	0.26

If the error $r = 2\%$ is tolerated, half of the weights G_r is enough, in case if an accuracy as high as $r = 0.1$ is needed, tenfold the values of G_r as was given in the table are to be taken for the screen test (thus, when $D = 1$ dm, $G_r = 2.6$ t).

2. Determination of specific gravity

Let us assume that the average specific gravity of crude coal and that of the products of coal washing (δ) and the values e.g. those for the most extreme specific gravities ($\delta_1 > \delta$ i.e. $\delta_2 < \delta$) are e.g. those listed in Table II. In the four last headings of the table are given those values $K' = 100(\delta_1 - \delta)$, $K'' = 100(\delta - \delta_2)$, $K_r' = \delta(\delta_1 - \delta)$ and $K_r'' = \delta(\delta - \delta_2)$, which multiplied by D^3/p i.e. D^3/r give the magnitudes of G and G_r , respectively. (By determining the specific gravity in our start equation instead of G_1 and G the values G_1/δ_1 and G/δ are to be done, if the value δ takes the place of c . In case the maximum grain size $D = 1$ dm and $p = 1$ i.e. $r = 1$, the values of K and K_r , respectively, in the table directly give G and G_r in kg. In that case with the sample amount $G_r = K_r$ being used the specific gravity found may differ by 1.00 specific gravity value from the actual specific gravity of the material

stack sampled. When the amount of material used is as much as $G_r = \frac{K_r D^3}{0.01}$ the specific gravity deviation is 0.01, with $G_r = K_r D^3/0.02$ same is 0.02 etc. (The values K_r are also smaller than the kg weight of any piece of coal with 1 dm i.e. in the "theoretical" sample weight allowing the deviation by $r = 1.00$ specific gravity value, not one single piece with a maximum grain size would find room.) When the amount of the sample material is $G = K$ for the sample comprising pieces not greater than 1 dm the error cannot exceed 1% of the actual specific gravity.

E.g. instead of the specific gravity of the raw coal which is 1.6 those ranging between $1.6 \pm 0.016 = 1.584 - 1.616$ may be measured, or for the specific gravity of the barren material instead of the actual value 2.1 the measured one may vary within the range 2.121 - 2.079.

As can be seen from the table, the values K' and K_r' as obtained with maximum specific gravities δ_1 , are as a rule higher than the ones K'' and K_r'' , respectively, computed with the minimum specific gravities δ_2 .

Table II

Product	δ	δ_1	δ_2	K'	K''	K'_r	K''_r
Crude coal	1.6	2.6	1.2	100	40	1.60	0.64
Washed coal	1.4	1.8	1.2	40	20	0.56	0.28
Middling	1.8	2.2	1.4	40	40	0.72	0.72
Barren	2.1	2.6	1.6	50	50	1.05	1.05

Table III

Product	h	h_1	h_2	δ_1	δ_2	K'	K''	K'_r	K''_r
Crude coal	30	90	2	2.6	1.2	520	112	156	34
Washed coal	10	40	2	1.7	1.2	510	96	51	10
Middling	50	70	20	2.5	1.4	100	84	50	42
Barren	70	90	50	2.6	1.6	75	46	52	32

3. Determination of ash contents

In the first heading of Table III e.g. the average and extreme ash contents of the raw coal and the coal washing products h and h_1 i.e. h_2 and the specific gravities δ_1 and δ_2 of the pieces having maximum and minimum specific gravities are given. In the last four headings the values

$$K' = 100 \delta_1 \frac{h_1 - h}{h}, \quad K'' = 100 \delta_2 \frac{h - h_2}{h},$$

$$K'_r = \delta_1(h_1 - h) \quad \text{and} \quad K''_r = \delta_2(h - h_2)$$

may be found. By multiplying these with D^3/p and D^3/r , respectively, the values G and G_r are obtained.

Making the computation with δ_1 , higher values are obtained than with δ_2 .

In Table IV the values G_r kg are given in the case that $r = 1 - 0.1 - 0.01$ absolute maximum deviations are permitted for different maximum grain sizes D dm applied to raw coal and the products of coal washing. It can be seen that the value of G_r considerably varies with the maximum grain size D and the tolerated error r .

E.g. in a crude coal comprising pieces as great as 3 dm, instead of the actual ash contents, 30% for a sample material weighing 4.2 t values within the range 29 and 31% for a sample weighing 42 t ones between 29.9 and 30.1% are to be found; in case the sample material weighs 420 t the corresponding values will be in the range between 29.99 and 30.01. When, however, the coal is finer than 10 mm ($D = 0.1$ dm) the ash of the sample material weighing 15.6 kg will approach the actual magnitude of the ash contents which is 30% to as far as 0.01 absolute value, while in the case that the sample amount used is 1.56 kg, the approximation is 0.1%. It may be seen from the table, that in case a determination of the ash content is wanted with an accuracy of $r = 0.1\%$, the amount of the sample material taken from a coal having a maximum grain size of 50 mm must be as much as 2 t, while in case that the maximum grain size is 100 mm, 15 to 16 t material has to be sampled.

4. Determination of moisture content

If a maximum piece D comprised in the material stack with an average moisture content $n\%$ has the extremely deviating moisture content $n_1\%$

$$\frac{p}{100} = \frac{k \delta_1 D^3 (n_1 - n)}{Gn} \quad \text{ie.}$$

Table IV

$\pm r$	Crude coal, G_r kg						Washed coal or middling or barren, G_r kg					
	$D = 3$ dm	2 dm	1 dm	0.5 dm	0.2 dm	0.1 dm	$D = 3$ dm	2 dm	1 dm	0.5 dm	0.2 dm	0.1 dm
1	4 200	1 250	156	19.5	1.25	0.16	1 400	410	51	6.4	0.41	0.05
0.1	42 000	12 500	1 560	195	12.5	1.56	14 000	4 100	510	64	4.1	0.51
0.01	420 000	125 000	15 600	1950	125	15.6	140 000	41 000	5100	640	41	5.1

Table V

Product	F	F_1	F_2	δ_1	δ_2	K'	K''	K'_r	K''_r
Crude coal	3300	7000	0	1.2	2.6	135	260	4450	8600
Washed coal	5000	7000	3000	1.2	1.7	48	68	2400	3400
Middling	3000	4000	1000	1.4	2.5	47	167	1400	5000
Barren	700	2000	0	1.6	2.6	297	260	2100	1800

Table VI

$\pm r$	Crude coal						Washed coal					
	D = 3 dm	2 dm	1 dm	0.5 dm	0.2 dm	0.1 dm	D = 3 dm	2 dm	1 dm	0.5 dm	0.2 dm	0.1 dm
1	232 000	69 000	8600	1080	69	8.6	91 800	27 200	3400	425	27	3.4
5	46 500	13 800	1720	215	14	1.72	18 400	5 500	680	85	5.5	0.68
10	23 200	6 900	860	108	7	0.86	9 200	2 700	340	43	2.7	0.34

$\pm r$	Middling						Barren					
	D = 3 dm	2 dm	1 dm	0.5 dm	0.2 dm	0.1 dm	D = 3 dm	2 dm	1 dm	0.5 dm	0.2 dm	0.1 dm
1	135 000	40 000	5000	625	40	5.0	56 700	16 800	2100	262	17	2.1
5	27 000	8 000	1000	125	8	1.0	11 300	3 400	420	53	3.4	0.42
10	13 500	4 000	500	63	4	0.5	5 700	1 700	210	26	1.7	0.21

$$G = \frac{100 k \delta_1 D^3 (n_1 - n)}{pn} = KD^3/p,$$

where $p = 100 r/n$ thus

$$G_r = \frac{k \delta_1 D^3 (n_1 - n)}{r} = K_r D^3/r.$$

E.g. when $k = 1$, $\delta_1 = 2.6$, $n = 20\%$, $n_1 = 40\%$ (or 0%), $K = 260$ and $K_r = 52$ and when $n = 20\%$, $n_1 = 30\%$ (or 10%), $K = 130$ and $K_r = 26$. If e.g. $K_r = 26$ is valid, to a tolerated moisture deviation $r = 1\%$, in case that the maximum grain sizes are successively $D = 3 - 2 - 1 - 0.5 - 0.2 - 0.1$ dm, the sample weights $G_r = 700 - 210 - 26 - 3.3 - 0.21 - 0.026$ pertain (for $r = 0.1\%$ tenfold; for $r = 0.01\%$ hundredfold sample weights ought to be taken).

5. Determination of the calorific value

If in the coal stack with an average calorific value F pieces with grain size D , extreme calorific value F_1 (i.e. F_2), specific gravity δ_1 (ie. δ_2) are comprised, the formulae

$$G = \frac{100 k \delta_1 (F_1 - F) D^3}{Fp}$$

and

$$G_r = k \delta_1 (F_1 - F) \frac{D^3}{r},$$

i.e.

$$G = \frac{100 k \delta_2 (F - F_2) D^3}{Fp}$$

and

$$G_r = k \delta_2 (F - F_2) \frac{D^3}{r}$$

are valid.

In Table V as examples, numerical data are shown where

$$K' = \frac{100 \delta_1 (F_1 - F)}{F}, \quad K'' = \frac{100 \delta_2 (F - F_2)}{F}$$

$K_r = \delta_1 (F_1 - F)$ and $K_r'' = \delta_2 (F - F_2)$.

In Table VI the minimum sample weights G_r kg required, pertaining to the margins of error $r = 1 - 5 - 10$ kcal/kg and the different minimum grain sizes D dm are shown.

II. Plotting of coal washability graphs

Weights, ashes, water contents (specific gravities) for the single specific gravity fractions of samples with given grain sizes are measured. The average and extreme specific gravities, ashes, moistures, calorific values of the single specific gravity fractions differ only slightly from one another, thus the single differences $c_1 - c$ (and those termed $\delta_1 - \delta$, $h_1 - h$, $n_1 - n$ and $F_1 - F$) are small. Therefore, the values $K_r = k \delta_1 (c_1 - c)$ i.e. $K_r = k \delta (\delta_1 - \delta)$, the result of the determination of the specific gravity, too and the magnitude $G_r = K_r D^3/r$ might be relatively low, thus for the determination of the ash % with an accuracy of e.g. 0.1 or of the average specific gravity of the single fractions with an accuracy of e.g. ± 0.005 , respectively, from the single fractions relatively tolerable quantities of sample material are needed. The total amount of sample material required to plot a coal washability graph is obtained by

multiplying the weight of the fraction sample pertaining to the accuracy to be reached with $100/S$, where S is the weight percentage of the fraction in question. For identical $c_1 - c$ differences the S values are the lowest where $\Delta h/\Delta s$ is great (where the basic graph suddenly changes). Thus the critical value $100 K_1/S$ giving the highest total amount G_r of the sample material is usually found at this locus.

In Table VII K and K_r values obtained through δ_1 and δ , h and h_1 i.e. F and F_1 — these are all taken as examples — and the magnitudes $100 K/S$ and $100 K_r/S$ obtained through $S\%$ taken for coals with different washability behaviour (poor, mediocre, good) are shown. The critical values $100 K_r/S$ in respect to ash 200 — 400 — 1000 were obtained, in our example, in each case for the specific gravity fraction range 1.8 to 2.0 the critical values for the specific gravities 4.6 — 6.9 — 9.5 were found to be in the specific gravity fraction range 1.8 to 2.6, while the corresponding critical $100 K_r/S$ calorific values 9000 — 18 000 — 40 000 were obtained in the specific gravity fraction range 1.6 to 2.0. Their ratio is 1 : 2 : 5 i.e. 1 : 1.5 : 2.1 i.e. 1 : 2 : 4.5, thus to plot a graph for a coal with poor washing properties one fifth of the amount of sample material is required than would be needed, if a coal were used, whose washing behaviour is good, in that case if a determination of the ash and calorific value for each specific gravity fraction within the same tolerance of error is wanted. One half of the sample material is required when, the average specific gravity of the specific gravity fractions an error of the same magnitude is permitted. It may also be seen from the table, that the $100 K_r/S$ values for the fractions with low specific gravities are considerably smaller than with mediocre or high specific gravities that is in case the ash, specific gravity i.e. calorific value of a washed coal is to be obtained within a given tolerance and for the ash specific gravity and calorific value of the middling and tailing wider margins of error are tolerated. The plotting of the washing graph may be effected with considerably smaller amounts of sample material. E.g. for a coal with mediocre washing properties and a maximum grain size $D = 1$ dm, if the ash of any fraction is to be obtained within the accuracy range $r = 0.1\%$ — the critical $100 K_r/S$ being here equal to 400 — the coal washing graph has to be plotted with $G_r \geq 4000$ kg sample material. In this case the ash of the specific gravity fraction ranging between 1.8 and 2 will be accurate up to 0.1% e.g. the ash of the fraction 1.5 to 1.6 by $85.4/400 \times 0.1 = 0.022\%$ that in the range 1.3 to 1.4 by $18.7/400 \times 0.1 = 0.0047\%$. In case, that the ash of the fraction 1.5 to 1.6 is to be obtained with an accuracy of 0.1% the amount of sample material used has to be $G_r \geq 854$ kg, and in this case it is not possible to have a better accuracy in the determination of the ash of the fraction 1.8 to 2.0 than $400/85.4 \cdot 0.1 = 0.47\%$, while the ash for the fraction 1.3 to 1.4 is obtained within the accuracy $18.7/85.4 \cdot 0.1 = 0.022\%$. If the utmost grain size D is not 1 dm the formula

Table VII

δ_1	δ	K	100 K_r	Washability poor			Mediocre washability			Washability good		
				S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$
1.3	1.25	5	6.25	10	50	0.625	15	33.3	0.416	15	33.3	0.416
1.4	1.35	5	6.75	25	20	0.250	30	16.6	0.208	40	12.5	0.156
1.5	1.45	5	7.25	20	25	0.362	20	25.0	0.362	20	25	0.362
1.6	1.55	5	7.75	10	50	0.775	15	33.3	0.516	10	50	0.775
1.8	1.7	10	17.0	10	100	1.70	5	200	3.40	3	333	5.666
2.0	1.9	10	19.0	10	100	1.90	5	200	3.80	2	500	9.50
2.6	2.3	30	69.0	15	200	4.60	10	300	6.90	10	300	6.90

δ_1	h	h_1	K	K_r	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$
1.3	5	7	52	2.6	10	520	26.0	15	350	17.3	15	350	17.3
1.4	8	12	70	5.6	25	280	22.4	30	230	18.7	40	175	14.0
1.5	15	20	50	7.5	20	250	37.5	20	250	37.5	20	250	37.5
1.6	25	33	51	12.8	10	510	128	15	340	85.4	10	510	128
1.8	40	50	40	18	10	400	180	5	800	360	3	1330	600
2.0	60	70	33	20	10	330	200	5	660	400	2	1650	1000
2.6	80	90	33	26	15	220	173	10	330	260	10	330	260

δ_1	F	F_1	K	K_r	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$	S%	$\frac{100 K}{S}$	$\frac{100 K_r}{S}$
1.3	6000	5400	13	780	10	130	7800	15	87	5 200	15	87	5 200
1.4	5000	4700	8	420	25	32	1680	30	27	1 400	40	20	1 050
1.5	4500	4000	17	750	20	85	3750	20	85	3 750	20	85	3 750
1.6	3500	3000	23	800	10	230	8000	15	153	5 330	10	230	8 000
1.8	2500	2000	36	900	10	360	9000	5	720	18 000	3	1200	30 000
2.0	1300	900	62	800	10	620	8000	5	1240	16 000	2	3100	40 000
2.6	400	0	260	1040	15	1730	7000	10	2600	10 400	10	2600	10 400

$$G_r = \frac{100 K_r \cdot D^3}{S \cdot r}$$

gives the amount of sample material pertaining to the r value.

E.g. for a grain size $D = 0.1$ dm and the accuracy $r = 0.1\%$ $G_r = 400 \cdot 0.1^3 / 0.1 = 4$ kg sample material will suffice.

In Table VII the average specific gravities of the single specific gravity fractions were chosen to represent the arithmetic mean of the fraction boundaries. Under this condition $K = 100(\delta_1 - \delta)$ and $K_r = \delta(\delta_1 - \delta)$ will have the possible minimum values. If e.g. the average specific gravity for fraction 2.0 to 2.6 were instead of 2.3, 2.2 i.e. 2.1, the value of K would not be 30 but 40 i.e. 50 (that is to say 1.33 i.e. 1.66 times as much), the value of $100 K_r$ would instead of 69 88 be i.e. 105 (that is 1.27 i.e. 1.52 times as much) or if in the computation for the specific gravity fraction 1.8 to 2.0 instead of the average fraction specific gravity $\delta = 1.9$ 1.88 (or 1.92) is used, the value of K would not be 10 but 12 that of $100 K_r$ 22.6 (or 23.0) instead of 19.0 that is 1.19 (or 1.21) times as much.

The indigenous coals have mediocre or poor washability properties. To plot washability graphs for coals, whose washing behaviour is mediocre in case of different permitted r ($= \Delta s\%$, i.e. $\Delta\delta$, i.e. $\Delta h\%$, i.e. ΔF) values about the amounts of sample material headed under G_r kg in Table VIII should be taken. (If the average specific gravity of the critical specific gravity fractions differs from the arithmetic mean, the sample amounts G_r kg headed under $r = \Delta\delta$ will increase in direct proportion to the corresponding K_r values.) The amount of sample material needed from poorly washable coals is, with identic permitted ash deviations $r = \Delta h\%$, half as much as from well washable ones, 2.5 times as much than the values given in the table for coals with mediocre washing properties. With identic specific gravity deviations $r = \Delta\delta$ the required amount from coals of poor and good washing behaviour, respectively, should be $\frac{2}{3}$ ($= 4.6/6.9$), i.e. $\frac{4}{3}$ ($= 9.5/6.9$) times as much, with identic calorific value deviations $r = \Delta F$ half i.e. 2.2 times as much, as the amounts listed in the table.

From the table the conclusion may also be drawn, that there is no reason to determine or to make a tabulation comprising coal washing plot data the weight percentages and the ash of the fractions, whose specific gravities exceed 1.6, by a greater accuracy than one decimal, nor to compute the calorific value more exactly, than by 5 calories (or to strive after a computation giving greater accuracy than a slide rule can afford), unless the amount of sample material used does not considerably exceed the values listed under the heading $\Delta h = 0.1$.

After all it seems suitable to use for specific gravity tests to be made on coals with mediocre washing behaviour the quantities (or more than these) listed under the heading $r = \Delta h\% = 0.1$ in Table VIII. Where coals with poor washing properties are concerned, half as much will suffice.

Table VIII

D [mm]	r = Δs [%]			r = Δb			r = Δh %			r = ΔF , kcal/kg		
	0.5	0.2	0.1	0.01	0.005	0.001	0.5	0.2	0.1	10	5	1
150	1760	4400	8800	2330	11 650	23 300	2700	6750	13 500	6100	12 200	61 000
100	520	1300	2600	690	3 450	6 900	800	2000	4 000	1800	3 600	18 000
80	270	670	1360	350	1 770	3 540	410	1020	2 050	920	1 840	9 200
60	110	280	560	150	750	1 500	170	430	860	390	780	3 900
40	32	83	170	44	220	440	50	130	260	115	230	1 150
20	4.2	10.5	21	5.5	28	55	6.4	16	32	14.4	29	144
10	0.5	1.3	2.6	0.7	3.5	7	0.8	2	4	1.8	3.6	18
5	0.065	0.16	0.33	0.08	0.43	0.8	0.1	0.25	0.5	0.23	0.45	2.25
2	0.004	0.011	0.021	0.006	0.03	0.06	0.006	0.016	0.032	0.014	0.03	0.14

The specific gravity analysis (float and sink testing) of coal may be carried out faster with the tank and its accessories shown in Fig. 1.

If the whole sample material finds room in the tank, the separation is commenced with one barite-bentonite suspension having the lowest specific gravity (or the watery solution of zinc chloride may also be used). The part sunk here should not occupy more than half the volume of the tank. The swimming part can completely be decanted in one cycle by immersing the edge "2R" of the funnel with a sieve bottom into the suspension and pulling it longitudinally across the tank. The dimensions of the funnel are $2R \times 4/3R$,

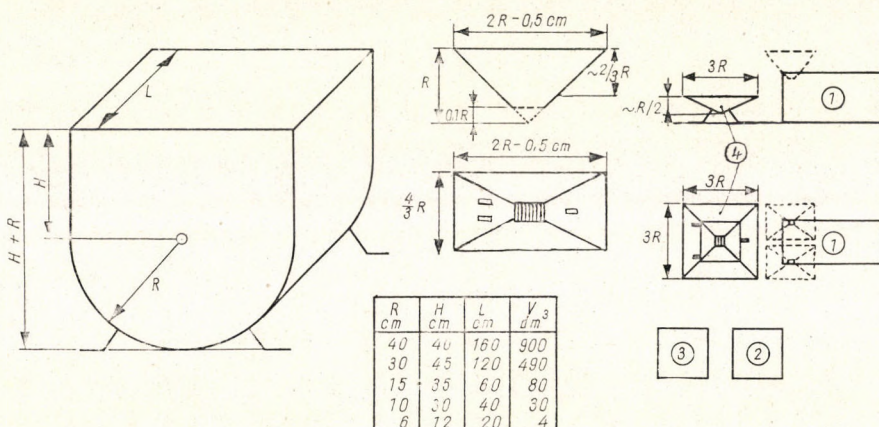


Fig. 1

but the "nominal" gauge $2R$ should be by about 0.5 cm shorter than the width of the tank. The suspension flows quickly through the sieve (the "grate" made of strong wires) of the funnel. Until dripping will have come to an end the funnel may be located on a bar laid across the rim of the tank, and the tank itself and the pieces possibly left out or emerging when the sunken part is disturbed may be put into this funnel, too. If the specific gravity fraction would not find room in a single funnel, two or three funnels may be filled with it.

After the dripping has stopped, the funnels together with the coal inside them are immersed into the tanks (signed 2, 3) filled with water in order to wash off the suspension material adhering to the coal surface. If several funnels are used, this coal can be left in them until it becomes air-dry, if "empty" funnels are needed to decant other fractions, the fraction is kept stored in one of the trays 4, these also have an aperture covered below with a sieve until the air dry condition is reached. The next specific gravity fractions are floated out from the sample material residue which had sunk to the bottom of the tank by adding and mixing fresh barite powder (or dense barite slurry) in order to increase the specific gravity of the suspension, measuring at each

instant the specific gravity of the surface suspension dripping from the funnel (this is made e.g. with an areometer or by weighing a given volume of suspension). The fraction that has the highest specific gravity among the ones which can be separated in the barite suspension may be emptied from the bottom of the tank also by the "2R" edge of a funnel into another one located on the rim of the tank, to let the suspension drip off, or a special ladle can be made for this purpose. For the possible further fractionating of this product of high specific gravity an iron oxide suspension prepared in a smaller tank may be applied.

If the entire amount of the sample material cannot find room in our specific gravity tank it is suitable to begin the fractionating with a suspension specific gravity in which the sunken portion can be held by the tank (filling up not more than half of the volume of same). The floating part will be removed then, intermittently by decanting each "portion" and adding new sample material, and will provisionally be put on the tray(s) 4 without washing off the suspension material adhered to it. The product having sunk down in the tank, and representing the part of the whole sample material with "high specific gravity", will be handled thereafter in the same manner as was shown earlier by gradually increasing the specific gravity with the addition of fresh barite. After the product having the highest specific gravity is removed from the tank, the specific gravity of the suspension is set to be equal to the lowest one of the "normal" specific gravity measurement (by partial removal of the dense suspension and substituting fresh water for same) than the sample material with the "low specific gravity" put aside temporarily is thrown from the tray into the separation tank and the procedures to follow are continued in the known manner.

This working mode may be applied when the total volume of our sample material is not more than 3 to 4 times as much as the receptivity (half of the volume) of the separation tank used. If the total amount of the sample material were to exceed this quantity e.g. several tons of material has to be separated according to specific gravities and the volume of the tank available is only 400 to 500 l, the procedure described cannot be applied any longer. In this case the "usual" method must be followed; in a suspension with a given specific gravity the total amount of sample material (i.e. its existing residual part) has to be separated into two individual products by intermittent addition. Both the floating product and the one that has already sunk and for which there is no room in the tank, should be emptied and stored temporarily, then after altering the specific gravity of the product that has sunk (or kept floating) in course of the precedent separation procedure is to be selected into two fractions.

The practice has shown the specific gravities of the suspensions obtained to form even numbers (i.e. 1.40, 1.50 etc.). This circumstance has its definite

advantages. (The data for the different washing plots may directly be set against one another, etc.) The exact setting of the specific gravity of the suspension to a predetermined value would be a tiresome and roundabout procedure. It seems more beneficial not to strive for these even numbers any longer, but to measure the existing specific gravity as it is observed and omit setting it to some exact value. With the HR (Henry—Reinhardt) plotted washability graph whichever washing data falling within any arbitrary specific gravity limits may be read i.e. computed from same.

A very great advantage offered by the new method proposed is the possibility of setting the S weight percentage of the fractions separated — according to their specific gravity ad libitum. This enables us to use — even in case the coals with mediocre or good washing properties are to be separated relatively great partial weights (e.g. $S > 10\%$ instead of 5% or 2 to 3%). By doing so, however, the value of $100 K_r/S$ will diminish, whereby the quantity of the sample material required to reach the prescribed accuracy will be diminished too. (E.g. from coals with good or mediocre washing properties the amount of sample material that has to be used for poorly washable coals will suffice, about half as much as given in Table VIII for G_r kg will do.)

The sieve analysis of raw coal may be omitted if the long term distribution of the products of the coal mining plant (or mine district) involved according to commercial coal size categories is available. Namely these represent more exact average data than could be obtained by the sieve analysis of any ad hoc sample of whatever great amount.

The single sieve classes should not be separated if possible individually, but the samples taken in adequate quantities from the single sieve classes ought to be mixed and the mixture fed for a sole specific gravity test; by doing so the time needed for a specific gravity test can considerably be shortened. By sieving the single specific gravity fractions subsequently the specific gravity fractions for each sieve class are obtained; by determining the weight, ash, moisture, calorific value of these the washing graph for each sieve class may then be plotted. The intermixed sample should not represent the originally existed granulometry of the raw coal but comprise the single sieve classes corresponding to the ratio of D^3 , e.g. covering these including the minimum grain size of 10 mm. (The specific gravity of coals finer than 10 mm has to be separately determined and not in a barite-bentonite suspension [nor in a watery zinc chloride solution] but in a heavy liquid consisting of carbon tetrachloride, bromoform and benzene.) The common fractioning of the sieve class mixtures according to specific gravities offers the additional advantage of separating the fractions of the single sieve classes with identic specific gravity limits, thus it may readily and definitely be fixed, whether the relationship between the specific gravity and ash is identic or different.

If the relationship as exists between the specific gravity, on the one hand, and the ash, moisture, calorific value on the other, and that between the ash and the calorific values (in respect to the air-dry material or to the one with nil moisture content) for the coals originating from the mining district, mining plant bed or bank in question are known (the values for the different grain size classes may possibly differ from one another) the tests for the determination of the ash moisture content, calorific value for the specific gravity fractions of the coal involved need not be made, because these values will be directly provided by the specific gravity graph. The plotting of the specific gravity graph, however, can be quickly effected while the determinations of ash, calorific value, moisture etc. are circuitous and labour-consuming procedures (pulverisation, weighing). Thus, the mentioned relationships (as exist between the specific gravity and ash, ash and calorific value) for coals originating from the single mining districts (beds, banks) should be elucidated as soon as possible. If the specific gravity-ash-etc.-relations are not identic, their relative displacements are also to be established by making a common figure to illustrate the specific gravity-ash-etc. relationships for the different grain size classes and the product obtained by fine grinding (into grain sizes below 5 to 10 mm) of the total raw coal. (The graphs for the single slot samples correspond to the ones of the finely ground over-all raw coal.) These are just the relationships to form the most important group of data for the coal preparation survey. And if these are available, a great number of washing graphs may be plotted within a short time as only the separation according to specific gravities and weighing of the single air-dry specific fractions need be carried out.

The moisture is just as important a parameter of the coal, as ash or calorific value, moreover, one that affects beside these latter values that of specific gravity too. Thus, it is important that the value of the moisture content pertaining to other parameters be known.

The "mine wet" state of the slot samples held in air-proof boxes or that of the samples taken shortly after the winning changes in the open air, this coal becomes air-dry. The air-dry moisture is — especially with younger brown coals or lignites — not a constant value, but the "hygroscopic" moisture of the coal is the function of the humidity and temperature of the air. Spreading the reduced mine wet coal to form a thin layer, the weight decrease takes place until the weight constancy is reached gives the changes which occur in the amount of water pertaining to the mine wet and air-dry state. The changes in weight, that the hygroscopic "air-dry" coal put into an exsiccator is subject to until the state of weight constancy sets in, may be traced under the different humidity contents of the exsiccator atmosphere and the existing water content of the air-dry coal (the hygroscopic curve of the coal as a function of humidity content) determined when a watery solution of sulfuric acid (with known vapour tension) is put into the exsiccator beside the coal.

It is not advisable for a material which has been laying over a longer period in the open air to be used for plotting washability graphs for younger brown coal ranks, as the change in the moisture of the coal pieces would involve a variation in their specific gravity too; the specific gravities pertaining to the different moistures cannot be determined, — as may be done with the ash or calorific value — by way of computation. Thus, it is advisable to plot the graphs for these coals while they are in the mine wet state or have the “screening plant moisture”, one appearing shortly after the winning. Coals that have been kept in the air for a long time should be put prior to specific gravity fractioning under water for the period of a few hours in order to make them reach the mine wet state. (When bony barren [clay] is present, this usage may not be applied.)

The determination of the mine moisture of coal has to be carried out shortly after the sampling has taken place, still in the laboratory of the mine or the sample must be put into a box that can be sealed airtight, or in one which is not air-proof but can safely hinder the coal from fall out. Then the sample has to be weighed in the laboratory of the mine in order to render the determination of the decrease in sample weight possible later, or wherever it might be wanted.

In the interest of moisture determination of the washed coal it is suitable to observe the weight variations of the specific gravity fractions resulting from the float and sink separation as a function of time. “The funnels with the sieves” together with the coal they comprise have to be weighed from time to time until the weight becomes constant. These data permit conclusions to be drawn as to the moisture of the coal as existing after a shorter or longer period of storage in containers, after the washing has been carried out in the “washing apparatus” or prior to transportation.

III. Recording of washability graphs (coal quality parameters) and their most suitable presentation

The information on the basic data as was obtained by direct measurements is important; therefrom all the others may be computed and graphs for any type of presentation plotted. Thus besides the information on the weight percentages for the screen classes, in principle the weight percentages of the product of the single screen classes separated according to specific gravities, their ash, moisture, calorific value and specific gravity limits have to be given, if possible, on one sheet in order to allow for a direct survey of the relative deviations occurring (the weight of the single specific gravity fractions can also be correlated with the *total* weight of the raw coal termed as 100%). It is also desirable to determine and report the average specific gravities for the single specific gravity fractions. (The areal compensation of the curve

$$\frac{1}{\delta} = f(s)$$

within the single specific gravity fractions $S\%$ will give without a separate specific gravity measurement being effected the invers value of the average specific gravity for the fraction in question.)

For coals destined for special ends other parameters of the specific gravity fractions (and of the raw coals) are to be or can be determined, e.g. the volatile matter of the coking coals, their Roga-number, dilatation, the volatile matter of gas coals, the tar content of latter, the sulfur content for any coal rank etc. The tabulation of all these parameters as numerical data (if possible concentrated in one sheet) is the basis for coal survey, from this table any relationship may be computed or plotted in graphs; these are e.g. $d-s$ (granulometric graph), $d-h$, $d-h_0$, $d-F$, $d-F_0$, $d-n$, $s-\delta$ (the specific gravity curve of Henry-Reinhardt graph), $s-1/\delta$, $s-h$ (the basic ash curve of HRH-graph), s_0-h_0 , $s-F$ (the calorific basic curve of HR-graph), s_0-F_0 , $s-n$, $\delta-h$, $\delta-F$, $\delta-n$, $h-F$, $h-n$, $s-h_b$, $s-h_c$, $s-F_b$, $s-F_c$, s_0-h_{0b} , s_0-h_{0c} , s_0-F_{0b} , s_0-F_{0c} (HR-graphs for the ash i.e. calorific value of washed coal and barren) $s-\Sigma SH$ (M-graph, i.e. Mayer's graph); moreover, $h-R$, $s-R$, $s-R_c$, $h-I$, $s-I$, $s-I_c$, etc. (s = weight yield, d = grain size, δ = specific gravity, h = ash, F = calorific value, n = moisture, S = fraction weight %, R = Roga's number, I = volatile matter, $index_0$ = marks a parameter concerning a dry material, $index_c$ = marks the values that concern the washed coal, $index_b$ = is used for cumulative magnitudes concerning the barren.)

Each relationship including s may be recalculated (and plotted) for a moisture n' differing from the moisture n of the test material, except $s-\delta$. It is suitable to give the parameters recalculated for $n = 0\%$, because these allow the material balances to be calculated in a simpler way. From the data groups $s'-h'_c$ and $s'F'_c$, recalculated for the "transportation" moisture, by means of the coal price tariff the data group $s'-P$ (P represents the price income) the basis for the economic evaluation of the coal washing procedure may be computed (and plotted). The peak of the curve $P = f(s')$ determines the most economic weight yield for the coal cleaning plant. $P = \Sigma S'P'$, where $P' [Ft/t]$ is the specific value of the coal with the parameters h'_c , F'_c .

It is desirable to represent the data groups and graphs for all these relationships concerning the different screen classes, if possible, in one sheet. A better survey is possible, namely in the case that e.g. the $s-d$ or $s-h$, etc. graphs for each of the (e.g. six) screen classes (e.g. $+80$, $80 \div 40$, $40 \div 20$, $20 \div 10$, $10 \div 1$, $1 \div 0$ mm) are shown in one common figure, than if a set of graphs for the individual screen classes were given in the single "washing diagrams" (e.g. $s-\delta$, $s-h$, $s-h_c$, $s-h_b$, $s-F$, $s-F_c$, $s-F_b$ etc.). The same applies to the tubular selection of the numerical data. An ideal case would be to have all the data concentrated on one "large sheet", but if this cannot be

done because of the difficulties of typing and manifolding, it is more suitable to show the common parameters for the different screen classes arranged vertically under one heading than to be enforced to look for the dissipated single parameters on a number of sheets.

The $\delta-h-F-n$ -analysis of the products as were obtained with the sink and float separation of the individual coal samples (i.e. the values h_0-F_0 computable from same) are more or less spread. From an adequate number of analysis data, however, reliable average values may be obtained for the relationships $h = f(\delta)$, $F = f(h)$, $F_0 = f(h_0)$, etc. of the coal (bank, bed or mining plant or mining district) provided, that the relationships do not comprise values for s ; by means of these the coal washing tests may be confined to the "quick method" as was described in a previous chapter — for the determination of the weight of the products separated according to specific gravities (or to that of the value of S i.e. s). (If, however, the data δ , h , F , n were to be determined for the products by means of these, the average data i.e. the functions which do not comprise the weight yield may be improved or made more accurate.)

One can have more liberty in choosing the scale when not several functions for a single screen class, but only one function (or provided that the perspicuity is not affected, not more than two) is i.e. are represented for all screen classes in one common diagram. (E.g. the scale used for the ash of the washed coal and that of the barren may differ.) It may often be advantageous not to plot the graph over its entire length but to draw the part of interest in a greater scale.

IV. Transformation of the existing washing graphs

Transformation of the existing washing graphs in the same coal rank for a crude coal ash differing by $\Delta h\%$ is carried out most suitably by displacing the basic graph in the direction of the weight yield by $\Delta s = 100 \Delta h / \Delta A$ weight %, where ΔA represents the difference as exists between the ash of the two extreme specific gravity fractions (the one with the lowest and the other with the highest specific gravity). The weight percentage of the extreme specific gravity fractions is to be modified by the weight % Δs ; if Δh is negative the weight of the minimum specific gravity fraction should be increased and that of the highest specific gravity fraction decreased, when Δh is positive the case is just the opposite. (The weight of the other specific gravity fractions is left unchanged.)

V. Probable practical yields of different dressing procedures

The imperfection I of the different washing equipments may be computed by means of the formula $I = I' + CB$, where B represents the weight per-

centage (uncorrected Bird's value) falling within the specific gravity boundaries that are by 0.1 on this, respectively on the other side of δ_p , the specific gravity of the separation. The values of I' and C may be read from Table IX. $E_p = I(\delta_p - 1)$ is half of the specific gravity difference falling between the Tromp-values 25 and 75%. The data to be read from the Tromp-graphs charac-

Table IX

Washing equipment	I'	
1. Static heavy suspension, +10 mm	0.05	0.0010
2. Hydrocyclone with heavy suspension, -10 mm	0.10	0.0014
	$1 + 1.2(\delta_p - 1)$	
3. Coarse jig, +10 mm	$0.08 \delta_p$	0.0018
4. Fine jig, -10 mm	$0.11 \delta_p$	0.0018
5. Rewashing jig, -10 mm	$0.14 \delta_p$	0.0020

Table X

Tromp, %	$x = \Delta^2_p/E_p$				
	1	2	3	4	5
0	5	9	3.2	2.8	3.3
1	4	6.1	2.7	2.3	3.0
2	3.3	3.1	2.4	2.1	2.8
5	2	2.3	1.8	1.7	2.1
10	1.6	1.7	1.4	1.4	1.5
25	1	1	0.7	0.8	0.8
50	0	0	0	0	0
75	1	1	1.3	1.2	1.2
90	1.8	1.8	2.8	4	3.4
95	2.9	2.6	3.5	5.8	4.0
98	4.2	4.7	4.5	7.1	5.5
99	5.5	8	5.2	7.6	6.4
100	8	12	6.3	8.1	8.3

terising the washing equipments 1 to 5 of Table IX are given in Table X. Utilizing the x -values listed in the latter — in case E_p and δ_p are given — the Tromp-graph may be plotted; from same the Tromp-percentages pertaining to the arithmetical means (i.e. average specific gravities) of the individual specific gravity fractions may be read. By multiplying the weight of the specific gravity

fractions in question with these values, the weight percentages which got into the product of separation whose specific gravity is higher than δ_p are obtained.

The magnitude of the differences appearing between the theoretical and practical weight yields and ash percentages for the washed coal and barren (i.e. intermediate products) will both be dependent on the Tromp-graph and the crude coal basic graph as well.

VI. Technical and economical indices

With the washability graphs and Tromp-graphs for the individual screen classes and the different washing equipments, respectively, the technical and economic results attainable by the different dressing technologies may be predicted. The dressing may be carried out on different combinations of the single grain size classes in various washing equipments. In order to determine the practical yields a conjunct washing graph for the classes washed together must be plotted. The maximum yield of washed coal with a given ash is obtained in case the separation of the washed coals originating from individually handled grain size classes is carried out on the common basic graph ash (and not on the common washed coal ash!). In case of a preparation according to specific gravities (e.g. washing with a heavy suspension) the combination of the individual grain size classes for common washing is only suitable if the $h = f(\delta)$ graphs for the classes involved are nearly coincident. In jigs under "normal" operating conditions, due to the fact, that the nature of the equipment as a classifying device will make itself felt to a greater or lesser extent, the separation of the finer grains occurs at a higher specific gravity than the simultaneous separation of the coarser ones. Thus, when classes are handled simultaneously whose $h = f(\delta)$ curves have approximately the same shape, that one being finer will be separated with the jig at a higher basic graph ash than the coarser one; consequently the given washed coal ash is obtained with a lower weight yield, as if the classes had been washed individually. To carry out the washing procedure with jigs may be advantageous in case the ash content of the finer grains of the simultaneously washed coal classes is lower than that of the coarser pieces with equal specific gravity. In the opposite case, with the ash content of the smaller grains with given specific gravity being higher than that of the coarser ones, the individual coal classes have to be fed into different jigs.

The rentability of the different coal washing technologies may be determined in the first approximation by means of the united washing graph of the total coal quantity to be washed and the weighted average Tromp-graphs of the used cleaning devices. When in the field covering the specific gravities being of importance from the point of view of the practical separation for

some adjacent specific gravities the ash, calorific value and weight yield of the practical coal washing are determined, the specific price P' and the income $P = s'P'$ pertaining to the coal tariff for the data as recalculated to the "transport moisture" n' may be computed. By plotting these data vs. the weight yield and connecting these points with one another by a continuous line a graph is obtained, representing the function $P = f(s)$. The peak of same indicates the optimum weight yield for the coal washing plant at which — in case of a coal preparation yielding two products — the barren has to be separated from the washed coal — to attain maximum income. In Fig. 2 the possible shape of a curve $P = f(s)$ is shown covering the entire section of the weight yield (from 0 to 100%), although the section in the vicinity of s_{opt} and the value concerning the unwashed crude coal are only "interesting". The mining cost T and the washing cost M appear on the graph as a straight parallel to the abscissa. The profit (or in case of a negative value the deficit) is represented by $P - T$ for the crude coal and $P - (T + M)$ for the washed coal.

In case the coal washing yields three products, there is a certain weight percentage distribution $s_1 - s_2 - s_3$ of the products washed coal-middling-barren the maximum income pertains to. If the mine has a free hand and *does not have* to supply its consumers with products of a specified quality and a certain quantity, the determination of the optimal values s_1 and s_2 ensures the maximum income. The aim may be attained by trial and error. Choosing certain weight yields s_1 for the washed coal by means of the corresponding values h_c and F_c the existing specific price P_c and the income $P_1 = s_1 P_c$ may be determined. The optimum s_2 (middling weight %) weight percentage of the residue (middling plus barren) may be determined in the same manner as was shown in the case of the two product coal washings. In Fig. 3 is shown, how the values h_x and F_x of the part that remains after the separation of the washed coal of weight % s_1 varies with the weight yield; these values determine the magnitude of the specific price P_x i.e. the income $P_2 = s_2 P_x$. The uttermost income of the mine is attained in that case, when the coal preparation plant works with the optimum weight percentages s_1 and s_2 corresponding to the maximum of $P = P_1 + P_2$.

If the rentability of the coal washing procedure is to be determined from the point of view of the entire national economy and not from that of the mine involved, only the question as to the value of the *utilizable heat* and not the income to be attained relying on the coal tariff, has to be investigated. To be able to do this, the survey of the consumers of the coal in question has to be put together too. One has to determine the efficiency of the burning devices they use, the variation of the efficiency with the quality (ash) of the coal, the charges of the carriage to the consumer, etc. The essential character of this computation — for a separation yielding two products — is principally

shown in Fig. 4. $H\%$ represents the calorific yield of the coal washing procedure: $H = sF_c/F$, η the efficiency of firing, which decreases with increasing ash (h_c) of the coal, this phenomenon appears more distinctly with fire hearths, in a lesser degree with devices firing pulverized coal. The η -graph in Fig. 4 is a weighted mean value of the consumers firing devices. $K = H\eta$ represents the magnitude of the calories utilized in the firing devices i.e. by

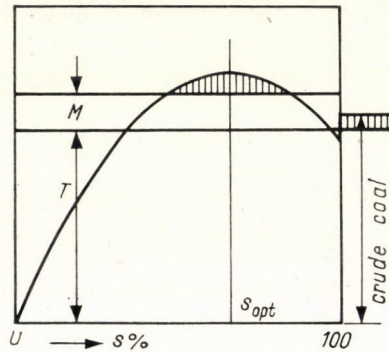


Fig. 2

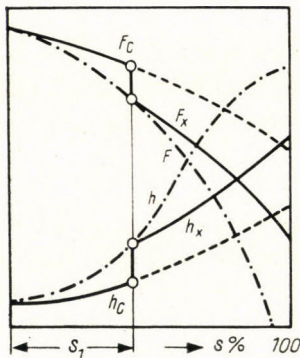


Fig. 3

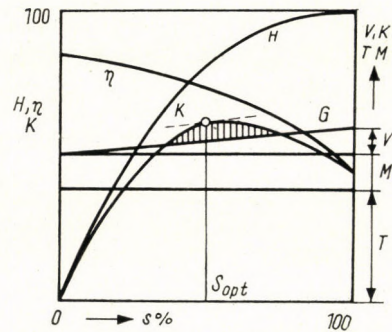


Fig. 4

multiplying these with the cost per unit of the utilized calories, the value of same (per t of crude coal) is obtained. The mining expense T and that of washing M (per t of crude coal) are lines parallel to the abscissa, the carriage V (per t of coal) brought up for a weight yield of 100% above $T + M$ (in the case of unwashed crude coal above T) and connected with the point $T + M$ of the weight yield 0, the over-all expense G is obtained. (V , too, is the average value of the consumers.) The vertical lines between K and G give the profit i.e. the deficit.

It is more suitable to take individually into account the consumers using fire hearths and those using devices that fire pulverized coal, and to

determine the weighted average values of η and V individually. A greater profit for the national economy ($K - G$ value) may be attained, if the washed coal yielded in the course of the three-product separation procedure is fired by the consumers operating fire hearths (these being more receptive against ash), while the middling product is used in devices constructed to burn pulverized coal.

VORSCHLÄGE FÜR DIE METHODIK DER ANLAGE EINES KATASTERS
DER KOHLENAUFBEREITBARKEIT UND FÜR DIE PRAKTISCHE ANWENDUNG
DER KOHLENWASCHKURVEN

G. TARJÁN

ZUSAMMENFASSUNG

Das Institut für Bergbauforschung sammelt und ergänzt seit Jahren laufend die Versuchsdaten für ungarische Kohlen, unter anderem die Daten über die Waschkurven der ungarischen Kohlen. Im Jahre 1953 wurden die Daten der Analysen für 1950—1951, i. J. 1955 die Daten für 1952—53 mit dem Titel »Experimentelle Zahlenangaben« (in ungarischer Sprache) unter der Redaktion von J. BERÉNYI und E. GÁL auch in Buchform veröffentlicht. Auch zahlreiche Forschungsberichte der Abteilung für Kohlenaufbereitung des Instituts für Bergbauforschung enthalten Waschkurven.

Die »Norm« für die Aufnahme der Anreicherungskennwerte der Kohlen und für die Evidenzhaltung der Daten ist noch nicht in allen Einzelheiten herausgebildet worden. Zur Entwicklung einer solchen Norm wünscht der Verfasser mit der vorliegenden Arbeit beizutragen.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX MÉTHODES D'ÉTABLISSEMENT
D'UN CADASTRE DES CARACTÉRISTIQUES D'ENRICHISSEMENT
DES CHARBONS ET À L'APPLICATION PRATIQUE DES DIAGRAMMES DE LAVAGE

G. TARJÁN

RÉSUMÉ

L'Institut de Recherches Minières rassemble et complète depuis des années des données expérimentales relatives aux charbons hongrois, entre autres celles des courbes de lavage des charbons. En 1953, les données des années 1950—51, et en 1955 celles des années 1952—53 ont été publiées dans un ouvrage intitulé: «Données numériques expérimentales», rédigé par J. BERÉNYI et E. GÁL. En outre, de nombreux rapports scientifiques de la section de préparation des charbons de l'Institut de Recherches Minières contiennent des diagrammes de lavage.

Aucune «norme» détaillée n'existant actuellement pour le relevé des caractéristiques d'enrichissement du charbon et pour la classification des données, l'auteur désire contribuer à l'élaboration d'une telle norme par ses résultats.

ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО МЕТОДИКЕ СОСТАВЛЕНИЯ ПЕРЕЧНЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
ОБОГАТИМОСТИ УГЛЯ И ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ПРИМЕНЕНИЮ КРИВЫХ
ОБОГАТИМОСТИ

Г. ТАРЬЯН

РЕЗЮМЕ

На протяжении многих лет Горный Исследовательский Институт собирает и дополняет различные данные по отечественным углям и, в том числе, данные по обогатимости углей. Результаты исследований за 1950—51 г. г. были собраны и изданы в 1953 г., а результаты исследований за 1952—53 г. г. были опубликованы в 1955 г., в книге Ю. БЕРЕНИ и Э. ГАЛ «Расчетные данные». Во многих исследовательских отчетах отдела обогащения углей Горного Исследовательского Института приводятся кривые обогатимости.

До сих пор еще не разработан «стандарт» на составление и оформление показателей обогатимости угля. Данной работой автор желает помочь разработке такого стандарта.

SHELLS WHICH CANNOT BE BALANCED BY FINITE MEMBRANE FORCES

P. CSONKA

DOCTOR OF TECHNICAL SCIENCES
WORKING COMMUNITY FOR BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES.
BUDAPEST

[Manuscript received March 15, 1963]

The present paper deals with shells at certain particular points of which the equilibrium can be ensured by finite membrane forces only for special loading cases. From the view-point of the possibility of ensuring the equilibrium by finite membrane forces, the following points of shells are investigated in detail: corner points of shells, the edge arches of which do not resist lateral forces; the edge points of shells of translation; certain specially located internal points. The cases dealt with in the paper are elucidated by examples.

1. Introduction

One of the author's papers [1] referred to shells supported by edge beams which are situated in a vertical plane and do not resist lateral forces. In the mentioned paper author has presented formulae, the use of which made the direct calculation of reduced internal forces, arising at certain particular points of the shells in question, possible.

In connection with the above mentioned paper the following will deal with the question, what is the condition which ensures the possibility of equilibrium at the afore-mentioned particular shell points by finite membrane forces.

2. Shell corners which cannot be balanced by finite membrane forces

The shell to be investigated should be supported by vertical edge arches only resisting forces acting in the plane of these arches. The ground plan of the shell should be a convex polygon.

The system of orthogonal co-ordinates $0(x, y, z)$ should be set up in such a way that the positive branch of the x axis should coincide with the direction of the external normal referring to one of the polygon sides, while the positive branch of the z axis should point downwards. The corner point of the chosen polygon side, when proceeding from point B towards the positive y direction, should be marked by C , while the other corner point by B (Fig. 1). The polygon angles at corners B and C are denoted by β and γ .

The form of the shell should be characterized by the equation of its middle surface

$$z = f(x, y),$$

while the vertical load acting on the shell by the specific load value

$$Z = Z(x, y)$$

related to the area of the horizontal projection of the shell surface. The reduced internal forces of the shell acting in the x, y directions should be marked by

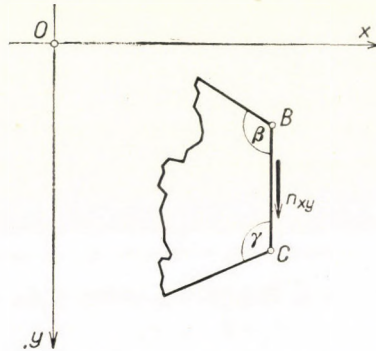


Fig. 1. Reduced internal force n_{xy} acting along the side BC of the shell-basis

letter symbols n_x, n_{xy}, n_y and internal forces acting on surface elements, the external normal of which is positive, are regarded as positives if their arrow points towards the positive branch of the axis.

As the edge arches of the investigated shell do not resist lateral forces, along the individual edge lines no lateral forces can develop. Thus, forces acting in the lateral direction can arise only on the corners. These occasional forces acting on the corners originate in the immediate vicinity of the corner points, internal forces increasing beyond all limits [2].

If the condition for balancing the corner-sections of a shell by finite membrane forces should be examined, the action of concentrated supporting forces on the shell corners cannot be permitted. In this case the reduced internal forces arising on corner B of the shell side BC can be computed by using formulae taken from paper [1]:

$$n_x = 0, \quad (1)$$

$$n_{xy} = - \frac{Z_B}{2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cot \beta \right]}, \quad (2)$$

$$n_y = - \frac{Z_B}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tan \beta}. \quad (3)$$

Similar formulae are also valid for the corner point C of the edge line section BC . The reduced internal forces arising here are:

$$n_x = 0, \quad (4)$$

$$n_{xy} = - \frac{Z_C}{2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cot \gamma \right]}, \quad (5)$$

$$n_y = - \frac{Z_C}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tan \gamma}. \quad (6)$$

In the above formulae symbols Z_B and Z_C denote the value of load function Z in points B and C , respectively.

In the following merely the stress state of corner point B should be investigated. According to the fact as to whether the load value pertaining to this corner deviates from/or equals zero, two cases — a) and b) — have to be distinguished.

a) First the case $Z_B = 0$ should be dealt with. In this case the value of internal forces n_{xy} and n_y pertaining to corner B can only be finite if the expression figuring in the denominator of formulae (2) and (3) does not disappear. Thus, the condition for the eventual possibility of arising of finite membrane forces on corner B is

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cot \beta \neq 0. \quad (7)$$

If the above condition is not satisfied, thus, if in respect to point B the relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cot \beta = 0 \quad (8)$$

holds, then there are:

$$n_{xy} = \infty, \quad n_y = \infty.$$

b) For $Z_B = 0$ the situation is quite different. Now, internal forces arising at point B might be of finite value, even if condition (8) is satisfied. Namely, if $Z_B = 0$ and at the same time also condition (8) is fulfilled, the right-hand side of formulae (2) and (3) will take the form $0/0$. In this case the value of internal forces n_{xy} and n_y depends on the limit value towards which the right-hand side of formulae (2) or (3) proceeds, when approaching the corner. This limit value might be different, depending on the direction from which the corner is to be approached.

For the demonstration of the different possibilities two examples are presented.

Example 1: The calotte shell constructed over an equilateral triangular basis shown in Fig. 2 is to be examined. The equation of the middle surface of this shell is

$$z = f(x, y) = \frac{3h}{10a^2} \left(x^2 + y^2 + \frac{x^3}{12a} - \frac{xy^2}{4a} \right),$$

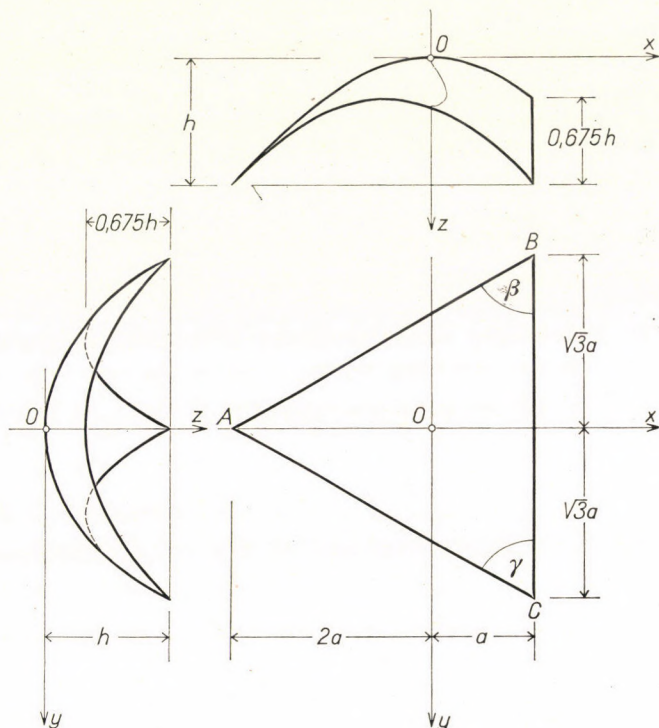


Fig. 2. Calotte shell constructed over an equilateral triangular plan-form

thus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3h}{10a^2} \left(2 - \frac{x}{2a} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3h}{10a^2} \left(-\frac{y}{2a} \right). \quad (10)$$

At corner point B , i.e., at the point the co-ordinates of which are $x = a$, $y = -\sqrt{3} \cdot a$, the relations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9h}{20a^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3\sqrt{3} \cdot h}{20a^2},$$

are valid and at the same time the angle at point B is

$$\beta = \frac{\pi}{3}.$$

Therefore, in respect to corner point B the equation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cot \beta = \frac{3\sqrt{3} \cdot h}{20 a^2} - \frac{9h}{20 a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$$

holds, thus, the particular case characterized by formula (8) appears. Therefore, in the case of a load $Z_B \neq 0$ the corner B of the shell in question cannot be balanced by finite membrane forces, and the same also holds in respect to corners A and C .

However, the situation is different if the specific load value pertaining to the corners equals zero, e.g., for a load system characterized by the equation

$$Z = Z_0 \left(1 - \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4a^2} \right), \quad Z_0 = \text{const.}$$

Under these circumstances formulae (2) and (3) of internal forces n_{xy} and n_y turn into the form $0/0$, i.e., they become undetermined, and so at corner point B the eventual possibility of finite internal forces might arise. In the given case this possibility really exists, moreover, the stress function of the problem can be set up immediately:

$$F = -\frac{5 a^2 Z_0}{12 h} \left(x^2 + y^2 + \frac{x^3}{3 a} - \frac{xy^2}{a} \right).$$

Accordingly, the formulae of reduced internal stresses are

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{5 a^2 Z_0}{6 h} \left(1 - \frac{x}{a} \right), \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{5 a^2 Z_0}{6 h} \cdot \frac{y}{a}, \\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{5 a^2 Z_0}{6 h} \left(1 + \frac{x}{a} \right), \end{aligned}$$

thus for corner B , i.e., for the point characterized by co-ordinates $x = a$ and $y = -\sqrt{3}$, the following relations hold:

$$\begin{aligned} n_x &= 0, \\ n_{xy} &= \frac{5 a^2 Z_0}{6 h} \cdot \sqrt{3}, \\ n_y &= -\frac{5 a^2 Z_0}{6 h} \cdot 2. \end{aligned}$$

The same result is also arrived at, if starting from formulae (2) and (3) relations (9) and (10) are substituted into same; then approaching point B from an optional direction the limit transition leads to the afore-mentioned result.

Example 2 : The equation of the middle surface of the elliptic paraboloidal shell shown in Fig. 3 is:

$$z = f(x, y) = h_a \frac{x^2}{a^2} + h_b \frac{y^2}{b^2}, \quad h = h_a + h_b.$$

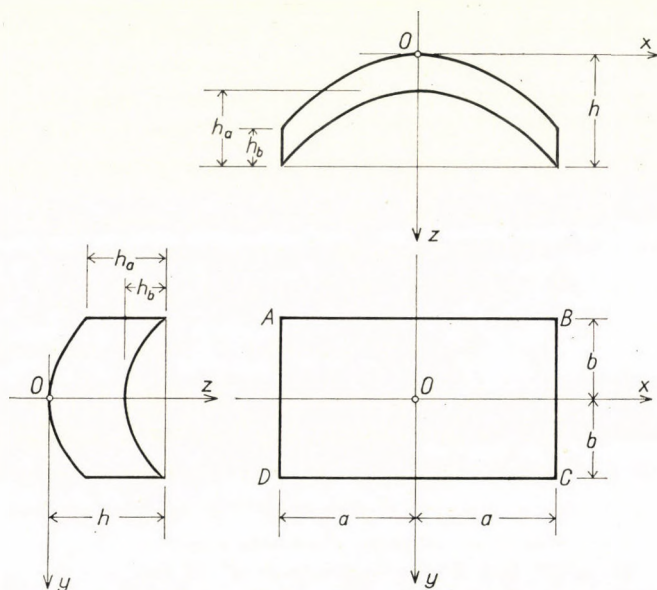


Fig. 3. Elliptic paraboloidal shell constructed over a rectangular basis

At corner B of this shell condition (8) is satisfied. Therefore, in the case of a load $Z_B \neq 0$ the corner in question cannot be balanced by finite membrane forces. Of course, the same also refers to the other corners.

On the other hand, if the corners are not loaded, the balancing by finite membrane forces might be possible.

As an example for the above possibility the load system

$$Z = Z_0 \left(1 - \frac{h_a}{h} \frac{x^2}{a^2} - \frac{h_b}{h} \frac{y^2}{b^2} \right), \quad Z_0 = \text{const}$$

is to be mentioned. The stress function belonging to same is

$$F = \frac{a^2 b^2 Z_0}{4 h} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

while the reduced internal forces are:

$$\begin{aligned}n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{Z_0 a^2}{2h} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \\n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{Z_0 xy}{h}, \\n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{Z_0 b^2}{2h} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),\end{aligned}$$

As can be seen, now the reduced internal forces arising at the corners have finite values. E.g., at corner *B*, i.e., at the point characterized by co-ordinates $x = a$, $y = -b$, the following reduced internal forces arise:

$$\begin{aligned}n_x &= 0, \\n_{xy} &= Z_0 a b, \\n_y &= 0.\end{aligned}$$

3. Shell edges which cannot be balanced by finite membrane forces

In this paragraph *shells of translation* over a rectangular basis will be dealt with. The x , y axes of the orthogonal system of co-ordinates $0(x, y, z)$ bisect the edges of the rectangular basis and are perpendicular to them. The planes of the generating curves of the translational surface are parallel to the planes of co-ordinates xz and yz . The edge arches do not resist lateral forces.

The aim of the following investigations is to clear up as to whether the edges of the shells in question could be equiposed by finite membrane forces or not.

The surface in question is a translational one, thus, the relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

holds; consequently, in the present case the otherwise valid equation of equilibrium

$$n_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -Z$$

can be written in the form

$$n_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -Z, \quad (11)$$

provided n_{xy} is finite.

The investigation should refer to an optional point P lying on the shell edges characterized by the co-ordinate $x = \pm a$. The value of the load function $Z = Z(x, y)$ referring to point P should be denoted by Z_P . As the edge beams only resist forces acting in their own plane, at point P

$$n_x = 0. \quad (12)$$

Thus, if in respect to point P the relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq \infty$$

holds, instead of equation (11) the equation

$$n_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -Z_P \quad (13)$$

can be written, from which the value of n_y can be computed:

$$n_y = -\frac{Z_P}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}. \quad (14)$$

On the other hand, if in respect to point P

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \infty,$$

equation (14) cannot be applied.

As can be read from equation (14), for $Z_P \neq 0$ the value of internal force n_y can only be finite if referring to point P

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0.$$

Reversely, if $Z_P = 0$, the right-hand side of equation (14) takes the form $0/0$, thus it becomes undetermined. Consequently, the value of n_y might be finite or infinite, depending on the value towards which the right-hand side of equation (14) proceeds when the point P is to be approached.

What has in previously been said should be elucidated by two examples.

Example 1: The equation of the middle surface of the shell to be investigated (Fig. 4) should be

$$z = f(x, y) = h_a \cos \frac{\pi x}{2a} + h_b \cos \frac{\pi y}{2b}.$$

In the present case:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -h_2 \frac{\pi^2}{4a^2} \cos \frac{\pi x}{2a} \neq \infty,$$

thus, the condition for applying formula (14) is ensured.

As in the example dealt with on the edge lines $x = \pm a$, the relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

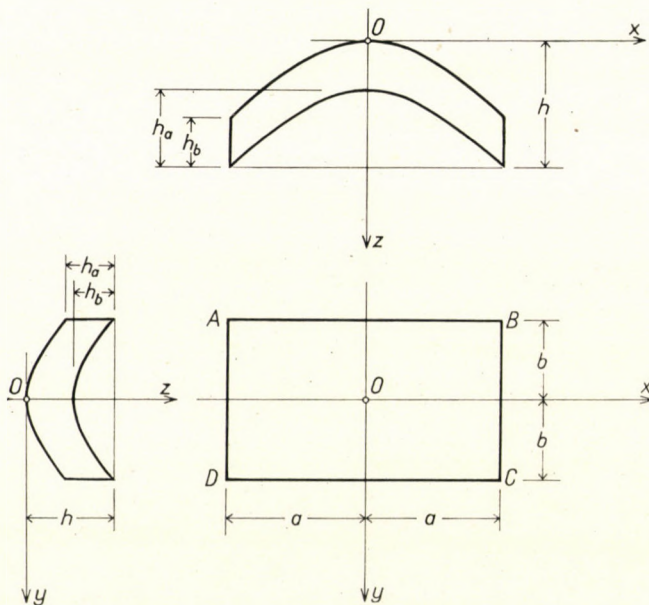


Fig. 4. Shell of translation constructed over a rectangular basis

holds, along these edges the eventual possibility of equilibrium can be ensured by finite membrane forces only then, if the specific value of the load equals zero there. Of course, the same also refers to edge lines $y = \pm b$. On the other hand, if

$$Z = Z_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad Z_0 = \text{const},$$

i.e., on the shell edges $Z = 0$, then on the shell edges $x = \pm a$ the formula of n_y , while on the shell edges $y = \pm b$ the formula of n_x becomes undetermined. Accomplishing in this case the limit transition, on the edge lines $x = \pm a$ the results

$$n_x = 0, \quad n_y = \frac{Z_0}{h_a} \cdot \frac{4a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{2b},$$

are obtained, while on the edge lines $y = \pm b$

$$n_x = \frac{Z_0}{h_b} \frac{4b^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2a}, \quad n_y = 0.$$

It is interesting to observe, that for positive values of h_a , h_b and Z_0 the internal force n_y developing along the edge lines $x = \pm a$ is positive, i.e., it is a tensional force and the same observation holds for n_x along the edge lines $y = \pm b$.

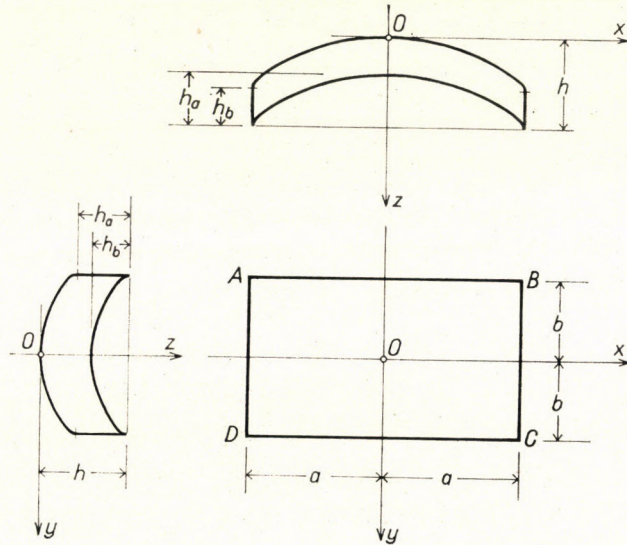


Fig. 5. Shell of translation constructed over a rectangular basis

Example 2: The equation of the middle surface of the shell shown in Fig. 5 should be

$$z = f(x, y) = \frac{h_a}{2a \ln 2} [(a+x) \ln(a+x) + (a-x) \ln(a-x)] + \\ + \frac{h_b}{2b \ln 2} [(b+y) \ln(b+y) + (b-y) \ln(b-y)],$$

and

$$h \equiv h_a + h_b.$$

In this case according to [3]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{h_a}{\ln 2} \cdot \frac{1}{(a^2 - x^2)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{h_b}{\ln 2} \cdot \frac{1}{(b^2 - y^2)},$$

thus, on the edge lines $\pm a$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \infty ,$$

while on the edge lines $\pm b$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \infty .$$

In these cases along the edge lines $x = \pm a$ formula (14) cannot be applied, and to points on the edge lines $y = \pm b$ an analogous formula cannot be valid either.

Nevertheless, in spite of what has just been stated, the shell in question can be equiposed by finite internal forces, provided load function Z is a polynom [4]. If, e.g.,

$$Z = Z_0 = \text{const.},$$

the stress function of the shell is

$$F = \frac{Z_0 \ln 2}{2h} (a^2 - x^2)(b^2 - y^2),$$

while the formulae of reduced internal forces are:

$$n_x = - \frac{Z_0 \ln 2}{h} (a^2 - x^2),$$

$$n_{xy} = - \frac{Z_0 \ln 2}{h} 2xy,$$

$$n_y = - \frac{Z_0 \ln 2}{h} (b^2 - y^2).$$

4. Other shell sections which cannot be balanced by finite membrane forces

For the sake of completeness shells having certain interior points which cannot be balanced by finite membrane forces should also be dealt with. This occurs — as is well-known [5] — for all the points in respect to which $Z \neq 0$, if at the same points all three second partial derivatives of the function $z = f(x, y)$, which characterize the middle surface of the shell, are equal to zero.

Two examples of these kind of shells are given hereunder.

Example 1 : The equation of the middle surface of the shell should have the form (Fig. 6)

$$z = f(x, y) = h \frac{x^4 y^4}{a^4 b^4}.$$

In this case

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h \frac{12 x^2 y^4}{a^4 b^4},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{16 x^3 y^3}{a^4 b^4},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = h \frac{12 x^4 y^2}{a^4 b^4},$$

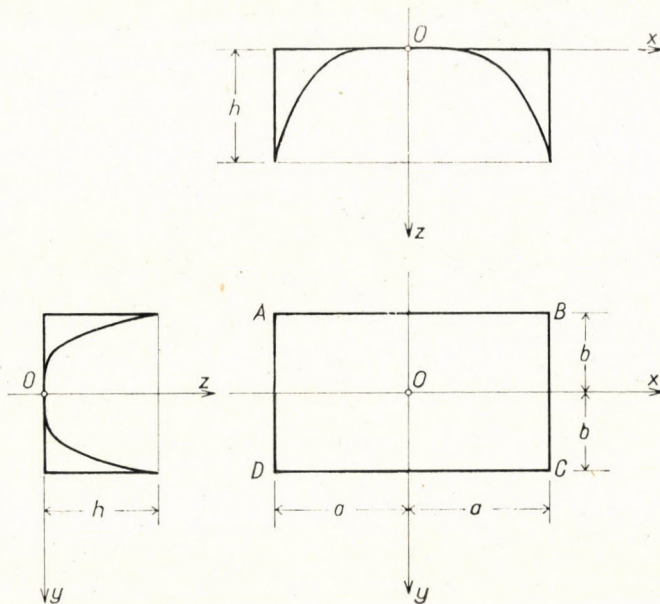


Fig. 6. Shell constructed over a rectangular basis with straight ridge lines

consequently, on the point $x = 0, y = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

If at the same place $Z \neq 0$, at the point in question the equilibrium cannot be ensured by finite membrane forces.

Example 2 : The equation of the middle surface of the shell should be (Fig. 7),

$$z = f(x, y) = \frac{h(b-y)}{b} \cdot \frac{x^4}{a^4}.$$

In this case

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{12 h(b-y) x^2}{a^4 b},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{4 h x^3}{a^4 b},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

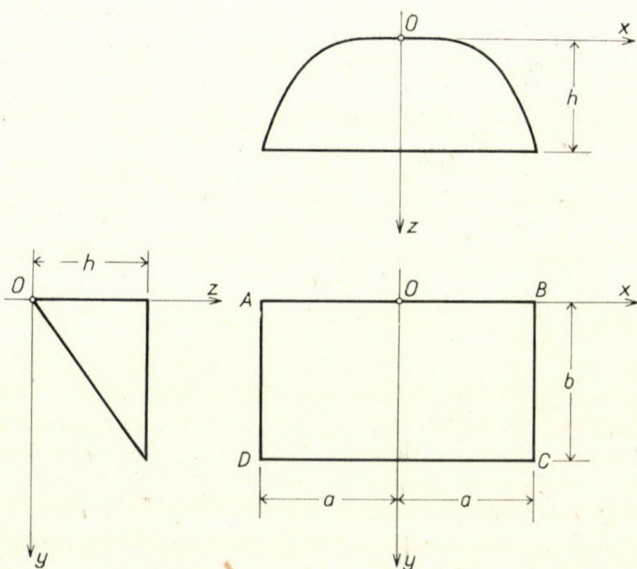


Fig. 7. Conoid shell constructed over a rectangular plan-form

thus along the ridge-line $x = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Therefore, if along the ridge-line $Z \neq 0$, at points lying on this line, the state of equilibrium cannot be sustained by finite membrane forces.

REFERENCES

1. CSONKA, P.: Formulae for Controlling Stress Calculations of Calotte Shells. *Acta Techn. Hung.* **29** (1960), 355—368.
2. PUCHER, A.: Lehrbuch des Stahlbetonbaues. Grundlagen und Anwendungen im Hoch- und Brückenbau. Springer Verlag, Wien 1949, 226.
3. CSONKA, P.: Results on Shells of Translation. *Acta Techn. Hung.* **10** (1955), 59—71.
4. CSONKA, P.: Special Kind of Shells of Translation with Two Vertical Planes of Symmetry. *Acta Techn. Hung.* **11** (1955), 231—240.
5. MENYHÁRD, I.: Héjszerkezetek elmélete II rész (Theory of Shell Structures, Part II, In Hungarian). *A Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai XIX* (1943), Brochure 48.

SCHALEN DIE DURCH ENDLICHE MEMBRANKRÄFTE
NICHT IM GLEICHGEWICHT GEHALTEN WERDEN KÖNNEN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befaßt sich mit Schalen in deren einzelnen besonderen Punkten das Gleichgewicht bloß im Falle spezieller Belastungen durch endliche Membrankräfte gesichert werden kann. Vom Gesichtspunkte der Sicherung des Gleichgewichtes durch endliche Membrankräfte aus betrachtet, werden im Aufsatz die folgenden Schalenpunkte ausführlich untersucht: die Eckpunkte der auf gegen seitliche Kräfte nicht widerstehende Randbögen gestützten Schalen; die Randpunkte der Translationsschalen; ferner im allgemeinen einzelne besondere Innenpunkte der Schalen. Die behandelten Probleme sind durch Beispiele erläutert.

VOILES MINCES NE POUVANT ÊTRE ÉQUILIBRÉS
PAR DES FORCES DE MEMBRANE FINIES

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'étude traite de voiles dont l'équilibre en certains points particuliers ne peut être assuré par des forces de membrane finies qu'à des cas de charges spéciaux. Du point de vue de l'équilibre par des forces de membrane finies, l'étude examine en détail les angles des voiles appuyés sur des arcs de rive ne résistant qu'aux efforts agissant dans leur propre plan, ainsi que certains points internes particuliers en général. Les résultats présentés par l'auteur sont illustrés par des exemples.

ОБОЛОЧКИ, НЕ УРАВНОВЕШИВАЕМЫЕ КОНЕЧНЫМИ МЕМБРАННЫМИ
СИЛАМИ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Исследование занимается такими оболочками, в отдельных особых точках которых равновесие может быть обеспечено конечными мембранными силами лишь в специальных случаях нагрузки. Подробно рассматриваются с точки зрения возможности уравновешивания конечными мембранными силами угловых точек оболочек, опирающихся на периферийные дуги, не сопротивляющиеся боковому давлению, окраины трансляционных оболочек, а также некоторые особые внутрирасположенные точки оболочек вообще. Высказывания, приведенные в работе, объясняются примерами.

INDEX

- Gerő, L.*: Die charakteristischen Epochen des Burgbaues — The Characteristic Epochs of Castle Building — Époques caractéristiques dans la construction des châteaux-forts — *Герё, Л.*: Характерные периоды архитектуры крепостей 3
- Kovács, G.—Rózsa, L.*: Determination of Stresses in Tunnel Lining Considering Friction between Rock and Tunnel — Ermittlung von Spannungen in der Tunnelmauerung unter Berücksichtigung der Reibung zwischen Gestein und Tunnel — Détermination des contraintes dans le revêtement du tunnel, compte tenu du frottement entre le rocher et le revêtement — *Ковач, Г.—Розса, Л.*: Определение напряжений в тоннельной обделке с учетом трения между обделкой и породой 63
- Vamos, T.—Gertler, J.—Veidinger, L.*: Контрольные расчеты методов расчета потерь в сетях — *Vámos, T.—Gertler, J.—Veidinger, L.*: Control of the Computation Methods for Network Losses — Kontrolle der Berechnungsverfahren für Netzverluste — Contrôle des différentes méthodes de calcul des pertes en lignes 79
- Kardos, Á.*: Comparative Analysis of Some Rapid Tool Life Determination Methods — Vergleichende Untersuchung von Kurzprüfverfahren der Standzeit von Werkzeugschneiden — Étude comparative des méthodes abrégées de détermination de la durée de coupe des outils — *Кардош, А.*: Сравнительное исследование сокращенных методов определения срока службы резца 95
- Krupkowski, A.—Ptak, W.*: Einfluß des Druckes auf den Reduktionsprozeß von ZnO und CdO mit Kohlenstoff — The Influence of Pressure on the Reduction of ZnO and CdO by Carbon — L'influence de la pression sur la réduction par carbone de ZnO et de CdO — *Крупковски, А.—Птак, В.*: Влияние давления на восстановление ZnO и CdO, восстановленных углеродом 107
- Lázár, J.*: Untersuchung der in der Korngrößenverteilung von Materialhaufen auftretenden Veränderungen während des Fortschreitens des Zerkleinerungsprozesses — Investigation of the Variations in the Granulometric Composition of a Set during the Progress of Crushing — Examen des changements de distribution granulométrique des agrégats pendant le processus de concassage — *Лазар, Й.*: Исследование изменений, происходящих в распределении структуры зерен по ходу процесса измельчения 127
- Kovács, K. P.*: Genaue Analogabbildung des mit gesteuerten Organen geregelten Asynchron-Servomotors — Correct Analogous Representation of an Asynchronous Servo-Motor Regulated by Controlled Elements — Représentation analogue correcte d'un servo-moteur asynchrone réglé par des éléments contrôlés — *Ковач, К. П.*: Точный метод аналогового моделирования асинхронного серводвигателя, регулируемого управляемыми элементами 151
- Fodor, J.*: New Method for Measuring Gas Flow Speed by Means of Radio-Isotopes — Neue Methode zur Messung von Gasströmungsgeschwindigkeiten mit Hilfe radioaktiver Isotope — Nouvelle méthode pour mesurer la vitesse d'un courant de gaz à l'aide d'isotopes radioactifs — *Фодор, Й.*: Новый радиоизотопный метод измерения движения потоков газов 163

- Geleji, A.*: Eine Weiterführung und allgemein gültige Lösung der Kármánschen Theorie des Walzens — Completion and General Solution of the Theory of Rolling According to Kármán — Développement et solution de validité générale de la théorie du laminage selon Kármán — Гелеи, А.: Распространение и общее решение Карманской теории прокатки 171
- Csáki, F.—Geszi, P. O.*: Synchronizing Methods — Synchronisierungsmethoden — Méthodes de synchronisation — Чаки, Ф.—Гесзи, П. О.: Методы синхронизации 197
- Tarján, G.*: Propositions for a Methodology to Make Coal-Washability Surveys and for the Practical Use of Coal-Washability Plots — Vorschläge für die Methodik der Anlage eines Katasters der Kohlenaufbereikbaarheit und für die praktische Anwendung der Kohlenwaschkurven — Propositions relatives aux méthodes d'établissement d'un cadastre des caractéristiques d'enrichissement des charbons et à l'application pratique des diagrammes de lavage — Тарьян, Г.: Предложения по методике составления перечня показателей обогатимости угля и по практическому применению кривых обогатимости 221
- Csonka, P.*: Shells which Cannot be Balanced by Finite Membrane Forces — Schalen die durch endliche Membrankräfte nicht im Gleichgewicht gehalten werden können — Voiles minces ne pouvant être équilibrés par des forces de membrane finies — Чонка, П.: Оболочки, не уравниваемые конечными мембранными силами 247

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1963. XII. 27. — Terjedelem: 23 (A/5) ív, 164 ábra, 1 melléklet

64.58205 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

66,— Ft

Index: 26.025

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 46

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1964

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U 21

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

TWO NEW PRACTICAL METHODS TO DETERMINE THE CRITICAL LOADS FOR A COMPRESSED BAR OF VARIABLE FLEXURAL RIGIDITY

J. SZIDAROVSKY

"UVATERV" HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received May 5, 1960]

The paper presents two new methods for determining the first and higher critical loads of a statically determined, axially compressed bar of variable flexural rigidity.

The first method was chosen to substitute a bar of step by step constant flexural rigidity and the solution is gained by a successive approximation. The second method, after a proper choice of the substituting bar of step by step constant flexural rigidity leads to a resolvent algebraical equation, after the solution of which the critical loads can be determined by trigonometrical tables.

The study is completed by working examples, proving the accuracy of the proposed methods and the flow-diagrams of the presented method for digital computers.

1.0. Methods to determine critical loads

Many practical methods have been developed to approximatively determine the critical load of a compressed bar of variable flexural rigidity. The Engesser—Vianello method and the Rayleigh quotient are the most frequently used in engineering practice [1], [2], [3].

The up-to-date papers suggest more and more approximation by the method of difference equations [2], [3]. This procedure divides the bar into n , equal a long sections, and the differential quotients are substituted by

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2a}$$

and

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{a^2}$$

difference-quotients calculated with the ordinates at the boundaries of each section. This method requires the differential-quotient, as above, to satisfy the differential-equation at each joining point of the sections and of the boundary conditions, too.

The problem of instability of a compressed bar is described by differential equation

$$y'' + \frac{P}{EI}y = 0,$$

for the solution of which $n + 1$ equations are presented by the method of the difference quotient, if the domain is divided into n sections. In the problem of elastic stability the P critical load is also taken as an unknown quantity so the number of the unknown quantities is $n + 2$.

The determinant of this equation system is taken as equal to zero for determining the non-trivial solutions. The determinant results in an equation of $(n - 1)$ degree to determine the P critical load, presenting $n - 1$ roots. So this method gives values also for critical loads of higher order and their accuracy decreases step by step.

In this study two approximative methods are presented to determine the critical loads. The first is a successive approximation, the second brings back this problem to be solved as an algebraic equation.

When the section of a bar varies in such a way that its EI flexural rigidity is constant along each section, a method is deducted determining the critical load through the solution of a transcendent equation. This method is dealt with in detail, as follows.

2.0. Developing buckling load of a bar of stepwise constant sections

The bar consists of n sections of constant flexural rigidity. Differential equation referring to section k (Fig. 1) is

$$y'' + \frac{P}{EI_k} y = 0. \quad (2,11)$$

Its general solution and the first derivative to be obtained are

$$y_k(z) = a_{k1} \sin c_k z + a_{k2} \cos c_k z \dots, \quad (2,12)$$

$$y'_k(z) = c_k a_{k1} \cos c_k z - c_k a_{k2} \sin c_k z \quad (2,14)$$

where

$$c_k = \sqrt{\frac{P}{EI_k}} \quad (2,13)$$

furthermore, a_{k1} and a_{k2} are integration constants and z is the abscissa measured from the left-side boundary of each section.

The a_{k1} and a_{k2} integration constants are to be determined from deflection and slope, and on the left-side boundary it is to be calculated by data of the preceding section, for there is no leap either in deflection or in slope.

Considering the fact that at the joining point the abscissa of the preceding section is $z = a_{k-1}$, that of the succeeding one is $z = 0$, based on Eqs. (2,12)

and (2,14)

$$\begin{aligned} a_{k-1,1} \sin c_{k-1} a_{k-1} + a_{k-1,2} \cos c_{k-1} a_{k-1} &= a_{k,2}, \\ c_{k-1} a_{k-1,1} \cos c_{k-1} a_{k-1} - c_{k-1} a_{k-1,2} \sin c_{k-1} a_{k-1} &= c_k a_{k,2}, \end{aligned} \quad (2,15)$$

where a_{k-1} is the length of section $(k - 1)$.

If all these equations are produced for a two-hinged bar, written in standard form, and the boundary conditions taken as $x = 0, y = 0$ and $x = l,$

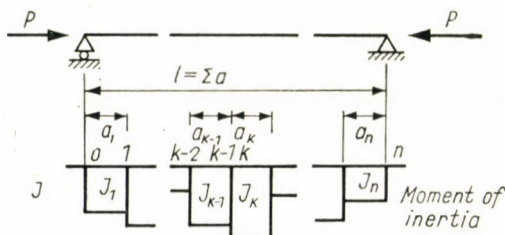


Fig. 1

$y = 0$ are satisfied, the following equation system results:

$$\begin{aligned} 0 + a_{1,2} &= 0, \\ a_{1,1} \cos c_1 a_1 - a_{1,2} \sin c_1 a_1 - \frac{c_2}{c_1} a_{2,1} &= 0, \\ a_{1,1} \sin c_1 a_1 + a_{1,2} \cos c_1 a_1 - a_{2,2} &= 0, \\ \dots &\dots \\ a_{k-1,1} \cos c_{k-1} a_{k-1} - a_{k-1,2} \sin c_{k-1} a_{k-1} - \frac{c_k}{c_{k-1}} a_{k,1} &= 0, \\ a_{k-1,1} \sin c_{k-1} a_{k-1} + a_{k-1,2} \cos c_{k-1} a_{k-1} - a_{k,2} &= 0, \\ \dots &\dots \\ a_{n-1,1} \cos c_{n-1} a_{n-1} - a_{n-1,2} \sin c_{n-1} a_{n-1} - \frac{c_n}{c_{n-1}} a_{n,1} &= 0, \\ a_{n-1,1} \sin c_{n-1} a_{n-1} + a_{n-1,2} \cos c_{n-1} a_{n-1} - a_{n,2} &= 0, \\ a_{n,1} \sin c_n a_n + a_{n,2} \cos c_n a_n &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

In case of a fixed-end-bar (Fig. 2), when the origin of the coordinate system is chosen at the free end in such a way that the axis x should coincide with the axis of P , the second boundary condition is, that the slope is zero at the fix-end, i.e. $x = l, y' = 0$. Thereafter, the last equation in the equation system under (2,16) turns into

$$a_{n,1} \cos c_n a_n - a_{n,2} \sin c_n a_n = 0. \quad (2,17)$$

Both equation systems contain $2n$ equations and $2n$ unknown quantities. As from the first equation $a_{1,2} = 0$, the number of real equations and unknown quantities is only $2n - 1$.

from which the known relation

$$\frac{c_2}{c_1} \tan c_1 a_1 + \tan c_2 a_2 = 0 \quad (2,19)$$

can be obtained.

For a fixed-end-bar, the last line of the determinant is (Fig. 2)

$$0 \quad \cos c_2 a_2 \quad - \sin c_2 a_2.$$

Then

$$D = \frac{c_2}{c_1} \sin c_1 a_1 \cdot \sin c_2 a_2 - \cos c_1 a_1 \cdot \cos c_2 a_2 = 0,$$

and so, the critical load is presented by the formula

$$\tan c_1 a_1 \cdot \tan c_2 a_2 = \frac{c_1}{c_2}. \quad (2,20)$$

For the approximative solution to be presented in this paper, the bar is divided into sections; and each section is assumed to be of constant flexural rigidity, i.e., a bar of stepwise constant section, the substituting bar is replaced by the existing bar. A bar of variable section, as a model can be substituted for the bar, if the sections are close enough to reach the flexural rigidity of the bar.

3.0. Method of successive approximation to determine critical load

The members of Equ. (2,18) are derived from $\sin c_k a_k$ and $\cos c_k a_k$ ($k = 1, \dots, n$). The formula deduced for $n = 2$ clearly indicates that the critical load can be determined only by a lot of cut-and-try work.

In the equation system under (2,16), if P_{cr} is known, only the ratio of the roots can be determined, because this linear equation system is a homogeneous one for determining the a factors. Thus, $a_{1,1}$ can be chosen at will, the other a factors calculated by successive chain-like computations.

The $a_{k,2}$ factors present the deflections at the $(k - 1)$ th joining point, i.e., at the beginning of section k , the $a_{k,1}$ factors, however, indicate the values of slopes.

When performing the chain-like computations, value of $a_{1,1}$ is fixed and the equation-system is solved for a force P , chosen at will. If the last equation of the equation system is satisfied, the chosen force P is equal to any critical load.

In case the last equation is not satisfied, that is to say, the deflection at the end of the bar is

$$\alpha_{n,1} \sin c_n a_n + \alpha_{n,2} \cos c_n a_n = \alpha_{n+1,2} \neq 0,$$

then the chosen force P is not equal to any critical load. If the deflection, or the $\alpha_{k,2}$ factors vary their sign, there is a zero point and the chosen P force is larger than the first critical load.

If the value of slope changes its sign only once, force P is smaller than the second critical load, because then there is only one zero point.

Summing up the afore-said, if $\alpha_{k,1}$ changes its sign only once and the sign of the deflection at the end is the same as that at the beginning, or

$$\text{sg } \alpha_{n+1,2} = \text{sg } \alpha_{1,2},$$

force P is smaller than the first critical load, but if

$$\text{sg } \alpha_{n+1,2} = - \text{sg } \alpha_{1,2},$$

force P is larger than the first critical load. [sg = signum.]

After the first computation another calculation can be performed for an adequately modified P force.

According to the above, only the sign of factors $\alpha_{k,2}$ and $\alpha_{n+1,2}$ and not their values are important for the calculation, therefore, the whole computation work can be simplified.

After force P is chosen, the solution of the differential equation under (2,11) referring to section k is written in the form

$$y_k(z) = \beta_k \sin c_k (\varphi_k + z), \quad (3,11)$$

in which z is the abscissa measured from the initial boundary of the section, and φ_k is an integration constant. Equ. (3,11) having been altered, formula

$$y_k(z) = \beta_k \cos c_k \varphi_k \cdot \sin c_k z + \beta_k \sin c_k \varphi_k \cdot \cos c_k z$$

is obtained, which compared to Equ. (2,12),

$$\alpha_{k,1} = \beta_k \cos c_k \varphi_k$$

and

$$\alpha_{k,2} = \beta_k \sin c_k \varphi_k$$

relations are obtained. So,

$$\begin{aligned} \beta_{k-1} \sin c_{k-1} (\varphi_{k-1} + a_{k-1}) &= \beta_k \sin c_k \varphi_k, \\ \beta_{k-1} c_{k-1} \cos c_{k-1} (\varphi_{k-1} + a_{k-1}) &= \beta_k c_k \cos c_k \varphi_k \end{aligned} \quad (3,12)$$

equalities are replaced for equations under Equ. (2,15). After the first has been divided by the second, the

$$\tan c_k \varphi_k = \frac{c_k}{c_{k-1}} \tan c_{k-1} (\varphi_{k-1} + a_{k-1}) \quad (3,13)$$

relation is obtained, through which the calculation may be performed by a successive computation method.

The choice of the smallest critical load can be performed, based on the following considerations.

The sign of deflection at the starting point of each section is decided by the sign of $\sin c_k \varphi_k$. When every $c_k \varphi_k$ and $c_k(\varphi_k + a_k)$ value is smaller than π ($= 180^\circ$), the sign of deflection does not alter along the whole domain.

For the last section

$$y_n(z) = \beta_n \tan c_n (\varphi_n + z). \quad (3,14)$$

If

$$\tan c_n (\varphi_n + a_n) = 0,$$

i. e.

$$c_n (\varphi_n + a_n) = \pi, \quad (3,15)$$

so the taken P force is equal to the first critical load. Should the equality under Equ. (3,15) not be satisfied, force P would be a critical force only in the case if the \bar{a}_n length of the last section differs from a_n , because only then might the boundary conditions be satisfied. This \bar{a}_n length should satisfy equation (Fig. 3)

$$c_n (\varphi_n + \bar{a}_n) = \pi,$$

from which

$$c_n \bar{a}_n = \pi - c_n \varphi_n. \quad (3,16)$$

In case

$$c_n \bar{a}_n > c_n a_n,$$

so

$$\bar{a}_n > a_n.$$

That is to say, the taken force P is smaller than the critical force, because it is the critical load of a longer bar. In a contrary case, if

$$\bar{a}_n < a_n,$$

then force P is larger than the critical force.

Should the bar be of equivalent flexural rigidity, at the last section

$$0 = y(a_n) = \beta_n \tan \left[\sqrt{\frac{P}{EI}} (\varphi_n + a_n) \right] = \beta_n \tan c (\varphi_n + a_n).$$

At the end point

$$y(a_n) = \beta_n \tan c l,$$

and so

$$\varphi_n = l - a_n,$$

i.e., φ_n is independent of P . Thus, approximatively it may be assumed that the value of φ_n is independent of force P also for variable flexural rigidity (in reality it can either increase or decrease with P). According to this approximation, based on Eqs. (2,13), (2,15) and (2,16):

$$\bar{a}_n = \frac{\pi \sqrt{EI_n}}{\sqrt{P}} - \varphi_n,$$

$$a_n = \frac{\pi \sqrt{EI_n}}{\sqrt{P_{cr}}} - \varphi_n.$$

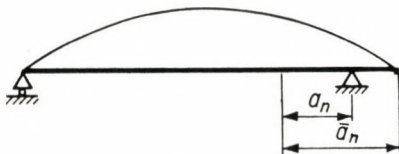


Fig. 3

Subtracting these two equations

$$\sqrt{P_{cr}} = \sqrt{P} \frac{\pi \sqrt{EI_n}}{\pi \sqrt{EI_n} - \sqrt{P} (\bar{a}_n - a_n)}$$

and the approximative value of the smallest critical load is

$$P_{cr} = P \frac{\pi^2}{[\pi - c_n (\bar{a}_n - a_n)]^2}, \quad (3,17)$$

in which

$$c_n = \sqrt{\frac{P}{EI_n}}.$$

The procedure as summarized above is, that first the calculation starts with an estimated value of the critical force. The calculation is performed by the equality

$$\tan c_k \varphi_k = \frac{c_k}{c_{k-1}} \frac{\tan c_{k-1} \varphi_{k-1} + \tan c_{k-1} a_{k-1}}{1 - \tan c_{k-1} \varphi_{k-1} \cdot \tan c_{k-1} a_{k-1}} \quad (3,18)$$

based on Equ. (3,13), through a chain-like arranged calculation, starting out with $k = 1$. As $\varphi = 0$, so

$$\tan c_1 \varphi_1 = 0.$$

The subsequent steps of the calculation, based on Equ. (3,18), are

$$\begin{aligned} \tan c_2 \varphi_2 &= \frac{c_2}{c_1} \tan c_1 a_1, \\ \tan c_3 \varphi_3 &= \frac{c_3}{c_2} \frac{\tan c_2 \varphi_2 + \tan c_2 a_2}{1 - \tan c_2 \varphi_2 \cdot \tan c_2 a_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \tan c_n \varphi_n &= \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{\tan c_{n-1} \varphi_{n-1} + \tan c_{n-1} a_{n-1}}{1 - \tan c_{n-1} \varphi_{n-1} \cdot \tan c_{n-1} a_{n-1}}. \end{aligned} \quad (3,19)$$

From the last one

$$c_n \varphi_n = \tan^{-1} \frac{c_n}{c_{n-1}} \frac{\tan c_{n-1} \varphi_{n-1} + \tan c_{n-1} a_{n-1}}{1 - \tan c_{n-1} \varphi_{n-1} \cdot \tan c_{n-1} a_{n-1}}.$$

This procedure can be applied to a fixed-end-bar also, but in this case

$$c_n(\varphi_n + \bar{a}_n) = \frac{\pi}{2},$$

and

$$c_n \bar{a}_n = \frac{\pi}{2} - c_n \varphi_n,$$

and so the approximative value of the critical load is

$$P_{cr} = P \frac{\pi^2}{[\pi - 2c_n(\bar{a}_n - a_n)]^2}. \quad (3,20)$$

Following similar principles, the higher critical forces can also be determined.

For the first step

$$P = \frac{\pi^2 EI_a}{l^2}$$

can be used as the first approximation of the critical load. In this equation I_a is an average moment of inertia to be calculated by formula

$$I_a = \frac{l}{\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{I_k}}. \quad (3,21)$$

4.0. Approximation to the critical force by applying algebraic equation

In the following the substituting bar is specially chosen, as a consequence of which, determining the critical load requires considerably less computing work.

4.1. The substituting bar to be chosen

The substituting bar is divided into n sections in such a way that the products

$$c_1 a_1 = c_2 a_2 = \dots = c_k a_k = \dots = c_n a_n$$

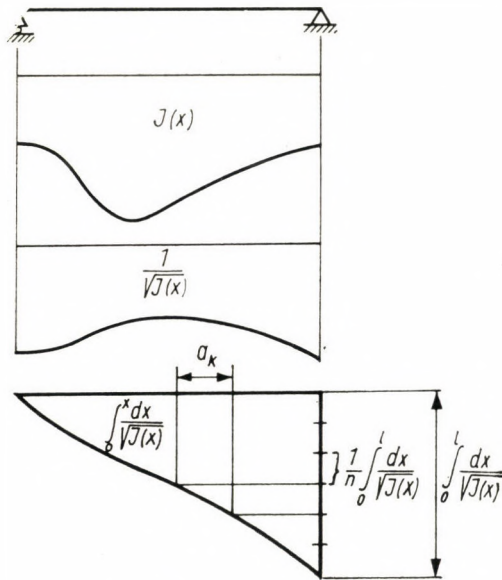


Fig. 4

should be equal. So

$$\frac{a_1}{\sqrt{I_1}} = \frac{a_2}{\sqrt{I_2}} = \dots = \frac{a_k}{\sqrt{I_k}} = \dots = \frac{a_n}{\sqrt{I_n}}$$

ratios are also equal.

The dividing work can be so performed that the integral

$$\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{I(x)}}$$

is divided into n sections (Fig. 4). Thus the value of reciprocal for substituting the moment of inertia along each section is

$$\frac{1}{\sqrt{I_k}} = \frac{1}{na_k} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{I(x)}},$$

and, therefore,

$$c_k a_k = ca = \frac{\sqrt{P}}{n\sqrt{E}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} \quad (4,11)$$

products are constant.

From (4,11)

$$P = (ca)^2 \frac{E}{\left(\frac{1}{n} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} \right)^2} \quad (4,12)$$

Fig. 4 gives a method for determining the $a_1 \dots a_n$ lengths. As

$$c_k a_k = c_{k-1} a_{k-1},$$

thus

$$\frac{\sqrt{I_{k-1}}}{\sqrt{I_k}} = \frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{a_{k-1}}{a_k} \quad (4,13)$$

The symbols are introduced for the sake of simplicity as follows:

$$\sin c_k a_k = \sin \frac{\sqrt{P}}{n\sqrt{E}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} = v, \quad (4,14)$$

$$\cos c_k a_k = w, \quad (4,15)$$

$$\tan c_k a_k = \frac{v}{w} = t, \quad (4,16)$$

and

$$\frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{a_{k-1}}{a_k} = \beta_k. \quad (4,17)$$

4.2. Equation system presenting the solution

The symbols under (4,14)–(4,17) having been substituted into Equ. (2,16), a linear equation system as below is obtained

In this case

$$\tan ca = 0,$$

or

$$ca = \sqrt{\frac{P}{EI_k}} a_k = m\pi.$$

The critical load of higher order obtained in this way, is equal to the Euler critical load, if each section is a compressed simple beam.

$$2. \quad \beta_3 + 1 = 0.$$

This equality can never be satisfied, as $\beta_3 > 0$.

$$3. \quad 1 + \beta_2 \frac{\beta_3 - t^2}{\beta_3 + 1} = 0,$$

from which

$$\beta_3 t + t + \beta_2 t(\beta_3 - t^2) = t(1 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3 - \beta_2 t^2) = 0. \quad (4,25)$$

The roots are

$$t = 0, \quad (4,26)$$

and

$$t = \pm \sqrt{\frac{1 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3}{\beta_2}}. \quad (4,27)$$

The same solution can be arrived at with the aid of Equ. (3,18):

$$\tan c_k \varphi_k = \beta_k \frac{\tan c_{k-1} \varphi_{k-1} + t}{1 - t \tan c_{k-1} \varphi_{k-1}}. \quad (4,28)$$

So the value of each tangent quantity is

$$\tan c_1 \varphi_1 = 0,$$

$$\tan c_2 \varphi_2 = \beta_2 t,$$

$$\tan c_3 \varphi_3 = \beta_3 \frac{\beta_2 t + t}{1 - \beta_2 t^2},$$

and the last value

$$\tan c_n (\varphi_n + a_n) = \frac{\tan c_n \varphi_n + t}{1 - t \tan c_n \varphi_n}. \quad (4,29)$$

After the value of $\tan c_3 \varphi_3$ has been substituted into,

$$\tan c_3(\varphi_3 + a_3) = \frac{\beta_3 \frac{\beta_2 t + t}{1 - \beta_2 t^2} + t}{1 - \beta_3 t \frac{\beta_2 t + t}{1 - \beta_2 t^2}}.$$

formula is obtained. But, if the compressive force is equal to the critical load,

$$\tan c_3(\varphi_3 + a_3) = 0.$$

Value of a fraction is zero, if either the numerator is zero, or the denominator approaches infinite. If the numerator is zero, i.e. if

$$\beta_3 \frac{\beta_2 t + t}{1 - \beta_2 t^2} + t = 0,$$

in this case

$$\beta_2 \beta_3 t + \beta_2 t + t - \beta_2 t^3 = t(1 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3 - \beta_2 t^2) = 0,$$

which is equal to Equ. (4,25) and gives all the roots.

If the denominator approaches infinite, also the value of the numerator approaches it, and the value of the fraction approaches $-1/t$.

4.3. Solution of the equation

The equation may be solved by a chain-line arranged step-by-step computing method presented at the end of par. 4,3.

The same result can be obtained if the computation is based on the equation system under (4,21) and the value of $a_{1,1}$ is chosen at random. Each value of $a_{k,1}$ and $a_{k,2}$ can be calculated by a concatenate method and values of $a_{n,1}$ and $a_{n,2}$ should satisfy the last equation. Roots of this equation are parameters for determining the critical load.

This procedure is to be presented for a bar of five sections as follows:

Let $a_{1,1} = 1$. From the first two equations

$$\alpha_{2,1} = \frac{w}{\beta_2},$$

$$\alpha_{2,2} = v.$$

From the third and the fourth equations

$$\alpha_{3,1} = \frac{1}{\beta_3} (w \alpha_{2,1} - v \alpha_{2,2}) = \frac{w^2}{\beta_2 \beta_3} - \frac{v^2}{\beta_3},$$

$$\alpha_{3,2} = v \alpha_{2,1} + w \alpha_{2,2} = \frac{v w}{\beta_2} + v w = \frac{v w (1 + \beta_2)}{\beta_2}.$$

From the fifth and the sixth equations

$$\alpha_{4,1} = \frac{1}{\beta_4} (w \alpha_{3,1} - v \alpha_{3,2}) = \frac{w^3}{\beta_2 \beta_3 \beta_4} - \frac{v^2 w (\beta_2 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3)}{\beta_2 \beta_3 \beta_4},$$

$$\alpha_{4,2} = v \alpha_{3,1} + w \alpha_{3,2} = -\frac{v^3}{\beta_3} + \frac{v w^2 (1 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3)}{\beta_2 \beta_3}.$$

Similarly, based on the seventh and eighth equations

$$\alpha_{5,1} = \frac{w_4}{\beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5} - \frac{v^2 w^2 (\beta_2 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3 + \beta_4 + \beta_2 \beta_4 + \beta_2 \beta_3 \beta_4)}{\beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5} + \frac{v^4}{\beta_3 \beta_5},$$

$$\alpha_{5,2} = \frac{w^3 v (1 + \beta_4 + \beta_3 \beta_4 + \beta_2 \beta_3 \beta_4)}{\beta_2 \beta_3 \beta_4} - \frac{v^3 w (\beta_2 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3 + \beta_2 \beta_4)}{\beta_2 \beta_3 \beta_4}.$$

Finally the ninth equation is

$$v \alpha_{5,1} + w \alpha_{5,2} = 0.$$

After the a values are substituted into

$$\frac{v^5}{\beta_3 \beta_4} - \frac{v^3 w^2 (\beta_2 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3 + \beta_4 + \beta_2 \beta_4 + \beta_2 \beta_3 \beta_4)}{\beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5} + \frac{v w^4}{\beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5} -$$

$$- \frac{v^3 w^2 (\beta_2 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3 + \beta_2 \beta_4)}{\beta_2 \beta_3 \beta_4} + \frac{v w^4 (1 + \beta_4 + \beta_3 \beta_4 + \beta_2 \beta_3 \beta_4)}{\beta_2 \beta_3 \beta_4} = 0.$$

Rearranging the equation into the standard form and dividing by w ($w = 0$ cannot be a root)

$$\frac{t}{\beta_3 \beta_5} \left[t^4 - \frac{(\beta_2 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3 + \beta_4 + \beta_2 \beta_4 + \beta_2 \beta_3 \beta_4 + \beta_2 \beta_5 + \beta_3 \beta_5 + \beta_2 \beta_3 \beta_5 + \beta_2 \beta_4 \beta_5)}{\beta_2 \beta_4} t^2 + \frac{(1 + \beta_5 + \beta_4 \beta_5 + \beta_3 \beta_4 \beta_5 + \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5)}{\beta_2 \beta_4} \right] = 0. \quad (4.31)$$

One of the roots is $t = 0$, the other four are the square roots of the roots of the quadratic equation to t^2 between the brackets []. Calculation of product-sums between the brackets () is easy to perform.

If the number of the sections is great and only the first critical load is required, the step-by-step calculation dealt with in par. 3,0 may easily lead to results. As $\tan ca = t = \text{constant}$, the calculating work is decreased.

5.0. The shape under buckling

The shape of the substituting bar under buckling is presented by Equ. (3,11)

$$y_k(z) = \beta_k \sin c_k (\varphi_k + z).$$

Values of $\tan c_k \varphi_k$ and so φ_k can also be calculated by a concatenate calculation method based on Equ. (3,18). And from Equ. (3,12)

$$\beta_k = \beta_{k-1} \frac{\sin c_{k-1} (\varphi_{k-1} + a_{k-1})}{\sin c_k \varphi_k}. \quad (5,1)$$

So the shape of the substituting bar under buckling can be calculated, based on Equ. (3,11).

6.0. Working example

A bar under compressive force is chosen as an example, the moment of inertia of which $\frac{1}{2} I$ is along the first half of its length and I along the second half (Fig. 5).

Exact values of the critical load calculated with Equ. (2,19) are

$$P_k = \lambda_k \frac{EI}{l^2},$$

where

$$\lambda_1 = 6.4075,$$

$$\lambda_2 = 28.437,$$

$$\lambda_3 = 58.78,$$

$$\lambda_4 = 110.8$$

This bar was examined by COLLATZ ([1], pp. 336—338) with the difference equation.

6.1. Results obtained by difference equations

COLLATZ examined this bar for three, respectively, five sections. The results are as follows:

6.11. For three sections

When the l length is divided into three sections

$$\lambda_1 = 5.7058, \quad \text{the error is } 11\%;$$

$$\lambda_2 = 21.294 \quad \text{the error is } 25\%.$$

6.12. For five sections

When the l length is divided into five sections

$\lambda_1 = 6.1513,$	the error is 4%;
$\lambda_2 = 25.0,$	the error is 12%;
$\lambda_3 = 40.55,$	the error is 31%;
$\lambda_4 = 78.29,$	the error is 30%.

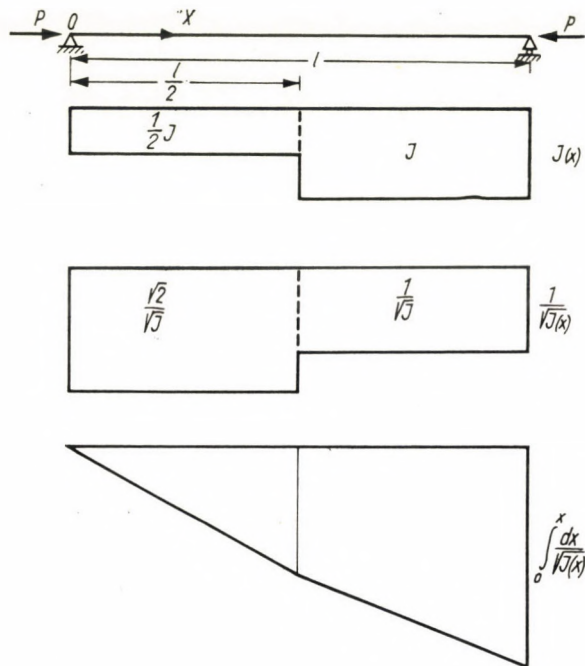


Fig. 5

6.2. Solution by a substituting bar

Along the first half of the bar

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{I}} x. \quad (6,201)$$

Along the second half

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} + \int_{\frac{l}{2}}^x \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{I}} l + \frac{1}{\sqrt{I}} \left(x - \frac{l}{2} \right). \quad (6,202)$$

The total integral is

$$\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} = \frac{l}{2} (\sqrt{2} + 1) \frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{1.2071}{\sqrt{I}} l. \quad (6,203)$$

6.21. For two sections

When the l length is divided into two sections in such a way that the ca product should be constant.

Based on Equ. (4,11)

$$c_k a_k = \sqrt{\frac{P}{EI_k}} a_k = \frac{\sqrt{P}}{2\sqrt{E}} \frac{1.2071}{\sqrt{I}} l = \frac{0.6036\sqrt{P}}{\sqrt{EI}} l.$$

According to Eqs. (6,201) and (6,203)

$$\int_0^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{I(x)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{I}} a_1 = \frac{1}{2} \frac{1.2071}{\sqrt{I}} l;$$

$$a_1 = 0.4268 l; \quad a_2 = l - a_1 = 0.5732 l.$$

From which, when Equ. (4,27) is used,

$$\beta_2 = \frac{a_1}{a_2} = 0.7446.$$

Solutions obtained from the expanded equation system based on Eqs. (4,28) and (4,29), are

$\lambda_1 =$	6.7723	the difference from the exact value: 5.7%,
$\lambda_2 =$	27.089	the difference from the exact value: 4.6%,
$\lambda_3 =$	6.095	the difference from the exact value: 3.7%,
$\lambda_4 =$	108.3	the difference from the exact value: 2.3%.

Let the value of the smallest critical load be determined by successive approximation

The first choice is $\lambda = 9$, a very inaccurate value, and the calculations start out from this value. Then

$$P_1^{(1)} = \frac{9EI}{l^2}, \quad \sqrt{P_1^{(1)}} = \frac{3\sqrt{EI}}{l},$$

thus

$$ca = \frac{0.6036}{\sqrt{EI}} l \frac{3\sqrt{EI}}{l} = 1.8108,$$

$$t = \tan ca = -4.0617$$

at $x = 0$ place $y = 0$, and so

$$\tan c_1 \varphi_1 = 0.$$

Based on Equ. (4,28)

$$\tan c_2 \varphi_2 = \beta_2 t = 0.7446 (-4.0617) = -3.0243,$$

$$c_2 \varphi_2 = 1.8901.$$

According to Equ. (3,16)

$$c_2 \bar{a}_2 = \pi - 1.8901 = 1.2515,$$

$$c_2 \bar{a}_2 - c_2 a_2 = 1.2515 - 1.8108 = -0.5593.$$

And as per Equ. (3,17)

$$P_1^{(2)} = P_1^{(1)} \frac{\pi^2}{[\pi + 0.5593]^2} = P_1^{(1)} \frac{\pi^2}{13.6967} =$$

$$= 9 \cdot 0.72058 \frac{EI}{l^2} = 6.4852 \frac{EI}{l^2}.$$

The difference from the value of the substituting bar is 4.2%. Secondly the calculation starts out with the value $= \lambda_1^{(2)} = 6.4852$, and thus $\lambda_1^{(3)} = 6.6660$ is obtained. The difference from the value of the substituting bar is 1.6%.

6.22. For three sections

$$\frac{a_k}{\sqrt{I_k}} \frac{1.2071 l}{3 \sqrt{I}} = \frac{0.4024 l}{\sqrt{I}}.$$

The lengths of the sections

$$a_1 = 0.2845 l,$$

$$a_2 = 0.3131 l,$$

$$a_3 = 0.4024 l,$$

furthermore,

$$\beta_2 = 0.909,$$

$$\beta_3 = 0.778.$$

The roots based on Equ. (4,27)

$$t_1 = + \sqrt{\frac{1 + \beta_3 + \beta_2 \beta_3}{\beta_2}} = 1.696, \quad ca = 1.0382;$$

$$t_2 = -1.696, \quad ca = 2.1034.$$

Due to Equ. (4,26)

$$t_3 = 0, \quad ca = \pi;$$

$$t_4 = +1.696, \quad ca = \pi + 1.0382 = 4.1798.$$

So, according to Eqs. (4,22) and (6,203)

$$P = \frac{(ca)^2 E}{\left(\frac{1}{n} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{I}}\right)^2} = \frac{(ca)^2 EI}{\left(\frac{1.2071}{3} l\right)^2} = \frac{(ca)^2 FI}{0.4024^2 l^2}.$$

And from these

$$\lambda_1 = \left(\frac{1.0382}{0.4024}\right)^2 = 6.669, \quad \text{deviation from the exact value is } 4\%;$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{2.1034}{0.4024}\right)^2 = 27.323, \quad \text{deviation from the exact value is } 3.9\%;$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{\pi}{0.4024}\right)^2 = 60.95, \quad \text{deviation from the exact value is } 3.7\%;$$

$$\lambda_4 = \left(\frac{4.1798}{0.4024}\right)^2 = 107.8, \quad \text{deviation from the exact value is } 2.7\%.$$

6.23. For five sections

$$\frac{a_k}{\sqrt{I}} = \frac{1.2071 l}{5 \sqrt{I}} = \frac{0.24142 l}{\sqrt{I}}.$$

The lengths of sections

$$a_1 = \frac{0.24142}{\sqrt{2}} l = 0.17071 l,$$

$$a_2 = a_1 = 0.17071 l,$$

$$a_4 = \frac{0.24142}{\sqrt{1}} = 0.24142,$$

$$a_5 = a_4 = 0.24142,$$

$$a_3 = l - (a_1 + a_2 + a_4 + a_5) = 0.17374 l,$$

$$\beta_2 = \frac{a_1}{a_2} = 1,$$

$$\beta_3 = \frac{a_2}{a_3} = 0.983,$$

$$\beta_4 = \frac{a_3}{a_4} = 0.720,$$

$$\beta_5 = \frac{a_4}{a_5} = 1.$$

Roots are calculated with Equ. (4.31)

$$\beta_3 \beta_5 = 0.983,$$

$$\beta_2 \beta_3 = \frac{a_1}{a_2} \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_1}{a_3} = 0.983,$$

$$\beta_2 \beta_4 = 0.720,$$

$$\beta_2 \beta_5 = 1,$$

$$\beta_3 \beta_5 = 0.983,$$

$$\beta_4 \beta_5 = 0.720,$$

$$\beta_2 \beta_3 \beta_4 = \frac{a_1}{a_4} = 0.707,$$

$$\beta_2 \beta_3 \beta_5 = 0.983,$$

$$\beta_2 \beta_4 \beta_5 = 0.720,$$

$$\beta_3 \beta_4 \beta_5 = \frac{a_2}{a_5} = 0.707,$$

$$\beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 = \frac{a_1}{a_5} = 0.707.$$

After substituting these into Equ. (4.31), the equation will be

$$t \left[t^4 - \frac{8.799}{0.720} t^2 + \frac{4.134}{0.720} \right] = 0.$$

The roots

$$t = 0,$$

and

$$t = \pm \sqrt{\frac{12.221 \pm \sqrt{12.221^2 - 22.968}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{12.221 \pm 11.242}{2}},$$

$$t_1 = 0.704,$$

$$ca = 0.6134;$$

$$t_2 = 3.425,$$

$$ca = 1.281;$$

$$t_3 = -3.425,$$

$$ca = 1.8549;$$

$$t_4 = -0.704,$$

$$ca = 2.528.$$

And from these

$$\lambda_1 = \left(\frac{0.6134}{0.24142} \right)^2 = 6.4556, \quad \text{deviation from the exact value is } 0.8\%;$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{1.281}{0.24142} \right)^2 = 28.115, \quad \text{deviation from the exact value is } 1.1\%;$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{1.8549}{0.24142} \right)^2 = 59.03, \quad \text{deviation from the exact value is } 0.4\%,$$

$$\lambda_4 = \left(\frac{2.528}{0.24142} \right)^2 = 109.7; \quad \text{deviation from the exact value is } 1.1\%.$$

The accuracy and practicability of the method presented is proved by a comparison of results, gained with those due to method of difference equations.

7.0. Method of calculation by automatic digital computer

According to data, the bar is divided into n sections, and the moment of inertia is constant along each section. These moments of inertia and the length of each section are fed into the computer.

The steps of the first method are as follows:

1. Calculation of the first approximative value of the critical load as

$$P = \frac{\pi^2 E}{l^2} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{I_k}}.$$

2. Determination of each c_k value ($k \leq n$) by Equ. (2,13).

3. Determination of value $\tan c_k a_k$.

4. Determination of values $\tan c_k(\varphi_k + a_k)$ for each section ($k \leq n$) by using Equ. (3,13).

$$\tan c_k(\varphi_k + a_k) = \frac{c_k \tan c_{k-1}(\varphi_{k-1} + a_{k-1}) + c_{k-1} \tan c_k a_k}{c_{k-1} - c_k \tan c_{k-1}(\varphi_{k-1} + a_{k-1}) \cdot \tan c_k a_k}.$$

5. Determination of the $\tan c_n \varphi_n$ value relating to the starting point of the last section by using Equ. (3,13).

6. The determination of \bar{a}_n fictitious length by using Equ. (3,16). If values of $\tan c_k(\varphi_k + a_k)$ change their sign more than twice

$$c_k(\varphi_k + a_k) \geq \frac{3\pi}{2}.$$

In this case, due care should be taken to avoid determining a critical load of higher order.

7. The determination of the new approximative value of the smallest critical load by using Equ. (3,17).

8. If the Δ relative error between the new and the old approximative value of the critical load is less than ε , which was fixed beforehand, the new approximative critical load can be taken as the smallest one. If $\Delta \geq \varepsilon$, the calculation should be repeated from step 2.

The flow diagram of the program is indicated on Fig. 6.

This method is not very adequate for digital computers, as the calculation of values $\tan c_k \varphi_k$ is required.

The steps as per the second method are as follows:

The bar is divided into n sections and along each section the moment of inertia is taken as constant.

1. Determination of values

$$A_j = \frac{a_j}{\sqrt{I_j}}$$

for each old section on the given bar.

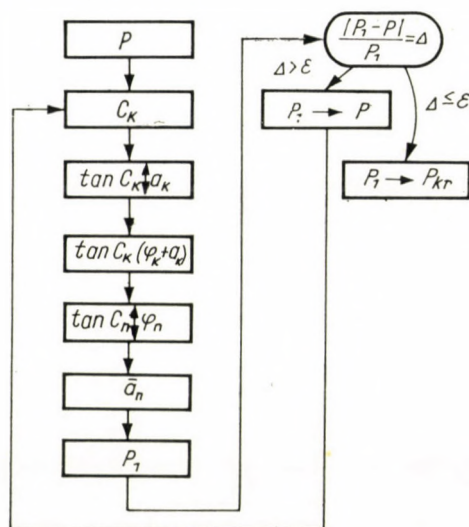


Fig. 6

2. Determination of value

$$B = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \frac{a_k}{\sqrt{I_k}} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n A_j.$$

3. Determination of the lengths a_k based on equation

$$\sum_{x=0}^{a_k} \frac{a}{\sqrt{I_k}} = B.$$

From this step the method of calculation coincides with the steps of method one

4.

$$P = \frac{\pi^2 E}{l} \frac{1}{\sum_{k=1}^r \frac{a_k}{I_k}}.$$

5. $u = \tan c a.$

6.
$$\tan c_k(\varphi_k + a_k) = \frac{c_k \tan c_{k-1}(\varphi_{k-1} + a_{k-1}) + c_{k-1} u}{c_{k-1} - c_k u \tan c_{k-1}(\varphi_{k-1} + a_{k-1})}.$$

7. As step 5 of method 1.

8. As step 6 of method 1.

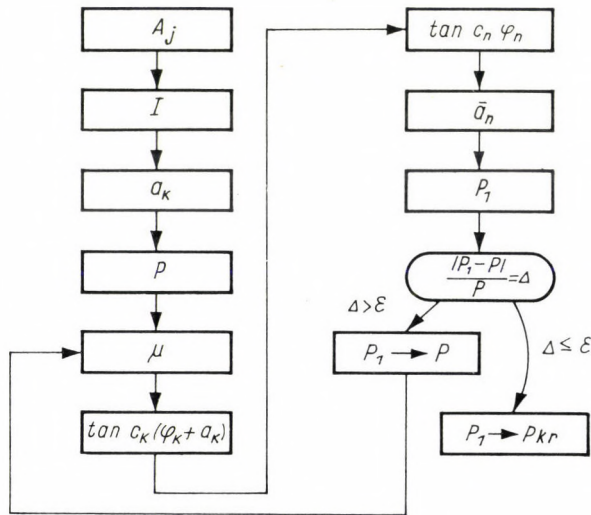


Fig. 7

9. As step 7 of method 1.

10. As step 8 of method 1, but in case of leap, the calculation is repeated from step 5 and not from 2.

The flow diagram is indicated in Fig. 7.

REFERENCES

1. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949).
2. TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability (Mc. Graw-Hill, New York, 1936).
3. BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.: Stabilitätstheorie. I. Teil (Akademie Verlag, Berlin, 1957).

ZWEI NEUE PRAKTISCHE METHODEN ZUR BESTIMMUNG
DER KRITISCHEN KRÄFTE EINES GEDRÜCKTEN STABES
MIT VERÄNDERLICHEM QUERSCHNITT

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz werden zur Bestimmung der kritischen Kräfte erster und höherer Ordnung eines statisch bestimmten, in der axialen Richtung auf Druck beanspruchten Stabes zwei neue Methoden vorgeschlagen.

Nach dem ersten Verfahren wird das Ergebnis an einem Ersatzstabe, dessen Biegesteifigkeit abschnittsweise konstant ist, stufenweise annähernd bestimmt. Die zweite Methode führt nach der speziellen Auswahl eines Ersatzstabes zu einer resolventen algebraischen Gleichung, nach deren Lösung die kritische Kraft mit Hilfe trigonometrischer Tafeln bestimmt werden kann.

Der Aufsatz ist durch numerische Beispiele ergänzt, die die Genauigkeit des Verfahrens beweisen. Schließlich ist auch das bei der Verwendung eines Elektronenrechners benötigte Block-Diagramm angegeben.

DEUX NOUVELLES MÉTHODES PRATIQUES POUR DÉTERMINER
LES FORCES CRITIQUES D'UNE BARRE COMPRIMÉE DE SECTION VARIABLE

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

L'auteur propose deux nouvelles méthodes pour la détermination des forces critiques premières et supérieures de barres comprimées dans le sens de l'axe, statiquement déterminées.

La première méthode détermine le résultat par approximations successives, sur une barre de remplacement dont la rigidité à la flexion est constante par section. La seconde méthode aboutit, après le choix spécial de la barre de remplacement, à une équation algébrique résolvente. Celle-ci une fois résolue, une table trigonométrique permet de déterminer la force critique.

L'article, complété par des exemples numériques prouvant l'exactitude de la méthode, donne enfin pour les calculs exécutés sur des calculatrices électroniques digitales automatiques le schéma de fluence nécessaire.

ДВА НОВЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ
СИЛ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

В работе предлагается два новых метода определения элементарных и высших критических сил статически определенного продольно-сжатого стержня переменного сечения.

По первому методу результат определяется постепенным приближением с помощью замещающего стержня с постоянной по участкам жесткостью изгиба, второй — после специального подбора замещающего стержня дает в результате резольventное алгебраическое уравнение, после решения которого критическая сила определяется с помощью тригонометрической таблицы.

В работе приводятся числовые примеры, которые подтверждают точность метода. Наконец, даны блок-диаграммы, необходимые для выполнения расчетов на автоматической цифровой электронной счетно-вычислительной машине.

THE DETERMINATION OF CHARACTERISTIC PARAMETERS OF MICROWAVE SEMICONDUCTOR DIODES WITH VARIABLE CAPACITANCE

T. HORVÁTH

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received November 27, 1961]

A new method for determining the parameters of variable capacitance microwave semiconductor diodes is described. By means of admittance measurement made at two different frequencies all the four parameters involved in the equivalent circuit of the diodes can be determined. Graphic and numerical methods of the determination are described. The method can be advantageously used for the measurement of circuit elements in all two-terminal networks consisting of series lossy resonant circuit and a capacitance connected parallel to it.

I. Introduction

The operation of the parametric diodes is based on the voltage dependence of the diode blocking layer capacitance. The equivalent circuit of the diode for VHF and for the lower microwave frequencies is shown in Fig. 1.

The most important role for the operation of the diode has a loss resistance R_s and a variable capacitance C . The resistance R_s is the loss resistance of the semiconductor material shown in the conductor current closing the displacement current of the variable capacitance C . This resistance in parametric diodes has the order of magnitude of ohm. The variable capacitance C is of the order of pF and in the usable voltage range determined backwards by the breakdown voltage, forwards by the increase of the boundary layer conductivity, changes at the rate 1 : 2 — 1 : 4. For information the data of the parametric amplifier diode type HPA 2810 of Hughes Products are given [1] in Table I. As breakdown voltage is to be defined the voltage at which the back current reaches 10 μ A.

By means of the loss resistance R_s and the variable capacitance C the Q -factor of the diode can be defined in terms of the relation

$$Q = \frac{1}{\omega R_s C} \quad (1)$$

which is the ratio of the reactance represented by the variable capacitance at the angular frequency ω and of the loss resistance or 2π time, the quotient of

the energy stored by the variable capacitance C and the energy dissipated by the loss resistance R_s during one period.

Q decreases with frequency. The frequency at which Q just equals unity is the cut-off frequency and is denoted by f_c

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_s C} \quad (2)$$

At this frequency the capacitive resistance and the loss resistance just equal each other, that is, the energy dissipated by the loss resistance during one period is by 2π greater than the energy stored in the capacitance.

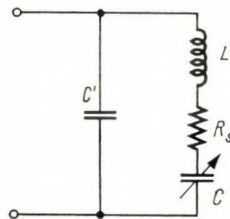


Fig. 1. Equivalent circuit of the variable capacitance semiconductor diode

Table I

Stray capacitance C pF	Cut-off frequency f_c GHz	Inductance L m μ H	Breakdown voltage V_Q V	Variable capacitance C pF		
				0 V	-3 V	-7 V
0.2	70	4	5-7	2.5	0.76	0.60

Since C changes with the bias voltage, while giving the value of f_c the value of C must also be given. The value of f_c is usually given for the capacitance value measured at zero bias voltage or the minimally adjustable capacitance value, i.e. for that which can be measured in the neighbourhood of the breakdown voltage. The value of f_c shown in Table I pertains to minimum capacitance in the knowledge of which the loss resistance R_s will be determined by (2) to 3.8 ohms.

Several papers in the literature on the subject deal with the direct measurement of diode Q . The measurement is made in terms of evaluating the admittance curve of the diode, dependent on the diode bias voltage [2] or by placing the diode in a cavity resonator, the diode Q may be calculated from the variation of the cavity Q [3]. Placing a short circuit in the crystal

holder, a discontinuity and a known ohmic [2, 3] or capacitive [3] impedance instead of the crystal, the impedance transformation properties of the crystal mount can be determined, and thus, from the impedance of the crystal holder containing the crystal, the impedance of the crystal and thereof its Q can be obtained. For the calibration of the measuring arrangement the value of the diode barrier-layer capacitance measured at low frequency is often used. In the following, a measuring method will be described which gives all four equivalent parameters of the crystal diode mounted in the holder by means of microwave measurements in terms of simple graphic evaluation or numerical evaluation which may be derived from it. The measurement is made at a frequency lower than 2 Gc/s, because at higher frequencies the equivalent circuit of the diode is more complicated.

II. The principle of measurement and the method of graphic evaluation

The diode to be measured is placed in the crystal holder according to Fig. 2 in which the diode represents the termination of a coaxial line section. The capacitive short realized by means of an S-plunger allows the diode bias-

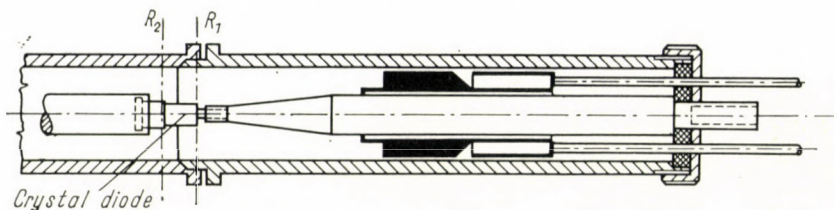


Fig. 2. The crystal mount used in the measurement

ing, and produces short circuit in the indicated plane R_1 . The output admittance of the coaxial system related to the indicated reference plane R_2 is to be measured. This admittance is, according to the equivalent circuit

$$Y = j\omega C' + \frac{1}{j\omega L + R_s + \frac{1}{j\omega C}} \quad (3)$$

Fig. 3 shows the change of this admittance for the case, when the boundary-layer capacitance C is varied by varying the bias voltage. The admittance Y moves along the circle with a diameter $1/R_s$, since Y is a rational fractional function of $1/j\omega C$ and the maximum of the real part of Y is $1/R_s$. The admittance $j\omega C' + 1/R_s$ just corresponds to the series resonance.

quite arbitrary circle going through the admittance points Y_1 and Y_2 . To simplify the tangent construction, it is convenient to take the centre of the test circle in the straight line going through Y_1 and Y_2 , as shown in Fig. 5.

The above construction in the first place determines the stray capacitance C' . In the knowledge of the distance h of this point from whichever point, say point Y_2 , of the circle and of the abscissa a of Y_2 (see Fig. 6), the series loss resistance R_s may be calculated in terms of the formula

$$R_s = \frac{a}{h^2} . \quad (4)$$

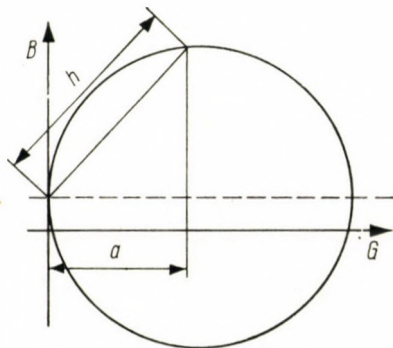


Fig. 6. For the calculation of the admittance circle diameter

It may be seen in Fig. 4, how the inductivity L of the crystal contact wire can be determined in the knowledge of C' , R_s and of the boundary-layer capacitance C_2 pertaining to whichever point, say Y_2 , of the admittance circle.

The value of the boundary-layer capacitance C , which can be measured at microwaves, agrees with the value measured at low frequency, e.g. at 100 kc/s. The low frequency measurements of the diode capacitance give the sum $C + C'$ of the variable boundary-layer capacitance and the constant stray capacitance. The construction described above gives the value of the stray capacitance C' , therefore, C and consequently L can be determined.

III. The determination of the variable capacitance by microwave measurement

By making the measurement of the diode admittance at two frequencies rather than at one, it becomes possible to determine all diode parameters including the boundary-layer capacitance. The diode admittances were measured at the angular frequencies ω_1 and ω_2 keeping the boundary layer capacitance C constant determining its value by the bias voltage. If the diode parameters, thus also the series loss resistance R_s are assumed to be independent

of frequency, the admittance points measured at the two frequencies will lie on two circles with the diameter $1/R_s$ which touch the imaginary susceptance axis at the points $j\omega_1 C'$ resp. $j\omega_2 C'$ (Fig. 7). Thus, on the straight line with abscissa R_s two points are obtained (Fig. 8) representing the values of

$$R_s + j\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)$$

at the angular frequency ω_1 , resp. ω_2 . So following equations may be written:

$$\frac{1}{\omega_1 C} = \omega_1 L + y_1 + (\omega_2 - \omega_1) C' \quad (5)$$

$$\frac{1}{\omega_2 C} = \omega_2 L + y_2. \quad (6)$$

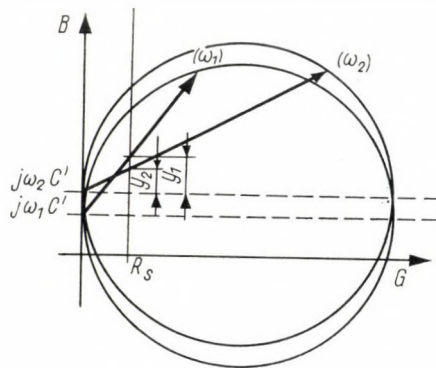


Fig. 7. Displacement of the admittance circle due to a change of frequency

Resolving these equations for C , resp. L , we obtain

$$L = \frac{\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} + \frac{\omega_1}{\omega_2 + \omega_1} C'. \quad (8)$$

In the graphic method described in the preceding Section the admittance circle and so the stray capacitance and the series loss resistance are determined at a single frequency, for boundary-layer capacitances pertaining to two different bias voltages. The remaining unknown parameters, the inductivity of the contact wire and the boundary-layer capacitance are determined by evaluating the value of the diode admittance for a single bias voltage, that is for constant boundary-layer capacitance, at two different frequencies.

$$C = \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \left(\frac{y_1 - y_2}{\omega_2 - \omega_1} + C' - L \right)}, \quad (7)$$

Further a graphical method will be described by means of which the whole admittance circle, respectively all four parameters involved in the equivalent circuit can be determined by measuring the diode admittances, that is two real and two imaginary, in total four data at two different frequencies for a boundary-layer capacitance pertaining to a single bias voltage.

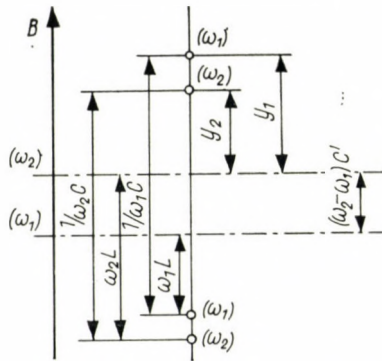


Fig. 8. For the calculation of L and C values

IV. The determination of the diode admittance circle by measurement at two frequencies

If the measuring frequency is changed, the admittance circle will only be shifted in the direction of the imaginary axis on account of the susceptance term due to stray capacitance. Therefore, if we form the admittance circle

$$Y' = Y - j\omega C', \tag{9}$$

this will at all frequencies invariantly have the diameter $1/R_s$ and touch the ordinate axis in the origin.

Setting whichever unknown boundary-layer capacitance C , we measure the diode admittances $Y(\omega_1)$ and $Y(\omega_2)$. The admittances

$$Y'(\omega_1) = Y(\omega_1) - j\omega_1 C' \tag{10}$$

and

$$Y'(\omega_2) = Y(\omega_2) - j\omega_2 C' \tag{11}$$

are on the circle shown in Fig. 9, which has the diameter $1/R_s$ and touches the susceptance axis in the origin.

As $Y - Y'$ is a quantity proportional to ω , the ratio of the frequencies determines the point of intersection M of the straights connecting the admittance points. Therefore, the intersection point M on the straight connecting

$Y(\omega_1)$ with $Y(\omega_2)$ may be marked out. For this reason the condition for drawing the circle Y' is, that it should touch the susceptance axis in the origin and the straight connecting the points of intersection of the circle Y' and the ordinate lines of points $Y(\omega_1)$ and $Y(\omega_2)$ should go through point M . The angle included by the secant passing points M , $Y'(\omega_1)$ and $Y'(\omega_2)$ and by the horizontal (Fig. 10) is therefore determined by the condition that the section OP cut out by this intersecting from the imaginary axis should have the same length as the tangent which can be drawn to the admittance circle going through points

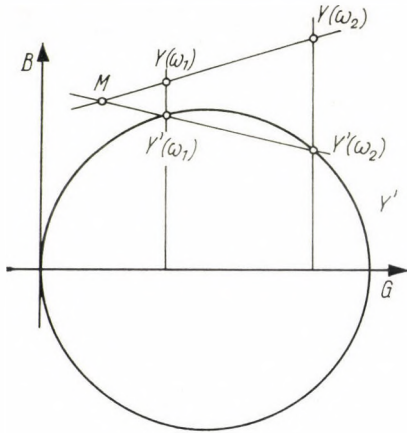


Fig. 9. The Y' circle

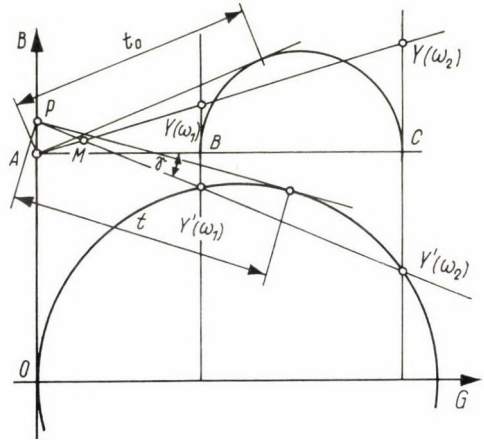


Fig. 10. To the determination of the tangent length of the admittance circle

$Y'(\omega_1)$ and $Y'(\omega_2)$. The length t of this tangent is evidently related to the length t_0 of the tangent of the test circle passing points B and C by*

$$t = \frac{t_0}{\cos \gamma} \tag{12}$$

The construction of the secant passing point M and having the slope angle γ is shown in Fig. 11. Namely, the secant should cut out from the axis B the piece $t = OP$.

The whole construction is shown in Fig. 12. The admittance points are projected at the horizontal axis and with the aid of the test circle traced onto the projections, t_0 is determined. To the circle of the radius t_0 around the origin, from point M a tangent is drawn cutting out points $Y'(\omega_1)$ and $Y'(\omega_2)$ of the

* $t = \sqrt{PY'(\omega_1) \cdot PY'(\omega_2)}$; $AB = PY'(\omega_1) \cdot \cos \gamma$,
 $t_0 = \sqrt{AB \cdot AC} = t \cdot \cos \gamma$; $AC = PY'(\omega_2) \cdot \cos \gamma$.

ordinate straights of the measured admittances. With the aid of one of the points the circle Y' may be traced and this means the solution of the problem.

The stray capacitance C' may be computed from the ordinate difference $Y - Y'$ by means of formula (9). Thus, the whole admittance circle may be traced. R_s is given by the diameter of the admittance circle, and as we have an admittance value measured for a single value of the boundary-layer capacitance C but at two different frequencies, in terms of the foregoing the boundary-layer capacitance C is hereby also determined. If the computation is made with

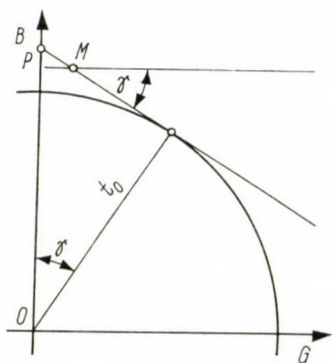


Fig. 11. Determination of the secant slope angle

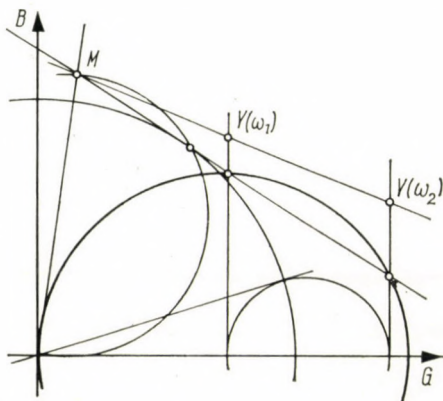


Fig. 12. The complete construction of the Y' circle

the aid of circle Y' , that is, y'_1 and y'_2 are the pieces cut out by the vectors $Y'(\omega_1)$ and $Y'(\omega_2)$ of the ordinate straight with the abscissa R_s , then the equations (5) and (6) will be reduced as follows:

$$\frac{1}{\omega_1 C} = \omega_1 L + y'_1, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\omega_2 C} = \omega_2 L + y'_2. \tag{14}$$

To the relations (7) and (8) correspond

$$C = \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \left(\frac{y'_1 - y'_2}{\omega_2 - \omega_1} - L \right)} \tag{15}$$

and

$$L = \frac{\omega_1 y'_1 - \omega_2 y'_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \tag{16}$$

V. The numerical determination of the stray capacitance and the series loss resistance

In the foregoing, formulae for the values of C and L were given. Similarly, following the steps of the described graphic design, formulae for the determination of the stray capacitance and series loss resistance values by means of computation may be obtained.

The construction shown in Fig. 5 proceeds from the admittance values

$$Y_1 = g_1 + jb_1, \quad (17)$$

$$Y_2 = g_2 + jb_2 \quad (18)$$

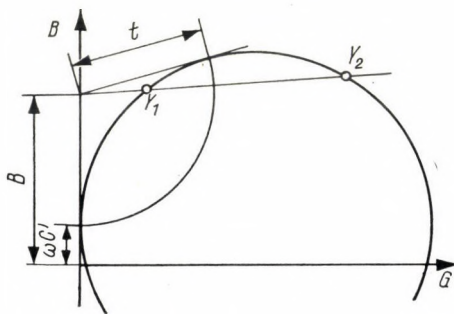


Fig. 13. For the determination of the stray capacitance value by calculation

pertaining to two different bias voltages and measured at a single frequency. The straight going through these two points cuts out of the imaginary axis the piece

$$B = \frac{b_1 g_2 - b_2 g_1}{g_2 - g_1}. \quad (19)$$

The length of the tangent which may be drawn from the point of intersection to the circle is (Fig. 13)

$$t = \sqrt{[g_1^2 + (b_1 - B)^2][g_2^2 + (b_2 - B)^2]}. \quad (20)$$

Thus, the admittance represented by the stray capacitance is

$$\omega C' = B - t \quad (21)$$

from which C' may be computed.

The construction shown in Fig. 12 also proceeds from two admittance values, but these were measured at two different frequencies for a single bias

voltage. If we designate the two measured admittance values by Y_1 and Y_2 again, the length of the tangent t_0 will be

$$t_0 = \sqrt{g_1 g_2} \quad (22)$$

and the coordinates of the point M (Fig. 14) are

$$g_M = \frac{\omega_2 g_1 - \omega_1 g_2}{\omega_2 - \omega_1} \quad (23)$$

$$b_M = \frac{\omega_2 b_1 - \omega_1 b_2}{\omega_2 - \omega_1} \quad (24)$$

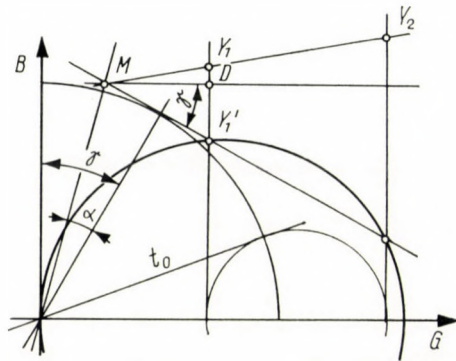


Fig. 14. For the numerical determination of the stray capacitance by means of measurements at two frequencies

The angles α and $\gamma - \alpha$ may easily be obtained from the following relations

$$\cos \alpha = \frac{t_0}{\sqrt{g_M^2 + b_M^2}} \quad (25)$$

$$\tan (\gamma - \alpha) = \frac{g_M}{b_M} \quad (26)$$

Hereby the admittance* represented by the stray capacitance is

$$\omega_1 C' = (b_1 - b_M) + \tan \gamma (g_1 - g_M) \quad (27)$$

and substituting the values of g_M and b_M from (23) and (24) the stray capacitance is

$$C' = \frac{(b_2 - b_1) + \tan \gamma (g_2 - g_1)}{\omega_2 - \omega_1} \quad (28)$$

* $\omega_1 C' = \overline{Y_1 Y_1'} = \overline{Y_1 D} + \overline{D Y_1'}$, wherefrom formula (27) can directly be obtained.

For $\tan \gamma$ we obtain by using (25) and (26)

$$\tan \gamma = \frac{\frac{g_M}{b_M} + \sqrt{\frac{g_M^2 + b_M^2}{t_0^2} - 1}}{1 - \frac{g_M}{b_M} \sqrt{\frac{g_M^2 + b_M^2}{t_0^2} - 1}} \quad (29)$$

If the two measuring frequencies are near enough to each other, that is, the point M is far from admittance points Y_1 and Y_2 , then in good approximation

$$\omega_1 C' \approx \left| \frac{b_1 g_2 - b_2 g_1}{g_2 - g_1} - \sqrt{g_1 g_2} \sqrt{1 + \left(\frac{b_2 - b_1}{g_2 - g_1} \right)^2} \right| \quad (30)$$

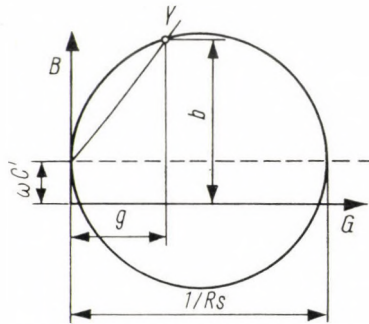


Fig. 15. For the determination of the series loss resistance by means of calculation

The numerical determination of the series loss resistance R_s was actually given with reference to Fig. 6 by the formula (4). It remains only to eliminate the values a and h involved in this formula. If the components of the chosen admittance Y (Fig. 15) are

$$Y = g + jb \quad (31)$$

then for R_s we obtain the following simple expression:

$$R_s = \frac{g}{g^2 + (b - \omega C')^2} \quad (32)$$

VI. Measuring arrangement and results of measurements

The greatest problem in the measurements is caused by the necessity of solving the measurement of relatively high conductivities which corresponds to the measurement of high VSWR-s in the microwave measuring technique. The most practicable method is the indication by means of a receiver with

mixer input, because in this case the indicator reading is linearly proportional to the received signal. The $Z-g$ diagraph of Rohde—Schwarz used in our measurements operates on this principle. The block diagram of the measurement is shown in Fig. 16. The crystal holder used in the measurement is illustrated schematically in Fig. 2.

The double stub impedance transformer matches the 46.3 Ohm characteristic impedance of the crystal holder coaxial section in the line of the $Z-g$ diagraph having a characteristic impedance of 60 Ohm. Matching on either

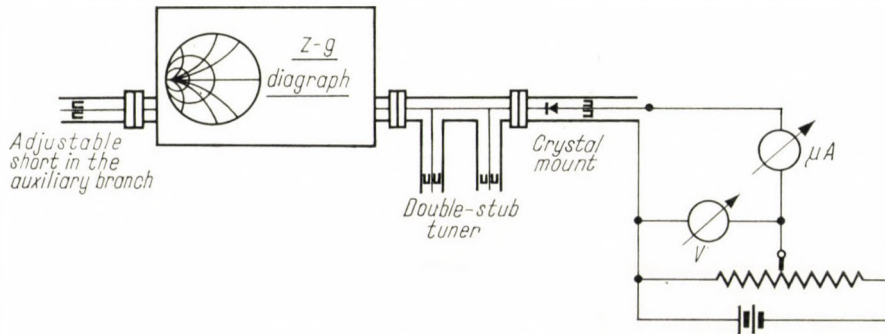


Fig. 16. The block diagram of the measuring arrangement

frequencies is done by means of a moveable matched termination inserted instead of the crystal mount, using the $Z-g$ diagraph as a standing-wave indicator.

The short of the crystal mount is adjusted in the following way. Instead of the crystal a metal block is mounted. To this a contacting short is connected which produces short circuit in the plane R_1 (Fig. 2). With the aid of the $Z-g$ diagraph the phase belonging to the short-circuit plane R_1 is found by rotating its Smith-chart, then replacing the capacitive short of the crystal mount for the short, by its motion the phase obtained earlier is set in. Then the plane R_1 remains a short-circuit plane.

To adjust the reference plane R_2 of the whole measurement, instead of the crystal only its metal bottom part is mounted which is connected to the contacting short. The adjustable short in the auxiliary branch of the $Z-g$ diagraph is moved until the phase indication appears at the diagram position set to infinite conductivity. Of course, these operations should be repeated when changing the measuring frequency.

Then placing a parametric diode into the crystal mount the normalized admittance values pertaining to the various bias voltages are read on the diagram of the $Z-g$ diagraph. Admittance values of a crystal diode type HPA 2810 measured in this way at two different frequencies are indicated on Table II.

Table II

Bias voltage, V	Normalized admittance			
	1.8 Gc/s		2 Gc/s	
	Real	Imaginary	Real	Imaginary
-1.5	14	0		
-1.8	4.2	6.9	1.9	4.5
-2.0	2.0	5.1	3.0	5.5
-2.2	1.05	4.0	6.0	6.5
-2.55			13	0

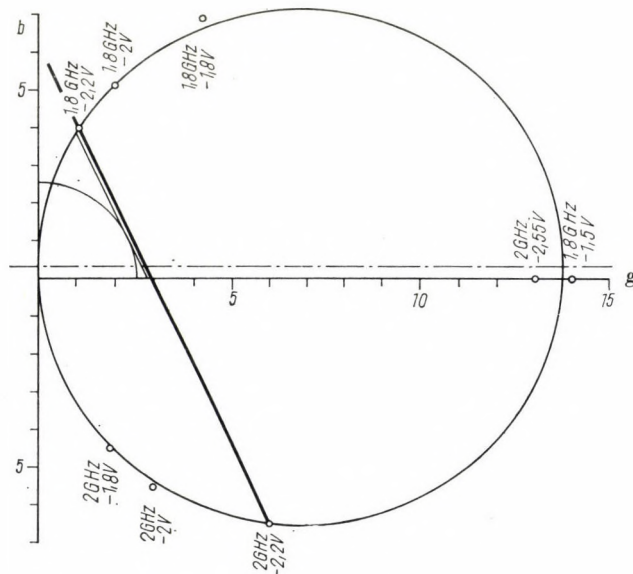


Fig. 17. Admittance circle constructed in terms of admittance values measured at 1.8 Gc/s and 2 Gc/s for bias voltage -2.2 V. (The circle drawn round the origo is the circle having the radius t_0 , the tangent of which is parallel to the chord connecting the admittance points belonging to the bias of -2.2 V because the measuring frequencies are close to each other)

The circle which may be constructed with the data of this table for bias voltage -2.2 V is shown in Fig. 17. Table III contains the values L and C which may be computed by the described method as well as the capacity values which can be measured by means of the 10 Mc/s bridge.

The results obtained for the stray capacitance C' are very strongly influenced by the errors of measurement. By the measurement made at two frequencies a relatively low stray is obtained. The values obtained for C' by using the data of Table II vary between 0.4 and 0.7 pF with an average value

of 0.55 pF. This exceeds the catalogue data of the manufacturer which is partly due to holder capacitance added to the self-capacitance of the crystal, partly to the somewhat arbitrary choice of the reference plane R_1 .

The values obtained for the series loss resistance R_2 scatter between 3.2 and 3.45 Ohm, if we adopt for C' the average value of 0.55 pF. The measured average mean value of R_s is 3.3 Ohm. From the series resonance measured at 1.8 Gc/s for the bias voltage -1.5 V we also obtain 3.3 Ohm for the series loss resistance R_s , and 3.55 Ohm from the resonance measured at 2 Gc/s, -2.55 V.

The lead inductance L obtained was somewhat higher than specified. The variable capacitance C has also exceeded the value measured at radio frequency. The latter is acceptable according to literary references [3].

VII. Conclusions

The described method of measurement, as well as the graphic and numerical methods given for evaluating the results of measurements serve to determine the four parameters involved in the equivalent circuit of microwave diodes with variable capacitance. By this method not only some kind of

Table III

Bias voltage, V	L_s , m μ H	C, pF	
		measured at 10 Mc/s	from diagram
-1.8	5.5	0.93	1.35
-2.0	5.6	0.90	1.26
-2.2	5.7	0.85	1.17

quantity derived from the parameters as e.g. the factor Q can be determined but also the four parameters separately.

By means of the used measuring head and method the measurement is reduced to the measurement of admittances. Difficulties arise only from problems which are inevitable in case of measuring high reflection coefficients. To solve these problems, the Z-g diagraph of Rhode-Schwarz operating on mixer principle proved to be the most suitable. With this device the measurement could be carried out conveniently and readily for laboratory conditions, although a higher degree of accuracy would be desirable.

REFERENCES

1. *Proc. IRE* (1959), April 103 A.
2. HARRISON, R. L.: Parametric Diode Q Measurements. *The Microwave Journal* **3** (1960), No. 5, 43—46.
3. ENG, S. T.: Characterization of Microwave Variable Capacitance Diodes. *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **9** (1961), 11—22.
4. WALZ, M. C.: A Technique for the Measurement of Microwave Impedance in the Junction Region of a Semiconductor Device. *The Microwave Journal* (1959), May 23—27.
5. GARVER, R. V.—ROSADO, J. A.: Microwave Diode Cartridge Impedance. *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (1960), 104—107.

DIE BESTIMMUNG DER KENNGRÖSSEN
VON MIKROWELLEN-HALBLEITERDIODEN
MIT VERÄNDERLICHER KAPAZITÄT

T. HORVÁTH

ZUSAMMENFASSUNG

Ein neues Meßverfahren zur Bestimmung der Kenngrößen von Mikrowellen-Halbleiterdioden mit veränderlicher Kapazität wird beschrieben. Durch Messen der Admittanz bei zwei verschiedenen Frequenzen können alle vier Kenngrößen, die in der Ersatzschaltung der Dioden vorkommen, bestimmt werden. Graphische und numerische Verfahren zur Bestimmung der Kenngrößen werden beschrieben. Das Verfahren kann vorzüglich zur Messung der Schaltelemente aller Zweipole verwendet werden, die aus verlustbehaftetem Reihenschwingungskreis und parallel zu ihm geschalteter Kapazität bestehen.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES DES DIODES
SEMI-CONDUCTRICES HYPERFRÉQUENCES A CAPACITÉ VARIABLE

T. HORVÁTH

RÉSUMÉ

L'auteur fait connaître une nouvelle méthode pour la détermination des paramètres des diodes semi-conductrices hyperfréquences à capacité variable. Par la mesure d'admittance à deux fréquences différentes, on peut déterminer chacun des quatre paramètres figurant dans le circuit équivalent des diodes. Des méthodes graphiques et numériques de détermination des paramètres sont décrites. La méthode en question peut être utilisée avantageusement pour la mesure des éléments de circuit de tout bipôle formé d'un circuit oscillant série à pertes et d'une capacité parallèle.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ
ДИОДОВ СВЧ ПЕРЕМЕННОЙ ЕМКОСТИ

Т. ХОРВАТ

РЕЗЮМЕ

Описывается новый метод определения параметров полупроводниковых диодов СВЧ переменной емкости. Измерением полной проводимости при двух различных частотах можно определить все четыре параметра эквивалентной схемы диода. Описаны графические и числовые методы определения параметров. Метод может быть выгодно применен при изменении схемных элементов всех двухполюсников, состоящих из последовательного колебательного контура с потерями и включенной параллельно с ним емкости.

ITERATIVE STABILITY ANALYSIS OF FRAMEWORKS

M. RÓZSA

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES
HUNGARIAN INSTITUTE FOR BUILDING RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received February 21, 1962]

The equilibrium of a framework built of straight bars satisfying arbitrary boundary and continuity conditions becomes unstable, if axial forces acting on the bars reach a critical value. The method presented in this paper reduces the stability analysis to the calculation of the smallest eigenvalue of a homogeneous, second type integral equation, the kernel of which can easily be determined by elementary framework analysis methods. The calculation of the eigenvalue can be performed by applying Kellogg's iterative method, which for a numerical integration with finite intervals reduces to the iteration of eigenvalues of a matrix. This matrix is determined by the afore-mentioned kernel.

The method in question can easily be programmed for electronic digital computers, because an elementary framework program, as well as a program for determining the eigenvalues of a matrix are usually available.

1. Introduction

The problem arising most frequently in the stability theory of frameworks consists in the determination of the critical load system, when the state of equilibrium of the structure becomes unstable and the bars of the structure might buckle. Methods developed for the exact determination of the critical force system are based on the solution of a *transcendental equation* expressing the vanishing of the so-called buckling determinant [1]—[7].

The programming of the well-known methods for electronic digital computers is difficult, as the setting up of the afore-mentioned transcendental equation in general, requires special considerations. The equation in question can be solved by gradual approximation only. This operation might require a lot of time even if an electronic digital computer is used, because the values of numerous transcendental functions figuring in this equation could often be determined consecutively.

In the present paper the stability analysis of arbitrary frameworks built of straight bars is reduced to the determination of the smallest eigenvalue of a Fredholm's homogeneous second type integral equation, the kernel of which can easily be determined on the basis of well-known relations usual for framework calculations. The computation of the eigenvalue could be performed by Kellogg's well-known iterative method. For numerical integrations referring

to a finite number of intervals Kellog's method reduces to the iteration of the eigenvalues of a matrix, the order of which is finite. This matrix can be determined on the basis of the afore-mentioned kernel and is highly appropriate for calculations to be made by using an electronic digital computer.

The method of stability analysis described in this paper deals with the case when the load produces only axial forces and no moments appear in the initial non-buckled state of the framework.

2. Assumptions referring to calculation

The following assumptions were made:

- a) the bars of the framework are ideally elastic;
- b) the load does not produce longitudinal deformations in the bars;
- c) shear deformations are negligible;
- d) direction of the load remains unchanged in the course of buckling;
- e) the displacement of the bars is infinitely small;
- f) displacements can take place in the plane of the framework only.

Let us assume a load consisting of given P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) concentrated forces and p distributed load. The task of stability analysis is to determine load factors $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$. By multiplying the given load with these factors we obtain the values of the 1st, 2nd ... k^{th} critical load. To every critical load belongs one (eventually more) buckling shape. Load factors λ_k form a monotonously increasing infinite sequence. In general, however, only the first critical load has practical importance, so that in the following only the determination of $\lambda = \lambda_1$ will be considered.

3. Differential equation of the buckled shape

Let us deduce the differential equation of the buckling shapes. Using symbols according to Fig. 1, the moment in cross-section x of an arbitrary bar is:

$$M(x) = M_A + \lambda Ax + \lambda P_A y(x) + \int_0^x \lambda p(\xi) [y(x) - y(\xi)] d\xi \quad (1)$$

where

- $\lambda p(\xi)$ — distributed load acting on the unit length of bar in the original direction of the bar axis;
- $y(x), y(\xi)$ — displacement normal to the bar axis at point x and ξ resp.

The moment can also be expressed by the curvature of the beam:

$$M(x) = -J(x) E y''(x). \quad (2)$$

Equalizing the right sides of (1) and (2) and twice differentiating with respect to x we obtain:

$$- [J(x) E y''(x)]'' = y''(x) \left[\lambda P_A + \int_0^x \lambda p(\xi) d\xi \right] + \lambda p(x) y'(x). \quad (3)$$

The axial force in the cross-section x is

$$\lambda P(x) = \lambda P_A + \int_0^x \lambda p(\xi) d\xi,$$

and its first derivative:

$$\lambda P'(x) = \lambda p(x).$$

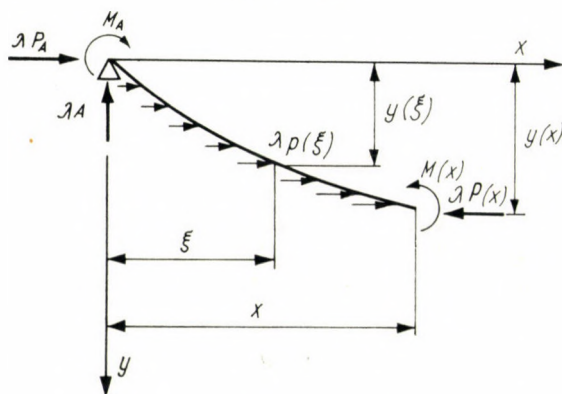


Fig. 1. Buckled shape of the bar

Substituting these expressions into (3) and abandoning argument x , we obtain the differential equation of the buckling shapes of the bar [8]:

$$(JEy''')'' = -\lambda(Py')'. \quad (4)$$

The solutions of differential equations (4) for each bar of the frame have to satisfy boundary conditions corresponding to equilibrium, geometrical continuity of the framework and joint rigidity. The differential equations all being of the fourth order, the number of necessary boundary conditions equals four times the number of bars.

4. Integral equation of the buckled shape

Values $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, and corresponding y_1, y_2, \dots, y_k functions satisfying differential equation (4) and the boundary conditions are *eigenvalues* and *eigenfunctions* of the problem. The eigenvalues and eigenfunctions of the differential equations could in principle be determined without any difficulty,

using the well-known methods of solution [9], but as a consequence of the great number of boundary conditions the computations are lengthy and complicated. The stability problem can be more conveniently formulated as an *eigenvalue problem of an integral equation*, because the kernel of the integral equation already implicitly includes the given boundary conditions, thereby it is not necessary to take them separately into account. This integral equation is derived on the basis that differential equation (4) is in form identical with the differential equation of a bent bar with a lateral distributed load of:

$$q = -\lambda(Py')'.$$

We shall substitute this distributed load by m fictitious *distributed moment load* per unit length where:

$$m = \lambda Py'. \quad (5)$$

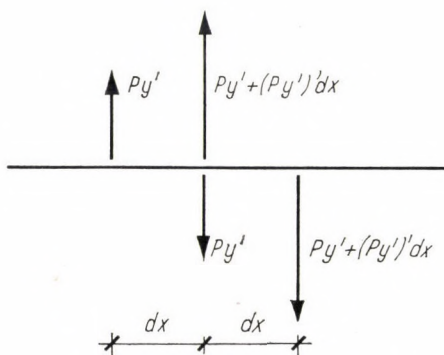


Fig. 2. Replacement of forces by couples

Namely, as it can immediately be read off Fig. 2, a distributed moment load Py' is statically equivalent to a distributed load $-(Py)'$. (This substitution is used, for instance, on computing the shearing forces at the edges of slabs on bending.)

We express the deflection in an arbitrary cross-section of a bar by means of the fictitious distributed moment load and the corresponding influence function:

$$y(x_2) = \lambda \int_0^{L_0} \frac{\partial R(x_2, x_1)}{\partial x_1} P(x_1) y'(x_1) dx_1, \quad (6)$$

where

- x_1 — abscissa of the point of application of the fictitious moment load;
 - x_2 — abscissa of the point at which the deflection is considered;
 - $R(x_2, x_1)$ — deflection at point x_2 produced by a unit force acting at point x_1 ;
 - L_0 — total length of the bars with axial forces.
- Coordinates x_1, x_2 are considered to be continuously increasing along bar axes.

The integration is executed only along the bars with axial forces, because for the remaining bars the expression under the sign of integration is identically zero.

Differentiating Eq. (6) with respect to x_2 we obtain:

$$y'(x_2) = \lambda \int_0^{L_0} \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} P(x_1) y'(x_1) dx_1 \quad (7)$$

where

$$\frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} - \text{angular rotation of the tangent to the bar axis at point } x_2 \text{ caused by a unit moment load at point } x_1.$$

Eq. (7) is a *Fredholm's second type homogeneous integral equation* with an asymmetric kernel. To make the kernel symmetric, we introduce variable $\eta(x)$:

$$\eta(x) = \sqrt{P(x)} y'(x). \quad (8)$$

(In further computations it will be assumed that $P(x)$ is not negative.)

Using this notation Eq. (7) can be written as:

$$\eta(x_2) = \lambda \int_0^{L_0} \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} \sqrt{P(x_1) P(x_2)} \eta(x_1) dx_1.$$

Introducing notation

$$G(x_2, x_1) = \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} \sqrt{P(x_1) P(x_2)}, \quad (9)$$

we can also write:

$$\eta(x_2) = \lambda \int_0^{L_0} G(x_2, x_1) \eta(x_1) dx_1. \quad (10)$$

Kernel $G(x_2, x_1)$ of integral equation (10) is symmetric, since according to Maxwell's theorem $R(x_2, x_1)$ is symmetric and

$$\sqrt{P(x_2) P(x_1)}$$

is apparently also symmetric.*

It is to be noted that integral equations (7) and (10) are invariably valid if the structure has elastic supports or some portions of the bars have an elastic foundation. For these structures on computing $G(x_2, x_1)$ kernel function the forces due to the elastic supports or foundation are to be considered as internal forces.

It is known from the theory of integral equations [11] that in case of symmetric kernel the eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ of the homogeneous integral equation must be real numbers, while eigenfunctions of $\eta^1(x), \eta^2(x), \dots, \eta^k(x),$

* Integral equation (10) has already been deduced by TREFFTZ for a particular case of a straight bar in compression [10].

... form an orthogonal system of functions. The orthogonality is expressed by the following formula:

$$\int_0^{L_0} \eta^i(x) \eta^j(x) dx = 0; \quad (i \neq j) \quad (11)$$

Influence function

$$\frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

in expression (9) of kernel $G(x_2, x_1)$ can be determined by means of any known method of elementary framework analysis (method of forces, method of deformations, Cross's method, Kani's method, Castigliano's second theorem etc.)

Let us apply Castigliano's second theorem to the following cases:

- a) Structures without elastic supports or foundation;
- b) Structures with elastic supports;
- c) Structures with elastic foundation.

According to Castigliano's second theorem the derivative of the deflection, that is the slope of the tangent to the bar axis, at point x_2 , produced by a unit moment load acting at point x_1 , equals the derivative of the total strain energy with respect to a fictitious moment acting at point x_2 , so that:

for case a)

$$\frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = \int_0^L \frac{1}{J(\xi)E} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_2)}{\partial x_2} d\xi; \quad (12)$$

for case b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = & \int_0^L \frac{1}{J(\xi)E} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_2)}{\partial x_2} d\xi + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \frac{\partial S(\xi_i, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial S(\xi_i, x_2)}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (13)$$

for case c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = & \int_0^L \frac{1}{J(\xi)E} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_2)}{\partial x_2} d\xi + \\ & + \int_0^L \frac{1}{c(\xi)} \cdot \frac{\partial s(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial s(\xi, x_2)}{\partial x_2} d\xi, \end{aligned} \quad (14)$$

where

- L — total length of the bars;
- $M(\xi, x)$ — moment at point ξ caused by a unit force acting at point x ;
- n — number of elastic supports;
- $S(\xi_i, x)$ — reaction at the i -th elastic support produced by a unit force acting at point x ;
- C_i — spring constant of the i -th elastic support;
- $s(\xi, x)$ — distributed reaction per unit length at point ξ produced by a unit force acting at point x ;
- $c(\xi)$ — foundation modulus at point ξ .

It can be proved by means of Eqs. (12) to (14) that integral equation (10) is *positively definite*, that is, eigenvalues λ_k can be only positive if the axial compressive force $P(x)$ is not negative anywhere. Namely, integral equation (10) is positively definite if for any real function $g(x)$:

$$I = \int_0^L \int_0^L G(x_2, x_1) g(x_1) g(x_2) dx_1 dx_2 \geq 0. \quad (15)$$

The validity of inequality (15) will be demonstrated only for case *c*) above, since cases *a*) and *b*) can be considered as special cases of the above mentioned ones. Substituting the expression

$$\frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

according to Eq. (14) into Eq. (9) and putting the expression obtained thereby for $G(x_2, x_1)$ into Eq. (15) we obtain:

$$I = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \frac{1}{J(\xi)E} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial M(\xi, x_2)}{\partial x_2} \cdot \sqrt{P(x_1)P(x_2)} g(x_1) g(x_2) dx_1 dx_2 d\xi + \\ + \int_0^L \int_0^L \int_0^L \frac{1}{c(\xi)} \frac{\partial s(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial s(\xi, x_2)}{\partial x_2} \sqrt{P(x_1)P(x_2)} g(x_1) g(x_2) dx_1 dx_2 d\xi.$$

Since:

$$\int_0^L \frac{\partial M(\xi, x_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\sqrt{P(x_2)}}{\sqrt{J(\xi)E}} g(x_2) dx_2 = \int_0^L \frac{\partial M(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\sqrt{P(x_1)}}{\sqrt{J(\xi)E}} g(x_1) dx_1$$

and

$$\int_0^L \frac{\partial s(\xi, x_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\sqrt{P(x_2)}}{\sqrt{c(\xi)}} g(x_2) dx_2 = \int_0^L \frac{\partial s(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\sqrt{P(x_1)}}{\sqrt{c(\xi)}} g(x_1) dx_1,$$

the above expression can be transformed into:

$$I = \int_0^L \left\{ \left[\int_0^L \frac{\partial M(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\sqrt{P(x_1)}}{\sqrt{J(\xi)E}} g(x_1) dx_1 \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_0^L \frac{\partial s(\xi, x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\sqrt{P(x_1)}}{\sqrt{c(\xi)}} g(x_1) dx_1 \right]^2 \right\} d\xi.$$

The expressions between clamped brackets cannot be negative anywhere, therefore $I \geq 0$.

5. Solution of the integral equation

The first eigenfunction and first eigenvalue of integral equation (10) can be conveniently determined by using Kellogg's iterative method referred to under [12]. The iteration is based on the following recursive formula:

$$\eta_k(x_2) = \int_0^{L_0} G(x_2, x_1) \eta_{k-1}(x_1) dx_1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

where $\eta_0(x_1)$ initial function can be arbitrarily assumed, with the limitation described below.

After an adequate number of iterative steps, the first eigenvalue of the equation with good approximation is:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\eta_{k-1}(x)\|}{\|\eta_k(x)\|} = \sqrt{\frac{\int_0^{L_0} [\eta_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_0^{L_0} [\eta_k(x)]^2 dx}}. \quad (17)$$

I.e., for $k \rightarrow \infty$ relation (17) converges to a fixed value [12].

In practice a good approximation of the first eigenvalue might also be obtained from Raleigh's approximate formula [13]:

$$\lambda_1 \approx \frac{\int_0^{L_0} \eta_{k-1}(x) \eta_k(x) dx}{\int_0^{L_0} [\eta_k(x)]^2 dx}. \quad (18)$$

The described iterative procedure converges towards $\eta^1(x)$ first eigenfunction and the corresponding λ_1 value, only if the initially assumed function $\eta_0(x)$ is *not orthogonal* to $\eta^1(x)$. Therefore, when assuming $\eta_0(x)$ care must be taken that it should not be orthogonal to $\eta^1(x)$.

If $\eta_0(x)$ is orthogonal to $\eta^1(x)$ but not orthogonal to $\eta^2(x)$ then the iteration will converge towards function $\eta^2(x)$ and the corresponding λ_2 eigenvalue. Similarly the third, fourth eigenvalues can be successively determined. The higher critical loads being generally without interest for structural analysis, their determination will not be discussed further here.

For complicated framed structures (such as bars with variable cross-section) the integrals according to Eq. (16) are to be computed by some numerical method (such as the Simpson rule). If an electronic digital computer is at disposal then numerical integration can be carried out advantageously as a matrix operation, reducing thereby the eigenvalue problem of the integral equation to the eigenvalue problem of a matrix.

6. Numerical example

Let us determine the load factor λ_1 belonging to the first critical load of the two-storey symmetrical framework with sidesway, shown in Fig. 3. The load consists of vertical forces of 1 ton each acting at joints A and B resp. The flexural rigidity of all bars is assumed to be $JE = 1 \text{ tm}^2$.

The first buckling shape of symmetrical frames with sidesway being always antimetrical, it is sufficient for stability analysis to consider only half the framework according to Fig. 4.

The value of λ_1 will be determined by means of Eq. (16). Function $G(x_2, x_1)$ is, according to Eq. (9):

$$G(x_2, x_1) = \frac{\partial^2 R(x_2, x_1)}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

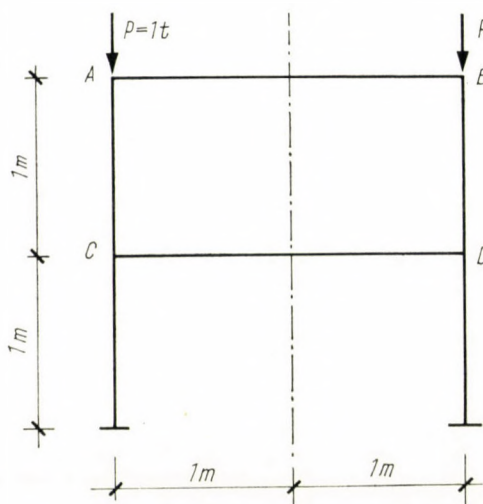


Fig. 3. Numerical example

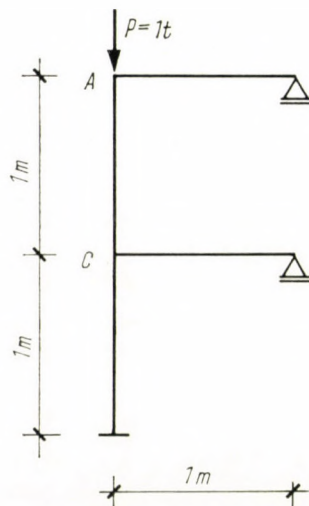


Fig. 4. The investigated half framework

For the determination of this function we first compute reactions V_1 and V_2 produced by a unit moment load acting at a point of abscissa x_1 (Fig. 5). According to elementary computations:

if $x_1 \leq 1$ (Fig. 5a)

$$V_1^1 = \frac{12}{19} x_1,$$

$$V_2^1 = \frac{3}{19} x_1;$$

if $x_1 \geq 1$ (Fig. 5b)

$$V_1^2 = -\frac{9}{19} x_1 + \frac{21}{19},$$

$$V_2^2 = \frac{12}{19} x_1 - \frac{9}{19}.$$

On the basis of these formulas the moment diagrams can be conveniently constructed. From the moment diagrams according to Mohr's theorem the following expressions are obtained for the angular rotation at point x_2 , produced by a unit moment load acting at point x_1 :

a) if $x_2 \leq x_1 \leq 1$, then

$$G(x_2, x_1) = \frac{V_1^1}{3} + (V_1^1 + V_2^1)(1 - x_2) = x_1 - \frac{15}{19} x_1 x_2,$$

b) if $x_2 \leq x_1 \leq 1$, then

$$G(x_2, x_1) = \frac{V_1^1}{3} + (V_1^1 + V_2^1)(1 - x_2) - 1(x_1 - x_2) = x_2 - \frac{15}{19} x_1 x_2;$$

c) if $x_1 < 1 \leq x_2$, then

$$G(x_2, x_1) = \frac{V_2^1}{3} + V_2^1(2 - x_2) = \frac{7}{19} x_1 - \frac{3}{19} x_1 x_2;$$

d) if $x_2 \leq 1 \leq x_1$, then

$$G(x_2, x_1) = \frac{V_1^2}{3} + (V_1^2 + V_2^2 - 1)(1 - x_2) = \frac{7}{19} x_2 - \frac{3}{19} x_1 x_2;$$

e) if $1 \leq x_1 \leq x_2$, then

$$G(x_2, x_1) = \frac{V_2^2}{3} + V_2^2(2 - x_2) = \frac{28}{19} x_1 + \frac{9}{19} x_2 - \frac{21}{19} - \frac{12}{19} x_1 x_2;$$

f) if $1 \leq x_2 \leq x_1$, then

$$G(x_2, x_1) = \frac{V_2^2}{3} + V_2^2(2 - x_2) - 1(x_1 - x_2) = \frac{9}{19} x_1 + \frac{28}{19} x_2 - \frac{21}{19} - \frac{12}{19} x_1 x_2,$$

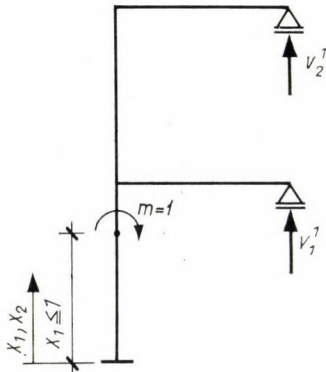


Fig. 5/a. Unit moment couple acting on the lower stanchion

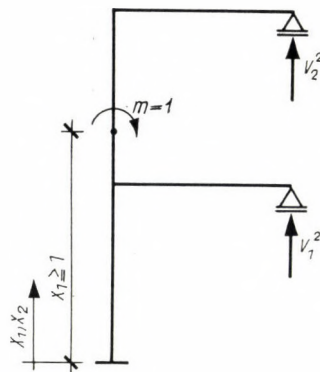


Fig. 5/b. Unit moment couple acting on the upper stanchion

The above expressions satisfy symmetry condition $G(x_2, x_1) = G(x_1, x_2)$. $G(x_2, x_1)$ being determined, function $\eta_0(x_1)$ can be arbitrarily assumed. For sake of simplicity, let $\eta_0(x_1) = 1$. Then according to (16):

If $x_2 \leq 1$, then

$$\begin{aligned} \eta_1(x_2) &= \int_0^{x_2} \left(x_1 - \frac{15}{19} x_1 x_2 \right) \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_{x_2}^1 \left(x_2 - \frac{15}{19} x_1 x_2 \right) \cdot 1 \cdot dx_1 + \\ &+ \int_1^2 \left(\frac{7}{19} x_2 - \frac{3}{19} x_1 x_2 \right) \cdot 1 \cdot dx_1 = \frac{22}{38} x_2 - \frac{1}{2} x_2^2. \end{aligned}$$

If $x_2 \geq 1$, then

$$\begin{aligned} \eta_1(x_2) = & \int_0^1 \left(\frac{7}{19} x_1 - \frac{3}{19} x_1 x_2 \right) \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_1^{x_2} \left(\frac{28}{19} x_1 + \frac{9}{19} x_2 - \frac{21}{19} - \frac{12}{19} x_1 x_2 \right) \cdot 1 \cdot dx_1 + \\ & + \int_{x_2}^2 \left(\frac{9}{19} x_1 + \frac{28}{19} x_2 - \frac{21}{19} - \frac{12}{19} x_1 x_2 \right) \cdot 1 \cdot dx_1 = -\frac{27}{38} + \frac{55}{38} x_2 - \frac{1}{2} x_2^2. \end{aligned}$$

After the first iterative step Eq. (18) gives for λ_1 the *first approximate value*

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^1 1 \cdot \left(\frac{28}{38} x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx + \int_1^2 1 \cdot \left(-\frac{27}{38} + \frac{55}{38} x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{28}{38} x - \frac{1}{2} x^2 \right)^2 dx + \int_1^2 \left(-\frac{27}{38} + \frac{55}{38} x - \frac{1}{2} x^2 \right)^2 dx} = 3,678$$

and the corresponding critical load is:

$$N_1 = \lambda_1 \cdot 1 = 3.678 \text{ Mp.}$$

Let us now execute the second iteration:

If $x_2 < 1$, then

$$\begin{aligned} \eta_2(x_2) = & \int_0^{x_2} \left(x_1 - \frac{15}{19} x_1 x_2 \right) \left(\frac{28}{38} x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 + \\ & + \int_{x_2}^1 \left(x_2 - \frac{15}{19} x_1 x_2 \right) \left(\frac{28}{38} x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 + \int_1^2 \left(\frac{7}{19} x_2 - \frac{3}{19} x_1 x_2 \right) \left(-\frac{27}{38} + \right. \\ & \left. + \frac{55}{38} x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 = \frac{158}{1083} x_2 - \frac{14}{114} x_2^3 + \frac{1}{24} x_2^4; \end{aligned}$$

if $x_2 \geq 1$, then

$$\begin{aligned} \eta_2(x_2) = & \int_0^1 \left(\frac{7}{19} x_1 - \frac{3}{19} x_1 x_2 \right) \left(\frac{28}{38} x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 + \\ & + \int_1^{x_2} \left(\frac{28}{19} x_1 + \frac{9}{19} x_2 - \frac{21}{19} - \frac{12}{19} x_2 x_1 \right) \left(-\frac{27}{38} + \frac{55}{38} x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 + \\ & + \int_{x_2}^2 \left(\frac{9}{19} x_1 + \frac{28}{19} x_2 - \frac{21}{19} - \frac{12}{19} x_1 x_2 \right) \left(-\frac{27}{38} + \frac{55}{38} x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 = \\ & = -\frac{657}{8664} - \frac{131}{8664} x_2 + \frac{27}{76} x_2^2 - \frac{55}{228} x_2^3 + \frac{1}{24} x_2^4. \end{aligned}$$

After the second iterative step Eq. (18) gives with the notations

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \left(\frac{28}{38} x - \frac{1}{2} x^2 \right) \left(\frac{158}{1083} x - \frac{14}{114} x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right) dx + \\
 &+ \int_1^2 \left(-\frac{27}{38} + \frac{55}{38} x - \frac{1}{2} x^2 \right) \left(-\frac{657}{8664} - \frac{131}{8664} x + \frac{27}{76} x^2 - \frac{55}{228} x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right) dx \\
 B &= \int_0^1 \left(\frac{158}{1083} x - \frac{14}{114} x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right)^2 dx + \\
 &+ \int_1^2 \left(-\frac{657}{8664} - \frac{131}{8664} x + \frac{27}{76} x^2 - \frac{55}{228} x^3 + \frac{1}{24} x^4 \right)^2 dx
 \end{aligned}$$

the following second approximate value for λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{A}{B} = 3,616.$$

Thence, the first critical load consists of $N_1 = 3.616 \cdot 1 = 3.616$ Mp forces acting at joints *A* and *B*.

The accuracy of the above computation will be checked by means of solving the transcendental equation expressing the condition of buckling. For the given framework the critical load N_1 is the least root of the following equation [14]:

$$\left(3 + \frac{2\nu}{\tan \nu} \right) \left(3 + \frac{\nu}{\tan \nu} \right) = \frac{\nu^2}{\sin^2 \nu},$$

where $\nu = \sqrt{N_1}$. In the given case this root is:

$$N_1 = \nu^2 = 1.8986^2 = 3.605 \text{ Mp.}$$

The approximate value of N_1 obtained after the first iteration exceeds the exact value by 2 per cent, that after the second iteration by 0.3 per cent. Thus in the presented example the iterative procedure converges rapidly.

REFERENCES

1. ZIMMERMANN, H.: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern. *Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften*. 1909.
2. MISES, R.—RATZERSDORFER, J.: Die Knicksicherheit der Rahmentragwerke, *ZAMM*. (1926) 6. 181—196.
3. RATZERSDORFER, J.: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. Springer Verlag 1936.
4. Корнухов Н. В.: Устойчивость и прочность стержневых систем. Госстройиздат. 1949.
5. KOLLBRUNNER, C. F.—MEISTER, M.: Knicken, Springer Verlag 1955.
6. Пиковский А. А.: Статика стержневых систем со сжатыми элементами. Физматгиз. 1961.
7. BLEICH, F.: Buckling Strength of Metal Structures. McGraw-Hill Book Comp. 1952.
8. HOYDEN, A.—WILKESMANN, F. W.: Die numerische Behandlung der Rahmenknickung nach einem statisch gedeuteten Verfahren der schrittweisen Näherungen. *Bauingenieur* (1953), H. 3. 28. 75—80.
9. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akad. Verlag 1949.

10. TREFFTZ, E.: Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* (1923), (3). 272—275.
11. Михлин, С. Г.: Интегральные уравнения и их приложения. Гостехиздат. 1949.
12. KELLOGG, O. D.: On the existence and closure of sets of characteristic functions. *Mathematische Annalen* (1922), 86. 14—17.
13. КАМКЕ, Е.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Akad. Verlag 1951.
14. Снитко, Н. К.: Устойчивость сжатых и сжато-изогнутых стержневых систем. Гостройиздат. 1956.

EIN ITERATIONSVERFAHREN ZUR UNTERSUCHUNG DER STABILITÄT VON RAHMENKONSTRUKTIONEN

M. RÓZSA

ZUSAMMENFASSUNG

Eine aus Stäben mit gerader Achse aufgebaute Rahmenkonstruktion, die beliebige Rand- und Anschlußbedingungen befriedigt, verliert ihren stabilen Gleichgewichtszustand, wenn die auf die Stäbe wirkenden Axialkräfte den kritischen Wert erreichen. Bei der in der Abhandlung vorgeführten Methode wird die Untersuchung der Stabilität auf die Berechnung des kleinsten Eigenwertes einer homogenen, symmetrischen Integralgleichung zweiten Typs zurückgeführt, deren Kern mit Hilfe der bekannten elementaren Methoden der Rahmenberechnung leicht darstellbar ist. Die Berechnung des Eigenwertes kann mittels des Kelloggschen Iterationsverfahrens durchgeführt werden, das im Falle einer auf Grund von mit einer endlichen Anzahl von Einteilungen durchgeführten numerischen Integration in die Iteration der Eigenwerte einer Matrix von endlicher Ordnungszahl übergeht, die mit Hilfe des Kerns angeschrieben werden kann.

Das Verfahren ist für elektronische Rechenmaschinen leicht programmierbar, da die Programme für elementare Rahmenberechnungen und das zur Bestimmung der Matrizen-eigenwerte dienende Programm bei den meisten Typen der Elektronenrechner zur Verfügung stehen.

PROCÉDÉ D'ITÉRATION POUR LE CALCUL DE STABILITÉ DES SYSTÈMES DE BARRES

M. RÓZSA

RÉSUMÉ

Les cadres composés de barres droites, satisfaisant à des conditions de contour et d'appui arbitraires, perdent leur état d'équilibre stable à la valeur critique des forces axiales agissant sur les barres. Le procédé présenté par l'étude ramène l'examen de la stabilité au calcul de la plus petite valeur propre d'une équation intégrale symétrique homogène de la deuxième espèce, dont le noyau peut être facilement produit par les méthodes élémentaires de calcul des cadres, bien connues. Le calcul de la valeur propre peut s'effectuer par la méthode d'itération de Kellogg. En cas d'intégration numérique, cette méthode se transforme en itération des valeurs propres de la matrice d'ordre fini, qui peuvent être données à l'aide du noyau.

Le procédé peut être facilement programmé sur des calculatrices électroniques, parce que le programme de détermination des valeurs caractéristiques des matrices et les programmes du calcul élémentaire des cadres sont donnés pour tous les types de machines à calculer.

ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАБИЛЬНОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

M. РОЖА

РЕЗЮМЕ

Рамная конструкция, удовлетворяющая любым краевым и узловым условиям и собранная из прямых стержней, теряет состояние стабильного равновесия, если действующие на стержни осевые силы достигают критические значения. В работе дан метод, который сводит исследование стабильности к отысканию наименьшего собственного значения такого однородного симметричного интегрального уравнения второго рода, ядро которого легко получить с помощью известных элементарных методов расчета рам. Расчет собственного значения может производиться итерационным способом Келлога, который в случае числового интегрирования с конечным распределением переходит в итерацию собственных значений матрицы конечного порядка, задающейся при помощи ядра.

Метод можно легко программировать для электронных счетно-вычислительных машин, так как программы элементарных расчетов рам и определения собственных значений матриц имеются в распоряжении для любых типов счетно-вычислительных машин.

SETTING AND HARDENING OF HYDRAULIC MATERIALS

VI. LONG-TIME CONDUCTIMETRIC STUDY OF THE HARDENING PROCESS OF BUILDING MATERIALS ON CEMENT BASE

G. SZUK

HUNGARIAN SCIENTIFIC INSTITUTE FOR STRUCTURAL ENGINEERING, BUDAPEST

[Manuscript received April 5, 1962]

Conductimetric investigation of the hardening process of cement-bound building materials demonstrated that ohmic resistance vs. time of materials does not increase according to a continuous relationship. The stepwise increase of the ohmic resistance exhibits a wave form not unlike the discontinuous strength-time relationship observed by a number of research workers. This phenomenon appears for all materials tested and is a consequence of transformations of physico-chemical nature.

1. Introduction

Up till now our studies were concerned with the conductimetric investigation of the setting and early hardening of building materials made with hydraulic binders. According to research this method permits structural changes of the material to be demonstrated.

In this paper conductimetric research of the hardening or ageing period is dealt with. Age of specimens under test has actually been 2500 days. Evaluation of the results was made on the basis of more than 30 000 individual data.

It can be concluded that the wave form of the conductimetric curve is characteristic in the whole hardening period to physico-chemical phenomena, to structural transformations taking place in the material.

Relationship between ohmic values of the conductimetric curves and real strength increase values has not been established up to now, imposing conductimetric curves to be considered as a simple registration of the structural transformation.

As is known, concrete strength is a result of the tobermoritelike phase developed of some of the cement components, nevertheless other hydration products developed at various stages of the hardening affect strength development. If wave-form of the conductimetric graph is characteristic of the evolving phases and of the appearance of their boundary region, then this seems to be a characteristic of strength development too, or at least of hardening periods also showing a discontinuity.

In the tests, as will be seen, it has been really found, that in hardening periods where some of the authors observed a discontinuity of strength increase, conductimetric curves also flatten.

At present, conductimetry appears to be only convenient for the study of the process of structural transformation, and not a means of defining strength development and its actual values. In this paper only observed phenomena are described, leading to unambiguous conclusions. Our conductimetric curves were evaluated on the basis of extended research results in this field obtained by a number of authors. Results of this theoretical research will be presented later.

2. The method applied

Conductimetry is based on the measurement of change of ohmic resistance in the material, due to physico-chemical transformations. Its instrumentation is highly simple: comparability of results and hygroscopicity and temperature dependability of the material require exact environmental conditions to be observed. In our tests these isohygrothermic conditions were storage at 20° C and a relative humidity of 50%. Electrode tapes were embedded in the tested material when casting the specimens, to be conserved during the test either stripped, or in plastic moulds. Daily measurements were taken up to 100 days. Thereafter, measurements were left out for a period of 50, 100, 200 or 300 days, depending on the age of the specimens, then 30 days reading-off periods were again used.

3. Results obtained

3.1. Cement paste

Tests with two cement types (Tata C—500 P. C. and Tata C—600 P. C.) were begun in 1955. Mixing water ranged from 20 to 30 p. c. by steps of 2%. In 1957 investigation had been extended to over 10 different cement brands.

Electric resistance vs. time curves immediately show a non-continuous relationship (Fig. 1). Ohmic increase shows a change at 20 to 100 and 500 to 2000 days of age. It could be concluded that appearance time and period of these slowly increasing runs, depend on cement type and mixing water.

Some authors feel that our measurements indicate only the drying out of the material. If that were so, the diagrams ought to show a continuous, relation like increase, taking the isohygrothermic test conditions into account.

In the diagrams of cement pastes it may be observed that the increase of electric resistance in test specimens prepared of C—500 Portland cement of Tata (Fig. 1. 1,2) was slower compared to the specimens of C—600 Portland cement of Tata (Fig. 1. 3,4). This phenomenon indicated that the rate of hardening of the C—600 paste containing nearly pure klinker is greater than that of C—500 Portland cement. This is indeed true, as cement 600 hardens more

rapidly and has a greater strength. The electric diagram is, therefore, characteristic for the rate of hardening. The diagram also reveals the fact that the section of slow increase is all the shorter, the higher the water/cement ratio.

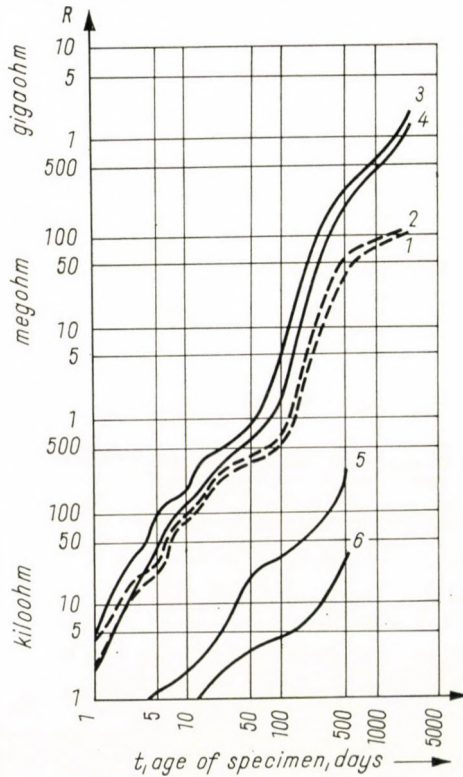


Fig. 1

Cement pastes prepared with cements of 1957 show the same phenomena (Fig. 2). The following cement brands were used in our experiments.

Number of curve	Cement brand
1	C-600 Portland of Tata
2	C-500 Portland of Tata
3	C-500 Portland of Beremend
4	C-500 blast furnace slag of Bélapátfalva
5	C-500 Portland of Lábatlan
6	C-500 Portland of Selyp
7	C-500 Special S-54 of Lábatlan
8	C-400 blast furnace slag of Hejőcsaba
9	C-300 blast furnace slag of Hejőcsaba
10	White cement

DECOUX and BARRÉE [2] by testing the hardening of Portland cement paste from another point of view, used a method in conformity with ours. Curves 5 and 6 in Fig. 1 illustrate the results of a 500-day test. Comparing these

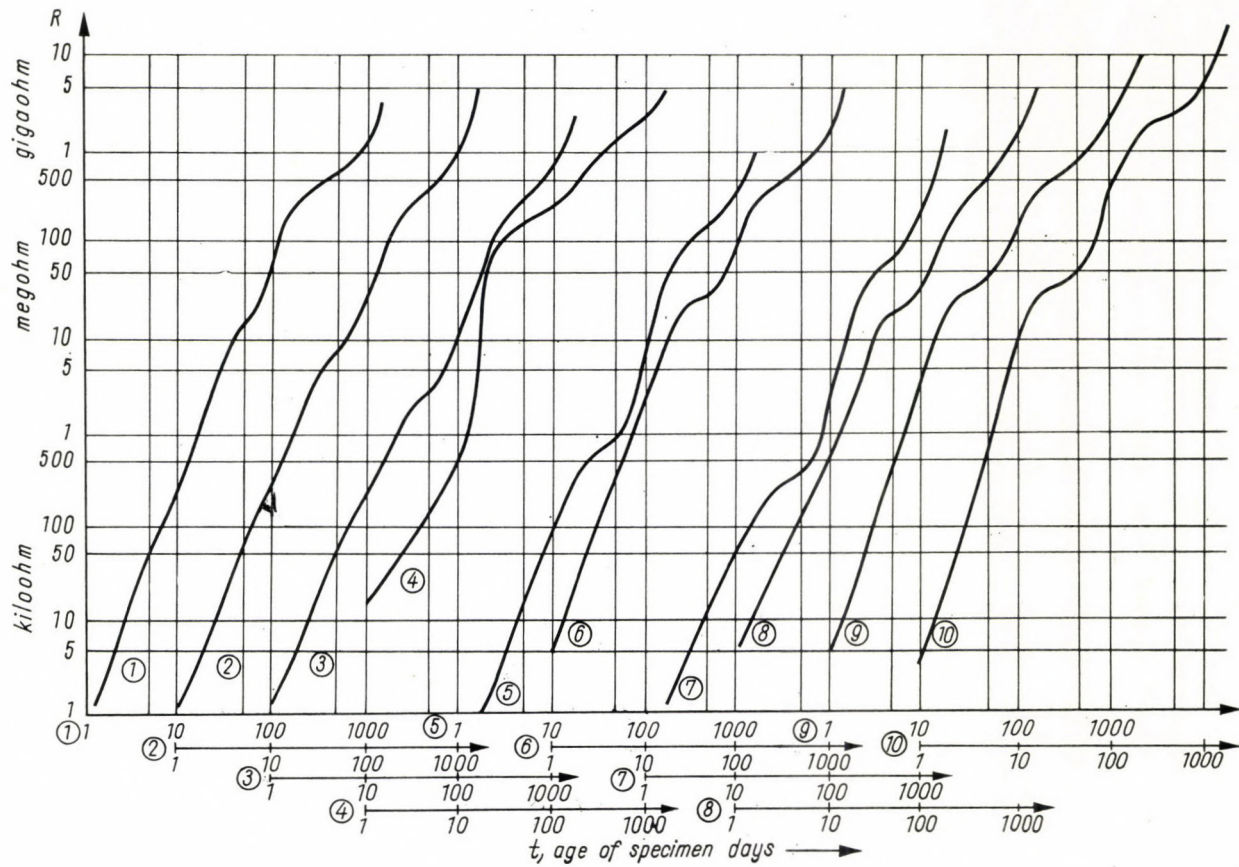


Fig. 2

curves with our results, the resemblance is immediately apparent. Curve 5 is neat Portland cement paste, whereas number 6 is the graph of ageing for the mixture of identical quality with an admixture of 20 p. c. CaCl_2 . Authors experiments are discussed later.

3.2. Cement mortar

Tests of hardening for cement mortars were made in the same way as for cement pastes. From the numerous test results two are discussed here.

Composition of the cement mortars was as follows:

Cement brand	C-500 Portland of Tata		C-600 Portland of Tata	
		Number of curve in the figure		Number of curve in the figure
W/C in rates of 0.02	0.50	1	0.50	3
	0.60	2	0.60	4
Sand	0—0.2 mm			
Mix	1 : 4			

In Fig. 3 curves no. 1 and 2 indicate limit curves of cement mortars made of C—500 of Tata with a W/C ratio = $0.50 \div 0.60$. Their graph is equal to that of the cement paste, with the only difference that after the initial abrupt section a period of slower rise may be observed sooner (here between 10 and 40 days) and is not so characteristic as was found in the test mentioned above. This phenomenon has evidently to be assigned to the admixture present. The second section of slower rising may be observed between 300 and 1000 days.

Diagrams 3 and 4 illustrate the curve of a mortar having the same composition but made of C—600 Portland cement of Tata. The form of the curve shows resemblance to the former.

3.3. Concrete

Measurements were made using cubic plastic moulds 7 cm by 7 cm by 7 cm. Copper plate electrodes were inserted at the two opposite vertical sides of the open top cell.

Ohmic diagram of the concrete during hardening is shown in Fig. 4b.

It clearly appears that the first slow-down of the ohmic increase — like that for cement paste and mortar analysis — occurs at about 1000 days for concrete. After this period diagram shows a more pronounced rise than for the already described investigations and the second flattening period follows only

at about 1000 days. We feel, that this lagging, as compared to the cement paste, is to be attributed to the aggregate present.

From the above it can be seen that ohmic diagrams of the ageing or hardening process of the quoted building materials in each case show similar wave forms. This fact demonstrates that the hardening process is periodical, not continuous, at a rate of development of hydration products bearing on strength increase. This phenomenon was observed by several authors in

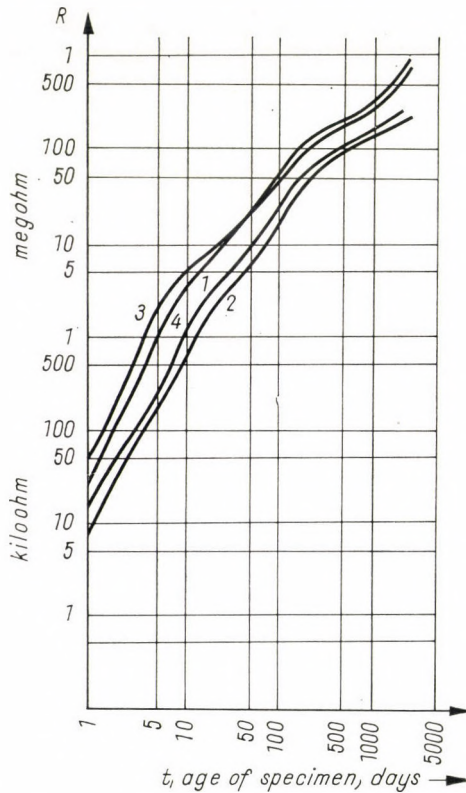


Fig. 3

crushing tests, such as KLIEGER [1], WEISZ [3] etc. For example WEISZ stated that during concrete hardening compressive strength increase is far from being continuous. When comparing conductimetric curves to those obtained by WEISZ, the resemblance is incontestable (Fig. 4a). However, in the experiments of WEISZ the section of σ flattening the diagram, occurs earlier than in the conductimetric curves. We assume this can be explained by the fact that WEISZ stored his specimens under wet conditions from the beginning, whereas our specimens were stored under isohygrothermic conditions (at 20°C with a 50 p. c. relative humidity content of air).

a)

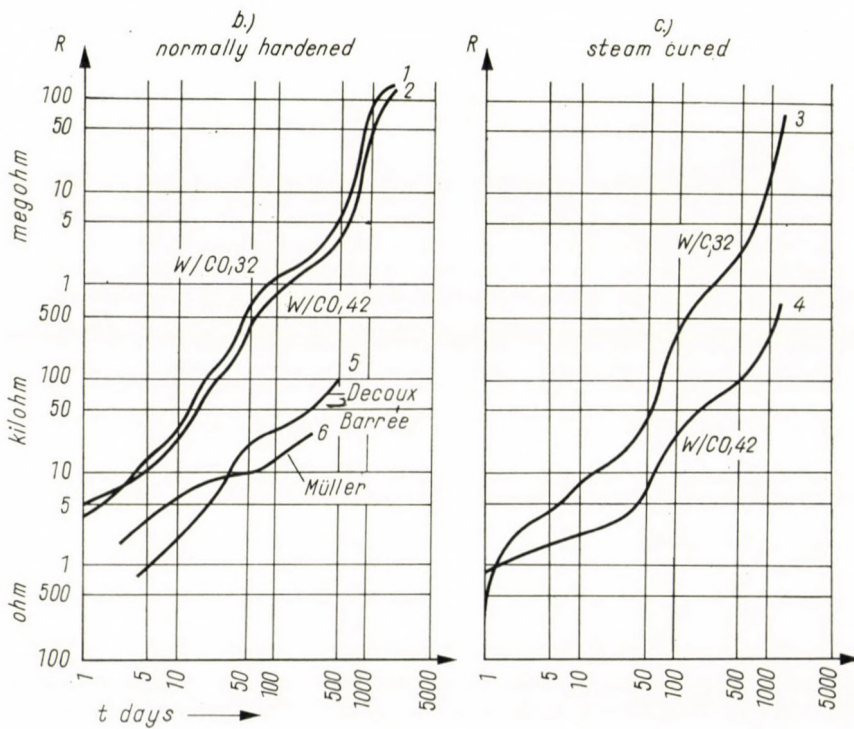
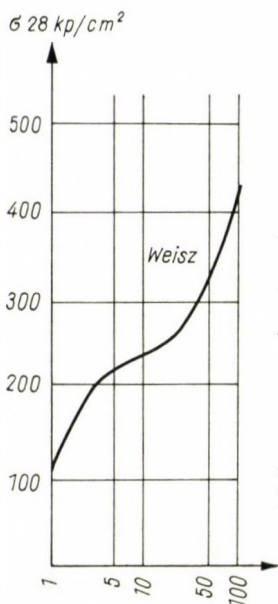


Fig. 4

The result obtained by two different methods of testing without doubt indicates that the conductimetric curve is the electric registration of the non-continuous increase of the strength of the specimen.

Considering the above statements, already at this stage of the series of experiments, it was assumed that knowledge of the structural transformation during the extraordinarily complicated process of hardening could be approached with the registration and analysis of the electric diagram — also taking the smaller wave forms not yet mentioned into account.

Until now only few authors worked with the conductimetric method to test the process of hardening or ageing of concrete. BESSON [4] tested the concreting of the Swiss Rossens dam with this method. Beside measuring pressure and deformations, he measured with an instrument called "telehumeter" electrically the "drying out" of concrete. The author explains the process of hardening with the change in structure caused by crystallisation, and calls it chemical drying out. He states that concrete is continuously hardening during the experiment which has already continued for ten years.

The electric method was used by DECOUX and BARRÉE [2] to test the hardening process in the laboratory. They examined hardening of cement paste, concrete and cement mortar additioned with conductive aggregate. They found that electric resistance of concrete, hardening under atmospheric conditions, increase for 600 days to a very well defined specific resistance value ($5 \div 10 \text{ M}\Omega \text{ cm}^{-3}$). Our experiments, however, proved that the electric resistance of the specimens shows even some increase at the age of 2500 days. This proves the well known phenomenon that the strength of concrete continuously increase with time, towards an unknown end value.

It can also be established from the experiment of the authors that they did not recognize the gradual character of the curves though this is quite apparent when the graph is exactly drawn (Fig. 4b). The same is true for the experiments of MÜLLER [5] as neither he took into account the sections of slower increase, which are, according to our tests, the most characteristic for the hardening process (Fig. 4). Lately, several scientists discussed the problem of calculating in advance the progressing hardening or the expected strength at a certain time. The general opinion is that the storage temperature determines the hydration rate of cement materials. No doubt this circumstance is of great importance referring to the degree of maturity, however, in our opinion other more important factors influence the process to a greater extent.

In Section II. B. of the Symposium on Winter Concreting (Copenhagen 1952) this problem was much discussed and finally the Nurse—Saul formula, proposed by POWERS, was adopted. This mathematical expression determines the increase of strength during hardening with a continuous relation. Our experiments as well as the diagrams of DECOUX—BARRÉE, and lately the experiments of KIEGER and JEVTIČ, all contradict the Nurse—Saul formula.

KLIEGER (U. S.—P. C. A.) could show experimentally that this simple relation is not in agreement with strength values after 28 days [1]. JEVIČ uses a different method and characterizes his crushing results with a strength coefficient. This is the ratio of the strength of the specimen at different ages compared to the 28 days strength. Earlier results are also here in agreement, but later than 28 days no relation could be established up to now [1].

Taking also the formerly mentioned facts into account, it is clear that the maturity formula according to which the increase of strength is continuous is not suitable for calculating the strength after the age of 28 days in advance, as the process of hardening and increase of strength proceed in the ageing stage at a varying rate until an unknown end value.

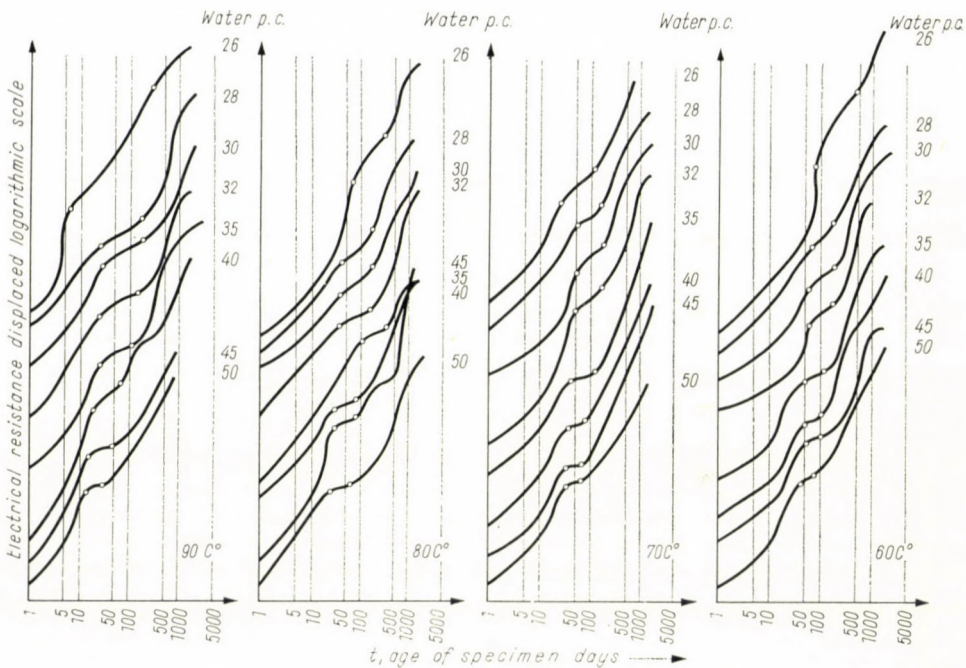


Fig. 5

3.4. Steam cured cement paste

Tests on the hardening process of cement paste specimens, which were steam cured and subsequently stored in isohygrothermic conditions have been followed up since 1956. The measuring method was the same as with untreated cement paste specimens. Tests were made on specimens of C—600 Portland cement of Tata and 26, 28, 30, 32, 35, 40, 45 and 50 p. c. by weight water. The steam temperature was 60, 70, 80 and 90° C, respectively.

In Fig. 5 the diagram $R-t$ of cement paste is shown, steam cured at different temperatures. The already known, uneven tendency of the graphs can very well be recognized. It can be seen that the first slower rising section is the longer, the smaller the water cement ratio. The slowly rising section of pastes mixed originally with a larger quantity of water lasted 20 to 25 days, whereas of mixes with small quantities of water, several 100 days. The diagrams also indicate that at higher steam curing temperatures the mentioned phenomenon occurs at an earlier date. This points to an acceleration of the structure transformations.

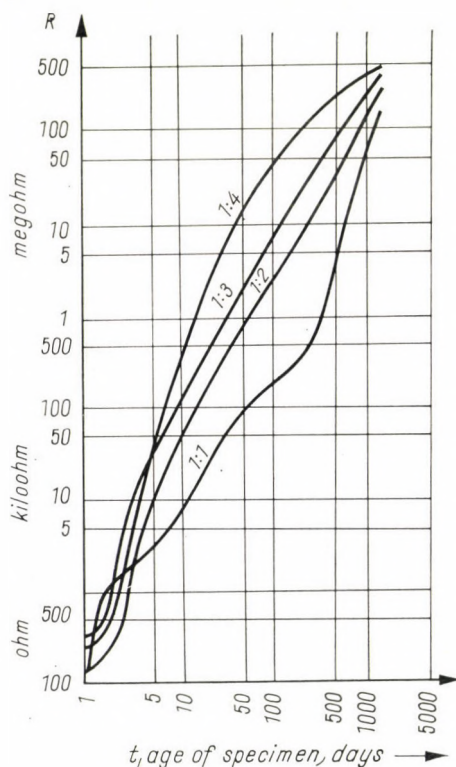


Fig. 6

3.5. Steam cured cement mortar

Fig. 6 illustrates graphs of steam cured cement mortar specimens of different mix proportions. The composition of the mix is identical with the one given for the untreated cement mortars. Mix proportion varies from 1 : 1 to 1 : 4 (W/C ratio 0.50). As can be observed the curve for the mix 1 : 1 shows the already known wave form. However, the first and the second wave appear earlier than in the case of specimens without steam curing. Here the flatter section appears about the 10 ÷ 40 and 500 days, in steam cured ones it can be

observed at the $3 \div 7$ and $50 \div 200$ days. This phenomenon proves the acceleration of the formation of hydration products as a consequence of steam curing. With increasing quantity of sand, the curves become more and more straight, until at last the wave-form character of the diagram almost entirely disappears.

3.6. Steam cured concrete

In this series of experiments, steam cured and subsequently under isohydrothermic conditions hardened concretes of different qualities were tested. In Fig. 4c electric diagram of hardening of the same concrete brand is shown as in Fig. 4b for normal hardening. Comparing the two diagrams the following may be deduced:

- during hardening the resistance values for steam cured specimens are lower than for untreated ones,
- while limit curves of untreated concretes with different water/cement ratio lay side by side, a marked difference existed between the steam cured ones,
- in steam cured concrete the slower rising sections can be observed earlier than in usually hardened concretes. This phenomenon may be explained — as can be seen from previous experiments — with the acceleration of the physico-chemical changes.

For measuring purposes $7 \times 7 \times 7$ cm cube shaped moulds of plastics, open at the top, were used. The electric resistance was measured through the entire cross-section of the cube.

3.7. Hardening test by means of measuring of strata

Progress of hardening at different depths from the concrete surface was tested also in strata. The measurements were carried out in $10 \times 10 \times 10$ cm cube shaped forms of steel plate, open at the top. One of the electrodes was the steel form itself, and the other was a specially constructed, layer measuring, immersed electrode. This immersed electrode was concreted perpendicularly into the centre of the specimen when placed. The exploring instrument itself was a tube of plastics on which the electrodes of 10 mm high copper rings were formed, placed side by side. With this arrangement of the electrodes we had the possibility of measuring the hardening of concrete layer by layer. Among the many concretes, tested in the series of experiments, the composition of the concrete tested by the method described above was as follows:

Grading	0 \div 0.2 mm	7.5 p. c.
	0.2 \div 1.0 mm	7.5 p. c.
	1.0 \div 3.0 mm	23 p. c.
	3.0 \div 7.0 mm	25 p. c.
	7.0 \div 10.0 mm	37 p. c.
Cement:	Tata Portland cement C-500	
Cement dosage:	450 kp/m ³	
W/C ratio:	0.30	

Figures at curves in graph 7 denote measuring depth from the surface in cm. Graph shows hardening process according to layers to be lagged, proportionally to the depth from the surface.

Hardening process investigations with this method should not be confounded with the examination of strength development. Up till now there is hardly a known effective relationship between conductimetric curve and strength increase, although wave-form of the two curves is closely similar. A significant result of this research consists in the possibility of an investigation of physico-chemical phenomena occurring in this process. Our related study will be published later.

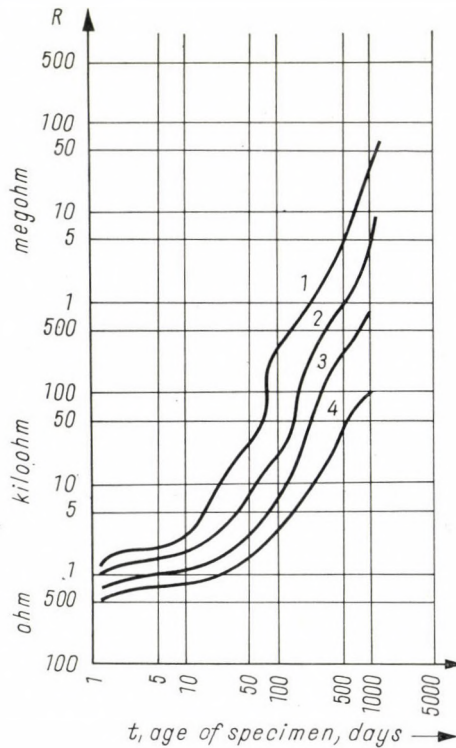


Fig. 7

REFERENCES

1. Klieger, P.: Long-Time Study of Cement Performance in Concrete, Chapter 10 — Progress Report on Strength and Elastic Properties of Concrete. *ACI Jour.* Title No. 54—27, pp. 481—503, 1957. Dec.
Effect of Mixing and Curing Temperature on Concrete Strength. *ACI Jour.* Title No. 54—62, pp. 1063—1081, 1958. J.
- THOMAS, F. G.: *RILEM Bull.* (1960. Dec.), No. 9, 18—20.

2. DECOUX, R.—BARRÉE, J.: Etude de la conductibilité électrique des betons. In. Tech. Bat. Trav. Publ. (1941), Circ. Série F. No. 3.
3. WEISZ, Gy.: A beton tömörítése. Mérnöki Tov. Int. 54. 2794, p. 20.
4. BESSON, M.: Séchage et vieillissement du beton dans les barrages. Schw. Bztg. 72 (1954). 371.
5. EYMAN, K.: Wiazanie cementow portlandzkich. Prace Inst. Tech. Bud. Warszawa.

ABBINDUNG UND ERHÄRTUNG HYDRAULISCHER STOFFE

VI. KONDUKTOMETRISCHE UNTERSUCHUNG DES ERHÄRTUNGSPROZESSES ZEMENTGEBUNDENER BAUSTOFFE (AUF ZEMENTBASIS)

G. SZUK

ZUSAMMENFASSUNG

Die konduktometrische Untersuchung des Erhärtungsprozesses zementgebundener Baustoffe erwies, daß der ohmsche Widerstand der Stoffe in Abhängigkeit von der Zeit sich nicht gemäß einem kontinuierlichen Zusammenhange erhöht. Die stufenartige Erhöhung des elektrischen Widerstandes stellt eine ähnliche Wellenform dar wie der nichtkontinuierliche Festigkeit-Zeit Zusammenhang, beobachtet von mehreren Wissenschaftlern. Diese Erscheinung kommt bei jedem untersuchten Stoff vor und ist den sich abspielenden physiko-chemischen Umwandlungen zuzuschreiben.

PRISE ET DURCISSEMENT DES MATÉRIAUX HYDRAULIQUES

VI. ESSAI CONDUCTIMÉTRIQUE DU DURCISSEMENT DES MATÉRIAUX DE CONSTRUCTION A BASE DE CIMENT

G. SZUK

RÉSUMÉ

L'essai conductimétrique des matériaux de construction à base de ciment a montré que la résistance ohmique des matériaux n'augmente pas en fonction du temps selon une relation continue. L'augmentation par paliers de la résistance ohmique montre une forme d'onde semblable à celle de la relation discontinue résistance-temps, observée par plusieurs chercheurs. Ce phénomène, que l'on constate pour chaque matériau étudié, est à attribuer aux transformations physico-chimiques.

СХВАТЫВАНИЕ И ТВЕРДЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

VI. КОНДУКТИМЕТРИЧЕСКОЕ ИСПЫТАНИЕ ТВЕРДЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ЦЕМЕНТА

Г. СУК

РЕЗЮМЕ

Кондуктиметрическое испытание твердения строительных материалов на основе цемента показывает, что электрическое сопротивление материалов в функции времени не увеличивается по непрерывной зависимости. Ступеньчатое увеличение электрического сопротивления имеет форму волн, похожих на волны непостоянной зависимости между твердостью и временем, наблюдавшейся несколькими исследователями. Это явление наблюдается у всех испытанных материалов и причиняется происходящими физико-химическими преобразованиями.

FURTHER INVESTIGATION OF THE RANQUE PHENOMENON

I. ERDÉLYI

CAND. OF TECHN. SC.
THERMOENERGETICAL DESIGN BUREAU, BUDAPEST

[Manuscript received April 27, 1962]

In his previously cited studies author described an effect and used it to explain the phenomenon experienced in the Ranque tube. He performed his investigations with the aid of molecular mechanics. In the course of his investigations he assumed that the angular velocity of the gas rotating in the vortex tube is — apart from an initial increase — approximately the same all along the radius of the tube.

In his present study author compares his own theoretical results with known results of experiments. The agreement of the results speaks for the correctness of the effect and also of the method of computation based on it. Finally, author investigates the Ranque phenomenon with methods of classical thermodynamics, drawing conclusions with regard to the efficiency that can be attained.

Symbols used

Notations

(Units in the IS system)

t	time,
s	distance,
v	velocity,
c	constant velocity,
c	sound velocity,
a	acceleration,
ω	angular velocity,
M	Mach number = v/c ,
T	absolute temperature,
R	gas constant,
p	pressure,
κ	c_p/c_v specific heat ratio,
γ	proportion of cold gas.

Indices

o	atmospherical state,
1	initial state,
$2, 3$	intermediate states,
kr	critical state,
a	active (e.g. active enthalpy),
h	cold,
m	warm.

I. Introduction

In his recently published studies [1—4] author described an effect, bringing about a temperature gradient in fields, as a consequence of which the field accelerates the heat motion of the molecules towards the center of

the field. This effect — as is pointed out in the works cited — is suitable for the explanation of the Ranque phenomenon. In accordance with the statement made in his last report [4] author regards it as proper to publish his further investigations relating to the above subject.

For those readers who did not read author's previous studies or do not recall the Ranque phenomenon, here is a brief description of it. This phenomenon described by the French engineer RANQUE in 1933 is the following:

If gas is admitted through a nozzle tangentially into a vortex-tube and if a throttle diaphragm is mounted in the tube on one side of the nozzle, as shown in Fig. 1, then the part of the gas which passes through the orifice of the diaphragm at point *A* will be considerably cooler, while that carried off at

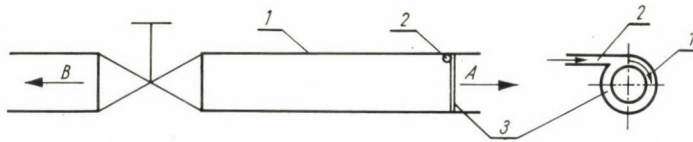


Fig. 1

the opposite end of the tube at point *B* will be considerably warmer than the introduced gas. The sole purpose of the throttle-diaphragm is to separate the part of the rotating gas which is streaming along the geometrical axis of the tube, from that part which streams at the periphery. The phenomenon described by RANQUE can therefore be formulated as follows: gas rotating in a Ranque tube is near its geometrical axis cooler and warmer along its wall, than on admission.

Velocity conditions in the Ranque tube

In his previous study published in the *Acta Technica* [4] author briefly touched upon the conditions of velocity and acceleration in the vortex-tube. It was pointed out that because of the small dimensions of the tubes used for experiments, it was impossible to measure the velocities so that the experimenters were restricted in this respect to assumptions. Generally they started out from the assumption that the angular velocity of the rotating gas is the same along the radius of the tube. Their assumption was supported by stating that a possible change of the angular velocity along the radius of the tube would cause friction in the gas.

Because of the great velocities friction would be quite great thus tending to equalize the diverse angular velocities arising in the tube. Friction, therefore, works in such a way as to cause angular velocities to become all along the radius of the tube the same.

Other theoretical considerations, however, imply the assumption that in a vortex, angular velocity gradually increases towards the center of rotation. One of the scientists expressing such views is Professor SAUER.

In the introduction of his book in the course of his discussions SAUER points out that he is going to neglect friction and heat conductivity of the streaming gas as well as gravitation and other outer forces. Although not

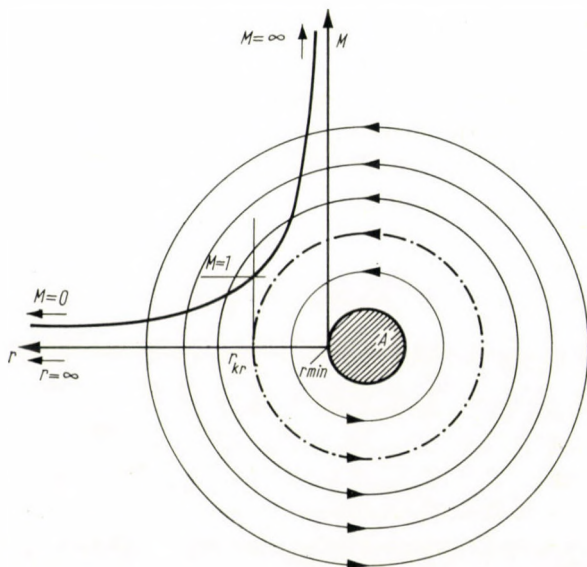


Fig. 2

mentioned explicitly, it seems to emerge from his text that he assumes the temperature of the streaming gas to be constant. SAUER's investigations relate to vortices arising in planes (see Fig. 2).

Vortex-like streaming only occurs outside the core limited by the radius $r = r_{min}$. This core was hatched in Fig. 2. As shown by the curve drawn in Fig. 2, velocity decreases with increasing values of radius. Here velocity is represented by the Mach number which decreases from $M = \infty$ for the radius $r = r_{min}$ to $M = 0$ if the radius becomes infinite. In the case of $M = 1$ a critical state exists. The flow field can, therefore, be divided into two ranges. For the first range, above sound-velocity

$$r_{min} \leq r < r_{kr}$$

whereas, the second range is characterized by the inequality

$$r_{kr} < r < r_{\infty} .$$

However, the train of thought and method of computation used by SAUER can not be applied to the Ranque tube, a fact acknowledged in a letter by Professor SAUER himself, because of the extreme simplifications in his premises.

For SAUER the case $M = 1$ represented a limit in the investigation of vortices. In the Ranque tube, however, M is already equal to 1 at the very inlet. In the case of the Ranque tube, therefore, it is but the inner range of Fig. 2 that could have any meaning. In this range, however, the presence of friction, the strong reduction of temperature and the consequent decrease in volume, as well as the occurrence of considerable axial streaming, neglected by SAUER, all work against the increase of angular velocity.

Naturally, friction can only have an equalizing effect on angular velocity, if friction exists at all. Friction, however, can only occur, if there is a change in angular velocity. It follows from the abovesaid that angular velocity is bound to increase towards the axis of the tube, however slight this increase may be.* The results of the experiments, nevertheless, show that the increase is practically negligible in the case of the Ranque tube.

II. Influence of inlet orifice dimension on angular velocity

As was pointed out in his previous studies, author used the same assumption for his preliminary approximate computations as the one applied by other scientists. According to this assumption there is no change in angular velocity when passing towards the axis of the tube. This assumption is, in fact, only true if the radial dimension of the inlet orifice is negligibly small compared to the dimensions of the vortex tube. For more precise computations, however, the radial dimension in relation to the dimensions of the tube can no longer be neglected. Accordingly, the conditions of velocity are affected. The above effect of the inlet orifice on velocity is shown in Fig. 3.

It can be seen from this figure that the tangential velocity is the same at the height of the inlet orifice. In this section of the radius, therefore, angular velocity increases towards the axis. Along the rest of the radius, however, angular velocity does not any longer change considerably because of the above-mentioned effect of friction.

Let us now examine the effect of the radial dimension of the inlet orifice on the angular velocity of the rotating gas.

* An analogous case in the field of electrical engineering is the occurrence of the slip of asynchronous motors which only amounts to a few percentages, but is inevitably necessary all the same.

According to author's previous study [6], the translational temperature gradient arising in a vortex tube can be computed as follows:

$$\text{grad } T_{\text{tr}} = \frac{2 v^2}{3 r R} .$$

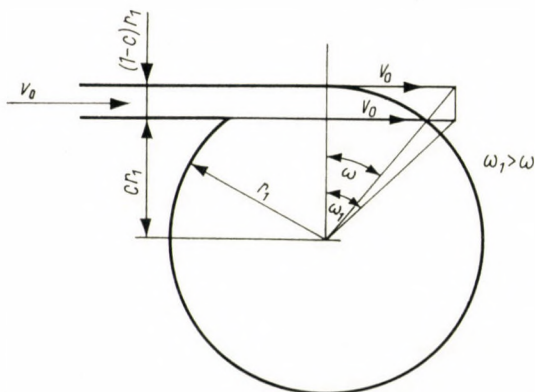


Fig. 3

Applying the above formula to the case in Fig. 3 and integrating it, we obtain,

$$\Delta T_{\text{tr}} = \int_0^{cr_1} \frac{2}{3 R} \frac{v_0^2}{c^2 r_1^2} r \, dr + \int_{cr_1}^{r_1} \frac{2}{3 R} \frac{v_0^2}{r} \, dr ,$$

$$\Delta T_{\text{tr}} = \frac{1}{3 R} v_0^2 + \frac{2}{3 R} v_0^2 \ln \frac{1}{c} ,$$

$$\Delta T_{\text{tr}} = \frac{v_0^2}{3 R} (1 - 2 \ln c) .$$

Substituting the equation [7]

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R T_0 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} ,$$

$$(\Delta T_{\text{tr}})_c = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot T_0 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] (1 - 2 \ln c)$$

where index *c* implies that the radial dimension of the inlet orifice has been taken into account (see Fig. 3). However, we are not greatly interested in the temperature difference ΔT_r , as we are in that concerning the complete system

We must, therefore, multiply the above expression by the factors $3/(f+2)$ and $3(\kappa-1)/2\kappa$ respectively, because $f = 2/(\kappa-1)$. Thus we obtain

$$(\Delta T)_c = T_0 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \cdot (1 - 2 \ln c).$$

Taking T_0 to the left side of the equation in order to render it dimensionless, it assumes the following form:

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)_c = \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \cdot (1 - 2 \ln c).$$

Table I

c	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$1-2 \ln c$	1.211	1.446	1.713	2.021	2.40

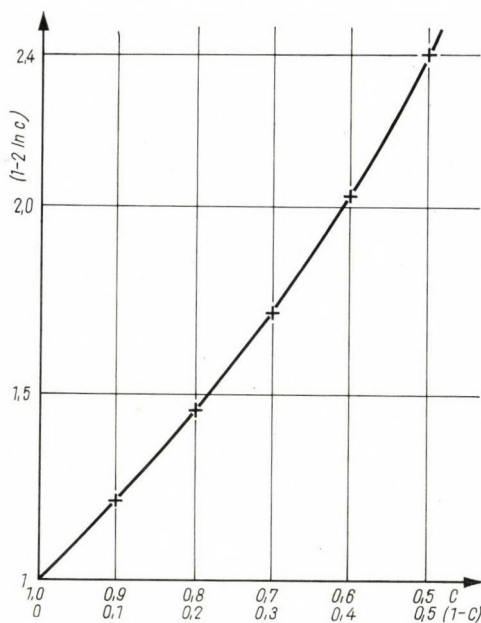


Fig. 4

The above equation consists of two parts. The first part is identical with the equation obtained for case $c = 1$ [9], that is, for the case when the radial dimension of the inlet orifice is not taken into account. The rest of the equation

is a factor showing how many times the value of ΔT is increased if the radial dimension of the inlet orifice is taken into account.

The value of $(1 - 2 \ln c)$ for some selected values of c are contained in Table I.

The same relation in the form of a diagram is shown in Fig. 4. From this it follows that by increasing the radial dimension of the inlet orifice, the temperature difference arising in the vortex tube can to a considerable extent be further increased. However, just as in the case of the ratio p_2/p_1 , it is impossible to increase c beyond a definite value of this ratio.

III. Comparison of computations with experimental results

If the effect which was worked out to explain the Ranque phenomenon is applied to a gravitational field, then assuming atmospherical conditions, a temperature gradient of $102 \text{ m}^\circ\text{C}$ is obtained. This is a value since long

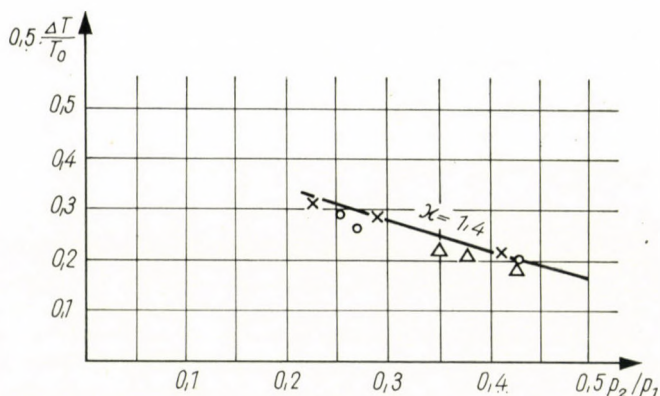


Fig. 5

established by the meteorologists and also computed by the author in his previous studies. The identity of the obtained results speak for the correctness and validity — in the case of small accelerations — of the above effect and the method of computation based on it.

For the case of large acceleration values such as those occurring in the Ranque tube, the numerical correctness of the effect was proved by the data of measurements performed and published in 1946 [10] by the well-known investigator of the Ranque tube, R. HILSCH.

Some of these data will now be compared with the diagram computed on basis of the effect (see Fig. 5).

When preparing this diagram the increase in the angular velocity brought about by the inlet orifice, that is the factor $(1 + 2 \ln c)$, was duly taken into account.

In the diagram the values of $\Delta T/T_0$ are shown as a function of the ratio p_1/p_2 . The notations are the following:

- p_1 inlet pressure of gas before the nozzle,
- p_2 pressure of gas after the nozzle (diffusor),
- ΔT temperature difference arising in the tube,
- T_0 inlet temperature of gas before the nozzle.

When comparing author's theoretical results and the practical values obtained by HILSCH, the following considerations have to be taken into account:

As was previously pointed out, the temperature gradient arising along the radius of the tube leads to a gradual decrease in the temperature of the individual gas layers towards the axis of the tube, and to a gradual increase of the temperature towards the wall of the tube. Accordingly a difference of temperature exists between the wall and the axis of the tube but the transition is gradual. If the rotating mass of gas is divided into two parts along an arbitrarily assumed circle and the two parts of the gas are carried off separately, then the part of gas carried off along the wall of tube will be warmer, whereas the other part carried off in the center of the tube colder than the gas at the inlet. However, the temperature of the hot gas carried off is the temperature of a mixture of gas layers with different temperatures. The temperature of this mixture is, of course, lower than the maximum temperature arising near the wall of the tube. In the same way temperature of the cold gas carried off in the center of the tube is, after all, the temperature of a mixture of gas layers in the center of the tube. This, on the other hand, is warmer than the minimum temperature arising in the axis of the tube. The temperature difference between the two parts of gases carried off is, therefore, smaller than the entire difference of temperatures arising along the radius, amounting only to half of it. If, therefore, the results of author's computations are to be compared with the experimental results of R. HILSCH, then, according to the afore-mentioned, the values of diagram 6 in author's previous study [14] have to be multiplied by 0.5.

Another factor that has to be considered in connection with Fig. 6 is the following: The above-mentioned curves in Fig. 6 concern the case when the radial dimension of the inlet orifice is not accounted for. In HILSCH's experiments, however, this dimension was so large that it must be reckoned with. Because of the radial dimension of the inlet orifice, therefore, one has to multiply the curves or rather the values in Fig. 6 by another factor that can be taken from Fig. 4. In the equipment used by HILSCH the radius of the tube was 2.3 mm, while the diameter of the tube was 1.1 mm. Converting the latter into a square with a base of 1.1 mm we obtain, for the factor $(1 - c)$ shown

in Fig. 4 a value of $1 - c = 0.375$. The corresponding ordinate in this figure is

$$(1 - 2 \ln c) = 1.94.$$

The values in Fig. 6 must, therefore, be multiplied by factor 1.94 if they are to correspond to the results attained in HILSCH's experimental equipment. Multiplying the curve relating to air ($\kappa = 1.4$) in Fig. 6 by the above-mentioned factors 0.5 and 1.94 we obtain the curve shown in Fig. 5.

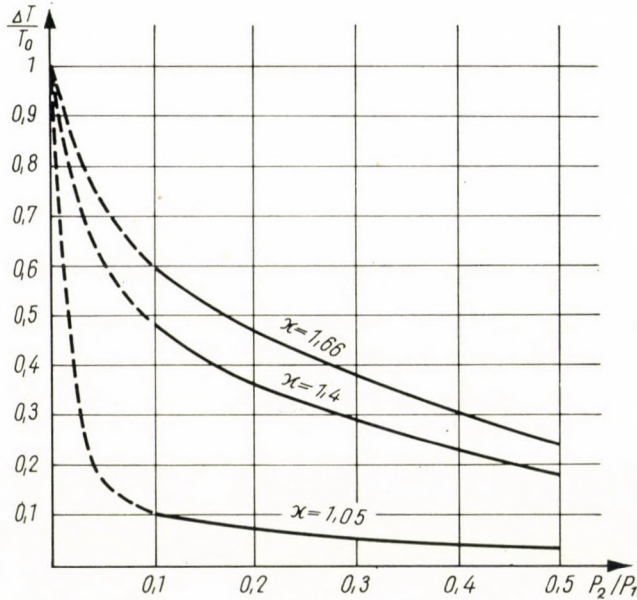


Fig. 6

This curve, therefore, relates to the experimental equipment used by HILSCH, but has been computed on the basis of the effect already described. It is this curve that has to be compared with the results of measurements performed by HILSCH.

R. HILSCH published the results of his experiments on vortex tubes in diagrams on the 22nd of February 1946. Since the coordinates of his diagrams are different from those of author, one has to start by deriving from the values in Hilsch's diagrams the p_2/p_1 values and $\Delta T/T_0$ values forming the coordinates in author's diagram.

The basic data of Hilsch's equipments and experiments are the following:

- tube diameter $R = 4.6$ mm,
- diameter of inlet nozzle $D = 1.1$ mm,
- air temperature at inlet $T_0 = 293^\circ$ K.

From HILSCH's measurements author utilized the ones for which the ratio of cold air carried off in the entire air stream amounted to $\gamma = 0.5$.

It has to be pointed out, that Hilsch's nozzle is a simple cylindrical hole. Because of geometrical reasons, however, the hole bored into the tube tangentially, necessarily ends in an inclined position. The cylindrical nozzle ending at an inclined plane has the effect of a diffuser. Consequently Hilsch's nozzle has the effect of a diffuser. This is important, because thus the gas can have a velocity at the inlet above sound velocity.

Table II

Inlet pressure $p_1 = 11$ ata

Diameter of throttle diaphragm, B mm	1.4	1.8	2.2
Internal pressure, p_2 ata	4.5	3.2	2.5
p_2/p_1	0.41	0.291	0.227
0.5 ΔT measured	63.1	83.5	92.5
0.5 $\Delta T/T_0$	0.216	0.285	0.316

Table III

Inlet pressure $p_1 = 7$ ata

Diameter of throttle diaphragm, B mm	1.4	1.8	2.2
Internal pressure, p_2 ata	3	1.9	1.76
p_2/p_1	0.429	0.271	0.252
0.5 ΔT measured	59	77.5	87.5
0.5 $\Delta T/T_0$	0.201	0.264	0.299

The diameters of the throttle-diaphragms mounted into the tube for the series of experiments described have been $B = 1.4; 1.8; 2.2; 2.6$ mm. The application of the throttle diaphragm with a diameter of 2.6 mm resulted in extreme values with regard to internal pressure. For this reason author neglected these values.

The Tables II, III and IV contain the data taken from Hilsch's diagrams as well as the ratios derived from them for the purpose of comparison. Marking

the related values in Table II of p_2/p_1 and $0.5 \Delta T/T_0$ into Fig. 5 we obtain the points marked with \times . Marking the related values in Table III of p_2/p_1 and $0.5 \Delta T/T_0$ into Fig. 5 we obtain the points marked with 0. Finally marking the related values in Table IV of p_2/p_1 and $0.5 \Delta T/T_0$ into Fig. 5 we obtained the points marked with Δ .

As can be seen from Fig. 5, the points representing the results of HILSCH's experiments fall close to the curve computed on basis of the effect. This fact speaks for the validity, in fields with great acceleration, of the effect described and the method of computation based thereon.

Table IV
Inlet pressure $p_1 = 4$ ata

Diameter of throttle diaphragm, B mm	1.4	1.8	2.2
Internal pressure, p_2 ata	1.71	1.5	1.4
p_2/p_1	0.428	0.376	0.35
$0.5 \Delta T$ measured	53.1	60.6	64.9
$0.5 \Delta T/T_0$	0.181	0.207	0.221

IV. Other explanations

The effect described was found to be suitable, also numerically, for the explanation of the Ranque phenomenon. Let us now examine some other explanations relating to the Ranque phenomenon:

A. GOETZ, California [11] assumes that the molecules with high energies contribute to the development of the vortex, while molecules with low energies are pushed towards the center of the tube. This does not effect the general thermodynamical equilibrium of energies but assumes, a priori, the existence of hot and cold molecules influenced by the vortex tube only as a separating equipment, the latter thereby playing the role of a Maxwell's demon.

According to R. HILSCH air expands in the centrifugal field from the high pressure space along the wall of the tube up to the low pressure prevailing near the axis. During the expansion air transmits a considerable part of its kinetic energy through internal friction to the air layers at the periphery. These peripheral layers then leave at an increased temperature.

Although the above explanations are interesting, they have been reported only for the sake of completeness and will not be commented on.

V. Investigation of the Ranque phenomenon with the methods of classical thermodynamics

In the preceding chapters author investigated the Ranque phenomenon with the methods of molecular mechanics. As could be seen, the results of computations carried out in this way lead to the same results as the experiments. Let us now examine the Ranque phenomenon using the methods of classical thermodynamics. The starting point to explain the phenomenon will be entropy. The state of compressed air admitted to the Ranque tube has been marked

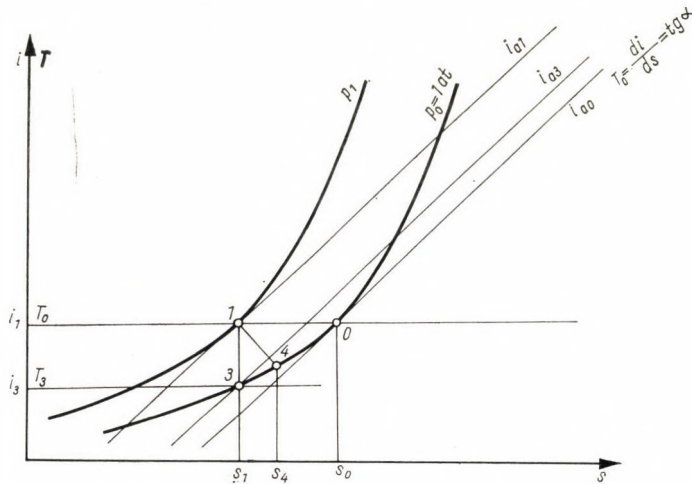


Fig. 7

in Fig. 7 with 1. At this point, the gas has, by dint of its state parameters, working capacity, in other words active enthalpy [12] or exergy [13].*

If gas corresponding to point 1, that is with a pressure of p_1 and a temperature of T_0 , is caused to pass over to the atmospherical environment where pressure amounts to $p_0 = 1$ ata, then this can happen in the following three ways:

1. Throttling the gas. In this case, the state of gas after the change of state will correspond to point 0.

Let us now examine this process from the point of view of enthalpy. Let us, in our figure draw the initial active enthalpy line i_{00} which passes through point 0 corresponding to the environment. The tangent of this line is $T_0 = di/ds$.

* Active enthalpy is called that part of enthalpy which, theoretically, can be completely transformed into work in a given environment. The rest of enthalpy, called the submerged enthalpy, on the other hand, is no longer capable of performing any work because it is submerged below the line of the environment. The notion of exergy is identical with the above-mentioned active enthalpy.

All other active enthalpy lines that is lines for which $i_a = \text{const.}$ will be parallel with line $i_{a0} = 0$. It is apparent from our figure that while the gas was throttled, its active enthalpy fell from i_{a1} to i_{a0} without yielding any work. This process, therefore, involves losses, amounting to $T_0(s_0 - s_1)$.

2. Another method by which the pressure p_1 of the gas with a state corresponding to point 1 can be reduced to 1 ata, is an isentropic expansion of the gas from point 1 to point 3. The entropy s_1 of the gas in this case remained unchanged, no losses, therefore, occurred. The decrease in active enthalpy amounting to $i_{a1} - i_{a3}$ was wholly transformed into work.

3. The third way of bringing about the desired change of state is to cause the gas to expand along the polytropic line 1-4 so as to reduce its pressure

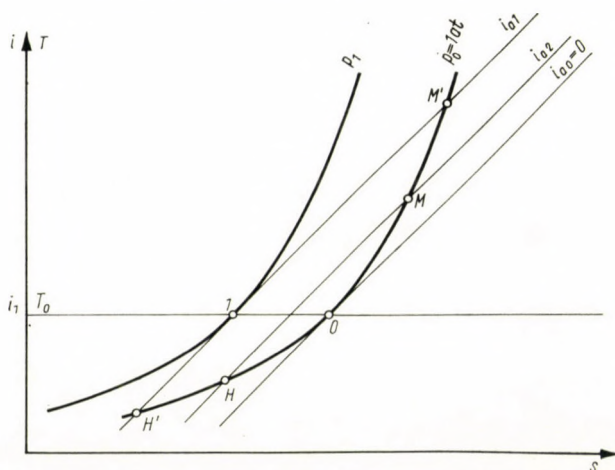


Fig. 8

from p_1 to 1 ata. This process also yields work but less than in the previous case and losses occur amounting to $T_0(s_4 - s_1)$.

If the process taking place in the Ranque tube is investigated on the basis of active enthalpy concept, and depicted in the above classical way, the following picture is obtained (see Fig. 8).

Gas with state parameters corresponding to point 1 is admitted to the Ranque tube. Characteristics of the gas are the following:

pressure	p_1 ,
temperature	T_0 ,
enthalpy	i_1 ,
active enthalpy	i_{a1} .

Compared to the environment represented by point 0 the gas possesses an active enthalpy amounting to $i_{a1} - i_{a0} = i_{a1}$.

The gas does not perform work when passing through the Ranque tube, its entropy, therefore, remains unchanged. The pressure of the gas, on the other hand, drops to 1 ata.*

Thus the gas as a whole, that is, the cold and warm layers together have the following state parameters on leaving the Ranque tube:

$$\begin{array}{ll} \text{pressure} & 1 \text{ ata,} \\ \text{enthalpy} & i_1. \end{array}$$

If from the 1 kg gas admitted to the Ranque tube γ kg is carried off at the cold end of the tube and $(1 - \gamma)$ kg at the warm end, with the cold and warm gas having enthalpies amounting to i_h and i_m respectively, then we can write:

$$\gamma \cdot i_h + (1 - \gamma) i_m = i_1.$$

With regard to the temperatures it is known that

$$T_m > T_0 > T_h$$

where

T_h denotes the "mixture" temperature of the cold gas carried off from the tube and T_m the "mixture" temperature of the warm gas.

In case of constant specific heat:

$$\gamma \cdot T_h + (1 - \gamma) T_m = T_0,$$

which means that by an assumed ideal gas, the original T_0 temperature would be obtained when mixing the cold and warm gases carried off from the tube.

The warm and cold gases carried off from the tube have a working capacity compared to the environment and also to each other. The above working capacity, however, cannot be more than the gas possessed at the admission to the Ranque tube. Accordingly,

$$\gamma \cdot i_{ah} + (1 - \gamma) i_{am} \leq i_{a1}$$

where

i_{ah} denotes the specific active enthalpy of the cold gas carried off, and i_{am} the specific active enthalpy of the warm gas.

The cold and warm gases carried off from the Ranque tube are both mixtures of gas layers with different temperatures. According to the teachings of thermodynamics every kind of mixing involves losses. It follows from the

* It is conceivable that the pressure after the Ranque tube is $p = 1$ ata. This does not, however, affect our train of thought.

above-said that the correct form of the previous equation will be

$$\gamma \cdot i_{ah} + (1 - \gamma) i_{am} < i_{a1}.$$

Summarizing the afore-mentioned, the following conclusions can be made with regard to the point of state of the cold and warm gases:

The point representing the state of the cold gas must be below the T_0 line, because $T_h < T_0$.

Since the pressure of the gas leaving the Ranque tube is identical with the pressure of the environment, the point of state looked for will necessarily lie on the $p = 1$ ata isobar.

The above point must satisfy the condition

$$i_{a1} > i_{ah} > i_{a0}$$

because the active enthalpy i_{a1} of the gas on leaving the Ranque tube cannot be but less than the initial active enthalpy of the gas at the tube inlet, while it necessarily exceeds i_{a0} , because it is only the pressure of the gas at the tube outlet which is equal to that of the environment, but not the temperature.

If, for example, $i_{ah} = i_{a2}$, then the point looked for is the one marked by H in Fig. 8. Similiar considerations are required for the determination of point M representing the state of the warm gas carried off from the tube.

On the basis of the above-said, conclusions can be drawn with regard to the efficiency that can be attained with a Ranque tube. The efficiency of the Ranque tube can be interpreted in the following two ways:

a) Only the cold gas is accounted for. The tube is, therefore, regarded as a refrigerating equipment.

b) The active enthalpies of both the cold and the warm gases are taken into account relating them to the active enthalpy of the gas at the inlet:

$$\eta = \frac{\gamma i_{ah} + (1 - \gamma) i_{am}}{i_{a1}}.$$

For the present investigations it is but the latter interpretation that is of interest. It follows from the foregoing considerations and from Fig. 8 that the efficiency as formulated in the previous equation could only amount to $\eta = 1$ if there were no friction in the tube and if the gas layers with different temperatures were carried off separately from the tube without any mixing taking place. Since, however, it is warm and cold *mixtures* that are carried off, losses due to mixing occur. It is this loss, due to mixing, that pushes the theoretical point M' on the 1 ata isobar in Fig. 8 to point M , and point H' to point H , causing these points to slip from the i_{a1} active enthalpy line to the lower i_{a2} active enthalpy line.

The efficiency looked for can therefore also be expressed in the following way:

$$\eta = \frac{i_{a2} - i_{a0}}{i_{a1} - i_{a0}} = \frac{i_{a2}}{i_{a1}}$$

because $i_{a0} = 0$.

The above discussion of the Ranque tube with the methods of classical thermodynamics concerns a simplified case in which

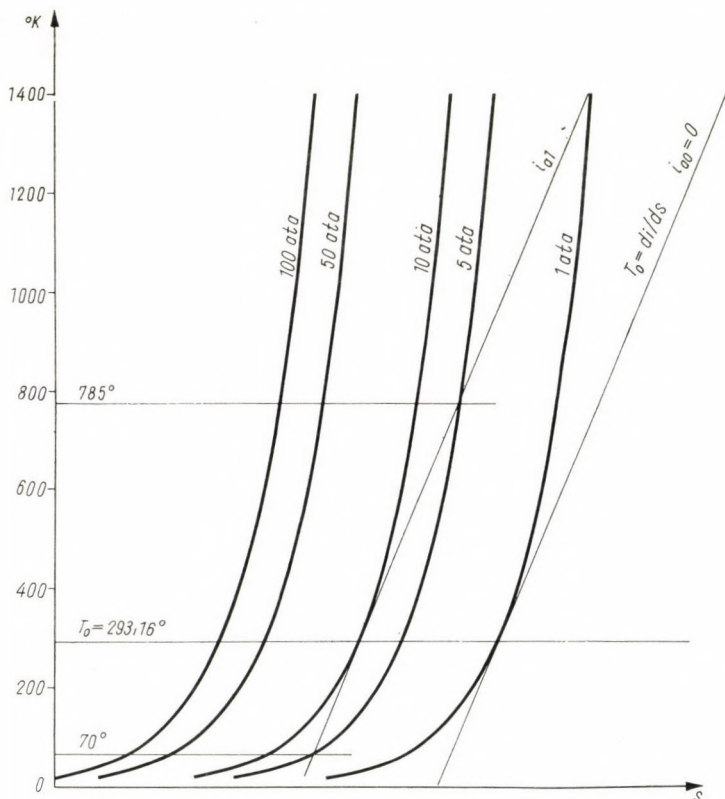


Fig. 9

the gas, admitted tangentially, expands to the pressure of the environment on the extension of the inlet orifice serving as a diffuser;
 the phenomenon takes place under adiabatic conditions;
 the gas remains in the ideal zone in the course of the process;
 there is no friction whatsoever;
 the active enthalpies of the warm and hot mixture of gas layers are equal.
 This means that points H and M in Fig. 8 lie on the same i_{a2} active enthalpy line. Of course, this pre-determines the quantity ratio of warm and cold gases.

If the Ranque tube is cooled, then points M and H will slip down the isobar. The purpose of this technique is to increase the cooling effect. In this case, however, the process does not remain adiabatical.

Let us, finally, examine, how great ΔT temperature differences could be attained in a Ranque tube under ideal circumstances.

Those states that can be produced in an ideal vortex-tube have been marked with M' and H' in Fig. 8. Points M' and H' can be established when considered that they must both lie on the isobar corresponding to the pressure after the vortex-tube and also on the line $i_a = \text{const.}$, the latter referring to the active enthalpy of the medium before admission to the vortex-tube. The temperatures corresponding to the theoretical points M' and H' have been determined by construction on the $T-s$ diagram of ideal diatomic gases (see Fig. 9) and were found to be 785°K and 70°K independent of initial pressure, thus yielding a temperature difference of $\Delta T = 700^\circ$. The result obtained points to the possibility of realising even far greater temperature differences in a vortex tube than so far achieved in experiments.

REFERENCES

1. ERDÉLYI, I.: Chapters on the Mechanical Theory of Heat. *Acta Techn. Hung.* **27** (1959), No. 1–2.
2. ERDÉLYI, I.: Hőállapotok vizsgálata mechanikai erőterekben (Investigation of heat states in mechanical fields). In Hungarian. *Energia és Atomtechnika* (1960), No. 8.
3. ERDÉLYI, I.: Centrifugális térerő hatása gázok hőállapotára. A Ranque-jelenség magyarázata (Effect of centrifugal fields on the heat state of gases. Explanation of the Ranque phenomenon). In Hungarian. *Energia és Atomtechnika* (1961), No. 1.
4. ERDÉLYI, I.: Influence of Centrifugal Fields on the Heat State of Gases. Explanation of the Ranque Phenomenon. *Acta Techn. Hung.* **38** (1962), No. 3–4.
5. SAUER, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik. Zweite Auflage. Springer Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1951. 1–18.
6. Page 342 of reference No. 4.
7. SCHMIDT, E.: Thermodynamik. 6. Auflage. Springer Verlag, Berlin 1956, 264.
8. Page 344 of reference No. 4.
9. Page 345 of reference No. 4.
10. HILSCH, R.: Die Expansion von Gasen im Zentrifugalfeld als Kälteprozess. *Z. Naturforsch.* (1946), 208–214.
11. WEBSTER, D. S.: An Analysis of the Hilsch Vortex Tube. *Journal of the ASRE* (1950), Febr.
12. ERDÉLYI, I.: Aktív hő—elmerült hő (Active Heat — Submerged Heat). In Hungarian. *Magyar Energiagazdaság* (1952), No. 1–2.
13. RANT, Z.: Exergie. *Brennstoff, Wärme und Kraft* (1960), 297–301.
14. Fig. 6 of reference No. 4.

WEITERE UNTERSUCHUNG DER RANQUESCHEN ERSCHEINUNG

I. ERDÉLYI

ZUSAMMENFASSUNG

In seinen zitierten Studien schildert der Verfasser einen Effekt und benutzt diesen Effekt zur Erklärung der in der Ranqueschen Röhre beobachteten Erscheinung. Die diesbezüglichen Untersuchungen wurden mit Hilfe der Molekularmechanik durchgeführt. Es wurde bei diesen Untersuchungen vorausgesetzt, daß die Winkelgeschwindigkeit des im Wirbelrohr rotierenden Gases — abgesehen von der anfänglichen Zunahme entlang des Radius — überall nahe dieselbe ist.

In dieser Studie vergleicht der Verfasser seine eigenen theoretischen Ergebnisse mit bekannten Versuchsergebnissen. Die Übereinstimmung dieser Ergebnisse spricht für die Richtigkeit des Effekts und der auf diesen aufgebauten Berechnungsmethode.

Schließlich wird die Ranquesche Erscheinung mittels der Methoden der klassischen Thermodynamik untersucht, und es werden in bezug auf die erzielbaren Wirkungsgrade Folgerungen gezogen.

NOUVELLES RECHERCHES SUR LE PHÉNOMÈNE RANQUE

I. ERDÉLYI

RÉSUMÉ

L'auteur explique le phénomène observé dans le tube de Ranque par un effet traité dans des études antérieures. Ses recherches avaient été effectuées à l'aide de la mécanique moléculaire. Dans ses calculs, l'auteur avait admis une vitesse angulaire à peu près constante le long du rayon du tube, abstraction faite de l'accélération initiale.

Dans la présente étude, l'auteur compare les résultats de ses investigations avec des résultats expérimentaux connus. Leur concordance fournit la preuve de l'exactitude de la méthode de calcul préconisée. Finalement, l'auteur examine le phénomène de Ranque avec les méthodes de la thermodynamique classique, et tire des conclusions relatives aux rendements pouvant être réalisés.

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РАНКЕ

И. ЭРДЕЛЬИ

РЕЗЮМЕ

В предыдущей цитированной работе автор описал один эффект и этим эффектом он объяснял явление Ранке, наблюдаемое в трубе. Исследования проводились с помощью молекулярной механики. Исходя при этих исследованиях из предположения, что угловая скорость газа, вращающегося в вихревой трубке (за исключением начального роста скорости), является приблизительно идентичной всюду вдоль радиуса трубки.

В данной работе автор сравнивает собственные теоретические результаты с известными опытными результатами. Их совпадение говорит о правильности эффекта и построенной на основе его методики расчета. Наконец, явление Ранке рассматривается с помощью методов классической термодинамики и автор делает выводы относительно достижимого к. п. д.

CONTROL OF BAR-FORCES ARISING IN PLANE TRUSSES

I. RÉDEI*

INSTITUTE FOR RAILWAY PLANNING OF THE HUNGARIAN STATE RAILWAYS, BUDAPEST

[Manuscript received March 14, 1962]

Author introduces a numerical method for the control of bar-forces arising in plane trusses. The method in question cannot be used for the calculation of same, but it is appropriate for a simple and quick control of previously — either by computation or graphics — determined bar-forces, i.e., to prove whether these forces satisfy conditions of equilibrium which are deduced in this paper. The checking calculus requires the determination of the algebraic sum of products to be obtained by multiplying bar-forces with the related bar-lengths. Author demonstrates that on the basis of data referring to external, active and reaction forces, the afore-mentioned sum can be determined directly and precisely. Thus, the checking calculus, consisting of several multiplications and additions, can be performed exceedingly quickly. The presented method is valid for both, externally and internally determined or undetermined trusses. The practical application of same is elucidated by 6 numerical examples.

I. Introduction

Bar-forces arising in bars of trusses, which consist of bars and hinges lying in the same plane and subjected to a constant load, are determined in engineering practice, in general, by using the following methods:

a) method of joints (numerical or graphical procedure, Maxwell—Cremona's diagram);

b) methods of sections : Culmann's method, Ritter's method, similitude method, or the so-called two-moments method.

According to the task to be solved, the afore-mentioned methods are used in different combinations in practice. A fairly widespread method consists, e.g., in the determination of all bar-forces by using Maxwell—Cremona's diagram, and a subsequent control of the largest chord-forces on the basis of Ritter's method.

Among the enumerated methods Maxwell—Cremona's diagram is used for the simultaneous determination of the internal forces arising in all bars of a truss, while by methods mentioned in *b)* the internal force arising in one individual bar of a truss can be determined. In the first case the correctness

* István Rédei, Cházár A. u. 19, Budapest XIV., Hungary.

of drawing or computation is proved by the close of Maxwell—Cremona's diagram, while for methods ad *b*) the proof might be obtained by repeating the computation. Of course, the use of Maxwell—Cremona's diagram might imply some error even in the case of a closure, as a drawing cannot be absolutely accurate.

The method to be presented is based on a *necessary but not sufficient* condition of the equilibrium and might be appropriate to indicate an occasional miscalculation or a constructional error.

The conditions for the applicability of the method in question are: *a*) external forces acting on the truss, reaction forces included, are by themselves in equilibrium; *b*) external forces affecting the truss act only on the hinges (joints); *c*) reaction forces and all bar-forces arising in the truss had already been determined by some method.

The calculation in question is for *checking* thus, the above mentioned three conditions should always be satisfied.

The calculation to be dealt with might also be used for externally or internally undetermined structures, thus for continuous trusses, two-hinged arches as well as for trusses having so-called redundant bars. Indeed, checking is just in case of a statical redundancy *particularly expedient* because then the determination of bar-forces requires more wearisome and complicated computations, this, however, involves an increased possibility of making calculative errors.

2. Deduction of the fundamental theorem

The deduction of the exceedingly simple relationship making the control possible is based on the following theorem which is well-known from statics:

Any truss can be then and only then in the resting state, if on each joint the external force (or the resulting force of external loads) acting on this joint, and internal forces arising in bars running into same, are in equilibrium, i.e., if the vectors of external and internal forces form a closed force diagram.

The above statement in other words means, that in respect to each joint the sum of projections of the external force (or forces) and bar-forces acting on the same joint, referring to whichever straight line situated in the own plane of the truss, must be equal to zero. This relationship will be utilized for the deduction of the checking method in question.

2.1. The case of a hinged triangle

First the most simple case shown in Fig. 1 should be dealt with. The presented truss is a rigid triangle consisting of three bars and three hinges.

The sole active force C acts on point C , while reaction forces A and B act on points A and B . These three forces are in equilibrium, i.e.,

$$(A, B, C) \doteq 0.$$

Let it be assumed, that bar-forces S_1, S_2, S_3 , arising due to the action of external forces A, B, C , had already been determined by some well-known method. Assuming at point A a hinged support, while at point B a support

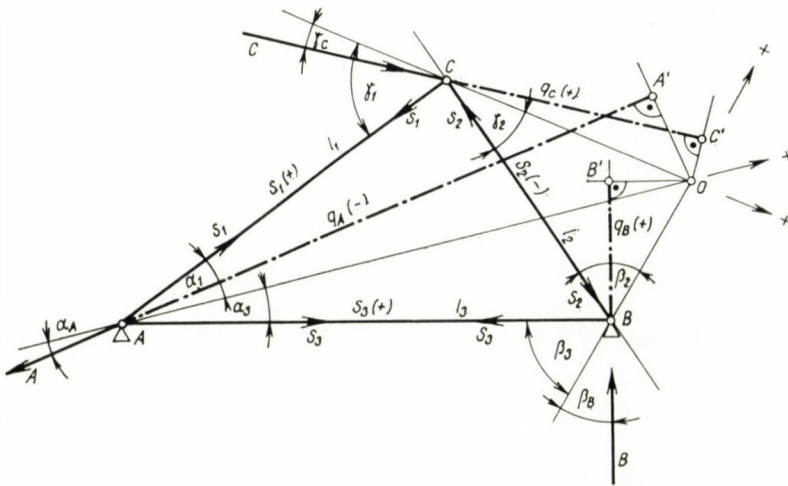


Fig. 1

by a horizontally moving roller shoe, reaction force A will act in the direction indicated in Fig. 1 (anchoring force).

The reduction of external forces into their bar-force directed components indicates, that bars AC and AB are tensioned (S_1 and S_2 are tensional forces), while S_3 is a compressive force. If the equilibrium of joints should be demonstrated, the latter statement means, that vectors S_1 and S_3 should be depicted with an arrow pointing off from the joint, the vector S_2 , on the other hand, points towards joints B or C , respectively, as shown in Fig. 1.

Thereafter, an optional point O , taken in the own plane of the truss, should in turn be connected with points C, A and B . Then, the afore-mentioned projectional theorem should be set up referring in turn to the so obtained straight lines OC, OA and OB , i.e., that the external force acting on the respective joint and bar-forces running into same are in equilibrium should be expressed, thus the sum of their projections referring to straight lines OC, OA and OB is equal to zero. For the sake of conformity the projections of vectors pointing towards point O should be taken as being positives, while those pointing in the opposite direction as negatives. Angles formed at point A

should be denoted by α , those at point B by β , and those at point C by γ . Angles constituted by the auxiliary straight lines and the direction of the external load should be marked by the index of the external force, while those constituted by the auxiliary straight lines and bar-forces by the indices of the latter. By so doing the angles in question are in turn:

at point A : $\alpha_A, \alpha_1, \alpha_2,$

at point B : $\beta_B, \beta_3, \beta_2,$

at point C : $\gamma_C, \gamma_1, \gamma_2.$

The three projectional equations are:

in respect to straight line OC :

$$C \cdot \cos \gamma_C - S_1 \cdot \cos \gamma_1 - S_2 \cdot \cos \gamma_2 = 0,$$

in respect to straight line OA :

$$-A \cdot \cos \alpha_A + S_1 \cdot \cos \alpha_1 + S_3 \cdot \cos \alpha_3 = 0.$$

in respect to straight line OB :

$$B \cdot \cos \beta_B - S_3 \cdot \cos \beta_3 - S_2 \cdot \cos \beta_2 = 0.$$

Multiplying the first equation with the distance \overline{OC} , the second one with the distance \overline{OA} and the third one with the distance \overline{OB} , the following equations are arrived at:

$$\begin{aligned} C \cdot \overline{OC} \cdot \cos \gamma_C - S_1 \cdot \overline{OC} \cdot \cos \gamma_1 - S_2 \cdot \overline{OC} \cdot \cos \gamma_2 &= 0, \\ -A \cdot \overline{OA} \cdot \cos \alpha_A + S_1 \cdot \overline{OA} \cdot \cos \alpha_1 + S_3 \cdot \overline{OA} \cdot \cos \alpha_3 &= 0, \\ B \cdot \overline{OB} \cdot \cos \beta_B - S_3 \cdot \overline{OB} \cdot \cos \beta_3 - S_2 \cdot \overline{OB} \cdot \cos \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

By summing up the above three equations and after a subsequent reduction the following equation is obtained:

$$\begin{aligned} C \cdot \overline{OC} \cdot \cos \gamma_C + B \cdot \overline{OB} \cdot \cos \beta_B - A \cdot \overline{OA} \cdot \cos \alpha_A + \\ + S_1 \cdot (\overline{OA} \cdot \cos \alpha_1 - \overline{OC} \cdot \cos \gamma_1) - \\ - S_2 \cdot (\overline{OC} \cdot \cos \gamma_2 + \overline{OB} \cdot \cos \beta_2) + \\ + S_3 \cdot (\overline{OA} \cdot \cos \alpha_3 - \overline{OB} \cdot \cos \beta_3) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

First of all the meaning of the expressions within parentheses should be cleared. Therefore, the line of the bar AC has to be lengthened (Fig. 1a) and from point O a line has to be drawn perpendicularly to the direction AC . These two lines intersect each other at point O' . From Fig. 1a it is immediately clear that

$$\overline{O'A} = \overline{OA} \cdot \cos \alpha_1,$$

$$\overline{O'C} = \overline{OC} \cdot \cos \gamma_1,$$

i.e.,

$$\overline{OA} \cdot \cos \alpha_1 - \overline{OC} \cdot \cos \gamma_1 = \overline{O'A} - \overline{O'C} = \overline{AC} = l_1$$

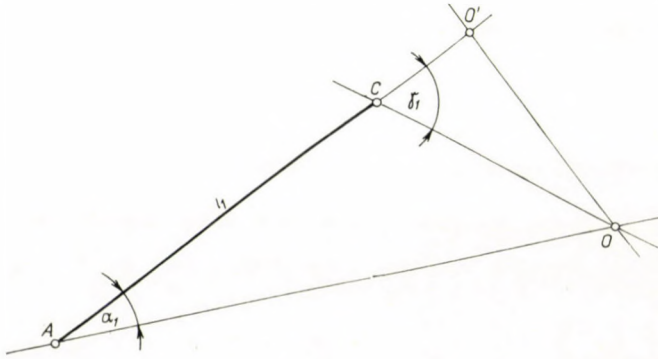


Fig. 1a

if the length of bar AC is denoted by l_1 .

Similarly, drawing from point O a line perpendicular to the direction BC , (Fig. 1b) the point O'' and relations

$$\overline{O''C} = \overline{OC} \cdot \cos \gamma_2,$$

$$\overline{O''B} = \overline{OB} \cdot \cos \beta_2$$

are obtained, thus

$$\overline{OC} \cdot \cos \gamma_2 + \overline{OB} \cdot \cos \beta_2 = \overline{O''C} + \overline{O''B} = \overline{CB} = l_2,$$

where l_2 is the length of bar CB .

Finally, drawing from point O a line perpendicular to the direction AB , (Fig. 1c), the point O''' and relations

$$\overline{O'''A} = \overline{OA} \cdot \cos \alpha_3$$

$$\overline{O'''B} = \overline{OB} \cdot \cos \beta_3$$

are arrived at, thus

$$\overline{OA} \cdot \cos \alpha_3 - \overline{OB} \cdot \cos \beta_3 = \overline{O'''A} - \overline{O'''B} = \overline{AB} = l_3,$$

where l_3 is the length of bar AB .

Now the meaning of the factors of external forces A , B , C figuring in equation (1) should be determined. The question can be solved with the aid of Fig. 1. Drawing from point O a line perpendicularly to the direction of force C these two lines intersect each other at point C . As can immediately be read from the figure

$$\overline{OC} \cdot \cos \gamma_C = \overline{C'C} = q_C.$$

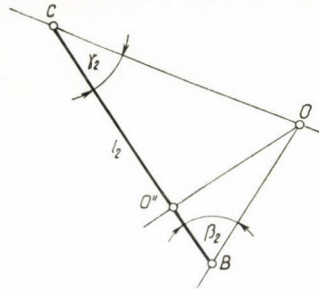


Fig. 1b

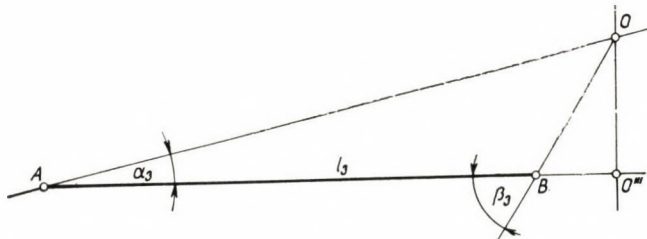


Fig. 1c

Repeating the same procedure in respect to forces A and B , relations

$$\overline{OA} \cdot \cos \alpha_A = \overline{A'A} = q_A,$$

$$\overline{OB} \cdot \cos \beta_B = \overline{B'B} = q_B$$

are obtained. Substituting the above three relations into equation (1), this equation takes the form

$$-Aq_A + Bq_B + Cq_C + S_1l_1 - S_2l_2 + S_3l_3 = 0. \quad (2)$$

The 4th, 5th and 6th terms figuring on the left-hand side of equation (2) are nothing else but the individual bar-forces multiplied with the bar-lengths. Remembering that in the example in question bar-forces S_1 and S_3 are tensional forces, which are to be regarded as positives, while bar-force S_2 is a compressive

force to be taken as negative, the last three terms on the left-hand side in equation (2) can also be written in the symbolic form

$$\Sigma S_i l_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

namely, if bar-forces are attributed with a sign, and the summing up is interpreted as an algebraic one.

The lengths q_A , q_B , q_C figuring in the first three terms of equation (2) are the distances between the points of application belonging to external forces A , B , C and the points where the lines of these forces intersect their normals drawn from an optional point O .

For the sake of simplicity the afore-mentioned distances should also be regarded as being magnitudes attributed with a sign. They will be taken as being positives if the external force (A , B or C) points *towards* the perpendicular line drawn from point O .

In the present example:

force C points towards the straight line OC' , thus q_C is positive,

force B points towards the straight line OB' , thus q_B is positive,

while force A points away from the straight line OA' , consequently, q_A is negative.

Taking the above into consideration, the first three terms on the left-hand side of equation (2) are nothing else but the sum of products of external forces and distances q attributed with a sign, i.e.,

$$\Sigma P_i q_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Here P_i denotes, in general, an external force and q_i a distance belonging to same, which is attributed with a sign according to the above given interpretation. In the following these distances q are named the "arms" of forces.

Finally, on the basis of the above given sign-rules equation (2) takes the simple form

$$\Sigma P_i q_i + \Sigma S_i l_i = 0.$$

If for practical purposes the first term is transferred to the right-hand side of the equation, the final result of the previous deduction is

$$\Sigma S_i l_i = - \Sigma P_i q_i. \quad (3)$$

As bar-forces, arising due to the action of given external forces, are unambiguously determined the value of the sum on the left-hand side of equation (3) is constant. Consequently the value on the right-hand side must also be constant, thus, it does not at all depend on the location of point O .

2, 2. The general case

In addition to the presented example, which is the simplest fundamental case, it should still be proved that relation (3) is valid for any (externally or internally determined or undetermined) plane truss, provided that owing to the effect of the given forces the truss remains in the resting state. Therefore, the truss having a general form and presented in Fig. 2 should be examined. According to conditions the truss is subjected to a force system which is in equilibrium. Owing to the effect of these forces in the individual bars internal forces, the so-called bar-forces arise.

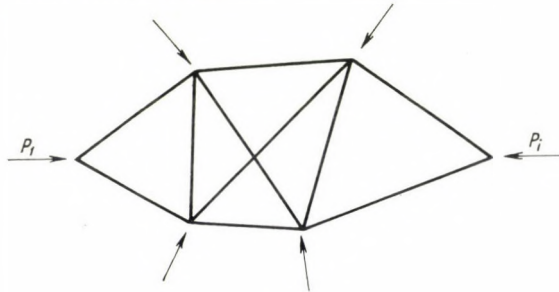


Fig. 2

Let it be assumed that reaction of forces acting on the supports, furthermore all bar-forces had already been determined by some well-known method, e.g., by statical means, work-kinetic energy equations etc. Consequently the afore-mentioned forces are to be assumed as being known.

Hereafter, similarly to the previous deduction, a starting point O should be taken as lying anywhere in the own plane of the truss. Connecting this point in turn with all joints of the truss, the projectional theorem should be set up, as in paragraph 2,1, in respect to all auxiliary straight lines obtained in this way. By so doing, e.g., for the i -th joint the relation

$$P_i \cdot \cos \alpha_i + S_j \cdot \cos \alpha_j = 0$$

is arrived at. The number of equations which can be set up precisely coincides with the number of joints to be found in the structure. Then, each of these equations has to be multiplied with the distance between the joint in question and the chosen point O . Summing up all these equations set up in the afore-mentioned way, in the new equation two kinds of members appear; partly numbers containing external active and reaction forces P_i , and partly members which contain bar-forces S_i . Of course, the right-hand side of this reduced equation will also be zero.

Owing to the setting up character, each external force appears *only in one single term* of the summarized equation. The factor pertaining to this

member is nothing else but the distance q presented in the previous example, i.e., the distance between the point of action of the force and the point of intersection constituted by the direction-line of the force and the line drawn from point O perpendicularly to same, thus the distance q attributed with a sign. Contrarywise, each bar-force S_i appears in two addible terms because two auxiliary straight lines belong to the two end-points of each bar (Fig. 3), thus in the following form:

$$S_i \cdot \overline{OY} \cdot \cos \alpha_i + S_i \cdot \overline{OX} \cdot \cos \beta_i = S_i (\overline{OY} \cdot \cos \alpha_i - \overline{OX} \cdot \cos \beta_i).$$

However, taking the auxiliary point O' into consideration, the expression within parentheses is again nothing else but l_i , i.e., the length of the i -th bar.

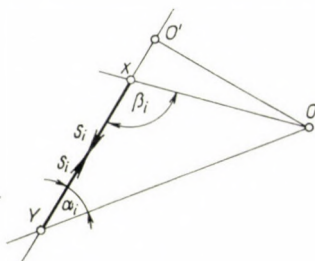


Fig. 3

Therefore, it can be said that the fundamental theorem deduced for a simple hinged triangle is also valid for any kind of plane truss, thus:

$$\boxed{\sum S_i l_i = - \sum P_i q_i} \quad (4)$$

Expressed in words:

for a truss in the resting state the algebraic sum implying the products of all bar-forces attributed with a sign and multiplied with bar-lengths belonging to same, is equal to the algebraic sum involving the products of all external forces multiplied with arms attributed with a sign according to the above given interpretation. These two sums have opposite signs.

2.3. Accomplishment of the checking calculation

The previously deduced relationship makes a quick and simple checking of bar-forces, belonging to a truss, possible.

Of course, the execution of the control in question requires the knowledge of the following data: form of truss, lengths of bars, active and reaction forces affecting the truss, bar-forces developing due to the action of the latter.

Accordingly, when setting up relation (4) magnitudes S_i , l_i , P_i are known from the very first. Although lengths q_i are not determined yet, but — as can be seen from the following examples — in most cases occurring in practice they are determined by the form of the truss, i.e., the determination of these lengths does not require a separate calculation. Thus, the checking does not need more than the multiplication of the already given or computed magnitudes with each other and two algebraic additions. After the afore-mentioned operations are made, the checking calculation is finished.

In connection with checking calculations the question should generally be considered, whether the checking and primary calculations are independent of each other. The checking of a multiplication by a simple repetition of the procedure without reversing the order of the factors might conduce to the same error, thus the result of such a control cannot be taken as being absolutely valid. From this view-point, the here outlined method should be regarded as unobjectionable, because it is absolutely independent of the original computing or construing procedure.

From the view-point of practice the right-hand side of relation (4), i.e., the expression $\Sigma P_i \cdot q_i$ is, apart from occasional rough errors, an *unobjectionable and accurate* value. As will later be seen, this value might in most cases be computed even without paper and pencil. If the value of the left-hand side, i.e., that of expression $\Sigma S_i l_i$ deviates from the afore-mentioned one, then the error should be sought for in the sign of bar-forces, eventually in the inaccuracy of bar-lengths.

Of course, an occasional deviation between the values of the left-hand and right-hand sides does not give information on the magnitude of the made error, as the error or inaccuracy might occur in respect to one single bar, or concerning several or even all bar-forces.

It is perhaps superfluous to point out that the application of the method dealt with is restricted to bar-forces developing due to the effect of a constant load system. To principal trusses of bridges, where the maximal bar-forces are obtained by changing the position of the load, the method in question cannot be applied directly. On the other hand, the method can expediently be used when controlling bar-forces due to dead load as well as those arising in sway-bracings of bridges, furthermore in deflection calculations, and finally, for checking bar-forces of almost all trusses used in architectural engineering. Shortly, the presented method can be used in all cases where the internal forces of the whole structure are determined on the basis of a sole constant force system. The author of this paper wishes to express his opinion, that the application of the introduced checking calculation to the above-mentioned cases might always be useful and expedient.

The here presented checking method is in the case of statically redundant trusses particularly important. As is well known, the determination of the

actual bar-forces arising in these structures requires lengthy calculations which imply many error sources, and the control of the obtained final results by the hitherto used methods is also rather complicated. However, the introduced method can be used without any alteration, and the final control is arrived at quickly and simply. But it should be mentioned, that for statically redundant trusses relation (4) expresses, strictly speaking, only the possibility of the simultaneous existence of bar-forces which were previously determined by means of the Elasticity Theory, but does not give information as to whether the statically redundant magnitudes have been determined correctly or not.

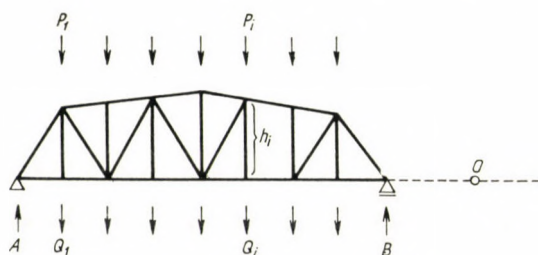


Fig. 4

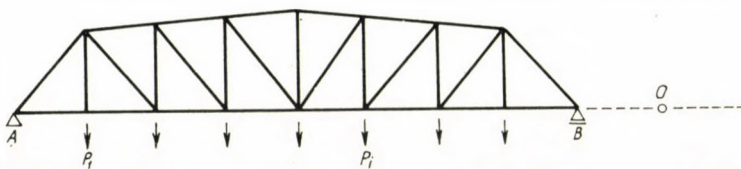


Fig. 5

Before turning to examples a practical remark should be made. According to the previous ones the location of point O can be taken quite optionally. However, it is expedient to choose the place of point O in such a way that the sum on the right-hand side of equation (4) should contain as few active and reaction forces as possible, i.e., by making the arms q pertaining to these forces equal to zero.

In the special case outlined in Fig. 4 it is expedient to place the point O on the straight line AB (on whichever point of this line). In this case forces A , B and $(Q - Q_n)$, figuring in the sum on the right-hand side of equation (4), become eliminated because the straight lines drawn from point O perpendicularly to the directions of these forces intersect the action lines of the forces in question at their points of application, therefore, the respective distances q equal zero. Thus, on the right-hand side of equation (4) solely the sum $\sum P_i h_i$ remains, where P_i denote active forces loading the upper chord and h_i the height of the upper chord over the lower one at the i -th joint.

For trough truss-bridges the checking is still more simple, if the active forces (dead load and train weight) are imagined as being concentrated on the joints of the lower chord (Fig. 5). Taking again in this case the point O on the straight line AB , the arms q belonging to *all external forces* are equal to zero. Thus, in this most special case equation (4) takes the form

$$\sum S_i \cdot l_i = 0. \quad (5)$$

3. Numerical examples

Example 3.1

The statically determined truss shown in Fig. 6 should be controlled. The sole loading force acts on joint 2, its value is

$$P = 10 \text{ Mp}.$$

Assuming the point O to be situated on the line of the lower chord, on the basis of formula (5) from the very first it is known that

$$\sum Pq = 0,$$

thus the relation

$$\sum S_i l_i = 0$$

must hold. The bar-forces and bar-lengths were determined by calculation. The result of the checking calculation is given in Table I.

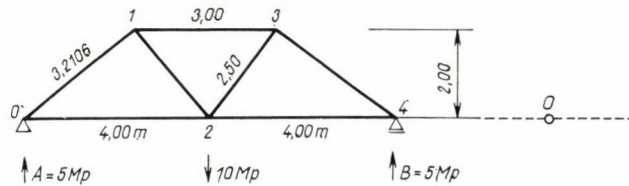


Fig. 6

Table I

Checking of numerical example 3.1

Mark of bar	Bar-length (l) (m)	Bar-force (S) (Mp)	SI (Mpm)	
			-	+
0—2	4.000	6.25		25.000
0—1	3.202	— 8.004	25.626	
1—3	3.000	—10.000	30.000	
1—2	2.500	6.25		15.625
2—4	4.000	6.25		25.000
3—4	3.202	— 8.004	25.626	
2—3	2.500	6.25		15.625
		$\sum S l$	—81.252	+81.250

According to Table I $\Sigma SI = -81.252 + 81.250 = -0.002$ Mpm, thus the deviation from condition (5) is quite insignificant. The above really negligible deviation is due to an error arising in root extraction and subsequent correction.

Example 3.2

The truss figuring in example 3.1 should be controlled. The loading force acts on joint 3, its direction forms an angle of 45° with the horizontal and the magnitude of this force is $W = 8$ Mp (Fig. 7). The bar-lengths were determined by calculation, the bar-forces by the Maxwell-Cremona diagram. The point O should be placed into the hinge on the left-hand side, i.e., into the joint 0 (zero). This is the most expedient location of point O because in this case the horizontal and vertical components of reaction force A fall out of the sum on the right-hand side of equation (4) as arms q pertaining to both components equal zero.

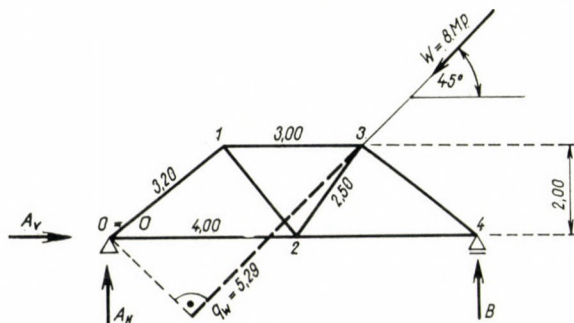


Fig. 7

For the same reason reaction force B is also eliminated, thus, on the right-hand side of relation (4) only the external force W remains with arm q belonging to same. The arm of force q is marked in the figure by a thick dotted line, its length, determined by drawing, is $q_W = +5.29$ m.

Thus, the sum on the right-hand side is:

$$\Sigma Pq = Wq_W = 8 \cdot 5.29 = +42.32 \text{ Mp}.$$

The checking computation is given in Table II.

Table II
Checking of numerical example 3.2

Mark of bar	Bar-length (l) (m)	Bar-force (S) (Mp)	SI (Mpm)	
			-	+
0—2	4.00	-1.68	6.72	
0—1	3.20	-5.07	16.22	
1—3	3.00	-6.36	19.08	
1—2	2.50	+3.98		9.95
2—4	4.00	+3.18		12.72
2—3	2.50	-3.98	9.95	
3—4	3.20	-4.03	12.90	
		ΣSI	-64.87	+22.67

According to Table II $\Sigma Sl = -64.87 + 22.67 = -42.20$ Mpm, thus, the deviation between the left-hand and right-hand side of the checking formula is minimal, its value is not more than 0.12 Mpm. This indicates that the accuracy of bar-forces, determined by using Maxwell—Cremona's diagram, fully satisfies the demands of practice.

Example 3.3

The task should be the control of the truss, to be found on page 597 in the first volume (first edition 1953) of I. KORÁNYI's book "Statics of Girders" (Tartók Statikája). The sketch of this truss is shown in Fig. 8.

The above-mentioned outstanding author wished to determine the value of the deflection arising on the medial joint of the railway-bridge shown in the Fig., which develops owing to a locomotive load of $7 \cdot 12.5$ Mp. The solution of this problem requires, on the one hand,

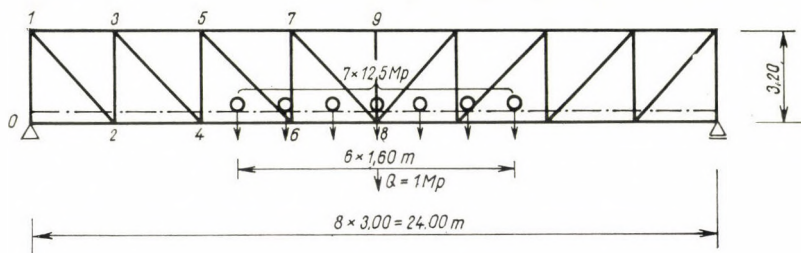


Fig. 8

the knowledge of all bar-forces caused by the locomotive load, and on the other hand by an imagined load of 1.0 Mp acting on the medial joint. The bar-forces arising due to the aforementioned force effects were determined by calculation. Probably, owing to a misprint an error occurred, and as will be seen, in the calculation of bar-forces due to locomotive load.

For the checking calculation point O should be located on the line of the lower chord. In this case in compliance with relation (5) the condition

$$\Sigma Pq = 0$$

should be satisfied, whereas, reckoning with bar-forces and bar-lengths (only for the half-truss) to be found in the afore-mentioned book, the values compiled in Table III are arrived at.

According to Table III:

$$\Sigma Sl = 1574.10 + 1528.24 = -45.86 \text{ Mpm},$$

which value considerably deviates from zero, i.e., from the condition expressed by formula (5). Such a big deviation cannot originate either from an inaccurate calculation of bar-lengths or from that of bar-forces. In fact, the re-calculation of bar-forces conduced to the result that

bar-force 4—5 is -35.42 Mp instead of -43.75 Mp,

bar-force 6—7 is -12.09 Mp instead of -18.75 Mp.

Performing the checking calculation on the basis of the above given rectified values, without presenting the respective details, instead of

$$\Sigma Pq = 0, \quad \Sigma Sl = -0.09 \text{ Mpm}$$

is obtained, and this is an acceptable result.

The calculation of bar-forces arising in the second loading case, i.e., of those due to a load of $Q = 1.0$ Mp acting on the medial joint, is practically taken as being quite correct, as the sum of products of bar-forces and bar-lengths is

$$-12.025 + 12.017 = -0.008 \text{ Mpm},$$

which value scarcely deviates from zero.

If the deflection calculated in the example given in the afore-mentioned book is recalculated on the basis of the above given rectified bar-force values, then instead of the deflection of 2.22 cm to be found in the book, 2.08 cm is obtained.

Table III
Checking of numerical example 3.3

Mark of bar	Bar-length (l) (m)	Bar-force (S) (Mp)	S l (Mpm)	
			-	+
0—2	3.0	0		
2—4	3.0	41.0		123.0
4—6	3.0	82.0		246.0
6—8	3.0	115.2		345.6
1—3	3.0	— 41.0	123.0	
3—5	3.0	— 82.0	246.0	
5—7	3.0	—115.2	345.6	
7—9	3.0	—126.5	379.5	
0—1	3.20	— 43.75	140.0	
2—3	3.20	— 43.75	140.0	
4—5	3.20	— 43.75	140.0	
6—7	3.20	— 18.75	60.0	
8—9	3.20/2	0		
1—2	4.39	60.10		263.84
3—4	4.39	60.10		263.84
5—6	4.39	48.60		213.35
7—8	4.39	16.54		72.61
		$\Sigma S l$	—1574.10	+1528.24

Example 3.4

The truss to be found on page 214 of the first volume of the "Stahlbau-Handbuch" (first edition, Köln 1956) should be controlled (Fig. 9).

The truss in question is internally statically undetermined one-fold. It was resolved by imagining the bar 13 to be cut through and replaced by a couple of zero value formed by forces of 1—1 Mp. The statically redundant magnitude was determined by the energy method. The final result of the calculation is presented in Table IV. The last two columns of this table contain the data of the checking calculation.

The value $\Sigma S l = -775 + 768 = -7$ Mpcm obtained as final result scarcely deviates from zero, i.e., from the condition involved in formula (5), consequently the original calculation is to be regarded as being sufficiently precise.

Example 3.5

The subject of the checking calculation should be the truss to be found on page 518—519 of A. GREGOR's book entitled "Stahlbau, Berechnung der statisch bestimmten Tragwerke" (first edition, Berlin 1960). The sketch of this truss is shown in Fig. 10.

The truss in question is internally one-fold statically undetermined. It was resolved by using an approximate method which is usual in engineering practice, namely in three steps. In the first step those bar-forces were determined which develop owing to the half of the external load in an imagined, statically determined truss consisting of two chords, two end-verticals and the half of diagonals (e.g., diagonals 1—2, 2—5, 5—6, 6—9, 9—10).

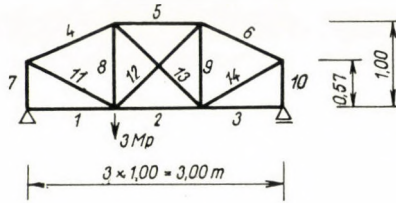


Fig. 9

Table IV
Checking of numerical example 3.4

Mark of bar	Bar-length (l) (cm)	Bar-force (S) (Mp)	$S l$ (Mpcm)	
			-	+
1	100	0		
2	100	1.29		129
3	100	0		
4	106	-2.15	228	
5	100	-1.67	167	
6	106	-1.07	113	
7	57	-2.00	114	
8	100	1.13		113
9	100	-0.27	27	
10	57	-1.00	57	
11	115	2.30		264
12	141	0.97		137
13	141	-0.44	62	
14	115	1.15		132
			-768	+775
			$\Sigma S l$	+7 Mpcm

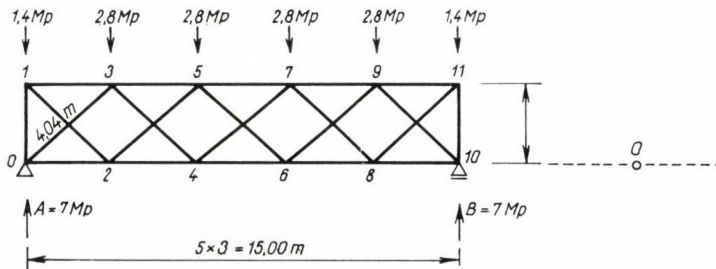


Fig. 10

In the second step those bar-forces were determined which develop owing to the second half of the external load in an imagined statically determined truss now consisting of two chords, two end-verticals and the other half of diagonals (e.g., diagonals 0-3, 3-4, 4-7, 7-8, 8-11). The third step of the calculation consisted in summing up bar-forces determined in

Table V
Checking of numerical example 3.5

Mark of bar	Bar-length (<i>l</i>) (m)	Bar-force (<i>S</i>) (Mp)	<i>Sl</i> (Mpm)	
			-	+
1-3	3.00	-2.50	7.50	
3-5	3.00	-6.85	20.55	
5-7	3.00	-8.70	26.10	
7-9	3.00	-6.85	20.55	
9-11	3.00	-2.50	7.50	
0-2	3.00	3.70		11.10
2-4	3.00	8.70		26.10
4-6	3.00	10.00		30.00
6-8	3.00	8.70		26.10
8-10	3.00	3.70		11.10
0-1	2.70	-3.64	9.83	
10-11	2.70	-3.64	9.83	
0-2	4.04	-5.00	20.20	
2-5	4.04	-3.30	13.33	
4-7	4.04	-0.85	3.43	
6-9	4.04	0.85		3.43
8-10	4.04	3.30		13.33
0-2	4.04	3.30		13.33
3-4	4.04	0.85		3.43
5-6	4.04	-0.85	3.43	
7-8	4.04	-3.30	13.33	
9-10	4.04	-5.00	20.20	
			-175.77	+137.92
		$\Sigma S l$	- 37.85	

the first two steps. The bar-forces were determined by construction. The final result of these constructions and the checking calculation is to be found in Table V.

Summing up data of Table V, the final sum on the left-hand side of the checking formula (4) is

$$\Sigma Sl = (-175.77 + 137.92) = -37.85 \text{ Mpm.}$$

On the other hand, taking point *O* on the line of the lower chord, the final sum on the left-hand side of formula (4) is

$$\Sigma Pq = (2 \cdot 1.4 + 4 \cdot 2.8) \cdot 2.7 = +37.85 \text{ Mpm.}$$

Thus, the values of bar-forces determined by construction are absolutely accurate.

Example 3.6

The truss to be found on page 153 of the 4th volume of W. RITTER's book entitled "Anwendungen der graphischen Statik" (first edition, Zürich 1900) should be controlled. The sketch of this truss is shown in Fig. 11.

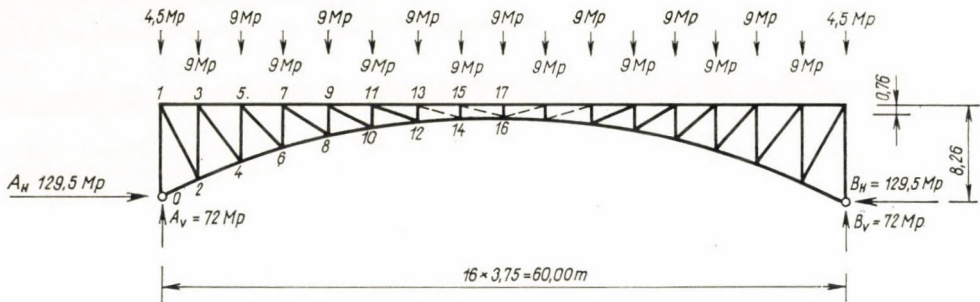


Fig. 11

Table VI
Checking of numerical example 3.6

Mark of bar	Bar-length (<i>l</i>) (m)	Bar-force (<i>S</i>) (Mp)	<i>S l</i> (Mpm)
<i>Upper chord</i>			
1—3	3.75	— 1.8	— 6.75
3—5	3.75	— 5.6	— 21.00
5—7	3.75	— 14.1	— 52.88
7—9	3.75	— 27.3	— 102.37
9—11	3.75	— 46.5	— 174.38
11—13	3.75	— 78.4	— 294.00
13—15	3.75	— 118.7	— 445.12
15—17	3.75	— 139.6	— 523.50
			— 1620.00 Mpm
<i>Lower chord</i>			
0—2	4.20	— 144.6	— 607.32
2—4	4.06	— 138.4	— 561.90
4—6	3.96	— 130.6	— 517.18
6—8	3.88	— 119.7	— 464.44
8—10	3.83	— 104.8	— 401.48
10—12	3.79	— 83.9	— 317.14
12—14	3.77	— 51.4	— 193.60
14—16	3.75	— 11.0	— 41.25
			— 3104.21 Mpm

(Continuation of table VI)

Mark of bar	Bar-length (<i>l</i>) (m)	Bar-force (<i>S</i>) (Mp)	<i>S l</i> (Mpm)
<i>Verticals</i>			
0—1	8.26	— 7.5	— 61.95
2—3	6.42	—13.8	— 88.60
4—5	4.86	—17.0	— 82.62
6—7	3.58	—18.0	— 64.44
8—9	2.55	—20.0	— 51.00
10—11	1.76	—19.0	— 33.44
12—13	1.19	—18.4	— 21.90
14—15	0.85	—18.4	— 15.64
16—17	0.76/2	— 9.0	— 3.42
			—423.01 Mpm
<i>Diagonals</i>			
1—2	7.43	3.6	26.75
3—4	6.14	6.2	38.07
5—6	5.18	11.8	61.12
7—8	4.53	16.0	72.48
9—10	4.14	21.2	86.92
11—12	3.94	33.4	131.16
13—14	3.85	44.2	169.28
15—16	3.83	18.2	69.70
			(+) 655.48 Mpm

The truss in question is structurally a two-hinged arch, thus externally one-fold redundant statically. Author determined the statically undeterminable horizontal hinge-reaction by the method of elastic weights. Its magnitude was found to be

$$A_H = B_H = 129.5 \text{ Mp.}$$

The vertical components of the reactions are:

$$A_v = B_v = 72 \text{ Mp.}$$

The bar-forces were determined by using Maxwell—Cremona's diagram. (The part of the original structure lying between joints 13 and 13' is a solid web-girder. In respect to this fact the imagined bar-forces situated between the above-mentioned joints were determined by calculation.)

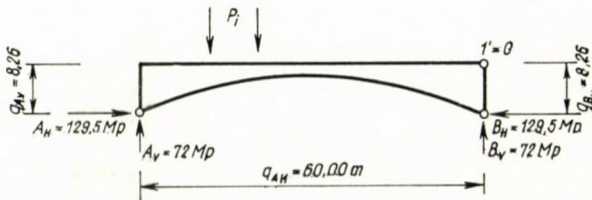


Fig. 11a

The results as well as the partial sums of the sum on the left-hand side of checking formula (4) can be taken from Table VI.

The sum on the left-hand side of checking formula (4) is:

$$\Sigma Sl = 2 \cdot (655.48 - 1620.0 - 3104.21 - 423.01) = -8983.48 \text{ Mpm.}$$

For the determination of the sum on the right-hand side of formula (4), for point O the joint l' of the upper chord should be chosen (Fig. 11a). In this case the arms q of all active forces, furthermore the same of force BZ equals zero. Accordingly, the sum on the right-hand side of formula (4) is:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 72 \cdot 8.26 = 1189.44 \text{ Mpm} \\ 129.5 \cdot 60 = 7770.00 \text{ ,,} \\ \hline \Sigma Pq = 8959.44 \text{ Mpm} \end{array}$$

The difference is $8983.48 - 8959.44 = 24.04$ Mpm, instead of zero. This result indicates the adequate accuracy of the graphic determination of bar-forces.

DIE FESTIGKEITSPRÜFUNG VON EBENEN FACHWERKTRÄGERN

I. RÉDEI

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird vom Verfasser ein numerisches Verfahren vorgeführt, das zur Überprüfung der Stabkräfte ebener Fachwerkträger dient. Das dargelegte Verfahren ist zur Berechnung der Stabkräfte nicht verwendbar, dagegen kann es zur einfachen und schnellen Überprüfung von vorher rechnerisch oder graphisch bestimmten Stabkräften angewendet werden, namentlich um nachzuweisen, daß die Stabkräfte die in der Abhandlung abgeleitete Gleichgewichtsbedingung befriedigen. Zur Kontrollrechnung muß die algebraische Summe der Produkte der zusammengehörigen Stabkräfte und Stablängen bestimmt werden. Der Verfasser weist nach, daß diese Summe eine Größe ist, die auf Grund der auf die äußeren, aktiven und Reaktionskräfte bezüglichen Angaben unmittelbar und vollkommen genau bestimmt werden kann. Daher ist die Kontrollrechnung mit Hilfe einiger Multiplikationen und Additionen außerordentlich schnell durchführbar. Das Verfahren ist für aussen und innen bestimmte oder unbestimmte Fachwerkträger gleichermaßen gültig. Die Anwendung des Verfahrens ist durch sechs Rechnungsbeispiele erläutert.

CONTRÔLE DES BARRES DE POUTRES EN TREILLIS PLANS

I. RÉDEI

RÉSUMÉ

L'auteur présente un procédé numérique pour le contrôle des tensions de barres des poutres à treillis plans. Le procédé exposé n'est pas utilisable pour le calcul des tensions de barres, mais permet le contrôle simple et rapide des efforts déjà déterminés par calcul numérique ou graphique, notamment pour démontrer si les tensions de barre satisfont aux conditions d'équilibre démontrées dans l'étude. Pour le calcul de contrôle, il faut déterminer la somme algébrique des produits des efforts et des longueurs de barre correspondantes. L'auteur démontre, que cette somme est une quantité pouvant être déterminée directement et avec une parfaite exactitude à partir des charges et des réactions. Ainsi, le calcul de contrôle peut s'effectuer très rapidement, moyennant seulement quelques multiplications et additions. Le procédé s'applique également à des poutres statiquement déterminées et indéterminées. Son application est illustrée par 6 exemples numériques présentés à la fin de l'étude.

ПРОВЕРКА СТЕРЖНЕВЫХ УСИЛИЙ ПЛОСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ БАЛОК

И. РЕДЕИ

РЕЗЮМЕ

Показан числовой метод проверки стержневых усилий плоских решетчатых балок. Метод неприменим для вычисления стержневых усилий, но пригоден для простой и быстрой проверки этих усилий, предварительно определенных путем расчета или построения, а именно пригоден для выявления того, что названные усилия удовлетворяют условиям равновесия, выведенным в настоящей работе. Для контрольного расчета необходимо определить алгебраическую сумму произведений соответственных длин стержней и стержневых усилий. Показано, что эта сумма является величиной, которую можно определить непосредственно и очень точно из данных внешних, активных и принудительных сил. Таким образом, контрольный расчет можно выполнить очень быстро, посредством нескольких умножений и сложений. Метод одинаково пригоден как для внешне и внутренне определенных, так и для неопределенных балок. Применение метода демонстрируется на шести числовых примерах.

SCHEIBENBEMESSUNG AUF GRUND DES TRAGLASTVERFAHRENS

K. SZMODITS*

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
UNGARISCHES FORSCHUNGSINSTITUT FÜR HOCH- UND TIEFBAU, BUDAPEST

[Eingegangen am 25. Juni 1962]

Der Aufsatz befaßt sich mit der Bestimmung des statisch zulässigen Spannungszustandes von Scheiben. Der hergestellte Spannungszustand besteht aus im homogenen Spannungszustand befindlichen Plattenteilen, die durch die Unstabilitätslinien des Spannungsfeldes umgrenzt sind. Die Herstellung des Spannungszustandes erfolgt unter Berücksichtigung der Gleichgewichts-Randbedingungen, indem man von den am Rande gelegenen Scheibenteilen ausgehend den Spannungszustand über die angenommenen Unstabilitätslinien hinaus mit Hilfe des Mohrschen Kreises fortsetzt.

Die zu dem so hergestellten Spannungszustand gehörige Last ist eine der unteren Schranken der Bruchlast. Der Aufsatz enthält zahlreiche Beispiele für die Bestimmung der unteren und oberen Schranke der Bruchlast.

I. Einleitung

Die Bemessung auf Grund des Nachweises des Sicherheitsgrades erfordert die Bestimmung der Bruchlast der Konstruktion. Dieses Problem kann auf Grund der Elastizitätslehre nicht gelöst werden, da vor dem Bruch einzelne Konstruktionsteile in den plastischen Zustand gelangen, was eine Spannungsumlagerung zur Folge hat. Mit der Zunahme der Belastung wachsen die plastischen Zonen so lang an, bis sich die Konstruktion zu einem im labilen Gleichgewicht befindlichen Mechanismus entwickelt und nach erheblichen Bewegungen bricht.

Die Bemessung von Stabkonstruktionen (durchlaufende Träger, Rahmen) auf Grund des Traglastverfahrens ist einfacher als auf Grund der Elastizitätstheorie. Im Gegensatz hiezu stößt die Bemessung von Flächentragwerken, wie auch die von in ihrer Ebene bzw. zu dieser senkrecht belasteten Scheiben bzw. Platten und von Rahmenkonstruktionen, mit Hilfe des Traglastverfahrens auf grundlegende Schwierigkeiten. Bei Stabkonstruktionen entwickelt sich der plastische Mechanismus bekanntlich derart, daß sich in einzelnen Punkten des Trägers plastische Gelenke entwickeln. Nach der Entstehung einer hinreichenden Anzahl von plastischen Gelenken wird die Konstruktion zu einem Mechanismus, der unbegrenzte Bewegungen ausführen kann.

* Dr. Ing. Kázmér Szmodits, Hőgyes Endre utca 1. Budapest IX. (Ungarn).

Bei Scheibenkonstruktionen tritt der plastische Zustand nicht in einer endlichen Anzahl von Punkten, sondern in einzelnen Teilen der Scheibe auf. Die Konstruktion wird dann zum Mechanismus, wenn die plastischen Teile, die keine weiteren Momente aufnehmen, ein zusammenhängendes Netz bilden, so daß die Konstruktion — bloß durch weitere Verformungen — unbegrenzte Bewegungen ausführen kann.

In Hinblick auf die außergewöhnlichen mathematischen Schwierigkeiten, die bei der Behandlung einer zum Teile aus plastischen und zum Teile aus elastischen Zonen zusammengesetzten Scheibe auftreten, wird in der Folge nicht der teilweise elastische und teilweise plastische Spannungszustand dargestellt, der die Lösung des gegebenen Problems bildet. Anstatt dessen werden eine untere und eine obere Schranke für die gegebene Last, die den Bruch verursacht, für die sogenannte proportionale Last bestimmt. Falls die zwei Schranken einander genügend nahe liegen, kann die Bruchlast praktisch hinreichend genau geschätzt werden.

Im Laufe der Abhandlung werden die in der Folge definierten Begriffe eingeführt:

Als *statisch zulässiges Spannungsfeld* wird ein Spannungsfeld bezeichnet, das folgende Eigenschaften besitzt:

1. Die Gleichgewichtsbedingungen werden in allen inneren Punkten der Scheibe bzw. in allen inneren Punkten der einzelnen Teile der durch die Unstetigkeitslinien des Spannungsfeldes in eine endliche Anzahl von Teilen geteilten Scheibe erfüllt, während die auf den Rand bezüglichen Gleichgewichtsbedingungen in allen Randpunkten befriedigt werden. Längs der Unstetigkeitslinien sind die zu dieser Linie senkrechten Spannungen einander gleich, während die in den zu den Unstetigkeitslinien senkrechten ebenen Querschnitten übertragenen Spannungen auf den zwei Seiten der Unstetigkeitslinie verschieden sind.

2. Die Spannungen befriedigen in allen Punkten eine gegebene Fließgleichung

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) \leq 0.$$

Als *kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld* wird ein Geschwindigkeitsfeld bezeichnet, das folgende Eigenschaften besitzt:

1. Die Zusammendrückbarkeits-Bedingung wird in allen Punkten der Scheibe, bzw. in allen Punkten der einzelnen Teile der durch die Unstetigkeitslinien des Geschwindigkeitsfeldes in eine endliche Anzahl von Teilen geteilten Scheibe erfüllt. Die zu den Unstetigkeitslinien senkrechten Geschwindigkeitsvektoren sind auf beiden Seiten der Unstetigkeitslinie identisch, wogegen die zu den Linien parallelen Geschwindigkeitsvektoren auf den zwei Seiten der Linie verschieden sind.

2. In den nach den Verformungs-Randbedingungen unbeweglichen Randpunkten ist die Geschwindigkeit gleich Null.

3. Die Arbeit der Randkräfte ist zumindest um einen unendlich kleinen Wert größer als die plastische Verformungsarbeit.

Außer den erwähnten Definitionen werden noch die folgenden Bedingungen eingeführt:

1. Die von der Konstruktion ausgeführte Verformung, die bis zu dem Zeitpunkt vor sich geht, in dem die Konstruktion unmittelbar zu einem Mechanismus wird, ist so klein, daß die Gleichgewichts- und Randbedingungen als auf die unverformte Konstruktion bezüglich betrachtet werden können.

2. Das Material der Scheibe ist starr-plastisch, d. h., daß die Scheibe bloß plastische Verformungen ausführen kann.

Auf Grund der vorher angeführten Definitionen und Bedingungen ist der folgende Satz nachweisbar:

Eine zu einem statisch zulässigen Spannungsfeld gehörige Last ist eine der unteren, während die zu einem kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeld gehörige Last eine der oberen Schranken der Bruchlast ist.

Der obige Satz ist den folgenden zwei Sätzen gleichwertig:

1. *In einem starr-plastischen Körper, zu dessen Last ein statisch zulässiges Spannungsfeld beigeordnet werden kann, treten keine plastischen Verformungen auf.*

2. *In einem starr-plastischen Körper, zu dessen Last ein kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld beigeordnet werden kann, treten sicher plastische Verformungen auf.*

Die Bemessung besteht in der Bestimmung der einander hinreichend nahe liegenden unteren und oberen Schranken der Bruchlast, indem nach Annahme verschiedener statisch zulässiger Spannungsfelder und kinematisch zulässiger Geschwindigkeitsfelder das zur größten Bruchlast gehörige Spannungsfeld und das zur kleinsten Bruchlast gehörige Geschwindigkeitsfeld ausgewählt werden. Die Bemessung ist dann befriedigend, wenn die so bestimmten zwei Schranken der Bruchlast einander hinreichend nahe liegen.

Das Traglastverfahren bezieht sich auf homogene isotrope, aus starr-plastischem Material bestehende Konstruktionen. Falls das Verfahren auf Stahlbetonkonstruktionen angewendet wird, muß vorausgesetzt werden, daß sowohl der Beton wie auch der Stahl starr-plastische Baustoffe sind, ferner ist auch die auf homogene isotrope Körper bezügliche Fließbedingung anzuwenden. Die Einführung der soeben erwähnten Voraussetzung ist bei der Bemessung von Stahlbetonkonstruktionen nicht neu, da die Bemessung von auf Biegung beanspruchten Stahlbeton-Querschnitten mit Hilfe des Traglastverfahrens bekanntlich auf dieser Annahme beruht. Von den bekannten Fließbedingungen sei die Misessche angewendet; diese lautet für im ebenen Spannungszustand befindliche homogene isotrope Körper:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 - 3 \tau^2 = 3 k^2,$$

wo σ_x , σ_y , τ die Spannungen bedeuten, die auf das Volumenelement wirken, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen x und y parallel sind, während k die Schubspannung ist, die im Falle des reinen Schubspannungszustandes das Fließen verursacht.

Für einen einachsigen Spannungszustand und eine Druckspannung σ_1 ist die Fließbedingung:

$$\sigma_1 = \sqrt{3} \cdot k .$$

Wenn σ_1 eine Zugspannung ist, dann ist die Fließbedingung, mit Rücksicht darauf, daß der Beton keine Zugspannung aufnimmt,

$$\sigma_1 = \frac{F_s \sigma_f}{h} ,$$

wo h die Plattendicke, F_s die auf die Einheitsbreite des Plattenstreifens entfallende Bewehrung und σ_f die Fließspannung des Stahles bedeuten.

Falls sich die Stahlbetonplatte im zweiachsigen Spannungszustand befindet, und die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 Druckspannungen sind, ist die Fließbedingung:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = 3 k^2 . \quad (1)$$

Wenn sowohl σ_1 wie auch σ_2 Zugspannungen sind, dann ist die Fließbedingung, vorausgesetzt, daß der Beton auf Zug nicht, auf Schub aber beansprucht werden kann:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1^0} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{3 k^2} \right) - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2^0} \right)^2 = 1 . \quad (2)$$

Hier bedeutet $\sigma_1^0 = F_{s_1} \cdot \sigma_f / h$ die Spannung, die das Fließen der Bewehrung in der ersten Hauptrichtung verursacht, während $\sigma_2^0 = F_{s_2} \cdot \sigma_f / h$ die Spannung bedeutet, die die Ursache des Fließens der Bewehrung in der zweiten Hauptrichtung ist.

Wenn σ_1 eine Druck-, σ_2 aber eine Zugspannung ist, dann lautet die Fließbedingung:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1^0} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{3 k^2} + \frac{\sigma_2^2}{3 k^2} = 1 . \quad (3)$$

Falls eine der beiden Hauptspannungen gleich Null ist, übergehen die Fließbedingungen (2) und (3) in die Fließbedingung des einachsigen Spannungszustandes.

2. Die Herstellung statisch zulässiger Spannungsfelder

In der Folge wird der Spannungszustand von Scheiben behandelt, die in von den Unständigkeitslinien des Spannungsfeldes umgrenzte Dreiecke geteilt sind; der Spannungszustand der dreieckigen Scheibenteile ist als homogen angenommen. Die Untersuchung wird graphisch durchgeführt, indem man die Mohrschen Kreise der Spannungszustände der einzelnen Dreiecke konstruiert, so daß die Definition der Unstätigkeitlinien befriedigt ist.

Bekanntlich besteht bei einer in die Ebene des Zeichenblattes fallenden Scheibe zwischen den an den zur Plattenebene senkrechten Flächenelementen

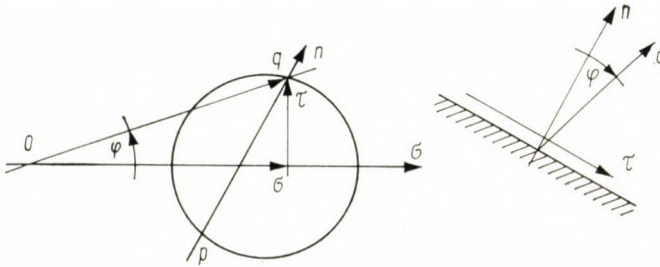


Bild 1

übertragenen σ Normal- und τ Schubspannungen und dem für den Spannungszustand charakteristischen Kreise der in Bild 1 dargestellte Zusammenhang.

Im Mohrschen Kreise ist der Sinn des Neigungswinkels der Spannung q dem des an der physikalischen Ebene von der Normalen gemessenen φ entgegengesetzt. Die Richtungen der Normalen, die zu den durch den untersuchten Punkt durchgehenden Flächenelementen gehören, gehen durch einen an der Peripherie des Kreises gelegenen Pol p . Nach der Deutung der Spannungsvorzeichen bedeutet ein positives σ Zug, ein negatives σ dagegen Druck.

Es sei ein Keil untersucht, dessen Ausdehnung unendlich klein ist und auf dessen Seiten gegebene Spannungen wirken. Es sei eine Unstätigkeitslinie des Spannungsfeldes gegeben, die von der Spitze des Keiles ausgeht, und es seien die Mohrschen Kreise zu bestimmen, die den Spannungszustand der zwei Keilteile charakterisieren.

Die auf die Keilseiten wirkenden Spannungen sind auf der einen Seite σ_1 und τ_1 , auf der anderen σ_2 und τ_2 (Bild 2).

Von einem beliebigen Punkte O ausgehend werden die Vektoren $\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_2$ und σ_1, τ_1 aufgetragen. Der Pol p_2 liegt auf der von dem Endpunkte des Vektors τ_2 zur Normalen n_2 parallel gezogenen (vertikalen) Geraden. Nachdem der Mohrsche Kreis zur σ -Achse symmetrisch ist, liegt der Pol p_2 in dem zur σ -Achse symmetrischen Punkte des Endpunktes des Vektors $\bar{\tau}_2$.

Der Schnittpunkt der von dem Endpunkte des Vektors $\bar{\tau}_1$ zur Normalen n_1 parallel gezogenen Geraden und der durch den Punkt p_2 zur Normalen n_{12} parallel gezogenen Geraden bestimmt den Pol p_1 . Nun kann der durch den Punkt p_1 und den Endpunkt des Vektors $\bar{\tau}_1$ bestimmte Mohrsche Kreis ① und der durch die Punkte p_2 und A bestimmte Mohrsche Kreis ② konstruiert werden.

Um die Lösung des behandelten Problems zu vereinfachen, wurde der obere Rand des Keiles parallel zur σ -Achse der Mohrschen Kreise angenommen. Falls sich der Keil im Verhältnis zur σ -Achse in einer allgemeinen Lage

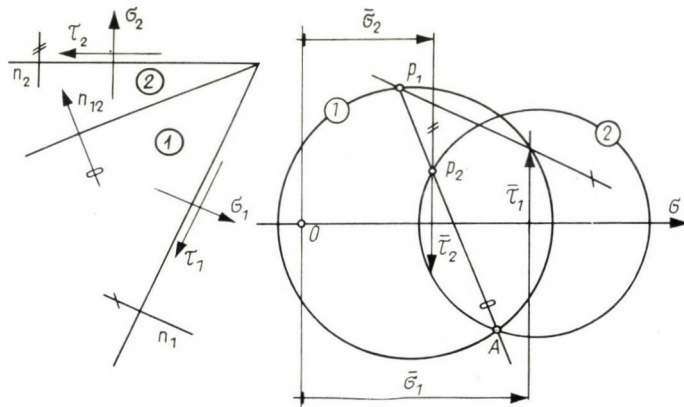


Bild 2

befindet, wird die Konstruktion für einen zur σ -Achse in parallele Lage verdrehten Keil durchgeführt, dessen Mohrsche Kreise denen des in allgemeiner Lage befindlichen Keiles gleich sind. Bloß die Richtungen der Normalen müssen durch die Endpunkte der Spannungsvektoren parallel zu den entsprechenden Normalen des allgemein gelegenen Keiles gezogen werden, deren Richtungen die Lage der Pole bestimmen (Bild 3).

Die behandelten Probleme können auch dann gelöst werden, wenn der vollständige Spannungszustand des Keilteiles ① d. h. der Mohrsche Kreis ① gegeben und die Lage der Unstättigkeitslinie unbekannt ist. In diesem Falle bestimmt die Verbindungsgerade der Pole p_1 und p_2 die Richtung der Normalen n_{12} der Unstättigkeitslinie.

In der Folge wird ein Keil untersucht, der keine Unstättigkeitslinien enthält, auf dessen Seiten die Spannungen q_1 und q_2 wirken, deren Richtung bekannt, ihr Wert aber unbekannt ist. Aus den obigen Angaben kann der mit einem beliebigen Proportionalitätsfaktor multiplizierte Spannungszustand des Keiles bestimmt werden (Bild 4). Die Konstruktion wird wie folgt durchgeführt. Von einem angenommenen Punkt O ausgehend zeichnet man die durch

α , bzw. β gegebenen Vektoren von q_1 und q_2 , deren Endpunkte unbekannt sind. Der Endpunkt von q_1 wird nach Belieben angenommen und durch diesen wird eine mit n_1 parallele Gerade gezogen. Der Endpunkt des Vektors q_2 ist so zu wählen, daß die durch ihn mit n_2 gezogene Parallele die mit n_1 parallele Gerade in einem Pol schneide, so daß p und die Endpunkte von q_1 und q_2 auf ein und

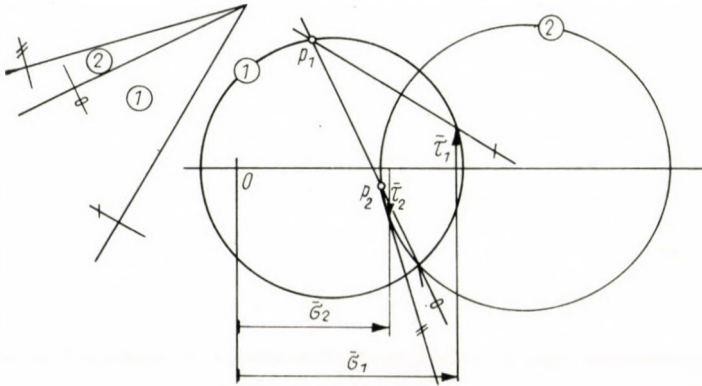


Bild 3

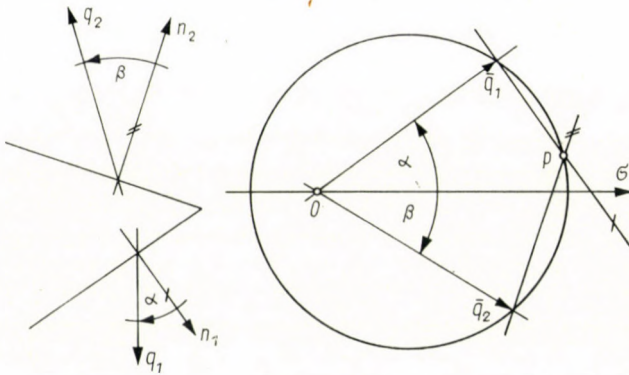


Bild 4

denselben Mohrschen Kreis fallen. Nachdem im Falle eines gegebenen q_1 die Mittelpunkte der Kreise, die die obige Bedingung erfüllen, in einer Geraden liegen, wird der Mittelpunkt des gesuchten Kreises der Schnittpunkt dieser Geraden und der σ -Achse sein. Im Falle des derart bestimmten Verhältnisses der Lasten q_1 und q_2 ist der Spannungszustand des Keiles homogen.

Im weiteren wird die Bestimmung des Spannungszustandes von durch Unstabilitätslinien in Dreiecke geteilten Vielecken unter der Voraussetzung behandelt, daß die Dreiecke im homogenen Spannungszustand sind. Zur Bestimmung des Spannungszustandes der einzelnen Dreiecke werden diese

durch fiktive Stabdreiecke ersetzt, deren Stäbe die Halbierungspunkte der Dreieckseiten miteinander verbinden. Auf diese Weise ist jedes Dreieck durch ein Stabdreieck ersetzbar, in dessen Eckpunkten im Gleichgewicht befindliche, daher sich in einem Punkte schneidende Kräfte wirken.

Wenn bloß die Richtungen der Kräfte und die Größe einer Kraft bekannt ist, können nach den vorherigen Erläuterungen die Kräfte bestimmt werden, die den homogenen Spannungszustand des ursprünglichen Dreieckes hervorrufen. Falls man die obige Feststellung auf das Stabdreieck bezieht, so bedeutet dies, daß falls die Richtungen der in den Eckpunkten des Stabdreieckes wirkenden drei Kräfte und dazu noch die Größe einer Kraft bekannt ist, die drei Stabkräfte bestimmt werden können. Nachdem aus den obigen Lastangaben sowohl der homogene Spannungszustand des durch die Unstabilitätslinien umgrenzten Dreieckes, wie auch die Stabkräfte des Stabdreieckes bestimmbar sind, sind die zwei Gebilde vom statischen Gesichtspunkt aus betrachtet einander gleichwertig.

In dem Spezialfalle, wenn eine Dreieckseite spannungsfrei ist, entstehen in den Stäben, die sich in ihrem Mittelpunkte schneiden, keine Stabkräfte, daher kann das betreffende Dreieck durch einen mit der spannungsfreien Seite parallelen Stab ersetzt werden.

Im Sinne der vorigen Erläuterungen kann der Spannungszustand der Dreiecke eines durch Unstabilitätslinien in Dreiecke geteilten Vieleckes nur dann homogen sein, wenn die Stabkräfte des aus Stabdreiecken zusammengesetzten Fachwerkträgers, der die Dreiecke ersetzt, für die gegebenen Lasten bestimmbar sind. Da es sich nicht um beliebige, sondern um gegebene Lasten handelt, ist es nicht notwendig, daß der Fachwerkträger statisch bestimmt sei.

Die Bestimmung des Spannungszustandes der durch die Unstabilitätslinien in Dreiecke geteilten Scheibe wird mit Hilfe der sich aneinander anknüpfenden Mohrschen Kreise der einzelnen Dreiecke durchgeführt. Der Ersatz-Fachwerkträger wird bloß zur Entscheidung der Lösbarkeit der Probleme verwendet, die sich im Falle einer durch Unstabilitätslinien geteilten Scheibe ergeben.

Es sei ein symmetrisches Trapez gegeben, dessen parallele Seiten durch die Normalspannungen σ_1 und σ_3 belastet, während die nicht parallelen Seiten spannungsfrei sind. Das Trapez ist durch die gegebenen Unstabilitätslinien in vier Dreiecke geteilt. Die Aufgabe bilde die Bestimmung des Spannungszustandes der einzelnen Dreieckteile. Das Problem ist lösbar, da, wie aus Bild 5 ersichtlich ist, die Stabkräfte des Ersatz-Fachwerkträgers im Falle der gegebenen Lasten bestimmt werden können (Bild 5).

Die Mohrschen Kreise werden wie folgt konstruiert. Von einem angenommenen Punkte O aus werden auf die σ -Achse σ_1 und σ_3 aufgetragen, wodurch man die Punkte p_1 und p_3 erhält. Von den Punkten O , p_1 und p_3 zieht man zu den Normalen des Dreieckes 2 parallele Geraden, die einander

im Punkte p_2 schneiden. Die Punkte p_2 und O bestimmen den Mohrschen Kreis ②, die Punkte A und p_3 den Kreis ③ und die Punkte p_1 und B den Kreis ①. Die so erhaltenen Mohrschen Kreise befriedigen die auf die Unstabilitätslinien bezüglichen Bedingungen und die Randbedingungen.

Mit Hilfe der beschriebenen Methode kann der Spannungszustand der Dreieckteile eines durch die Unstabilitätslinien in Dreiecke aufgelösten Viereckes bestimmt werden. Nach den vorherigen Ausführungen ist das derart dargestellte Spannungsfeld *statisch zulässig*, und die dazu gehörige proportionale Last ist eine der unteren Schranken der Bruchlast. Zur Erhöhung der Genauigkeit des Verfahrens ist der Wert dieser unteren Schranke nach Möglich-

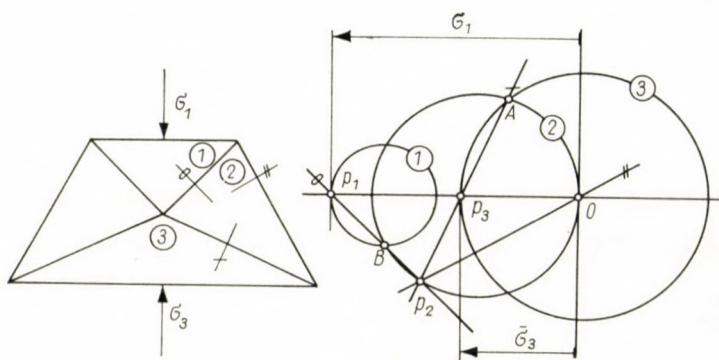


Bild 5

keit so zu bestimmen, daß sie unter den Bruchlasten sämtlicher statisch zulässigen Spannungsfelder die größte sei. Dies kann derart durchgeführt werden, daß man verschiedene Unstabilitätslinien annimmt, die Bruchlasten der durch die letzteren entstandenen Spannungsfelder bestimmt und dann die größte Bruchlast auswählt. Im Falle eines gegebenen Spannungsfeldes erreicht die Bruchlast dann ihr Maximum, wenn wenigstens ein Dreieckteil im Fließzustande ist. Dieser Spannungszustand wird so hergestellt, daß man die Last einer durch Unstabilitätslinien aufgeteilten Scheibe solange erhöht, bis das erste Dreieck, in dem beide Hauptspannungen Druckspannungen sind, in den Fließzustand gerät. Das Bild der zu der oben genannten Belastung gehörigen Mohrschen Kreise erhält man aus dem vorher bestimmten Bilde, indem man dessen sämtliche Abmessungen mit einem Proportionalitätsfaktor

$$C = \frac{\sqrt{3} \cdot k}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{D + \sigma_1 \sigma_2}}$$

multipliziert. Hier bedeutet σ_0 die Spannung, die im Falle reinen Druckes das Fließen verursacht, D den Durchmesser des Mohrschen Kreises des im Fließ-

zustand befindlichen Dreieckes und σ_1 und σ_2 die Hauptspannungen des letzteren. Von mehreren in zwei Richtungen auf Druck beanspruchten Dreiecken fließt zuerst das, zu dem der kleinste Faktor C gehört. Der mit Hilfe des Faktors C hergestellte Spannungszustand kann nur dann entstehen, wenn in den Dreiecken, in denen die eine bzw. beide Hauptspannungen Zugspannungen sind, der Spannungszustand die Fließbedingung (3) bzw. (2) nicht überschreitet. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, sind die betreffenden Dreiecke mit einer entsprechenden Bewehrung zu versehen.

3. Die Darstellung kinematisch zulässiger Geschwindigkeitsfelder

Die Herstellung kinematisch zulässiger Geschwindigkeitsfelder ist einfacher als die der statisch zulässigen Spannungsfelder. Dieses Problem wird gelöst, indem man die Scheibe in einen in Bewegung befindlichen und in einen

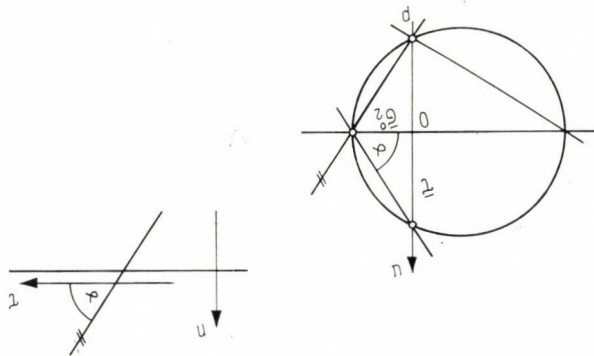


Bild 6

oder mehrere unbewegliche Teile auflöst, wobei die unbeweglichen Teile die Randabschnitte enthalten, entlang deren die Geschwindigkeit gleich Null ist. Die Grenzlinien zwischen den in Bewegung befindlichen und unbeweglichen Teilen sind Gleitlinien; entlang dieser wirken Schubspannungen, die das Fließen verursachen. Nach der in der Stahlbetontheorie gebräuchlichen Annahme wird vorausgesetzt, daß vor der Entwicklung der Scherrisse $\tau = k$ ist, und nach deren Entwicklung wird die gesamte Zugkomponente der Schubkraft von der Bewehrung aufgenommen.

Es sei eine Unstabilitätslinie des Geschwindigkeitsfeldes untersucht. Entlang dieser wirkt die Schubspannung τ (Bild 6), die die Richtung der Zugbewehrung unter dem Winkel α schneidet. Im Anfange der Bewegung, falls bloß die Schubfestigkeit des Betons berücksichtigt wird, ist $\tau = k$,

während nach der Entwicklung der Risse τ den Wert

$$\tau = \sigma_1^0 \tan \alpha = \frac{F_{s1} \sigma_f}{h} \tan \alpha$$

annimmt. Von den zwei Werten von τ ist der größere maßgebend.

Die Bewegung kann zustandekommen, wenn die Resultante der auf die in Bewegung befindlichen Teile wirkenden Lasten wenigstens um einen unendlich kleinen Wert größer ist als die in die Richtung der Resultante fallende Komponente der Schubspannungen, die entlang der Gleitfläche wirken. Die Last, die die obige Forderung befriedigt, gehört zu einem kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeld.

4. Anwendungen

In der Folge sei die behandelte Methode zur Lösung einiger Scheibenprobleme angewendet. Die statisch zulässigen Spannungsfelder werden unter Anwendung der in den vorigen Absätzen behandelten folgenden Regeln bestimmt.

Nach Annahme der Unstetigkeitslinien des Spannungsfeldes und des fiktiven Ersatz-Fachwerkträgers wird die Lösbarkeit des Problems geprüft. Sollte es sich als unlösbar erweisen, so ist die Annahme der Unstetigkeitslinien derart zu ändern, daß es lösbar werde. Nachher werden die Mohrschen Kreise unter der Bedingung konstruiert, daß die Geraden, die die Pole der zu den benachbarten Dreiecken gehörigen Mohrschen Kreise verbinden und auf der Unstetigkeitslinien senkrecht stehen, durch die Schnittpunkte dieser Kreise gehen, ferner, daß die Mohrschen Kreise die gegebenen Spannungen der Randseiten bestimmen.

Bei den behandelten Problemen wurde die statisch zulässige Last so bestimmt, daß das angenommene Spannungsfeld mit einem solchen Proportionalitätsfaktor C multipliziert wurde, daß ein auf Druck beanspruchtes Dreieck in den Fließzustand gelange, während der Spannungszustand der übrigen Dreiecke unter dem Fließzustand bleibe. Stillschweigend wurde vorausgesetzt, daß die Bewehrung der Dreiecke, die Zugspannungen enthalten, hinreichend ist, um dort das Fließen vor dem des auf Druck beanspruchten Dreieckes zu verhindern.

4.1. Durch eine ständige Last q belastete Stützmauer (Bild 7)

Die Scheibe wird in die Dreiecke ① und ② geteilt. Die Stabkräfte des fiktiven Ersatz-Fachwerkträgers sind für die gegebene Belastung eindeutig bestimmbar. Nach Annahme des Mohrschen Kreises ② zeichnet man zuerst die von dem Punkte O und nachher die von dem Punkte p_2 ausgehende Normale. Schließlich wird der durch den Punkt p_1 und den Schnittpunkt der Normalen $\overline{p_1 p_2}$ mit dem Kreise ② bestimmte Mohrsche Kreis ① gezeichnet. Das

Dreieck ② gelangt bei der Last q in den Fließzustand, die an dem mit dem Proportionalitätsfaktor $C_2 = \sigma_0/54$ multiplizierten Bilde der Mohrschen Kreise abgelesen werden kann. Demnach ist im Falle der angedeuteten Unstätigkeitslinie die maximale statisch zulässige Last

$$q = \frac{\sigma_0}{54} \cdot 10 = 0,185 \sigma_0.$$

Das kinematisch zulässige Geschwindigkeitsfeld sei die an der Stelle der Einspannung abgescherte, in Bewegung befindliche Scheibe. Da an der Einspannungsstelle die Schubkraft $k = \sigma_0/\sqrt{3}$ wirkt, ist die minimale Last die die Bewegung verursacht:

$$6,60 q = 5,40 \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}; \quad q = 0,473 \sigma_0.$$

Daher sind die zwei Schranken der Bruchlast:

$$0,185 \sigma_0 < q < 0,473 \sigma_0.$$

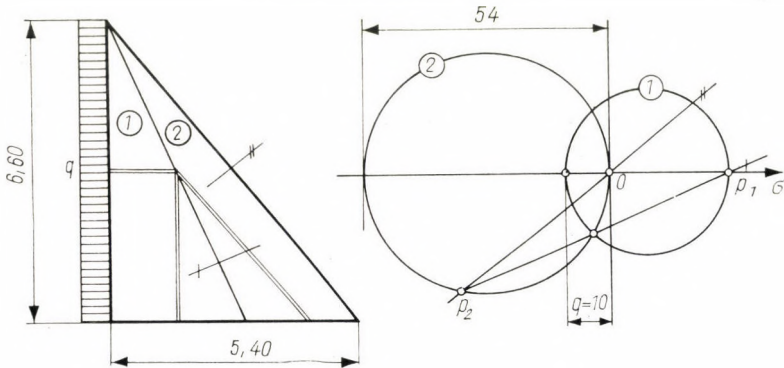


Bild 7

4.2. Am oberen Rande durch eine ständige Last q belasteter Wandträger auf zwei Stützen (Bild 8)

Die Scheibe wird symmetrisch zur Halbierungsvertikalen der Öffnung in sechs Dreiecke aufgeteilt. Da die Last ebenfalls symmetrisch ist, wird bloß die eine Hälfte der Scheibe untersucht. Die einzelnen Mohrschen Kreise werden in der Reihenfolge der Numerierung der Dreiecke nach den beschriebenen Regeln aufgezeichnet. Das Dreieck ① gelangt bei der Last q in den Fließzustand, die an dem mit dem Proportionalitätsfaktor $C_1 = \sigma_0/77$ multiplizierten Bilde der Mohrschen Kreise abgelesen werden kann. Daher ist die maximale statisch zulässige Last

$$q = \frac{\sigma_0}{77} \cdot 36 = 0,477 \sigma_0.$$

Bei der Annahme des kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldes wird vorausgesetzt, daß sich der zwischen den zu den inneren Stützenrändern gehörigen Vertikalen liegende Scheibenteil entlang der genannten Vertikalen abgeschert in Bewegung befindet. Die minimale Last, die die Bewegung verursacht, ergibt sich mit Rücksicht auf den Umstand, daß entlang der Unstätigkeitslinien die Schubkraft $k = \sigma_0 \cdot \sqrt{3}$ wirkt, aus der Gleichung:

$$\frac{3,50}{2} \cdot q = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot 5,00; \quad q = 1,65 \sigma_0.$$

Daher sind die zwei Schranken der Bruchlast:

$$0,477 \sigma_0 < q < 1,65 \sigma_0.$$

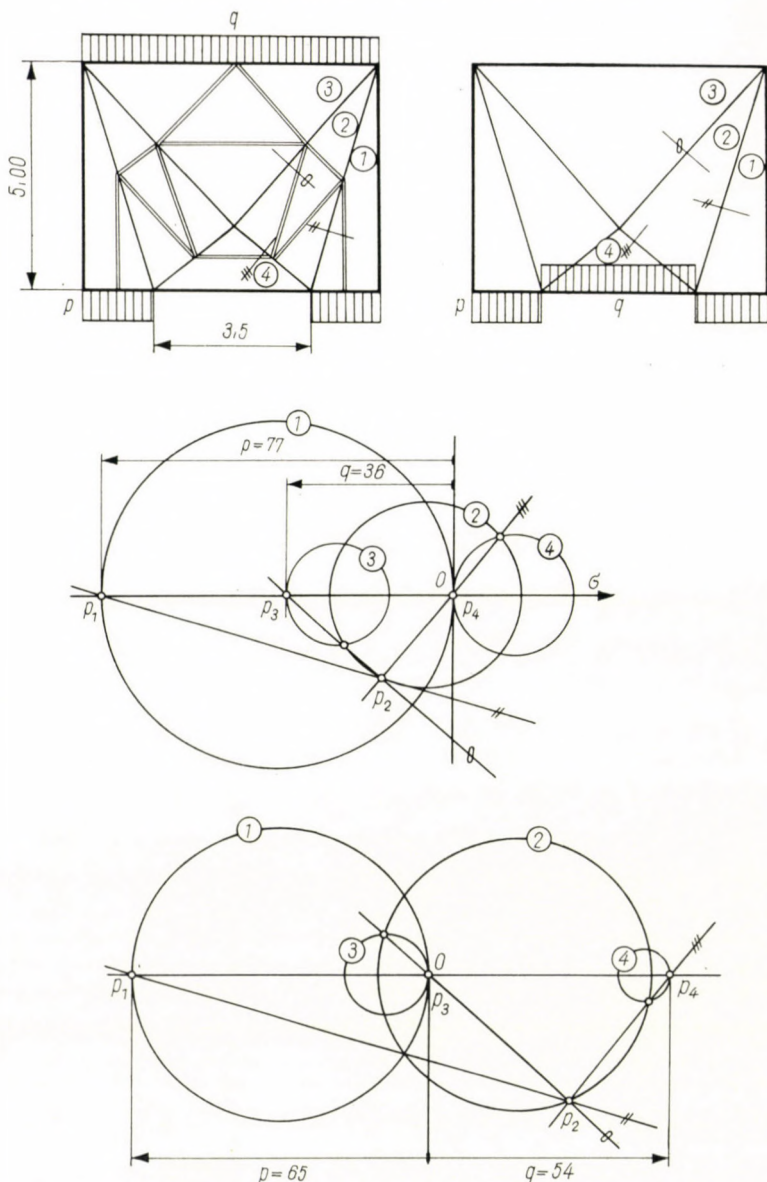


Bild 8-9

4.3. Am unteren Rande durch eine ständige Last q belasteter Wandträger auf zwei Stützen (Bild 9)

Die Annahme der Unstätigkeitslinien der Spannungsfelder und das Konstruieren des Bildes der Mohrschen Kreise wird ähnlicherweise durchgeführt wie beim vorigen Beispiele. Die maximale statisch zulässige Last ist

$$q = \frac{\sigma_0}{65} \cdot 54 = 0,83 \sigma_0.$$

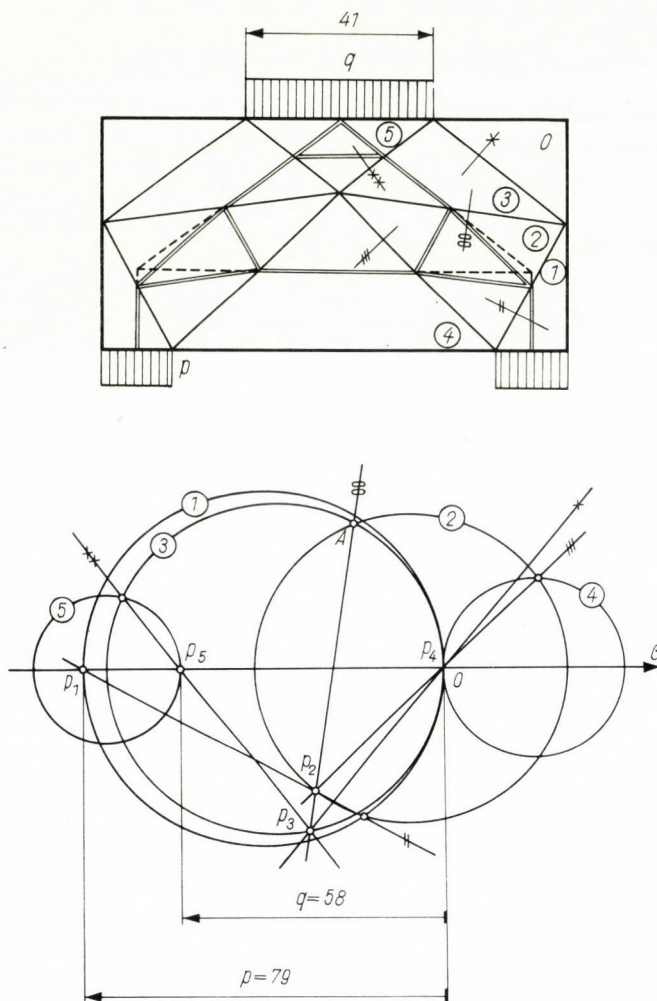


Bild 10

Die kinematisch zulässige Last ist der im vorigen Beispiele berechneten gleich, daher sind die zwei Schranken der Bruchlast:

$$0,83 \sigma_0 < q < 1,65 \sigma_0 .$$

4.4. Am oberen Rande entlang des mittleren Abschnittes durch eine ständige Last q belasteter Wandträger auf zwei Stützen (Bild 10)

Die Unstätigkeitslinien des Spannungsfeldes sind so anzunehmen, daß sich die Resultante der auf die Seiten des Dreieckes ② wirkenden Kräfte in einem Punkte schneide, d. h. daß die Stabkräfte des Stabdreieckes ② des fiktiven Ersatz-Fachwerkträgers im Gleichgewichte seien. Die in den oberen Ecken befindlichen Dreiecke sind spannungsfrei. Das Aufzeichnen der Mohrschen Kreise erfolgt in der Reihenfolge der Numerierung der Dreiecke. Zur Kontrolle dient die Tatsache, daß der Mohrsche Kreis ③ durch die Punkte O , p_3 und A geht. Das Dreieck ① gelangt bei der Belastung q in den Fließzustand, die an dem mit dem

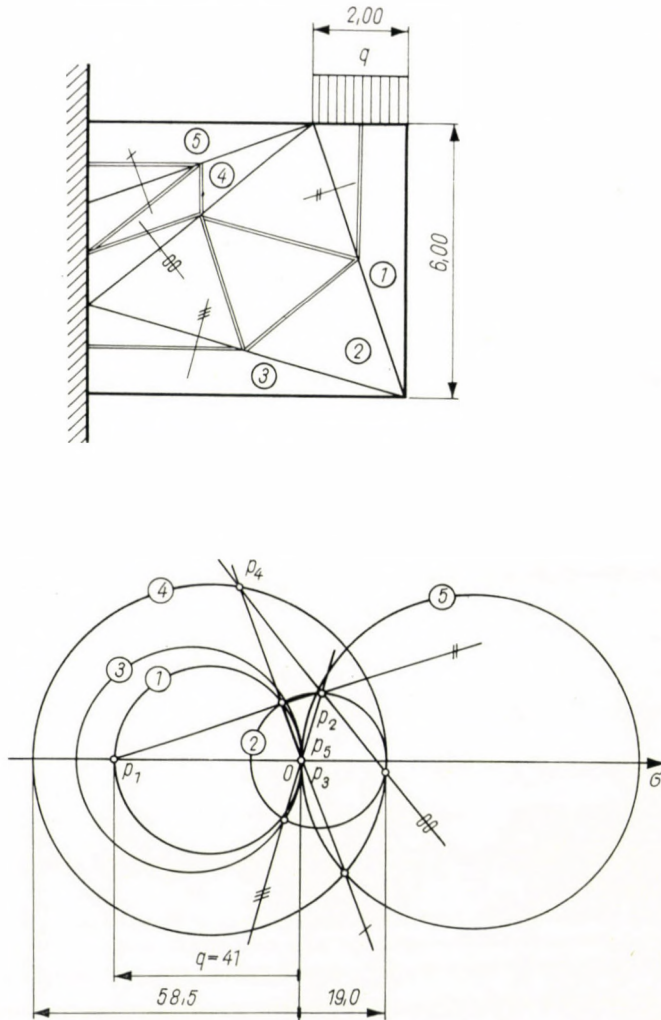


Bild 11

Proportionalitätsfaktor $C_1 = \sigma_0/79$ multiplizierten Bilde der Mohrschen Kreise abgelesen werden kann. Daher ist die maximale statisch zulässige Last:

$$q = \frac{\sigma_0}{79} \cdot 58 = 0,735 \sigma_0.$$

Bei der Annahme des kinematisch zulässigen Geschwindigkeitsfeldes wird ebenso vorgegangen wie beim vorigen Beispiele. Demnach ergibt sich aus dem Zusammenhang $2,05 \cdot q = (\sigma_0/\sqrt{3}) \cdot 5,0$ für die kinematisch zulässige Last der Wert $q = 1,41 \sigma_0$. Daher betragen die zwei Schranken der Bruchlast:

$$0,735 \sigma_0 < q < 1,41 \sigma_0.$$

4.5. *Am oberen Rande entlang des Endabschnittes durch eine ständige Last q belasteter Wand-Kragträger (Bild 11)*

Die Unstabilitätslinien der Spannungsfelder werden nach Belieben angenommen. Die Stabkräfte des in das Dreiecknetz eingezeichneten fiktiven Ersatz-Fachwerkträgers sind für die gegebene Last eindeutig bestimmbar, daher kann das Problem gelöst werden. Die Mohrschen Kreise der einzelnen Dreiecke werden in der Reihenfolge ihrer Numerierung aufgezeichnet. Das Dreieck ③ gelangt bei der Last in den Fließzustand, die an dem mit dem Proportionalitätsfaktor $C_3 = \sigma_0/84,5$ multiplizierten Bilde der Mohrschen Kreise abgelesen werden kann. Demnach beträgt die maximale statisch zulässige Last:

$$q = \frac{\sigma_0}{84,5} \cdot 41 = 0,490 \sigma_0.$$

Das kinematisch zulässige Geschwindigkeitsfeld sei die an der Einspannungsstelle durch die Schubspannung $k = \sigma_0/\sqrt{3}$ belastete, dort abgesicherte und in Bewegung befindliche Scheibe. Der Minimalwert der Last, die die Bewegung verursacht, beträgt:

$$2,0 \cdot q = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot 6,0; \quad q = 1,73 \sigma_0.$$

Demnach sind die zwei Schranken der Bruchlast:

$$0,49 \sigma_0 < q < 1,73 \sigma_0.$$

4.6. *Entlang des Endquerschnittes durch eine spezifische Schubkraft belasteter Krag-Wandträger (Bild 12)*

Nach beliebiger Annahme der Unstabilitätslinien des Spannungsfeldes wird der Mohrsche Kreis ② so angenommen, daß der Schnittpunkt der von dem Pole p_2 gezogenen Horizontalen und der von dem Punkte O gezogenen Vertikalen auf den Kreisbogen falle, und daß die Richtung der Geraden $\overline{p_2O}$ mit der Normalen n_2 parallel sei. Nachher werden die Mohrschen Kreise ①, ③ und ④ gezeichnet. Wenn das Bild der Mohrschen Kreise mit dem Proportionalitätsfaktor $C_4 = \sigma_0/90$ multipliziert wird, gelangt das Dreieck ④ in den Fließzustand. Die aus diesem Bilde bestimmbare maximale Schubspannung τ beträgt:

$$\tau = \frac{\sigma_0}{90} \cdot 14 = 0,156 \sigma_0.$$

Die Unstabilitätslinie des Geschwindigkeitsfeldes wird wieder an der Einspannungsstelle angenommen. Die minimale Spannung τ , die die Bewegung verursacht, beträgt

$$\tau = k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 0,578 \sigma_0.$$

Daher sind die zwei Schranken der Bruchlast:

$$0,156 \sigma_0 < \tau < 0,578 \sigma_0.$$

4.7. *Am oberen Rande durch eine ständige Last q belasteter durchlaufender Wandträger mit unendlich vielen gleichen Öffnungen (Bild 13)*

Die Unstabilitätslinien des Spannungsfeldes sind so anzunehmen, daß sie eine Serie gleichartig aufgeteilter, symmetrischer Trapeze bilden. Aus der Untersuchung des fiktiven Ersatz-Fachwerkträgers geht hervor, daß dessen Stabkräfte nicht eindeutig bestimmt sind, das Gleichgewicht jedoch möglich ist. Der Mohrsche Kreis ① wird nach Belieben angenommen und dann werden die Mohrschen Kreise ② und ③ gezeichnet. Der Mohrsche Kreis ③ schneidet die σ -Achse im Punkte O . Nachher konstruiert man die Mohrschen Kreise ④, ⑤, ⑥. Zur Kontrolle dient der Umstand, daß der Mohrsche Kreis ⑤ durch den Pol p_5 und durch die Schnittpunkte der durch diesen mit den Richtungen n_{25} bzw. n_{45} parallel gezogenen Geraden mit den Mohrschen Kreisen ② bzw. ④ geht. Die Kraft, die im Falle des Fließens des

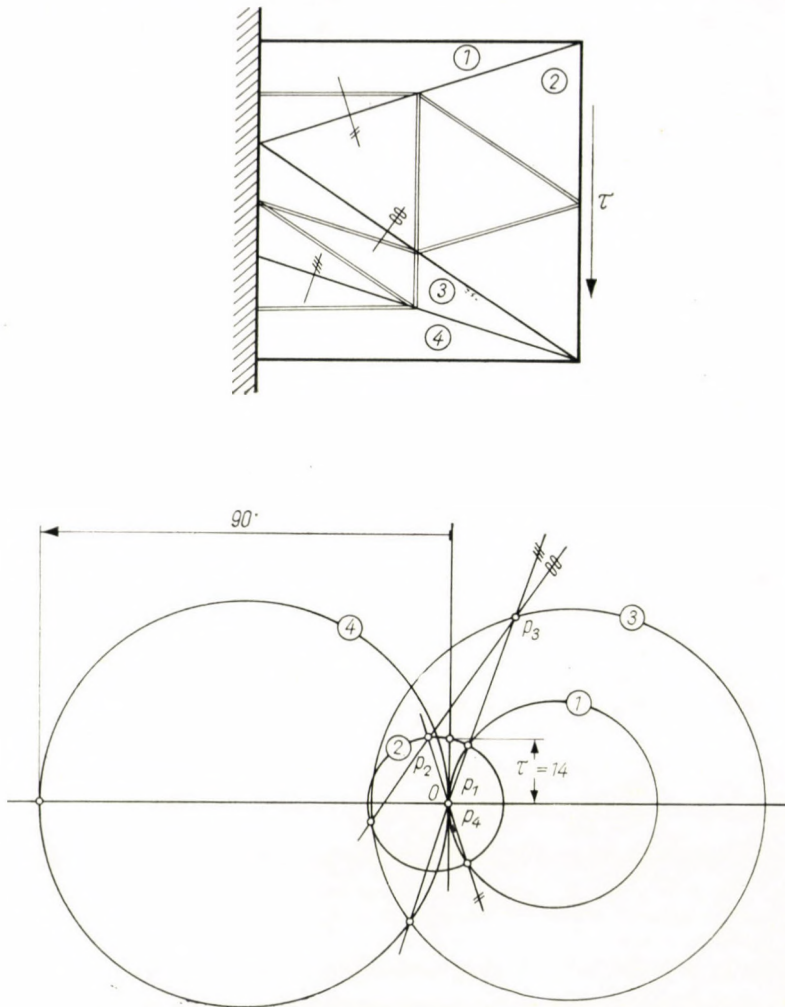


Bild 12

Mohrschen Kreises ③ auftritt, ergibt sich auf Grund des mit dem Proportionalitätsfaktor $C_3 = \sigma_0/71$ multiplizierten Bildes der Mohrschen Kreise:

$$q = \frac{\sigma_0}{76} \cdot 24 = 0,316 \sigma_0.$$

Die Unstabilitätslinien des Geschwindigkeitsfeldes sind wieder entlang der inneren Vertikalen der Stützen anzunehmen. Auf Grund dieser ist die kleinste Last, die die Bewegung verursacht:

$$3,25 \cdot q = 4,50 \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}; \quad q = 0,80 \sigma_0.$$

Daher ergeben sich für die zwei Schranken der Bruchlast die Werte:

$$0,316 \sigma_0 < q < 0,80 \sigma_0.$$

PLASTIC DESIGN OF DISKS

K. SZMODITS

SUMMARY

The paper deals with the determination of the statically permissible stress state of disks. The stress state is composed of homogeneous stress states of the plate parts which are in homogeneous stress state and are bordered by lines of discontinuity of the stress field. Taking the boundary conditions of equilibrium into consideration, the stress state in question is created in such a way, that starting from the plate parts along the boundary, the stress state is continued through the lines of discontinuity using the Mohr circle for this purpose.

The load belonging to the so created stress state is one of the lower limits of the collapse load. The paper contains numerous examples for the determination of the lower and upper limit of the collapse load.

DIMENSIONNEMENT PLASTIQUE DES TYMPANS

K. SZMODITS

RÉSUMÉ

L'étude traite de la détermination de l'état de contraintes statiquement admissible des tympans. L'état de contraintes se compose des états de contrainte homogènes des parties de plaque en état de contrainte homogène, limitées par des lignes de discontinuité. La production de l'état de contraintes s'effectue en tenant compte des conditions d'équilibre au porteur, en partant des parties de plaque situées le long des rives, par développement de l'état de contraintes à travers les lignes de discontinuité au moyen du cercle de Mohr.

La charge correspondant à l'état de contraintes ainsi produit est une limite inférieure de la charge de rupture. L'étude présente de nombreux exemples pour la détermination de la limite inférieure et supérieure de la charge de rupture.

ПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАГРУЖЕННЫХ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ ПЛАСТИН

К. СМОДИЧ

РЕЗЮМЕ

Исследование занимается определением статически допустимого напряженного состояния пластин. Полученное напряженное состояние состоит из частей пластины, ограниченных линиями разрыва напряжения и находящихся в однородном напряженном состоянии. Напряженное состояние получено, исходя из краевых частей пластины, приняв во внимание краевые условия равновесия, путем дальнейшего развития напряженного состояния, через принятые линии разрыва напряжения с помощью круга Мора.

Нагрузкой, соответствующей полученному напряженному состоянию, является некоторый нижний предел разрушающей нагрузки. Сообщается большое число примеров определения нижних и верхних пределов разрушающей нагрузки.

DAS RHEOLOGISCHE VERHALTEN WÄSSRIGER BENTONITDISPERSIONEN, II*

J. BARNA und B. MARSCHALKÓ

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR BERGBAU, BUDAPEST

[Eingegangen am 26. September 1962]

Es soll in dieser Arbeit die — von jedem fremden Einfluß befreite — thixotrope Erstarrung als Funktion des Schergeschwindigkeitsgefälles (»Stoffsteifigkeit«) und der Zeit (»Stocken«) erörtert werden. Eine geeignete Einrichtung ermöglichte, den Wert der Fließfestigkeit im ganzen Bereiche der Fließkurve, abgesehen von der zur Überwindung der inneren Reibung (scheinbaren Viskosität) benötigten Scherspannung, als Funktion der Schergeschwindigkeit zu bestimmen. Weitere Einflüsse, die neben der Schergeschwindigkeit die Erstarrung beeinflussen, sind Konzentration, Temperatur und Elektrolytgehalt der Dispersion. Diese Einflüsse wurden teils durch Konstanthalten der Parameterwerte, teils durch wirkungsvolle Dialyse des Elektrolytgehaltes außer Rechnung gebracht. Es zeigte sich nun, daß unter solchen Umständen die Fließfestigkeit von der Schergeschwindigkeit in viel höherem Maße abhängig ist, als dies bisher bekannt war bzw. angenommen wurde.

I. Einleitung

In mehreren Mitteilungen haben wir über die rheologische Untersuchung von Bentonit-Dispersionen berichtet [1—3]. Wir gaben Meßergebnisse von Montmorillonit-Dispersionen bekannt, die aus Rohbentoniten verschiedener Fundorte angereichert wurden, im allgemeinen aber undialysiert und an Na-Ionen gesättigt waren.

Diese klärten jedoch das Verhalten einer der eigenartigsten Eigenschaften dieser Dispersionen: die thixotrope Erstarrung nicht genügend. Der Grund hiefür war, daß wir die Werte der einzelnen Einflüsse voneinander nicht abgesehen, sondern nur ihr Endresultat messen und auch die Schergeschwindigkeit nicht bis zum vollkommenen Abbau des Gerüsts erhöhen konnten.

Unser Hauptbestreben richtete sich nun folglich auf die Messung des Wertes der Fließfestigkeit als Funktion des Schergeschwindigkeitsgefälles (»Stoffsteifigkeit«) [10] — im ganzen Bereiche der Fließkurve — jedoch ohne alle ungewünschten Nebeneinflüsse.

Nun wird aber die Fließfestigkeit und so auch der Grenzspannungswert der thixotropen Erstarrung — wie allgemein bekannt — außer von der

* Vorgetragen auf der Sitzung der Tonmineralabteilung der Ungarischen Geologischen Gesellschaft am 10. April 1961, und auf der Sitzung der Rheologischen Arbeitskommission des Ungarischen Chemiker-Vereins am 12. Mai 1961. Vorherige Mitteilung: *Acta Techn. Hung.* 15 (1956), 77.

Schergeschwindigkeit auch anderseits stark beeinflußt. Die bedeutendsten dieser Einflüsse sind: Konzentration [13], Temperatur und Elektrolytgehalt [11, 17] sowie die Zeitdauer ihrer Einwirkung [10].

Der Einfluß von Temperatur und Konzentration — als unabhängige Veränderliche — wurde außer Rechnung gestellt, da wir sie auf konstantem Wert hielten. Durch wirkungsvolle Dialyse der Dispersion konnte auch der Einfluß des Elektrolytgehaltes auf einen vernachlässigbaren Wert gebracht werden.

Unter gleichen Bedingungen wurde dann auch die Zeitfunktion der thixotropen Erstarrung (»Stocken«) gemessen.

Die Vorbedingungen zur Durchführung derartiger Untersuchungen waren:

a) Eine Einrichtung, die es ermöglichte, die zu prüfenden Dispersionen 8 Größenordnungen hindurch mit fortlaufend (nicht sprunghaft) veränderlichen Schergeschwindigkeiten zu beanspruchen und die auftretenden Scherkräfte (durch ca. 6 Größenordnungen) zu messen, ohne den Meßapparat während der ganzen Messung zu berühren. Weitere Forderungen waren: das Konstanthalten der Temperatur während der ganzen Messung und die Möglichkeit, neben der gesamten Schubspannung auch die Fließfestigkeit bei beliebigen Schergeschwindigkeitswerten »weglos« messen zu können.

Unsere Anforderungen wurden vom Rotations-Rheoviskosimeter nach B. MARSCHALKÓ [4, 5] restlos erfüllt.

b) Eine schnelle und zuverlässige Methode zur Berechnung der wahren Fließkurven aus den experimentell meßbaren Größen.

Aus den Meßergebnissen wurden die Fließkurven nach SCHULTZ—GRUNOW [6, 7] bestimmt.

II. Die Messungen

1. Untersuchungsmaterial

Die Untersuchungen erstreckten sich auf Dispersionen von Bentoniten der verschiedensten Fundorte des In- und Auslandes.

Einige der bemerkenswerteren wollen wir hier wie folgt näher behandeln:

- a) Bentonit Mád-Koldu (Ungarn);
6%ige Dispersion, 5% Natriumkarbonatgehalt.
- b) Montmorillonit, angereichert, aus Mád-Koldu (Ungarn);
dialysiert, $-0,5 \mu$ Korngröße.
- c) Montmorillonit, angereichert, aus Natriumbentonit Mád (Ungarn);
dialysiert, $-0,5 \mu$ Korngröße.
- d) Wyoming-Bentonit (USA), Kommerzware;
6%ige 4 Jahre alte Dispersion.

- e) Montmorillonit angereichert, aus Wyoming-Bentonit (USA); dialysiert, $-0,5 \mu$ Korngröße.
- f) »Bentonit« (Frankreich), Kommerzware; 6%ige Dispersion.

2. Bestimmung der Fließkurve

Die Vorbereitung der Dispersion, ihr Einfüllen ins Gerät, und die Messung wurde im allgemeinen in derselben Weise vollzogen, wie wir darüber in einer unserer vorigen Mitteilungen [2] schon ausführlich berichteten. Nachdem das Prüfmateriale zur Messung vorbereitet und im Ultrathermostat die ständige Temperatur von 25°C eingestellt war, wurde die Meßserie im Viskosimeter, anfänglich mit $0,001 f(\tau)$ [sec^{-1}] Schergeschwindigkeit begonnen. Messung mit niedrigerer Geschwindigkeit war nicht nötig, da — wie dies in den oben erwähnten Mitteilungen schon angedeutet ist — niedrigere Schergeschwindigkeit weder die Schubspannung, noch die Fließfestigkeit bedeutend ändert. Bei oben erwähnter konstant gehaltener Schergeschwindigkeit bestimmten wir nun in gleichen Zeitabständen (jede Minute) den Wert der dazugehörigen Scherspannung. Bei Beginn steigt sie schnell, bis ein oberer Grenzwert erreicht wird, danach vermindert sie sich anfänglich ziemlich schnell, später immer langsamer und nähert sich asymptotisch ihrem Endwert, der aber selbstverständlich nicht erreicht werden kann. Der genaue wahre Wert kann natürlich nur mit Berücksichtigung der Spaltbreite des Apparates, Relaxation usw. aus den Messwerten berechnet werden. Da aber das Hauptziel unserer Messungen nicht die Bestimmung der Fließkurve selbst, sondern vielmehr nur das Verhalten der Fließfestigkeit (»Stoffsteifigkeit«) [10] und der thixotropen Erstarrung im vollen Bereiche der Fließkurve war, betrachteten wir, zwar willkürlich, jedoch konsequent und ohne wesentlichen Fehler jenen Wert der sich langsam vermindern den Scherspannung als Endwert, der sich in unserem Viskosimeter binnen 10 Minuten nicht mehr merkbar änderte. Nachher wurde die Schergeschwindigkeit fortlaufend erhöht, bis die Geschwindigkeit des nächstgewählten Meßpunktes erreicht wurde. Im Besitze der Werte von etwa 20 solchen Meßpunkten, berechneten wir die zu den einzelnen Scherspannungswerten (τ_b) gehörenden Schergeschwindigkeiten, aus denen dann der steigende Zweig der Fließkurve gebildet wurde.

Jede gemessene Schubspannung ist jedoch die Summe zweier Werte: der Fließfestigkeit und der zur Überwindung des Reibungswiderstandes (der Scheinviskosität) benötigten Schubspannung [8].

Wir bestimmten immer beide Komponenten: die Fließfestigkeit und den Reibungswiderstand. Bei konstant gehaltener Schergeschwindigkeit wurde dann erstens der Grenzwert der Schubspannung auf die schon beschriebene Weise gemessen. Nun war so die Summe beider Komponenten bekannt.

Danach wird der Viskosimeter plötzlich zum Stehen gebracht und unmittelbar nachher der verbleibende Wert der Schubkraft »weglos« gemessen. Der so erhaltene Wert ist — angenähert — die zur letztgemessenen Schergeschwindigkeit gehörende Fließfestigkeit.

Die Differenz der beiden Werte ergibt nun den, der jeweiligen Schergeschwindigkeit entsprechenden, Reibungswiderstand (Scheinviskosität). Um womöglich den ganzen Bereich der Fließkurve derartig zu bestimmen, wurden auf beschriebene Weise etwa 20—30 Koordinatenpunkte gemessen und berechnet. Die Schergeschwindigkeit wurde nach Belieben soweit erhöht, bis der gewünschte Abbau erreicht, oder zumindest nach Möglichkeit angenähert wurde. Zwei Umstände verhinderten oft das Erreichen des vollkommenen Abbaues der Struktur: die mit dem hohen Schergeschwindigkeitsbedarf zugleich auftretende Turbulenz, die gegebenenfalls durch spezielle Prüfung und Berechnung eliminiert werden muß, hauptsächlich aber die Beobachtung — wir werden darauf später noch näher eingehen — daß infolge Einwirkung steigender Schergeschwindigkeit die Fließfestigkeit des sich im Abbau befindenden Gerüsts anfangs einen ständig abnehmenden Wert annimmt, jedoch nach Erreichen eines unteren Grenzwertes — bei weiterer Steigerung der Schergeschwindigkeit — von neuem stark steigt.

Dasselbe Verfahren wurde auch in umgekehrter Richtung, d. h. bei kontinuierlich sinkenden Schergeschwindigkeiten angewandt (»Erstarrungssteifigkeit«) [10].

Aus den in der vorher beschriebenen Weise experimentell gemessenen Werten, d. h. aus der Winkelgeschwindigkeit und aus den am inneren Zylinder des Viskosimeters gemessenen Scherkraftswerten wurden die Fließfestigkeit, die Scherspannung des Reibungswiderstandes in bekannter Weise sowie das in unmittelbarer Nähe des Meß-Zylinders herrschende, — doch unmittelbar nicht meßbare Schergeschwindigkeitsgefälles $f(\tau)$ [sec^{-1}] nach SCHULTZ—GRUNOW [6] berechnet.

3. Meßergebnisse

Auf Grund der früher schon veröffentlichten Untersuchungen über Dispersionen aus verschiedenen natürlichen Bentoniten und nicht dialysiert angereicherten Montmorilloniten waren wir überzeugt, daß zur Bestimmung der Fließfestigkeit bei unseren jetzigen Untersuchungen ebenfalls nur niedrige Schergeschwindigkeiten, etwa niedriger als $100\text{—}500 \text{ sec}^{-1}$, erforderlich sein werden. Nach unseren früheren Erfahrungen wird nämlich das Gerüst bei ganz niedrigen Schergeschwindigkeiten schon vollkommen abgebaut, und infolgedessen nimmt die Fließgrenze bald einen von der Schergeschwindigkeit schon unabhängigen, konstanten Wert an, d. h., die Dispersion kann von da an als Bingham-Körper betrachtet, die Fließgrenze also auch rechnerisch bestimmt werden.

Unsere jetzigen Messungen haben es aber erwiesen, daß im Gegensatz zu den allgemein bekannten und in der Literatur mitgeteilten Angaben, dies nur bei verhältnismässig niederen Schergeschwindigkeiten und bei elektrolyt-reicheren Dispersionen der Fall ist, bei weiterer Scherung aber die Sache nicht so einfach steht. Die Dispersion darf im allgemeinen nicht als Bingham-Körper betrachtet werden, da das Gerüst und die mit seiner Festigkeit proportionelle Grenzspannung bei weiterer Steigerung der Schergeschwindigkeit allmählich noch weiter abgebaut wird und wenn dann endlich der untere Grenzwert erreicht wird, bleibt dieser noch immer nicht konstant; im Gegenteil bei weiterer Steigerung der Schergeschwindigkeit steigt die Fließfestigkeit von neuem so arg an, daß der ursprüngliche Wert oft um das Mehrfache überschritten wird. Wegen dieser ganz neuen Beobachtungen wurde also auch das Messen der Fließfestigkeit im ganzen Bereiche der Fließkurve notwendig [10, 11].

Ähnlich ist das Verhalten des flüssigen »viskosen« Anteils. Während bei Messungen elektrolytreicher Dispersionen die den höheren Reibungswiderstand verursachenden Gruppen (Kristallkomplexe) schon bei verhältnismässig niedriger (etwa 500 sec^{-1}) Schergeschwindigkeit abgebaut wurden (ihre Hydrathülle verlieren), die Viskosität also bald einen von der Schergeschwindigkeit schon unabhängigen niedrigsten Wert (η_{∞}) erreichte, endet bei anderen, hauptsächlich elektrolytarmen Dispersionen der vollkommene Abbau nur bei bedeutend höheren Schergeschwindigkeiten. Wir waren nun gezwungen, die Schergeschwindigkeit im allgemeinen meistens über einen Wert von $80-100\,000 f(\tau) [\text{sec}^{-1}]$ zu erhöhen, und sogar dann erreichten wir den vollkommenen Abbau (den Wert η_{∞}) nicht immer.

Die bei sinkenden Schergeschwindigkeiten gemessenen Werte der thixotropen Regeneration der Struktur zeigten ähnlichen Verlauf, jedoch im entgegengesetzten Sinne.

In erster Linie lenkten wir aber unsere Aufmerksamkeit auf die Gestaltung der Fließfestigkeit und deren thixotropen Wiederaufbau (»Erstarrungssteifigkeit«), da bei der praktischen Verwendung der Bentonite dieser Umstand die bedeutendste Rolle spielt.

Nun ist aber der Wert der Fließfestigkeit bekanntlich nicht nur eine Funktion der Schergeschwindigkeit, sondern in Hinsicht auf die thixotrope Erstarrung in erster Linie auch die der Zeit und auch anderer schon erwähnter Einflüsse. Sie ist also eine Funktion mehrerer, mindestens aber zwei Veränderlichen. Zu einer richtigen, eindeutigen Darstellung werden nun mindestens drei Dimensionen benötigt [10]. Es ist aber die Möglichkeit vorhanden, die einzelnen Einflüsse während den Messungen so zu gestalten, daß zwischen ihnen Unterschiede von mehreren Größenordnungen bestehen. Dementsprechend wurden die Prüfungen und Messungen so geleitet, daß die Aufmerksamkeit womöglich immer nur auf eine Veränderliche gerichtet werden konnte,

und die anderen Einflüsse entweder konstant gehalten oder so weit vermindert wurden, daß sie vernachlässigt werden konnten.

An dieses Prinzip hielten wir uns bei allen unseren Messungen, die wir im folgenden bekanntgeben.

Die in den Tafeln II—V und in den Bildern 2—5 dargestellten Fließkurven zeigen zum Vergleich nebeneinander, den Verlauf des Reibungswiderstandes und gleichzeitig auch den der Fließfestigkeit als Funktion des Schergeschwindigkeitsgefälles an. Die Bezeichnungen der einzelnen Kurven sind in jedem Bilde folgende:

Kurve I. Schubspannung des Reibungswiderstandes, Dyn/cm²;

Kurve II. Fließfestigkeit (Schwellenwert der Schubspannung beim Geschwindigkeitsgefälle = 0), Dyn/cm², als Funktion der Schergeschwindigkeit.

4. Die thixotrope Erstarrung (»Stocken«) der Bentonitdispersionen mit abgebautem Gerüste als Funktion der Zeit

Die Fließfestigkeiten der thixotropen Erstarrung der durch Scherung womöglich gänzlich abgebauten Gerüste von Bentonitdispersionen bestimmten wir auch als Funktion der Zeit [8]:

a) ca. 10—14 Stunden lang während der Aufnahme der Fließkurve, »Stoffsteifigkeit«; und nachfolgend

b) im Ruhezustande (»Stocken«) wochenlang.

Ergebnisse der Versuche nach a). Diesbezüglich stellten wir schon in früheren Mitteilungen fest, daß der Abbau der Struktur und des Gerüsts der Dispersionen, dann auch der Wiederaufbau der Schubspannung sowohl in der flüssigen als auch in der festen Phase ein verhältnismäßig langsamer Prozeß ist, der allmählich — asymptotisch — einem Grenzwerte zustrebt.

Während aber beim flüssigen Anteil die den Reibungswiderständen entsprechenden Scherkräfte den größten Teil ihres Grenzwertes im allgemeinen (über 90%) schon innerhalb 15—20 Minuten erreichen, ist die thixotrope Rückbildung des Gerüsts und dessen Fließfestigkeit (bei elektrolytarter Dispersion) auch bei konstant gehaltenen Schergeschwindigkeiten, besonders aber im Ruhezustande ein sehr langsamer Vorgang. Er kann Stunden, Tage, oft sogar wochenlang dauern, und im Gegensatz zum flüssigen (viskosen) Anteil, seinen Grenzwert linear, manchmal sogar mit steigender Geschwindigkeit annähern, und vermindert nur unmittelbar vor dem Ende des Vorganges.

Natürlich sind alle diese Erscheinungen zwecks fehlerlosen Aufnahme der Fließkurve zu beachten, und sie wurden in der in früheren Mitteilungen beschriebenen Weise auch beachtet.

Ergebnisse der Versuche nach b). Nach Beedingung der Bestimmung der Fließkurve wurden die Messungen der Zeitfunktion des Wiederaufbaues des

Gerüsten im Ruhezustande fortgesetzt. Die weitere Untersuchung bestand aus — in bestimmten Zeitpunkten erfolgten — Messungen der Fließfestigkeit. Dies geschah »weglos« bei derart niedrigen Schergeschwindigkeiten [etwa $0,001 f(\tau)$ sec^{-1}], bei denen — gemäß unserer diesbezüglichen Messungen — kein wesentlicher Abbau des Gerüsten, und dementsprechend kein Sinken der Grenzspannung (der Fließfestigkeit), Zusammenbruch der Struktur zu befürchten war.

Tafel I

Montmorillonit aus Mád-Koldu angereichert u. dialysiert
 Konzentration : 5,08%
 Elektrische Leitfähigkeit : $1,93 \times 10^{-4} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

No.	Schergeschwindigkeitsgefälle sec^{-1}	Schubspannung τ_b , dyn/cm^2	τ_{η} , dyn/cm^2	Fließfestigkeit τ_0 , dyn/cm^2
	0,0200	78,4	—	78,4
1	1,3786	68,6	16,34	52,26
2	2,5966	65,8	22,74	43,06
3	4,1181	68,6	33,76	34,84
4	5,877	78,9	44,06	34,84
5	7,7888	87,2	52,36	34,84
6	10,0402	92,2	56,36	34,84
7	13,0062	95,0	68,90	26,10
8	17,8921	101,0	74,90	26,10
9	24,1574	107,5	81,40	26,10
10	31,7949	116,0	89,90	26,10
11	42,2821	124,5	98,40	26,10
12	54,1419	133,0	106,90	26,10
13	78,6455	147,5	121,40	26,10
14	104,6259	160,5	134,40	26,10
15	136,1136	174,5	148,40	26,10
16	178,0502	188,5	162,40	26,10
17	242,5358	208,0	190,60	17,40
18	324,0462	231,0	213,60	17,40
19	427,341	256,0	238,60	17,40
20	571,700	285,0	267,60	17,40
21	785,796	317,0	299,60	17,40
22	1047,036	346,0	328,60	17,40
23	1320,587	382,0	364,60	17,40
24	1776,853	457,0	439,60	17,40
25	2063,716	503,0	485,60	17,40

Mit diesem Verfahren ist es auch möglich, nicht nur den Grenzspannungswert, sondern auch die Dehnung der als festen Körper zu betrachtenden Dispersion als Funktion der Scherkraft zu bestimmen. All dies wollen wir in folgenden Tabellen und Abbildungen eingehender veranschaulichen.

Tafel I und Bild 1 zeigt die Fließkurve der Dispersion eines inländischen dialysierten Montmorillonits. Der Verlauf dieser Kurve steht dem aus der Literatur bekannten Bingham-Körper am nächsten und hat in doppelt logarithmischer Darstellung die bekannte S Form der Fließkurve. Das gerade An-

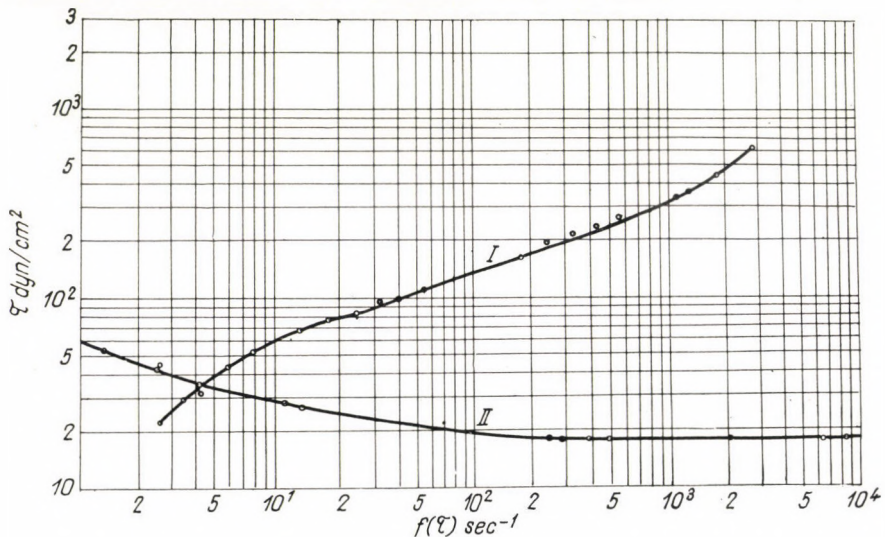


Bild 1

fangsstück mit 45° Neigung entspricht der konstanten Newton'schen Anfangsviskosität » η_0 «. Bei steigender Schergeschwindigkeit beginnt ihr strukturviskoser Bereich. Bei einer Schergeschwindigkeit von $131,2 f(\tau)$ [sec^{-1}] liegt ihr Wendepunkt. Von hieraus steigt nun etwas die Kurve und nähert sich wieder der 45° Neigung — dem Endstück der konstanten Endviskosität » η_∞ « — ohne sie aber auch nur annähernd zu erreichen, da ja der volle Abbau der Struktur noch nicht erfolgt ist [12, 16]. Die weitere Steigerung der Schergeschwindigkeit wurde hier aber absichtlich unterbrochen, da im Falle eines unvollkommenen Abbaues der thixotrope Aufbau des Gerüsts sich verlangsamt. Dadurch ändert sich der Wert der Fließfestigkeit verhältnismäßig wenig, und so ist auch die mit ihr im Zusammenhang stehende Konzentration der flüssigen (viskosen) Phase nahezu konstant. Wir hatten also die Möglichkeit, wenigstens einen Teil einer verhältnismäßig wenig verzerrten Fließkurve zu gewinnen. Die geringfügige Änderung der Fließfestigkeit

ist in der Tabelle I und in der Rubrik τ_0 , im Bild 1 mit Kurve II veranschaulicht.

Ganz ähnlich wurde auch die Fließkurve der Dispersion des dialysierten Montmorillonits aus Wyoming-Bentonit (USA) gemessen.

Der Abbau des Gerüsts und der Struktur erfolgte so als bei Tabelle I jedoch mit dem Unterschiede, daß nach einem Ruhezustande von einigen

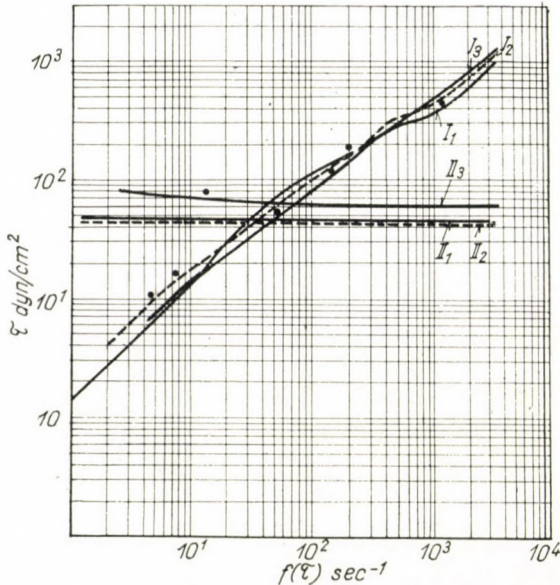


Bild 2

Tagen der Abbau auch zum zweitenmal und nach erneuter Ruhe auch zum drittenmal, jedoch immer mit derselben, verhältnismäßig geringen Schergeschwindigkeit, wiederholt wurde.

Die so erhaltenen Fließfestigkeits- (»Stoffsteigkeits«)-werte als auch die Scherspannungswerte der flüssigen Phase sind in Rubriken der Tabelle II sowie durch die II, II/1, II/2 und I, I/1, I/2 Kurven im Bild 2 wiedergegeben. Die Kurven zeigen ähnlichen Verlauf als Abb. 1. Da aber die Steigerung der Schergeschwindigkeit — ähnlich wie bei Abb. 1 — auch hier absichtlich unterbrochen wurde und damit auch der Wiederaufbau des Gerüsts wesentlich verlangsamt wird, so ist kein wesentlicher Unterschied zwischen den Kurven — auch nach mehrtägiger Ruhe — nicht merkbar. Die Zeitfunktionskurven des thixotropen Aufbaues während des Ruhezustandes, das »Stocken« werden übrigens später noch näher behandelt werden.

Im weiteren wollten wir unsere Messungen auch an vollkommen abgebauten Dispersionen fortsetzen. Um dies zu erreichen, erhöhten wir die Schergeschwindigkeit in der ersten Meßserie bis auf 25 000 $f(\tau)$ [sec⁻¹], während-

Tafel II

Montmorillonit aus Wyoming (USA) angereichert u. dialysiert $-0,5 \mu$ Korngröße; Konzentration : 5,08%
Elektrische Leitfähigkeit : $4,56 \times 10^{-4} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

No.	Schergeschwindigkeitsgefälle sec^{-1}	Erster Abbau			Zweiter Abbau				Dritter Abbau			
		Schubspannung τ_b , dyn/cm^2	τ_η , dyn/cm^2	Fließfestigkeit τ_δ , dyn/cm^2	Schergeschwindigkeitsgefälle sec^{-1}	Schubspannung τ_b , dyn/cm^2	τ_η , dyn/cm^2	Fließfestigkeit τ_δ , dyn/cm^2	Schergeschwindigkeitsgefälle sec^{-1}	Schubspannung τ_b , dyn/cm^2	τ_η , dyn/cm^2	Fließfestigkeit τ_δ , dyn/cm^2
1	1,14	70,7	1,63	86,00	1,22	45,00	1,45	43,55	1,41	46,5	1,5	45
2	3,08	75,0	4,30	70,70	1,63	45,75	2,40	43,55	2,16	47,0	2,0	45
3	5,21	79,2	7,40	78,00	2,39	47,75	4,20	43,55	3,83	51,0	6,0	45
4	7,57	83,5	10,50	73,00	3,31	49,50	5,95	43,55	4,87	52,0	7,0	45
5	10,01	88,2	14,00	76,20	4,53	52,75	9,20	43,55	6,85	55,0	10,0	45
6	13,60	93,7	20,5	75,20	5,96	55,50	11,95	43,55	9,36	57,5	12,5	45
7	17,79	99,5	25,1	74,40	7,68	58,50	14,95	43,55	14,00	62,0	17,0	45
8	22,01	106,2	36,2	69,68	9,64	61,25	17,70	43,55	18,88	67,0	22,0	45
9	31,66	115,7	45,7	69,68	12,98	65,00	21,45	43,55	24,94	71,5	26,5	45
10	42,74	126,7	56,7	69,68	20,08	72,50	28,95	43,55	33,03	78,0	33,0	45
11	54,69	139,8	69,8	69,68	25,23	78,50	34,95	43,55	41,86	85,5	40,5	45
12	68,38	155,2	85,2	69,68	30,93	84,75	41,20	43,55	56,68	97,0	52,0	45
13	90,36	171,7	101,7	69,68	41,32	95,00	51,45	43,55	75,78	109,5	64,5	45
14	114,61	188,0	118,0	69,68	55,41	108,25	64,70	43,55	100,87	126,0	81,0	45
15	149,83	202,0	141,0	60,97	74,47	122,75	79,20	43,55	136,25	151,0	106,0	45
16	189,87	217,0	156,0	60,97	101,85	141,25	97,70	43,55	180,75	178,0	133,0	45
17	233,08	234,0	173,0	60,97	135,20	165,00	121,45	43,55	239,31	218,0	173,0	45
18	279,16	253,0	192,0	60,97	182,30	202,00	158,45	43,55	321,10	261,0	216,0	45
19	327,27	273,5	212,5	60,97	244,54	241,50	197,95	43,55	437,50	316,0	271,0	45
20	389,97	295,5	234,5	60,97	325,88	287,00	243,45	43,55	581,10	370,0	325,0	45
21	437,09	319,5	258,5	60,97	438,88	350,50	306,95	43,55	739,39	430,0	385,0	45
22	499,93	345,5	284,5	60,97	577,31	404,50	360,95	43,55	987,56	514,0	469,0	45
23	599,62	372,0	311,0	60,97	755,31	447,50	403,95	43,55	1352,40	635,0	590,0	45
24	724,40	394,0	333,0	60,97	995,36	504,00	460,45	43,55	1789,86	764,0	719,0	45
25	849,34	412,5	351,5	60,97	1361,44	599,00	555,45	43,55	2032,53	828,0	783,0	45
26	974,18	434,0	373,0	60,97	1787,59	717,00	673,45	43,55				
27	1107,73	461,0	400,0	60,97	2074,74	791,00	747,45	43,55				
28	1265,37	496,0	445,0	60,97								
29	1470,30	534,0	473,0	60,97								
30	1683,97	574,5	513,5	60,97								
31	1875,57	622,0	561,0	60,97								
32	2046,29	673,0	612,0	60,97								
33	2234,01	728,0	677,0	60,97								
34	2440,03	787,0	726,0	60,97								

dessen auch die Scherspannung und der Wert der Fließfestigkeit im vollen Bereiche der Fließkurve gemessen wurde. Diese Messungen führten zu — unserem Wissen nach — in der Literatur noch unbekanntem Ergebnissen.

Es stellte sich heraus, daß — wie schon früher erwähnt — auch der Wert der Fließfestigkeit im vollen Bereiche der Fließkurve nicht konstant, sondern eine Funktion der Schergeschwindigkeit ist, ihren Wert also — im Gegensatz zu den bisherigen Feststellungen in der Literatur — von der Schergeschwindigkeit abhängig ständig ändert. Bei niedrigen Schergeschwindigkei-

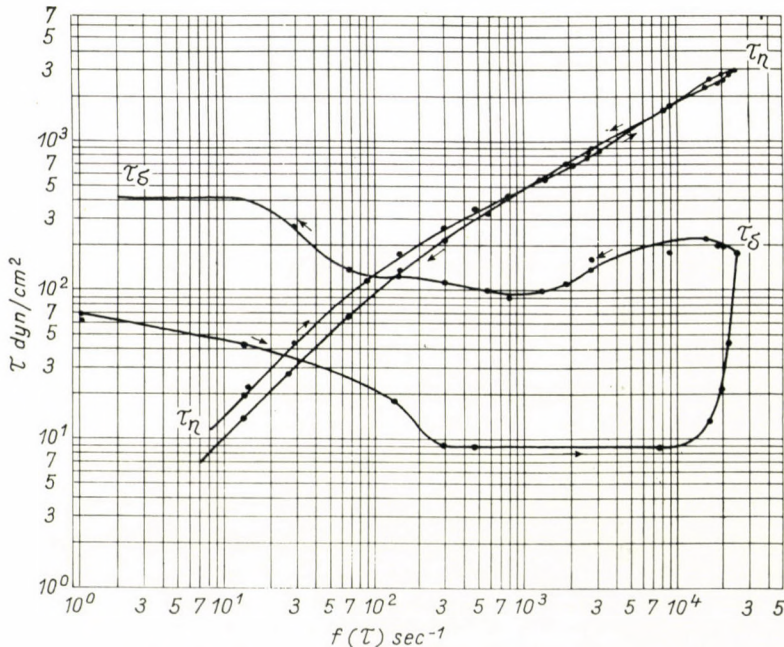


Bild 3

ten wird das Gerüst in bedeutendem Maße abgebaut und gleichzeitig vermindert sich auch der Wert der Fließfestigkeit. Bei mittleren Schergeschwindigkeiten scheint der Grenzspannungswert konstant zu werden, jedoch nur vorübergehend (und dies führt leicht zu Beobachtungsfehlern), denn nach weiterer Erhöhung der Geschwindigkeit beginnt — aus bisher unbekanntem Gründen, (daß eventuell aus den grob geordneten Stapeln Einkristalle gebildet werden (Rheopexie [11])) die Grenzspannung (Fließfestigkeit) von neuem stark zu steigen. Diese Zunahme ist verhältnismäßig recht steil und erreicht oft bedeutend höhere Werte als die ursprünglichen [14].

Diese Erscheinung fanden wir bei zahlreichen untersuchten Bentonit-Dispersionen verschiedener Herkunft und bei jeder konnten wir dasselbe beobachten. Die Größenordnung der Einwirkung der Schergeschwindigkeit

Tafel III

(Bild 3)

Wyoming-Bentonit (USA), Kommerzware 4 Jahre alte Dispersion
 Konzentration : 6%; Elektrische Leitfähigkeit : $3,5 \times 10^{-3} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

No.	Schergeschwindigkeitsgefälle sec ⁻¹	τ_b	τ_η	τ_δ
		dyn/cm ²		
1.	1,1	74,0	5,6	68,4
2.	13,5	63,4	19,5	43,9
3.	135,7	185,8	168,2	17,6
4.	298,5	262,5	253,7	8,8
5.	475,0	351,9	343,1	8,8
6.	787,1	422,2	413,4	8,8
7.	1 384,2	545,4	536,6	8,8
8.	2 103,6	695,0	686,2	8,8
9.	2 619,4	765,3	756,5	8,8
10.	3 121,6	844,6	835,8	8,8
11.	8 794,7	1671,5	1662,7	8,8
12.	16 557,8	2551,3	2538,1	13,2
13.	19 815,1	2749,2	2727,2	22,0
14.	21 986,6	2815,2	2771,2	44,0
15.	25 379,6	3035,2	2859,2	176,0
16.	20 358,0	2705,3	2507,3	198,0
17.	15 607,8	2529,3	2300,4	219,9
18.	8 916,8	1812,3	1636,4	175,9
19.	2 809,4	1038,1	879,8	158,4
20.	1 900,1	791,8	686,2	105,6
21.	1 289,3	624,6	527,9	96,8
22.	800,8	492,7	404,7	88,0
23.	570,0	413,5	316,7	96,8
24.	298,6	323,3	213,3	110,0
25.	149,3	255,1	132,0	123,1
26.	67,9	197,9	65,9	132,0
27.	27,1	300,4	26,4	264,0
28.	13,57	413,5	13,2	400,3

auf die Scher- und Grenzspannung ist jedoch vom Fundort und der »Vorgeschichte« der Dispersion weitgehend abhängig [10, 15].

Anfangs dachten wir an überwiegenden Einfluß der Temperatur, da zu deren Konstanthaltung bei so hohen Schergeschwindigkeiten ziemliche Schwierigkeiten zu überwinden waren. Diese Annahme erwies sich aber bald

als unhaltbar, da 1. es doch gelungen ist die Temperatur konstant zu halten, und 2. allein die Erhöhung der Temperatur ohne der Schergeschwindigkeit den entgegengesetzten Einfluss ausübt. Der Verlauf der in Tafel III und Bild 3 aufgetragenen Werte und Kurven, die an einer elektrolytarmen, doch nicht dialysierten Wyoming-Bentonit-Dispersion gemessen wurden, zeigen diese Erscheinung sehr deutlich. Wir zeigen beide Zweige der Fließkurve, also sowohl den der bei steigender als auch den der bei sinkender Schergeschwindigkeit gemessenen Werte der Schubspannung der flüssigen Phase, bestimmten gleichzeitig aber auch die Fließfestigkeit. Man könnte auch daran denken, daß der bei hohen Schergeschwindigkeiten gemessene und beobachtete hohe Wert der Grenzspannung eine Täuschung infolge der Turbulenz sei. Diese Möglichkeit wird aber ausgeschlossen, da die Grenzspannung nicht während der großen Geschwindigkeit, sondern im darauffolgenden momentanen Ruhezustande gemessen wird.

In diesem Zusammenhang möchten wir die Aufmerksamkeit auf eine weitere neue Erscheinung lenken. Wenn der Wert der Fließfestigkeit bei steigender Schergeschwindigkeit selbst auch im Steigen begriffen ist und schon einen hohen Wert erreicht hatte, und dann die Schergeschwindigkeit wieder vermindert wird, vermindert sich auch der Wert der Fließfestigkeit wieder und zeigt im grossen und ganzen die Gestalt des aufsteigenden Zweiges, doch nur in seinem Verlauf. Der absolute Wert bleibt im allgemeinen höher als der Spannungswert des aufsteigenden Zweiges. Wenn wir die Rotation plötzlich zum Stehen bringen, bleibt der Grenzspannungswert dauernd bei dem erreichten Werte. Das bedeutet eine gewisse Steigerung der Festigkeit des Gerüsts, der Stabilität der Dispersion. Diese Beobachtung wird auch noch dadurch bekräftigt, daß der Abbau auf den ursprünglichen Wert jetzt nur mehr bei bedeutend höherer Schergeschwindigkeit möglich ist. Diese Erscheinung zeigt der sinkende Zweig der Kurve II, Bild 3.

Bild 5 veranschaulicht außerdem auch den Verlauf der wahren Fließkurve u. z. so den ansteigenden als auch den schwindenden Ast. Die — besonders bei kleinen Geschwindigkeitsgefällen — auffallend niedrigen Scherkraftswerte und Verzerrung des absteigenden Astes sind auf Konzentrationsverminderung zurückzuführen. Später wird diese Erscheinung noch näher behandelt.

Wenn wir nun den Scherspannungswert der Fließgrenze und der Schubspannung der flüssigen Phase nicht einzeln, sondern nur ihre Summe auftragen — wie dies in der Praxis allgemeiner Gebrauch ist — erhalten wir eine der Fließkurven ganz ähnliche Kurve, da die verhältnismäßig niedrigen Werte der Fließfestigkeit die hohen Schubspannungswerte der flüssigen Phase kaum merkbar beeinflussen, und bloß bei niedrigeren Werten der Schergeschwindigkeit, wo die beiden Kräfte größenordnungsmäßig zueinander schon näher kommen, wird eine gewisse Abweichung merkbar.

Tafel IV

(Bild 4)

Wyoming-Bentonit (USA),
 Kommerzware 4 Jahre alte Dispersion
 Konzentration : 6%
 Elektrische Leitfähigkeit : $3,5 \times 10^{-3} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

No.	Schergeschwindigkeitsgefälle sec^{-1}	Abbau I		Schergeschwindigkeitsgefälle sec^{-1}	Abbau II	
		$\tau\eta$	$\tau\delta$		$\tau\eta$	$\tau\delta$
		dyn/cm ²			dyn/cm ²	
1.	0,407	—	47,3	0,407	—	161,66
2.	1,086	9,9	48,4	1,086	28,6	144,1
3.	4,07	34,1	50,6	4,07	57,2	142,9
4.	10,86	42,9	50,6	10,86	101,2	142,9
5.	33,93	89,1	52,8	36,64	138,5	131,9
6.	115,36	152,9	52,8	122,15	219,4	112,2
7.	325,73	245,2	50,6	380,02	358,5	87,9
8.	827,89	357,4	44,0	760,0	494,9	79,2
9.	1 221,48	413,5	44,0	1 207,9	582,8	70,4
10.	2 062,9	563,0	44,0	1 764,36	692,8	74,9
11.	5 985,25	987,5	35,1	4 926,6	1123,9	109,9
12.	10 192,57	1247,1	26,4	8 170,34	1484,6	197,9
13.	14 250,60	1451,6	39,6	14 454,18	2175,2	321,1
14.	28 365,48	2019,0	50,6	20 222,28	2590,9	351,9
15.	38 408,76	2232,4	241,9	28 501,20	2870,2	439,9
16.	25 379,64	1959,7	294,6	30 401,28	2969,2	461,9
17.	14 318,46	1354,8	248,5	39 901,68	3252,9	563,0
18.	10 640,45	1077,7	351,9	33 115,68	2980,2	439,9
19.	5 930,9	820,4	281,5	29 044,08	2929,6	439,9
20.	2 347,9	750,0	158,4	20 086,56	2821,8	316,7
21.	1 235,05	545,5	114,4	14 929,2	2430,3	439,9
22.	868,61	448,7	114,4	9 975,4	1990,5	451,9
23.	298,58	305,7	110,0	6 338,1	1684,7	404,7
24.	115,36	217,7	101,2	4 071,6	1396,6	351,9
25.	54,29	166,0	94,6	1 805,08	1077,7	272,7
26.	10,86	88,0	83,6	814,32	884,2	246,3
27.	4,07	35,2	83,6	380,02	706,0	228,7
28.	1,09	—	82,5	122,15	565,2	237,5
29.				40,72	362,9	263,9
30.				10,86	136,3	299,5
31.				4,07	46,2	296,9
32.				1,09	—	281,5

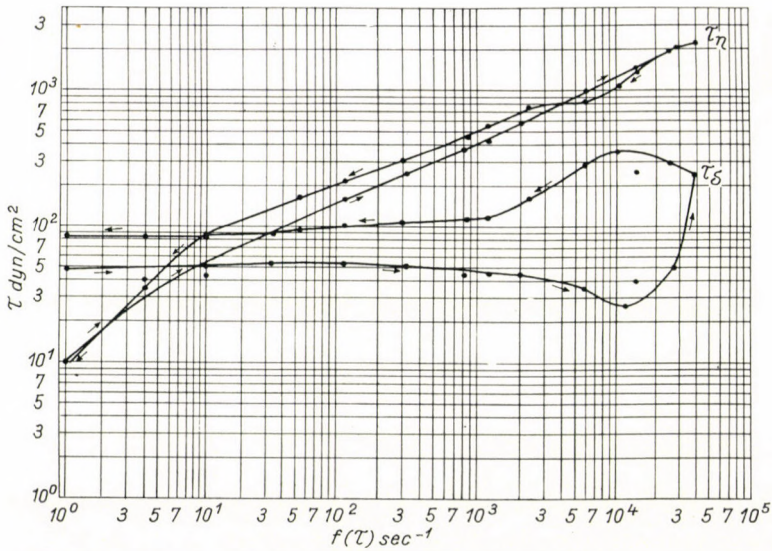


Bild 4a

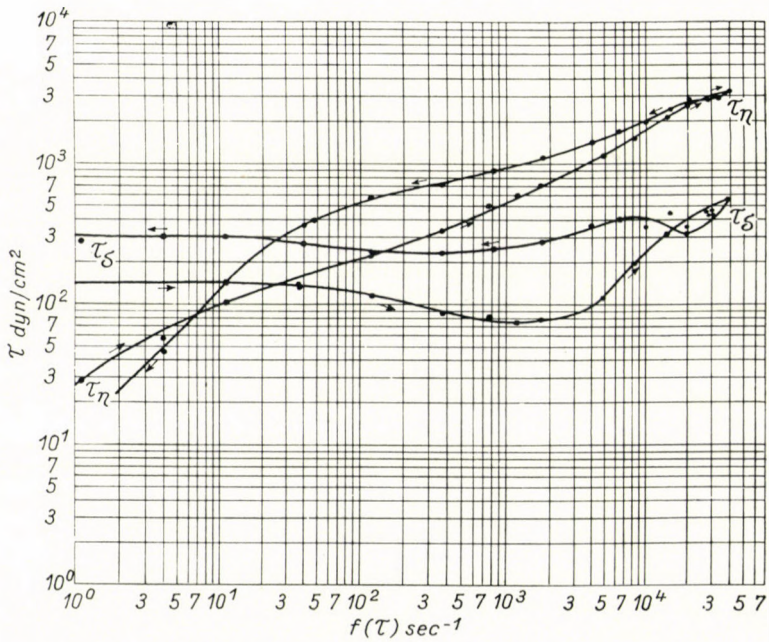


Bild 4b

Es ist nun offensichtlich, welche falsche Beurteilung des praktischen Wertes der Bentonite sich aus solchen Meßergebnissen ergeben kann, da ja in den meisten Fällen zur Wertbeurteilung nicht die Viskosität der flüssigen Phase, sondern der Verlauf der Fließfestigkeit, die »Stoffsteifigkeit« maßgebend

Tafel V

(Bild 5)

Montmorillonit, angereichert, dialysiert, $-0,5 \mu$ Korngröße
aus Natriumbentonit Mád
Konzentration : 5,03%
Elektrische Leitfähigkeit : $0,98 \times 10^{-4} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

No.	Scher- geschwindig- keitsgefälle sec^{-1}	Erster Abbau		Scher- geschwindig- keitsgefälle sec^{-1}	Zweiter Abbau	
		Schub- spannung τ_b , dyn/cm^2	Fließ- festigkeit τ_0 , dyn/cm^2		Schub- spannung τ_b , dyn/cm^2	Fließ- festigkeit τ_0 , dyn/cm^2
1	1,22	237,53	228,7	0,81	250,73	263,9
2	4,07	299,12	228,7	1,22	263,93	263,9
3	8,14	281,52	228,7	4,07	325,51	263,9
4	12,21	307,91	228,7	8,14	369,50	263,9
5	40,72	422,28	228,7	12,21	570,26	299,1
6	81,43	475,07	228,7	47,5	840,17	510,3
7	122,10	519,06	228,7	78,72	950,14	510,3
8	257,90	607,03	237,5	128,93	972,13	461,9
9	542,90	765,39	255,1	407,20	1055,71	367,3
10	990,80	932,54	263,9	1 045,00	1319,63	367,3
11	1 262,20	1002,92	281,5	1 805,10	1583,56	360,7
12	4 519,50	1697,93	338,7	4 655,20	2639,27	527,9
13	8 211,10	2093,82	351,9	8 889,70	3782,95	664,2
14	14 114,90	2133,41	329,9	13 707,70	3672,98	615,8
15	27 822,60	2595,28	351,9	25 108,20	4222,83	615,8
16	40 716,00	3123,13	360,7	38 680,20	4464,76	549,8
17	54 288,00	3563,01	360,7	54 288,00	4662,71	395,9
18	76 003,20	4442,77	277,1	82 517,80	5234,55	175,9

ist. Diese hat aber oft einen gerade entgegengesetzten Verlauf, wie es aus Kurve II ersichtlich ist.

Da bei Messungen mit Schergeschwindigkeitsgefällen bis zu 25 000 $f(\tau)$ [sec^{-1}] die obere Grenze des Newton'schen Verhaltens der Viskosität oft noch immer nicht erreicht werden konnte, und wir über den ganzen Bereich der Fließkurve oft noch immer kein vollkommenes Bild erhielten, wandten wir zum

Abbau auch noch bedeutend höhere Schergeschwindigkeiten an. Tafel IV und Bild 4 zeigt eine diesartige Meßserie an einer der Wyoming-Dispersion.

Man kann feststellen, daß die Fließfestigkeit bei weiterer Erhöhung der Schergeschwindigkeit noch immer stark zunimmt und zwischen den Werten von 20—30 000 $f(\tau)$ [sec^{-1}] ihren oberen Grenzwert erreicht, dann nach weiterer Erhöhung der Schergeschwindigkeit eine schnell abnehmende Tendenz aufweist.

Die Scherspannung der flüssigen Phase steigt inzwischen zwar ebenfalls, doch noch immer nicht linear mit der Schergeschwindigkeit, so daß der Wert

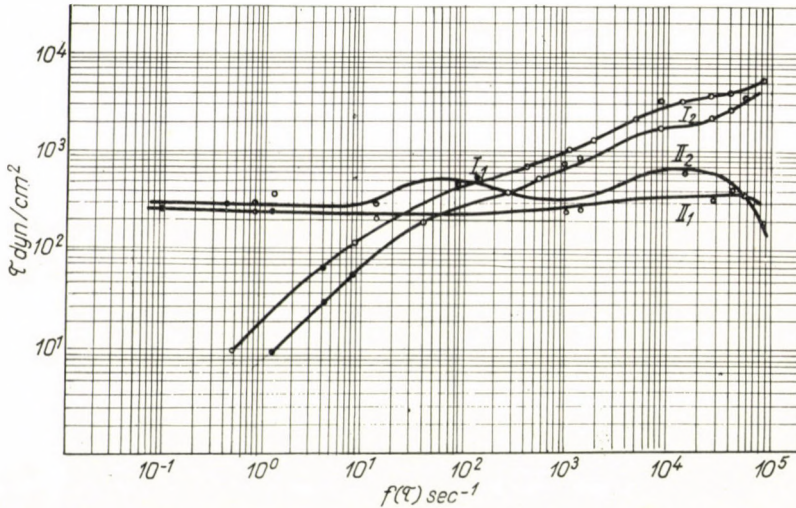


Bild 5

der »scheinbaren Viskosität« weiter abnimmt, und das obere Endstück des Newton'schen Verhaltens der Viskosität noch immer nicht erreicht wird.

Bei Schergeschwindigkeitswerten zwischen 1000 und 3000 $f(\tau)$ [sec^{-1}] wird die Neigung von 45° des oberen Endstückes der Fließkurve I verhältnismäßig am besten angenähert, ohne sich aber weiter aufwärts zu wenden, wie dies zur Erreichung der Neigung von 45° erwünscht wäre, sondern wendet sich immer mehr abwärts in entgegengesetzter Richtung, so daß das Erreichen dieser Neigung hoffnungslos erscheint.

Eine kurze Überlegung bestätigt die Richtigkeit der Messungen. Sie ergibt sich als natürliche Folge der steigenden Werte der Fließfestigkeit, die während des weiteren Ausbaues bzw. Verfestigung des Gerüsts immer mehr Kristallstapeln bindet und unbeweglich macht, wodurch die Konzentration der frei beweglichen Teile, die den Reibungswiderstand beeinflussen, ständig abnimmt. Die dem Reibungswiderstande proportionale Scherspannung entspricht also nicht der Konzentration der bekannten und zu prüfenden

Tafel VI

(Bild 6)

Bentonit (Frankreich), Kommerzware
 Konzentration : 6,17%
 Elektrische Leitfähigkeit : $1,5 \times 10^{-3} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

No.	Schergeschwindigkeitsgefälle sec^{-1}	Schubspannung τ_b	Fließfestigkeit
		dyn/cm^2	τ_δ dyn/cm^2
1.	8,14	114,4	112,2
2.	12,2	110,0	106,7
3.	47,5	118,8	103,4
4.	88,2	118,8	96,8
5.	128,9	127,6	96,8
6.	217,2	136,4	96,8
7.	352,9	151,8	92,4
8.	936,5	191,3	88,0
9.	1 262,2	208,9	88,0
10.	4 343,0	292,5	85,8
11.	8 170,3	395,9	85,8
12.	14 114,9	483,9	81,4
13.	21 715,2	598,2	81,4
14.	28 229,8	681,8	77,0
15.	40 444,6	857,8	83,6
16.	52 116,5	1016,1	88,0
17.	61 074,0	1187,7	90,2
18.	73 967,4	1407,6	110,0
19.	52 116,5	1060,1	96,8
20.	40 173,1	901,7	96,8
21.	27 144,0	725,8	96,8
22.	14 114,9	512,5	94,6
23.	11 129,0	453,1	94,6
24.	7 817,5	369,5	94,6
25.	4 383,8	285,9	83,6
26.	1 262,2	178,2	83,6
27.	1 004,3	171,6	83,6
28.	475,0	149,6	83,6
29.	271,4	134,2	88,0
30.	128,9	118,8	96,8
31.	54,3	107,8	96,8
32.	12,2	112,2	110,0
33.	8,1	112,2	112,0
34.	4,1	121,0	121,0

Dispersion, sondern einer sich fortwährend ändernden, unbekanntem und nicht bestimmbarer Größe, woraus aber der bekannten Konzentration entsprechende Spannungswert nicht berechnet werden kann, jedoch den verzerrten Verlauf der Fließkurve verständlich macht [13].

Im wesentlichen fanden wir ein ähnliches Verhalten an jeder untersuchten, von verschiedenen Fundorten stammenden, elektrolytarmen Bentonitdispersionen, bloß die Größenordnung der Scherspannung änderte sich beträchtlich je nach der Herkunft. Dies veranschaulichen die zwischen 0,001 und 80 000

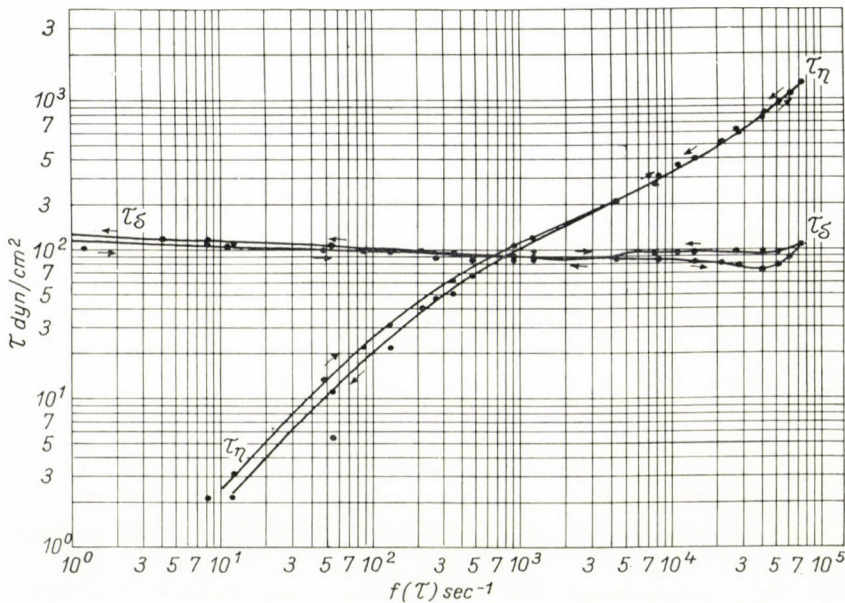


Bild 6

$f(\tau)$ [sec⁻¹] Schergeschwindigkeiten gemessenen Fließkurven der Natrium-Montmorillonit Dispersionen aus Mád, Ungarn (Tafel V und Bild 5) sowie die des Bentonits aus Frankreich (Tafel VI und Bild 6).

Das »Stocken« als Funktion der Zeit. Als Anfangspunkt der thixotropen Erstarrung diente der Zeitpunkt der Erreichung der maximalen Schergeschwindigkeit. Von hieraus wurde mit dem Messen des sinkenden Zweiges der Fließkurve begonnen. Bei jedem Meßpunkte der Fließkurve wurde dann auch die Fließfestigkeit und die dazu gehörende Zeit gemessen. Nach Beendigung der Aufnahme der Fließkurve erfolgte nun das weitere Messen der Zeitfunktion im Ruhezustand. Wie schon erwähnt, wurde der Apparat in Ruhe gestellt, und die darin befindliche Dispersion mit der zuletzt beobachteten Schubspannung ständig belastet, inzwischen wurde dann, anfänglich stündlich, später täglich, mit ganz kleinen Schergeschwindigkeiten, $f(\tau) = 0,001 \text{ sec}^{-1}$,

die Fließfestigkeit gemessen. Die Messungen wurden solange fortgesetzt, bis der obere Grenzwert der Fließfestigkeit erreicht war.

Bild 7 veranschaulicht die Kurve der Fließfestigkeit von Bentonitdispersionen aus Wyoming (USA) und aus Koldu (Ungarn) nach einmaligem vollkommenem Abbau als Funktion der Zeit (Tage). Der Verlauf beider Kurven ist einander ähnlich, ist sogar nahe identisch und charakteristisch für die meisten Bentonitdispersionen.

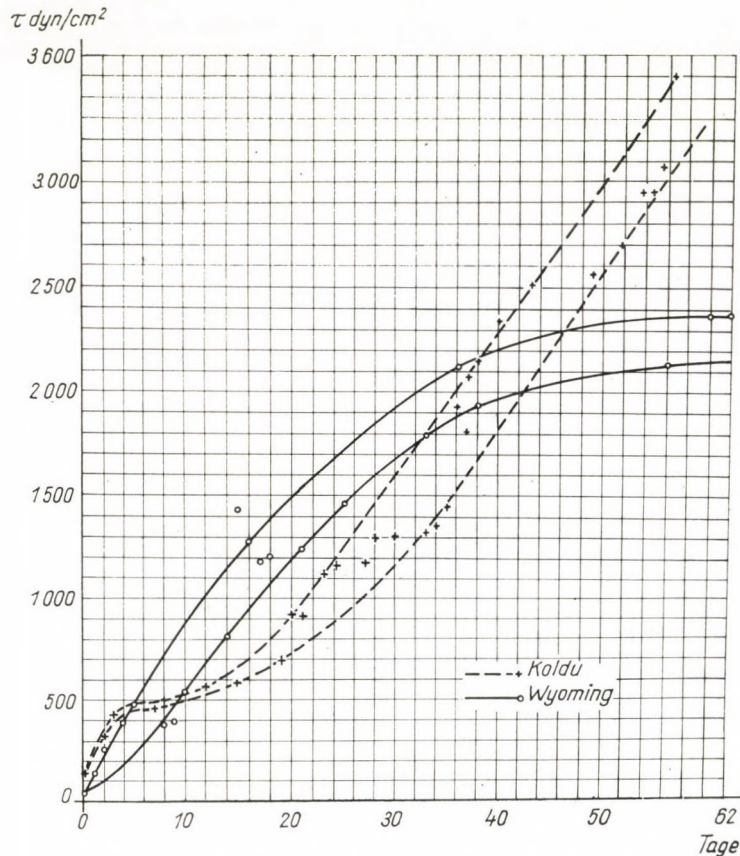


Bild 7

Die gemessenen Werte fallen in eine durch je zwei parallele Kurven eingeschlossene Zone, je nach der Stelle, wo die Ablösung der Teilchen in der Spalte zwischen den beiden konzentrischen Zylindern des Viskosimeters erfolgte.

Es ist ersichtlich, daß der thixotrope Aufbau des Gerüsts in elektrolytarmen Dispersionen ein derartig langsamer Vorgang ist, daß die Zeitdauer während der Aufnahme der Fließkurve einen nur ganz unbedeutenden Teil (unter 1%) der Zeitdauer der vollkommenen Regenerierung bildet.

5. Wiederholter Abbau des Gerüsts und dessen Auswirkungen

Wenn der thixotrope Aufbau des Gerüsts sich seinem Höchstwerte nähert, und die Dispersionen dann einer neuerlichen Scherung unterworfen werden, und die Fließkurve wieder bestimmt wird, benötigt der Abbau der Struktur höhere Schergeschwindigkeiten als zum erstenmal, d. h. es ist Festigung vorhanden. Das kann man — je nach dem Ursprung der einzelnen Bentonite — entweder an der Fließfestigkeit oder am Reibungswiderstand, oft auch an beiden feststellen.

Wenn der Abbau und nachher die thixotrope Regenerierung mehrmals wiederholt wird, nähert sich die Festigkeit immer mehr ihrem Grenzwerte — Anfangswert — und erreicht ihn schließlich, so daß der wiederholte Abbau nur noch bei bedeutend höheren ($6 \cdot 10^4$ — 10^5) Schergeschwindigkeiten erreicht werden kann. Dies ist eine Möglichkeit zur Stabilisierung der Festigkeit des Gerüsts.

Wird aber die Verfestigung (der Aufbau des Gerüsts) so weit fortgesetzt, daß sie sich ihrem Endwerte nähert, so wird der Reibungswiderstand (scheinbare Viskosität) derart vermindert, daß er sich dem des Wassers nähert und endlich ein mit Wasser gefülltes Gerüst erreicht wird, das aber nicht mehr allmählich abgebaut, sondern nur zerbröckelt werden kann.

Die Ergebnisse einiger derart wiederholten Versuche, verglichen mit den im selben Maßstabe gezeichneten ursprünglichen Fließkurven, zeigen Tafel III—IV und Bild 3—4 (der erste, zweite, Abbau mit Indexziffern 1, 2, bezeichnet). Die Zunahme der Fließfestigkeit ist auffallend. In den meisten Fällen wird die dem Reibungswiderstand proportionale Schubspannung vermindert. Diese Verminderung ist aber nicht immer eindeutig. Sie hängt anfangs in erster Linie davon ab, in welchem Maße zum Aufbau des Gerüsts Feststoffpartikeln gebunden werden und durch ihren Ausfall die Konzentration der Dispersion geändert wird.

All diese Erscheinungen erklären die sog. Vorgeschichte der Bentonite und ihrer Dispersionen [10].

Es wird leicht verständlich, weshalb einzelne rheologische Eigenschaften der von verschiedenen, manchmal sogar von demselben Fundorten stammenden Bentonitdispersionen in so hohem Maße von einander abweichen. Das hängt immer davon ab, in welchem Stadium des Abbaues bzw. der Regenerierung das zu prüfende Material der Untersuchung unterworfen wird.

Unsere Meßergebnisse zeigen nun die Möglichkeit zur Beeinflussung der oben erwähnten Werte und zur systematischen Erreichung der von der Praxis oft geforderten Werte.

Während unserer Untersuchungen traten auch neue Probleme in Vordergrund, in erster Linie solche praktischer Bedeutung, deren Besprechung im Rahmen dieses Berichtes aber unmöglich ist. Wir möchten hier nur erwähnen,

daß unsere Meßergebnisse die Relaxationstheorie von J. C. MAXWELL sowie auch seine aus bloß mechanischen Überlegungen induktiv abgeleiteten Gleichungen bestätigen. Mit Hilfe dieser Gleichungen und unter Anwendung unserer Meßergebnisse können einzelne Konstanten der Bentonitdispersionen nicht nur bestimmt, sondern auch berechnet werden und diese stimmen mit den Ergebnissen der unmittelbaren Messung ganz überraschend überein [9, 12].

Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß die Tafeln I—VI und die Bilder 1—6 nicht die gemessenen, sondern die aus den *gemessenen* Scherkräftewerten nach SCHULTZ—GRUNOW [6, 7] berechneten Schergeschwindigkeiten [$f(\tau)$ sec⁻¹] enthalten, und zwar — aus schon erwähnten Gründen verzerrte — aber doch die wahren Fließkurven darstellen.

Auf Grund des bisher Gesagten und der Besichtigung der Fließkurven wird es verständlich, wann und warum die Konstanten der Fließkurven zu einer verlässlichen Identifizierung der Bentonitdispersionen oft verwendet, ein andermal aber nicht verwendet werden können. Wo die Fließkurven zur eindeutigen Identifizierung gewisser Dispersionen allein nicht ausreichen oder infolge besprochener Gründe verzerrt sind, müssen die Werte des Reibungswiderstandes und auch der Fließfestigkeit als Funktion der Schergeschwindigkeit und der Zeit getrennt angegeben werden.

III. Schlußfolgerungen

Folgende 18 Punkte enthalten die *teilweise* neuen Feststellungen unserer Messungen, der Vollkommenheit halber aber ergänzt mit den schon bekannten und durch unsere Meßergebnisse nur neu bestätigten Tatsachen.

Wir bemerken wiederholt, daß die Meßergebnisse sich im allgemeinen — wenn nichts Näheres bemerkt — auf womöglich 5%ige, bei 25° C Temperatur gehaltene elektrolytarme und an Montmorillonit angereicherte Bentonitdispersionen beziehen.

1. An jeder von uns geprüften Bentonitdispersion konnte außer dem Reibungswiderstand (Strukturviskosität) auch Fließfestigkeit festgestellt werden.

2. Die Größenordnung beider Werte ist eine Funktion der Temperatur, doch in bedeutend höherem Maße die des Schergeschwindigkeitsgefälles der Dauer der Scherwirkung bzw. der Ruhezeit.

3. Wie jeder Stoff mit Strukturviskosität, zeigen auch die Bentonitdispersionen bei ganz geringen Schergeschwindigkeiten Newton'sches Verhalten, d. h., sie haben eine von der Schergeschwindigkeit unabhängige konstante Viskosität (η_0) so lange, bis sie durch die in Funktion der Zeit ständig zunehmende thixotrope Erstarrung »Stocken« nicht vermindert wird.

4. Bei Steigerung — im allgemeinen aber noch immer bei geringen Werten — der Schergeschwindigkeit beginnt der Abbau der Struktur und demzufolge sinkt der Wert des Reibungswiderstandes (der »scheinbaren Viskosität«).

5. Dieser anfangs rasch, später immer langsamer fortschreitende Abbau — die ständige Abnahme des Reibungswiderstandes — dauert so lange, bis jener obere Grenzwert der Schergeschwindigkeit erreicht wird, bei dem die Viskosität wieder einen konstanten und von der Scherung unabhängigen sehr kleinen Wert (η_{∞}) annimmt, vorausgesetzt, daß die Konzentration der Dispersion konstant bleibt.

6. Zum Abbau des Gerüsts elektrolytarmer Dispersionen reichen ganz niedrige (unter 1 sec^{-1}) Schergeschwindigkeiten nicht aus. Der Abbau wird auch bei höheren Schergeschwindigkeiten fortgesetzt und beherrscht manchmal einen ganz bedeutenden Teil der Fließkurve.

Als interessante neue Erscheinung konnten wir bei einigen Bentonitsorten feststellen, daß der Abbau des Gerüsts, d. h. die Abnahme der Fließfestigkeit als Funktion des zunehmenden Schergeschwindigkeitsgefälles bloß bis zu einem gewissen Grenzwert [im allgemeinen bis $400\text{--}2000 f(\tau) \text{ sec}^{-1}$] andauert. Bei weiterer Steigerung der Schergeschwindigkeit wird die Fließfestigkeit nicht mehr vermindert, im Gegenteil, sie wird bedeutend erhöht, so daß ihr Wert oft sogar den Ausgangswert übersteigt. Bei weiterer Steigerung der Schergeschwindigkeit nimmt sie dann wieder ab.

Die aus der Literatur wohlbekannte Bemerkung, daß die Fließfestigkeit schon bei niederen Schergeschwindigkeiten bald ihren unteren Grenzwert (Gelstärke) erreiche, der nach weiterer Steigerung der Schergeschwindigkeit konstant bleibe, ist also unhaltbar.

7. Es ist eine allgemein bekannte Tatsache, daß der Abbau bzw. die thixotrope Erstarrung wie auch der Wert des Reibungswiderstandes zeitabhängig sind. Die Prüfung beider Komponenten zeigte, daß der Abbau des Gerüsts verhältnismäßig rasch, der des Reibungswiderstandes (der scheinbaren Viskosität) dagegen langsamer erfolgt, die thixotrope Regenerierung beider Komponenten verläuft umgekehrt: die »scheinbare Viskosität« regeneriert sich sehr schnell, das Gerüst dagegen — besonders bei elektrolytarmen Dispersionen — erstarrt langsamer.

8. Schon in einer vorherigen Mitteilung [2] haben wir es bemerkt, daß zum Aufbau des Gerüsts Kristallaggregate gebunden und unbeweglich gemacht werden, so daß die Konzentration der beweglichen Teile vermindert wird, die »scheinbare Viskosität« dementsprechend relativ niedrigere Werte annimmt. Wenn dieser Vorgang bis zu hohen Schergeschwindigkeiten andauert, so gehört die Schubspannung des Reibungswiderstandes einer sich ständig verändernden unbekanntem Konzentration an, und die gemessenen Werte der Fließkurve sind nicht eindeutig, weil sie einer sich ständig ändernden Konzentration angehören.

9. Der thixotrope Aufbau des Gerüsts »Stocken« und die Ausbildung der Solvatstruktur wird auch im ruhenden Zustande fortgesetzt, so daß die Fließfestigkeit und auch die Viskosität sich einem gewissen Grenzwerte nähert,

Der Wert der Fließfestigkeit der bisher geprüften (5%igen) Dispersionen beträgt cca 3000—6000 dyn/cm².

10. Die Stabilität des Gerüsts und des unteren Grenzwertes der Viskosität ist gering, so daß ihr Abbau schon bei Einwirkung verhältnismäßig geringer Schergeschwindigkeiten beginnt.

11. Bei allen bisher geprüften Bentonitdispersionen konnten wir feststellen, daß wenn das Gerüst vom ruhenden Zustande ausgehend mit steigenden Schergeschwindigkeiten abgebaut und danach wieder in Ruhe gesetzt wird, die Geschwindigkeit der thixotropen Festigung des Gerüsts sowie auch seine Stabilität nach jedem Abbau ansteigt.

Gleichzeitig wird die Thixotropie vermindert und bleibt endlich ganz aus. Dieser Umstand ergibt die Möglichkeit einer Beeinflussung der Stabilität und Festigkeit des Gerüsts bzw. der Viskosität der Dispersion.

12. Die einmal schon abgebaute und wieder regenerierte Struktur kann mit derselben Schergeschwindigkeit nur mehr teilweise abgebaut werden. Zum neuerlichen Abbau wird größere Schergeschwindigkeit erfordert, und der Abbau ist auch dann nicht immer vollkommen durchführbar.

13. Die Stabilität der auf diese Weise sich regenerierenden Struktur ist also um so größer, je mehrmal und in je größerem Maße der Abbau erfolgte.

14. Der Grad der Stabilität verschiedener Bentonitdispersionen hängt — wie oben gesagt — hauptsächlich davon ab, wie weit das Material unter Einwirkung geologischer Kräfte oder durch Bearbeitung bis zur Zeit der Messungen in Anspruch genommen und wie lange es in abgebautem Zustande gewesen war, d. h., wie seine Vorgeschichte sich gestaltete.

15. Das unterschiedliche Verhalten der — von verschiedenen Fundorten stammenden — Bentonitdispersionen, obwohl die Untersuchungen unter gleichen Umständen erfolgten, hängt nach dem oben Gesagten, mit großer Wahrscheinlichkeit davon ab, bis zu welchem Maße das Rohmaterial in seiner Vorgeschichte unter Einwirkung verschiedener Schubkräfte abgebaut und mit der Zeit wieder regeneriert wurde, und in welchem Zeitabschnitt sich die Regenerierung gegebenenfalls befindet.

16. Die thixotrope Wiederaufbaugeschwindigkeit des Gerüsts und der Struktur (die Geschwindigkeit des »Stockens«) ist im allgemeinen sehr klein. Die Erreichung des Höchstwertes der Fließfestigkeit dauert tage- oft wochenlang.

17. Sie kann durch elektrostatische Einwirkungen beeinflusst und erhöht werden.

18. Ähnliche, doch zwecks quantitativer Auswertung noch weitere Messungen erfordernde Wirkungen werden durch elektrolytische Kräfte und durch verschiedene Elektrolyte erreicht.

SCHRIFTTUM

1. BARNA, J.: *Mitt. des Ungarischen Forschungsinstitutes f. Bergbau* (1957), II. 2. 43—50.
2. BARNA, J.—MARSCHALKÓ, B.: Das rheologische Verhalten wäßriger Bentonitdispersionen. *Acta Techn. Hung.* **15** (1956), 77.
3. BARNA, J.: Flow phenomena on aqueous bentonite dispersions. *Silicates industriels. Bruxelles* 1959, 554—560.
4. BARNA, J.: Rotations-Viskosimeter nach B. Marschalkó. *Acta Techn. Hung.* **8** (1954), 361.
5. BUOCZ, T.: Rotations-Rheoviskosimeter nach B. Marschalkó. *Wissenschaftliche Mitt. der Techn. Hochschule f. Bau- und Verkehrswesen* **9** (1963), No. 1.
6. SCHULTZ-GRUNOW, F.: *Kolloid Z.* (1954), 138, 167.
SCHULTZ-GRUNOW, F.—WEYMANN, H.: *Kolloid Z.* (1953), 131, 2.
7. PRANDTL, L.: *Z. für angew. Math. Mech.* **30** (1950), 169.
8. REHBINDER, P. A.: *Коллоидный Журнал* **20** (1958), 526—538.
9. MAXWELL, J. C.: *Theory of Heat. New-Impr.* 1904.
10. PASLAY, P. R.—SLIBAR, A.: *Rheologica Acta* **2** (1962), 236.
11. WEISZ, A.: Neuere Untersuchungen über die Struktur thixotroper Gele. *Rheologica Acta* **2** (1962), 292.
12. UMSTÄTTER, H.: *Viskosimetrie*, 1952.
Strukturmechanik, 1948.
13. RUTGERS, R.: Relativ Viscosity and Concentration. *Rheologica Acta* **2** (1962), 305.
14. ВОЛАРОВИЧ, М. П.—КОШЛЯТ, Л. Л.: *Коллоидный Журнал* (1962), 128—132.
15. ЖУХОВИЦКИЙ, С. И.: *Коллоидный Журнал* (1962), 168—179.
16. SCHURZ, I.: *Kolloid Zeitschr.* **154**, 97.
17. GÖTZE, W.: *Rheologica Acta* **2** (1962), 254.

INVESTIGATION OF THE RHEOLOGICAL PROPERTIES
OF AQUEOUS BENTONITE DISPERSIONS, II.

J. BARNA and B. MARSCHALKÓ

SUMMARY

In connection with the rheological investigation of bentonite dispersions, the paper reports on the results of measuring the relation between the thixotropic solidification and shearing velocity, free from all other influences. With an appropriate measuring apparatus the authors were able to measure separately, for the whole width of the flow curve, the elastic limit strain as a function of shearing velocity, independently of the shearing forces needed for overcoming the internal friction (apparent viscosity). Amongst the factors which have a major influence on the solidification, the concentration of the dispersion and its temperature were kept constant, while the influence of the electrolyte content was reduced to a negligible value by the efficient dialyzation of the dispersion.

The result of the investigations showed that under these conditions the limit stress depends on the shearing velocity to a much greater extent than was known up till now. When varying the shearing velocity by several orders of magnitude the limit strain too changes continuously. With increasing shear it first decreases, and after having reached a lower limit it again increases considerably — according to the phenomenon of rheopexy — and finally, with shearing velocity still further increasing, it again decreases. With decreasing shearing velocities the thixotropically regenerating limit stresses (solidification) similarly develop, but in the opposite sense and the stability of individual values increases.

The authors have also determined for some cases — eliminating too all varying factors and influences — the dependency of the thixotropic regeneration on time and its upper limit value.

EXAMEN DES CARACTÉRISTIQUES RHÉOLOGIQUES DES DISPERSIONS AQUEUSES DE BENTONITE, II.

J. BARNA et B. MARSCHALKÓ

RÉSUMÉ

Dans le cadre de l'examen des caractéristiques rhéologiques des dispersions aqueuses de bentonite, l'étude rend compte des résultats de mesures relatifs à la relation entre la solidification thixotropique et la vitesse de cisaillement. Avec un dispositif approprié, les auteurs ont pu mesurer la contrainte limite élastique en fonction de la vitesse de cisaillement pour toute la largeur de la courbe d'écoulement, séparément de l'effort de cisaillement nécessaire pour vaincre le frottement interne (viscosité apparente). Parmi les facteurs qui influencent le plus la solidification, la concentration et la température de la dispersion ont été maintenues à des valeurs constantes, et l'influence de la teneur en électrolyte a été réduite à une valeur insignifiante par une dialyse efficace de la dispersion.

Les examens ont montré que, dans ces conditions, la contrainte limite dépend de la vitesse de cisaillement dans une mesure bien plus grande que celle généralement connue. Une variation de plusieurs ordres de grandeur de la vitesse de cisaillement s'accompagne d'un changement continu de la contrainte limite. Pour des vitesses de cisaillement croissantes, celle-ci décroît d'abord mais après avoir atteint une valeur limite inférieure, elle augmente à nouveau considérablement conformément au phénomène de rhéopexie, pour décroître encore lors du nouvel accroissement de la vitesse de cisaillement. Pour des vitesses de cisaillement décroissantes, les valeurs de la contrainte limite se régénèrent thixotropiquement (solidification) varient d'une manière semblable, mais leur signe est contraire et la stabilité des valeurs s'accroît.

Les auteurs, éliminant cette fois encore tous les facteurs et influences variables, ont aussi déterminé la dépendance, par rapport au temps, ainsi que la valeur limite supérieure de la régénération thixotropique.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВОДНЫХ ДИСПЕРСИЙ БЕНТОНИТА II.

Я. БАРНА и В. МАРШАЛКО

РЕЗЮМЕ

В связи с реологическими исследованиями дисперсий бентонита сообщается о результатах измерений зависимости тиксотропного упрочения и скорости сдвига при освобождении от любых прочих влияний. Авторы имели возможность с помощью соответствующего оборудования определить значение упругого краевого напряжения в функции от скорости сдвига по всей ширине кривой текучести, отделив его от значения силы среза, необходимой для уравнивания внутреннего трения (кажущейся вязкости). На протяжении опыта, из числа факторов, наиболее значительно влияющих на упрочение, концентрация дисперсии и ее температура поддерживались постоянными, влияние же содержания электролита было снижено до минимума с помощью эффективной диализации.

В результате опыта установлено, что при таких условиях значение краевого напряжения является функцией скорости сдвига в гораздо большей мере, чем это было известно. При изменении скорости сдвига в пределах нескольких величин значение краевого напряжения меняется также непрерывно. При возрастающем сдвиге, вначале уменьшается, а затем, после достижения нижнего предела, в соответствии с явлением реопексии, снова значительно возрастает, чтобы с дальнейшим ростом скорости сдвига вновь уменьшиться. При уменьшающихся скоростях сдвига краевое напряжение (упрочение) имеет сходное изменение, но обратного смысла, и стабильность отдельных значений возрастает.

Авторы установили (также с исключением всех переменных факторов и влияний) зависимость тиксотропной регенерации от времени и получаемый от случая к случаю верхний предел ее.

DIE SICHERHEIT DER BAUKONSTRUKTIONEN

Prof. A. M. FREUDENTHAL

COLUMBIA UNIVERSITY, NEW YORK

(Eingegangen am 20. Februar 1963)

Das Bemessungsverfahren der Konstruktionen besteht in drei Schritten: (a) Lastanalyse, (b) Spannungsanalyse und (c) Sicherheitsanalyse. Der meiste Aufwand an Forschungsarbeit ist in Schritt (b) konzentriert mit beschränktem Aufwand bessere Kenntnis in (a) zu erhalten; die Wichtigkeit der Sicherheitsanalyse ist noch nicht genügend erkannt. Es wird versucht, die wahrscheinlichkeitstheoretische Natur des Begriffes der Sicherheit zu entwickeln und Methoden für die Berechnung eines rationalen Sicherheitskoeffizienten und der zugehörigen Bruchwahrscheinlichkeit aufzustellen. Für angenommene Verteilungen von Lasten und Festigkeit von logarithmisch-normalem und extremalem Typus werden die Beziehungen zwischen Sicherheitsfaktoren und zugehöriger Bruchwahrscheinlichkeiten in der Form von Diagrammen dargestellt.

I. Allgemeine Gesichtspunkte

Das Bemessungsverfahren für statische Lasten besteht aus den folgenden drei Schritten:

- a) die Ermittlung der einwirkenden Kräfte;
- b) die Berechnung der dadurch verursachten Spannungen;
- c) die Bestimmung der notwendigen Querschnitte auf Grund der Betrachtung der Sicherheit der Konstruktion.

Der Hauptaufwand an Arbeit wird gewöhnlich durch den zweiten Schritt bedingt, vor allem darum, weil dieser Schritt mit dem Lösen von Systemen von linearen Gleichungen oder linearen Differentialgleichungen verbunden ist, was verhältnismäßig wenig Nachdenken erfordert, da der größte Teil des erforderlichen Nachdenkens im Laufe der letzten 100 Jahre bereits vollzogen wurde. Dieser Schritt ist daher auch am leichtesten zu lehren und zu erlernen. Überdies ist in den letzten Jahren auch die dazu erforderliche Kenntnis fast überflüssig geworden, da die großen Rechenmaschinen diese Gleichungssysteme in viel kürzerer Zeit zu lösen vermögen als eine noch so große Gruppe der besten Bemessungsingenieure.

Diese Vereinfachung des zweiten Schrittes geht jedoch keinesfalls Hand in Hand mit dem Bestreben, den ersten und vor allem den dritten Schritt irgendwie zu rationalisieren. Im Gegenteil, es wird besonders von Mathematikern und Physikern angenommen, daß durch die Entwicklung der spannungs-

berechnenden Rechenmaschinen der Ingenieur überflüssig geworden ist und mit Vorteil und Ersparnis durch den Maschinenoperateur ersetzt werden kann.

Daß die Schritte *a)* und *c)* überhaupt als wesentlich existieren, ist oft nicht einmal den Ingenieuren selbst klar, die Lasten und zulässige Spannungen aus Handbüchern entnehmen, ohne sich Gedanken darüber zu machen, welchen Sinn diese Zahlen haben. Sie glauben annehmen zu dürfen, daß die Vorschriften, die die Lasten festlegen und auch die Spannungen auf Grund von Materialprüfungszahlen definieren, — indem sie diese Zahlen durch einen sogenannten Sicherheitskoeffizienten dividieren —, von Behörden verfaßt sind, die doch alles richtig überlegen nach dem alten Sprichwort: »Wem Gott ein Amt gibt, gibt er auch den Verstand.«

Jeder Ingenieur »weiß genau«, was der vorschriftsmäßige Sicherheitskoeffizient bedeutet, solange man ihn nicht nach einer eindeutigen Erklärung fragt. Er weiß auch, daß eine Konstruktion »absolut sicher« dimensioniert ist, wenn der im Handbuch angegebene Sicherheitskoeffizient verwendet wird; denn es scheint ganz selbstverständlich zu sein, daß man nicht mit einem Risiko dimensionieren darf. Und da, wie schon MORGENSTERN sagt, »nicht sein kann, was nicht sein darf«, scheint alles in bester Ordnung zu sein, solange man sich nicht fragt, was eigentlich so ein Sicherheitskoeffizient wirklich bedeutet, und in welchem Zusammenhang dieser Sicherheitskoeffizient mit der Wahrscheinlichkeit dafür steht, daß die zu dimensionierende Konstruktion alle möglichen Lasten, die sie im Verlaufe ihrer Existenz zu tragen hat, auch wirklich ohne Schaden tragen kann.

In der konventionellen Dimensionierung wird angenommen, daß der Sicherheitskoeffizient das Verhältnis der Festigkeit für zulässigen Spannung ist. Dies setzt voraus, daß man weiß oder wissen kann, was die Festigkeit ist, und auch was Spannung hier bedeutet, und warum man die eine durch die andere dividieren soll. Da anzunehmen ist, daß der Materialprüfer weiß, was die Festigkeit ist, — sonst wäre er ja kein Materialprüfer —, und da die Spannung aus einer »exakten Rechnung« kommt und daher richtig sein muß (und zwar desto »richtiger«, je genauer die Rechnung ist), so scheint es selbstverständlich zu sein, daß die Konstruktion desto sicherer ist, je größer das Verhältnis der Festigkeit zur Spannung angenommen wird, und daß sie unter keinen Umständen brechen kann, solange dieses Verhältnis wesentlich größer als Eins ist. Die Bedeutung des Sicherheitskoeffizienten scheint daher ganz klar zu sein, solange man nicht nachprüft, ob alles was »man so genau weiß«, nicht nur eine Kombination von Illusionen ist.

Der Ingenieur, der viel mit Materialprüfern zu tun hat, weiß, daß jeder Materialprüfer sorgfältig betont, daß er — zwar das Material prüft und gewisse Zahlen aus dieser Prüfung erhält — keinesfalls verantwortlich dafür sein kann, was der dimensionierende Ingenieur mit diesen Zahlen macht. Der Operateur der Rechenmaschine wird immer betonen, daß die Resultate der Berech-

nung, die er unternimmt, ganz genau sind, was jedoch keineswegs bedeutet, daß die Resultate einen physikalischen Sinn und Inhalt haben müssen; dies gehe ihn kaum etwas an und interessiere ihn im allgemeinen auch gar nicht. Die einwirkenden Lasten, die aus Vorschriften kommen, und die irgend jemand dort hineingesetzt haben muß, der weiß, was er tut, sowie auch die Sicherheitskoeffizienten oder die zulässigen Spannungen, sind gewöhnlich das Resultat der Verhandlungen in Komiteen, in denen die Vertreter der Industrie, die das Material produzieren und verkaufen und daher möglichst viel verwenden wollen (was große Sicherheitskoeffizienten verlangt), mit den Vertretern der Bauorganisationen, die aus ökonomischen Gründen möglichst wenig Material kaufen wollen (was kleine Sicherheitskoeffizienten verlangt), sich nach langem Handeln auf gewisse Zahlen einigen. So wurden zum Beispiel während des letzten Krieges in den Vereinigten Staaten die Sicherheitsfaktoren für Stahlkonstruktionen herabgesetzt, als die Industrie wegen Kriegsverbrauches nicht genug für die Bauindustrie liefern konnte; sofort nach Kriegsende jedoch wurden diese Faktoren wieder erhöht, ein Vorgang, der die »wissenschaftliche Grundlage« des konventionellen Begriffes der Sicherheit und des Sicherheitsfaktors treffend illustriert.

Es ist wohl ziemlich absurd, auf der einen Seite die Spannungsrechnungen immer mehr zu verfeinern, wenn man dann auf die gröbste Weise die errechneten Spannungen mit Zahlen, den »zulässigen Spannungen« vergleicht, die aus an sich zweifelhaften Materialprüfungszahlen durch Division durch einen noch zweifelhafteren empirischen Faktor erhalten werden, um die Dimensionen der Konstruktionen festzulegen. Eine rationale Analyse der Sicherheit ist daher keinesfalls ein Luxus, wie sie noch heute in Ingenieurskreisen angesehen wird, sondern eine absolute Notwendigkeit.

Seit Jahren versuchen mehr oder weniger isolierte Gruppen von Ingenieuren sich ernstlich mit der Frage der Sicherheit der Baukonstruktionen zu beschäftigen, und es ist interessant festzustellen, daß der Erfolg dieser Gruppen — ob sie nun in Spanien, England, in der Sowjet-Union, Schweden, oder in den Vereinigten Staaten arbeiten — nicht sehr ermutigend ist. Bauingenieure sind noch heute im allgemeinen überzeugt, daß Intuition und konventionelle Vorschriften genügen, um sichere Konstruktionen zu entwerfen. Und es muß tatsächlich zugegen werden, daß das konventionelle Bemessungsverfahren ausreichend zu sein scheint, solange Überdimensionierung nur finanzielle Folgen hat und sich allein in erhöhten Kosten des Materials auswirkt. Wenn jedoch die Konstruktion für die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit dimensioniert werden muß, und erhöhter Materialverbrauch diese Leistungsfähigkeit herabsetzt, wird die Einführung eines rationalen Dimensionierungsverfahrens eine absolute Notwendigkeit.

Daher hat das intuitive Verfahren zuerst im Flugzeugbau versagt, und der Begriff des Dimensionierens für eine angemessene Wahrscheinlichkeit des

Bruches in der Flugzeugindustrie zuerst Eingang gefunden. In der Bauindustrie, in der das Resultat einer Überdimensionierung einer Baukonstruktion nur Verschwendung von Geld ist, und große Baukonstruktionen gewöhnlich durch Anleihen, d. h. über mehrere Generationen finanziert werden, scheint Geldverschwendung nicht als ernster Fehler betrachtet zu werden, wenn man bedenkt, daß durch größeren Materialverbrauch nicht nur mehr Arbeitskräfte beschäftigt werden, doch oft auch, besonders in den Vereinigten Staaten, eine Verbiligung durch Standardisierung der Konstruktionselemente erzielt werden kann. Im Flugzeugbau jedoch beeinflußt ein Überdimensionieren die Operationsfähigkeit des Flugzeuges, und gewisse Leistungen sind nur dann zu erzielen, wenn das Gewicht der Konstruktion auf ein Minimum reduziert wird. In diesem Falle ist es daher nötig, sich darüber klar zu werden, daß eine Dimensionierung, die nicht auf einer annehmbaren Wahrscheinlichkeit des Bruches basiert ist, zu Resultaten führen muß, die jeden Fortschritt im Flugzeugbau unterbinden.

Die wahrscheinlichkeitstheoretische Basis des Dimensionierens beruht auf der Erkenntnis, daß die von der Konstruktion zu tragenden Lasten S nur durch eine statistische Population von Lasten dargestellt werden können, die durch eine Verteilungsfunktion $f_S(S)$ und eine dazugehörige Summenfunktion

$$F_S(S) = \int_0^S f_S(S) dS$$

beschrieben sind, während die Festigkeit R einer statistischen Population von nominell identischen Konstruktionen durch eine Verteilungsfunktion $f_R(R)$ und eine dazugehörige Summenfunktion

$$F_R(R) = \int_0^R f_R(R) dR$$

der Festigkeitswerte beschrieben werden kann. Die Bruchwahrscheinlichkeit ist daher die Wahrscheinlichkeit

$$P_F = P(R < S) = P[(R - S) < 0] = P[R/S < 1], \quad (1.1)$$

vorausgesetzt, daß $S, R > 0$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist die stochastische Grenze der Proportion von Konstruktionen, welche brechen, wenn aus der Population von Lasten eine willkürliche Last gewählt wird und auf eine willkürlich aus der Population der Konstruktionen gewählte Konstruktion einwirkt. Statistisch gesprochen, sind die Funktionen $F(R-S)$ oder $F(R/S)$ als Grenzverteilung der gemeinsamen Verteilungsfunktionen von R und S zu berechnen. Daher ist

$$P_F = \int_0^\infty F_R(S) f_S(S) dS = \int_0^\infty \bar{F}_S(R) f_R(R) dR \quad (1.2)$$

mit $(S, R > 0)$ und $\bar{F}_S = 1 - F_S$.

Die Rückkehrzahl des Bruches, d. h. die erwartete Zahl von Belastungen zwischen Brüchen ist daher $T_R = P_F^{-1}$.

P_F ist nicht die Wahrscheinlichkeit des Versagens einer Konstruktion unter einer Anzahl von Lasten, sondern nur unter einer einzelnen Last. Auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie wird die Überlebenswahrscheinlichkeit unter einer Zahl N von Lasten

$$L(N) = (1 - P_F)^N \sim \exp(-NP_F) \quad (1.3)$$

für $P_F \ll 1$, vorausgesetzt, daß P_F unabhängig von N ist.

Gleichung (1.3) ist die bekannte exponentielle »Überlebensfunktion« für Zufallsbrüche. Für diesen Fall ist die Risiko-Funktion $r(N)$, welche die Bruchwahrscheinlichkeit unter der N -ten Belastung definiert,

$$r(N) = \frac{p(N)}{L(N)} = -\frac{dL(N)}{dN} \frac{1}{L(N)} = -\frac{d}{dN} \ln L(N), \quad (1.4)$$

eine Konstante

$$r(N) = P_F = 1/T_R. \quad (1.5)$$

2. Der Sicherheitskoeffizient

Die Fehlerwahrscheinlichkeit P_F unter einmaliger Belastung bezieht sich auf die statistische Population nominell identischer Konstruktionen von statistisch veränderlicher Tragfähigkeit R , von denen jede einer einmaligen statistisch veränderlichen Last S unterworfen ist. Daher ist P_F die Proportion der Konstruktionen, die erwartungsgemäß gebrochen werden, oder die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen dieser Konstruktionen, unter der Lasteinwirkung zu brechen. Wenn nun der Sicherheitskoeffizient einer Konstruktion dieser statistischen Population als das Verhältnis

$$\nu = R/S \quad (2.1)$$

definiert wird, so ist es klar, daß ν für jede Konstruktion aus dieser »Bevölkerung« verschieden ist. Das Verhältnis ν ist tatsächlich eine statistische Veränderliche mit Verteilungsfunktion $p(\nu)$ und Summenfunktion

$$P(\nu) = \int_0^{\nu} p(\nu) d\nu,$$

welche auf Grund von Gleichung (2.1) durch die Verteilungsfunktionen $f_R(R)$ und $f_S(S)$ eindeutig festgelegt ist.

Da Bruch eintritt, wenn $\nu < 1$, ist die Bruchwahrscheinlichkeit gleich der Wahrscheinlichkeit, welche durch die Ordinate der Funktion $P(\nu)$ für $\nu = 1$ gegeben ist. Daher bestimmt

$$P_F = \int_0^1 p(\nu) d\nu$$

direkt die Bruchwahrscheinlichkeit.

Es ist von Interesse, den Zusammenhang zwischen der Bruchwahrscheinlichkeit und dem Sicherheitskoeffizienten zu untersuchen, unter der neuen Anschauung, daß dieser Koeffizient in Wirklichkeit eine statistische Veränderliche mit einer Verteilungsfunktion ist, und daher durch die charakteristischen Werte einer solchen beschrieben werden muß. Jeder »konstante« Wert dieser Veränderlichen hat daher eine gewisse Wahrscheinlichkeit, nicht erreicht oder überschritten zu werden.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\nu)$ des Quotienten $\nu = R/S$ kann als die Grenzverteilung der gemeinsamen Verteilungsfunktion von ν und S ausgewertet werden, so daß

$$P(\nu) = \int_0^{\infty} F_R(\nu S) f_S(S) dS. \quad (2.2)$$

Diese Gleichung geht für $\nu = 1$ in Gleichung (1.2) über, da selbstverständlich $P_F = P(\nu)_{\nu=1}$ ist.

Für gewisse gegebene Verteilungsfunktionen für R und S sind die zugehörigen Funktionen $P(\nu)$ ausgewertet worden. Diese Funktionen sind (a) die logarithmisch normalen und (b) die extremalen. Beide Funktionstypen haben ihre berechtigten Anwendungsbereiche: die logarithmisch normalen im Falle der Kenntnis des gesamten Verteilungsbereiches der Funktionen $F_R(R)$ und $F_S(S)$, die extremalen im Falle der Beschränkung der Kenntnis der Verteilung der Lasten S im Bereich der größten Werte und der Verteilung der Bruchwiderstände R im Bereich der kleinsten Werte. Die Bedeutung eines »mittleren« Sicherheitsfaktors ist selbstverständlich in beiden Fällen verschieden: im ersten Falle bezieht er sich auf die Mitte *aller* möglichen Werte, im letzten Falle auf die Mitte der Regionen extremaler Werte.

a) logarithmisch normale Verteilung :

$$F_R(R) = \Phi [\log (R/\check{R})/\delta_R] \quad (2.3)$$

und

$$F_S(S) = \Phi [\log (S/\check{S})/\delta_S] \quad (2.4)$$

mit

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2) du. \quad (2.5)$$

\check{R} und \check{S} sind die Medianwerte von R und S und $\delta_R = \sigma(\log R)$ und $\delta_S = \sigma(\log S)$. Es ist selbstverständlich, daß die Verteilung von $\log \nu = \log (R/S) = \log R - \log S$ normal ist, da die Verteilungen von $\log R$ und $\log S$ normal sind, mit Mittelwert $\log (\check{S}/\check{R})$ und $\delta = \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}$.

Daher ist

$$P(\nu) = \Phi [\log (\nu/\nu_0)/\delta], \quad (2.6)$$

wobei $v_0 = \check{R}/\check{S}$ der »zentrale Wert« des Sicherheitskoeffizienten ist, und

$$P_F = P(v)_{v=1} = \Phi \left[-(\log v_0)/\delta \right]. \quad (2.7)$$

Für Beobachtungen sind gewöhnlich die Variationskoeffizienten $v_R = \sigma_R(R)/\bar{R}$ und $v_S = \sigma_S(S)/\bar{S}$ bekannt, wobei \bar{R} und \bar{S} die Mittelwerte von R und S sind. Es kann leicht gezeigt werden, daß

$$(\sigma_R/\check{R})^2 = v_R^2 \exp(\delta_R \ln 10)^2 \quad (2.8)$$

und

$$(\sigma_S/\check{S})^2 = v_S^2 \exp(\delta_S \ln 10)^2 \quad (2.5)$$

ist, was die Transformation von δ_R und δ_S in Variationskoeffizienten, die auf Medianwerte bezogen sind, ermöglicht.

(b) *Extremale Verteilungen :*

Wenn die dritte asymptotische (oder Weibull) Verteilung der kleinsten Werte für die Bruchwiderstände eingeführt wird

$$F_R(R) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{R}{\check{R}} \right)^a \right] \quad (2.10)$$

und die zweite asymptotische (oder Fréchet) Verteilung der größten Werte für die Lasten eingeführt wird

$$F_S(S) = \exp \left[- \left(\frac{S}{\check{S}} \right)^{-\beta} \right] \quad (2.11)$$

wobei \check{R} und \check{S} die »charakteristischen« Werte (Modelwerte) der Verteilungen und α und β verkehrt proportional zu $\sigma(\log R)$ und $\sigma(\log S)$ sind, kann die Verteilung $P(v)$ aus den Gleichungen erhalten werden

$$P(v) = 1 - \int_0^{\infty} \exp \left[-t - \left(\frac{v}{v_0} \right)^a t^{-\frac{a}{\beta}} \right] dt, \quad (2.12)$$

oder

$$P(v) = 1 - \int_0^{\infty} \exp \left[-t - \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\beta} t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \right] dt, \quad (2.13)$$

wobei $t = (S/\check{S})^{-\beta}$ und $v_0 = \check{R}/\check{S}$. Die Bruchwahrscheinlichkeit ist daher

$$P_F = P(v)_{v=1} = 1 - \int_0^{\infty} \exp \left[-t - \left(\frac{1}{v_0} \right)^a t^{-\frac{a}{\beta}} \right] dt. \quad (2.14)$$

Die Beziehungen in der Form von Gamma-Funktionen

$$(\sigma_R/\check{R})^2 = \Gamma \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) - \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \quad (2.15)$$

und

$$(\sigma_S/\tilde{S})^2 = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2 \quad (2.16)$$

ermöglicht die Transformation von α und β in Variationskoeffizienten, die auf den »charakteristischen Werten« basiert sind.

In der konventionellen Dimensionierung wird gewöhnlich angenommen, daß der Sicherheitskoeffizient auf eine »maximale« Last und eine »minimale« Bruchfestigkeit bezogen werden kann. Jedoch, mit Ausnahme von Sonderfällen, in denen nicht-statistische Maximallasten festgelegt werden können (Wasserbehälter, Eisenbahnbrücken, Lagerhäuser), sind Lasten statistisch definiert, so daß keine absoluten Maximalwerte bestehen können, ebenso wenig wie absolute Minimalwerte der Bruchfestigkeiten existieren. Es ist jedoch möglich, den statistisch definierten Sicherheitsquotienten nicht auf Zentralwerte von R und S , sondern auf solche Werte zu beziehen, die eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit q haben, überschritten (im Falle der Lasten), oder p , nicht erreicht (im Falle der Bruchfestigkeiten) zu werden. Unter diesen Bedingungen ist

$$\bar{v} = R_p/S_q = v_0 r_p/s_q, \quad (2.17)$$

wobei für die logarithmisch-normale Verteilung $R_p = r_p\check{R}$, $S_q = s_q\check{S}$ und $v_0 = \check{R}_q/\check{S}$, für die extremalen Verteilungen $R_p = r_p\check{R}$, $S_q = s_q\check{S}$ und $v_0 = \check{R}/\check{S}$. Die Faktoren r_p und s_q sind mit den Wahrscheinlichkeiten p und q durch folgende Beziehungen verbunden:

für die logarithmisch-normale Verteilung:

$$p = \Phi[(\log r_p)/\delta_R]; \quad q = \Phi[(\log s_q/\delta_S)]; \quad (2.18)$$

für die extremalen Verteilungen:

$$p = 1 - \exp(-r_p^\alpha); \quad q = 1 - \exp(-s_q^{-\beta}). \quad (2.19)$$

Auf Grund der Gleichungen (2.17) bis (2.19) ist es leicht möglich, die aus Gleichungen (2.7) und (2.14) ausgewerteten Beziehungen $v_0(P_F)$ in die Beziehungen $\bar{v}(P_F)$ für verschiedene Werte p und q zu transformieren. Diese Beziehungen ermöglichen einen besseren Vergleich der konventionellen Sicherheitskoeffizienten mit den statistisch basierten \bar{v} -Werten und ermöglichen daher die Untersuchung der konventionellen Werte im Lichte der wahrscheinlichkeitstheoretischen Bedeutung.

3. Diagramme

In den Abbildungen 1 bis 6 sind die Resultate der Auswertung der Gleichungen (2.6) bis (2.19) für verschiedene Werte der Variationskoeffizienten von R und S in diagrammatischer Form dargestellt worden. In den Diagrammen bedeutet die Aufschrift »Limit of Survival« die Überlebungsgrenze. In den Tabellen I und II sind die Werte des »zentralen« Sicherheitskoeffizienten

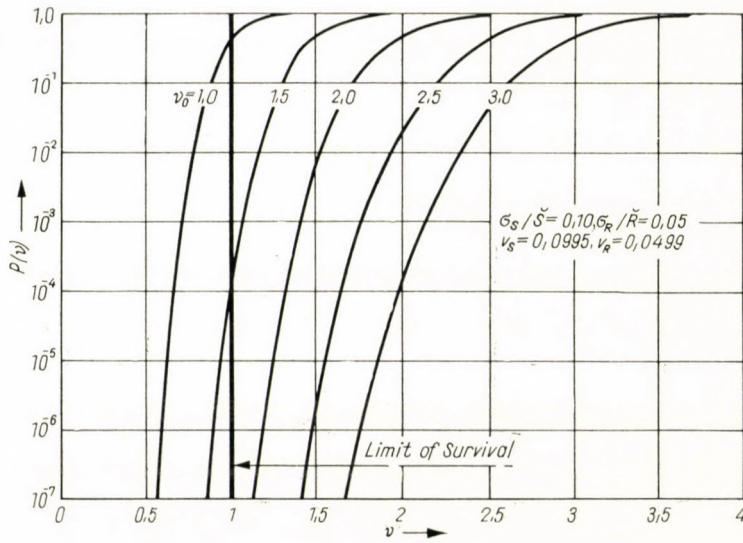


Abb. 1a

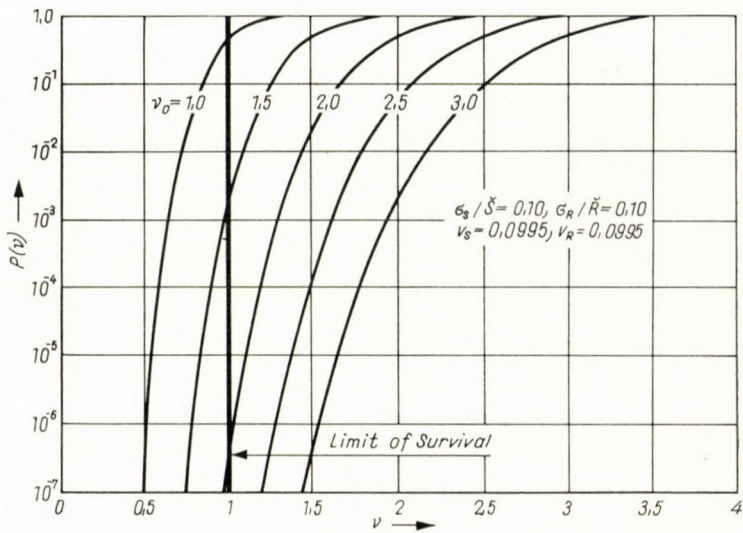


Abb. 1b

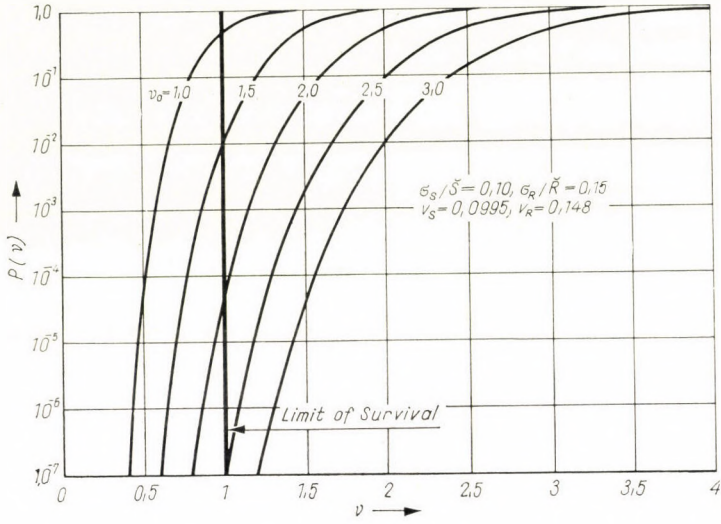


Abb. 1c

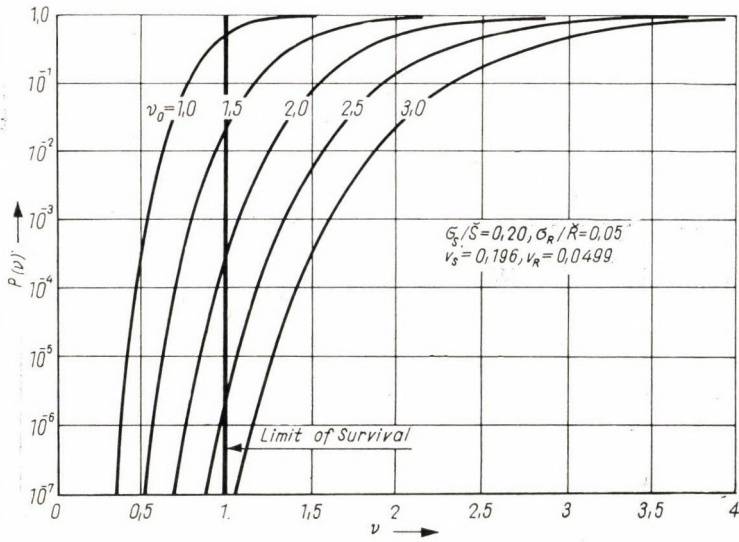


Abb. 1d

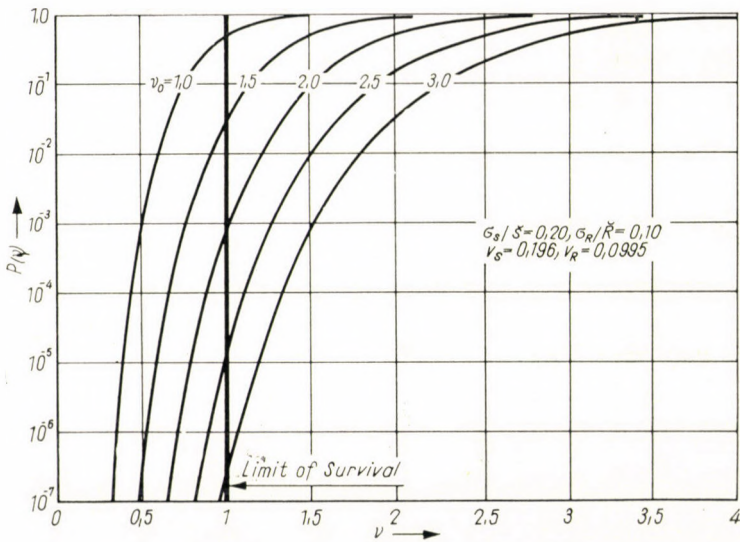


Abb. 1e

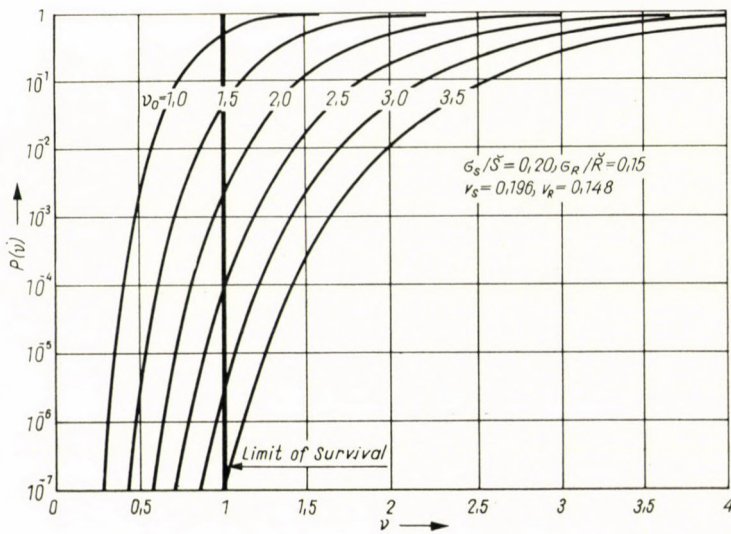


Abb. 1f

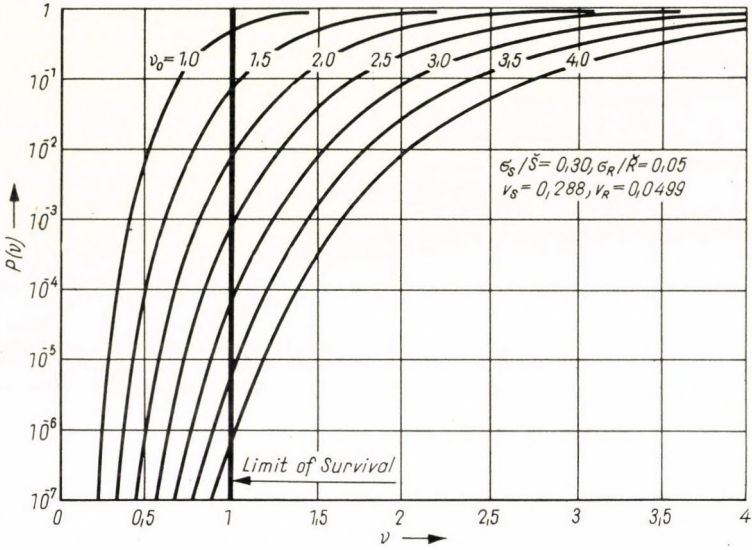


Abb. 1g

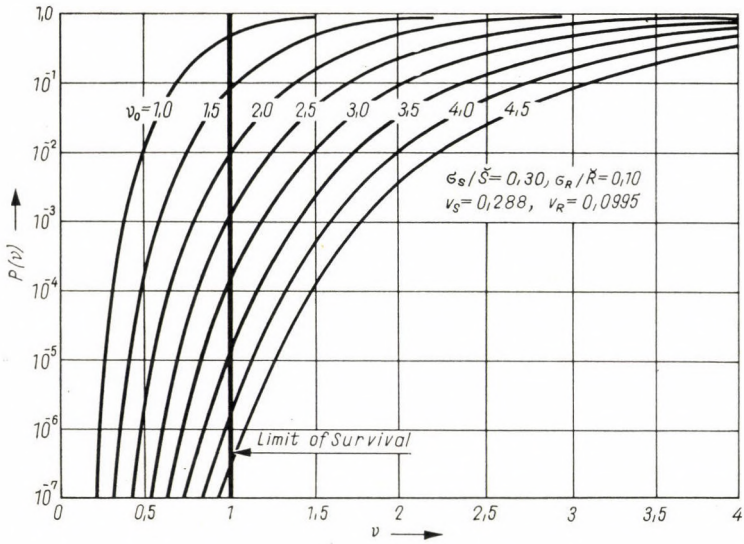
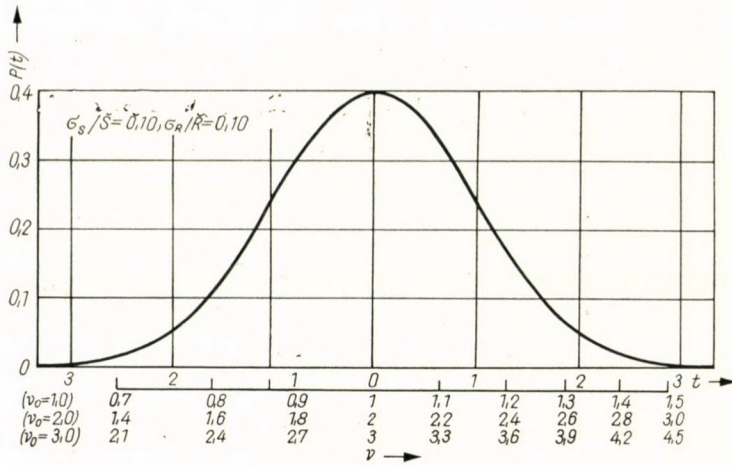
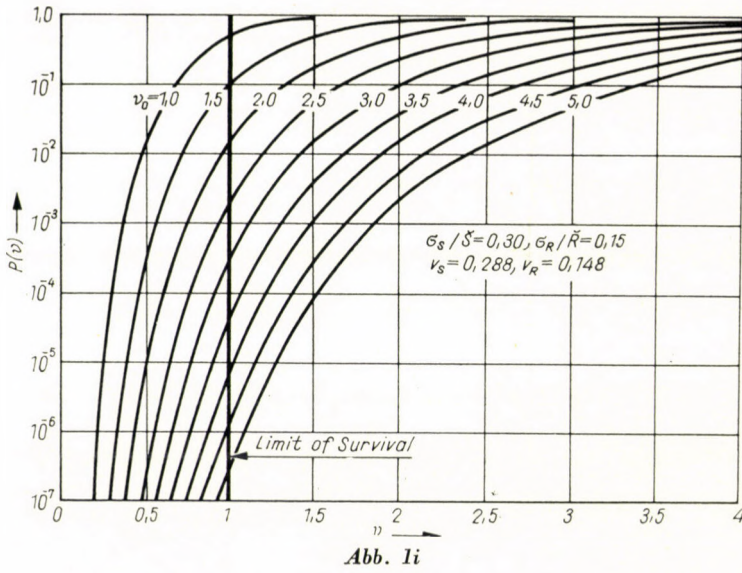


Abb. 1h



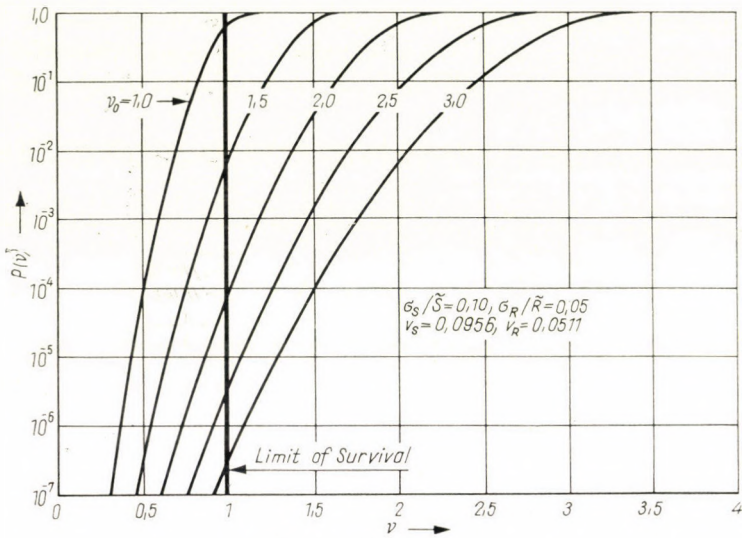


Abb. 3a

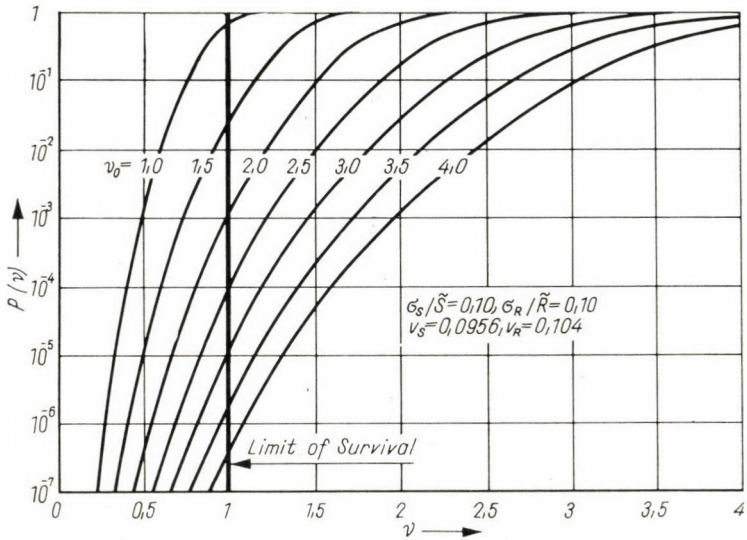


Abb. 3b

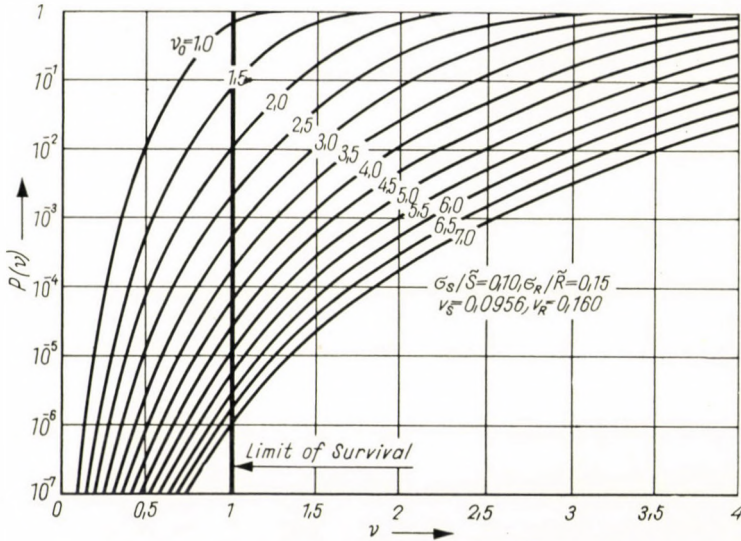


Abb. 3c

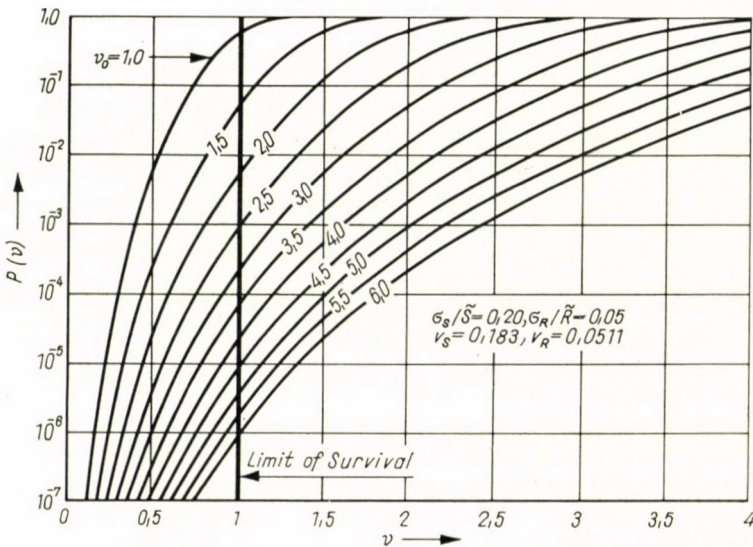


Abb. 3d

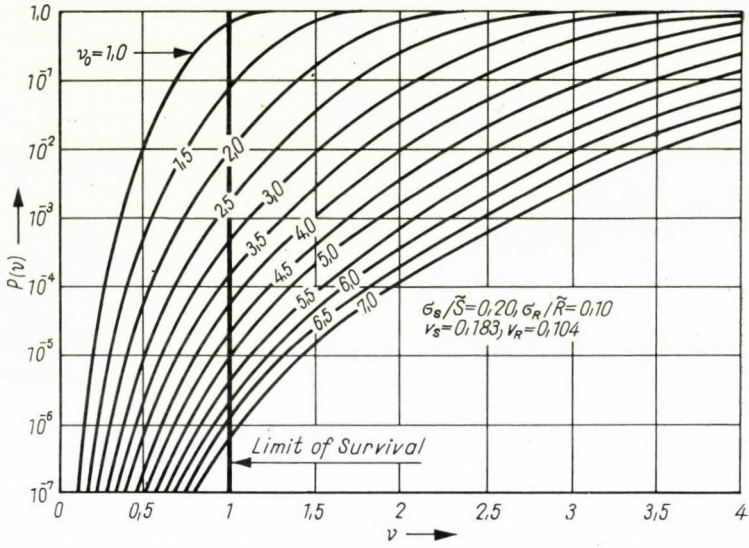


Abb. 3e

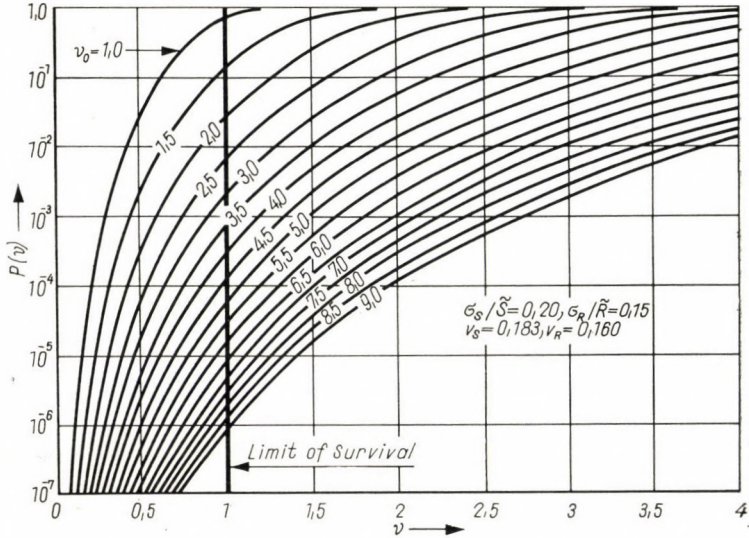


Abb. 3f

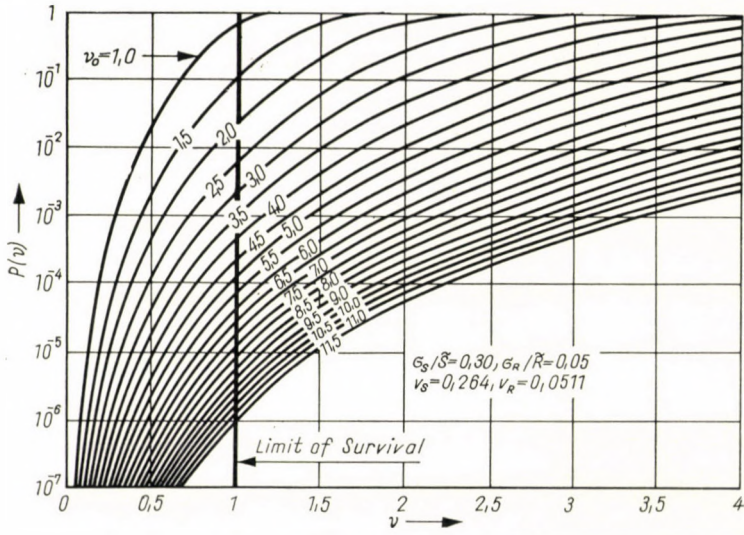


Abb. 3g

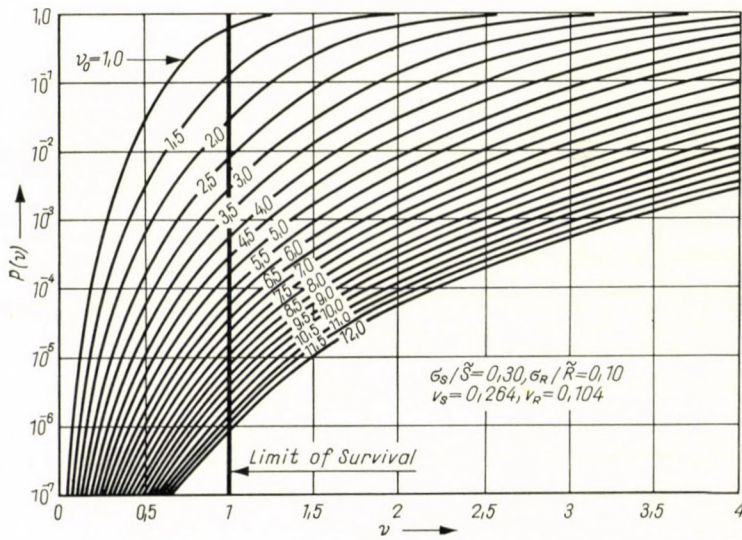


Abb. 3h

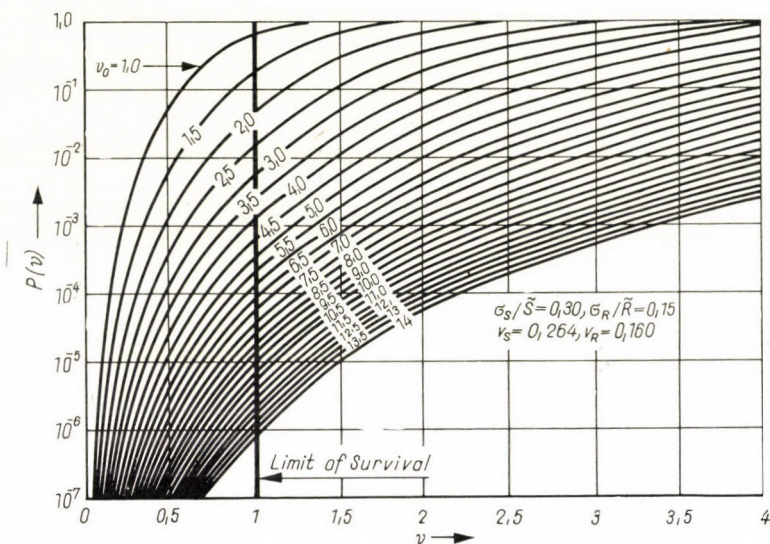


Abb. 3i

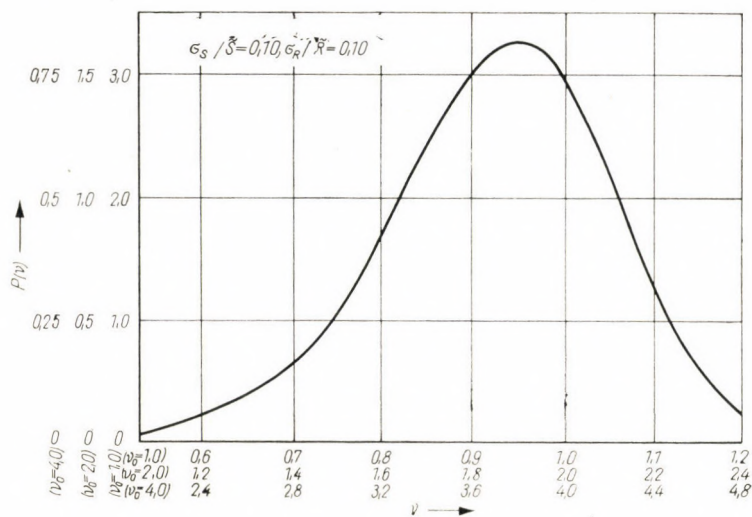


Abb. 4

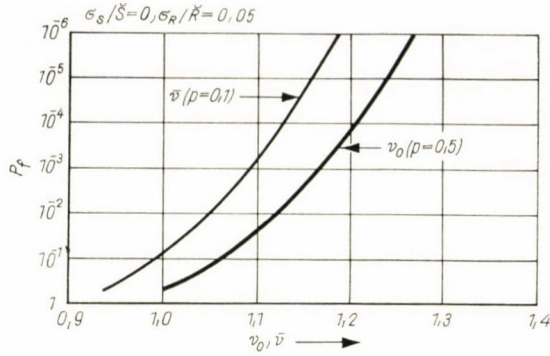


Abb. 5a

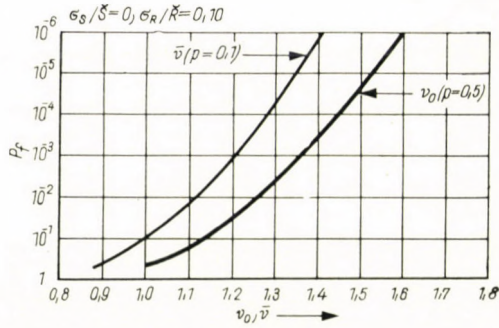


Abb. 5b

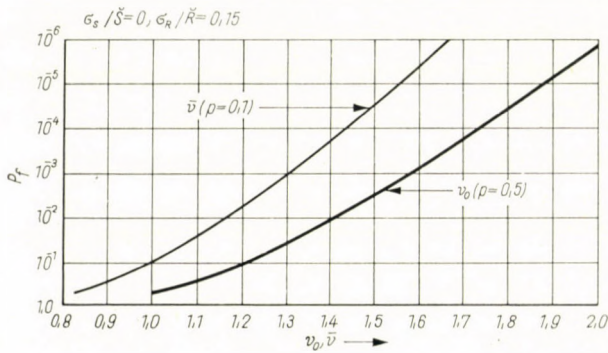


Abb. 5c

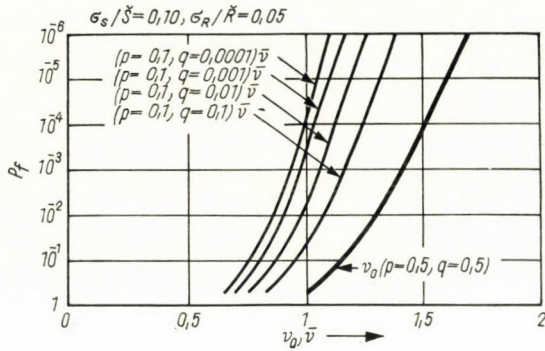


Abb. 5d

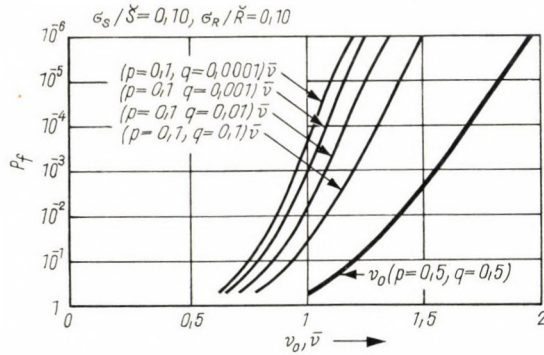


Abb. 5e

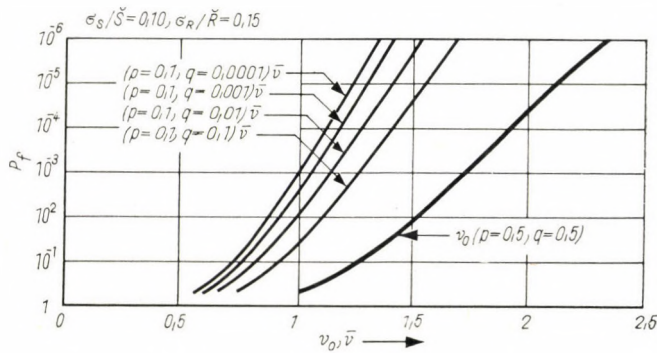


Abb. 5f

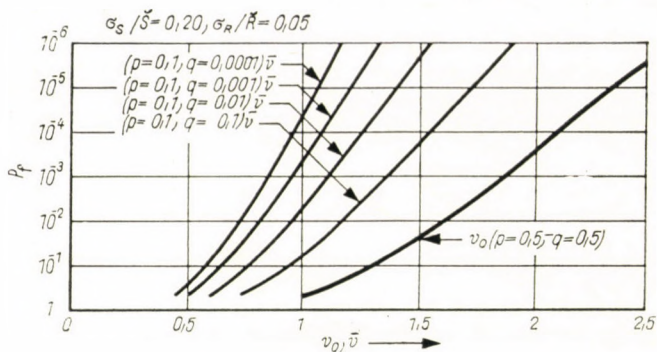


Abb. 5g

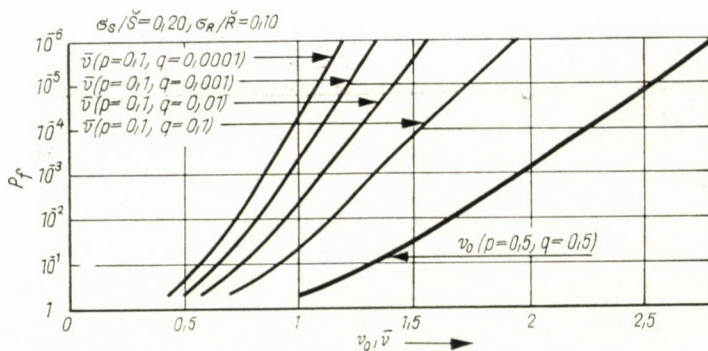


Abb. 5h

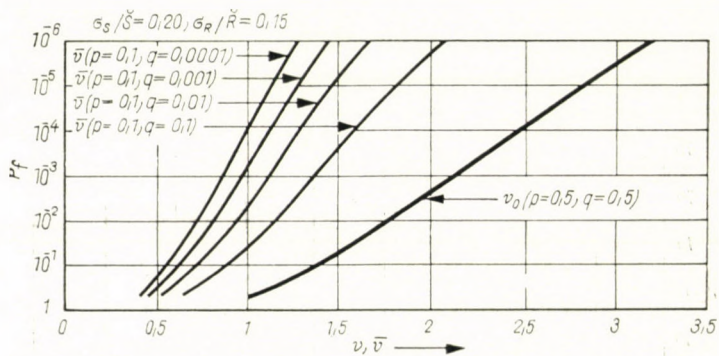


Abb. 5i

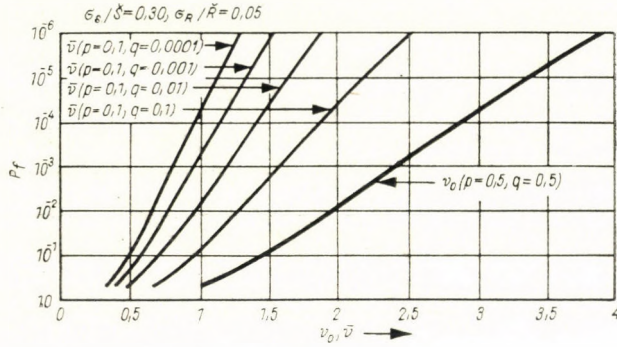


Abb. 5j

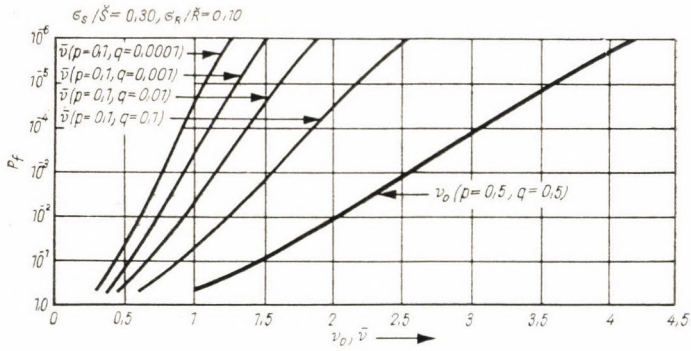


Abb. 5k

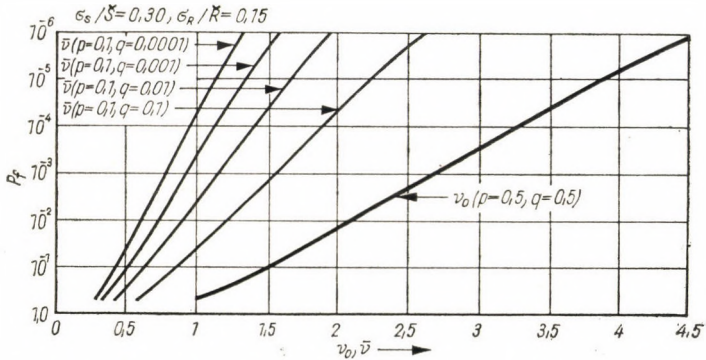


Abb. 5l

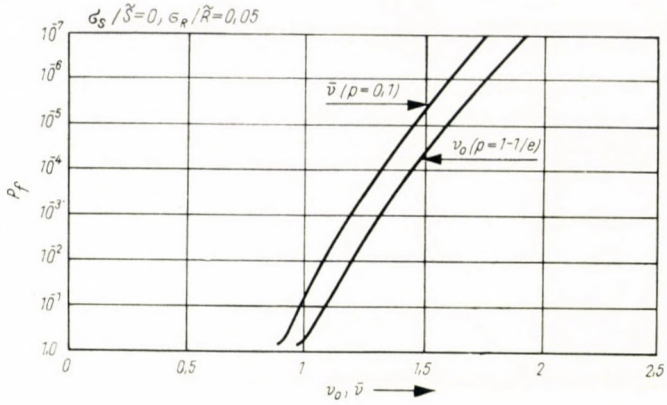


Abb. 6a

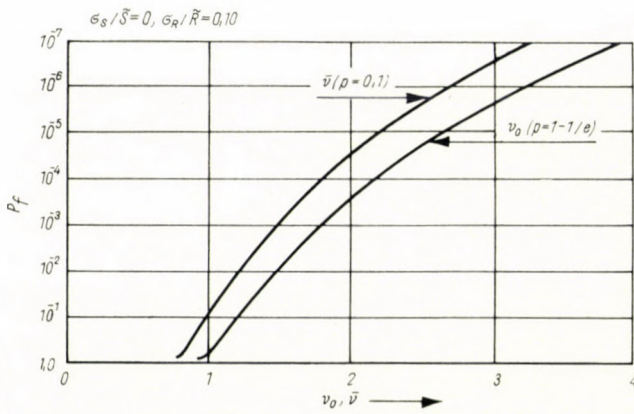


Abb. 6b

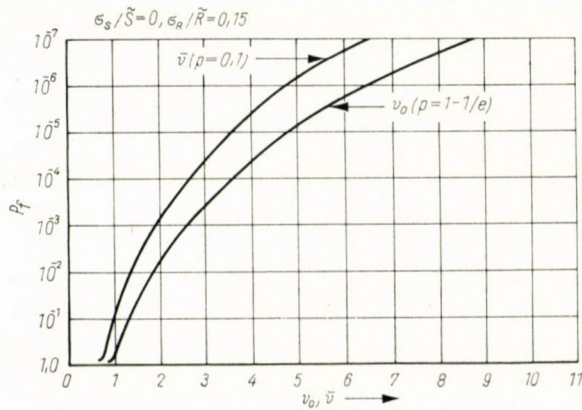


Abb. 6c

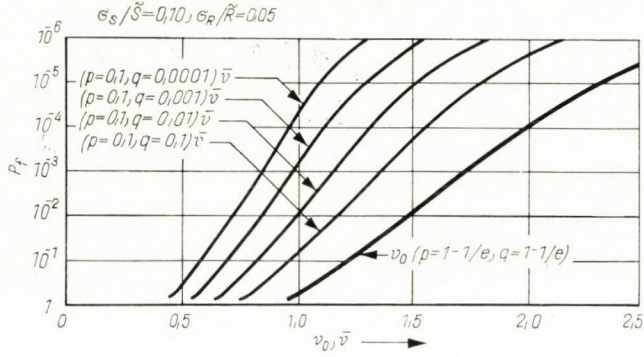


Abb. 6d

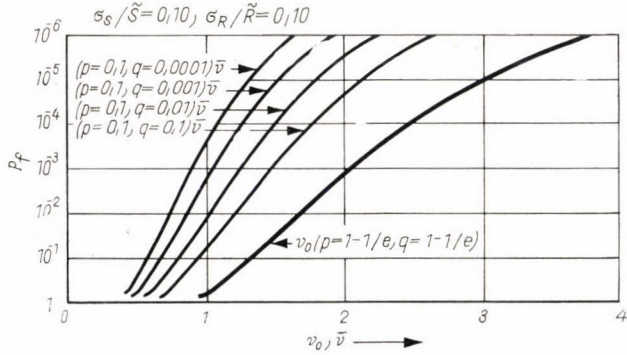


Abb. 6e

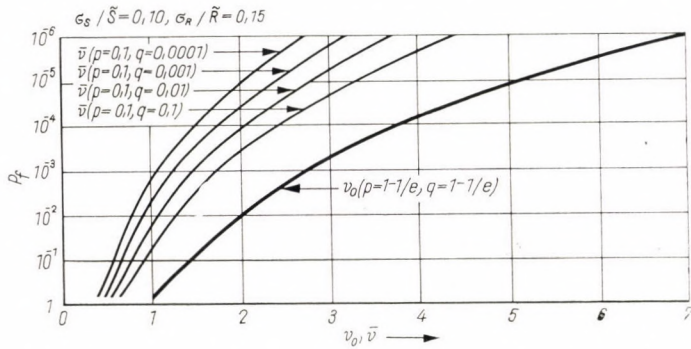


Abb. 6f

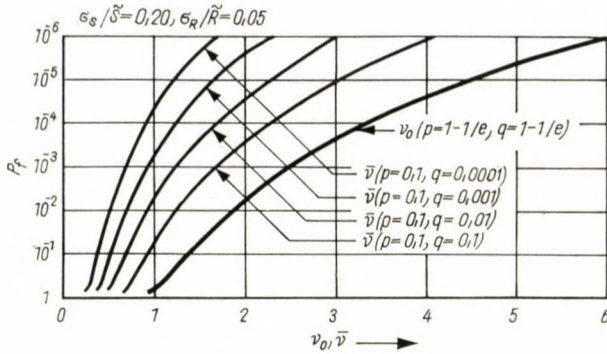


Abb. 6g

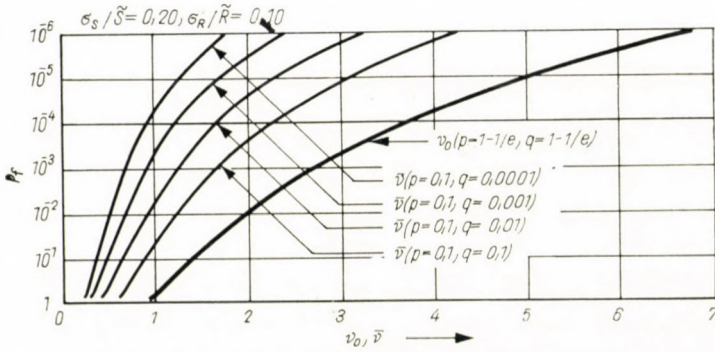


Abb. 6h

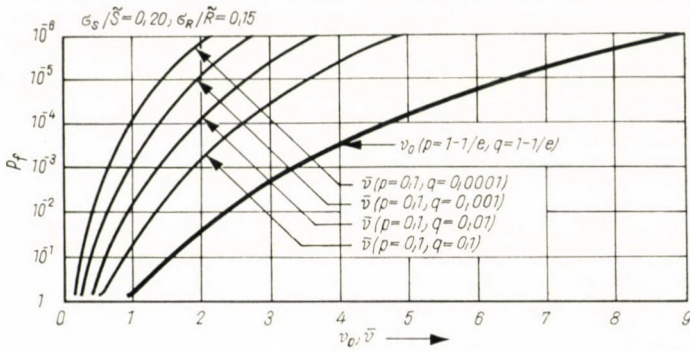


Abb. 6i

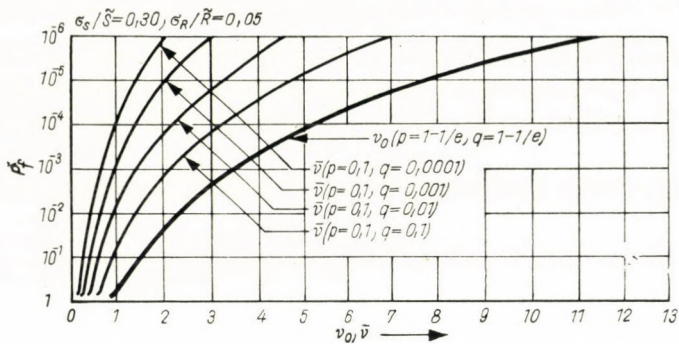


Abb. 6j

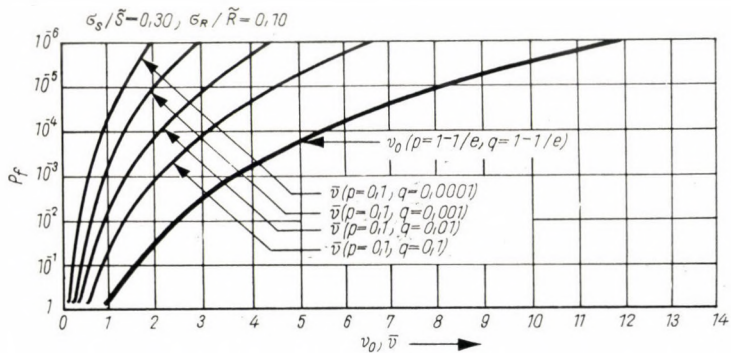


Abb. 6k

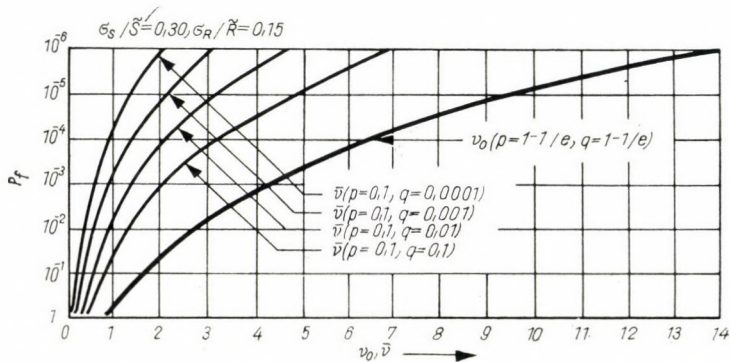


Abb. 6l

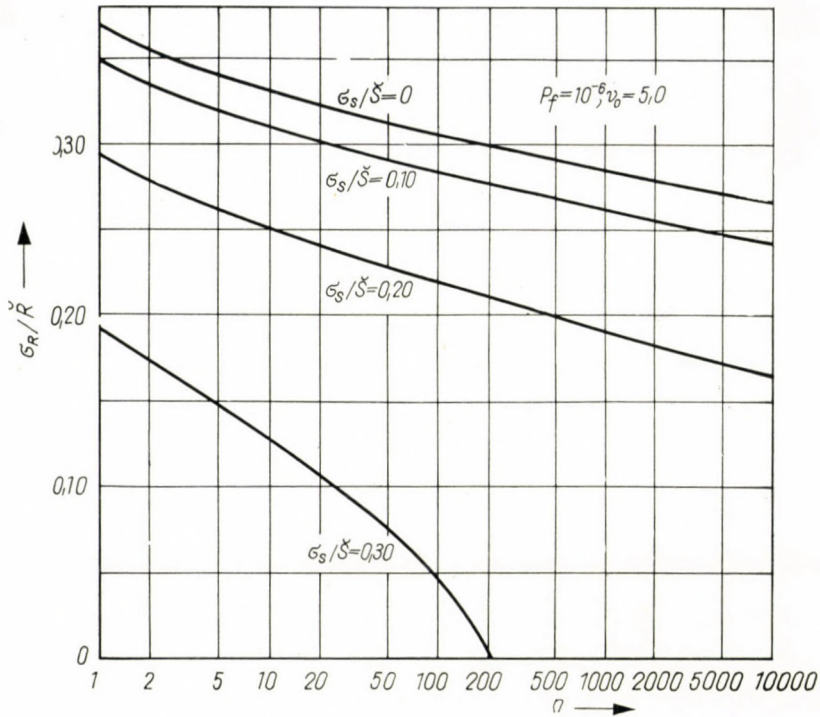


Abb. 7

Tabelle I

Verhältnis zwischen Bruchwahrscheinlichkeit P_f und zentralem Sicherheitskoeffizienten für logarithmisch normale Verteilungen von R und S

$\frac{\sigma_S}{\bar{S}}$	$\frac{\sigma_R}{\bar{R}}$	P_f					
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
0	0,05	1,06	1,12	1,17	1,20	1,24	1,27
	0,10	1,14	1,26	1,36	1,45	1,53	1,60
	0,15	1,21	1,41	1,58	1,73	1,88	2,02
0,10	0,05	1,15	1,30	1,41	1,51	1,61	1,70
	0,10	1,20	1,39	1,54	1,68	1,82	1,95
	0,15	1,26	1,51	1,74	1,93	2,14	2,33
0,20	0,05	1,29	1,60	1,86	2,11	2,35	2,60
	0,10	1,32	1,66	1,96	2,25	2,53	2,82
	0,15	1,37	1,77	2,13	2,47	2,83	3,19
0,30	0,05	1,45	1,95	2,44	2,90	3,40	3,91
	0,10	1,47	2,01	2,57	3,04	3,58	4,15
	0,15	1,50	2,10	2,68	3,26	3,89	4,55

für verschiedene Werte der Variationskoeffizienten und der Bruchwahrscheinlichkeit unter der Annahme logarithmisch-normaler und extremaler Verteilungen zusammengefaßt. Es soll nochmals darauf hingewiesen werden, daß bei einem Vergleich der Zahlen der Tabelle I mit denen der Tabelle II darauf Rücksicht zu nehmen ist, daß die Anwendung der logarithmisch-normalen

Tabelle II

Verhältnis zwischen Bruchwahrscheinlichkeit P_d und zentralem Sicherheitskoeffizienten für extremale Verteilungen von R und S

$\frac{\sigma S}{\bar{S}}$	$\frac{\sigma R}{\bar{R}}$	P_f					
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
0	0,05	1,10	1,20	1,33	1,45	1,60	1,77
0	0,10	1,20	1,50	1,80	2,17	2,60	3,20
0	0,15	1,30	1,85	2,60	3,55	4,80	6,45
0,10	0,05	1,20	1,50	1,75	2,00	2,30	2,75
0,10	0,10	1,30	1,70	2,05	2,50	3,00	3,70
0,10	0,15	1,45	2,00	2,75	3,80	5,20	6,90
0,20	0,05	1,40	1,80	2,50	3,35	4,40	6,00
0,20	0,10	1,45	2,00	2,70	3,60	4,90	6,90
0,20	0,15	1,60	2,30	3,40	4,70	6,40	8,85
0,03	0,05	1,50	2,30	3,50	5,20	7,70	11,30
0,30	0,10	1,60	2,45	3,70	5,50	8,20	11,80
0,30	0,15	1,70	2,70	4,25	6,35	9,50	14,00

Verteilung die Berücksichtigung der Gesamtverteilungen von R und S voraussetzt, während die Extremalverteilungen sich nur auf die kleinsten Werte der Bruchwiderstände und die größten Werte der Lasten beziehen. In der gesamten statistischen Bevölkerung von Konstruktionen und Lasten ist die Zahl der extremalen Werte sehr gering, so daß um beide Tabellen miteinander vergleichen zu können, die Werte P_f der Tabelle II mit dem Verhältnis der Extremalkombinationen von R und S in der gesamten Bevölkerung zu multiplizieren wären.

4. Separate Lastfaktoren für Eigengewicht und Verkehrslasten

In zahlreichen Bauvorschriften ist die Verwendung separater Lastfaktoren für Eigengewicht und Verkehrslast an Stelle eines Sicherheitskoeffizienten für die Gesamtlast vorgesehen. In anderen Worten, an Stelle der Verwendung einer Dimensionierungslast ($\bar{v}S_q$), die mit der Bruchfestigkeit R_p zu vergleichen wäre, ist vorgesehen, die Last S_q aufzuspalten in Eigengewicht S_{Dq} und Ver-

kehrslast S_{vq} und die Summe $(\alpha_q S_{Dq} + \beta_q S_{vq})$ mit der Bruchfestigkeit R_p zu vergleichen, wobei α_2 und β_2 sogenannte »Lastfaktoren« sind, die den Sicherheitsfaktor ersetzen oder in »besserer Form« ausdrücken sollen.

Tatsächlich können jedoch separate Lastfaktoren nicht mit der Bruchwahrscheinlichkeit verknüpft werden, es sei denn, daß eine Verbindung mit \bar{v} hergestellt werden kann. Das statistische Problem, das dadurch entsteht, ist daher das folgende: gegeben eine statistische Veränderliche $z = (x + y)$; welche sind die repräsentativen Werte für die statistischen Veränderlichen x und y mit den Verteilungsfunktionen $f_x(x)$ und $f_y(y)$? Es ist klar, daß es unendlich viele Kombinationen x und y gibt, deren Summe einem gegebenen Wert $z = x + y$ gleich ist; von diesen Werten können die wahrscheinlichsten x^* und y^* als repräsentativ angesehen werden. Dies sind die Werte, die die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$f_x(x)f_y(y) = f_x(x)f_y(z-x) = f_x(z-y)f_y(y) \quad (4.1)$$

zu einem Maximum machen. Daher sind x^* und y^* die Wurzeln der Gleichungen

$$\begin{aligned} d[f_x(x)f_y(z-x)]/dx &= 0; \\ d[f_x(z-y)f_y(y)]/dy &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wenn nun x und y durch S_{Dq} und S_{vq} ersetzt werden und z durch S_q , dann werden $x^* = S_{Dq}^*$ und $y^* = S_{vq}^*$. Setzt man andererseits $z = R_p$, dann werden die Wurzeln S_{Dq}^* und S_{vq}^* erhalten, da

$$R_p = S_{Dq}^* + S_{vq}^*, \quad (4.3)$$

während

$$S_q = S_{Dq} + S_{vq}. \quad (4.4)$$

Es ist jedoch $R_p = \bar{v}S_q$ während

$$S_{Dq}^* = \alpha_q S_{Dq} \quad \text{und} \quad S_{vq}^* = \beta_q S_{vq}. \quad (4.5)$$

Daher wird Gleichung (4.3)

$$R_p = \alpha_q S_{Dq} + \beta_q S_{vq}. \quad (4.6)$$

Wenn also die Verteilungen von S_{Dq} und S_{vq} bekannt sind, ist es möglich durch Lösung der Gleichungen (4.2), die Werte S_{Dq} und S_{vq} zu erhalten, mit deren Hilfe dann einem gegebenen Werte von \bar{v} Werte von α_q und β_q zugeordnet werden können. Das Problem erfordert langwierige Rechnungen, und ist nur für normale Verteilungsfunktionen von S_{Dq} und S_{vq} lösbar, während es für andere Verteilungen praktisch unlösbar wird. Die Verwendung von separaten Lastfaktoren an Stelle eines einzigen Sicherheitskoeffizienten ist daher nicht mit dem Wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriff der Sicherheit zu vereinbaren.

THE SAFETY OF BUILDING CONSTRUCTIONS

A. M. FREUDENTHAL

SUMMARY

Structural design consists of three steps: (a) load analysis, (b) stress analysis and (c) safety analysis. While most of the structural research is concentrated on step (b), with limited efforts being made to obtain better information on (a), the importance of safety analysis is not yet sufficiently recognized. The paper attempts to develop the probabilistic nature of the concept of structural safety and to establish a procedure for the computation of a rational safety factor and the associated probability of structural failure. For assumed statistical distributions of load and resistance of logarithmic normal and of extremal type relations between safety factors and associated probability of failure are presented in the form of diagrams.

DE LA SÉCURITÉ DES STRUCTURES DANS LES BÂTIMENTS

A. M. FREUDENTHAL

RÉSUMÉ

Le dimensionnement des structures comporte trois phases successives: a) l'étude analytique de la charge; b) le calcul des contraintes; c) le calcul analytique des probabilités. Au cours du dimensionnement, l'attention porte principalement sur le calcul des contraintes et, dans une mesure plus restreinte, sur l'analyse de la charge, l'importance du calcul analytique des probabilités étant généralement méconnue. L'étude essaye de montrer comment la notion de sécurité relève du calcul des probabilités, et d'élaborer des méthodes pour déterminer le facteur de sécurité rationnel et la probabilité de rupture qui y correspond. Pour les types logarithmiques normaux et extrêmes de la répartition des charges et des résistances à la rupture, la relation des facteurs de sécurité et des probabilités de rupture correspondantes est représentée par des diagrammes.

О НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

A. M. ФРЕЙДЕНТАЛЬ

РЕЗЮМЕ

Расчет конструкций производится в три этапа: а) анализ нагрузок, б) расчет напряжений, в) исследования с помощью исчисления вероятности. При расчете основное внимание уделяется этапу б) и лишь в ограниченное — выяснению содержания а); важность исчисления вероятности не принимается во внимание в должной мере. В работе сделана попытка разъяснить характер исчисления вероятности, присущий понятию надежности, и разработать методы определения рациональных факторов надежности и соответствующих им вероятности излома. Связь между факторами надежности и соответственной вероятностью излома для предположенных логарифмических нормальных и экстремальных распределений нагрузок и ломающих напряжений дана на диаграммах.

EIN BEITRAG ZU DEN FLUGEIGENSCHAFTEN DER SEGELFLUGZEUGE

(ANWENDUNG DER BAUVORSCHRIFTEN BEI DER FLUGEIGENSCHAFTLICHEN
AUSLEGUNG VON SEGELFLUGZEUGEN)

DR. ING. W. LEHMANN

DRESDEN

[Eingegangen am 19. Januar 1963]

Es wird zunächst ein Rückschluß den flugeigenschaftlichen Forderungen der Längs- und Seitenstabilität auf die entsprechenden aerodynamischen Beiwerte gezogen. Es wird ferner untersucht, welche Mindest- und Höchstwerte sich aus den in den Bauvorschriften verankerten flugeigenschaftlichen Forderungen und Empfehlungen in Abhängigkeit von den geometrischen Daten und der Auslegegeschwindigkeit für die Segelflugzeuge ergeben. Eine wichtige Voraussetzung für derartige Untersuchungen ist, daß hinreichend genaue Näherungsformeln, die eine Auswertung mit erträglichem Rechenaufwand ermöglichen, vorhanden sind. Im Anhang des Aufsatzes sind die Bewegungsgleichungen und die aus ihnen abgeleiteten Näherungsformeln, deren Genauigkeit anhand mannigfacher Beispielrechnungen ausreichend erschien, zusammengestellt.

Bezeichnungen

Die Bezeichnungen der Winkel, der Kräfte und Momente sowie der geometrischen Daten entsprechen den Normen gemäß TNL 10350.

Zusätzlich wurden folgende Kurzzeichen benutzt, die im Text nicht besonders erläutert sind:

$\rho_F/\rho = 2G/(\rho \cdot g \cdot F \cdot s)$	bezogene Flugzeugmassendichte;
v_s	[km/h] Überziegeschwindigkeit;
v_{gmin}	[km/h] Geschwindigkeit des besten Gleitwinkels;
T	[s] Schwingungsdauer;
T_a	[s] Schwingungsdauer der Anstellwinkelbewegung;
T_b	[s] Schwingungsdauer der Bahnbewegung;
$t_{1/e}$	[s] Abklingzeit auf den $1/e$ -Betrag der Anfangsamplitude;
$t_{1/2} = 0,693t_{1/e}$	[s] Halbwertzeit;
dc_M/dc_a	statische Längsstabilität;
$T_F = 2G/(\rho \cdot g \cdot F \cdot v)$ [s]	flugmechanische Zeiteinheit;
$\tau = t/T_F$	dimensionsloser Zeitfaktor;
$C'_a = \partial C_a/\partial \alpha$	Auftriebsanstieg;
$C'_{M\alpha} = \partial C_M/\partial \alpha$	Längsmomentenanstieg;
$C'_{M\dot{\alpha}} = \partial C_M/\partial \dot{\alpha}$	Längsdämpfung;
$C'_{M\ddot{\alpha}} = \partial C_M/\partial \ddot{\alpha}$	Anstellwinkeldämpfung;
$\bar{\omega}_y = \omega_y \cdot s/v$	bezogene Winkelgeschwindigkeit;
$\bar{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} \cdot s/v$	bezogene Anstellwinkelgeschwindigkeit;
$\bar{\dot{v}} = dv/v/d\tau$	$\dot{\alpha} = d\alpha/d\tau$.

Die Beiwerte der Seitenbewegung sind entsprechend bezeichnet.

I. Einleitung

Aus den im Laufe der Zeit gewonnenen Flugerfahrungen haben sich bestimmte Richtwerte für die zu fordernden Flugeigenschaften herausgeschält. Diese Richtwerte sind bereits teils als Forderungen und teils als Empfehlungen

in den Bauvorschriften für Segelflugzeuge [1] niedergelegt. Sie sollen bei einem neuen Muster nicht nur eine Prüfungs- und Vergleichsmöglichkeit geben, sondern möglichst auch bereits beim Entwurf eines Segelflugzeuges als Grundlage für die aerodynamische Auslegung benutzt werden. In der Untersuchung soll zunächst ein Rückschluß von den flugeigenchaftlichen Forderungen der Längs- und Seitenstabilität auf die entsprechenden aerodynamischen Beiwerte gezogen werden. Es wird ferner untersucht, welche Mindest- und Höchstwerte sich aus den in den Bauvorschriften verankerten flugeigenchaftlichen Forderungen und Empfehlungen in Abhängigkeit von den geometrischen Daten und der Auslegegeschwindigkeit für die Segelflugzeuge ergeben. Die Ruderwirksamkeit wird bei den vorliegenden Betrachtungen nur soweit, wie es notwendig ist, mit herangezogen. Die Steuerkräfte sollen bei dieser Untersuchung ganz ausgeschlossen bleiben. Ihre Abhängigkeit von der Geschwindigkeit stellt zwar ebenfalls ein Maß für die Stabilität dar, jedoch kann ihre Größe ohne Änderung der aerodynamischen Auslegung des Flugzeuges willkürlich verändert werden. Als Auslegegeschwindigkeit wurde die Geschwindigkeit $v = 1,4 v_s$ angesetzt, auf die sich die meisten Richtwerte in den Bauvorschriften für Segelflugzeuge beziehen.

Eine wichtige Voraussetzung für derartige Untersuchungen ist, daß hinreichend genaue Näherungsformeln, die eine Auswertung mit erträglichem Rechenaufwand ermöglichen, vorhanden sind. Im Anhang sind die Bewegungsgleichungen und die aus ihnen abgeleiteten Näherungsformeln, deren Genauigkeit anhand mannigfacher Beispielrechnungen ausreichend erschien, zusammengestellt. Sie können im wesentlichen als bekannt vorausgesetzt werden. Bei den Stabilitätsbetrachtungen wurde meist auf die vollständigen Bewegungsgleichungen zurückgegriffen, wobei nur Glieder von untergeordneter Bedeutung vernachlässigt wurden.

Zur zahlenmäßigen Ermittlung der stabilitätsmäßig auftretenden Gesetzmäßigkeiten benötigt man noch die Abhängigkeit der Flugzeugmassendichte von der Auslegegeschwindigkeit.

Die Flugzeugmassendichte ergibt sich aus der Beziehung

$$\frac{\rho_F}{\rho} = \frac{2G}{\rho \cdot g \cdot F \cdot s} = \frac{C_a}{g \cdot s} \cdot v^2.$$

Hierbei muß noch der Auftriebsbeiwert festgelegt werden. Eine statistische Auswertung zeigt, daß der Bereich des Auftriebsbeiwertes für diese Geschwindigkeit relativ klein ist und praktisch mit dem sich für den besten Gleitwinkel ergebenden zusammenfällt (s. Bild 1). Es ist allerdings dabei notwendig, zwischen den zwei wichtigsten Profilarten, die im Segelflugzeugbau angewandt werden, zu unterscheiden. Die eine Profilart ist die mit einer Lage der größten Profildicke ξ_δ in 30% der Tiefe, bei dieser liegt der Auftriebs-

beiwert für $v = 1,4 v_s$ bzw. für v_{emin} zwischen $C_a = 0,7 \div 0,8$. Bei der anderen Profilart befindet sich die Lage der größten Profildicke zwischen $40 \div 45\%$ der Tiefe, der Auftriebsbeiwert für $v = 1,4 v_s$ bzw. für v_{emin} ist zwischen $c_a = 0,63 \div 0,75$. Bei den Beispielrechnungen wurde mit einem mittleren Auftriebsbeiwert von $C_a = 0,7$ gerechnet und die Flugzeugmassendichte mit $\rho_F/\rho = 0,0713 v^2/s$ angesetzt.

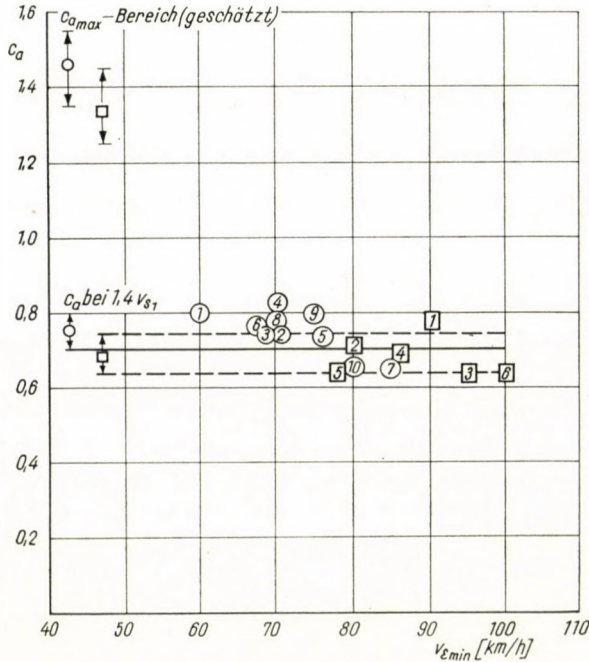


Bild 1. Auftriebsbeiwert verschiedener Segelflugzeuge bei der Geschwindigkeit des besten Gleitwinkels

- | | | |
|---------------------------------|---------------|---|
| ○ Profil mit $\xi_\delta = 0,3$ | ⑥ B 8 | □ Profil mit $\xi_\delta = 0,4 \div 0,45$ |
| ① D 28 b | ⑦ SB 5 | ① D 34 c |
| ② Baby II b | ⑧ Weihe 50 | ② Standard Austria |
| ③ Meise | ⑨ Kranich III | ③ Zefir |
| ④ Mü 17 | ⑩ Libelle | ④ Foka |
| ⑤ B 5 | | ⑤ Phönix 3 |
| | | ⑥ A 15 |

II. Längsstabilität

Für die Längsstabilität sind in den Bauvorschriften für Segelflugzeuge die in Tafel I zusammengestellten Forderungen und Empfehlungen enthalten. Darin wird für die statische Anstellwinkelstabilität eine Mindestreserve von 3% 1μ im normalen Flugbereich gefordert. Für die dynamische Stabilität sind die Forderungen z. Z. noch allgemeinerer Natur. Neuere Untersuchungen von WESTBROOK und McRUER [2] zeigen jedoch, daß im besonderen für die kurzperiodische Anstellwinkelschwingung konkrete Richtwerte gegeben werden

können. Als Richtwerte wurden in dieser Arbeit die natürliche Frequenz und die Dämpfungszahl gewählt. Für diese konnten aus Flugversuchen und aus Testversuchen an Flugsimulatoren Bereiche mit mehr oder weniger guten Stabilitäts- und Steuerbarkeitseigenschaften ermittelt werden. Die Untersuchungen wurden zwar für die Motorflugzeuge durchgeführt, ihre Ergebnisse dürften aber sinngemäss auch auf die Segelflugzeuge anwendbar sein.

Die Auswertung auf die in den Bauvorschriften der DDR üblichen Richtwerte — die Schwingungsdauer T_a und die Abklingzeit t_a — ergibt die in Bild 2 die durch die Kurven a) eingestellten Bereiche, in denen die Flugeigenschaften mangelhaft, annehmbar bzw. gut sind. Für die Schwingungsdauer erhält

Tafel I

Flugeigenschaftliche Forderungen für die Längsstabilität nach [1]

Anstellwinkelstabilität	$\frac{dC_M}{dC_a} \leq -0,03$ von v_{s1} bis v_{DF}
Anstellwinkelschwingung	Stark gedämpft
Bahnschwingung	Gedämpft für $T_b < 12$ [s]
Abklingzeit (1/e)	$t_b/T_b \leq 4,5$ für $T_b > 12$ [s]
Schwingungsdauer	

man eine untere und eine obere Grenze, die Abklingzeit ist beim annehmbaren und beim guten Bereich zwischen einem Kleinst- und einem Größtwert in Abhängigkeit von der Schwingungsdauer eingegrenzt. Für den mangelhaften Bereich ist in [2] kein unterer Grenzwert angegeben. Die untere Grenze der Schwingungsdauer ist die gleiche wie bei den weiter unten beschriebenen Bereichen für die Gierschwingung. Außerhalb dieser durch die Kurven a eingegrenzten Bereiche werden die Flugeigenschaften als unannehmbar bezeichnet. Im Bereich I schwingt das Flugzeug bei einer Steuerbewegung sehr schnell und stark über die neue Gleichgewichtslage hinaus, was vom Flugzeugführer als äußerst unangenehm empfunden wird. Am schlechtesten werden die Bereiche II bis IV beurteilt, bei denen infolge einer zu geringen Längsdämpfung die Steuerbarkeit Schwierigkeiten bereitet. Der Flugzeugführer muß hierbei die Bewegungen des Flugzeugs ständig beobachten und sehr feinfühlig steuern.

Die Bereiche I bis IV sind allerdings im allgemeinen für die Segelflugzeuge ohne Bedeutung. Die Segelflugzeuge mit Heckleitwerk haben bei einer Geschwindigkeit $v = 1,4 v_s$ meist Abklingzeiten zwischen 0,24 bis 0,4 s, die Schwanzlosen zwischen 0,5 bis 0,62 s, sie liegen somit bei größeren Schwingungszeiten im Bereich V, in dem das Flugzeug als träge beurteilt wird (s. Bild 2 schraffierte Bereiche). In der Legende zu Bild 2 ist zur Erläuterung das Einschwingen auf

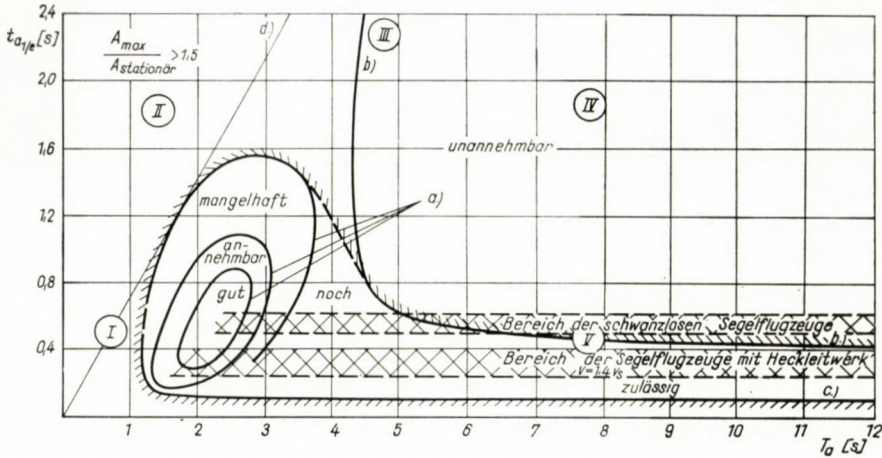
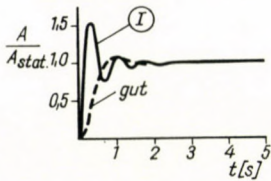


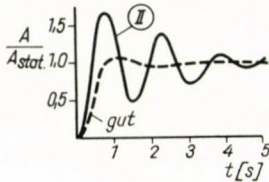
Bild 2. Flugeigenschaftlich günstige Bereiche der Anstellwinkelschwingung
 a) Grenzkurven für Hochgeschwindigkeitsflugzeuge nach WESTBROOK und MCRUER
 b) Grenzkurve aus der Bedingung $A/A_{stationär} = 0,7$ bei $t = 1$ [s]
 c) Grenzkurve aus der Bedingung $A/A_{stationär} = 0,7$ bei $t = 0,27$ [s]
 d) $A_{max}/A_{stationär} = 1,5$

Einschwingvorgang bei einer plötzlichen Störung



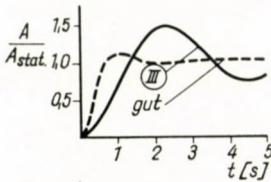
Bereich I

Flugzeug reagiert zu schnell und plötzlich auf eine Steuerbewegung, schwingt stark über die neue Gleichgewichtslage hinaus.



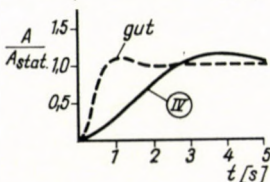
Bereich II

Flugzeug reagiert schnell und plötzlich auf eine Steuerbewegung, führt schwach gedämpfte Schwingungen mit großer Amplitude aus. Erfordert große Feinfühligkeit in der Steuerung.



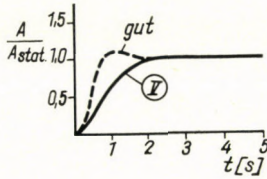
Bereich III

Flugzeug reagiert langsam, führt sehr schwach gedämpfte Schwingungen aus, die der Pilot leicht anregt. Erfordert ständige Aufmerksamkeit beim Steuern.



Bereich IV

Flugzeug reagiert zu langsam und träge, stellt sich mit schwach gedämpften Schwingungen auf die neue Gleichgewichtslage ein. Gefahr der Übersteuerung



Bereich V

Flugzeug reagiert langsam und träge, stellt sich mit einer stark gedämpften Schwingung auf die neue Gleichgewichtslage ein. Gefahr der Übersteuerung.

den neuen Gleichgewichtszustand bei einer plötzlichen Störung wie z. B. durch einen Höhenruderausschlag für diese 5 Bereiche dargestellt. Der als gut empfundene Einschwingvorgang ist jeweils gestrichelt eingezeichnet. Die Unterschiede gegenüber dem »guten« Bewegungsvorgang sind deutlich erkennbar. Als »gut« wird es empfunden, wenn der neue Gleichgewichtszustand nach etwa 0,8 s erreicht wird und die maximale Amplitude beim Einschwingen nur etwa 10% größer als der stationäre Wert ist. Ein Überschwingen um mehr als 50% wird für unannehmbar gehalten. Damit wird das links von der in Bild 2 eingezeichneten Kurve *d* liegende Gebiet ausgeschlossen.

Die Erfahrung zeigt nun, daß man beim Segelflugzeug eine größere Trägheit als beim Motorflugzeug in Kauf nimmt.* Der Grund liegt darin, daß der Schwerpunktsbereich so groß sein muß, daß die normalen, in der Festigkeitsrechnung zu berücksichtigenden Flugzeugführergewichte auch von dieser Seite ohne weiteres zulässig sind. Es wird daher im Flug mit hinterster Schwerpunktslage sogar oft das Zugeständnis gemacht, daß auch aperiodische Bewegungsverläufe auftreten dürfen.

An Hand der Bewegungsverläufe soll daher nochmals die sich für größere Schwingungszeiten ergebende Grenze zwischen dem mangelhaften und dem nicht mehr zulässigen Gebiet näher untersucht werden. Bei einer plötzlichen Steuerbewegung oder einer anderen plötzlichen Störung verläuft die Anstellwinkelbewegung im periodischen Gebiet näherungsweise nach der Gleichung

$$\frac{A}{A_{\text{stationär}}} = 1 + e^{-t/t_a} \left(-\frac{T_a}{2\pi t_a} \sin \frac{2\pi}{T_a} t - \cos \frac{2\pi}{T_a} t \right).$$

Im aperiodischen Gebiet erhält man den Amplitudenverlauf nach der Gleichung

$$\frac{A}{A_{\text{stationär}}} = 1 + \frac{t_{a1}}{t_{a2} - t_{a1}} e^{-t/t_{a1}} - \frac{t_{a2}}{t_{a2} - t_{a1}} e^{-t/t_{a2}}, \quad \text{wobei } t_{a1,2} = -\frac{1}{\lambda_{1,2}}$$

$$\text{mit } \lambda_{1,2} \approx \frac{\left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 (C'_{M_y} + C'_{M\ddot{a}}) - C'_a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[C'_a - (C'_{M_y} + C'_{M\ddot{a}}) \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 \right]^2 + \frac{\rho_F}{\rho} \frac{s}{l_\mu} \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 C'_{M\ddot{a}} - 2 C_a^2 + \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 C'_{M_y} C'_a}$$

* Zu dieser Frage fand ein Meinungs austausch mit Herrn Mgr.-Ing. BOJANOWSKI, Flugtechnisches Institut Warschau, und Herrn Dipl.-Ing. GEDEON, Technische Universität Budapest, statt.

ist. Mit diesen Gleichungen hat man bei Annahme der Amplitude nach einer bestimmten Zeit eine eindeutige Abhängigkeit zwischen der Abklingzeit und der Schwingungsdauer bzw. für die beiden Abklingzeiten und kann daraus die Grenze des flugeigenschaftlich noch zulässigen Bereiches ermitteln. Die Abhängigkeit der Schwingungszeit bzw. im aperiodischen Gebiet der Abklingzeiten von der statischen Stabilität liefert dann den nach diesen Gesichtspunkten noch zulässigen hintersten Schwerpunkt.

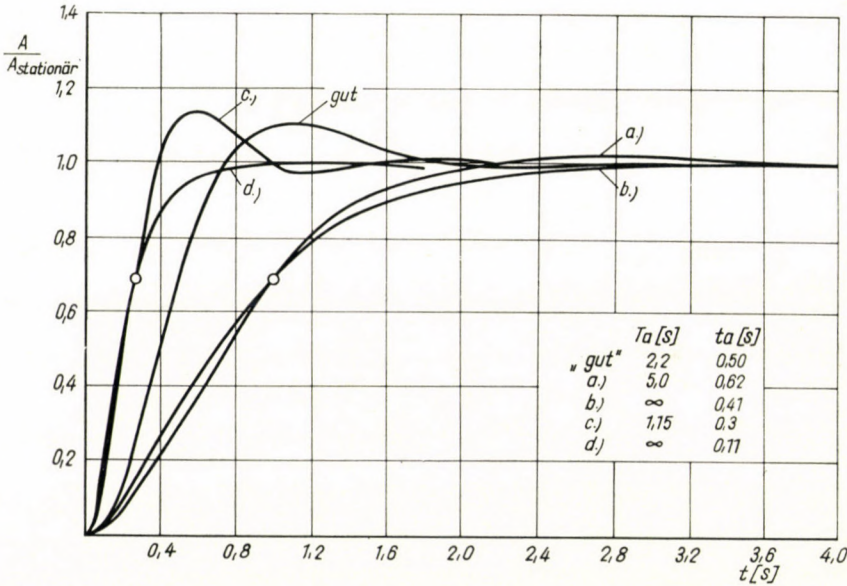


Bild 3. Bewegungsverlauf bei einem plötzlichen Steuerausschlag oder einer anderen Störung

Bei Betrachtung der in der Legende zu Bild 2 gezeigten Bewegungsverläufe erscheint die Annahme als vernünftig, daß die Amplitude bei einer plötzlichen Störung nach einer Sekunde mindestens 70% des stationären Endwertes betragen soll, d. h. daß:

$$\frac{A}{A_{\text{stationär}}} \geq 0,7$$

bei $t = 1 \text{ s}$ sein soll. Natürlich muß diese Annahme durch weitere Flugversuche noch erhärtet werden. In Bild 3 zeigt als Beispiel Kurve a den Bewegungsverlauf für $T_a = 5 \text{ s}$, $t_a = 0,62 \text{ s}$. Die Kurve geht genau durch den gewählten Punkt. Dieser Wert für die Amplitude kann natürlich auch bei einer aperiodischen Bewegung erreicht werden (s. Kurve b). Bei dieser Kurve ist die Schwingungsdauer unendlich, die Abklingzeit beträgt $t_a = 0,41 \text{ s}$. In gleicher Weise kann auch ein Grenzwert nach der anderen Seite festgelegt werden, um

ein zu rasches Ansprechen auf eine Steuerbewegung oder auf eine äußere Störung zu vermeiden. Das Segelflugzeug würde sonst als zu unruhig beurteilt werden. Hierfür könnte man ansetzen, daß

$$\frac{A}{A_{\text{stationär}}} \leq 0,7$$

bei $t = 0,27$ s sein soll (s. Bild 3 Kurve c und d).

Mit den so festgelegten Werten für die Amplitude nach 1 s bzw. nach 0,27 s erhält man aus der obigen Gleichung die in Bild 2 aufgetragenen Grenzkurven b und c . Diese Kurven sind natürlich aus den oben erläuterten Gründen nur im Bereich kleiner Abklingzeiten anwendbar. Der Übergang von der einen zur anderen Kurve wurde daher in Anlehnung an die Ergebnisse der Untersuchungen von WESTBROOK und McRUER mit schnellen Motorflugzeugen über die sich für den mangelhaften Bereich ergebende Kurve eingezeichnet. Der eingegrenzt gezeichnete Bereich ist dann nach diesen Überlegungen als noch zulässig zu betrachten. Er liegt bei Schwingungszeiten über 6 s zwischen den Abklingzeiten 0,1 bis 0,41 s.

Die Segelflugzeuge mit Heckleitwerk liegen bei Abklingzeiten von 0,24 bis 0,40 s, und befinden sich somit unterhalb der Grenzkurve b . Sie erfüllen daher die obige Bedingung und haben bis in den aperiodischen Bereich noch zulässige Flugeigenschaften. In vielen Fällen kann sich sogar eine minimale Stabilitätsreserve ergeben, die kleiner als der in den BVS geforderte Mindestwert von 3% 1μ ist. Dann ist natürlich letzterer für die Festlegung des hintersten Schwerpunktes maßgebend. Für die Ermittlung der Stabilitätsreserve bei einem normalen Flugzeugführergewicht wird man aber keinen aperiodischen Bewegungsverlauf zulassen. Hier dürfte es sich empfehlen, die Schwingungsdauer $T_a \leq 6$ s zu halten.

Die schwanzlosen Segelflugzeuge liegen dagegen über der Grenzkurve b bei Schwingungsdauern, die größer als 5 bis 6 s sind. Bei diesen Typen müßte daher die kleinste Stabilitätsreserve entsprechend der Empfehlung $T_a \leq 5$ bis 6 s festgelegt werden. Wie bereits oben erwähnt, kann aus dem Zusammenhang der Schwingungszeit bzw. der Abklingzeiten mit der statischen Stabilität die Stabilitätsreserve mit festem Ruder ermittelt werden. Im periodischen Bereich ergibt sich aus der im Anhang für die Schwingungszeit der Anstellwinkelbewegung angegebenen Näherungsformel

$$\frac{dc_M}{dc_a} = - \left[\left(\frac{2\pi T_F}{T_a} \right)^2 + \left(\frac{l_\mu}{i_y} \right)^2 C'_{M_y} C'_a + \frac{1}{4} \left\{ C'_a - (C'_{M_y} + C'_{M\ddot{a}}) \left(\frac{l_\mu}{i_y} \right)^2 \right\}^2 - C_a^2 \right] \frac{1}{\frac{\rho_F}{\rho} \left(\frac{l_\mu}{i_y} \right)^2 \frac{s}{l_\mu} C'_a}.$$

Entsprechend dieser Formel ist die erforderliche Stabilitätsreserve in erster Linie abhängig von der Massendichte, der Fluggeschwindigkeit, der Längsdämpfung und dem Trägheitsmoment um die Querachse. Im aperiodischen Bereich kann die erforderliche Stabilitätsreserve aus der oben angegebenen Formel für die Abklingzeiten $t_{a1,2}$ bestimmt werden.

Eine numerische Auswertung ergibt die im Bild 4 dargestellten Kurven, für deren Berechnung die Empfehlung $T_a \leq 6$ s und übliche Werte der Längsdämpfung und des Trägheitsmomentes zu Grunde gelegt wurden. Mit zunehmender Auslegegeschwindigkeit verringert sich die benötigte Stabilitätsreserve. Eine größere Spannweite verlangt bei gleichen Daten eine größere Reserve. Da man aber sagen kann, daß im allgemeinen großspannweitige Segelflugzeuge für höhere Geschwindigkeiten ausgelegt werden als diejenigen mit kleinerer Spannweite, bedeutet es, daß die Stabilitätsreserve, durch welche die empfohlene Schwerpunktslage bestimmt ist, in den Grenzen von 10 bis 6% l_μ liegen wird.

Eine ähnliche Tendenz kommt auch in den von GEDEON [3] für die verschiedenen Segelflugzeugkategorien angegebenen Werten zum Ausdruck, wenn man voraussetzt, daß Schul- und Übungsmaschinen bei kleineren und Leistungssegelflugzeuge bei größeren Geschwindigkeiten geflogen werden. In dieser Arbeit wird auf Grund einer Pilotenbefragung eine minimale Stabilitätsreserve von 9% für die Anfängerschulung, von 7% für Übungsmaschinen und von 3% l_μ für Leistungssegelflugzeuge empfohlen. Hinzu kommt noch, daß sicherlich bei den Schul- und Übungssegelflugzeugen schärfere Eigenschaftsforderungen als bei den Leistungssegelflugzeugen zu stellen sind.

Von ZACHER wird — ebenfalls auf Grund einer Meinungsbefragung der Flugzeugführer — eine Stabilitätsreserve von $\sim 8\%$ l_μ empfohlen. Die in den BVS geforderte kleinste Stabilitätsreserve von 3% l_μ dürfte daher auch nach dieser Betrachtung einen unteren Grenzwert darstellen.

Die vorderste Schwerpunktslage wird meist aus der Bedingung, daß für die Landung eine ausreichende Höhenruderreserve vorhanden sein muß, ermittelt. In Extremfällen kann aber auch die dynamische Stabilität ein Kriterium liefern. Bekanntlich tritt bei größeren Auftriebsbeiwerten oftmals eine dynamische Instabilität auf, die dadurch bedingt ist, daß eine der Bedingungen für dynamische Stabilität nicht mehr erfüllt wird. Neben den Bedingungen, daß die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung größer als Null sein müssen, ist es nämlich erforderlich, daß auch die Routhsche Diskriminante größer als Null ist, d. h. es muß

$$R = (BC - D)D - B^2E > 0$$

sein (s. Anhang). Bei $R < 0$ ist die Bahnbewegung nicht mehr gedämpft. Die Bedingung $R = 0$ kann daher zur Ermittlung der zulässigen vordersten

Schwerpunktslage benutzt werden. Da beim Segelflugzeug der Einfluß des losen Ruders stets so klein wie möglich gehalten werden sollte und die Reibung im Steuergestänge immer relativ groß ist, wird hier nur die Stabilität mit festem Ruder betrachtet.

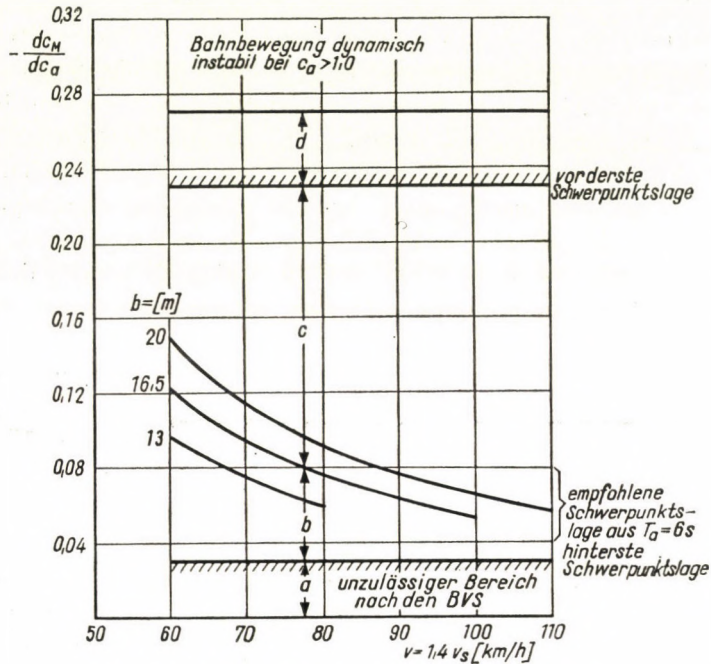


Bild 4. Längsstabilität und Schwerpunktsbereich

a) Kleinste Stabilitätsreserve nach den BVS ($3\% l_\mu$); b) noch zulässiger Schwerpunktsbereich; c) empfohlener Schwerpunktsbereich aus der Bedingung $T_a \leq 6$ [s]; d) 3 bis $5\% l_\mu$. Reserve gegen dynamische Instabilität; b) + c) zulässiger Schwerpunktsbereich

Die Auswertung der Bedingung $R = 0$ mit Hilfe der im Anhang angegebenen Formeln für die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung ergibt eine quadratische Gleichung für C'_{Ma} .

$$C'_{Ma}{}^2 + C_1 C'_{Ma} + C_2 = 0,$$

aus der die größte statische Stabilität, bis zu der das Segelflugzeug dynamisch stabil ist, bestimmt werden kann. Unter Berücksichtigung einer Reserve von 3 bis $5\% l_\mu$ ist damit die Lage des vordersten Schwerpunktes festgelegt. Auf Bild 4 ist diese Grenze für $c_a = 1,0$ angegeben. Bei größeren Auftriebsbeiwerten wird eine geringe Instabilität in Kauf genommen.

Bild 5 zeigt für ein Beispielflugzeug mit $\rho_F/\rho = 4$ die Abhängigkeit der höchstzulässigen statischen Längsstabilität vom bezogenen Trägheitsradius und vom Auftriebsbeiwert. Man sieht, daß beide einen entscheidenden

Einfluß haben. Unterhalb eines bestimmten Trägheitsradius tritt auch in der Nähe des Maximalauftriebes keine dynamische Instabilität auf. Bei dem Trägheitsradius, der dem Beispielflugzeug von MORELLI in [6] zu Grunde gelegt wurde, tritt die dynamische Instabilität besonders zeitig auf und erstreckt sich über einen großen c_a -Bereich. Das Segelflugzeug »Meise« liegt in dem Gebiet, in dem Instabilität auftreten kann. Es wird nach den Flugversuchen als

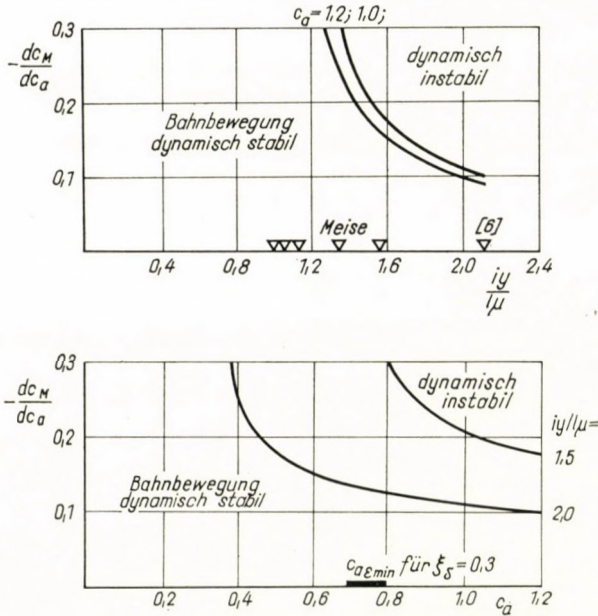


Bild 5. Höchstzulässige statische Längsstabilität in Abhängigkeit vom bezogenen Trägheitsradius und vom Auftriebsbeiwert
 $\rho_F/\rho = 4, b = 16,4 \text{ m}$

schwach instabil bezeichnet. Bei den Segelflugzeugen mit den kleinsten bekannten Trägheitsradien ist im normalen Betriebsbereich stets dynamische Stabilität vorhanden. Durch Kleinhalten des Trägheitsmomentes kann daher die Instabilität der Bahnbewegung auch bei großen Auftriebsbeiwerten vermieden werden.

Der große Einfluß des Trägheitsmomentes rührt daher, daß die Routhsche Diskriminante vom Trägheitsmoment nur über den Koeffizienten B beeinflusst wird. Dieser Koeffizient setzt sich aus zwei Summanden zusammen, von denen nur einer vom Trägheitsmoment abhängt, der andere jedoch konstant bleibt. Die Koeffizienten C, D und E sind praktisch proportional dem Trägheitsmoment, so daß eine Änderung in alle drei Koeffizienten gleichmäßig eingeht. Die Massendichte beeinflusst selbstverständlich ebenfalls die Stabilität, wenn auch in geringerem Maße.

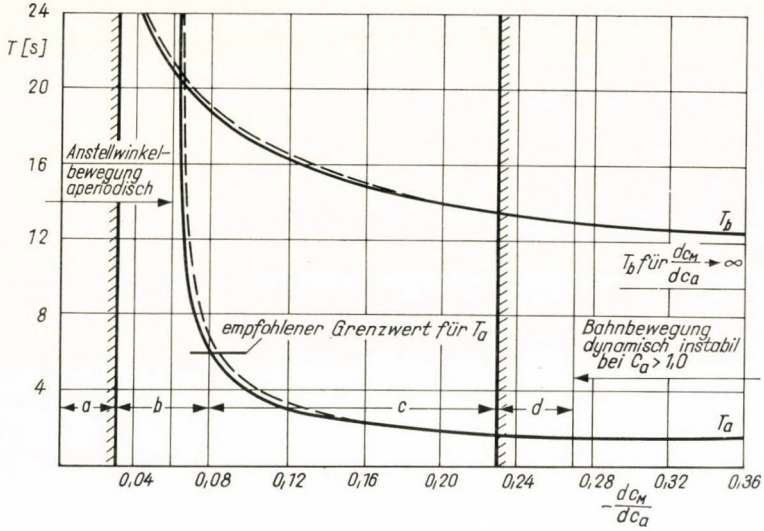


Bild 6. Schwingungsdauer der Anstellwinkel- und der Bahnbewegung in Abhängigkeit von der statischen Stabilität
 $\rho_F/\rho = 4$; $b = 16,5$ m; $c_a = 0,7$. a, b, c und d siehe Legende zu Bild 4; — Näherungsrechnung; - - - exakte Rechnung

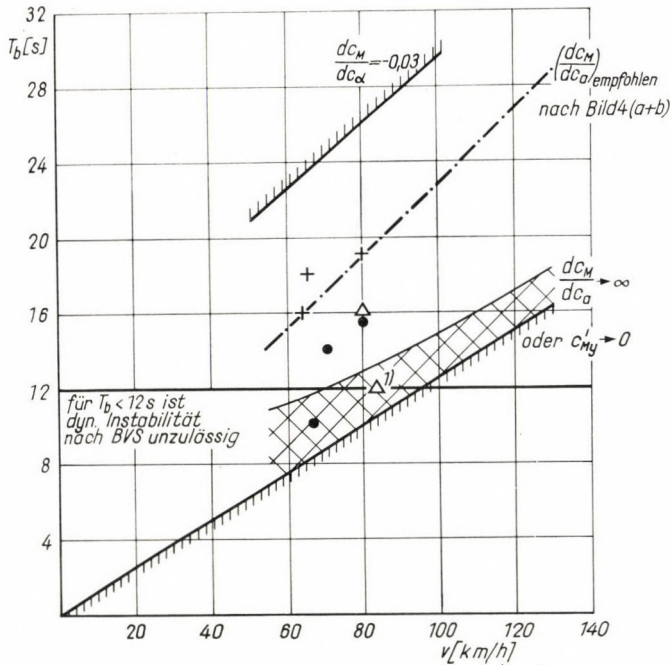


Bild 7. Schwingungsdauer der Bahnbewegung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Bereich, in dem leicht dynamische Instabilität auftreten kann
 Segelflugzeuge nach Flugmessungen [4]

- + dynamisch stabil,
- △ indifferent,
- dynamisch instabil.

Eine Erhöhung des Widerstandes z. B. durch Bremsklappen wirkt stets stabilisierend, da hierdurch der Koeffizient D vergrößert wird. Dabei soll sich möglichst der Widerstandsanstieg über dem Anstellwinkel nicht ändern.

Auf Bild 6 ist die Dauer der Anstellwinkel- und der Bahnschwingung in Abhängigkeit von der statischen Stabilitätsreserve gegenübergestellt. Die Anstellwinkelbewegung ist bei kleiner Stabilität (bei diesem Beispiel bis $dC_M/dC_a = -0,06$) aperiodisch. In diesem Bereich wird das Flugzeug als träge bezeichnet. Rechts von dem aus der Empfehlung $T_a \leq 6$ s ermittelten Wert $dC_M/dC_a = -0,08$ liegen die Schwingungszeiten der Anstellwinkel- und der Bahnbewegung weit genug auseinander, so daß eine eindeutige Trennung der Bewegungsformen möglich ist. Dieser Bereich wird als fliegerisch angenehm beurteilt. Rechts von $dC_M/dC_a = -0,27$ tritt die bei Bild 4 bereits erläuterte dynamische Instabilität auf.

Bild 6 gibt gleichzeitig die Bestätigung, daß die benutzten Näherungsformeln eine ausreichende Genauigkeit besitzen. Im interessierenden Bereich fallen die Näherungswerte praktisch mit den Werten, die mit den vollständigen Bewegungsgleichungen für festes Ruder ermittelt wurden, zusammen.

Auf Bild 7 ist die Schwingungsdauer der Bahnbewegung in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit dargestellt. Die untere Grenze der Schwingungsdauer ergibt sich bei unendlich großer statischer Stabilität oder verschwindender Längsdämpfung zu

$$T_b = \frac{\pi}{g} \sqrt{2} v.$$

Aus der in den BVS geforderten Mindestreserve für die statische Anstellwinkelstabilität von 3% l_μ erhält man eine obere Grenze. Bei der eingezeichneten Kurve ist noch eine Abhängigkeit der Massendichte und Spannweite von der Auslegegeschwindigkeit für den besten Gleitwinkel berücksichtigt. Die Schwingungsdauer der Bahnbewegung liegt daher innerhalb des eingegrenzten Bereiches. Legt man den hintersten Schwerpunkt entsprechend der oben besprochenen Empfehlung $T_a \leq 6$ s fest, dann bekommt man als Größtwert für die Schwingungsdauer der Bahnbewegung die strichpunktierte Kurve. Der schraffiert angegebene Bereich ergibt sich bei den Schwerpunktslagen, bei denen die statische Stabilitätsreserve so groß ist, daß die Bahnbewegung leicht dynamisch instabil werden kann. Wie die nach Flugmessungen eingezeichneten Punkte zeigen, kann bei ungünstiger Projektierung auch oberhalb dieses Bereiches dynamische Instabilität auftreten.

Nach den BVS wird für $T_b \leq 12$ s dynamische Stabilität gefordert, also gerade in dem Bereich, der am schwierigsten zu beeinflussen ist. Die Forderung liefert aber eine Bedingung für die vorderste Schwerpunktslage und wichtige Hinweise für den Entwurf. Sie kann bei $v \geq 1,2 v_s$ als erfüllbar angesehen werden.

III. Seitenstabilität

Für die Seitenstabilität sind in den Bauvorschriften die in Tabelle 2 zusammengestellten Forderungen und Empfehlungen enthalten. Neuere Untersuchungen [7] zeigen, daß auch die Abklingzeit der Gierschwingung nach oben begrenzt werden sollte. Damit ergibt sich ein ähnliches Bild für den flugeigenschaftlich günstigen Bereich wie bei der Anstellwinkelschwingung, wobei allerdings die Grenzwerte etwas größer sein können (s. Bild 8).

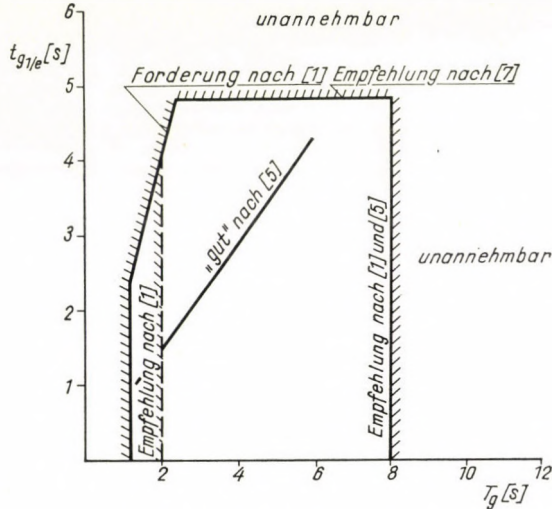


Bild 8. Flugeigenschaftlich günstiger Bereich der Gierschwingung

Die allgemeinste Forderung in den BVS ist, daß Richtungsstabilität, (d. h. $C'_{N\beta} < 0$) und Querstabilität, (d. h. $C'_{L\beta} > 0$) vorhanden sein müssen. Diese Forderungen geben aber kein Maß für die Größe der erforderlichen Stabilität. Aus den Forderungen für das Verhältnis der Abklingzeit zur Schwingungsdauer, für das Amplitudenverhältnis und für die Spiralstabilität, sowie aus der Empfehlung für die Schwingungsdauer der Gierbewegung erhält man jedoch in ähnlicher Weise wie bei der Längsstabilität Mindestwerte für die obigen aerodynamischen Beiwerte.

Bild 9 zeigt anhand einer Beispielrechnung die Abhängigkeit des Schieberollmomentes von der Richtungsstabilität, wie sie sich aus den in Tafel II zusammengestellten Richtwerten ergibt. Dabei wurden wieder für die numerische Berechnung die im Anhang zusammengestellten Näherungsformeln benutzt, deren Genauigkeit für solche Abschätzungen im allgemeinen vollkommen ausreicht. Im Gegensatz zur Längsstabilität, bei der sehr große Änderungen der statischen Stabilität möglich sind, ohne daß sich die Dämpfung wesentlich ändert, kann man bei der Seitenstabilität die Wendedämpfung und auch

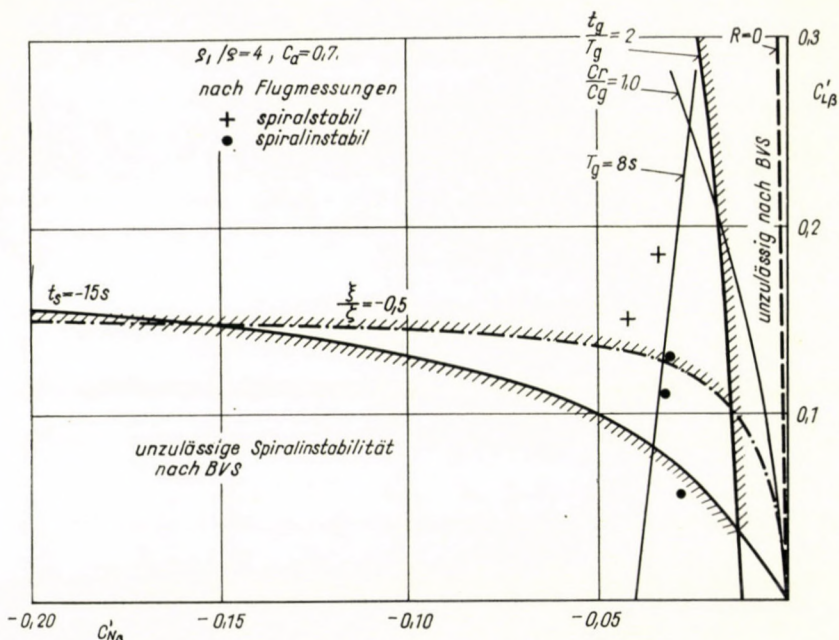


Bild 9. Seitenstabilität

Tafel II

Flugeigenschaftliche Forderungen für die Seitenstabilität und -steuerbarkeit nach [1]

Richtungsstabilität	$C'_{N\beta} < 0$
Schieberollmoment	$C'_{L\beta} > 0$
Abklingzeit (1/e)	$t_g/T_g \leq 2,0$ festes Ruder
Schwingungsdauer	$t_g/T_g \leq 3,0$ loses Ruder
Amplitudenverhältnis	$C_r/C_g \leq 1,0$ bis $1,5$
Spiralstabilität (1/e)	$0 \leq t_s \leq 15$ [s] SR u. QR fest $0 \leq t_s \leq 15$ [s] SR u. QR lose $v \geq 1,4 V_{s1}$
Empfehlungen für die Seitenstabilität:	
Schwingungsdauer	$2s \leq T_g \leq 8$ [s]
Empfehlungen für die Seitensteuerbarkeit:	
Querruderausschlag	$\xi/\zeta \leq 0,3$ bis $0,5$ für $\beta = 0^\circ$
Seitenruderausschlag	

die Querkraft als in erster Näherung proportional der Richtungsstabilität ansetzen:

$$C'_{Nz} = k_{C'_{Nz}} \cdot C'_{N\beta},$$

wobei

$$k_{C'_{Nz}} = k_{NRu} \cdot \frac{C'_{N\beta SL}}{C'_{N\beta}} \cdot \frac{r_s}{s} \cdot \frac{2 - \frac{d\beta s}{d\beta}}{\frac{d\beta s}{d\beta}}$$

und

$$C'_{q\beta} = k_{C'_{q\beta}} \cdot C'_{N\beta},$$

wobei

$$k_{C'_{q\beta}} = k_{qRu} \cdot \frac{C'_{N\beta SL}}{C'_{N\beta}} \cdot \frac{s}{r_s}.$$

Die Faktoren k_{NRu} und k_{qRu} berücksichtigen den Einfluß des Rumpfes.

Aus der Forderung $t_g/T_g \leq 2$ und der Empfehlung $T_g \leq 8$ s ergeben sich zwei Mindestwerte für die Richtungsstabilität, die nur wenig vom Schieberollmoment abhängen. Den größten Wert erhält man dabei aus der Schwingungsdauer.

Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Geschwindigkeit ist mit den nach Bild 1 erläuterten Gesetzmäßigkeiten gering. Damit hängt auch die erforderliche Richtungsstabilität nicht von der Auslegegeschwindigkeit ab. Die Schwingungsdauer ist aber proportional der Wurzel aus der Spannweite, so daß auch die Richtungsstabilität diesem Wert proportional ist.

Aus der Forderung $t_s \leq -15$ s erhält man einen Mindestwert für das Schieberollmoment. Dieser Mindestwert ist erheblich kleiner als der Wert, der sich aus der Grenze für die Spiralstabilität ($E = 0$) ergibt. Für $C'_{N\beta} < -0,02$ müßte bei dem obigen Beispiel das Schieberollmoment für Spiralstabilität $C'_{L\beta} \approx 0,32$ sein. Dieses Schieberollmoment ist aber im Hinblick auf gute Seitensteuerbarkeit zu groß.

Für einige Segelflugzeuge, bei denen die geometrischen Daten und das Gewicht ungefähr mit den der Rechnung zugrunde gelegten Mittelwerten übereinstimmen, wurden die Richtungsstabilität und das Schieberollmoment abgeschätzt und in Bild 8 eingetragen. Die Genauigkeit der Abschätzung läßt natürlich einiges zu wünschen übrig, da die notwendigen Daten nicht immer vollständig waren. Außerdem wurde die Rechnung für das starre Flugzeug durchgeführt, d. h. es wurde insbesondere beim Schieberollmoment die Vergrößerung der V-Form infolge der elastischen Durchbiegung des Flügels nicht berücksichtigt. Bei größeren Streckungen kann sich durch diesen Einfluß das Schieberollmoment um $\Delta C'_{L\beta} = 0,02$ bis $0,05$ erhöhen. Die nach der Rechnung vorhandenen Richtungsstabilitäten sind doppelt so groß wie die, die als Mindestwert aus der Forderung $t_g/T_g \leq 2$ ermittelt wurden. Die Schieberoll-

momente liegen bis auf einen Wert ebenfalls über der aus der Forderung $t_s \leq 1 - 15$ s ermittelten Grenze. Die Punkte bestätigen somit zumindest qualitativ die Richtigkeit dieser beiden Forderungen.

Eine quantitative Bestätigung können sie leider nicht geben, da fliegerisch nur eine gefühlsmäßige Beurteilung der Seitenstabilität bei diesen Maschinen vorliegt. Die Kreise bedeuten, daß im Fluge eine fühlbare Spiralinstabilität festgestellt wurde; die Kreuze bedeuten, daß die Spiralinstabilität nur gering war. Die Forderung $t_s \leq -15$ s kann daher sicherlich als Mindestforderung angesehen werden.

Die Richtungsstabilität wird immer so klein wie nur irgendetmöglich gehalten werden, um das Seitenleitwerk nicht unnötig groß zu machen. Das Schieberollmoment kann jedoch willkürlich z. B. durch Änderung der V-Form des Flügels über den Minimalwert vergrößert werden. Aus den Bauvorschriften ergeben sich jedoch auch nach oben gewisse Richtwerte bzw. Grenzen. Die Grenze der Taumelstabilität ($R = 0$) ist ohne Bedeutung, da die Forderung, daß das Amplitudenverhältnis $C_r/C_g \leq 1,0$ bis $1,5$ sein soll, weitaus schärfer ist. In der Beispielrechnung spielt aber auch dieser Wert nur eine untergeordnete Rolle; die hierfür zulässigen Schieberollmomente sind so groß, daß sie aus Gründen der Steuerbarkeit unerwünscht werden.

Die Empfehlung, daß beim stationären Schiebeflug das Verhältnis Querruderausschlag zum Seitenruderausschlag $\xi/\zeta \leq 0,3$ bis $0,5$ sein soll, gibt einen solchen Hinweis für die obere Grenze (s. gestrichelte Kurve). Jedoch ist in den seltensten Fällen eine genauere Berechnung dieses Verhältnisses ohne ausreichende Windkanalmessungen möglich, da der sich aus dem Profilwiderstand ergebende Anteil des Querrudergiermomentes rechnerisch nur sehr ungenau ermittelt werden kann. Bei der Beispielrechnung wurde dieser Anteil daher vernachlässigt und nur mit dem induzierten Anteil $C'_{N_\xi} = -3C_a C'_{L_\xi}/\pi\Lambda$ gerechnet.

Allgemein kann man aber wahrscheinlich sagen, daß das Schieberollmoment $C'_{L_\beta} \geq 0,1$, besser noch $= 0,15 \div 0,2$ sein soll.

IV. Zusammenfassung

Aus den obigen Untersuchungen können folgende Schlüsse für die *Bauvorschriften* gezogen werden:

a) Die in den BVS verankerte Forderung nach einer Reserve der statischen Anstellwinkelstabilität von mindestens 3% l_μ stellt eine untere Grenze dar. Dabei sind bereits weitgehende Zugeständnisse an die Flugeigenschaften gemacht.

b) Die Forderung nach Dämpfung der Bahnschwingung könnte auf $v \geq 1,2 v_s$, $T_b \leq 12$ s konkretisiert werden.

c) Die flugeigenschaftlichen Forderungen bzw. Empfehlungen für die Seitenstabilität erscheinen ausreichend.

Für den *Entwurf* von Segelflugzeugen ergeben sich folgende Hinweise:

1. Um gute Längsstabilitätseigenschaften zu erhalten, ist es notwendig, den Einfluß des losen Ruders möglichst klein zu halten.

2. Das Trägheitsmoment um die Querachse soll ebenfalls möglichst klein sein.

3. Bei erhöhten Anforderungen an die Flugeigenschaften empfiehlt es sich, die hinterste Schwerpunktslage aus dem Richtwert für die Schwingungsdauer der Anstellwinkelbewegung $T_a \leq 5$ bis 6 s und die vorderste Schwerpunktslage mit

$$\frac{dC_M}{dC_a} = \left(\frac{dC_M}{dC_a} \right)_{R=0} + 0,03 \text{ (bis 0,05)}$$

festzulegen, falls nicht die Bedingung der Aussteuerbarkeit während der Landung härter ist.

4. Eine derartige Festlegung des Schwerpunktsbereiches scheint besonders bei schwanzlosen Segelflugzeugen von Bedeutung zu sein. Für gute Seitenstabilitätseigenschaften ist es zweckmäßig, die Richtungsstabilität nach der Empfehlung $T_g \leq 8$ s festzulegen und das Schieberollmoment nicht zu klein zu halten.

SCHRIFTTUM

1. Bauvorschriften für Luftfahrtgerät der DDR. Segelflugzeuge, Eigenschaften und Leistungen 1961 (BVS).
2. CHARLES, B.—WESTBROOK, C. B.—McRUER: Handling qualities and pilot dynamics. *Aero/Space Engineering* (1959), May
3. GEDEON, J.: Statische Längsstabilitätsmessungen an Segelflugzeugen. *Aero/Revue* (1961), No. 4.
4. ZACHER, H.: Flugeigenschaftsuntersuchungen an 14 Segelflugzeugen. *FFM Bericht* Nr. 40.
5. DOETSCH, K. H.: Flugeigenschaftsrichtlinien. Unveröffentlichter *DVL-Bericht* 1943.
6. DR. MORELLI, P.: On the dynamic longitudinal stability of sailplanes with fixed and free controls. *Aero Revue* (1961), No. 9.
7. CRONE, R. M.—A'HARRAH, R. C.: A new modified acceptance criterion for lateral directional flying qualities. *Aero/Space Engineering* (1960), September.

ANHANG

A) Gleichungen der Längsbewegung, festes Ruder, im flugwindfesten Koordinatensystem

$$\dot{v} - 2 C_a \tan \gamma \cdot \delta v/v + C'_{W_a} \delta \alpha + C_a \gamma = 0, \quad (1)$$

$$- 2 C_a \cdot \delta v/v - C'_a \delta \alpha + \dot{\gamma} - C_a \tan \gamma \delta \gamma = 0, \quad (2)$$

$$\ddot{\alpha} - (C'_{M_y} + C'_{M_{\delta}}) \left(\frac{l_{\mu}}{i_y} \right)^2 \dot{\alpha} - C'_{M_a} \frac{s}{l_{\mu}} \left(\frac{l_{\mu}}{i_y} \right)^2 \frac{\rho_F}{\rho} \delta \alpha + \ddot{\gamma} - C'_{M_y} \left(\frac{l_{\mu}}{i_y} \right)^2 \dot{\gamma} = 0. \quad (3)$$

Charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0$$

mit den Koeffizienten (unter Vernachlässigung kleiner Glieder)

$$B = C_a - (C'_{M_y} + C'_{M_{\bar{a}}}) \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2,$$

$$C = 2C_a^2 - C'_a \cdot C'_{M_y} \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 - C'_{M_a} \frac{s}{l_\mu} \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 \frac{\varrho_F}{\varrho} - 2C_a (C'_{W_a} + C'_a \tan \gamma),$$

$$D = -2C_a^2 (C'_{M_y} + C'_{M_{\bar{a}}}) \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 + 2C_a (C'_{W_a} + C'_a \tan \gamma) C'_{M_y} \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 -$$

$$- 3 C_a C'_{M_a} \tan \gamma \frac{s}{l_\mu} \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 \frac{\varrho_F}{\varrho},$$

$$E = -2C_a^2 C'_{M_a} \frac{s}{l_\mu} \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 \frac{\varrho_F}{\varrho},$$

Stabilitätsbedingungen:

$$B > 0; C > 0; D > 0; E > 0;$$

$$R = (BC - D)D - B^2 E > 0.$$

B) Zusammenstellung der Näherungsformeln für die Längsstabilität

Abklingzeit der Anstellwinkelbewegung

$$t_{a1/e} \approx - \frac{2T_F}{\left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 (C'_{M_y} + C'_{M_{\bar{a}}}) - C'_a}$$

Schwingungsdauer der Anstellwinkelbewegung:

$$T_a \approx \frac{2\pi T_F}{\sqrt{-\frac{\varrho_F}{\varrho} \frac{s}{l_\mu} \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 C'_{M_a} + 2C_a^2 - \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 C'_{M_y} C'_a - \frac{1}{4} \left[C'_a - (C'_{M_y} + C'_{M_a}) \left(\frac{l_\mu}{i_y}\right)^2 \right]^2}}$$

Dämpfungszahl:

$$D = \frac{T_a}{2\pi t_{a1/e}}$$

Schwingungsdauer der Bahnbewegung:

$$T_b \approx \frac{\pi}{g} \sqrt{2} v \sqrt{1 + \frac{l_\mu}{s} \frac{1}{\varrho_F} C'_{M_y} \frac{1}{dC_M} \frac{1}{dC_a}}$$

C) Gleichungen der Seitenbewegung, festes Seiten- und Querruder, im experimentellen Koordinatensystem ($i_{xz} = 0$)

$$x_e = x, \quad y_e = y, \quad z_e = z_a$$

$$C'_{q\beta} \cdot \beta C_a \cdot \mu - \dot{\chi} \cdot \cos \gamma = 0,$$

$$C'_{Lz} \cdot \dot{\beta} + C'_{L\beta} \frac{\varrho_F}{\varrho} \beta - \left(\frac{i_x}{s}\right)^2 \ddot{\mu} + C'_{Lx} \dot{\mu} + \left(\frac{i_x}{s}\right)^2 \sin \gamma \dot{\chi} + (C'_{Lz} - C'_{Lx} \cdot \sin \gamma) \dot{\chi} = 0, \quad (2)$$

$$- \left(\frac{i_z}{s}\right)^2 \ddot{\beta} + C'_{Nz} \dot{\beta} + C'_{N\beta} \frac{\varrho_F}{\varrho} \beta + C'_{Nx} \dot{\mu} - \left(\frac{i_z}{s}\right)^2 \dot{\chi} + (C'_{Nz} - C'_{Nx} \sin \gamma) \dot{\chi} = 0. \quad (3)$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0$$

mit den Koeffizienten (unter Vernachlässigung kleiner Glieder)

$$\begin{aligned} B &= -\left(\frac{s}{i_x}\right)^2 C'_{L_x} - \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{N_z} + C'_{q_\beta}, \\ C &= \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 (C'_{L_x} C'_{N_z} - C'_{N_x} C'_{L_z}) - \\ &\quad - \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 \frac{Q_F}{Q} C'_{N_\beta} - C'_{q_\beta} \left[\left(\frac{s}{i_x}\right)^2 C'_{L_x} + \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{N_z} \right], \\ D &= (-C'_{L_\beta} C'_{N_x} + C'_{N_\beta} C'_{L_x}) \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 \frac{Q_F}{Q} + \\ &\quad + \left[\left(\frac{s}{i_x}\right)^2 C'_{L_\beta} + \tan \gamma \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{N_\beta} \right] \frac{Q_F}{Q} C_a + \\ &\quad + C'_{q_\beta} (C'_{L_x} C'_{N_z} - C'_{N_x} C'_{L_z}) \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 \left(\frac{s}{i_z}\right)^2, \\ E &= \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 \frac{Q_F}{Q} C_a [C'_{N_\beta} C'_{L_z} - C'_{L_\beta} C'_{N_z} + \tan \gamma (C'_{L_\beta} C'_{N_x} - C'_{N_\beta} C'_{L_x})]. \end{aligned}$$

D) Zusammenstellung der Näherungsformeln für die Seitenstabilität und -steuerbarkeit

Abklingzeit der Gierbewegung:

$$t_{a1/e} \approx - \frac{2T_F}{\left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{N_z} - C'_{q_\beta}}.$$

Schwingungsdauer der Gierbewegung

$$T_g \approx \frac{2\pi T_F}{\sqrt{-\frac{Q_F}{Q} \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{N_\beta} - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{N_z} \right]^2 - C_a \frac{Q_F}{Q} \frac{C'_{L_\beta}}{C'_{L_x}}}}$$

Abklingzeit der Spiralbewegung:

$$t_{s1/e} \approx \frac{C'_{L_\beta} \left[C_a \left(\frac{i_z}{s}\right)^2 - C'_{N_x} \right] + C'_{N_\beta} C'_{L_x}}{-C'_{L_\beta} C'_{N_z} + C'_{N_\beta} C'_{L_z} + \tan \gamma (C'_{L_\beta} C'_{N_x} - C'_{N_\beta} C'_{L_x})} \frac{v}{g}.$$

Grenze der Spiralstabilität ($E = 0$):

$$-C'_{L_\beta} C'_{N_z} + C'_{N_\beta} C'_{L_z} + \tan \gamma (C'_{L_\beta} C'_{N_x} - C'_{N_\beta} C'_{L_x}) = 0.$$

Grenze der Taumelstabilität ($R = 0$):

$$\begin{aligned} &-C'_{N_\beta} C'_{L_x} \left[\left(\frac{s}{i_x}\right)^2 \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{L_x} C'_{N_z} + C_a \left(\frac{s}{i_x}\right)^2 C'_{L_z} \right] - \\ &-C_a \frac{Q_F}{Q} C'_{L_\beta} \left[C_a \left(\frac{i_z}{s}\right)^2 C'_{L_\beta} + C'_{N_\beta} C'_{L_x} \right] = 0. \end{aligned}$$

Amplitudenverhältnis

$$\frac{C_r}{C_g} \approx - \frac{\frac{C'_{L_\beta}}{C'_{N_\beta}} \left(\frac{i_z}{i_x}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{i_x}\right)^4 \frac{C'_{L_x}}{\frac{Q_F}{Q} \left(\frac{s}{i_z}\right)^2 C'_{N_\beta}}}}$$

Seitensteuerbarkeit im stationären Schiebflug

$$\frac{\xi}{\zeta} = - \frac{C'_{N_z}}{C'_{L_\xi}} \frac{1}{\frac{C'_{N_\xi}}{C'_{L_\xi}} - \frac{C'_{N_\beta}}{C'_{L_\beta}}}$$

CONTRIBUTION TO THE FLYING CHARACTERISTICS OF GLIDER AIRPLANES

W. LEHMANN

SUMMARY

The paper deals with the influence of requisitions on longitudinal and lateral stability with the corresponding aerodynamic coefficients. Furthermore, the author investigates what minimum and maximum values result for gliders from the flying characteristic requirements and recommendations specified in the aircraft construction regulations, as a function of geometrical data and speeds. One essential condition for these investigations is the existence of sufficiently accurate approximate formulae which permit evaluation at the cost of reasonable computation work. The appendix of the paper contains those equations of movement, and approximate formulae deduced from them, the accuracy of which has proved to be satisfactory in the light of many numerical examples.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES AÉRONAUTIQUES DES PLANEURS

W. LEHMANN

RÉSUMÉ

L'étude traite de l'influence des exigences aérotechniques des stabilités longitudinale et latérale sur les coefficients aérodynamiques correspondants. L'auteur analyse ensuite les valeurs minima et maxima valables pour les planeurs, résultant des exigences et recommandations aérotechniques spécifiées dans les normes de construction d'avions, en fonction des données géométriques et des vitesses. Une condition essentielle de ces examens est de disposer de formules approchées suffisamment précises qui ne nécessitent, pour l'évaluation, qu'une quantité limitée de calculs. L'étude donne, en annexe, les équations du mouvement et les formules d'approximation qui en ont été déduites, et dont la précision suffisante est démontrée par divers exemples numériques.

К ЛЕТНИМ КАЧЕСТВАМ ПЛАНЕРОВ

В. ЛЕМАНН

РЕЗЮМЕ

В работе дается разбор летно-технических требований в отношении продольной и боковой устойчивости и их влияния на соответствующие аэродинамические коэффициенты. Исследуется далее, минимальные и максимальные значения, которые получаются для планеров, исходя из летно-технических требований и рекомендаций, указанных в технических условиях по самолетостроению в функции от геометрических данных и скоростей. Одним из основных условий выполнения таких анализов является существование таких достаточно точных приближенных формул, которые позволили бы путем выполнения вычислений относительно небольшого объема осуществить оценку. В приложении к работе даются уравнения движения и выведенные из них приближенные формулы, которые судя по разнообразным числовым примерам, достаточно точны.

BOOK REVIEW

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING. BUDAPEST, SEPTEMBER 24—27, 1963

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1963. 550 pages 346 figures, 40 tables.

The book contains 55 papers written in Hungarian, English, German, French and Russian, which were submitted to the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. The Conference was organized by the Hungarian Academy of Sciences and held in Budapest on September 24—27, 1963. Each of the papers was completed by a detailed summary written in English, German, French and Russian.

The subject matter truly reflecting the present situation, problems and trends of the Science of Soil Mechanics and Foundation Engineering is presented in five chapters to the readers of this book.

Subject group 1: Theoretical and Practical Questions of Earth Pressure. The, as accurate as possible, determination of earth pressure is one of the pivotal questions of structural analysis of civil engineering structures. Although a multitude of outstanding scientists in theoretical physics and mechanics, as well as laboratory researchers and engineers spared no effort to solve this question, it still cannot be regarded as being settled. In fact, this is also proved by the presented 11 papers belonging to this subject group, reporting on partial results concerning a more accurate determination of earth pressure. The problems discussed in the aforementioned papers are e. g., soil physical characteristics which are important from the viewpoint of the determination of earth pressure, model tests referring to earth pressure, in situ measurements and the resistance of anchoring blocks.

Subject group 2: Earth-Works (Questions Referring to the Stability of Slopes, Open Cuts, Compaction of Earth-Works). Among the ten papers pertaining to this subject group, six items deal with the problem referring to the compaction of soils. This number indicates by itself the great importance of the question touched upon, requiring an urgent solution and a final settlement. Researchers, designers and builders might alike and successfully utilize practical advices as well as those of principle to be found in these papers. Two papers written by highly experienced experts of the German Democratic Republic, dealing with the stability of earth works connected with brown coal mines in open cut, are of particular interest. Finally, studies referring to soil stabilization and a reliable method for the identification of soils complete the rich material of this subject group.

Subject group 3: Questions Referring to the Bearing Capacity of Different Foundations. The central problem of foundation engineering is the reliable determination of the bearing capacity of foundations. On the basis of results obtained during the last decade it can be established, that a definitive theoretical solution of this question is for the time being impossible, and still requires much experience, chiefly model tests carried out on a large scale and a statistical evaluation of same. Among the 14 papers concerning this subject group comprehensive surveys as well as papers dealing with hitherto only little studied phenomena are to be found. However, all these papers reflect the extensive research work in progress all over the world.

Subject group 4: Up-to-Date, Economic and Mechanized Foundation Methods. The development of the Building Industry is determined by three principal factors: modern building material, economic structures produced of same and, if possible, an entirely mechanized execution. Although, the papers included in this subject group cannot cover the whole complex of the problem, yet they give information on demands arising in connection with the quick development of the afore-mentioned factors. The principal innovation might be the idea itself that using an appropriate mechanization and adequate materials, a mediocre

— or even weak — underground could be transformed into a “structural element”, i. e., into a foundation. The application of soil solidification and pile foundations might result in saving large scale earth-works, expensive drainages, these conduce to the lessening of hard physical work etc.

Subject group 5: Loading and Dimensioning of Subterranean Structures. The rapid development of traffic requires the construction of numerous subterranean structures as: underground railways and passages, garages, storehouses etc. As the costs of these structures are high, their dimensioning should be as economic as possible, of course, within the limits of a reasonably chosen safety. This would require the precise knowledge of loads acting on same. The here presented eight papers are a valuable contribution to this, up to the present days debated problem. Among these papers, in addition to those dealing with pure theoretical solutions, others report on theories which are based on practical and experimental data, and reports on model test carried out on a large scale are also to be found. Two reports on photo-elastic investigations indicate that modern material testing methods used to an increased degree might expediently be utilized for the investigation of the stress state developing in subterranean structures.

Dr. L. Varga

A. Nádai :

THEORY OF FLOW AND FRACTURE OF SOLIDS. VOLUME 2.

Mc Graw Hill, New York, London, Toronto 1963, 705 pages

Considerable time has elapsed between the publication of the first and second editions (1931 and 1950) of volume I and that of the second volume of this inclusive monography.

The close harmony between thorough laboratory and intensive theoretical work is one of the characteristic features of the works of A. NÁDAI, who, of Hungarian origin, was one of the most outstanding authorities on applied mechanics. All problems are approached by analysing the physical aspects of the phenomenon in the light of experimental results and experimental results are again resorted to for checking theoretical results. His scientific methods might well set the standards for every technical research worker. Mathematics, as he pointed out on several occasions, must never be considered as a final aim but only as a means for the exact formulation of fundamental principles of mechanics and for the solution of problems.

Applied mechanics in modern times shows an increasing tendency to expand the boundaries of the classical elasticity in the quest for newer methods capable of describing the actual behaviour of material more accurately and over a wider range of conditions. The predominant feature of A. NÁDAI's latest book is that it describes primarily the new theories in which the material is regarded to be in a structural condition changing as a function of time, and the aim of which is the investigation of the behaviour of plastic and viscous materials as well as of the effects of temperature changes.

The material is presented in the following grouping:

Part I is devoted to the description of condition characteristics with special regard to the effects of elevated temperature on the structural properties of the material. Subsequently a detailed treatment completed by illustrative examples is given of the concept of mechanical energy stored in elastic and plastic bodies, as well as of classic theorems relating thereto.

Part II deals with the concepts and theories relating to elastic, viscous and visco-elastic materials. Applications of these are illustrated, by the solution of problems encountered, with contact pressures and plates and beams subjected to lateral forces.

Part III contains further applications of the viscous theory. These are the bending of the viscous plate supported on a substratum (this problem serves among others to investigate the mechanical condition of the earth crust), the pressure of a thin viscous layer, the flow of viscous materials through pipes. Effects of thermal shocks and the problem of initial and residual stresses are dealt with in the last two sections.

In *Part IV* the theories relating to critical states of equilibrium of loose materials are described. The theory of slip-lines and the solution of the more important problems in soil mechanics are discussed. The investigation of ideally plastic materials is included as a special case.

Part V presents a description of fundamental concepts, experimental results and theoretical investigations relating to the creep of metals at elevated temperatures.

Part VI is finally devoted to selected chapters of geomechanics. The theory developed by A. HEIM and A. WEGENER on the movements of the earth crust is enlightened and completed by theoretical investigations into the mechanics involved.

A wealth of experimental results, diagrams and tables is included to supplement theoretical considerations. The complete research work of the scientists who contributed to the problems dealt with in the book, together with the results attained by them is presented to the reader by references and quotations with the authenticity of a historian. This collection of material alone would be of extraordinary value.

The above summary review may already suffice to reveal that the latest book of A. NÁDAI must be classified among the fundamental works on applied mechanics, thanks to its modern approach, high theoretical standard and richness of material. Aside from being an excellent reference book it opens new perspectives to researchers, physicists, geologists and engineers engaged in problems in the field of strength of materials.

Dr. S. Kaliszky

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. III. 3. — Terjedelem: 18,50 (A/5) ív, 135 ábra

64.58298 — Akadémiai Nyomda Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address,

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra” Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I. Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

INDEX

- Szidarovszky, J.*: Two New Practical Methods to Determine the Critical Loads for a Compressed Bar of Variable Flexural Rigidity — Zwei neue praktische Methoden zur Bestimmung der kritischen Kräfte eines gedrückten Stabes mit veränderlichem Querschnitt — Deux nouvelles méthodes pratiques pour déterminer les forces critiques d'une barre comprimée de section variable — *Сидаровски, Я.*: Два новых практических метода определения критических сил сжатого стержня переменного сечения 261
- Horváth, T.*: The Determination of Characteristic Parameters of Microwave Semiconductor Diodes with Variable Capacitance — Die Bestimmung der Kenngrößen von Mikrowellen-Halbleiterdioden mit veränderlicher Kapazität — Détermination des paramètres caractéristiques des diodes semi-conductrices hyperfréquences à capacité variable — *Хорват, Т.*: Определение характерных параметров полупроводниковых диодов СВЧ переменной емкости 287
- Rózsa, M.*: Iterative Stability Analysis of Frameworks — Ein Iterationsverfahren zur Untersuchung der Stabilität von Rahmenkonstruktionen — Procédé d'itération pour le calcul de stabilité des systèmes de barres — *Рожа, М.*: Итерационный способ исследования стабильности стержневых конструкций 303
- Szuk, G.*: Setting and Hardening of Hydraulic Materials, VI. — Abbindung und Erhärtung hydraulischer Stoffe, VI. — Prise et durcissement des matériaux hydrauliques, VI. — *Сук, Г.*: Схватывание и твердение гидравлических материалов, VI. 317
- Erdélyi, I.*: Further Investigation of the Ranque Phenomenon — Weitere Untersuchung der Ranqueschen Erscheinung — Nouvelles recherches sur le phénomène Ranque — *Эрдели, И.*: Дальнейшее изучение явления Ранке 331
- Rédei, I.*: Control of Bar-Forces Arising in Plane Trusses — Die Festigkeitsprüfung von ebenen Fachwerkträgern — Contrôle des barres de poutres en treillis plans — *Редеи, И.*: Проверка стержневых усилий плоских решетчатых балок ... 349
- Szmodits, K.*: Scheibenbemessung auf Grund des Traglastverfahrens — Plastic Design of Disks — Dimensionnement plastique des tympans — *Смодич, К.*: Пластический расчет нагруженных в своей плоскости пластин 371
- Barna, J.—Marschalkó, B.*: Das rheologische Verhalten wäßriger Bentonitdispersionen, II. — Investigation of the Rheological Properties of Aqueous Bentonite Dispersions, II. — Examen des caractéristiques rhéologiques des dispersions aqueuses de bentonite, II. — *Барна, Я.—Маршалко, В.*: Исследование реологических свойств водных дисперсий бентонита, II. 391
- Freudenthal, A. M.*: Die Sicherheit der Baukonstruktionen — The Safety of Building Constructions — De la sécurité des structures dans les bâtiments — *Фрейденталь, А. М.*: О надежности строительных конструкций 417
- Lehmann, W.*: Ein Beitrag zu den Flugeigenschaften der Segelflugzeuge — Contribution to the Flying Characteristics of Glider Airplanes — Contribution à l'étude des caractéristiques aéronautiques des planeurs — *Леманн, В.*: К летним качествам планеров..... 447
- BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ
- Nádai, A.*: Theory of Flow and Fracture of Solids (*Kalishky, S.*)
 Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering (*Varga, L.*) 469