

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 41

FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

Tomus 41

Index

- Boldizsár, T.* : Bemerkung zur Abhandlung von Hiramatsu und Kokado: „Eine Untersuchung über die Kühlung von Gruben durch den Wetterstrom“ — Remarks on the Paper “Examination of the Cooling of Mines by Air Flow” by Hiramatsu and Kokado — Remarques sur l'étude de Hiramatsu et Kokado: «Examen du refroidissement des mines par courant d'air» — *Большижар, Т.*: Замечания к статье Хираматсу и Кокада «Исследование охлаждения шахт потоком воздуха» 251
- Boldizsár, T.* : Ergänzung zur Lösung einiger Probleme der Wetterkühlung tiefer Gruben — Complements on the Solution of some Problems for the Cooling of Deep Mines — Contribution à la solution de quelques problèmes de ventilation dans les mines profondes — *Большижар, Т.*: Дополнение к решению проблемы охлаждения воздуха глубоких шахт 451
- Bölöni, I.* : Some Functional Regularities of the Comminution Process in Hammer Mills — Einige Regelmässigkeiten des Mahlvorganges in Hammermühlen — Quelques régularités dans le régime de broyage des moulins à marteaux — *Бёлёни, И.*: Некоторые закономерности процесса измельчения молотковой пробилки 381
- Éliás, E.* : Berechnung der Wirkungen des Kriechens mit Hilfe der Laplaceschen Transformation — Calculation of Creep by Using Laplace's Transformation — Calcul des effets du fluage à l'aide de la transformation de Laplace — *Элиаш, Э.*: Вычисление влияния ползучести с помощью трансформации Лапласа 305
- Freudenthal, A. M.* : One-Dimensional Response and Coefficient of Thermal Expansion in Time-Sensitive Materials — Das ein-dimensionale Verhalten und der Koeffizient der Wärmeausdehnung zeit-empfindlicher Materialien — Comportement unidimensionnel du coefficient de dilatation thermique des matériaux visco-élastiques — *Фрейденталь, А. М.*: Одномерность теплового коэффициента расширения вискоэластичных материалов 415
- Gádor, L.* : Description of Alternating Magnetic Circuits by Complex Quantities — Die Beschreibung von magnetischen Wechselkreisen durch komplexe Größen — Description des circuits magnétiques alternatifs par des grandeurs complexes — *Гадор, Л.*: Описание переменных магнитных цепей комплексными количествами 113
- Goschy, B.* : Berechnung der Übertragungslänge der Spannkraft nach der Bruchtheorie — Calculation of the Transmission Length of Pre-tensioned Wires using the Ultimate Load Theory — Calcul de la longueur de blocage des fils précontraints d'après la théorie de la rupture — *Гоши, Б.*: Расчет длины передачи усилия . . 399
- Helm, L.* : Statische Eigenschaften von relaisartigen pneumatischen Kraftschaltern — Static Characteristics of a Relay-Type Pneumatic Signal Converter — Les caractéristiques statiques d'un convertisseur de signaux de type relais — *Хельм, Л.*: Статические свойства релейных пневматических преобразователей сигналов . . 335
- Кудрявцев, И. В.—Саввина, Н. М.*: Усталость крупных ступенчатых валов из легированных сталей — *Kudriavcev, I. V.—Savvina, I. M.*: Die Ermüdung von großen, abgestuften Wellen aus legiertem Stahl — The Fatigue of BigStepped Shafts Made of Alloy Steel — Fatigue des grands arbres épaulés en acier allié 35

<i>Kovács, Gy.</i> : Dimensioning Flood-Control Levees for Underseepage — Die Dimensionierung von Hochwasserschutzdeichen unter Berücksichtigung der Sickerung unterhalb des Deiches — Le calcul des digues, compte tenu de l'infiltration — <i>Ковач, Д.</i> : Расчет насыпей под плотины с учетом фильтрации	179
<i>Linhardt, B.</i> : Выступление в дискуссии к докладу проф. Кудрявцева — <i>Linhardt, V.</i> : Beitrag zur Diskussion über den Vortrag von Prof. Kudriavcev — Discussion Referring to Prof. Kudriavcev's Lecture — Intervention à la discussion de l'exposé du Prof. Kudriavcev	51
<i>Linhard, W.</i> — <i>Scholz, O.</i> : Zur Kriterienproblematik der Werkstoffsprödigkeit — On the Problem of the Criterion of Brittleness of Materials — Sur le critère de la rigidité des matériaux de construction — <i>Линхарт, В.</i> — <i>Шольц, О.</i> : К проблематике критерия хрупкости конструкционных материалов	107
<i>Lovass-Nagy, V.</i> — <i>Szendy, K.</i> : Investigation of Transient Phenomena of Electrical Networks by Means of Matrix Calculus — Untersuchung der transienten Vorgänge in elektrischen Netzen mit Hilfe der Matrizenrechnung — Étude mathématique des phénomènes transitoires dans les réseaux électriques par calcul matriciel — <i>Ловаши-Надь, В.</i> и <i>Сенди, К.</i> : Исследование переходных явлений электрических сетей с помощью матриц	269
<i>Müller, R.</i> : Über die Behandlung der Ermüdung in den Festigkeitsvorschriften für Flugzeuge — Taking into Account the Fatigue in Strength Rules for Aircraft — Considération de la fatigue dans les règlements concernant la résistance des avions — <i>Мюллер, Р.</i> : Учет усталости в технических условиях механической прочности самолетов	77
<i>Nagy, I.</i> : Theory of Three-Phase Bridge Self-Saturating Magnetic Amplifiers. I. — Theorie eines dreiphasigen, selbstsättigenden magnetischen Verstärkers in Brückenschaltung. I. — Théorie de l'amplificateur magnétique auto-saturant triphasé, monté en pont. I. <i>Надь, И.</i> : Теория трехфазного самонасыщающегося магнитного усилителя мостовой схемы. I.	199
<i>Nagy, I.</i> : Theory of Three-Phase Bridge Self-Saturating Magnetic Amplifiers. II. — Theorie der dreiphasigen, selbstsättigenden Magnetverstärker in Brückenschaltung II. — La théorie de l'amplificateur magnétique auto-saturant triphasé, monté en pont. II. — <i>Надь, И.</i> : Теория трехфазного самонасыщающегося магнитного усилителя мостовой схемы	345
<i>Niemann, G.</i> : Die Dauer-Pittingfestigkeit der Zahnräder und Wege zu ihrer Erhöhung — The Pitting Fatigue Limit of Gears and Ways Leading to its Increase — La limite de fatigue au pitting des engrenages et les moyens de l'élever — <i>Ниман, Г.</i> : Предел питтинг-усталости зубчатых колес и пути повышения этого предела	23
<i>Никольский, Е. Н.</i> : Метод последовательных приближений (метод Шварца) как теоретическая основа расчета оболочек с вырезами типа вагонных кузовов — <i>Nikolsky, E. N.</i> : Die Methode der stufenweisen Annäherung (Schwarz'sche Methode) als theoretische Grundlage der Dimensionierung von schalenkonstruktionsartig gestalteten Eisenbahn-Wagenkästen — The Method of Gradual Approximation (Schwarz's Method) as Theoretical Basis for Dimensioning Closed Frame-Formed Railway Carriage Bodies — La méthode d'approximations successives (méthode de Schwarz) comme base théorique du dimensionnement des caisses de voitures de chemin de fer en coque discontinue	91
<i>Ripianu, A.</i> : Nouvelle méthode pour la détermination des pulsations propres correspondant aux vibrations de torsion des arbres coudés des moteurs homogènes en ligne — Eine neue Methode zur Bestimmung der Eigenschwingungen entsprechend den Drehschwingungen der Kurbelwellen der homogenen Reihenmotoren — A New Method for the Determination of Proper Pulsations Corresponding to the Torsion Vibrations of the Crank Shafts of Homogeneous Motors in Line — <i>Рипяну, А.</i> : Новый метод определения собственных пульсации, соответствующих скручивающим колебаниям коленчатых валов, принадлежащих однородным рядовым двигателям	227

- Rózsa, L., Kovács, G. and Kohlmann, L. : Stresses and Deformations due to Tangential Forces Acting along the Perimeter of a Circular Cut Set in an Elastic Plane — Spannungen und Deformationen infolge von Tangentialkräften an dem Umfange eines Kreischnittes in einer elastischen Ebene — Contraintes et déformations sous l'effet de charges tangentielles agissant sur le contour d'une ouverture circulaire située dans un plan élastique — Рожа, Л., Ковач, Г. и Колманн, Л. : Напряжения и деформации кругового выреза в упругой плоскости от касательных сил, действующих вдоль контура* 363
- Serensen, C. B. : Накопление усталостного повреждения и запасы прочности при нестационарных условиях службы — Serensen, S. V. : Die Anhäufung von Ermüdungsbrüchen bei nichtstationärer Anwendung der spröden Festigkeit — The Accumulation of Fatigue Breaks under Conditions of Instationary Application of Rigid Strength — Accumulation des ruptures par fatigue dans les conditions d'application non stationaire de la résistance rigide* 55
- Szidarovszky, J. : Producing Influence Lines of Suspension Bridges with Variable Flexural Rigidity by Successive Approximation — Eine stufenweise Näherungsmethode für die Herstellung der Einflußlinien der Hängebrücken, wenn der Querschnitt des Versteifungsträgers nicht konstant ist — Établissement des lignes d'influence des ponts suspendus renforcés de section variable, par la méthode d'approximations successives — Сидаровски, Я. : Получение графиков нагрузки подвесного моста с крепящей опорой переменного сечения методом последовательного приближения* 139
- Szmodits, K. : General Equations of Shell Analysis — Über die allgemeinen Gleichungen der Schalenstatik — Les équations générales de la statique des voiles — Смодич, К. : Об общем уравнении статики оболочек* 459
- Tevan, Gy. : Die allgemeinen Ausdrücke der magnetischen Kräfte — The General Expressions for Magnetic Forces — Les expressions générales des forces magnetiques — Теван, Д. : Общие выражения магнитных сил* 163
- Uzhik, G. V. — Koshelev, P. F. : Effect of Stress State in Regions of Stress Concentration on Metal Strength and Fracture — Einwirkung des Spannungszustandes der Stellen mit Spannungskonzentration auf die Festigkeit und den Bruch der Metalle — L'influence de l'état de tension des lieux de concentration d'efforts sur la résistance et la rupture des métaux — Ужик, Г. В. — Кошелев, П. Ф. : Влияние напряженного состояния в мектах концентрации напряжений на прочность и разрушение металлов* 3
- Vajda, Gy. : A Possible Explanation for the Influence of Temperature on Absorption — Eine mögliche Erklärung für die Abhängigkeit der Absorption von der Temperatur — Une explication possible de l'influence de la température sur l'absorption — Вайда, Д.Г. : Возможное объяснение температурной зависимости абсорции* 409
- Vámos, T. : Some Notes on the Determination and Measurement of Efficiency for Process Control Optimization — Einige Fragen der Definierung des Wirkungsgrades und seiner Messung vom Standpunkt der Prozeß-Optimierung — Quelques problèmes de la définition et de la mesure du rendement, du point de vue de l'optimisation des processus — Вамош, Т. : Некоторые вопросы определения и измерения к. п. д. с точки зрения оптимализации процесса* 245
- Veres, I. : The Extraction of the Vanadium Contents of Bauxite in the Course of Alumina Production Using the Bayer Process — Die Gewinnung des Vanadiums aus Bauxit bei der Tonerdegewinnung nach dem Bayer-Verfahren — Extraction du contenu de vanadium de la bauxite au cours de la fabrication d'alumine selon le procédé Bayer — Вереш, И. : Извлечение ванадия из боксита в процессе производства глинозема по Байеру* 259
- Winter, E. : Long-Life Oxide Coated Cathodes on Tungsten-Cores — Oxydkathoden auf Wolframbasis mit langer Lebensdauer — Cathodes à oxydes de longue durée de vie sur support en tungstène — Винтер, Э. : Оксидные катоды высокого срока службы из вольфрама* 279

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 41



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962

ACTA TECHN. HUNG.

EFFECT OF STRESS STATE IN REGIONS OF STRESS CONCENTRATION ON METAL STRENGTH AND FRACTURE (ADDENDA TO THE THEORY OF MECHANICAL BRITTLENESS OF DUCTILE METALS)*

Prof. G. V. UZHIK

D. ENG. SC.

and

P. F. KOSHELEV

A stress state in the regions of stress concentration has a substantial effect on the strength and nature of fracture.

Therefore, in calculating the strength of elements of machines and structures, it is essential to account for the concentration effect, not only by using K_t factor, but also by considering the stress state which initiates in the neighbourhood of the stress raiser in connection with a possible danger of a sudden brittle fracture.

1. Introduction

It is well known that a considerable stress raises in the regions of concentration and simultaneously in the same regions a non-uniform and more often a biaxial or triaxial stress state occurs.

Practically all that is known from the great number of papers on stress concentration (the theory of elasticity, photoelasticity, strain gauging) concerns only the former of these phenomena, namely, the evaluation of the level of stress increase. At present the K_t concentration coefficients for many stress raisers may be found in various handbooks and particularly in the well known book by PETERSON [1]. Those very handbooks, however, have practically nothing to say about stress state, that is of the distribution of principal stresses in the neighbourhood of various stress raisers — the reason for this is simple for the stress state has not been determined for many of them.

From NEUBER the stress state in the neighbourhood of a deep groove is known. But nothing is known of the stress state in the neighbourhood of a shallow groove or a groove of an intermediate depth, that is nothing is known about a great number of cases which are of great practical importance. The same may be said about the stress state in the neighbourhood of holes. In this case one can calculate the value and the distribution of stresses in the plates, which are either very thin (plane stress state) or infinitely thick (plane strain state). As for all the intermediate thicknesses, the stress state is also unknown to us.

* Lecture held at the Conference on Dimensioning and Strength Calculation, Budapest, October 24–28, 1961.

The lack of knowledge of the stress state for the majority of known shapes of stress raisers might be explained by the fact that the theoretical and experimental research of corresponding problems is exceedingly complicated.

The same explain why only the local stress increase caused by the stress raisers is taken into account in machine designing and calculation. As for the stress state which is initiated in the neighbourhood of the same stress raisers, at present it is absolutely ignored.

But to what extent does the stress state affect strength, should it be taken into account, or is it sufficient to appreciate the concentration effect by the K_t factor as the present practice is?

Analysing the causes of many failures shows that fracture of machine parts and structures cannot be explained by the mere stress increase in the regions of their concentration without involving the stress state. The same is indicated by the results of the paradoxical strength change in the specimens with different notches.

2. Stress state and strength change in regions of stress concentration on cylindrical specimens with deep grooves

Fig. 1 shows the distribution of stresses σ_1 , σ_2 and σ_3 in two specimens having deep grooves. In this case the stress state is a triaxial non-uniform tension under which $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$. The intensity of triaxiality is expressed by the ratio $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$; let us note the two limit values of $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$:

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1} = 0.5, \quad (1)$$

when triaxiality is absent and only the uniaxial stress state is present.

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1} = 0, \quad (2)$$

when triaxiality is very large and there is an uniform triaxial tension ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$).

Fig. 1 shows the change of $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$ along the cross section under the same value of σ_{\max} on every specimen.

As can be seen in the case of a groove with a large radius ($\varrho = 2.5$ mm) the intensity of the triaxial tension is low since $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$ along the entire cross-section does not differ greatly from $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1} = 0.5$ under the uniaxial tension.

The intensity of the triaxial tension is considerably greater on a specimen with a sharper groove ($\rho = 0.3$). In general, the change of the intensity of the triaxial tension i. e. the change of $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$ for the grooves with different curvatures (i. e. for different a/ρ) are shown in Fig. 2, where the value of the relative radius $\frac{r}{a}$ of the minimum cross-section is indicated along the horizontal axis.

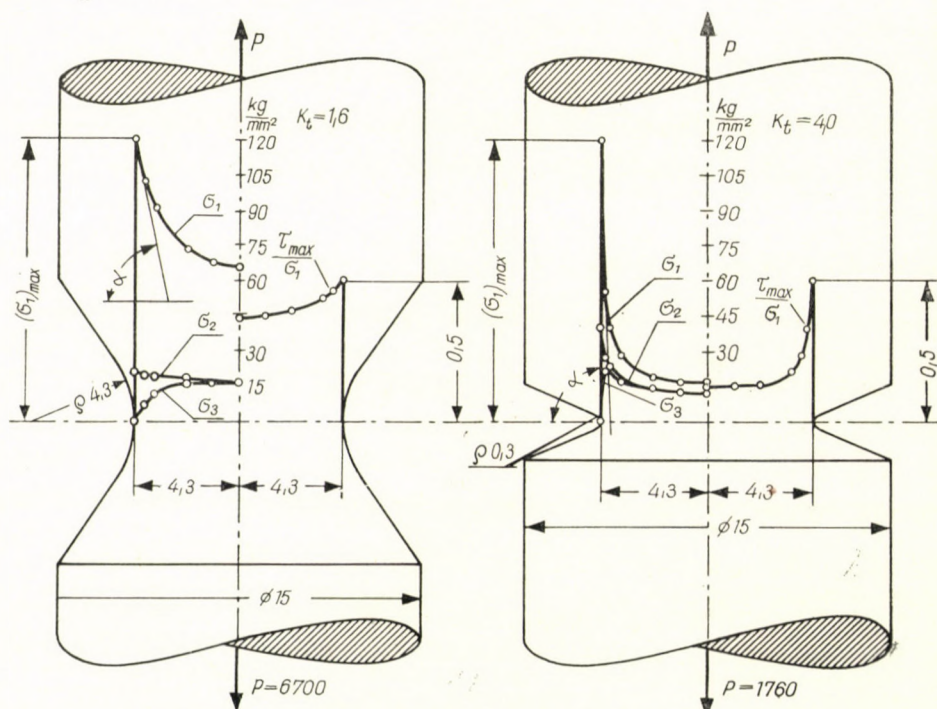


Fig. 1. The comparison of distribution of stresses σ_1 , σ_2 , σ_3 and stress state $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$ along the minimum cross section of specimens with a deep slope and deep sharp notches

The $\frac{r}{a} = 1.0$ point corresponds to the groove root. The $\frac{r}{a} = 0$ point is the center of the minimum cross section. As can be seen with the growth of the groove curvature (with the increase in the a/ρ) not only a diminishing of the $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$ takes place but simultaneously the region of the greatest intensity of triaxial tension increases. When $\frac{a}{\rho} \approx 40.0$ in direct proximity of the root of the groove the triaxial tension proved to be most intensive and the $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$ value does not greatly differ from its value in the central part of the specimen.

Returning to the stress distribution on specimens shown in Fig. 1 the following question seems to be practical. How does the stress state affect strength in these two cases? The specimens of the indicates size and grooves were made of normalized mild steel — St 45.

The results of tension tests at temperatures of $+20^{\circ}\text{C}$ and -196°C are shown in Fig. 3. Here the paradoxical change in strength may be noted:

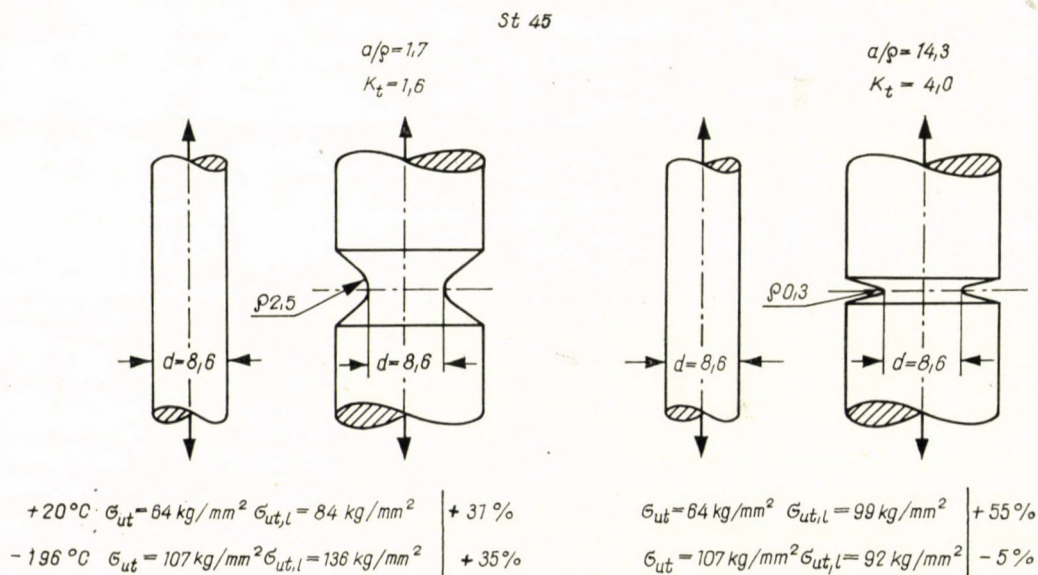


Fig. 3. The comparison of strength of specimens with sloping and sharp deep notches at room and low (-196°C) temperatures (mild steel St 45)

(1) At temperature $+20^{\circ}\text{C}$ the specimen with a sharp groove ($\rho = 0.3$) proved to be stronger than the specimen with a groove having a larger radius ($\rho = 2.5$) though the concentration coefficient $K_t = 4.0$ is 2.5 fold greater and so not an increase should have been expected but a considerable decrease of strength.

(2) At temperature -196°C a decrease of strength took place though not a very large one as should have been expected on a specimen with a sharper groove ($\rho = 0.3$): as for the specimen with a groove of a larger radius here again instead of the expected drop in strength under the influence of such a considerable drop in temperature a noticeable increase in strength took place — by more than 1.5 fold, as compared with the strength of the specimen having the same stress raiser under normal temperature.

As one may see, the observed change in strength cannot by any means be explained by an increase of stress in regions of concentration and by the value of K_t factor.

The explanation can be found by studying the stress state both in the elastic and particularly in the elastic-plastic stage of deformation [2, 3].

Fig. 4 shows stress distribution obtained by the approximate method for the same two specimens (Fig. 1 and 3) at a moment immediately preceding their rupture.

In the case of the groove with a sufficiently large radius ($\varrho = 2.5$) and a low intensity of the triaxial tension, as soon as the stress σ_1 at the bottom of the groove reaches a value equal to yield stress σ_s , the elastic-plastic strain region gradually spreads throughout the minimum cross section with a relatively small increase in the axial normal stresses. After which a plastic flow

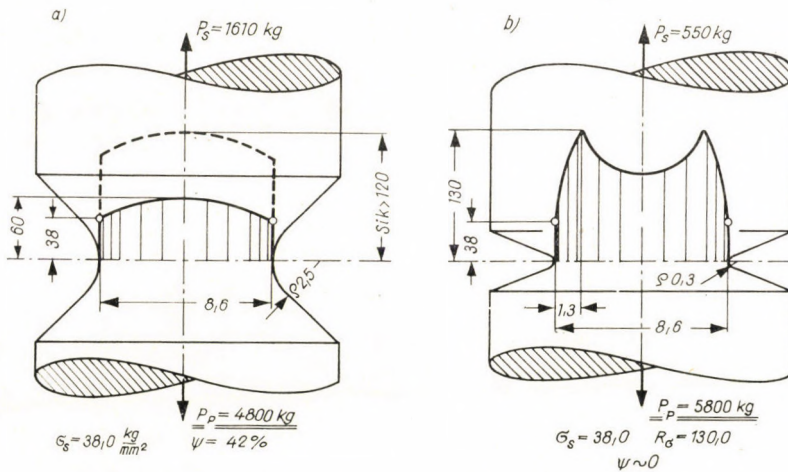


Fig. 4. The distribution of stresses at the moment preceding:
 a) ductile fracture,
 b) brittle fracture

of the material along the entire cross section and a corresponding increase in stresses σ_{1s} up to rupture takes place. The fracture of the specimen in this case proves to be ductile which is shown by the reduction of area value $\psi \cong 42\%$.

The elastic-plastic stage and the fracture of a specimen with a sharper groove ($\varrho = 0.3$, Figs. 1 and 3) and with a considerably more intensive triaxial tension, proceeds quite differently. In this case, as is seen in Fig. 4, when the stress σ_1 reaches the yield stress on the root of the groove, at the load of $P_s = 550$ kg, the further propagation of plastic deformation along the minimum cross-section proceeds with a considerable increase in the tension load and of the maximum stress σ_{1s} . To make the plastic deformation spread to a depth of only 1.3 mm the load had to be increased by more than ten fold ($P_p = 5800$ kg). At that moment normal stress σ_{1s} is reached a value equivalent to the resistance

to brittle fracture $R_{\sigma} = 130.0 \text{ kg/mm}^2$ and, therefore, the rupture of the specimen occurred. No reduction of the cross-section area was observed in this case, i. e. $\psi \sim 0$. An indirect confirmation of the correctness of this stress distribution at the moment directly preceding fracture should have been the presence of two regions on the fracture surface: a plastically deformed ring with a thickness of 1.3 mm and a brittle fractured core. These two regions do indeed appear on the fracture surface of the specimens with a groove, as shown in Fig. 5.

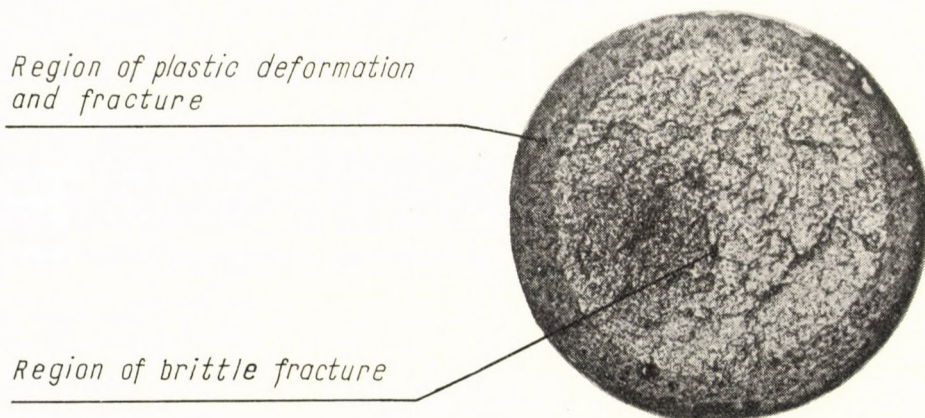


Fig. 5. The failure surface of a specimen with a deep notch. The dimensions of the specimen and the notch are given in Fig. 4b (mild steel St 45)

Thus, these examples prove that not only the strength in the regions of stress concentration but also the type of fracture — ductile or brittle — depend on the stress state.

3. On the stress state and strength change in the regions of stress concentration on cylindrical specimens with shallow grooves

Above the influence of the stress state in the presence of a deep groove on cylindrical specimens was discussed.

The depth of the groove in this case is comparable and might not even be less than the radius of the minimum cross section. The distinguishing peculiarity in this case is that during the tension of a specimen with a deep groove regardless of its curvature, the initiating triaxial tension spreads throughout the minimum cross section.

Apparently with the diminishing of the groove depth (but preserving the minimum cross section radius) a change in the stress state will take place. At present there is no solution for a similar problem and therefore it is impossible to foretell the nature of this change. Let us proceed from an assumption that the stress state intensity is the highest in the neighbourhood of the groove

root and that there the diminishing of the stress takes place in the direction from the root to the centre of the minimum cross section. Then the change in the stress state under an arbitrary groove depth may be conceived as is shown in Fig. 6.

In the vicinity of a shallow surface groove a non-uniform stress state is initiated on a very small surface adjacent to its root and then rapidly decreases so that nearly everywhere on the cross-section the stress state is uniaxial.

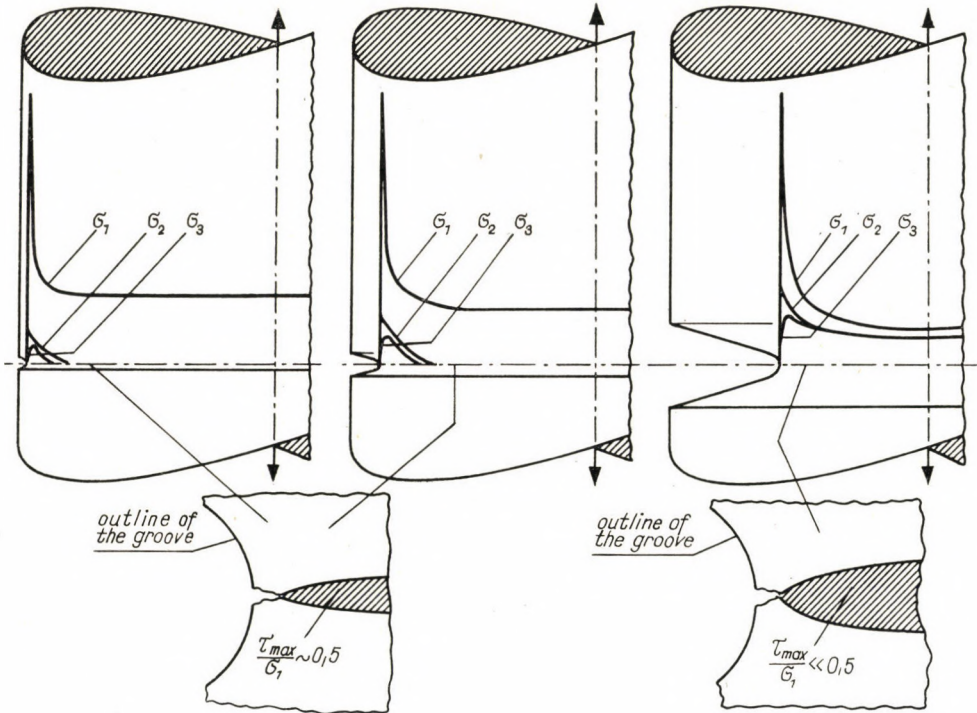


Fig. 6. The stress distribution in the case of notches of different depths

A gradual increase in depth may possibly reveal itself in the fact that the region of non-uniformity of stress state in the vicinity of the groove also continues growing until, with a sufficiently deep groove, it spreads throughout the minimum cross-section.

It was of interest to clarify the effect of the stress state on strength at different depths of the grooves.

Fig. 7 lists the results of tests on two steel specimens — mild steel under normalized condition and chromium steel under oil-quenched and tempered at 200° C condition. The difference in the stress state was achieved by changing the size of “*t*” — the depth of the grooves, while the similar K_t values were selected by the different curvatures “*ρ*”.

It is to be seen, that the strength of these two steel specimens under the influence of only one stress state for different depths of the grooves might change in absolutely opposite directions: while with the increase of "t" (ten fold) the strength of the specimens of steel St 45 increases, in the case of St 40 X

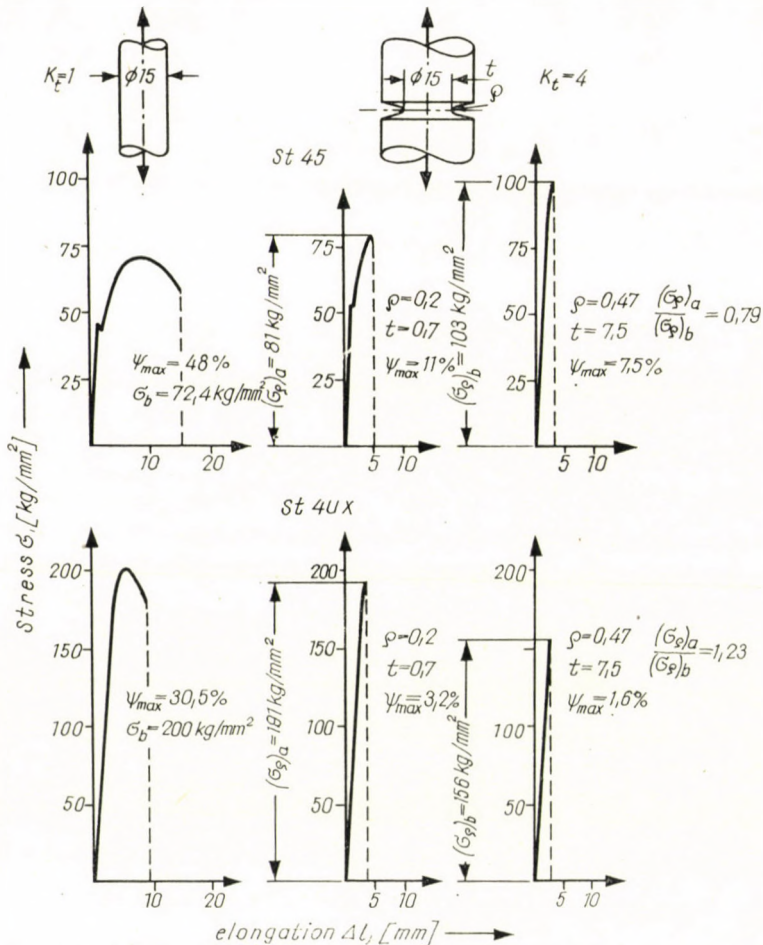


Fig. 7. The comparison of strength of the specimens with different notches but with the same stress concentration factors K_t

steel specimens with the same grooves markedly diminishes. In this case the concentration factor was one and the same for all specimens $K_t = 4.0$ so that the change of strength may be explained only by the influence of the stress state in the concentration regions on the one hand, and by the difference of the above said steels as regards the resistance to deformation and fracture, on the other hand.

4. The stress state and strength change in regions of stress concentration on rectangular cross section specimens in the form of plates or beam with different notches

As follows from the well known solutions of problems on stress concentration [4, 5] the material along the minimum cross section of elongated plates with holes or notches is under biaxial tension. These solutions are valid only

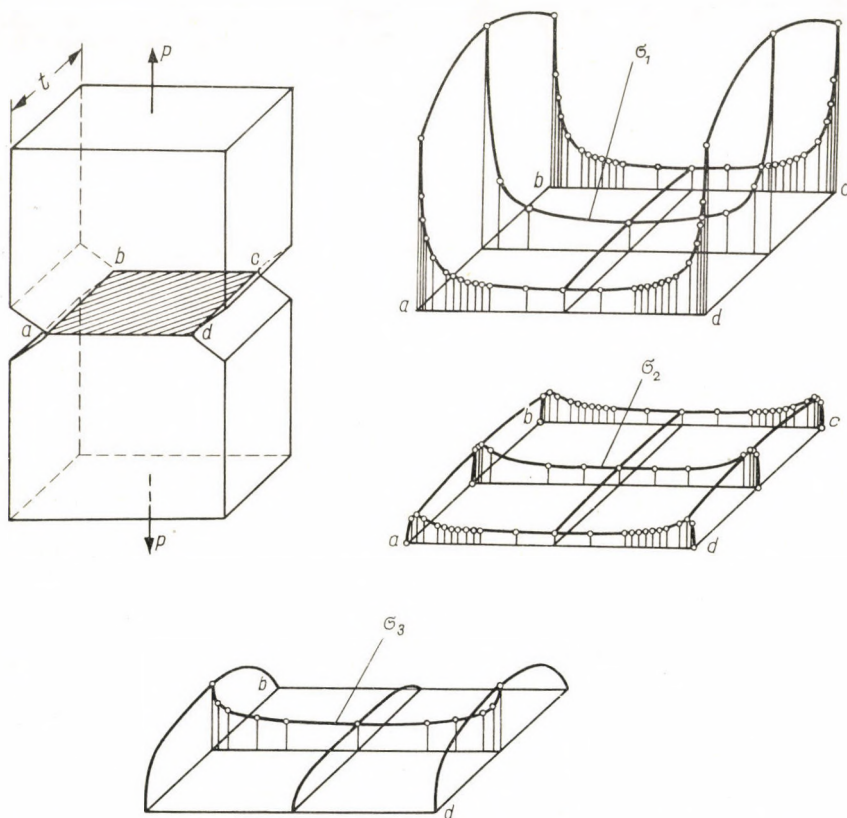


Fig. 8. The approximate triaxiality of the state of stress across the minimum cross section of the notched prismatic bar when increasing the width of the section

for the two limit cases: 1. For plates that are sufficiently thin, when actually there will exist the plane stress state; 2. For plates of very great thickness where the plane strain state condition is observed: $\sigma_3 = \mu(\sigma_1 + \sigma_2)$.

However, the transition from the plane stress state to plane strain is not discrete. With the increase of the plate thickness a corresponding, gradual, and ever growing decreasing (restriction) of one of the deformation components (when vanishing), and a simultaneous respective and ever growing

increase in the third principal stress may be expected. Thus, the increase in the thickness of plates with a hole or notches under tension or bending, should be accompanied by a corresponding transition from the predominating plane stress state to a predominating triaxial non-uniform tension.

It is quite probable that the stress distribution along the minimum cross-section would be as shown in Fig. 8.

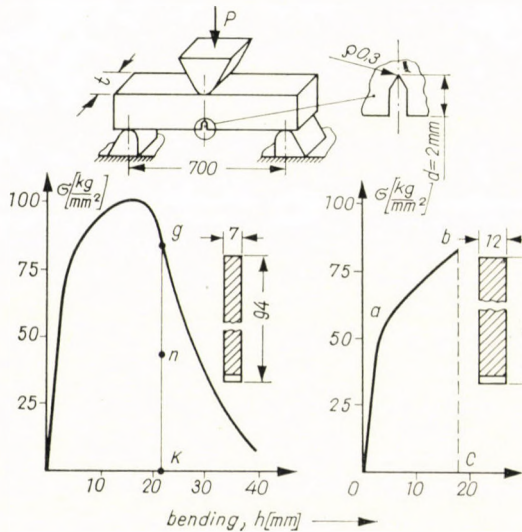


Fig. 9. The comparison of the carrying capacity (areas of bending diagrams) of the beams with the same notches but with a different width "t" of the cross section (mild steel)

In this case, too, the stress state noticeably influences the strength and the nature of the fracture. This is proved by the test results shown in Fig. 9. Here the diagrams of the notch-bending of two beams brought to fracture is shown. The stress raisers in the form of sharp notches in both of the beams were also the same and consequently the K_t , concentration factors were also the same. Their cross section width, as is shown here, differed practically by two fold. With the increase in the cross section width, as has been just mentioned, the intensity of the triaxial tension mounted (i. e. $\frac{\tau_{\max}}{\sigma_1}$ diminishes). This explains precisely the transition from ductile failure at a cross-section width of 7 mm, to brittle fracture when this width increases to 12 mm.

In this case, too, the radical change in the nature of the failure could have taken place only due to a change in the stress state during the transition from one width of a cross-section to another since the concentration factor either remained one and the same, or was but slightly altered.

Comparing the deformation diagrams in Fig. 9, it can be seen that the deformation work and consequently the carrying capacity of the beam with a smaller cross section is more than two fold greater. The matter, however, goes further. Another very important point is that the ductile failure of a plate having a 7 mm cross section proceeds slowly. This failure might be retarded. For instance, in that stage of failure when the load reaches the value of "kg" it is reduced to the "kn" level. Then failure may be stopped. Brittle fracture

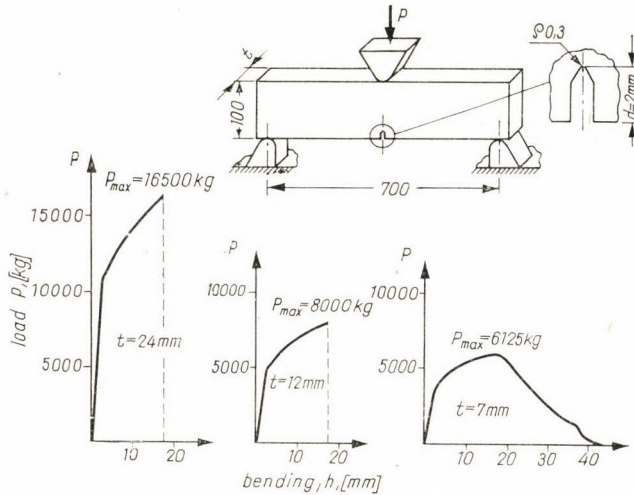


Fig. 10. Notch-bending diagrams of plates of varying thickness

(a plate with a cross section of 12 mm width) cannot be stopped since it spreads instantaneously throughout the whole cross section with a velocity approximating half as large as the velocity of sound.

As has been previously noted [6] every notch, i. e. its every depth and curvature corresponds to a critical width of cross section "t" — when a stress state is initiated with an intensity sufficient for the brittle fracture of the given material. For mild steel St 45, and the notch shown in Fig. 10, this critical width of the cross-section proved to be $t = 7-8$ mm. It is perfectly clear that when $t > 7-8$ mm conditions will be created which facilitate brittle fracture even more.

In order to determine the effect of the curvature radius and the depth of the notches on the carrying capacity and strength both under critical width of cross-section ($t = 8.0$) and at a cross-section which is in advance known to be greater ($t = 24.0$ mm) tests were made.

The results are shown in Fig. 11. The notch curvature radius was altered ten fold from $\rho = 0.2$ to $\rho = 2.0$ mm, while the notch depth varied 22 fold from $d = 0.5$ to $d = 11$ mm.

It is to be seen in Fig. 11 that the depth of the notch effects the strength and the carrying capacity of the beams more materially than its curvature does. However, even with the smallest depth $d = 0.5$ mm no ductile failure occurred on beams with a cross-section of $t = 24$ mm. Though when $\rho = 0.2$,

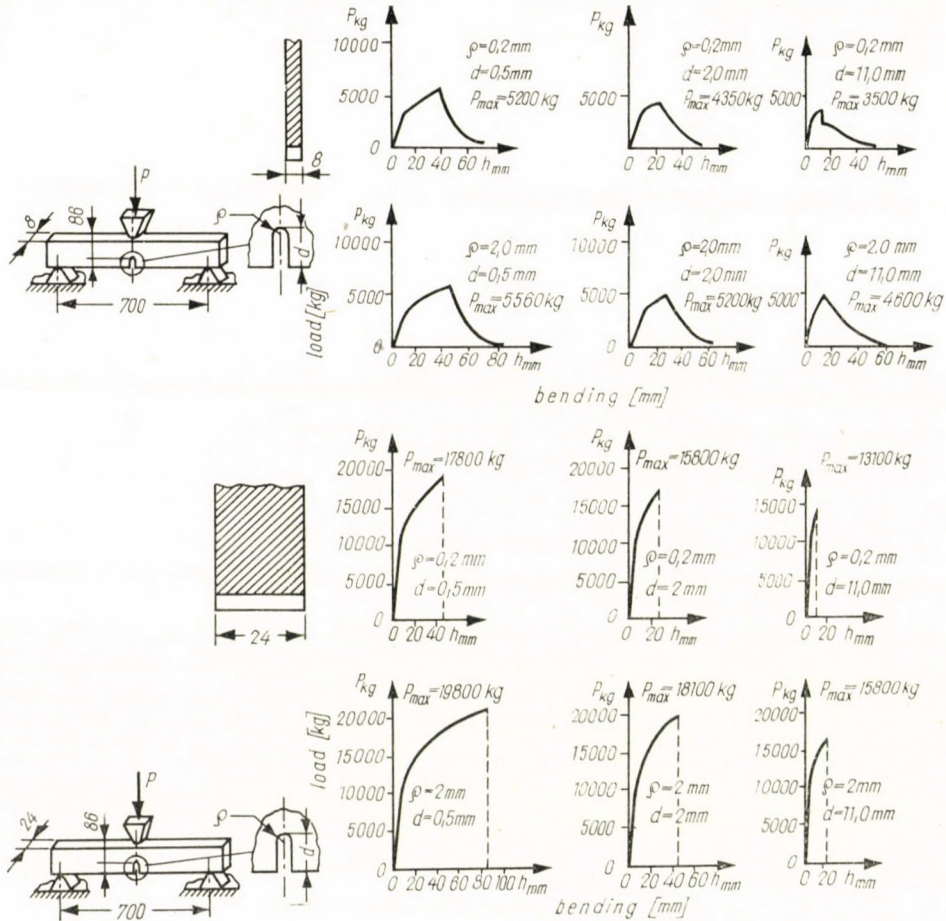


Fig. 11. The effect of notch curvature and depth on the carrying capacity during notching of beams of different width of the cross-section (mild steel)

or the more so when $\rho = 2.0$, this failure is preceded by a noticeable plastic deformation, after the load reaches its maximum value it sets instantaneously just the same way, and practically throughout the cross-section the crack is of a brittle nature.

With the increase in depth and sharpness of the notch the carrying capacity of the beams with a 24 mm cross-section width noticeably diminishes.

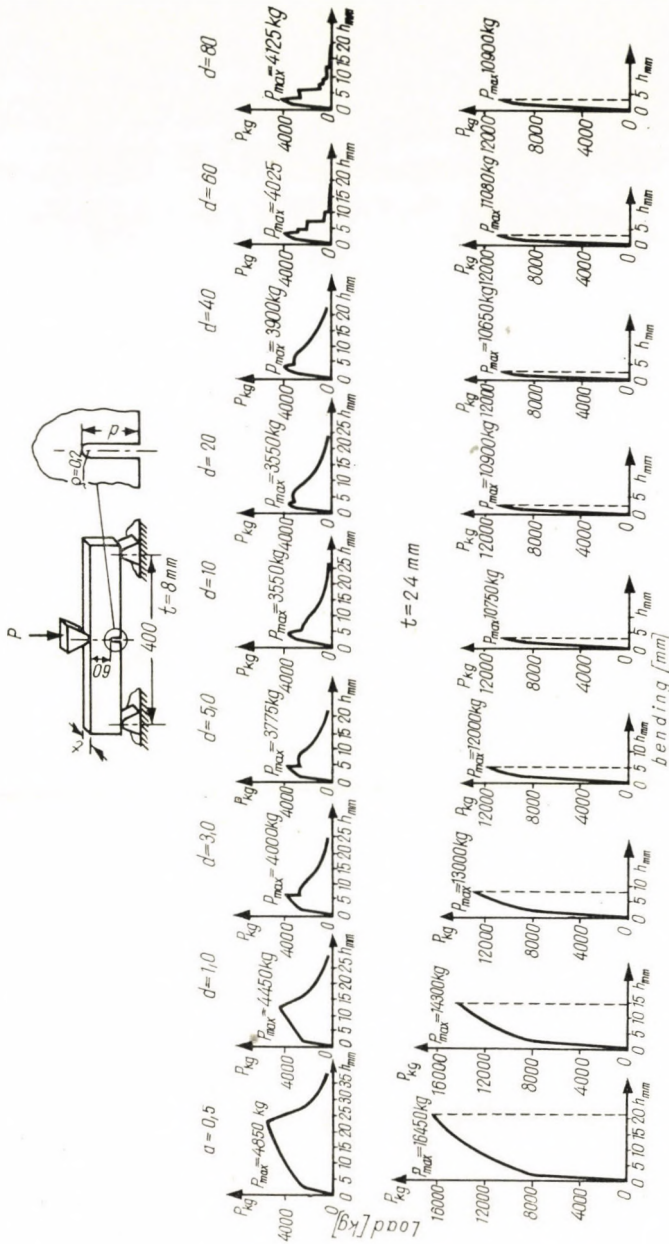


Fig. 12. The effect of notch depth on carrying capacity and on the nature of fracture of beams with different width "t" of the cross-section

The stress state has a weaker influence on the carrying capacity of beams with a cross section of 8.0 mm. It diminished noticeably only with the most sharp notch ($\rho = 0.2$) and the greatest depth ($d = 11$ mm). Specific tests were made in connection with the discovered considerable influence of the notch depth to determine the values to which the notch depth might be influencing the strength and the carrying capacity of the beams. As is seen in Fig. 12 the notch depth influence is not uniform. The carrying capacity of beams with a small (critical) cross section decreases noticeably at a comparatively small depth $d = 3.0$ mm, when the ratio of the minimum cross-section height "h" to depth "d" is $\frac{h}{d} = \frac{60}{3} = 20.0$. Later on an almost 10 fold increase in depth does not practically affect the carrying capacity, and brittle fracture occurs only at $\frac{h}{d} \geq 1.0$. This brittle fracture may be initiated at a sufficiently small cross-section width provided the depth of the sharp notch is adequately large. The carrying capacity of the beams with a cross-section width of $t = 24$ mm diminishes rapidly with depth increase until $d = 5.0$ mm and $\frac{h}{d} = 12.0$; further increase of notch depth, however, i. e. at $\frac{h}{d} < 12.0$ does not practically change the carrying capacity.

5. Certain means of preventing or retarding the initiation of sudden brittle fracture

The results in Fig. 9 lead to a conclusion that whenever the width of the cross-section in the neighbourhood of stress raiser reaches the critical value which began with it and its further increase, brittle fracture becomes unavoidable, it may be prevented thereby increasing the carrying capacity of the given cross-section; the only thing necessary is to replace the solid cross-section by one with a similar size but made up of separate elements with slight gaps in-between. The width of each of the element comprising the cross-section should be chosen so that its fracture, taken separately, should not be brittle (i. e. it should have a sufficiently small intensity of the triaxial tension in the neighbourhood of the stress concentrator).

For instance, in keeping with the results shown in Fig. 10, in order to prevent brittle fracture it is necessary to replace the solid cross-section with the size $t = 24$ mm by three elements with sizes $t = 8$ mm each. In this case, as Fig. 13 shows, in fact the composite cross-section prevents brittle fracture and considerably increases the carrying capacity (by 4.5 fold) (the work of deformation and fracture).

The utilization of composite cross-sections which is justified above all whenever there is stress concentration may be particularly effective in structural parts operating not only under static or impact loads, but also under variable loads with an asymmetry of the cycles. In this case, the composite cross-section will avert the danger of an instantaneous brittle fracture of the

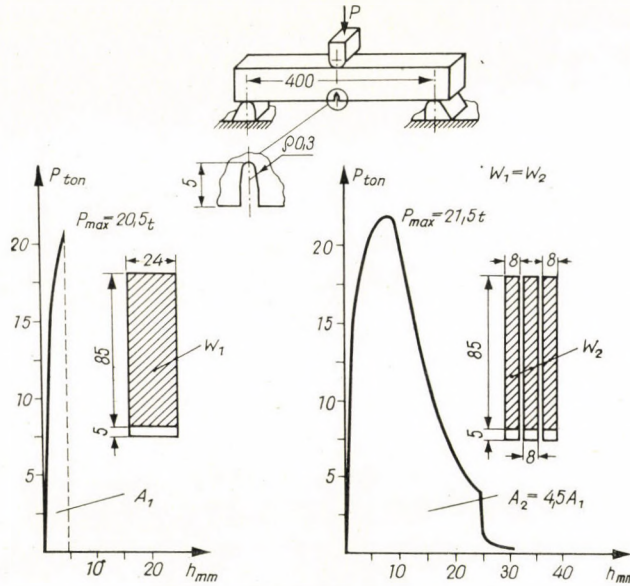


Fig. 13. The increase in carrying capacity when using biaxial tension instead of three dimensional tension in the neighbourhood of a notch

design parts which may be caused by an accidental, considerable overload in the early stage of fatigue fracture.

Another means that may retard the development of an instantaneous brittle fracture, are transversal slot made along the supposed spread of the crack. The presence of this sort of a groove may prove to be useful though it does weaken the cross-section. The high intensity triaxial tension in the vicinity of a rapidly spreading crack is instantaneously replaced by an uniaxial tension when this crack spreads against the transversal slot made in advance. As is seen in Fig. 14 the carrying capacity of the beam may be considerably increased in the process.

6. The effect of the elastic deformation energy on strength and the nature of fracture in regions of stress concentration

As a result of a series of recent experiments [7, 8, 9] it was found that with the increase of the potential energy of deformation, the ductile failure in the regions of stress concentration might pass into brittle fracture.

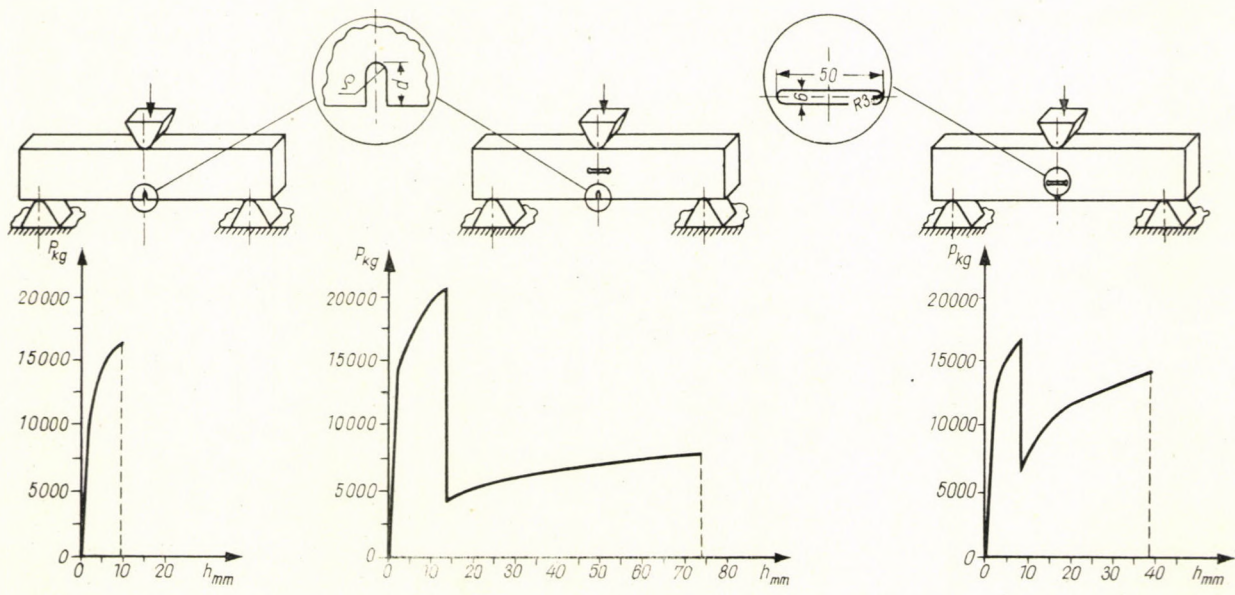


Fig. 14. The increase in carrying capacity of a beam with transversed cuts perpendicular to the direction of the crack development

Here it should be noted that most of the authors discuss it without associating it with the stress state and ascribe the decisive importance to the potential energy proper. Meanwhile the influence of the elastic deformation energy on the nature of fracture is directly related to the stress state. This can be

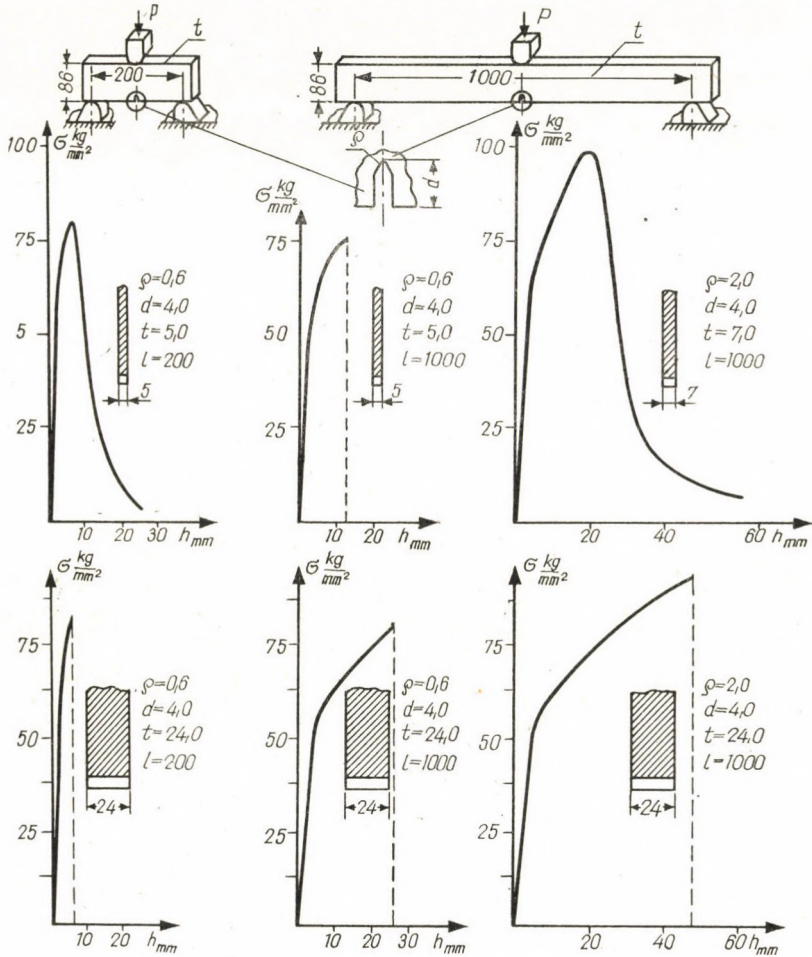


Fig. 15. The carrying capacity and the nature of failure of beams when changing its potential energy of deformation

illustrated by several examples in Fig. 15. As can be seen a beam with a 5 mm cross-section width and a distance of 200 mm between the supports undergoes ductile failure.

If the distance between the supports is increased to 1000 mm the same beam with the same stress raiser undergoes brittle fracture.

However, if the stress raiser curvature radius is increased 3—4 fold, i. e. if the concentration is diminished, and the relative value of the " τ_{\max} " shear stress is increased then ductile fracture with the distance between the supports remaining 1000 mm takes place.

On the other hand, with a considerable increase of the cross-section width to 24 mm an intensive three dimensional tension is initiated. In this case no decrease in the elastic energy by reducing the distance between the supports to 200 mm can result in a ductile failure instead of a brittle fracture.

The most evident results of the deciding effect of the stress state on the nature of fracture and strength of metals are the data given in Fig. 13.

The elastic strain energy is identical in the notch-bending of a beam with a solid cross-section and a composite beam with identical cross-section and notch dimensions (Fig. 13).

So the transition to the brittle fracture of a solid beam and to a ductile fracture composite beam can take place only under the influence of the transition to the three-dimensional tension stress state in the region of stress raisers of the solid beam and under two-dimensional tension stress state in the region of stress raisers in each element of a beam made up of separate elements (composite beam).

These instances prove that the possible influence of elastic energy on fracture conditions should be considered in connection with the stress which is initiated in the neighbourhood of stress raisers.

At the same time, these instances indicate the necessity of considering the fact, that potential energy of deformation might influence the transition from ductile fault to brittle fracture. The conditions under which the transition becomes possible require through investigation.

REFERENCES

1. PETERSON, R. E.: *Stress Concentration Design Factors*, New York 1953.
2. Ужик, Г. В.: *Сопrotивление отрыву и прочность металлов*, Изд. АН СССР, 1950, Москва.
3. Ужик, Г. В.: *Прочность и пластичность металлов при низких температурах*, Изд. АН СССР, 1957, Москва.
4. Нейбер, Г.: *Концентрация напряжений*. Изд. 1947 г., Москва.
5. Савин, Г. Н.: *Концентрация напряжений около отверстий*, Изд. Гостеоретиздат, 1951, Москва.
6. UZHİK, G. V., GALPERIN, M. J., ZOZYKOWA, A. A.: *Sudden Fracture of Machine Parts and Structure Elements*, Symposium on Large Machines and on Their Results. *ASTM Publications*, No. 216, 1958.
7. FELBECK, D. K. and OROWAN, E.: *Experiments on Brittle Fracture of Steel Plates*, *Welding Journal*, November, 1955.
8. OROWAN, E.: *Condition of High Velocity Ductile Fracture*. *Journal Appl. Physics*, Vol. 26, July, 1955.
9. IRWIN, G. R.: *Analysis of Stress and Strain near the End of a Crack Traversing a Plate*. *Journal of Appl. Mech.* 1957, p. 361.

EINWIRKUNG DES SPANNUNGSZUSTANDES DER STELLEN MIT SPANNUNGS-
KONZENTRATION AUF DIE FESTIGKEIT UND DEN BRUCH DER METALLE
(BEITRAG ZUR MECHANISCHEN BRUCHTHEORIE VON PLASTISCHEN METALLEN)

G. W. UZHIK, und P. F. KOSHELEV

ZUSAMMENFASSUNG

Der an den Stellen der Spannungskonzentration herrschende Spannungszustand hat einen bedeutenden Einfluß auf die Festigkeit und auf den Charakter des Bruchs. Deswegen muß bei der Festigkeitsberechnung von Maschinenelementen und Konstruktionen die Einwirkung des Ortes der Spannungskonzentration nicht nur durch den Faktor K_t berücksichtigt werden, sondern es darf auch der in der Umgebung der Spannungskonzentration entstehende Spannungszustand nicht außer Betracht gelassen werden.

L'INFLUENCE DE L'ÉTAT DE TENSIONS DES LIEUX DE CONCENTRATION
D'EFFORTS SUR LA RÉSISTANCE ET LA RUPTURE DES MÉTAUX (CONTRIBU-
TION À LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA RUPTURE DES MÉTAUX PLASTIQUES)

G. V. UZHIK—P. F. KOSHELEV

RÉSUMÉ

L'état de tensions des lieux de concentration d'efforts a une influence considérable sur la résistance et sur le caractère de la rupture. Aussi les calculs de résistance des éléments de machines et des mécanismes doivent-ils tenir compte de l'influence du lieu de concentration des efforts, non seulement par le facteur K_t , mais aussi en considérant l'état de tensions se produisant dans l'entourage du lieu de concentration.

ВЛИЯНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В МЕСТАХ КОНЦЕНТРАЦИИ
НАПРЯЖЕНИЙ НА ПРОЧНОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ МЕТАЛЛОВ
(К ТЕОРИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ХРУПКОСТИ ПЛАСТИЧНЫХ МЕТАЛЛОВ)

Г. В. УЖИК и П. Ф. КОШЕЛЕВ

РЕЗЮМЕ

Напряженное состояние в местах концентрации напряжений оказывает значительное влияние на прочность и характер разрушения. Поэтому, при расчетах на прочность элементов машин и сооружений необходимо учитывать эффект концентрации не только посредством фактора K_t , но так же и принимая во внимание то напряженное состояние, которое возникает в окрестности концентратора.

DIE DAUER-PITTINGFESTIGKEIT DER ZAHNRÄDER UND WEGE ZU IHRER ERHÖHUNG*

Prof. Dr. Ing. G. NIEMANN

INSTITUT FÜR ALLGEMEINE GESTALTUNGSLEHRE UND MASCHINENELEMENTE,
TECHNISCHE HOCHSCHULE, MÜNCHEN

Der FZG-Kurztest stellt ein geeignetes Mittel zur schnellen und zuverlässigen Prüfung der Wirkung der die Lebensdauer von Zahnrädern beeinflussenden zahlreichen Faktoren dar. Es werden die Versuchsergebnisse über den Einfluß von Verzahnungsart, Zahnform, Flankenformfehler, Flankenrauheit, Schmiermittel und Umfangsgeschwindigkeit ausgewertet, und die Verwendung der Versuchsergebnisse zur Dimensionierung von ungehärteten Zahnrädern beschrieben.

Es bleibt noch zu untersuchen: der Einfluß dünner Schutzschichten, der Einfluß des Gegenrades und das Verhalten gehärteter Zahnräder bei den erkannten Einflußgrößen.

I. Einführung

Wir glaubten, über die Pittingfestigkeit der Zahnräder aus Stahl — geschmiert mit Mineralöl — schon einigermaßen Bescheid zu wissen. Wir waren daher erstaunt über die *Größenordnung*, mit welcher Zusatzeinflüsse die Flankentragfähigkeit herauf- oder herabsetzen, die wir bisher kaum beachten. Sie bewegt sich in dem Bereich von 40%—1000% der bisher angenommenen Flankentragfähigkeit. Hieraus ergeben sich Erkenntnisse für eine tragfähigere Ausbildung der Zahnräder und für eine zutreffendere Vorstellung vom Mechanismus der Pittingbildung.

2. Angaben zu den Versuchen

Bei unseren Versuchen wurde die Tragfähigkeit der Zahnflanken als *Lebensdauerkurve* ermittelt. Für die Versuche wurden Prüfstände mit Energie-Kreislauf nach Bild 1 benutzt. Das Prinzip ist bekannt. Die Prüfräder rechts und die Übertragungsräder links haben die gleiche Übersetzung und sind durch Wellen verbunden. Das Drehmoment wird vor dem Lauf an der Belastungskupplung aufgebracht. Hierzu werden die Kupplungsscheiben gegeneinander verdreht und in diesem Zustand festgezogen. Die Größe des Drehmomentes kann an der Meßkupplung als Drehweg am Umfang abgelesen werden. Die Umfangskraft ist an den beiden Radpaaren entgegengesetzt gerichtet. Der

*. Vorgetragen auf der Konferenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften für zeitgemäße Dimensionierung in Budapest, am 24-28. Oktober 1961.

Antriebsmotor ist nur durch das kleine Drehmoment aus der Verlustleistung belastet.

Im vorliegenden Fall betrug der Achsabstand 91,5 mm, die Zahnbreite 10—45 mm, der Modul m meist 3 mm und die Summe der Zähnezahlen $z_1 + z_2 = 183/m$. Für die Versuche wurden vorwiegend Zahnräder aus vergütetem Stahl benutzt.

Bild 2 zeigt die Pittingbildung an den Zahnflanken der Prüfräder nach verschiedenen Laufzeiten. Für die Aufnahme von Lebensdauerkurven ist die

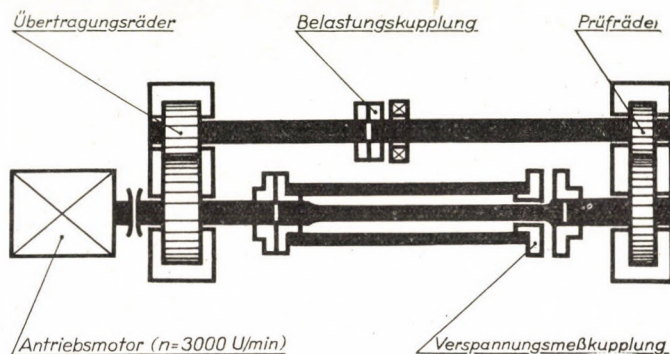


Abb. 1

Festlegung der Grenzbedingungen wichtig. Für unsere Versuche wurde folgender Maßstab benutzt: Nach jedem Laufabschnitt wurde die Gesamtfläche G aller Grübchen auf den Zahnflanken ausgezählt und in % der Gesamtfläche F der aktiven Zahnflanken ausgedrückt:

$$G\% = \frac{G}{F} \cdot 100.$$

Als Grenzwert wurde festgelegt: $G\% = 2\%$.

Bild 3 zeigt ein Beispiel für die ermittelten Lebensdauerkurven und für ihre Reproduzierbarkeit. Hierin ist der Lastwert $B = \frac{U}{b \cdot d_{1b}}$ die auf Zahnbreite b und Wälzkreisdurchmesser d_{1b} bezogene Umfangskraft U . Der Wert LW_{Ritzel} ist die vom Ritzel durchlaufene Anzahl der Lastwechsel, das heißt: die Anzahl der Umdrehungen bis zum Grenzwert der Pittingbildung $G\% = 2\%$. Die Punkte mit Pfeilspitze nach rechts bedeuten: für diese Belastung liegt die Grenz-Lastwechselzahl noch weiter rechts.

Die Lebensdauerkurven kann man durch die Gleichung wiedergeben:

$$\sqrt{B_{\text{grenz}}} - \sqrt{B_D} = \left(\frac{C_1 - \lg LW_{\text{grenz}}}{C_2} \right)^2.$$

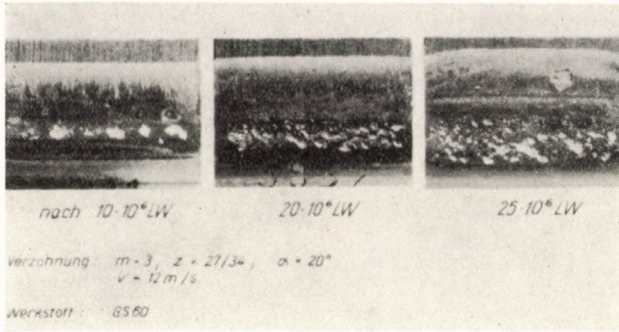
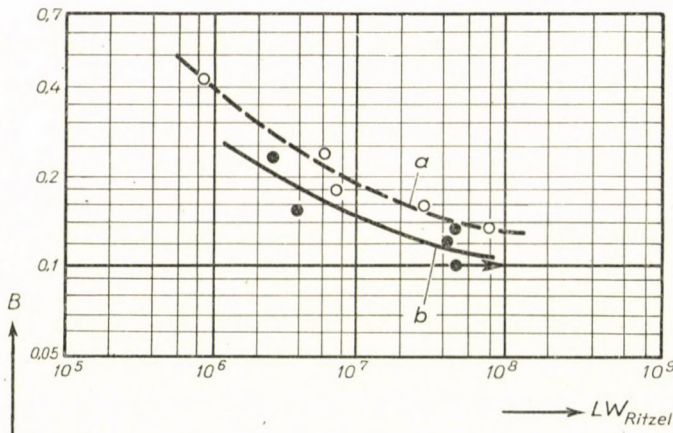


Abb. 2



Verzahnung:

$$m = 3 \quad z = 21/34$$

$$\alpha_{n_0} = 20^\circ \quad \beta = 25^\circ$$

a = Dauertest

b = Kurztest

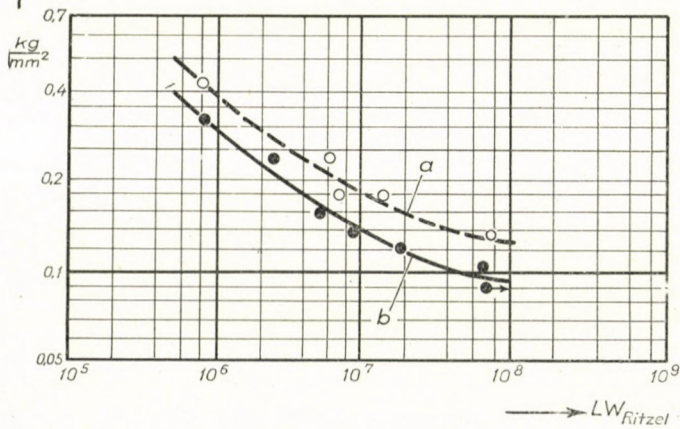


Abb. 3

Hierin ist B_D der Lastwert im Bereich der Dauerfestigkeit, wo die Kurve waagrecht verläuft. Die Konstante C_1 ist 8,6 für alle bisher gefahrenen Kurven bei ungehärtetem Stahl, und $C_2 = 4,8$ bis 7,6, je nach dem Steilabfall der Kurven. Ferner ist B_{grenz} der Lastwert für die beliebige Grenz-Lastwechselzahl LW_{grenz} . Zum Vergleich der Dauer-Flankenfestigkeit benutzen wir meist den Grenzlastwert B_{50} bei $LW_{\text{grenz}} = 50 \cdot 10^6$ Lastwechseln.

Nun zu den Kurven: Die *gestrichelte* ist die im *Dauertest* ermittelte Lebensdauerkurve. Für diese wird für jeden eingestellten Lastwert B eine neue Zahnflankenpaarung bis zur Erreichung von $G\% = 2\%$ gefahren. Die Reproduzierbarkeit der Dauerteste ist gut, sofern hierfür Zahnradpaare aus der gleichen Herstellungsserie benutzt werden. Andererseits ist aber die Gesamt-Laufzeit für eine Lebensdauerkurve beim Dauertest recht groß. Sie beträgt für Stahl-Zahnräder etwa $120 \cdot 10^6$ bis $160 \cdot 10^6$ Lastwechsel und die Anzahl der für 1 Kurve benötigten Radpaare beträgt etwa 3 bis 4.

Die *ausgezogenen* Kurven sind im *FZG-Kurztest* ermittelt. Bei diesem wird mit nur 1 Radpaar ein Belastungsprogramm gefahren, wobei die Höhe der Belastung im nächsten Laufabschnitt nach der im vorhergehenden Laufabschnitt erzielten Grübchenfläche $G\%$ gewählt wird. Die Gesamtlaufzeit für einen derartigen Kurztest beträgt etwa $14 \cdot 10^6$ bis $18,5 \cdot 10^6$ Lastwechsel, also nur etwa 12% von der Laufzeit des Dauertestes. Die im Kurztest ermittelte Lebensdauerkurve ist ebenfalls gut reproduzierbar und liegt *unter* der im Dauertest ermittelten. Im Mittel beträgt das Verhältnis

$$\frac{B_{50, \text{ Dauertest}}}{B_{50, \text{ Kurztest}}} \approx 1,25.$$

Die im Bild 3 gezeigten Lebensdauerkurven wurden an Zahnrädern aus der gleichen Herstellungsserie ermittelt und zwar 1mal im Dauertest und 2mal im Kurztest. Sie zeigen in ihrem Verlauf und in ihrer Höhenlage die Reproduzierbarkeit der Kurzteste und ihre Zuordnung zur Kurve des Dauertestes.

Erst mit diesem Kurztest hatten wir das Werkzeug, um die Vielzahl der Einflußgrößen auf die Pittingfestigkeit in ertragbaren Laufzeiten im Versuch zu überprüfen und ein Gesamtbild zu gewinnen.

Nun zu den Hauptergebnissen der Versuchsreihen.

3. Einfluß der Verzahnungsart.

Bild 4 zeigt verschiedene Evolventenverzahnungen mit gleicher Zähnezahlen $z_2/z_1 = 34/27$. Die Verzahnung E 20°-Null ist die übliche Evolventen-Verzahnung mit 20° Eingriffswinkel (Profilüberdeckung $\varepsilon = 1,65$). Bei der Verzahnung E 20°-Hoch beträgt die gemeinsame Zahnhöhe $3 \cdot \text{Modul}$ (statt $2 \cdot \text{Modul}$) und $\varepsilon = 2,34$. Bei der Verzahnung E 28°-Null ist der Eingriffswinkel 28°, die gemeinsame Zahnhöhe $2 \cdot \text{Modul}$ und $\varepsilon = 1,39$.

Zu den angegebenen Verzahnungen zeigt Bild 5 die aufgenommenen Lebensdauerkurven, und zwar einmal bei Schmierung mit Mineralöl und einmal bei Schmierung mit dem synthetischen Polyäther-Öl POLYRAN M 25 der Bayerwerke Leverkusen.

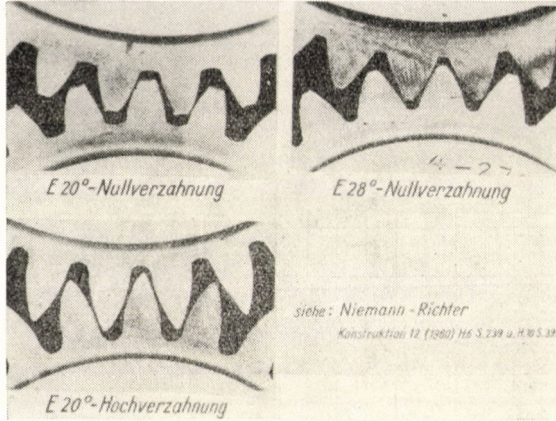


Abb. 4

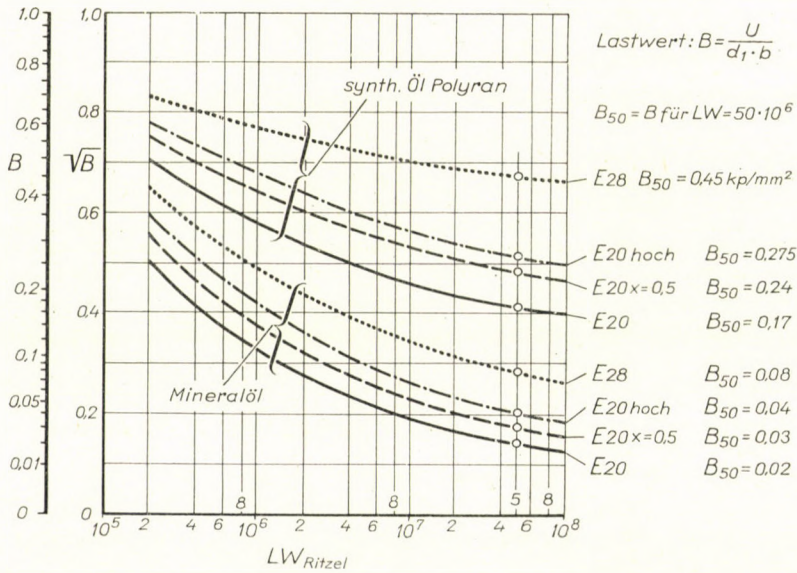


Abb. 5

Zunächst ist von Interesse, daß die Reihenfolge der Kurven für die verschiedenen E-Verzahnungen bei beiden Versuchsreihen die gleiche ist. Die rechts angeschriebenen Werte für B_{50} ermöglichen den Vergleich der erzielten Flankentragfähigkeit in Zahlen. So erreicht z. B. die Verzahnung E 28°-Null

die 4fache (unten), bzw. 2,65fache Flankentragfähigkeit (oben) gegenüber der üblichen Evolventenverzahnung E 20°-Null. Eine derartige Steigerung der Flankentragfähigkeit mit dem Eingriffswinkel α geht weit über das hinaus, was nach der Berechnung der HERTZschen Pressung zu erwarten wäre. Die weiteren E-Verzahnungen mit Profilverschiebung (E 20, $x = 0,5$) und mit Hochverzahnung (E 20°-Hoch) liegen dazwischen.

4. Einfluß des Schmierstoffs

Die größte Steigerung der Flankentragfähigkeit erzielten wir bei Schmierung mit POLYRAN M 25, statt mit Mineralöl (obere Kurvenschar gegenüber der unteren!). Die Flankentragfähigkeit B_{50} steigt hierbei auf das 3,44fache bis 8,5fache. Für beide Öle beträgt die Viskosität 50 CSt bei 50° C.

Die weiteren Versuche mit verschiedenen Mineralölen hatten folgendes Ergebnis:

1. Eine Änderung der Ölviskosität zwischen 23 und 150 CSt mittels Änderung der Eingangs-Öltemperatur (89° bis 43° C) ergab *keine* Änderung der Flankentragfähigkeit.

2. Einen erheblichen Einfluß hat aber eine Änderung der Nenn-Viskosität V_{50} (Viskosität in CSt bei 50° C) bei gleicher Ölart. Hierbei war im Mittel die Flankentragfähigkeit

$$B_{50} \sim (V_{50})^{1/3}.$$

5. Einfluß von Schrägungswinkel β Profilüberdeckung ε und Sprungüberdeckung ε_{sp} .

Die hierzu durchgeführten Versuchsreihen hatten folgendes Ergebnis:

1. $B_{50} \sim \varepsilon / \cos^3 \beta$ (siehe Bild 6).

2. Eine unterschiedliche Sprungüberdeckung ($\varepsilon_{sp} = 0,60; = 0,99; = 1,997$), hergestellt durch Änderung der Zahnbreite ($b = 13,6; = 22; = 44$ mm), ergab keine Änderung für B_{50} .

6. Einfluß von Flankenformfehler f_f und Rauheit der Zahnflanken

Die gefräste Verzahnung aus Stahl St70 (Mittelwert $f_{fm} = 20 \mu$) ergab im Dauertest eine steil abfallende Lebensdauerkurve (Bild 7). Die Verzahnung wurde dann nachgeschliffen, bis keine Pittings mehr zu sehen waren. Der hiermit durchgeführte Dauertest ergab dann die obere Kurve mit etwa dem 10fachen B_{50} -Wert, gegenüber der gefrästen Verzahnung.

Worauf beruht nun der große Unterschied in der Flankentragfähigkeit?

Bild 8 zeigt Evolventen-Diagramme von verschiedenen bearbeiteten Zahnradpaaren und ferner die Ausmessung der Flankenformfehler. Der mittlere Flankenformfehler ist $f_{fm} = (f_{f1} + f_{f2}) \cdot 0,5$.

Bild 9 zeigt nun, daß weniger der Flankenformfehler, als die *Rauheit* der Zahnflanken für die Tragfähigkeit B_{50} maßgebend ist. Hier sind die Ergebnisse zusammengestellt, die an Zahnrädern aus der gleichen Herstellungs-

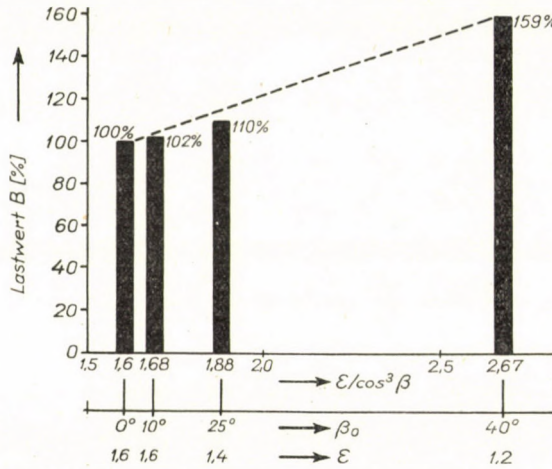


Abb. 6

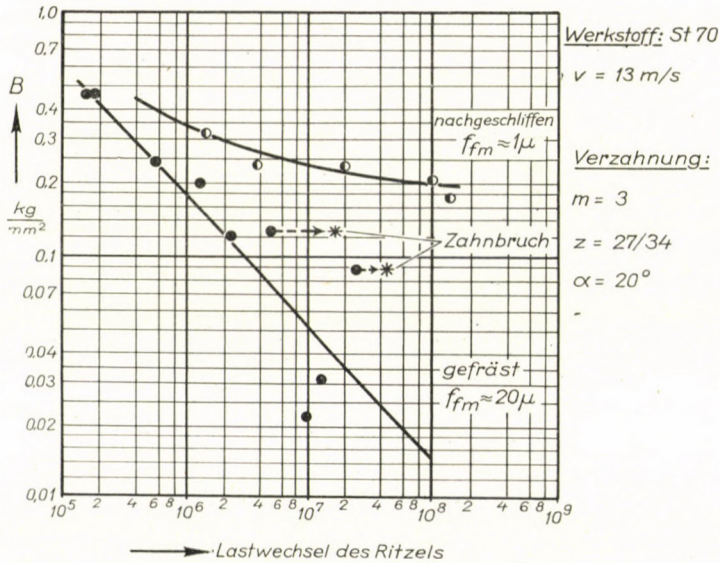


Abb. 7

serie aber mit verschiedener *Endbearbeitung* der Zahnflanken gewonnen wurden. *Zunächst die erzielten Kennwerte B_{50}* : Sie ändern sich durch die Endbearbeitung von $B_{50} = 0,035$ bis $0,245$, also im Bereich von 1 zu 7. Die höchste Tragfähigkeit erreicht die elektropolierte Zahnflanke, dann folgen

$$f_{fm} = \frac{f_{f1} + f_{f2}}{2}$$

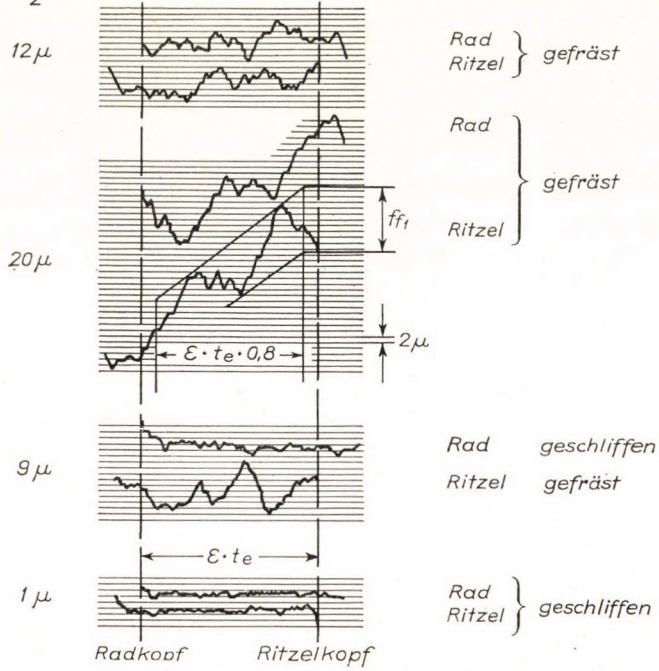


Abb. 8

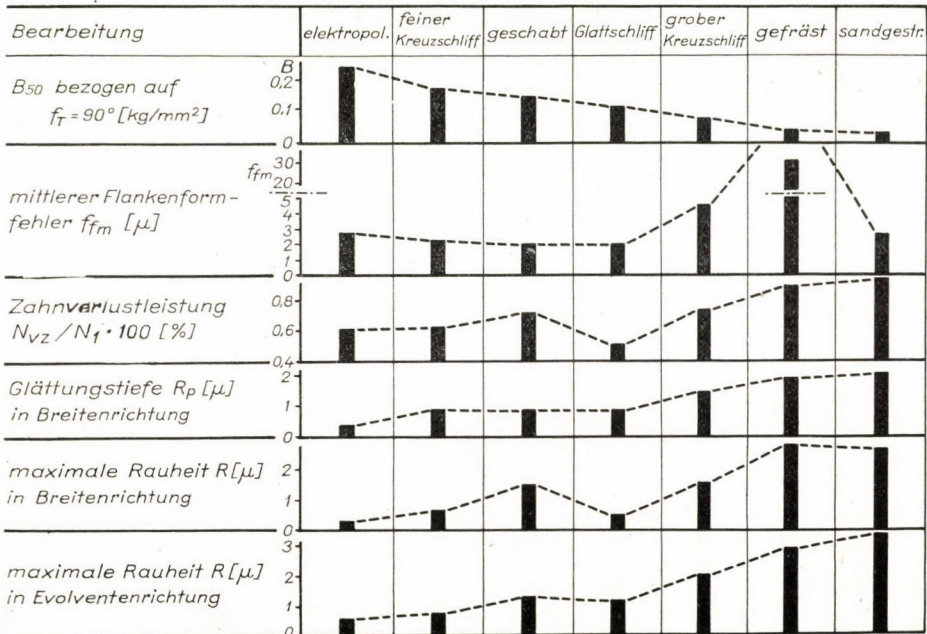


Abb. 9

feiner Kreuzschliff, geschabt, Glattschliff, grober Kreuzschliff, gefräst und sandgestrahlt.

Zur weiteren Beurteilung wurden außerdem an den Zahnflanken die Werte für Flankenformfehler, relative Zahnverlustleistung, Glättungstiefe und maximale Rauheit ermittelt. Aus der Gegenüberstellung dieser Werte mit den B_{50} -Werten scheint mir hervorzugehen, daß die Rauheitswerte R in Evolventenrichtung oder die der Glättungstiefe R_p noch am eindeutigsten mit dem Verlauf der B_{50} -Werte in Beziehung stehen.

7. Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit v

Bild 10 zeigt, wie sich der Verlauf der Lebensdauerkurven mit v ändert, und zwar *oben* für geradzahnte Stirnräder und *unten* für schrägverzähnte.

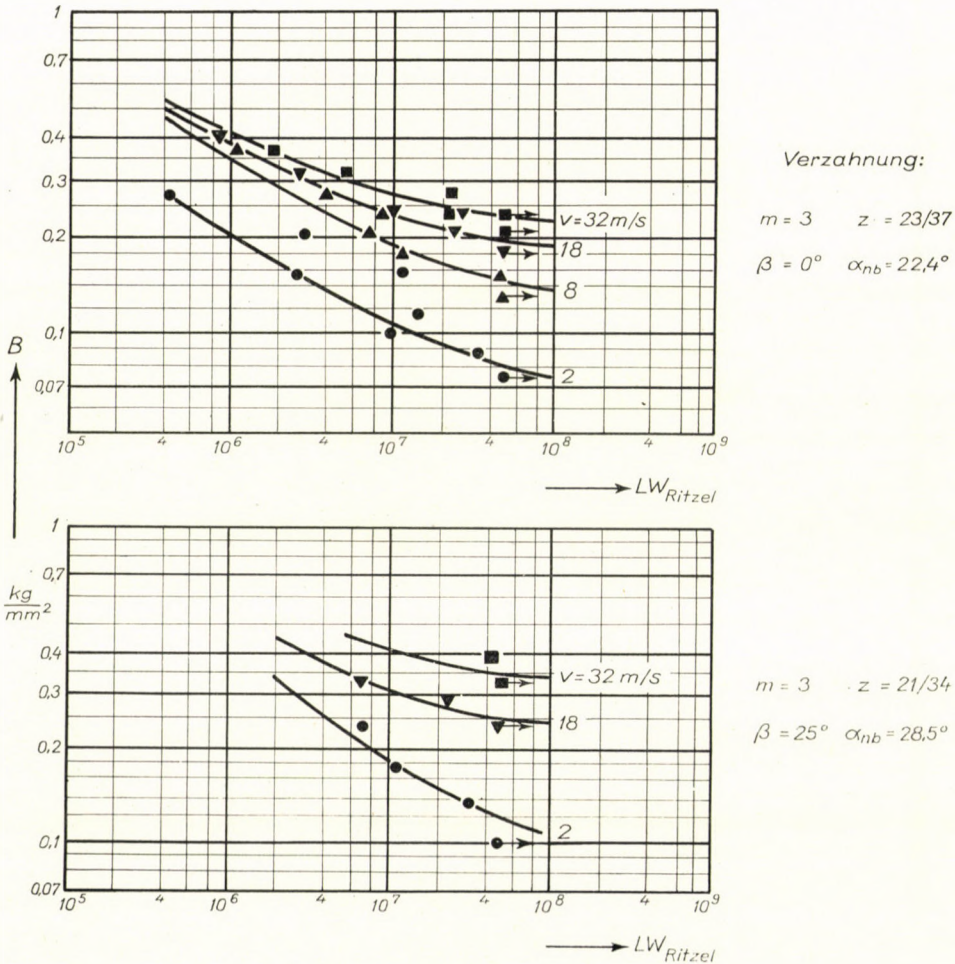


Abb. 10

Sämtliche Testräder bestehen aus Si—Mn-Stahl. Für jede Versuchsreihe stammen die Testräder aus der gleichen Fertigungsserie. Der Flankenformfehler bzw. die maximale Rauheit beträgt im Mittel 4μ . Ergebnis: Die Flanken­tragfähigkeit liegt bei größerer Umfangsgeschwindigkeit erheblich höher, sofern die Flankenformfehler und die Rauheit der Zahnflanken klein sind.

Ergebnis aus weiteren Versuchen: Bei sehr großen Fehlern an den Zahnflanken (f_{fm} , bzw. R) kehrt sich die Tendenz um. Die Grenze liegt etwa bei Zahnflankenfehlern $= 20\mu$, das heißt, hierbei war die Flanken­tragfähigkeit fast unabhängig von v .

8. Auswertung der bisherigen Versuchsergebnisse für die Berechnung

Im Bild 11 ist der Versuch gemacht, die Ergebnisse in einer Gleichung zusammenzufassen. Die Flanken­tragfähigkeit, gemessen als Lastwert B_{50}

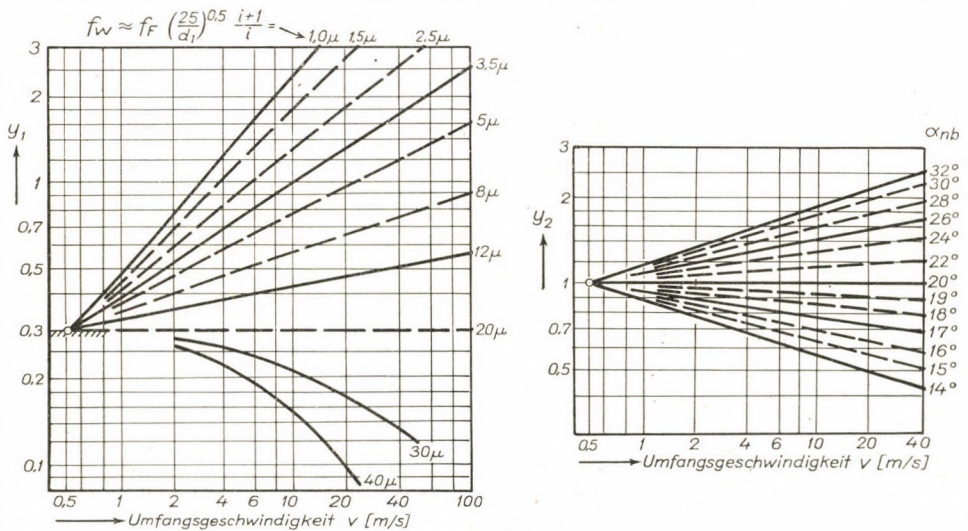


Abb. 11

für die Grenz-Pittingfläche $G = 2\%$ der aktiven Flankenfläche, die nach $50 \cdot 10^6$ Umdrehungen erreicht wird, ist für Evolventenverzahnungen etwa proportional dem angegebenen Ausdruck. Die Beiwerte y_1 und y_2 sind nach den Versuchsergebnissen in Abhängigkeit von v und f_w bzw. α_{nb} dargestellt.

9. Weitere Einflüsse

Hierzu nur die Ergebnisse von einigen Stichversuchen.

a) Einfluß dünner Schutzschichten an den Zahnflanken.

Bei vergüteten Zahnrädern mit elektrolytisch verkupferten Zahnflanken betrug $B_{50} = 170\%$, gegenüber $B_{50} = 100\%$ bei der nicht verkupferten

Ausführung. Die Cu-Schicht muß aber sehr dünn sein (etwa 5 bis 12μ), um Laufstörungen zu vermeiden. Ähnliche Ergebnisse wird man vermutlich mit anderweitigen elektrolytischen Schutzschichten erzielen.

Noch viel größer ist die Wirkung einer dünnen, elastischen Nitrierschicht an den Zahnflanken, z. B. erzeugt durch Bad-Nitrierung von normalisierten oder vergüteten Zahnrädern aus Stahl. Die Dicke der Nitrierschicht beträgt hierbei nur 3 bis 15μ . Trotzdem steigt hierbei die Flankentragfähigkeit auf etwa 300%.

b) Einfluß des Gegenrades.

Bild 12 zeigt hierzu die Ergebnisse aus Dauertesten mit Zahnrädern aus verschiedenem Stahl. Die schwarzen Säulen gelten für den Lauf der Zahnräder

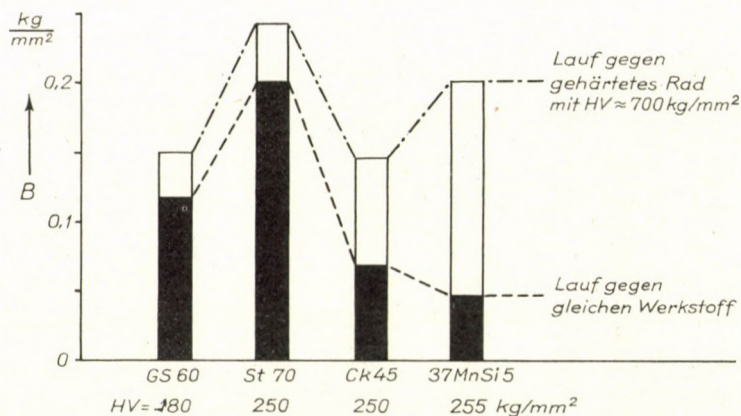


Abb. 12

mit Gegenrädern aus gleichem Werkstoff, und die verlängerten Säulen für den Lauf der Zahnräder mit Gegenrädern aus gehärtetem Stahl. Dabei ist die Zunahme der Flankentragfähigkeit des ungehärteten Rades beim Lauf mit gehärtetem Gegenrad unterschiedlich groß, aber immer größer, als beim Lauf von Radpaaren aus gleichem Material. Ursache für die Steigerung der Flankentragfähigkeit ist vermutlich die kleinere Rauheit der gehärteten Gegenräder mit *geschliffenen* Flanken und ferner eine gewisse Glättung der ungehärteten Zahnflanken durch die gehärteten Gegenflanken.

10. Ausblick

So weit die nackten Ergebnisse. Die Erkenntnisse sind noch im Fluß. Zur Zeit fehlen uns z. B. noch die entsprechenden Versuchsergebnisse für das Gebiet der *gehärteten* Zahnräder. Wir möchten wissen, ob auch bei diesen die bisher erkannten Einflußgrößen in gleichem Maße wirksam sind, oder nicht, und ob hier noch weitere zu erfassen sind.

Vielleicht ist es dann so weit, den großen Bogen zu schlagen und wenigstens für das Gebiet der *Zahnräder* ein Gesamtbild der Pittingfestigkeit und der Pittingbildung zu bieten, welches die hauptsächlichsten Einflußgrößen zutreffend erfaßt und in ihrer Wirkung erklärt.

SCHRIFTTUM

NIEMANN und RICHTER: Versuchsergebnisse zur Zahnflankentragfähigkeit. 9 Aufsätze in *Z. Konstruktion* (1960), S. 185-194, S. 236-241, S. 269-278, S. 319-321, S. 360-364, S. 397-402.

THE PITTING FATIGUE LIMIT OF GEARS AND WAYS LEADING TO ITS INCREASE

G. NIEMANN

SUMMARY

The shortened life test (FZG short test) is a convenient method (quick and reliable) for the determination of numerous factors influencing the life of gears. Test results concerning the influence of type of gearing, tooth shape, flank shape error, flank surface roughness, lubricant, peripheral speed are used for the dimensioning of life unhardened gears. Further factors which ought to be investigated: thin protective coatings, influence of the matching gear and influence of hardening on the Pitting endurance strength.

LA LIMITE DE FATIGUE AU PITTING DES ENGRENAGES, ET LES MOYENS DE L'ÉLEVER

G. NIEMANN

RÉSUMÉ

L'essai FZG (FZG-Kurztest) permet l'examen rapide et sûr de nombreux facteurs influant sur la durée des engrenages. Utilisation des résultats d'examen relatifs à l'influence du type de denture, de la forme des dents, du défaut dans la forme du flanc, de la rugosité superficielle, du lubrifiant et de la vitesse circonférentielle, dans le calcul de la durée des engrenages non trempés. D'autres facteurs à examiner sont: les couches minces de protection, l'influence de la contre-roue et celle de la trempe sur la résistance au Pitting.

ПРЕДЕЛ ПИТТИНГ — УСТАЛОСТИ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС И ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ЭТОГО ПРЕДЕЛА

Г. НИМАН

РЕЗЮМЕ

Сокращенный метод испытания срока службы является подходящим средством для быстрого и надежного испытания действия ряда факторов, влияющих на срок службы зубчатых колес. Использование опытных данных, полученных при испытании влияния метода нарезки, формы зубьев, погрешности формы, чистоты поверхности, смазывающего вещества, окружной скорости, для расчета зубчатых колес на срок службы. Дальнейшие, подлежащие испытанию факторы: тонкие защитные слои, влияние спаренного зубчатого колеса, влияние закалки на питтинг.

УСТАЛОСТЬ КРУПНЫХ СТУПЕНЧАТЫХ ВАЛОВ ИЗ ЛЕГИРОВАННЫХ СТАЛЕЙ*

И. В. КУДРЯВЦЕВ

Д-Р ТЕХН. НАУК

И

Н. М. САВВИНА

КАНД. ТЕХН. НАУК

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО—ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИИ
И МАШИНОСТРОЕНИЯ (ЦНИИТМАШ), МОСКВА

1. Усталостная прочность ступенчатых валов ($r:d = 0,12$) из легированных сталей (34ХНЗМ и 15ГН4М), испытанных при симметричном изгибе, снижается (на 37—41%) с увеличением их размеров от 5—20 до 170 мм.

2. Экспериментально показано значительное повышение (на 29—41%) пределов выносливости от применения наклепа чеканкой вибрирующим роликом галтелей крупных валов из высокопрочных легированных сталей различной твердости. При этом эффективность наклепа не понижается с увеличением размеров валов; наклепом достигается полная нейтрализация влияния концентрации напряжений в зоне галтелей как малых, так и крупных валов.

3. Степень понижения усталостной прочности с ростом абсолютных размеров для валов с упрочненными наклепом галтелями выражается теми же величинами, что и для валов неупрочненных.

4. Масштабный фактор исследованных сталей выражается приблизительно в одинаковой степени как для ступенчатых, так и для гладких валов. Это, по-видимому, объясняется тем, что выбранные размеры галтелей ($r : d = 0,12$) вызывают сравнительно умеренную концентрацию напряжений.

5. Указаны режимы упрочняющей обработки, которыми достигается полная нейтрализация концентрации напряжений в галтелях, не только в малых образцах, но и в образцах больших сечений.

1. Введение

При расчетном определении несущей способности крупных стальных деталей, работающих при переменных нагрузках, встречаются затруднения, связанные с недостаточностью имеющихся экспериментальных данных по сопротивлению усталости этих деталей.

Такие затруднения испытываются, в частности, при расчетах крупных ступенчатых валов из легированных сталей.

Ниже сообщаются результаты проведенных авторами в ЦНИИТМАШе испытаний на усталость при изгибе валов диаметром от 5 до 170 мм.

Формы испытывавшихся валов были выбраны применительно к типовым деталям из номенклатуры завода тяжелого машиностроения.

Эти испытания помимо количественного установления масштабного эффекта для некоторых распространенных в тяжелом машиностроении форм

* Доклад на Конференции по вопросам современного расчета, проведенной Академией наук Венгрии в г. Будапеште с 24 по 28 октября 1961 года.

валов преследовали также цель определить эффективность упрочнения галтелей валов путем получившего за последние годы распространения метода поверхностного пластического деформирования.

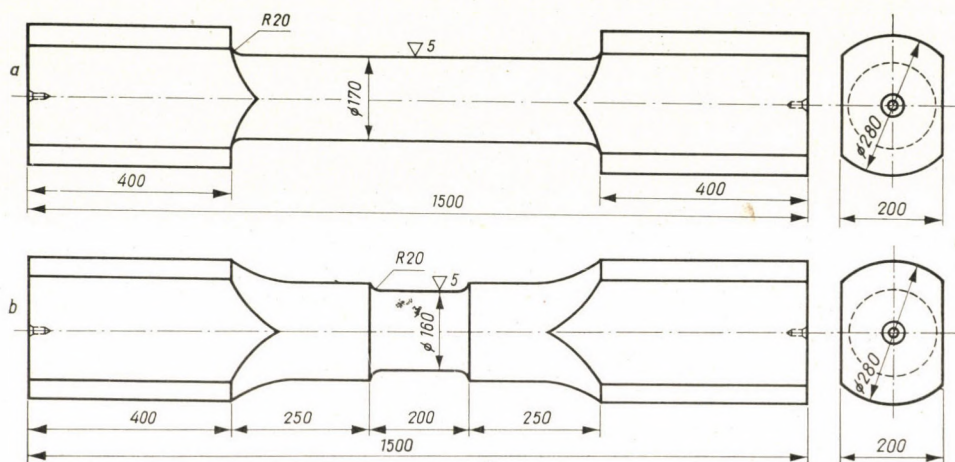


Рис. 1

2. Материал и форма исследованных валов

Для исследований была выбрана ковкая сталь марок 34ХНЗМ и 15ГН4М (таблица 1).

Кованные заготовки стали 34ХНЗМ были поставлены заводом в двух различных состояниях по термообработке: после нормализации (850° — 870°) и после закалки (840° — 860°) с отпуском (580° — 620°).

Заготовки стали 15ГН4М (послековки и изотермического отжига) подвергались закалке и отпуску по режиму, принятому на заводе для крупных деталей из данного материала (закалка 830° — 850° , отпуск 590 — 600°).

Для испытаний на усталость были изготовлены ступенчатые валы диаметром 170 мм из стали 34ХНЗМ (нормализованной) (рис. 1а) и ступенчатые валы диаметром 160 мм из стали 15ГН4М и 34ХНЗМ (закалка и отпуск) (рис. 1б).

Из головок указанных больших валов (после их усталостных испытаний) изготавливались образцы меньших размеров (диаметры 20, 10 и 5 мм), рис. 2.

Для образцов разных размеров был соблюден принцип геометрического подобия их рабочих частей; были приняты постоянными отношения между радиусом галтелей и диаметром рабочей части образца ($r : d = 0,12$), а также диаметром (или толщиной) головки и рабочей части образца ($D : d = 1,25$).

Таблица 1

Состав и механические свойства исследованных сталей

Сталь, термообработка	Содержание элементов в %%								Механические свойства					
	C	Mn	Si	Cr	Ni	Mo	S	P	σ_B кг/мм ²	σ_S кг/мм ²	δ_5 %	ψ %	a_K кгм/ см ²	H_B
34ХНЗМ нормализация .	0,31—0,40	0,55	0,18	0,87	2,84	0,46	0,010	0,016	82	56,0	18,0	49,0	7,5	220
34ХНЗМ закалка и от- пуск	„	„	„	„	„	„	„	„	99,7	85,9	15,6	59,8	13,3	290—310
15ГН4М закалка и от- пуск	0,13—0,15	1,40—1,53	0,35—0,40	0,29	4,29	0,40	0,015	0,017	88,8	68,8	17,6	49,0	—	269—285

Кроме указанных ступенчатых образцов для сравнения с ними были изготовлены и испытаны малые гладкие образцы, т. е. образцы с сопряжением головок и рабочих частей по большому радиусу (радиусы 20, 15 и 8 мм соответственно для образцов диаметром в 20, 10 и 5 мм).

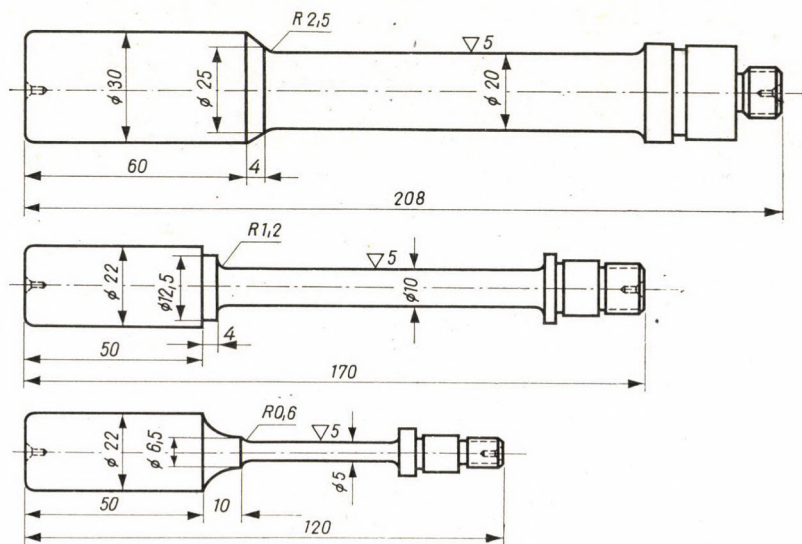


Рис. 2

Крупные образцы (диаметры 160 и 170 мм) были только ступенчатые. Однако расположение изломов вне галтелей для некоторых серий упрочненных крупных образцов позволило установить величину предела выносливости для этих серий образцов как для образцов гладких.

3. Обработка валов пластическим деформированием

а) Ступенчатые валы

Часть испытывавшихся ступенчатых валов подвергалась упрочнению путем чеканки галтелей вибрирующим роликом.

Способ упрочнения галтелей валов чеканкой вибрирующим роликом [1], особенно удобен для крупных деталей, т. к. позволяет получать значительную глубину наклепанного слоя без больших статических усилий с использованием относительно простых чеканящих приспособлений.

Галтели крупных валов диаметром 170 мм стали 34ХНЗМ (нормализованной) упрочнялись вибрирующим роликом с помощью пружинного приспособления УП—2 (конструкции ЦНИИТМАШ) с энергией удара 2,5 кгм.

Упрочнение галтелей валов диаметром 160 мм закаленных сталей 34ХНЗМ и 15ГН4М проводилось приспособлением ЧМ—3 конструкции ЦНИИТМАШ, в котором для нанесения ударов по ролику применен пневматический отбойный молоток «МО—10». Энергия удара его при давлении воздуха в магистрали 4,5—5 атм, составляет 4,5 кгм и скорость ударов 1250 в минуту. Приспособления устанавливались на суппорте токарного станка.

Приспособление УП—2 (рис. 3) состоит из привода — 1, кулачкового вала с подшипниками — 2, шпинделя с бойком — 3, задней опоры с гайкой, регулирующей энергию удара — 4, пружины — 5 и головки с вибрирующим роликом — 6.

Кулачковый вал вращается со скоростью 1000 об/мин и сообщает движение шпинделю с бойком.

Обкатывающий поверхность изделия профильный ролик укреплен на конце шарнирного рычага. На другой конец рычага опирается тарированная пружина. При надавливании ролика на изделие (путем подведения суппорта к изделию), шарнирный рычаг сжимает пружину, чем и достигается определенное, заданное заранее, постоянное давление на ролик. Удары ролик получает от бойка пружинно-кулачкового механизма.

Упрочнение галтелей образцов диаметром 10 и 20 мм производилось вибрирующим роликом с помощью пружинного приспособления УП—0,25 (по конструкции аналогичного с приспособлением УП—2). Энергия удара ролика составляла 0,25 кгм.

Пневматическое чеканочное приспособление с вибрирующим роликом ЧМ—3 (рис. 4) состоит из сварного корпуса 6, тарированной пружины 8, гайки 7, вилки 3 с профильным роликом 1 и пневматического молотка 11.

Пневматический молоток 11 с образованным стволом под скользящую посадку, устанавливается в корпусе 6, к которому приварен угольник для крепления молотка в резцедержателе суппорта токарного станка.

Между стволом и корпусом молотка помещена тарированная пружина 8, которая перемещением суппорта в направлении удара создает постоянное давление на ролик.

Пружина на молотке удерживается специальной гайкой 7, которая навертывается на ствол молотка. Наружный диаметр фланца гайки 7 обработан под скользящую посадку и является направляющей левого конца стакана.

Упрочняющий ролик 1 помещен на оси 5 в вилке 3, хвостовик которой устанавливается взамен отбойного рабочего инструмента.

Практика поверхностного упрочнения наклепом не крупных валов показывает, что достаточно эффективные результаты в смысле повышения усталостной прочности могут быть получены при толщине наклепанного слоя в 0,04 от радиуса упрочняемого вала. По мере дальнейшего увели-

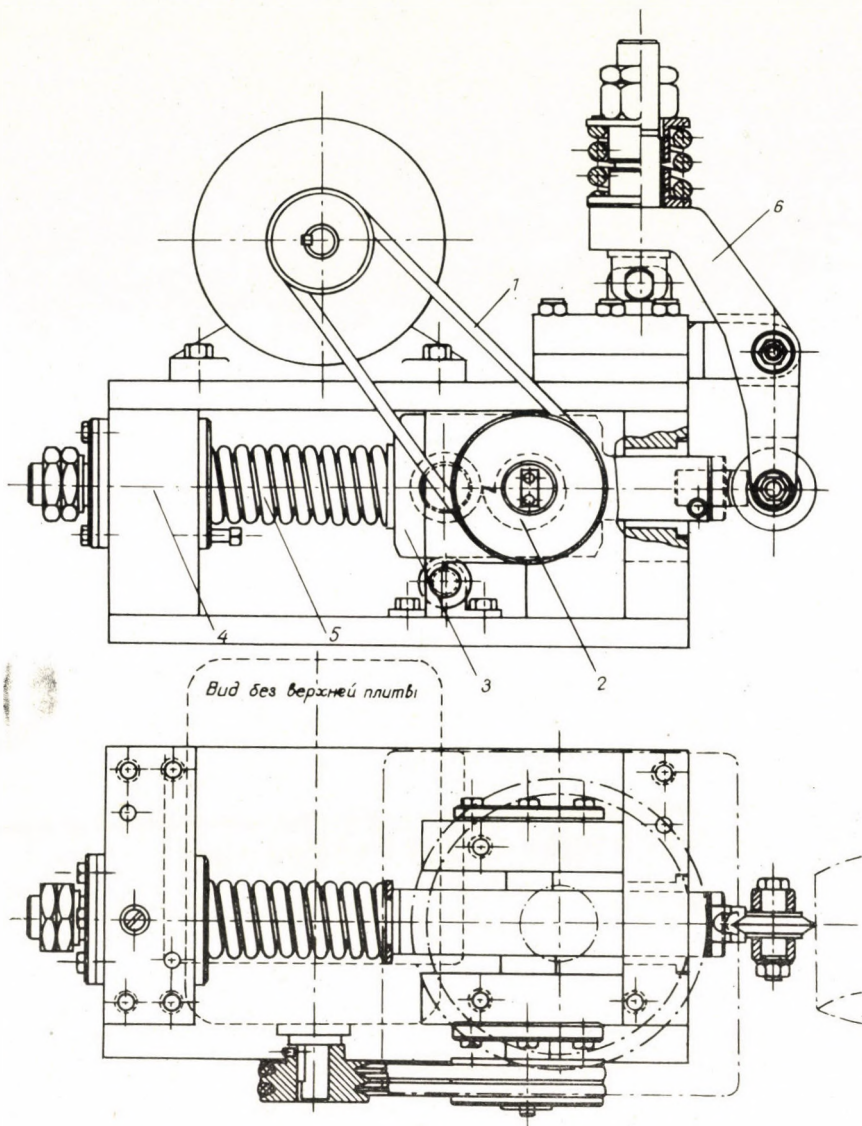


Рис. 3

чения наклепанного слоя эффект повышения усталостной прочности происходит во все уменьшающихся размерах и при глубинах свыше 0,2 от радиуса вала дальнейшее повышение усталостной прочности практически отсутствует.

Исходя из этого, считалось желательным получение толщины наклепанного слоя у валов, имеющих диаметры 170—160 мм в пределах 4—16 мм.

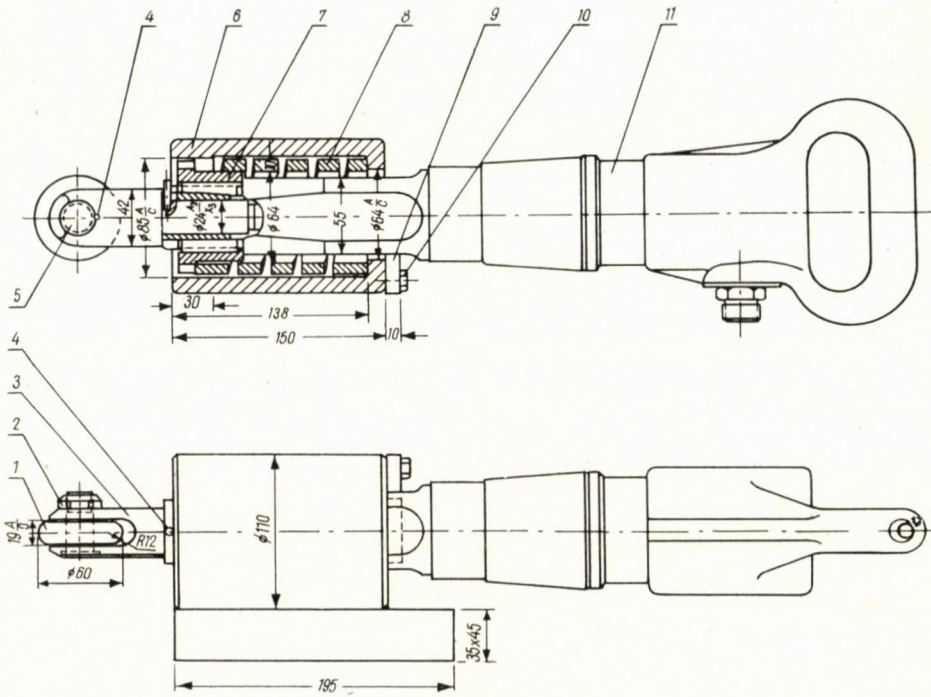


Рис. 4а

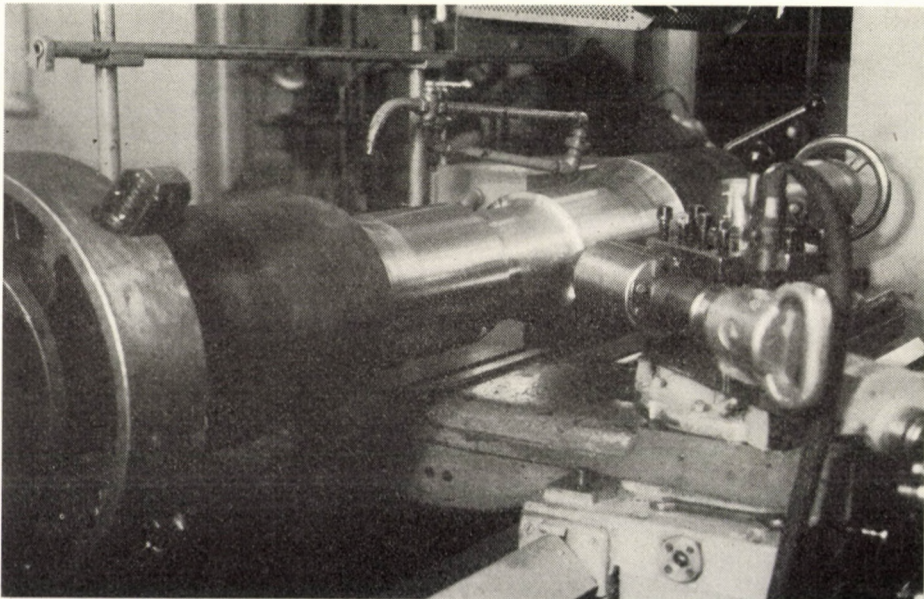


Рис. 4б

В результате предварительной пробной обработки были выбраны следующие режимы упрочнения галтелей испытывавшихся образцов (таблица 2).

Таблица 2

Режимы упрочнения галтелей валов вибрирующим роликом

Диаметр вала и радиус галтели, мм	Сталь	Диаметр и радиус профиля ролика, мм	Кол-во канавок по образующей галтели	Число проходов по одной канавке	Тип приспособления	Число ударов в минуту	Число оборотов вала в мин.	Энергия удара, кгм
$\frac{170}{20}$	34ХНЗМ	$\frac{60}{4}$	4	5	УП-2	800	1	2,5
$\frac{160}{20}$	34ХНЗМ	$\frac{60}{11}$	3	5	ЧМ-3	1250	2	4,5
$\frac{160}{20}$	15ГН4М	$\frac{60}{11}$	4	5	ЧМ-3	1250	2	4,5
$\frac{20}{2,5}$	34ХНЗМ 15ГН4М	$\frac{55}{2,5}$	1	5	УП-0,25	1800	10	0,25
$\frac{10}{1,2}$	34ХНЗМ	$\frac{50}{1,2}$	1	3	УП-0,25	1600	10	0,25

Поверхностная твердость образцов диаметром 170 мм стали 34ХНЗМ (нормализованной) после наклепа галтелей чеканкой повысилась на 26%, глубина наклепанного слоя при этом составляла около 7 мм.

Поверхностная твердость образцов диаметром 160 мм стали 34ХНЗМ (закалка и отпуск) после наклепа галтелей чеканкой повысилась на 15%, глубина наклепанного слоя при этом составляла около 6 мм.

Анализ микроструктуры металла в зоне галтели упрочненного вала не позволил обнаружить наклепанного слоя ни для стали 34ХНЗМ (нормализованной), ни для стали 34ХНЗМ и 15ГН4М (закаленной).

Галтели валов, диаметром 170, 160 мм после чеканки их вибрирующим роликом, механически обрабатывались обточкой.

Ступенчатые образцы диаметрами 10 и 20 мм после чеканки оставались механически необработанными. Образцы диаметром 5 мм упрочнению не подвергались.

б) Гладкие валы

Образцы гладких валов диаметром 10 и 20 мм были обкатаны роликами, в первом случае трехроликовым приспособлением, во втором — однороликовым по режимам, приведенным в табл. 3.

Таблица 3

Режимы упрочнения образцов обкаткой роликами

Диаметр образца, мм	Давление при обкатке, кг	Диаметр и контурный радиус, мм	Скорость вращения вала и осевая подача
10	100	$\frac{20}{5}$	$\frac{185}{0,2}$
20	150	$\frac{32}{3}$	$\frac{185}{0,2}$

4. Методика испытаний валов на усталость

В каждой серии испытывалось 4—9 образцов на базе 10 млн. циклов. Испытания на усталость малых образцов (диаметром 5, 10 и 20 мм) производились на машинах, осуществляющих изгиб при вращении (машины ЦНИИТМАШ типа У—12 и У—20). Испытания крупных образцов (диаметром 160 и 170 мм) производились при симметричном переменном изгибе в одной плоскости на машинах конструкции ЦНИИТМАШ типа УП—200 [2].

Разные схемы нагружения для малых и больших образцов могли привести к некоторому завышению определенных величин предела выносливости для крупных образцов. Поэтому наблюдаемый масштабный эффект в связи с этим может быть только преуменьшен, а не преувеличен. Хотя, по-видимому, роль этого фактора сказывается незначительно.

5. Результаты испытаний валов на усталость

а) Сталь 34ХНЗМ (нормализованная)

Результаты испытаний образцов различных диаметров на усталость приведены в табл. 4 и на рис. 5.

Испытания на усталость ступенчатых валов диаметром 170, 20 и 10 мм проводились как на неупрочненных, так и на упрочненных образцах.

В результате чеканки галтелей крупных валов вибрирующим роликом предел выносливости их повысился с 14,5 до 20,5 кг/мм², т. е. на 41%.

У всех валов, сломавшихся при испытаниях (неупрочненных и упрочненных), усталостное разрушение происходило в галтелях.

При рассмотрении усталостных изломов крупных валов было замечено характерное распространение фронта трещин, различное для наклепанных (рис. 6а) и наклепанных валов (рис. 6б).

В наклепанных валах характерные линии усталости идут в начальной стадии по фронту со значительно большей кривизной, чем в валах ненаклепанных.

Это свидетельствует о том, что зародившаяся усталостная трещина распространяется по периферии сечения с большей относительной скоро-

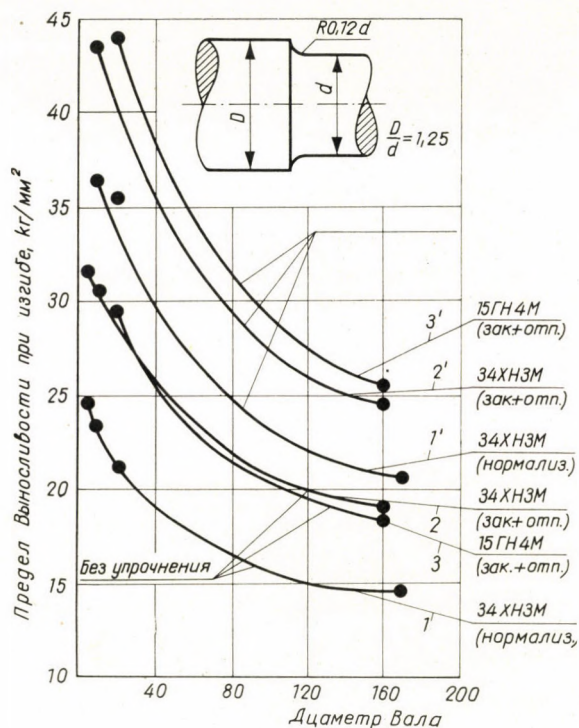


Рис. 5

стью для ненаклепанных образцов по сравнению с относительной скоростью распространения трещин для наклепанных образцов. При этом относительная скорость — это отношение скоростей распространения усталостной трещины по периферии сечения к скорости распространения трещины по радиусу сечения.

В результате наклепа галтелей чеканкой у образцов диаметрами 10 и 20 мм предел выносливости их повысился на 55—65%.

Изломы образцов диаметрами 10 и 20 мм, упрочненных чеканкой, происходили вне зоны галтелей (на расстоянии 6—8 мм от бурта головки).

Рассматривая кривые фиг. 5 [1] и [1'], относящиеся к образцам стали 34ХНЗМ (нормализованной), следует отметить значительное влияние абсолютных размеров на усталостную прочность. Относительное снижение пре-

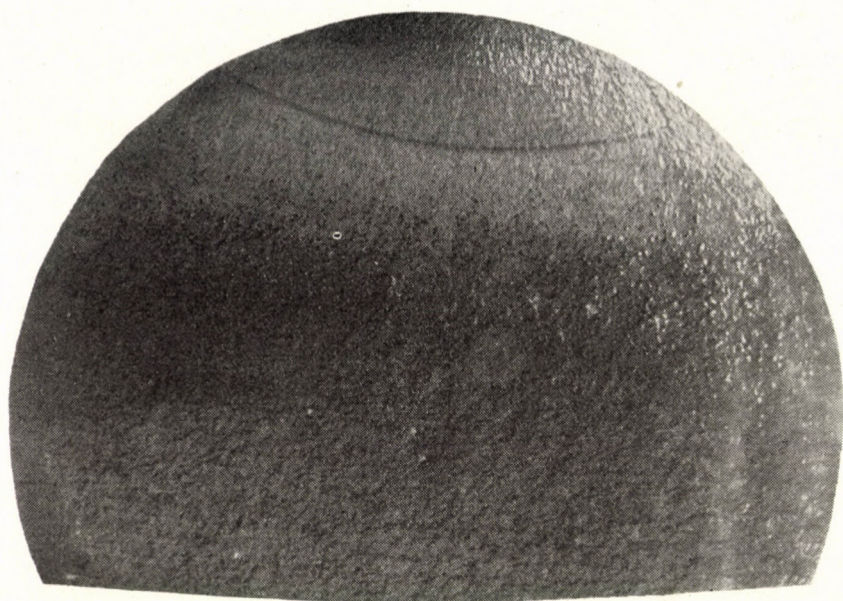


Рис. 6а



Рис. 6б

Таблица 4

Результаты испытаний на усталость валов стали 34ХНЗМ (нормализованной)

Диаметр вала, мм	Предел выносливости, кг/мм ²						Эффективный коэффициент концентрации напряжений
	Гладкие			Ступенчатые			
	неупрочненные	упрочненные	повышение, %	неупрочненные	упрочненные	повышение, %	
170	—	—	—	14,5	20,5	41	—
20	35,5	45,5	28	21,5	35,5	65	1,6
10	36,5	44,5	22	23,5	36,5	55	1,5
5	37,5	—	—	24,5	—	—	1,5

дела выносливости при переходе от малых образцов (диаметром 5 мм или 10 мм) к большим (диаметр 170 мм), выражается приблизительно одной и той же величиной: — неупрочненных образцов (41%) и для упрочненных (44%).

б) Сталь 34ХНЗМ (закалка и отпуск)

Результаты усталостных испытаний этой стали на образцах различных диаметров приведены в табл. 5 и на рис. 5.

Таблица 5

Результаты испытаний на усталость валов стали 34ХНЗМ (закалка и отпуск)

Диаметр вала, мм	Предел выносливости, кг/мм ²						Эффективный коэффициент концентрации напряжений
	Гладких			Ступенчатых			
	неупрочненные	упрочненные	повышение, %	неупрочненные	упрочненные	повышение, %	
160	24,5	—	—	19,0	> 24,5*	> 29	1,3
10	43,5	54,5	25	30,5	43,5	42	1,4
5	—	—	—	31,5	—	—	—

* Изломы образцов происходили вне галтели (вне упрочненной части), фиг. 7б.

Изломы упрочненных образцов диаметром 10 мм происходили в галтелях, однако предел выносливости их соответствовал пределу выносливости гладких образцов.

Снижение предела выносливости (рис. 5, кривые 2 и 2') при переходе от малых образцов (диаметром 5 или 10 мм) к большим (диаметром 160 мм) составляет около 40% для неупрочненных образцов и 44% для упрочненных.

Эффективность упрочнения галтелей как крупных, так и мелких образцов выразилась в повышении пределов их выносливости до уровня не

меньшего, чем соответствующие значения пределов выносливости гладких образцов.

в) Сталь 15ГН4М (закалка и отпуск)

Полученные в результате испытаний значения пределов выносливости ступенчатых образцов стали 15ГН4М даны в табл. 6 и на рис. 5.

В результате чеканки галтелей валов диаметром 160 мм вибрирующим роликом предел выносливости их повысился с 18,5 до 25,5 кг/мм², т. е. на

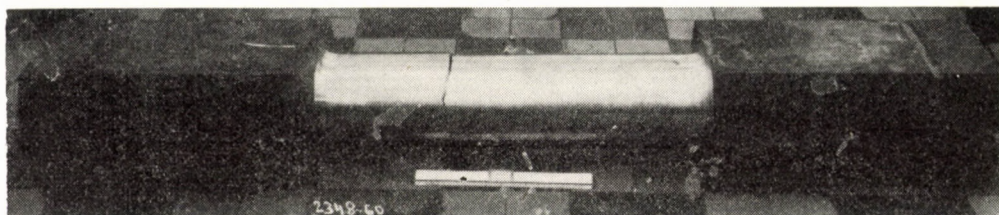


Рис. 7а

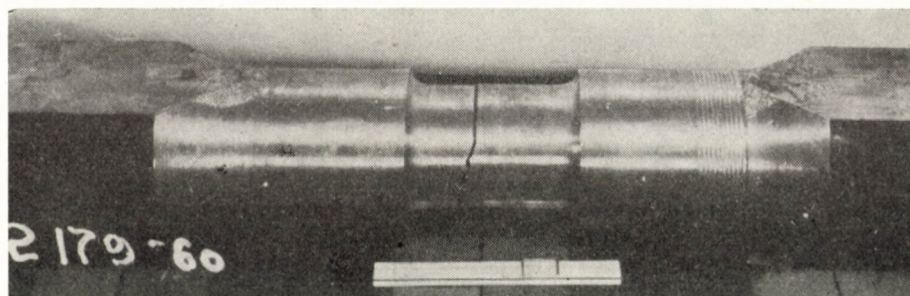


Рис. 7б

38%. Образец, определивший предел выносливости, сломался вне галтели, по гладкой части образца (фиг. 7а).

Таблица 6

Результаты испытаний на усталость валов стали 15ГН4М (закалка и отпуск)

Диаметр вала, мм	Предел выносливости образцов, кг/мм ²						Эффективный коэффициент концентрации напряжений
	Гладких			Ступенчатых			
	неупрочненные	упрочненные	повышение, %	неупрочненные	упрочненные	повышение, %	
160	25,5	—	—	18,5	> 25,5*	> 38	1,4
20	44,0	—	—	29,5	> 44,0*	> 49	1,5

* Изломы образцов происходили вне галтели (вне упрочненной части образца).

Таким образом, применение поверхностного наклепа чеканкой привело в данном случае также к полному устранению влияния галтели на усталостную прочность вала.

Снижение предела выносливости (рис. 5, кривые 3 и 3') при переходе от малых образцов (диаметром 20 мм) к большим (диаметром 160 мм) составляет 37% для неупрочненных образцов и 42% для упрочненных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авторское свидетельство на изобретение № 128034 на имя Кудрявцева И. В. и Лопатинского Н. А.: (опубл. «Бюллетень изобретений» № 9, 1960).
2. Кудрявцев И. В., Саввина Н. М.: Сопротивление усталости крупных пластинчатых деталей и методы его повышения. Вестник машиностроения, № 1, 1959.

DIE ERMÜDUNG VON GROSSEN, ABGESTUFTEN WELLEN AUS LEGIERTEM STAHL

I. V. KUDRIAVCEV und N. M. SAVVINA

ZUSAMMENFASSUNG

1. Die Ermüdungsgrenze von abgestuften Wellen ($r : d = 0,12$) aus legiertem Stahl (34 ChN3M und 15 GN4M) verringert sich bei Vergrößerung der Abmessungen von 5–20 auf 170 mm Durchmesser, bei symmetrischem Biegeversuch, um 37–41%.

2. Die Versuche beweisen, daß die Ermüdungsgrenze bedeutend (29–41%) anwächst, wenn die Übergänge bei den Absätzen der aus hochfestem legiertem Stahl von verschiedener Härte angefertigten großen Wellen durch Schmieden mittels vibrierender Rollen verdichtet werden. Die Wirksamkeit der Verdichtung verringert sich nicht durch Vergrößerung der Maße der Wellen; durch die Verdichtung kann die Wirkung der Spannungskonzentration sowohl bei den kleineren wie auch bei den größeren Wellen erzielt werden.

3. Das Maß der Verringerung der Ermüdungsfestigkeit, bezogen auf die Vergrößerung der absoluten Maße, kann bei den verdichteten Wellen durch denselben Wert ausgedrückt werden wie bei den unverdichteten Wellen.

4. Der Maßstabfaktor der untersuchten Stähle kann annähernd in gleicher Weise ausgedrückt werden bei den abgestuften und bei den glatten Wellen. Die Erklärung hierfür ist, daß die gewählten Maße der Schulterübergänge ($r : d = 0,12$) eine verhältnismäßig mäßige Spannungskonzentration hervorrufen.

5. Die Arbeit weist auf die Bedingungen der verdichtenden Bearbeitung hin, wodurch vollständige Neutralisierung der Spannungskonzentration in den Übergängen nicht nur bei kleinen Probekörpern, sondern auch bei Probekörpern von großem Querschnitt erzielt werden kann.

THE FATIGUE OF BIG STEPPED SHAFTS MADE OF ALLOY STEEL

I. V. KUDRIAVCEV and N. M. SAVVINA

SUMMARY

1. The fatigue limit of stepped shafts ($r : d = 0.12$) made of alloy steel (34 KhN3M and 15 GN4M), as determined by symmetrical bending tests, decreases by 37–41% when their dimensions are increased from 5–20 to 170 mm dia.

2. It was proved by experiments that the fatigue limit is considerably increased (by 29–41%), if the fillets of the large shafts, made of high-strength steel of various hardness, are compressed by forging with a vibrating roll. The efficiency of the compression is not reduced by the increase of the dimensions of the shafts; by compression the effects of stress concentration can be neutralized on the smaller shafts as well as on the bigger ones.

3. The degree of decrease of fatigue strength, as related to the increase of absolute dimensions, can be expressed for compressed shafts by the same values as for uncompressed shafts.

4. The scale factor of the investigated steels can be expressed by approximately the same measure for the stepped shafts as for the plain ones. The explanation for this is, that the dimensions which were chosen for the fillets cause a relatively mild stress concentration.

5. The paper deals with the conditions of the strengthening work by which complete neutralization of the stress concentration in the fillets can be obtained, not only on small specimens, but also on the large specimens.

FATIGUE DES GRANDS ARBRES ÉPAULÉS EN ACIER ALLIÉ

I. V. KUDRIAVCEV et N. M. SAVVINA

RÉSUMÉ

1. La limite de fatigue des arbres épaulés en acier allié «34 ChN3M» et «15 GN4M» ($r:d=0,12$) décroît à l'essai de flexion symétrique de 37—41% parallèlement à l'accroissement de 5—20 à 170 mm de \varnothing de leurs dimensions.

2. Des essais montrent que la limite de fatigue s'augmente considérablement (de 29—41%), si les arrondis des épaulements des grands arbres en aciers alliés de haute résistance et de duretés diverses sont durcis par forgeage au galet vibrant. L'efficacité du forgeage ne décroît pas avec l'augmentation des dimensions des arbres; par le durcissement, on peut obtenir la neutralisation de l'effet de concentration des contraintes dans la zone des épaulements d'arbres de plus petites ou de grandes dimensions.

3. Le degré de réduction de la résistance à la fatigue par rapport à l'augmentation des dimensions absolues, peut s'exprimer par les mêmes valeurs pour les arbres durcis et non durcis.

4. Le facteur d'échelle des aciers examinés peut être exprimé par les mêmes valeurs pour les arbres épaulés et à section constante.

5. L'étude traite des conditions du travail de durcissement, par lequel on peut obtenir la neutralisation totale des concentrations de contraintes dans les épaulements, non seulement sur de petites éprouvettes, mais aussi sur des éprouvettes de grande section.

ПО ПОВОДУ НАКЛЕПА ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ*

В. ЛИНГАРТ,

КАНД. ТЕХ. НАУК

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕХНОЛОГИИ, ПРАГА

Известно, что положительное действие наклепа поверхности, повышающего усталостную прочность, объясняется сжимающими напряжениями на поверхности. С возрастанием прочности основного материала создаются таким образом более благоприятные условия для действия этих напряжений. Об этом свидетельствуют также интересные и очень хорошие результаты на улучшенных валах больших сечений, которые на конференции предоставил проф. Кудрявцев. Хорошие результаты получил также проф. Вэрэш на улучшенных и упрочненных роликом болтах. Я хотел бы представить результаты, которые свидетельствуют о том, что в некоторых случаях влияние наклепа роликами для улучшенной стали с высоким пределом текучести не дает дополнительного повышения усталостной прочности против неулучшенной стали. В этих случаях применение улучшенной стали не имеет значения. Такой опыт мы сделали при испытании осей локомотивов.

Некоторое время тому назад, нашему институту вместе с чехословацким локомотивостроительным заводом предстояло выполнить задание по повышению усталостной прочности локомотивных осей — рис. 1. Наряду с конструкционными видоизменениями соответствующих ступиц было решено обрабатывать оси обкаткой роликами. В качестве материалов были выбраны по одному варианту углеродистая сталь прочностью 67 кг/мм^2 , по другому варианту качественная легированная хромисто-ванадиевая сталь, и оси улучшались до прочности 80 кг/мм^2 — табл. 1. Предполагалось, что в случае обкатанных роликами осей из сталей более высокой прочности будут получены более высокие показатели усталостной прочности.

Результаты усталостных испытаний крупноразмерных моделей осей видны из рис. 2. Указаны также результаты испытаний не подвергшихся обкатке осей из углеродистой стали. Соответствующая глубина наклепанного слоя составляла в случае осей из углеродистой стали от 7 до 8 мм ($P = 2500 \text{ кг}$), в случае хромисто-ванадиевой стали от 8 до 9 мм ($P = 4000 \text{ кг}$).

* Выступление в дискуссии к докладу проф. Кудрявцева

Таблица 1

Сталь CSN	C	Mn	Si	Cr	V	P	S	σ_s кг/мм ²	σ_b кг/мм ²
11 558	0,35					max 0,05	max 0,05	35	67
15 230	0,24— 0,34	0,4— 0,8	max 0,4	2,2— 2,5	0,1— 0,2	max 0,04	max 0,04	65	80

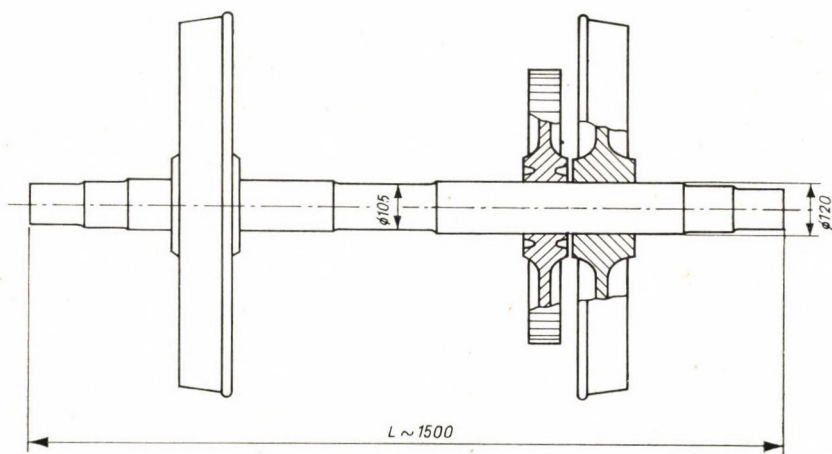


Рис. 1

Из результатов видно, что в случае обкатанных роликами осей из качественной стали, обладающей более высокой прочностью, не было получено дополнительного повышения усталостной прочности. Соответствующие показатели одинаковы для обоих вариантов материалов и, следовательно, применение улучшенных качественных сталей применительно к данному случаю не имеет значения. Как убедительно показали работы проф. Кудрявцева, положительное влияние наклепа в случае прессовых соединений находится в прочной связи с благоприятными сжимающими напряжениями на поверхности. Ничего другого не остается, как предполагать, что в случае обкатки роликами сталей, обладающих повышенной прочностью, возникают более сложные условия в распределении благоприятных сжимающих напряжений по поверхности. Соответствующие измерения собственных напряжений проводятся в настоящее время. Также известные различия в распределении наклепа по глубине в случае сталей, обладающих повышенной прочностью, говорят за предположение об изменениях деформации поверхностных слоев в процессе обкатки роликами. Под известным поверхностным наклепанным

слоем меньшей толщины возникает в некоторых случаях область пониженной твердости — рис. 3. Пока не выяснен вопрос о том, связано ли это понижение твердости в действительности с изменениями наклепа или с переменной знака внутренних напряжений 1-го рода. Все-таки указанные результаты свидетельствуют о том, что положительное действие обкатки роликами в данном случае прессованных соединений далее не возрастает с повышением прочности материала. Распределения наклепа по глубине материала, наоборот, заставляют нас предполагать, что в данном случае следует принимать в расчет определенное ограничение применимости — наклепа роликами — в соотношении к прочности материала.

НАКОПЛЕНИЕ УСТАЛОСТНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ И ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ СЛУЖБЫ*

С. В. СЕРЕНСЕН
АКАДЕМИК АН УССР

ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ, МОСКВА

Работа рассматривает режимы и их статистический анализ при различных условиях нагруженности. Намечаются наиболее характерные условия эксплуатации, как основы расчетов прочности. Зависимость между долговечностью, средней амплитудой допускаемых напряжений и вероятностью повреждения. Оценка фактора надежности при различных условиях нагруженности и режимов.

Статистическая трактовка условий нагруженности деталей и сопротивления их усталости в эксплуатации при расчете на прочность должна приблизить результаты расчета к действительным условиям, определяющим эту прочность.

Условия нагруженности в связи с усталостью схематизируются при расчете либо как стационарные, когда амплитуда напряжений в процессе эксплуатации мало изменяется, являясь практически постоянной, либо как нестационарные, когда в течение срока службы каждого экземпляра детали амплитуда многократно изменяется, подчиняясь при этом закономерностям вполне определенного во времени характера или закономерностям случайных явлений. В первом случае условия определяются числом циклов и амплитудой, во втором — общим числом циклов и спектром амплитуд.

Под спектром здесь понимается процентное распределение общего числа циклов по величинам амплитуд, характеризующее в случае непрерывного спектра плотностью распределения или функцией накопленной частоты.

Представление о разбросе нагруженности в пределах группы одинаковых рассчитываемых деталей вытекает из того очевидного положения, что детали машин, выпускаемых сериями, предназначаются для работы в значительном интервале условий эксплуатации. Одна часть деталей, подчиняясь вероятностным закономерностям, попадает в более тяжелые по нагруженности условия, другая — в менее тяжелые, третья — в еще более легкие условия и т. д. Несмотря на устойчивость спектра амплитуд в пределах срока службы каждого экземпляра, нестационарная нагруженность

* Доклад на Конференции по вопросам современного расчета, проведенной Академией наук Венгрии в г. Будапеште с 24 по 28 октября 1961 года.

в пределах совокупности деталей также будет характеризоваться большим или меньшим разбросом этого спектра.

Подавляющее большинство деталей транспортных, строительно-дорожных, горных, сельскохозяйственных и технологических машин работает в условиях нестационарного нагружения.

Все режимы нестационарной напряженности в соответствии с их свойствами и вытекающим отсюда подходом к изучению спектров амплитуд разделяются на режимы со случайным чередованием амплитуд различной величины и режимы с выраженной закономерностью такого чередования.

Примерами режимов первого типа являются напряжения в трансмиссии автомобиля при установившемся движении, нагрузки на крыло самолета в беспокойном воздухе, напряжения в деталях угольных комбайнов при работе, напряжения в рессорах и рамах автомобилей и подвижного состава железных дорог, напряжения в рельсах и рельсовых накладках и ряд других.

Режимы второго типа характерны для многих деталей, в том числе и некоторых из перечисленных, при наличии по условиям эксплуатации систематически повторяющихся силовых воздействий, вызывающих закономерное или в среднем закономерное изменение амплитуд на протяжении некоторого отрезка времени, например, при включении сцепления — в трансмиссии автомобиля, при посадке — в конструкциях крыла самолета, при поворотах — в раме гусеничного трактора, при работе механизма подъема и заглобления корпусов — в раме плуга.

Типичным примером деталей, на протяжении всего срока службы которых амплитуды напряжений изменяются в среднем периодически и закономерно, являются однотипные детали технологического оборудования — ковочных машин, станков-автоматов и т. п. Определение спектра при нестационарной нагруженности случайного типа связано с применением статистических методов и требует: а) достаточно длительной регистрации переменных нагрузок и напряжений; б) выбора принципа систематизации амплитуд при обработке результатов и в) статистической интерполяции и экстраполяции полученного спектра амплитуд.

Для получения номинального, т. е. осредненного по совокупности деталей, спектра регистрация амплитуд производится одновременно на ряде экземпляров деталей или, чаще, на одном экземпляре, но поставленном в наиболее характерные для всей группы условия или же в условия, которые на основании ряда предварительных соображений рассматриваются как расчетные.

Необходимость статистической интерполяции и экстраполяции опытных данных о спектрах обусловлена, во-первых, задачей типизации спектров и удобством использования данных при программировании и расчетах на прочность. Во-вторых, экстраполяция нужна при ограниченности статисти-

ческого материала для получения более важной и менее достоверной по опытным данным части спектра в области больших и редко встречающихся амплитуд. Альтернативой такой экстраполяции является необходимость непрерывно фиксировать эксплуатационную напряженность на протяжении всего срока службы.

На рис. 1 изображены результаты ряда исследований по спектрам амплитуд [1], [2], [3], [4].

Приближение подобных опытных кривых производится аналитическими выражениями и кривыми, типы которых показаны на рис. 2, при со-

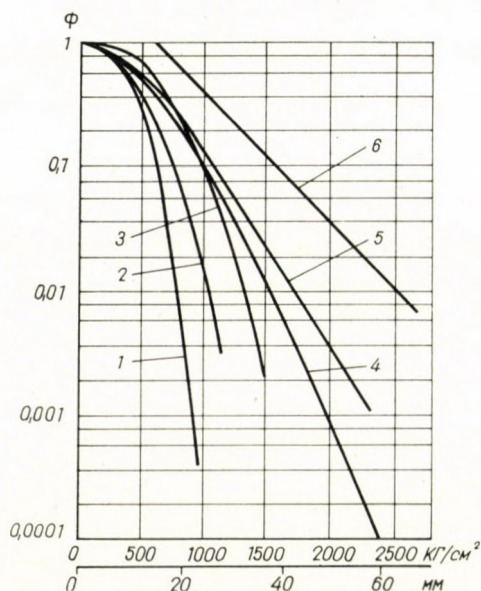


Рис. 1. Спектры амплитуд нагрузок и напряжений: 1 — в раме плуга [4]; 2 — в полуосях комбайна [1]; 3 — в раме автомобиля [4]; 4 — в звене привода рулевого управления [2]; 5 — полуоси автомобиля [4]; 6 — в рессоре автомобиля [3]

ответствующем выборе их параметров s , h , $\lg \bar{\sigma}_a$, $\bar{\sigma}_a$, P , K , n , указанных аналитических выражений (средних амплитуд, среднеквадратичных, средних логарифмов и т. п.). Распределения в интегральной форме изображены в таких же, как и на рис. 1, координатах логарифмов относительной накопленной частоты Φ и амплитуды, а соответствующие им кривые плотности распределения — в координатах спектральной плотности и амплитуды.

Большинство приведенных типов кривых представляет частные случаи распределения статистических величин χ^2 Пирсона.

Для всех изображенных опытных кривых характерен показательный закон убывания числа амплитуд по мере их роста.

В отличие от приведенных на рис. 1 примеров, кривые спектров амплитуд в деталях технологических машин могут описываться закономерностями

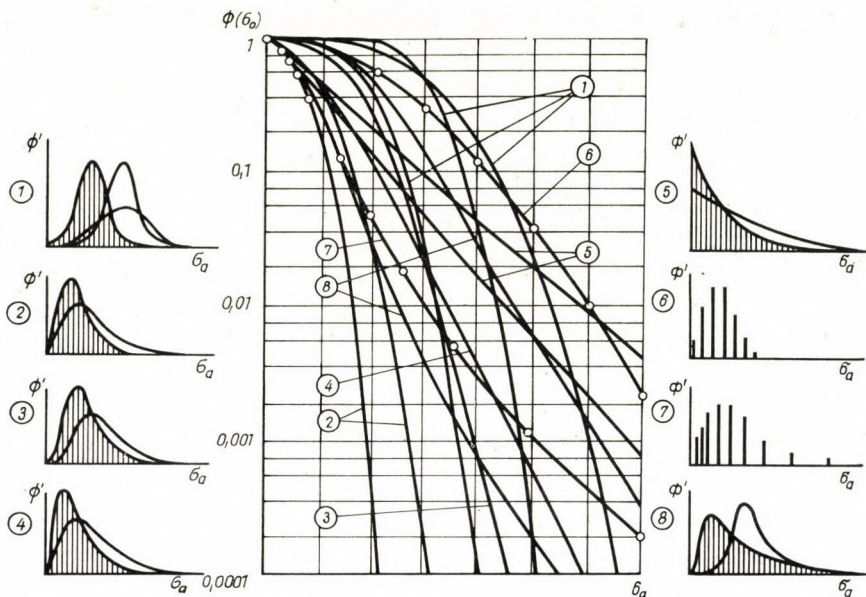


Рис. 2. Теоретические кривые, используемые для интерполяции и экстраполяции спектров

1 — нормальное распределение

$$\Phi'(\sigma_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S} e^{-\frac{(\sigma_a - \bar{\sigma}_a)^2}{2S^2}}$$

2 — распределение Максвелла (двухмерное)

$$\Phi'(\sigma_a) = \frac{1}{S^2} \sigma_a^2 e^{-\frac{2\sigma_a^2}{2S^2}}$$

3 — распределение Максвелла (трехмерное)

$$\Phi'(\sigma_a) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} S^2} \sigma_a^3 e^{-\frac{\sigma_a^2}{2S^2}}$$

4 — специальное распределение

$$\Phi'(\sigma_a) = h^2 \sigma_a e^{-h\sigma_a}$$

5 — специальное распределение

$$\Phi'(\sigma_a) = h e^{-h\sigma_a}$$

6 — биномиальное распределение

$$\Phi'(\sigma_a) = e_n^{\sigma_a} p^{\sigma_a} (1-p)^{n-\sigma_a}$$

7 — логарифмически биномиальное распределение

$$\Phi'(\sigma_a) = e_n^{k \lg \sigma_a} \cdot p^{k \lg \sigma_a} (1-p)^{n-k \lg \sigma_a}$$

8 — логарифмически нормальное распределение

$$\Phi'(\sigma_a) = \frac{M}{\sqrt{2\pi} S \sigma_a} e^{-\frac{(\lg \sigma_a - \lg \bar{\sigma}_a)^2}{2S^2}}$$

иного вида, чем показанные на рис. 2. Так, например, эти режимы могут приниматься как режимы с линейной зависимостью амплитуды нагрузки или напряжения от накопленного числа циклов или со степенной зависимостью [5]. Следует, однако, полагать, что такие распределения являются в той или иной степени схематизацией действительной нагруженности технологических машин. Это вытекает, прежде всего, из неизбежности отклонений случайного характера в величинах нагрузок при (в среднем закономерном периодическом) протекании силового процесса за счет отклонений в

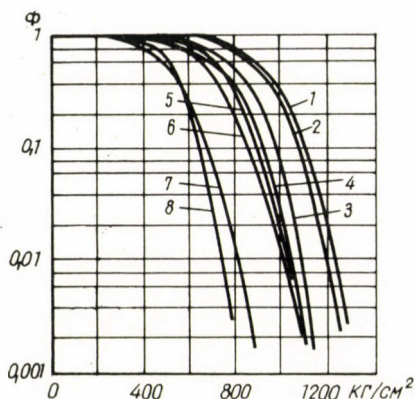


Рис. 3. Спектры амплитуд изгибных напряжений в балке заднего моста автомобиля [6] в зависимости от нагрузки и условий движения: 1 — грунтовая дорога груз 2,5 т и прицеп; 2 — асфальт груз 4,5 т; 3 — бульжник груз 2,5 т и прицеп 3,6 т; 4 — грунтовая дорога груз 2,5 т; 5 — асфальт груз 2,5 т и прицеп 3,6 т; 6 — бульжная мостовая груз 2,5 т; 7 — грунтовая дорога груз 1,35 т; 8 — асфальт груз 1,35 т.

величинах припусков обрабатываемых полуфабрикатов, колебаний их твердости и температуры нагрева, затупления режущего инструмента и других факторов, подчиняющихся вероятностным закономерностям. Эти отклонения должны влиять на форму действительных кривых распределения, приближая ее к форме кривых показательных функций.

Экспериментальные данные указывают на то, что с изменением условий работы в большинстве случаев изменяется и спектр амплитуд и интенсивность накопления по числу циклов. Следовательно, условия перехода к предельному состоянию являются общими по упоминавшейся ранее схематизации путей перехода к предельному состоянию за счет нагрузок. Примером является случай, изображенный на рис. 3. По данным [6] при изменении полезного груза от 1,35 до 4,5 т частота нагружения изменяется (в данном случае уменьшается) в 1,4 раза, что дает представление об интервале рассеяния числа накопленных циклов. Кривые спектров амплитуд расположены в относительно узком интервале.

Анализ опытных данных о спектрах амплитуд в различных условиях работы конкретных деталей показывает, что в ряде случаев имеют место

сравнительно простые видоизменения спектров, имеющие характер преобразования подобия. Подобными являются все однопараметрические кривые каждого семейства. Для двух- и трехпараметрических кривых подобие означает пропорциональное изменение всех линейных параметров кривых (средней амплитуды, среднеквадратичного отклонения и т. п.).

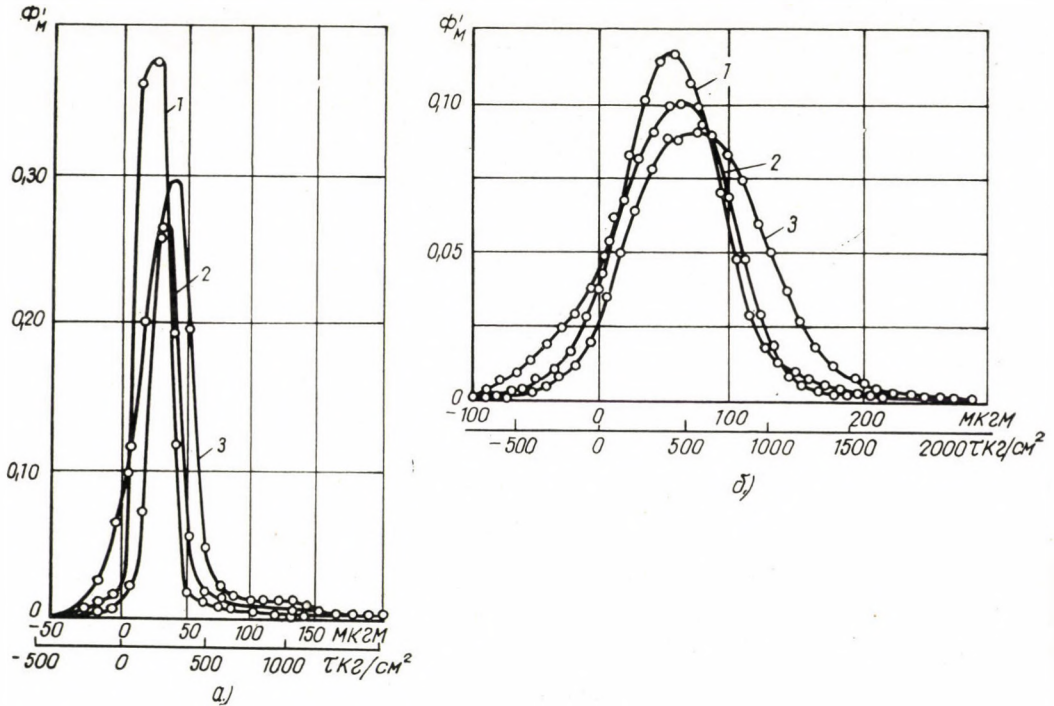


Рис. 4. Статистическое распределение крутящего момента и напряжений кручения в полуоси автомобиля с учетом троганий с места и переключений передач: а — асфальтовое шоссе; б — бездорожье; 1 — груз 0,8 т; 2 — груз 2,5 т; 3 — груз 2 т и прицеп 2 т.

На примере полуосей грузового автомобиля, исследованных в разнообразных эксплуатационных условиях [7], показано, что несмотря на многообразие этих условий их можно свести к нескольким типичным группам с приблизительно одинаковым статистическим распределением амплитуд крутящих моментов.

Показанные на рис. 4—5 кривые повторяемости получены в естественных условиях загородного и городского движения автомобиля с различным весом перевозимого груза (рис. 4) и в разных дорожных условиях при одинаковом грузе (рис. 5). В полученные распределения входят и нагрузки, возникающие при переходных режимах (разгоны автомобиля, торможения, переключения передач). Средняя скорость определялась безопасностью движения (в городе) или поддерживалась самим водителем как

наиболее целесообразная в данных дорожных условиях. Из рис. 4 видно, что эффект изменения веса перевозимого груза соизмерим с эффектом изменения скорости движения, в то время как изменение дорожных условий весьма существенно отражается на типе распределения крутящего момента (рис. 5). При движении по дорогам с твердым покрытием наибольшая повторяемость соответствует относительно невысоким нагрузкам и напряжениям в полуосях, достигающим 200—400 кг/мм². Распределения, полу-

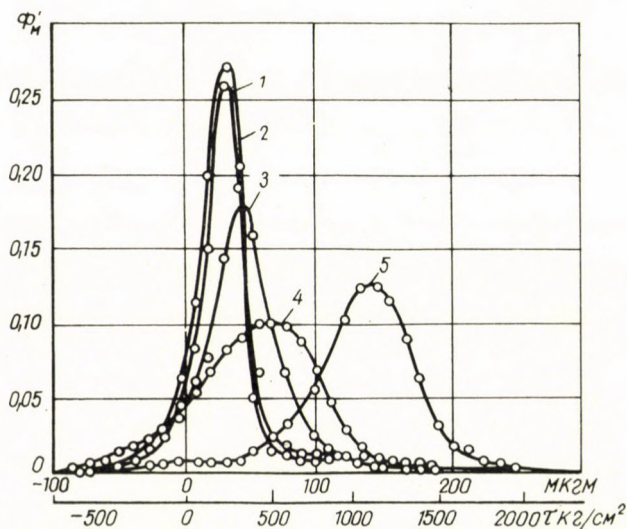


Рис. 5. Статистическое распределение крутящего момента и напряжений кручения в полуоси автомобиля при движении по различным дорогам, груз 2,5 т, учтены режимы трогания и переключения передач: 1 — асфальт за городом; 2 — магистральная улица города; 3 — грунтовая дорога, удовлетворительное состояние; 4 — целина (сухой суглинок с кочками); 5 — мокрый луг

ченные в естественных условиях движения, отличаются наличием более пологой ветви в области высоких значений момента и существенно отличаются от нормального типа распределения.

Систематизируя перемены напряжений по размахам, статистические распределения амплитуд находим из распределений размахов. Эти наиболее важные для расчета на усталость характеристики переменной напряженности изображены на рис. 6 в координатах амплитуды M_a и вероятностных координатах для накопленной частоты, соответствующей закону плотности распределения

$$\Phi' M_a = h^2 M_a e^{-hM_a}, \tag{1}$$

где h — статистический параметр.

Рис. 6, где применение специальных координат приводит к спрямлению кривых накопленных частот, указывает на то, что спектры амплитуд момента в полуосях в условиях движения автомобиля по дорогам без твердого покрытия и бездорожью удовлетворительно описываются предлагаемым для этой цели типом кривых [1]. Приближение экспериментальных кривых к прямым линиям, проведенным пунктиром, на этом графике

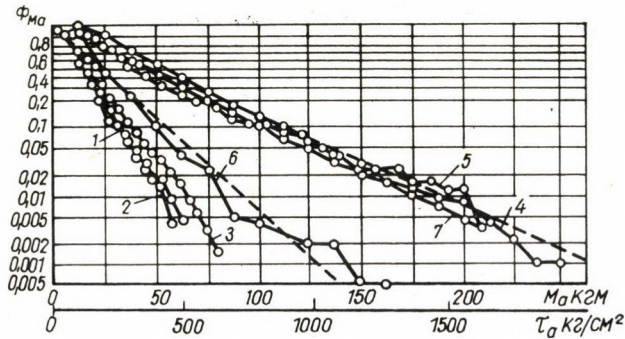


Рис. 6. Статистическое распределение амплитуд крутящего момента в полуосях автомобилей различных типов в зависимости от дорожных условий: 1 — автомобиль ЗИЛ 151 по лугу; 2 — ЗИЛ 151 по снежной целине; 3 — ЗИЛ 151 с прицепом по снежной целине; 4 — ГАЗ 51 по бездорожью; 5 — ЗИЛ 151 по бездорожью; 6 — ГАЗ 51 по песку; 7 — ЗИЛ 151 по плохой грунтовой дороге

наблюдается для различных дорожных условий, а также для разных типов автомобилей. При сравнении кривых на этом графике следует иметь в виду, что постоянная составляющая момента на нем не отражена и что масштаб напряжений указан для полуосей диаметром 40 мм.

Произведенный статистический анализ нагрузок показывает, что многообразие условий работы автомобиля приводит к сравнительно контрастным режимам переменной напряженности полуосей в зависимости от дорожных условий. Поэтому целесообразно выделить наиболее характерные режимы, которые лягут в основу расчета и испытания на прочность.

Рассмотрим в качестве критерия прочности сопоставление повреждения, накопленного на данной стадии нагружения a , с предельным накоплением повреждения на стадии разрушения.

Усталостное повреждение, накопленное на данной стадии нагружения, по гипотезе линейного суммирования оценивается выражением

$$a = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_i}{N_i} = \left(\frac{k_1}{N_1} + \frac{k_2}{N_2} + \dots + \frac{k_i}{N_i} \right) n_{\text{сум}}, \quad (2)$$

Где $N_1, N_2 \dots N_i$ — долговечности на разных уровнях напряжений по первичной кривой усталости;

$n_1, n_2 \dots n_i$ — числа циклов на разных уровнях напряжений, составляющие в сумме общее накопленное число циклов $n_{\text{сум}}$;

$K, K_2 \dots K_i$ — коэффициенты, характеризующие спектр эксплуатационных нагрузок.

Повреждение к моменту разрушения (характеристика прочности) вычисляется согласно выражению

$$A = \frac{n'_1}{N_1} = \frac{n'_2}{N_2} + \dots + \frac{n'_i}{N_i} = \left(\frac{k'_1}{N_1} + \frac{k'_2}{N_2} + \dots + \frac{k'_i}{N_i} \right) N_{\text{сум}}, \quad (3)$$

где $n'_1, n'_2 \dots n'_i$ — числа циклов, составляющие в сумме долговечность при программном нагружении $N_{\text{сум}}$, т. е. суммарное число циклов при разрушении;

$k'_1, k'_2 \dots k'_i$ — коэффициенты, характеризующие спектр переменных напряжений при программных испытаниях на усталость для получения величины A .

В связи с рассеянием долговечностей при стационарном ($N_1, N_2 \dots N_i$) и программном ($N_{\text{сум}}$) нагружении возникает вопрос о способе учета этого явления при использовании накопленного повреждения как критерия прочности. Величина A должна трактоваться как случайная в соответствии с выражением (3), где случайной величиной является только $N_{\text{сум}}$. Вероятностный характер предельного накопленного повреждения A виден из результатов работ [8] и [9], где относительное повреждение вычисляется с вероятностью, соответствующей взятому для вычислений $N_{\text{сум}}$, а в качестве $N_1, N_2 \dots N_i$ берутся модальные значения долговечностей или некоторые долговечности по условным диаграммам усталости без учета рассеяния. Известное требование независимости накопленного повреждения A от спектра амплитуд в статистическом смысле означает требование независимости закона распределения вероятностей $\Phi(A)$ от вида этого спектра. Выполнение такого требования позволяет дать сравнительно простую вероятностную характеристику сопротивления усталости.

Общие принципы вычисления вероятности разрушения неоднократно формулировались [10], однако применительно к расчету на усталость требуется разработка соответствующих методов в связи с тем или иным типом нагруженности, характером ее разброса, а также данными о сопротивлении усталости в зависимости от условий нагружения. Далее рассмотрен расчет по критерию накопленного повреждения.

Расчет по накопленному повреждению при нестационарной нагруженности предусматривает условие неразрушимости в следующем виде:

$$A - a > 0, \quad (4)$$

где a — мера накопленного усталостного повреждения в данной детали из партии к концу срока службы;

A — мера сопротивления данной детали усталостному разрушению.

Условие неразрушимости (4) для каждой детали из партии определяется как разность между располагаемым сопротивлением усталости и той частью сопротивления, которая исчерпана действием переменных напряжений. Последняя представляет собой меру накопленного усталостного повреждения a в данной детали, вычисляемую на основе тех же предпосылок, которые используются при определении величины A по результатам программных испытаний.

Обозначив $A - a = R$ и рассматривая R как случайную величину, вероятность разрушения находим интегрированием функции плотности вероятностей Φ'_R по области отрицательных значений R .

Применительно к условию (4) вероятность разрушения вычисляется по выражению

$$V = \int_{-\infty}^0 dR \int_0^{\infty} \Phi'_A(A) \cdot \Phi'_a(A - R) dA, \quad (5)$$

где Φ'_A — функция плотности вероятностей A ;

Φ'_a — функция плотности вероятностей a .

Для определения функции Φ'_a результаты изучения спектров нагрузок на различные экземпляры деталей интерпретируются в виде семейства кривых распределения амплитуд (спектров) и накопленных чисел циклов в соответствии с вероятным распределением этих характеристик по всем деталям. Затем указанные спектры амплитуд и числа циклов пересчитываются в меру относительного накопленного повреждения a ; значением величины a присваивается распределение вероятностей, вытекающее из такого пересчета и определяющее функцию плотности вероятностей Φ'_a .

Например, при подобных спектрах действующих напряжений результаты измерений интерпретируются семейством подобным кривых (рис. 7) с различными значениями характерного напряжения (таким параметром на рис. 7 является средняя амплитуда напряжений полного спектра). Последнему присваивается то или иное распределение вероятностей, отражающее работу машин в различных реальных условиях. В основу определения Φ'_a кладется функциональная зависимость величины a от параметра $\bar{\sigma}_a$, вычисленная по условию линейного накопления повреждения, и функция распределения вероятностей этого параметра. Исключая указан-

ный параметр, получаем функцию распределения вероятностей $P_a(a)$, а следовательно, и функцию плотности вероятностей Φ'_a .

Мера накопленного повреждения в каждом экземпляре детали вычисляется по условию линейного накопления повреждения

$$a = \frac{n_{\text{сум}}}{N_0 \sigma_{-1}^m} \int_{\sigma_{-1}}^{\sigma_{\text{max}}} \Phi'(\sigma_a) \sigma_a^m d\sigma_a, \quad (6)$$

где σ_{-1} — средний предел выносливости;

N_0 — среднее число циклов, соответствующее перелому кривой усталости;

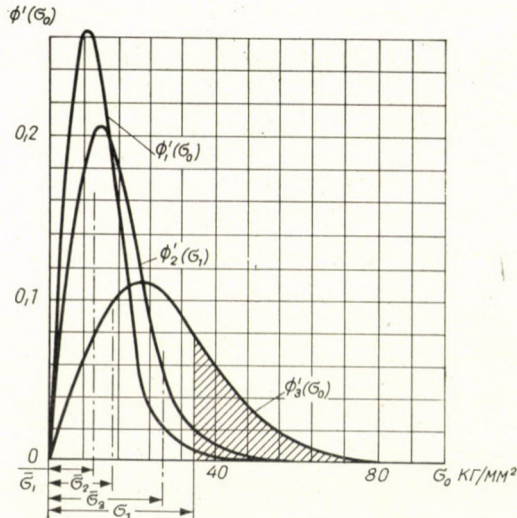


Рис. 7. Семейство кривых, характеризующих подобные спектры амплитуд в зависимости от параметра $\bar{\sigma}_i$ — средней амплитуды полного спектра

m — показатель степени уравнения первичной кривой усталости;
 $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{0,2}$ напряжение, характеризующее выход конструкции из строя вследствие остаточных деформаций или разрушения.

Чтобы проследить влияние на вероятность разрушения таких изменяемых по усмотрению конструктора факторов, как гарантируемый срок службы (определяется величиной $n_{\text{сум}}$) и фактор размеров детали (оценивается изменениями $\bar{\sigma}_a$), построен график зависимости между долговечностью и допустимой средней амплитудой напряжений по параметру вероятности разрушения (рис. 8).

Рассматривая $\bar{\sigma}_a$ как среднюю амплитуду напряжений основного расчетного нагрузочного режима (для всех деталей из партии) и используя вышеуказанный график, в условиях данного примера можно определять: а) вероятность разрушения или безопасный срок службы имеющихся деталей и б) размеры проектируемой детали при заданной долговечности и допустимой вероятности разрушения.

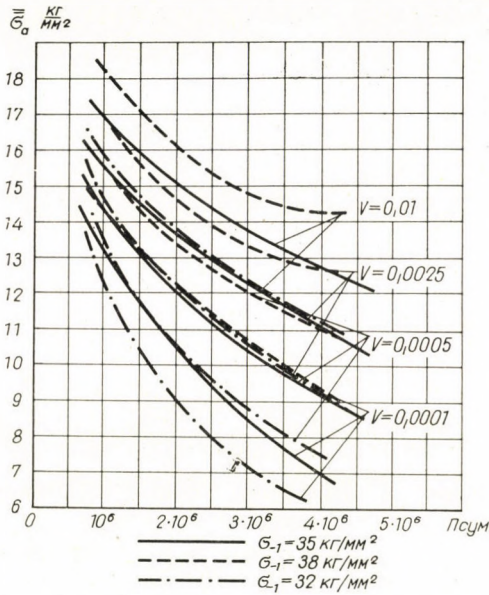


Рис. 8. Допускаемые средние напряжения в зависимости от долговечности и вероятности разрушения

Принятие той или иной вероятности разрушения, например, величины 0,005, означающей, что в ходе эксплуатации большого числа деталей около 0,5% их может выходить из строя до истечения установленного срока службы, должно обосновываться анализом работы существующих конструкций, требованиями к их надежности, а также экономическими соображениями [10].

В свете изложенных вероятностных представлений об условиях нагруженности и сопротивлении усталости запас прочности следует рассматривать как необходимую компенсацию рассеяния этих величин для обеспечения требуемой надежности соответствующим выбором факторов второй группы.

Интерпретация запаса по номинальному пределу выносливости и приведенному напряжению нестационарного режима согласно общеизвестной формуле аналогична. Приведенное напряжение обычно вычисляется на

основе правила линейного накопления повреждения [1]

$$\sigma_{np} = \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{n_{сум}}{N_0} \int_{\sigma_{-1}}^{\sigma_{max}} \Phi'(\sigma_a) \sigma_a^m d\sigma_a} \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) получается несколько видоизмененное выражение для коэффициента запаса, а именно

$$n_{-1} = \sqrt{\frac{A}{a}}$$

которое позволяет рассматривать величину запаса при статистической трактовке как функцию отношения номинальных значений A и a .

Номинальными значениями A целесообразно считать средние значения меры сопротивления усталостному повреждению \bar{A} , а номинальным значением a — меру накопленного усталостного повреждения $|a|_{\bar{\sigma}_a}$, вычисленную по средней нагруженности, т. е. по основному расчетному режиму. Являясь параметрами кривых Φ'_A и Φ'_a , указанные номинальные значения, с одной стороны, определяют совмещенность этих кривых и величину вероятности разрушения, а с другой, — величину коэффициента запаса.

Каждому вычисляемому указанным способом запасу прочности при заданной нагруженности, механических свойствах деталей и характеристиках рассеяния соответствует некоторая вероятность разрушения.

Недостатком способа оценки, основанного на вычислении запаса, является то, что сравнение вычисленных запасов для деталей разного типа не дает достаточно правильного представления о соотношении их надежностей. Это связано отчасти с известной условностью выбора величин, принимаемых за номинальные, отчасти — с различными соотношениями характеристик рассеяния.

На рис. 9 показаны зависимости вероятности разрушения от коэффициента запаса в случае коленчатого вала ($\bar{\sigma}_r = 12 \text{ кг/мм}^2$) для возможных сочетаний характеристик рассеяния по параметру коэффициента вариации амплитуды действующих напряжений $V_q = \frac{S_q}{\bar{\sigma}_q}$ и коэффициента вариации значений предела выносливости $V_r = \frac{S_r}{\bar{\sigma}_r}$.

На рис. 10 показан график для вала самоходной машины, построенный по условиям примера расчета при нестационарной нагрузке, где кривые построены по параметру среднеквадратичного логарифма S_{lgA} и коэффициента вариации средних амплитуд спектров $\bar{\sigma}_a$ в пределах партии деталей

$$V_q = \frac{S_{\bar{\sigma}_a}}{\bar{\sigma}_a}.$$

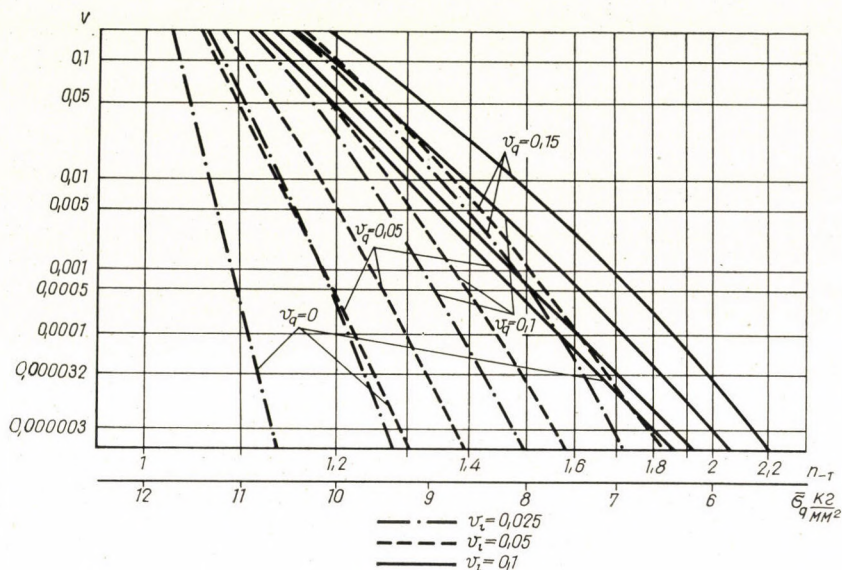


Рис. 9. Вероятность разрушения и коэффициент запаса при стационарном нагружении

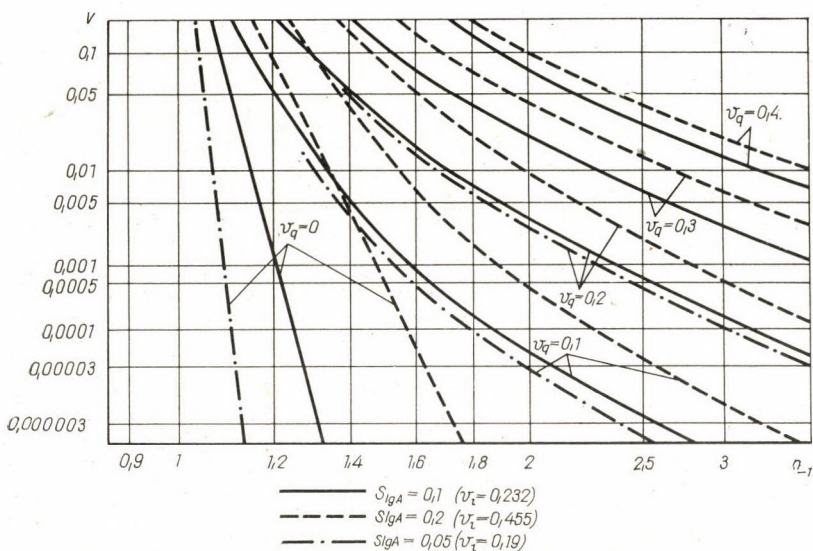


Рис. 10. Вероятность разрушения и коэффициент запаса при нестационарном нагружении

Из приведенного графика видно, что при одной и той же вероятности разрушения, более объективно характеризующей надежность конструкции, значения коэффициентов запаса получаются разными в зависимости от соотношения характеристик рассеяния нагруженности и прочности для однотипных деталей. Эта зависимость усиливается по мере роста вариации амплитуды нагрузки.

литуд действующих напряжений. Данные этих графиков также свидетельствуют о том, что по мере увеличения вариации V_q действующих напряжений величины запасов прочности, необходимые для обеспечения надежности детали, нарастают все более интенсивно. В то же время с ростом V_q ослабевает влияние изменчивости усталостных свойств V_r на вероятность разрушения при данном запасе прочности, но это влияние сказывается, естественно, весьма значительно при малых вариациях амплитуд действующих напряжений.

Величина A и характер распределения вероятности Φ_A как мера сопротивления детали или материала усталостному разрушению, не могут рассматриваться вообще как независимые от спектра нагруженности.

Применительно к конструкционным и легированным сталям при меняющейся амплитуде переменных напряжений такие сопоставления позволили установить ряд особенностей функции усталостного повреждения [11]. В частности, было установлено, что принятие линейного условия накопления повреждения вносит меньше погрешностей, чем предположение о независимости предельного повреждения D_k от условий нагружения. Поэтому предельное повреждение D_k изображается как функция от условий нагружения, а именно от величин σ_2/σ_1 и $\beta = \frac{n_2}{n_1}$.

Изучение характера этих функций [12] показало, что в области варьирования амплитуд напряжений, не превышающих $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1,2 \div 1,3$, они могут быть выражены единой зависимостью, которая, например, для случая изменения напряжений между уровнями σ_1 и σ_2 составляет [12]:

$$A = \sum \frac{n}{N} = \frac{1 + \beta \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^m}{1 + \beta \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^q}, \quad (8)$$

где m — показатель степени исходной кривой усталости;

q — показатель степени вторичной или расчетной кривой усталости, как показано далее.

При изменении напряжений в области более высоких значений $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} > 1,3$ это выражение оказывается уже не применимым и величина A определяется непосредственно из опытных данных.

Нанесение результатов испытаний при многократном изменении напряжений в относительных координатах позволило установить (13) зависимости, облегчающие применение простого линейного суммирования по-

вреждения для количественного описания условий сопротивления усталости при нестационарной нагруженности. Для этого результаты испытаний при варьировании амплитуды напряжений между уровнями σ_1 и σ_2 при суммарных числах циклов на каждом из уравнений напряжений n_1 и n_2 наносятся в координатах:

$$\lg \frac{\sigma_2}{\sigma_1} ; \lg \frac{n_2}{N_1 - n_1} .$$

Зависимость между этими величинами, как это было изложено ранее (13), выразится следующим образом:

$$\frac{n^2}{N_1 - n_1} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^q = 1 . \quad (9)$$

Показатель степени q в этой зависимости вообще не равен m , где m — показатель исходной кривой усталости. Принимая теперь в качестве кривой усталости, по которой оценивается накопление повреждения, кривую с показателем степени q , которая в дальнейшем называется расчетной кривой усталости, можно выражение для суммы относительных долговечностей (накопленных цикловых отношений) выразить так:

$$\frac{n_1}{N_1^*} + \frac{n_2}{N_2^*} = 1 , \quad (10)$$

где N^* — предельные числа циклов по расчетной кривой усталости.

Для определения q в первом приближении используется указанное выше уравнение кривой усталости в относительных координатах, согласно которому:

$$q = \frac{\lg \frac{N_1 - n_1}{n_2}}{\lg \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} . \quad (11)$$

Подобный подход к использованию простого линейного суммирования предлагается Фрейденталем [8] на основе представлений о факторах взаимодействия между повреждающим эффектом от переменных напряжений на различных уровнях. При спектральном представлении о нагруженности используется осредненная величина фактора взаимодействия, приводящая к тому, что для линейного суммирования повреждения используется некоторая отличная от исходной кривая усталости со своим показателем степени.

Обозначая суммарные числа циклов до разрушения, определяемые без учета взаимодействия напряжений N_r и с учетом взаимодействия напря-

жений N'_r можно показать связь между ранее рассмотренными характеристиками накопления повреждения и величинами N_r и N'_2 , а также осредненным фактором взаимодействия $\bar{\omega}$. Для этого следует рассмотреть выражение для предельного накопленного повреждения, соответствующего стадии разрушения при спектральном задании нагруженности.

Накопленное число циклов перегрузочных напряжений составляет

$$n = n_{\text{сум}} \Phi(\sigma), \tag{10}$$

где $n_{\text{сум}}$ — общее число циклов действия всех (в том числе и меньших σ_{-1}) напряжений нестационарного режима до разрушения;

$\Phi(\sigma)$ — функция распределения накопленной вероятности напряжений, изменяющаяся от 0 до 1.

Для некоторого напряжения σ , находящегося в интервале $\sigma_{\text{min}} < \sigma < \sigma_{\text{max}}$, число циклов до разрушения по кривой усталости равно N . Производная

$$\frac{dn}{d\sigma} = n_{\text{сум}} \Phi'(\sigma),$$

откуда:

$$dn = n_{\text{сум}} \Phi'(\sigma) d\sigma, \tag{12}$$

где $\Phi'(\sigma)$ — функция плотности распределения вероятности величин напряжений, характеризующая спектр нагрузки.

Предполагая линейное накопление усталостного повреждения для приращения повреждения, получим:

$$d\mathcal{D}_n = \frac{dn}{N}. \tag{13}$$

Заменяя в этом выражении dn на $n_{\text{сум}} \Phi'(\sigma) d\sigma$ и N на величину $\frac{N_0 \sigma_{-1}^m}{\sigma^m}$, получаемую из уравнения кривой усталости, получим:

$$d\mathcal{D}_n = \frac{dn}{N} = \frac{n_{\text{сум}}}{N_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \right)^m \Phi'(\sigma) d\sigma,$$

где σ_{-1} и N_0 — предел выносливости и абсцисса (долговечность) точки перелома кривой усталости с горизонтальным участком.

Полное повреждение до разрушения определится следующим образом:

$$A = \int \frac{dn}{N} = \frac{n_{\text{сум}}}{N_0} \int_{\sigma_{\text{min}}}^{\sigma_{\text{max}}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \right)^m \Phi'(\sigma) d\sigma, \tag{14}$$

где нижний предел интегрирования σ_{\min} определяется как наименьшее повреждающее напряжение, определяемое в зависимости от случая нагруженности, как указано далее. Переходя к вычислению накопления повреждения по расчетной кривой усталости с показателем степени q в выражении (14), можно получить:

$$\frac{n_{\text{сум}}}{N_0} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \right)^q \Phi'(\sigma) d\sigma = 1. \quad (15)$$

Из выражений (14) и (15) следует:

$$A = \frac{\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \right)^m \Phi'(\sigma) d\sigma}{\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \right)^q \cdot \Phi'(\sigma) d\sigma}. \quad (16)$$

Последнее выражение дает зависимость величины A в самом общем виде от параметров спектральной нагрузки $\Phi'(\sigma)$ и показателей степени m и q , характеризующих свойства материала.

Осредненный коэффициент взаимодействия напряжений по Фрейденталю определяется как отношение:

$$\bar{\omega} = \frac{N_r}{N'_r}. \quad (17)$$

Значения N_r и N'_r численно равны $n_{\text{сум}}$, определяемому из выражений (14) в предположении $a = 1$ и (15) соответственно.

Зависимость между $\bar{\omega}$ и a выразится тогда следующим образом:

$$\bar{\omega} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \right)^q \cdot \Phi'(\sigma) d\sigma}{\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \right)^m \Phi'(\sigma) d\sigma} = \frac{1}{A}. \quad (18)$$

Изложенное развитие представлений об условиях прочности при нестационарной, в том числе статистически заданной нагруженности, способствует более правильному определению запасов прочности и оценке сум-

марного числа циклов напряжений, являющихся безопасными для работы элементов машин и конструкции.

Определение предельного накопленного повреждения по расчетной кривой усталости с показателем степени q приводит, как следует из предыдущего, к условию прочности:

$$\frac{n_{\text{сум}}}{\sigma_{-1}^q N_0} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma^q \Phi'(\sigma) d\sigma = 1, \quad (19)$$

откуда для предельного по прочности состояния нагруженности имеем:

$$\sqrt[q]{\frac{n_{\text{сум}}}{N_0} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma^q \Phi'(\sigma) d\sigma} = \sigma_{-1}. \quad (20)$$

Рассматривая теперь переход от заданной эксплуатационной нагруженности детали к нагруженности предельной по прочности, полагаем, что сохраняется подобие плотности распределения амплитуд переменных напряжений. Тогда запас прочности составит:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt[q]{\frac{n_{\text{сум}}}{N_0} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma^q \cdot \Phi'(\sigma) d\sigma}}. \quad (21)$$

Величина напряжения стационарного режима, эквивалентная данному нестационарному режиму в смысле приведения к разрушению через N_0 циклов, составляет:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt[q]{\frac{n_{\text{сум}}}{N_0} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma^q \Phi'(\sigma) d\sigma}. \quad (22)$$

В зависимости от уровня переменной напряженности и кривых плотности вероятности распределения ее амплитуд, могут иметь место различные случаи применения указанных выше выражений для запаса прочности и эквивалентного напряжения.

а) Напряжение $\sigma_{\min} > \sigma_{-1}$.

В этом случае величина запаса прочности вычисляется по выражению:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\frac{n_{\text{сум}}}{N_0} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma^q \Phi'(\sigma) d\sigma}}. \quad (23)$$

Эта величина запаса прочности характеризует сопротивление детали усталостному разрушению после ограниченного суммарного числа циклов действия напряжений $n_{\text{сум}}$, т. е. характеризует прочность при ограниченном сроке службы.

б) Напряжение $\sigma_{\max} > \sigma_{-1}$, а напряжения $\sigma_{\min} < \sigma_{-1}$.

В этом случае при вычислении запаса прочности изменяются границы интегрирования и вычисление интеграла, стоящего под корнем выражения (23), производится в пределах от σ'_{-1} до σ_{\max} , где σ'_{-1} — минимальная величина амплитуды напряжения, ниже которой не происходит накопления усталостного повреждения.

Эта величина либо определяется той минимальной амплитудой напряжений, при которой прекращается развитие трещины усталости (обычно эта величина составляет около $(0,4 \div 0,5) \sigma_{-1}$), либо эта величина предела усталости σ'_{-1} принимается по кривой усталости, построенной в минимальных напряжениях при программном испытании на усталость с изменением амплитуд напряжений применительно к плотности распределения $\Phi'(\sigma)$.

Если $\sigma_{\min} > \sigma_{-1}$, то интегрирование производится от σ_{\min} .

в) Напряжения σ_{\max} (а значит и σ_{\min}) $< \sigma_{-1}$.

Запас прочности выражается по ранее приведенному для случая б) выражению и нижняя граница интегрирования σ'_{-1} определяется таким же образом.

Если напряжение $\sigma_{\max} < \sigma'_{-1}$, то накопление усталостного повреждения не будет иметь места.

г) Стационарная переменная напряженность.

При постоянной амплитуде переменных напряжений, если общее число циклов их повторений составляет $n_{\text{сум}}$, а сами напряжения выше предела выносливости, то запас прочности определяется как отношение

$$n = \frac{\sigma_{\text{псум}}}{\sigma_a}, \quad (24)$$

где $\sigma_{\text{псум}}$ — ограниченный предел выносливости, соответствующий числу циклов $n_{\text{сум}}$.

Если амплитуда напряжений ниже предела выносливости, то запас прочности определяется по общеизвестной зависимости

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \quad (25)$$

Если амплитуда действующих напряжений изменяется прерывным образом по тому или иному ступенчатому графику, по которому каждому напряжению σ_{ai} соответствует число циклов их действия n_i , то выражение для запаса прочности, исходя из ранее приведенных допущений, выразится следующим образом:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt[q]{\frac{n_{сум}}{N_0} \sum_{i=1}^k \sigma_i^q p_i}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{max} \sqrt[q]{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}}\right)^q \cdot n_i}} \quad (26)$$

Эквивалентное напряжение стационарного режима при числе циклов до разрушения N_0 (т. е. на уровне исходного предела усталости σ_{-1}) составляет:

$$\sigma_{экр.} = \sigma_{max} \sqrt[q]{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}}\right)^q n_i} \quad (27)$$

Если основываться на простом линейном накоплении усталостного повреждения ($q = m$ и $a = 1$), то:

$$\sigma_{экр.} = \sigma_{max} \cdot k \quad (28)$$

где $k = \sqrt[m]{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}}\right)^m \cdot n_i}$ — коэффициент долговечности по Д. Н. Решетову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Серенсен, С. В., Козлов, Л. А., Вестник машиностроения, № 12, 1953.
2. GASSNER, E.: Effect of Variable Load and Cumulative Damage on Fatigue in Vehicle and Airplane Structures, *Proc. of the International Conference on Fatigue of Metals*, London, 1956.
3. Горелик, А. М., Автомобильная промышленность, № 2, 1957.
4. Серенсен С. В., Буглов, Е. Г., Вестник машиностроения, № 10, 1960.
5. Решетов, Д. Н., Шувалов, С. А., Вестник машиностроения, № 9, 1958.
6. Бухарин, Н. А., Прозоров, В. С., Автомобильная промышленность, № 7, 1959.
7. Серенсен, С. В., Бухарин Н. А., Буглов Е. Г., Снытин М. Е., Вестник машиностроения, № 1, 1961.

8. FREUDENTHAL, A., HELLER, R.: On Stress Intermation in Fatigue and Cumulative Damage. *Rule Journal of the Aero-Space Sciences*. 26 (1959) No. 7.
9. FREUDENTHAL, A., HELLER, R.: Accumulation of Fatigue Damage. *Fatigue in Aircraft Structures*. Acad Press New-York, 1956.
10. Рясницын, А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Изд-во по строительству и архитектуре, 1954.
11. Прочность при нестационарных режимах нагружения, АН УССР, 1961.
12. Серенсен, С. В., Козлов, Л. А.: Испытания на усталость при варьируемых перегрузках. Заводская Лаборатория, № 3, 1953.
13. Серенсен, С. В., Козлов, Л. А.: Линейная интерпретация накопления повреждения и характеристик сопротивления усталостному и длительному статическому разрушению. Заводская Лаборатория, № 11, 1958.

DIE ANHÄUFUNG VON ERMÜDUNGSBRÜCHEN BEI NICHT-STATIONÄRER ANWENDUNG DER SPRÖDEN FESTIGKEIT

S. V. SERENSEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit untersucht die Beanspruchungen bei verschiedenen Belastungen und deren statistische Analyse. Die charakteristischsten Betriebsverhältnisse werden als Grundlage der Bemessung auf Festigkeit hervorgehoben. Zusammenhang zwischen der Lebensdauer, der mittleren Amplitude der zulässigen Spannungen und der Wahrscheinlichkeit für einen Bruch. Bewertung des Sicherheitskoeffizienten bei verschiedenen Belastungen und Beanspruchungen.

THE ACCUMULATION OF FATIGUE BREAKS UNDER CONDITIONS OF INSTATIONARY APPLICATION OF RIGID STRENGTH

S. V. SERENSEN

SUMMARY

The paper investigates the stresses for different charges and their statistical analysis. The most characteristic operating conditions are designated as bases for strength dimensioning. Relation between life, the mean amplitude of the allowed stresses and the probability of rupture. Definition of the safety factor for different charges and stresses.

ACCUMULATION DES RUPTURES PAR FATIGUE DANS LES CONDITIONS D'APPLICATION NON STATIONNAIRE DE LA RÉSISTANCE RIGIDE

S. V. SERENSEN

RÉSUMÉ

L'étude examine les efforts et leur analyse statistique pour des charges différentes. Les conditions d'utilisation les plus caractéristiques sont choisies comme bases du calcul de résistance. Relation entre la durée, l'amplitude moyenne des efforts admissibles et la probabilité de la rupture. Définition du coefficient de sécurité en cas de charges et d'efforts différents.

ÜBER DIE BEHANDLUNG DER ERMÜDUNG IN DEN FESTIGKEITSVORSCHRIFTEN FÜR FLUGZEUGE*

Prof. R. MÜLLER
DRESDEN

In den zeitgemäßen Festigkeitsvorschriften der Flugzeuge müssen auch die Gesichtspunkte der Ermüdung in Betracht gezogen werden, da zur Zeit schon ein eigener Nachweis der Sicherheit gegenüber Ermüdungsbrüchen notwendig geworden ist. Der Aufsatz diskutiert die vorhandenen Vorschriften in dieser Hinsicht, sowohl für den Nachweis nach der safe-life-, wie auch nach der fail-safe-Methode. Es werden schließlich Änderungsvorschläge in den Vorschriften vorgeführt.

1. Einleitung

Vor etwa sechs Jahren standen wir in der Deutschen Demokratischen Republik vor der Notwendigkeit, neue Festigkeitsvorschriften für den Flugzeugbau auszuarbeiten, da die im Dezember 1936 herausgegebene Vorschrift trotz vieler Ergänzungen bis zum Jahr 1945 offenbar veraltet war. Selbstverständlich stießen wir dabei auch auf das Problem der Ermüdung und studierten eingehend die uns zugängliche Literatur, insbesondere die Festigkeitsvorschriften der verschiedensten Staaten und die Empfehlungen der ICAO (International Civil Aviation Organization). Wir mußten damals feststellen, daß es noch keine Möglichkeit gab, die Ermüdungslebensdauer der Flugzeugbauteile mit einigermaßen genügender Genauigkeit rechnerisch zu ermitteln. Auch der versuchsmäßige Nachweis der sicheren Ermüdungslebensdauer war derart unsicher, daß man nur von einer unsicheren Ermüdungslebensdauer sprechen konnte. Wir begnügten uns daher damals mit einer ähnlich allgemeinen und ungenauen Formulierung, wie sie auch in den Festigkeitsvorschriften anderer Staaten und in den Empfehlungen der ICAO zu finden war.

Inzwischen haben verschiedene internationale Konferenzen über Ermüdung im allgemeinen und speziell im Flugzeugbau stattgefunden, in denen über Forschungs- und Versuchsergebnisse der verschiedensten Forschungsinstitute der Welt berichtet wurde. Sie erweiterten wesentlich die Kenntnisse auf dem Gebiet der Ermüdung, und es war zu erwarten, daß sich daraus erhebliche Änderungen der Festigkeitsvorschriften ergeben würden.

* Vorgetragen auf der Konferenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften für zeitgemäße Dimensionierung in Budapest, am 24–28. Oktober 1961.

In den »British Civil Airworthiness Requirements« Ausgabe vom 16. März 1959 und in den amerikanischen Civil Air Regulations Part 3 fanden diese Erkenntnisse ihren Niederschlag. Im allgemeinen weisen beide Festigkeitsvorschriften keine wesentlichen Unterschiede auf. Die englischen sind etwas ausführlicher als die amerikanischen, geben aber nur wenig Zahlenwerte an, die außerdem meist mit den amerikanischen übereinstimmen; die amerikanischen, die sonst mit Zahlenangaben sparsam sind, enthalten beim fail-safe-Nachweis präzisere Angaben über die anzusetzenden Mindestlasten.

2. Betriebsfestigkeitsnachweis und Ausfallsicherheitsnachweis

In beiden Festigkeitsvorschriften werden zwei Möglichkeiten zur Verhinderung von katastrophalen Zusammenbrüchen der Flugzeugzelle zugelassen:

a) Die Methode des Nachweises der sicheren Ermüdungslebensdauer: safe-fatigue-life method (engl.), fatigue-strength-method (amer.), Betriebsfestigkeitsnachweis (W. BRAUN).

b) Die Methode des Nachweises der unfallsicheren Konstruktion bei Ermüdungsbrüchen: fail-safe structure (engl.), fail-safe strength (amer.), Ausfallsicherheit (W. BRAUN). Beim Nachweis der sicheren Ermüdungslebensdauer soll die Zeit ermittelt werden, während der die Möglichkeit von Ermüdungsbrüchen der tragenden Konstruktion oder von lebenswichtigen Bauteilen der Zelle unter der Einwirkung der zeitlich in ihrer Größe wechselnden Lasten, wie sie im Betrieb des Flugzeuges vorkommen, außerordentlich klein ist.

Beim Nachweis der unfallsicheren Konstruktion wird die Möglichkeit eines Ermüdungsbruches zugelassen, doch darf der Ermüdungsbruch irgend eines Teiles der tragenden Konstruktion nicht die Ursache eines strukturellen Zusammenbruches oder solcher Deformationen, die die Flugsicherheit wesentlich herabsetzen, oder von Verletzungen der Besatzung oder der Fluggäste sein. Nach dem Bruch eines Teiles muß die Restkonstruktion so fest und steif sein, daß für eine gewisse Zeit, wenigstens bis zur Feststellung des Bruches, die gefahrlose Durchführung des Flugdienstes möglich ist.

2.1 Nachweis der sicheren Ermüdungslebensdauer

Zur Feststellung der sicheren Ermüdungslebensdauer eines Flugzeugmusters ist zunächst das Spektrum der im Betrieb zu erwartenden Belastungen wechselnder Höhe zu ermitteln. Dazu ist es erforderlich, für das Flugzeug einen Betriebsplan aufzustellen, der das Einsatzgebiet des Flugzeuges bzw. die Fluglinien, auf denen es eingesetzt werden soll, den zu erwartenden Flugverlauf (Steigflug, Reiseflug, Landeanflug) mit den dazugehörigen Flughöhen und

Geschwindigkeiten, sowie die dazugehörigen Bodenbewegungen, und zwar nicht nur Start und Landung, sondern auch die erforderlichen Rollstrecken umfaßt. An Hand dieses Betriebsplanes werden

- a) das Böenspektrum entsprechend Einsatzgebiet und Flughöhe,
- b) das Spektrum der Bodenbelastungen und
- c) die Belastung der Überdruckkabine festgestellt.

Grundlage der Belastungsspektren durch Böen und Bodenlasten können die zahlreich veröffentlichten Spektren sein, die aber untereinander sehr große Unterschiede aufweisen, so daß es schwierig ist, das für das zu entwerfende Flugzeug wahrscheinlich richtige Spektrum aufzustellen. Es wäre zweckmäßig, wenn die Aufsichtsbehörden für die in Frage kommenden Lastfälle Häufigkeitsdiagramme vorschreiben würden, für die Luftlasten also Angaben über die Häufigkeit der Abfanglastvielfachen, die Häufigkeit der Böen, unterschieden nach Höhe und Einsatzgebiet, für die Bodenlasten über die Häufigkeit der Stoßgeschwindigkeiten bei symmetrischer Bug- und Hecklandung und bei einseitigen Landungen über die Häufigkeit und Größe der Rollstöße usw. Die Belastungsspektren können sich auch auf Messungen an Flugzeugen ähnlicher Bauart, Größe und Geschwindigkeit in dem für das neu zu entwerfende Flugzeug vorgesehenen Einsatzgebiet stützen.

Die englischen Vorschriften empfehlen einen Streufaktor von 1,5 bezüglich der Häufigkeit wegen der Möglichkeit, daß einzelne Flugzeuge dieses Musters im Fluge eine größere Böenhäufigkeit antreffen, als erwartet wurde. Über das festzulegende Bodenprogramm sind in den beiden Festigkeitsvorschriften keine Angaben gemacht.

Abb. 1 zeigt die Auswirkung des Häufigkeitsstreufaktors an einigen Böenspektren. Man sieht, daß der Vergrößerung der Häufigkeit auf das 1,5-fache bei dem TAYLORSchen Grundspektrum bzw. bei dem LUNDBERGSchen Maximalspektrum eine konstante Vergrößerung der Böengeschwindigkeit um 0,3 m/sec bzw. 0,55 m/sec entspricht.

Bei dem von PRESS und MCDUGAL (nach LUNDBERG) angegebenen Spektrum sind die entsprechenden Böengeschwindigkeitszunahmen 0,75 m/sec bei großen, bis 0,25 m/sec bei kleinen Böengeschwindigkeiten. Der Streufaktor bezüglich der Böengeschwindigkeit ist also sehr klein. Es wäre zweckmäßig, neben einem Mindeststreufaktor von 1,5 bezüglich der Häufigkeit auch einen Mindeststreufaktor von etwa 1,1 bezüglich der Böengeschwindigkeit zu verlangen. Das ist um so wünschenswerter, als die Feststellung der Häufigkeiten aus den Meßdiagrammen einwandfrei möglich ist, aber die Ermittlung der Böengeschwindigkeit ungenau ist, da nicht alle Schwingungs- und elastischen Eigenschaften des die Meßwerte liefernden Flugzeuges berücksichtigt werden können.

Bezüglich der erwähnten Häufigkeitsdiagramme für die Bodenkräfte beim Rollen, Starten, Landen usw. ist zu bedenken, daß die Strecke, die ein

Flugzeug am Boden zurücklegt, ungefähr 1% der Flugstrecke ist (nach Angaben von TEED). Wird ein Flugzeug mit einer Blockgeschwindigkeit von 600 km/h und einer Flugbetriebsdauer von 25 000 Stunden ausgelegt, so legt es einen Flugweg von $15 \cdot 10^6$ km zurück. Dementsprechend ist die am Boden zurückgelegte Strecke ungefähr 150 000 km. Auf diesen Wegen treten

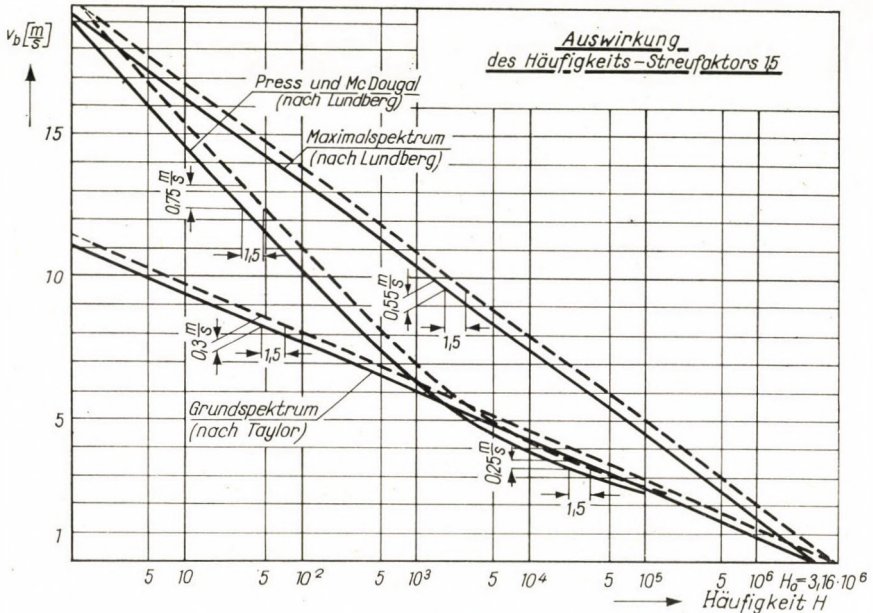


Abb. 1

eine große Anzahl unterschiedlich hoher und verschiedener Belastungen nicht nur für das Fahrwerk, sondern auch für große Teile des Flugwerkes auf. Es ist daher wichtig, auch die Auswirkung dieser Rollbodenkräfte auf das ganze Flugzeug zu berücksichtigen, auch dort, wo sie statisch ohne Bedeutung sind. Sie beeinflussen das Beanspruchungsspektrum vieler Flugzeugteile, wenn auch vielfach nur im Bereich kleiner Beanspruchungen. Aber auch Beanspruchungen unterhalb der Dauerfestigkeit wirken sich ungünstig auf die Betriebsfestigkeit aus (GASSNER).

Abb. 2 zeigt die Häufigkeit der Ursachen von Ermüdungsbrüchen bei verschiedenen Flugzeugtypen nach R. V. RHODE, wiedergegeben nach TEED. Vielfach wird der Anteil der Bodenoperationen an Ermüdungsschäden höher geschätzt, als RHODE angibt.

Nach Festlegung des Belastungsspektrums für das ganze Flugzeug müssen daraus für die einzelnen Teile des Flugzeuges die Beanspruchungsspektren ermittelt werden. Da beim Nachweis der statischen Festigkeit bereits die

Beanspruchungen der einzelnen Teile für die statischen Belastungsfälle bestimmt wurden, ist das eine zwar sehr zeitraubende, aber nicht allzu schwierige Arbeit, wenn die Häufigkeitsdiagramme der einzelnen Belastungsfälle gegeben sind. Voraussetzung ist dabei natürlich, daß nicht, wie bisher üblich, nur die statisch maßgebenden Fälle und auch diese nur für die in den einzelnen Fällen stark beanspruchten Teile gerechnet werden, sondern alle für die Betriebsfestigkeit maßgebenden Fälle, und zwar für das ganze Flugzeug, durchgerech-

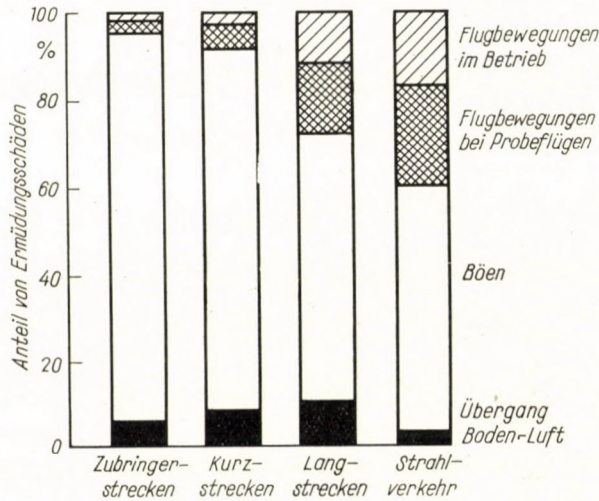


Abb. 2

net werden. Das läßt sich vielfach mit einfachen Umrechnungsfaktoren durchführen. Selbstverständlich müssen dabei die spannungserhöhenden Faktoren berücksichtigt werden (Kerbwirkung, Krafteinleitungen und -umleitungen usw.). Auch Beanspruchungen unterhalb der Dauerfestigkeit der einzelnen Bauteile müssen in das Beanspruchungsspektrum aufgenommen werden, da sie, wie schon erwähnt, die Betriebsfestigkeit ungünstig beeinflussen. Erst aus den Beanspruchungsspektren der einzelnen Bauteile kann man die Bauteile feststellen, die besonders ermüdungsgefährdet sind. Nach den englischen und amerikanischen Bauvorschriften sollen sich die Betriebsfestigkeitsuntersuchungen nur auf die Teile beziehen, deren Ermüdungsbruch katastrophale Folgen haben könnte. Die englischen Vorschriften erwähnen besonders

- den unteren Gurtanschluß des Flügelhauptholmes,
- die Haube der Pilotenkabine und
- kritische Stellen der Überdruckkabine.

In der Praxis hat sich gezeigt, daß bei der Feststellung der Teile, für die der Betriebsfestigkeitsnachweis geführt werden soll, irgendwelche maßgebenden Teile übersehen oder ihre Beanspruchung als unwesentlich angesehen

wurde. Es sollte daher, wie schon erwähnt, die Durchführung des Betriebsfestigkeitsnachweises für das ganze Flugzeug verlangt werden. Erst dann kann man feststellen, welche Teile ermüdungsgefährdet sind.

Da die rechnerische Ermittlung der Ermüdungslebensdauer mit zu großen Unsicherheiten behaftet ist, wird in beiden Festigkeitsvorschriften für die hauptsächlichsten tragenden Bauteile bzw. für die Teile, deren Bruch zu Katastrophen führen kann, der Nachweis ausreichender Betriebsfestigkeit durch Versuche verlangt. Normalerweise sollen dynamische Belastungsversuche mit der vollständigen Haupttragkonstruktion von Flügeln, Überdruckkabinen und Heckleitwerken durchgeführt werden, wenn nicht durch Rechnung und Versuch nachgewiesen ist, daß sowohl an den kritischen Stellen als auch im ganzen Bauteil die Spannungen so klein sind, daß die Möglichkeit von Ermüdungsbrüchen außerordentlich klein ist. Zur Berücksichtigung der großen Streuung von Betriebsfestigkeitsversuchen werden bei Einstufenversuchen folgende Ermüdungssicherheitsfaktoren — bezogen auf die Lastwechselzahl — empfohlen:

bei 1 Versuchsstück 6, bezogen auf das Ergebnis;

bei 3 Versuchsstücken 4,5, bezogen auf den Durchschnitt;

bei 6 Versuchsstücken 3,5, bezogen auf den Durchschnitt.

Die im Einstufenversuch aufzubringende Belastung soll aus dem Bereich größter Schädigung gewählt werden. Dieser Bereich kann unter Anwendung der PALMGREN—MINER-Theorie ermittelt werden.

Bei Programmversuchen wird das Beanspruchungsspektrum in eine Anzahl von Laststufen unterteilt, die in Lastblocks (z. B. entsprechend einem Flug) entsprechend ihrer Häufigkeit aufgebracht werden. Aus der Anzahl der bis zum Bruch ertragenen Lastblocks ergibt sich die Lebensdauer z. B. ausgedrückt in Anzahl der Flüge. Werden Programmversuche durchgeführt, so wird der Ermüdungssicherheitsfaktor im Einvernehmen mit der Aufsichtsbehörde festgesetzt.

Zu den Ermüdungssicherheitsfaktoren ist noch folgendes zu sagen:

Der Koeffizient 6 bei nur einem einzigen Versuchsstück erscheint zu niedrig. Es sind insbesondere bei gering belasteten Versuchsstücken wesentlich größere Streuwerte festgestellt worden. Dieser Faktor dürfte auch darum zu niedrig sein, weil der Einstufenversuch kaum die Schädigung des Bauteiles ergeben wird, die in Wirklichkeit oder beim Mehrstufen- (Programm-) Versuch auftritt.

2.2 Nachweis der unfallsicheren Konstruktion bei Ermüdungsbrüchen

Gegen die safe-life-Methode werden eine Reihe von Bedenken erhoben, die sich in erster Linie darauf stützen, daß das der Rechnung für das Flugzeug zu Grunde gelegte ideelle Belastungskollektiv nicht mit dem bei den

einzelnen Flugzeugen dieses Musters im Betrieb vorhandenen Belastungskollektiv übereinstimmt. Bei einzelnen Flugzeugen könnte daher die Ermüdungslebensdauer kürzer sein als die sichere Ermüdungslebensdauer des Flugzeugmusters. Aus diesem Grunde ist in den Festigkeitsvorschriften außer der *safe-life-Methode* auch die *fail-safe-Methode* zugelassen.

Nach dieser Methode sind Ermüdungsbrüche zugelassen, wenn die Restkonstruktion gewisse Festigkeits- und Steifigkeitseigenschaften besitzt. Nach den amerikanischen Vorschriften soll die Restkonstruktion folgende statische Lasten aushalten:

- a) Ein Bruchlastvielfaches von 2,0 bei V_c (Reisegeschwindigkeit);
- b) Bruchböenlasten mit Böengeschwindigkeiten, die auf etwa $\frac{2}{3}$ der normalen sicheren Werte abgemindert sind. Zur Berücksichtigung dynamischer Lasten, die beim Bruch auftreten, sind die sich aus den angegebenen Daten ergebenden Lasten auf das 1,15fache zu erhöhen, wenn diese dynamische Auswirkung des Bruches nicht anderweitig berücksichtigt wird;
- c) für die Überdruckkabine der normale Betriebsdruck in Verbindung mit den aerodynamischen Luftkräften und den aus den unter a) und b) genannten Luftlastfällen resultierenden Belastungen.

Die Berücksichtigung der Ermüdung wird nicht verlangt. Nach den englischen Vorschriften soll nach dem Ermüdungsbruch die Konstruktion ausreichend steif und fest sein, um die Lasten auszuhalten, die normalerweise in der Zeit bis zur Feststellung des Bruches auftreten. Wenn anzunehmen ist, daß der Bruch schon nach sehr kurzer Zeit festgestellt wird, soll die sichere Last als Bruchlast angesetzt werden. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß Versuche notwendig sind um nachzuweisen, daß die Konstruktion auch bei Schäden sicher ist. Weiter wird in den englischen Vorschriften empfohlen, daß die Konstruktion auch eine längere Ermüdungslebensdauer haben soll, und daß es möglich sein muß, Ermüdungsbrüche leicht festzustellen, das heißt, daß ermüdungsgefährdete Teile leicht zugänglich sein müssen.

In den englischen Vorschriften für die Druckkabine werden noch einige Hinweise gegeben. Stellen mit hohem Spannungsniveau, besonders an Ausschnitten und sonstigen spannungserhöhenden Stellen, sollen vermieden werden, damit die durch Nietung oder sonstige Herstellungsverfahren hervorgerufenen Spannungsspitzen nicht zu übermäßigen Spannungen führen. Diese Stellen sind besonders sorgfältig durchzukonstruieren. Es wird weiter darauf hingewiesen, daß, falls irgendwelche Anrisse entstehen, diese sich nur so langsam vergrößern dürfen, daß eine Explosion der Kabine vermieden wird. Dazu ist erforderlich, daß das allgemeine Spannungsniveau der Kabine ohne Ausschnitt ausreichend niedrig ist.

Bei den amerikanischen Vorschriften ist in erster Linie zu bemängeln, daß die angegebenen Böenlasten nur als statische Last, das heißt also einmalig wirkend, anzunehmen sind. Nach der Statistik nach PRESS und

McDOUGAL wird eine Böe von 10 m/sec, wie sie bei Reisegeschwindigkeiten anzusetzen ist, durchschnittlich bei 16 000 Flugkilometern, also etwa während 30 Flugstunden einmal, angetroffen. Ist die Zeit bis zur Entdeckung des Bruches, das heißt also normalerweise zwischen zwei Inspektionen, nicht außerordentlich kurz, so könnten bereits Ermüdungsbrüche auch in der Restkonstruktion auftreten. Es ist außerdem wahrscheinlich, daß noch größere Böen, als angenommen, in dieser Zeit vorkommen werden. Die nach englischer Vorschrift anzusetzende Bruch-Böenlast (sichere Last = Bruchlast), entsprechend $V_b = 15,2$ m/sec bei Reisegeschwindigkeit, tritt wesentlich seltener auf, nach der angeführten Böenstatistik einmal während 230 000 Flugkilometern, also während etwa 450 Flugstunden. Wichtig für fail-safe-Konstruktionen ist, daß die Konstruktion so übersichtlich ist, daß Ermüdungsanrisse leicht entdeckt werden können. Weiterhin muß durch Versuche festgestellt werden, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Anrissen ausreichend klein ist oder daß sie nur eine bestimmte, die Restkonstruktion nicht übermäßig gefährdende Länge haben können (Anwendung von crack-stoppers). Diese Versuche müssen gegebenenfalls mit künstlich herbeigeführten Anrissen durchgeführt werden, wobei die Gefahr besteht, daß der künstlich herbeigeführte Anriß eine ganz andere Lage oder Form hat als ein im Betrieb auftretender Riß, daß also der Versuch nicht der Wirklichkeit entspricht.

3. Änderungsvorschläge

Gegen die reine Anwendung einer der beiden angeführten Methoden, der safe-fatigue-life- sowohl, als auch der fail-safe-Methode bestehen eine Reihe von Bedenken.

Bei der safe-life-Methode bestehen diese Bedenken in erster Linie darin, daß das im wirklichen Betrieb auftretende Belastungsspektrum anders als das der Rechnung zu Grunde gelegte ist. Man müßte daher in jedes Flugzeug eine umfangreiche Meßapparatur einbauen, um an den ermüdungsgefährdeten Stellen wirkliche Beanspruchungsspektren zu erhalten, um daraus — allerdings auch mit einiger Unsicherheit — nach irgendeiner Schadenakkumulationstheorie, durch Vergleich mit den rechnerischen Beanspruchungsspektren den Grad der Ermüdung festzustellen. Dazu wäre aber eine große Anzahl von Meßpunkten erforderlich, ohne damit die Sicherheit zu haben, wirklich alle gefährdeten Stellen erfaßt zu haben. Da die Wahrscheinlichkeit eines Ermüdungsbruches außerordentlich klein sein muß, müssen Teile, die die theoretische sichere Ermüdungslebensdauer erreicht haben, ausgebaut und ersetzt werden, selbst wenn sie mit sehr großer Wahrscheinlichkeit noch sehr lange halten würden. Das Verfahren ist also auch sehr teuer.

Bei der fail-safe-Methode bestehen die Bedenken, daß die Inspektionen, die zur Feststellung von Ermüdungsbrüchen führen sollen, in außerordentlich

kurzen Zeitabständen durchgeführt werden müßten, wenn nicht Ermüdungsbrüche auch der Ersatz- oder Ausweichkonstruktion eintreten sollen, und daß bei diesen Inspektionen tatsächlich auch jeder vorhandene Ermüdungsbruch entdeckt wird.

Es sind daher verschiedene Änderungsvorschläge bekannt geworden, von denen hier nur der niederländische und der von W. BRAUN angeführt werden sollen, die praktisch eine Verbindung beider Methoden zum Ziele haben, und die beide ungefähr zur gleichen Zeit (1958) gemacht wurden.

3.1 *Vorschlag des Niederländischen Komitees für Festigkeitsvorschriften für Zivilflugzeuge vom 25. April 1958*

Er geht davon aus, daß es zur Zeit kaum möglich ist, genauere und praktisch anwendbare Vorschriften zur safe-life-Methode zu geben und insbesondere die Bauteile eines Flugzeuges nach diesen Vorschriften rechnerisch zu dimensionieren. Die Hauptgrundlage des niederländischen Festigkeitsnachweises sind Versuche.

Wie auch in den englischen und amerikanischen Festigkeitsvorschriften ist zunächst ein »repräsentativer« Flugplan mit Flughöhe, Fluggeschwindigkeit, Gewichten und den äußeren veränderlichen Lasten aufzustellen. Dann werden durch Rechnung und Dehnungsmessungen in statischen Versuchen die Stellen und Bauteile der tragenden Konstruktion bestimmt, die ermüdungsgefährdet sind. Mit diesen Bauteilen werden Ermüdungsversuche entsprechend dem Beanspruchungsspektrum durchgeführt. Tritt dabei ein Ermüdungsbruch auf und kann die Restkonstruktion den Erfordernissen einer fail-safe-Konstruktion nicht genügen oder kann nicht erwartet werden, daß der Bruch in einer sorgfältigen planmäßigen Inspektion mit Sicherheit festgestellt wird, so ist unter Zugrundelegung einer angemessenen Sicherheitszahl, die unter anderem auch von der Anzahl der Versuchsstücke und der Streuung der Versuchswerte abhängt, die sichere Ermüdungslebensdauer festzulegen.

Wenn der Bruch aber in einer sorgfältigen planmäßigen Inspektion festgestellt werden kann, so ist der Versuch weiterzuführen um festzustellen, ob das Bauteil den Erfordernissen einer fail-safe-Konstruktion genügt. Gegebenenfalls sind an den Versuchsstücken solche Brüche, wie sie auf Grund von Erfahrungen auftreten können, künstlich herbeizuführen. Das Schema der durchzuführenden Versuche geht aus Abb. 3 hervor.

Das Ziel ist dabei, nachzuweisen, daß die Konstruktion statisch und dynamisch die gleiche äußerst kleine Bruchwahrscheinlichkeit hat und daß auch die beschädigte Konstruktion eine Bruchsicherheit aufweist, deren Höhe von der Zeit zwischen zwei planmäßigen Inspektionen abhängt. Ferner wird dabei nachgewiesen, daß auch die nach Feststellung des Bruches reparierte Konstruktion ausreichend fest und steif ist.

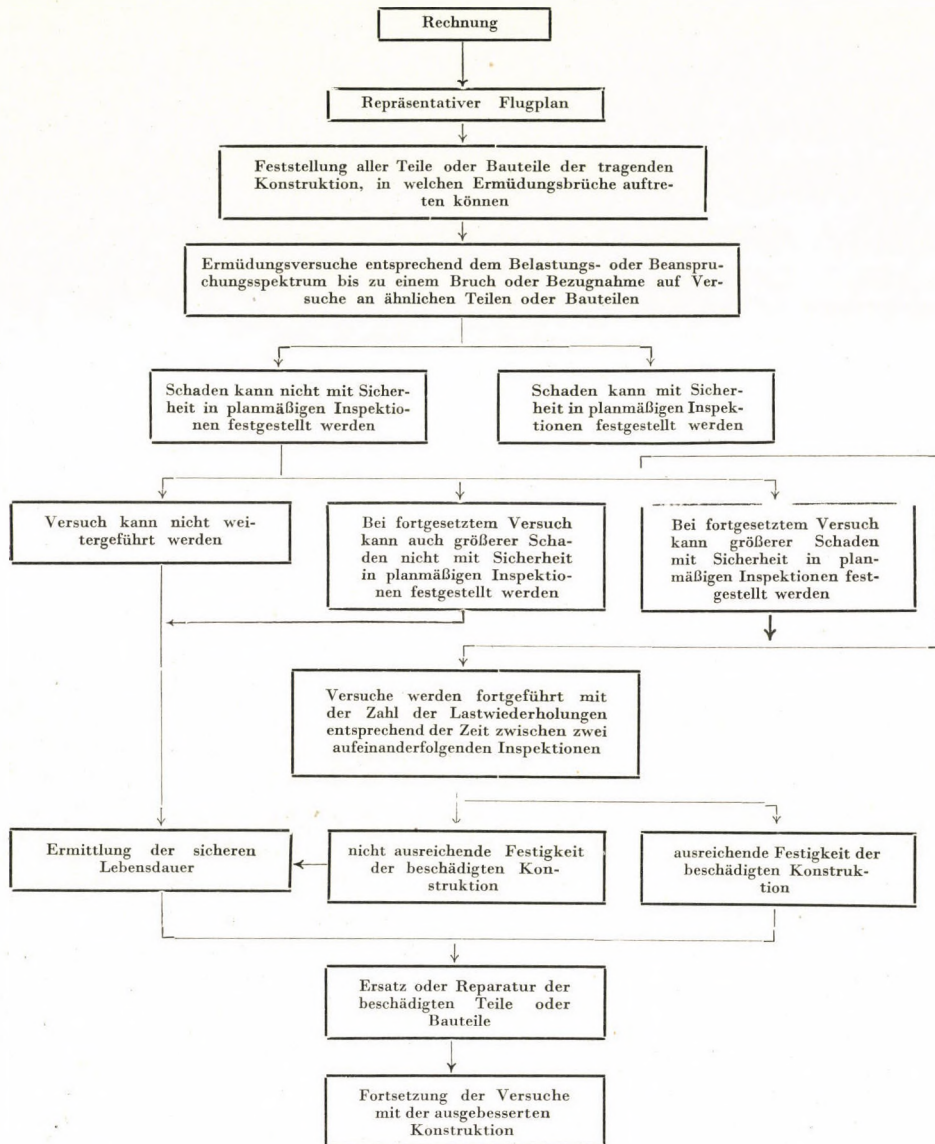


Abb. 3

Der niederländische Vorschlag gibt einen Weg an, wie man die sichere Ermüdungslebensdauer und die ausreichende Festigkeit von fail-safe-Konstruktionen praktisch ermitteln kann, wenn der »repräsentative« Flugplan festliegt. Es besteht aber immer noch die Schwierigkeit, daß die nach dem repräsentativen Flugplan ermittelten Belastungen nicht mit den wirklich auftretenden übereinstimmen werden.

3.2 Vorschlag von W. Braun

Der Vorschlag von BRAUN geht dahin, daß auf alle Fälle und für alle Teile der Nachweis der ermüdungssicheren Konstruktion (safe-life) gefordert wird, allerdings nur mit einem kleinen Sicherheitsfaktor, der einer etwas erhöhten Ermüdungsbruchwahrscheinlichkeit entspricht, als sonst verlangt wird. Gleichzeitig soll aber der safe-life-Nachweis für die Ersatzkonstruktion mit den wirklichen, nicht abgeminderten Lasten verlangt werden, allerdings nur für die Zeit zwischen zwei Inspektionen. Anschließend an diesen Ermüdungsnachweis soll die Restkonstruktion noch die abgeminderten Lasten entsprechend den amerikanischen Festigkeitsvorschriften statisch tragen. Für die Teile, für die keine fail-safe-Konstruktion möglich ist oder bei denen nicht die Sicherheit vorhanden ist, daß ein Bruch bei der nächsten Inspektion entdeckt wird, muß der safe-life-Nachweis mit ausreichend kleiner Bruchwahrscheinlichkeit geführt werden.

Es muß weiterhin sichergestellt sein, daß alle Teile nach Ablauf ihrer Ermüdungslebensdauer ausgewechselt werden, auch wenn noch kein Anriß vorhanden ist.

Die beiden angeführten Vorschläge sind sich sehr ähnlich. Sie unterscheiden sich im wesentlichen nur dadurch, daß beim niederländischen Vorschlag ein praktischer Weg zur Erfüllung der Forderungen gewiesen wird, während beim BRAUNschen Vorschlag ausdrücklich noch verlangt wird, daß die Konstruktion auch noch im letzten Augenblick der Ermüdungslebensdauer gewisse statische Lasten mit Sicherheit tragen muß. Bei beiden Vorschlägen besteht noch die Unsicherheit, daß das rechnerische (»repräsentative«) Belastungskollektiv nicht mit dem wirklich auftretenden übereinstimmt, bzw. die Notwendigkeit, diese Unsicherheit durch entsprechende Sicherheitsfaktoren auszugleichen.

4. Schlußwort

Abschließend muß man feststellen, daß es zur Zeit noch nicht möglich ist, vollkommen befriedigende Festigkeitsvorschriften in Bezug auf die Ermüdung aufzustellen. Da aber in der ganzen Welt an diesem Problem gearbeitet wird, ist anzunehmen, daß in absehbarer Zeit die bereits bestehenden Vorschriften so weit ergänzt werden, daß sie ausreichende Sicherheit gegen katastrophale Ermüdungsbrüche gewährleisten. Man muß aber feststellen, daß trotz des Mangels ausreichender Vorschriften sowohl die bereits in Serie vorhandenen, als auch die in Entwicklung befindlichen Flugzeuge ausreichend ermüdungsfest sind.

Die Konstrukteure und Berechnungsingenieure haben bereits große Erfahrungen gesammelt. Sie verwenden Werkstoffe großer Dehnung, halten das allgemeine Spannungsniveau in ermüdungsgefährdeten Bauteilen mög-

lichst niedrig, vermeiden Stellen starker Spannungskonzentration. Eine Reihe von fail-safe-Konstruktionen hat sich bereits bewährt. Die Versuchsverfahren, -geräte und -instrumente sind ebenfalls erprobt. Trotz des Fehlens befriedigender Festigkeitsvorschriften besteht also kein Grund zu irgendwelchen Besorgnissen.

SCHRIFTTUM

1. BRAUN, W.: Zur Frage der Sicherheit der Flugzeugzelle gegenüber Ermüdungsbrüchen vom Standpunkt der Bauvorschriften. *WGL Jahrbuch* (1958), Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig
2. TEED, P. L.: Die Ermüdung von Flugzeugen. *Luftfahrttechnik* 7 (1961), VDI-Verlag, Düsseldorf
3. KOITER, W. T.: Airworthiness requirements on fatigue strength. Pilot lecture on airworthiness requirements
4. LUNDBERG, B. K. O.: The quantitative statistical approach to the aircraft fatigue problem
5. FERRARI, R. M., MILLIGAN, L. S., RICE, M. R., WESTON, R. M.: Some considerations relating to the safety of "fail-safe" wing structures.
3., 4. und 5. aus: PLANTEMA F. J., SCHIJRE, J., Full scale fatigue testing of aircraft structures, 1961, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris.
6. GASSNER, E.: Zur Frage der Ermüdungsfestigkeit im Flugzeugbau. *WGL Jahrbuch* (1954), Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

TAKING INTO ACCOUNT THE FATIGUE IN STRENGTH RULES FOR AIRCRAFT

R. MÜLLER

SUMMARY

In modern strength regulations for aircraft, the point of view of fatigue must be considered too, because nowadays it has become necessary also to prove separately safety against fatigue failures. The paper analyses the existing regulations from this point of view, the "safe-life" method as well as the "fail-safe" method.

Finally proposals for the modification of the regulations are discussed.

CONSIDÉRATION DE LA FATIGUE DANS LES RÈGLEMENTS CONCERNANT LA RÉSISTANCE DES AVIONS

R. MÜLLER

RÉSUMÉ

Les règlements concernant résistance des avions doivent aussi tenir compte de la fatigue, la vérification de la sécurité contre les ruptures par fatigue étant elle-même reconnue comme nécessaire. L'étude analyse sous ce rapport les normes existantes, du double point de vue des méthodes «safe-life» et «fail-safe».

L'auteur présente enfin ses propositions relatives à la modification des règlements existants.

УЧЕТ УСТАЛОСТИ В ТЕХНИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ
МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ САМОЛЕТОВ

P. МЮЛЛЕР

РЕЗЮМЕ

В современных технических условиях механической прочности самолетов следует учитывать фактор усталости, так как в настоящее время стало необходимым особое подтверждение надежности в отношении усталостных изломов. Настоящая работа в этом плане анализирует имеющиеся технические условия как с точки зрения «safe-life», так и с точки зрения «fail-safe».

Наконец даются предложения по изменению технических условий.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ (МЕТОД ШВАРЦА) КАК ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК С ВЫРЕЗАМИ ТИПА ВАГОННЫХ КУЗОВОВ*

Е. Н. НИКОЛЬСКИЙ

ПРОФЕССОР, ДОКТОР ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ИНСТИТУТ ТРАНСПОРТНОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ, БРЯНСК

В пассажирских вагонах уже сейчас наиболее частыми и все еще распространяющимися типами кузовов являются конструкции типа замкнутой оболочки. Расчеты в настоящее время ведутся методом элементарной теории сопротивления материалов, при этом только на отдельных участках вагонного кузова получается верное решение.

Настоящая работа дает более точный общий метод расчета вагонных кузовов, основанный на принципах теории упругости. Применяется алгоритм Шварца в виде чередующихся основных систем для вагонных кузовов типа замкнутой оболочки с вырезами. Обобщается метод сил. Хотя этот метод для практического применения недостаточно прост, но пригоден для оценки существующих и обоснования новых методов, в частности тогда, когда работа по расчетам может быть сокращена за счет применения электронных счетно-вычислительных машин.

1. Введение

В настоящее время наиболее распространенным и перспективным типом конструкции кузовов пассажирских вагонов является конструкция типа замкнутой оболочки. Конструкция этого типа позволяет получить высокую прочность и жесткость кузова в нормальных и аварийных условиях при минимальном весе. Однако, несмотря на перспективность этих конструкций, их теория разработана недостаточно.

Обстоятельством, существенно осложняющим теоретическое исследование этих конструкций, является наличие большого числа оконных и дверных вырезов. Приходится иметь дело с задачей о пространственных деформациях цилиндрической замкнутой оболочки с большим числом вырезов. Как известно, эта задача в достаточно строгой постановке еще не была решена.

Практические расчеты в настоящее время ведутся на базе элементарных формул сопротивления материалов. Кузов типа оболочки с вырезами представляется в виде специальных стержневых систем.

Оценка приемлемости таких расчетных схем проводилась в конечном счете только экспериментально. Рядом исследований было обнаружено, что

* Доклад на Конференции по вопросам современного расчета, проведенной Академией наук Венгрии в г. Будапеште с 24 по 28 октября 1961 года.

элементарная теория стержневых систем позволяет получить верную картину напряженного состояния только на отдельных участках конструкции. В преобладающей части конструкции элементарная теория не дает верной картины напряженного состояния.

Для получения более точных результатов необходимо отойти от представления кузова в виде стержневых систем, а рассматривать его как оболочки с вырезами. В настоящем докладе излагается общий метод расчета кузова типа замкнутой оболочки с вырезами строгий, с точки зрения теории упругости. Этот метод в силу своей сложности не всегда может быть использован непосредственно для практических расчетов, но он позволяет теоретически обосновать построение новых практических методов и дать оценку существующим методом.

Некоторые перспективы практического применения этого метода открываются в связи с применением электронных счетных машин.

2. Обобщенный метод сил

а) Метод Шварца и его трактовка как метода чередования основных систем

Сложное тело в виде цилиндрической оболочки с вырезами может быть разделено разрезами на несколько более простых тел, для каждого из которых в отдельности можно предположить известными точные методы расчета напряжений и деформаций. Система таких отдельных тел может быть названа основной.

Так же как и при расчете статически неопределимых стержневых систем по методу сил, оказывается достаточным знать любые комбинации сил, статически эквивалентные действительным внутренним усилиям по разрезам основной системы, чтобы определить напряженное состояние заданной системы. В стержневых системах в этом случае непосредственно могут быть построены эпюры изгибающих моментов, нормальных и перерезывающих сил, и затем по элементарным формулам найдены напряжения. Для любых не стержневых систем отыскание напряженного состояния в этом случае может быть произведено с помощью известного в математике метода решения предельных задач, а именно метода Шварца [1]. Этот метод в нашем случае удобно трактовать как метод чередования основных систем [2]. Такая трактовка дает для инженера более наглядное представление о методе и позволяет также сделать некоторые обобщения.

Метод чередования основных систем является методом последовательных приближений и заключается в поочередном расчете напряжений в двух или нескольких основных системах. В первом приближении по разрезам первой основной системы прикладываются любые силы, статически

эквивалентные внутренним усилиям и вычисляются напряжения по таким сечениям, по которым будут проведены разрезы для образования второй основной системы. Найденные напряжения рассматриваются как усилия по разрезам во второй основной системе. От этих усилий во второй основной



Рис. 1

системе вычисляются напряжения по сечениям, которые совпадают с положением разрезов, образующих первую основную систему. Эти последние напряжения являются вторым приближением для усилий по разрезам в

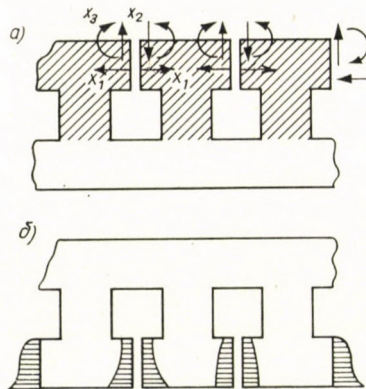


Рис. 2

первой основной системе. Далее процесс однообразно повторяется. На каждом шагу расчет напряжений ведется от всех сил, действующих на систему, в том числе и от внешних сил.

В качестве первого приближения для усилий по разрезам могут быть приняты стандартные для стержневых систем группы сосредоточенных сил X_i при произвольном выборе точек их приложения.

Если разрезы в двух последовательных основных системах не совпадают, то указанный процесс вычислений сходится и в пределе дает точное решение для заданного тела. Доказательство излагается в 4-м разделе доклада. Примеры основных систем для кузова пассажирского вагона показаны на рис. 1. и рис. 2.

б) *Обобщенный метод сил* [2; 3]

Если равнодействующие X_i внутренних усилий статически неопределимы, как это имеет место в оболочках с вырезами, то отыскание их может быть произведено следующим путем. На основании принципа сложения действия сил действительные напряжения ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \dots$) в каждой точке основной системы от всей совокупности сил представим как сумму произведений напряжений ($\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \sigma_{zi}, \tau_{xyi}, \dots$), вызванных силами $X_i = 1$, на неизвестные величины X_i плюс напряжения от внешних сил:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^n \sigma_{xi} X_i + \sigma_{xp}, \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^n \sigma_{yi} X_i + \sigma_{yp}. \quad (2.1)$$

Элементы напряженного состояния: $\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \sigma_{zi}, \tau_{xyi}, \dots$ (от $X_i = 1$) и σ_{xp} (от внешних сил) являются предельными функциями, которые определяются по методу чередования основных систем. Подставляя (2.1) в общее выражение для энергии деформаций U изотропного упругого тела и приравнявая нулю производные от U по X_i (условие минимума энергии деформаций), получим систему уравнений, линейных относительно X_i :

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{ki} X_i + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kp} = 0 \quad (2.2)$$

$(k = 1, 2, 3, \dots n),$

которая приводится к тому же общему виду, что и в методе сил для стержневых систем. Коэффициенты в этих уравнениях определяются выражениями:

$$\begin{aligned} E\delta_{ki} = \iiint_V & [\sigma_{xi} \sigma_{xk} + \sigma_{yi} \sigma_{yk} + \sigma_{zi} \sigma_{zk} - \mu (\sigma_{xi} \sigma_{yk} + \\ & + \sigma_{yi} \sigma_{xk} + \sigma_{xi} \sigma_{zk} + \sigma_{zi} \sigma_{xk} + \sigma_{yi} \sigma_{zk} + \sigma_{zi} \sigma_{yk}) + \\ & + 2(1 + \mu) (\tau_{xyi} \tau_{xyk} + \tau_{xzi} \tau_{xzk} + \\ & + \tau_{yzi} \tau_{yzk})] dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этих формулах интегрирование распространяется на весь объем тела. Из формул (2.3) как частный случай вытекают известные общие формулы перемещений для стержневых систем.

Коэффициенты системы (2.3) могут быть представлены также в следующей более удобной форме:

$$\delta_{ki} = \iiint_F (\sigma_{yk} v_i + \tau_{xyk} u_i^p + \tau_{yzk} w_i) d_x d_z. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) выведена применительно к случаю, когда плоскости разрезов в основных системах перпендикулярны оси y .

Здесь v_i, u_i, w_i — перемещения точек поверхностей разрезов в основной системе в направлении осей x, y, z от силы $X_i = 1$; $\sigma_{yk}, \tau_{xyk}, \tau_{yzk}$ — элементы напряженного состояния (от сил $X_k = 1$) в точках поверхностей разрезов в основной системе (внутренние усилия по поверхностям разрезов).

Все величины $u_i, \dots, \sigma_{yk}, \dots$ являются предельными функциями, определяемыми методом чередования основных систем.

Интегрирование распространяется на все площади разрезов в основной системе.

При подстановке в правые части (2.1) точных значений X_i формулы (2.1) определяют точное напряженное состояние, удовлетворяющее как условиям равновесия, так и условиям совместности. Уравнения (2.2) следует рассматривать как вариационные, определяющие истинные значения параметров X_i напряженного состояния на основе начала наименьшей работы. Особенность данной вариационной задачи состоит в том, что искомые подинтегральные функции заранее определены на основе метода чередования основных систем с точностью до постоянных множителей X_i .

Построенный метод является общим методом теории упругости и может быть назван обобщенным методом сил. Метод сил для стержневых систем вытекает из него как частный случай.

3. Элементы основных систем для кузова вагона и методы расчета

Для кузова пассажирского вагона одну из основных систем можно образовать путем проведения разрезов горизонтальными плоскостями, проходящими по верхним и нижним кромкам оконных проемов.

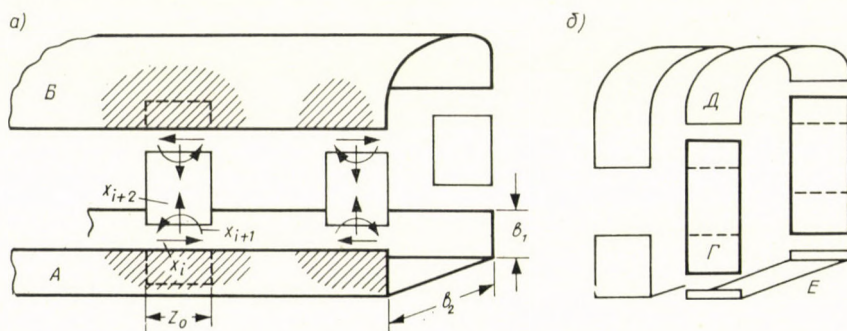


Рис. 3

Вторую основную систему можно получить, разрезая кузов вертикальными плоскостями по боковым кромкам оконных проемов и горизонтальной плоскостью по простенкам (рис. 3). В этом случае для получения принци-

пимально завершенной формы строгого решения задачи о расчете кузова как оболочки с вырезами на основе обобщенного метода сил достаточно иметь решения для открытых цилиндрических подкрепленных оболочек при произвольных граничных условиях на краях.

Анализ современных теорий подкрепленных цилиндрических оболочек показал, что для нижнего пояса кузова, расчетная схема которого может быть представлена как совокупность плоских прямоугольных пластинок и стержней, оказывается подходящим метод *П. Ф. Папковича*, основанный на использовании решения Файлона для прямоугольной пластинки [3].

Что касается верхнего или нижнего поясов кузова с произвольным очертанием контура поперечного сечения, то следует сказать, что для анализа напряженного состояния срединной поверхности таких оболочек до настоящего времени отсутствовали подходящие методы.

Современные технические теории цилиндрических подкрепленных оболочек не дают этой возможности, так как они среди других допущений содержат допущение о равенстве нулю поперечных деформаций удлинения. Теории подкрепленных цилиндрических оболочек с произвольным контуром поперечного сечения, свободные от этого допущения (теории *В. З. Власова* и *В. В. Новожилова*), приводят к дифференциальным уравнениям, решение которых в общем виде встречает математические трудности.

Автором этого доклада разработана специальная теория оболочек с неизгибаемым контуром поперечного сечения (см. Известия АН СССР ОТН № 6, 1956 г.), которая позволяет в известной мере практически восполнить этот пробел. Применение теории оболочек с неизгибаемым контуром может быть обосновано с помощью метода Шварца (об этом излагается в 5-ом разделе доклада).

4. Доказательство сходимости последовательных приближений метода Шварца в задаче теории упругости о напряжениях

Для того, чтобы считать обобщенный метод сил обоснованным, необходимо доказать сходимость алгоритма Шварца в задаче о напряжениях. Это доказательство до настоящего времени еще не было дано.

Сходимость алгоритма Шварца в задаче теории упругости о перемещениях доказана *С. Л. Соболевым* [4].

Рассмотрим применение алгоритма Шварца к задаче о напряжениях в области D_{12} , представляющей собой сумму областей D_1 и D_2 , частично налегающих друг на друга (рис. 4). Для доказательства существования предела функции, получаемой с помощью алгоритма Шварца, воспользуемся приемом *С. Л. Соболева* [4]. Совпадение этого предела с решением уравнений теории упругости для области D_{12} покажем на основе известной теоремы

единственности. В задаче о напряжениях произвольность выбора первоначальной векторной функции усилий P_0 на поверхностях области D_2 внутри области D_1 ограничивается условием статической эквивалентности начальных усилий P_0 действительным внутренним усилиям на тех же поверхностях внутри области D_{12} . Для случаев многосвязных областей D_{12} это условие может быть выполнено на основе применения принципа наименьшей работы.

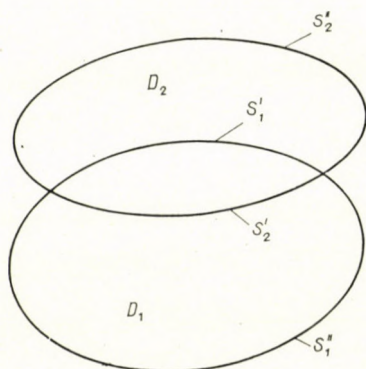


Рис. 4

Как и в [4], примем обозначения: S_1 — граница D_1 ; S_2 — граница D_2 ; S_1' — часть S_1 внутри D_2 ; S_1'' — часть S_1 вне D_2 ; S_2' — часть S_2 внутри D_1 ; S_2'' — часть S_2 вне D_1 ; D_{12} — область, ограниченная поверхностями S_1' и S_2' ; D_1' — часть D_1 вне D_2 вне D_2 ; D_2' — часть D_2 вне D_1 .

Будем искать решение системы уравнений теории упругости в напряжениях, куда входят 3 уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{4.1}$$

.....

и 6 уравнений, выражающих условия совместности:

$$\Delta \Delta \sigma_x = 0, \Delta \Delta \sigma_y = 0, \dots \tag{4.2}$$

для односвязной области D_{12} при граничных условиях

$$p_\nu|_{S_1'} = q_1, \quad p_\nu|_{S_2'} = q_2, \tag{4.3}$$

p_ν — вектор напряжения по площадкам поверхности; q_1, q_2 — заданные силы на поверхности.

Поставленная задача эквивалентна задаче вариационного исчисления об отыскании минимума интеграла, выражающего энергию деформаций:

$$E_{D_{12}}(\sigma) = \frac{1}{6\mu} \int_{D_{12}} \left\{ \frac{\mu}{3(\lambda + 2/3\mu)} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2 + \frac{1}{2} [(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2] \right\} dx dy dz, \quad (4.4)$$

при тех же граничных условиях (4.3). Через σ без индексов внизу мы здесь и в дальнейшем обозначаем тензор напряжений.

Решая последовательно задачу отдельно для областей D_2 и D_1 , получим последовательность функций $\sigma_x^{(2k)}, \dots$, удовлетворяющих уравнениям (4.1) и (4.2) в D_2 и D_1' порознь, и функций $\sigma_x^{(2k+1)}, \dots$, удовлетворяющих уравнениям (1) и (2) в D_1 и D_2' также порознь. Согласно идее алгоритма Шварца эти последовательности функций строятся при следующих граничных условиях:

$$p_v^{(2k)}|_{S_1''} = q_1; p_v^{(2k)}|_{S_2''} = q_2; p_v^{(2k)}|_{S_2'} = \begin{cases} p_0, k = 0, \\ p_v^{(2k-1)}|_{S_2'}, k > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$p_v^{(2k+1)}|_{S_1''} = p_1; p_v^{(2k+1)}|_{S_2''} = q_2; p_v^{(2k+1)}|_{S_1'} = p_v^{(2k)}|_{S_1'}, \quad (4.6)$$

где $p_v^{(2k)}, p_v^{(2k+1)}$ — векторы напряжений на соответствующих поверхностях;

$k = 0, 1, 2, \dots$ — номер решения для областей D_2 и D_1' ;

p_0 — произвольная начальная векторная функция, которая должна удовлетворить условиям равновесия:

$$\int_{S_2'} p_0 ds + \int_{S_2''} q_2 ds = 0, \quad (4.7)$$

$$\int_{S_1'} [p_0, r] ds + \int_{S_2''} [q_2, r] ds = 0.$$

Функции $\sigma_x^{(2k)}, \dots, \sigma_x^{(2k+1)}, \dots$, построенные по условиям (4.5), (4.6), непрерывны в D_{12} и, очевидно, удовлетворяют уравнениям равновесия (4.1) во всей области D_{12} . Однако эти функции, вообще, не удовлетворяют уравнениям (4.2) в области D_{12} . Последнее означает, что перемещения, отвечающие функциям $\sigma_x^{(2k)}, \dots$, будут иметь разрыв непрерывности на S_2' , а перемещения, отвечающие $\sigma_x^{(2k+1)}, \dots$, получат разрыв непрерывности на S_1' .

Из условий (4.5), (4.6) следует, что $\sigma_x^{(2k)} = \sigma_x^{(2k+1)}, \dots$ в D_2' , причем, в D_1 функции $\sigma_x^{(2k)}, \dots$ не удовлетворяют уравнениям (4.2), а $\sigma_x^{(2k+1)}, \dots$ удовлетворяют. Отсюда вытекают неравенства

$$E_{D_1}(\sigma^{(2k)}) \geq E_{D_1}(\sigma^{(2k+1)}); E_{D_{12}}(\sigma^{(2k)}) \geq E_{D_{12}}(\sigma^{(2k+1)}). \quad (4.8)$$

Таким же путем получаем

$$E_{D_{12}}(\sigma^{(2k-1)}) \geq E_{D_{12}}(\sigma^{(2k)}). \quad (4.9)$$

Замечая, что последовательность убывающих положительных чисел $E_{D_{12}}(\sigma^{(n)})$ является сходящейся, нетрудно показать тем же путем, что и в [4], что энергия деформаций, соответствующая разности $\sigma_x^{(2k)} - \sigma_x^{(2k+1)}, \dots$ т. е. $E_{D_{12}}(\sigma^{(2k)} - \sigma_x^{(2k+1)})$, а следовательно и сами разности $\sigma_x^{(2k)} - \sigma_x^{(2k+1)}, \dots$ стремятся к нулю во всей области D_{12} при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, оказывается, что функции $\sigma^{(2k)}$ и $\sigma^{(2k-1)}$ имеют один и тот же предел σ_c :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{(2k)} = \sigma'_c; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{(2k-1)} = \sigma''_c. \quad (4.10)$$

$$\sigma'_c = \sigma''_c = \sigma_c.$$

Покажем, что этот предел является единственным и совпадает с решением системы уравнений (4.1) и (4.2) для области D_{12} при граничных условиях (4.3).

Рассмотрим все множество функций, которые, удовлетворяя уравнениям равновесия (4.1) во всей области D_{12} при граничных условиях (4.3) на S'_1 и S''_2 , удовлетворяют уравнениям (4.2) только порознь в областях D_1 и D'_2 или D_2 и D'_1 и соответствуют всем мыслимым значениям функций на S'_1 , и, соответственно, S'_2 .

Согласно теореме единственности, это множество состоит из подмножества функций, не удовлетворяющих уравнениям (4.2) для всей области D_{12} и одной функции, удовлетворяющей уравнениям (4.2) в области D_{12} при условиях (4.3).

Предположим, что предельные функции σ'_c и σ''_c находятся среди первого подмножества. Тогда перемещения, соответствующие σ'_c и σ''_c , будут иметь разрыв непрерывности в области D_{12} , причем, σ'_c даст разрыв на S'_2 , а σ''_c — на S'_1 . Несовпадение мест разрыва означает, что

$$\sigma'_c \neq \sigma''_c. \quad (4.11)$$

Этот результат противоречит условию [10] и доказывает, что предельных функций $\sigma'_c = \sigma''_c = \sigma_c$ не может быть среди подмножеств функций, не удовлетворяющих уравнениям (4.2) в области D_{12} . Отсюда мы приходим к выводу, что предельная функция σ_c совпадает с решением уравнений (4.1) и (4.2) при условиях (4.3), т. е. сходимость алгоритма доказана [5].

5. Метод Шварца в задаче теории упругости о перемещениях и применение его к расчету кузова вагона

Метод Шварца в задаче теории упругости о перемещениях удобно трактовать как метод чередования основных систем, образованных введением дополнительных связей. Такие основные системы являются обобщен-

нием понятия основной системы метода деформаций (перемещений) в теории стержневых систем.

Академиком С. Л. Соболевым доказана сходимость последовательных приближений в задаче о перемещениях для того случая, когда на поверхности тела заданы перемещения. Автором доклада на основе приемов

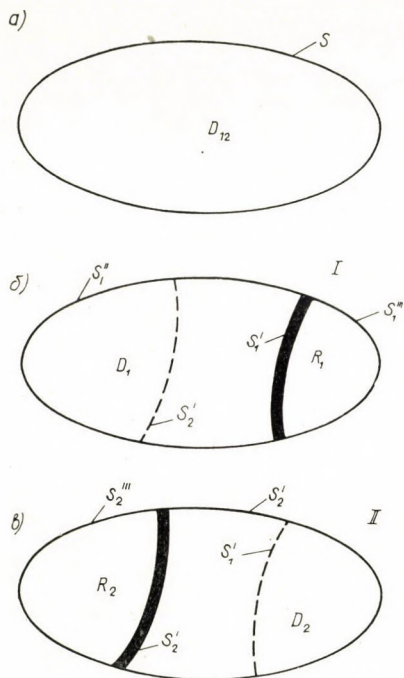


Рис. 5

С. Л. Соболева доказано, что при заданных на поверхности силах метод Шварца при любых основных системах, образованных введением дополнительных связей, всегда дает сходящийся процесс.

Отыскание вектора перемещений u для заданного тела D_{12} строится по той же схеме, что и в задаче о напряжениях. Для тела D_{12} выбираются две различные основные системы, получаемые введением дополнительных связей. На фиг. 4а, б, в показаны тело D_{12} и две основные системы. Обозначения областей и поверхностей показаны на рисунках. Жирными линиями изображены абсолютно жесткие поверхности, к которым с помощью связей укреплены точки тела, лежащие на поверхностях S_1' в основной системе I и на S_2' в системе II .

При заданных на поверхности тела D_{12} силах q метод Шварца определит последовательность функций $u^{(2k)}$ и $u^{(2k+1)}$ (вектор перемещения) для заданного тела D_{12} функция $u^{(2k)}$ представляет собой $2k$ — тое приближе-

ние для искомой функции и получается из решения уравнения равновесия

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1 - 2\mu} \text{grad div } u = 0. \quad (5.1)$$

отдельно для областей D_1 и R_1 основной системы I при следующих условиях на поверхности, записанных в векторной форме.

$$\begin{aligned} f_1(u^{(2k)})|_{S_1''} = q|_{S_1''}; f_1(u^{(2k)})|_{S_1'''} = q|_{S_1'''} \\ u^{(2k)}|_{S_1} = \begin{cases} u_0 \text{ при } k = 0 \\ u^{(2k-1)}|_{S_1} \text{ при } k \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь $f_1(u)|_s$ — известная в теории упругости функция, связывающая вектор перемещения точек тела с вектором полного напряжения на площадке s , функция $u^{(2k+1)}$ дает $(2k+1)$ -ое приближение для функции u , определяемое уравнением (5.1) отдельно для областей D_2 и R_2 основной системы II при условиях

$$\begin{aligned} f_1(u^{(2k)})|_{S_2''} = q|_{S_2''}, f_1(u^{(2+1)})|_{S_2'''} = q|_{S_2'''}; \\ u^{(2k+1)}|_{S_2} = u^{(2k)}|_{S_2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Начальная функция $u^{(2k)}|_{k=0} = u^{(0)}$ на поверхности S_1' может быть выбрана произвольно. Как уже отмечалось, имеется доказательство того, что построенная последовательность функций всегда сходится к точному решению задачи, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(2k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(2k+1)} = u.$$

На основе изложенного метода оказывается возможным дать теоретическое обоснование практическим расчетам кузова вагона путем разделения общей сложной задачи о пространственных деформациях кузова на две более простые задачи, а именно: задачу о работе кузова с неизгибаемым контуром и задачу о работе кузова с неизгибаемыми угловыми стрингерами.

На рис. 6 показаны в одной проекции две удобные основные системы для кузова. В направлении, перпендикулярном к чертежу, связи нужно считать идущими непрерывно по всей длине схемы кузова. В основной системе II мы имеем бесконечное множество абсолютно жестких колец K , соединенных с кузовом связями, нормальными к поверхности обшивки. Эти кольца распределены непрерывно по длине кузова.

Таким образом, в основной системе II рассматривается кузов с неизгибаемым контуром. В основной системе I мы имеем кузов

с неизгибаемыми в вертикальном направлении нижними обвязочными элементами (угловыми стрингерами).

Расчет кузова по методу чередования основных систем в этом случае может быть проведен в следующем порядке: 1. Кузов рассматривается как цилиндрическая оболочка с несмещаемыми в вертикальном направлении ребрами (A) под действием внешних сил (основная система I). Это означает, что в исходном (нулевом) приближении мы принимаем перемещения по линии A равными нулю. При этом определяются перемещения поверхности оболочки по нормали к поверхности, а также напряженное состояние основной системы. 2. Рассчитывается кузов как цилиндрическая оболочка с неиз-

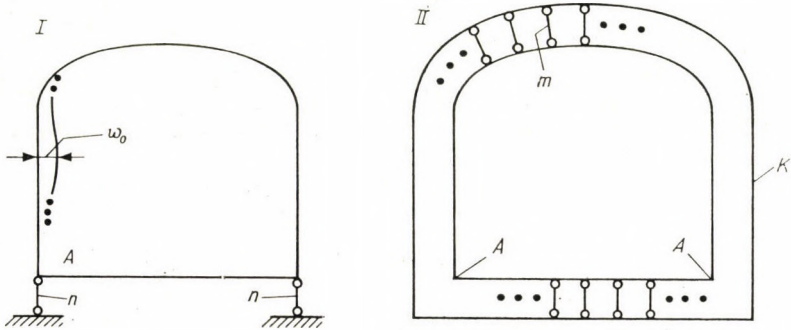


Рис. 6

гибаемым контуром поперечного сечения (основная система II) под действием внешних сил и деформаций колец K , найденных в основной системе I. При этом определяются перемещения точек линий A в вертикальном направлении и напряженное состояние основной системы. 3. Снова рассматривается основная система I, под действием внешних сил, но теперь свяжем на линиях A задаются перемещения, найденные в основной системе II за предыдущий шаг расчета.

Далее процесс чередования расчетов в основных системах I и II продолжается однообразно. Согласно доказанному, этот процесс всегда является сходящимся. Числовые расчеты показывают, что для вагонных кузовов типа замкнутой оболочки уже первое приближение дает удовлетворительную точность [2].

Рассмотренные здесь типы основных систем позволяют теоретически обосновать приближенные практические методы расчета оболочек и тонкостенных стержней. В частности, методы расчета цилиндрических оболочек и тонкостенных стержней с недеформируемым контуром могут рассматриваться, как часть закономерного процесса последовательных приближений (метода чередования основных систем или иначе алгоритма Шварца), дающего в пределе точное решение. Оболочка с неде-

формируемым контуром в этом процессе является основной системой. Чтобы получить основную систему с недеформируемым контуром, достаточно в основной системе II с неизгибаемым контуром, изображенной на рис. 5, между поверхностью оболочки и абсолютно жесткими кольцами K ввести кроме нормальных еще касательные связи.

Точность, которую дает теория оболочек с недеформируемым контуром, зависит от быстроты сходимости процесса. Последняя в различных случаях будет различной и требует индивидуального анализа. Важно то, что на основе изложенной точки зрения в принципе всегда оказывается возможным провести уточнение результатов, полученных на основе теорий оболочек с недеформируемым или неизгибаемым контуром. Это уточнение, приводящее в пределе к точному решению, может быть получено с помощью метода чередования основных систем. Что касается практического осуществления таких расчетов, то для этого требуется иметь методы, позволяющие рассчитывать основные системы от внешних сил и от заданного смещения связей. Разработку практических методов расчета основных систем можно рассматривать как самостоятельные частные задачи.

Например, расчет основной системы II для кузова вагона (рис. 6) требует решения самостоятельной задачи о напряжениях и деформациях цилиндрических оболочек с вырезами при неизгибаемом контуре поперечного сечения. Эта задача, в свою очередь, может быть решена на базе метода чередования основных систем и обобщенного метода сил, которые были изложены в главах I и II.

6. Некоторые выводы о построении практических методов расчета кузова типа замкнутой оболочки

Обобщенный метод сил и метод чередования основных систем вместе с теориями открытых подкрепленных цилиндрических оболочек принципиально решают вопрос о точном расчете кузова типа замкнутой оболочки с вырезами. Однако, при обычных вычислительных средствах этот комплекс методов приводит к сложным расчетам. В связи с этим в настоящее время особо большое практическое значение имеет задача построения упрощенных методов, приемлемых в условиях заводской практики.

При построении приближенных методов задача может быть поставлена следующим образом. Ввиду того, что в точном методе (обобщенном методе сил) наиболее затруднительным является вычисление коэффициентов линейных уравнений (2.2) целесообразно отыскать пути приближенного вычисления коэффициентов. Иными словами, задача будет заключаться в отыскании пути приближенного вычисления интегральных усилий X_i . Что касается расчета напряжений после определения интегральных усилий X_i , то на этом этапе

может быть сохранен точный метод. Однако, и на этом, втором, этапе оказываются возможными некоторые упрощения.

Теоретический анализ и проверка экспериментом позволили в частности сделать следующие выводы:

1. Статически неопределимые силы X_i как равнодействующие внутренних усилий могут быть найдены с приемлемой точностью для основных участков кузова при основных эксплуатационных нагрузках путем представления кузова в виде стержневой системы, т. е. на основе использования элементарных формул сопротивления материалов. Отсюда как следствие вытекает, что по основным участкам кузова на основе элементарной теории стержней могут быть получены с удовлетворительной точностью эпюры изгибающих моментов M , нормальных сил N и перерезывающих сил Q .

2. Напряжения в кузове, как правило, не могут быть определены с помощью одних элементарных формул на основании эпюр M , N , Q несмотря на то, что найденные величины M , N , Q близки к действительным. Расчет напряжений по элементарным формулам дает удовлетворительные результаты только в частных случаях.

Используя изложенные результаты, мы можем практический расчет кузова типа замкнутой оболочки с вырезами разделить на два этапа: Первый этап — определение статически неопределимых сил (равнодействующих внутренних усилий) на основе представления кузова в виде стержневой системы. Здесь определяются лишние неизвестные силы X_i , например, по методу сил, и строятся эпюры M , N , Q ; Второй этап — расчет напряжений. На этом этапе возможности использовать элементарные формулы более ограничены. В случаях неприемлемости последних должны быть применены другие специальные методы расчета напряжений [3; 6; 7].

Возможность получения на основе элементарной теории стержней удовлетворительной точности расчета равнодействующих внутренних сил X_i , несмотря на неприемлемость элементарной теории стержней для отыскания законов распределения напряжений, находит следующее объяснение.

Для обеспечения приемлемого приближенного значения X_i необходимо получить удовлетворительные приближенные величины коэффициентов δ_{ik} , Δ_{ip} , которые являются перемещениями (обобщенными). Если обратить внимание на то, что погрешность, которую дает элементарная теория при определении перемещений, значительно меньше, чем погрешность, которую она дает при расчете напряжений (это подтверждается теоретическими расчетами и экспериментами), то становится понятной возможность получения в отдельных случаях удовлетворительной точности расчета коэффициентов δ_{ik} , Δ_{ip} и, следовательно, сил X_i на основе элементарной теории. Для обычных конструкций кузовов пассажирских вагонов при основных нагрузках это как раз имеет место. Точность может оказаться недостаточной на концевых участках кузова при расчете на продольные нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович, Л. В.—Крылов, В. И.: Приближенные методы высшего анализа. Изд. третье, Ленинград—Москва, 1949, стр. 637—695.
2. Никольский, Е. Н.: К вопросу о методах исследования напряженного состояния кузова пассажирского вагона типа замкнутой оболочки с вырезами. Диссертация, 1955.
3. Никольский, Е. Н.: Анализ напряженного состояния нижнего пояса кузова пассажирского вагона типа замкнутой оболочки на основе использования метода П. Ф. Попковича. Труды Брянского института транспортного машиностроения, выпуск XVII, 1957, стр. 13—31.
4. Соболев, С. Л.: Алгоритм Шварца в теории упругости. ДАН СССР, 4 (13), № 6, 235 (1936) г.
5. Никольский, Е. Н.: Алгоритм Шварца в задаче теории упругости о напряжениях. ДАН СССР, 1960, том 135, № 3, стр. 549—552.
6. Никольский, Е. Н.: Деформации и напряжения в цилиндрических оболочках и тонкостенных стержнях с неизгибаемым контуром поперечного сечения. Известия АН СССР, ОТН, № 6, июнь, 1956.
7. Вершинский, С. В.: Е. Н. Никольский и др. Расчет вагонов на прочность. Трансжелдориздат, Москва, 1960.

DIE METHODE DER STUFENWEISEN ANNÄHERUNG
(SCHWARZSCHE METHODE) ALS THEORETISCHE
GRUNDLAGE DER DIMENSIONIERUNG VON SCHALENKONSTRUKTIONSARTIG
GESTALTETEN EISENBAHN-WAGENKÄSTEN

E. N. NIKOLSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Die für die Wagenkästen der Eisenbahn-Personenwagen heutzutage am häufigsten verwendete Konstruktion, deren Anwendung sich immer mehr verbreitet, ist die Schalenkonstruktion mit geschlossenem Querschnitt. In der Praxis wird ihre Dimensionierung derzeit mit Hilfe der Methoden der elementaren Festigkeitslehre durchgeführt. Dieses Verfahren ist wegen der zahlreichen Auslösungen der Fenster- und Türöffnungen ziemlich kompliziert und liefert den wahren Spannungszustand nur für einzelne Stellen des Wagenkastens.

Im vorliegenden Aufsatz wird ein zur Dimensionierung der Eisenbahn-Wagenkästen brauchbares, höchst genaues, allgemeines, auf den Grundlagen der Elastizitätslehre beruhendes Verfahren vorgeführt. Der Schwarz'sche Algorithmus wird für den Wagenkasten als für eine durch Auswechslungen unterbrochene, geschlossene Schalenkonstruktion in der Form von wiederholt gewechselten Grundsystemen angewendet, was mit der Verallgemeinerung der Kräftelehre gleichbedeutend ist. Obwohl das geschilderte Verfahren für den Zweck der praktischen Anwendung nicht genug einfach ist, so ist es doch zur Auswertung der bisherigen Methoden, wie auch vom Standpunkte der Entwicklung neuer Methoden aus betrachtet, sehr entsprechend. Dies gilt besonders dann, wenn die Rechenarbeit durch die Einführung elektronischer Rechenmaschinen verringert wird.

THE METHOD OF GRADUAL APPROXIMATION
(SCHWARZ'S METHOD) AS THEORETICAL BASIS FOR DIMENSIONING CLOSED
FRAME-FORMED RAILWAY CARRIAGE BODIES

E. N. NIKOLSKY

SUMMARY

The structure of passenger-carriage bodies, mostly used nowadays and ever spreading is that of closed shell-like frames. The dimensioning of carriage bodies is usually performed by using methods of the elementary Theory of Strength of Materials assuming these to be girders. Due to the many window and door openings, the aforementioned dimensioning method

is fairly complicated, and gives the actual stress state only for certain cross sections of the carriage body.

In his present paper author introduces a highly precise general method for the dimensioning of carriage bodies, based on the principles of the Elasticity Theory. Author applies the algorithm introduced by SCHWARZ to the carriage body as if it were a closed frame structure, in the form of continually exchanged primary systems, thus generalizing the Force Method. Although the presented method is, general, not plain enough for practical application, yet it is fairly appropriate for the evaluation of methods used so far, and might also serve as basis for developing new methods. This is particularly true when minimalizing the computation work by using electronic computers.

LA MÉTHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES (MÉTHODE DE SCHWARZ)
COMME BASE THÉORIQUE DU DIMENSIONNEMENT DES CAISSES DE
VOITURES DE CHEMIN DE FER EN COQUE DISCONTINUE

E. N. NIKOLSKY

RÉSUMÉ

Les caisses de voitures de chemin de fer construites en coque à section fermée sont déjà les plus souvent utilisées et leur usage continue à se répandre toujours davantage. Leur dimensionnement se fait actuellement par les méthodes de la résistance des matériaux, la caisse étant considérée comme un système de poutres. Les nombreuses portes et fenêtres rendent assez compliqués les calculs, qui ne donnent l'état de contraintes correct que pour certains endroits de la caisse.

L'étude présente une méthode générale très exacte basée sur les principes de la théorie de l'élasticité. Sous forme de poutres principales interchangeables, l'algorithme de SCHWARZ est appliqué à la caisse, considérée comme une coque fermée discontinue, la méthode des forces étant généralisée de cette sorte. Bien qu'en général, cette méthode ne soit pas assez simple pour des applications pratiques, elle convient fort bien pour l'évaluation des méthodes usuelles, et peut servir de base aux méthodes nouvelles, surtout quand le travail du calcul est réduit par utilisation de calculateurs électroniques.

ZUR KRITERIENPROBLEMATIK DER WERKSTOFFSPRÖDIGKEIT*

V. LINHART

KAND. D. TECHN. WISSENSCHAFTEN

und

O. SCHOLZ

STAATLICHES FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATERIAL UND TECHNOLOGIE, PRAHA

Die Bewertung der Sprödigkeit oder Zähigkeit von Werkstoffen hat eine große Bedeutung, besonders bei der Lösung von konkreten Aufgaben in der Industrie. Bei der Wahl eines für den Bau von Druckbehältern geeigneten Werkstoffs wurde bei der Untersuchung eines sorgfältig desoxydierten, unlegierten Kohlenstoffstahls ČSN 11 368.1 gefunden, daß derselbe bei -150°C selbst in einem ungünstigen Spannungszustand noch eine entschiedene Reserve an Verformungsfähigkeit besitzt. Die Versuche zeigten jedoch auch, daß die Verformbarkeit des Materials im Bereich zwischen -150°C und -196°C erschöpft wird. Einige zehn Behälter sind schon im Betrieb, was beweist, daß sich für diesen konkreten Fall und den obigen Werkstoff die Methode der statischen Versuche mit gekerbten Probestäben und Platten gut bewährt hat.

Die Bewertung der Sprödigkeit oder Zähigkeit von Konstruktionswerkstoffen hat eine große Bedeutung, besonders bei der Lösung von konkreten Aufgaben in der Industrie. Gegenwärtig wird z. B. auch bei ausgesprochen statisch beanspruchten Druckbehältern als Kriterium die Kerbschlagzähigkeit unter der Betriebstemperatur benutzt. Bei tiefen Betriebstemperaturen von -100°C bis -200°C führt die Forderung einer höheren Kerbschlagzähigkeit praktisch zur Benutzung von austenitischen Cr—Ni-Stählen, manchmal auch vom Kupfer. Da es sich hier, was den Preis betrifft, um sehr ungünstigen Werkstoffe handelt, die außerdem noch technologisch schwer zu bearbeiten sind, verfolgten wir vor einiger Zeit das Ziel, für diese Zwecke Stähle mit niedrigem Kohlenstoffgehalt zu verwenden. In unserer Forschungsarbeit haben wir mehrere Typen von Kohlenstoff- und niedriglegierten Stählen untersucht.

Im vorliegenden kurzen Beitrag wollten wir nur über die bei einem von diesen Stählen gewonnenen Ergebnisse sprechen, und zwar über den Stahl, der zuletzt in der Praxis für diese Zwecke verwendet wurde — Tabelle 1. Es handelt sich um einen unlegierten Kohlenstoffstahl, der mit Silizium desoxydiert und mit Aluminium sorgfältig beruhigt wurde (Abb. 1). Auch bei zweckmäßiger Wärmebehandlung befindet sich bei diesem Stahl der Übergangszone der Kerbschlagzähigkeitskurve im besten Fall im Temperaturbereich von -70° bis -90°C . Also bei niedrigeren Temperaturen ist der Stahl nach diesem Krite-

* Vorgetragen auf der Konferenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften für zeitgemäße Dimensionierung in Budapest, 24—28. Oktober 1961.

rium ganz spröd. Dabei allerdings zeigt der übliche Zugversuch, daß die Plastizität des Stahles sogar bei der Temperatur von -196°C weitaus nicht erschöpft ist. In unserem Falle arbeiten die erwogenen geschweißten Druckbehälter bei niedrigen Temperaturen, und zwar zwischen -50°C und -196°C und werden ausgesprochen statisch beansprucht. An bestimmten Stellen der Konstruktion ist es aber nötig, mit den Spannungskonzentrationen — konstruktionsmäßigen

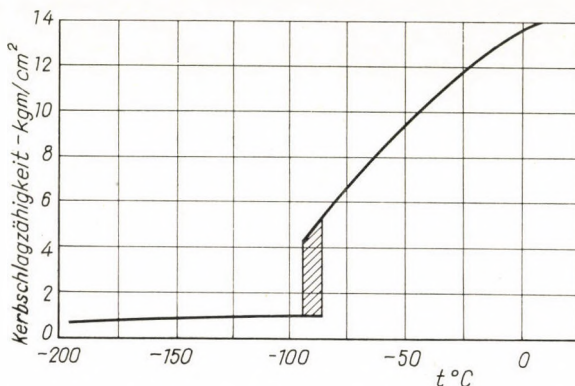


Abb. 1

oder technologischen Charakters — zu rechnen. Große Deformationsgeschwindigkeiten, zu denen es in der Kerbwurzel beim Schlagversuch kommt, kommen hier nicht in Betracht. In unserer Arbeit wurden daher Bewertungsmethoden gewählt, die die nötigen Unterlagen über die Deformationsfähigkeit gewählter Stähle unter den Bedingungen eines ungünstigen Spannungszustandes bei statischer Beanspruchung ergeben können. Dazu wurden vor allem die Ergebnisse von UZHİK und HOUDREMONT benutzt. Bestimmte Unterlagen wurden vor allem durch statische Prüfungen an Probestäben mit tiefer Kerbe und mit verschiedener Formzahl (a) gewonnen.

Tabelle 1
Stahl ČSN II 368.1

	C	Mn	Si	Cr	Ni	Cu	Al	P	S	N	H	O	
%	0,09	0,49	0,16	0,1	0,05	0,11	0,013	0,025	0,032	0,005	0,001	0,0002	
	Streckgrenze, kg/mm 2					Festigkeit, kg/mm 2		Dehnung, %		Einschnürung, %			Kerbschlagzähigkeit, kgm/cm 2
	35					40		35		65			12

Auf dem Abb. 2 sind einige von diesen mit dem obenerwähnten Kohlenstoffstahl (ČSN 11 368.1) erzielten Ergebnissen dargestellt. Die Angaben über die Form und Abmessungen von Stäben befinden sich in diesem Bild links. Als Kriterium für den mehrachsigen Spannungszustand in der Kerbe wurde wieder die sogenannte Vergleichsspannung (oder Spannungsintensität) angewandt. Beim Feststellen dieser Vergleichsspannung gehen wir von der Hypo-

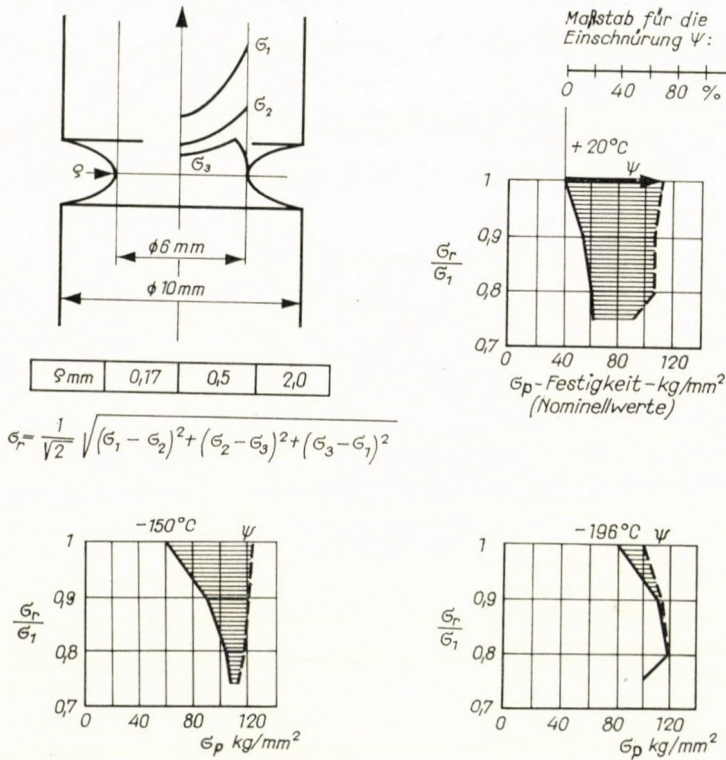


Abb. 2

these HUBER—MISES—HENCKY aus. Zur Berechnung von Werten der Vergleichsspannung wurden die Neuber-Beziehungen für die Kerben angewandt. Im Schaubild wird die festgestellte nominelle Kerbfestigkeit in Abhängigkeit von dem Verhältnis

$$\frac{\text{Vergleichsspannung} - \sigma_r}{\sigma_1}$$

angeführt. Als Charakteristik der Verformungsfähigkeitsreserve wird die Kerbeinschnürung benutzt, die der Verständlichkeit halber direkt ins Schaubild eingezeichnet wurde. Im Bild sind nur Ergebnisse bei drei Temperaturen: +20° C, -150° C, -196° C aufgetragen. Es zeigte sich, daß die Plastizitäts-

verformungsfähigkeit unter diesen Spannungsbedingungen bei der Temperatur bis -196°C praktisch erschöpft ist, und zwar auch bei verhältnismäßig weicher Kerbe ($\alpha_{\text{th}} = 1,8$)*. Die betreffende Übergangszone der Erschöpfung der Verformungsfähigkeit befindet sich also im Temperaturbereich zwischen -150°C bis -196°C . Wenn wir das Verhältnis der maximalen Kerbspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in elastischem Zustand betrachten, nähern sich am meisten der Wirklichkeit bei den Druckbehältern die Spannungsverhältnisse an der Kerbe mit $\rho = 0,17\text{ mm}$. Das Komponentenverhältnis ist hier $3 : 1 : 0,6$. Die betreffenden Gradienten der Kerbspannungskomponenten sind allerdings beim Vergleich mit den Verhältnissen der Druckbehälter wesentlich höher. Es gibt also auch andere Bedingungen für den Spannungsumbau durch plastische Deformation. Dies kann die Beziehung zwischen dem Kriterium und der Wirklichkeit besonders bei Druckbehältern mit größeren Wanddicken beeinflussen.

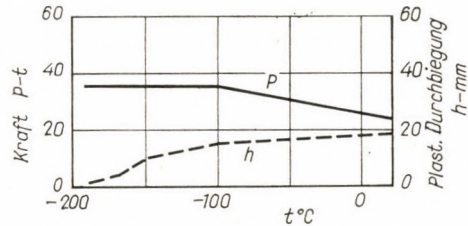
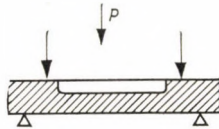


Abb. 3

Andere Unterlagen über die Veränderungen der Verformungsfähigkeit des Werkstoffes unter den Bedingungen mehrachsiger Spannung wurden mit Hilfe von Platten gewonnen. Es handelte sich um Rundplatten mit 80 mm Außen-Durchmesser, die am Umfang durch Momente belastet wurden. Mit Rücksicht auf die Dicken im abgeschwächten Teil (4—6 mm) kann man die betreffende Spannung als zweiachsige mit gleichen Normalkomponenten betrachten.

Die Ergebnisse sieht man auf Abb. 3. In diesem Diagramm sind die Abhängigkeiten der Kraft bei der Zerstörung P und plastischer Durchbiegung h von Platten von der Prüftemperatur t eingetragen. Für die Verformungsfähigkeit diente hier als Maßstab die Durchbiegung h . Es zeigte sich, daß auch unter diesen Beanspruchungsbedingungen bei Temperaturen zwischen -150°C und -196°C eine Erschöpfung der Verformungsfähigkeit des Werkstoffes eintritt. Bei der Temperatur von -196°C ist der Stahl auch unter diesen Bedingungen spröde.

Begreiflicherweise konnten auch alle durchgeführten Prüfungen keine endgültige Antwort geben, wie sich die konkrete unter tiefen Temperaturen

* Bemerkung: Im Falle $\frac{\sigma_r}{\sigma_1} = 1$ handelt es sich um glatte Probestäbe, ohne Kerbe.

arbeitende Konstruktion verhalten wird. Sie zeigten nur, daß man auch bei Temperaturen von rund -150°C noch mit bestimmter Deformationsfähigkeitsreserve des gewählten Stahles auch bei ungünstigen Spannungszuständen rechnen kann. Sie haben aber auch gezeigt, daß sich die Zone der Erschöpfung dieser Verformungsfähigkeit im Temperaturbereich zwischen -150°C und -196°C befindet. Nach diesen Ergebnissen wurde die praktische Anwendung dieses Stahles bis zur Temperatur von -150°C in Angriff genommen. Es bestätigte sich, daß man diesen Stahl unter bestimmten Bedingungen für den Bau von Druckbehältern, die bei den Temperaturen tief unter der Übergangszone der Kerbschlagzähigkeitskurve arbeiten, verwenden kann. Zu dieser Zeit sind schon einige Zehnen von diesen Druckbehältern im Betrieb, ohne irgendwelche Schwierigkeiten. Sie arbeiten bis zur Temperatur von -150° bis -160°C . Mit Rücksicht auf diese Betriebserfahrungen ist zusammenfassend zu sagen, daß sich für gegebene konkrete Verwendung (Behälter mit der Wanddicke bis 15 mm) die gewählte Art der Werkstoffbewertung mit Hilfe von statischen Prüfungen gekerbter Probestäbe und mit Hilfe von Platten bewährte. Wie schon früher erwähnt wurde, diene als Kriterium die Übergangstemperatur der Erschöpfung der Verformungsfähigkeit. Nichtsdestoweniger schließen wir den Schlagversuch als eine empfindliche Qualitätsprüfung bei Werkstofflieferungen für diese Zwecke nicht aus.

Es ist begreiflich, daß man die betreffenden Befunde ohne weitere Überprüfung nicht verallgemeinern kann. Andere Bedingungen können zum Beispiel bei Druckbehältern mit wesentlich größeren Wanddicken erwartet werden. Hier liegen andere Verhältnisse in der Spannung wie auch im Gradienten der Spannungskomponenten vor, und es machen sich hier auch weitere wichtige Einflüsse auf die Bildung und Entwicklung des Sprödbruches geltend.

ON THE PROBLEM OF THE CRITERION OF BRITTLINESS OF MATERIALS

V. LINHART and O. SCHOLZ

SUMMARY

The evaluation of the brittleness or ductility of materials is of great importance, especially in connection with some concrete industrial problems. During the selection of a material suitable for the construction of pressure vessels it was found that at -150°C , also in the case of an unfavourable state of stress, carefully desoxydized, unalloyed carbon steel ČSN 11 368.1 still possesses definite reserves of deformability. On the other hand, the tests showed that in the range between -150°C and -196°C the deformability of the material is exhausted. Several tens of vessels are already in operation and this proves that for this concrete case and the above structural material, the method of statical tests with notched specimens and plates has proved its value.

SUR LE CRITÈRE DE LA RIGIDITÉ DES MATÉRIAUX DE CONSTRUCTION

V. LINHART et O. SCHOLZ

RÉSUMÉ

L'évaluation de la rigidité ou de la ténacité des matériaux de construction est d'une grande importance, surtout quand il s'agit de résoudre des problèmes concrets intéressant l'industrie. Lors du choix de matériaux appropriés à la construction de réservoirs à pression, l'examen de l'acier au carbone ČSN 11 368.1 non allié et soigneusement désoxydé a montré qu'à la température de -150°C cet acier possède encore, même en cas d'état d'efforts défavorable, une réserve mesurable de déformabilité. D'autre part, les essais ont montré que la déformabilité de la matière s'épuise dans le domaine de -150°C à -196°C . Plusieurs dizaines de réservoirs sont déjà en exploitation, ce qui prouve que pour ce cas concret et pour cette matière, la méthode d'essai statique à éprouvettes entaillées et à tôles a donné de bons résultats.

К ПРОБЛЕМАТИКЕ КРИТЕРИЯ ХРУПКОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. ЛИНГАРТ и О. ШОЛЦ

РЕЗЮМЕ

Определение хрупкости и вязкости конструкционных материалов имеет большое значение особенно в случае отдельных конкретных задач промышленности. При выборе конструкционного материала, пригодного для сооружения напорных резервуаров, при испытании нелегированной тщательно раскисленной углеродистой стали ČSN 11 368.1 было установлено, что при температуре -150°C даже в случае неблагоприятного напряженного состояния еще есть достаточный запас деформируемости. опыты показали и то, что в диапазоне -150 и -196°C исчерпывается деформируемость материала. Работают многие десятки таких резервуаров, что доказывает, что для этого конкретного случая хорошо оправдал себя метод испытания надрезанного образца упомянутого выше конструкционного материала статическим методом и в виде листа.

DESCRIPTION OF ALTERNATING MAGNETIC CIRCUITS BY COMPLEX QUANTITIES

L. GÁDOR

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH INSTITUTE OF THE ELECTRICAL INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received 21, April 1958]

The calculation of magnetic circuits with the aid of Ohm's Law for magnetic circuits is a well known method. The author extends this method to the computation of alternating electric and magnetic circuits. Introducing the concept of complex magnetic resistance, the simple computing technique of the a. c. circuits is transposed to magnetic circuits and its application to composite electric and magnetic circuits is shown.

1. Introduction

In the basic relations of the electric and the magnetic characteristics of a field, symmetry is everywhere present in the description of electromagnetic static and dynamic fields and leads to formally similar expressions describing the behaviour of electric and of magnetic circuits. These conformities facilitate in many respects the understanding of the phenomena and the practical calculations.

In the following the analogies between the basic relations for calculating electric and magnetic circuits will be dealt with, i. e. the analogies between the electric and the magnetic laws of Ohm and of Kirchhoff, and between the concepts of electric and of magnetic resistance.

In the present paper the author does not attempt a complete treatment of the subject, but rather the possibilities of further deepening the analogy will be shown which still offer themselves mainly for alternating circuits containing complex resistances.

The following nomenclature gives a list of notions and quantities and of their symbols in two columns thus providing an immediate parallelism of analogue terms.

Nomenclature

	<i>Electric circuit</i>		<i>Magnetic circuit</i>
Current density	i	Flux density	B
Current	$I = \int_{A_1} i \, dA$	Flux	$\Phi = \int_{A_1} B \, dA$
Electric field strength	E	Magnetic field strength	H

Potential difference (p. d.)	$U = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{E} ds$	Magnetic potential difference, magnetic p. d.	$U_m = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{H} ds$
Electromotive force	$U_e = \oint \mathbf{E} ds$	Magnetomotive force (excitation)	$F = \oint \mathbf{H} ds$
Conductivity	γ	Permeability	μ
Resistivity	ρ	Reluctivity	σ
Conductance	G	Permeance	A
Resistance	R	Reluctance	R_m
Impedance	Z	Magnetic impedance	Z_m
Complex conductance	Y	Complex permeance	Y_m

The relations for calculating magnetic circuits will be written in the form of quantitative equations.

Clarendon capital letters will be used to denote the time vector of alternating quantities, their absolute value will be denoted by capital letters, their instantaneous values by small letters.

The subsequent investigation of alternating electric and magnetic circuits will be limited to purely sinusoidal alternating phenomena and linear resistances; therefore, the permeability of magnetic media will also be constant and independent of field.

The active element of a circuit is the *source* (source of current, source of flux), its passive element is the *consumer* (electric consumer, magnetic consumer). The elements of a circuit are characterized by the resistance which may be conductive, inductive, capacitive or complex; the complex resistance, or in other word, impedance, may be inductive or capacitive according to whether its imaginary component (reactance) is an inductive or a capacitive resistance.

The source or the consumer is *active*, if it supplies energy to the circuit or draws energy from it; it is *reactive*, if the alternating current or flux passing through it causes periodical transformations of energy without changing the energy contents of the circuit.

In the course of the investigations magnetic fields and coils linked to them will be dealt with. Using a simplification permitted by the theoretical character of the treatment, a coil linked with the magnetic field will be considered as having a flux Φ linked with each of the N turns of the coil. Then the coil through which current I passes will represent a magnetic potential difference of

$$U_m = NI.$$

2. Alternating magnetic circuits, magnetic Ohm's Law

The calculation of magnetic circuits excited by direct current according to the magnetic Ohm's Law is a known method, in the literature [3] the detailed treatment can be found, therefore, this question will not be dealt with here.

With the mathematical formulation used in electrical engineering sinusoidally alternating quantities appear in the form of complex numbers and the relations describing the laws of electric and magnetic circuits are established by complex linear operators. Consequently Ohm's Law for an alternating current circuit is

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (1)$$

or

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{U}. \quad (2)$$

Therefore, in an a. c. circuit generally a phase difference between the current and the voltage appears. The reason is that voltages arise in the consumer which are not in phase with that of the source and currents arise, which are not in phase with the current of the source. In consequence of the phase difference the flow of energy is reversed during parts of the period. Phase difference between current and voltage is possible only if in the consumer electric energy is stored for certain time. It is well known that this indeed takes place, the capacity of the circuit permits storage of electrostatic field energy, the inductivity of the circuit permits storage of magnetic field energy.

The a. c. consumer, although it supplies electromagnetic energy during certain parts of the period, cannot be confused with the source of current. The source of current transforms foreign — mechanical, thermal, light, etc. — energy into electromagnetic energy and is permanently able to supply electric energy. On the terminals of an a. c. supply, a. c. voltage can also be measured with an open circuit. The consumer, inasmuch it is a reactive consumer, transforms into one another the various forms of electromagnetic energy provided by the sources and its balance of electromagnetic energy is zero within one period. Inasmuch the consumer is an active one, it transforms electromagnetic energy into other energy — mechanical, thermal, light, etc. On the terminals of the consumer alternating p. d. can only be measured if alternating current flows in it.

The relation (1) — if interpreted as relating to the whole circuit — contains on its left side the electromotive force of the current sources, on its right side the potential drop across the consumers. If the resistance of the consumers is R , their inductance is L , capacitance is C , the instantaneous value will be

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (3)$$

The usual treatment of alternating magnetic circuits does not proceed along this line. It is not usual to distinguish sources of flux and consumers of flux amongst the elements of the magnetic circuit, but uniformly every

excitation is considered as a source of flux, regardless to its role within the circuit and of the direction of energy flow. This is equivalent to considering in an electric circuit, the inductive and the capacitive consumer also as sources and to consider as consumer only the ohmic consumer. In the differential equation of the electric circuit this is only expressed by an insignificant formal difference:

$$u - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i dt = Ri, \quad (4)$$

but the ideas connected with this equation are rather different. It is just the form (3) of the differential equation and the way of thinking connected with it which leads to the introduction of the notion of complex resistance and to the fruitful generalization of Ohm's Law. This generalization subsequently permits an easy extension of the formalism developed for d. c. networks and circuits to a. c. networks, without always recommencing the analysis of physical phenomena from the bases.

It will now be investigated to what results a consequent development of the analogy between electric and magnetic circuit leads and whether it offers advantages as compared with the traditional methods of calculation.

As a first step, a medium with linear magnetization, free of hysteresis will be considered. This assumption holds true for every system not containing iron, more exactly not containing ferromagnetic material.

With the literal application of the analogy, the generalized Ohm's Law will be

$$\mathbf{U}_m = \Phi \mathbf{Z}_m \quad (5)$$

or

$$\Phi = \mathbf{U}_m \mathbf{Y}_m, \quad (6)$$

where \mathbf{Z}_m is the complex magnetic resistance, the magnetic impedance, and \mathbf{Y}_m is the complex permeance.

$$\mathbf{Z}_m = R_m + jX_m, \quad (7)$$

where R_m contains the magnetic circuit data, on which the magnetic potential difference component in the direction of Φ and proportional to it depend, X_m contains the magnetic circuit data, on which the component of potential difference perpendicular to Φ and the magnetic p. d. component proportional to the first differential quotient of Φ depend. (The p. d. components proportional to the integral of the flux ought also to be mentioned here, but — as will be shown later on — there is no such p. d. in the magnetic circuit.)

From the basic relation follows the dimension of the electric and of the magnetic resistance and impedance.

$$[Z] = \frac{\text{potential}}{\text{current}}$$

$$[Z_m] = \frac{\text{current}}{\text{flux}} = \frac{\text{current}}{\text{potential} \times \text{time}}$$

It is interesting to note that

$$[Z][Z_m] = \frac{1}{\text{time}}$$

the product of the two resistances is equal to the reciprocal dimension of time. (See later Chapter 6.)

After this, cases of simple load shall be considered.

2.1. Conductive resistance

For an electric circuit,

$$U = IR \quad (8)$$

where R is a scalar factor; the voltage and the current are in phase (Fig. 1a). The question of energy will be considered later.

A corresponding magnetic circuit is the choke coil, for which

$$U_m = \Phi R_m, \quad (9)$$

where R_m is a scalar factor; the magnetic potential difference (respectively the exciting current) and the flux are in phase (Fig. 1b). The R_m of the formulae is the quantity which is traditionally called magnetic resistance.

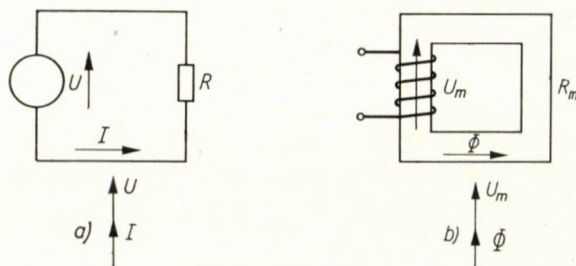


Fig. 1

2.2. Inductive resistance

For an electric circuit

$$\mathbf{U} = \mathbf{I}jX, \quad (10)$$

where

$$X = \omega L \quad (11)$$

and

$$L = \frac{N^2}{R_m}, \quad (12)$$

if N is the number of turns of the coil and R_m is its reluctance. The p. d. vector and the current vector are perpendicular to each other (Fig. 2a), the current

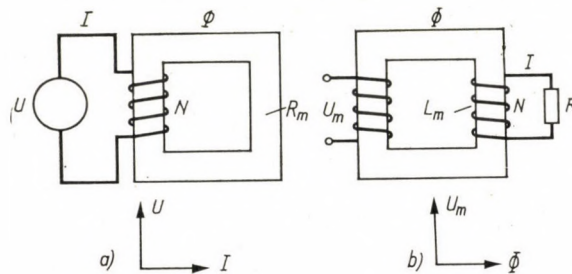


Fig. 2

is lagging behind the voltage by $\frac{\pi}{2}$ angle. In the coil the current is linked to the magnetic field of the current, in the expression for L the reluctance appears.

Turning now to the magnetic circuit, the analogy requires that there shall be no magnetic p. d. proportional to Φ , and this means that the reluctance R_m of the magnetic circuit, taken in the traditional sense, will not be considered. The inductive magnetic potential drop is the component proportional to $\frac{d\Phi}{dt}$.

An inductive reluctance is obtained if the flux is linked with a secondary coil closed by a conductive electric circuit (Fig. 2b). Then a secondary voltage $\mathbf{U} = j\omega N\Phi$ is induced in the secondary coil, where N is the number of turns of the secondary coil, and if the resistance of the secondary coil is R , the current flowing in it is $\mathbf{I} = \frac{j\omega N\Phi}{R}$. As an effect of the secondary current, the magnetic

p. d. $N\mathbf{I} = j\omega N^2 \frac{\Phi}{R}$ appears.

As R_m is equal to zero, the induced magnetic p. d. must be equal to the magnetic p. d. \mathbf{U}_m of the primary excitation,

$$\mathbf{U}_m = \Phi j\omega \frac{N^2}{R}.$$

In order to further develop the analogy, the notions of *magnetic inductive resistance*, X_m and of *magnetic self-induction* will be introduced:

$$X_m = \omega L_m \quad (13)$$

and

$$L_m = \frac{N^2}{R} \quad (14)$$

and with that

$$U_m = \Phi jX_m \quad (15)$$

becomes the exact dual of Eq. (10) for the inductive electric circuit.

Therefore, inductive resistance arises in the electrical circuit as well as in the magnetic circuit if current and magnetic field are linked. In this respect duality is also perfect.

Now, on the base of the above mentioned the obtained image must be somewhat refined. It must be said that the magnetic circuit of the coil may contain only a *magnetic conductive resistance*, i. e. every secondary magnetic effect must be excluded which would result in the current flowing in the coil and the *resulting* flux producing the induced electromotive force not exactly in phase. In the opposite case not an inductive, but a complex resistance could be talked of. By this the analogy becomes even clearer, as it can be seen by comparing Figs. 2a and 2b.

2.3. Capacitive resistance

At this point the analogy ceases. $\text{Div } \mathbf{B} = 0$, that is to say the magnetic flux is not the flow of magnetic charges but the sheer existence of the magnetic field and for maintaining it no energy is required, hence the expression $\int \Phi dt$ has no physical meaning.

In the list of notions the pair of concepts $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ have been considered to be analogue to the pair of values $\mathbf{E} - \mathbf{H}$. So the electrostatic field was excluded from the system as having no magnetic equivalent.

3. The role of the secondary load

The relations established in connection with Fig. 2 have been written assuming the conductive character of the secondary magnetic or electric circuit. The question is, how does the primary resistance develop, if the load is not conductive. In this case we inverse the sequence of discussion and consider first the magnetic circuit, because the secondary circuit of the magnetic circuit is an electric circuit, the behaviour of which is already known. On the other hand, the secondary of the electric circuit is a magnetic circuit for which we want now to determine what is meant by a non-conductive consumer.

3.1. Inductive secondary circuit

Let us assume that the secondary circuit is purely inductive, the inductance for the whole circuit is L , there is no conductive and no capacitive resistance, $R = C = 0$.

With this the secondary current becomes

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{X} = \frac{j\omega N\Phi}{j\omega L} = \frac{N\Phi}{L},$$

the magnetic p. d. caused by the secondary current becomes

$$\mathbf{IN} = N^2 \frac{\Phi}{L}$$

and is equal to the magnetic p. d. of the primary excitation:

$$\mathbf{U}_m = \Phi \frac{N^2}{L}. \quad (16)$$

Therefore, the inductive secondary circuit does not cause a phase shift between the primary excitation and the flux, it behaves as a magnetic conductive resistance and is equivalent to a magnetic conductive resistance $R_m = \frac{N^2}{L}$.

This result formulates in the language of the generalized magnetic Ohm's Law the well known fact that the magnetizing current required in the secondary circuit must also be covered on the primary side.

3.2. Capacitive secondary circuit

In the case of a purely capacitive secondary circuit the secondary current is

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{X} = j\omega N\Phi \cdot jC = -\omega^2 N\Phi C$$

the magnetic p. d. caused by the secondary current is

$$\mathbf{IN} = -\omega^2 N^2 \Phi C,$$

and is equal to the magnetic p. d. of the primary excitation:

$$\mathbf{U}_m = -\Phi \omega^2 N^2 C. \quad (17)$$

The capacitive secondary circuit, therefore, brings about a counter-phase magnetic p. d., behaves as a negative magnetic conductive resistance and reduces by an equivalent resistance $\omega^2 N^2 C$ the existing magnetic conductive resistance.

Naturally, this result does not say anything new either, but states in another formulation the well known fact that a capacitive secondary circuit takes over partly the task of excitation from the primary excitation.

3.3. Complex secondary circuit

If the resistance of the secondary circuit is an arbitrary complex value Z and its conductance is Y , being

$$Y = Y_v + jY_k,$$

i. e. Y_v and Y_k are the real and the imaginary components, respectively, of the conductance:

$$Y_v = \frac{R}{Z^2} \quad \text{and} \quad Y_k = \frac{-X}{Z^2}.$$

The secondary current will be

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{U}Y = j\omega N\Phi (Y_v + jY_k) \\ &= \omega N\Phi (-Y_k + jY_v). \end{aligned}$$

The magnetic p. d. produced by the secondary current is

$$N\mathbf{I} = \omega N^2 \Phi (-Y_k + jY_v).$$

To this is added the magnetic p. d. ΦR_m produced by the magnetic resistance R_m defined in the traditional manner, and the sum of these potential differences will be equal to the magnetic p. d. of the primary excitation:

$$\mathbf{U}_m = \Phi \left(R_m + \frac{\omega N^2}{Z^2} X - j \frac{\omega N^2}{Z^2} \cdot R \right).$$

In a general case the secondary electric circuit contains inductive consumers as well as capacitive ones, therefore

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

and with this

$$\mathbf{U}_m = \Phi \left[R_m + \omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + j\omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 R \right].$$

Hence, in general

$$\mathbf{U}_m = \Phi \mathbf{Z}_m, \quad (18)$$

where

$$\mathbf{Z}_m = R_m + \omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + j\omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 R. \quad (19)$$

The complex magnetic resistance can be determined from the magnetic data of the magnetic circuit and the electric data of the secondary electric circuit. The magnetization of the medium of the magnetic field and the inductivity

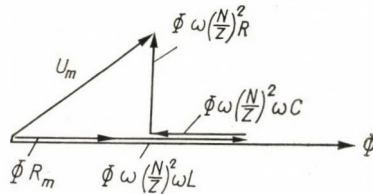


Fig. 3

and the capacity of the secondary electric circuit represent a magnetic resistance of conductive character — the latter with a negative sign — while the conductive resistance of the secondary electric circuit determines the imaginary, magnetically inductive component of the complex magnetic resistance (Fig. 3).

3.4. Circuit analogy

It is now possible to take into consideration the “magnetic load” of the coil connected to the electric circuit and to construct the analogy for the case of a primary electric circuit and a secondary magnetic circuit.

Taking into account the complex magnetic resistance changes the concept of the inductivity, or rather, generalizes it: the place of the traditional expression $L = \frac{N^2}{R_m}$ is taken over by $\mathbf{K} = \frac{N^2}{\mathbf{Z}_m}$, as a complex inductivity.

With the complex inductivity obtained in this way, the formal calculations are continued in the same manner as with the traditional one, thus in the electric circuit the resistance $j\mathbf{K}$ appears. The only difference is that the complex inductive resistance may behave in the manner of an inductive, a conductive, a capacitive or any kind of intermediary complex resistance.

Where is this phenomenon encountered in electrical engineering? The described behaviour of the complex inductivity is nothing but the apparent magnetic resistance of the primary winding of the transformer, if the character of the secondary effects brought about by the flux is not investigated. With

this point of view, nothing else exists than an exciting winding with the current I and the flux Φ belonging to it (Fig. 4).

Of course, again the result is not new and not surprising. It is known that the load of the secondary side of a transformer is transposed to the primary

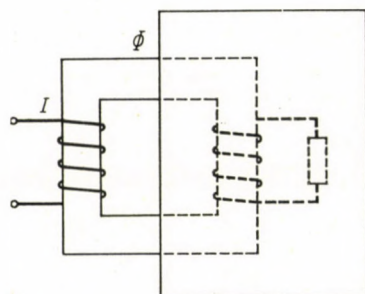


Fig. 4.

terminals while maintaining its character, because of the electromagnetic connection. But, a new feature of this way of thinking is that the influence of the secondary load is not considered as a mutual action of the primary and the secondary electric circuits, but as the change of the apparent resistance of the magnetic circuit linking the two electrical systems.

4. Resonance

Resonance occurs in the circuit if the resistances of the consumers exerting contrary physical influences just balance each other. The complex resistance then behaves as a simple resistance, the absolute value of the com-

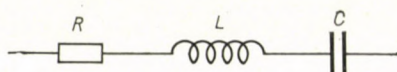


Fig. 5

plex resistance and the current assume extreme values. Formally the resonance appears with the disappearance of the members of opposite effect, and thus having opposite signs, in the expression for the complex resistance.

The resistance of a complex consumer composed of series elements (Fig. 5) is

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Resonance occurs if

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

and then

$$Z = Z_{\min} = R,$$

the complex resistance behaves as if only R were present in the electric circuit, as if the consumer were a purely conductive resistance.

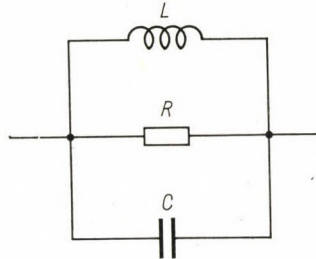


Fig. 6

The conductance of a consumer built up from parallel elements (Fig. 6) is

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Resonance occurs, if $\omega C = \frac{1}{\omega L}$, the condition is the same as for a series consumer, and then

$$Y = Y_{\min} = G$$

the complex consumer again behaves as if only a conductive member were present.

Now the complex magnetic consumer will be discussed.

According to 3.3,

$$Z_m = \sqrt{\left[R_m + \omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]^2 + \left[\omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 R \right]^2}$$

if the secondary circuit linked with the flux is a complex electric consumer containing an R , a C and an L member. The first member under the square root is the one which can be made equal to zero. The condition for this is

$$R_m = \omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right).$$

In traditional formulation this means that the impedance of the secondary circuit is capacitive and that the capacitive component of the secondary current — through the transmission — just balances the primary magnetizing current. The exciting coil does not draw magnetizing current from the primary network, the magnetic circuit behaves as if it had no magnetic resistance at all.

In the terminology of the complex magnetic resistances: the magnetic circuit behaves as if there were no magnetic conductive resistance, the resist-

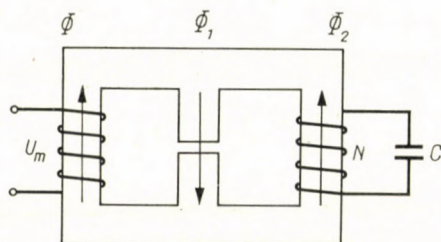


Fig. 7

ance of the magnetic circuit,

$$Z_m = Z_{m \min} = \omega \left(\frac{N}{Z} \right)^2 R$$

is purely inductive. The complex resistance of the magnetic circuit therefore, behaves, like a simple (inductive) resistance, the absolute value of the complex magnetic resistance and the flux have extreme values.

The parallel resonance can be realized by the circuit represented in Fig. 7. The source of flux with a magnetomotive force U_m is loaded by the magnetic conductive consumer R_m and the $\omega^2 N^2 C$ magnetic consumer of negative conductive character, the two being connected in parallel.

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_1 - \Phi_2 &= U_m \left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{\omega^2 N^2 C} \right) \\ &= U_m \frac{\omega^2 N^2 C - R_m}{\omega^2 N^2 C R_m}. \end{aligned}$$

If

$$\omega^2 N^2 C = R_m, \quad \text{then} \quad \Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{and} \quad \Phi = 0,$$

the parallel resonant magnetic circuit behaves as a blocking circuit, the flux needed for magnetizing R_m is provided by the coil of N turns parallel with the condenser C .

It follows from the above that the analogy between the electric circuits and the magnetic circuits can also be found entirely in the phenomena of

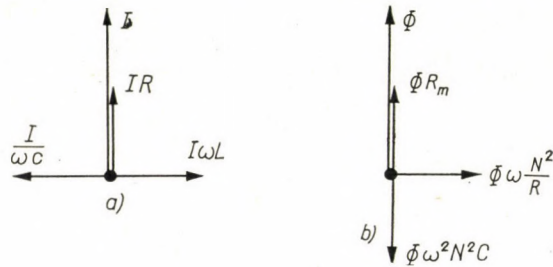


Fig. 8

resonance. The difference is only that the phase of the balancing actions is rotated with respect to the current or to the flux, respectively, by an angle $\frac{\pi}{2}$.

Fig. 8 shows this situation.

5. Leakage

In relay cores and similar systems, in case a single electric circuit is linked with a single magnetic circuit, leakage flux can be defined as that part of the magnetic field which does not belong to the useful flux. If e. g. the

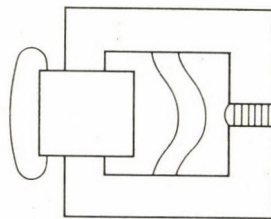


Fig. 9

purpose of the arrangement shown in Fig. 9 is the production of an air gap flux, then the leakage flux is the sum of all those induction lines which close, while avoiding the air gap.

The leakage flux is a subsidiary path parallel to the consumer, it is of conductive character if the leakage field is not linked with an electric conductor, and it is complex if the leakage field induces secondary currents.

The leakage of the two-coil system is determined as the leakage yoke flux of a transformer provided with a leakage yoke (Fig. 10), thus avoiding the complications originating from the parts of the flux only partially linked

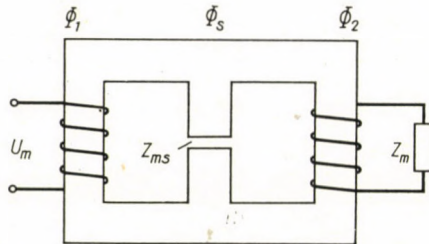


Fig. 10

with the coils. The secondary effects appearing in the conductors linked with the leakage field are not excluded. There is

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_s + \Phi_2 \\ &= U_m (Y_{ms} + Y_{m2}).\end{aligned}$$

Fig. 11a shows the vector diagram of these equations, while Fig. 11b shows the same with a leakage not linked with an electric circuit and with conductive

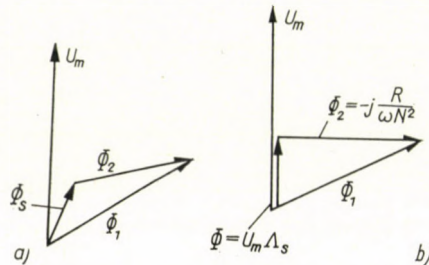


Fig. 11

load in the secondary electric circuit, i. e. with conductive magnetic resistance Z_{ms} and inductive magnetic resistance Z_m . Considering that Φ_1 is proportional to the primary, and Φ_2 is proportional to the secondary induced electromotive force, the figure gives prompt information on the rate and phase of the electric potential differences. Without any special reasoning information is obtained on how the flux is forced out of the secondary coil, if e. g. R is decreased and short-circuit is approached, while the primary current (U_m) is kept constant.

6. Energy relations

The formal character of the analogy between the electric circuit and the magnetic circuit, and the physical differences between them are the most obvious in the energy relations.

Current is the real flow of real electric charges, and it is able to perform work also in case of permanent flow. The permanent flux is a certain state of the magnetic field, energy is stored in space, but no work is being done. A direct current develops **UI** power, in the field of direct flux $U_m \Phi$ is proportional to the stored energy.

In coils connected with a d. c. circuit a magnetic field energy of constant magnitude is stored as long as the current and the voltage are unchanged; in the field of condensers under the same conditions an electrostatic field energy of constant magnitude is stored. From this stored energy come those secondary effects which cause a phase difference between voltage and current in the a. c. circuit when the current changes, as well as the apparition of the complex resistance and of the *reactive power*.

When the flux varies, in the conductors linked with the magnetic field also secondary effects appear, which in the magnetic circuit with varying flux causes the apparition of a phase difference between the magnetic p. d. and the flux, of the complex magnetic resistance and of the *active power*.

Therefore, in an electric circuit the permanent current is doing work and with the variations of the current are connected all those secondary effects which cause reactive power. In a magnetic circuit the permanence of the flux does not signify that work is being done and with the variations of the flux are connected those secondary effects which cause active power.

It follows from this, that while the active current is the component of the alternating current in the direction of the p. d. and the reactive current is the component perpendicular to the p. d., in a magnetic alternating circuit the situation is the inverse: active flux is the component perpendicular to the magnetic p. d., reactive flux is the component in phase with it.

The energy consumed in the secondary circuit of the transformer is conveyed by the magnetic field and the secondary coil then appears in the magnetic circuit as an active consumer. The power of the consumer is

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\omega^2 N^2 \Phi^2}{R}$$

and taking into consideration Eqs. (13) and (14)

$$P = \omega \Phi^2 X_m.$$

In the sense of Eq. (15) ΦX_m is the magnetic inductive p. d. caused by the

secondary circuit, therefore,

$$\Phi X_m = U_m \sin \varphi_m,$$

and with this

$$P = \omega U_m \Phi \sin \varphi_m \quad (20)$$

is the active power of the magnetic circuit. According to what has already been said, the expression for the magnetic power differs from the expression for the electric power inasmuch as the sine of the phase angle appears instead of the cosine, and moreover, since the generation of the perpendicular component is essentially connected with differentiation of the flux, the angular frequency ω appears as a factor.

The different role of the time in the electric and magnetic circuits is also expressed by the dimensions of the electric and of the magnetic resistance, as has already been pointed out in Chapter 2.

An analogous definition for the reactive power of the magnetic circuit would be

$$P_q = \omega U_m \Phi \cos \varphi_m. \quad (21)$$

What is the physical meaning of the reactive power? In an electric circuit

$$P_q = UI \sin \varphi.$$

For the sake of simplicity a series inductive circuit will be considered. There

$$U \sin \varphi = I \omega L,$$

and with this

$$P_q = \omega I^2 L = \omega \frac{1}{2} I_{\max}^2 L.$$

Therefore, the reactive power is equal to ω times the maximum energy accumulated in the electric circuit. In a magnetic circuit,

$$P_q = \omega U_m \Phi \cos \varphi_m,$$

where

$$U_m \cos \varphi_m = \Phi R_m.$$

With this

$$P_q = \omega \Phi^2 R_m = \omega \frac{1}{2} \Phi_{\max}^2 R_m,$$

thus, P_q is also the maximum value of the magnetic energy accumulated in the magnetic circuit, multiplied by ω .

7. Eddy currents, skin effect

The current passing through an extended electric and magnetic conductor creates a magnetic field also inside the conductor, for which, in the sense of Maxwell's 1st law,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{i},\end{aligned}$$

respectively, if the effect of the displacement currents can be neglected and if μ is constant. To an alternating \mathbf{i} belongs an alternating \mathbf{B} . The alternating magnetic field linked with the lines of flow represents an inductive resistance inserted into the path of the lines of current: a larger one for the lines flowing in the centre of the conductor, a smaller one for the lines near to the surface of the conductor. Therefore, in an extended conductor the alternating current concentrates near to the surface, and so the skin effect appears. The phenomenon is of self-induction character, and therefore, no consumption of active power is directly connected with it.

Indirect losses are caused by the reduction of the efficient cross section area of the conductor and the resulting increase of conductive resistance.

The law of distribution of the current from Maxwell's second law, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, by eliminating the field strength,

$$\nabla^2 \mathbf{i} = \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}$$

is obtained in the known manner.

Passing on to the magnetic analogy, the alternating flux traversing the extended electric and magnetic conductor induces an electric and a current field in the extended conductor, for which in the sense of Maxwell's second law

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{i} &= -\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

respectively. The current loops linked with the induction lines represent essentially secondary turns with conductive resistance. These turns represent magnetic inductive resistances inserted into the path of the induction lines; a greater resistance for the induction lines passing in the centre of the conductor, a smaller one in the vicinity of the surface. Therefore, the alternating flux becomes denser in the vicinity of the surface, here, too, the skin effect appears. The phenomenon being of inductive character in the sense of Chapter 6, consumption of active power is also directly connected with it, eddy current losses arise.

The differential equation of the flux distribution, altered in consequence of the skin effect, is obtained when the current density is eliminated:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

The results can be summarized briefly as follows: In the conductor traversed by an alternating current eddy fluxes arise, their reaction produces an increase in the density of the current in the vicinity of the surface, the electric skin effect. The eddy flux is a self-induction effect, involving reactive power and causing no eddy flux losses. But the resistance of the conductor increases and this causes additional losses.

In the conductor traversed by an alternating flux, eddy currents arise, their reaction produces an increase in the density of the flux in the vicinity of the surface, the magnetic skin effect. The eddy current loss is a loss of active power, at the same time the reduction of the efficient cross section area increases the magnetic resistance and requires additional excitation.

In practice the total specific loss due to the addition of the eddy current and of the hysteresis losses is usually given by the loss value V_{10} expressed in W/kg for a maximum induction of 1 Wb/m² and a frequency of 50 c/s. Within the technically utilized range both parts of the loss depend practically on the square of the induction; as for the frequency, the eddy current loss varies with its square and the hysteresis loss varies in proportion to the frequency. Thus, the loss value can be decomposed into two specific values of the two losses:

$$V_{10} = V_e + V_h$$

where V_e is the eddy current loss and V_h the hysteresis loss in 1 kg of iron for 1 Wb/m² maximum induction and alternating magnetization of 50 c/s.

According to chapter 6,

$$P = \omega^2 \Phi^2 \frac{N^2}{R}.$$

The eddy current loss is equivalent to the consumption of an one-turn secondary circuit of resistance R_e , or

$$\frac{\omega^2 \Phi^2}{R_e} = 2 \frac{\omega^2}{\omega_{50}^2} B^2 S V_e;$$

where ω_{50} is the angular frequency corresponding to a frequency of $f = 50$ c/s S is the weight of the iron, while the factor 2 appears because we have passed

from the maximum value of the induction to its r. m. s. value. $S = A l s$, if A is the cross-section area of the iron, l the average length of the induction line, s the specific weight of the iron. With these,

$$\frac{\omega^2 \Phi^2}{R_e} = 2 \frac{\omega^2}{\omega_{50}^2} \Phi^2 l s V_e,$$

and

$$R_e = \frac{\omega_{50}^2}{2 l s V_e}$$

we got the equivalent secondary resistance.

8. Hysteresis

Hysteresis is the consequence of the permanent deformation or change of state of the material which is subject to alternating load. Of this kind are both the polarizations remaining in the dielectric, and the permanent magnetism of the magnetic material. Owing to hysteresis, the state of the material subject to the alternating load lags behind the action causing it, and a phase difference appears.

In our nomenclature the capacity, in the behaviour of which the hysteresis of the dielectric may play a part, has not been included, thus we cannot oppose an electric equivalent to the phenomenon of magnetic hysteresis.

In consequence of hysteresis the flux lagging in phase behind the magnetic p. d. represents magnetic load, or active consumption. By calculations similar to those of the previous chapter, a secondary-circuit conductive load resistance can be determined, the consumption of which is just equal to the hysteresis loss. Meanwhile, attention must be paid to the fact that the hysteresis loss varies in proportion to the frequency. Therefore,

$$\frac{\omega^2 \Phi^2}{R_h} = 2 \frac{\omega}{\omega_{50}} B^2 S V_h,$$

$$S = A l s$$

and with this

$$\frac{\omega^2 \Phi^2}{R_h} = 2 \frac{\omega}{\omega_{50}} \Phi^2 l s V_h,$$

and

$$R_h = \frac{\omega \omega_{50}}{2 l s V_h}$$

we get the equivalent secondary resistance.

For $f = 50$ c/s frequency the two losses can be combined. The equivalent resistance will then be

$$R_v = \frac{\omega_{50}^2}{2 \text{Is } V_{10}},$$

where

$$R_v = \frac{R_e R_h}{R_e + R_h}.$$

The discussion of the iron losses is the unique case, when we meet a magnetic circuit described by complex quantities (see Ref. 1, 2). The papers

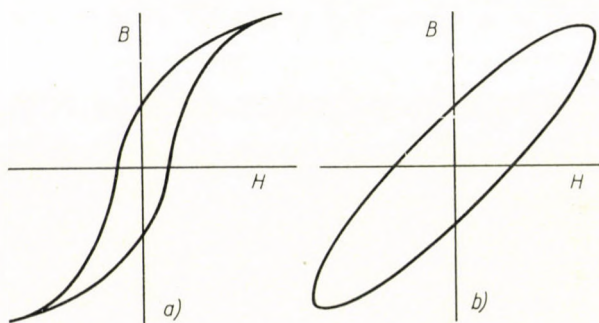


Fig. 12

referred to do not introduce the concept of the complex magnetic resistance, but calculate with a complex permeability.

K. A. MACFAYDEN [1] deals in detail with the question. In his paper he starts out from the fact that the induction \mathbf{B} is not in phase with the magnetic field strength \mathbf{H} , and the permeability defined by

$$\mu = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{H}}$$

is obtained as a complex quantity. The hysteresis loss is proportional to the imaginary component of the complex permeability. If only the basic harmonic of the hysteresis is considered, i. e. non-linearity is neglected, the relation $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$ takes the form of Fig. 12b instead of Fig. 12a. The former is essentially the composition of two harmonic oscillations of the same frequency but different in phase, an ellipsis.

Owing to the eddy current loss appearing similarly to the hysteresis loss, the author takes this into account simply by increasing the imaginary component. Finally the characteristics of the magnetic circuit are transferred

into the characteristics of the primary electric circuit and the complex permeability is incorporated into the primary impedance.

What is the relation between the idea of complex permeability and the method used so far in this paper? The concept of complex magnetic resistance uses magnetic circuit elements is analogy to the calculations of the electric circuit; it separates the physical effects depending on Φ and on $\frac{d\Phi}{dt}$ and it investigates the laws governing the relations between the total flux, which develops as a consequence of all secondary effects, and the excitation. The utilization of the complex permeability as lined out above is limited to the secondary effects appearing in the form of iron losses only; from the empirically found phase difference and losses the composition of the complex permeability is calculated in the inverse direction. The method introduces the complex character not into the elements of the magnetic circuit, but into the characteristics of the material. The complex component of the permeability, which characterizes the losses — if only the linear part of the magnetization curve is considered — could somehow be considered as a characteristic of the material, as far as the hysteresis is concerned; but for the part of the loss related to the eddy current, this is hardly applicable. This latter value is a function not only of the composition and microstructure of the iron material, but also a calculable function of its shape (e. g. sheet thickness) and of the frequency.

Retaining the symbols of the original paper, the complex reluctivity is

$$\frac{1}{\mu} = \sigma = \tau + j\psi,$$

where ψ is the component connected with the iron losses. With this the losses per unit volume can be expressed similarly to those for the medium of the field of electric current.

In an electric field the specific losses are $v = i^2 \varrho$, where ϱ is the resistivity of the medium and at the same time the loss arising in the unit volume of the medium for unit current density.

In a magnetic field the specific losses are $v = \omega B^2 \psi$ where ψ is the imaginary specific magnetic resistance of the medium and at the same time the iron loss arising in the unit volume of the alternating magnetic circuit of unit effective value and unit frequency. But in this expression regrettably ψ cannot be considered as constant, not even under constant physical conditions (temperature, etc.). But if in the expression for ψ the ψ_h due to hysteresis is separated from ψ_e due to the eddy currents, then

$$v = \omega B^2 (\psi_h + \omega \psi_e),$$

where now ψ_h and ψ_e can be considered as constants.

It must be mentioned that the ratio $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{H}}$ used for defining the complex μ can also be applied to the hysteresis only. To the eddy currents does not correspond a further phase difference between \mathbf{B} and \mathbf{H} , but primary ampere-turns needed to balance the secondary ampere-turns due to the eddy currents.

The quoted paper arrives to a certain analogy in the calculation of the complex resistances and the energy relations of the complex circuit. But the method is restrained to the consideration of the iron losses, and finally expresses their effect in the primary impedance.

9. Circuit diagram

The method of calculation and the circuit diagram underlying it, not only provides instructions for the sequence and the execution of operations

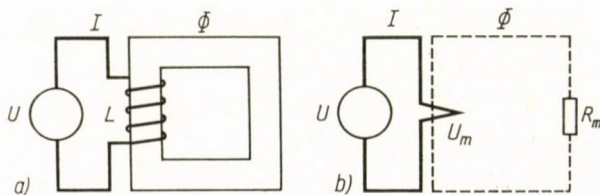


Fig. 13

aiming at the resolution of the problem, but provides the base for the development of a specific way of thinking. The trained specialist outlines the problem for himself in the form of a circuit diagram, he is thinking in terms of circuit diagrams, for him the figure is not only the symbol of the physical reality, but a means of visualizing, it is the immediate object of his thinking.

The diagrammatic language concerning technical problems of electric circuits has reached a high degree of perfection and is a great help in handling and resolving problems. The circuit diagram and the generalized Ohm's Law quickly provide a general view of the conditions in the electric circuit and are also a great help in giving good qualitative information on the situation even before the detailed quantitative solution.

In the present study the author has aimed at transferring by analogy the formalism which was developed for the handling of electric circuits to the calculation of magnetic circuits. It is desirable to extend the analogy to the application of circuit diagrams too.

A magnetic circuit is always connected with an electric circuit. Therefore, it would be useful to represent the magnetic diagram by lines similar to the

electric diagram, but so that it can be distinguished from the latter. E. g. the use of dotted lines appears to be adequate. Several examples of magnetic circuit diagrams will be shown.

Fig. 13 shows an electric circuit loaded with an inductive resistance, Fig. 13a was designed in the usual style; on the other hand, Fig. 13b shows, according to the new method, separately the source of magnetic flux U_m ,

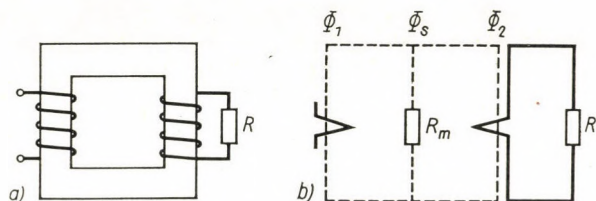


Fig. 14

the flux circuit and the reluctance R_m . A coil being considered as a pure inductance represents a magnetic circuit loaded with a purely conductive resistance.

Fig. 14 shows the circuit diagram of a transformer, with ohmic secondary load. The reluctance R_m in parallel with the consumer takes into account the leakage.

REFERENCES

1. MACFAYDEN, K. A.: Vector Permeability. *The Journal of the Institution of Electric Engineers*, Part III, 1947., p. 407.
2. SCHWENKHAGEN, H. F.: Allgemeine Wechselstromlehre, Springer Verlag, Berlin, 1951.
3. URBANEK, J.: Bevezetés a műszaki elméleti villamosságtanba (Introduction to the Theory of Electrotechnics). Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
4. LISKA, J.: Villamos áramkörök vektorábrái. (Vector diagrams of electric circuits.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

DIE BESCHREIBUNG VON MAGNETISCHEN WECHSELKREISEN DURCH KOMPLEXE GRÖSSEN

L. GÁDOR

ZUSAMMENFASSUNG

Ein bekanntes Berechnungsverfahren für magnetische Kreise ist das Ohmsche Gesetz für magnetische Kreise, welches sich auf die Analogie zwischen Stromkreisen und magnetischen Kreisen stützt. In der Arbeit wird diese Analogie für wechselnde Strom- und magnetische Kreise vertieft. Durch Einführung des Begriffs des komplexen magnetischen Widerstands wird die einfache Rechentechnik der Wechselstromkreise auf magnetische Kreise übertragen und es wird deren Anwendung auf zusammengesetzte Strom- und magnetische Kreise gezeigt.

DESCRIPTION DES CIRCUITS MAGNÉTIQUES ALTERNATIFS
PAR DES GRANDEURS COMPLEXES

L. GÁDOR

RÉSUMÉ

Pour le calcul des circuits magnétiques, on utilise la méthode bien connue de la loi d'Ohm pour le circuit magnétique, basée sur l'analogie des circuits électriques et magnétiques. L'étude approfondit cette analogie en l'appliquant aux circuits alternatifs. En introduisant la notion de résistance magnétique complexe, l'auteur étend la technique simple du calcul des circuits électriques alternatifs aux circuits magnétiques. Il montre enfin l'application de cette méthode aux circuits électriques et magnétiques composés.

ОПИСАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ КОМПЛЕКСНЫМИ
КОЛИЧЕСТВАМИ

Л. ГАДОР

РЕЗЮМЕ

Известным методом расчёта магнитных цепей является закон Ома для магнитных цепей, который основан на аналогии магнитных цепей и токовых цепей. В данной статье углубляется эта аналогия для переменных токовых и магнитных цепей. Введением понятия комплексного магнитного сопротивления простую технику вычисления цепей переменного тока переводят на магнитные цепи и дается иллюстрация применения для комплексных токовых и магнитных цепей.

PRODUCING INFLUENCE LINES OF SUSPENSION BRIDGES WITH VARIABLE FLEXURAL RIGIDITY BY SUCCESSIVE APPROXIMATION

J. SZIDAROVSKY

"UVATERV" HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received April 21, 1960]

If the internal forces of a suspension bridge have been determined assuming the flexural rigidity of the stiffening truss to be constant, these calculated internal forces should be corrected, as the flexural rigidity is not the same as that of the existing bridge. This correction may be calculated as an internal force caused by fictitious external forces determined from the difference between the constant and the existing flexural rigidity.

This paper develops a successive approximation for computing these internal forces and extends this method to an influence line analysis.

This method can be used with advantage for determining influence lines of stiffening suspension bridges with not-constant flexural rigidity, and also in that case, if a change in cross sections, obtained by previous computation, is required and the influence lines are to be corrected for the bridge of corrected sections.

1. Definitions and notations

Both truss typed and plate girder typed stiffening girder are termed stiffening truss.

An unloaded bridge refers to a bridge under loading which does not cause stresses in the stiffening truss (after neglecting the effect of dead load between two hangers close to each other). In this case, the cable bears all the loads. In general, this happens only when dead loads act on the bridge.

Loaded bridge refers to such a bridge where internal forces arise in the stiffening truss.

The term live load covers such loads and effects which cause internal forces in the stiffening truss (moving loads, a part of dead load, temperature change).

Cable stress refers to a horizontal projection of the tensile force which had arisen in the cable of an unloaded bridge.

Cable stress increment is the horizontal projection of the increase in tensile force which had arisen in a cable.

The total of cable stress and cable stress increment is called increased cable stress.

Main notations used are :

$$\begin{aligned} H_g &= \text{cable stress} \\ \dot{H} &= \text{cable stress increment} \\ H_g + \dot{H} &= \text{increased cable stress} \\ H_r &= \text{fixed cable stress [See 3. and Equ (3.1)]} \end{aligned}$$

- H^* = calculated cable stress
 H_t = cable stress increment due to temperature change
 $M_g(x)$ = bending moment due to dead load on a simple beam (when continuous girder, the support moments should be equal to those of suspended truss)
 $M_p(x)$ = bending moment on simple beam due to live load
 $M(x)$ = bending moment in the stiffening truss
 M_a = support moment at support "a"
 M_b = support moment at support "b"
 g = distributed dead load
 p = distributed live load
 η = deflection of stiffening truss due to live load
 y = ordinate of cable when the bridge is unloaded
 φ = tangent of slope of cable when the bridge is unloaded
 $m_p(x, z)$ = part of influence line depending directly on loading (See 3.)
 $m_q(x)$ = bending moment caused by $y'' \cdot 1^t$ distributed load
 $m_a(x), m_b(x)$ = bending moment caused by unit bending moment at support "a", respectively at "b"
 $\eta_q(x)$ = deflection caused by $y'' \cdot 1^t$ distributed load
 $\eta_H(x)$ = influence line for cable stress increment
 $v(x, z)$ = shearing force diagram and influence line respectively (see notations at m in footnotes)
 $\eta(x, z)$ = deflection diagram and influence line respectively (see notations at m in footnotes)
corr = footnote referring to corrected values
 $I; I(x)$ = moment of inertia for the stiffening truss
 I_0 = moment of inertia for the substituting stiffening truss
 F_c = area of cable section
 E = Youngs' modulus for stiffening truss
 E_c = Youngs' modulus for cable
 a_k = arithmetic mean of bays on the right and left of hanger k
 $k = \sqrt{\frac{Hr}{EI}}$
 $k_0 = \sqrt{\frac{Hr}{HI_0}}$
 ω = coefficient of temperature expansion
 x = abscissa of section
 z = abscissa of P concentrated load
 l = span of bridge
 μ = slope of stiffening truss due to unit support moment at the same support
 ν = slope of stiffening truss due to unit support moment at the other support

2. Deflection theory of suspension bridges

In general, statical calculations are performed on the shape of unloaded structures, that is to say, the effects on the shape, due to internal forces caused by loading, as these are only very small effects, are neglected.

The most important exception to this rule is the examination of loaded ropes, where the deflection is large and its effect is not negligible yet.

Another important exception is the compressed bar. In this case, however, the deflection is small, but the bending effect of compression force due to deflection is not small compared to that of lateral loading.

When analysing a tensioned bar, this effect is usually left out of consideration, as in the case of a tensioned bar, the effect of bending moment

caused by the tension force is usually small compared to that caused by lateral force, on the one hand, and this phenomenon increases safety, on the other hand.

Suspension bridges work analogously to a certain degree with bars in tension, but in this case the bending moment due to deflection is not a negligible quantity. Therefore, when analysing suspension bridges the effect of deflection should also be taken into consideration. This analysis is performed by the so-called deflection theory.

The one who dealt first with deflection theory was MÜLLER-BRESLAU in 1881 [1] and now a vast technical literature is available for practical application.

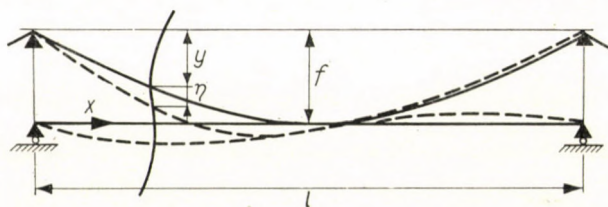


Fig. 1

The first suspension bridge designed and built on the basis of this theory is the Manhattan Bridge at New York having a 1470 feet long (= 448 m) middle span [7].

MÜLLER-BRESLAU in his theory uses many an approximation in the deduction, and this first theory has been corrected in some measure. The practical calculation, however, applies this theory, in general for the neglected effects in the theory are less important than the effect of the fact that the flexural rigidity of a stiffening truss is not constant which taken into consideration is a very complicated matter [4, 6, 8].

In the following successive approximation is presented with the aid of which the effect of the variation in flexural rigidity of stiffening truss can be computed.

This method can be practically applied also in the case when the influence lines are calculated, and the internal forces reckoned by them require a modification in the original cross-sections of the stiffening truss.

This method is applied to MÜLLER-BRESLAU's theory but it can be used for other theories as well.

When developing the new deflection theory, MÜLLER-BRESLAU starts out with the assumption that no internal stresses arise in the stiffening truss due to dead load, and the bending moment caused by dead load is borne by the cable only (Fig. 1).

The bending moment due to dead load on a simple beam at x is

$$M_g(x) = -\int \int g \, dx dx.$$

The bending moment due to cable stress caused by dead load is equilibrant to this moment, so if y is the ordinate of cable

$$H_g y = M_g(x). \quad (2,1)$$

The p load causes a

$$M_p(x) = -\int \int p \, dx dx \quad (2,2)$$

bending moment. The bending moment arising in the stiffening truss and the bending moment due to $(H_g + H)$ that is to say, the increased cable stress resists the $M_g(x)$ and $M_p(x)$ bending moments. The line of action of $(H_g + H)$ increased cable stress is not y , but $y + \eta$ due to deflection. So

$$M(x) + (H_g + H)(y + \eta) = M_g(x) + M_p(x). \quad (2,3)$$

Equ. (2,1) having been subtracted from Equ. (2,3) and Equ. (2,2) substituted into, the

$$M(x) + (H_g + H)\eta = -\int \int p \, dx dx - Hy \quad (2,4)$$

equality is obtained, which after a twofold differentiation and application of

$$-EI \eta'' = M(x)$$

relation, results in the

$$M''(x) - \frac{H_g + H}{EI} M(x) = -p - Hy'' \quad (2,5)$$

basic differential equation for suspension bridges.

It is to be noted that in Equ. (2,4) the quantities y and $M_p(x)$ should satisfy two boundary conditions owing to bending moments arising at the two boundaries of the span. Therefore, Equ. (2,4) is not suitable for computation work.

The H cable stress increment depends on the $M(x)$ bending moment in the basic differential-equation, that is to say, it is a semi-linear differential equation. Therefore, neither will $M(x)$ be proportional to p , in other words the *principle of superposition is not valid*. In consequence of this, the calculation methods used in engineering practice cannot be applied for this calculation.

On calculating the $(H_g + H)$ increased cable stress is assumed to be a known quantity and Equ. (2,5) is solved for this value. In general, the solution can be given with tabulated functions only for constant flexural rigidity of the stiffening truss.

Finally, it is to be controlled with the check-formula, deduced as under, whether the assumed increased cable stress caused by live load (moving load, change in temperature and growing from H to $(H_g + H)$) is accurate. The average of this increased cable stress is $\left(H_g + \frac{H}{2}\right)$, the load transferred by the hangers to the cable, grows from value g^* into $(g^* + p^*)$. Its average value is $\left(g^* + \frac{p^*}{2}\right)$. The external work caused by this loading is equal to the internal work due to cable stress.

The external work along all the spans is

$$L_e = \sum \int_0^l \left(g^* + \frac{p^*}{2}\right) \eta dx.$$

It is valid for the cable that

$$g^* + \frac{p^*}{2} = - (H_g + H) \frac{d^2}{dx^2} (y + \eta) \sim - (H_g + H) y''$$

thus, the external work is

$$L_e = - (H_g + H) \sum \int_0^l y'' \eta dx.$$

The internal work made along a ds elementary length is

$$dL_i = N \Delta ds$$

in which N is the average normal force, Δds is the change in length along the ds elementary length. But

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi},$$

$$N = \frac{H_g + \frac{H}{2}}{\cos \varphi},$$

$$\Delta ds = \frac{H ds}{E_c F_c \cos \varphi} + \omega t ds.$$

So

$$dL_i = \left(H_g + \frac{H}{2} \right) \left(\frac{H}{E_c F_c \cos^3 \varphi} + \frac{\omega t}{\cos^2 \varphi} \right) dx.$$

If the

$$L_s = \sum_0^l \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi} \quad (2,6)$$

and

$$L_t = \sum_0^l \int \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \quad (2,7)$$

symbols are introduced, the internal work made along the total length of the cable is

$$L_i = \left(H_g + \frac{H}{2} \right) \left(\frac{HL_s}{E_c F_c} + \omega t L_t \right).$$

As

$$L_e = L_i$$

the checking formula for controlling the assumed value of cable stress increment is

$$\sum_0^l \int y'' \eta dx + \frac{HL_s}{E_c F_c} + \omega t L_t = 0. \quad (2,8)$$

3. Influence line analysis

The relation under (2,5) is a semi-linear differential equation, as on the left hand side in the coefficient of $M(x)$, the H cable stress increment is a function of η from Equ. (2,6) and so, that of the same $M(x)$ quantity, also owing the relation

$$EJ \eta'' = -M(x).$$

If the $(H_g + H)$ increased cable stress is fixed, that is to say, its quantity is defined, so the quantity

$$H_r = H_g + H \quad (3,1)$$

on the left is a constant, the so-called fixed cable stress. Therefore, the differential equation under Equ. (2,5) is a linear one, for which the principle of superposition is valid. After, as above, the influence function (to say the Green function) of the

$$M''(x) - k^2 M(x) = -p - Hy'', \quad (3,2)$$

$$k^2 = \frac{H_r}{EI} \quad (3,3)$$

differential equation or (if the term used by the engineers is applied) the influence lines referring to the fixed cable stress can be produced in theory at least.

Based on influence lines, the effect referring to section in question can be determined by summing up (integrating) products of the right side and the adequate ordinate of the influence line. If the value of the right side is zero, except one abscissa where it is the unity, so its effect on the section in question is equal to the ordinate of the influence line to the section in question, referring to the abscissa, as above.

The right side of the basic differential equation can be divided into two parts. The first causes internal forces depending *directly* on the external load, that is to say, a part which can be calculated on the basis of Equ. (3,2) when the right side is $-p$. In this case the differential equation is

$$M_p''(x) - k^2 M_p(x) = -p. \quad (3,2a)$$

The other part causes internal forces depending *indirectly* on the external loading, i.e. the right side of the differential equation is $-Hy''$. In this expression H depends on the loading. The differential equation for this part is

$$M_q''(x) - k^2 M_q(x) = -Hy''. \quad (3,2b)$$

Based on Eqs. (3,2a) and (3,2b) and (3,2) the total bending moment is

$$M(x) = M_p(x) + M_q(x). \quad (3,2c)$$

Let us assume that an $m_p(x; z)$ influence line referring to the right side of Equ. (3,2a) is produced, in which x is the abscissa of section, z that of load. If x sections are closely taken the $m_p(x; z)$ influence lines loaded by $-Hy''$ distributed load results in the $M_q(x) = Hm_q(x)$ bending moment diagram. In practice, the solution of Equ. (3,2b) for $-Hy''$ disturbing member is preferred for this procedure.

If one imagines the cable as being intersected and the fixed cable stress is increased by H force, a $\Delta\mu$ relative dislocation arises between the points where the cable is intersected. This is equal to the horizontal projection of the change in length of the cable.

A $\Delta H m_q(x)$ bending moment due to ΔH force arising in the stiffening truss causes a $\Delta H \eta_q(x)$ vertical deflection which can be computed. The change in length based on Equ. (2,8), is

$$\Delta H \Delta\mu = \sum_1^n \int_0^l y'' \Delta H \eta_q(x) dx + \frac{\Delta H L_s}{E_c F_c}.$$

Based on Maxwell's theory the $\eta_H(x)$ influence line for H cable stress can be produced as a vertical deflection of the stiffening truss under the effect of the relative unit dislocation brought about in the cable imagined as being intersected. In other words, if a relative unit dislocation is inserted into the cable, the deflection is $\eta_{\Delta\mu=1}(x)$ and the influence line for H is

$$\eta_H(z) = \eta_{\Delta\mu=1}(x) \quad (x = z).$$

of $\Delta H \Delta\mu$ is the relative dislocation and $\Delta H \eta_q(x)$ is the deflection, so the influence line for cable stress increment is

$$\eta_H(z) = \eta_{\Delta\mu=1}(x) = \frac{\Delta H \eta_q(x)}{\Delta H \Delta\mu} = \frac{\eta_q(x)}{\sum_{i=1}^n \int_0^l y'' \eta_q(x) + \frac{L_s}{E_c F_c}} \cdot (x = z). \quad (3,4)$$

The bending moment caused by the P force acting at x , based on Equ. (3,2a), is

$$M(x) = P m_p(x; z),$$

the H cable stress increment from Equ. (3,4) is

$$H = P \eta_H(z),$$

the $M_q(x)$ bending moment based on Equ. (3,2b) is

$$M_q(x) = H m_q(x) = P m_q(x) \eta_H(z),$$

and from Equ. (3,2c) the bending moment in the stiffening truss is

$$M(x) = P [m_p(x; z) + m_q(x) \eta_H(z)],$$

thus, the influence line to be determined is

$$m(x; z) = m_p(x; z) + m_q(x) \eta_H(z). \quad (3,5)$$

Similarly the influence line for shearing force is

$$v(x; z) = v_p(x; z) + v_q(x) \eta_H(z) \quad (3,6)$$

and that for deflection

$$\eta(x; z) = \eta_p(x; z) + \eta_q(x) \eta_H(z). \quad (3,7)$$

4. Method for using influence lines

Knowing the influence lines, stresses and deformations can already be determined. Determining the bending moment of the stiffening truss, for instance, can be performed as follows.

Having determined the moment influence lines of cross-section x if the cable forces

$$(H_g + H_1); (H_g + H_2); \dots; (H_g + H_n)$$

are assumed to be fixed and permanent, one can obtain the design moments

$$M_1; M_2; \dots; M_n$$

and the design load positions

$$h_1; h_2; \dots; h_n.$$

It is to be noted that in the design moments there is contained, besides the fictitious loading ($= H_t y''$) due to temperature change, also the part of dead load which is borne both by cable and stiffening truss.

The design moments: M_1, M_2, \dots, M_n referring to any section x , are computed by differently assumed values of fixed increased cable stresses as $(H_g + H_1), (H_g + H_2); \dots; (H_g + H_n)$ and are plotted as a function of the different $(H_g + H)$ fixed increased cable stresses (Fig. 2a).

By loading the cable stress influence line with loads referring to $h_1; h_2; \dots; h_n$ design load positions, $H_1; H_2; \dots; H_n$ cable stress increments are obtained, also inclusive of the increase of dead load and the effect of temperature change.

The value of the computed cable stress increments H^* is plotted as a function of values of the fixed increased cable stress increment $(H_g + H)$. In Fig. 2b the increments of the afore-said cable stresses $H_1^*; H_2^*; \dots; H_n^*$ have been represented as function of $(H_g + H); \dots; (H_g + H_n)$. These refer to the case when the loading, under consideration, is decisive from the viewpoint of moments assumed under the cable stress. Of these, that cable stress increment H_i is valid where $H_i = H_i^*$. This cable stress increment is obtained, when a straight line at 45° starting from point H_g (to say $H^* = 0$) representing relation $H = H^*$ becomes intersected by the line of the plotted function of the cable force H^* .

Bending moment M_i referring to the effective cable stress increment H_i , presents the decisive bending moment for the section in question (Fig. 2a).

In static calculations based on influence lines the values of M and H are determined at values $(H_g + H)$ differently assumed; and at intermediate sections their values will be interpolated.

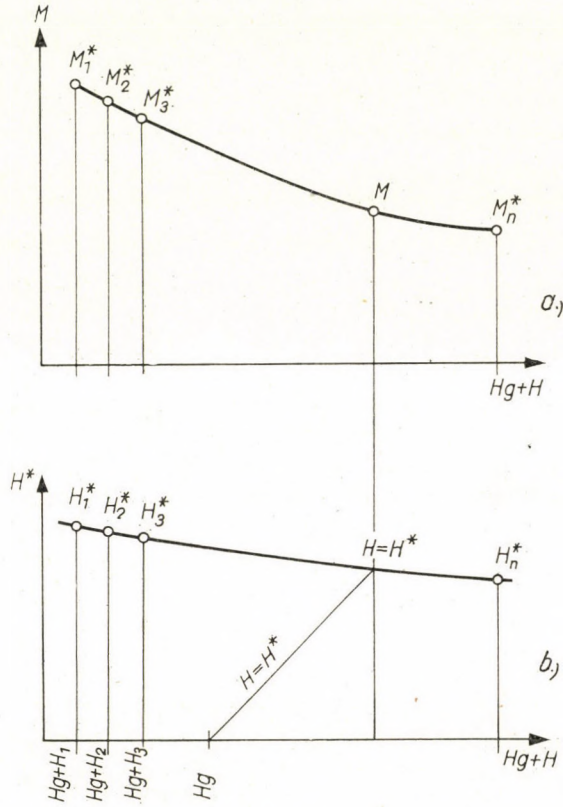


Fig. 2

The interpolation is linear if the influence lines are determined at two different values of H , and is parabolic (of second order) if the calculation was performed at three values of H [6].

5. Principle of a successive approximation for solving the basic differential equation

The basic differential equation referring to bending moment arising in the stiffening truss, is

$$M_p''(x) - k^2(x) M_p(x) = -p(x). \tag{5,1}$$

It is assumed that the solution of this differential equation can be produced for a given k_0 parameter, e. g. if the section of stiffening truss is constant, the influence lines can be computed with tabulated functions [2], [3].

The differential equation for this substituting truss is

$$M_0^{*''}(x) - k_0^2 M_0^*(x) = -p(x). \tag{5,2}$$

After Equ. (5,2) has been subtracted from Equ. (5,1) and the symbols

$$\begin{aligned} M_1(x) &= M_p(x) - M_0^*(x) \\ p_1(x) &= -M_0^*(x) (k_0^2 - k^2(x)) \end{aligned}$$

are used, the

$$M_1''(x) - k^2(x) M_1(x) = -p_1(x)$$

differential equation is obtained. If this differential equation is solved, the value of $M_p(x)$ is

$$M_p(x) = M_0^*(x) + M_1(x).$$

But this differential equation as the one above, has also variable coefficients, therefore, its solution is just as difficult to obtain as that of the basic differential equation. Therefore still remains the substituting differential equation to be solved.

If it has been solved on the substituting truss the bending moment obtained is $M_1^*(x)$ and the application of symbols

$$\begin{aligned} M_2(x) &= M_1(x) - M_1^*(x) \\ p_2(x) &= -M_1^*(x) (k_0^2 - k^2(x)) \end{aligned}$$

leads to the differential equation

$$M_2''(x) - k^2(x) M_2(x) = -p_2(x).$$

Repeating this procedure, differential equations

$$M_i^{*''}(x) - k_0^2 M_i^*(x) = -p_i(x) \quad (5,3)$$

($i = 0, \dots, n$) are solved, in which

$$p_i(x) = M_{i-1}^*(x) (k_0^2 - k^2(x)) \quad (5,4)$$

and the bending moment in question is

$$M_p(x) = M_0^*(x) + M_1^*(x) + \dots + M_i^*(x) + \dots \quad (5,5)$$

The convergence of this procedure is dealt with in literature under [5].

If the $m_p(x; z)$ and $\eta_H(z)$ influence lines of the substituting truss characterized by parameter k_0 is known, those of the actual suspension bridge characterized by parameter $k(x)$ can be produced with the method as above.

In this paper the principles deducted above are applied to Müller-Breslau's theory only, but it can be applied to other theories, too [4, 6, 8].

6. Application of the successive approximation to a two-hinged suspension bridge

If force P acts at point z on the truss of variable cross-section, the bending moment diagram can be developed on the basis of the successive approximation dealt with as above. The $M_0(x)$ bending moment diagram can be produced by loading the $m_p(x; z)$ influence lines of the substituting truss as per Eqs. (5,4) and (5,5).

The first complementary loading is

$$p_1(x) = -M_0^*(k_0^2 - k^2(x)) \quad (6,1)$$

with which the $m_p(x; z)$ influence lines are loaded and this renders the first complementary bending moment $M_1^*(x)$. The second complementary loading is

$$p_2(x) = -M_1^*(x) (k_0^2 - k^2(x)) \quad (6,1a)$$

with which the $m_p(x; z)$ influence lines are loaded, so the second complementary bending moment $M_2^*(x)$ is obtained, etc. In case k_0^2 is a good average value to $k^2(x)$ and the latter does not vary to a great degree, computing the first complementary bending moment will do.

The exact bending moment diagram is given by

$$M_p(x) = M_0^*(x) + \dots$$

These values give ordinates of the corrected influence lines for z place. The ordinates of the original influence lines are $m_p(x, z) = M_0^*(x)$, and so the corrections are

$$\Delta m_p(x; z) = M_1^*(x) + \dots \quad (6,1b)$$

Finally the corrected influence line is

$$m_{p\text{corr}}(x; z) = m_p(x; z) + \Delta m_p(x; z). \quad (6,1c)$$

It is suitable to determine the $M_1^*(x)$ complementary bending moment in the following way.

It is assumed that—for n sections—the span is sufficiently closely divided, and the ordinates of those referring to influence line

$$m_p(x_k; z_i)$$

are known. This influence line is equal to $M_0^*(x)$ bending moment diagram, if the $P = 1^t$ force acts at point z_k .

Concentric forces

$$s_1(x_k) = -m_p(x_k; z_i) (k_0^2 - k^2(x)) a_k$$

acting at every x_k place can be substituted for the fictitious distributed load

$$P_1(x_k) = -M_0^*(x_k) (k_0^2 - k^2(x)) = -m_p(x_k; z_i) (k_0^2 - k^2(x)).$$

The $m_p(x_j, x_k)$ influence lines relating to section x_j influence lines are loaded as the above loads and the first complementary bending moments are obtained being the first correction members

$$\Delta m_p(x_j; z_i) = - \sum a_k m_p(x_j; z_k) m_p(x_k; z_i) (k_0^2 k^2(x)).$$

If $M_1^*(x)$ is small for $M_0^*(x)$, computing the second secondary loading is superfluous.

All the other correcting members can be computed in a simple way on the basis of the known value of $\Delta m_p(x_j, z_i)$.

The $m_q(x)$ diagram can also be produced in such a way that the $m_p(x; z)$ influence lines are loaded with y'' , to say,

$$m_q(x) = \int_0^l y'' m_p(x; z) dz.$$

Thus, the corrected bending moment diagram is

$$\begin{aligned} m_{q\text{corr}}(x) &= \int_0^l y'' m_{p\text{corr}}(x; z) dz = \int_0^l y'' (m_p(x; z) + \Delta m_p(x; z)) dz = \\ &= \int_0^l y'' m_p(x; z) dz + \int_0^l y'' \Delta m_p(x; z) dz, \end{aligned}$$

or

$$m_{q\text{corr}}(x) = m_p(x) + \Delta m_q(x) \quad (6,2a)$$

in which the correction to the bending moment diagram $m_q(x)$ is

$$\Delta m_q(x) = \int_0^l y'' \Delta m_p(x; z) dz \quad (6,2b)$$

that it to say, it is to be obtained by loading the $\Delta m_p(x, z)$ correcting influence line with y'' .

The corrected deflection $\eta_{q\text{corr}}(x)$ diagram from Eqs. (2,4) and (3,2b) is

$$\eta_{q\text{corr}}(x) = - \frac{y - m_{q\text{corr}}(x)}{Hr}, \quad (6,3a)$$

in which y is the effective cable ordinate meeting the boundary conditions: $x = 0, y = 0$ and $x = l, y = 0$. Thus,

$$\eta_{q\text{corr}}(x) = - \frac{y - m_q(x)}{Hr} + \frac{\Delta m_q(x)}{Hr},$$

or in other words, the correction for the $\eta_q(x)$ deflection diagram is

$$\Delta \eta_q(x) = \frac{\Delta m_q(x)}{Hr} \quad (6,3b)$$

and the corrected value is

$$\eta_{q\text{corr}}(x) = \eta_q(x) + \Delta \eta_q(x). \quad (6,3c)$$

It was required for the $\eta_H(z)$ influence line [in Equ. (3,4)] to know the value of

$$T = \sum_0^l \int y'' \eta_q(dx) + \frac{L_s}{E_c F_c}.$$

The correction for this quantity is as per Equ. (6,3b)

$$\Delta T = \sum_0^l \int y'' \Delta \eta_q(x) dx = \frac{1}{H_r} \sum_0^l \int y'' \Delta m_q(x) dx \quad (6,4a)$$

and the corrected value for the influence line to the cable stress is

$$\eta_{H\text{corr}}(z) = \frac{\eta_q(z) + \Delta \eta_q(z)}{\sum_0^l \int y'' \eta_q(x) dx + \frac{L_s}{E_c F_c} + \frac{1}{H_r} \sum_0^l \int y'' \Delta m_q(x) dx}. \quad (6,4b)$$

Finally, the corrected values of bending moment influence line required are

$$m_{\text{corr}}(x; z) = m_{p\text{corr}}(x; z) + m_{q\text{corr}}(x) \eta_{H\text{corr}}(z). \quad (6,5)$$

Similarly the shearing force influence lines

$$v_{\text{corr}}(x; z) = v_{p\text{corr}}(x; z) + v_{q\text{corr}}(x) \eta_{H\text{corr}}(z). \quad (6,6)$$

The ordinates of the $V_{p\text{corr}}(x, z)$ may be determined by loading the $V_p(x, z)$ influence lines with y'' . But their approximative values can be produced by the method as follows.

The shearing force due to any given loading is

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}.$$

If $P = 1^t$ force acts at point z , the shearing force relating to x cross section is equal to the shearing force influence-line-ordinate relating to z abscissa, produced for cross section x . Thus,

$$v_p(x; z) = V_p(x) = \frac{dM_p(x)}{dx} = \frac{dm_p(x; z)}{dx}.$$

The corrected ordinates are

$$v_{p\text{corr}}(x; z) = \frac{dm_{p\text{corr}}(x; z)}{dx} = \frac{dm_p(x; z)}{dx} + \frac{d\Delta m_p(x; z)}{dx}$$

and thus,

$$v_{p\text{corr}}(x; z) = v_p(x; z) + \frac{d\Delta m_p(x; z)}{dx}. \quad (6,6a)$$

So to say, the $\Delta V_p(x, z)$ correction is equal to the derivate of $\Delta m_p(x, z)$ by x , which, in case the values x were taken closely enough, can be substituted by its differentia quotient.

After this, value of $V_{q\text{corr}}(x)$ may also be determined by loading the $V_p(x, z)$ correcting influence line with y'' . Thus,

$$v_{q\text{corr}}(x) = v_q(x) + \int_0^l y'' \Delta v_p(x; z) dz.$$

The deflection influence line is

$$\eta_{\text{corr}}(x; z) = \eta_{p\text{corr}}(x; z) + \eta_{q\text{corr}}(x) \eta_{H\text{corr}}(z) \quad (6,7a)$$

in which after using Eqs. (2,4) and (6,3a), the relation

$$\begin{aligned} \eta_{p\text{corr}}(x; z) &= - \frac{M_p(x; z) - m_{p\text{corr}}(x; z)}{Hr} = - \frac{M_p(x; z) - m_p(x; z)}{Hr} + \\ &+ \frac{\Delta m_p(x; z)}{Hr} = \eta_p(x; z) + \frac{\Delta m_p(x; z)}{Hr} \end{aligned}$$

is obtained.

Or, on the basis of this

$$\eta_{p\text{corr}}(x; z) = \eta_p(x; z) + \Delta \eta_p(x; z), \quad (6,7b)$$

$$\eta_{q\text{corr}}(x) = \eta_q(x) + \Delta \eta_q(x), \quad (6,7c)$$

and

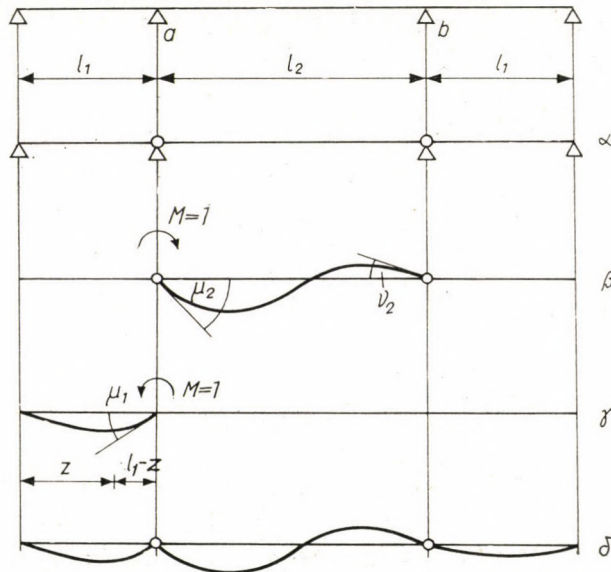
$$\Delta \eta_p(x; z) = \frac{\Delta m_p(x; z)}{Hr}, \quad (6,7d)$$

$$\Delta \eta_q(x) = \frac{\Delta m_q(x)}{Hr}. \quad (6,7e)$$

7. Influence line for suspension bridges of continuous stiffening truss

For the case of a continuous stiffening truss, the effect of continuity, must also be observed.

Under the effect of force $P = 1^t$ acting at z , a slope develops above the intermediate supports of the two-hinged "primary system" of the stiffening truss; and thus, a relative slope arises between the common endpoints of the two neighbouring two-hinged stiffening trusses. This relative slope is to be made 0 by the moment arising at supports.



When the stiffening truss is two-hinged, the effects to be determined are:

1. *directly depending* on the external loading and
2. *indirectly depending* on the external loading.

In case of a continuous stiffening truss, the same analysis is to be executed on the continuous truss.

First the internal forces and deformations due to support moments on the two-hinged "primary truss", and then, the continuous stiffening truss will be solved.

Further on, calculation will be executed on a three-span stiffening truss which is symmetric in relation to the centre of the middle-span (Fig. 3a).

Under the effect of the unit positive moment acting on the left-side support of the middle-span — as a two-hinged truss —, the slope at the left-side support is (Fig. 3β)

$$\eta' = \mu_2 \quad (7,1a)$$

and at the right side support it is

$$\eta' = \nu_1. \quad (7,1b)$$

In this way, under the effect of the unit negative moment acting at the right side support, the slope at the right- and the left-side support are

$$\eta' = -\mu_2,$$

respectively,

$$\eta' = -\nu_2.$$

Under the effect of the unit positive moment arising at the left side support of the right span as a two-hinged truss, the slope at the left side support is

$$\eta' = -\mu_1.$$

Likewise, the slope under effect of the unit negative moment arising above the right side support of the first span (Fig. 3 γ) is

$$\eta' = -\mu_1.$$

In a system consisting of two-hinged trusses, the stiffening truss in the left side span above support "a" will be loaded by external moment $-M_a$, that in the second span above support b by $-M_b$, that in the third span above the second support by M_b .

According to Eqs. (7,1a) and (7,1b), the slope at the right side of the middle-span is

$$\tan \alpha = M_a \nu_2 - M_b \mu_2.$$

The slope arising at the left side of the right side span is

$$\tan \beta = M_2 \mu_1.$$

In consequence of continuity, $\tan \alpha = \tan \beta$ and, thus

$$M_b = M_a \frac{\nu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

The slope at the left side of the middle-span is

$$\tan \gamma = M_a \mu_2 - M_b \nu_2 = M_a \left(\mu_2 - \frac{\nu_2^2}{\mu_1 + \mu_2} \right).$$

The slope above the right side support of the left side span is

$$\tan \delta = -M_a \mu_1.$$

The influence line for bending moment can be produced in such a way, too, that a unit relative slope is inserted at the place examined and so, the figure of the vertical deflection which had arisen will be identical with the influence line looked for.

In the case of a unit relative slope above support "a" (Fig. 3δ)

$$\tan \gamma - \tan \delta = 1,$$

to say

$$M_a \left(\mu_2 - \frac{\nu_2^2}{\mu_1 + \mu_2} \right) + M_0 \mu_1 = 1.$$

From this

$$M_a = \frac{\mu_1 + \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \nu_2^2} \quad (7,2)$$

respectively,

$$M_b = \frac{\nu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \nu_2^2}.$$

Knowing bending moments M_a and M_b the influence line of the left side ("a") moment (z measured from the left side support) based on Equ. (2,4) in the left side span is

$$m_1(l_1 - z) = M_a \frac{\frac{x}{l} - m_{m1}(l_1 - z)}{Hr} = M_a \eta_1(l_1 - z) \quad (7,3a)$$

where $\eta_1(z)$ is the vertical deflection of the two-hinged stiffening truss under the effect of unit moment acting at $z = l_1$. The footnote refers to number of span. Because of symmetry

$$\eta_1(l_1 - z) = \eta_3(z).$$

In the middle-span

$$m_2(z) = M_a \eta_2(z) + M_b \eta_2(l - z) \quad (7,3b)$$

and finally, in the right-side span

$$m_3(z) = M_b \eta_1(z). \quad (7,3c)$$

The influence line of support moment being known, the rest of influence lines can easily be produced.

The span under examination taken for a two-hinged one; the influence line cross-section x becomes known. The effect caused by the support moments, depending on loading and on its place, has to be added to the effect due to this influence line.

In case of moment influence lines, the effect of support moment at cross-section x is sought for.

The value of the moment arising at x examined under the effect of external moment $M = 1$ acting at the left side of the middle span, has to be determined. This moment is $m_m(x)$. The moment $m_1(l_1 - z)$ is to be multiplied by this $m_m(x)$ moment as a factor, in order to obtain the effect of continuity on the left side. As the moment influence-line of support b is a reflected image

of that of support a , the effect marked b is obtained if z is substituted by $(l_2 - z)$ and x by $(l_2 - x)$.

First, the values of the moment arising under effects directly depending on the external force $P = 1^t$, will be determined.

The moment influence line of the continuous truss can be produced as the amount of the three effects. They are: the effect on the two-hinged stiffening truss, and those raised by two support moments. Thus, the influence-line in the middlespan is

$$m_{p2}^c(x; z) = m_{p2}(x; z) + m_{m2}(x) m_2(z) + m_{m2}(l_2 - x) m_2(l_2 - z), \quad (7,4a)$$

for the left-side span

$$m_{p1}^c(l_1 - x; l_1 - z) = m_{p1}(l_1 - x; l_1 - z) + m_{m1}(l_1 - x) m_1(l_1 - z), \quad (7,4b)$$

and for the right-side span

$$m_{p3}^c(x; z) = m_{p1}(x; z) + m_{m1}(x) m_1(x). \quad (7,4c)$$

The part of moment directly depending on the external force can be determined by loading the influence line, indirectly depending on external forces, by distributed load y'' .

The resultant and deflection influence line can be determined in a similar way.

8. Application of the successive approximation to continuous stiffening truss

Solution of the "primary truss" referring to $m_p(x, z)$ bending moment influence line, $m_q(x)$ bending moment diagram caused by y'' distributed load and $m_m(x)$ bending moment diagram caused by unit support moment, was required for solving the substituting stiffening truss.

The

$$m_{p\text{corr}}(x; z) = m_p(x; z) + \Delta m_p(x; z)$$

influence line as well as the

$$m_{q\text{corr}}(x) = m_q(x) + \Delta m_q(x)$$

and

$$m_{m\text{corr}}(x) = m_m(x) + \Delta m_m(x)$$

bending moment diagrams are to be produced. The first two values can be determined by the method dealt with in part 6,0, with the Eqs. (6,1c) and (6,2a), the third by applying the in part 5,0 detailed method.

Similarly for shearing force (see part 6,0)

$$v_{p\text{corr}}(x; z) = v_p(x; z) + \frac{d\Delta m_p(x; z)}{dx},$$

$$v_{q\text{corr}}(x) = v_q(x) + \int_0^l y'' \frac{d\Delta m_p(x; z)}{dx}, \quad (8,2a)$$

$$v_{m\text{corr}}(x) = v_m(x) + \frac{d\Delta m_m(x)}{dx}. \quad (8,2b)$$

Slopes caused by support moments are

$$\mu = \eta'(0) = \left[\frac{-\frac{l-x}{l} - m_m(x)}{Hr} \right]_{x=0} = \frac{-1 - v_m(0)}{Hr},$$

$$v = \eta'(l) = \left[\frac{-\frac{l-x}{l} - m_m(x)}{Hr} \right]_{x=l} = \frac{-1 - v_m(l)}{Hr}.$$

Corrected values of these are

$$\mu_{\text{corr}} = \frac{-1 - v_m(0) - \Delta v_m(0)}{Hr} = \mu - \frac{\Delta v_m(0)}{Hr} \quad (8,3a)$$

and

$$v_{\text{corr}} = v - \frac{\Delta v_m(l)}{Hr}. \quad (8,3b)$$

Values of $M_{a\text{corr}}$ and $M_{b\text{corr}}$ can be determined by applying Eqs. (7,2a) and (7,2b). Ordinates of influence lines for bending moment based on Equ. (7,3a), are

$$m_{1\text{corr}}(l_1 - z) = M_{a\text{corr}} \frac{\frac{x}{l} - m_{1\text{corr}}(l_1 - z)}{Hr} =$$

$$= M_{a\text{corr}} \left[\eta_1(l_1 - z) - \frac{\Delta m_{m1}(l_1 - z)}{Hr} \right], \quad (8,4a)$$

$$m_{2\text{corr}}(z) = M_{a\text{corr}} \left[\eta_2(z) - \frac{\Delta m_{m1}(z)}{Hr} \right] +$$

$$+ M_{b\text{corr}} \left[\eta_2(l_2 - z) - \frac{\Delta m_{m2}(l_2 - z)}{Hr} \right], \quad (8,4b)$$

$$m_{3\text{corr}}(z) = M_{b\text{corr}} \left[\eta_1(z) - \frac{\Delta m_{m1}(z)}{Hr} \right]. \quad (8,4c)$$

The part of the influence line depending directly on loading, that is to say, influence line of continuous stiffening truss $m_p^c(x, z)$ is given by Eqs. (7,4a)—(7,4c)

$$m_{q\text{corr}}^c(x) = m_q^c(x) + \sum \int_0^{\infty} y'' \Delta m_p^c(x; z) dz = m_q^c(x) + \Delta m_q^c(x). \quad (8,5a)$$

Deflection caused by loading Hy'' as per Equ. (2,4) is

$$\eta_{q\text{corr}}^c(x) = - \frac{\bar{y} - m_{q\text{corr}}^c(x)}{Hr} \quad (8,5b)$$

Here \bar{y} is the two times integral at y'' . Introducing two integration constants c and d ,

$$\bar{y} = y + c + (d)x$$

The integration constants on the equivalent truss are: c_1 and d_1 . Thus

$$\begin{aligned} \eta_{q\text{corr}}^c(x) &= - \frac{y + c + (d)x - m_{q\text{corr}}^c(x)}{Hr} = \\ &= \eta_q^c(x) - \frac{c - c_1 + (d - d_1)x - \Delta m_q(x)}{Hr}. \end{aligned} \quad (8,5c)$$

As both at $x = 0$, $x = l$, $\eta_1^c(0) = \eta_1^c(l) = 0$ so

$$c - c_1 = \Delta m_q(0)$$

and

$$(c - c_1) + (d - d_1)l = \Delta m_q(l).$$

Therefore,

$$d - d_1 = \frac{\Delta m_q(l) - \Delta m_q(0)}{l}. \quad (8,5d)$$

In case, the extreme spans are not suspended, the adequate μ and ν values may be calculated on the existing truss as well as the $m_{1\text{corr}}(l_1 - z)$ and $m_{3\text{corr}}(z)$ parts of influence line, too.

It is to be noted, that the direct correction of influence line based on part 5,0 would not result in a correct value for a continuous stiffening truss. Namely, for a continuous stiffening truss, the extreme loads acting on a span are P force and M_a and M_b support moments. The result determined by direct correction is right in that case only, if the external loading would be the same, in any other case, the result is wrong. But in the case in question, the support moments M_a and M_b also depend on the moment of inertia, therefore, the support moments themselves vary, too.

REFERENCES

1. MÜLLER-BRESLAU, H.: Theorie der durch einen Balken versteiften Kette. *Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover*, 1881 und 1883.
2. PEERY, D.: An Influence Line Analysis for Suspension Bridges *Proc. ASCE* 1954 Dec. No. 558.
3. HAWRANEK, Á. and STEINHARDT, O.: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken (Wien, 1958).
4. SZIDAROVSKY, J.: Fügőhidak újabb elmélete a lehajlás figyelembevételével. MTA Műsz. Tud. Osztályközleményei XXV. kötet 1960. (in Hungarian) (A Newer Deflection Theory for suspension Bridges. Communication of the Engineering Department of the Hungarian Academy of Sciences, Vol XXV., 1960.)
5. SZIDAROVSKY, J.: Die Beanspruchung von Stäben mit verendlichem Querschnitt auf Biegung bei gleichzeitigem Druck. (*Acta Technica*, Tom. XXXI. 1960.)
6. SZIDAROVSKY, J.: A Practical Solution for Stiffened Suspension Bridges of Variable Inertia Moment and its Application to Influence-Line Analysis. *Acta Technica* Tom. XIX. 1958.)
7. JOHNSON, I. B., BRYAN, C. W. and TURNEAURE F. E.: The Theory and Practice of Modern Framed Structures (New York, 1929).
8. SZIDAROVSKY, J.: Corrected Deflection Theory of Suspension Bridges. (*ASCE. Proc. Journal ST* 11, 1960. No 2638.)

EINE STUFENWEISE NÄHERUNGSMETHODE FÜR DIE HERSTELLUNG
DER EINFLUSSLINIEN DER HÄNGEBRÜCKEN, WENN DER QUERSCHNITT
DES VERSTEIFUNGSTRÄGERS NICHT KONSTANT IST

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn die inneren Kräfte einer Hängebrücke mit der Voraussetzung bestimmt sind, daß der Querschnitt des Versteifungsträgers konstant ist, wegen der unterschiedlichen Steifigkeit des wirklichen und kalkulierten Trägers, müssen die berechneten inneren Kräfte korrigiert werden. Diese Modifizierung kann bestimmt werden als der Einfluß einer fiktiven Belastung, berechnet aus der Differenz zwischen den Steifigkeiten der wirklichen und der kalkulierten Versteifungsträger.

Der Aufsatz leitet eine stufenweise Näherungsmethode ab zur Bestimmung der inneren Kräfte und erstreckt sie auch auf die Korrigierung der Einflußlinien.

Diese Methode ist anwendbar zur Bestimmung der Einflußlinien einer Hängebrücke, wenn die Steifigkeit des Versteifungsträgers nicht konstant ist, oder wenn der Querschnitt des Versteifungsträgers, mit welchem die erste Berechnung durchgeführt wurde, korrigiert werden soll.

ÉTABLISSEMENT DES LIGNES D'INFLUENCE DES PONTS SUSPENDUS
RENFORCÉS DE SECTION VARIABLE, PAR LA MÉTHODE D'APPROXIMA-
TIONS SUCCESSIVES

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

Les forces intérieures d'un pont suspendu renforcé, déterminées par hypothèse d'une section constante, devront être modifiées du fait que la rigidité de la poutre diffère de celle de la poutre ayant servi de base au calcul. Cette modification pourra aussi être déterminée à partir de la charge fictive. Celle-ci est obtenue de la différence qui existe entre la rigidité effective de la poutre de renforcement, et celle de la poutre de section constante ayant servi de base au calcul.

En vue de la détermination de ces forces intérieures nécessitant une modification, l'auteur déduit une méthode d'approximations successives, en étendant aussi son procédé à la correction des lignes d'influence.

Le procédé se recommande pour l'établissement des lignes d'influence des poutres de renforcement de section variable, ainsi que dans les cas où les forces intérieures obtenues au cours du premier calcul rendent nécessaire la modification de la section originale.

ПОЛУЧЕНИЕ ГРАФИКОВ НАГРУЗКИ ПОДВЕСНОГО МОСТА С КРЕПЯЩЕЙ ОПОРОЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИ- БЛИЖЕНИЯ

Я. СИНДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

Если внутренние силы подвесного моста с крепящей опорой определены на основании предположения постоянного сечения, ввиду того, что твердость опоры не тождественна твердости служащей основой расчета опоры, расчетные внутренние силы требуют поправки. Эту поправку можно установить и на основании вычисленной разницы между действительной твердостью крепящей опоры и твердостью служащей для расчета опоры с постоянным сечением.

В работе дается вывод определения поправочных внутренних сил методом последовательного приближения; этот метод распространяется и на поправку графиков нагрузки.

Упомянутый метод может быть выгодно применен для получения графиков нагрузки крепящих опор с переменным сечением и в том случае, когда из-за полученных в процессе первого расчета внутренних сил первоначальное сечение необходимо изменить.

DIE ALLGEMEINEN AUSDRÜCKE DER MAGNETISCHEN KRÄFTE

GY. TEVAN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, LEHRSTUHL FÜR ELEKTROTECHNIK,
MISKOLC, UNGARN

[Eingegangen am 28. Februar 1961]

In dem vorliegenden Aufsatz werden die Ausdrücke der magnetischen Kräfte für eine beliebige Beziehung $\mathbf{B} \div \mathbf{H}$ beschrieben. Die Deutung des bezüglich der Kraftwirkungen in Betracht kommenden Arbeitsausdruckes wird physikalisch begründet, und die allgemeine Formel der Kraftdichte wird in Bezug auf den von Diskontinuitäten freien Raum aus diesem Arbeitsausdruck abgeleitet. Es wird der Tensor der Maxwell'schen Spannungen für den allgemeinen Fall angeschrieben, und schließlich werden auch die Diskontinuitäten mit Hilfe der Oberflächenkräfte in Betracht gezogen, und es wird zur Berechnung der Resultierenden eines auf einen geschlossenen Raumteil wirkenden magnetischen Kräftesystems eine allgemeine Formel angegeben.

1. Deutung der mit den Kraftwirkungen verbundenen magnetischen Energie

Wie bekannt, kann die magnetische Energie bzw. Energiedichte im allgemeinen Fall — unter Vermeidung der thermodynamischen Beziehungen — nicht eindeutig interpretiert werden [2]. Da es jedoch zur Berechnung der Kraftwirkung eines Ausdruckes für die Energie bedarf, da ferner die Kräfte unter gegebenen Bedingungen eindeutig bestimmte Werte besitzen, so muß es einen eindeutig bestimmten Ausdruck von der Dimension Energie bzw. Energiedichte geben, der mit der Kraftwirkung in Beziehung steht. Vor allem wollen wir diesen Ausdruck bestimmen.

Zunächst wollen wir uns auf den Fall von gleichgerichteten \mathbf{B} und \mathbf{H} beschränken. Hier muß die Frage beantwortet werden, über welchen Weg L der Ausdruck $\int_{(L)} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ gebildet werden soll (L stellt eine Kurve der Koordinatenebene $\mathbf{H}-\mathbf{B}$ dar), um die Energiedichte im obigen Sinne in einem Punkt des Raumes zu erhalten.

Den Endpunkt des Weges L stellt allerdings der Punkt P_1 dar, der zu den Werten B_1 und H_1 im untersuchten Punkte des Raumes gehört (siehe Abb. 1).

Andererseits muß der Weg L den absteigenden Ast der Hysterisis-Kurve mit dem Scheitelpunkt P_1 , d. h. die Kurve $P_1 - P_0$ durchlaufen, da doch die durch das magnetische Feld geleistete Arbeit in Bezug auf diesen Weg, d. h. die Arbeit, die nach Umsetzung des Hysterisisverlustes in Wärme übrig bleibt,

erhalten wird. Dieser absteigende Ast hängt bekannterweise von dem Wertepaar H_1, B_1 , ferner auch von der vorangehenden Feldmagnetisierung ab (gestrichelte Linie der Abbildung), stellt jedoch für einen gegebenen Fall eine eindeutig bestimmte Kurve dar. Als Ausgangspunkt des Weges L muß der zu $H = 0$ gehörende Punkt P_0 gewählt werden, da wir in diesem Fall den größten Wert des Integrals $\int_{(L)} HdB$ erhalten, d. h. die maximale Arbeit je Volumeneinheit, die durch das magnetische Feld geleistet werden kann.

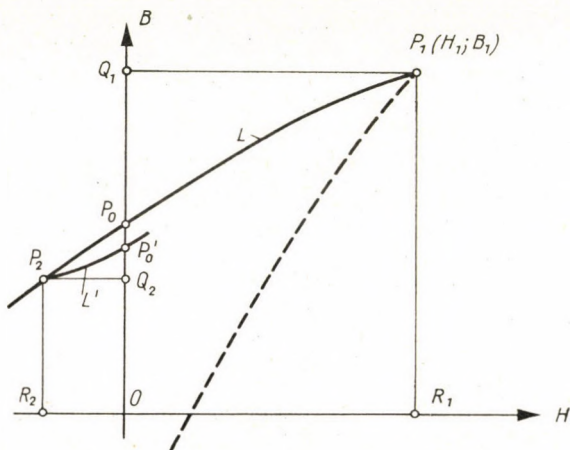


Fig. 1

(In der Abb. 1 wird diese maximale Arbeit durch die Fläche $P_0P_1Q_1$ dargestellt.) Diese Arbeitsdefinition kann auch auf einen permanenten Magneten übertragen werden. (Für die Energie des permanenten Magneten wird in der Literatur, so z. B. in [4], ein anderer Ausdruck verwendet.) Wenn nämlich von dem durch den Luftspalt des permanenten Magneten bedingten Punkt P_2 ausgegangen durch eine Armatur mit prinzipiell unendlicher Permeabilität der Luftspalt stufenweise aufgehoben wird, so wird die frei werdende Energie der Fläche $P_2P_0Q_2$ entsprechen, wobei jetzt die Kurve P_2P_0' den aufsteigenden Ast der Hysteresis Kurve mit dem Scheitelpunkt P_2 darstellt. Diese Energie kann auch in Form von elektrischer Energie erhalten werden: die stufenweise Aufhebung des Luftspaltes wird in der Weise durchgeführt, daß inzwischen der Strom einer äußeren Spule stufenweise verstärkt wird, wobei der permanente Magnet auch weiterhin in dem dem Punkt P_2 entsprechenden Zustand verbleibt und seine Energie unverändert beibehält. Hiernach wird der Strom stufenweise zum Verschwinden gebracht, wobei der Flux des permanenten Magneten entlang der Kurve P_2P_0' zunimmt, und die magnetische Energie wird durch Induktion in der Spule in elektrische Energie umgesetzt. Die Energie des völlig geschlossenen permanenten Magneten wird somit im Sinne

der obigen Deutung verschwinden. Durch Zusammenfassung der bisherigen Erörterungen kann gesagt werden, daß für gleichgerichtete \mathbf{H} und \mathbf{B} der mit der Kraftwirkung in Verbindung stehende Arbeitsausdruck in Form einer Energiedichte durch das Integral $\int_{(L)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ gegeben wird, wenn L den absteigenden oder aufsteigenden Ast der Hysteresiskurve darstellt, je nachdem \mathbf{H} und \mathbf{B} gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Für nicht gleichgerichtete \mathbf{H} und \mathbf{B} liegt die folgende Verallgemeinerung auf der Hand: Bezüglich der Kraftwirkung ist der folgende Ausdruck in Form einer Energiedichte in Betracht zu ziehen:

$$w_m = \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}', \quad (1)$$

wobei \mathbf{B}_0 den zu $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ gehörigen Wert von \mathbf{B}' darstellt, und die Beziehung $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{H})$ unter den Beziehungen $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ dadurch ausgezeichnet wird, daß einerseits bei $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_1$ ist (\mathbf{H}_1 und \mathbf{B}_1 stellen die Werte von \mathbf{H} und \mathbf{B} in dem untersuchten Punkt des Raumes dar), andererseits würde die äußere Arbeitsleistung entlang dieser Beziehung verwirklicht werden. Diesen letzteren Umstand können wir in der Weise genauer formulieren, daß die Richtung des die Magnetisierung des Stoffes charakterisierenden Vektors $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}'}{\mu_0} - \mathbf{H}$ entlang $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{H})$ unverändert bleibt, während sich seine Größe monoton ändert, in Richtung der Erreichung des Zustandes $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Wir wollen hier bemerken, daß die durch die Kraftwirkungen hervorgerufenen Verschiebungen im allgemeinen nicht derart beschaffen sind, daß sich \mathbf{B} und \mathbf{H} in jedem Punkte des Raumes in der bisher erwähnten Weise ändern. So ist z. B. die Ziehkraft eines Elektromagneten derart gerichtet, daß sie die magnetische Energie des Systems zu erhöhen bestrebt ist. Wir können uns jedoch auch solche Änderungen und Verschiebungen vorstellen, die in der beschriebenen Weise erfolgen. In den späteren Ableitungen (im 2. Teil) handelt es sich eben um solche Änderungen und Verschiebungen und um die diesen Verschiebungen entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren.

Auf Grund der Beziehung (1) wird in Bezug auf den ganzen Raum die aus der magnetischen Energie frei werdende Arbeit durch den Ausdruck

$$W_m = \int_{(V)} \left(\int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' \right) dV \quad (2)$$

gegeben.

Bezüglich der Gleichung (2) taucht die Frage auf, ob der Anfangszustand $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_0$ in Bezug auf den ganzen Raum verwirklicht werden kann. Kommt doch durch Aufhebung der äußeren Ströme dieser Zustand im allgemeinen nicht zustande, da die zu den verschiedenen Punkten des Raumes

gehörigen \mathbf{B}_0 -Werte keine divergenzfreie Verteilung ergeben würden. Wenn wir jedoch auch die Verschiebung der Partikeln zulassen, so kann eine solche Umgruppierung der Partikeln erfolgen, bei der nach Aufhebung der äußeren Ströme im ganzen Raum $\mathbf{H} \equiv \mathbf{0}$ wird. Ein Beispiel hierfür: ein halbringförmiger permanenter Magnet reißt einen genau gleichen Magneten an sich, wobei die beiden Magneten luftspaltfrei aneinanderpassen. Obschon es wahr ist, daß eine beliebige Bewegung der Teilchen bei festen Körpern nicht verwirklicht wird, und so der Zustand $\mathbf{H} \equiv \mathbf{0}$ im allgemeinen nicht verwirklicht werden kann, bei magnetischen Flüssigkeiten kann sich jedoch dieser Zustand einstellen, und so erweist sich der Ausdruck (2) als richtig. Bei festen Körpern kann ein Teil der prinzipiell freizusetzenden Arbeit, deren Wert durch Gl. (2) gegeben ist, in der Wirklichkeit nicht erhalten werden, sie bleibt latent.

Obwohl es streng genommen nicht hierher gehört, wollen wir zur Unterstützung der obigen Ausführungen doch untersuchen, bei welcher Anfangswertverteilung $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ und $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ die maximal frei werdende Arbeit erhalten wird, wenn wir die Verschiebung der Teilchen nicht zulassen. Da $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ nicht beliebiger Art sein kann, da $\text{div } \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = 0$ ist, so wollen wir das durch $\text{rot } [\mathbf{C}(\mathbf{r})] = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ bestimmte Vektorpotential $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ mit der Bedingung variieren, daß auch das variierte \mathbf{C} , wie das tatsächliche Vektorpotential, gegen unendlich wie $1/r$ abnimmt.

Zur Auffindung des Extremwertes wollen wir die Variation der Arbeit bilden:

$$\begin{aligned} \delta W_m &= \delta \left[\int_{(V)} \left(\int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV \right] = \int_{(V)} \left(\int_{\mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}_1} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} - \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV = \\ &= - \int_{(V)} \left(\int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV = - \int_{(V)} (\mathbf{H}_0 \cdot \delta \mathbf{B}_0) dV = - \int_{(V)} [\mathbf{H}_0 \cdot \text{rot}(\delta \mathbf{C})] dV = \\ &= \int_{(V)} \text{div}(\mathbf{H}_0 \times \delta \mathbf{C}) dV - \int_{(V)} (\delta \mathbf{C} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0) dV = \\ &= - \int_{(V)} (\delta \mathbf{C} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0) dV, \end{aligned}$$

da nach dem Satz von Gauss

$$\int_{(V)} \text{div}(\mathbf{H}_0 \times \delta \mathbf{C}) dV = \oint_{(A)} (\mathbf{H}_0 \times \delta \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{A} = 0$$

ist. In der Nähe der unendlich fernen Fläche A strebt nämlich \mathbf{H}_0 wie $1/r^2$, während $\delta \mathbf{C}$ wie $1/r$ gegen Null. An den Diskontinuitätsflächen springt nur die normale Komponente von \mathbf{H}_0 , hierfür ist aber das gemischte Produkt $(\mathbf{H}_{0n} \times \delta \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{A} = (d\mathbf{A} \times \mathbf{H}_{0n}) \cdot \delta \mathbf{C}$ gleich Null. So kann δW_m bei beliebigem $\delta \mathbf{C}$ nur dann verschwinden, wenn $\text{rot } \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}$ ist.

Wenn sich also die Teilchen überhaupt nicht bewegen können, so kann die während der Entmagnetisierung frei werdende maximale Arbeit dann erhalten werden, wenn die untere Grenze des Integrals dem stromlosen Zustand entspricht. Eine solche Deutung, die als Nullpunkt der fraglichen Energie den stromlosen Zustand bei unbewegten Teilchen betrachtet, ist jedoch vom Gesichtspunkt der Kraftwirkungen aus nicht geeignet. Die Energie eines permanenten Magneten wäre nämlich nach dieser Deutung gleich Null, und somit auch die aus ihr berechenbare Kraft, in Widerspruch mit der Erfahrung.

Es sei schließlich bemerkt, daß die spezifische Arbeit nach Ausdruck (1) bei konstanter Temperatur verstanden wird; die so gedeutete spezifische Arbeit stellt somit eigentlich die Dichte der thermodynamischen freien Energie dar [1].

2. Die Bestimmung der Kraftdichte

Um die Diskontinuitäten zunächst los zu werden, wollen wir den Ausdruck der Kraftdichte zuerst für eine stetige Stoffqualitätsverteilung ableiten. Auf die auf die Grenzflächen wirkenden Kräfte wollen wir im Teil 4 zurückkommen.

Im Ausdruck (1) wollen wir zu einer veränderlichen oberen Grenze übergehen und der Einfachheit halber wollen wir an Stelle von \mathbf{B}' ebenfalls die Bezeichnung \mathbf{B} verwenden. Demgemäß erhalten wir:

$$w_m = \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \, d\mathbf{B} \quad (1a)$$

und aus Gl. (2) ergibt sich

$$W_m = \int_{(V)} w_m \, dV. \quad (2a)$$

Da \mathbf{B}_0 den zu $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ gehörigen Wert von \mathbf{B} darstellt, ist es bequemer, wenn wir auf Grund der Beziehung

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = d(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}$$

zur Integrierung nach \mathbf{H} übergehen:

$$w_m = \int_{\mathbf{0} \cdot \mathbf{B}_0}^{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}} d(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \quad (3)$$

(vgl. [4] Gleichung (35) auf S. 126).

Durch Einführung der Bezeichnung

$$w_1 = \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \quad (4)$$

können wir Gl. (3) kurz in folgender Form anschreiben:

$$w_m = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - w_1. \quad (3a)$$

Es sei bemerkt, daß der Wert von w_1 nach (4) bei gleichgerichteten \mathbf{B} und \mathbf{H} durch die Fläche $O P_0 P_1 R_1$ der Abb. 1, bzw. bei einem permanenten Magneten durch die Fläche negativen Vorzeichens $OP'_0 P'_2 R_2$ dargestellt wird.

Wir wollen nun den Differentialquotienten der Arbeit nach (2a) nach der Zeit bilden, den wir in der Folge magnetische Leistung nennen werden. Durch eine bekannte vektoranalytische Umformung erhalten wir aus (2a):

$$p_m = \frac{dW_m}{dt} = \int_{(V)} \left[\frac{\partial w_m}{\partial t} + \operatorname{div}(w_m \mathbf{v}) \right] dV,$$

wo \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor des sich bewegenden Volumteils dV bedeutet.*

Da nach dem Satz von GAUSS

$$\int_{(V)} \operatorname{div}(w_m \mathbf{v}) dV = \oint_{(A)} w_m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A},$$

und dies gleich Null ist, da sich die Fläche A bei der Integrierung über den ganzen Raum im unendlichen befindet, und w_m bei der Zunahme des Abstandes über alle Grenzen hinaus wie $1/r^4$ gegen 0 strebt. Demgemäß ist

$$p_m = \int_{(V)} \frac{\partial w_m}{\partial t} dV.$$

Auf Grund von (3a) ist

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t}.$$

Da \mathbf{B} eine Funktion von \mathbf{H} und der magnetischen Eigenschaften des Stoffes ist — und das Gleiche gilt auf Grund von (4) auch für w_1 — so kann der Wert von $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ als die Summe von zwei Gliedern dargestellt werden. Das

* Die Änderungen und Verschiebungen gehen nach dem im Teil I Gesagten vor sich.

eine Glied ergibt sich aus der Änderung von \mathbf{H} , wobei die stoffliche Beschaffenheit unverändert bleibt, das zweite Glied ergibt sich aber aus der Änderung der stofflichen Beschaffenheit, wobei \mathbf{H} konstant bleibt, d. h. [unter Verwendung von (4) im zweiten Schritt]

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}}$$

Es ist somit

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}}$$

und

$$P_m = \int_{(V)} \frac{\partial w_m}{\partial t} dV = \int_{(V)} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV - \int_{(V)} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} dV \quad (5)$$

Das erste Glied der rechten Seite ergibt sich auf Grund der zweiten Maxwellschen Gleichung, die auch die Bewegungsinduktion in Betracht zieht, sowie mit Hilfe von vektoranalytischen Umformungen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\mathbf{H} \cdot \text{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \text{div}[\mathbf{H} \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B})] - \\ &\quad - (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \text{rot} \mathbf{H} = \text{div}[\mathbf{H} \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B})] - \\ &\quad - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{H}) . \end{aligned}$$

Bei der Integrierung über den ganzen Raum verschwindet auch hier das Glied der Divergenz; in einem quasistationären Zustand ist ferner nach der ersten Maxwellschen Gleichung $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ (wo \mathbf{J} den Vektor der Stromdichte bedeutet), es ist somit

$$\int_{(V)} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV = - \int_{(V)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV + \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{J}) dV \quad (6)$$

Im zweiten Glied der rechten Seite der Gl. (5) drücken wir den Integranden durch den totalen Differentialquotienten nach der Zeit aus, wobei wir berücksichtigen, daß dieser Differentialquotient bei $\mathbf{H} = \text{konst.}$ nur aus dem Grunde nicht verschwindet, weil die magnetische Beschaffenheit des Stoffes auch von der zeitabhängigen Stoffdichte β abhängt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} &= \left(\frac{dw_1}{dt} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} - \mathbf{v} \cdot (\text{grad} w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} = \\ &= \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \cdot \frac{d\beta}{dt} - \mathbf{v} \cdot (\text{grad} w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} . \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der Konstanz der Masse, daß $\frac{d}{dt} \int_{(V)} \beta dV = 0$ ist,

d. h. — bei Verwendung des im vorangehenden benutzten vektoranalytischen Satzes —

$$\int_{(V)} \left[\frac{\partial \beta}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta \mathbf{v}) \right] dV = 0 \text{ ist, woraus wegen des beliebigen Wertes von } V$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta \mathbf{v}) = 0, \text{ und hieraus}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \beta + \beta \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ somit}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\beta \operatorname{div} \mathbf{v}$$

folgt. Damit wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} &= - \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \cdot \beta \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\operatorname{grad} w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} = \\ &= - \operatorname{div} \left[\mathbf{v} \beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right] + \\ &+ \mathbf{v} \cdot \left\{ \operatorname{grad} \left[\beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right] - (\operatorname{grad} w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right\}. \end{aligned}$$

Bei der Integration über den ganzen Raum verschwindet das Glied der Divergenz, es ist somit

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} dV = \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot \left\{ \operatorname{grad} \left[\beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right] - (\operatorname{grad} w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right\} \cdot dV. \quad (7)$$

Werden die Gl. (6) und (7) in Gl. (5) eingesetzt, so ergibt sich die magnetische Leistung zu

$$\begin{aligned} p_m &= - \int_{(V)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV + \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot \left\{ \mathbf{B} \times \mathbf{J} + (\operatorname{grad} w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{grad} \left[\beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right] \right\} dV. \end{aligned} \quad (8)$$

Da $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \varrho \mathbf{J}$ ist, wo \mathbf{E}_i die den fremden Spannungen entstammende Feldstärke und ϱ den spezifischen Widerstand bedeutet, so lautet das erste Glied der Gl. (8):

$$- \int_{(V)} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV = \int_{(V)} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} dV - \int_{(V)} \varrho \mathbf{J}^2 dV,$$

d. h. die Differenz der durch die fremden Stromquellen gelieferten und der in Joulsche Wärme umgesetzten Leistungen. Demgemäß stellt das zweite Glied der rechten Seiten der Gl. (8) die mit negativem Vorzeichen genommene mechanische Leistung dar:

$$P_{\text{mech.}} = \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot \left\{ \mathbf{J} \times \mathbf{B} - (\text{grad } w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} + \text{grad} \left[\beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right] \right\} dV.$$

Hieraus folgt für die Kraftdichte:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - (\text{grad } w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} + \text{grad} \left[\beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right]. \quad (9)$$

Auf der rechten Seite der Gl. (9) stellt das erste Glied die auf den Strom wirkende Kraft, das zweite Glied die der Inhomogenität der magnetischen Beschaffenheit des Stoffes entstammende Kraft und das dritte Glied die die Erscheinung der Magnetostriktion erklärende Kraft dar. Wenn \mathbf{B} -Werte, die jenseits des linearen Abschnittes der ersten Magnetisierungskurve liegen, nicht vorkommen, so ist $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ und aus Gl. (4) $w_1 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$ und so erhalten wir aus Gl. (9) die bekannte Beziehung:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \text{grad } \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left(\beta \mathbf{H}^2 \frac{d\mu}{d\beta} \right), \quad (9a)$$

die also einen besonderen Fall der Gl. (9) darstellt.

3. Der Tensor der Maxwell'schen Spannungen

Die Kraftdichte können wir noch in einer anderen Form anschreiben. Wenn wir an Stelle von \mathbf{J} wieder $\text{rot } \mathbf{H}$ schreiben, so erhalten wir für das erste Glied auf Grund der tensoriellen Deutung der Rotation:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{B} &= \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} \right)^* \right] \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} - \\ &- \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} = (\text{Grad } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{Grad } \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Andererseits durch Berücksichtigung der Beziehung:

$$\text{grad } w_1 = (\text{grad } w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} + \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}}$$

gestaltet sich das zweite Glied der Gl. (9) folgendermaßen:

$$-(\text{grad } w_1)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} = -\text{grad } w_1 + \mathbf{B} \cdot \text{Grad } \mathbf{H},$$

da auf Grund von Gl. (4) $\frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{H}} = \mathbf{B}$ ist.

Damit erhalten wir

$$\mathbf{f} = (\text{Grad } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B} - \text{grad} \left[w_1 - \beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} \right].$$

Durch Einführung der nachstehenden Bezeichnung:

$$w_2 = w_1 - \beta \left(\frac{dw_1}{d\beta} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}} = \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} - \beta \left(\frac{d}{d\beta} \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right)_{\mathbf{H}=\text{konst.}}, \quad (10)$$

erhalten wir für die Kraftdichte:

$$\mathbf{f} = (\text{Grad } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B} - \text{grad } w_2.$$

Wenn wir zu der rechten Seite den Ausdruck $\mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} = \mathbf{0}$ addieren, so erhalten wir

$$\mathbf{f} = \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} + (\text{Grad } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B} - \text{grad } w_2.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit einem beliebigen konstanten Vektor \mathbf{k} erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{f} &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) \text{ div } \mathbf{B} + \mathbf{k} \cdot (\text{Grad } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{k} \cdot \text{grad } w_2 = \\ &= \text{div} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{B}] - \text{div} (\mathbf{k} w_2), \end{aligned}$$

da $\text{grad} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) = \mathbf{k} \cdot \text{Grad } \mathbf{H}$ ist.

Demgemäß erhalten wir auf Grund der Deutung der Divergenz eines Tensors:

$$\mathbf{f} = \text{div} (\mathbf{H} \circ \mathbf{B} - w_2 \mathbf{I}). \quad (11)$$

(Hier bezeichneten wir das diadische Produkt mit einem Kreis und den Einheitstensor mit \mathbf{I}).

Der in Gl. (11) vorkommende Tensor stellt den Tensor der magnetischen Maxwell'schen Spannungen im allgemeinen Fall dar.

Dieser Tensor geht für den Fall von $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, auf Grund der Gl. (10) und (11) in die bekannte Form

$$\mu \mathbf{H} \circ \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \left(1 - \frac{\beta}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\beta} \right) \mathbf{I}$$

über, die somit einen besonderen Fall von Gl. (11) darstellt.

4. Oberflächenkräfte; Kräfte, die auf die Grenzfläche von Stoffen verschiedener magnetischer Beschaffenheit wirken

Die magnetische Kraftwirkung, die auf den im endlichen geschlossenen Volumen V befindlichen Stoff einwirkt, kann offenbar aus dem auf das Volumen V entfallenden Anteil der Kraftdichte (9) berechnet werden.

Die in den Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r} reduzierte Kraft und das Moment lauten:

$$\mathbf{F} = \int_{(V)} \mathbf{f} dV \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV.$$

Unter Verwendung der Gl. (11) und unter Anwendung einer Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes erhalten wir:

$$\mathbf{F} = \int_{(A)} (\mathbf{H} \circ \mathbf{B} - w_2 \mathbf{I}) d\mathbf{A} = \int_{(A)} [\mathbf{H} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - w_2 \mathbf{n}] dA,$$

wo A die den endlichen Raumteil begrenzende Fläche und $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$ den aus dem Raumteil nach außen weisenden elementaren Flächenvektor bedeutet, dessen Einheitsvektor der zur Fläche normale Vektor \mathbf{n} , und dessen absoluter Wert dA ist. Durch Einführung der Bezeichnung

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{H} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - w_2 \mathbf{n}, \quad (12)$$

die wir als Flächenkraft bezeichnen können, erhalten wir:

$$\mathbf{F} = \int_{(A)} \mathbf{f}_A dA, \quad (13a)$$

wo A die begrenzende Fläche des geschlossenen Raumteils bedeutet.

Ferner kann auf Grund der Definition der Divergenz eines Tensors nachgewiesen werden, daß — ähnlich wie in Gl. (11) —

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \operatorname{div} [(\mathbf{r} \times \mathbf{H}) \circ \mathbf{B} - w_2 \mathbf{r} \times \mathbf{I}] + \mathbf{H} \times \mathbf{B}.$$

Durch Anwendung der bereits erwähnten Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes, auf Grund der Beziehung $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$ und mit der Bezeichnung (12) erhalten wir somit:

$$\mathbf{M} = \int_{(A)} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_A dA + \int_{(v)} \mathbf{H} \times \mathbf{B} dV. \quad (13b)$$

Aus den Beziehungen (13a) und (13b) können wir ersehen, daß die Flächenkräfte \mathbf{f}_A nach (12) bezüglich der reduzierten Kraft immer, bezüglich des

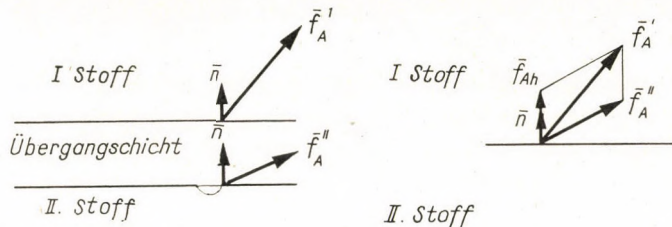


Fig. 2

reduzierten Momentes aber für gleichgerichtete \mathbf{H} und \mathbf{B} , das auf V einwirkende Kräftesystem ersetzen. [Bei gleichgerichteten \mathbf{H} und \mathbf{B} verschwindet das zweite Glied der Gl. (13b).]

Zur Bestimmung der Kräfte, die auf die Grenzfläche der Stoffe verschiedener magnetischer Beschaffenheit einwirken, ersetzen wir zunächst den sprunghaften Übergang der Stoffbeschaffenheit durch einen stetigen Übergang endlicher Dicke, um dann die Dicke des Überganges über alle Grenzen hinaus zu verringern (Abb. 2).

Wenn wir an der Begrenzungsfläche den normalen Einheitsvektor als von dem Stoff II gegen den Stoff I weisend annehmen, so wird bei der Anwendung von (13a) die nach außen weisende Normale der Grenze der noch als endlich vorausgesetzten Übergangsschicht bei dem Stoff I die Richtung von \mathbf{n} , bei dem Stoff II dagegen die entgegengesetzte Richtung haben.

Nach Durchführung des Grenzüberganges erhalten wir somit:

$$\mathbf{F} = \int_{(A)} (\mathbf{f}'_A - \mathbf{f}''_A) dA.$$

Auf Grund von (13b) erhalten wir auf die gleiche Weise:

$$\mathbf{M} = \int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{f}'_A - \mathbf{f}''_A) dA.$$

Das zweite Glied von (13b) verschwindet bei dem Grenzübergang. Daher wird das Kräftesystem, das auf die Grenzfläche der Stoffe verschiedener

magnetischer Beschaffenheit einwirkt, durch die Flächenkraft

$$\mathbf{f}_{Ah} = \mathbf{f}'_A - \mathbf{f}''_A \quad (14)$$

vollkommen ersetzt. Werden die Vektoren \mathbf{H} und \mathbf{B} in ihre normalen und tangentialen Komponenten zerlegt, und wird berücksichtigt, daß $B'_n = B''_n = B_n$ und $H'_t = H''_t = H_t$, so erhalten wir auf Grund der Beziehungen (12) und (14):

$$\mathbf{f}_{Ah} = [(H'_n - H''_n) B_n - (w'_2 - w''_2)] \mathbf{n}. \quad (14a)$$

Wie ersichtlich, stehen die Grenzflächenkräfte zur Oberfläche senkrecht. Wenn die linearen Beziehungen

$$\mathbf{B}' = \mu' \mathbf{H}' \quad \text{und} \quad \mathbf{B}'' = \mu'' \mathbf{H}''$$

erfüllt werden, so erhalten wir — bei Vernachlässigung des Gliedes der Magnetostriktion — auf Grund von Gl. (10):

$$w_2 = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} H_n B_n + \frac{1}{2} H_t B_t,$$

und aus Gl. (14a):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{Ah} &= \left[(H'_n - H''_n) B_n - \frac{1}{2} (H'_n - H''_n) B_n - \frac{1}{2} (B'_t - B''_t) H_t \right] \mathbf{n} = \\ &= \left[\frac{1}{2} (H'_n - H''_n) B_n - \frac{1}{2} (B'_t - B''_t) H_t \right] \mathbf{n} = \\ &= \left[\frac{1}{2} H'_n \mu'' H''_n - \frac{1}{2} H''_n \mu' H'_n + \frac{1}{2} (\mu'' H_t - \mu' H_t) \cdot H_t \right] \mathbf{n}, \end{aligned}$$

das heißt, wir erhalten die bekannte Beziehung:

$$\mathbf{f}_{Ah} = \frac{1}{2} (\mu'' - \mu') (H'_n H''_n + H_t^2) \mathbf{n}, \quad (14b)$$

die also einen speziellen Fall von (14a) darstellt.

Wenn das geschlossene Volumen V aus Teilen unterschiedlicher magnetischer Beschaffenheit besteht, so wirken auf die Begrenzungsflächen dieser Teile die Flächenkräfte nach Gl. (14). Die Gesamtkraftwirkung wird in der Weise erhalten, daß zu diesen Oberflächenkräften die Resultante der Volumkräfte der diese Diskontinuitätsflächen nicht enthaltenden Teile addiert wird. Diese Kräfte können aber — abgesehen vom dem zweiten Glied der Gl. (13b) —

durch die an der Begrenzungsfläche der Teile wirkenden Oberflächenkräfte (12) ersetzt werden, wobei die Oberflächenkräfte (14) wegen der entgegengesetzten Orientierung der Normalen vernichtet werden, und es bleiben lediglich die Kräfte f_A an der äußeren Grenzfläche des Volumens V und bezüglich des Momentes das zweite Glied der Gl. (13b) erhalten. Demgemäß liefern die Beziehungen (13a) und (13b) auch für den Fall ein richtiges Ergebnis, wenn in der Stoffbeschaffenheit innerhalb des untersuchten Volumens ein Sprung vorkommt.

Wenn schließlich die Begrenzungsfläche des geschlossenen Volumens V im ganzen oder teilweise eine Fläche bildet, die einen sprunghaften Übergang der Stoffbeschaffenheit darstellt, so fallen nach der Addition der die Volumkräfte ersetzenden Oberflächenkräfte (12) zu den Oberflächenkräften (14) die zu der inneren Stoffbeschaffenheit gehörigen Oberflächenkräfte fort, und es bleiben lediglich die Oberflächenkräfte des äußeren Stoffes erhalten. Die Beziehungen (13a) und (13b) liefern somit auch für diesen Fall ein richtiges Ergebnis, nur soll darauf geachtet werden, daß sich die aus (12) zu berechnenden Werte f_A auf den äußeren Stoff beziehen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die auf ein geschlossenes Volumen wirkende und in einen Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r} reduzierte magnetische Kraft und das reduzierte Moment aus den Formeln (12), (13a) und (13b) berechnet werden können. Hierzu ist es notwendig, die Werte \mathbf{H} und \mathbf{B} der Begrenzungsfläche sowie den auch von der früheren Magnetisierung abhängigen Wert w_2 in allen Punkten der Oberfläche zu kennen. Bei ungleich gerichteten \mathbf{H} und \mathbf{B} bedarf es ferner der Kenntnis der \mathbf{H} - und \mathbf{B} -Werte auch in den inneren Punkten des Volumens. Aus diesem Grunde sind die Beziehungen (14), (14a) und (14b) mehr nur von prinzipieller Bedeutung. Es sei auch betont, daß bei der Berechnung nach der obigen Methode die auf die Ströme wirkenden Kräfte nicht gesondert angeschrieben zu werden brauchen, da die erwähnten Formeln auch diese Kräfte mit enthalten.

Der Ausdruck (12) vereinfacht sich für den praktisch wichtigen Fall, daß das geschlossene Volumen von Luft begrenzt wird. In diesem Fall ist auf Grund von (10)

$$w_2 = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2,$$

ein Wert, der von der früheren Magnetisierung unabhängig ist. Aus (12) folgt ferner, daß

$$\mathbf{f}_A = \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \mathbf{n} \right]$$

ist. Wir wollen nun den Vektor \mathbf{f}_A in seine normale und tangentielle Kompo-

nente zerlegen. Bezeichnen wir den Winkel zwischen \mathbf{B} und \mathbf{n} mit α , so erhalten wir:

$$f_{An} = \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})^2 - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right] = \frac{B^2}{2\mu_0} (2 \cos^2 \alpha - 1) = \frac{B^2}{2\mu_0} \cos 2\alpha$$

und

$$f_{At} = \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{t}) = \frac{B^2}{\mu_0} \cdot \cos \alpha \sin \alpha = \frac{B^2}{2\mu_0} \sin 2\alpha.$$

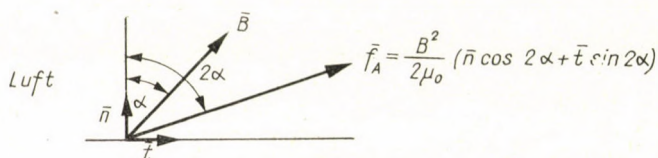


Fig. 3

Damit kamen wir zu dem bekannten Ergebnis, daß die Größe der Oberflächenkraft $B^2/2\mu_0$ beträgt, und daß die Kraft mit der Normalen einen zweimal so großen Winkel wie der Vektor \mathbf{B} einschließt (Abb. 3).

SCHRIFTTUM

1. BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Band I. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951, S. 133—138 und 204—210.
2. FODOR, GY.: Az elektromágneses térjellemzők és alapegyenletek értelmezéséről (Über die Deutung der elektromagnetischen Raum-Kennzahlen und Grundgleichungen). *Magyar Fizikai Folyóirat IV. I.* (1956) S. 61—63.
3. SIMONYI: Műszaki Fizika-Villamosságtan (Technische Physik-Elektrizitätslehre). Akadémiai Kiadó, Bp. 1954., S. 513—528 und 552—557.
4. STRATTON, I. A.: Electromagnetic Theory. Mc Graw Hill, 1941, S. 118—130 und 153—156.
5. URBANEK, J.: Bevezetés a műszaki elméleti villamosságtanba (Einleitung in die technische theoretische Elektrizitätslehre). Tankönyvkiadó, Bp. 1952. S. 289—326.

THE GENERAL EXPRESSIONS FOR MAGNETIC FORCES

G. TEVAN

SUMMARY

The paper deals with the expression for magnetic forces for the arbitrary relations between \mathbf{B} and \mathbf{H} . The definition for the work which is to be considered from the point of view of force actions is founded on physical considerations, and from this expression of work is deduced the general formula for the force density of discontinuity free field. The tensor of the Maxwell tensions is given for a general case; finally, with the aid of the surface forces the discontinuities are taken into account and a general formula is calculated for the resultant of a system of magnetic forces acting on a closed part of the field.

LES EXPRESSIONS GÉNÉRALES DES FORCES MAGNÉTIQUES

G. TEVAN

RÉSUMÉ

L'auteur déduit les expressions des forces magnétiques pour des relations quelconques entre \mathbf{B} et \mathbf{H} . Il justifie, par des considérations physiques, la définition de l'expression du travail à considérer du point de vue de l'action des forces, puis déduit de cette expression du travail la formule générale de la densité des forces pour le champ exempt de discontinuités. Il écrit le tenseur des tensions de Maxwell pour le cas général et tient compte des discontinuités à l'aide des forces superficielles, puis donne enfin une formule générale pour le calcul de la résultante d'un système de forces magnétiques agissant sur une partie fermée du champ.

ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ МАГНИТНЫХ СИЛ

Д. ТЕВАН

РЕЗЮМЕ

В статье дается вывод выражений магнитных сил для произвольных связей $\mathbf{B} \div \mathbf{H}$. Дается физическое обоснование понятия выражения работы, идущей в расчет с точки зрения действующих усилий, затем на основе этого выражения работы выводится общая формула плотности силы, относительно поля, свободного от дисконтинуэнтностей. Записывается тензор напряжений Максвелла для общего случая и, наконец, с помощью поверхностных усилий учитываются дисконтинуэнтности и дается общая формула для вычисления результирующей магнитных сил, действующих на закрытую часть поля.

DIMENSIONING FLOOD-CONTROL LEVEES FOR UNDERSEEPAGE

GY. KOVÁCS
D. OF ENG. SC.

INSTITUTE FOR HYDRAULIC PLANNING, BUDAPEST

[Manuscript received March 16, 1961]

I. Introduction

In the first part of the paper the functions of dams retaining a constant water level and of flood levees are compared, together with the characteristics of seepage developing under them. It is derived therefrom that the pressure building up behind flood levees — which must be smaller by a specified degree of safety than the pressure causing hydraulic soil failure — is governed not only by the geometrical and soil-physical properties of the permeable layer, but also by the height and duration of the flood wave travelling down the river.

The pressures necessary for designing can be determined with the aid of the characteristics of non-steady seepage. A method for their calculation is derived in the second part of the paper. Once the relevant geometrical and soil-physical properties of the layers, and the parameters of the flood wave are available, the pressures can be calculated in terms of time and location [Eq. (5)], the attenuation of the groundwater wave can be determined as a function of the distance from the point of seepage entry [Eq. (12)], and finally the equation of the line of maximum pressures [Eq. (13)], i. e., the enveloping curve of the pressure gradient in changes with time, can be established.

Calculated results were checked against observed groundwater data, and results of hydraulic scale model experiments with non-steady seepage. A good agreement was found between calculated and observed values, and thus the assumptions made during the derivation appear to be consistent with the nature of the movement. Consequently the determination of the line of maximum pressures by the described method appears to be suitable for the solution of practical problems.

The detailed investigation of flood disasters that have occurred in recent years in the Danube Valley revealed underseepage under the levee body, respectively hydraulic soil failure in the underlying sublayer, as the main cause of breaches in flood control levees built on permeable subsoils. Although similar problems require attention during the designing of dams and embankments bounding a water mass at fairly constant level, yet the principles to be observed in order to ensure the desirable degree of safety are different when selecting dimensions for flood levees. The main cause for this is the difference between the characters of the two seeping water movements. There are, however, usually additional differences in the extent to which the sublayers under the levee body participate in the conveyance of seepage water. Yet even this difference can essentially be traced back to the different characters of percolation.

The aim of the present paper is to summarize first of all the principles controlling the determination of the levee dimensions, or the characteristics of other means of control, which may become necessary along the levee. A method is hereafter described for determining the value of the most important

design parameter, the water pressure that can be expected within the permeable layer. This pressure is a function of time and location.

2. Design of flood protection lines

Generally, recognized and accepted principles are applied to the dimensioning of dams and embankments subjected to a constant head of water, therefore, the approach to the determination of the safe dimensions of flood protection lines built on a permeable subsoil will be derived with reference to the differences existing in the character of the two installations. In keeping with the aim of this paper — already outlined in the introduction — only the system offering protection against underseepage under the levee body will be dealt with, and other related, but not strictly relevant problems, such as the stability of the embankment, or resistance against wave action, will be left unmentioned. Neither will attention be paid to seepage through the embankment itself, the latter being assumed as being built of the material of the top cover, and consequently its permeability coefficient should be smaller by two — three orders of magnitude than that of the permeable sublayer.

In the case of embankments bounding water masses having a fairly constant level, underseepage may give rise to two kinds of unwanted consequences. Wherever the emerging gradient on the protected side exceeds the limit value, which, in turn, depends on the characteristics of the stratification, the emerging flow will bring particles to the surface. By retrogressive erosion piping will extend to under the embankment body, will undermine it, causing it to collapse and fail. The constant supply to the groundwater in the protected area constitutes the other source of danger. The waterhousehold balance of the groundwater is disturbed, thereby, the groundwater table is raised, which results in agricultural losses over large areas, and may interfere with the normal use of deeper structures in dwelling and industrial settlements. As a third effect the hydrodynamic uplift force acting on the embankment must also be taken into consideration. However, in the case of earth dams having a section similar to that of flood control levees, which factor is usually insignificant for the choice of dimensions, will thus be neglected in the following.

All departures from the above, encountered during the designing of flood-levees, are due to the different characters of seepage in the two systems. Whereas the movement of water in the surroundings of a water mass having an approximately constant surface takes the form of seepage which is steady, or at least can be regarded as such for purposes of calculation, the flood waves travelling along the rivers initiate non-steady seepage flow, the groundwater being once replenished, then again drained by the river.

The travelling velocity of the groundwater wave is a parameter depending on the composition of the water bearing layer. It will be readily perceived

that no exit gradient, comparable to that which would ensue if the embankment would be called upon to resist for any extended period, a water column corresponding to the highest flood level, can be built up at a certain distance from the seepage entry during a flood wave of short duration. Therefore, when designing flood levees, the pressure governing the choice of embankment dimensions suitable to offer adequate safety against hydraulic soil failure, should be computed from a head lower than that corresponding to the steady seepage line pertaining to the highest flood level. This head can be established as a function of the composition of the permeable layer and the characteristics — height and duration — of the flood wave.

The unwanted effect of continuous seepage is the disturbance of the groundwater household. This can be prevented by a suitably dimensioned drainage system. If the permeability of the water bearing layer is sufficiently low, the slight rise of the groundwater table may already cause additional evaporation capable of maintaining equilibrium conditions. If, however, the permeability of the layer is high, artificial drainage is found to be necessary in most instances. The definite purpose thereof being the collection and removal of a frequently considerable amount of water, the draining elements should be designed to extend down into the permeable layer. A drainage system of adequate efficiency can be realized in an economical manner only in this way. The necessity of providing a similar drainage does not arise in connection with flood levees, since the river, as a natural drain of groundwater, removes after the passage of the flood wave, the excess water supplied during the flood and stored in the layer.

Thus far it would appear at first sight that once the peak pressures at critical points are determined with the aid of the parameters of non-steady water movement, flood levees can be dimensioned in an essentially simpler manner than earth dams, since the pressures developing in the former remain below the gradient line pertaining to steady seepage.

This conclusion, however, is valid only in cases where the permeable layer is not covered by topsoil. This is because in similar instances — at times when the pressure gradient emerges above the terrain — the natural drainage at the protected toe of the levee is of a similar order of magnitude as that of the seepage volume. (Increased evaporation can be looked upon as drainage of similar character only in the case of water bearing layers having a low permeability coefficient, or at greater distances from the levee, where the seepage volume conveyed in horizontal direction is appreciably reduced.) Under such conditions the desirable degree of safety for both dams retaining water at a uniform elevation and flood levees, can be attained by increasing the seeping distance, either by adopting a greater base width, by providing a watertight foreshore blanket, or, less frequently, by means of a sheet-wall cutoff.

The methods used for the determination of the necessary seeping distance, including the complex calculation procedures resting on potential flow and the empirical coefficients of BLIGH—LANE, are all based on the fundamental assumption that the critical value of the exit gradient is governed by the parameters of the same soil layer as the one in which seepage actually takes place. The extension of the seeping path could not possibly constitute a correct design principle on any other basis, inasmuch, as in the case of a seepage system where there is a top cover, the majority of resistances occurs over the section of the flow lines, in the top cover, and the increase of the seeping distance in the permeable layer can be of no practical significance.

With dams retaining a practically constant water surface this problem is less acute, since a drainage system is in most cases necessary for maintaining the equilibrium of the groundwater waterhousehold. On the downstream side of dams, where drainage for this reason is not required in the steep valley, the increased safety of the structure, the short distance to be protected and the possibility of operation by gravity are the considerations in favour of the installation of a drainage system. These systems — as already mentioned — always extend down into the permeable layer. Thus, the effect of top-cover resistance is reduced to half, since the top cover is traversed only on the upstream side by the flow lines. Nevertheless a considerable flow volume is removed from the water bearing layer by the drainage system. For the horizontal conveyance of this volume an appreciable resistance must be overcome. With the steeper gradient thus ensuing an increased base width may already ensure the necessary degree of safety even with respect to the critical gradient determined for the top cover. Consequently, in similar instances it is deemed satisfactory for open draining structures (drainage canals) if they are located at a safe distance from the point of seepage entry, this distance being calculated on the basis of the differential elevation between the water surface at the dam and in the canal. By determining the pressure gradient along the cross section a check is made whether, or not the pressures at the underside of the top cover exceed the permissible value.

The conditions prevailing in the vicinity of flood levees are essentially different. The waterhousehold balance of the groundwater does not call for the artificial drainage of the water bearing layer, since the rise of the groundwater table is but transitory and the excess amount of stored water is removed by the river itself after the passage of the flood wave. All water, regardless whether piping, or drained artificially must be returned by pumping into the recipient. It is, therefore, of economic interest not to create by drainage any appreciable flow in the layer. The amount of water percolating in the layer towards the protected area is, however, very small and the resistance, respectively head loss necessary for its conveyance cannot be taken into consideration. Proceeding farther from the source of seepage entry only the drop of

the pressure gradient resulting from the non-steady character of flow can be relied upon. This drop is, however, in the majority of cases significantly lower than the differential head available for conveying an appreciable amount of water over the distance between two sections investigated. Thus, the effect attained by extending the length of the seeping path by an identical extent is significantly smaller.

With due consideration to the above facts, the correct approach to the designing of flood-levees is, in our opinion, the one outlined as follows:

The line of highest pressures, *i. e.*, the curve enveloping the highest pressures potentially ensuing at certain distances from the point of seepage entry is first determined as a parameter characteristic of non-steady seepage, allowance being made for storage accompanying the progress of the groundwater wave. Naturally, besides the composition and condition (momentary water content) of the permeable and covering layers, this value depends on the duration of the flood wave as well, which can be allowed for by including the longest, *i. e.* design flood wave into the calculations.

As a second step the embankment dimensions necessary for the stability of the levee are determined with due regard to the properties of the embankment material available. Once these dimensions and the position of the levee axis relative to the point of seepage entry are known, the pressures acting on the underside of the top cover at the downstream toe of the levee can be determined. By comparing the so obtained pressures with the permissible values depending on the properties of the top cover, the sections of insufficient safety can be detected.

The inadequacy of safety, as well as the slope of the line of highest pressures determined at the toe of the levee, provide a direct answer to the question whether the desired degree of safety can, or cannot be attained economically by increasing the width of the levee. This solution cannot be expected to provide an economical result, unless the permeable layer is thin and finely grained, or the design flood is of short duration. Where the levee is built over a thick, coarse permeable layer, the extension of the seepage path may offer an economical solution, if the width of the base, which may be regarded as watertight, can be increased materially at relatively low cost. An example for this solution is the backfilling of borrow pits in the foreshore, since the distance of the point of seepage entry from the protected toe can thereby greatly be increased at low cost.

Where there are no such possibilities, the desired degree of safety can be attained only by lowering the line of highest pressures, for which drainage of the permeable layer offers the only possible method. Care should be taken, however, to minimize the extent of drainage as far as it is feasible. The amount of water removed at the protected side should not exceed the value absolutely necessary for lowering the seepage line by a specified extent. In selecting the

draining (intercepting) structures and in dimensioning them, the stratification, the physical characteristics of the layers and the hydraulic parameters of seepage should simultaneously be taken into consideration.

3. The line of highest pressures in the case of non-steady seepage

In order to apply the basic principles outlined in detail in the preceding chapter, to a practical design, the line of highest pressures, as the hydraulic characteristic of non-steady seepage must first be established.

At the outset it should be made clear that this curve is not of a character identical to the gradient line indicating the magnitude of pressures developing in a field of steady seepage flow, this latter showing variations in pressure with location. These pressures remain unchanged in time, the parameters of movement also being constant in time. Accordingly the slope of the pressure gradient, in the case of steady seepage, is proportionate to the resistance of the medium in which seepage takes place, and consequently to the energy consumed for conveying the seepage volume.

The pressure gradient of identical character, which characterizes the sum of potential and kinetic energy, is subjected to continuous changes in the case of non-steady flow. At any given time its slope is proportionate to the amount of energy consumed for storing and conveying water. In a profile following the lines of flow, at different distances from the seepage entry, the pressure attains its peak value at different times. Thus, the design value is seen to ensue at a different point of time in each investigated section. The line of highest pressures is obtained by connecting the peak pressures, *i. e.*, by constructing the enveloping curve of the highest pressures developing at different times.

In the subsequent part of the paper a method will be described for determining the hydraulic parameters of non-steady seepage flow. Changes in pressure with time and location can be determined by the general solution of the equations of movement, which can be arrived at with the help of certain simplifying assumptions. Hereafter the changes with location of the highest pressures can be determined in a profile taken in the direction of flow. A relation can thus be established, which yields the line of highest pressures in terms of the geometrical and soil-physical properties of the seeping system, as well as of the height and duration of the design flood wave.

a) *Determination of the hydraulic parameters of non-steady flow*

The subsequent derivation is based on the geometrical, soil-physical and hydraulic approximating assumptions commonly made in similar seepage investigations. Thus, the layers will be assumed to be horizontal, of constant, uniform thickness, and to possess physical properties that are uniform at every

point and in every direction. Seepage flow will further be assumed to remain within a velocity range consistent with the permeability coefficient of the permeable layer, so that flow remains within the validity limit of DARCY'S law, i. e., velocity is a linear function of the gradient. In vertical planes parallel to each other and taken in the direction of flow movement is assumed to be uniform (two-dimensional), consequently considerations can be reduced to unit length. A further assumption relating to the lines of flow is, that they are horizontal and parallel to each other, the velocity in a vertical is uniform, its magnitude can be computed from the slope of the gradient in the vertical, in other words DUPUIT'S criterion is applied.

These approximations concerning flow and boundary conditions are familiar in hydraulics. Besides these, particular attention has been devoted to special assumptions concerning the space in which flow occurs. These assumptions were found necessary in the interest of correctly describing the sequence of alluvial strata along the rivers with respect to the progress of the groundwater wave. The structure of the river valleys, in the sediment of which permeable layers are also deposited, is, in general, characterized by a three-fold articulation. The older, mostly impervious sublayer is directly followed by the permeable gravel, or sand layer. The sequence of strata is closed at the top by alluvial silt, or silty fine-sands. A transition layer consisting of fine sand, or other sand can frequently be found between the two last-mentioned layers. The transition layer and the top cover can be assumed as identical as far as seepage flow is concerned. The permeability coefficient of the transition layer, too, is usually lower by two orders of magnitude than that of the permeable layer, and thus its horizontal water conveying capacity can safely be regarded as negligible in comparison to the volume passing through the gravel, or sand layer. The silty top strata, on the other hand, are mostly loose, and cannot be considered watertight, so that the resistance offered thereby to the vertical rising of water is just as little as in the transition layer. For a uniform discussion of water movement, the upper plane of the water bearing layer is assumed to be under the lowest groundwater table. As revealed by comparing the groundwater profile along the flood levees in the Szigetköz region and the profile of characteristic stages, this assumption appears as being generally permissible (Fig. 1). At the most it is in the vicinity of the river that the groundwater table drops at times of low water below the transition layer. Since, however, flood waves above the medium stages constitute the design case for the levee, and medium stages are throughout above the permeable layer, the approximating assumption can safely be made, that the wetted cross section of the permeable layer remains unchanged during the fluctuations of the groundwater table. The example presented for the Szigetköz region — as corroborated by explorations and surveys along the Danube and Tisza rivers — is in general representative for the alluvial river valleys in Hungary, which feature a

permeable layer, and consequently the above-mentioned assumption can be regarded as of general validity.

Let us examine now the conclusions arrived at by these assumptions during the hydraulic formulation of the equations of movement.

In the investigation of non-steady flow two limit conditions are usually considered. One of these is free-surface flow. A characteristic thereof is the

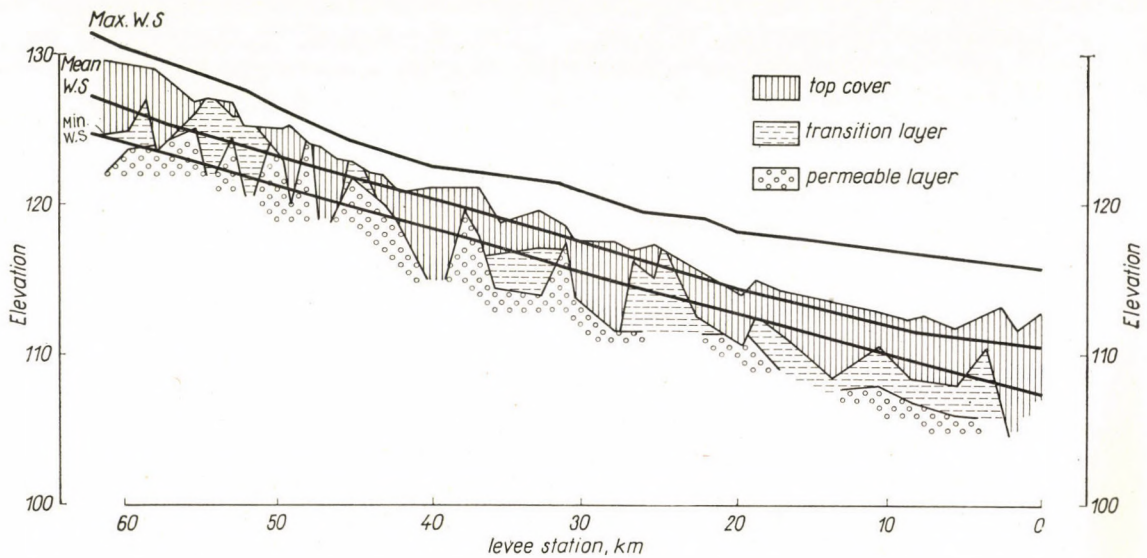


Fig. 1

reduction of discharge in the direction in which the wave accompanying an increase in discharge proceeds, since water is stored in the wake of the rising water surface, which coincides in this case with the pressure gradient. The reduction in discharge, on the other hand, is characterized by a sinking water surface and by a depletion of the stored volume. The other extreme condition is flow in a closed conduit. In this case the flow cross section remains unchanged when the discharge changes and the rise, or drop of the gradient is followed neither by an increase, nor by a depletion of storage. The wave is propagated in the form of a pressure wave and the characteristics thereof are controlled only by the elasticity of water and the bounding walls.

Accordingly the groundwater wave in the assumed seepage system may be considered as a condition between the above two limits. The water conveying cross section remains unchanged, provided the conveying capacity of the upper layers is disregarded. However, any change in the position of the gradient results in addition to, or withdrawal of storage. Assuming that the time during which the water table in the upper layers rises, is neglected, a relationship

between the position of the gradient and the stored volume can be written on the basis of the continuity equation determined for non-steady flow. The only factor to be borne in mind is, that only an amount of water corresponding to the free pore volume which, in turn, depends on the momentary water contents, is stored during the rise of the water surface:

$$n_0 = \frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (1)$$

For interpreting the symbols used in the above equation, let us adopt a three-axial coordinate system, in the horizontal plane of which the coordinates are time (t) and location (x). The origin of the x axis is taken at the point of seepage entry and the direction away from the river, is considered positive. Accordingly the discharge (Q) passing through a section of unit width of the permeable layer of height m is, with reference to DARCY's law, and with DUPUIT's approximation:

$$Q = - km \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (2)$$

since a flow of positive direction occurs, if the slope (the first differential quotient of pressure according to location) $\partial y/\partial x$ is negative.

The vertical coordinate axis characterized the pressure head. The datum plane to which pressures are related can be taken arbitrarily. With a view to simplifying the relationships eventually obtained, the horizontal datum plane of the coordinate system should be taken at the same level as the water surface in the river at mean stage. Where there is no lateral flow in the groundwater beyond the strip adjoining the river, this level coincides with the mean groundwater table. This approximating assumption is made in the derivations throughout. Two soil-physical properties are also included in Eqs. (1) and (2). The permeability coefficient of the permeable layer (k) should preferably be substituted in m/day units, time being, in general, expressed in days. The other factor n denotes the free pore volume of the strata above the permeable layer, expressed in percentages, which may be introduced as the difference of the pore volume of the dry soil material and of the momentary water contents.

Combining Eqs. (1) and (2) we obtain the differential equation on which all further investigations will be based:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{mk}{n_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

The solution of the above differential equation is not positive and unique, there being several functions $y(x, t)$, which satisfy this condition. The problem

is to select the one which also satisfies the boundary conditions represented by the physical characteristics of the groundwater wave.

The first of these boundary conditions is, that the variation with time of the value y at the station $x = 0$ should agree with the hydrograph of the river in the section under consideration, or at least should closely fit the latter. Accordingly the function $y(x, t)$, upon substitution $x = 0$ should yield a periodic function, or at least should describe a wave.

The other boundary condition is given by the fact, that the groundwater wave follows with an attenuation (delay) depending on the soil-physical properties of the layer, the wave travelling down the river. This delay signifies that the peak pressures develop successively with increasing distance from the river, and since the rise of the gradient line is brought about by the storage of water supplied by the river, the peak value is bound to decrease with increasing distance. Otherwise the stored water could not possibly percolate from the river to the section considered. Expressed in mathematical terms, this denotes that the contour of the $y(x, t)$ surface at any constant value of x other than zero is a curve similar to that at station $x = 0$, and the peak of the contour curve decreases, whereas its time of occurrence increases with increasing x values.

Data obtained by means of observation wells furnish additional boundary conditions as regards the shape of the groundwater profile ensuing at any given time in the direction of flow. In fact, it was found that after the passage of the flood wave the river starts to drain the groundwater volume, and while at greater distances from the river the groundwater wave continues to proceed, in the vicinity of the river groundwater starts to recede. Accordingly a function $y(x, t)$ must be found, which yields upon substituting $t = \text{const}$, a relationship $y(x)$ both the zero point and the peak value of which depend on the t value substituted, inasmuch as with increasing values of the latter, both points shift to a greater distance from the point of entry.

Besides the above qualitative criteria there is an additional quantitative requirement which must be satisfied by the function to be selected. The first differential quotient with respect to x of the function $y(x, t)$ at the point $x = 0$ yields the variation in time of the slope of the groundwater at the point of entry. Selecting two points of time between which the slope remains at uniform sign and integrating according to dt between these limits the product of the slope, the thickness of the permeable layer and the permeability coefficient, we obtain the water volume which entered into, respectively departed from, the permeable layer in the intervening period, depending on the sign of the slope. The same volume should result if the area bounded by the groundwater profiles pertaining to the above two points of time (related to unit width, this corresponds to volume) is multiplied by the free pore volume of the storing layer:

$$\int_{t_1}^{t_2} mk \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0} dt = n \int_0^{\infty} [y(x_1, t_1) - y(x_1, t_2)] dx. \tag{4}$$

With regard to the above considerations a polynom of fourth degree in x and quadratic in t has been investigated. This satisfied Eq. (3) and approximated the flood wave passing down the river with a quadratic parabola. Contrary to the criterion of attenuation this yielded peak values at successively earlier times with increasing distance from the point of entry.

There exists a solution for Eq. (3), familiar from the investigation of the consolidation of soils. Assume the function $y(x, t)$ to be the product of a function $a(x)$ depending solely on x and of a function $\beta(t)$ depending only on t . In this case the desired dependent variable can be related to time by an exponential function, whereas to location by a sine function. The flood hydrograph in the river can now be approximated by the difference of two e^t functions. Neither does the relation thus obtainable satisfy the criteria listed earlier. The wave length of the groundwater profile is independent of time, and only its amplitude varies therewith. Thus the distance of the zero point of the profile from the point of entry is constant and the peak value is always at $x = 0$. Consequently this solution yields results contrasting with observed phenomena.

A function satisfying all boundary conditions can be written in the following form:

$$y = \frac{h}{2\sqrt{2}} e^{-Ax} \left[\sin \left(Ax + B \frac{t}{t_0} \right) - \cos \left(Ax + B \frac{t}{t_0} \right) \right]. \tag{5}$$

The first differential quotient thereof with respect to time is

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{h}{2\sqrt{2}} e^{-Ax} \frac{B}{t_0} \left[\sin \left(Ax + B \frac{t}{t_0} \right) + \cos \left(Ax + B \frac{t}{t_0} \right) \right], \tag{6}$$

and differentiating twice with respect to location we obtain the relationship

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{h}{2\sqrt{2}} e^{-Ax} 2A^2 \left[\sin \left(Ax + B \frac{t}{t_0} \right) + \cos \left(Ax + B \frac{t}{t_0} \right) \right]. \tag{7}$$

The criterion expressed by Eq. (3) is satisfied if

$$\frac{B}{t_0} = - \frac{mk}{m_0} 2A^2. \tag{8}$$

Assuming for B arbitrarily

$$B = - \pi \tag{9}$$

we obtain for A the relation

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2t_0} \frac{n_0}{mk}}. \quad (10)$$

The flood hydrograph in the river is approximated by substituting $x = 0$

$$I_0(t) = \frac{h}{2\sqrt{2}} \left(-\sin \pi \frac{t}{t_0} - \cos \pi \frac{t}{t_0} \right), \quad (11)$$

which expression has zero points at times $t/t_0 = 3/4$ and $t/t_0 = 7/4$, while minimum is obtained by substituting $t/t_0 = 1/4$, and maximum is reached for $t/t_0 = 5/4$. Consequently t_0 is the half wave length of the wave representing the hydrograph, *i. e.*, the period of time passing between the points of intersection of the mean stage and the representative wave. The maximum of the function is $+h/2$, while its minimum is $-h/2$, thus the full amplitude of the wave is h .

The attenuation of the wave, *i. e.*, the difference in time of the occurrence of any characteristic point with respect to station $x = 0$ can be calculated from the expression

$$\Delta t = \frac{t_0}{\pi} Ax. \quad (12)$$

The equation of the line of peak pressures, referred to as the fundamental condition for the application of the principles outlined in previous sections, can also be expressed in an explicit form. Maximum, respectively, minimum at a distance x from the point of seepage entry occurs if the first differential quotient of y with respect to time [Eq. (6)] becomes zero upon the substitution of the given x value. This condition assigns corresponding pairs of t, x values to the points of occurrence of extreme values. Substituting these pairs of values the term in brackets in Eq. (5) becomes constant and equal to $\sqrt{2}$. Consequently the equation of the line of peak pressures is

$$y_{\max}(x) = \frac{h}{2} e^{-Ax}. \quad (13)$$

b) *Checking the suggested relationships against observation data*

The relationship derived satisfies all the qualitative requirements listed earlier and it can be demonstrated to satisfy also the quantitative criterion expressed by Eq. (4). Thus the correctness of the suggested design relationship can be verified theoretically. It should be investigated subsequently, also

with the aid of numerical examples consistent with observation data, whether the desired degree of accuracy can be attained in practical applications as well, *i. e.*, whether the basic assumptions made agree, or not with actual conditions.

Data obtained by a series of wells in a section of the Tisza river will be examined in the first example. This has been selected because in the fine-grained sand layer encountered here the groundwater wave proceeds at a slower rate, and the effect of attenuation becomes more conspicuous.

Particulars of the series of wells at Tiszaderzs and the geology of the surrounding catchment area have already been described in detail in an earlier paper [1]. Summarizing the properties of stratification it can be established that the upper layers, having an average thickness of 4,0 m and comprising the top cover and the transition layer, consist of the upper part of alluvial clay, while over the lower three-quarters of silty sand and sandy silt. The pore volume of the latter is $n = 35$ to 40 per cent, its water contents about $VK = 31$ to 34 per cent, so that the free pore volume amounts to about $n_0 = 4$ to 6 per cent. Investigation in the profile revealed the permeability coefficient of the on the average 10 m thick permeable layer to be $k = 2$ to 8 m/day.

Data obtained from four wells supplied the necessary information on variations in the groundwater table. The wells numbered 2876, 2877, 2878 and 2879 are at distances of 400 m, 700 m, 960 m and 1780 m, respectively, from the bank line. An uncertain factor is introduced into the investigation by the fact that the entry of flood waters may also start through borrow pits in the foreshore of the levee. Because of this the value A characteristic for the section was calculated with the highest and lowest groundwater table for the hydrological year 1953—54, using Eq. (13), and once the distance from the bank line, then again the same reduced by 200 m was considered as the x value. The scatter in A calculated for various wells and with different date is as follows:

No. of well	2876	2877	2878	2879
Calculation with data relating to highest groundwater table				
full seeping distance	0.0011	0.0017	0.0021	0.0016
reduced seeping distance	0.0022	0.0023	0.0023	0.0018
Calculation with data relating to lowest groundwater table				
full seeping distance	0.0022	0.0022	0.0020	0.0016
reduced seeping distance	0.0044	0.0030	0.0025	0.0018

The hydrological effects of the area become strongly manifest in the hydrograph of the farthest well (such as precipitation, infiltration, evaporation), side by side with seepage from the river. Therefore, the discrepancy between

the values computed for this and the remaining wells is readily understandable. Surveying the other data, the average value of A can be taken as 0.0023, bearing in mind, that the bulk of supply enters through the borrow pit, whereas withdrawal occurs mainly through the bankline. For this reason a realistic calculation of the parameters applying to high groundwater stages should include the reduced distance, while the analysis of the lowest groundwater condition should be performed with the full distance.

Groundwater observations carried out at three-day intervals are insensitive to the effects of minor stage fluctuations in the fine-sand permeable layer. The hydrograph for the period investigated has, therefore, been replaced by a single enveloping curve, the length of which is $t_0 = 300$ days, its amplitude being $h = 5.0$ m. Using this assumed wave length, the parameter A is calculated by Eq. (10) and is compared with the average value mentioned above:

$$A = 0.0023 = 0.032 \sqrt{\frac{n_0}{k}} .$$

Thence the ratio of the soil-physical properties is

$$\frac{n_0}{k} = 0.0052 .$$

Calculated from probable extreme data obtained by investigations of the layer, the same ratio should be within the range

$$0.005 < \frac{n_0}{k} < 0.03 .$$

As will be seen there is a fair agreement between the results obtained theoretically in the example, and those observed in the field. The same is corroborated by groundwater profiles observed and calculated at different times, as well as by the comparison of groundwater hydrographs recorded in the wells with calculated curves (Fig. 2).

Another check was carried out using data obtained by observed groundwater profiles in the Szigetköz region. In the coarse-grained and thick permeable layer encountered here the observed well data give no indication any longer of rapid variations in the groundwater table and for this reason the values of y_{\max} only have been compared with observation data. From among the eight well profiles established in the area the one between Bezenye and Hegyeshalom proved useless for this purpose, owing to the drawdown effect of the Mosony Danube branch and the Lajta river intersecting the profile.

In the remaining seven profiles use has been made of the gauge relation curves indicating the relationship between the Danube stages and the ground-

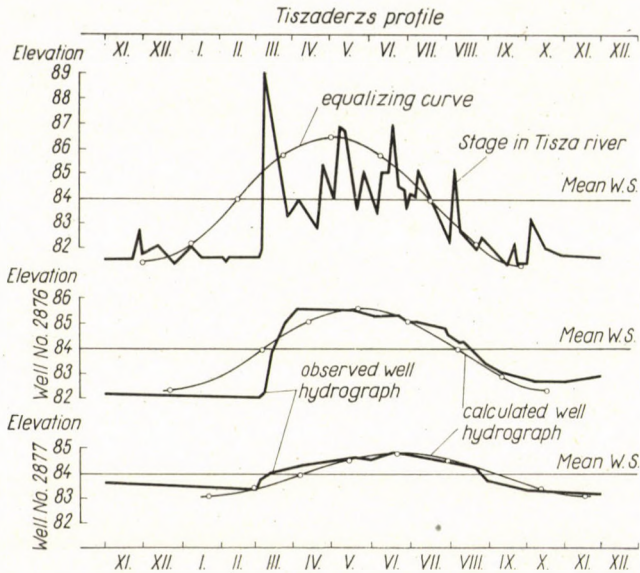


Fig. 2

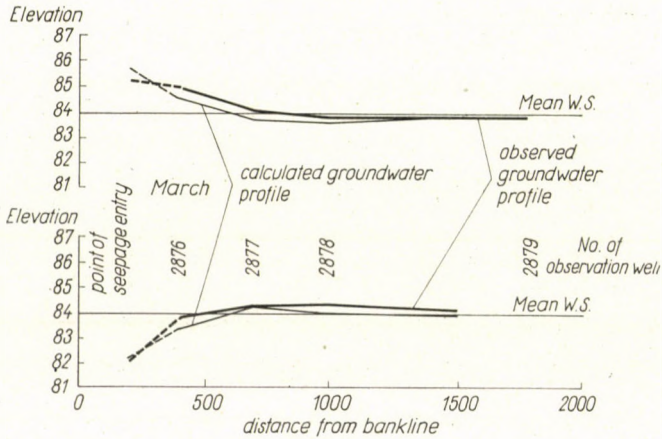


Fig. 3

water elevations in the wells, which were prepared in part at the Research Institute for Water Resources Development, and in part at the Institute for Hydraulic Planning. The slope of the relation curves is equal to the ratio of the changes in stage observed in the Danube and in the wells, and is thus approximately equal to the value

$$\pi(x) = \frac{y_{\max}(x)}{h/2} = e^{-Ax}.$$

The slope of the relation curves characteristic for the wells was plotted in various profiles against the distance from the bankline. The point of entry was determined from a map to the scale 1 : 5000. Subsequently the characteristic A value of the curve fitting to the observation points was calculated. The curves, from among which the profile at Ásványráró is illustrated by way of an example in Fig. 3, show a good agreement with observation data. A greater discrepancy can be seen to exist over the part behind the levee only, where piping water emerging to the surface, respectively, the drawdown effect of the intercepting canals can be accepted as an explanation for the calculated curve being above the observation points.

Using the rising stages of the two almost equally high flood waves which travelled down the Danube river at the end of July 1957 and at the beginning of July 1958, the curve of maximum pressures, as determined on the basis of the curve $\pi(x)$, has been entered into Fig. 3. These pressures were compared with the highest groundwater stages observed in the same period. In this, as well as in the other six profiles a close agreement could be found between calculated and observed values. The greatest discrepancy was 10 to 20 cm in the immediate vicinity of the levee. This, however, can be accounted for by the drawdown effect referred to already.

Besides the agreement of data, variations in the value of A were determined along the full length of the Szigetköz levees and for purposes of checking the significant fundamental data were calculated back therefrom. The half wave length of the flood wave was taken at $t_0 = 20$ days, while $n_0 = 0.06$ was adopted for the free pore volume. The thickness of the permeable layer was thus found to increase between Rajka and Nagybajcs from 50 to 200 m, while at the same time the permeability coefficient increased from 100 m/day to 300 m/day. Both these numerical values and their variation along the levee, shown in Fig. 4, are in good accordance with observation data.

A third opportunity for checking was offered by the scale model experiments carried out under the guidance of E. VARRÓK at the laboratory of the Research Institute for Water Resources Development. According to the report describing the experiments [2], the attenuation is directly proportionate to the distance measured from the point of seepage entry and inversely proportionate to the square root of the rate of rise of the flood wave, i. e., inversely proportionate to the square root of the time unit (t_0 is the half wave length) adopted by ourselves as representative. Comparing this observation with Eq. (12) and remembering the relationship between A and time t_0 , expressed by Eq. (10), the theoretical relation will be found to fully agree in form with the empirical formula arrived at through experimental results. Neither can a significant difference be detected in numerical values. The coefficient 0,1644 determined by model experiments [Eq. (12) in the paper referred to] was checked against the theoretical relationships, and for the soil properties publish-

ed, was obtained as 0,14 to 0,17 as a result of the possible scatter in the properties of soil used in the model.

Thus the results calculated by the relationships derived theoretically can be seen to agree well with both field observations and measurement data

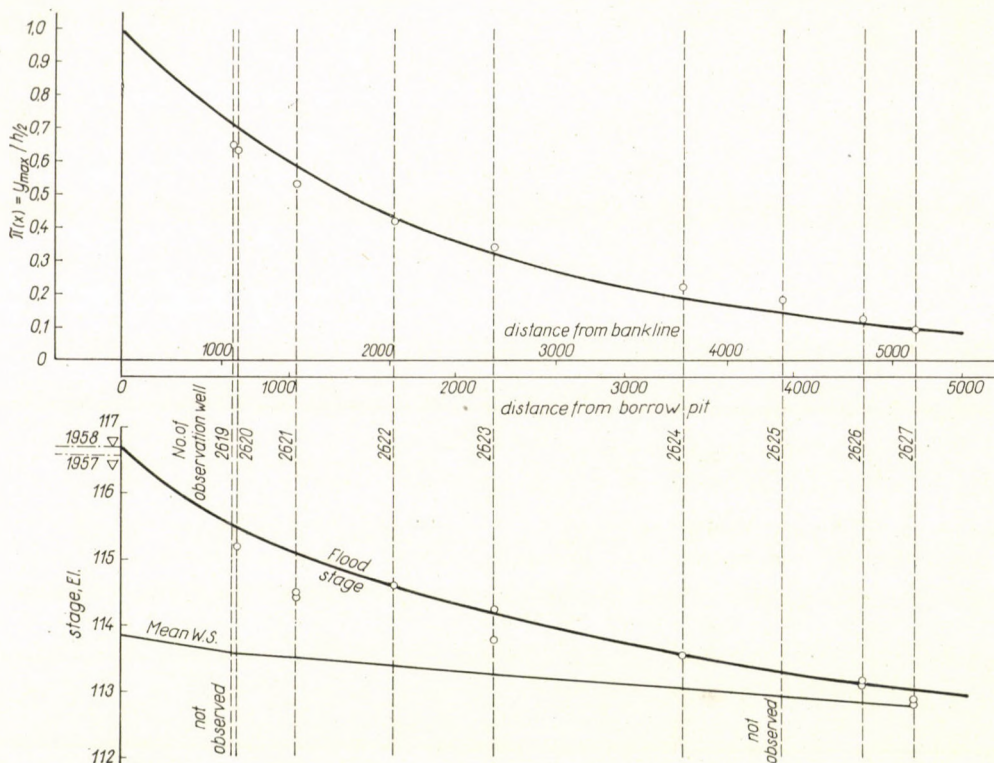


Fig. 4

obtained on scale models. It may, therefore, justly be inferred that the simplifying assumptions made at the outset are not incompatible with the conditions governing the actual physical phenomenon and consequently the calculation procedure suggested lends itself readily for the solution of practical problems.

REFERENCES

1. Kovács, Gy.: Evaluation of engineering-geological investigations at Tiszabura. *Hidrológiai Közlemény* (1957), p. 75. (In Hungarian).
2. VARRÓK, E.: Investigations into non-steady seepage, with special regard to the propagation of pressure variations. *Hidrológiai Közlemény* (1960), p. 149. (In Hungarian).

DIE DIMENSIONIERUNG VON HOCHWASSERSCHUTZDEICHEN UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER SICKERUNG UNTERHALB DES DEICHES

GY. KOVÁCS

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten Teile des Aufsatzes werden die Aufgabe der ein Wasserbecken mit ständigem Wasserspiegel begrenzenden Dämme und die der Hochwasserschutzdeiche, ferner das Wesen der sich unter ihnen entwickelnden Sickerungen miteinander verglichen. Hieraus ergibt sich, daß der hinter dem Hochwasserschutzdeich entstehende Wasserdruck — der um den gegebenen Sicherheitswert kleiner sein muß als der, der einen hydraulischen Grundbruch verursachen würde — außer der Abhängigkeit von den geometrischen und bodenphysikalischen Kennwerten der wasserführenden Schicht auch noch eine Funktion der Entfernung des Durchsickerungsprofils, ferner der Höhe und der Zeitdauer der am Flusse ablaufenden Flutwelle ist.

Die Bestimmung der beim Entwerfen benötigten charakteristischen Druckwerte kann mit Hilfe der Kennwerte der nicht permanenten Sickerung erfolgen. Im zweiten Teile des Aufsatzes wird ein Verfahren zu deren Berechnung abgeleitet. In Kenntnis der geometrischen, bodenphysikalischen und Flutwellen-Kennwerte kann der nach dem Ort und der Zeit veränderliche Druckwert berechnet werden (Gleichung 5), ferner ergibt sich die Hemmung der Grundwasserwelle als eine Funktion der Entfernung vom Einsickerungsprofil (Gleichung 12) und schließlich kann auch die Gleichung der Kurve der Maximaldrücke — die Umhüllungskurve der sich nach der Zeit ändernden Drucklinien — angeschrieben werden (Gleichung 13).

Das behandelte Berechnungsverfahren wurde mit den in der Natur beobachteten Grundwasserangaben und den Ergebnissen der an hydraulischen Kleinmodellen durchgeführten die nicht permanente Sickerung betreffenden Sickerversuchen verglichen. Es wurde festgestellt, daß die berechneten und gemessenen Werte gut übereinstimmen daher stehen die angenommenen Bedingungen in keinem Gegensatz zum Wesen der Bewegung. Aus diesem Grunde kann die dargelegte Bestimmung der Kurve der Maximaldrücke als für die Berechnung von praktischen Aufgaben geeignet bewertet werden.

LE CALCUL DES DIGUES, COMPTE TENU DE L'INFILTRATION

GY. KOVÁCS

RÉSUMÉ

La première partie de l'étude compare la fonction de digues pour niveau constant et de digues contre l'inondation, ainsi que le caractère de l'infiltration se produisant au-dessous des digues. A l'issue de cette comparaison, l'auteur constate que la pression derrière les digues de protection — pression qui doit rester inférieure d'une valeur de sécurité donnée à celle provoquant l'affaissement hydraulique du sol — est fonction non seulement des caractéristiques géométriques et géophysiques des couches aquifères, mais aussi de la distance du profil d'infiltration, ainsi que de la hauteur et de la durée de l'onde de crue passant sur le fleuve.

Pour déterminer les pressions caractéristiques nécessaires au calcul, on utilise les caractéristiques de l'infiltration non permanente. La seconde partie de l'étude déduit un procédé pour ce calcul. En connaissance des caractéristiques géométriques, géophysiques et des données sur la crue, on peut calculer les pressions variant selon le lieu et le temps (équation 5), le retardement de l'onde souterraine en fonction de la distance du profil d'infiltration (équation 12), enfin l'équation du tracé des plus grandes pressions, à savoir de la courbe enveloppe des pressions variant dans le temps (équation 13).

L'auteur a comparé les résultats du calcul présenté aux données relevées sur la base de l'observation des eaux souterraines dans la nature et aux résultats des essais d'infiltration non permanente, obtenus sur des modèles hydrauliques réduits. Il a été constaté que les valeurs calculées et observées concordent bien, donc les conditions utilisées dans la déduction ne se trouvent pas en contradiction avec le caractère du mouvement. La détermination du tracé des plus grandes pressions selon la méthode exposée peut donc être utilisée pour le calcul des tâches d'ordre pratique.

РАСЧЕТ НАСЫПЕЙ ПОД ПЛОТИНЫ С УЧЕТОМ ФИЛЬТРАЦИИ

Д. КОВАЧ

РЕЗЮМЕ

В первой части работы дается сравнение задач насыпей, ограничивающих водоем постоянного уровня, и насыпей, используемых при наводнениях, далее дается сравнение характера фильтрации, происходящей под ними. На основе этого делается заключение, что давление, оказываемое на насыпь для защиты от наводнений (которое должно быть ниже давления, вызывающего гидравлическое разрушение грунта, на заданную величину запаса прочности), является кроме геометрических и грунтофизических параметров водопропускающего слоя функцией расстояния разреза фильтрации, далее высоты и продолжительности стекающей по реке паводковой волны.

Определение характерных величин давлений, необходимых при проектировании, может производиться с помощью параметров непостоянной фильтрации. Во второй части работы выводится метод для их вычисления. Если известны геометрические, грунтофизические и паводковые параметры, можно вычислить изменяющиеся по времени и месту значения давления (уравнение № 5), задержки грунтовой водяной волны в функции расстояния от разреза фильтрации (уравнение № 12) и, наконец, уравнение линии наибольших давлений, то есть уравнение огибающей линий давления, изменяющихся во времени (уравнение № 13).

Методика расчета была сравнена с данными по грунтовым водам, наблюдавшимся в природе, а также с данными опытов непостоянной фильтрации на гидравлических моделях. Установлено, что расчетные и измеренные данные хорошо совпадают между собой, следовательно применявшиеся в выводе условия не находятся в противоречии с характером движения. На основе этого определение линии наибольших давлений на основе изложенного выше может считаться пригодным для вычисления практических задач.

THEORY OF THREE-PHASE BRIDGE SELF-SATURATING MAGNETIC AMPLIFIERS

PRINCIPLE OF OPERATION

Part I

I. NAGY

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH LABORATORY FOR AUTOMATION OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received April 12, 1961]

The first part of the paper is concerned with a detailed investigation of the operation of one of the most frequently used three-phase magnetic amplifiers under idealized conditions. It provides a simple and lucid picture of the mechanism of the amplifier's operation. The changes with time of the voltages, core-fluxes and currents in the circuit are examined. It is made possible to determine the control characteristics, basic design relations, the power gain, time constant and figure of merit, moreover to effect a comparison of the one and three-phase self-saturating magnetic amplifiers. Their discussion is undertaken in the second part of the paper.

Symbols

The instantaneous values of currents and voltages are designated by small letters, the mean, r. m. s. and peak values by capitals. In the case of r. m. s. and peak values the letters r and p respectively have been used as suffixes. The letters L and C in the suffix are used to denote quantities belonging to the load and control circuits respectively.

Letters with dashes symbolise the values of quantities reduced to the gate winding.

A_{Fe}	Cross section of core [cm ²],
B_s	Saturation induction [Vs cm ⁻²],
f	Supply frequency [s ⁻¹],
H_c	Maximum of magnetizing field strength [A cm ⁻¹],
I	Current [A],
$I_c = \frac{1}{N_G A} \Phi_s$	Maximum of magnetizing current (with respect to the gate winding) [A],
I_a	Current in the forward direction through the rectifier a [A],
I_C	Control current [A],
$I_G = I_{G,x} + I_{G,s}$	Resultant current through gate winding [A],
$I_{G,s}$	Saturation current in gate winding [A],
$I_{G,x}$	Magnetizing current in gate winding [A],
$I_L = I_{L,x} + I_{L,s}$	Resultant load current [A],
$I_{L,s}$	Saturation current through load [A],
$I_{L,x}$	Resultant magnetizing current through load [A],
k	Ratio of the momentary supply voltage to that supply voltage which will just take the flux in the core from negative saturation to positive saturation,
l_{Fe}	Mean length of core [cm],
N	Number of turns,
R	Resistance [Ω],
R_L	Load resistance [Ω],
t	Time [s],
U_a	Voltage across rectifier a [V],
U_{Ci}	Induced voltage in the control circuit [V],
U_p	Line supply voltage, peak value [V],
$U_{p,s}$	The peak value of the line voltage at which the flux oscillates between $+\Phi_s$ and $-\Phi_s$, if the load current is a minimum [V],

$T_c = \frac{1}{f}$	Period [s],
α	Firing angle,
$\beta = \alpha \frac{\pi}{3}$,	
$\Lambda = \frac{\mu A_{Fe}}{l_{Fe}}$	Magnetic conductivity of one unsaturated core [Ω s],
Φ	Flux [Vs],
Φ_s	Saturation flux [Vs],
Φ_1	Initial flux [Vs],
$\omega = 2\pi f$	
Θ	Excitation [A],
$\mu = \frac{B_s}{H_c}$	Unsaturated permeability of core [Vs A ⁻¹ cm ⁻¹].

1. Introduction

Three-phase circuits are generally used in the larger power range, over about 1 kW [1].

The disadvantage of a three-phase arrangement is that it consists of more units. What are its advantages? The question may be briefly answered by pointing out that in a three-phase circuit:

1. the smaller form factor of the current wave-shape leads to a better utilization of the rectifiers and the transductor component;
2. the load is evenly distributed over the three phases of the supply unit;
3. the output voltage is smoother.

Familiarity with the operation of the single-phase self-saturating magnetic amplifier is not sufficient for understanding the functioning of the three-phase bridge self-saturating magnetic amplifier. There are two reasons for this. First, there is a considerable difference between the two cases in the changes with time of the voltages across the gate windings. Second, the individual cores exercise different mutual influences on one another through the control windings, than in the single-phase case. The latter effect need not be considered if forced magnetization is assumed.

The object of the present investigation is to obtain a simple, clear picture of the operating mechanism of the amplifier and establish a basis for determining the characteristics of the circuit.

The advantage of the method pursued in this paper is its simplicity, which is especially striking when compared to investigations carried out with the assumption of free magnetization and of a rectangular hysteresis loop [1].

2. The circuit examined

The object of investigation was the magnetic amplifier circuit shown in Fig. 1. The circuit consists of six cores ($A, A' \dots C'$) and six rectifiers ($a, a' \dots c'$). The control voltage and the voltage across the load are both DC voltages.

The dots shown at the ends of windings are intended to mark the beginning of the winding and the positive sense of all the quantities of the winding. (All the windings are right-hand coils.) Thus the voltage across the winding, or the current through it, is positive if the end of the winding marked with a dot is at the more positive potential, or if current flows from the end marked with the dot towards the other end of the winding. The field or flux of the winding may be regarded as positive if it is excited by a positive current or positive excitation.

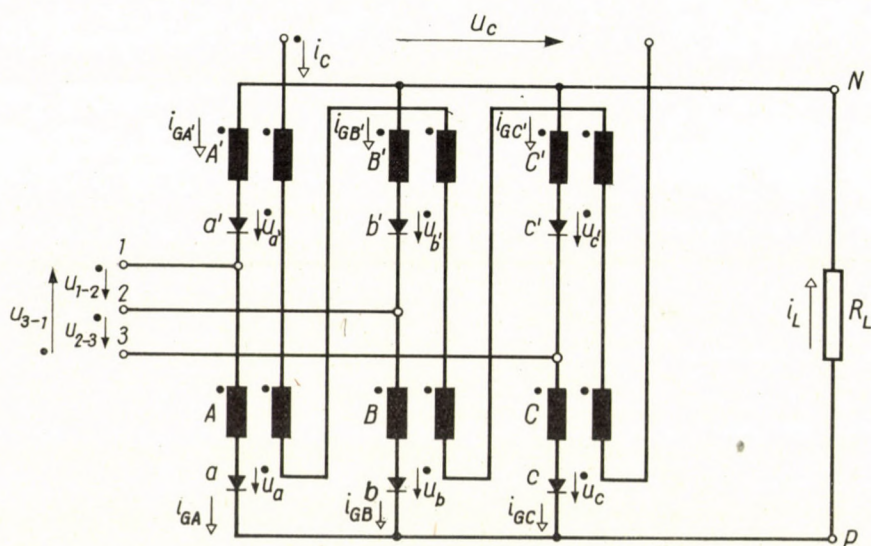


Fig. 1. Circuit diagram of three-phase bridge self-saturating magnetic amplifier

The vector diagram and change with time of the supply voltages is shown in Fig. 2. Hence the line voltages are

$$u_{1-2} = U_p \sin \omega t, \tag{1A}$$

$$u_{2-3} = U_p \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \tag{1B}$$

$$u_{3-1} = U_p \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right), \tag{1C}$$

and the phase voltages

$$u_{1-0} = \frac{U_p}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \tag{2A}$$

$$u_{2-0} = \frac{U_p}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right), \quad (2B)$$

$$u_{3-0} = \frac{U_p}{\sqrt{3}} \cos \omega t. \quad (2C)$$

From the symmetry of the circuit and the supply it may be assumed that under steady-state conditions [1]:

a) the change of electric and magnetic quantities in each of the cores is periodic, the period being $T_c = \frac{2\pi}{\omega}$;

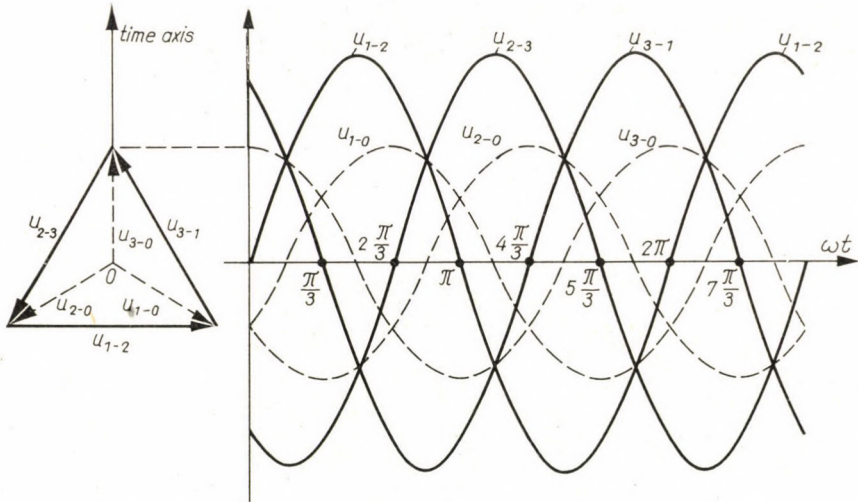


Fig. 2. Vector diagram and change with time of the line and phase voltages of the three-phase supply network

b) if the change with time of one quantity $f(\omega t)$ with respect to one of the cores is known for a complete period, then the change in time of the same quantity for any other core may be obtained by shifting the function $f(\omega t)$ through a phase-change of magnitude $n \frac{\pi}{3}$, where n is an integer;

c) if the change with time of one quantity is known for all six cores over any arbitrary interval of $\frac{\pi}{3\omega}$, then the change of the same quantity is also known in any one core at any later interval of $\frac{\pi}{3\omega}$.

The counter-clockwise rotation of the vector diagram in Fig. 3 indicates the sequence in which a quantity $f(\omega t)$ assumes the same value in the case of each of the core.

For example let the change with time, $f_A(\omega t)$, of one of the quantities with respect to core A be known throughout an entire period. Then according to b),

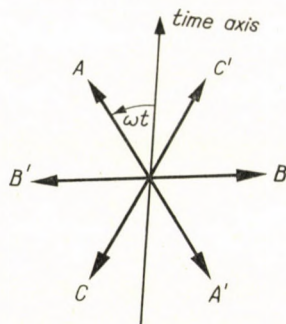


Fig. 3.

$$f_{C'}(\omega t) = f_A\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right), \quad (3A)$$

$$f_B(\omega t) = f_A\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad (3B)$$

$$f_{A'}(\omega t) = f_A(\omega t - \pi), \quad (3C)$$

$$f_C(\omega t) = f_A\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right), \quad (3D)$$

$$f_{B'}(\omega t) = f_A\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right). \quad (3E)$$

Moreover if, for example, the change with time of one of the quantities in all six cores is known over the range $\omega t_1 \leq \omega t \leq \left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$, then according to c)

$$f_A\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = f_{C'}(\omega t), \quad (4A)$$

$$f_A\left(\omega t - 2\frac{\pi}{3}\right) = f_B(\omega t), \quad (4B)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_A\left(\omega t - 5\frac{\pi}{3}\right) = f_{B'}(\omega t), \quad (4E)$$

since within the period each core will assume the same condition subsisting in the interval $\frac{\pi}{3\omega}$, with a phase shift of $\frac{n\pi}{3}$. The equations (4) are valid within the range of $\omega t_1 \leq \omega t \leq \left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Assumptions

The following simplifying assumptions are made in the course of the investigation:

a) The transducers are of symmetrical construction from the electric and magnetic point of view;

b) the dynamic "hysteresis loop" of the magnetic material is as shown in Fig. 4.

The permeability μ belonging to the unsaturated section of the idealised dynamic hysteresis loop of a magnetic material may be calculated from the slope of a control characteristic established by measurement (Part II. Fig. 15);

c) the rectifiers may be regarded as resistances of constant value in the forward direction and infinite value in the reverse direction;

d) the supply takes place from a voltage source of zero internal impedance, delivering a constant, symmetrical, three-phase voltage;

e) the load is pure resistance;

f) leakage fluxes from both the control and gate windings are neglected;

g) the voltage drops produced across the resistances by currents of the order of magnitude of the magnetizing current, are neglected in the determination of the voltage distribution;

h) the voltage drops produced by the saturation current across the resistance of the gate windings and in its forward flow across the rectifiers, are also neglected in the determination of the voltage distribution of the circuit;

i) the amplifier is investigated in the operational condition of forced magnetization. In elucidating conditions in the gate circuit therefore, the impedance connected to the control circuit is regarded as infinitely large.

The most significant divergence from actual conditions is caused by assumptions b) and c), moreover in some cases by i). Here, however, because of the more complex nature of the circuit, these assumptions, which are made to facilitate a simple and clear theoretical treatment, are even more thoroughly justified than in the case of single-phase magnetic amplifiers [2, 3, 4, 5, 6].

For this very reason the literature — especially in the more recent works — contains hardly any cases where the theoretical investigation is not based on these, or other similar idealized assumptions.

The assumption made in i) requires further elucidation. It is generally known that the investigation of magnetic amplifiers is usually undertaken

for the boundary condition either of free or of forced magnetization (possibly for both). Both assumptions serve considerably to simplify discussion.

The assumption of free magnetization is justified if the change of control current as a function of time is primarily determined by the *AC* voltage induced in the control circuit. The control current is in this case not constant even if a constant *DC* control voltage is applied.

The assumption of forced magnetization on the other hand, is justified if the change with time of the control current is primarily determined by the control voltage, i. e. the reactive effect of the load circuit on the control circuit may be neglected. In this case a constant *DC* control voltage is accompanied by a constant control current.

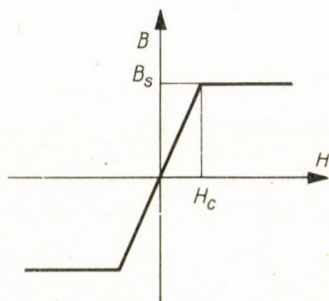


Fig. 4. Idealised dynamic "hysteresis loop" of the core material used

These considerations may also be formulated as follows: The smaller or the larger respectively the internal impedance of the current source from which the magnetic amplifier is controlled, the better the approximation obtained in an actual case by the assumption of free and of forced magnetization respectively. Thus for example in the case of control by a self-saturating magnetic amplifier it is usually more correct to assume free magnetization, while with control by an electronic amplifier the assumption of forced magnetization is the more justified.

If forced magnetization is assumed the theoretical treatment is generally considerably simpler, since a constant control current may be postulated. This is the main reason why this assumption is used in the present case.

The assumption of forced magnetization is also substantiated by two further considerations:

1. In the circuit of Fig. 1. only n th order harmonics (where n is an integer) may appear in the resultant voltage induced in the control circuit (see Figs. 7g and 11g). Odd harmonics may not appear because the control windings are connected in opposing senses. The second and fourth harmonics

of the voltages induced in the control windings of the three transducers will, since they are 120° out of phase with one another, yield a resultant of zero [3, 7].

2. Under the two extreme operating conditions when the load current is greatest and smallest, the value of the operating characteristics of the amplifier is theoretically independent of whether the amplifier is working in a condition of free or of forced magnetization. This circumstance is of the greatest importance, because the design of the amplifier circuit takes place using the characteristics of the two extreme operating conditions. For purposes of design therefore, the same correct result is obtained whether free or forced magnetization is assumed.

4. The mechanism of operation

In the unsaturated stage the flux in the core is determined by the relation

$$\Phi = (\theta_C + \theta_L) \Lambda. \quad (5)$$

Due to the rectifier in series with the gate winding, θ_L may only be positive. Therefore the greatest possible change of flux in any of the cores is $\Phi_s - \Phi_1$, where

$$\Phi_1 = \Lambda \theta_C. \quad (6)$$

The value of core-flux that is still possible, closest to the negative saturation flux, is determined solely by the control current.

Let a value of the control current first be selected, such that the supply voltage be fully applied to the gate windings and that the flux should reach the value of $+\Phi_s$ at precisely the instant of zero transition of the supply voltage connected to the gate winding of the magnetic amplifier. [This is possible in every case where the value of the supply voltage is less than, or equal to a critical value (U_{ps}). See equation (2).] In this case the flux will, under the influence of the positive supply voltage applied to the gate winding, increase from the value

$$\Phi_1 = \Phi_{1, \min} = \Lambda I_{C, \min} N_C$$

to the value $+\Phi_s$ (Fig. 5), then in the next half period, under the influence of the negative supply voltage, decrease from $+\Phi_s$ to the value $\Phi_{1, \min}$. The current passing through the load will then be the minimum load current, the resultant of the small currents serving to magnetize the cores.

The other extreme case is when the value of the control current is chosen so that $\theta_{C, \max} = I_c N_L = I_{C, \max} N_C$ should pertain. Then $\Phi_1 = \Phi_s$, there is no change of flux in the cores, the gate windings are unable to develop the

voltage. The circuit operates as an ordinary three-phase Graetz rectifier. The maximum load current now passes through the load.

As the value of the control current is gradually increased from $I_{C, \min}$ to $I_{C, \max}$, the voltage appears across the gate windings, the change of flux in the cores will become smaller. The current passing through the load will gradually rise to its maximum value.

5. Method of investigation

The analysis of the operation of the circuit may be undertaken in two stages. In the first stage the mean value of the load current varies between

$$I_{L, \min} \leq I_L \leq \frac{1}{2} I_{L, \max},$$

in the second stage between

$$\frac{1}{2} I_{L, \max} \leq I_L \leq I_{L, \max}.$$

The method of investigation pursued in both stages is first to determine the change with time of the interesting quantities of the circuit within a 60° range, then on the basis of equations (4) to extend the validity of this information to the entire period.

In the first stage a 60° range consists of two, characteristically different parts. In the first part only one of the six cores is in a saturated state, in the second part two (Fig. 7h). In the second stage on the other hand, at least two cores are saturated throughout at any instant (Fig. 11h).

The number of saturated cores for various load currents is shown in Table 1.

The current flowing through the gate winding is considered as being composed of two currents, *viz.* the magnetizing current $i_{G, x}$, and the saturation current $i_{G, s}$.

The magnetizing current passes through the gate winding when the core belonging to it is in the stage of flux change. This current is of the order of magnitude of the maximum of the magnetizing current (I_c) and carries out the magnetization of the core.

The saturation current passes through the gate winding when the core, and at least one other core in the circuit, is saturated. Then in the circuit of the two saturated cores the supply voltage can only be developed across the circuit resistances. This current is one or possibly two orders of magnitude larger than the maximum of the magnetizing current.

Table 1

	Number of saturated cores		Value of load current
	Part 1.	Part 2.	
Stage I	1	No part 2.	$I_L = I_{L, \min}$
	1	2	$I_{L, \min} < I_L < \frac{I_{L, \max}}{2}$
	No part 1.	2	$I_L = \frac{I_{L, \max}}{2}$
Stage II		2	$\frac{I_{L, \max}}{2} < I_L < I_{L, \max}$
		6	$I_L = I_{L, \max}$

In the first part of the first stage only the magnetizing current passes through the load resistance, but no saturation current. In the second part of the first stage and in the second stage on the other hand, saturation current is present throughout.

6. Firing angle

The saturation of core A is followed after a lapse of time $\frac{T_c}{6}$ by the saturation of core C' , that of C' after a similar period by the saturation of core B , etc. (Fig. 3). What, under such circumstances, is to be called the firing angle? To avoid ambiguity, the firing angle is understood to denote the angle during which the flux — for the case of any core — changes from the beginning of a positive flux-change to saturation.

7. First stage

A) $\alpha = 2\frac{\pi}{3}$. Let the value of the control current be chosen so that the saturation of the next core to become saturated should take place just at the

instant of zero transition of the supply voltage applied to the gate winding. In this case two cores cannot simultaneously be saturated, except at the instant of the zero transition of the supply voltages. Saturation current may therefore not flow.

Presume that the magnetic condition of the six cores is indicated on the magnetization characteristic by the points marked 1 on Fig. 5h, at the time $t_1 = \frac{\pi}{3\omega}$ (Fig. 2). Then consider how the magnetic condition of the cores

changes in the time interval $\frac{\pi}{3\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{3\omega}$.

According to Fig. 5h the magnetizing currents flowing through the gate windings of the cores at the time t_1 are:

$$i_{G,xA} = 0, \quad (7A)$$

$$i_{G,xC'} = 0, \quad (7B)$$

$$i_{G,xB} = \frac{-I'_{C,\min} + I_c}{2}, \quad (7C)$$

$$i_{G,xA'} = I'_{C,\min} + I_c, \quad (7D)$$

$$i_{G,xC} = -I'_{C,\min} + I_c, \quad (7E)$$

$$i_{G,xB'} = \frac{-I'_{C,\min} + I_c}{2}. \quad (7F)$$

The currents flowing in the gate windings must at all times satisfy the equation

$$i_A + i_B + i_C = i_{A'} + i_{B'} + i_{C'}, \quad (8)$$

arising from the nodal laws applied to points P and N (Fig. 1). This equation is satisfied at the instant t_1 .

The only current through the load resistance R_L is $\frac{3}{2}(-I'_{C,\min} + I_c)$, which is of the order of magnitude of the magnetizing current. The voltage drop across R_L is therefore neglected (see point g/ of the assumptions).

Saturation has been reached by cores C and A' . Thus at the instant t_1 the nodes P and N are at the potential of the supply terminal 1, or at the identical potential (Fig. 2) of terminal 3.

Of the rectifiers, b , c , a' , and b' are being used in the forward direction, while a and c' are in the boundary condition.

At the instant immediately following t_1 , the potentials of the supply

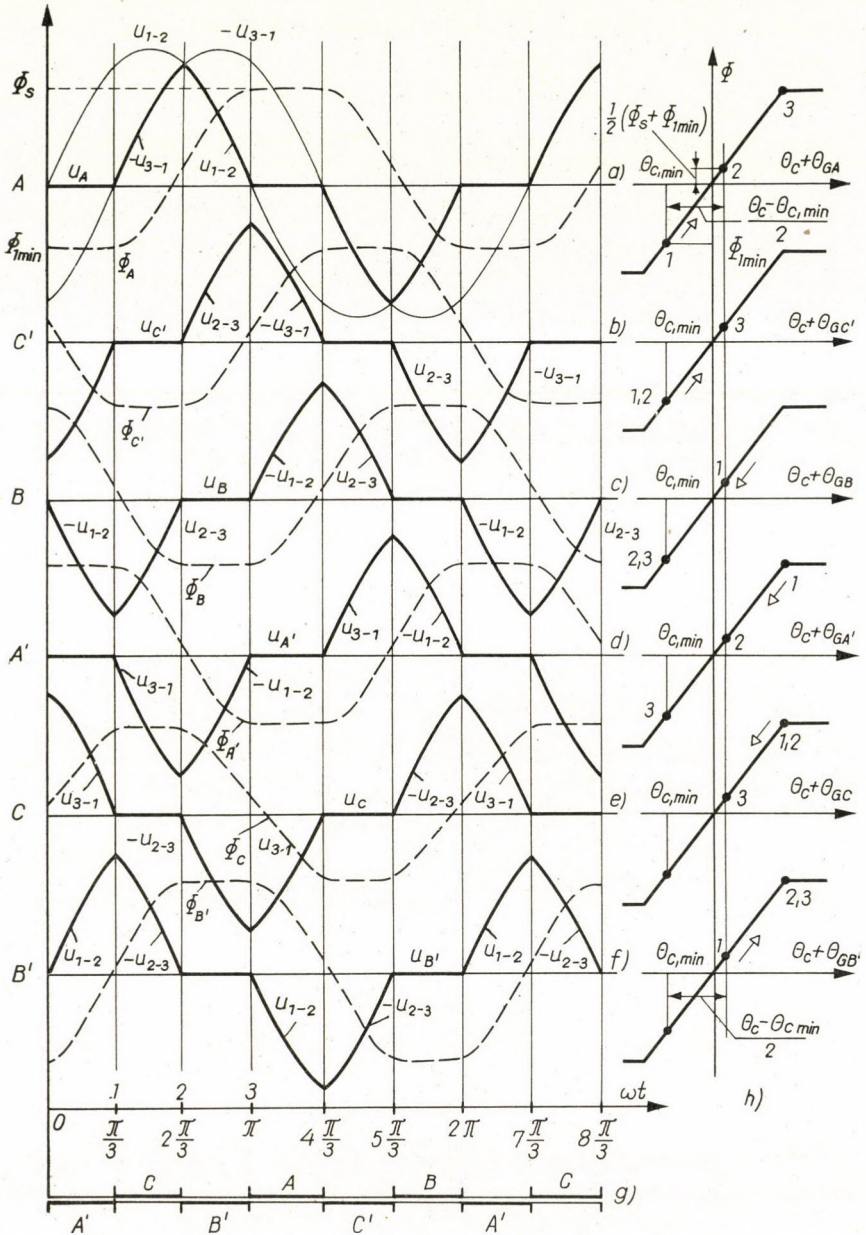


Fig. 5. Change with time of the gate winding voltage (continuous line) and core flux (dashed line) of the six cores for minimum load current ($\alpha = \frac{2\pi}{3}$), (Figs. a. . . f), alternation in time of the saturated cores (Fig. g), moreover the movement of the points denoting the magnetic conditions of the cores along the magnetization characteristic (Fig. h)

terminals 1 and 3 will differ. Presume that the nodes P and N remain at the potential of supply terminal 3. (Core C remains saturated.) Then

$$u_{A'} = u_{3-1}.$$

If, on the other hand, it is presumed that the nodes P and N remain at the potential of supply terminal 1, then the voltage on core C is

$$u_C = u_{3-1}.$$

The flux may change in the negative direction in both cores.

Which condition will in fact ensue? It may be proved that core A' can not remain saturated, for if this were postulated, it would lead to the contradiction that the current through the gate winding of the saturated core would, due to the necessary compliance with equation (8), have to be smaller than what is actually needed to saturate the core.

If core A' is saturated, the nodes P and N are at the potential of supply terminal 1. The voltages across the gate windings of the cores are then

$$\begin{aligned} u_A &= u_{A'} = 0, \\ u_B &= -u_{B'} = u_{2-1}, \\ u_C &= -u_{C'} = u_{3-1}. \end{aligned}$$

Hence, and from the equation (7) the currents flowing through the gate windings at the instant immediately after t_1 are

$$\begin{aligned} i_{G,xA} &= 0, \\ i_{G,xC'} &= \Delta i_C, \\ i_{G,xB} &= \frac{-I_{C,\min} + I_C}{2} - \Delta i_B, \\ i_{G,xC} &= -I_{C,\min} + I_C - \Delta i_C, \\ i_{G,xB'} &= \frac{-I_{C,\min} + I_C}{2} + \Delta i_B, \end{aligned}$$

where Δi_C and Δi_B are the changes of current in the gate windings B, B' and C, C' respectively necessary for the flux-change caused by the voltages applied to them (they are positive quantities).

Hence, and from equation (8) it would be necessary for a current

$$i_{G,xA'} = -I_{C,\min} + I_C - 2(\Delta i_B + \Delta i_C),$$

to flow in the gate winding of core A' to maintain the postulated condition. This, however, is smaller than that needed for saturation. Consequently core A' can not remain in a saturated condition.

If, on the other hand, the saturation of core C is presumed, then — as it is proposed to show — no contradiction is involved.

In this case the nodes P and N remain at the potential of supply terminal 3. The voltage distribution in the circuit is graphically shown in Fig. 6. The voltages across the gate windings are seen to be

$$u_A = -u_{A'} = -u_{3-1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq \frac{2\pi}{3} \end{array} \right. \quad (9A)$$

$$u_B = -u_{B'} = u_{2-3}, \quad (9B)$$

$$u_C = u_{C'} = 0 \quad (9C)$$

from Fig. 5.

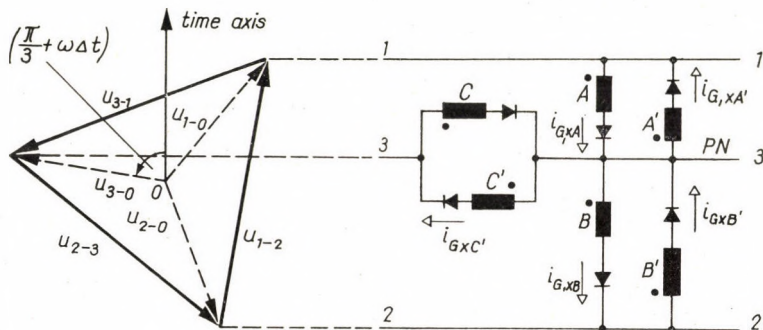


Fig. 6. Voltage distribution of the circuit in the first stage at the instant immediately following $\frac{\pi}{3\omega}$, i. e. at $\left(\frac{\pi}{3\omega} + \Delta t\right)$. $\left(\alpha = \frac{2\pi}{3}\right)$.

From the voltages, the flux-change with time in any core is

$$\Phi(\omega t) = \frac{1}{\omega N_L} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\omega t} u \, d(\omega t) + \Phi_0. \quad (10)$$

Φ_0 is the value of the flux at the time $t_1 = \frac{\pi}{3\omega}$. The possible values of Φ_0 are: $\Phi_{1,\min}$, Φ_s , $\frac{1}{2}(\Phi_s + \Phi_{1,\min})$. (See Fig. 5h.) Knowing $\Phi(\omega t)$, the change with time of the current through the gate windings is

$$i_{G,x}(\omega t) = \frac{1}{N_L A} [\Phi(\omega t) - \Phi_{1,\min}], \quad (11)$$

if $\Phi < \Phi_s$.

On the basis of (9) and (10) the various core fluxes in succession are

$$\Phi_A(\omega t) = \frac{U_p}{\omega N_L} \left[1 + \cos \left(\omega t - 4 \frac{\pi}{3} \right) \right] + \Phi_{1,\min}, \quad (12A)$$

$$\Phi_{C'}(\omega t) = \Phi_{1,\min}, \quad (12B)$$

$$\Phi_B(\omega t) = \frac{U_p}{2\omega N_L} \left[1 - 2 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \frac{\Phi_s + \Phi_{1,\min}}{2}, \quad (12C)$$

$$\Phi_{A'}(\omega t) = -\frac{U_p}{\omega N_L} \left[1 + \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right] + \Phi_s, \quad (12D)$$

$$\Phi_C(\omega t) = \Phi_s, \quad (12E)$$

$$\Phi_{B'}(\omega t) = -\frac{U_p}{2\omega N_L} \left[1 - \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \frac{\Phi_s + \Phi_{1,\min}}{2}. \quad (12F)$$

The range of validity of the equations is $\frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq 2 \frac{\pi}{3}$.

If the currents through the various gate windings are determined from the equations (11) and (12), it is seen that the equation (8) is satisfied at every instant of time. The postulate of the saturation of core *C* is thus shown to have been correct [equation (12E)].

On the basis of (11) and (12) the load current is

$$\begin{aligned} i_{L,x}(\omega t) &= i_{G,xA'} + i_{G,xB'} + i_{G,xC'} = \\ &= \frac{1}{N_L A} (\Phi_{A'} + \Phi_{B'} + \Phi_{C'} - 3\Phi_{1,\min}) \end{aligned} \quad (13)$$

so that

$$\begin{aligned} i_{L,x} &= \frac{1}{N_L A} \left\{ \frac{-U_p}{2\omega N_L} \left[3 + 2 \cos \left(\omega t - 4 \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(\omega t - 5 \frac{\pi}{3} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (\Phi_s - \Phi_{1,\min}) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

The validity of the relations (9) and (12) may, with the help of the equations (4), easily be extended to the full period.

The above considerations have enabled the change with time of the core voltages and fluxes to be shown graphically for the full period in Figs. 5a...f. From the flux diagrams the change with time of the currents flowing in the gate windings of the cores may also be easily derived [see equation (11)]. Fig. 5g shows the alternation with time of the saturated cores, while Fig. 5h

indicates the position of the points denoting the magnetic conditions of the various cores on the magnetization characteristic, for the angles $\omega t = \frac{\pi}{3}$, $2\frac{\pi}{3}$ and π (points 1, 2 and 3).

Two more important conclusions may be drawn. The voltage appearing on the gate winding is not sinusoidal. In this boundary operating condition the resultant voltage induced in the control circuit is zero. The considerations advanced so far, are therefore valid for both free and forced magnetization, and even for all intermediate cases between the two.

B) $\frac{2\pi}{3} \geq a \geq \frac{\pi}{3}$. Let the value of the control current be increased in the positive direction from $I_{C, \min}$ to I_C , but in such a manner that a should not be less than $\frac{\pi}{3}$.

Presume that the magnetic conditions of the cores are those indicated on the magnetization characteristic by the points 1 of Fig. 7i, at the time $t_1 = \frac{\pi}{3\omega}$. Consider the change in the magnetic condition of the cores over the time interval $\frac{\pi}{3\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{3\omega}$.

At the time t_1 the cores A' and C are saturated. At the instant immediately following t_1 — for reasons similar to the case for $a = \frac{2\pi}{3}$ — only the core C remains saturated. The nodes P and N remain at the potential of supply terminal 3.

The voltages across the gate windings will be

$$u_A = -u_{A'} = -u_{3-1}, \quad (15A)$$

$$u_B = -u_{B'} = u_{2-3}, \quad (15B)$$

$$u_C = u_{C'} = 0. \quad (15C)$$

(Figs. 6 and 7a...f). These equations — with the exception of that applying to core B — will remain valid right up to the saturation of core B' , which is the next to become saturated at the angle $\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$. The angle β , is determined by the equation

$$\beta = a + \frac{\pi}{3} \quad (16)$$

(Fig. 7a). The flux of core B will — as is to be shown — reach the minimum

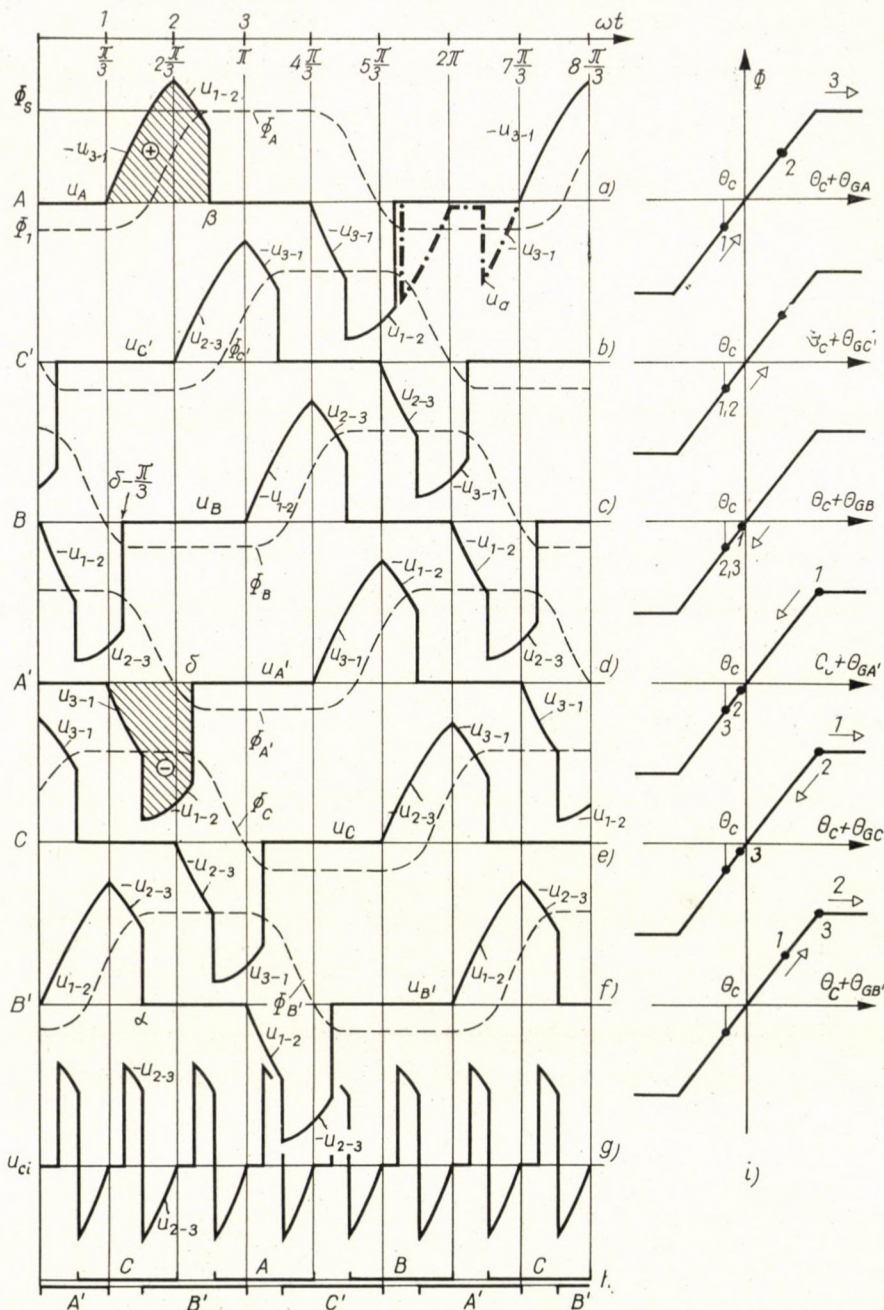


Fig. 7. The change with time for the case of a load current of $I_L \cong 0.133 I_{L,max}$, $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, of the gate winding voltage (continuous line) and core flux (dashed line) of the six cores (Figs. a. . . f) and of the resultant AC voltage induced in the control circuit (u_{ci}), (Fig. g), moreover the alternation of the saturated cores (Fig. h) and the movement of the points denoting the magnetic conditions of the cores along the magnetization characteristic (Fig. i)

value (Φ_1) determined by the control current at the angle $\left(\delta - \frac{\pi}{3}\right)$, before the saturation of core B' . The range $\frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq \alpha$ is part 1 of stage I (Table 1).

From the time when core B' becomes saturated, two cores (C and B') will be saturated. In the circuit formed by supply terminal 3 — core C — rectifier c — node P — node N — core B' — rectifier b' — terminal 2, the supply

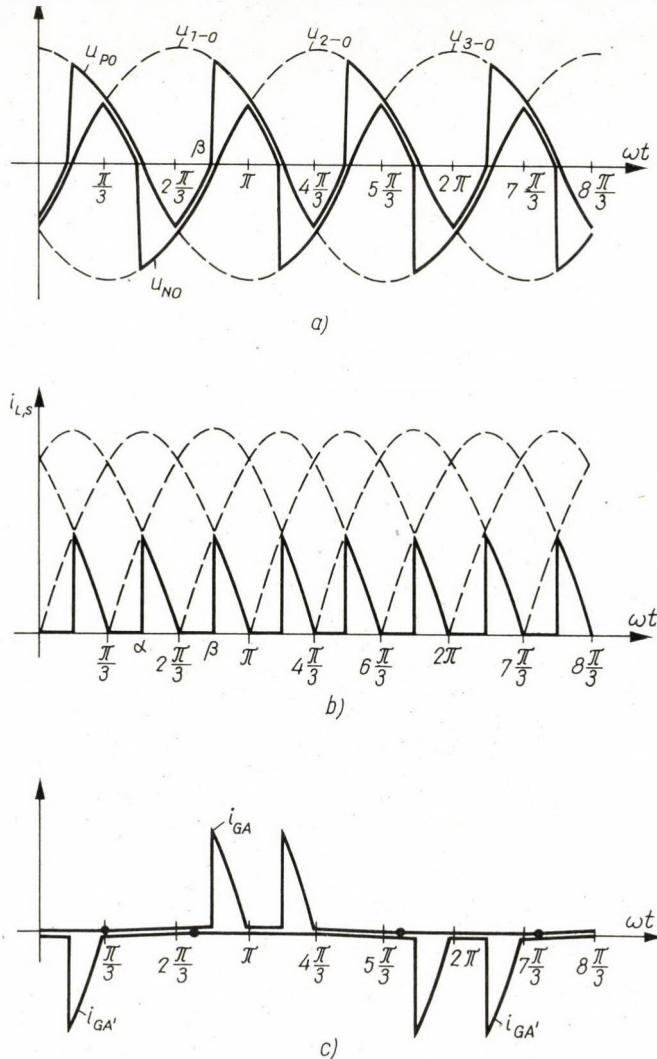


Fig. 8. The change with time for the case of a load current of $I_L \cong 0.133 I_{L,\max}$, $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, of the voltages arising at points P and N of the load with respect to the neutral point of the network (Fig. a), of the saturation current passing through the load (Fig. b) and of the resultant currents through the gate windings of cores A and A' (Fig. c)

voltage u_{2-3} can only develop across the resistances of the circuit. The load current shows a sudden increase (Fig. 8b) at the instant when core B' becomes saturated. From this time a saturation current flows through the gate windings of cores C and B' . Node P continues to remain at the potential of supply ter-

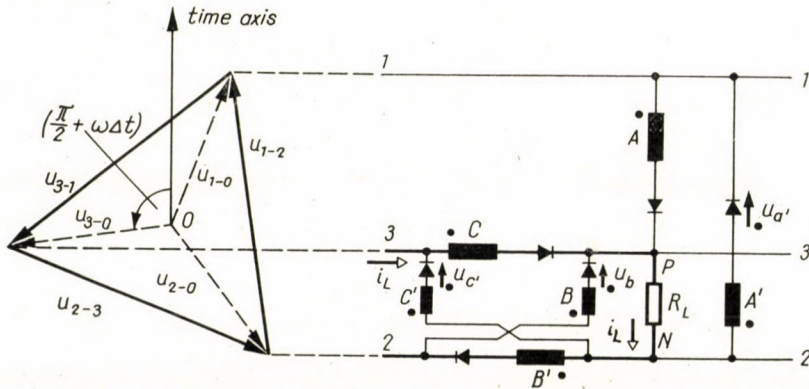


Fig. 9. Voltage distribution of the circuit in the first stage, at the instant $(\frac{\pi}{2\omega} + \Delta t)$, immediately after the saturation of core B' ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

terminal 3. Node N , however, at the instant of firing suddenly assumes the potential of supply terminal 2 (Fig. 8a).

Consequently the voltage applied to the gate winding of core A continues to be

$$u_A = -u_{3-1}. \tag{17A}$$

On the other hand the voltage of core A' suddenly changes to

$$u_{A'} = -u_{1-2}. \tag{17B}$$

The voltages of the other four gate windings are zero

$$u_B = u_{B'} = u_C = u_{C'} = 0. \tag{17C}$$

The equations (17) are valid over the range $\alpha \leq \omega t \leq \frac{2\pi}{3}$ i. e. in part 2 of stage I. (Table 1). The voltage distribution of the circuit — at the time immediately after firing — is shown by Fig. 9.

The validity of the equations (15) and (17) is extended to the entire period with the help of the relations (4). The changes with time of the gate winding voltages and of the resultant AC voltage (u_{Ci}) induced in the control circuit, have been shown in Figs. 7a...f and 7g. On the basis of equations

(10), (15) and (17) the change with time of the fluxes has also been indicated in Figs. 7a...f (dashed line). Fig. 7h shows the alternation with time of the saturated cores, while Fig. 7i indicates the position on the magnetization characteristic of the point denoting the magnetic conditions of the various cores at the angles $\omega t = \frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}$ and π (points 1, 2 and 3).

A reverse voltage across the rectifiers only appears when the flux in the core belonging to them is Φ_1 . In this case the reverse voltage, e. g. in the case of rectifier *a* is the potential difference between the supply terminal 1 and the node *P* (dotdash curve of Fig. 7a.)

On the basis of Fig. 7 the changes in time of the voltages at points *P* and *N* (u_{P0}, u_{N0}), the saturation load current (i_{Ls}) and the currents through the gate windings of cores *A* and *A'*, ($i_{GA}, i_{GA'}$), have been construed in Figs. 8a, b and c.

The value of the flux Φ_1 is unequivocally determined by the control current [equation (6)]. Φ_1 in turn decides the value of the angle β , for it depends only on Φ_1 how large the positive voltage area is, which can be developed for instance across the gate winding of core *A* (Fig. 7a).

At the next step let the relation between the flux Φ_1 and the angle β be determined. For example in the case of core *A*, the voltage area applied to the gate winding between $\frac{\pi}{3}$ and the angle β raises the flux from its value of Φ_1 to $+\Phi_s$ (Fig. 7a), so that

$$\Phi_s - \Phi_1 = \frac{1}{\omega N_L} \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} (-u_{3-1}) d(\omega t) + \int_{2\frac{\pi}{3}}^{\beta} u_{1-2} d(\omega t), \quad (18)$$

whence using (1),

$$\Phi_1 = \Phi_s + \frac{U_p}{\omega N_L} \cos \beta. \quad (19)$$

Let $U_{p,s}$ be the line voltage peak value at which, for $\alpha = 2\frac{\pi}{3}$, the flux oscillates between $-\Phi_s$ and $+\Phi_s$. The value of $U_{p,s}$ is, from (18),

$$U_{p,s} = 2 \omega N_L \Phi_s. \quad (20)$$

From the last two relations

$$\Phi_1 = \Phi_s (1 + 2k \cos \beta), \quad (21)$$

where

$$k = \frac{U_p}{U_{p,s}}. \quad (22)$$

Now to determine the relation between the angles β and δ . The positive voltage area applied to the gate windings is in absolute value equal to the negative voltage area, for the flux always oscillates between Φ_s and Φ_1 . Thus, for example, the two shaded voltage areas in Figs. 7a and d are also equal to one another. From this equivalence

$$\cos \delta = 1 + 2 \cos \beta. \quad (23)$$

The relations (21) and (23) are only valid in the first stage. According to (23),

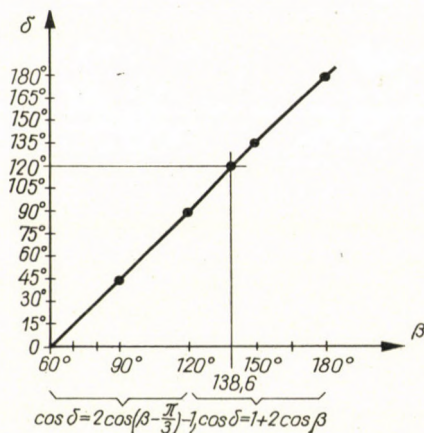


Fig. 10

$\delta \leq \beta$ (Fig. 10). This also follows from the fact that from $\frac{\pi}{3}$ to $\frac{2\pi}{3}$ the voltage area applied to core A is smaller than that of A' .

8. Second stage

$\frac{\pi}{3} \geq a \geq 0$. Let I_C be further increased in the positive direction, until the firing angle becomes $\frac{\pi}{3}$ or smaller. Then let the magnetic conditions of the cores be indicated on the magnetization characteristic at a time $t_1 = \frac{\pi}{3\omega}$ by the points 1 of Fig. 11i.

In the angular range $\frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq \beta$ the cores C and B' are saturated, so that

$$u_C = u_{B'} = 0. \quad (24A)$$

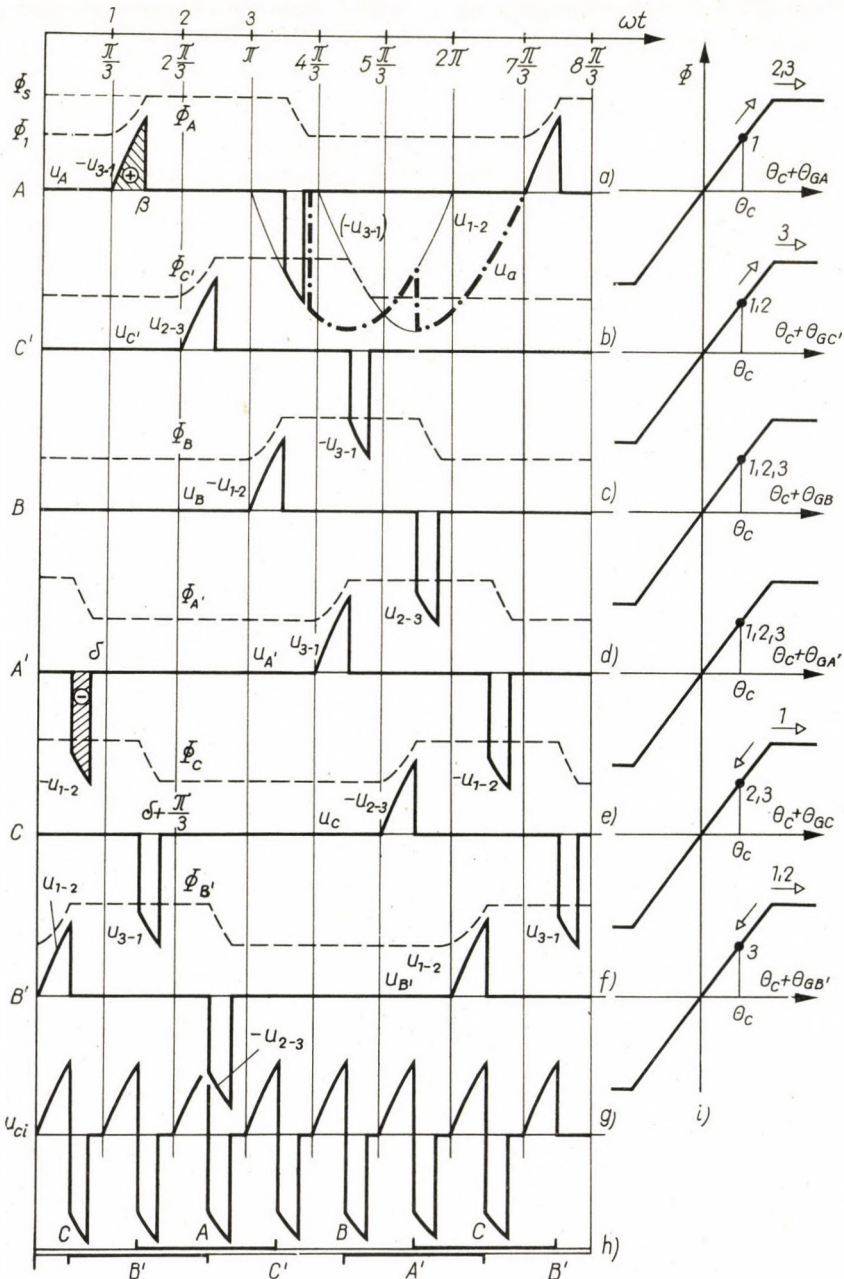


Fig. 11. The change with time for the case of a load current of $I_L \cong 0,866 I_{L,max}$, ($\alpha = \frac{\pi}{6}$), of the gate winding voltage (continuous line) and core flux (dashed line) of the six cores (Figs. a...f), moreover the alternation of the saturated cores (Fig. h) and the movement of the points denoting the magnetic conditions of the cores along the magnetization characteristic (Fig. i)

The voltage distribution of the circuit is shown by Fig. 12. Node P is at the potential of supply terminal 3, node N at that of terminal 2 (Fig. 13a). In the circuit formed by supply terminal 3 — core C — node P — node N — core B' — terminal 2, the supply voltage $-u_{2-3}$ can only be developed across

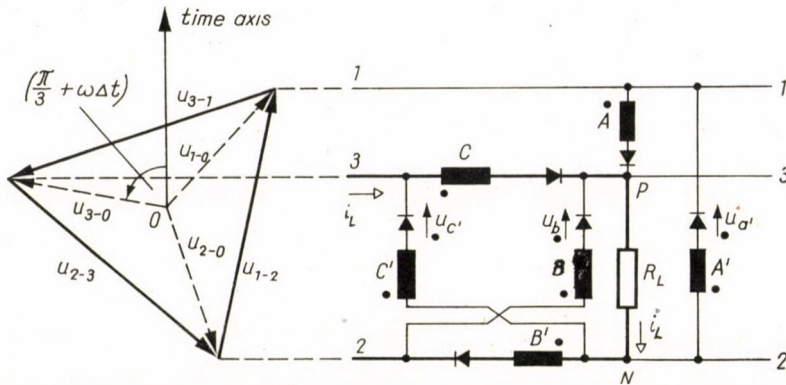


Fig. 12. Voltage distribution of the circuit in the second stage at the instant $\left(\frac{\pi}{3\omega} + \Delta t\right)$ immediately following $\left(\frac{\pi}{3\omega}\right)$. $\left(\alpha = \frac{\pi}{6}\right)$.

the resistances of the circuit. A saturation current flows through the gate windings of cores C and B' .

Of the remaining four cores, a positive voltage may occur across gate winding A and a negative voltage across the rest. The gate windings B , A' and C' can, however, no longer take up a negative voltage since current in a negative direction would then have to flow through their rectifiers. Thus

$$u_A = -u_{3-1}, \tag{24B}$$

$$u_B = u_{A'} = u_{C'} = 0. \tag{24C}$$

At the time $t = \frac{\beta}{\omega}$, core A will become saturated. The voltage distribution in the circuit at times subsequent to firing is shown in Fig. 14. Since it will now be the voltage of the supply terminal 1 that is the most positive, the saturation current will henceforward flow through gate winding A , but will continue to flow back through gate winding B' .* (The potential of supply

* It is here presumed that the leakage reactance of the supply transformer is negligible, which is permissible in the case of smaller ratings up to a few kVA. The phenomenon of overlapping does not then arise. Gate winding A is able to take over the saturation current from C without delay, in its entirety, at the instant β/ω .

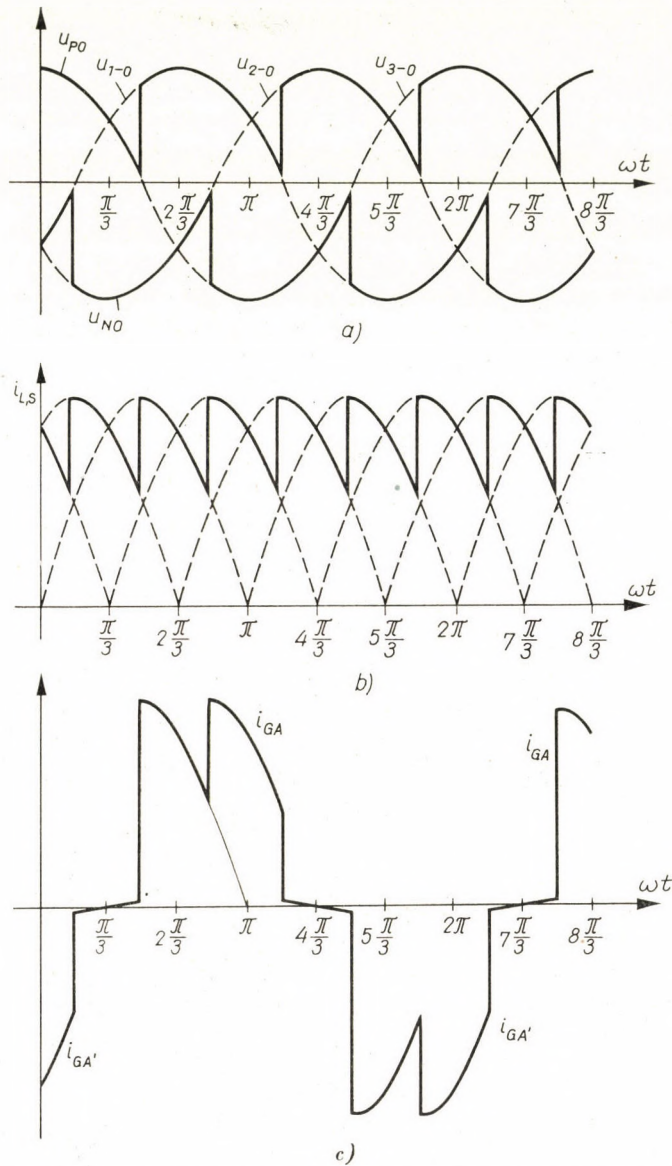


Fig. 13. The change with time for the case of a load current of $I_L \cong 0.866 I_{L,\max}$, $(\alpha = \frac{\pi}{6})$, of the voltages arising at points P and N of the load with respect to the neutral point of the network (Fig. a), of the saturation current passing through the load (Fig. b) and of the resultant currents through the gate windings of cores A and A' (Fig. c)

terminal 2 is the most negative.) The potential of node P suddenly rises at the time of firing to the voltage of supply terminal 1, while that of N remains at the voltage of terminal 2.

The flux of core *C* is reset from the time of firing, since henceforward it has the negative voltage

$$u_C = u_{3-1} \tag{25A}$$

across it. This relation is valid in the angular range $\alpha \leq \omega t \leq \delta + \frac{\pi}{3}$. The angle $\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right)$ is that at which the flux in core *C* is just reduced to the value Φ_1 .

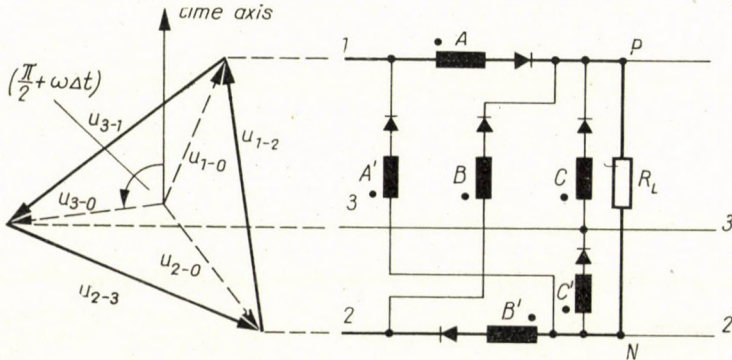


Fig. 14. Voltage distribution of the circuit in the second stage at the instant $\left(\frac{\pi}{2\omega} + \Delta t\right)$, immediately following the saturation of core *A* $\left(\alpha = \frac{\pi}{6}\right)$,

After $\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right)$ the voltage on core *C* will be zero. The voltage between supply terminal 3 and point *P* is developed across the rectifier *c*.

Due to saturation, after firing

$$u_A = u_{B'} = 0, \tag{25B}$$

moreover due to reasons similar to those developed in connection with (24C),

$$u_B = u_{A'} = u_{C'} = 0. \tag{25C}$$

The relations (25) are valid in the range $\alpha \leq \omega t \leq \frac{2\pi}{3}$.

Similarly to the procedure followed hitherto, the validity of equations (24) and (25) is extended to the entire period. The diagrams of the gate winding voltages, of the induced AC voltage in the control circuit (u_{Ci}), and the alternation in time of the saturated cores is shown by Figs. 11a...h in the above order. The same figure also contains the change with time of the fluxes (dashed line). Fig. 11i indicates the position on the magnetization characteristic of the points denoting the magnetic conditions of the various cores at angles of $\omega t = \frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}$ and π (points 1, 2 and 3).

The change with time of the reverse voltage applied to the rectifier a has been illustrated in Fig. 11a. Voltage is only developed across the rectifier if the flux in core A is just Φ_1 . During this time the size of the reverse voltage is the voltage difference between supply terminal 1 and the point P (dot-dash curve of Fig. 11).

On the basis of Fig. 11a the changes with time of the voltages of the nodes P and N (u_{P0} , u_{N0}), the saturation current passing through the load ($i_{L,s}$) and the currents through the gate windings of the cores A and A' ($i_{G,A}$, $i_{G,A'}$), have been construed in Figs. 13a, b and c.

Here, as in the first stage, let the relations between the flux Φ_1 and the angle β , and between the angles β and δ be determined.

In the case, for instance, of core A , the voltage area applied to the gate winding from $\frac{\pi}{3}$ to the angle β , increases the flux from the value Φ_1 to Φ_s (Fig. 11a), so that

$$\Phi_s - \Phi_1 = \frac{1}{\omega N_L} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\beta} (-u_{3-1}) d(\omega t), \quad (26)$$

whence using (1), (20) and (22),

$$\Phi_1 = \Phi_s - 2k\Phi_s \left[1 - \cos \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) \right]. \quad (27)$$

The relation between the angles β and δ may — similarly to the first stage — be determined from the equality of the positive and negative voltage areas shaded in Figs. 11a and d. Hence (Fig. 10)

$$\cos \delta = 2 \cos \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right) - 1. \quad (28)$$

Relations (27) and (28) are only valid for the second stage.

The operating mechanism of the magnetic amplifier which has been investigated may, in the steady state condition, concisely be stated thus: The control voltage (input signal) determines the value of the control current ($I_C = U_C/R_C$). The control current prescribes the magnitude of the initial flux Φ_1 (see equation (6)). Φ_1 in turn decides the value of the firing angle (equations (22) and (27)). Finally the firing angle unequivocally determines the size of the load current.

The results and conclusions important for design are that:

- a) in the case of minimum load current ($\alpha = 2 \frac{\pi}{3}$), the voltage across the gate windings of the cores does not change sinusoidally (Fig. 5);
- b) in the case of maximum load current ($\alpha = 0$), the circuit may theoretically be treated as a three-phase Graetz-type rectifier circuit;
- c) the maximum change of control current referred to the gate winding within the control range is $2kI_C$.

REFERENCES

1. STORM, H. F., FLAIRTY, C. W.: Theory of the three-phase bridge magnetic amplifiers. *AIEE Transactions*, Part I (1959), pp. 878—895.
2. Розенблат, М. А.: Магнитные усилители. Изд. Советское радио (1960).
3. MILNES, A. G.: Transducers and magnetic amplifiers. Macmillan & Co. Ltd. (1957).
4. LAMM, A. U.: The transductor. Esselte Aktiebolaget Sweden (1948).
5. STORM, H. F.: Magnetic amplifiers. John Wiley and Sons (1955).
6. FROST—SMITH, E. H.: The theory and design of magnetic amplifiers. John Wiley and Sons (1958).
7. Писарев, А. Л.: Исследование работы магнитного усилителя с самонасыщением на трехфазную нагрузку. Автоматика и Телемеханика. 1959. № 9 (1274—1288).
8. MILNES, A. G.: Three-phase transductor circuits for magnetic amplifiers. *Proc. IEE*, part IV (1952), pp. 336—357.
9. KRATZ, P. LANG, A.: Bauelement und Typenreihen magnetischer Verstärker. *AEG Mitteilungen* (1959), pp. 413—434.

THEORIE EINES DREIPHASIGEN, SELBSTSÄTTIGENDEN MAGNETISCHEN VERSTÄRKERS IN BRÜCKENSCHALTUNG

I. WIRKUNGSWEISE

I. NAGY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Wirkungsweise des untersuchten Magnetverstärkers im stationären Zustand kann kurz wie folgt zusammengefaßt werden: Die Steuerspannung (Eingangssignal) bestimmt den Wert des Steuerstroms ($I_C = U_C/R_C$). Der Steuerstrom schreibt die Größe des Flusses Φ_1 vor [siehe Gl. 1]. Φ_1 bestimmt wiederum die Größe des Sättigungswinkels [Gl. (22) und (27)]. Der Sättigungswinkel hingegen schreibt die Größe des Belastungsstromes eindeutig vor.

Vom Standpunkt der Bemessung ergeben sich die folgenden wichtigen Ergebnisse bzw. Schlußfolgerungen:

- a) Im Falle eines minimalen Belastungsstromes ($\alpha = 2 \frac{\pi}{3}$) ändert sich die auf die Arbeitswicklungen der Kerne gelangende Spannung nicht sinusförmig (Abb. 5).
- b) Im Falle eines maximalen Belastungsstroms ($\alpha = 0$) kann die Schaltung theoretisch so behandelt werden wie der Gleichrichterkreis einer dreiphasigen Grätz-Schaltung.
- c) Die maximale Änderung des Steuerstroms im Arbeitsbereich ist $2kI_C$.

THÉORIE DE L'AMPLIFICATEUR MAGNÉTIQUE AUTO-SATURANT TRIPHASÉ, MONTÉ EN PONT

I. PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT

I. NAGY

RÉSUMÉ

Le mécanisme de fonctionnement en état de régime de l'amplificateur magnétique examiné peut être schématisé comme suit: la tension de commande (signal d'entrée) détermine la valeur du courant de commande ($I_C = U_C/R_C$). Le courant de commande détermine la grandeur du flux Φ_1 [voir éq (6)]. Φ_1 fixe à son tour la valeur de l'angle d'ignition [éq (22) et (27)]. Enfin l'angle d'ignition prescrit d'une façon univoque la valeur du courant de charge. Voici les résultats et déductions les plus importants du point de vue du calcul:

- a) En cas de courant de charge minimum ($\alpha = 2 \frac{\pi}{3}$), la tension arrivant aux enroulements de puissance des noyaux ne varie pas suivant une sinusöide (fig. 5).
- b) En cas de courant de charge minimum ($\alpha = 0$), le montage peut être considéré théoriquement comme un circuit de redressement triphasé de Graetz.
- c) La variation maximum du courant de commande est, dans le domaine de fonctionnement: $2kI_C$.

ТЕОРИЯ ТРЕХФАЗНОГО САМОНАСЫЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО УСИЛИТЕЛЯ МОСТОВОЙ СХЕМЫ

1. Принцип работы

И. НАДЬ

РЕЗЮМЕ

Механизм работы исследуемого магнитного усилителя в установившемся состоянии может быть трактован следующим образом: управляющее напряжение (входящий сигнал) определяет величину управляющего тока ($I_C = U_C/R_C$). Управляющий ток предопределяет величину потока Φ_1 (см. уравнение (6)). Поток Φ_1 , в свою очередь, определяет величину угла насыщения (уравнения (22) и (27)). А угол насыщения однозначно предопределяет величину тока нагрузки.

Важные результаты и соответственно выводы с точки зрения расчета:

а. В случае минимального тока нагрузки ($\alpha = 2\frac{\pi}{3}$) напряжение, попадающее на рабочую обмотку, не изменяется синусоидально (рис. 5).

б. В случае максимального тока нагрузки ($\alpha = 0$) схему принципиально можно рассматривать как трехфазную выпрямительную цепь схемы **GRAETZ**.

в. Максимальное изменение управляющего тока в рабочем диапазоне $2kI_C$.

NOUVELLE MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DES PULSATIONS PROPRES CORRESPONDANT AUX VIBRATIONS DE TORSION DES ARBRES COUDÉS DES MOTEURS HOMOGÈNES EN LIGNE

ANDREI RIPIANU

CLUJ, ROUMANIE

(Manuscrit présenté le 29 mai 1961)

On considère un moteur homogène en ligne à z cylindres, dont l'arbre coudé n'est pas chargé par des pièces à ses extrémités. En effectuant la réduction des masses et des longueurs, on obtient un système vibrant réduit homogène à z masses, dont les $(z-1)$ pulsations propres, correspondant aux vibrations de torsion du système, sont données par la formule (20).

Si l'arbre coudé du moteur est chargé à ses extrémités par des pièces, on obtient, en effectuant la réduction des masses et des longueurs, un système vibrant inhomogène.

Pour calculer les pulsations propres correspondant aux vibrations de torsion, on transforme le système vibrant inhomogène en un système vibrant homogène équivalent du point de vue dynamique.

Le nombre de masses, identiques entre elles, que contient ce système, dépend de la valeur de la pulsation des vibrations de torsion du système vibrant.

En appliquant la formule (20) au cas du système homogène équivalent au système inhomogène, on obtient les pulsations propres cherchées correspondant aux vibrations de torsion.

La détermination des pulsations propres des vibrations de torsion des arbres coudés présente une importance exceptionnelle dans la construction des moteurs à combustion interne. Elle s'effectue d'habitude par la méthode analytique de HOLZER—TOLLE, qui nécessite des calculs très laborieux à cause du grand nombre de tâtonnements précédant la détermination exacte de la valeur de ces pulsations.

Plus le nombre des masses est élevé, plus les calculs sont laborieux. Aussi l'établissement de méthodes permettant de calculer les pulsations propres sans tâtonnement, présente-t-il un grand intérêt.

Dans ce qui suit, nous allons exposer une nouvelle méthode pour la détermination des pulsations propres correspondant aux vibrations de torsion des arbres coudés des moteurs homogènes en ligne.

On considère un moteur homogène en ligne, possédant z cylindres. Supposons qu'aucune pièce n'est fixée aux extrémités de l'arbre coudé du moteur. En effectuant la réduction des masses et des longueurs à l'aide des formules classiques, on obtient un système homogène vibrant formé par z masses réduites identiques (fig. 1).

Notations:

r_0 le rayon du cercle de réduction des masses en cm, qui peut être adopté arbitrairement. On peut adopter comme rayon de réduction r_0 le rayon des manetons.

$$\begin{aligned}
 a_7 &= 1 - 21 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + 70 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^4 - 84 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^6 + 45 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^8 - \\
 &\quad - 11 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{10} + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{12}; \\
 &\dots \dots \dots \\
 a_i &= 1 - C_i^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + C_{i+1}^4 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^4 - C_{i+2}^6 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^6 + C_{i+3}^8 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^8 - \\
 &\quad - C_{i+4}^{10} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{10} + C_{i+5}^{12} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{12} - \dots + (-1)^{i-3} C_{2i-4}^{2i-6} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2i-6} + \\
 &\quad + (-1)^{i-2} C_{2i-3}^{2i-4} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2i-4} + (-1)^{i-1} C_{2i-2}^{2i-2} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2i-2} \quad (1) \\
 &\dots \dots \dots \\
 a_z &= 1 - C_z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + C_{z+1}^4 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^4 - C_{z+2}^6 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^6 + \dots + \\
 &\quad + (-1)^{z-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2z-2}.
 \end{aligned}$$

L'équation des pulsations propres est :

$$\sum_{i=1}^z a_i = 0 \quad (2)$$

ou :

$$\begin{aligned}
 z - \sum_{i=1}^z C_i^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + \sum_{i=1}^z C_{i+1}^4 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^4 - \sum_{i=1}^z C_{i+2}^6 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^6 + \dots + \\
 + (-1)^{z-1} C_{2z-2}^{2z-2} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2z-2} = 0. \quad (3)
 \end{aligned}$$

On connaît la relation :

$$\sum_{i=1}^z C_i^q = \sum_{i=q}^z C_i^q = C_{z+1}^{q+1}. \quad (4)$$

Compte tenu de (4), la relation (3) devient :

$$\begin{aligned}
 C_z^1 - C_{z+1}^3 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + C_{z+2}^5 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^4 - C_{z+3}^7 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^6 + C_{z+4}^9 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^8 - \\
 - C_{z+5}^{11} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{10} + \dots + (-1)^{z-3} C_{2z-3}^{2z-5} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2z-6} + \\
 + (-1)^{z-2} C_{2z-2}^{2z-3} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2z-4} + (-1)^{z-1} C_{2z-1}^{2z-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2z-2} = 0.
 \end{aligned}$$

Sous une autre forme:

$$\sum_{s=0}^{z-1} (-1)^s C_{z+s}^{2s+1} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2s} = 0. \quad (5)$$

Nous allons démontrer que les $z-1$ racines positives de l'équation (5) sont:

$$\frac{\omega}{\omega_p} = 2 \sin \frac{n\pi}{2z} \quad (6)$$

où $n = 1; 2; 3; \dots; z-1$.

Pour cela, il faudra démontrer que:

$$\sum_{s=0}^{z-1} (-1)^s C_{z+s}^{2s+1} \left(2 \sin \frac{n\pi}{2z} \right)^{2s} = 0 \quad (n = 1; 2; 3; \dots; z-1). \quad (7)$$

On connaît la relation [1]:

$$\frac{\sin zx}{\sin x} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{z-1}{2} \right]} (-1)^s C_{z-1-s}^s (2 \cos x)^{z-1-2s}$$

où $\left[\frac{z-1}{2} \right]$ représente la partie entière de $\frac{z-1}{2}$.

On pose:

$$1 + \cos x = a \quad (8)$$

done:

$$\cos x = a - 1$$

On obtient:

$$\frac{\sin zx}{\sin x} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{z-1}{2} \right]} (-1)^s C_{z-1-s}^s 2^{z-1-2s-\sigma} \sum_{\sigma=0}^{z-1-2s} (-1)^{z-1-2s-\sigma} C_{z-1-2s}^\sigma a^\sigma$$

ou

$$\frac{\sin zx}{\sin x} = 2^z (-1)^{z-1} \sum_{\sigma=0}^{z-1} (-1)^\sigma a^\sigma \sum_{s=0}^{\left[\frac{z-1-\sigma}{2} \right]} (-1)^s 2^{-1-2s} C_{z-1-s}^s C_{z-1-2s}^\sigma \quad (9)$$

Dans ce qui suit, nous allons démontrer la relation:

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{h-1}{2} \right]} (-1)^s 2^{h-1-2s} C_{z-1-s}^s C_{z-1-2s}^{z-h} = C_{2z-h}^{h-1}. \quad (10)$$

En notant: $s = p$, la relation (10) devient:

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor} (-1)^p 2^{h-1-2p} C_{z-1-p}^p C_{z-1-2p}^{z-h} = C_{2z-h}^{h-1}. \tag{11}$$

On vérifie aisément la relation:

$$C_{z-1-p}^p C_{z-1-2p}^{z-h} = C_{h-1-p}^p C_{z-1-p}^{z-h}$$

et par là (11) devient:

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor} (-1)^p 2^{h-1-2p} C_{h-1-p}^p C_{z-1-p}^{z-h} = C_{2z-h}^{h-1}. \tag{12}$$

Si h est impair, en notant: $p = \frac{h-1}{2} - s$ la relation (12) devient:

$$\sum_{s=0}^{\frac{h-1}{2}} (-1)^s 2^{2s} C_{\frac{h-1}{2}+s}^{\frac{h-1}{2}-s} C_{z-\frac{h+1}{2}+s}^{z-h} = (-1)^{\frac{h-1}{2}} C_{2z-h}^{h-1}. \tag{13}$$

Si h est pair, en notant:

$$p = \frac{h}{2} - 1 - s$$

la relation (12) devient:

$$\sum_{s=0}^{\frac{h}{2}-1} (-1)^s 2^{2s} C_{\frac{h}{2}+s}^{\frac{h}{2}-1-s} C_{z-\frac{h}{2}+s}^{z-h} = \frac{(-1)^{\frac{h}{2}-1}}{2} C_{2z-h}^{h-1}. \tag{14}$$

Nous allons démontrer successivement les relations (13) et (24).

On introduit dans la formule du binôme:

$$(1-x)^{-l} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} C_{l-1+\sigma}^{l-1} x^\sigma \quad (l \text{ entier } \geq 1; |x| < 1) \tag{15}$$

les notations: $l = n - p$; $\sigma = s + p$ (p entier ≥ 1). On obtient:

$$\sum_{s=0}^{\infty} C_{n-1+s}^{n-1-p} x^{s+p} = (1-x)^{-(n-p)} - \sum_{s=0}^{p-1} C_{n-p-1+s}^{n-p-1} x^s. \tag{16}$$

On introduit dans (16) les notations:

$$n = z - \frac{h-1}{2}; \quad p = \frac{h-1}{2}.$$

On obtient:

$$\sum_{s=0}^{\infty} C_{z-\frac{h+1}{2}+s}^{z-h} x^{\frac{h-1}{2}+s} = (1-x)^{-(z-h+1)} - \sum_{s=0}^{\frac{h-1}{2}} C_{z-h+s}^{z-h} x^s.$$

On introduit dans cette relation:

$$x = u(2 - u).$$

En tenant compte de (15), on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} C_{z-\frac{h-1}{2}+s}^{z-h} \sum_{\sigma=0}^{\frac{h-1}{2}+s} (-1)^{\sigma} 2^{\frac{h-1}{2}+s-\sigma} C_{\frac{h-1}{2}+s}^{\sigma} u^{\frac{h-1}{2}+s+\sigma} &= \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} C_{2(z-h)+1+s}^s u^s - \sum_{s=0}^{\frac{h-1}{2}-1} C_{z-h+s}^{z-h} (2u - u^2)^s \end{aligned}$$

En introduisant dans cette relation:

$$\sigma = \frac{h-1}{2} - s$$

et en égalant les coefficients de u^{h-1} , on obtient la relation:

$$(-1)^{\frac{h-1}{2}} \sum_{s=0}^{\frac{h-1}{2}} (-1)^s 2^{2s} C_{\frac{h-1}{2}+s}^{\frac{h-1}{2}-s} C_{z-h}^{z-h} C_{2z-h}^{h-1}$$

qui est identique à la relation (13).

On introduit dans (16) les notations:

$$n = z - \frac{h}{2} + 1; \quad p = \frac{h}{2}$$

On reçoit la relation:

$$\sum_{s=0}^{\infty} C_{z-\frac{h}{2}+s}^{z-h} x^{\frac{h}{2}+s} = (1-x)^{-(z-h+1)} - \sum_{s=0}^{\frac{h}{2}-1} C_{2-h+s}^{z-h} x^s$$

où l'on va introduire:

$$x = u(2 - u).$$

En tenant compte de (15), on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} C_{z-\frac{h}{2}+s}^{z-h} \sum_{\sigma=0}^{\frac{h}{2}+s} (-1)^{\sigma} C_{\frac{h}{2}+s}^{\sigma} 2^{\frac{h}{2}+s-\sigma} u^{\frac{h}{2}+s+\sigma} &= \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} C_{2(z-h)+1+s}^s u^s - \sum_{s=0}^{\frac{h}{2}-1} C_{z-h+s}^{z-h} (2u - u^2)^s. \end{aligned}$$

En introduisant dans cette relation:

$$\sigma = \frac{h}{2} - 1 - s$$

et en égalant les coefficients de u^{h-1} , on a la relation:

$$\sum_{s=0}^{\frac{h}{2}-1} (-1)^s 2^{2s+1} C_{\frac{h}{2}+s}^{\frac{h}{2}-1-s} C_{z-\frac{h}{2}+s}^{z-h} = (-1)^{\frac{h}{2}-1} C_{2z-h}^{h-1}$$

identique à (14).

La relation (11), et donc la relation (10) sont ainsi démontrées.

En introduisant dans la relation (10):

$$h = z - \sigma$$

on obtient:

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{z-1-\sigma}{2} \right]} (-1)^s 2^{-1-2s} C_{z-1-s}^s C_{z-1-2s}^\sigma = 2^{\sigma-z} C_{z+\sigma}^{2\sigma+1} \tag{17}$$

De (9) et (17) on obtient:

$$\frac{\sin zx}{\sin x} = (-1)^{z-1} \sum_{\sigma=0}^{z-1} (-1)^\sigma C_{z+\sigma}^{2\sigma+1} (2a)^\sigma. \tag{18}$$

Mais:

$$2a = 4 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

En remplaçant l'indice σ par s , la relation (18) devient:

$$\frac{\sin zx}{\sin x} = (-1)^{z-1} \sum_{s=0}^{z-1} (-1)^s C_{z+s}^{2s+1} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{2s}. \tag{19}$$

On introduit dans (19):

$$x = \pi \left(1 - \frac{n}{z} \right)$$

et l'on considère que:

$$\sin zx = 0$$

$$1 \leq n \leq z - 1 \quad \text{donc} \quad \sin x \neq 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2z} \right) = \sin \frac{n\pi}{2z}.$$

L'équation (19) devient donc:

$$\sum_{s=0}^{z-1} (-1)^s C_{z+s}^{2s+1} \left(2 \sin \frac{n\pi}{2z} \right)^{2s} = 0$$

qui est identique à l'équation (7).

Il est donc démontré que les $z-1$ racines positives de l'équation (5) sont données par (6).

Les relations (6) permettent de calculer les valeurs des $z-1$ pulsations propres correspondant aux vibrations de torsion du système vibrant homo-

gène représenté dans la fig. 1, système qui provient de la réduction de l'arbre coudé comportant les équipages mobiles afférents, et faisant partie d'un moteur homogène en ligne à z cylindres:

$$\omega = 2\omega_p \sin \frac{n\pi}{2z} \quad (n = 1; 2; 3; \dots; z-1). \quad (20)$$

On observe que:

$$\frac{\omega}{\omega_p} \leq 2.$$

Nous allons considérer un moteur homogène en ligne ayant z_1 cylindres, dont l'arbre coudé est chargé à l'une des extrémités par une pièce.

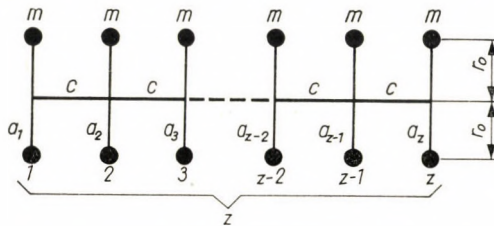


Fig. 1

Par la réduction des masses et des longueurs, on obtient le système vibrant inhomogène représenté dans la fig. 2.

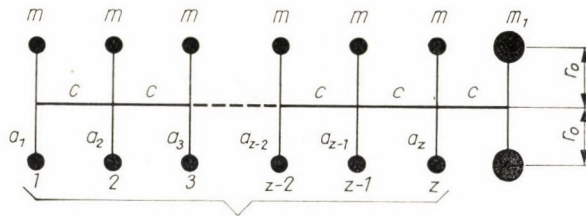


Fig. 2

Nous allons transformer ce système vibrant inhomogène en un système vibrant homogène équivalent formé par $z = z_1 + h$ masses réduites m , représenté dans la fig. 3.

A cette fin, nous allons substituer la masse réduite m_1 par un système homogène formé par h masses réduites m (fig. 3).

Le nombre h des masses est fonction de la pulsation ω des vibrations de torsion du système. Nous nous proposons de trouver la fonction $h = f\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$, ω_p étant une constante: $\omega_p = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

A cette fin, nous écrivons les équations d'équilibre dynamique du système homogène de h masses réduites d'indices 1; 2; . . . , h , dans le schéma des vibrations de torsion exécutées par ce système (fig. 3):

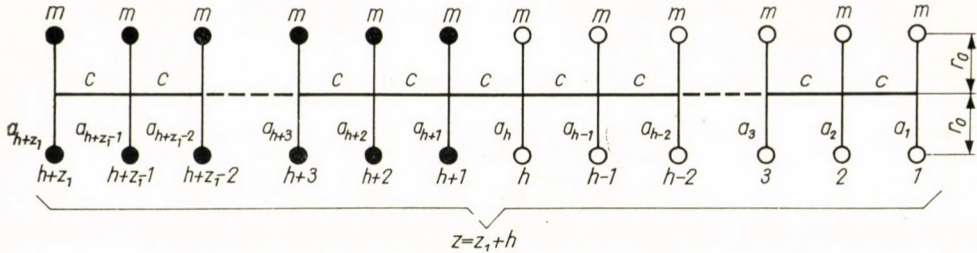


Fig. 3

$$\begin{aligned}
 ma_1 \omega^2 - c(a_1 - a_2) &= 0 \\
 ma_2 \omega^2 - c(a_2 - a_1) - c(a_2 - a_3) &= 0 \\
 ma_3 \omega^2 - c(a_3 - a_2) - c(a_3 - a_4) &= 0 \\
 \dots & \\
 ma_h \omega^2 - c(a_h - a_{h-1}) - c(a_h - a_{h+1}) &= 0.
 \end{aligned}$$

En ajoutant ces h équations, on obtient:

$$m\omega^2 \sum_{i=1}^h a_i - c(a_h - a_{h+1}) = 0. \tag{21}$$

Pour que la masse réduite m_1 mise à la place de la masse réduite m_h soit équivalente au système de h masses réduites m , il faudra que:

$$m_1 a_h \omega^2 - c(a_h - a_{h+1}) = 0. \tag{21a}$$

Des relations (21) et (21a), on déduit:

$$m_1 = m \frac{\sum_{i=1}^h a_i}{a_h} \tag{22}$$

où, en conformité avec (1):

$$a_i = \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s C_{i-1+s}^{2s} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2s}. \tag{23}$$

On connaît la relation [1]:

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (-1)^\sigma C_{n-\sigma-1}^\sigma (2 \cos x)^{n-2\sigma-1}.$$

On introduit dans cette relation les notations:

$$n = 2i - 1; \quad x = \frac{\pi}{2} - f; \quad s = i - 1 - \sigma$$

et on obtient:

$$(-1)^{i-1} \frac{\cos(2i-1)f}{\cos f} = (-1)^{i-1} \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s C_{i-1-s}^{i-1-s} (2 \sin f)^{2s}$$

ou:

$$\frac{\cos(2i-1)f}{\cos f} = \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s C_{i-1+s}^{2s} (2 \sin f)^{2s}. \quad (24)$$

En introduisant dans (23):

$$\frac{\omega}{\omega_p} = 2 \sin f \quad (25)$$

on reçoit, à l'aide de (24):

$$a_i = \frac{\cos(2i-1)f}{\cos f}. \quad (26)$$

On considère la relation:

$$\begin{aligned} & \cos a + \cos(a + \varphi) + \cos(a + 2\varphi) + \dots + \\ & + \cos[a + (h-1)\varphi] = \frac{\sin \frac{h}{2} \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos \left(a + \frac{h-1}{2} \varphi \right). \end{aligned}$$

On introduit dans cette relation les notations:

$$a = f; \quad \varphi = 2f$$

et on obtient:

$$\sum_{i=1}^h \cos(2i-1)f = \frac{\sin 2hf}{2 \sin f}. \quad (27)$$

À l'aide de (26) et (27), on obtient:

$$\sum_{i=1}^h a_i = \frac{\sin 2hf}{\sin 2f}. \quad (28)$$

De (22), on a :

$$\frac{m}{m_1} = \frac{a_h}{\sum_{i=1}^h a_i}.$$

En introduisant dans cette relation l'expression de a_h obtenue de (26) avec $i = h$, et celle de $\sum_{i=1}^h a_i$ donnée par (28), on obtient :

$$\frac{m}{m_1} = \frac{2 \cos (2 h - 1) f \sin f}{\sin 2 h f}$$

ou :

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\sin 2 f}{\tan 2 h f} + 2 \sin^2 f.$$

De (25), il résulte :

$$f = \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p} \right).$$

Donc :

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\sin 2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p} \right)}{\tan 2 h \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p} \right)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2. \quad (29)$$

De (29), on déduit l'expression de h :

$$h = \frac{\arctan \frac{\sin \left(2 \arcsin \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p} \right)}{\frac{m}{m_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2}}{2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p} \right)}. \quad (30)$$

qui représente la fonction cherchée $h = f \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)$.

De (20), on déduit :

$$z = \frac{\pi n}{2} \frac{1}{\arcsin \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p}}. \quad (31)$$

Adoptons, à présent, la notation :

$$2 \arcsin \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_p} = x. \quad (32)$$

Les relations (31) et (30) deviennent, respectivement:

$$z = \frac{\pi n}{n}; h = \frac{\arctan \left(\frac{\sin x}{\frac{m}{m_1} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right)}{x}. \quad (33)$$

En observant la fig. 3, on constate que:

$$z = z_1 + h.$$

En substituant dans cette relation les expressions de z et h données par (33), on reçoit:

$$\pi n = z_1 x + \arctan \frac{\sin x}{\frac{m}{m_1} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (34)$$

où :

$$n = 1; 2; 3; \dots; z_1.$$

On résoud maintenant l'équation (34) par rapport à x , et l'on introduit les valeurs trouvées pour x dans l'équation (32). En résolvant cette dernière équation par rapport à ω , on trouve les valeurs cherchées des pulsations propres du système vibrant.

L'équation (34) étant transcendante, la méthode la plus commode pour trouver ses racines est la méthode graphique.

Si la solution graphique est exécutée d'une manière correcte, les erreurs affectant les résultats restent au-dessous de 1%.

Exemple numérique

Soit: $z_1 = 6$; $m = 1 \text{ kg cm}^{-1} \text{ sec}^2$; $m_1 = 6 \text{ kg cm}^{-1} \text{ sec}^2$; $c = 250\,000 \text{ kg cm}^{-1}$;
On pose:

$$y = z_1 x + \arctan \frac{\sin x}{\frac{m}{m_1} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (35)$$

On obtient les valeurs numériques:

$x = 0$	$y = 0$
$x = 0,1$	$y = 1,153$
$x = 0,2$	$y = 2,134$
$x = 0,3$	$y = 2,98$
$x = 0,4$	$y = 3,75$
$x = 0,5$	$y = 4,479$
$x = 0,6$	$y = 5\,1865$
$x = 0,7$	$y = 5,8772$
$x = 0,8$	$y = 6,558$
$x = 0,9$	$y = 7,2345$
$x = 1,0$	$y = 7,9050$

Sur la base de ces valeurs numériques, on trace la courbe $y = f(x)$ (fig 4). On construit deux parallèles à l'axe des abscisses Ox ayant pour équation:

$$y = n\pi$$

correspondants aux valeurs de n :

$$\begin{array}{ll} n = 1 & \dots\dots\dots y = \pi \\ n = 2 & \dots\dots\dots y = 2\pi \end{array}$$

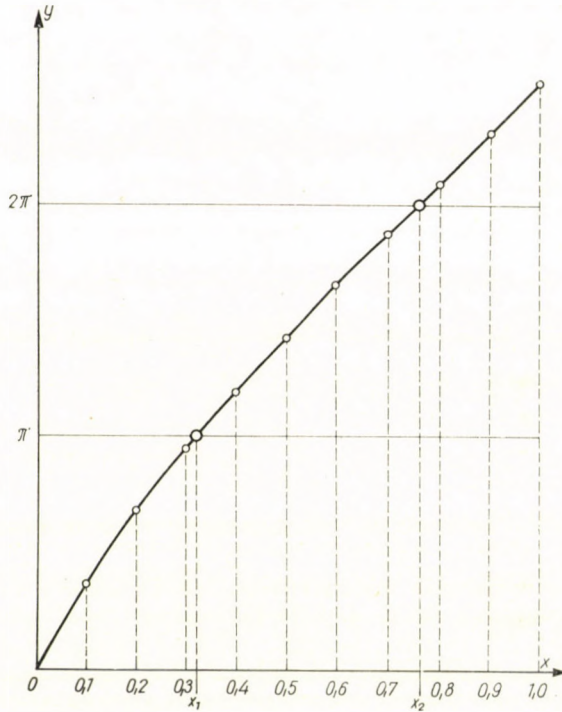


Fig. 4

Les abscisses des points d'intersection de ces parallèles avec la courbe $y = f(x)$ ont pour valeur:

$$\begin{array}{ll} n = 1 & \dots\dots\dots x_1 = 0,32 \\ n = 2 & \dots\dots\dots x_2 = 0,7595 \end{array}$$

On calcule:

$$\omega_p^2 = \frac{c}{m} = 250\,000 \text{ s}^{-2}$$

$$\omega_p = 500 \text{ s}^{-1}$$

De (32), on déduit:

$$\omega_1 = 2 \omega_p \sin \frac{x_1}{2}$$

$$\omega_2 = 2 \omega_p \sin \frac{x_2}{2}$$

On obtient comme résultats:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2 \times 500 \sin 0,16 = 159,32 \text{ s}^{-1} \\ \omega_2 &= 2 \times 500 \sin 0,37975 = 370,68 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

qui représentent les deux premières pulsations propres du système vibrant analysé.

En traçant les parallèles à l'axe des abscisses correspondants aux valeurs $n = 3; 4; 5; \dots$ et qui ont pour équations:

$$\begin{aligned}n = 3 & \dots\dots\dots y = 3\pi \\ n = 4 & \dots\dots\dots y = 4\pi \\ n = 5 & \dots\dots\dots y = 5\pi\end{aligned}$$

En intersectant ces parallèles avec la courbe $y = f(x)$ ayant pour équation (35), et désignant par $x_3; x_4; x_5; \dots$ les abscisses des points d'intersection, on obtient les pulsations propres d'ordre 3; 4; 5; \dots par les relations:

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 2 \omega_p \sin \frac{x_3}{2} \\ \omega_4 &= 2 \omega_p \sin \frac{x_4}{2} \\ \omega_5 &= 2 \omega_p \sin \frac{x_5}{2} \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

En cas d'un système vibrant de masses réduites, obtenu par la réduction de l'arbre coudé du moteur homogène en ligne à z_1 cylindres, dont l'arbre coudé est chargé aux extrémités par des pièces (fig. 5), on détermine préalablement les masses équivalentes m_1 et m_2 sur la base des équations d'équivalence. Dans la fig. 5, on a supposé que l'arbre coudé est chargé à chaque extrémité par deux pièces, donc au total par quatre pièces, qui se réduisent aux masses m_a, m_b, m_c, m_d . La masse réduite m_1 est équivalente au système de deux masses m_a et m_b , et la masse m_2 au système de deux masses m_c et m_d . Ces masses m_1 et m_2 étant fonctions de la pulsation ω des vibrations de torsion du système, on trouve:

$$m_1 = f_1\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right); \quad m_2 = f_2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$$

où:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{c}{m}} = \text{Const.}$$

En considérant la notation (32), les masses équivalentes m_1 et m_2 peuvent s'exprimer en fonction de x :

$$m_1 = f'_1(x); \quad m_2 = f'_2(x)$$

On détermine, ainsi qu'il a été exposé dans le présent article, les fonctions:

$$h_1 = \varphi_1(x); \quad h_2 = \varphi_2(x)$$

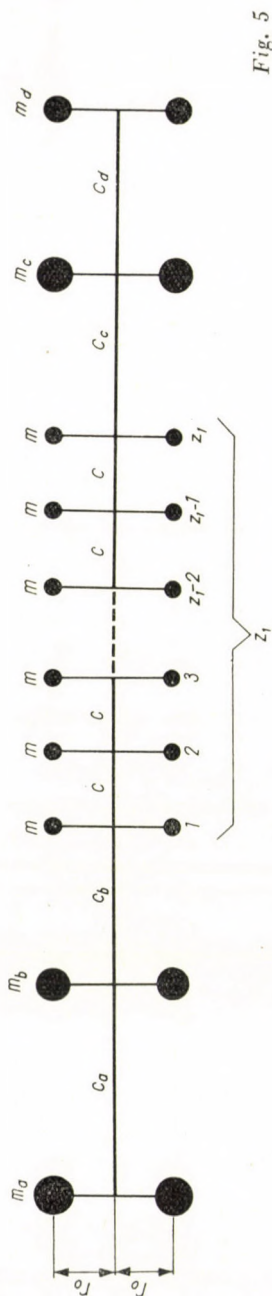


Fig. 5

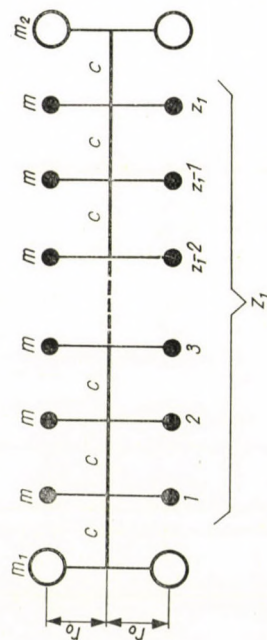


Fig. 6

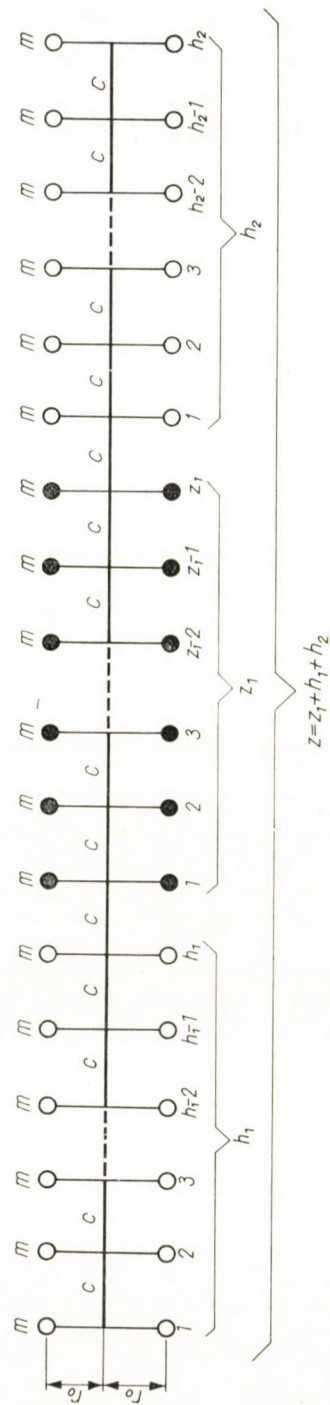


Fig. 7

où h_1 et h_2 représentent respectivement le nombre de masses réduites m qui composent les deux systèmes homogènes équivalents respectivement aux masses réduites m_1 et m_2 (fig. 7).

Les relations (33) deviennent dans ce cas:

$$z = \frac{\pi n}{x}; \quad h_1 = \frac{\arctan\left(\frac{\sin x}{\frac{m}{m_1} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}\right)}{x};$$

$$h_2 = \frac{\arctan\left(\frac{\sin x}{\frac{m}{m_2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}\right)}{x}.$$

On introduit les expressions de z , h_1 , h_2 , dans la relation:

$$z = z_1 + h_1 + h_2$$

qui résulte de la fig. 7, et on résout l'équation obtenue par rapport à x . On introduit les valeurs trouvées pour x dans la relation (32), que l'on résout par rapport à ω , et l'on obtient les valeurs des pulsations propres cherchées du système vibrant.

La méthode exposée est absolument générale. Elle permet le calcul des pulsations propres des vibrations de torsion de l'arbre coudé du moteur homogène en ligne, quel que soit le nombre de pièces fixées aux extrémités de l'arbre coudé du moteur.

BIBLIOGRAPHIE

1. AUBERT, P.—PAPELIER, G.: Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie Tome I., Paris, Librairie Vuibert 1932.
2. ANANIEV, I. V.: Cpravocnik po rasceti cobstvenih kolebanii uprugih sistem, Moskva Gostehizdat 1946

EINE NEUE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER EIGENSCHWINGUNGEN ENTSPRECHEND DEN DREHSCHWINGUNGEN DER KURBELWELLEN DER HOMOGENEN REIHENMOTOREN

A. RIPIANU

ZUSAMMENFASSUNG

Man setzt voraus, daß die Kurbelwelle des homogenen Reihenmotors, der z Zylinder besitzt, an seinen Enden keine Massen trägt. Durch die Längen und Massenreduktion erhält man ein homogenes Schwingungssystem, das z Massen enthält und dessen $(z-1)$ Eigenschwingungszahlen durch die Formel (20) gegeben sind.

Ist die Kurbelwelle an seinen Enden mit Massen belastet, dann erhält man durch die Längen und Massenreduktion ein inhomogenes Schwingungssystem.

Man ersetzt dieses inhomogene System durch ein dynamisch equivalentes homogenes System, dessen Massenzahl von der Schwingungszahl der Drehschwingungen abhängt.

Mit Hilfe der Formel (20) bestimmt man die Eigenschwingungszahlen des dynamisch equivalenten homogenen Systems entsprechend den Drehschwingungen.

A NEW METHOD FOR THE DETERMINATION OF PROPER PULSATIONS CORRESPONDING TO THE TORSION VIBRATIONS OF THE CRANK SHAFTS OF HOMOGENEOUS MOTORS IN LINE

A. RIPIANU

SUMMARY

An homogeneous motor in line with z cylindres the crank shaft of which is not loaded at its extremities is to be considered. Effectuating the reduction of the masses and lengths, we obtain a reduced vibrating homogeneous system whose $z-1$ proper pulsations corresponding to the torsion vibrations of the system are given by formula (20).

If the crank shaft of the motor is loaded at its two extremities, effectuating the reduction of the masses and lengths, we obtain a vibrating unhomogeneous system.

In order to calculate the proper pulsations corresponding to the torsion vibrations, we transform the vibrating unhomogeneous system into such a vibrating homogeneous system which is from the dynamical point of view equivalent.

The number of identical masses between them of which this system is composed depends on the value of the pulsations of torsion vibrations of the vibrating system.

To the equivalent homogeneous system we apply with the unhomogeneous system the formula (20) and we obtain the demanded proper pulsations, corresponding to torsion vibrations.

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ПУЛЬСАЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СКРУЧИВАЮЩИМ КОЛЕБАНИЯМ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОРОДНЫМ РЯДОВЫМ ДВИГАТЕЛЯМ

А. РИПЯНУ

РЕЗЮМЕ

Считается однородным рядовой двигатель с цилиндрами с незагруженными деталями на концах коленчатого вала. Восстанавливая массы и длины, получается вибрирующая восстановленная однородная система, собственные пульсации которой, соответствующие скручивающим колебаниям, даны в формуле (20).

Если коленчатый вал двигателя нагружен деталями на обоих его концах, то восстанавливая массы и их длины, получается неоднородная вибрирующая система.

Для расчета собственных пульсаций, соответствующих скручивающим колебаниям, неоднородная вибрирующая система превращается в однородную вибрирующую систему, эквивалентную с динамической точки зрения.

Число тождественных между собой масс этой системы зависит от величины пульсаций скручивающих колебаний вибрирующей системы. Применяется формула (20) для однородной эквивалентной системы с неоднородной системой и получаются неизвестные собственные пульсации, соответствующие скручивающим колебаниям.

SOME NOTES ON THE DETERMINATION AND MEASUREMENT OF EFFICIENCY FOR PROCESS CONTROL OPTIMIZATION

T. VÁMOS

CAND. OF TECHN. SC.

INSTITUTE FOR ELECTRICAL POWER RESEARCH

[Manuscript received December 23, 1961]

The recent method of efficiency-measurement is not suitable for process automation. The estimation of the ratio of input and output energy values leads to erroneous results. With a long range estimation no information can be reached for the effects of system variations. A new sampling method, recommended by the author, may be the basis of optimization for the control of processes due to statistical disturbances.

1. Introduction

The most important aim in the recent development of process control is the optimization of the overall industrial process from the economic point of view, i.e. the minimization of system costs. This task, simple though it seems to be, involves a number of very complicated, intricate connected questions, the treatment of a great many inhomogenous input and output values, the study of system dynamics, deterministic and stochastic functions of the system parameters analysis of a possible practical algorithm of system performance in order to find a mathematical model of the process and a heuristic program for the optimal approach of minimum system costs. This study, although it contains many general principles, has, of course, to be made individually, and can be evaluated for each kind of industrial process in most cases only by means of a long series of particular steps, trials and experiments.

The purpose of this paper is to make clear one particular question of process optimization, namely the determination of the economic parameters of a time-varying, complex process disturbed by stochastic noises, either in the input or in system performance, or in both. The treatment is of course similar to processes that may be deterministic but, having very complicated relations, are not yet fully cleared up by the technologists, or have essential parameters for which the measurement technics is inefficient. The method was developed for steam generators, the main economic parameter of which is efficiency, but the ideas, outlined in this paper may be generalized for a wide class of other continuous industrial processes (chemical, metallurgical, etc.). It is well known that, from the system engineer's point of view, with its multiple-coupled, lumped parameters, the boiler is a black box for measurement and control because a control of coal-heat values and input quantities is uncertain.

2. The need for a more precise concept of efficiency

For common use, efficiency is determined as the ratio of output and input energy (electrical energy on plant busses/fuel input energy). This definition is poor because the time-relations of the phenomena must also be considered: the effect of certain inputs can be observed on the output after a time delay only. This time delay is generally not a constant but dependent on the input parameters, probably on the systems changes (e.g. disturbances); it may not even have a discrete value but, in a certain range, continuous time- and frequency spectra. It is clear that the omission of these time-relations is not correct since, it may lead to an absurd result, e.g. to an efficiency greater than unity, if a discharging period is put to the account of a previous charging period. The determination of the exact instantaneous energetic balance for all parameters is generally impossible because of the complexity of the system; our estimation may be made only on the basis of some output and input, and sometimes of a few auxiliary parameters.

These considerations lead us to the need of a new concept, to the use of a dynamic efficiency which, in contrast to the previous static view, includes also the time-relations outlined above.

The exact definition for efficiency is

$$\eta = \frac{\int_{t_b}^{t_e} x_{out} dt}{\int_{t_b}^{t_e} x_{in} dt} = f(t_b, t_e, x_{out}, x_{in}),$$

where x_{in} means the input, x_{out} the output energy or — generally — the economic parameters (e.g. financial value), t_b the time at which the process begins, and t_e its expiry. The overall efficiency may be determined only by estimating the totalled results of the process (e.g. start, stop, maintenance).

The problem differs clear by from the relation:

$$\frac{\int x_{out} dt}{\int x_{in} dt} \neq \frac{1}{t_e - t_h} \int \frac{x_{out}}{x_{in}} dt; \text{ if } \frac{x_{out}}{x_{in}} \neq \text{const.}$$

If the input energy (or some economic parameter) will be transformed during the process into the output energy according to an input response $\varphi(t)$, which is characteristic of the system instantaneous efficiency for x_{in} , we obtain

$$\begin{aligned} x_{out} &= \int_0^t x_{in}(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau, \\ &= \frac{\int_{t_b}^{t_e} \int_0^t x_{in}(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \cdot dt}{\int_{t_b}^{t_e} x_{in}(t) \cdot dt}. \end{aligned}$$

This expression shows that efficiency is a result of a complicated interaction of the process and the input parameter where the input may be composed in a general case of a deterministic time-function and a stochastic process, and $\varphi(t)$ is the result of causal relations which do and do not depend on x_{in} (depending in the latter case on the internal system parameters); $\varphi(t)$ may further be the result of a statistical phenomenon.

Though we have stated that the exact value of plant efficiency may be determined only for the whole period of start-operation-stop-maintenance, a method of determination for a relatively shorter period is also needed because the full estimation-period may require several months or even years. An urgent need exists for the estimation of effects of relatively shorter time varying events. This is an essential device for the determination of the optimal mode of operation. Therefore we have to establish, instead of the time intervals t_b and t_e time, new time-limits t_1 and t_2 for shorter periods, though long enough for giving a reliable picture of the examined time-interval. An important feature of these new time limits must be that the efficiency for the whole $t_b - t_e$ interval should be supplied by them with a preset accuracy, i.e.

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i \pm \varepsilon,$$

where η is the efficiency for the whole process, discussed above and η_i is the efficiency for the shorter periods

$$\eta_i = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} x_{out} dt}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} x_{in} dt};$$

$$t_e - t_b = (t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + (t_{i+1} - t_{ia}) + \dots + (t_2 - t_1);$$

ε = the error (see later in 7).

3. A method recommended for the determination of the efficiency-estimation period

The method recommended is as follows:

(1) We establish the limits of estimation at two identical values of x_{in} (Fig. 1). Variations with longer periods are excluded from the estimation or considered only after the registration of a variation in the opposite direction (shaded areas).

(2) We suppose that the process is stationary and ergodic, but not markovian, except the start, stop and unloading periods which have essential deterministic components. It is clear that a continuous industrial process with numerous time lags is not a markovian one, for the previous life of the process influences future events very considerably. The ergodic supposition is not so evident and may only be a device for the handling of the problem, though, according to practice, it is a good approximation. This supposition has to be checked by calculations.

(3) The essential eigenvalues of the frequency spectra (or the essential spectral bands) for the input and output parameters may be determined by

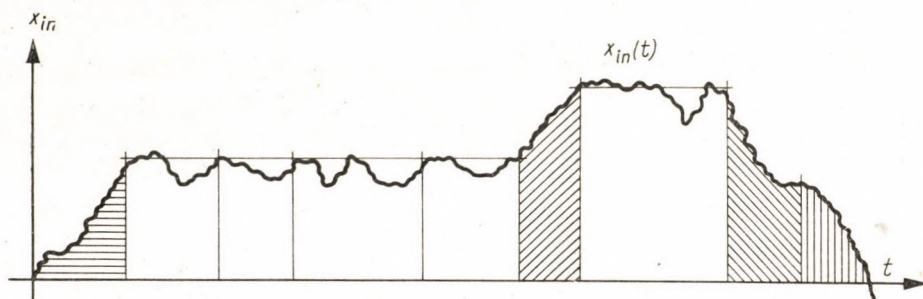


Fig. 1

the examination of the autocorrelations and characteristic functions. We obtain limited frequency-bands in any case because the higher frequencies are filtered out by the process, and very low frequencies are excluded because of the reliability and the relatively short duration of the measurement. The limitation in respect of higher frequencies is further evident from the physical fact that, in a continuous process and under normal conditions, the system performance does not as a rule, change radically.

(4) The transfer time constants of the system can be estimated from the cross-correlation of the input and output parameters. We shall take the most characteristic ones.

(5) On the basis of the time constants and frequencies, calculated in step 3, a suggestion can be made regarding the period of estimation. If the process had only a single discrete eigen-frequency, the estimation period would be the period of this harmonic. If the input and the response were composed of a number of discrete harmonics, we would take the least common multiple of their period. In most cases we find a continuous frequency band for the characteristic functions. It is obvious that, for a continuous frequency spectrum, we cannot find a finite period for which — taking the efficiency sample (i.e. the time-integrals of the x_{out} and x_{in}) — we obtain invariably the same probable value. On the other hand, we can find for every limited frequency spectrum

a sampling period for which the expected value of the time-integrals is not more different than a preset value ε . If, for instance, we have a flat frequency distribution between ω_1 and ω_2 , the time-integral

$$\int_0^t \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin \omega t d\omega dt$$

yield an integral-sine expression which is convergent for t . If the frequency distribution is not flat, the situation is the same, though the expression for the time-integral may be more complicated.

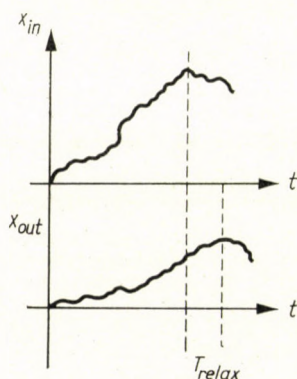


Fig. 2

(6) The next task is a determination of the limits of non-stationary intervals. After the termination of the non-stationary input curve we have a relaxation on the output which may be estimated on the basis of the greatest probable time-constants (Step 4, Fig. 2.). The period of estimation must be larger than that of relaxation.

(7) Summing the partial efficiency-values, calculated during the estimation periods determined above, we make a comparison with the exact value of efficiency for the whole process time. If the difference is significant, we have to make a correction for the estimation period.

(8) In the above considerations we have made a numerous indefinite statements, such as very long, very short, slow, fast, essential value, significant difference, etc. All these statements have very different values for the different processes, depending on the system speed, reasonable accuracy, reliability of measurement, etc. The main check of these uncertainties is that of step 7 which is the verbal expression of our equation

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i \pm \varepsilon.$$

ε must have a value which corresponds to the accuracy of the measurements regarding input and output parameters because a greater accuracy is not reasonable from a technical point of view. The economic test is the absolute money value of error made by permitting ε for a year.

EINIGE FRAGEN DER DEFINIERUNG DES WIRKUNGSGRADS UND SEINER MESSUNG VOM STANDPUNKT DER PROZESS-OPTIMIERUNG

T. VÁMOS

ZUSAMMENFASSUNG

Die bisherige Methode für die Messung des Wirkungsgrads erweist sich nicht als hinreichend für die Zwecke der Automatisierung von Prozessen. Die momentane Auswertung des Quotienten der eintretenden und austretenden Energiemengen führt zu falschen Ergebnissen. Die Auswertung über eine längere Zeitdauer erfaßt hingegen nicht den Einfluß der Änderung des Systems auf den Wirkungsgrad. Der Verfasser schlägt daher ein neues Verfahren der Probenentnahme vor, das auch bei statistischen Einflüssen, im Falle der Steuerung von veränderlichen industriellen Prozessen, die Grundlage der Optimierung sein kann.

QUELQUES PROBLÈMES DE LA DÉFINITION ET DE LA MESURE DU RENDEMENT, DU POINT DE VUE DE L'OPTIMISATION DES PROCESSUS

T. VÁMOS

RÉSUMÉ

La méthode de mesure du rendement utilisée jusqu'à présent s'avère insuffisante quand il s'agit de l'automatisation des processus. L'évaluation instantanée du rapport des quantités d'énergies entrantes et sortantes conduit à des résultats erronés, tandis que l'évaluation pendant un temps assez long ne met pas en évidence l'influence des changements du système sur le rendement. Pour ces raisons, l'auteur propose une nouvelle méthode d'échantillonnage pouvant servir de base à l'optimisation en cas du contrôle de processus industriels variables, sous l'influence même de perturbations statistiques.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ К.П.Д. С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОПТИМАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА

T. VAMOS

РЕЗЮМЕ

Применявшийся до сих пор метод измерения к.п.д. не оказался подходящим для целей автоматизации процесса. Оценка частного отношения входящих и выходящих количеств энергии в данный момент приводит к ошибочным данным. Между тем оценка в течение продолжительного периода не воспринимает влияния изменения системы, оказываемого на к.п.д. Поэтому автор предлагает такой новый метод отбора проб, который и при воздействии статических количеств в случае управления переменных промышленных процессов может быть основой оптимализации.

BEMERKUNGEN ZUR ABHANDLUNG VON HIRAMATSU UND KOKADO: „EINE UNTERSUCHUNG ÜBER DIE KÜHLUNG VON GRUBEN DURCH DEN WETTERSTROM“*

T. BOLDIZSÁR

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC (UNGARN)

[Eingegangen am 5. Oktober 1961]

Von HIRAMATSU und KOKADO wurde ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Erwärmung der in den Grubenbauen strömenden Wetter entwickelt. Es wird im vorliegenden Aufsatz nachgewiesen, daß durch das von dem Autor bereits früher mitgeteilte Verfahren die Wirklichkeit vom praktischen Standpunkt aus viel besser angenähert werden kann, wobei mit weniger Berechnungsarbeit genauere Resultate erzielt werden können. Durch Extrapolation aus den Tabellen von HIRAMATSU und KOKADO werden große Fehler verursacht, während es bei dem Verfahren des Autors überhaupt keiner Extrapolation bedarf.

Die Erwärmung der Grubenluft wird in zwei Fällen einmal durch das Verfahren von HIRAMATSU und KOKADO, zum anderen mit Hilfe des Verfahrens des Autors berechnet, wobei die erhaltenen Resultate die Aussagen des Autors bekräftigen.

Die Studie behandelt den einfachsten Fall der Erwärmung der durch Grubenstollen strömenden Wetter: es wird im waagerechten Stollen nur die Wirkung der Gesteinswärme berücksichtigt, dagegen die Rolle der Wärmeübertragung zwischen der Gesteinswand und der Grubenluft eingehend untersucht.

Wie aus dem angeführten Schrifttum ersichtlich ist, sind die auf diesem Gebiete von manchen anderen Forschern erzielten Ergebnisse den Verfassern nicht bekannt und konnten deshalb von ihnen auch nicht berücksichtigt werden. Sie berücksichtigen nicht die Arbeiten von KÖNIG [1], BATZEL [2], KREMNIÉFF [3], HITCHCOCK-JONES [4], noch die von mir veröffentlichten [5], weshalb ihre Lösungen, wenn auch nicht als unrichtig, jedoch als überholt zu betrachten sind. Das mitgeteilte Verfahren vermag den Wettbewerb mit keiner der angeführten Methoden aufzunehmen, weil es bei aller Kompliziertheit nur eine Annäherung liefert. Betrachten wir nun die Ableitung des Verfahrens etwas näher.

Die Verfasser befassen sich in ihren Gleichungen (1) bis (19) eingehend mit der Verteilung der Temperatur in der zylindrischen Gesteinshülle, was schon eine längst bekannte und gelöste Aufgabe ist. Es fiel ihnen nicht ein, daß die Erwärmung der Wetter sehr einfach und für den praktischen Gebrauch mehr oder weniger genau berechnet werden kann, wenn wir den Wärmestrom, welcher im Gestein infolge Erwärmung der Grubenwetter in Achsenrichtung des Stollens entsteht, nicht berücksichtigen, weil dieser in der Größen-

* Erschienen im „Bergbau Archiv“ Jahrgang 19 (1958. S. 16).

ordnung um zwei Stellen kleiner ist als der radiale Wärmestrom und deshalb mit Recht vernachlässigt werden kann. So kann die aus dem Gestein in den Grubenstollen strömende Wärmemenge ausgedrückt werden durch

$$q = 2\pi\lambda F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right)\tau, \quad (1)$$

worin λ der Wärmeleitfaktor, α der Wärmeübergangsfaktor, R der Halbmesser, τ die Differenz zwischen der ursprünglichen Gesteinstemperatur und der

Lufttemperatur ($\tau = T_G - T_L$), $\psi = \frac{at}{R^2}$, a die Temperaturleitzahl und t die Zeit bedeuten. Es ist

$$F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\psi\beta^2}}{\left[J_0(\beta) + \frac{\beta\lambda}{\alpha R} J_1(\beta)\right]^2 + \left[Y_0(\beta) + \frac{\beta\lambda}{\alpha R} Y_1(\beta)\right]^2} \frac{d\beta}{\beta}, \quad (2)$$

worüber Tabellen ausgearbeitet sind.

Auf Seite 419 meiner angeführten Abhandlung (5) steht folgendes:

“An examination of Equation (1) will point to the fact that the quantity of heat flowing into a drift of radius R in a given medium after a given period of time, depends exclusively on the difference of temperature between the virgin rock and the walls of the drift, the latter having been cooled by ventilation. The expression $F(\psi)$ with a given value of (ψ) will remain constant even if the temperature of air in the drift, or what is much the same, the temperature of the wall of the drift varies. This will enable us, later in this paper, to write down differential Equation (3) after we have examined the temperature-rise of air in the drift. It must, however, be added here that in Equation (1) the expression T_k is the virgin-rock temperature when $r = \infty$. This temperature shows the same values as the temperature of the axis of the drift when being opened up and just before the rock was disturbed by driving.”

Bei Berücksichtigung dieser Thesen erscheint der auf Seite 20—22 der Abhandlung angeführte Gedankengang als überflüssig, ebenso die grobe Annäherung zur Lösung der Aufgabe mittels des Gauß-schen Fehlerintegrals an Stelle der Bessel-schen Funktionen.

Man kann die Differentialgleichung der Erwärmung der Grubenwetter einfach anschreiben (5):

$$d\tau = - \frac{q}{V \cdot c_p} dz. \quad (3)$$

Für $z = 0$, ist $\tau = \tau_0$, den Wert von q eingesetzt:

$$\frac{d\tau}{\tau} = - \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right) dz}{V \cdot c_p},$$

deren Lösung

$$\tau = \tau_0 \exp\left(- \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right) z}{V \cdot c_p}\right) \quad (4)$$

ist.

An Hand der zwei Beispiele auf Seite 27 und 28 der Abhandlung geht hervor, wie einfach gute Ergebnisse mit Hilfe der auf Grund obiger Gleichung (4) berechneten Tabelle für Gleichung (2)

$$2\pi \cdot F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right)$$

erzielt werden können, viel genauere als mit den komplizierten und dennoch ungenauen Zusammenhängen der Verfasser.

Erstes Beispiel (Seite 27)

Nach Angaben der Verfasser sind,

$$T_G = 40^\circ \text{ C}, T_{L_0} = 28^\circ \text{ C}, \text{ daraus } \tau_0 = 12^\circ \text{ C}; t = 10^3 \text{ h}, R = 2 \text{ m},$$

$$V = 90600 \text{ m}^3/\text{h}, \lambda = 1,0 \text{ kcal/m, h, }^\circ\text{C}; a = 0,002 \text{ m}^2/\text{h},$$

$$\alpha = 10,0 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, }^\circ\text{C}; z = 800 \text{ m}.$$

Aus diesen können wir ψ und $2\pi \cdot F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right)$ berechnen bzw. feststellen (Tab. I).

$$\psi = \frac{at}{R^2} = 0,5; \frac{\alpha R}{\lambda} = 20; 2\pi \cdot F\left(\psi_1, \frac{\alpha R}{\lambda}\right) = 7,3$$

Mit diesen Größen ist nach Gleichung (4) $\tau = 9,65$, woraus

$$T_{LZ} = 40 - 9,65 = 30,35^\circ \text{ C}$$

Hiramatsu und Kokado errechneten $31,5^\circ \text{ C}$.

Ist $a = \infty$, dann erhalten wir $T_{LZ} = 30,45^\circ \text{ C}$, woraus hervorgeht, daß die Rolle des Wärmeübergangsfaktors auch in diesem Fall, wie oft auch sonst, nebensächlich ist.

Zweites Beispiel (Seite 27/28)

Hier sind von den Größen des vorhergehenden Beispiels nur folgende geändert: $\alpha = 13,9 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, }^\circ\text{C}; V = 60.000 \text{ m}^3/\text{h}; R = 1,8$.

Hier ist $\psi = 0,625; \frac{\alpha R}{\lambda} = 25, 2\pi \cdot F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right) = 7,1$ und $\tau = 8,75$, womit $T_{LZ} = 31,25^\circ \text{ C}$ ist.

Die Verfasser errechnen einen Wert von 34° C , der falsch ist, weil sie extrapolieren mußten, und deshalb ihr Resultat nicht verlässlich ist.

Tabelle I

ψ	$2\pi \cdot F(\psi, \varrho); \varrho = \frac{\alpha R}{\lambda}$			
	$\varrho = \infty$	$\varrho = 16$	$\varrho = 8$	$\varrho = 4$
0,01	38,508	27,74	20,83	12,35
0,0	28,096	22,32	17,30	12,27
0,03	23,474	19,17	15,47	11,54
0,04	20,716	17,22	14,42	11,14
0,05	18,829	15,76	13,53	10,73
0,06	17,433	14,73	12,83	10,31
0,07	16,351	13,85	12,35	10,05
0,08	15,472	13,17	11,82	9,62
0,09	14,744	12,59	11,34	9,39
0,10	14,130	12,13	10,93	9,03
0,12	13,135	11,34	10,34	8,64
0,14	12,361	10,76	9,81	8,26
0,16	11,737	10,24	9,39	7,94
0,18	11,217	9,82	9,02	7,72
0,20	10,777	9,48	8,73	7,54
0,25	9,916	8,62	8,12	6,97
0,30	9,277	8,17	7,68	6,58
0,35	8,779	7,83	7,36	6,28
0,40	8,373	7,49	7,07	6,02
0,45	8,037	7,24	6,84	5,80
0,50	7,751	7,00	6,60	5,62
0,60	7,288	6,61	6,28	5,30
0,70	6,926	6,33	6,01	5,05
0,80	6,634	6,08	5,78	4,93
1,00	6,180	5,68	5,40	4,68
1,20	5,844	5,42	5,14	4,44
1,50	5,467	5,12	4,87	4,27
2,00	5,029	4,73	4,50	4,02
2,50	4,726	4,44	4,23	3,84
3,00	4,500	4,25	4,05	3,70
4,00	4,174	3,97	3,77	3,47
5,00	3,947	3,75	3,55	3,35
6,00	3,776	3,59	3,40	3,23
8,00	3,529	3,36	3,18	3,03
10,00	3,354	3,22	3,03	2,90
12,00	3,224	3,12	2,92	2,81
15,00	3,074	2,97	2,77	2,67
20,00	2,898	2,80	2,62	2,52
25,00	2,774	2,67	2,52	2,44
30,00	2,678	2,58	2,44	2,37
40,00	2,539	2,45	2,33	2,24
50,00	2,440	2,35	2,23	2,15
60,00	2,363	2,28	2,16	2,08
80,00	2,251	2,18	2,06	2,01
100,00	2,172	2,11	2,00	1,86
120	2,114	2,06	1,96	1,83
150	2,042	2,00	1,91	1,81
200	1,956	1,93	1,84	1,80
250	1,893	1,87	1,78	1,69
300	1,846	1,83	1,75	1,67
400	1,775	1,76	1,69	1,62
500	1,721	1,71	1,64	1,57
600	1,683	1,67	1,60	1,53
800	1,622	1,61	1,54	1,47
1000	1,578	1,57	1,51	1,45
1200	1,543	1,53	1,47	1,41

ψ	$2\pi \cdot F(\psi, \varrho); \varrho = \frac{\alpha R}{\lambda}$			
	$\varrho = \infty$	$\varrho = 16$	$\varrho = 8$	$\varrho = 4$
1500	1,502	1,49	1,43	1,38
2000	1,454	1,44	1,39	1,34
2500	1,418	1,41	1,36	1,32
3000	1,393	1,38	1,34	1,30
4000	1,350	1,34	1,30	1,26
5000	1,319	1,31	1,27	1,23
7500	1,266	1,26	1,22	1,18
10000	1,233	1,23	1,19	1,15
15000	1,184	1,18	1,14	1,10
25000	1,131	1,12	1,10	1,08

Ganz zu verwerfen ist die Behauptung der Verfasser auf Seite 29, daß: »In dieser Abhandlung wurde darauf hingewiesen, daß es außerordentlich schwierig, wenn nicht überhaupt unmöglich ist, die Temperaturveränderungen des Wetterstromes unter Tage mit der Zeit genau zu untersuchen, weil die bisher veröffentlichten Untersuchungen insofern unzulänglich waren, als sie die Tatsache außer acht ließen, daß der Wetterstrom Temperaturveränderungen infolge des Wärmeüberganges von der Gebirgswand erleidet.«

Hätten sie die diesbezügliche Literatur gekannt, dann hätten sie diese Schlußfolgerung nicht ziehen können und sich die Ausarbeitung dieses mühevollen Näherungsverfahrens ersparen können, welches nicht nur unbequem, sondern auch unverläßlich ist; meine bereits erwähnte Arbeit (5) und nach mir das von HITCHCOCK-JONES ausgearbeitete Verfahren hat dieses Problem einfacher und zugleich genauer gelöst.

Ihre Untersuchungen zur Bestimmung des Wärmeübertragungsfaktors sind sehr interessant, bringen jedoch das Problem auch für die Praxis nicht vorwärts. Der Wert von a hängt nämlich von verwickelten strömungs- und wärmetheoretischen Bedingungen ab. Die strömungstechnische Seite des Problems ist in Anbetracht der in den Grubenbauen immer turbulenten Strömung selbst im theoretisch einfachsten Fall, für das glatte Rohr, nicht vollkommen klar, weil die Lösung der Differentialgleichungen mathematisch nicht möglich ist. Die gezimmerten Grubenstollen machen das Problem noch komplizierter, nicht zu sprechen von dem in die Baue einsickernden Wasser, von dem die Wände feucht werden können. Aus diesen Gründen ist der Wert von a — welcher im Stollen nicht einmal konstant ist — unbestimmt, was auch aus der Fig. 12 der Verfasser hervorgeht. Deshalb schrieb ich in meiner Arbeit [5] auf Seite 420 folgendes: "By employing the a factor, a parameter is introduced that is difficult to determine as to actual numerical values, and it also increases the number of parameters that is already great enough. Since a cannot be expressed in exact terms, the calculation is in no way improved by its introduc-

tion" und schlage vor mit $a = \infty$ zu rechnen, das heißt den Wärmeübergang auszuschließen. Auch das erste und zweite Beispiel zeigt, daß die Bedingung $a = \infty$ die tatsächlichen Verhältnisse gut annähert, und die bei Anwendung von $a = \infty$ und $a = 10$ gewonnenen Ergebnisse voneinander wenig abweichen. Wie dem es auch sei, den Wert von a können wir nicht bestimmen, noch weniger im voraus, in bezug auf noch nicht erschlossene Grubenbaue. Zweck der geothermischen Berechnungen ist ja die Vorausbestimmung der Temperatur der Grubenwetter. Von wesentlich größerer Bedeutung als die der Wärmeübergangszahl ist die Berechnung der Wirkung der sonstigen die Erwärmung der Grubenwetter verursachenden Faktoren, so in erster Linie der Verdampfung des Wassers.

SCHRIFTTUM

1. KÖNIG: Math. Untersuchungen über das Grubenklima. *Bergbau-Archiv* 1952. Jg. 13. Heft 314. S. 1—14.
2. BATZEL: Die Ermittlung thermischer Werte usw. *Bergbau-Archiv*, 1952. Jg. 13. H. 314. S. 15—34.
3. KREMNIÉFF: Dokl. Akad. Nauk. USSR (1952), Vol. No. 5. p. 1009.
4. HITCHCOCK, J. A.—ZOBEL, O. J.—INGERSOLL, A. C.: *Heat Conduction*, Madison 1954. p. 248.
5. BOLDIZSÁR, T.: The influence of heat transfer from rock to air on the warming up of the mine air. *Mitteilungen der Technischen Universität für Schwerindustrie Miskolc*, Ungarn, Vol. XXI. (1960) p. 49.

REMARKS ON THE PAPER "EXAMINATION OF THE COOLING OF MINES BY AIR FLOW" BY HIRAMATSU AND KOKADO

T. BOLDIZSÁR

SUMMARY

Hiramatsu and Kokado have worked out an approximate method for calculating the warming-up of air flowing through mine galleries. The author shows that the method previously published by him, practically approximates reality for better and moreover, that with less calculation work it gives more accurate results. Extrapolation from the tables by Hiramatsu and Kokado leads to big errors, while there is no need for extrapolation using the authors method.

Calculating for two cases the warming-up of the mine air, using method of Hiramatsu-Kokado and then the author's method, the results clearly illustrate the above statement.

REMARQUES SUR L'ÉTUDE DE HIRAMATSU ET KOKADO: «EXAMEN DU REFROIDISSEMENT DES MINES PAR COURANT D'AIR»

T. BOLDIZSÁR

RÉSUMÉ

Hiramatsu et Kokado ont élaboré une méthode approchée pour le calcul de l'échauffement de l'air parcourant les galeries de mines. L'auteur démontre que du point de vue pratique, la méthode publiée par lui à une époque antérieure approche beaucoup mieux la réalité, et

donne en même temps des résultats plus précis, tout en nécessitant moins de calcul. De plus, l'extrapolation à partir des tables de Hiramatsu et Kokado conduit à des erreurs importantes, tandis qu'avec la méthode préconisée par l'auteur, on n'a pas besoin d'extrapolation.

L'échauffement de l'air étant calculé tour à tour par la méthode de Hiramatsu—Kokado et par celle de l'auteur, les résultats confirment les constatations précédentes.

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ ХИРОМАТСУ И КОКАДО «ИССЛЕДОВАНИЕ
ОХЛАЖДЕНИЯ ШАХТ ПОТОКОМ ВОЗДУХА»

Т. БОЛЬДИЖАР

РЕЗЮМЕ

Хироматсу и Кокадо разработали приближенный метод расчета нагрева движущегося в шахтных штреках потока воздуха. Автор показывает, что опубликованный им ранее метод с практической точки зрения гораздо лучше приближается к действительности и при том дает более точный результат при меньшей вычислительной работе. Однако, экстраполируя по таблицам Хироматсу и Кокадо, получаем большие ошибки, тогда как по методу автора в экстраполяции нет необходимости.

В двух случаях полученные из расчета нагрева шахтного воздуха результаты иллюстрируют вышеуказанное установление.

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. IX. 5. — Terjedelem: 22,75 (A/5) ív, 108 ábra

1962.55924 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

- Uzhik, G. V.—Koshelev, P. F.* : Effect of Stress State in Regions of Stress Concentration on Metal Strength and Fracture (Addenda to the Theory of Mechanical Brittleness of Ductile Metals) — Einwirkung des Spannungszustandes der Stellen mit Spannungskonzentration auf die Festigkeit und den Bruch der Metalle (Beitrag zur mechanischen Bruchtheorie von plastischen Metallen) — L'influence de l'état de tension des lieux de concentration d'efforts sur la résistance et la rupture des métaux (Contribution à la théorie mécanique de la rupture des métaux plastiques) — Ужик, Г. В.—Коселев, П. Ф.: Влияние напряженного состояния в местах концентрации напряжений на прочность и разрушение металлов (к теории механической хрупкости пластичных металлов) 3
- Niemann, G.* : Die Dauer-Pittingfestigkeit der Zahnräder und Wege zu ihrer Erhöhung — The Pitting Fatigue Limit of Gears and Ways Leading to its Increase — La limite de fatigue au pitting des engrenages, et les moyens de l'élever — Ниман, Г.: Предел питинг — усталости зубчатых колес и пути повышения этого предела 23
- Кудрявцев, И. В.—Саввина, Н. М.* : Усталость крупных ступенчатых валов из легированных сталей — *Kudriavcev, I. V.—Savvina, N. M.* : Die Ermüdung von großen, abgestuften Wellen aus legiertem Stahl — The Fatigue of Big Stepped Shafts Made of Alloy Steel — Fatigue des grands arbres épaulés en acier allié 35
- Лингарт, В.* : Выступление в дискуссии к докладу проф. Кудрявцева — *Linhart, V.* : Beitrag zur Diskussion über den Vortrag von Prof. Kudriavcev — Discussion Referring to Prof. Kudriavcev's Lecture — Intervention à la discussion de l'exposé du Prof. Kudriavcev 51
- Серенсен, С. В.* : Накопление усталостного повреждения и запасы прочности при нестационарных условиях службы — *Serensen, S. V.* : Die Anhäufung von Ermüdungsbrüchen bei nicht-stationärer Anwendung der spröden Festigkeit — The Accumulation of Fatigue Breaks under Conditions of Instationary Application of Rigid Strength — Accumulation des ruptures par fatigue dans les conditions d'application non stationnaire de la résistance rigide 56
- Müller, R.* : Über die Behandlung der Ermüdung in den Festigkeitsvorschriften für Flugzeuge — Taking into Account the Fatigue in Strength Rules for Aircraft — Considération de la fatigue dans les règlements concernant la résistance des avions — Мюллер, Р.: Учет усталости в технических условиях механической прочности самолетов 77
- Никольский, Е. Н.* : Метод последовательных приближений (метод Шварца) как теоретическая основа расчета оболочек с вырезами типа вагонных кузовов — *Nikolsky, E. N.* : Die Methode der stufenweisen Annäherung (Schwarz'sche Methode) als theoretische Grundlage der Dimensionierung von schalenkonstruktionsartig gestalteten Eisenbahn-Wagenkästen — The Method of Gradual Approximation (Schwarz's Method) as Theoretical Basis for Dimensioning Closed Frame-Formed Railway Carriage Bodies — La méthode d'approximations successives (méthode de Schwarz) comme base théorique du dimensionnement des caisses de voitures de chemin de fer en coque discontinue 91
- Linhart, V.—Scholz, O.* : Zur Kriterienproblematik der Werkstoffsprödigkeit — On the Problem of the Criterion of Brittleness of Materials — Sur le critère de la rigidité des matériaux de construction — Лингарт, В.—Шольц, О.: К проблематике критерия хрупкости конструкционных материалов 107

- Gádor, L.* : Description of Alternating Magnetic Circuits by Complex Quantities — Die Beschreibung von magnetischen Wechselkreisen durch komplexe Größen — Description des circuits magnétiques alternatifs par des grandeurs complexes — *Гадоp, Л.*: Описание переменных магнитных цепей комплексными количествами 114
- Szidarovszky, J.* : Producing Influence Lines of Suspension Bridges with Variable Flexural Rigidity by Successive Approximation — Eine stufenweise Näherungsmethode für die Herstellung der Einflußlinien der Hängebrücken, wenn der Querschnitt des Versteifungsträgers nicht konstant ist — Établissement des lignes d'influence des ponts suspendus renforcés de section variable, par la méthode d'approximations successives — *Сидаровски, Я.*: Получение графиков нагрузки подвешенного моста с крепящей опорой переменного сечения методом последовательного приближения 139
- Tevan, Gy.* : Die allgemeinen Ausdrücke der magnetischen Kräfte — The General Expressions for Magnetic Forces — Les expressions générales des forces magnétiques — *Теван, Д.*: Общие выражения магнитных сил 163
- Kovács, Gy.* : Dimensioning Flood-Control Levees for Underseepage — Die Dimensionierung von Hochwasserschutzdeichen unter Berücksichtigung der Sickerung unterhalb des Deiches — Le calcul des digues, compte tenu de l'infiltration — *Ковач, Д.*: Расчет насыпей под плотины с учетом фильтрации 180
- Nagy I.* : Theory of Three-Phase Bridge Self-Saturating Magnetic Amplifiers. I. Principle of Operation — Theorie eines dreiphasigen, selbstsättigenden magnetischen Verstärkers in Brückenschaltung. I. Wirkungsweise — Théorie de l'amplificateur magnétique auto-saturant triphasé, monté en pont. I. Principe de fonctionnement — *Надь, И.*: Теория трехфазного самонасыщающегося магнитного усилителя мостовой схемы. I. Принцип работы 199
- Ripianu, A.* : Nouvelle méthode pour la détermination des pulsations propres correspondant aux vibrations de torsion des arbres coudés des moteurs homogènes en ligne — Eine neue Methode zur Bestimmung der Eigenschwingungen entsprechend den Drehschwingungen der Kurbelwellen der homogenen Reihenmotoren — A New Method for the Determination of Proper Pulsations Corresponding to the Torsion Vibrations of the Crank Shafts of Homogeneous Motors in Line — *Рипяну, А.*: Новый метод определения собственных пульсации, соответствующих скручивающим колебаниям коленчатых валов, принадлежащих однородным рядовым двигателям 227
- Vámos, T.* : Some Notes on the Determination and Measurement of Efficiency for Process Control Optimization — Einige Fragen der Definierung des Wirkungsgrades und seiner Messung vom Standpunkt der Prozeß-Optimierung — Quelques problèmes de la définition et de la mesure du rendement, du point de vue de l'optimisation des processus — *Вамош, Т.*: Некоторые вопросы определения и измерения к. п. д. с точки зрения оптимализации процесса 245
- Boldizsár, T.* : Bemerkungen zur Abhandlung von Hiramatsu und Kokado: „Eine Untersuchung über die Kühlung von Gruben durch den Wetterstrom“ — Remarks on the Paper "Examination of the Cooling of Mines by Air Flow" by Hiromatsu and Kokado — Remarques sur l'étude de Hiromatsu et Kokado: «Examen du refroidissement des mines par courant d'air» — *Большдизсар, Т.*: Замечания к статье Хироматсу и Кокадо «Исследование охлаждения шахт потоком воздуха» .. 251

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address*

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

65,— Ft

2002

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS 41

FASCICULI 3—4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

THE EXTRACTION OF THE VANADIUM CONTENTS OF BAUXITE IN THE COURSE OF ALUMINA PRODUCTION USING THE BAYER PROCESS

I. VERES

CENTRAL RESEARCH DEPARTMENT OF THE UNIVERSITY OF AGRICULTURE, GÖDÖLLŐ

[Manuscript received February 8, 1957]

The different advantageous and disadvantageous factors to be considered on the vanadium extraction in the course of the Bayer type alumina production were discussed.

It was stated that in the course of this process it is only the pentavalent vanadium contents or the vanadium contents previously oxidized to have five valences, which finds its way from the bauxite into alkalic solution of the alumina production. It has been established that the same oxide valence can be found in the vanadium mud, too, which had been crystallized from the undiluted alkalic solution.

In the course of our investigations it was stated that sodium fluoride considerably reduces the solubility of sodium orthovanadate in alumina factory alkalic solutions and to an extent which steadily increases with the increase of the specific amount of sodium fluoride. The mole rates applied were between $V_2O_5 : NaF = 1 : 1 \div 1 : 2$, the amounts of alkalinity were changed between $100 \div 300 \text{ g/l } Na_2O$ at the solubility investigations.

Thus the extraction of vanadium from the alkalic solutions of alumina factories can be favourably influenced by introducing fluor contents from outside (NaF), provided same is missing. All other conditions which are favourable for vanadium extraction in the alumina production according to the Bayer Process — from bauxite to vanadium mud — were also discussed.

I. Introduction

In connection with the above problem the first thing to emphasize is, that due to the increasing technical significance of vanadium, strenuous efforts are made all over the world, both in chemical-technology and in metallurgy to process the waste containing vanadium. The reason is that the rich ores of this metal are far from sufficient to cover these demands.

The method generally employed all over the world to attain this aim is to produce a possibly rich base material from which an oxide or an oxide containing product is obtained. From the latter ferrovanadium can be produced. In practice, however, we come across a wide range of technical solutions which invariably depend on the prevailing raw material conditions.

However, the extraction of the vanadium contents of bauxites can only be performed through the processing of the byproducts of other industrial main processes — aluminium and siderurgical processes in the first place — since the enrichment of the vanadium contents of bauxites show but a $3 \div 5$ fold increase in comparison to the lithosphere average; L_v is namely 0.016 according to BERG and GOLDSCHMIDT, and 0.015 according to WINOGRADOV. This subject was elaborated in my paper: "The Geochemistry of Vanadium in Hungary".

Vanadium is one of the permanent additional components of bauxites. In respect of trace elements, thus, of course, of vanadium too, Hungarian

bauxites can be considered as comparatively rich. On basis of the analysis carried out on a considerable number of samples, the vanadium contents expressed in V_2O_5 is in the range between 0.07 and 0.12 per cent. This is about the same as has been reported in previous papers [1]. According to our experience the lower limit is best approached by the vanadium contents of the bauxites of Gánt, whereas the upper limit by the vanadium contents of the bauxites of Iszkaszentgyörgy and Nyirád. The vanadium contents of bauxites with a low iron content is below the lowest limit of the above range. In the course of the investigations made up to now, a relationship between the changes of the iron and vanadium contents was established and the conclusion has been arrived at that with most of the bauxites, an increased iron content is accompanied by a higher vanadium content and the reverse. In the first place this relation could be established with the bauxites of Gánt, Meleges and Harasztos. Thus, the iron contents of bauxites would deserve special attention as far as the mineral petrological study of the vanadium contents is concerned. It is worth-while to note that V_2O_3 and Fe_2O_3 may substitute each other isomorphically; the ionic radius of Fe^{3+} and V^{3+} and thus, also their ionic potential are practically identical, nor does the corresponding value of the ionic radius of V^{4+} show a considerable deviation. According to GOLDSCHMIDT, the ionic radius of V^{5+} is 0.4 empirically, whilst that of Fe^{3+} is 0.67. According to PAULING, theoretically the ionic radius of V^{5+} is 0.59. Further it should be noted that from the point of view of the dissolved vanadium salts $Fe(OH)_3$ acts as a collector in modern analytical chemistry.

A further elaboration of this issue would extend far beyond the object and space of the present paper. This much, however, had to be pointed out, because apart from the theoretical importance of the problem it has undoubtedly a technical aspect too, which is very much in the line of our present discussion.

II. The extraction of vanadium from the alumina produced alkalic solution

With our bauxites and under our alumina works conditions, 30—35 per cent of the total vanadium contents get into the alkalic solution in the course of the dissolving process in the autoclave employed in the Bayer Process.

Thus, about 35 tons of V_2O_5 get into the alkalic solution during the processing of every 100,000 tons of bauxite and about the double of this quantity finds its way into the red mud. Taking into consideration 0.1% V_2O_5 in the bauxite; with regard to the increased application of the bauxite of Iszkaszentgyörgy, the above value is, of course, alternating in dependence on the vanadium contents of the bauxite and is therefore to be considered as an informative value only.

The extraction of the considerable amount of vanadium from the red mud can be expected through the introduction of such combined alumina industrial processes in which also the vanadium content is dissolved and gets into the alumina produced alkalic solution [2], — e. g. by the pyrogenic treatment which again raises the problem of vanadium salts soluble in alkalis, or through iron metallurgy from pig iron [3, 4]. Such an iron metallurgical appliance of red mud, as a supplementary material, has already started though only to a rather moderate extent.

In the following only that vanadium content which gets into the alumina produced alkalic solution and can be separated from it in the form of vanadium mud will be discussed. In the alkalic solution circulating in a cycle, the vanadium contents get enriched up to the limit of solubility. Under the mixing conditions of aluminium hydrate this limit is 0,7 gr/l V_2O_5 . In the alumina produced alkalic solution vanadium is present in its orto-salt (Na_3VO_4) form, which is only to be expected on account of the fairly strong alkalinity of the solution.

The amount of the vanadium contents of bauxite getting into the alkalic solution during dissolution depends on a number of factors. Thus, for instance, the relation between the dissolution power and the temperature of the pre-roasting of bauxite has been subjected to investigation [7]. In accordance with this — as stated by T. GEDEON — a higher pre-roasting temperature is accompanied by a considerably vanadium dissolution power.

Attention should be drawn to the fact that dissolution power is apparently in close connection with the oxide valence of vanadium. Vanadiumtrioxide, which is basic tetroxide and amphoteric, pentoxide, on the other hand, is — even if only slightly — of acidic character [8]. It stands to reason, therefore, that with the increase of the oxide valence, also the dissolution power in the a lkalic solution must improve and the reverse. It is quite likely that beside the general expanding effect, the higher roasting temperature promotes oxidation as well. The afore-mentioned tests had not been carried out under anaerobic conditions and GEDEON'S other statement according to which the employment of oxidizing agents in the autoclave also favourably affects the dissolution power of vanadium, seems to support our opinion, too.

In the alkalic solution vanadium circulates in the company of other alkali-soluble salts and since this represents an impurity for alumina production, this has to be taken into consideration at the different technological processes. It is important, mainly in conductive aluminium production, that the alumina should contain less vanadium impurity than permissible. Namely it is to be noted, that vanadium can increase the electric resistance forty fold more than iron, so that a vanadium content exceeding 0.01 per cent in the aluminium applied in the electric industry is no longer desirable [9]. The maintenance of the alumina quality can be granted in the case only if the impurities of the solution are regularly separated, at least to such an extent that on the mixing of alu-

mina hydrates the sodium salts of the cations and anions occurring as impurities could not reach the limit of solubility. To attain this object, a regular salt extraction has to be provided for in order to maintain the balance of the so-called alumina production trace elements in the alkalic solution. It goes without saying that the considerable alkali solution volume of a larger alumina factory will be saturated with impurities very slowly — in most of the cases the process takes years, but as soon as this stage was reached, salt extraction became of paramount importance for the alumina works and its proper performance is an intrinsic part of the technology of the works. At this point the interests of the alumina production coincide with those of the industry processing the waste.

When discussing this problem, due attention is to be paid to the fact too that the sodium salt of vanadium (even the ortho-form) is very well soluble in water so that alumina poor in vanadium or free of vanadium is partly a matter of washings as well, though it is doubtless that a high standard of purity is justified with only a part of the produced alumina.

On basis of the aforesaid, we can draw the conclusion that with a regular and proper salt-extraction, and with the washing of the aluminium hydrate as well as at reasonable quality requirements, the vanadium impurities of alumina to an industrially impermissible extent can be avoided.

The problem has a great practical significance. Therefore, every modification in the autoclave process and every combined method which promotes the extraction of vanadium without adversely affecting the alumina production either technically or economically must be welcomed. It should be noted that in a year several hundred tons of vanadium pentoxide together with the bauxites are taken into the alumina production.

III. Factors and conditions influencing vanadium extraction

Now the question must be raised which are the factors and conditions influencing vanadium extraction. The inhibiting factors already known are the following:

1. *Low roasting temperature*

Owing to heating problems and often to material difficulties, too, we are compelled to be content with roasting at a temperature much lower than required, for the benefit of the technology of the bauxite in question. This is accompanied by a reduced burning out of organic substances, as a result of which an increased Dorr screening and mixing difficulties of alumina occur; by some of the bauxites there are also red mud sedimentation difficulties, and problems in the extraction of aluminium oxide in autoclaves. Besides this, the dis-

soluble portion of the vanadium contents will also decrease — probably on account of the smaller oxidation and expanding effect. As far as the wet-milling of bauxite is concerned, home experience are still rather scarce and the tests carried out so far failed to regularly consider the changes in the vanadium contents of the alkalic solution [10].

2. The alkalic solution gets into contact with substances which in alkalic medium precipitate vanadium from the solution

These substances are earth alkali oxides, out of which calcinated lime, for instance, is very often used in alumina production. In alkalic medium, at boiling point or near to boiling, the vanadate (V.) ion in solution is particularly fit for producing, Ca-vanadate-compounds which are basic and practically insoluble or slightly soluble only. Thus, a major part of the vanadium content finds its way into the red mud from where its extraction represents an open question.

The problem is simplified by the fact that the application of calcinated lime (e. g. in the autoclave process) is completely unjustified with Hungarian bauxites, — even from the point of view of the alumina industry.

3. Neglecting of mud extraction and lack of proper extraction facilities

The separate extraction of high vanadium contents, respectively, high sodium sulphate and sodium carbonate containing fractions in two steps, can well be performed by choosing the right temperature and concentration for the alkalic solution. The execution of this procedure is a matter of apparatus only, thus it is merely a technical problem (a proper cooling and filtering installation).

The fluor contents of the alkalic solution is another important factor.

Soviet authors already cited have also stated [5, 6] that in the alkalic solution vanadium is present in a form of 5 valence. In the course of our tests carried out with vanadium muds, we found the whole vanadium contents to be pentavalent. Studying the salts crystallized from the alkalic solutions of the different factories and working with or without oxidation, the same results as to the vanadium contents were found. Since we have no reason to assume — being aware of the chemistry of vanadium salts — that an oxidation occurs in the course of the crystallization, our tests seem to confirm from another side the statements of the Soviet works. We have also investigated vanadium contents of alumina produced alkalic solutions and applied different methods in the work (see Table I). There again we encounter pentavalent vanadium. With method I (classical permanganate vanadium determination), we measured the 4- and 5-valent vanadium contents together, whereas method II serves for

Table I

Testing of vanadium contents of undiluted alkalic solutions in alumina works for determining its valence

I. Titrated with K Mn O_4 V_2O_5 g/l	II. Titrated with $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ V_2O_5 g/l	III. Colorimetry with H_2O_2 V_2O_5 g/l
0.82	0.82	0.84
0.82	0.81	0.83
0.82	0.81	0.83
0.81	0.80	0.83
0.81	0.80	0.81

measuring the pentavalent vanadium contents solely. Thus, in the alkalic solution practically the same amount of vanadium with two different determination methods was measured, within the margin of error of the analysis. Consequently, if there in the undiluted alkalic solution a 4-valent vanadium were present, it could be within the quality coming into the margin of error of the analysis, i. e. it must be 0.1—0.2 per cent or even less of the whole vanadium contents. Thus, it was proved that the vanadium content of the alumina factory alkalic solution is present, practically in the form of a pentavalent compound. In these analytical methods we reduced V^{V} — to V^{IV} in acid-solution with Fe^{++} -ion containing.

It must be pointed out that in order to obtain accuracy in the volumetric determination, as much alkalic solution was used (200—200 ml.) as to ascertain that the consumption from the measuring solution of 0.1 *n*, be approximately 15—20 ml. At the colorimetric determination 4 and 5-valent vanadiums were measured together, — but in this case, the values to be obtained have to be taken into consideration on account of the inaccuracy of the method.

Similar results were obtained with other alkalic solution samples where the above determination methods were used.

On basis of what has been stated above, the conclusion can be drawn that it is only the pentavalent or previously to pentavalent oxidized vanadium content of the bauxite which gets into the alkalic solution of the Bayer Process.

During the tests carried out with alkalic solutions in laboratory and semi-plant conditions, it was observed that sodium fluoride considerably decreased the solubility of sodium vanadium V (ortho) (see Tables II, III and IV).

The tests were carried out in laboratorically synthesized alkalic solutions of different concentrations. Different amounts of water-dissolved sodium fluoride were added to the warm alkalic solutions saturated with sodium orthovanadate, and examined the vanadium contents of the filtered solutions were cooled to 20° C by colorimetry with H_2O_2 . The change in concentration and volume

as a result of the addition of sodium fluoride solution is negligibly slight and is anyhow of the same extent in all of the tests.

For comparison's sake it should be added that under similar conditions at 100 g/l Na_2O 13.4 g/l, at 200 g/l 7.15 g/l and at 300 g/l 2.45 g/l V_2O_5 was measured without adding NaF.

In order to facilitate survey the data in tables and also in a three-dimensional (cubical) diagram were compiled.

Table II

The effect of sodium fluoride on the solubility of sodium orthovanadate to 20° C cooled alkalic solutions of different concentrations at a $\text{V}_2\text{O}_5 : \text{NaF} = 1 : 1$ mole rate

V_2O_5 g/l, measured in the solution		
at 100 g/l Na_2O	at 200 g/l Na_2O	at 300 g/l Na_2O
1.88	1.27	0.57
1.85	1.26	0.56
1.85	1.25	0.55
1.84	1.25	0.55
1.84	1.25	0.54

From the tables, respectively, from the graph (see Fig. 1) it is obvious that with the addition of identical amounts of sodium fluoride and the effect of increasing alkalic solution concentration, the vanadium content of the solution decreases considerably. A similar effect of the increased amount of NaF can be observed on the investigated mole rates as well. In accordance with these observations, dissolved NaF considerably reduces the solubility of the vanadium compound dissolved in alkalic solution, particularly at a mole rate of 1.5—2. On cooling, the effect of NaF is strikingly rapid. In view of the fact all the experiments were carried out along the same lines, the obtained data can be compared.

Table III

The effect of sodium fluoride on the solubility of sodium orthovanadate to 20° C cooled alkalic solutions of different concentrations at a $\text{V}_2\text{O}_5 : \text{NaF} = 1 : 1.5$ mole rate

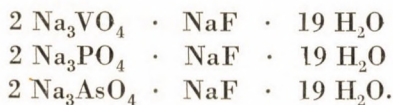
V_2O_5 g/l, measured in the solution		
at 100 g/l Na_2O	at 200 g/l Na_2O	at 300 g/l Na_2O
1.35	0.70	0.20
1.35	0.70	0.18
1.33	0.68	0.18
1.13	0.68	0.18
1.13	0.67	0.18

Table IV

The effect of sodium fluoride on the solubility of sodium orthovanadate to 20° C cooled alkalic solutions of different concentrations at a $V_2O_5 : NaF = 1 : 2$ mole rate

V_2O_5 g/l, measured in the solution		
at 100 g/l Na_2O	at 200 g/l Na_2O	at 300 g/l Na_2O
0.65	0.14	0.06
0.65	0.12	0.06
0.65	0.12	0.06
0.63	0.11	0.05
0.63	0.11	0.04

According to literature data [11] sodium fluoride produces double salts with sodium orthovanadate, sodium phosphate and sodium arsenate contents of the alkalic solution. Their composition was stated to be the following:



They have octahedric crystals. Thus they are double salts of identical types, capable of partly substituting each other during crystallization.

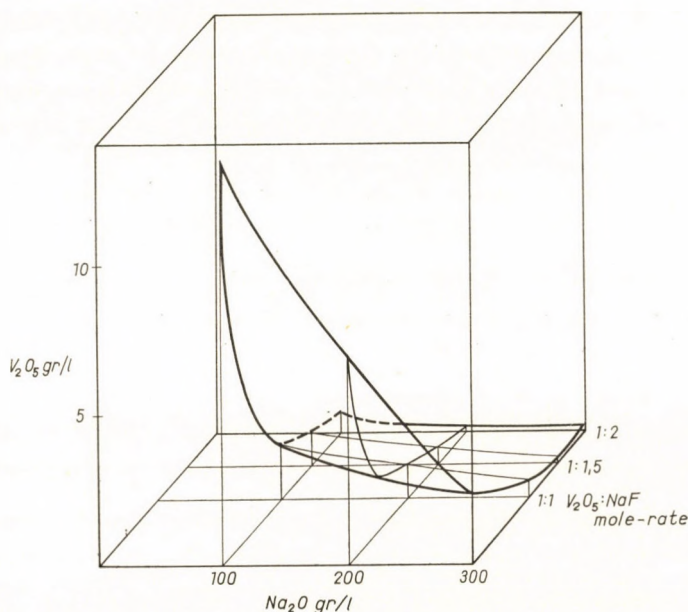


Fig. 1. The solubility of sodium orthovanadate in function of the concentration of the alkalic solution and of the NaF quantity

It was also found by us to be present in the vanadium muds of the Hungarian alumina works. The presence of these double salts could be established by investigating the mole rates dissolving vanadium muds with water. The application of these experiences in removing impurities from alumina factory alkalic solutions is obvious. In order to extract the vanadium mud from the alumina factory alkalic solution, the replacement of the fluor contents required for forming double salts can be effected with sodiumfluoride, in such a practical way, that the mole rate $V_2O_5 : NaF$ should be between 1 : 1 and 1 : 2. The fluor contents thus introduced can be regained together with the fluor which had originally been in the alkalic solution in the course of the processing of vanadium muds.

We have discussed all the most important factors on which the extraction of vanadium during bauxite processing in the alumina production depends. Summing up we may safely state that neither the extraction of the alumina factory vanadium nor the increase of this extraction present insurmountable difficulties; that the technical stipulations described above are far from being unreal, the less so, as most of them form a part of a properly conducted alumina factory technology, independently from the vanadium problem.

Finally we should like to point out that all the arguments apply to the extraction of the vanadium mud of normal crystal and salt character. The muds are nowadays extracted and having a low vanadium contents with a high rate of organic substances, must be considered as temporary phenomena so that in research work it is not the studying of these muds on which stress has to be laid, but the mud position in the alumina factory has to be improved radically by conscientiously regulating it with the aid of the factors discussed above.

REFERENCES

1. GEDEON, T.: The additional components of Hungarian bauxite (A magyar bauxit járulékos elegyrészeiről). *Magyar Kémiai Folyóirat* (1932), 7—12, 134.
2. LÁNYI, B.: The utilization of the red mud by the Bayer Process (A Bayer eljárás vörösiszapjának hasznosítása). *Alumínium* (1950), 40—50.
3. VISNYOVSKY, L.: Bauxite as the Raw Material of Our Steel Industry (A bauxit mint vasiparunk nyersanyaga). *Kohászati Lapok* (1951), No. 6.
4. VISNYOVSKY, L.: Steel alloying metals and ferro-alloys (Acéltötvöző fémek és ferroötvtözetek). Nehézipari Könyvkiadó, Budapest 1952, 162—171.
5. MAZELJ, V. A.: Alumina Production (Timföldgyártás). Nehézipari Könyvkiadó, Budapest 1953, 77.
6. BJELJAJEV, A.I.: Metallurgy of Light Metals. (Könnyűfémek kohászata). Nehézipari Könyvkiadó, Budapest 1950, 47.
7. GEDEON, T.: The effect of roasting at the dissolving of bauxite (A pörkölés hatása a bauxit feltárásánál). *Kohászati Lapok* (1951), No. 5.
8. NYEKRASZOV, B.: General Chemistry (Általános kémia). Vol. II., 401—404.
9. DOMONY, A.: Scientific Problems in Metallurgy (Kohászati és fémipari tudományos kérdések). Akadémiai Kiadó, Budapest 1952, 267.
10. MÁRIÁSSY, M.: Processing of Bauxite by Wet Milling (Bauxitok nedves őrléssel való fel dolgozása). *Alumínium* (1951), 205—210.
11. Compagnie de Produits Chimiques et Électrometallurgiques, Brit. Pat. 600833.

DIE GEWINNUNG DES VANADIUMS AUS BAUXIT BEI DER TONERDEGEWINNUNG NACH DEM BAYER-VERFAHREN

I. VERES

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser untersucht die vom Standpunkt der Vanadiumgewinnung vorteilhaften und nachteiligen Faktoren bei der Tonerdegewinnung nach dem Bayer-Verfahren.

Es konnte festgestellt werden, daß während des genannten Fabrikationsprozesses nur der 5wertige oder vorher auf die 5wertige Stufe oxydierte Vanadiumgehalt aus dem Bauxit gewonnen wird und dieses Oxyd ist auch in dem aus der Lauge auskristallisierten Vanadiumschlamm zu finden.

Die Untersuchungen zeigten, daß das Natriumfluorid in den basischen Lösungen der Tonerdefabrikation die Löslichkeit des Natriumorthovanadats beträchtlich vermindert, und zwar in steigendem Maße mit der spezifischen Menge des NaF, wenn bei 100—300 g/l Na₂O und bei Molverhältnissen V₂O₅ : NaF = 1 : 1 ÷ 1 : 2 gearbeitet wird.

Die Ausscheidung des Vanadiums aus der Lauge der Tonerdegewinnung kann demnach vorteilhaft durch Zusetzen des eventuell fehlenden F-Gehalts beeinflußt werden.

Der Verfasser bespricht die vom Standpunkt der Vanadiumgewinnung vorteilhaften Bedingungen im Verlauf der Tonerdegewinnung nach dem Bayer-Verfahren.

EXTRACTION DU CONTENU DE VANADIUM DE LA BAUXITE AU COURS DE LA FABRICATION D'ALUMINE SELON LE PROCÉDÉ BAYER

I. VERES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie les facteurs avantageux et désavantageux du point de vue de l'extraction de vanadium, au cours de la fabrication d'alumine selon le procédé Bayer.

Il a été constaté que, pratiquement, seul le contenu en vanadium de valence 5, ou oxydé préalablement à cette valeur, passe de la bauxite à la liqueur au cours de l'application de ce procédé, et que c'est ce même oxyde qui peut être trouvé dans la boue de vanadium, cristallisée à partir de la liqueur.

Les recherches ont montré que le fluorure de sodium réduit très nettement la solubilité de l'orthovanadate de sodium dans les solutions basiques des usines d'alumine, et ceci en mesure croissante avec la quantité spécifique de NaF, en travaillant à 100—300 g/l Na₂O et avec des rapports molaires V₂O₅ : NaF = 1 : 1 ÷ 1 : 2.

La séparation du vanadium de la solution basique des usines d'alumine peut donc être influencée favorablement par l'adjonction du F manquant éventuellement.

L'auteur traite aussi des conditions favorables pour l'extraction du vanadium dans le procédé Bayer.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ВАНАДИЯ ИЗ БОКСИТА В ПРОЦЕССЕ ПРОИЗВОДСТВА ГЛИНОЗЕМА ПО БАЙЕРУ

И. ВЕРЕШ

РЕЗЮМЕ

Автор рассматривает положительные и отрицательные с точки зрения извлечения ванадия факторы при производстве глинозема по Байеру.

Установлено, что при упомянутом выше процессе в растворе глиноземного производства практически извлекается пятивалентный или предварительно окислившийся до пятивалентного ванадий и эту степень окислов можно найти также в ванадиевом шламе, выкристаллизовавшемся из щелочи.

В процессе исследований установлено, что вторичный натрий очень сильно снижает растворимость ортованадата натрия в щелочных растворах глиноземного производства, а именно с увеличением удельных количеств NaF в возрастающей степени, при молярных соотношениях 100—300 г/л Na₂O и V₂O₅ : NaF = 1 : 1 ÷ 1 : 2.

Извлечение ванадия из раствора глиноземного производства, таким образом, можно выгодно изменять дополнением извне недостающего количества F.

Автор рассматривал выгодные с точки зрения извлечения ванадия условия в процессе производства глинозема по Байеру.

INVESTIGATION OF TRANSIENT PHENOMENA OF ELECTRICAL NETWORKS BY MEANS OF MATRIX CALCULUS

V. LOVASS-NAGY

GANZ ELECTRICAL WORKS, BUDAPEST

and

K. SZENDY

POWER STATION DESIGNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received February 21, 1958]

The differential equations which describe transient phenomena occurring in the branches of electrical networks are compounded by the authors into two matrix equations of the first order, one of these equations being set up in respect of branches containing inductance, the other in respect of those containing capacitance. Two further matrix differential equations can be derived from those node and mesh relations which express the topology of the branches. By means of the coefficient matrix of these two further matrix differential equations it is possible to transform the first-mentioned matrix equations, i.e. those which describe the said transient phenomena, into such matrix differential equations of the first order as will contain the minimum number of scalar components. These two transformed matrix differential equations can be condensed into a single hypermatrix equation which may be solved with the general method.

For the analysis of transient phenomena arising when electrical networks are switched on and off, not only the inductance and resistance but also the capacitance of the individual elements have to be taken into account. It is accordingly possible to set up differential equations of the 2nd order for each element of the network which must be then arranged and reduced in accordance with the topology of the network. The solution of the problem is given by a system of simultaneous linear differential equations of a higher order. Matrix calculus is known to highly facilitate the treatment of the stationary phenomena of electrical networks [1, 2]. Progressing on this path, it is proposed in this paper to use the matrix calculus also for the investigation of transient phenomena because, thus, the task to be performed will consist in the solution of a linear matrix differential equation of the first order. Too, it will be easier in this way to satisfy the initial conditions.

In order that the formulae may contain differential quotients of the first order only it is necessary to separate the inductances from the capacitances in the network. We shall, therefore, apply the index I to elements which contain inductance and resistance, and the index II to those containing capacitance. The elements of the network are the branches, and their number is assumed to be n . If we use the letter k to denote the number of elements that belong to index I, $n - k$ will mean the number of elements that bear the index II.

It is known from the network theory [2] that if the number of independent meshes is h , that of the nodes of the network will be $n - h + 1$, and that of

the independent node pairs $n - h$. In the following, the index H will be used for mesh quantities and the index P for those belonging to node pairs.

Let us use the following notations:

L	matrix containing the inductances of branches with the index I;
R	matrix containing the resistances of branches with the index I;
K	matrix containing the capacitances of branches with the index II;
\mathbf{i}_I and \mathbf{u}_I	current and voltage matrix, respectively, of branches with the index I;
\mathbf{i}_{II} and \mathbf{u}_{II}	current and voltage matrix, respectively, of branches with the index II.

With these notations we can write the following system of simultaneous matrix differential equations for the two kinds of branches:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_I + \mathbf{R} \mathbf{i}_I - \mathbf{u}_I &= 0, \\ \mathbf{K} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{II} - \mathbf{i}_{II} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Since this set of equations contains n scalar equations from which it is not possible to determine the $2n$ scalar components, we have to formulate the nodal and mesh relations which contain, at the same time, the outer sources of current. By retaining the customary manner of representation [2] — but making the above-mentioned distinction between branches I and II — we obtain the following matrix equations:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{PI}^* \mathbf{i}_I + \mathbf{C}_{PII}^* \mathbf{i}_{II} &= \mathbf{i}_g, \\ \mathbf{C}_{HI}^* \mathbf{u}_I + \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{u}_{II} &= \mathbf{u}_g. \end{aligned} \quad (1.2)$$

\mathbf{i}_g nodal current-source vector;

\mathbf{u}_g mesh voltage-source vector;

\mathbf{C}_{PI}^* and \mathbf{C}_{PII}^* nodal incidence matrices of the branches containing inductances and resistances or capacitances, respectively; they give information about the incidence of branches and nodes (elements of these matrices are 0, 1, -1);

\mathbf{C}_{HI}^* and \mathbf{C}_{HII}^* mesh incidence matrices of the branches containing inductances and resistances or capacitances, respectively; they give information about the incidence of the meshes with the branches (elements of these matrices are also 0, 1, -1).

If we multiply the first equation of (1.1) by the matrix \mathbf{C}_{HI}^* from the left and substitute the first equation of (1.2) into the equation so obtained; if, further, we multiply the 2nd equation of (1.1) by the matrix \mathbf{C}_{PII}^* from the left and substitute the first equation of (1.2) into the equation so obtained, we have the following system of equations:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{HI}^* \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_I + \mathbf{C}_{HI}^* \mathbf{R} \mathbf{i}_I + \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{u}_{II} &= \mathbf{u}_g, \\ \mathbf{C}_{PII}^* \mathbf{K} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{II} + \mathbf{C}_{PI}^* \mathbf{i}_I &= \mathbf{i}_g. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Since both \mathbf{u}_g and \mathbf{i}_g are given column matrices, consequently our problem consists in determining the vectors \mathbf{i}_I and \mathbf{u}_{II} . According to the foregoing, it is

obvious that matrix C_{HI}^* has h rows and k columns, while matrix C_{PII}^* has $n - h$ rows and $n - k$ columns. $n - h > n - k$ if $h < k$, and $n - h < n - k$ if $h > k$, that is if C_{HI}^* denotes a rectangular matrix containing more columns than rows, then C_{PII}^* is a rectangular matrix with more rows than columns. We will call a rectangular matrix containing more columns than rows a "lying rectangular matrix" and one with more rows than columns a "standing rectangular matrix". Now, it is always possible to find a lying rectangular matrix C_S for any standing rectangular one, so that

$$C_S C_{PII}^* = E \tag{2.2}$$

provided C_{PII}^* represents the *standing rectangular* matrix. Of course, the results following below can also be applied to cases where it is the matrix C_{HI}^* which is a standing rectangular one.

It is assumed in the following that $h < k$, i. e. that C_{PII}^* is a standing rectangular matrix, so that we can utilize formula (2.2). It will be convenient in this case to deduce i_I from the mesh-current vector (i_H), wherefore

$$i_I = C_{HI} i_H,$$

which is to be substituted into the system of equations under (2.1). If we multiply the second equation of (2.1) from the left by the matrix C_S , the expression (2.1) will assume the following form:

$$C_{HI}^* LC_{HI} \frac{d}{dt} i_H + C_{HI}^* RC_{HI} i_H + C_{HII}^* u_{II} = u_g, \tag{3}$$

$$K \frac{d}{dt} u_{II} + C_S C_{PII}^* C_{HI} i_H = C_S i_g.$$

We can see that the number of unknown components which was $2n$ in formulae (1.1) and (1.2) has now diminished to $h + n - k$. As $C_{HI}^* LC_{HI}$ and K are square matrices they generally have inverses: if the first and second equation of the above expressions are multiplied by the inverses from the left, the coefficient matrix of the differential quotient will be unite matrix, which is necessary to our further calculations.

Let us now adopt the following notations:

$$L_H = C_{HI}^* LC_{HI},$$

$$R_H = C_{HI}^* RC_{HI}, \tag{4.1}$$

$$C_{SH} = C_S C_{PII}^* C_{HI}.$$

By substituting them into the simultaneous equations under (3) and multiplying the first equation of the system by the matrix L_H^{-1} from the left, its second

equation with the matrix \mathbf{K}^{-1} likewise from the left, we arrive at the following:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_H + \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{R}_H \mathbf{i}_H + \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{u}_{II} &= \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{u}_g, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{II} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH} \mathbf{i}_H &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_S \mathbf{i}_g. \end{aligned} \quad (4.2)$$

The number of scalar components can be still further reduced if $h < n - k$, for if we multiply the second equation of (4.2) with the matrix $\mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}$ from the left and use the notation

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{u}_{II}, \quad (4.3)$$

we obtain the following relation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_H + \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{R}_H \mathbf{i}_H + \mathbf{u}_T &= \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{u}_g, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_T + \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH} \mathbf{i}_H &= \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_S \mathbf{i}_g, \end{aligned} \quad (5.1)$$

in which the number of scalar components is $2h$ only, and the coefficient matrices are square matrices of the h -th order. If $h > n - k$, it is not possible to reduce in this manner the number of scalar components contained in the simultaneous matrix equations (4.2) so that, in this case, the coefficient matrices will be quadratic and rectangular.

Further evaluation will become much easier if, by way of a first approximation, the resistance matrix \mathbf{R}_H is disregarded. This neglect means, generally speaking, severer requirements in respect of the instruments to be applied along the electric network because the slope of the switching surge becomes somewhat steeper if the damping caused by resistances is neglected. Therefore, if $\mathbf{R}_H = 0$, the expressions (4.2) and (5.1) can be further simplified, and the rectangular coefficient matrices remaining in formula (4.2) can even be brought to a quadratic form. If we multiply the first equation of the set of equations under (4.2) by the matrix $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH}$ from the left and introduce the transformation

$$\mathbf{i}_T = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH} \mathbf{i}_H, \quad (4.4)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_T + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH} \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{u}_{II} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH} \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{u}_g, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{II} + \mathbf{i}_T &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_S \mathbf{i}_g, \end{aligned} \quad (5.2)$$

in which system of simultaneous matrix equations the number of scalar components is $2(n - k)$.

If $R_H = 0$, we can compound (5.1) and (5.2) into the following hypermatrix equation:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{y}_g \end{bmatrix}. \tag{6}$$

The notations contained in this hypermatrix equation correspond to those contained in (5.1) and (5.2) in the following manner:

	Formula (5.1)	Formula (5.2)
$\mathbf{x} =$	\mathbf{i}_H	\mathbf{u}_{II}
$\mathbf{y} =$	\mathbf{u}_T	\mathbf{i}_T
$\mathbf{A} =$	$\mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH}$	$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH} \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^*$
$\mathbf{x}_g =$	$\mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{u}_g$	$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_S \mathbf{i}_g$
$\mathbf{y}_g =$	$\mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{C}_{HII}^* \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_S \mathbf{i}_g$	$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_{SH} \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{u}_g$

Seeing that

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} & -\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{E} - \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}$$

we can diagonalize the coefficient hypermatrix in the hypermatrix equation (6) by means of the following transformation:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{E} - \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{gt} \\ \mathbf{y}_{gt} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{E} - \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{y}_g \end{bmatrix}$$

which, if substituted, gives

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{gt} \\ \mathbf{y}_{gt} \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

The hypermatrix expressions will, thus, split up into two independent matrix differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_t + \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_t &= \mathbf{x}_{gt}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{y}_t - \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}_t &= \mathbf{y}_{gt}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

The solution of (7.3) is this:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= e^{\sqrt{\mathbf{A}}t} \mathbf{x}_{0t} + \int_0^t e^{\sqrt{\mathbf{A}}(t-\tau)} \mathbf{x}_{gt}(\tau) d\tau, \\ \mathbf{y}_t &= e^{-\sqrt{\mathbf{A}}t} \mathbf{y}_{0t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\mathbf{A}}(t-\tau)} \mathbf{y}_{gt}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.4)$$

It follows from the transformation matrix (7.1) that

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} & -\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix}.$$

By substituting this into the solution given in (7.4) we obtain column matrices \mathbf{x} and \mathbf{y} .

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\operatorname{ch} \sqrt{\mathbf{A}}t) \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} (\operatorname{sh} \sqrt{\mathbf{A}}t) \mathbf{y}_0 + \\ &\quad + \int_0^t [\operatorname{ch} \sqrt{\mathbf{A}}(t-\tau)] \mathbf{x}_g(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} [\operatorname{sh} \sqrt{\mathbf{A}}(t-\tau)] \mathbf{y}_g(\tau) d\tau, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{A} (\operatorname{ch} \sqrt{\mathbf{A}}t) \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\operatorname{sh} \sqrt{\mathbf{A}}t) \mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \int_0^t \mathbf{A} [\operatorname{ch} \sqrt{\mathbf{A}}(t-\tau)] \mathbf{y}_g(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} [\operatorname{sh} \sqrt{\mathbf{A}}(t-\tau)] \mathbf{x}_g(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.5)$$

If matrix \mathbf{A} , figuring in (7.5) can be diagonalized it will be possible to determine the column matrices \mathbf{x} and \mathbf{y} from the eigenvalues and eigenvectors of matrix \mathbf{A} in the usual way. Should the diagonalization of the matrix \mathbf{A} encounter difficulties, it will still be possible to solve the problem by the series expansion of the functions of matrix \mathbf{A} and time t . The square-root form of matrix \mathbf{A} in (7.5) is only apparent because

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \sqrt{\mathbf{A}}t &= \mathbf{E} + \mathbf{A} \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^2 \frac{t^4}{4!} + \dots, \\ \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{\mathbf{A}}t &= \mathbf{E} + \mathbf{A} \frac{t^3}{3!} + \mathbf{A}^2 \frac{t^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Knowing column matrices \mathbf{x} and \mathbf{y} it is possible to determine vectors \mathbf{i}_H and \mathbf{u}_{II} . Having determined vector \mathbf{u}_H , we obtain, according to the foregoing arguments, the following formulae for the branch currents:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_I &= \mathbf{C}_{HI} \mathbf{i}_H, \\ \mathbf{i}_{II} &= \mathbf{C}_{HII} \mathbf{i}_H. \end{aligned}$$

If $h > k$, i. e. if \mathbf{C}_{HI} is a standing rectangular matrix, the above-described procedure has to be modified inasmuch as it is more convenient to effect the

transformation not into mesh values but node-pair values, so that — instead of (3) — we arrive at the following expressions:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_I + \mathbf{R} \mathbf{i}_I + \mathbf{C}_Q \mathbf{C}_{HI}^* \mathbf{C}_{PII} \mathbf{u}_P &= \mathbf{C}_Q \mathbf{u}_g \\ \mathbf{C}_{PII}^* \mathbf{K} \mathbf{C}_{PII} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_P + \mathbf{C}_{PII}^* \mathbf{i}_I &= \mathbf{i}_g, \end{aligned} \tag{8}$$

where $\mathbf{C}_Q \mathbf{C}_{HI} = \mathbf{E}$ and $\mathbf{u}_{II} = \mathbf{C}_{PII} \mathbf{u}_P$.
The rest of the procedure remains unchanged.

If \mathbf{R}_H cannot be neglected we introduce the notation

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_H^{-1} \mathbf{R}_H$$

by means of which we obtain from Equ. (5.1) — analogously to Equ. (6) — the following matrix expression:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{y}_g \end{bmatrix}. \tag{6*}$$

By introducing the notations

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}; \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{Z}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{z}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_g \\ \mathbf{y}_g \end{bmatrix}$$

we can represent Equ. (6*) in the following simplified form:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z} + \mathbf{Z} \mathbf{z} + \mathbf{Z}_R \mathbf{z} = \mathbf{z}_g.$$

Let us now write [3]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{z}_1 + \mathbf{Z} \mathbf{z}_1 &= 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{z}_2 + \mathbf{Z} \mathbf{z}_2 &= -\mathbf{Z}_R \mathbf{z}_1, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{z}_3 + \mathbf{Z} \mathbf{z}_3 &= -\mathbf{Z}_R \mathbf{z}_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \mathbf{z}_k + \mathbf{Z} \mathbf{z}_k &= -\mathbf{Z}_R \mathbf{z}_{k-1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

It is obvious that

$$\mathbf{z}_k = e^{-\mathbf{Z}t} \mathbf{z}(0) - \int_0^t e^{-\mathbf{Z}(t-\tau)} \mathbf{Z}_R \mathbf{z}_{k-1}(\tau) d\tau.$$

It can be proved that, if $k \rightarrow \infty$, \mathbf{z}_k converges to the exact solution of the homogeneous equation.

If we adopt the notation

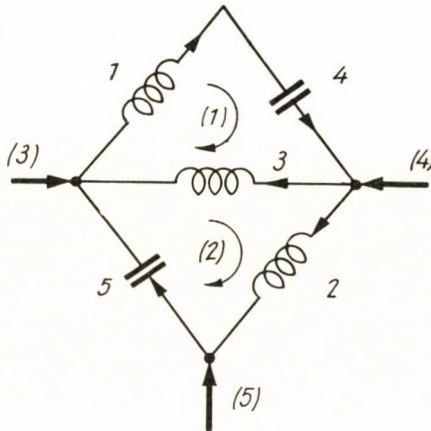
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{M}_k(t) \mathbf{z}(0)$$

the approximate solution of Equ. (6*) will be

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_k + \int_0^t \mathbf{M}_k(t-\tau) \mathbf{z}_g(\tau) d\tau,$$

which converges toward the exact solution if $k \rightarrow \infty$.

It should be noted that in cases where the length of the branches is great as compared with the wavelength belonging to their natural frequency they must be subdivided into several sections.



Example :

We want to determine the natural frequency of the network shown in the above figure.

Branches 1, 2 and 3 of the network contain inductance, branches 4 and 5 capacitance. The network is composed of meshes (1) and (2), and node pairs (3), (4) and (5). The respective positive directions of the current and the voltage are indicated by arrows. The mesh transformation equation and the nodal transformation equation can be represented as

$$\mathbf{u}_H = \mathbf{C}_H^* \mathbf{u} \text{ and } \mathbf{i}_P = \mathbf{C}_P^* \mathbf{i}; \text{ respectively,}$$

where

$$\mathbf{C}_H^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In consideration of the inductances and capacitances we can write

$$\mathbf{C}_{HI}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{HII}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{PI}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{PII}^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Since $h < n - k$, we have to find the matrix \mathbf{C}_S which satisfies the relation

$$\mathbf{C}_S \mathbf{C}_{PII}^* = \mathbf{E}.$$

A matrix of this kind is

$$\mathbf{C}_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Therefore,

$$\mathbf{L}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1+l_3 & -l_3 \\ -l_3 & l_2+l_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{SH} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

further

$$\mathbf{L}_H^{-1} = \frac{1}{(l_1 + l_3)(l_2 + l_3) - l_3^2} \begin{bmatrix} l_2+l_3 & l_3 \\ l_3 & l_1+l_3 \end{bmatrix}.$$

Thus

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(l_1 + l_3)(l_2 + l_3) - l_3^2} \begin{bmatrix} l_2+l_3 & l_3 \\ l_3 & l_1+l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_3^2} \begin{bmatrix} \frac{l_2 + l_3}{k_1} & \frac{l_3}{k_2} \\ \frac{l_3}{k_1} & \frac{l_1 - l_3}{k_2} \end{bmatrix}.$$

The natural frequency of the network is given by the eigenvalues of matrix $A^{\frac{1}{2}}$ which can be derived from the eigenvalues of matrix A ; the latter can be determined by means of the following formula:

$$a^2 - \frac{l_3(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} a + \frac{(l_1 + l_2)(l_2 + l_3)}{k_1 k_2} = 0.$$

The roots of this characteristic equation are a_1 and a_2 , and the natural frequency is consequently

$$v_1 = \frac{j}{\sqrt{(l_1 + l_3)(l_2 + l_3) - l_3^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{2},$$

$$v_2 = \frac{j}{\sqrt{(l_1 + l_3)(l_2 + l_3) - l_3^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{2}.$$

REFERENCES

1. KRON, G.: *Tensor Analysis of Networks*. John Wiley & Sons, 1939.
2. LE CORBEILLER, P.: *Matrix analysis of electric networks*. Harvard Univ. Pr., Cambridge 1950 (Harvard monographs in applied science I), 112.
3. BAJCSAY, P.—LOVASS-NAGY, V.: Ein Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung von Matrizendifferentialgleichungen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 39 (1959), 8—13.

UNTERSUCHUNG DER TRANSIENTEN VORGÄNGE
IN ELEKTRISCHEN NETZEN MIT HILFE DER MATRIZENRECHNUNG

V. LOVASS-NAGY — K. SZENDY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser fassen die Differentialgleichungen, die die transienten Vorgänge in den einzelnen Zweigen eines Netzes beschreiben, in zwei Matrix-Differentialgleichungen erster Ordnung zusammen, je nachdem ob der betreffende Zweig eine Induktivität oder eine Kapazität enthält. Aus den Knotenpunkts- und Maschengleichungen, die den Zusammenhang der einzelnen Zweige ausdrücken, können zwei weitere Matrix-Gleichungen gewonnen werden. Mit Hilfe der Koeffizienten-Matrizen dieser letzteren zwei Gleichungen können die zwei Matrix-Differentialgleichungen, die die transienten Erscheinungen in den Zweigen beschreiben, in eine solche Matrix-Differentialgleichung erster Ordnung transformiert werden, in welcher die Anzahl der skalaren Gleichungen auf ein Minimum herabgesetzt ist. Diese beiden transformierten Matrix-Differentialgleichungen können in eine einzige Hypermatrix-Gleichung zusammengefaßt werden, für deren Lösung ein allgemeines Verfahren zur Verfügung steht.

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES
DANS LES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES PAR CALCUL MATRICIEL

V. LOVASS-NAGY — K. SZENDY

RÉSUMÉ

Les équations différentielles décrivant les phénomènes transitoires qui se déroulent dans les différentes branches du réseau, sont réunies en deux équations matricielles du premier ordre, selon que la branche en question contient une inductivité ou une capacité. Deux autres équations matricielles peuvent être obtenues à partir des systèmes d'équations de Kirchhoff exprimant les liaisons entre branches. À l'aide de la matrice des coefficients de ces deux dernières équations, on peut transformer les deux équations différentielles matricielles décrivant les phénomènes transitoires dans les branches, en une équation différentielle matricielle du premier ordre, où le nombre des équations scalaires est réduit au minimum. Ces deux équations différentielles matricielles transformées peuvent être réunies en une seule équation différentielle hypermatricielle, pour la solution de laquelle on dispose d'une méthode générale.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ЯВЛЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ
С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ

В. ЛОВАШ-НАДЬ — К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Дифференциальные уравнения, описывающие происходящие в отдельных ветвях сети переходные явления, сводятся автором к двум матричным уравнениям первой степени в зависимости от того, содержит ли данная ветвь индуктивность или емкость. Из зависимостей, выражающих соединение отдельных ветвей, можно получить еще дополнительно два матричных уравнения. С помощью матричного коэффициента этих двух последних уравнений два матричных дифференциальных уравнения, описывающих переходные явления ветвей, можно преобразовать в такие матричные дифференциальные уравнения первой степени, в которых число скалярных уравнений уменьшено до минимума. Обе эти преобразованные матричные дифференциальные уравнения можно свести в одно единственное гиперматричное уравнение, для решения которого имеется общий метод.

LONG-LIFE OXIDE COATED CATHODES ON TUNGSTEN-CORES*

E. WINTER

MEMBER OF THE HUNG. AC. OF SC.

This paper gives the results of the investigations on the evaporation of tungsten-core oxide cathodes. The evaporation of barium and of the other alkaline earth metals were investigated by the flame-photometric method for emitting layers of various compositions. The evaporation curves drawn in function of time contained sections representing different rates of evaporation.

The first section of the evaporation measured at 950° C is steep and thus corresponds to a high rate of evaporation. The intensive evaporation of the barium lasts for 1½ hours and during this time the cathodes lose 60—70% of their barium contents. When heated further the evaporation rate at 950° C dropped to about zero. It was found that the initial strong evaporation was caused by the carbon produced from the nitrocellulose which is used as a binder on preparing the oxide cathode, in consequence of the reduction of barium oxide. The experiments prove that it is advisable to replace the nitrocellulose by another binder. It was proved that by using the nitrates of alkaline earth metals for a binder the initial intensive evaporation can be suppressed.

The character of the evaporation curves measured at 950° C was independent of the composition of the layer. Measurements made at higher temperatures showed that the evaporation rate of layers with the given compositions is essentially lower than the evaporation rate of the layers used so far.

The paper gives the results of measurements made on several emitting layers having a low rate of evaporation.

These facts are of importance for vacuum engineering products containing tungsten-core oxide cathodes. At present the most important of these products are the fluorescent tubes.

I. Introduction

During the 1940's in Europe — also in Hungary — battery-heated radio tubes with 1.25 V filament voltage and 25 mA filament current were developed. The filament current of these tubes could be supplied by a single 1.5 V dry battery. The voltage of this latter was 1.5 V before use, but during use it rapidly dropped to 1.2—1.1 V and during a great part of its useful life it retained this voltage. The voltage slowly continued to drop from 1.1 V to 0.9 V, after which the dry battery had to be considered as used up.

The major part of the operating cost of battery wireless sets was due to the cost of the filament battery. According to the above radio tubes, designed for 1.25 filament voltage were first overheated when used with such a dry

* Inaugural lecture held at the Hungarian Academy of Sciences on September 24, 1959.

battery and this reduced their life. During further operation the battery voltage of the tube and so the cathodes were heated at a temperature below the optimum one, consequently the operating characteristics of the tubes decayed. Therefore, it appeared desirable to look for an oxide cathode with a greater thermal stability than that of the oxide cathodes used so far and even better than these from the point of view of reduced heating.

After lengthy experimental work the Electron Tube Laboratory of the United Incandescent Lamp Works succeeded in developing an oxide cathode conforming to the enumerated requirements. Its main characteristic was the molecular composition of the triple carbonates used for preparing the cathode:

- 2 moles barium carbonate,
- 1 mole strontium carbonate,
- 2 moles calcium carbonate.

With an emitting layer of this composition the desired aim was completely achieved, the life of tubes with these cathodes was longer than 1000 hours, even at 1.5 filament voltage and the electric characteristics guaranteed good operation also with 0.9 V filament voltage. These characteristics remained unchanged also after several thousand hours of heating. The above statements are proved by Fig. 1 and by Hungarian patent No. 140.302 as well as by Austrian patent No. 160.827 [1].

The new emitting material permitted a prolonged life and having a greater possibility of overheating to increase by 100% the density of emission current which could be drawn from the cathode. With the aid of this emitting material it was possible to develop and to market the series of so-called half-heating power battery tubes. It became possible to manufacture battery tubes with unchanged electric data excepted the filament power, which was half of the usual. Notwithstanding the largely increased load on the tubes, their life was much longer than the life of corresponding foreign tubes needing twice as much heating power.

Fig. 1 shows the result of permanent heating tests with small 3A4 transmitter triodes in r.f. amplifier circuit. The axis of abscissae shows the heating hours, the axis of ordinates shows the slope measured at 0.9 V reduced heating. The full line shows the slope of the cathode of new composition with great thermal stability as a function of heating hours, while the dashed line represents the behaviour of a foreign manufactured tube of the same type. In both cases the tubes were operated in an r. f. amplifier circuit under very heavy load so that they were due for deterioration within 150 hours. The diagram shows that the slope of the tube made with the new emitting material decreased only insignificantly after 150 hours of heating, while the foreign tube of the same type was completely worn out within 50 hours. The life-

tests showed that with the new emitting material, generally 2.5—3.5 times the life of the older type could be obtained for tungsten-core oxide cathodes.

The tungsten-core oxide cathodes are also important for the fluorescent tubes which are more and more utilized in the illuminating engineering. From the beginning the life of the fluorescent tubes was determined by the life of the oxide cathodes. The older cathodes had an average life of 2500 hours. This value could not be increased neither by changing the production methods of the oxide cathodes, nor by modifying the composition of the emitting layer. Better, more uniform coating (by cataphoresis) essentially reduced the standard deviation of the individual tubes, but the average life was not increased. Experi-

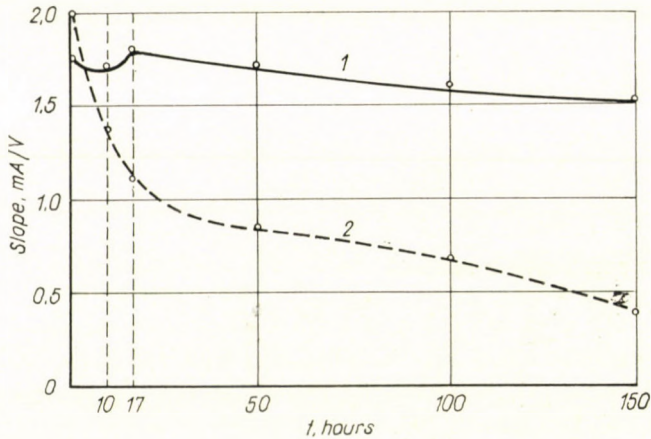


Fig. 1 is taken from the Austrian patent

ments were carried out using the new emitting material for fluorescent tubes. As could be expected, the life of 2500 hours of the lamps made before was increased to 7—8000 hours. Even before the new emitting material was introduced for fluorescent tubes, the American Sylvania Electric Co. announced that they had succeeded in increasing the life of discharge tubes to 7500 hours, by improving the quality of the oxide cathodes used therein.

At the time of the announcement it was still not known by what means they had succeeded in attaining this considerable increase of life. Later on it became known that Sylvania used double carbonates as emitting material in their discharge tubes to which 4÷6% of zirconium dioxide was added. This emitting material also reduced the amount of staining, besides increasing the life. With our new emitting material a disturbing effect appeared: on parts of the tubes staining developed in the vicinity of the cathodes. It was proved that the staining was caused by metallic barium evaporating from the cathode, condensing on the tube wall and then amalgamating with mercury.

II. The evaporation of the oxide cathode

The considerations described in the introduction of the present paper pointed to the need of starting investigations which would throw light on the phenomena in the emitting layer, during the manufacture of the cathode as well as during permanent operation. Obviously, first of all, it was necessary to increase the thermal stability of the cathodes and it was highly probable that the short life of the cathode is due to the great evaporation and the long life to a reduced evaporation of the emitting material. Therefore, it seemed necessary to measure the evaporation characteristics of the emitting material.

The methods used by different authors for measuring the quantity of evaporated alkaline earth oxides can be divided into six groups.

1. Gravimetric methods

This method was used by CLAASSEN and VEENEMANS [2], HERRMAN [3], BLEWETT, LIEBHAFSKY and HENELLY [4].

2. Mass spectrometer methods

The velocity of evaporation of oxides, dispenser cathodes, and of materials used in electron tubes was investigated with the mass spectrometer by PLUMLEE and SMITH [5], ALDRICH [6], PELCHOWITCH [7], BLEWETT and JONES [8], BARTON and HELNWELL [9].

3. Water vapour reaction

The quantity of evaporated free metallic barium and of evaporated barium oxide was determined by a method using the water vapour reaction by JENKINS and NEWTON [10].

4. Method using radioactive tracers

MOORE and ALLISON [11], MOORE, ALLISON and STRUTHERS [12], LEVERTON and SHEPERD [13], DZANTIJEV, MILLER and NIKONOFF [14] report on investigations carried out with this method.

5. A spectrochemical method was used for their investigations by WOOTEN, RUEHLE and MOORE [15].

6. The thermionic method is due to BECKER [16] and with its aid BRODIE and JENKINS [17, 18, 19] elucidated the evaporation phenomena of L-cathodes and of impregnated dispenser cathodes.

III. The measuring method used by the author and his co-workers

Under Hungarian conditions the methods enumerated above could not be considered, therefore, F. P. VÁRADI and GY. GERGELY, co-workers of the author, elaborated the flame photometric method for determining the alkaline earth metals evaporating from the oxide cathode [20, 21, 22, 23, 24]. With this method still $0,6 \mu\text{g}/\text{cm}^3$ of barium, $0,2 \mu\text{g}/\text{cm}^3$ of strontium and $0,09 \mu\text{g}/\text{cm}^3$ of calcium could be measured. The method permitted the quantitative analysis

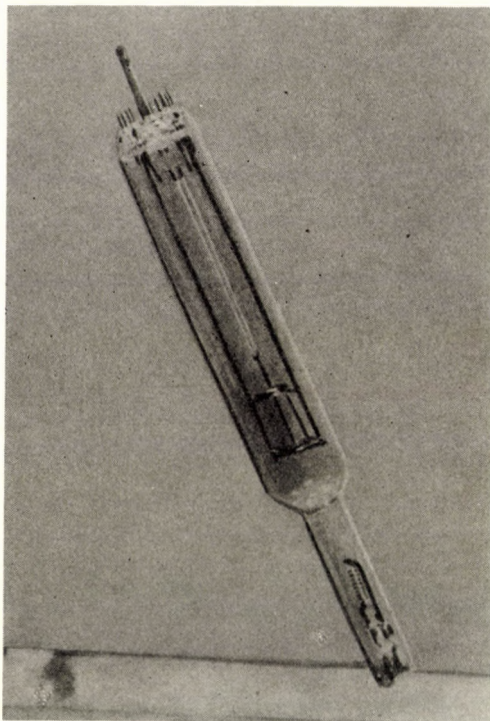


Fig. 2

of the emitter coating of a single 25 mA-filament — 20 micrograms of material — within a few minutes, and the determination of the composition of the emitter coating and of its change during life test of the cathode with an accuracy of $\pm 5\%$. The method does not answer either the question as to how much of the alkaline earth metals evaporates in the form of oxide and how much in the form of metal, or does it supply information as to what is evaporating from the products of reaction with the core metal, but by comparison with the results of other authors conclusions can be drawn also on these subjects. The great sensibility of the method permits to observe the phenomenon of evaporation at low temperatures and within short intervals and permits in-

sight into such phases of the development of the emitting layer which hitherto could not be done.

As for details of the measuring method we refer to the quoted literature, here we want to deal only with some vacuum-technical details of the method. Fig. 2 shows a photograph of the experimental tube.

Fig. 3 shows a longitudinal section of the same tube. Instead of a barium getter, a zirconium getter was used in order to avoid errors in the measurement. *Z* is the heating spiral of the zirconium getter, *K* is the straight, coated wire cathode, *A* a transparent quartz glass cylinder for collecting the evaporating alkaline earth oxides, which could be shifted away. The zirconium getter wire was of 0.5 mm dia., the cathode wire of 0.1 mm dia.; two parallel stretched

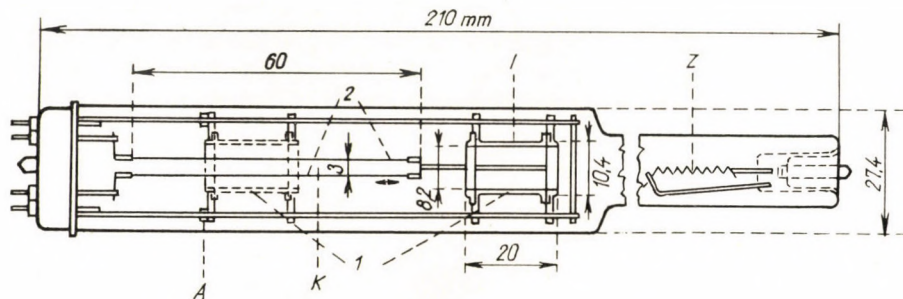


Fig. 3

wires of 2×60 mm length were used as cathodes. The examined material was deposited on the cathode by means of cataphoresis. The cataphoretic suspension also contained nitrocellulose. The thickness of the deposited layer was 22μ . The alkaline earth oxides evaporating from the cathode condensed on the quartz cylinder surrounding the cathode. After evacuation and heat treatment, the tested tubes were broken up and the oxides remaining on the cathode as well as those evaporated on to the quartz cylinder were dissolved in nitric acid contained in a quartz crucible and the quantities of alkaline earth metals present in the solutions were measured by a flame photometer. The quartz cylinder could be shifted by simply reversing the tube by 180° , and could be fixed at extreme low and extreme high positions by stops.

In one extreme position the quartz cylinder does not surround the cathode, in the other extreme position, on the contrary, it is opposing just the central part of the cathode which is at uniform temperature. The quartz cylinder was shifted towards the cathode at that moment from which the evaporation of the oxides was to be measured. Therefore, it was possible to carry out a heat treatment of the cathode according to various experimental conditions before starting the measurement of evaporation rate.

Later on two types of cathode heat treatments were developed. With the heat treatment of the first type the cathode was heated in vacuum from the very beginning, while with the second type the first part of the treatment was carried out in an argon atmosphere. These two kinds of heat treatments appeared to be useful, because in the course of later investigations it was considered necessary to heat the oxide layer in such a way that evaporation would be a minimum.

IV. Vacuum technical treatment of the experimental tubes

The evacuation of the experimental tubes can be considered as being equal to the vacuum technical treatment of oxide cathode electron tubes, therefore, its detailed description is omitted. The different stages of evacuation were the following:

- a) Heating of the experimental tube during 15 minutes at 400—410° C.
- b) Heating of the zirconium spiral in order to absorb the active gases (900°).
- c) Transformation by heating of the alkaline earth metal carbonate layer on the cathode into oxides of the same metals (900 ÷ 1000° C).
- d) Evacuation of the liberated remains of active gases by heating the zirconium getter again.
- e) Sealing off the experimental tubes.

With this method of evacuation every step of the heat treatment of the cathode was done in vacuum. As will be seen later, the alkaline earth metal oxides must be present in the emitting layer of the finished oxide cathode in the form of a solid solution. During heating the various free oxides are formed from the carbonates, even if the carbonates have formed a solid solution. From the single free oxides the solid solutions are formed during further heat treatment by diffusion. The single free oxides evaporate more intensively than those which are in solid solution. In order to clear up the causes of various phenomena which were observed during the tests it became necessary to produce the solid solution of the oxides in such a way that in the meantime the evaporation of the free oxides would be minimum and that the composition should not vary essentially.

Therefore, another alternative for the evacuation of the test tubes was developed. According to this method the experimental tubes were filled with pure argon, after transformation of the carbonates into oxides at 750 Torr pressure and the heating of the cathodes continued for a further 5 minutes at 1060—1100° C. Heating for 5 minutes at the given temperature is sufficient, according to the investigations of some authors [25], for the mutual dissolution of the free alkaline earth metal oxides and their transformation into a solid so-

lution. The presence of the argon reduces the evaporation rate intensively, and therefore, it was probable that by using this method the solid solutions could be produced without important evaporation losses or changes in percentual composition.

On the first occasion when the measuring method was elaborated 10 experimental tubes were used for determining a single point and the average of the values was taken. At present better reproducibility permits a sufficiently reliable determination of one point by using only 5 test tubes.

V. Results of measurements

1. *The investigated emitting layers of different compositions*

The first task was to ascertain whether the longer life and better emitting performance of tungsten-core oxide cathodes covered with an emitting layer composed of

- 2 moles barium carbonate
- 1 mole strontium carbonate
- 2 moles calcium carbonate

could be explained by a smaller evaporation rate or not. In order to determine this, tungsten wires of 0.1 mm dia. were covered by cataphoresis:

- a) With pure barium carbonate;
- b) with crystals of solid solution of barium carbonate and strontium carbonate in equimolecular proportion (called from now on "double carbonates");
- c) with a solid solution containing 50 weight p. c. barium carbonate, 45 weight p. c. strontium carbonate and 5 weight p. c. calcium carbonate (named "triple carbonates containing 5% calcium carbonate");
- d) solid solution containing 2 moles of barium carbonate, 1 mole of strontium carbonate, 2 moles of calcium carbonate (named "2 : 1 : 2");
- e) emitting material containing 50 parts (by weight) of barium carbonate, 30 parts (by weight) of strontium carbonate, 20 parts (by weight) of calcium carbonate, 4 parts (by weight) of zirconium dioxide. The denomination of this emitting material will be "triple carbonate containing zirconium dioxide".

2. *The determination of the evaporation curves of different emitting layers at 1500° K*

The aim of the first measurement was to obtain approximative quantitative information on evaporation conditions. So as to get results quickly, the cathodes were heated to a rather high temperature of 1500° K. The quantities

of evaporating barium oxide, strontium oxide and calcium oxide were determined after 2, 5, 15, 30 and 45 minutes of annealing. Fig. 4 shows the quantities of evaporating alkaline earth.

The common characteristics of the curves shown in Fig. 4 are the following:

The axis of the abscissae shows the annealing time in minutes or in hours, the axis of ordinates shows the quantity in micrograms of alkaline earth metals evaporating from that part of the cathode surrounded by the quartz cylinder.

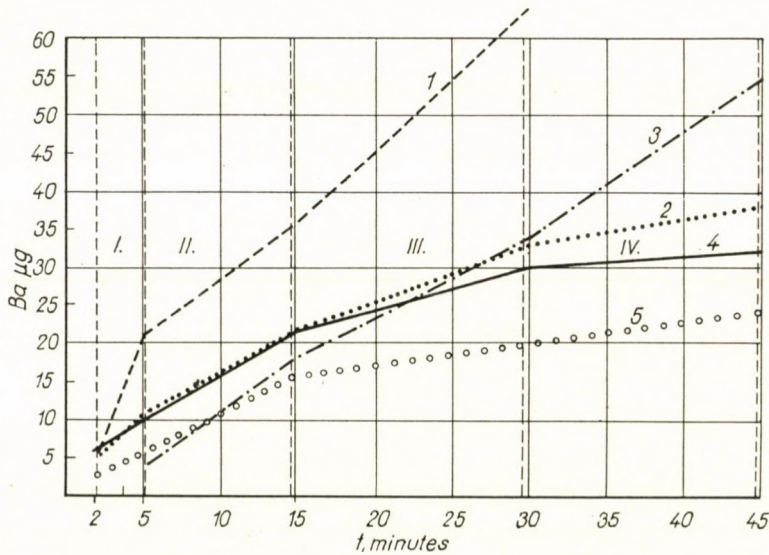


Fig. 4

The temperature of heating is 1500°K in the example represented in Fig. 4 and 950°C in the case of the other figures.

In order to facilitate the evaluation of the curves, Table I was compiled from the measured values.

Table I

Emitting material	Evaporation velocity, $\mu\text{g/h}$			
	2'-5'	5'-15'	15'-30'	30'-45'
BaCO_3	320	96	112	—
Triple carbonate with 5% CaO	40	84	64	84
Triple carbonate 2 : 1 : 2	80	72	32	8
Double carbonate	120	66	44	20
Triple carbonate containing zirconium dioxide	70	60	16	16

These measurements were carried out at a time when the measuring methods were not sufficiently improved and, therefore, are not free from some contradictions. The heating temperature (1500°K) was too high to keep the scatter of the results at a sufficiently low value. As for the curves of Fig. 4 the following should be noted: the determination of the evaporating barium was carried out after five different heating times. Accordingly, determination of the evaporation rate, thus the quantities of evaporated material proportional to the velocity, became possible for four different intervals. Having made these remarks, the following conclusions can be drawn from the curves of Fig. 4:

a) The evaporation rate of pure barium oxide is essentially larger, than the evaporation rate of barium oxide, from layers containing several alkaline earth components.

b) The evaporation of barium oxide from the triple oxide containing 5% of calcium oxide is somewhat larger than from the double oxides. But the evaporation rate is constant and independent of the duration of the evaporation. There is no doubt that the fluctuations appearing on the curves and also in the table are due to measuring errors.

c) The 2 : 1 : 2 emitting material was a surprise. As has been stated in the introduction it was possible to attain with this emitting material life increase by 2.5—3.5 times as compared with other materials. Curve 4 of Fig. 4 and Table II shows that during the initial annealing period the evaporating rate of the 2 : 1 : 2 emitting material was somewhat smaller than that of the double oxides. With further progress of the heating the evaporation rate of the emitting material strongly decreased to values smaller than those of any other of the tested emitting materials. This is proved by curve 4 of Fig. 4 as well as by the values of Table II. The evaporating rate dropped to $8\ \mu\text{g/h}$ during the fourth stage of the heating which is a lower value than any evaporation rate of Table II. As for the figure, during the interval between 30' and 45' the slope of curve 4 is smaller than that of any other curve.

After 30 minutes of heating it is curve 4 which includes the smallest angle with the time axis.

The quantitative relations are not quite clear from the figures, but it can be stated that during the last stage of the heating the evaporation rate of the 2 : 1 : 2 material is hardly 50% of that of the emitting material containing zirconium dioxide. The shape of the evaporation curve completely explains the behaviour of this material when it was used in fluorescent tubes. The cause of the staining is the initial intensive evaporation of the barium and the long life can be explained by the reduced slope of the evaporation curve during the fourth stage of heating.

The question arises whether the rather important scatter of the curves of Fig. 4 justifies the drawing of such conclusions as e. g. the evaporation rate of the 2 : 1 : 2 material being half of that of the material with zirconium di-

oxide. In order to decide this question recourse to practical experience was necessary too, chiefly to the fact that the life tests showed the curves of Fig. 4 are probable ones. For this reason it was worth-while to investigate the results further.

3. Analysis of the evaporation curve of the 2 : 1 : 2 material

It is of great practical importance to discover the true reasons for the shape of the curves of Fig. 4 and to find explanations for the reduction in time of the evaporation rate. If it were possible to manufacture oxide cathodes having evaporation characteristics like the last section of curve 4, Fig. 4 right from the start, the quality and the life of vacuum engineering products (fluorescent tubes, electron tubes) could considerably be improved.

Usually solid solutions of the suitable alkaline earth carbonates are used for preparing the oxide cathodes. The use of solid solutions gives better and more uniform mixing of the components and quicker activation than mechanical mixing and milling of the carbonate components. It is also known that in order to attain a favourable work function the alkaline earth oxides must be present in the form of solid solution in the finished oxide cathodes. After the decomposition of the alkaline earth carbonates the various free alkaline earth oxides are produced also in the case if they were present before decomposition in the carbonates of solutional form. After that the various free oxides must be transformed into a solid solution and this is part of the activation of the cathode, as has been recognized by F. P. OSTAPTCHENKO [25].

Accordingly, after the decomposition of the carbonates free barium oxide is present in the emission layer, the vapour pressure and correspondingly the evaporation rate which is considerably higher according to Fig. 4 and Table II than the pressure of barium in solid solution. Therefore, it could be assumed that the intensive evaporation of the barium oxide lasts until a solid solution is formed out of the various components.

The initial high evaporation rate causes a considerable barium loss in the emission material and thus the composition of the emitting layer is changed, too. Therefore, it had to be decided whether the low evaporation rate during the final stage of the annealing could be explained by the formation of the solid solution having the initial composition, or by the development of a special composition during the evaporation of certain components.

OSTAPTCHENKO's paper [25] contains a phase diagram (Fig. 5) according to which in the system composed of three alkaline earth oxides there is a region where the three components form a single-phase solid solution. For compositions outside this region the possibility exists that the system contains barium oxide not in the form of solution, but in free state, where its evaporation rate is high.

In Fig. 5 the point corresponding to the 2 : 1 : 2 material has been marked by 1. It is near to the limit of the region of single-phase solid solution, but still outside of it. This fact supports the hypothesis that not the dissolved barium oxide, but the free one causes high initial evaporation rate and either after evaporation of the superfluous barium oxide, or after attaining the region of single-phase composition, is the evaporation rate reduced.

In order to decide this question a series of experimental tubes containing tungsten cathodes coated with 2 : 1 : 2 emitting material was prepared. Half of these tubes were evacuated in the usual way, the carbonates were decomposed and then the tubes were sealed off. Only then were the quartz cylinders

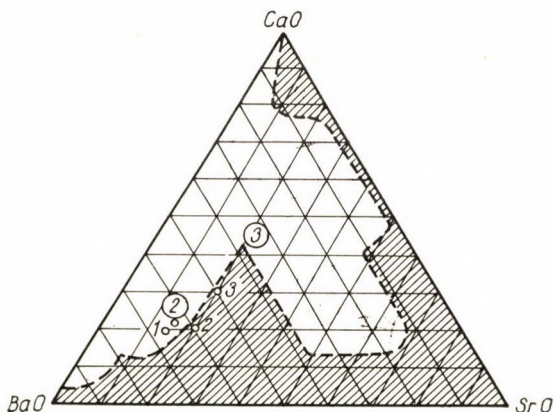


Fig. 5

shifted over the cathodes and the cathodes heated at 950° C for 24 hours. During this time samples were taken on 4—5 occasions from the experimental lot and the quantities of alkaline earth metals evaporating onto the quartz tube and remaining on the cathode were determined. The results of these measurements are shown in Fig. 6, which gives the quantities of evaporating barium and of that remaining on the cathode, as functions of the annealing time.

In Fig. 6 there are three curves marked 1, 2 and 3 and three encircled points marked ①, ② and ③. Point ② shows the barium remaining on the cathode after exhaustion, point ③ the barium condensing on the quartz cylinder during exhaustion, point ① represents the sum of the two quantities. Curve 2 shows the quantity of barium condensing on the quartz cylinder as function of time, curve 3 shows the same for the quantity of barium remaining on the cathode, curve 1 gives the sum of the two. The reliability of the measurements is proved by the fact that the whole quantity of barium disappearing from the cathode is found on the cylinder. In the following figures the curves have the same signification as on Fig. 6.

The figure shows that after about 2 hours of intensive barium evaporation the evaporation rate at 950°C drops nearly to zero. This seems to confirm curve 4 of Fig. 4.

Nevertheless, the curves of Fig. 6 are essentially different from those of Fig. 4. This, first of all, refers to the evaporating quantities of substance. Approx. 32—34 micrograms of barium evaporate during 45 minutes at 1500°K from the 2 : 1 : 2 coating according to curve 4 of Fig. 4 and the shape of the curve indicates that this quantity would scarcely increase during further heating. On the contrary, curve 2 of Fig. 6 shows the evaporation of about 100 micrograms of barium after $1\frac{1}{2}$ hours of heating at $950^{\circ}\text{C} = 1223^{\circ}\text{K}$,

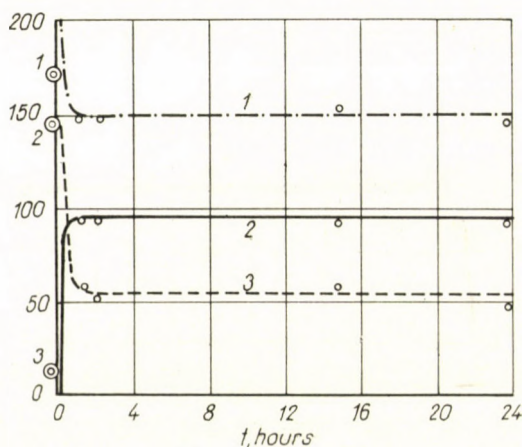


Fig. 6

thus at a considerably lower temperature. The physical meaning of the sections with different evaporation rate in the two figures cannot be considered as being identical. In Fig. 6 there is a very steep section lasting for $1\frac{1}{2}$ hours, after which the evaporation practically ceases. During this $1\frac{1}{2}$ hours evaporates twice as much barium as can be seen in Fig. 4. In curve 4 of Fig. 4 there appears no section with such a steep slope, on the other hand the slope of the evaporation curve — as a consequence of the higher heating temperature — is somewhat greater than zero, i. e. the curves are nowhere parallel to the axis of abscissae.

The following considerations will explain the different characters of the two curves.

During the vacuum technical treatment the experimental tubes are already heat-treated during evacuation, in order to transform the carbonates into oxides and to form the convenient physico-chemical structure of the emitting layer. The temperature of heat treatment is 1500°K for the tubes of

Fig. 4 as well as during the heating for evaporation. When heating on the pump the quartz cylinders are not placed above the cathode, this is done only after sealing off, before the evaporation annealing. Consequently during evacuation a considerable amount of material evaporates which is not subjected to analysis. Therefore, the steep evaporation lasting $1\frac{1}{2}$ hours according to Fig. 6 is finished during evacuation and because of this the $90\ \mu\text{g}$ of barium evaporating at this time are missing. The slowly rising evaporation curves of Fig. 4, therefore, correspond to those sections of Fig. 6, which are parallel to the X axis, the slope of which will, of course, not remain zero at higher temperatures.

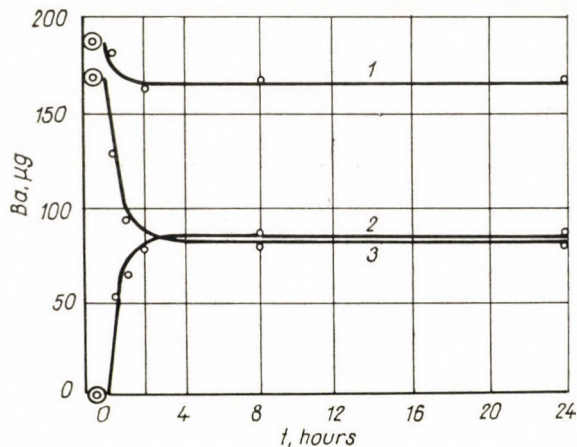


Fig. 7

The sections with different slopes of Fig. 4 can be ascribed to the variation of composition during evaporation and various other causes.

The initial strong evaporation, as already has been mentioned, can perhaps be explained by the formation of free barium oxide during the decomposition of the carbonates, while ceasing of the evaporation can be explained by the formation of the solid solutions from the alkaline earth oxides during annealing. To decide this question it was necessary to carry out tests during which the oxides were heated to such high temperatures that their mutual dissolving occurred at relatively high speed, while it was possible to prevent changes in composition during the heating, which would be due to intensive evaporation. It was thought that this aim could be achieved by carrying out the heating for the formation of the solid solution not in vacuum, but in an atmosphere of argon for 5 minutes at $1050\text{--}1100^\circ\text{C}$.

The heating time and the temperature were chosen in conformity with OSTAPTCHENKO's paper, according to which each oxide mixture having a composition within the region of single-phase solid solution, is transformed into solid solution within 2—3 minutes. It could be presumed that the formation

of the solid solution of the three oxides depended only on temperature and on heating time and that it was independent of the medium where the heating takes place. On the other hand, due to the presence of argon atmosphere, the evaporation rate of barium oxide was intensively reduced, for known reasoning.

The results of the measurements are represented on Fig. 7 (similar to Fig. 6) and it appears that there is no essential change in the character of the evaporation curve due to heating in argon.

The pre-heating in argon reduces the quantity of barium disappearing from the cathode somewhat (from 100 micrograms to 80 micrograms) and the amount of barium remaining on the cathode is increased by the same amount, but even then the cathode loses half of the barium contents of the emitting layer.

After two hours of heating at 950° C the evaporation curves become parallel to the axis of abscissae in the same way as in the curves on Fig. 6.

The argon test suggests that the low evaporation rate measured after the initial strong evaporation, does not originate of the solid solution, and so cannot ascribed to the vapour pressure reducing effect of the SrO or the CaO dissolving in the barium oxide.

Consequently the second alternative possibility was examined, according to which the 2 : 1 : 2 emitting material in its original composition does not give a single-phase solid solution with a low barium oxide pressure, but this low pressure can be ascribed to the change of composition. Therefore, the low-pressure emitting layer remaining on the cathode was analyzed and it was found that its composition corresponded to the following molecular composition:



According to OSTAPTCHENKO's phase diagram (Fig. 6) this composition lies within the single-phase range. On the OSTAPTCHENKO diagram five points can be seen, marked 1, 2, 3 and (2), (3). Point 1 corresponds to the initial composition, which is outside the single-phase field. Point (2) represents the composition of the decomposed mixture of oxides if decomposition takes place without argon, and in the case of argon treatment (3) represents the composition of the same emitting material when the evaporation of the emitting material has ceased. It has been ascertained that all low barium pressure mixtures formed during heating are within the single-phase range of the phase diagram.

Conforming to these ideas, emitting material was prepared with the low-pressure composition according to the analysis, was deposited on the surface of the tungsten wire and in this way experimental tubes were prepared. The evaporation characteristics of the cathode coated in this way were investigated.

Reproduction of the curves is omitted, the evaporation diagrams being similar to those of Figs. 6 and 7. This means that such a change in the composition is by itself not sufficient for suppressing the initial strong evaporation.

It has been mentioned, that it is of great practical importance to recognize the true reason, the evaporation rate being e. g. for fluorescent tubes inversely proportional to their life and the investigations carried out so far have shown that it might be possible to prepare with triple oxides an oxide cathode permitting the increase of the life of vacuum engineering products by 2.5—3.5 times. Even as compared to the emitting material containing zirconium dioxide, which so far is the best available, at least the doubling of the life could be achieved.

The non-evaporating oxide cathode is important not only from the point of view of life. The suppression of the initial evaporation is also important in

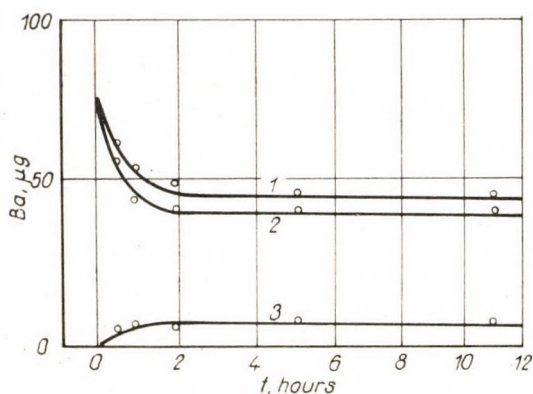


Fig. 8

order to reduce the staining around the electrodes in the fluorescent tubes and the reduction of light output of the tubes during use. In electron tubes the reduction of the initial evaporation is essential for reducing grid emission, in H. T., rectifier tubes it is essential in order to reduce the danger of breakdown. Therefore, it is important to form the low-pressure, non-evaporating emitter not during the use of the tube, but to introduce it into the tube still in a non-evaporating state.

To finally clear the question, the following test was carried out:

Cathodes were taken out of experimental tubes where their coating had already reached the minimum of evaporation rate and these cathodes were mounted in new experimental tubes. With the usual method the evaporation rate of these cathodes was measured. The results are shown in Fig. 8.

Curve 3 shows the variation of the evaporating quantity, curve 2 the barium remaining on the cathode and curve 1 the total quantity of barium as a function of annealing time. The initial quantity of material is much lower than the quantity of material according to Fig. 6, the cathode having lost a considerable quantity of barium during the previous exhaustion and the preceding

annealing. In this case the initial evaporation has practically ceased and the quantity of barium condensed on the quartz cylinder, does not attain even one tenth of the quantity found at the previous tests.

This experiment showed that before being mounted in the tube the cathode can be brought into such a state from which there is no initial evaporation, but the causes of the initial evaporation were not cleared. The method would not be appropriate as a method of production, because it is well known that all alkaline earth oxides are very sensitive to humidity and to carbonic acid.

It should be mentioned that in the literature some references [26] can be found, according to which the reduction of evaporation on the surface can be

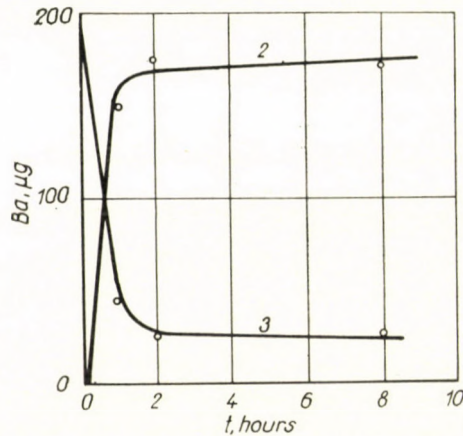


Fig. 9

explained by the formation of a layer of pure SrO, or of pure CaO on the surface of the emission layer. These layers are produced in consequence of the vapour pressure of the BaO being higher than that of the CaO or of the SrO. The BaO evaporates at a higher rate than these two oxides and the surface of the emitting layer becomes poorer in barium. During the later phases of evaporation the barium is forced to diffuse through this layer of SrO or of CaO in order to come into the vacuum, and so an explanation is found for the reduction of evaporation rate.

Another possible explanation for the reduction of evaporation-rate is the formation of an interface layer between the core and the emission coating. This interface layer is proved to consist of Ba_3WO_6 in the case of tungsten metal core [27]. The interface layer separates the metal core and the barium oxide, and thus, the reaction between the two becomes more difficult. The two metals (the reducing metal and the BaO to be reduced) can contact each other only by way of diffusion through the interface layer.

In order to decide the correctness or incorrectness of the proposed explanation it was most expedient to recur to the experiment. Therefore, the evaporation of pure BaO from a pure platinum core was investigated. As the emitting layer consisted in this case of one oxide only, there was no probability of the surface of the layer having another composition than that of its interior. Furthermore, as the platinum does not reduce the barium oxide, no formation of a disturbing interface layer had to be taken into consideration. The results of the measurements are shown in Fig. 9.

The figure proves that the initial intensive evaporation lasting for 2 hours is also present in the case of pure barium oxide on platinum core, and that after about 2 hours of heating the evaporation rate of pure BaO also greatly decreases and the further evaporation continues at low velocity, already in proportion with time. The evaporation rate of pure barium oxide is in this region also higher than the rate of evaporation of BaO from the 2 : 1 : 2 emission material. Such a difference in the vapour pressure can be ascribed to the formation of the solid solution in a layer consisting of several components. On the other hand, the appearance of a steep section must be ascribed to the presence of a material, which entering into reaction with the barium oxide, results in a high pressure corresponding to this high evaporation rate.

As is known the solid solution of two or three alkaline earth carbonates is deposited on the metal core of the oxide cathode by spraying or by cathoporesis. Actually a lacquer is formed in which the pigment is constituted by alkaline earth carbonates, the binder by nitrocellulose, the solvent is acetone, amyl acetic ester, diethyl oxalate or their mixture. As binder nitrocellulose proved to be the most suitable, because the nitration provides it with as much oxygen as is theoretically sufficient for burning all the carbon and hydrogen. So residues do not remain and the cathode is not poisoned. During exhaustion the nitrocellulose is during the warming-up already decomposed while liberating the gas, the cathode emerging from the oven at the pump has a brownish-black colour due to the presence of the carbon remaining after the decomposition of nitrocellulose. The carbon is burned to carbon monoxide by the carbon dioxide developing during the decomposition of the carbonates. The process can be observed visually too, because the carbon causes strong radiation of the cathode thus lowering its temperature, and after combustion of the carbon at the same heating power the cathode becomes more bright, the cathode is said to clean up.

So far it has always been assumed that the quantity of carbon remaining from the nitrocellulose and which is supposed to be very small completely disappears from the cathode under the action of the developing carbon dioxide during the clean-up and that there remains practically no carbon in the brightly incandescent, already white cathode layer. After the last described experiment, it must be assumed that a considerable fraction of the carbon is

still present in the cleared-up cathode and that the initial intensive evaporation is caused by its reducing action. The BaO—C system possesses the steep slope observed at the beginning of the evaporation curve and this is burned not by carbon dioxide but by the BaO, while metallic barium is formed.

To check this it was necessary to search for a binder, which does not leave reducing material over. Such binders are the nitrates of the alkaline earth metals. Their (about 1 p. c.) solution was mixed with the alkaline earth carbonates and the in this way prepared suspension was deposited on the tungsten wire or tungsten spiral. A further advantage of the alkaline earth nitrates is that after heating they are transformed into alkaline earth oxides in the same way as the carbonates, their decomposition products, therefore, do not contaminate the emission layer and if their proportion is adequately chosen, they do not even modify the composition of the emission layer. Spirals for fluorescent tubes were coated by dipping with the suspension containing alkaline earth nitrates as a binder. The surface area of the fluorescent tube spirals is essentially larger than that of the wire of 2×60 mm length and 0.1 mm dia. used at the previous tests, and thus the deposited quantity of material is also essentially larger, approximately by 10 times. Consequently the measuring data shown in Fig. 10 cannot be compared to those of the previous figures. In order to ascertain the influence of the quality of the binder, two parallel tests were made with spirals. The spirals were coated with emitting material containing as binder

- a) nitrocellulose,
- b) alkaline earth nitrates.

In both cases the carbonates were of the 2 : 1 : 2 composition. The experimental tubes were heated and the evaporation was measured; the results are shown in Fig. 10.

In the figure:

curve 1a shows the quantity of barium evaporating from the nitrocellulose emission layer and thus arriving on the quartz cylinder;

curve 2a shows the quantity of barium remaining on the cathode from the same emission layer, as function of annealing hours;

curve 1b shows the quantity of barium evaporating from the nitrate material;

curve 2b gives the quantity of nitrate material remaining on the cathode, as function of time.

It will be seen that during 100 hours about 15 times as much material evaporates from the nitrocellulosic layer as from the nitrate layer ($600 \mu\text{g}$: $40 \mu\text{g}$), and even after 100 h the evaporation curve does not become parallel to the time axis. It is true that the evaporation curve becomes less steep after 100 h, but still it rises with a considerable slope. This behaviour is characteristic for

the nitrocellulosic emission layer deposited on the spiral. The evaporation of the nitrate material practically ceases after 100 hours of annealing at 950° C.

The nitrate-containing emitting material has also a small initial rising range, which probably coincides with the formation of the solid solution.

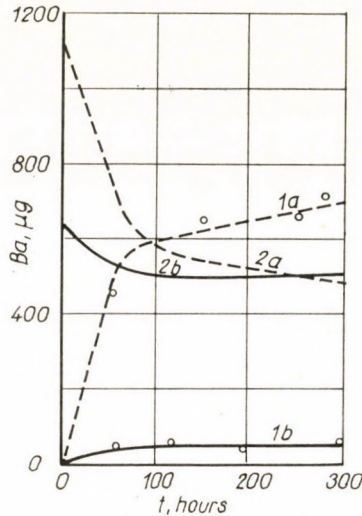


Fig. 10

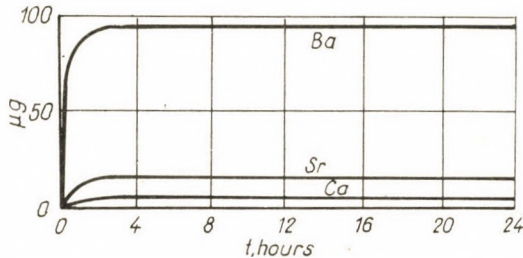


Fig. 11

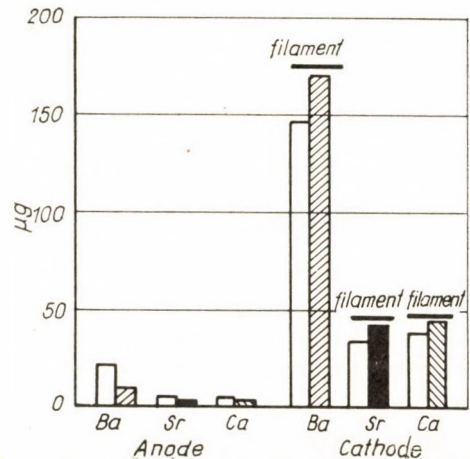


Fig. 12

In conformity with the earlier assumptions the formation of the solid solution really reduces the evaporation rate, but the large quantities of evaporating barium cannot be explained by this fact.

It must be remarked that on analysing the measuring tubes serving for evaporation tests in each case not only the quantity of evaporating Ba, but also those

of evaporating Sr and Ca were measured. Fig. 11 shows the evaporation curves of Sr and Ca for a tube preannealed in argon.

Finally, Fig. 12 shows the change in composition of the coating during evacuation for all three components. The height of the columns in Fig. 12 shows how much Ba, Sr and Ca evaporates from the cathodes during evacuation and how much remains there. The horizontal lines above the cathode columns represent the quantities of Ba, Sr and Ca present on the cathode before evacuation.

According to the above, the causes determining the character of the evaporation curves of alkaline earth oxides were elucidated. It was found that it is possible to eliminate the initial steep range of the evaporation curve, and thus the barium loss of the tungsten-core oxide cathodes can be reduced considerably. It is highly probable that the establishments made on tungsten-core oxide cathodes remain valid also for other core metals.

VI. Conclusions

1. Using the flame-photometric method developed in the Research Institute for Telecommunication, the evaporation of barium and other alkaline earth metals from variously composed emission coatings on tungsten metal core was investigated. Evaporation curves showing the quantities of barium evaporating and those remaining on the cathode were obtained as functions of time. It was not determined whether the alkaline earth oxides evaporate in the form of oxide or in a metallic form.

2. The evaporation curves consisted of several characteristic sections. Independently of the kind of the metal core and of the composition of the emitting layer every evaporation curve showed an initial steep section, thus showing high evaporation. The intense initial evaporation lasted for about 2 hours and at this stage of evaporation the cathodes lost about $50 \div 60\%$ of their barium contents. After the termination of the initial stage several, gradually less steep sections followed. The initial very steep section can be observed at relatively low temperatures (950°C) while the later, relatively less steep section can be observed well at more or less higher temperatures, depending on the composition ($1200\text{--}1300^\circ\text{C}$).

3. Furthermore it could be proved at the tests that from the point of view of evaporation rate, emitting layers having a certain composition are essentially better than others. Such favourable emission layers are the triple carbonate containing zirconium oxide and the triple carbonate composed of 2 moles BaCO_3 : 1 mole SrCO_3 : 2 moles CaCO_3 . The relation between the life of the tubes observed on annealing and the evaporation rate is well proved by observation.

4. According to the measurements only the evaporation rate of pure BaCO_3 and of emitting material composed of 50% BaCO_3 , 45% SrCO_3 , 5% CaCO_3 is constant during annealing (except for the initial steep stage). This fact is understandable in the case of $\text{BaCO}_3 \rightarrow \text{BaO}$, because the material in question is homogeneous and the composition does not change during heating either physically, or chemically. In the case of the triple oxide containing 5% CaO it must be assumed that the composition of the evaporating material is identical with that of the solid phase and so this material is an azeotropic mixture.

5. Furthermore from the tests it could be ascertained that the 2 : 1 : 2 emitting material gives a high barium evaporation rate during the first stage of the heating. This evaporation rate strongly decreases during further annealing and settles at a very low value. This low value is smaller than the evaporation rate of the material containing zirconium dioxide.

6. Further tests proved that the initial evaporation of barium already appearing at a relatively low temperature (950°C) during which the cathodes lose 50—60% of their barium contents, can be ascribed to the reducing action of the carbon remaining from the nitrocellulose which is generally used in the actual method of oxide cathodes production. The later and less steep sections of the evaporation curve (observable chiefly at higher temperatures) can be explained by the higher vapour pressure of the free BaO generated at the decomposition of the carbonates and by the change in composition due to the evaporation.

7. In order to prove the statement announced in point 6, nitrocellulose-free coating material was prepared with an aqueous suspension of barium nitrate as a binder. With the cathodes coated in this way the initial evaporation section practically disappeared and the quantity of evaporated barium was reduced by more than one order of magnitude.

8. The results of the experiments justify the hope that the life of vacuum engineering products (fluorescent tubes, electron tubes) containing tungsten-core oxide cathodes can be increased and considerably improved as well.

9. The work described in the present paper also explains the mechanism of the life-increasing and evaporation-reducing action of the zirconium dioxide. The barium oxide freed at the decomposition of the carbonates is bound by the zirconium dioxide in the form of low barium-pressure basic barium zirconate, which is also more difficultly reduced by carbon.

10. The results of the measurements clearly show that nitrocellulose is not an ideal binder for oxide cathodes. The carbon remaining therefrom causes considerable loss of the active emitting material, this reduces the life, the evaporating barium contaminates the tube and its components. Therefore, it is advisable to search for other binders, and as such alkaline earth nitrates appear to be suitable.

11. All experiments of the author and his co-workers prove that the alkaline earth evaporates from oxide cathodes exclusively in the form of alkaline earth metal produced by reduction, even at a temperature (950° C) essentially higher than the normal operating temperature (750—850° C). The evaporation of alkaline earth oxides can be neglected at temperatures used in practice even in the case of tungsten cores.

12. Finally it can be stated that all circumstances appearing at the experiments, such as formation of free barium oxide, change of composition, presence of reducing agents, contribute to the more or less strong evaporation of the oxide cathode. Therefore, it is indicated to choose the composition of the oxide cathode in accordance with the least steep slope of curve 4, Fig. 4 (2 : 1 : 2) and as far as possible to deposit this material on the tungsten surface without nitrocellulose, or perhaps to preheat it in an inert atmosphere so that the carbon is combusted and a solid composition formed.

Acknowledgement

The author wishes to express his thanks to his co-workers. The flame-photometric method was developed by GY. GERGELY, F. P. VÁRADI and J. ÁDÁM, while improvement of the reliability of the method is the merit of A. BUDINCHEVITS, Mrs. I. BÍRÓ and J. ÁDÁM. For the great care taken with the measurements the author wishes to thank Mrs. É. BÍRÓ, L. EGRI and Mrs. V. VÁRALJAI.

REFERENCES

1. WINTER, E. (United Incandescent Lamp Works): Hungarian Patent No. 141.302; Austrian Patent No. 170.821.
2. CLAASSEN, A. — VEENEMANS, C. F.: *Z. Phys.*, **80** (1933), 342.
3. HERRMANN, G.: *Z. Phys. Chemie*, **35B** (1937), 298.
4. BLEWETT, J. P.—LIEBHAFSKY, H. A. — HENNELLY, E. F.: *J. Chem. Phys.*, **7** (1939), 478.
5. PLUMLEE, R. H. — SMITH, L. P.: *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), 811.
6. ALDRICH, L. T.: *J. Appl. Phys.*, **22** (1951), 1168.
7. PELCHOWITSCH, J.: *Philips Res. Rep.*, **9** (1954), 42.
8. BLEWETT, J. P.—JONES E. J.: *Phys. Rev.*, **50** (1936), 464.
9. BARTON—HELNWELL: *Phys. Rev.*, **27** (1926), 739.
10. JENKINS, R. O.—NEWTON, R. H. C.: *J. Sci. Instr.*, **26** (1949), 172.
11. MOORE, G. E.—ALLISON, H. W.: *Phys. Rev.*, **77** (1950), 246.
12. MOORE, G. E.—ALLISON, H. W.—STRUTHERS, J. O.: *J. Chem. Phys.* **18** (1950), 1572.
13. LEVERTON, W. F.—SHEPHERD, W. G.: *J. Appl. Phys.*, **23** (1952), 787.
14. ДЗАНТИЕВ, Б. Г.—МИЛЛЕР, В. Б.—НИКОНОВ, Б. П.: *Радиотехника и телемеханика* Том. III. 3. (1958), 431—433.
15. WOOTEN, L. A.—RUEHLE, A. E.—MOORE, G. E.: *J. Appl. Phys.*, **26** (1955), 44.
16. BECKER, J. A.: *Phys. Rev.*, **34** (1929), 1323.
17. BRODIE, J.—JENKINS, R. O.: *J. Electronics* **33** (1956), July.
18. BRODIE, J.—JENKINS, R. O.: *British J. Appl. Phys.*, **8** (1957), 27.
19. BRODIE, J.—JENKINS, R. O.: *J. Electronics* **34** (1957), 457.
20. GERGELY, GY. — VÁRADI, F. P.: *Acta Physica*, **5** (1955), 51.
21. ÁDÁM, J.—ETTRE, K.—GERGELY, GY. — VÁRADI, F. P.: *M. Kém. Folyóirat*, **62** (1956), 223.
22. ETTRE, K.—ÁDÁM, J.: *Z. Anal. Chem.*, **150** (1957), 105.
23. HEGEDŰS, A.—MILLNER, T.—PUNGOR, E.: *M. Kém. F.*, **59** (1953), 304.

24. ÁDÁM, J.—ETTRE, K.—GERGELY, GY.—VÁRADI, F. P.: *Z. Phys. Chem.*, **207** (1957), 70.
 25. ОСТАПЧЕНКО, Ф. П.: *Известия Академии Наук СССР*, **20** (1956) 1105.
 26. EISENSTEIN, A. S.: *J. Appl. Phys.*, **17** (1946), p. 654.
 27. ROOKSBY, H. P.—STEWART, E. G.: *Nature*, **157** (1946) 548; **159** (1947), 609.
 HUGHES, R. C.—COPPOLA, P. P.—EVANS, H. T.: *J. Appl. Phys.*, **23** (1952), 635—641.

OXYDKATHODEN AUF WOLFRAMBASIS MIT LANGER LEBENSDAUER

E. WINTER

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit behandelt die Ergebnisse von Untersuchungen über die Verdampfung von Oxydkathoden mit Wolframkern. Mit dem Flammenphotometer wurde die Verdampfung von Barium und den anderen Erdalkalimetallen aus Emissionsschichten von verschiedener Zusammensetzung untersucht. Die in Funktion der Zeit aufgezeichneten Verdampfungskurven enthalten Abschnitte mit verschiedener Verdampfungsgeschwindigkeit.

Der erste Abschnitt der bei 950° C aufgenommenen Verdampfungskurve ist steil und entspricht daher einer hohen Verdampfungsgeschwindigkeit. Die starke Verdampfung des Bariums dauert 1½—2 Stunden und während dieser Zeitspanne verlieren die Kathoden 60—70% ihres Bariumgehalts. Während des weiteren Glühens sinkt die Verdampfungsgeschwindigkeit bei 950° C annähernd auf Null. Es konnte festgestellt werden, daß die anfängliche starke Verdampfung von der Reduktion des Bariumoxyds durch Kohlenstoff verursacht wird, welcher aus der bei der Herstellung der Kathode als Bindemittel verwendeten Nitrozellulose stammt. Die Versuche zeigen, daß es ratsam ist, die Nitrozellulose durch ein anderes Bindemittel zu ersetzen. Es wurde gezeigt, daß bei Verwendung von Erdalkalinitraten als Bindemittel die anfängliche starke Verdampfung beseitigt werden kann.

Der Charakter der bei 950° C aufgenommenen Verdampfungskurven war unabhängig von der Zusammensetzung der Schicht. Bei höheren Temperaturen durchgeführte Messungen zeigten, daß die Verdampfungsgeschwindigkeit von Schichten mit gewissen Zusammensetzungen wesentlich niedriger ist als die Verdampfungsgeschwindigkeit der bisher üblichen Schichten.

In der Arbeit werden die Ergebnisse der Messungen an mehreren Emissionsschichten mit geringer Verdampfungsgeschwindigkeit mitgeteilt.

Diese Tatsachen sind von Bedeutung vom Standpunkt aller vakuumtechnischen Erzeugnisse, in die Oxydkathoden mit Wolframkern eingebaut sind. Die wichtigsten Vertreter dieser Gruppe sind derzeit die Leuchtröhren.

CATHODES À OXYDES DE LONGUE DURÉE DE VIE SUR SUPPORT EN TUNGSTÈNE

E. WINTER

RÉSUMÉ

L'auteur communique les résultats de recherches relatives à l'évaporation des cathodes sur support en tungstène. À l'aide d'un photomètre à flamme, on a examiné l'évaporation du baryum et des autres métaux alcalino-terreux à partir de revêtements émissifs de compositions différentes. Les diagrammes de l'évaporation en fonction du temps sont composés de sections correspondant à différentes vitesses d'évaporation.

La première section du diagramme d'évaporation enregistré à 950° C est raide et correspond donc à une vitesse d'évaporation élevée. L'évaporation intense du baryum dure de 1 h 30 à 2 heures et pendant ce temps, la cathode perd 60 à 70% de sa teneur en baryum. En continuant le chauffage, la vitesse d'évaporation tombe presque à zéro à la température de 950° C. Il a été constaté que l'évaporation initiale intense est causée par le carbone (provenant de la nitrocellulose utilisée comme liant à la fabrication de la cathode à oxyde), par suite de la réduction de l'oxyde de baryum. Les expériences montrent qu'il est utile de remplacer la nitrocellulose par un autre liant. Il a été prouvé qu'en utilisant comme liants des nitrates de métaux alcalino-terreux, on peut supprimer la forte évaporation initiale.

Le caractère du diagramme d'évaporation relevé à 950° C était indépendant de la composition de la couche. Des mesures à températures plus élevées ont montré que la vitesse d'évaporation de couches d'émission de certaines compositions est essentiellement plus petite que celle des couches émissives utilisées jusqu'à présent.

L'auteur expose les résultats des mesures faites avec plusieurs couches émissives de vitesse d'évaporation réduite.

Ces faits présentent de l'importance pour tous les produits de la technique du vide qui contiennent des cathodes à oxydes sur support en tungstène. Les plus importants de ces produits sont, à l'heure actuelle, les tubes fluorescents.

ОКСИДНЫЕ КАТОДЫ ВЫСОКОГО СРОКА СЛУЖБЫ ИЗ ВОЛЬФРАМА

Э. ВИНТЕР

РЕЗЮМЕ

В статье излагаются результаты исследований испарения оксидных катодов из вольфрама. С помощью пламенного фотометра было исследовано испарение бария и прочих щелочно-земельных металлов из эмиссионных слоев различного состава. Кривые, изображенные в функции времени, содержат участки, соответствующие различным скоростям испарения.

Первый участок кривой испарения, снятой при температуре 950° C, является крутым и, таким образом, соответствует высокой скорости испарения. Сильное испарение бария продолжается в течение 1,5 час; в течение этого времени катоды теряют до 60—70% общего содержания бария. Скорость испарения в течение дальнейшего накаливания при температуре 950° C упала прил. до нуля. Было установлено, что начальное сильное испарение вызвано восстановлением окиси бария углеродом, образующимся из нитроцеллюлозы, используемой при изготовлении оксидного катода в качестве связующего вещества. На основе опыта проведенных испытаний рекомендуется заменять нитроцеллюлозу другим связующим веществом. Показано, что, используя в качестве связующего вещества нитраты щелочно-земельных металлов, можно ликвидировать начальное сильное испарение.

Характер кривых испарения, снятых при температуре 950° C, был независимым от состава слоя. Измерения, проводившиеся при высоких температурах, показали, что скорость испарения эмиссионных слоев определенного состава значительно ниже скорости испарения применявшихся до сих пор слоев.

В сообщении излагаются результаты измерений, проведенных на ряде эмиссионных слоев с низкой скоростью испарения.

Эти факты играют определенную роль с точки зрения тех вакуумных приборов, которые содержат оксидные катоды из вольфрама. Их наиболее крупным представителем в настоящее время являются люминесцентные лампы.

BERECHNUNG DER WIRKUNGEN DES KRIECHENS MIT HILFE DER LAPLACESCHEN TRANSFORMATION

E. ÉLIÁS

SCHIFFSWERFT »GHEORGHU DEJ«, BUDAPEST

[Eingegangen am 7. März 1961]

Die Berechnung der Wirkungen des Kriechens erfordert die Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Durch die Anwendung der Laplaceschen Transformation wird die Lösung der Differentialgleichungen bei gleichzeitiger Befriedigung der Randbedingungen in hohem Maße vereinfacht. Bei der Berechnung der Wirkungen des Kriechens wird in der transformierten Gleichung der Elastizitätsmodul des Betons E_b durch die Funktion

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{P}}$$

ersetzt. Infolgedessen unterbleibt die Aufstellung und die Lösung der Differentialgleichungen, das genaue Ergebnis erhält man durch die Rücktransformation der üblichen Gleichungen der Festigkeitslehre.

Die Anwendung des behandelten Verfahrens wird vom Verfasser an Hand von vier Beispielen (mittiger Druck, reine Biegung, Temperaturänderung und Knickung) vorgeführt.

A) Allgemeiner Teil

1. Einleitung

In der Folge soll zur Berechnung der Wirkungen des Kriechens eine Berechnungsmethode vorgeführt werden, die mit einfachen Mitteln ein exaktes Ergebnis liefert.¹

1. 1. Das Kriechen

Das Kriechen ist eine physikalische Erscheinung, die darin besteht, daß der Betonkörper unter der Wirkung einer ständigen Belastung auch nach der der Belastung unmittelbar folgenden elastischen Formänderung nicht in den Ruhezustand gelangt, sondern die Formänderung mit einer monoton abnehmenden Tendenz weiter zunimmt, und wenn die von dem Auftreten

¹ Im vorliegenden Falle wird ein Ergebnis als exakt betrachtet wenn es im Vergleich zu den Ausgangsannahmen (Elastizitätsmodul, Kriechfunktion usw.) keinen Widerspruch enthält.

der Belastung gerechnete Zeit gegen unendlich hält, sich einem Endwert nähert.

Auch andere Baustoffe, namentlich der Stahl, zeigen ähnliche Erscheinungen; nötigenfalls kann auch hiermit gerechnet werden.

1. 2. Voraussetzungen

Im weiteren gelangen die nachstehenden vereinfachenden Voraussetzungen zur Anwendung:

1. Der Beton ist ein homogener und isotroper Baustoff.
2. Im Beton entsteht ausschließlich ein normaler (einachsiger) Spannungszustand.
3. Die elastische Formänderung des Betons entspricht dem HOOKEschen Gesetz.
4. Das Kriechen ist der elastischen Formänderung proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist durch die von der Zeit abhängige Kriechfunktion gegeben:

$$\varepsilon_{Kr} = \varepsilon_{el} \varphi(t).$$

Nötigenfalls wird die Kriechfunktion in der üblichen Form

$$\varphi = \varphi_m (1 - e^{-ct})$$

angewendet werden.

Im obigen Ausdruck bedeutet φ_m den Endwert des Kriechens.

1. 3. Die grundlegende Differentialgleichung des Kriechens

Die durch eine seit dem Zeitpunkt t_a wirkende Spannung $\Delta\sigma$ verursachte Gesamtformänderung, d. h. die Summe der elastischen Formänderung und des Kriechens, beträgt im Zeitpunkt $t > t_a$:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_b} [1 + \varphi(t) - \varphi(t_a)].$$

Wenn seit dem Zeitpunkt t ein Spannungszuwachs $\Delta\sigma$ wirkt, dann beträgt die Gesamtformänderung im Zeitpunkt $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t + \Delta t) &= \frac{\sigma}{E_b} [1 + \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t_a)] + \\ &+ \frac{\Delta\sigma}{E_b} [1 + \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]. \end{aligned}$$

Durch die Einführung der Bezeichnung

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$$

ergibt sich für den Formänderungszuwachs die folgende Formel:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sigma + \Delta\sigma}{E_b} \Delta\varphi + \frac{\Delta\sigma}{E_b}.$$

Für den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ und $\Delta\sigma \rightarrow 0$ erhält man für den Formänderungszuwachs die Formel:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_b} \left[\sigma \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\sigma}{dt} \right],$$

nachdem aber $d\varphi/dt$ überall existiert, übergeht die obige Formel in die Form

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{1}{E_b} \left[\sigma_b + \frac{d\sigma}{d\varphi} \right].}$$

Wenn die bezüglich der Kriechfunktion gültigen Einschränkungen vernachlässigt werden, schafft der obige Zusammenhang — allein auf Grund der im Punkt 1. 2. gestellten Voraussetzungen — eine Beziehung zwischen der veränderlichen Spannung und der spezifischen Längenänderung.

Aus diesem Grunde wird der obige Zusammenhang die grundlegende Differentialgleichung des Kriechens genannt.

1. 4. Das Schwinden

Die physikalische Erscheinung, die darin besteht, daß sich der frische Betonkörper ohne belastet zu sein verkürzt, wird Schwinden genannt. Diese Verkürzung nimmt nach der Erhärtung des Betons rapid zu, danach nähert sie sich dem Endwert $\varepsilon_{sch 0}$ mit einer monoton abnehmenden Tendenz. Es ist üblich, den zeitlichen Verlauf des Schwindens dem des Kriechens affin anzunehmen, d. h.:

$$\varepsilon_{sch 0}(t) = \frac{\varepsilon_{sch 0}}{\varphi_m} \varphi(t) = k\varphi(t).$$

Die Endwerte des Kriechens und des Schwindens φ_m und $\varepsilon_{sch 0}$ sind von der Qualität und dem Alter des Betons, ferner von den klimatischen Verhältnissen der Umgebung des Betonkörpers abhängig.

2. Die Gleichungen der Elastizitätslehre

Die Gleichungen der Elastizitätslehre können in zwei Gruppen zerlegt werden.

1. *Gleichgewichtsgleichungen*, die das Gleichgewicht der auf den Körper oder auf einen beliebigen Teil desselben wirkenden Kräfte ausdrücken.

2. *Verträglichkeitsgleichungen.* Diese drücken aus, daß von den vom Gesichtspunkte des Gleichgewichtes aus betrachtet möglichen Kräften (Außen- oder Innenkräften) an dem elastischen Körper, oder als Spannungszustände in dessen einzelnen Punkten, nur die Kräfte auftreten können, die Formänderungen hervorrufen, die mit der Kontinuität des elastischen Körpers verträglich sind.

Die erwähnten Gleichungen erscheinen auch in zusammengesetzter Form. Der Wert des Trägheitsmomentes ergibt sich z. B. aus Gleichungen, die einerseits das Gleichgewicht der Außen- und Innenkräfte, andererseits aber auch die Formänderungen des Querschnittes in Betracht ziehen.

Die Gleichungen der Elastizitätslehre sind im allgemeinen linear, d. h.

$$L(C_1 X_1 + C_2 X_2) = C_1 L X_1 + C_2 L X_2.$$

Die Form der linearen Gleichungen der Elastizitätslehre kann ganz allgemein wie folgt angegeben werden:

$$y = S \cdot x.$$

Hier bedeuten:

- x die belastende Kraft oder Bewegung;
- y die gesuchte Wirkung (Auflagerkraft, Zwang, Beanspruchung, Verschiebung, Spannung);
- S einen von den geometrischen und elastischen Verhältnissen des Trägers abhängigen Faktor (verallgemeinerter Übertragungsfaktor).

3. *Berechnungsmethoden des Kriechens*

Infolge des Kriechens kann innerhalb des Querschnittes eine Umgruppierung der Spannungen erfolgen. Bei unbestimmten Trägern kann die Umgruppierung der Formänderungen sogar eine Änderung der Spannungen zur Folge haben.

3. 1. *Genaue Methode*

Bei der üblichen genauen Untersuchung werden von dem als grundlegende Differentialgleichung des Kriechens genannten Zusammenhang ausgehend, unter Berücksichtigung der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen, Differentialgleichungen angeschrieben; danach werden deren die Randbedingungen ebenfalls befriedigende Lösungen aufgesucht. Mit Hilfe dieser Methode gelang es, sehr viele Aufgaben in geschlossener Form zu lösen. Der Nachteil der obigen Methode besteht darin, daß sie langwierig und schwer übersichtlich ist. Der statische Charakter der einzelnen Größen wird zwischen den Differentialgleichungen leicht undeutlich. Bei der Berechnung einer Spannung tritt z. B. nicht das Widerstandsmoment des Querschnittes, sondern treten solche

aus den geometrischen und Elastizitätsangaben des Betons und des Stahles zusammengesetzte Größen auf, deren statischer Charakter im Falle des gegebenen Problems nur schwer erkennbar ist.

3. 2. *Annähernde Methode*

Die äußerst verbreitete und in der Praxis fast ausschließlich angewandte annähernde Methode bewahrt die statischen Formen dadurch, daß bezüglich des Betons ein idealer Elastizitätsmodul eingeführt wird. Der Wert dieses idealen Elastizitätsmoduls beträgt in erster Annäherung

$$E_i = \frac{E_c}{1 + \varphi(t)}$$

Für aus homogenem Beton hergestellte Träger liefert diese Methode genaue Formänderungswerte (zur Berechnung der Beanspruchungen und Spannungen ist der Elastizitätsmodul unnötig). Im Falle inhomogener Träger, d. h. wenn der Träger auch Teile mit anderen Kriechmodulen enthält (Stahlbeton, Verbundkonstruktionen, Aufbetonierung), erfolgt eine Umgruppierung der Kräfteverteilung, die Glieder, deren Kriechfaktoren größer sind, werden entlastet, und die auf Grund des idealen Elastizitätsmoduls durchgeführte Berechnung liefert keine genaue Lösung.

Mit dem idealen Elastizitätsmodul durchgeführte Berechnungen ergeben in gewissen Fällen erstaunlich gute Ergebnisse. Da aber diese Methode doch unsicher ist, so ist es zweckmäßig, bei neuartigen Problemen das genaue Verfahren anzuwenden. Der ausgesprochene Vorteil des Annäherungsverfahrens besteht darin, daß es die statischen Anschauungen restlos bewahrt.

In der Folge wird eine Berechnungsmethode vorgeführt, die die statischen Anschauungen weitgehend bewahrt und nebenbei genaue Ergebnisse liefert.

Die Grundlage des zu erörternden Verfahrens bildet die Laplacesche Transformation.

4. *Die Laplacesche Transformation*

Die Laplacesche Transformation ist ein Verfahren, das zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten geeignet ist.²

Mit Hilfe der Laplaceschen Transformation wird eine Differentialgleichung samt ihren Anfangsbedingungen in eine algebraische Gleichung übergeführt.

² In der vorliegenden Studie wird von den verschiedenen Definitionen, die von K. W. WAGNER in seinem Werke »Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation« [3] gebrauchte, angewendet werden.

Die angewendeten Sätze und Formeln sind die folgenden.

Es bedeute $F(t)$ eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen, die für negative Werte von t den Nullwert annimmt. Im übrigen sind weder Kontinuitäts-, noch Differenzierbarkeitsbedingungen vorhanden.

1. Unter der Laplaceschen Transformation der Funktion $F(t)$ ist die folgende Funktion zu verstehen:

$$LF(t) = f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot F(t) dt,$$

wo die neue unabhängige Veränderliche p den Parameter der Transformation bedeutet.

2. Die Umkehrung der Transformation ist

$$F(t) = L^{-1}f(p).$$

3. Die Transformation ist eine lineare Operation, daher gilt:

$$L[C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t)] = C_1 LF_1(t) + C_2 LF_2(t).$$

4. Eine partielle Integrierung liefert das folgende Ergebnis:

$$LF'(t) = pLF(t) - pF(0),$$

wo $F(0)$ den Wert der Funktion $F(t)$ an der Stelle $t = 0$ bedeutet.

$$5. \quad L[t \cdot F(t)] = \frac{f'(p)}{p} = f'(p).$$

$$6. \quad Lt^n = \frac{n!}{p^n}, \text{ für } n = 0 \text{ ist } Lt^0 = L1 = 1$$

$$7. \quad Le^{\pm at} = \frac{p}{p \mp a}, \quad L \frac{1 - e^{-at}}{a} = \frac{1}{p + a}.$$

8. Zur Rücktransformation von Produkten dient der Faltung-Satz:

$$LF_1(t) = f_1(p) \text{ und } LF_2(t) = f_2(p),$$

$$L^{-1} \left(\frac{f_1(p) \cdot f_2(p)}{p} \right) = F_1 * F_2 = F_2 * F_1,$$

wo

$$F_1 * F_2 = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) dt$$

ist. In anderer Form:

$$L^{-1}[f_1(p) \cdot f_2(p)] = \frac{d}{dt} [F_1 * F_2].$$

9. Ähnlichkeitssatz:

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} f(p).$$

Im weiteren werden hauptsächlich solche Funktionen vorkommen, deren Transformierte mit Hilfe der im Punkt 7 gegebenen Zusammenhänge gebildet werden können.

10. Zur Rücktransformation von rationalen gebrochenen Funktionen dient HEAVISIDES Entwicklungssatz. Wenn

$$f(p) = \frac{H(p)}{G(p)}$$

ist, wo $H(p)$ und $G(p)$ rationale ganze Funktionen der Veränderlichen sind, dann gilt

$$L^{-1}f(p) = \frac{H(0)}{G(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{H(p_i)}{p_i G'(p_i)} e^{p_i t},$$

wo p_1, \dots, p_n die einfachen Wurzeln der Gleichung $G(p) = 0$ sind.

Der obige Zusammenhang wird *Heavisides Entwicklungssatz* genannt. Im Laufe der Behandlung des Kriechens sind die soeben erörterten Sätze zur Lösung des überwiegenden Teiles der möglichen Fälle hinreichend. Für die Rücktransformation komplizierterer Gleichungen findet man in der Fachliteratur weitere Methoden.

5. Anwendung der Transformation

Die grundlegende Differentialgleichung des Kriechens ist

$$\frac{d\varepsilon_b}{d\varphi} = \frac{1}{E_b} \left(\sigma_b + \frac{d\sigma_b}{d\varphi} \right).$$

Wenn im gegebenen Zusammenhang φ als unabhängige Veränderliche angesehen wird, dann ist nach Punkt 4 des 4. Absatzes die Transformierte der obigen Differentialgleichung:

$$pL\varepsilon_b - p \cdot \varepsilon_b(0) = \frac{1}{E_b} [L\sigma_b + pL\sigma_b - p \cdot \sigma_b(0)],$$

woraus

$$L\sigma_b = \frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}} L\varepsilon_b - \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} \left[\frac{\sigma_b(0)}{E_b} - \varepsilon_b(0) \right]$$

folgt. Nachdem im allgemeinen anfangs $t = 0$ ist, und so im Zeitpunkt $\varphi = 0$

der Zusammenhang $\sigma_b(0) = E_b \varepsilon_b(0)$ gilt, entfällt das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung, die daher die folgende Form annimmt:

$$L\sigma_b = \frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}} L\varepsilon_b.$$

Das erhaltene Ergebnis drückt die Tatsache aus, daß zwischen den Transformierten der spezifischen Längenänderung und den der Spannung ein mit dem HOOKESchen Gesetz formell identischer Zusammenhang besteht, wenn der Elastizitätsmodul des Betons durch

$$1 + \frac{1}{p}$$

dividiert wird. Es ist nicht überflüssig schon jetzt zu bemerken, daß die Größe

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

— die dem idealen Elastizitätsmodul formell sehr ähnlich ist und diese Ähnlichkeit durch die Tatsache noch erhöht wird, daß nach Punkt 6 des 4. Absatzes $1/p$ gerade die Transformierte von $\eta(t)$ darstellt — keine Zahl sondern eine Funktion ist, die zwischen den Transformierten der Funktionen σ und ε einen Zusammenhang herstellt.

Die Gleichungen der Festigkeitslehre sind linear, daher kann die Laplace'sche Transformation gliedweise angewendet werden. Die Konstruktion einer Gleichgewichts- oder Formänderungs- bzw. Differentialgleichung ist daher in Bezug auf die Transformation invariant. Bei der Transformation treten an die Stelle von σ und ε deren Transformierte, anstatt E_b aber

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

in die Gleichungen. Im Zuge der Ordnung der Gleichungen gelangt man zu Gleichungen von bekannten Formen (z. B. Trägheitsmoment), in denen die belastenden Kräfte und Bewegungen sowie deren sämtliche Wirkungen durch ihre Transformierten ersetzt werden, während die elastischen Angaben des Trägers unverändert bleiben, nur für E_b ist der Ausdruck

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

einzusetzen.

Die Rücktransformation der Gleichungen liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen den belastenden Kräften und Bewegungen, ferner zwischen deren Wirkungen.

Folglich ist die allgemeine Transformierte der Elastizitätsgleichungen bei gleichzeitiger Berücksichtigung des Kriechens:

$$\boxed{Ly = S(p)Lx}.$$

Die Berechnungsmethode des Kriechens mit Hilfe der Laplaceschen Transformation ist daher mit der Berechnung unter Benützung des idealen Elastizitätsmoduls formell identisch. Das Ergebnis muß aber nachträglich rücktransformiert werden.

6. Einige Bemerkungen

6. 1. Das Schwinden

Das Schwinden ändert die Länge des Betonkörpers ebenso wie eine auf ihn wirkende Druckkraft $N_{\text{sch}} = \varepsilon_{\text{sch}} \cdot E_b \cdot F_b$, wo F_b die Fläche des Betonquerschnittes bedeutet.

Nachdem $\varepsilon = k \varphi(t)$ ist (Siehe Absatz 1, Punkt 4), ist

$$N_{\text{sch}} = k \cdot E_b \cdot F_b \cdot \varphi(t)$$

und

$$LN_{\text{sch}} = k \frac{E_b \cdot F_b}{1 + \frac{1}{p}} \cdot L\varphi;$$

$L\varphi = 1/p$ (siehe den Zusammenhang in Absatz 4, Punkt 6). Daher ist

$$LN_{\text{sch}} = k \frac{F_b \cdot E_b}{1 + p}.$$

Folglich kann angenommen werden, daß auf den Gesamtträger die obige Kraft N_{sch} wirkt, aus der die Beton- und Stahlbeanspruchungen bzw. Spannungen berechnet werden können. Es ist selbstverständlich, daß von der Betonbeanspruchung die Kraft N_{sch} abgezogen werden muß, da sie bloß eine fiktive Kraft ist; die durch ihre Wirkung verursachte Verkürzung ist mit der durch das Schwinden verursachten Längenänderung identisch.

6. 2. Zeitlich veränderliche belastende Kraft oder Bewegung

Im Falle einer zeitlich veränderlichen belastenden Kraft oder Bewegung bedeutet $x(t)$ die zeitlich veränderliche Belastung. In der Transformation wurde

φ als unabhängige Veränderliche angesehen, daher muß auch die Belastungsfunktion durch diese Veränderliche ausgedrückt werden. D. h.

$$x(t) = x[t(\varphi)] \text{ oder kurz } x(\varphi).$$

Wenn die belastende Kraft oder Bewegung konstant ist, dann ist nach dem Zusammenhang in Absatz 4, Punkt 6

$$Lx = x$$

und die Elastizitätsgleichung lautet

$$Ly = S(p)x.$$

Nach Rücktransformation geht obige Gleichung in die Form

$$y(\varphi) = A(\varphi) \cdot x,$$

über, wo $A(\varphi) = L^{-1}S(p)$ ist.

Im Falle einer veränderlichen Belastung ist die Elastizitätsgleichung

$$Ly = S(p)Lx.$$

Nach einer unter Anwendung des Faltung-Satzes (siehe den Zusammenhang in Absatz 4, Punkt 8) durchgeführten Rücktransformation erhält man die Gleichung

$$y = \frac{d}{d\varphi} [A(\varphi) * x(\varphi)].$$

6. 3. Konstruktionen, die Betone enthalten, deren Kriechendwerte verschieden sind

In diesem Falle sind verschiedene Funktionen $\varphi = \varphi(t)$ vorhanden. Vorausgesetzt, daß der zeitliche Ablauf dieser Funktionen identisch ist, erscheint es zweckmäßig, die Zeitfunktion

$$\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi_m}$$

als unabhängige Veränderliche zu betrachten, deren Endwert für alle Betonarten die Einheit ist.

Die grundlegende Gleichung des Kriechens nimmt in diesem Falle die Form

$$L\sigma_b = \frac{E_b}{1 + \frac{\varphi_m}{p}} L\varepsilon_b$$

an, wo φ_m der Kriechfaktor der einzelnen Betonarten ist.

6. 4. Die Anwendung des Entwicklungssatzes

Bei der Berechnung des Kriechens kann die rückzutransformierende Funktion in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle in der Form einer rationalen gebrochenen Funktion angeschrieben werden. Es folgt aus dem physikalischen Wesen des Prozesses (Beschränkung), daß die Gradzahl des Zählerpolynoms der des Nennerpolynoms gleich, oder kleiner als die Gradzahl des letzteren ist. In diesem Falle kann der Entwicklungssatz in der folgenden Form angeschrieben werden

$$L^{-1}f(p) = f(\infty) - \sum_{i=1}^n \frac{H(p_i)}{p_i G'(p_i)} (1 - e^{p_i \varphi}).$$

Der Satz ist bloß im Falle einfacher Wurzeln gültig, kann aber für den Fall mehrfacher Wurzeln leicht erweitert werden.

Nach dem Zusammenhang in Absatz 4, Punkt 9 ist $f(\infty) = F(0)$. Daher ist das erste Glied auf der rechten Seite des obigen Ausdruckes der Wert der gesuchten Wirkung im Zeitpunkt $t = 0$, $\varphi = 0$. Das zweite Glied, das die Form einer Summe hat, ist die Änderung der Wirkung infolge des Kriechens.

6. 5. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Die charakteristische Gleichung, die in der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eine wichtige Rolle spielt, tritt bei der Anwendung der Transformation ebenfalls auf. Heavisides Entwicklungssatz liefert die rückzutransformierende Funktion in der Form einer rationalen gebrochenen Funktion. Zur Zerlegung in elementare Brüche benötigt man die Bestimmung der Wurzeln des Nennerpolynoms. Das Nennerpolynom ist mit der charakteristischen Gleichung des Systems der Differentialgleichungen identisch. Wenn man erwägt, daß diese Gleichungen einen physikalischen Inhalt ausdrücken, so können betreffs ihrer Wurzeln gewisse Feststellungen gemacht werden, ohne daß hierbei die Allgemeinheit eingeschränkt würde.

6. 5. 1. Im Sinne der Arbeitsgleichungen ist die Matrix eines Gleichungssystems, das einen elastischen Zusammenhang ausdrückt, symmetrisch oder kann auf solche Weise symmetrisch gestaltet werden, daß die Glieder der Hauptdiagonalen den Elastizitätsmodul des Betons enthalten. Sämtliche Glieder der Matrix sind reell.

Nach der Matrix-Algebra sind in diesem Falle sämtliche Eigenwerte der betreffenden Matrix reell.

Die Berücksichtigung des Kriechens durch die Laplacesche Transformation ändert die Form der Gleichungen nicht, daher sind die Eigenwerte von der Form

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p_i}}$$

sowie die von p_i ebenfalls reell.

6. 5.2. Wenn im Zusammenhang von der Form $y = Sx$ der Wert des Übertragungskoeffizienten S unendlich wird, so bedeutet das, daß eine endliche belastende Kraft oder Bewegung eine unendliche Wirkung hervorrufen kann.

Aus dem physikalischen Wesen der Erscheinung folgt, daß für in der Wirklichkeit mögliche, d. h. positive Werte von E_b der soeben geschilderte Zustand nicht eintreten kann. Daher ist das Verschwinden des Nenners in einer rationalen gebrochenen Funktion nur im Falle eines negativen

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

möglich, d. h. für $-1 < p \leq 0$.

Für Konstruktionen, die Betone von verschiedenen Kriechendwerten enthalten, ist nach Absatz 6, Punkt 3 die unabhängige Veränderliche für alle Betonarten einheitlich die Zeitfunktion $\varphi_0(t)$, deren Endwert die Einheit ist. In diesem Falle verlangt das Negativwerden des Ausdruckes

$$\frac{E_b}{1 + \frac{\varphi_m}{p}}$$

daß $\varphi_m \max < p < -\varphi_m \min$ sei, wo $\varphi_m \max$ bzw. $\varphi_m \min$ den größten bzw. den kleinsten Kriechendwert der Baustoffe bedeuten, die in der Konstruktion vorkommen.

7. Statisch unbestimmte Träger

Nachdem die Zusammenhänge, die die Formänderungen der Konstruktion beschreiben, den Zusammenhängen, die das Kriechen nicht in Betracht ziehen, formell gleichen, kann die Bestimmung der in statisch unbestimmten Trägern auftretenden Zwangskräfte mit Hilfe jeder der üblichen Methoden durchgeführt werden.

Die unbestimmten Zwangskräfte können von belastenden Kräften oder Bewegungen herrühren.

7. 1. Der Träger ist durch belastende Kräfte beansprucht

Im Falle der Anwendung der Kraftmethode können die Belastungs- und Einheitskoeffizienten in der üblichen Weise dargestellt werden. Falls der Träger homogen ist, d. h. wenn er ausschließlich aus Beton besteht, oder einen konstanten Querschnitt hat, z. B. eine mit einem Walzträger zusammenwirkende Stahlbetonplatte, können aus den Bedingungsgleichungen der Elastizitätsmodul bzw. die Größen EJ oder EF eliminiert werden. In diesem Falle sind die Zwangskräfte von der Steifigkeit des Trägers unabhängig, daher ändert das Kriechen die Kräfteverteilung des Trägers nicht.

Die Kräfteverteilung des Trägers ändert sich auch dann nicht, wenn die Steifigkeiten der einzelnen Trägerabschnitte in der transformierten Form, die das Kriechen in Betracht zieht, bloß durch einen konstanten Faktor voneinander abweichen, da in diesem Falle eine vergleichende Steifigkeit (EJ oder EF) aus den Gleichungen eliminiert werden kann.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung von Colonettis erstem Satz, der für homogene Betonträger gilt [2], [3].³

7. 2. Der Träger ist durch belastende Bewegungen beansprucht

Belastende Bewegungen konstanten Charakters sind von der Steifigkeit des Trägers unabhängig, daher können die Steifigkeiten aus den Bedingungsgleichungen nicht eliminiert werden. Folglich werden die durch die belastenden Bewegungen verursachten Beanspruchungen durch das Kriechen beeinflusst. Dieser Satz ist mit Colonettis zweitem Satze identisch [2].⁴

8. Die Genauigkeit der Berechnungsmethode

Die mit Hilfe des Laplaceschen Operators durchgeführte Berechnung der Wirkung des Kriechens ist der auf der Grundlage des idealen Elastizitätsmoduls durchgeführten ähnlich, sie scheint daher geeignet zu sein, um mit ihrer Hilfe auf die Genauigkeit der Annäherung schließen zu können. Wenn man in der Formel $Ly = S(p)Lx$ die Bezeichnungen der Transformation wegläßt und für die Größe $1/p$ ihre Oberfunktion φ einsetzt, übergeht man zum Ausdruck $y = S(1/\varphi)x$, d. h. man gelangt zur Berechnung mit Hilfe des idealen Elastizitätsmoduls. Die Genauigkeit der Annäherung hat ihren Ursprung darin, daß die Operation der Transformation in Anbetracht der Reihenfolge nur mit einer linearen Funktion vertauschbar ist, für eine beliebige Funktion besteht

³ Colonettis erster Satz lautet: »Wirken auf den statisch unbestimmten Träger Dauerlasten, dann ändert das Kriechen, das durch diese hervorgerufen wird, den Spannungszustand nicht, nur die Verformungen werden größer.«

⁴ Colonettis zweiter Satz lautet: »Wirken auf den statisch unbestimmten Träger dauernd von der Zeit abhängige oder unabhängige belastende Bewegungen, dann ändert das durch diese hervorgerufene Kriechen den Spannungszustand, die Formänderungen werden aber nicht verändert.«

die Vertauschbarkeit nicht. Die Funktion $S(p)$ ist aber im allgemeinen eine rationale gebrochene Funktion.

Im weiteren wird ein die Genauigkeit der mit Hilfe des idealen Elastizitätsmoduls durchgeführten Berechnung betreffender Satz abgeleitet.

Es sei ψ eine reelle Zahl, die dazu geeignet ist, daß wenn man sie mit dem Kriechwert φ multipliziert, die Berechnung mit Hilfe des idealen Elastizitätsmoduls fallweise ein genaues Ergebnis liefert. Nach der hier verwendeten Bezeichnung ist $LF(t) = f(p)$.⁵

Wenn im Sinne der Bedingung für p der Ausdruck $1/(\varphi \cdot \psi)$ eingesetzt wird, dann ist

$$f\left(\frac{1}{\varphi \cdot \psi}\right) = F(\varphi).$$

Aus dem physikalischen Wesen des Kriechens folgt, daß im Falle einer konstanten Wirkung die Funktion $F(t)$ monoton und beschränkt ist.

Es sei angenommen, daß sie monoton zunehmend ist. In diesem Falle ist die Gleichung der Tangente der Funktion $F(t)$ im Punkte $F(\varphi)$ $a + b \cdot t$, wo b positiv ist. Aus Bild 1 ist ersichtlich, daß $a + b \cdot t \geq F(t)$ ist.

Nachdem e^{-tp} positiv ist (p ist reell und positiv), so ist

$$p \cdot \int_0^{\infty} e^{-tp} (a + b \cdot t) dt > p \cdot \int_0^{\infty} e^{-tp} F(t) dt,$$

das heißt,

$$L(a + b \cdot t) > LF(t),$$

$$L(a + b \cdot t) = La + Lb \cdot t = a + \frac{b}{p},$$

$$a + \frac{b}{p} > LF(t) = f(p).$$

Wenn nach der gestellten Bedingung p durch $1/(\varphi \cdot \psi)$ ersetzt wird, erhält man:

$$a + b\varphi\psi > f\left(\frac{1}{\varphi \cdot \psi}\right),$$

da aber $a + b\varphi = F(\varphi)$ ist, so gilt

$$F(\varphi) + b\varphi(\psi - 1) > F(\varphi) \text{ und } b\varphi(\psi - 1) > 0.$$

⁵ In der Operation der Transformation wird φ durch eine allgemeine Veränderliche t ersetzt. Dies ist notwendig, um den untersuchten Kriechwert φ (der nicht unbedingt den Endwert bedeutet) von der unabhängigen Veränderlichen des bestimmten Integrals zu unterscheiden. Dies ist statthaft, nachdem $LF(t)$ bloß eine Funktion von p ist.

Falls die Funktion $F(t)$ monoton zunehmend ist, ist b positiv und dann ist $\psi > 1$. Für eine monoton abnehmende Funktion $F(t)$ ist die Ableitung ähnlich und dann gilt ebenfalls $\psi > 1$.

Es kann festgestellt werden, daß die Berechnung mit Hilfe des idealen Elastizitätsmoduls zwar eine gute Annäherung liefert, doch geht sie auf Kosten der Sicherheit.

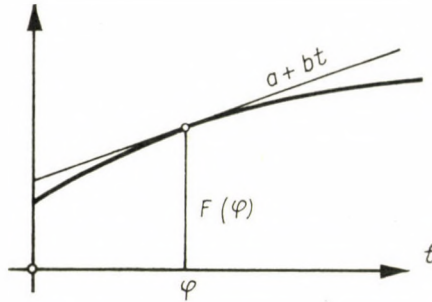


Abb. 1

Wie groß ψ sein müßte, um in jedem Falle ein der Sicherheit entsprechendes Ergebnis zu erhalten, kann nicht vorhergesagt werden.

9. Spektrale Zerlegung

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes kann die durch das Kriechen verursachte Wirkung als eine Summe einfacher Exponentialfunktionen dargestellt werden. Eine einfache Exponentialfunktion beschreibt aber, wie das aus dem ersten Beispiel ersichtlich ist, auch das Kriechen einer auf mittigen Druck beanspruchten Stahlbetonsäule mit symmetrischer Bewehrung. Dies kann auch so formuliert werden, daß ein Verbundträger mit Hilfe des Entwicklungssatzes in einfache, auf Druck beanspruchte Säulen zerlegt werden kann. Ein auf Biegung beanspruchter Träger wird von BUSEMANN auf ähnliche Weise in zwei Säulen zerlegt [4].

Wenn sich die Belastung in der Zeit ändert, hört das diskrete Spektrum auf, und man gelangt zum unendlichen Spektrum, das durch den Entwicklungssatz ebenfalls geliefert wird (der Satz ist auch für transzendente Funktionen gültig). In gewissen Fällen kann die Hilfe eines anderen Rücktransformationsverfahrens in Anspruch genommen werden.

B) Vorführung der Berechnungsmethode an Hand einzelner Beispiele

Im weiteren wird das behandelte Verfahren an Hand einiger Beispiele erläutert. Es handelt sich dabei nicht um eine vollkommene Darstellung, sondern die Beispiele sollen nur dazu dienen, um auf den verschiedenen Gebieten der

Anwendung auf einzelne Kunstgriffe der Verwendung der Methode hinzuweisen. Im Mittelpunkt stehen nicht die Ergebnisse — ein Großteil der Probleme ist ja schon längst gelöst —, sondern das Verfahren als solches.

Die Methode ist geeignet, in einzelnen Fällen Formeln von allgemeiner Gültigkeit zu liefern. Nebenbei kann sie auch zur Lösung numerischer Aufgaben zweckmäßig verwendet werden.

1. Der mittige Druck

Es wird der Fall eines symmetrisch bewehrten Stahlbetonquerschnittes behandelt. Bezeichnungen:

- F_b Fläche des Betonquerschnittes,
- F_s Gesamtfläche der Querschnitte der Stahleinlagen,
- E_b Elastizitätsmodul des Betons,
- E_s Elastizitätsmodul des Stahles,
- σ_b Betonspannung,
- σ_s Stahlspannung,
- P konstante Druckkraft,
- $n = E_s/E_b$.

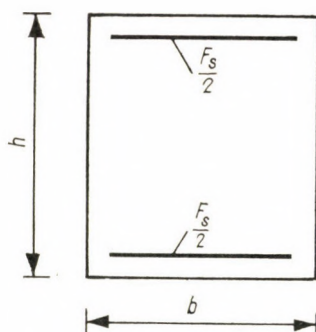


Abb. 2

1. 1. Die Betonspannung

Die Transformierte der Betonspannung wird in der für den Verbundquerschnitt üblichen Weise angeschrieben, selbstverständlich wird aber E_b durch

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

und n durch

$$n \left(1 + \frac{1}{p} \right)$$

ersetzt.

$$L\sigma_b = \frac{P}{F_b + n \left(1 + \frac{1}{p}\right) F_s} = \frac{P}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_s} P$$

und

$$\sigma_b = P \cdot L^{-1} \frac{P}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_s}.$$

Nach dem Entwicklungssatz in Absatz 4, Punkt 10 ist

$$L^{-1} f(p) = f(\infty) - \sum_{i=1}^n \frac{H(p_i)}{p_i G'(p_i)} (1 - e^{-p_i \varphi}).$$

Nach dem Zusammenhang in Absatz 4, Punkt 9 ist $f(\infty) = F(0)$, d. h. der Wert der gesuchten Wirkung ohne Berücksichtigung des Kriechens:

$$\sigma_b = \frac{P}{F_b + n \cdot F_s} - \frac{P \cdot p_1}{p_1 (F_b + n \cdot F_s)} (1 - e^{p_1 \varphi});$$

$$p_1 = - \frac{n \cdot F_s}{F_b + n \cdot F_s},$$

$$\sigma_b = \sigma_0 \cdot e^{p_1 \varphi}, \quad \sigma_{b0} = \frac{P}{F_b + n \cdot F_s}.$$

1. 2. Spannung der Stahleinlagen

$$L\sigma_s = n \left(1 + \frac{1}{p}\right) L\sigma_b = \frac{pn(p+1)}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_s},$$

$$\sigma_s = \sigma_{s0} - \frac{pn(p+1)}{p_1 (F_b + n \cdot F_s)} (1 - e^{p_1 \varphi}) =$$

$$= \sigma_{s0} \left[1 - \frac{p_1 + 1}{p_1} (1 - e^{p_1 \varphi}) \right].$$

1. 3. Die Wirkung des Schwindens

$$LN_{\text{sch}} = \frac{k \cdot F_b \cdot E_b}{1 + p},$$

$$\begin{aligned} L\sigma_b &= \frac{k \cdot F_b \cdot E_b}{1 + p} \cdot \left[\frac{p}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_b} - \frac{1}{F_b} \right] = \\ &= \frac{k \cdot F_b \cdot E_b}{F_b} \cdot \frac{1}{1 + p} - \frac{F_b p - (F_s + n \cdot F_s) - n \cdot F_s}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_s} = \\ &= - \frac{k \cdot E_b \cdot n \cdot F_s}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{k \cdot E_b \cdot n \cdot F_s}{p_1 (F_b + n \cdot F_s)} (1 - e^{p_1 \varphi}) = -k \cdot E_b (1 - e^{p_1 \varphi}). \\ L\sigma_s &= \frac{n \cdot F_b \cdot E_b}{1 + p} \cdot \frac{n(p+1)}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_s} = \\ &= k \cdot F_b \cdot E_b \cdot \frac{n}{(F_b + n \cdot F_s)p + n \cdot F_s}, \\ \sigma_s &= -k \cdot F_b \cdot E_b \cdot \frac{n}{p_1 (F_b + n \cdot F_s)} (1 - e^{p_1 \varphi}) = \\ &= -\frac{k \cdot F_b \cdot E_b}{F_s} (1 - e^{p_1 \varphi}).\end{aligned}$$

Die Richtigkeit der Ergebnisse kann leicht nachgewiesen werden, indem man das Problem mit Hilfe von Differentialgleichungen löst.

2. Die reine Biegung

Vor der Erörterung der reinen Biegung ist zweierlei zu bemerken.

1. Die Berechnung des Kriechens mit Hilfe der Laplaceschen Transformation wird unter Benutzung von Formeln der Statik und der Festigkeitslehre durchgeführt.

Derart kann die Lösung der einzelnen Probleme, so z. B. auch die des Problems der reinen Biegung unter Benutzung von mehreren Methoden in Angriff genommen werden. Die Schilderung dieser Methoden, die sich voneinander nur in der Gruppierung der Zusammenhänge der Statik und der Festigkeitslehre unterscheiden, kann nicht den Gegenstand der gegenwärtigen Untersuchungen bilden; daher wird jetzt willkürlich die von B. FRITZ [6] zur Berechnung von Verbundkonstruktionen benutzte Methode als Grundlage der Transformation betrachtet werden. Es ist selbstverständlich, daß irgendwelche andere Methoden für die Transformation ebenfalls geeignet sein und zu identischen Ergebnissen führen können.

2. Durch die Transformation wird die Funktion $F(\varphi)$, die eigentlich eine Zeitfunktion ist, in eine Funktion $f(p)$ mit dem Argument p übergeführt. Bei der Untersuchung des Kriechens wird der Elastizitätsmodul des Betons mit der Funktion

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

in Betracht gezogen, während das Verhältnis des Elastizitätsmoduls des Stahles zu dem des Betons

$$\frac{E_s \left(1 + \frac{1}{p}\right)}{E_b}$$

beträgt. Wenn das Elastizitätsverhältnis des Stahles zum Beton, ohne das Kriechen in Betracht zu ziehen, mit n_0 bezeichnet wird, dann ist im Falle, wenn das Kriechen ebenfalls berücksichtigt wird,

$$n(p) = n_0 \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Im weiteren wird für $n(p)$ nur die Bezeichnung n verwendet werden, ohne dabei zu vergessen, daß n eine Funktion von p ist. Falls die Transformation mit dem Parameter » n « durchgeführt wird, ist $Ly = S(n)Lx$. Bei der Rücktransformation muß aber der Zusammenhang

$$n = n_0 \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

berücksichtigt werden. Dies führt zum folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n - n_1} &= \frac{1}{n_0 \left(1 + \frac{1}{p}\right) - n_1} = \frac{p}{(n_0 - n_1)p + n_0} = \\ &= \frac{1}{n_0 - n_1} \cdot \frac{p}{p + \frac{n_0}{n_0 - n_1}}; \\ L^{-1} \frac{1}{n - n_1} &= \frac{1}{n_0 - n_1} \cdot L^{-1} \frac{p}{p + \frac{n_0}{n_0 - n_1}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{n_0}{n_0 - n_1} \varphi}}{n_0 - n_1}. \end{aligned}$$

Natürlich kann auch ein anderer geeigneter Parameter gewählt werden, z. B. der Abstand des Schwerpunktes des Verbundprofils vom Schwerpunkt des Stahles oder des Betonquerschnittes. Die Untersuchung eines auf Biegung beanspruchten Querschnittes mit BUSEMANN'S Nullpunktsmethode des Kriechens [4] kann auf diesen Fall zurückgeführt werden. Die Nullpunkte des Kriechens bilden die Polpunkte der Transformation.

Die Wirkung des Kriechens auf den Querschnitt eines durch ein äußeres Moment belasteten Trägers wird unter Benutzung des von B. FRITZ entwickelten Verfahrens [6] vorerst ganz allgemein gelöst.

Es bezeichne:

- M das auf den Querschnitt wirkende Biegemoment,
 F_s die Querschnittsfläche des Stahlträgers,
 J_s das Trägheitsmoment des Stahlträgers,
 F_b die Fläche des Betonquerschnittes,
 J_b das Trägheitsmoment des Betonquerschnittes,
 a den Abstand des Schwerpunktes des Betonquerschnittes von dem des Stahlquerschnittes,
 $e_{bu}, e_{bo}, e_{su}, e_{so}$ die Abstände der unteren und oberen Randfasern der Beton- und Stahlquerschnitte von den betreffenden Schwerpunkten.

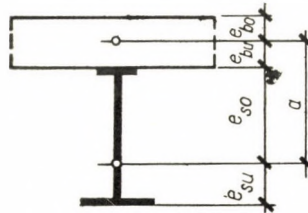


Abb. 3

Nach der Methode von B. FRITZ [6] werden die tatsächlichen Elastizitätsmodulwerte für den Beton durch l und für den Stahl durch n ersetzt:

$$K = \frac{F_b \cdot F_s \cdot n}{F_b + F_s \cdot n}; \quad S = J_b + J_s \cdot n + K \cdot a^2.$$

Von dem auf den Querschnitt wirkenden Biegemoment entfällt:

$$\text{auf den Beton} \quad M_b = M \cdot \frac{J_b}{S},$$

$$\text{auf den Stahl} \quad M_s = M \cdot \frac{J_s \cdot n}{S}.$$

$$\text{Die Zug-Druckkraft beträgt } N = M \cdot \frac{K \cdot a}{S},$$

$$\begin{aligned} M_b &= M \cdot \frac{J_b}{J_b + J_s \cdot n + K \cdot a^2} = \\ &= M \cdot \frac{J_b (F_b + F_s \cdot n)}{(J_b + J_s \cdot n) (F_b + F_s \cdot n) + F_b \cdot F_s \cdot a^2 \cdot n}. \end{aligned}$$

Nach algebraischer Ordnung erhält man für den Nenner des obigen Bruches die Form:

$$\begin{aligned} J_s \cdot F_s \cdot n^2 + (J_b \cdot F_s + J_s \cdot F_b + F_b \cdot F_s \cdot a^2) n + J_b \cdot F_b &= \\ = F_s^2 \cdot n^2 \cdot i_s^2 + F_s \cdot n \cdot F_b (i_b^2 + i_s^2 + a^2) + F_b^2 \cdot i_b^2 &= \\ = F_b^2 \left\{ \left(\frac{F_s}{F_b} \cdot n \right)^2 \cdot i_s^2 + \left(\frac{F_s}{F_b} \cdot n \right) (i_b^2 + i_s^2 + a^2) + i_b^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners erhält man durch die Substitution

$$x = \frac{F_s}{F_b} \cdot n$$

aus der folgenden quadratischen Gleichung:

$$x^2 \cdot i_s^2 + x (i_b^2 + i_s^2 + a^2) + i_b^2 = 0.$$

Die Wurzeln der obigen Gleichung sind:

$$x_{1,2} = \frac{-(i_b^2 + i_s^2 + a^2) \pm \sqrt{(i_b^2 + i_s^2 + a^2)^2 - 4 \cdot i_b^2 \cdot i_s^2}}{2 \cdot i_s^2}.$$

Aus den so gewonnenen $x_{1,2}$ erhält man

$$n_{1,2} = \frac{x \cdot F_b}{F_s},$$

wo $n_{1,2}$ natürlich negativ ist. Die Form des in Wurzelfaktoren ausgedrückten Nenners ist:

$$J_s \cdot F_s (n - n_1) (n - n_2).$$

$$M_b = M \cdot \frac{J_b (F_b + F_s \cdot n)}{J_s \cdot F_s (n - n_1) (n - n_2)}.$$

Wenn die obige Gleichung in elementare Brüche zerlegt wird, erhält man:

$$\begin{aligned} M_b = \frac{M \cdot J_b}{J_s \cdot F_s (n_1 - n_2)} \left[(F_b + F_s \cdot n_1) \cdot \frac{1}{n - n_1} - \right. \\ \left. - (F_b + F_s \cdot n_2) \cdot \frac{1}{n - n_2} \right]. \end{aligned}$$

Die obige Formel ist auch ohne Kriechen gültig, da sie eine übergeführte Form der ursprünglichen FRITZschen Formel ist [6]. Die Berücksichtigung des Kriechens erfolgt auf die Weise, daß für M_b und M deren Transformierte ein-

gesetzt werden, während n als der Parameter der Transformation betrachtet wird.

$$LM_b = LM \cdot \frac{M \cdot J_b}{J_s \cdot F_s(n_1 - n_2)} \left[(F_b + F_s \cdot n_1) \cdot \frac{1}{n - n_1} - (F_b + F_s \cdot n_2) \cdot \frac{1}{n - n_2} \right].$$

Nach Rücktransformation erhält man:

$$M_b = M \cdot \frac{J_b}{J_s \cdot F_s(n_1 - n_2)} \left[\frac{F_b + F_s \cdot n_1}{n_0 - n_1} \cdot e^{\frac{-n_0}{n_0 - n_1} \varphi} - \frac{F_b + F_s \cdot n_2}{n_0 - n_2} \cdot e^{\frac{-n_0}{n_0 - n_2} \varphi} \right].$$

Auf Grund einer ähnlichen Ableitung erhält man für M_s und N :

$$M_s = M + \frac{M}{F_s(n_1 - n_2)} \left[\frac{F_s \cdot n_1 + F_b}{n_0 - n_1} \cdot n_1 \cdot e^{\frac{-n_0}{n_0 - n_1} \varphi} - \frac{F_s \cdot n_2 + F_b}{n_0 - n_2} \cdot n_2 \cdot e^{\frac{-n_0}{n_0 - n_2} \varphi} \right]$$

und

$$N = \frac{M \cdot F_b \cdot a}{J_s(n_1 - n_2)} \left[\frac{n_1}{n_0 - n_1} \cdot e^{\frac{-n_0}{n_0 - n_1} \varphi} - \frac{n_2}{n_0 - n_2} \cdot e^{\frac{-n_0}{n_0 - n_2} \varphi} \right].$$

In Kenntnis des auf den Beton- bzw. Stahlquerschnitt entfallenden Momentes und der Zug-Druckkraft sind die Spannungen leicht zu berechnen.

3. Die Temperaturänderung

Gleichmäßige oder ungleichmäßige Temperaturänderungen, die entlang des Trägerquerschnittes linear verlaufen, sind im Grunde genommen belastende Bewegungen, die im statisch unbestimmten Träger Spannungen verursachen. Diese Spannungen sind den Gesetzen des Kriechens ebenfalls unterworfen.

Die Temperatur ändert sich aber nach täglichen und jährlichen Perioden, sie kann daher nicht als eine ständige Belastung betrachtet werden. Die Periode der jährlichen Änderungen scheint jedoch hinreichend lang zu sein, um das Entstehen des Kriechens zu ermöglichen.

Im weiteren wird die Wirkung einer belastenden Kraft oder Bewegung periodischen Charakters im allgemeinen untersucht werden. Der zeitliche Ablauf der periodischen Belastung sei durch die Funktion

$$x(t) = e^{i\omega t}$$

beschrieben. Die auf das gegebene Trägersystem durch die konstante Einheitslast in einem der Zeit »t« entsprechenden Zeitpunkt ausgeübte Wirkung bezeichne $A(t)$ oder $A(\varphi)$ (zwischen φ und t besteht ein gegenseitiger und eindeutiger Zusammenhang).

Nach den im allgemeinen Teil in Punkt 6. 2 bezüglich einer belastenden Kraft oder Bewegung gegebenen Erörterungen ist die gesuchte Wirkung

$$y = \frac{d}{d\varphi} A(\varphi) * X(\varphi).$$

Aus den vorangehenden Ausführungen war es ersichtlich, daß die Funktion $A(\varphi)$ durch die lineare Kombination konstanter Glieder und Glieder von der Form $e^{-\alpha\varphi}$ dargestellt werden kann. Im weiteren ist es hinreichend, sich auf die Untersuchung dieser zwei Funktionsarten zu beschränken.

a) Die konstanten Glieder bedeuten, daß dieser Teil der Wirkung vom Kriechen unabhängig ist; in diesem Falle ist

$$y = e^{i\omega t}$$

(auf die konstante Einheit reduziert).

b) Untersuchung der $e^{-\alpha\varphi}$ Glieder

$$\begin{aligned} y &= \frac{d}{d\varphi} A(\varphi) * e^{-i\omega t} = \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\varphi} A(\varphi - \psi) e^{i\omega\tau(\psi)} d\psi = \\ &= A(0) e^{i\omega t} + \int_0^{\varphi} A'(\varphi - \psi) e^{i\omega\tau(\psi)} d\psi. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung zerfällt in zwei Teile. Das erste Glied bedeutet, daß ein Teil der Wirkung, den Angaben des Trägers ohne Kriechen entsprechend, den im Laufe der Zeit erfolgenden Belastungsänderungen unmittelbar folgt. Das zweite Glied berücksichtigt die durch das Kriechen hervorgerufenen Wirkungen [2].

Durch Einsetzen der Werte

$$A = e^{-\alpha\varphi}, \varphi = \varphi_m (1 - e^{-\delta t}),$$

$$\psi = \varphi_m (1 - e^{-\delta t}) \quad \text{und} \quad d\psi = \varphi_m \delta e^{-\delta\tau} \cdot d\tau$$

wird der Wert des das zweite Glied der Gleichung bildenden Integrals:

$$\int_0^{\varphi} A'(\varphi - \psi) e^{i\omega\tau(\tau)} d\psi = -\alpha\varphi_m \delta e^{-\alpha\varphi_m e^{-\delta t}} \cdot \int_0^t e^{[-\alpha\varphi_m e^{-\delta\tau} - (\delta - i\omega)\tau]} \cdot d\tau.$$

Die Frage ist allgemein nach dem vollkommenen Ablauf des Kriechens, d. h., im Falle $t \rightarrow \infty$ interessant. Nach Durchführung der Substitutionen $\delta\tau = x$,

$$\alpha\varphi_m = z \quad \text{und} \quad 1 - \frac{i\omega}{\delta} = u$$

übergeht das gesuchte Integral in die folgende Form:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \alpha\varphi_m \delta e^{\alpha\varphi_m e^{-\delta t}} \cdot \int_0^t e^{[-\alpha\varphi_m e^{-\delta\tau} - (\delta - i\omega)\tau]} \cdot d\tau = \\ = z \int_t^\infty e^{(ze^{-x} - ux)} dx = z \cdot F(z, u). \end{aligned}$$

Das Integral kann als ein geschlossener Ausdruck elementarer Funktionen nicht dargestellt werden,⁶ seine gut konvergierende Reihe kann aber wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} F(z, u) = F(0, u) + \frac{\partial}{\partial z} F(0, u) z + \dots + \frac{\partial}{\partial z^n} F(0, u) \frac{z^n}{n!}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \int_0^\infty e^{(ze^{-x} - ux)} \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_0^\infty e^{[ze^{-x} - (u+1)x]} \cdot dx = F(z, u + 1). \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n} = F(z, u + n), \quad F(0, u) = \int_0^\infty e^{-ux} \cdot dx = \frac{1}{u},$$

und daher

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0, u) = \frac{1}{u + n} \quad \text{und} \quad z \cdot F(z, u) = \sum_0^\infty \frac{z^{n+1}}{u + n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Durch die Rücksubstitution des Ausdruckes

$$u = 1 - \frac{i\omega}{\delta}$$

⁶ Durch Einführen der unvollständigen Fakultät (siehe L. JAHNKE-EMDEN »Tafeln höherer Funktionen« Seite 22) ist der Wert des angedeuteten Integrals:

$$(\alpha\varphi_m)^{\frac{i\omega}{\delta}} \left(1 - \frac{i\omega}{\delta} \alpha\varphi_m\right)!$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_m} A'(\varphi - \psi) e^{i\omega\tau(\varphi)} \cdot d\psi &= \sum_0^{\infty} \frac{z^{n+1}}{1 - \frac{i\omega}{\delta} + n} \cdot \frac{1}{n!} = \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n - \frac{i\omega}{\delta}} \cdot \frac{1}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Der obige Ausdruck kann in einen reellen und einen imaginären Teil zerlegt werden:

$$\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n - \frac{i\omega}{\delta}} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \sum_1^{\infty} \frac{n^2 \cdot z^n}{\left[n^2 + \left(\frac{\omega}{\delta} \right)^2 \right] \cdot n!} + \frac{i\omega}{\delta} \sum_1^{\infty} \frac{n \cdot z^n}{\left[n^2 + \left(\frac{\omega}{\delta} \right)^2 \right] \cdot n!}.$$

Die Konvergenz des reellen Teiles

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + \left(\frac{\omega}{\delta} \right)^2} \cdot \frac{z^n}{n!} = e^z - 1 - \left(\frac{\omega}{\delta} \right)^2 \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + \left(\frac{\omega}{\delta} \right)^2} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

kann mit Rücksicht darauf, daß

$$e^z - 1 = e^{-\alpha\varphi_m} - 1 = A(\infty) - A(0)$$

und

$$\begin{aligned} y(\infty) &= A(0) \cdot e^{i\omega t} + A(\infty) - A(0) + \left(\frac{\omega}{\delta} \right)^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\alpha\varphi_{m'} \frac{\omega}{\delta} \right) + \\ &+ i \frac{\omega}{\delta} \cdot \operatorname{Im} \left(\alpha\varphi_{m'} \frac{\omega}{\delta} \right) \end{aligned}$$

ist, noch weiter verbessert werden. Hier sind

$$\operatorname{Re}(z, p) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + p^2} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

und

$$\operatorname{Im}(z, p) = \sum_1^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2 + p^2} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

durch unendliche Reihen angegebene Funktionen.

Wenn die Änderung der Belastungsfunktion sehr rapid vor sich geht, d. h. $\omega \rightarrow 0$ (z. B. die Temperaturänderung während eines Tages), dann gilt

$$\left(\frac{\omega}{\delta}\right)^2 \cdot \text{Re} \rightarrow 1 - e^{-a\varphi}; \quad \frac{\omega}{\delta} \cdot \text{Im} \rightarrow 0,$$

und

$$y(\infty) \rightarrow A(0) \cdot e^{i\omega t},$$

was bedeutet, daß Belastungen mit kurzer Periode kein Kriechen verursachen.

Wenn dagegen die Änderung der Belastungsfunktion äußerst langsam vor sich geht, d. h. für $\omega \rightarrow \infty$, dann besteht

$$\text{Re} \rightarrow 0, \text{Im} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad y(\infty) \rightarrow A(\infty),$$

was bedeutet, daß das Kriechen restlos erfolgt.

4. Die Knickung

Die Wirkung des Kriechens auf die Knickung wird an Hand eines einfachen Falles vorgeführt. Über die gebräuchlichen Annahmen hinaus sei die Bewehrung der an beiden Enden gelenkig gestützten Stahlbetonsäule symmetrisch, d. h. der Schwerpunkt des Betonquerschnittes falle mit dem der Bewehrung zusammen. Der Stab sei im unbelasteten Zustande gekrümmt, seine Form sei der geknickten Form affin.

Die Erscheinung wird auch diesmal vorerst ohne das Kriechen beschrieben, dann wird für E_b der Ausdruck

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{P}}$$

eingesetzt und schließlich wird rücktransformiert.

Die aus den Beton- und Stahlquerschnitten berechenbare zusammengesetzte Steifigkeit (ohne Berücksichtigung des Kriechens) ist

$$EJ = E_b \cdot J_b + E_s \cdot J_s.$$

Die seitliche Durchbiegung eines Punktes des Stabes ist die Funktion von zwei Veränderlichen, der Stelle » x « und der Zeit » φ «; $y = y(x, \varphi)$. Der Zusammenhang ist durch Differentialgleichungen nach zwei Veränderlichen, d. h. partielle Differentialgleichungen gegeben. Von diesen wird die Differentialgleichung der Zeit durch die Transformation eliminiert.

Für eine anfängliche Krümmung wird die Knickung durch die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{P}{E \cdot J} (y + y_0) = 0$$

beschrieben; wegen der Affinität ist $y = C \cdot y_0$, wo c eine vom Verhältnis $P/(E \cdot J)$ abhängige, in x konstante Größe ist. Die obige Differentialgleichung kann daher in der Form

$$c \cdot y_0'' + \frac{P}{E \cdot J} y_0 (C + 1) = 0$$

angeschrieben werden.

Die letztere Differentialgleichung hat nur dann eine Lösung, wenn die Größe

$$\frac{P}{E \cdot J} \cdot \frac{C + 1}{C}$$

der Eigenwert der Differentialgleichung ist.

Wenn die kritische Kraft mit P_k bezeichnet wird, dann ist

$$C = \frac{1}{\frac{P_k}{P} - 1}.$$

Im weiteren seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt: P_0 und C_0 bedeuten die kritische Kraft und den zu ihr gehörigen Krümmungsvergrößerungsfaktor ohne Berücksichtigung des Kriechens.

P_∞ und C_∞ sind die kritische Kraft und der zu ihr gehörige Krümmungsvergrößerungsfaktor, wenn bloß die Stahleinlagen in Betracht gezogen werden. (Da P_∞ auch kleiner sein kann als die Druckkraft P , ist C_∞ nur ein formeller Wert, der auch negativ sein kann.)

Mit P_φ wird die mit dem idealen Elastizitätsmodul berechnete formelle kritische Kraft und mit C_φ der zu ihr gehörige, ebenfalls formelle Krümmungsvergrößerungsfaktor bezeichnet.

Die kritischen Kräfte sind den Steifigkeiten direkt proportional, d. h.:

$$P_0 : P_\varphi : P_\infty = (E_b \cdot J_b + E_s \cdot J_s) : \left(\frac{E_b \cdot J_b}{1 + \varphi} + E_s \cdot J_s \right) : E_s \cdot J_s,$$

oder

$$1 : \frac{P_\varphi}{P_0} : \frac{P_\infty}{P_0} = 1 : \frac{1 + \frac{E_s \cdot J_s \cdot \varphi}{E_b \cdot J_b + E_s \cdot J_s}}{1 + \varphi} : \frac{E_s \cdot J_s}{E_b \cdot J_b + E_s \cdot J_s}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P_\varphi}{P_0} = \frac{1 + \frac{P_\infty}{P_0} \varphi}{1 + \varphi} \quad \text{und} \quad P_\varphi = P_0 \cdot \frac{1 + \frac{P_\infty}{P_0} \varphi}{1 + \varphi}.$$

Auf Grund der obigen Ausdrücke erhält man:

$$C_\varphi = \frac{1}{\frac{P_0}{P} \cdot \frac{1 + \frac{P_\infty}{P_0} \varphi}{1 + \varphi} - 1} = \frac{1 + \varphi}{\frac{P_0}{P} + \frac{P_\infty}{P} \varphi - 1 - \varphi} =$$

$$= \frac{1 + \varphi}{\frac{1}{C_0} + \frac{\varphi}{C_\infty}}.$$

Wenn für φ der Wert $1/p$ eingesetzt wird, erhält man anstatt C_φ die Transformierte des sich infolge des Kriechens ändernden tatsächlichen Krümmungsvergrößerungsfaktors C :

$$LC = \frac{1 + \frac{1}{p}}{\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_\infty \cdot p}} = C_0 \cdot \frac{1 + \frac{p}{C_0}}{p + \frac{C_0}{C_\infty}}.$$

Nach der Rücktransformation ergibt sich:

$$C = C_0 \cdot \left(\frac{C_\infty}{C_0} + \frac{1 + \frac{C_0}{C_\infty}}{\frac{-C_0}{C_\infty}} \cdot e^{-\frac{C_0}{C} \varphi} \right) =$$

$$= C_\infty - (C_\infty - C_0) e^{-\frac{C_0}{C} \varphi} = C_0 \cdot e^{-\frac{C_0}{C_\infty} \varphi} + C_\infty (1 - e^{-\frac{C_0}{C_\infty} \varphi}).$$

Die Folgen: Ein Stabilitätsverlust kommt dann zustande, wenn C über alle Grenzen hinaus anwächst. Bei der Berechnung mit dem idealen Elastizitätsmodul kann C_φ über alle Grenzen hinaus wachsen, wenn $\varphi \rightarrow C_0/C_\infty$, was bedeutet, daß infolge des Kriechens ein Stabilitätsverlust eintreten kann. Die Untersuchung der genauen Formel führt aber zu der Feststellung, daß C nur dann unendlich sein kann, wenn von den zwei Gliedern der Summe wenigstens eines unendlich ist. Zum Unendlichwerden des ersten Gliedes ist aber notwendig, daß

$$e^{-\frac{C_0}{C_\infty} \varphi}$$

unendlich sei. (C ist endlich, da widrigenfalls schon anfänglich ein Stabilitätsverlust erfolgen würde.) Dies könnte für einen endlichen Wert von φ nur dann erfolgen, wenn $C_\infty \rightarrow 0$. In diesem Falle gilt jedoch $P_\infty \rightarrow \infty$. Da aber $P_\infty < P_0$

ist, ist dies unmöglich. Zum Unendlichwerden des zweiten Gliedes wäre notwendig, daß $C_\infty \rightarrow \infty$ sei. In diesem Falle ist aber der Grenzwert von

$$C_\infty \left(1 - e^{-\frac{C_0}{C_\infty} \varphi}\right) = C_0 \varphi.$$

Daher kann im Falle eines endlichen φ das Kriechen keinen Stabilitätsverlust verursachen [2].

SCHRIFTTUM

1. WAGNER, K. W.: Operatorenrechnung und LAPLACESche Transformation nebst Anwendung in der Physik und Technik. 2. Auflage. Leipzig, 1950.
2. LEVI-PIZETTI: Fluage, plasticité, précontrainte. Dunod, Paris, 1951.
3. KOLLÁR, L.—KÉKEDI, P.: Einfluß des Kriechens auf den Spannungszustand und auf die Formänderungen statisch unbestimmter Stahlbetonkonstruktionen. *Bauplanung—Bautechnik*. 1955, Nr. 11, pp. 494—495.
4. BUSEMANN, R.: Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern. *Der Bauingenieur*, 1950. Nr. 11, pp. 418—420.
5. SATTLER, K.: Theorie der Verbundkonstruktionen. Springer Verlag Berlin, 1953.
6. FRITZ, B.: Vereinfachtes Berechnungsverfahren für Stahlträger mit Betondruckplatte bei Berücksichtigung des Kriechens und des Schwindens. *Bautechnik*, 1950, Nr. 2.
7. JAHNKE-EMDEN: Tafeln Höherer Funktionen. Teubner Verlag, Leipzig, 1960.

CALCULATION OF CREEP BY USING LAPLACE'S TRANSFORMATION

E. ÉLIÁS

SUMMARY

The calculation of effects due to creep requires the solution of simultaneous differential equations with constant coefficients. By using LAPLACE's transformation the solution of the above mentioned differential equations and the satisfaction of boundary conditions becomes very simple. When computing the effects of creep, in the transformed equation the modulus of elasticity of the concrete E_b has to be replaced by the function

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

Due to the above mentioned substitution the setting up and solution of differential equation can be omitted, and the accurate result is obtained by the retransformation of the usual equations of the Elastic Analysis.

The application of the introduced method is explained by four examples (centric compression, pure bending, change of temperature and buckling).

CALCUL DES EFFETS DU FLUAGE A L'AIDE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

E. ÉLIÁS

RÉSUMÉ

Le calcul des effets du fluage nécessite la solution de systèmes d'équations différentielles à coefficients constants. La solution des équations différentielles, compte tenu des conditions limites, peut se faire très aisément par application de la transformation de Laplace. Au calcul du fluage, le module d'élasticité E_b est remplacé, dans l'équation transformée, par la fonction

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$$

De cette manière, l'établissement la solution de l'équation différentielle devient superflue, le résultat exact étant fourni par retransformation des équations habituelles de la résistance des matériaux.

L'application du procédé est illustrée par quatre exemples (compression simple, flexion, variation de température et flambage).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С ПОМОЩЬЮ ТРАНСФОРМАЦИИ ЛАПЛАСА

Э. ЭЛИАШ

РЕЗЮМЕ

Вычисление влияния ползучести требует решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение дифференциальных уравнений совместно с начальными условиями сильно упрощается применением трансформации Лапласа. При вычислении ползучести в трансформированном уравнении модуль упругости E_b замещается функцией

$$\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}.$$

Вследствие этого вывод дифференциального уравнения и его решение упускаются, и точный результат дает обратная трансформация обычных уравнений прочности.

Применение предлагаемого метода демонстрируется автором на четырех примерах (центричное давление, изгиб, изменение температуры и прогиб).

STATISCHE EIGENSCHAFTEN VON RELAISARTIGEN PNEUMATISCHEN KRAFTSCHALTERN

L. HELM

FORSCHUNGLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
FÜR AUTOMATISIERUNG

[Eingegangen am 29. Juli 1961]

Es wird die Möglichkeit untersucht, die entsprechende Bauart zu finden, in welcher die Steilheit der statischen Charakteristik von pneumatischen Kraftschaltern gesteigert werden kann. Der Verfasser weist darauf hin, daß praktisch nur die Methode einer positiven Rückführung zum Ziele führen kann. An Hand von zwei mit positiver Rückführung verschiedener Bauart versehenen Kraftschaltermodellen wird nachgewiesen, daß die positive Rückführung geeignet ist, die gewünschte Steilheit zu sichern, u. zw. in dem meßtechnisch wichtigen Gebiet von Verschiebungen der Größenordnung von $1 \sim 2 \mu$.

In druckluftbetätigten kybernetisch-technischen Einrichtungen ist der pneumatische Kraftschalter als überall vorhandenes Element eine Baueinheit grundlegender Bedeutung. In diesem Bauelement wird der Energie-Inhalt von Preßluft dazu verwendet, aus Eingangsgrößen, die als kleine Verschiebungen wirksam sind, relative große Druckänderungen als Ausgangsgrößen zu erzeugen.

Eine der meist verbreiteten Typen ist der sogenannte Düsen-Kraftschalter (Bild 1). Als Eingangsgröße gilt der Abstand x zwischen Düse 1 und Prallplatte 2. Der Druck p hinter der Vordrossel 3, der sogenannte Düsenraumdruck unterliegt als Funktion des Abstandes x sehr starken Veränderungen. Bei vollständig gesperrter Düse steigt der Druck p bis zum Wert des Vordruckes. Wird aber die Prallplatte entsprechend weit von der Düse entfernt, so sinkt der Druck p beinahe bis zum Wert des Gegendruckes. Für einen konstanten Speisedruck besteht im stationären Zustand ein eindeutiger Zusammenhang

$$p = p(x)$$

zwischen der Öffnung x und dem derselben zugeordneten Druck p .

Das Bild 2 zeigt die aus Meßergebnissen aufgenommene statische Charakteristik eines aus einer Vordrossel und einer Düse bestehenden Kraftschalters. Die Meßergebnisse zeigen, daß die Steilheit der statischen Charakteristik bzw. der Übertragungsfaktor des Kraftschalters in der mittleren Strecke der Kurve bzw. im mittleren Abschnitt des Arbeitsbereiches am größten ist und innerhalb eines gewissen Intervalls als konstant betrachtet werden kann.

Allgemein wird an einen pneumatischen Kraftschalter die Anforderung gestellt, daß die statische Charakteristik eine je größere Steilheit aufweisen soll. Je größer nämlich der Übertragungsfaktor eines im geschlossenen Kreise funktionierenden Kraftschalters ist, um so leichter kann die Rückführung-Signalübertragung invertiert werden.

Zur Steigerung der Steilheit der statischen Charakteristik eines Düsen-Kraftschalters gibt es drei Möglichkeiten, u. zw.:

- a) durch Erhöhung der Vordrosselung;
- b) durch Anwendung eines größeren Düsenbohrungsdurchmessers;
- c) durch Anwendung einer positiven Rückführung.

Aus den Messungen geht hervor, daß man mit Hilfe der unter a) und b) angeführten Verfahren keine qualitative Besserung betreffs der Größen-

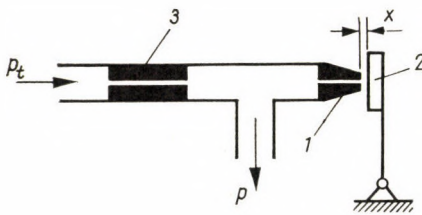


Bild 1

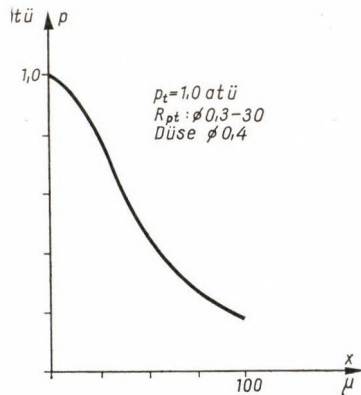


Bild 2

ordnung erzielen kann. Es muß noch in Betracht gezogen werden, daß durch die Erhöhung der Vordrosselung die Übertragungsarbeit des Kraftschalters verlangsamt wird, und daß ferner bei einem größeren Düsenbohrungsdurchmesser diese Arbeitsfunktion ziemlich rasch unsicher wird.

Diese Erfahrungen führten dazu, daß man in den letzteren Jahren dem unter c) angeführten Verfahren immer mehr Aufmerksamkeit schenkte und daran ging, die Kraftschalter mit positiver Rückführung zu entwickeln.

In Bild 3 ist die Skizze des Schaltungsprinzips einer typischen Bauart dargestellt. Hier wird der aus einer Vordrossel R_{pt} und einer veränderlichen Drossel R_{px} bestehende Kraftschalter mit der unter dem Druck p_2 strömenden Abgasluft der Sekundärseite eines in Reihe geschalteten Leistungsverstärkers gespeist, wobei dieser Verstärker mit zwei Membranen und diskontinuierlichem Luftverbrauch funktioniert. Die Verstärkermembranen sind einander nicht gleich; die Verhältniszahl der nützlichen Membranflächen sei m , dessen Wert in der Praxis in dem Intervall $2 < m < 5$ gewählt wird. Demgemäß ist der

Ausgangsdruck p_2 des Verstärkers das m -fache des Eingangsdruckes p_1 , bei Voraussetzung eines stationären Zustandes.

Der Kraftschalter dieser Bauart ist eigentlich ein Druckverteiler mit positiver Rückführung, wobei als Eingangsgröße die veränderliche Drosselung, als Ausgangsgröße der bei R_{px} abgeteilte Druck p_1 gilt. Wir wollen den Quotienten der Druckverteilung mit β bezeichnen, d. h.

$$\beta = \frac{p_1}{p_2} \tag{1}$$

Bei konstanter Vordrosselung R_{pt} ist β eine eindeutige Funktion der Eingangsgröße mit einer Veränderlichen:

$$\beta_{R_{pt}=\text{konst.}} = \beta(x_e) \tag{2}$$

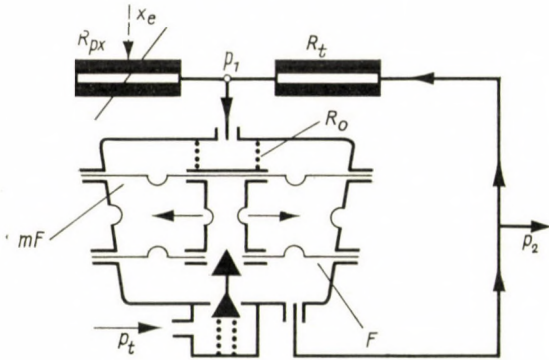


Bild 3

Wenn wir uns die gleichzeitige Funktionsweise der Kraftschalter-Leistungsverstärkereinheit vorstellen, so wird es uns klar, daß im Falle eines ungespannten Zustandes der auf die obere Membrane wirkenden Druckfeder R_0 der Grenzwert des Quotienten

$$\beta = \frac{1}{m}$$

ist. Wenn nämlich unter dem Einfluß einer Veränderung der Eingangsgröße

$$\beta > \frac{1}{m}$$

ist, so steigt p_2 bis zum Vordruck; wird aber

$$\beta < \frac{1}{m},$$

so sinkt der Druck p_2 bis Null.

Ein Gleichgewichtszustand ist nur bei

$$\beta = \frac{1}{m}$$

möglich; in diesem Fall bleibt aber die Kraftschalter-Leistungsverstärkereinheit bei jedem beliebigen Wert von p_2 im Gleichgewicht.

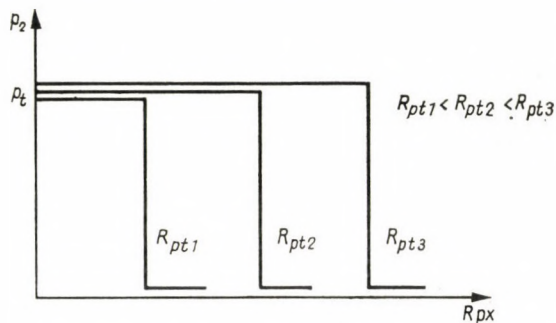


Bild 4

Daraus kann mit Rücksicht auf Gl. (2) gefolgert werden, daß im Gleichgewichtszustand eine größere Vordrosselung auch eine größere veränderliche Drosselung bedingt. In Bild 4 sehen wir die Änderung des Druckes p_2 als Funktion von R_{px} und des Parameters R_{pt} , in stationärem Zustand dargestellt.

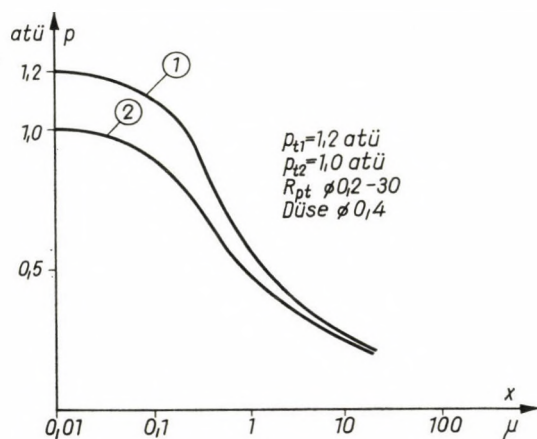


Bild 5

In Bild 5 ist die statische Charakteristik eines Kraftschalters mit dem Membranflächenverhältnis

$$m = 2,5$$

dargestellt.

Das Schaltungsprinzip eines anderen Grundtyps des Kraftschalters mit positiver Rückführung ist in Bild 6 dargestellt. Hier unterliegen die beiden Drosseln eines Düsen-Kraftschalters zwangsweise einem konstanten Druckabfall. Anstatt ins Freie, gelangt die Luft aus der Düse in eine Kammer, die an einer Seite von einer federnden, oberen Membrane begrenzt ist. Diese Kammer kommuniziert mit der Sekundärseite des Leistungsverstärkers, wo die Änderung des Druckes genau den Druckänderungen im Düsenraum ent-

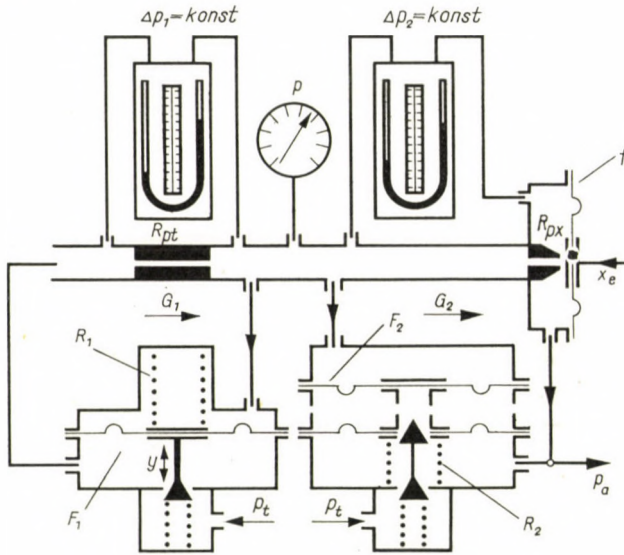


Bild 6

spricht. Die auf die untere Membrane des Leistungsverstärkers wirkende Kraft der Feder R_2 erzeugt an der Düse — in stationärem Zustand — einen, von dem momentanen Gleichgewichtszustand unabhängigen, beinahe konstanten Druckabfall. In ähnlicher Weise wird der Druckabfall an der Vordrossel und damit auch die dort in der Zeiteinheit durchströmende Luftmenge mit Hilfe eines Druckabfallreglers stabilisiert, der in Form einer, von der Feder R_1 vorgespannten Membrane funktioniert.

Es sollen die Druckabfallwerte, die der Vordrossel R_{pt} bzw. der veränderlichen Drossel R_{px} zwangsweise auferlegt werden, als

$$\Delta p_1 \text{ bzw. } \Delta p_2$$

bezeichnet werden. Da nun in stationärem Zustand pro Zeiteinheit durch beide Drosseln dieselbe Luftmenge durchströmt, so folgt daraus, daß der in dem Raum zwischen den beiden Drosseln gemessene statische Druck p konstant

bleibt, falls die in Gl. (3) ausgedrückte Bedingung erfüllt wird:

$$R_{px} = R_{px_0} = R_{pt} \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1}, \quad (3)$$

wo R_{px_0} den Wert des pneumatischen Widerstandes der veränderlichen Drossel im Gleichgewichtszustand bedeutet.

Weiter soll G_0 die durch den Kraftschalter in der Zeiteinheit durchströmende Luftmenge — im Gleichgewichtszustand — bezeichnen. Nun wollen wir den Widerstand der Austrittsdrossel um den Betrag ΔR_{px} ändern. ΔR_{px} sei positiv, d. h.

$$\Delta R_{px} = R_{px} - R_{px_0} > 0.$$

Da Δp_2 konstant ist, so wird durch die veränderliche Drossel eine, dem Widerstandszuwachs ΔR_{px} entsprechende, verminderte Menge $G = \Delta p_2 / R_{px}$ durchströmen. Die Menge $\Delta G = (G_0 - G)$ wird im Raum zwischen beiden Drosseln, dessen Kapazität C_p ist, den Druck erhöhen. Gl. (4) drückt die Geschwindigkeit der Druckveränderung aus:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{C_p} \Delta G = \frac{1}{C_p} \left[\Delta p_2 \left(\frac{1}{R_{px_0}} - \frac{1}{R_{px_0} + \Delta R_{px}} \right) \right]. \quad (4)$$

Mit dem gemeinsamen Nenner, in welchem wir den Wert von ΔR_{px} gegenüber R_{px_0} vernachlässigen, erhalten wir:

$$\frac{dp}{dt} \cong \frac{\Delta p_2}{C_p} \cdot \frac{\Delta R_{px}}{R_{px_0}^2}. \quad (5a)$$

Unsere Wahl soll

$$\Delta p_1 = \Delta p_2$$

sein, so ist auch

$$R_{px_0} = R_{pt}$$

und daher die Geschwindigkeit der Druckänderung

$$\frac{dp}{dt} \cong \frac{\Delta p_1}{T_i} \cdot \frac{\Delta R_{px}}{R_{px_0}}, \quad (5b)$$

wo

$$T_i = R_{pt} \cdot C_p$$

die Zeitkonstante des Kraftschalters bedeutet.

Die Geschwindigkeit der Druckänderung an der Sekundärseite des Kraftschalters ist näherungsweise dieselbe [s. Gl. (5b)].

Wir sehen aus Gl. (5), daß der pneumatische Widerstand der veränderlichen Drossel als Eingangsgröße betrachtet zugleich als ein lineares Element von integrierendem Charakter erscheint. Die Zeitkonstante ist lediglich eine Funktion der Konstruktionskonstanten. Aus derselben Gleichung geht auch hervor, daß die Änderung der Ausgangsgröße pro Zeiteinheit sowohl der prozentualen Wertänderung des Widerstandes R_{px} wie auch dem der Vordrossel bzw. der veränderlichen Drossel auferlegten Druckabfall direkt proportional verläuft.

Ferner folgt daraus, daß man zur Erreichung einer größeren Geschwindigkeit der Signalumformung gezwungen ist, die durch den Umformer pro Zeiteinheit — im Gleichgewichtszustand — durchströmende Luftmenge G_0 zu vergrößern, u. zw. entweder durch Erhöhung von Δp_1 , oder aber durch Herabsetzung von R_{pt} ; mit anderen Worten, die Erhöhung der Arbeitsgeschwindigkeit ist an die Erhöhung des Luftverbrauchs gebunden.

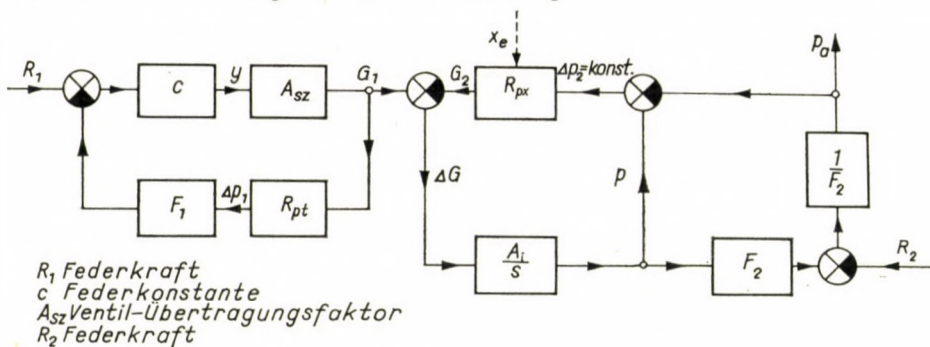


Bild 7

Wir sehen, daß sowohl der Druck an der Sekundärseite des Leistungsverstärkers wie auch der Druck vor der Vordrossel — unter der Wirkung der Druckunterschiedsregler — genau den Druckänderungen im Düsenraum folgen werden. Die Änderung der Drücke schreitet so lange fort, bis einerseits der Druck vor der Vordrossel gleich dem Vordruck p_t wird, und andererseits der Druck im Düsenraum den dem jeweiligen Widerstand R_{px} entsprechenden Maximalwert p_{max} erreicht, bei welchem die durch die Vordrossel in den Düsenraum strömende Luftmenge der durch die Düse ausströmenden Luftmenge gleichkommt, mit anderen Worten bis nicht der folgenden Gleichung Genüge geleistet wird:

$$\frac{p_t - p_{max}}{R_{pt}} = \frac{\Delta p_2}{R_{px}} \quad (6)$$

Das Blockschaltbild des Kraftschalters ist in Bild 7 zu sehen. Dies zeigt deutlich, daß die Arbeitsweise des Kraftschalters von dem Mengenverhältnis der durch die Vordrossel dem Düsenraum zuströmenden und der

daraus über die veränderliche Drossel herausströmenden Luft bestimmt wird. Ferner ist es aus dem Schema ersichtlich, daß die positive Rückführung auch bei dieser Bauart des Kraftschalters einen wesentlichen Faktor darstellt. (Ausgehend von p_a ändert sich das Vorzeichen des Signals zweimal, bevor es zum Ausgangspunkt zurückkehrt.)

Mit Rücksicht auf den integrierenden Charakter unseres Kraftschalters gilt für die Übertragungsfunktion in Bezug auf p und R_{px} die folgende Formel:

$$\frac{p(s)}{\Delta R_{px}(s)} = \frac{A_i}{s}, \quad (7)$$

wo

$$A_i = \frac{\Delta p_1}{T_i R_{px0}}$$

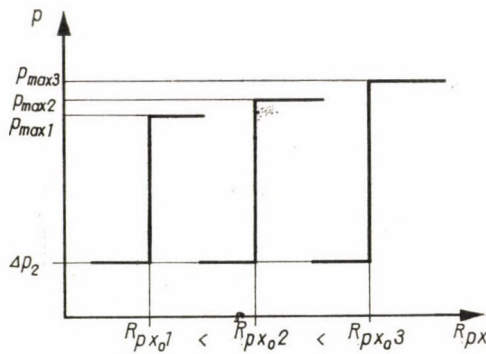


Bild 8

ist. Mit anderen Worten geht die Änderung der Ausgangsgröße (p_a) so lange vor sich, bis entweder die Eingangsgröße (ΔR_{px}) gleich Null wird, oder aber die Ausgangsgröße nicht einen der extremen Werte

$$p_{a \max} = (p_{\max} - \Delta p_2)$$

bzw.

$$p_{a \min} = 0$$

erreicht. In Bild 8 ist der Verlauf der statischen Charakteristik als Function von R_{px} und vom Parameter R_{px0} dargestellt.

Der Kurvenverlauf zeigt deutlich, daß der Kraftschalter annähernd die Eigenschaften eines Relais aufweist.

In Prinzip wird die Ausgangsgröße von einer unendlich kleinen Veränderung der Eingangsgröße nach einer gewissen, von der Zeitkonstante der Integration und von dem Gleichgewichtszustand abhängigen Durchlaufzeit bis zum oberen oder unteren Grenzwert verlegt. Hier soll noch bemerkt wer-

den, daß der Kraftschalter im Falle von $\Delta R_{px} = 0$ bei jedem Druckwert p in Gleichgewicht bleiben kann.

Gemäß den erhaltenen Meßergebnissen kann ein Kraftschalter beschriebenen Typs mit Hilfe einer Verschiebung der Prallplatte von $1-2\mu$ vollständig gesteuert werden.

Da die Ausgangsgröße des Kraftschalters auch in einem durch eine Membrane mit der Nutzfläche f abgegrenzten Raum merkbar wird, so folgt daraus, daß solche Kraftschalter hauptsächlich für Systeme im Kräfte- und Momentengleichgewicht vorteilhaft verwendet werden können.

SCHRIFTTUM

1. BERESOWEZ, G. T. — DIMITRIJEW, W. N. — NADSHAFOW, E. M.: Über die zulässigen Vereinfachungen bei der Berechnung pneumatischer Regler. *Feinwerktechnik* (1958), 159—167.
2. BROŽOVSKÝ, V.: Systém clona—dušna—klapka pneumatických přístrojů. *Regulační vyvoj* 27 (1955), 1—11.
3. Дмитриев, В. Н.: Расчет статической характеристики пневматического реле. *Автоматика и телемеханика* (1956), 761—774.
4. Дмитриев, В. Н.—Чернышев, В. И.: Расчет временных характеристик проточных пневматических камер. *Автоматика и телемеханика* (1958), 1118—1125.
5. KRETZSCHMER, F.: Pneumatische Regler. VDI Verlag, Düsseldorf 1958.

STATIC CHARACTERISTICS OF A RELAY-TYPE PNEUMATIC SIGNAL CONVERTER

L. HELM

SUMMARY

It is important to find the possibility of how to increase the slope of the characteristic curve of pneumatic signal converter. The author points out that the only practicable way is the arrangement of a positive feedback. On two examples where different types of a positive feedback are built in, it is proved that this method was effectively suitable to create a sufficient slope for the most important range of 1 to 2 microns.

LES CARACTÉRISTIQUES STATIQUES D'UN CONVERTISSEUR DE SIGNAUX DE TYPE RELAIS

L. HELM

RÉSUMÉ

Il est important de trouver une solution permettant d'augmenter la raideur de la courbe caractéristique des convertisseurs pneumatiques de signaux. L'auteur démontre que, pratiquement, le rétrocouplage positif représente la solution unique. A l'aide de deux exemples comportant différents modes de rétrocouplage positif, l'auteur prouve que celui-ci permet d'assurer la raideur voulue de la courbe caractéristique, notamment entre des limites de déplacement importantes du point de vue technique, de l'ordre de 1 à 2 microns.

СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЛЕЙНЫХ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ СИГНАЛОВ

Л. ХЕЛЬМ

РЕЗЮМЕ

Необходимо искать такое решение, с помощью которого возможно увеличить крутизну характеристики пневматических преобразователей сигналов. Автор указывает на то, что практически можно будет добиться результатов только путем положительной обратной связи. На двух примерах различно устроенной обратной связи автор доказывает, что положительная обратная связь подходит для достижения желательной крутизны характеристики, а именно в пределах технически важных границ сдвига в области $1-2 \mu$.

THEORY OF THREE-PHASE BRIDGE SELF-SATURATING MAGNETIC AMPLIFIERS*

Part II

CHARACTERISTICS OF THE CIRCUIT

I. NAGY

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH LABORATORY FOR AUTOMATIC OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received April 12, 1961]

The second part of the paper is based on the results of the first and is concerned with determining the characteristics of the circuit defined in the title. It is shown that the control characteristic of the circuit is mathematically of the same shape as that of a single-phase self-saturating magnetic amplifier obtained under similar conditions. Basic design relations are presented. The power gain, time constant and figure of merit of the amplifier are treated.

Symbols

The numbering of both formulae and figures is continued from Part I of the paper [1].

The instantaneous values of currents and voltages are designated by small letters, the mean, r. m. s. and peak values by capitals. In the case of r. m. s. and peak values the letters r and p respectively have been used as suffixes. The letters L and C in the suffix are used to denote quantities belonging to the load and control circuits respectively. A bar above the letter has been used to mark the relative value of the quantity concerned, e. g.

$$\bar{I}_L = \frac{I_L}{I_{L,\max}}$$

is the relative value of the load current.

Letters with dashes symbolize the values of quantities reduced to the gate winding.

A_{Fe}	Cross section of core [cm ²],
A_G	Useful window area occupied by the gate winding [cm ²],
B_s	Saturation induction [Vs cm ⁻²],
K_I^s	Current gain,
K_P	Power gain,
K_U	Voltage gain,
f	Supply frequency [s ⁻¹]
H_c	Maximum of the magnetizing field strength [A cm ⁻¹],
I	Current [A],
I_a	Current in the forward direction through the rectifier a [A],
I_C	Control current [A]
$I_c = \Phi_s / N_G A$	Maximum of the magnetizing current (with respect to the gate winding) [A],
$\Delta I_{C,\max}$	Greatest change of control current in the operating range [A],
$I_G = I_{G,x} + I_{G,s}$	Resultant current through gate winding [A],
$I_{G,s}$	Saturation current in gate winding [A],
$I_{G,x}$	Magnetizing current in gate winding [A],
$I_L = I_{L,x} + I_{L,s}$	Resultant load current [A],
I_l	Line current [A],
$I_{L,s}$	Saturation current through load [A],
$I_{L,x}$	Resultant magnetizing current through load [A],
$I_R = k I_C$	Ratio of the momentary supply voltage to that supply voltage which will just take the flux in the core from negative saturation to positive saturation, in the case of minimum load current,
k	

* The first part of this study has been published on pages 199–226 of volume 41.

k_f	Form factor,
K	Utilization factor,
$L = N_0^2 A$	Unsaturated inductivity of gate winding [Hy],
l_{Fe}	Mean length of core [cm],
m	Slope of control characteristic,
N	Number of turns,
R	Resistance [Ω],
R_C	Resistance of control circuit [Ω],
R_i	Sum of the resistance of one gate winding and the forward resistance of the rectifier belonging to it [Ω],
R_L	Load resistance [Ω],
$R_0 = 2R_i + R_L$	
R_T	Transfer resistance [Ω],
t	Time [s],
U_C	Control voltage [V],
U_{max}	Maximum of the mean value of the voltage applied to the gate winding [V],
U_p	Line supply voltage, peak value [V],
$U_{p,s}$	The peak value of the line voltage at which the flux oscillates between $+\Phi_s$ and $-\Phi_s$, if the load current is a minimum [V],
U_r	Supply line voltage, r. m. s. value [V],
P_a	Volt-ampere power output of one transductor core [VA],
$\Delta P_{C,max} = 4I_c^2 R_C$	Greatest change of control power within the operating range for $k = 1$ [W],
$P_{0,max}$	Mean value of maximum power output [W],
s_G	Current density of gate winding [$A\text{ cm}^{-2}$],
T	Time constant [s],
$X = \omega L$	Unsaturated reactance of gate circuit [Ω],
α	Firing angle,
β	$= \alpha + \frac{\pi}{3}$
A	$= \frac{\mu A_{Fe}}{l_{Fe}}$
$\psi = N\Phi$	Flux in winding [Vs],
Φ	Flux [Vs],
Φ_s	Saturation flux [Vs],
Φ_1	Initial flux [Vs],
ω	$= 2\pi f [s^{-1}]$,
Θ	Excitation [A],
$\mu = \frac{B_s}{H_c}$	Unsaturated permeability of core $\left[\frac{Vs}{Acm} \right]$.

I. Introduction

Familiarity with the principle of operation of the circuit [1], permits its characteristics to be determined. The first of these to be considered is the control characteristic which describes the connection between the mean value of the load current and the control current, to be followed by the establishment of basic relations for design.

Comparisons are made from several points of view between one- and three-phase self-saturating magnetic amplifiers. It is shown that in theory a set of six transductors in a three-phase self-saturating circuit will yield 36

per cent more power for maximum drive ($a = 0$), than if the same transducers were used in a single-phase self-saturating circuit.

The expression for the power gain, time constant and figure of merit of the circuit under investigation are determined. The power gain and figure of merit theoretically show an increase by a factor of 1.36 with respect to the single-phase self-saturating circuit.

The time constant may, if it is long compared to the period of the supply voltage, be determined from the control characteristic, as with single phase magnetic amplifiers.

II. Control characteristics

The load current is considered as the sum of two currents — the saturation and the magnetization current [1].

A saturation current will only flow if two cores are contemporaneously saturated. For this reason the saturation current in part 1 of the first stage is zero, in all other cases however, it differs from zero (see [1], Table 1). It assumes its highest value for the case $a = 0$. There is then no flux change in the cores. The supply voltages are balanced only by the potential drops across the resistances. In this condition the magnetic amplifier circuit behaves as a common three-phase Graetztype rectifier.

A magnetizing current flows through the gate windings of the cores when the particular core is in the condition of undergoing a flux change. The flux change and consequently the magnetizing current is greatest for $a = 2\pi/3$. The saturation current is then zero.

The control characteristic is determined in two steps. First the change of the saturation current then that of the magnetization current is determined as a function of the control current.

1. The saturation current

First stage. The mean value of the saturation current in the first stage e. g. in the range of $\pi/3 \leq \omega t \leq 2\pi/3$ (see [1], Fig. 8b) is

$$I_{L,s} = \frac{3}{\pi} \frac{1}{R_0} \int_{\beta - \frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-u_{2-3}) d(\omega t). \quad (29)$$

Hence

$$I_{L,s} = \frac{3}{\pi} \frac{U_p}{R_0} (1 + \cos \beta), \quad (30)$$

where

$$R_0 = 2 R_i + R_L. \quad (31)$$

In the examination of the principle of operation, R_i was for the sake of simplicity neglected when determining the voltage distribution. With respect to the value of the saturation current, however, it is desirable to consider its effect.

From the expressions (6) and (21) of Part I, moreover from (30) above, the saturation current depends on the control current according to the linear expression

$$I_{L,s} = \frac{3}{\pi} \frac{U_p}{R_0} \left(\frac{2k-1}{2k} + \frac{1}{2k} \frac{I'_c}{I_c} \right). \quad (32)$$

The relation

$$I_c = \frac{1}{N_G A} \Phi_s \quad (33)$$

has here also been considered.

The explanation for this linear relation is that both the flux Φ_1 [equation (21)], and the saturation current [equation (30)] depend on the cosine of the angle β .

Second stage. The mean value of the saturation current in the second stage, e. g. in the range of $\pi/3 \leq \omega t \leq 2\pi/3$ (Fig. 13b), is

$$I_{L,s} = \frac{3}{\pi} \frac{1}{R_0} \left[\int_{\beta}^{\frac{\pi}{3}} (-u_{3-1}) d(\omega t) + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} u_{1-2} d(\omega t) \right]. \quad (34)$$

Hence

$$I_{L,s} = \frac{3}{\pi} \frac{U_p}{R_0} \cos \left(\beta - \frac{\pi}{3} \right). \quad (35)$$

The maximum value of $I_{L,s}$ and also of the load current, from (35), is

$$I_{L,\max} = I_{L,s,\max} = \frac{3}{\pi} \frac{U_p}{R_0}, \quad (36)$$

in the case of $\beta = \frac{\pi}{3}$. The maximum value of the voltage across the load is

$$U_{L,\max} = \frac{3}{\pi} \frac{R_L}{R_0} U_p. \quad (37)$$

From the expressions (6), (27), moreover (33) and (35), the equation for the relation between the saturation current and the control current in the second stage is again found to be the same as (32). Equation (32) is therefore valid over the whole operating range. Let this expression be rewritten in relative units. Let the reference quantity for the saturation current be $I_{L,\max}$ and for the control current the value

$$I_R = k I_c. \quad (38)$$

The relation between the saturation current and the control current may then be written in the form

$$\bar{I}_{L,s} = \frac{2k-1}{2k} + \frac{1}{2} \bar{I}'_c, \quad (39)$$

where

$$\bar{I}_{L,s} = \frac{I_{L,s}}{I_{L,\max}} \quad (40)$$

and

$$\bar{I}'_c = \frac{I'_c}{I_R}. \quad (41)$$

Equation (39) has been shown in Fig. 15a.

2. The magnetizing current

Depending on the core material used and on the quality of the rectifier, the largest mean value of the magnetizing current (the current flowing in the load circuit when $\alpha = 2\pi/3$) is smaller by one or more orders of magnitude than $I_{L,s,\max}$. For this reason the magnetizing current only exerts an appreciable influence on the course of the control characteristic at a minimum load current and in its immediate vicinity.

The mean value of the magnetizing current flowing through the load at full drive ($\alpha = 0$), moreover at the most interesting value in the case of minimum load current ($\alpha = 2\pi/3$), are the easiest to determine.

In the case of full drive there is no change of flux in the cores. The value of the magnetizing current is zero.

The control current $I_{C,\min}$ (when $\alpha = 2\pi/3$) is accompanied by the flow of only the magnetization current defined in equation (14) through the load. The mean value of this current, from (14), is

$$I_{L,x} \left| \begin{array}{l} \\ \alpha = 2\pi/3 \end{array} \right. = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} k I_c. \quad (42)$$

The equations (20), (21), (22) and (33) have here also been considered.

As the firing angle is decreased, so the magnitude of the flux change in the cores diminishes and with it also the mean value of the magnetizing current passing through the load.

On the basis of the above it seems convenient to make the simplifying assumption that $I_{L,x}$ also changes linearly as a function of the control current. It assumes its greatest value for $I'_{C,\min}$ [equation (42)], and its smallest value

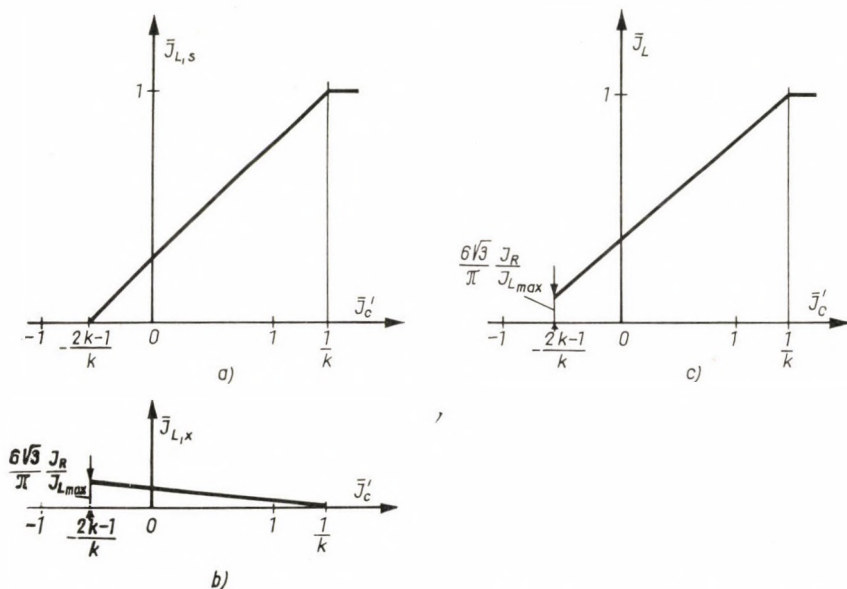


Fig. 15. The change in the mean value of the saturation current and the magnetization current flowing through the load, as a function of the control current (Figs. a and b), moreover the resultant load current — control current control characteristic (Fig. c) in relative units

(zero) for $I'_{C,\max}$ (at $a = 0$). Fig. 15b shows the assumed linear change of the relative value of the current $I_{L,x}$ as a function of the control current for a particular value of k .

The equation of the straight line $I_{L,x}(I_c)$ in relative units is

$$\bar{I}_{L,x} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \frac{I_R}{I_{L,\max}} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2} \bar{I}'_C \right). \quad (43)$$

Let the value $I_R/I_{L,\max}$ be expressed, using (20), (22), (36) and (38), as

$$\frac{I_R}{I_{L,\max}} = \frac{I_c}{\frac{3}{\pi} \frac{U_{p,s}}{R_0}} = \frac{\pi}{2} \frac{R_0}{3X}, \quad (44)$$

where

$$X = \omega L = \frac{N_L \Phi_s}{I_c}$$

is the reactance of one gate winding in the condition of flux change. From (43) and (44)

$$\bar{I}_{L,x} = \sqrt{3} \frac{R_0}{X} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2} \bar{I}'_c \right). \quad (45)$$

3. Load current

The load current is the sum

$$\bar{I}_L = \bar{I}_{L,s} + \bar{I}_{L,x} \quad (46)$$

of the saturation and the magnetization current.

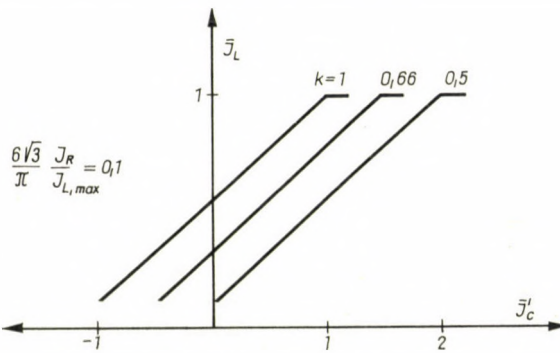


Fig. 16. The control characteristics for $k = 1, 0.66$ and 0.5

According to equations (39), (45) and (46), the required equation of the control characteristic is

$$\bar{I}_L = \bar{m} \left(\bar{I}'_c - \frac{1}{k} \right) + 1, \quad (47)$$

where

$$\bar{m} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{3} \frac{R_0}{X} \right) \quad (48)$$

is the slope of the characteristic. Since generally $\sqrt{3} R_0/X \ll 1$ it may approximately be stated that $\bar{m} \approx 1/2$.

The control characteristic in relative values for the general case has been shown in Fig. 15c, for some actual values of k in Fig. 16.

The conclusions that may be drawn from the equation of the characteristic and from Figs. 15 and 16 are that:

a) The equation of the control characteristic corresponds to the equation familiar for the single-phase self-saturating amplifier, deduced under similar conditions [2].

b) The slope of the control characteristic is

$$\frac{d I_L}{d I'_c} \cong \frac{3}{\pi} \frac{X}{R_0},$$

i. e. it is proportional to the relation of the unsaturated reactance of the gate winding to resultant resistance of the load circuit. The slope of the measured control characteristic permits the value of X to be determined hence the value of the permeability μ

$$\mu = \frac{1}{\omega N_G^2} \frac{l_{Fe}}{A_{Fe}} X$$

belonging to the unsaturated section of the idealized dynamic hysteresis loop.

c) The shape and slope of the control characteristic are independent of the supply voltage. If the supply voltage is decreased, however, the control characteristic is shifted to the right, parallel to itself.

The equation of the control characteristic has permitted the determination of the quantitative features of the static behaviour of this magnetic amplifier circuit. They are

$$\text{Transfer resistance: } R_T = \frac{\Delta U_L}{\Delta I_C} \cong \frac{3}{\pi} \frac{N_C}{N_L} \frac{R_L}{R_0} X; \quad (49A)$$

$$\text{current gain: } K_I = \frac{\Delta I_L}{\Delta I_C} \cong \frac{3}{\pi} \frac{N_C}{N_L} \frac{X}{R_0} = \frac{R_T}{R_L}; \quad (49B)$$

$$\text{voltage gain: } K_U = \frac{\Delta U_L}{\Delta U_C} \cong \frac{3}{\pi} \frac{N_C}{N_L} \frac{R_L}{R_C} \frac{X}{R_0} = \frac{R_T}{R_C}; \quad (49C)$$

$$\text{power gain: } K_P = K_I \cdot K_U \cong \frac{(\Delta I_L)^2 R_L}{(\Delta I_C)^2 R_C} = \frac{R_T^2}{R_L R_C}. \quad (49D)$$

III. Design fundamentals

1. Supply voltage

The largest voltage is developed across the gate windings for the case of minimum load current. This also is when the change of flux is greatest. The flux oscillates between $\Phi_{1,\min}$ and Φ_s . For example the maximum of

the mean value of the voltage across the gate winding A is

$$U_{\max} = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-u_{3-1}) d(\omega t) = \frac{U_p}{\pi}$$

(Fig. 5a).

In the case of the single-phase self-saturated magnetic amplifier the maximum of the mean value of the voltage applied to one gate winding is

$$U_{1,\max} = \frac{2}{\pi} U_{p1}.$$

The suffix 1 here refers to the single-phase circuit.

If the same maximum flux oscillation is to be permitted in the single-phase and three-phase arrangements, then

$$U_{\max} = U_{1,\max}$$

and therefore

$$U_r = 2 U_{r1}, \quad (50)$$

where U_{r1} is the r.m.s. value of the supply voltage in a single-phase circuit.

According to (50) the r.m.s. value of the line voltage may in the three-phase circuit be twice as high as the r.m.s. value of the supply voltage that can be used in a single-phase circuit.

The supply voltage of transducers is generally known for a single-phase circuit. In this case the line voltage that can be used in a three-phase arrangement is established from (50).

If, for example, the supply voltage of the transducer in a single-phase self-saturating circuit is 110 V_{eff} , then the line voltage to be applied in the case of a three-phase bridge circuit constructed of six similar transducers, is 220 V_{eff} .

Usually the maximum values of the output voltage ($U_{L,\max}$) and the output current ($I_{L,\max}$) are stipulated when design a three-phase magnetic amplifier. In this case the r.m.s. value of the line voltage may, on the basis of (37), be determined from the equation

$$U_r = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \frac{R_0}{R_L} U_{L,\max}. \quad (51A)$$

$\frac{R_0}{R_L}$ is, especially in the case of larger amplifiers, a number close to unity. If core material of a poorer quality is used, the inductance of the saturated core may not be neglected. In this case the supply voltage must be increased.

The necessary measure of increase in supply voltage may be achieved by suitably raising the ratio $\frac{R_0}{R_L}$, in a manner appropriate to the quality of the core, the construction and the rectifier [3].

Once the supply voltage is known, the fundamental relation for the design of the core is

$$A_{Fe} N_L = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{U_r}{fkB_s}, \quad (51B)$$

from (20).

2. Current in the gate winding

To determine the cross-section of the gate winding it is necessary to know $I_{Gr,max}$, the maximum of the r.m.s. value of the current flowing through the gate winding. From the theory of rectification

$$I_{Gr,max} = \frac{I_{Lr,max}}{\sqrt{3}} = k_{f3} \frac{I_{L,max}}{\sqrt{3}}. \quad (52A)$$

The suffix 3 refers to the three-phase circuit.

Since the form factor of the maximum of the load current, $k_{f3} \cong 1$,

$$I_{Gr,max} = \frac{I_{L,max}}{\sqrt{3}}. \quad (52B)$$

3. The utilization factor of the transductor [4]

The utilization factor K_t of the transductor is defined as follows: K_t is the ratio of the portion of the maximum output power $P_{0,max}$ due to one transductor core, to the volt-ampere power P_a of the transductor core. In the present case, if internal losses are neglected,

$$K_{T3} = \frac{P_{03,max}}{P_{a3}} = \frac{1}{6} \frac{U_{L,max} I_{L,max}}{\frac{1}{2} U_r I_{Gr,max}}. \quad (53)$$

Let the values of U_r and $I_{Gr,max}$ be substituted from (51A) and (52B) respectively, then

$$K_{T3} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0.78.$$

For the single-phase self-saturating magnetic amplifier

$$K_{T1} = \frac{\frac{P_{01\max}}{2}}{P_{a1}} = \frac{1}{1.11^2 \sqrt{2}} = 0.574,$$

so that

$$\frac{K_{T3}}{K_{T1}} = 1.36. \quad (54)$$

The utilization factor is thus 1.36 times as great in a three-phase circuit than in a single-phase one; 1.36 times the power may be extracted from the gate winding of the same transductor core in a three-phase arrangement, than in the single-phase case.

Consider for example six identical transductors and let them first be arranged in a three-phase bridge circuit (Fig. 1), then in a single-phase, DC self-saturating system. In the latter case let the three gate windings be connected in series with one another. The maximum voltage across the load will — if losses are neglected — be $\frac{3}{\pi} U_p$, in the first case and $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{3U_p}{2}$ in the second [see equation (50)], i.e. the same in both cases. The transductors will be, subjected to the same heating if the value of the maximum r.m.s. current $I_{Gr,\max}$ flowing through the gate winding is the same in both cases. In the case of a single-phase arrangement

$$I_{Gr,\max,1} = \frac{k_{f1}}{\sqrt{2}} I_{L,\max,1}.$$

Hence, and from the equality of (52A),

$$I_{L,\max} = \frac{k_{f1}}{k_{f3}} \sqrt{\frac{3}{2}} I_{L,\max,1} = 1.36 I_{L,\max,1}. \quad (54A)$$

The mean value of the load current in a three-phase circuit may therefore be 1.36 times as great as in the single-phase case.

4. Control current

The greatest change of control current within the control range is

$$\Delta I'_{C,\max} = 2k I_c = 2k \frac{H_c l_{Fe}}{N_L}. \quad (55)$$

5. Rectifier.

The peak value of the maximum reverse voltage across, for instance, the rectifier a (see Fig 11a) is

$$U_{ap} = U_p. \quad (56)$$

The r.m.s. value of the maximum current through any rectifier unit in the forward direction is the same as $I_{Gr,max}$ [see (52B)], i. e.

$$I_{ar,max} = \frac{I_{L,max}}{\sqrt{3}}. \quad (57)$$

6. Utilization factor of the rectifier

The utilization factor K_r of the rectifier is defined as follows: K_r is the ratio of the portion of the maximum output power due to one rectifier, to the volt-ampere power of the rectifier. In the present case

$$K_{r3} = \frac{\frac{1}{6} U_{L,max} I_{L,max}}{U_{ap} I_{ar,max}}. \quad (58)$$

Substituting the values of U_{ap} and $I_{ar,max}$ from (56) and (57), moreover considering (37),

$$K_{r3} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.276.$$

For a single-phase Graetz circuit rectifier the utilization factor is

$$K_{r1} = \frac{\frac{P_{01,max}}{4}}{P_{a1}} = \frac{2}{\pi^2} = 0.203,$$

so that

$$\frac{K_{r3}}{K_{r1}} = \frac{\sqrt{3} \pi}{4} = 1.36. \quad (59)$$

Here again the utilization factor is 1.36 times as great for a three-phase Graetz circuit as for a single-phase one. The power obtainable from a given number of rectifiers in a three-phase circuit is 1.36 times that obtainable from them in a single-phase arrangement.

Once more, as in the case of the transductor cores the increase in the power obtainable is explained by a 1.36-fold increase in the permissible output current. In actual practice, in the case of selenium rectifiers for instance, it is usual due to their non-linearity to use a factor of 1.5 in place of 1.36.

The three-phase circuit offers a still more advantageous power yield with respect both to the transducers and the rectifiers if the design considers heating at a power output smaller than the maximum. This is a frequent case in automatic controls, especially where the amplifier acts on an I-type device or else has also to transfer a D effect. In these cases the magnetic amplifier only yields its maximum output power for a short time. If, for instance, the design of the magnetic amplifier is undertaken with a view to the heating caused by 60 per cent of the maximum load current, then in the case of a three-phase bridge circuit the form factor $k_{f3} = 1.07$, while for the single-phase self-saturating circuit $k_{f1} = 1.46$. According to the relation (54A),

$$I_{L,\max} = \frac{1.46}{1.07} \sqrt{\frac{3}{2}} I_{L,\max} = 1.67 I_{L,\max,1}.$$

In this case therefore the utilization factor with respect both to the transducer and the rectifier is 1.67 times as great for a three-phase arrangement as for a single-phase circuit [5].

7. Line current

The line current, for instance in phase 1, is $i_{GA} + i_{GA'}$ (see Fig. 13c). The maximum of the r.m.s. value of the line current, if the current wave-shape is taken to be approximately rectangular, is

$$I_{lr,\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_{L,\max}. \quad (60)$$

8. Power factor

The power factor for the case of maximum output power is determined by the expression

$$\cos \varphi = \frac{U_{L,\max} I_{\max}}{\sqrt{3} U_r I_{lr,\max}}. \quad (61)$$

From (37) and (60),

$$\cos \varphi = \frac{3}{\pi} = 0.955.$$

IV. Power gain

Let the expression for the power gain given in equation (49D) be written in a form that is easier for the designer of a transducer to use. From the expression (30), (51B) and

$$X = \omega L = \omega N_L^2 \frac{B_s A_{Fe}}{H_c l_{Fe}}, \quad (62)$$

moreover using the relation

$$s_G = \frac{I_{L,\max} N_L}{3 A_G}, \quad (63)$$

the power gain

$$K_p = 3 \sqrt{3} f \frac{R_L N_C^2 k B_s \cdot s_G \cdot A_{Fe} A_G}{R_0 R_C (k H_c)^2 l_{Fe}^2}. \quad (64)$$

The power gain may thus be increased mainly by using better core material (larger B_s/H_c values) and raising the supply frequency. In the case of similar amplifiers K_p increases approximately in proportion to the cube of the linear dimensions.* The use of a toroid core is most favourable, since this is where l_{Fe} is smallest.

K_p in the circuit under review is 1.36 times greater than for case of a single-phase bridge self-saturating magnetic amplifier. The reason is that compared to the single-phase arrangement the control power increases three-fold, but the output power 1.36 3-fold [6].**

V. Time constant

In considering the transient process, the assumption so far made with regard to the impedance of the control circuit must, of course, be abandoned. Let the duration of the transient process be long compared to the period of the supply voltage, then average values may be used in place of time functions in the examination of the transient.

The average value of the winding flux related to the control winding of any core is approximately

$$\psi_{av} \cong \frac{1}{2} (\psi_s + \psi_1). \quad (65)$$

From equation (6)

$$\psi_{av} \cong \frac{1}{2} (\psi_s + N_C^2 \Delta I_C). \quad (66)$$

The value of ψ_{av} depends on the control current only. The control circuit may therefore be replaced by an equivalent circuit consisting of an inductance and a resistance in series. The time constant of the control circuit

* In actual fact R_L/R_0 and s_G also change with the linear dimensions.

** The fact has here been neglected that in a three-phase circuit the value of H_c will also increase, due to the increased rate of flux change.

and, since there is no time lag between the control current and load current, the time constant of the magnetic amplifier is

$$T = \frac{6}{R_C} \frac{d\psi_{av}}{dI_C}. \quad (67)$$

From (66)

$$\frac{d\psi_{av}}{dI_C} \cong \frac{1}{2} N_C^2 A = \frac{L_C}{2}, \quad (68)$$

where $L_C = N_C^2 A$ is the unsaturated inductance of one control winding. Hence

$$T \cong 3 \frac{L_C}{R_C}. \quad (69)$$

In order better to understand the approximation contained in (65), consider the following:

Equation (65) would in every control situation only be true if the various core fluxes remained for equal times at the values $+\Phi_s$ and Φ_1 , moreover if the changes in the positive and negative directions took place symmetrically. It is only in the two extreme conditions (for $I'_{C,\min}$, $\alpha = 2\pi/3$ and I_c , $\alpha = 0$) that (65) yields an accurate value of ψ_{av} . According to the equations (12), the resultant winding flux related to the control circuit is in the case of minimum load current at any instant

$$6\psi_{av} \Big|_{\alpha=2\pi/3} = 3(\psi_s + \psi_{1,\min}). \quad (65A)$$

For maximum load current

$$6\psi_{av} \Big|_{\alpha=0} = 6\psi_s, \quad (65B)$$

The change of control current between the two extreme control values is

$$\frac{N_G}{N_C} I_c - I_{C,\min}.$$

If the curve $\psi_{av} = \psi_{av}(I_C)$ is replaced by a straight line passing through the points corresponding to the two extreme operating conditions, then from (65A) and (65B),

$$\frac{d\psi_{av}}{dI_C} = \frac{\frac{1}{2} \psi_s - \psi_{1,\min}}{(N_G/N_C) I_c - I_{C,\min}} = \frac{L_C}{2},$$

which corresponds to the expression (68). Thus in the deduction of (69), the inductance has been calculated from the gradient of the straight line passing through the points corresponding to the two extreme operating conditions, instead of the tangent at the particular value of I_C concerned.

The expression for the time constant may be reduced to a form which is much easier to handle in practice. Substituting the value of I_C from (47) in (66) and differentiating with respect to I_C ,

$$\frac{d\psi_{av}}{dI_C} \cong I_C \frac{I_R}{I_{L,max}} \frac{1}{2\bar{m}} \frac{N_G}{N_C} \frac{dI_L}{dI_C}. \quad (70)$$

Since $\bar{m} \cong \frac{1}{2}$, from (44)

$$\frac{d\psi_{av}}{dI_C} \cong \frac{1}{12f} R_0 \frac{N_C}{N_G} \frac{dI_L}{dI_C}. \quad (71)$$

From (67) and (71) the time constant

$$T \cong \frac{1}{2f} \frac{R_0}{R_C} \frac{N_C}{N_G} \frac{dI_L}{dI_C}. \quad (72)$$

The time constant is proportionate to the slope of the control characteristic. The determination of the time constant from (72) is very simple. Only static measurements are now needed.

With the help of (72) the time constant may be related to the expressions (49B) for the current gain and (49C) for the voltage gain:

$$T \cong \frac{1}{2f} \frac{R_0}{R_C} \frac{N_C}{N_G} K_I = \frac{1}{2f} \frac{R_0}{R_L} \frac{N_C}{N_G} K_U. \quad (73)$$

In the course of design, good use can be made of the form

$$T \cong 12 \frac{B_s N_c A_{Fe} l_{Fe}}{\Delta P_{C,max}} \quad (74)$$

of the time constant, which may be obtained from (69).

For transducers of identical power ($B_s A_{Fe} l_{Fe} = \text{const.}$), the time constant may be reduced by increasing the control power and using better core material (with smaller H_c). Here too, the use of a toroid core is most favourable.

T for the circuit under investigation is of the same magnitude as in the case of the single-phase bridge self-saturating magnetic amplifier. The reason is that the resistance and the inductance in the control circuit have both been trebled, compared to the single-phase arrangement.

VI. Figure of merit

The figure of merit is defined as the ratio

$$J = \frac{K_p}{T}.$$

According to (49D) and (69), this may also be expressed in the form

$$J = \frac{I_{L,\max}^2 R_L}{\frac{1}{2} \Delta I_{C,\max}^2 6L_C}. \quad (75)$$

J increases as the power output, and conversely with the magnetic energy stored in the magnetic field linked to the control winding.

From (75), using (22), (38) and (44)

$$J \simeq \frac{6}{\pi} f \frac{R_L}{R_0^2} X. \quad (76)$$

The figure of merit is primarily influenced by f and the quotient $\frac{X}{R_0}$.

J increases as the ratio of the unsaturated reactance of the gate winding to the resistance of the load circuit is increased.

Let J be put in a form more handy for the transductor designer, by using (64) and (74) to write

$$J \simeq 3f \frac{R_L}{R_0} \frac{s_G A_G}{k H_c l_{Fe}}. \quad (77)$$

In the case of a given transductor power (for $f s_G B_s A_G A_{Fe} = \text{const.}$), the figure of merit may be increased by increasing f and $\frac{A_G}{A_{Fe}}$, and by decreasing H_c and l_{Fe} ($\frac{R_0}{R_L} = \text{const.}$). The increase of $\frac{A_{Fe}}{A_G}$ is limited in the case of power transductors by the growth in the internal reactance of the saturated transductor.

Acknowledgements

The author would like to avail himself of this opportunity to thank prof. I. RÁCZ for his help and advice in respect to this paper, and engineer Mrs. D. MIKLÓS for her selfless assistance.

REFERENCES

1. NAGY, I.: Theory of three-phase bridge self-saturating magnetic amplifiers, Part I. Principle of operation. *Acta Techn. Hung.* **41** (1962), 199.
2. NAGY, I.: Self-saturating magnetic amplifier (Öntelítő mágneses erősítő). *Elektrotechnika* (1959), 430—446.

3. KRATZ, P.—LANG, A.: Bauelemente und Typenreichen magnetischer Verstärker. *AEG Mitteilungen* (1959), 413—434.
4. STORM, H. F.—FLAIRTY, C. W.: Theory of the three-phase bridge magnetic amplifiers. *AIEE Transactions*, Part I. (1959), 878—895.
5. MILNES, A. G.: Transducers and magnetic amplifiers. Macmillan & Co. Ltd., 1957.
6. ZABEL, R.: Neue Magnetverstärker-Bauelemente. *Siemens Zeitschrift* (1956).
7. CSÁKI, F.—FRIGYES, A.: Magnetic amplifiers with classical circuits (Klasszikus kapcsolású mágneses erősítők.) *Elektrotechnika* (1957), 294—308.
8. Писарев, А. Л.: О характеристике управления магнитных усилителей, работающих на трехфазную нагрузку. *Автоматика и Телемеханика* (1959), 622—632.

THEORIE DER DREIPHASIGEN, SELBSTSÄTTIGENDEN MAGNETVERSTÄRKER IN BRÜCKENSCHALTUNG

II. TEIL: DIE KENNZEICHEN DER SCHALTUNG

I. NAGY

ZUSAMMENFASSUNG

Der zweite Teil der Arbeit baut auf die Ergebnisse des ersten Teils auf und beschäftigt sich mit der Bestimmung der Kennzeichen der in der Überschrift genannten Schaltung. Es wird gezeigt, daß die statische Kennlinie der Schaltung mathematisch genau die gleiche Form hat wie die unter gleichen Voraussetzungen gewonnene des einphasigen, selbstsättigenden Magnetverstärkers. Die grundlegenden Zusammenhänge für die Dimensionierung werden mitgeteilt; die Leistungsverstärkung, die Zeitkonstante und der Gütefaktor des Verstärkers werden behandelt.

THÉORIE DE L'AMPLIFICATEUR MAGNÉTIQUE AUTO-SATURANT TRIPHASÉ MONTÉ EN PONT

PART II: CARACTÉRISTIQUES DU MONTAGE

I. NAGY

RÉSUMÉ

Cette deuxième partie de l'étude, basée sur les résultats de la partie précédente, est consacrée à la détermination des caractéristiques du montage indiqué. Il est démontré que la caractéristique statique du montage a la même forme mathématique que celle de l'amplificateur magnétique auto-saturant monophasé, déterminée dans des conditions semblables. L'auteur présente des relations fondamentales pour le calcul et traite de l'amplification de puissance, de la constante de temps et du facteur de qualité de l'amplificateur.

ТЕОРИЯ ТРЕХФАЗНОГО САМОНАСЫЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО УСИЛИТЕЛЯ МОСТОВОЙ СХЕМЫ

II. ЧАСТЬ: ОСНОВНЫЕ ЛАННЫЕ СХЕМЫ

И. НАДЬ

РЕЗЮМЕ

Вторая часть статьи основывается на результатах первой части и занимается определением основных данных схемы. Показано, что статическая характеристика схемы имеет математически такую же форму, как и однофазный самонасыщающийся магнитный усилитель при идентичных условиях. Сообщаются основные зависимости для расчетов. Рассматривается усиление мощности, постоянная времени и добротность усилителя.

STRESSES AND DEFORMATIONS DUE TO TANGENTIAL FORCES ACTING ALONG THE PERIMETER OF A CIRCULAR CUT SET IN AN ELASTIC PLANE

L. RÓZSA

CAND. OF TECHN. SC.

G. KOVÁCS and L. KOHLMANN

„UVATERV” HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received June 19, 1961]

The paper deals with stress and strain conditions in planar elastic medium round a circular cut out due to tangential forces acting on the periphery of it. This analysis will be made by using methods of mathematical theory of elasticity. As a result of the investigations, the authors deduced closed shape functions. To achieve this purpose they had to determine the sum-functions of some Fourier series not known in this relation from the literature yet. After determining the sum-functions, the radial σ_r , tangential σ_θ and shearing τ stresses, as well as the radial U and tangential V displacement functions are obtained in closed form by the application of basic equations of the theory of elasticity.

It is frequently to be found in engineering that stresses produced at various points by tangential forces, as deformations due to these stresses are also investigated along the perimeter of a circular cut, *i. e.* a bored hole, made in an elastic medium. As an example: the same problem is faced, if we consider the effect of friction between the lining of a circular tunnel and the surrounding ground. This effect has been treated with certain approximations only.

An exact solution, based on the theory of elasticity may be found in [1] in the form of slowly convergent infinite series. A finite explicit formula has been developed by authors in the present treatise, for the solution of this problem.

Mathematical introduction

During the following discussion we shall need the sum-functions of the Fourier series. Let us determine, therefore, the sum of following infinite series:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin na \sin n\beta \cos n\theta; & S_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin na \sin n\beta \sin n\theta \\ C_n &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin na \sin n\beta \cos n\theta}{n}; & S_n &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin na \sin n\beta \sin n\theta}{n} \\ C_{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin na \sin n\beta \cos n\theta}{n-1}; & S_{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin na \sin n\beta \sin n\theta}{n-1} \\ C_{n+1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin na \sin n\beta \cos n\theta}{n+1}; & S_{n+1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin na \sin n\beta \sin n\theta}{n+1} \end{aligned} \right\} (1)$$

and

$$\left. \begin{aligned} C_{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n\alpha \sin n\beta \cos n\theta}{n(n-1)}; & S_{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\theta}{n(n-1)} \\ C_{n(n+1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n\alpha \sin n\beta \cos n\theta}{n(n+1)}; & S_{n(n+1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\theta}{n(n+1)} \end{aligned} \right\} (2)$$

Since

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

as an initial step, the series (2) may be expressed by relations (1) as follows

$$\begin{aligned} C_{n(n-1)} &= C_{n-1} - C_n & \text{és} & & S_{n(n-1)} &= S_{n-1} - S_n, \\ C_{n(n+1)} &= C_n - C_{n+1} & \text{és} & & S_{n(n+1)} &= S_n - S_{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

In the following we should be concerned with the relations (1) only. It is well known, that

$$\begin{aligned} \sin n\alpha \sin n\beta \cos n\theta &= \frac{1}{4} [\cos nx_1 - \cos nx_2 + \cos nx_3 - \cos nx_4], \\ \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\theta &= \frac{1}{4} [\sin nx_1 - \sin nx_2 + \sin nx_3 - \sin nx_4], \end{aligned} \quad (4)$$

wherein

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta - (\alpha - \beta); & x_3 &= \theta + (\alpha - \beta); \\ x_2 &= \theta + (\alpha + \beta); & x_4 &= \theta + (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

From the application of these relations the Fourier series (1) may be expanded to sums consisting of members having the following form:

$$\left. \begin{aligned} c_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \cos nz; & s_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin nz; \\ c_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n}; & s_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n}; \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n-1}; & s_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n-1}; \\ c_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n+1}; & s_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n+1}; \end{aligned} \right\} (6)$$

where z in accordance with (4) successively takes the values of x_1, x_2 and x_3, x_4 . The function in question may be obtained by the summation of the new series, found in this way.

The Fourier series (6) may be expressed by series (5) that is to say

$$\begin{aligned}
 c_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} R^{(n+1)} \frac{\cos(n+1)z}{n} = \\
 &= R \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos(n+1)z}{n} + R \cos 2z \right] = \\
 &= R \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \left(\frac{\cos nz}{n} \cos z - \frac{\sin nz}{n} \sin z \right) + R \cos 2z \right] = \\
 &= R [c_n(z) \cos z - s_n(z) \sin z + R \cos 2z], \\
 c_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} R^{n-1} \frac{\cos(n-1)z}{n} = \\
 &= \frac{1}{R} \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos(n-1)z}{n} - \frac{R^2 \cos z}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{R} \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \left(\frac{\cos nz}{n} \cos z + \frac{\sin nz}{n} \sin z \right) \right] - \left[\frac{R}{2} \cos z \right] = \\
 &= \frac{1}{R} [c_n(z) \cos z + s_n(z) \sin z] - \left[\frac{R}{2} \cos z \right], \\
 s_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} R^{n+1} \frac{\sin(n+1)z}{n} = \\
 &= R \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin(n+1)z}{n} + R \sin 2z \right] = \\
 &= R \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \left(\frac{\sin nz}{n} \cos z + \frac{\cos nz}{n} \sin z \right) + R \sin 2z \right] = \\
 &= R [s_n(z) \cos z + c_n(z) \sin z + R \sin 2z], \\
 s_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} R^{n-1} \frac{\sin(n-1)z}{n} = \\
 &= \frac{1}{R} \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin(n-1)z}{n} - \frac{R^2 \sin z}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{R} \left[\sum_{n=2}^{\infty} R^n \left(\frac{\sin nz}{n} \cos z - \frac{\cos nz}{n} \sin z \right) - \frac{R^2 \sin z}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{R} [s_n(z) \cos z - c_n(z) \sin z] - \left[\frac{R}{2} \sin z \right].
 \end{aligned}$$

Therefore it was proved that series (1) examined by us, may be produced with the help of Fourier series (5). The sum-functions of series (5) may be determined on the basis of geometrical progression interpreted in the complex plane. Assuming for a complex figure w , it is well known, that

$$\sum_{n=1}^{\infty} w^n = \frac{w}{1-w}; \text{ if } |w| < 1.$$

By substitution

$$w = R(\cos z + i \sin z)$$

the relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^n (\cos nz + i \sin nz) = \frac{R(\cos z + i \sin z)}{(1 - R \cos z) - i R \sin z}; \text{ if } |R| < 1,$$

is obtained. Now completing the fraction on the right side of the equation by the conjugate of the nominator and changing it into the standard form, we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos nz + i \sum_{n=1}^{\infty} R^n \sin nz = \frac{R \cos z - R^2}{1 - 2R \cos z + R^2} + i \frac{R \sin z}{1 - 2R \cos z + R^2};$$

if $|R| < 1$.

Further by the use of relation

$$\frac{R \cos z - R^2}{1 - 2R \cos z + R^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - R^2}{1 - 2R \cos z + R^2} - 1 \right]$$

we can find by comparison of the real and imaginary parts, that:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos nz &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - R^2}{1 - 2R \cos z + R^2} - 1 \right] \\ \sum_{n=1}^{\infty} R^n \sin nz &= \frac{R \sin z}{1 - 2R \cos z + R^2} \end{aligned} \right\} \text{ if } |R| < 1.$$

To determine the other two sums of the expression (5) the geometrical progress will be used in the following form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} = \frac{1}{1-w}; \text{ if } |w| < 1.$$

The geometrical progress may be integrated by members. After the integration of both sides, we get:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} = -\ln(1-w); \text{ if } |w| < 1.$$

Performing here the substitution

$$w = R(\cos z + i \sin z),$$

we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(\frac{\cos nz}{n} + \frac{i \sin nz}{n} \right) = -\ln [(1 - R \cos z) - i R \sin z]; \text{ if } |R| < 1.$$

The substitution

$$(1 - R \cos z) - i R \sin z = \rho e^{i\varphi}$$

being applied, the right side of the equation will have the form

$$-\ln [(1 - R \cos z) - i R \sin z] = -\ln \rho e^{i\varphi} = -\ln \rho - i\varphi,$$

wherein

$$\rho = \sqrt{(1 - R \cos z)^2 + (R \sin z)^2},$$

and

$$\tan \varphi = -\frac{R \sin z}{1 - R \cos z} = \frac{R \sin z}{R \cos z - 1},$$

i.e.

$$\varphi = \arctan \frac{R \sin z}{R \cos z - 1},$$

so

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n} &= \\ = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2R \cos z + R^2}} + i \arctan \frac{R \sin z}{1 - R \cos z}. \end{aligned}$$

From the equality of the real and imaginary parts it follows, that

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n} &= \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2R \cos z + R^2}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n} &= \arctan \frac{R \sin z}{1 - R \cos z} \end{aligned} \right\} \text{ if } |R| \leq 1 \quad (1.12)$$

The above relation is also interpreted for the case of $R = 1$, consequently

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n} = -\frac{1}{2} \ln [2(1 - \cos z)] = -\frac{1}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{z}{2} \right) = -\ln \left(2 \sin \frac{z}{2} \right)$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} = \arctan \left(\frac{\sin z}{1 - \cos z} \right) = \arctan \left(\cot \frac{z}{2} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{z}{2} & \text{if } z > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2} & \text{if } z < 0 \end{cases}$$

In this way the sum-functions of the Fourier series (5) are determined, because it follows from the aforementioned, that

$$\begin{aligned} c_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \cos nz = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - R^2}{1 - 2R \cos z + R^2} - 1 \right] - \\ &\quad - R \cos z, \text{ if } |R| < 1 \\ c_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n} = \left[\ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2R \cos z + R^2}} \right] - \\ &\quad - R \cos z, \text{ if } \begin{cases} 0 < z < 2\pi \\ R^2 \leq 1 \end{cases} \quad (7) \\ s_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin nz = \left[\frac{R \sin z}{1 - 2R \cos z + R^2} \right] - \\ &\quad - R \sin z, \text{ if } |R| < 1 \\ s_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n} = \left[\arctg \frac{R \sin z}{1 - R \cos z} \right] - \\ &\quad - R \sin z, \text{ if } \begin{cases} 0 < z < 2\pi \\ R^2 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

in the case of $R = 1$, however

$$\begin{aligned} c_{n1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nz}{n} = \ln 2 \sin \frac{z}{2} - \cos z, \text{ if } -\pi < z < \pi, \\ s_{n1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} = \begin{cases} -\frac{z - \pi}{2} - \sin z, & \text{if } 0 < z < \pi, \\ -\frac{z + \pi}{2} - \sin z, & \text{if } \pi < z < 0. \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

The sum-functions of series (1) could easily be obtained by introducing the following vectors:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1^* &= [c_1(x_1), c_1(x_2), c_1(x_3), c_1(x_4)] \\ \mathbf{c}_n^* &= [c_n(x_1), c_n(x_2), c_n(x_3), c_n(x_4)] \\ \mathbf{s}_1^* &= [s_1(x_1), s_1(x_2), s_1(x_3), s_1(x_4)] \\ \mathbf{s}_n^* &= [s_n(x_1), s_n(x_2), s_n(x_3), s_n(x_4)], \end{aligned}$$

resp. in the case of $R = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n1}^* &= [c_{n1}(x_1), c_{n1}(x_2), c_{n1}(x_3), c_{n1}(x_4)] \\ \mathbf{s}_{n1}^* &= [s_{n1}(x_1), s_{n1}(x_2), s_{n1}(x_3), s_{n1}(x_4)]. \end{aligned}$$

Further

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^* &= [\cos x_1, -\cos x_2, \cos x_3, -\cos x_4] \\ \bar{\mathbf{c}}^* &= [\cos 2x_1, \cos 2x_2, \cos 2x_3, \cos 2x_4] \\ \mathbf{s}^* &= [\sin x_1, -\sin x_2, \sin x_3, -\sin x_4] \\ \bar{\mathbf{s}}^* &= [\sin 2x_1, \sin 2x_2, \sin 2x_3, \sin 2x_4] \\ \mathbf{e}_1^* &= [1, -1, 1, -1] \\ \mathbf{e}_2^* &= [1, 1, 1, 1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Then

$$C_1 = \frac{1}{4} \mathbf{c}_1^* \mathbf{e}_1; \quad S_1 = \frac{1}{4} \mathbf{s}_1^* \mathbf{e}_1$$

$$C_n = \frac{1}{4} \mathbf{c}_n^* \mathbf{e}_1; \quad S_n = \frac{1}{4} \mathbf{s}_n^* \mathbf{e}_1$$

and

$$C_{n-1} = \frac{R}{4} [\mathbf{c}_n^* \mathbf{c} - \mathbf{s}_n^* \mathbf{s} + R \bar{\mathbf{c}}^* \mathbf{e}_1]; \quad S_{n-1} = \frac{R}{4} [\mathbf{s}_n^* \mathbf{e} + \mathbf{c}_n^* \mathbf{s} + R \bar{\mathbf{s}}^* \mathbf{e}_1]$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{4R} \left[\mathbf{c}_n^* \mathbf{c} - \mathbf{s}_n^* \mathbf{s} - \frac{R^2}{2} \mathbf{c}^* \mathbf{e}_2 \right]; \quad S_{n+1} = \frac{1}{4R} \left[\mathbf{s}_n^* \mathbf{e} - \mathbf{c}_n^* \mathbf{s} - \frac{R^2}{2} \mathbf{s}^* \mathbf{e}_2 \right]. \quad (10)$$

By this, the sum-functions of the sought for Fourier series are determined.

Let us also introduce the Fourier series

$$C_{n^2t} = \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n\alpha \sin n\beta \cos n\theta}{n^2} \quad (11)$$

which may be obtained as a primitive function of S_n , i.e.

$$\int C_{n^2t} = S_{nt} d\theta.$$

Analysis of the problem

A bored hole of infinite length having a straight axis and a circular cross-section in an elastic medium of infinite extension in all directions will be sub-

jected to evenly distributed forces, acting on its wall along the generatrix. Due to these forces the elastic medium becomes a *planar state of deformation*. Further we shall examine a section of elementary width, cut out in normal direction to the bored hole. This elementary cut off will subsequently be regarded as an "*elastic plane*". In the examined elastic plane there is a circular cut out in accordance with the bored hole. The origin of polar coordinate system will be placed into the center of the bored hole (Fig. 1).

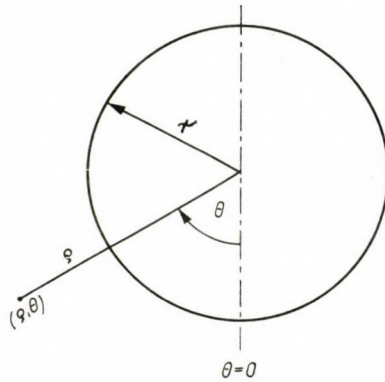


Fig. 1

Along the perimeter of the cut out a system of forces $q(\theta)$ acts. The state of points in the plane subjected to stresses, as is well known from literature, may be characterized by the stress function

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \theta) = & b_0 r^2 \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) + b_1 r \rho \theta \sin \theta + b'_1 r \rho \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos \theta + d_1 r^3 \rho^{-1} \cos \theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n r^n \rho^{-n+2} + d_n r^{n+2} \rho^{-n}) \cos n\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Constants $b_0, b_1, b'_1, d_1, b_n, d_n$ occurring in the function could be determined as functions of peripheral conditions in compliance with the problem. With knowledge of the function $\varphi(\rho, \theta)$ the radial σ_ρ the tangential σ_θ , and the shearing stresses τ could be defined on the basis of the following basic relationships of the theory of elasticity:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}, \\ \tau &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Above components should satisfy the equation of compatibility

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_\varrho + \sigma_\theta) = 0, \quad (14)$$

and below peripheral conditions:

1. On the edge of the circular cut out, i. e. in the points $\varrho = r$ stresses counterbalance the load, consequently

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho(r, \theta) &= -q_\varrho(\theta) \\ \tau(r, \theta) &= -q_\tau(\theta), \end{aligned}$$

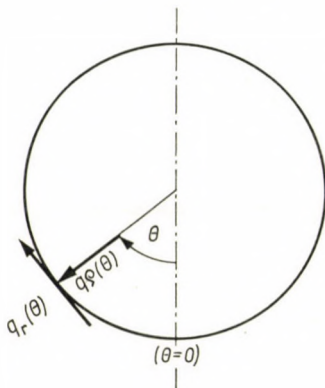


Fig. 2

wherein $q_\varrho(\theta)$ is a component of loading in the radial direction, and $q_\tau(\theta)$ is the same in the tangential direction (Fig. 2).

2. At infinitely distant points, i. e. in the point $\varrho = \infty$, stresses equal zero:

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho|_{\varrho=\infty} &= 0, \\ \sigma_\theta|_{\varrho=\infty} &= 0, \\ \tau|_{\varrho=\infty} &= 0. \end{aligned}$$

The relation between stresses and deformations could be determined with the help of the physical equations of the theory of elasticity. For that the generalized Hooke's law is being used:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varrho &= \frac{1 + \mu}{E} [\sigma_\varrho - \mu(\sigma_\varrho + \sigma_\theta)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1 + \mu}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_\varrho + \sigma_\theta)], \\ \varepsilon_{\varrho\theta} &= \frac{1 + \mu}{E} [2\tau], \end{aligned} \quad (15)$$

with E as modulus of elasticity and μ — Poisson's ratio. Cauchy's differential equation system could be used to obtain the displacement of points in the plane as well as its radial u and tangential v components:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}, \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), \\ \varepsilon_{\rho\theta} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\tag{16}$$

Having the knowledge of U and V the displacement, due to the effect of forces in question, may be determined.

The solution of the problem in closed form

There is an evenly distributed tangential load of uniform intensity with a contrary sense of rotation in relation to the center, acting on the arch length 2β in the environment of the spots (Fig. 3).

$$\theta = +a \text{ and } \theta = -a$$

The load may be expressed by a periodical function as per uneven 2π . Thus the load-function $t(\theta)$ could be produced by the following Fourier series:

$$t(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta.$$

If the intensity of the evenly distributed load equals t_1 , then

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t_1 \sin n\theta \, d\theta = \frac{2t_1}{\pi} \int_0^{\pi} t_1 \sin n\theta \, d\theta = \frac{2t_1}{\pi} \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \sin n\theta \, d\theta = \\ &= \frac{2t_1}{n\pi} [\cos n(\alpha - \beta) - \cos n(\alpha + \beta)] = \frac{4t_1}{n\pi} \sin n\alpha \sin n\beta,\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}t(\theta) &= \frac{4t_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\theta}{n} = \\ &= \frac{4t_1}{\pi} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\theta}{n} + \sin \alpha \sin \beta \sin \theta \right\} = \\ &= \frac{t_1}{\pi} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n} (\sin nx_1 - \sin nx_2 + \sin nx_3 - \sin nx_4) \right] + \right. \\ &\quad \left. + [\sin x_1 - \sin x_2 + \sin x_3 - \sin x_4] \right\},\end{aligned}$$

wherein

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta - (a - \beta); & x_3 &= \theta + (a - \beta) \\x_2 &= \theta - (a + \beta); & x_4 &= \theta + (a + \beta).\end{aligned}$$

The load-function could be expressed in a closed analytical form using vectors, introduced in (9):

$$t(\theta) = \frac{t}{\pi} (s_{n1}^* e_1 + s^* e_2). \quad (17)$$



Fig. 3

The function obtained in this way could be comprised in the following values along the edge of the cut out:

$$t(\theta) = \begin{cases} 0; & \text{if } (a + \beta) < \theta \\ t_1; & \text{if } (a - \beta) < \theta < (a + \beta) \\ 0; & \text{if } -(\alpha - \beta) < \theta < (\alpha - \beta) \\ -t; & \text{if } -(\alpha + \beta) < \theta < -(\alpha - \beta) \\ 0; & \text{if } \theta < -(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Because

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= \theta - a - \beta - \theta + a - \beta = -2\beta, \\x_4 - x_3 &= \theta + a + \beta - \theta - a + \beta = +2\beta,\end{aligned}$$

consequently

$$(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) = 0.$$

Let us examine, with the knowledge of afore-mentioned, the value of $t(\theta)$ in the sought for intervals, using the relation (8), (9) and (17)

if $(\alpha + \beta) < \theta$ then x_1, x_2, x_3, x_4 are positive, so:

$$t(\theta) = \frac{t_1}{2\pi} (-x_1 + \pi + x_2 - \pi - x_3 + \pi + x_4 - \pi) = 0;$$

if $(\alpha - \beta) < \theta < (\alpha + \beta)$ then $x_1 > 0$; $x_2 < 0$; $x_3 > 0$; $x_4 > 0$, so

$$t(\theta) = \frac{t_1}{2\pi} (-x_1 + \pi + x_2 + \pi - x_3 + \pi + x_4 - \pi) = t_1;$$

if $-(\alpha - \beta) < \theta < (\alpha - \beta)$ then $x_1 < 0$; $x_2 < 0$; $x_3 > 0$; $x_4 > 0$, so

$$t(\theta) = \frac{t_1}{2\pi} (-x_1 - \pi + x_2 + \pi - x_3 + \pi + x_4 - \pi) = 0;$$

if $-(\alpha + \beta) < \theta < -(\alpha - \beta)$ then $x_1 < 0$; $x_2 < 0$; $x_3 < 0$; $x_4 > 0$, so

$$t(\theta) = \frac{t_1}{2\pi} (-x_1 - \pi + x_2 + \pi - x_3 - \pi + x_4 - \pi) = -t_1;$$

and finally, if $\theta < -(\alpha + \beta)$ then x_1, x_2, x_3, x_4 are negative, so

$$t(\theta) = \frac{t_1}{2\pi} (-x_1 - \pi + x_2 + \pi - x_3 - \pi + x_4 + \pi) = 0.$$

Consequently the function (17) actually expresses the given load. In this case the peripheral conditions for components of stresses will be as follows:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(r, \theta) &= 0 \\ \tau(r, \theta) &= -t(\theta) \\ \sigma_\rho|_{\rho=\infty} &= 0 \\ \sigma_\theta|_{\rho=\infty} &= 0 \\ \tau|_{\rho=\infty} &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

It is stated that the afore-mentioned peripheral conditions will be met by the stress-function $\varphi(\rho, \theta)$ as follows:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \theta) &= \frac{2t_1}{\pi} \rho^2 \left\{ R \left[\theta \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2(1-\mu)} \left((1-2\mu) \ln R + (3-2\mu) \frac{R^2}{2} \right) \sin \alpha \sin \beta \cos \theta \left. \right] - \\ &- \sum_{n=2}^{\infty} R^n \left[\frac{1}{n(n-1)} + R^2 \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{n^2} \right) \right] \sin n\alpha \sin n\beta \cos n\theta \left. \right\}, \end{aligned}$$

wherein $R = \frac{r}{\rho}$.

Using symbols known from (2) and (11)

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho, \theta) = & \frac{2t_1}{\pi} \varrho^2 \left\{ R \left[\theta \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2(1-\mu)} \left((1-2\mu) \ln R + (3-2\mu) \frac{R^2}{2} \right) \sin \alpha \sin \beta \cos \theta \right] - \right. \\ & \left. - C_{n(n-1)} - R^2 [C_{n(n+1)} - 2C_{n^2}] \right\}. \end{aligned}$$

Stresses σ_ϱ , σ_θ and τ may be determined by the use of the so obtained function $\varphi(\varrho, \theta)$ and recorded in relations (13). Here, too, applying the symbols known from (1),

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho = & \frac{2t_1}{\pi} (1-R^2) \left\{ R \frac{3-2\mu}{2(1-\mu)} \sin \alpha \sin \beta \cos \theta + C_1 + 2C_n \right\}, \\ \sigma_\theta = & -\frac{2t_1}{\pi} \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} [(1-2\mu) - (3-2\mu)R^2] \sin \alpha \sin \beta \cos \theta + \right. \\ & \left. + (1-R^2)C_1 - 2(1+R^2)C_n \right\}, \\ \tau = & -\frac{2t_1}{\pi} \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} [(1-2\mu) + (3-2\mu)R^2] \sin \alpha \sin \beta \sin \theta - \right. \\ & \left. - (1-R^2)S_1 + 2R^2S_n \right\}. \end{aligned}$$

Since sum-functions of the infinite series C_1 , C_n , S_1 , S_n applied here had already been determined in (10), substituting for them adequate sum-functions, the stress-function may be produced in a closed analytical form. These closed-form functions will be used in the course of further analysis. It is easy to be seen, that

$$\sigma_\varrho + \sigma_\theta = \frac{2t_1}{\pi} \left\{ \frac{1}{1-\mu} R \sin \alpha \sin \beta \cos \theta + 4C_n \right\}$$

answers the compatibility-equation (14). Stresses (19) meet peripheral conditions (18), because if $\varrho = r$, $R = 1$, so $(1-R^2) = 0$, consequently

$$\sigma_\varrho(r, \theta) = 0,$$

further

$$\tau(r, \theta) = -\frac{4t}{\pi} \left\{ \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \frac{1}{4} s_{n1}^* \mathbf{e}_1 \right\} = -\frac{t}{\pi} (s_{n1}^* \mathbf{e}_1 + s^* \mathbf{e}_2) = -t(\theta).$$

All stresses become zero in infinity, since in the case of $\varrho = \infty$ and $R = 0$, the consideration of these conditions having been met, does not need detailed demonstration. Thus, the stress-function meet, in fact the peripheral conditions.

The ε_ϱ , ε_θ , $\varepsilon_{\varrho\theta}$ functions will provide for the values of deformation in plane due to load. By the use of (15)

$$\begin{aligned}\varepsilon_\varrho &= \frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} [(3-4\mu) - (3-2\mu)R^2] \sin\alpha \sin\beta \cos\theta + \right. \\ &\quad \left. + (1-R^2)C_1 + 2[1-2\mu-R^2]C_n \right\}, \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{2(1+\mu)t_1}{\pi} \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} [1 - (3-2\mu)R^2] \sin\alpha \sin\beta \cos\theta + \right. \\ &\quad \left. + (1-R^2)C_1 - 2(1-2\mu+R^2)C_n \right\}, \\ \varepsilon_{\varrho\theta} &= -\frac{4(1+\mu)t_1}{E\pi} \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} [(1-2\mu) + (3-2\mu)R^2] \sin\alpha \sin\beta \sin\theta - \right. \\ &\quad \left. - (1-R^2)S_1 + 2R^2S_n \right\}.\end{aligned}\quad (20)$$

By these components the displacement of points of the plane can be obtained as a solution of the differential-equation system of Cauchy (16):

$$\begin{aligned}U &= \frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \ln\varrho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (3-2\mu) \frac{R^2}{2} \right] \sin\alpha \sin\beta \cos\theta + 2(1-2\mu+R^2)C_n - \right. \\ &\quad \left. - (3-4\mu)C_{(n-1)} - R^2C_{(n+1)} \right\} + F_1(\theta), \\ V &= -\frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} \left[1 + (3-4\mu) \ln\varrho - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (3-2\mu) \frac{R^2}{2} \right] \sin\alpha \sin\beta \sin\theta + 2(2-2\mu-R^2)S_n - \right. \\ &\quad \left. - (3-4\mu)S_{(n-1)} + R^2S_{(n+1)} \right\} - \int F_1(\theta) d\theta + F_2(\varrho),\end{aligned}$$

wherein $F_1(\theta)$ and $F_2(\varrho)$ are functions from the integration. Further, on basis of

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varrho\theta} &= -\frac{4(1+\mu)t_1}{E\pi} \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} [(1-2\mu) + (3-2\mu)R^2] \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin\alpha \sin\beta \sin\theta - (1-R^2)S_1 + 2R^2S_n \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\varrho} \left(\int F_1(\theta) d\theta + F_1'(\theta) \right) + F_2'(\varrho) - \frac{1}{\varrho} F_2(\varrho).\end{aligned}$$

In order to define the functions $F_1(\theta)$ and $F_2(\varrho)$ issuing from the integration and occurring in the function U and V , let us compare the above form of $\varepsilon_{\varrho\theta}$ with those in (20). It follows from the comparison, that

$$\frac{1}{\varrho} \left(\int F_1(\theta) d\theta + F_1'(\theta) \right) + F_2'(\varrho) - \frac{1}{\varrho} F_2(\varrho) = 0.$$

This equation multiplied by ϱ and differentiated first as per θ and then per ϱ , the following differential equations result

$$F_1''(\theta) + F_1(\theta) = 0, \quad \varrho F_2''(\varrho) = 0,$$

where the solution of the differential equations will give the integrational functions

$$F_1(\theta) = K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta,$$

and

$$F_2(\varrho) = K_3 \varrho + K_4.$$

Substituting the determined values of $F_1(\theta)$ and $F_2(\varrho)$ into functions U and V , the following relationships will be obtained:

$$U = \frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \ln \varrho + \right. \right. \\ \left. \left. + (3-2\mu) \frac{R^2}{2} \right] \sin \alpha \sin \beta \cos \theta + 2(1-2\mu+R^2)C_n - \right. \\ \left. - (3-4\mu)C_{(n-1)} - R^2C_{(n+1)} \right\} + K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta,$$

$$V = - \frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} \left[1 + (3-4\mu) \ln \varrho - \right. \right. \\ \left. \left. - (3-2\mu) \frac{R^2}{2} \right] \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + 2(2-2\mu-R^2)S_n - \right. \\ \left. - (3-4\mu)S_{(n-1)} + R^2S_{(n+1)} \right\} - K_1 \sin \theta + K_2 \cos \theta + K_3 \varrho + K_4.$$

Let us considering now that functions U and V are to satisfy the conditions of

$$V|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0$$

and from these it follows in turn that

$$K_2 + K_3 \varrho + K_4 = 0, \quad K_2 = 0,$$

So

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \ln \varrho + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (3-2\mu) \frac{R^2}{2} + K \right] \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \right. \\
 &\quad \left. + 2(1-2\mu+R^2)C_n - (3-4\mu)C_{(n-1)} - R^2C_{(n+1)} \right\}, \\
 V &= -\frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} \left[1 + (3-4\mu) \ln \varrho - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (3-2\mu) \frac{R^2}{2} + K \right] \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \right. \\
 &\quad \left. + 2(2-2\mu-R^2)S_n - (3-4\mu)S_{(n-1)} + R^2S_{(n+1)} \right\} = \\
 &= \frac{2(1+\mu)}{E\pi} \varrho \left\{ -\frac{R}{2(1-\mu)} \left[1 - (3-2\mu)R^2 \right] \sin \alpha \sin \beta \sin \theta - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R}{2(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \ln \varrho + (3-2\mu) \frac{R^2}{2} + K \right] \sin \alpha \sin \beta \sin \theta - \right. \\
 &\quad \left. - 2(2-2\mu-R^2)S_n + (3-4\mu)S_{(n-1)} - R^2S_{(n+1)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Examining the displacements along some circles with a radius of $\varrho = \text{const}$ it will become obvious that each point of the contour performs partly a rigid body-like displacement Z and partly a U_0 , V_0 relative one [1]. The center of the circle will be displaced with a value of

$$Z = -\frac{(1+\mu)t_1}{E\pi} \frac{r}{(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \ln \varrho + (3-2\mu) \frac{R^2}{2} + K \right] \sin \alpha \sin \beta$$

in the direction of the resultant of load. The following relative displacements take place in relation to an unloaded circle with a radius of $\varrho = \text{constant}$:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ 2(1-2\mu+R^2)C_n - (3-4\mu)C_{n-1} - R^2C_{n+1} \right\}, \\
 V_0 &= -\frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} \varrho \left\{ \frac{R}{2(1-\mu)} \left[1 - (3-2\mu)R^2 \right] \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \right. \\
 &\quad \left. + 2(2-2\mu-R^2)S_n - (3-4\mu)S_{n-1} + R^2S_{n+1} \right\},
 \end{aligned}$$

wherein U_0 and V_0 denote the relative displacements of the points of the plane compared to the center of the circular cut out. The determination of the rigid body-like displacements of a circular cut out is, in the majority of practical

cases not needed, the object of calculation is only the relative displacement of the circular cut out. So the rigid body-like displacement Z in question could be disregarded and it would be sufficient to deal further on with but the relative displacements. In conclusion let us state the relative displacements U_0 and V_0 along the circular cut out, *i. e.* in spots, where $\varrho = r$ and $R = 1$ by using (9) and (10):

$$U_k = \frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} r \left\{ (1-\mu) \mathbf{c}_{n1}^* (\mathbf{e}_1 - \mathbf{c}) + \frac{1-2\mu}{2} s_{n1}^* \mathbf{s} - \frac{3-4\mu}{4} \bar{\mathbf{c}}^* \mathbf{e}_1 + \frac{1}{8} \mathbf{c}^* \mathbf{e}_2 \right\},$$

$$V_k = -\frac{2(1+\mu)t_1}{E\pi} r \left\{ \frac{1-2\mu}{2} s_{n1}^* (\mathbf{e}_1 - \mathbf{c}) - (1-\mu) \mathbf{c}_{n1}^* \mathbf{s} - \frac{3-4\mu}{4} \bar{\mathbf{s}}^* \mathbf{e}_1 - \frac{3}{8} \mathbf{s}^* \mathbf{e}_2 \right\}.$$

The deduction of the radial and tangential displacements U and V makes the determination of the effect of tangential force possible at an arbitrary point of the medium.

On the basis of the above deductions charts could be drawn up facilitating the engineer's computation, because the formulae obtained as a result could easily be programmed for any kibernetical machine.

REFERENCES

1. Орлов, С. А.: Расчет конструкций, лежащих на контуре кругового выреза в плоскости. Исследования по теории сооружений. Выпуск VI. Москва, 1954
2. ТИМОШЕНКО: S. Theory of Elasticity, New York, 1934
3. Фихтенгель, Г. М.: Курс дифференциального и интегрального исчисления Москва, 1949
4. Рыжик, И. М.—Градштейн, И. С.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва 1951

SPANNUNGEN UND DEFORMATIONEN INFOLGE VON TANGENTIALKRÄFTEN AN DEM UMFANGE EINES KREISAUSSCHNITTES IN EINER ELASTISCHEN EBENE

L. RÓZSA, G. KOVÁCS und L. KOHLMANN

ZUSAMMENFASSUNG

Im vorliegenden Aufsatz werden Spannungen und Formänderungen behandelt, die infolge der Tangentialkräfte am Umfange eines Kreisausschnittes in einer elastischen Ebene auftreten. Die Analyse wurde mit Hilfe der Methode der mathematischen Elastizitätstheorie durchgeführt. Die Ergebnisse der Untersuchung werden in Form einer geschlossenen Funktion dargestellt. Zu diesem Zwecke mußten die Autoren mehrere Summenfunktionen von Fourier-Reihen ermitteln, die in der technischen Literatur noch nicht behandelt worden sind. In Kenntnis der Summenfunktionen wurden durch Verwendung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie die radialen σ , tangentialen σ_θ und die Scherspannungen τ , sowie die radialen U und tangentialen V Verschiebungsfunktionen in geschlossener Form erhalten.

CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS SOUS L'EFFET DE CHARGES TANGENTIELLES
AGISSANT SUR LE CONTOUR D'UNE OUVERTURE CIRCULAIRE SITUÉE DANS
UN PLAN ÉLASTIQUE

L. RÓZSA—G. KOVÁCS—L. KOHLMANN

RÉSUMÉ

L'étude traite des conditions de contraintes et de déformations dans un plan élastique, dues à des forces tangentielles agissant sur le contour d'une ouverture circulaire. Pour l'analyse, on utilise les méthodes de la théorie de l'élasticité. En résultat des recherches, les auteurs ont pu déduire des fonctions à forme fermée. Dans ce but, ils ont dû déterminer quelques séries Fourier non utilisées dans la littérature. Ayant déterminé des fonctions exprimant la somme des séries, les contraintes radiales σ_r , tangentielles σ_θ , les efforts tranchants τ , ainsi que les fonctions de déplacement radial U et tangentiel V sont obtenues sous une forme fermée, à l'aide des équations fondamentales de la théorie de l'élasticité.

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ КРУГОВОГО ВЫРЕЗА В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ ОТ КАСАТЕЛЬНЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ВДОЛЬ КОНТУРА

Л. РОЖА, Г. КОВАЧ и Л. КОЛМАНН

РЕЗЮМЕ

В статье описываются условия напряжений в плоской упругой среде вокруг кругового выреза от действия касательных сил. Этот анализ основан на математической теории упругости. В результате исследований авторам удалось вывести функции в закрытой форме.

Для достижения этой цели надо было определить сумму-функцию некоторых рядов Фурье, которые еще неизвестны в литературе. После определения этих сумм-функций радиальные σ_r , касательные σ_θ и срезающие напряжения τ , а также функции U радиальных и V касательных перемещений были получены в закрытой форме по методам теории упругости.

SOME FUNCTIONAL REGULARITIES OF THE COMMUNITION PROCESS IN HAMMER MILLS

I. BÖLÖNI

CAND. OF TECHN. SC

RESEARCH INSTITUTE FOR AGRICULTURAL MACHINERY, BUDAPEST

[Manuscript received June 19, 1961]

The tests were carried out for the purpose of finding some rules, or regularities suitable for a rather precise description of comminution operations. New methods of measurement have been elaborated, the main feature of which consists in weighing and recording the change of weight both of the product fed in and of the ground mess produced by using a feed hopper and a gathering receptacle, each being suspended on a separate balance member.

In order to eliminate all the errors that might be caused by the inertia forces of the recording instruments, weight changes were measured by the electrotenometric method and registered by means of an oscillograph having 8 loops.

Two main groups comminution were investigated: first, the so-called portion grinding was put under test, during which, at one stroke, a predetermined quantity suddenly fed into the mill. As a result of portion grinding, the weight of the ground mass $Q_d(t)$ produced during a period of time may be considered, with a fairly good approximation, as a logarithmic normal distribution function [see equation (3.1)]. This relationship can be motivated by taking the period of time necessary for the comminution of the single grains as a random variable. The curve $Q_d(t)$ as a logarithmic normal distribution function can be represented — on a Gaussian paper with logarithmic abscissa axis — as a straight line.

The development of the stable operation of a mill drum takes place in a way that is based on the regularity derived for the portion grinding; the whole process can be fairly well described by mathematical formulae [see equation (3.27)].

List of symbols used

- k number of primary portions of product;
 i serial number of range established under the empirical density curve $q_d(t)$;
 n number of ranges established after decomposition of the empirical $q_d(t)$ curves;
 p_i relative frequency of ground particles pertaining to the i^{th} range under the empirical density curve;
 $q_d(t)$ logarithmic normal density function of the comminution period of ground particles;
 $q_d(z)$ general density function of the comminution period of ground particles;
 t time;
 t_i average period of time of the comminution of ground particles in the i^{th} range established under the experimental density curve;
 t_{pk} crushing period of time during which particles are kept in the comminution chamber;
 u integration variable;
 z integration variable;
 x integration variable;
 $F(t)$ distribution function of the comminution period of ground particles, for grinding portion by portion;
 $G_d(t)$ weight variability function of the grinding product for grinding portion by portion;
 $G_{ds}(t)$ weight variability function of the grinding product stabilized continuous operation;
 G_{t_0} initial weight of the product, for grinding portion by portion;
 $G_i(t)$ weight variability function of product fed into the mill;
 ΔG_t weight of primary portions of product;
 M_1 momentum of first order of the comminution periods distribution of ground particles;
 M_1^* momentum of first order of the comminution periods distribution of ground particles, determined by the screen analysis method on the base of empirical weight variability curves and density curves $q_d(t)$ respectively;

M_2	momentum of second order of the comminution periods distribution of ground particles;
M_2^*	momentum of second order of the comminution periods distribution of ground particles, determined by the screen analysis method on the base of empirical weight variability curves and density curves $q_d(t)$ respectively;
Q_t	"speed" of continuous product feed;
$T(t)$	load variability function, representing the quantity of product momentarily under comminution;
δ_0	average grain size of the product (before disintegration);
δ	average grain size of the disintegrated product;
$\lambda(t)$	factor characterizing the temporal course of comminution;
μ	mean value of the logarithmic normal distribution;
ξ	random variable, denoting the comminution period of ground particles;
σ	standard deviation of logarithmic normal distribution;
$\Phi(z)$	Gaussian normal frequency distribution function;
τ	integration variable.

1. Introduction

Among the various agricultural machines and implements, hammer mills belong to those consuming the most energy, partly because of the immense volume ($\sim 3 \cdot 10^6$ ton) of products to be ground throughout the country partly because of the relatively great specific need of energy (0,8—3,0 kw/q)* for grinding operations.

Therefore, it is a quite interesting task to investigate regularities that may prevail in the comminution process carried out by hammer mills; and obviously the study of possibilities, how to save energy, consumption, is one of the most important problems.

The object of this paper is to give some information concerning the temporal course of comminuting operations as well as the possibilities to determine certain regularities, revealed by experiments carried out.**

2. Research equipment and measuring methods

2.1 Description and technical data of the experimental hammer mill

Driven by a three-phase induction motor through a leather-cleat type coupling, the hammer mill (Fig. 1) is mounted on a tripod-structure. The product to be disintegrated is fed into the grinding chamber by gravity through a hopper (1) mounted on the top of the casing; in this chamber the comminution takes place by hammering (3) and also by crushing on certain parts of the housing. For feed regulation a simple push plate (2) is provided. The hammers have an outer diameter of 440 mm, and have a circumferential speed of 66.5—69 m/sec.

* q means 0.1 metric tons.

** Further experiments lead finally to establish some statements of regularities concerning the temporal variation of grinding fineness and functional relations between the driving power needed, further, the grinding output and grinding fineness. The result will be reported in the future.

2.2 Measuring apparatus and measuring methods

Formerly research work on hammer mills had been carried out — with some rare exceptions [10] — only by using the most simple measuring methods [1—3, 7—9].

In order to eliminate the inconveniences of these outdated methods a new one has been elaborated and new measuring apparatuses have been established that proved to be suitable for recording continuous variation of the characteristic factors.

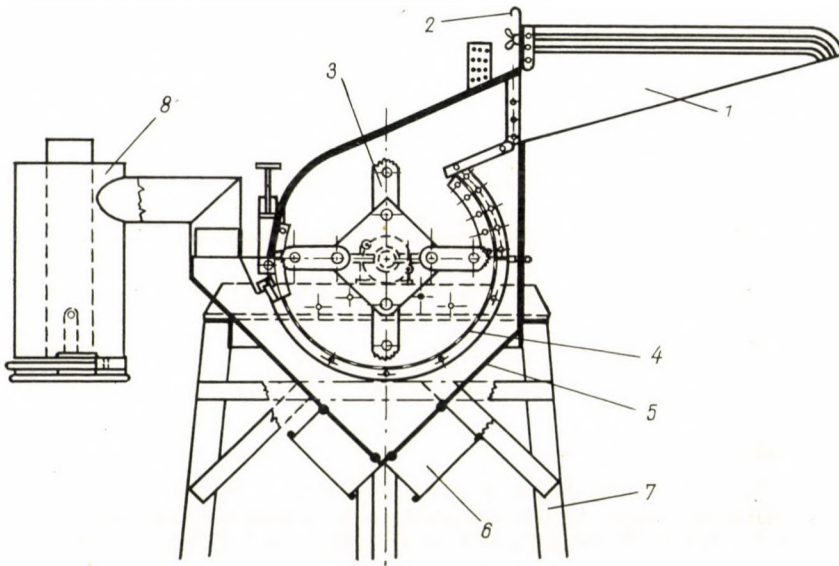


Fig. 1. Hammer mill used for tests

1—feed hopper; 2 — regulating gate; 3 — hammers;
4 — sieve; 5— push plate; 6 — sacking device; 7— frame; 8 — cyclone

During the measuring operations, a simple open box served as a receptacle for the grinding product; this, and the product storing and feeding device have been made independent of the machine itself and were suspended on a measuring member carrying out elastic deformations through which the variation of weight was recorded as a function of time.

The deformation of the weighing members, proportional to the loading weight, was measured by electrotenometric method and recorded by an oscillograph having 8 loops. We obtained a characteristic curve nearly linear and kept the curves constant by using for our measuring apparatus a source of electric energy having a uniform electromotive force.

Time-signals were placed into the film edge in the usual manner, and signal length and filmfeed were accommodated according to the nature of meas-

urements. The photos of the oscillograms were evaluated on the basis of gauge curves.

Fig. 2 shows the measuring scheme; photos of two different units are shown in Fig. 3 and 4.

Transitional and stable operating conditions were closely investigated. In order to ensure stable conditions, the feed was stabilized. This was done by placing a cell-type feeder above the mill (Fig. 4), driven by a special electric motor through a double chain drive and planet gear.

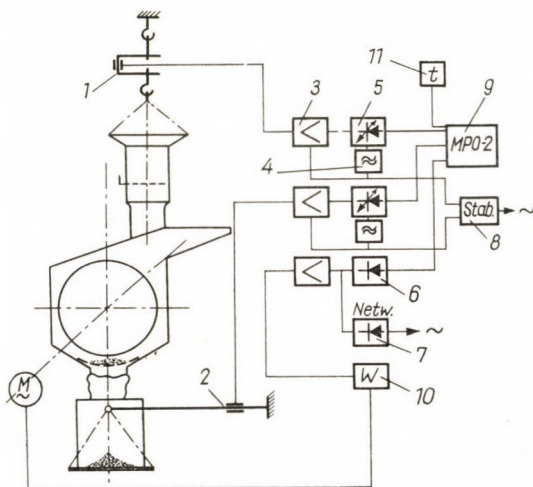


Fig. 2. Scheme of the electrotenometric apparatus provided to register the weight variations both of the ground mass receptacle and of the feed hopper

1 — upper weighing balance; 2 — lower weighing balance; 3 — amplifier; 4 — oscillator; 5 — phase-reacting rectifier and filter; 6 — rectifier and filter; 7 — rectifier in the network; 8 — electromotive source with constant and stable terminal voltage; 9 — oscillograph having 8 loops, type MPO-2; 10 — three-phase wattmeters; 11 — time-signal generator

Further, the sieve mechanism had been modified in order to have an arrangement more suitable for measuring purposes. In doing so, the residue on the sieve in the mill, the so called "load" representing a mass not ground sufficiently, yet could be removed, weighed and its finenesses stated. This was made possible by providing a lid which could be opened along the sieve. This mechanism proved satisfactory for the determination and control of variations of quantity and fineness of the load, under transitional and stable conditions as well, independent of the electrotenometric method.

The problem arose, how to eliminate the troubles caused by the additional grinding work of the mill drum still turning after the motor had already been turned off. By providing a band brake to the coupling between motor and mill, this period of running down that formerly took about 60 second, could be reduced

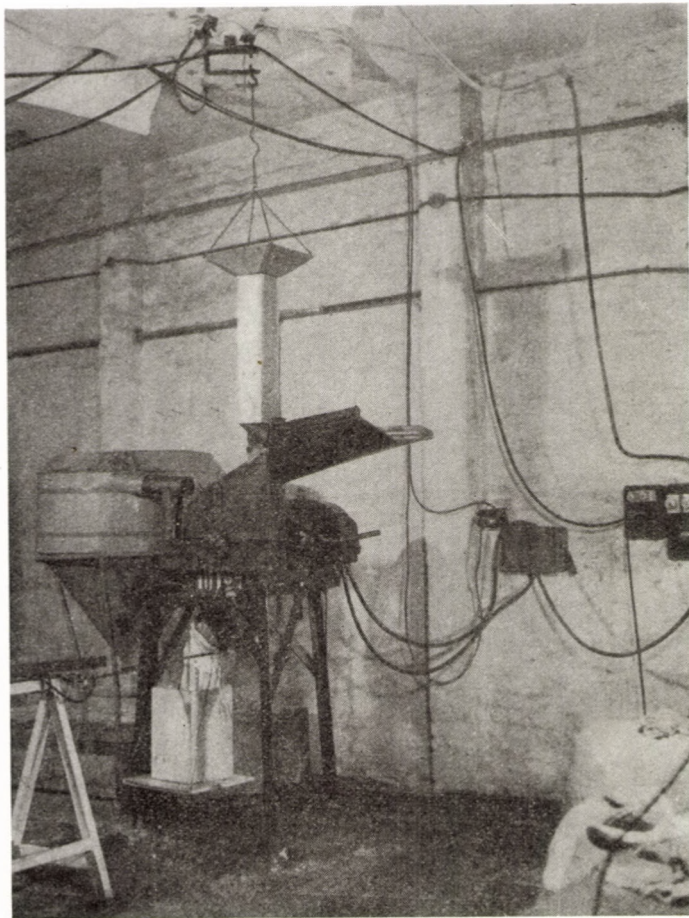


Fig. 3. Perspective images of the hammer mill and measuring equipment

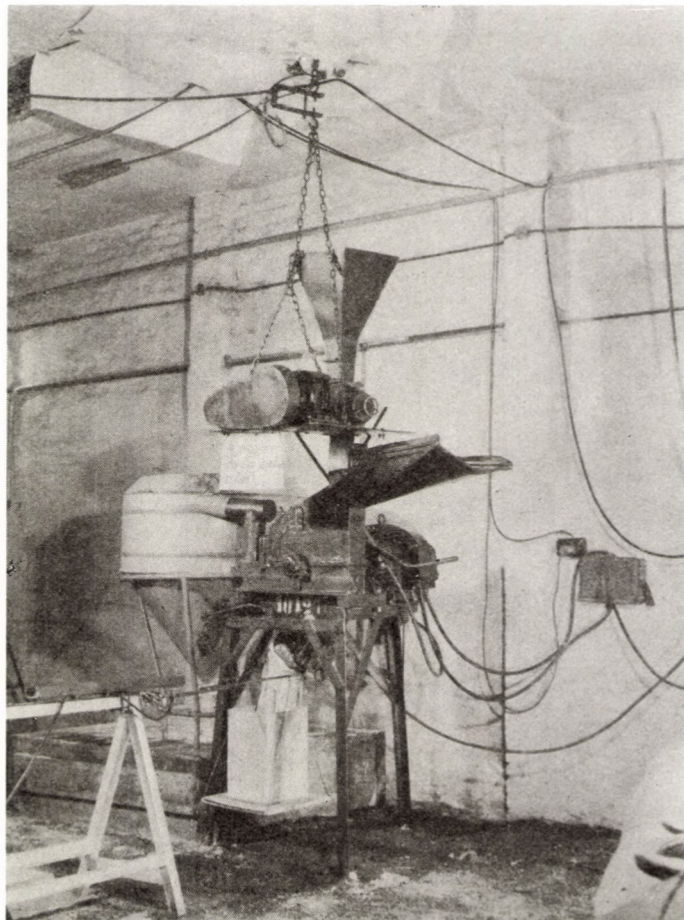


Fig. 4. Hammer mill and measuring equipment during continuous operation tests, with a cell-type feeder as auxiliary device

to 3—4 seconds. More exactly the experiments were carried out by grinding only one single sort of product, i. e. barley having a moisture of 12%. It was not the purpose of these tests to state the influence of various products to be ground.

3. Regularities in the variation of quantities of the product comminuted

It was possible to throw light on the regularities of the comminution process in the mill by suspending both the hopper and the receptacle of the grinding product on balances and by continuous recording of weighing results. The curves in Fig. 5 show the prevailing conditions.

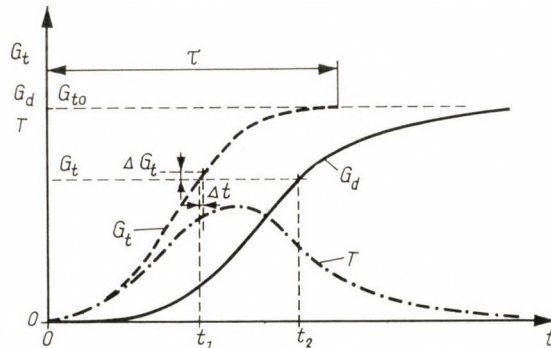


Fig. 5. Irregular change of the feeding regularity: weight-variations of product fed in, and of ground mass

In a general case when a certain quantity of product G_{t_0} should be ground, both the quantity of product fed into the mill and the quantity of grinding product gathered in the receptacle can be illustrated by monotonic ascending curves, such as G_t and G_d respectively. The feed curve G_t can be modified within certain limits; in our case, according to the diagram in Fig. 5, the quantity to be ground G_{t_0} is fed during a period time τ , at varying speed.

According to our first experiments, the curve G_t representing the grains fed in, is followed at a certain distance by the curve G_d representing the ground product. The difference of the ordinates, at a certain moment, represents the amount of the residues in the drum under process, a quantity that will be referred to in our further explanations as "load" T . Another characteristic quantity is the period of time represented by the time difference between the feeding time, say t_1 , of a certain amount of product G_t , and the grinding time t_2 ; this period of time $t_2 - t_1$ may be considered as the remaining (or crushing) period of the quantity ΔG_t fed in during the period of time Δt (elapsed from the point of time t_1 up to the point of time $t_1 + \Delta t$), inasmuch as

the comminution process of the amount ΔG_t may be considered as independent of the crushing process of other load particles.

In any case, our method is to begin with the most simple cases of comminution, i. e. grinding portion by portion.

3.1 Grinding portion by portion

It was our task to carry out a process, that is nearly identical with the theoretic example when the whole product to be ground is fed into the mill at once, namely at the moment $t = 0$; and no further feed occurs any longer. Practically the portion grinding operation starts after a feed operation carried out in a relatively short period compared to the whole grinding process, so to

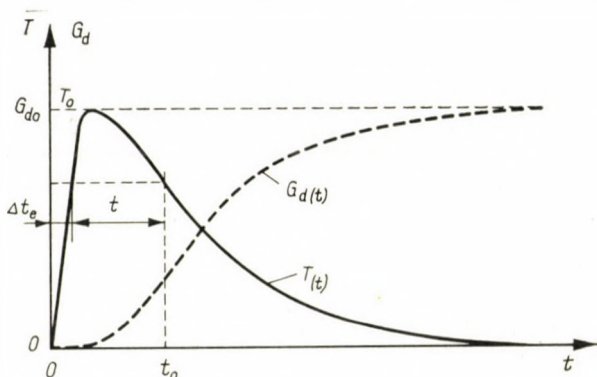


Fig. 6. Effective weight-variations of load and of ground mass

say momentarily, and no new unbroken grains can disturb the comminution of the first load T_0 , that will flow out according to some rule.

Unfortunately, it is hardly possible to carry out a comminution process with a momentary starting load of T_0 ; practically, it can be done only with some approximation; the mass T_0 might be as small as possible, the process to feed it under the hammers will always take some finite period of time. Consequently, the real course of operation can be illustrated by the diagram shown in Fig. 6.

For computing purposes, this kind of distortion was eliminated by a convenient correction that is, that the crushing period t was considered according to the equation:

$$t = t_0 - \Delta t_e,$$

i. e. by subtracting the period of feed. The above described rule concerning regularities governing the whole process of comminution has been established by repeated experiments during which the same load $G_{t_0} = T_0 = 1$ kg of autumnal barley, having a moisture of 12%, was fed in. In Fig. 7 and 8 two photos of oscillograms are given, both referring to grinding operations carried

out with a sieve of 3 mm dia, and 6 mm dia, respectively. Each of these diagrams comprises 3 curves, namely: — a curve of feed G_t , ascending as a sudden slope, showing a somewhat sawtooth-profile character due to the sudden removal of the lid; — a curve G_d of the weight of the grinding product ascending with an inflectional trend; and the curve N_a representing the driving power. Along the upper border of the strip the markings of seconds can be observed.

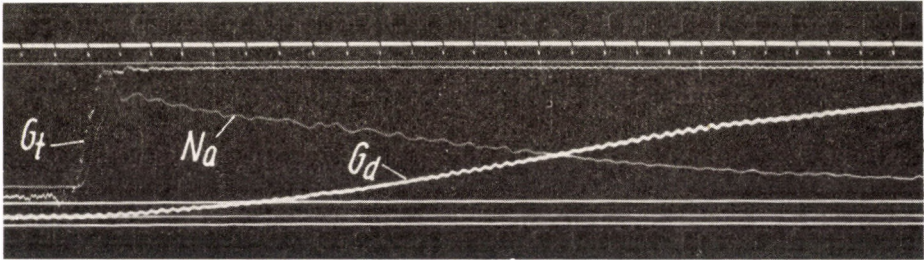


Fig. 7. Photo of the oscillogram representing the milling of a product portion (1 kg) by means of a sieve having 3 mm dia openings

With a view to the monotonic ascension of the weight curves having an inflectional point too, and taking into account some former statements made in a paper dealing with similar topics [4], the opinion seems to be justifiable, that the disintegration of grains is the result of some random effects that are quite independent of each other, and at the same time, the period necessary

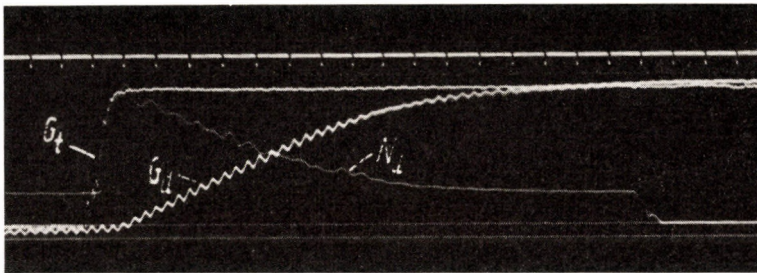


Fig. 8. Photo of the oscillogram representing the milling of a product portion (1 kg) by means of a sieve having 6 mm dia openings

for the production of particles small enough to fall through the sieve represents a random variable, identic with the crushing period of the singular particles.

It may be assumed that the time during which corns of average size, say $\delta_0 = 5,6$ mm are disintegrated into ground particles, amounting to perhaps some ten thousands, an immensely great number of comminuting effects is needed and this time is, of course, a random variable.

By denoting with ξ the period of time necessary to let a particle drop through the sieve, and further by assuming $t = 0$ as the starting moment of portion grinding, so may the value $P(\xi < t) = F(t)$ represent — in good approximation — the quotient of the quantity (dropped through, up to the time t), and the whole portion.

Now, by plotting the empirical curves $G_d(t)$ on a Gaussian paper with logarithmic scale on the abscissa axis (Fig. 9), one may state that these curves can be considered as a normal logarithmic distribution; in other words, the

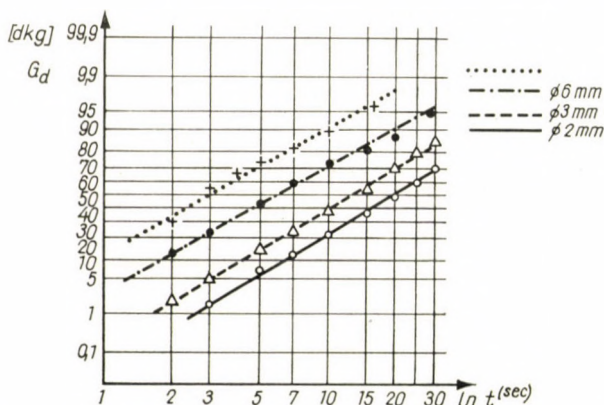


Fig. 9. Weight variation curves of the ground mass, drawn on a Gaussian paper

frequency function of the period of time of the disintegration of particles $G_d(t)$ can be expressed as follows:

$$q_d(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(t/\mu)}{\sigma} \right]^2}, \tag{3.1}$$

where μ and σ denote the characteristic parameters of the logarithmic distribution.

For a portion of G_{t_0} , the weight of products gathered during a period of time t is expressed:

$$G_d(t) = \int_0^t \frac{G_{t_0}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \tau} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(\tau/\mu)}{\sigma} \right]^2} \cdot d\tau. \tag{3.2}$$

The parameters μ and σ can be determined with due consideration of the whole trend of the curves $G_d(t)$ and $q_d(t)$, respectively.

Namely, when performing the comminution of the whole portion of the quantity $G_{t_0} = 1$ kg, the function determined by the curve $q_d(t)$ in the above-described manner may be considered without any further conversion as an

empirical frequency function, from which the moments of the empirical distribution may be determined by forming under the curve ranges with the aid of verticals, in analogy to screen analysis; in this way, the first order moment is expressed:

$$M_1^* = \sum_{i=1}^n t_i \cdot p_i \quad (3.3)$$

and the second order of momentum too

$$M_2^* = \sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot p_i \quad (3.4)$$

- n the number of established ranges;
- i the serial number of the ranges;
- t_i the average crushing period in the i^{th} range;
- p_i the relative frequency of the particles in the i^{th} range, i. e. the quantity of particles produces in the i^{th} period of time as an aliquot part of the whole quantity of the ground product.

Now, taking the crushing period as a function of logarithmic normal distribution, these calculated moments shall be considered as equal to the moments derived from the frequency distribution corresponding to equation (3.1); doing so, it is possible to find the empirical characteristics a and b of the empirical distribution, that are a first approximation to the characteristics μ and σ of the theoretic distribution; using those parameters, the function of output and of weight variation of the grinding product can be expressed in a concrete form.

Anyhow, when determining the distribution parameters μ and σ , we are compelled to know the moments of the frequency function $q_d(t)$, that are expressed as follows:

$$M_1 = \int_0^{\infty} t \cdot q_d(t) \cdot dt, \quad (3.5)$$

after substituting the formula of the frequency function $q_d(t)$ we obtain:

$$M_1 = \int_0^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(t/\mu)}{\sigma} \right]^2} \cdot dt. \quad (3.6)$$

By using the simplified variables

$$u = \frac{\ln(t/\mu)}{\sigma} \quad \text{and} \quad z = u - b,$$

we obtain by substitution:

$$M_1 = \mu \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} \cdot dz = \mu \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}}. \quad (3.7)$$

In a similar way the moment of the second order is expressed:

$$M_2 = \int_0^\infty t^2 \cdot q_d(t) \cdot dt = \int_0^\infty t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(t/\mu)}{\sigma} \right]^2} \cdot dt. \quad (3.8)$$

and by substituting the variables

$$u = \frac{\ln(t/\mu)}{\sigma}$$

and

$$z = u - 2b$$

we obtain:

$$M_2 = \mu^2 \cdot e^{2\sigma^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot dz = \mu^2 \cdot e^{2\sigma^2}. \quad (3.9)$$

When the moments of a given distribution are known, the following equations can be driven by making use of (3.7) and (3.9):

$$\mu = \frac{M_1}{e^{\sigma^2/2}} \quad \text{and} \quad M_2 = M_1^2 \cdot \frac{e^{2\sigma^2}}{e^{\sigma^2}} = M_1^2 \cdot e^{\sigma^2}$$

and

$$\sigma = \sqrt{\ln \frac{M_2}{M_1^2}}; \quad (3.10)$$

for the other parameter:

$$\mu = \frac{M_1}{\frac{1}{2} \ln \frac{M_2}{M_1^2}} = \frac{M_1}{\sqrt{\frac{M_2}{M_1^2}}} = \frac{M_1^2}{\sqrt{M_2}}. \quad (3.11)$$

Consequently, the difference between the starting weight G_{t_0} and the grinding product $G_d(t)$ represents the momentary load during portion grinding:

$$T(t) = G_{t_0} - G_d(t) = G_{t_0} - G_{t_0} \cdot \int_0^t q_d(\tau) \cdot d\tau \quad (3.12)$$

or

$$T(t) = G_{t_0} \cdot \left[1 - \int_0^t q_d(\tau) \cdot d\tau \right], \quad (3.13)$$

wherefrom

$$G_{t_0} = \frac{T(t)}{\int_t^\infty q_d(\tau) \cdot d\tau} \quad (3.14)$$

and

$$Q_d(t) = T(t) \cdot \frac{q_d(t)}{\int_t^\infty q_d(\tau) \cdot d\tau} = T(t) \cdot \lambda(t). \quad (3.15)$$

In other words, the grinding output is a function of the load quantity $T(t)$ of the time-conditioned factor λ .

Obviously, the process of comminution takes a certain period of time, and therefore, the output is not always a linear function of the load weight; anyhow once the short starting period has elapsed, the relation of the load mass $T(t)$ to the output $G_d(t)$ is clearly a linear one.

3.2 Continuous operation

A special series of measurements were carried out, in order to investigate grinding operations in stable conditions, for which purpose a separate cell-type feed device, as described in chapter 2, was arranged.

By previous control tests the cell-type feeding device proved satisfactory as regards uniformity of feed. The weight curve representing the weight of

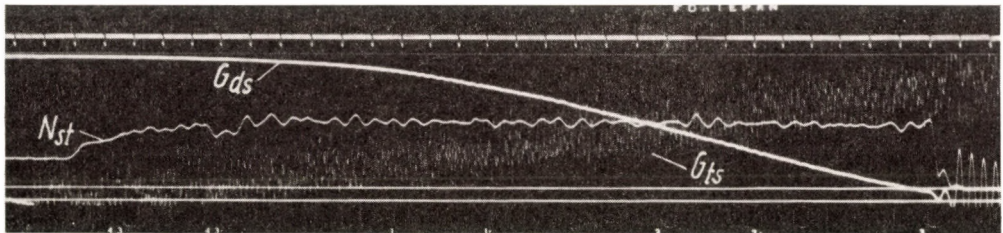


Fig. 10. Variations of the quantities that characterize the operating conditions of the hammer mill during the period of stabilization when a low intensity of feed is maintained. Note: For clearer distinction, the curve of the ground mass weight starts out from above, the curve of the product fed in starts out from below. Sieve openings 6 mm

product fed into the mill was, as recorded by the instruments, a straight line, the discrete point plotted did not scatter much.

In addition, we followed the same principles of measuring as for the case of portion grinding described above. The weight variation of ground products gathered in the receptacle, further the weight variation of products in the upper storage tank and in the hopper attached to the cell-type feeder were duly registered, and the driving power also recorded.

After a short run of the mill without charge, and when the recording instruments were already adjusted, a given signal causes the special electric motor to start with the cell-type feeder. By reading the index of the electric counter, the dial of which was well visible and legible, the moment when the conditions could be considered as stable, was stated. This stable operating rate was maintained for a while, and finally the electric motor was turned off; suddenly the whole mechanism was braked down. When mill stopped, the load was removed from the mill, through the small lid weighed, and the sample taken was tested by screen analysis in order to ascertain the fineness.

The same method was applied to state the weight and the fineness of the ground products gathered in the receptable.

The weight variation of the product fed in, and that of the output, were recorded by registering instruments, as regularly changing variables in function

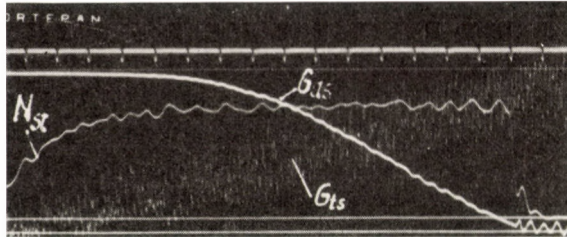


Fig. 11. Variations of the quantities that characterize the operating conditions of the hammer mill during the period of stabilization when a high intensity of feed is maintained.
Note: see Fig. 10

of time. Two original photos of the oscillograms are shown in Fig. 10 and 11, relating to two different feeding speeds.

Although some vibrations due to the unbalancedness of the driving gear that actuated the cell-type feeder caused some difficulties in the evaluation of the weight variation curve of the feeding device, the centre line of these oscil-

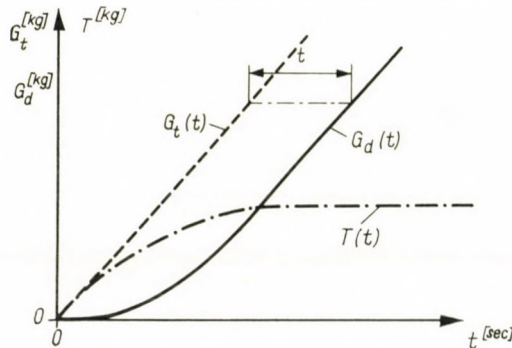


Fig. 12. Weight variations both of the product fed in and of the ground mass, as functions of time, during the period of stabilization

lations could easily be observed; it corresponds to a linear variation of the fed in weight. On the other hand, the curve of the output shows stabilized conditions, characterized by a constant angle of inclination on the diagram. Under these circumstances the driving power can be considered as constant, since its deviations from the stable condition are not important.

The fact of stable operating conditions can be well seen in Fig. 12. The feeding curve $G_t(t)$ originating from the starting point, represents a straight line

ascending steeply. Practically, the output weight variation curve $G_d(t)$ likewise starts from the same point and becomes, after stabilization, a straight line.

By taking the difference between the ordinates of the two curves: namely of the feeding curve $G_t(t)$ and of the output curve $G_d(t)$ we find the value of the instantaneous product mass under comminution in the mill, equalling the drum load $T(t)$ at any single moment. In Fig. 12 the course of this is illustrated. Further, the abscissa of the curves taken in seconds, can be considered as the average crushing period of particles to be ground.

First of all, we shall consider the relation of variations of the output weight $G_d(t)$, and we shall try to characterize the course of this variable basing it on the rule of comminution, as determined in connection with the process of portion grinding.

The basic idea of our considerations is the method of superposing the regularities, as they were observed during portion grinding tests. For an elementary portion ΔG_t we can put the equation expressing the quantity of the grinding product during the period of time $0 - t$:

$$\Delta G_t \cdot \int_0^t q_d(\tau) \cdot d\tau. \quad (3.16)$$

According to what has been mentioned above

$$q_d(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(t/\mu)}{\sigma} \right]^2}. \quad (3.17)$$

The stable conditions may be characterized by continuous feed and comminution of many elementary portions ΔG_t one after the other; in mathematical form, the quantity of the ground mass produced up to the point of time t out of an elementary portion ΔG_t fed in at a point of time 0 is:

$$\Delta G_t \cdot \int_0^t q_d(\tau) \cdot d\tau$$

equally, the quantity of the ground mass produced up to the same point of time t out of an elementary portion ΔG_t fed in at the point of time Δt is:

$$\Delta G_t \int_0^{t-\Delta t} q_d(\tau) \cdot d\tau$$

and so on. Consequently, all the elementary quantities produced up to the point of time t will be:

$$G_{ds}(t) = \sum_{k=0}^k G_t \int_0^{t-k \cdot \Delta t} q_d(\tau) \cdot d\tau. \quad (3.18)$$

Likewise the quantity fed in during the period of time Δt can be determined by using the term Q_t , so to say the "feed speed":

$$G_t = Q_t \cdot \Delta t. \quad (3.19)$$

Therefore, when $Q_t = \text{constant}$, — this being the criterion of the stable operation — it follows:

$$G_{ds}(t) = Q_t \cdot \sum_{k=0}^k \Delta t \cdot \int_0^{t-k\Delta t} q_d(\tau) \cdot d\tau. \quad (3.20)$$

According to former experiences, the function $q_d(t)$ is represented as a frequency distribution function; so now we shall introduce the following symbols:

$$\int_0^{t-x} q_d(\tau) \cdot d\tau = \Phi_t(x) \quad \text{and} \quad x = k \cdot \Delta t$$

and, therefore, we may transform our former expression into:

$$\begin{aligned} G_{ds}(t) &= Q_t \sum_{k=0}^k \Delta t \cdot \Phi_t(k \cdot \Delta t) = Q_t \cdot \int_0^t \Phi_t(x) \cdot dx = \\ &= Q_t \int_0^t \left[\int_0^{t-x} q_d(\tau) \cdot d\tau \right] \cdot dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Carrying out the partial integration

$$Q_t \cdot \int_0^t \Phi_t(x) \cdot dx = Q_t \left[x \cdot \Phi_t(x) \right]_0^t - Q_t \int_0^t x \frac{d\Phi_t(x)}{dx} dx \quad (3.22)$$

wherefrom, the first member on the right side of our equation being zero when limits are considered, and because of the relationship expressed as follows:

$$\Phi_t(x) = \int_0^{t-x} q_d(\tau) \cdot d\tau, \quad (3.23)$$

$$\frac{d\Phi_t(x)}{dx} = -q_d(t-x). \quad (3.24)$$

The result is:

$$G_{ds}(t) = Q_t \cdot \int_0^t x \cdot q_d(t-x) \cdot dx. \quad (3.25)$$

Now let us introduce a new variable: $z = t - x$, $x = t - z$, $dx = -dz$, wherefrom:

$$G_{ds}(t) = -Q_t \int_t^0 (t-z) \cdot q_d(z) \cdot dz. \quad (3.26)$$

With reversed limits the sign of the integrand changes:

$$G_{ds}(t) = Q_t \cdot \int_0^t (t-z) \cdot q_d(z) \cdot dz$$

and further:

$$G_{ds}(t) = Q_t \cdot t \cdot \int_0^t q_d(z) \cdot dz - Q_t \cdot \int_0^t z \cdot q_d(z) dz. \quad (3.27)$$

Bearing in mind that the variable $q_d(z)$ is but a frequency distribution function — the member

$$\int_0^t q_d(z) dz$$

tends towards a constant value, when t increases, and simultaneously, the member

$$\int_0^t z \cdot q_d(z) \cdot dz$$

assumes a constant value as well; more exactly this latter value will approach the first order momentum of the frequency distribution function, i. e. the mean value of the basic distribution.

Summarizing, grinding product weight as function is characterized — during the development of a stable condition — by a curve parallel to the straight line representing the feed speed, and tends to approach — asymptotically — another straight line that follows the first straight line at a distance equal to the crushing period.

Furthermore the last member in equation (3.27) represents — at a stable operation — the load:

$$T(t) = Q_t \cdot \int_0^t z \cdot q_d(z) \cdot dz. \quad (3.28)$$

The regularities governing both the variation of the output and the variation of load are characterized by their general nature, i. e. there exists in respect to the frequency distribution function $q_d(z)$, no restriction according to which it should be of the logarithmic normal type only.

REFERENCES

1. SILVER, E.A.: Feed grinder investigations. *Ohio Agricultural Experiments Stations Wooster, Ohio. Bull.* 490, October 1931.
2. GREUNE, K.: Vergleichende Untersuchungen über die Vermahlung von Luzerne, Heu und Getreide, Leipzig 1936. (Comparative investigation of alfalfa, hay and grain milling.)
3. FENTON, F. C., LOGAN, G. A.: Farm Grinding of Grain and Forage, *Kansas State College, Manhattan, Kansas Bulletin* 15 (1931), Number 7.
4. Бёлёни, И.: Исследование возможностей усовершенствования молотковых дробилок. *Acta Techn. Hung.* 10, Fasc. 3—4. (Examination of the possibility for improving hammer mills.)
5. VÖRÖS, I.: A darálás finomságának mérése és kísérleti eredménye kalapácsos rendszerű darálógépekkel. *Molnárak Lapja*, (1937), No. 12—14. (The measurement of grinding fineness and the results of experiments made with hammer mills.)

6. VÖRÖS, I.: A kalapácsos malom a mezőgazdasági gépészetben. *Technika* (1936), No. 9. (Hammer mills used for agricultural purposes.)
7. SASS, G.: A kalapácsos őrlőgépekkel végzett kísérletek eredményei. *A Magyar Kir. Gazdasági Akadémia munkái* I, (1938), No. 3. (Results of experiments carried out with hammer mills.)
8. SZÜLE, M.: Az 1936. évi mezőhegyesi őrlőgép próbák eredményei. "ZENITH" és "MEDIKÁGO" őrlőgépek összehasonlítása. (Results of grinding tests carried out in Mezőhegyes, in 1936. Comparative experiments with hammer mills of the types ZENITH and MEDIKÁGO.)
9. KERTÉSZ, I.: Kalapácsos darálók összehasonlító vizsgálata. A Mezőgazdasági Gépészeti Intézet évkönyve. Budapest 1951, Vol. II. (Comparative tests of hammer mills.)
10. BLAŽEK, J.: O činnosti kladivkového stotovníku. *Mechanizace i elektrifikace zemědělství* (1956), 245—272. (Hammer mill operations)
11. RÉNYI, A.: Valószínűségi számítás. Budapest 1954. (Probability calculation.)
12. MEDGYESSY, P.—TAKÁCS, L.: Valószínűségi számítás. C. — Vol. V. Budapest 1957. (Probability calculation. Technical-mathematical exercises.)
13. GNYEDYENKO, B. V.—HINTCHIN, A. YA.: Bevezetés a valószínűségi számításba. Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest 1954. 1—141. (Introduction into probability calculations.)
14. PRÉKOPA, A.: Bevezetés a valószínűségi számításba. Kézirat. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest. No. 3583., 1—96. (Introduction into probability calculations.)

EINIGE REGELMÄSSIGKEITEN DES MAHLVORGANGES IN HAMMERMÜHLEN

I. BÖLÖNI

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Experimente sind ausgeführt worden, um gewisse Regelmäßigkeiten im Mahlvorgang zu entdecken, mit Hilfe welcher die sich in der Hammermühle abspielenden Zerkleinerungsoperationen genauer beschrieben werden können. Das Hauptmerkmal der neuentwickelten Meßmethode besteht darin, daß einerseits der Fülltrichter, andererseits das Sammelgefäß der Mahlprodukte an je eine Waagschale aufgehängt ist. Um Messungsgenauigkeiten, die von den Trägheitskräften der Meßinstrumente hervorgerufen werden, fernzuhalten, wurden die Gewichtsänderungen mit Hilfe eines elektrotensometrischen Verfahrens gemessen und von einem Oscillographen registriert.

Die Untersuchungen umfaßten zwei Gruppen von Versuchen. Die erste Gruppe bestand aus sogenannten Charge-Mahlversuchen, bei denen immer eine bestimmte Produktmenge in einer möglichst kurzen Zeit in die Mühle gespeist wurde. Die Beobachtung der Gewichtsänderungen des Mahlproduktes brachte das Ergebnis, daß diese als logarithmisch-normale Verteilungsfunktion in guter Annäherung dargestellt und die im Laufe der Vermahlung einer Charge zum Zerkleinern eines Kornes notwendige Zeit als eine Wahrscheinlichkeitsveränderliche betrachtet werden kann (s. Gl. 3.1). Die darstellende Kurve erscheint in dem Gaußschen Koordinatensystem als eine Gerade.

Die Entwicklung eines stationären Mahlbetriebes kann aus den einzelnen Charge-Mahlversuchen abgeleitet werden. Der gesamte Verlauf kann mit Hilfe der Mathematik beschrieben werden (s. Gl. 2.27).

QUELQUES RÉGULARITÉS DANS LE RÉGIME DE BROYAGE DES MOULINS À MARTEAUX

I. BÖLÖNI

RÉSUMÉ

Les recherches se sont proposées d'établir les régularités du processus de broyage dans le tambour des moulins à marteaux.

Les nouvelles méthodes de mesures élaborées par l'auteur consistent essentiellement à enregistrer simultanément, dans le temps, les variations de poids de la trémie et du réservoir des produits broyés, suspendus séparément à des balances.

En vue de la réduction au minimum de la force d'inertie des instruments de mesure, les variations de poids ont été mesurées par voie électrotensométrique, et enregistrées par un oscillographe à boucles.

Les recherches ont porté sur deux formes fondamentales de broyage: le broyage par portions et celui en régime permanent. Au broyage par portions, nous avons fait passer brusquement une quantité déterminée de grains dans le tambour.

Dans ce cas, le poids du produit moulu en fonction du temps $[Q_d(t)]$ peut être considéré avec une bonne approximation comme étant de distribution logarithmique normale (voir 3.1).

La stabilisation du régime dans le tambour du broyeur peut être dérivée des régularités observées en broyage par portions, et le processus peut aussi se décrire par des formules mathématiques (voir 3.27).

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРОЦЕССА ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ МОЛОТКОВОЙ ДРОБИЛКИ

И. БЕЛЕНИ

РЕЗЮМЕ

Исследованиями ставится цель более точного изучения процесса измельчения, происходящего в дробильном барабане, вскрытие существующих закономерностей.

Разработаны новые методы измерения. Их суть заключается в том, что на отдельные весы были подвешены воронка — бункер для хранения измельчаемого продукта и сборный ящик измельченного продукта; при этом изменение веса их регистрировалось одновременно.

Для снижения до минимума инерции измерительных средств изменения веса измерялись электротензометрическим путем, и фиксировались с помощью шлейфового осциллографа.

Исследовались две основные формы измельчения или дробления: первая т. н. измельчение дозы, а вторая установившийся режим. При измельчении определенной дозы в измельчающий барабан толчками внезапно подавались определенные установленные количества материала.

BERECHNUNG DER ÜBERTRAGUNGSLÄNGE DER SPANNKRAFT NACH DER BRUCHTHEORIE

B. GOSCHY

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR HOCH- UND TIEFBAU, BUDAPEST

[Eingegangen am 19. Oktober 1961]

In dem vorliegenden Aufsatz wurde die Berechnung der Übertragungslänge von Spannbetonträgern mit vollem Verbund auf Grund der Plastizitätstheorie dargelegt.

Die Bruchbedingung des Betons bei gleichzeitigem Druck und Schub wurde aus der Bruchhypothese von Tresca-Mohr abgeleitet. Aus den Bruch-, Verformungs- und Gleichgewichtsbedingungen kann man die Schubspannungsverteilung und die Spannkraft am Ende des Balkens bestimmen. Die Arbeit behandelt die Frage des Gleitens der Spanndrähte im Spannbett.

Die Rechnungsergebnisse der Übertragungslänge bei verschiedenen Betongüten, Stahlorten und Vorspannungsgraden sind in einer Tabelle zusammengefaßt.

Einleitung

Die vorteilhaften mechanischen Eigenschaften der Spannbetontragwerke mit Verbund sind nur dann dauernd gesichert, wenn die Einleitung der Vorspannung und die Übertragung der Spannkraft vom Stahl auf den Beton vollkommen ausgeführt ist.

Die Frage der Endverankerung hat eine besondere Bedeutung bei dem Spannen vor dem Erhärten des Betons, wo die Vorspannkraft durch Haftung und Reibung übertragen wird.

Die Ergebnisse der elastizitätstheoretischen Berechnungen führen zur Feststellung [1], [5], daß die Betonspannungen (Druck- und Schubspannungen) bei der Einleitung der Spannkraft sich wesentlich höher ergeben als die Druck- und Schubfestigkeit des Baustoffs Beton. Die Versuche weisen ebenfalls darauf hin, daß die Lösung der Spannglieder einen örtlichen plastischen Spannungszustand am Ende des Balkens erzeugt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Bestimmung der Übertragungslänge glatter Spanndrähte auf Grund der Bruchbedingung in der Umgebung der Spannglieder bestimmt. Diese Voraussetzung steht näher dem wirklichen Kräfteverlauf.

Ferner wird als Übertragungslänge derjenige Abschnitt des Balkenendes bezeichnet, nach dem die Vorspannkraft im Eigenspannungszustand sich nicht ändert, und man mit einer geradlinigen Spannungsverteilung infolge des Lastfalles bei Vorspannung rechnen kann.

Das Übertragungsgesetz der Spannkraft wird aus den Gleichgewichts- und Bruchbedingungen bestimmt. Nach den auf die Verformungen bezüglichen Voraussetzungen wird der Rückgang der Drähte nach dem Lösen vom Spannbett in Betracht gezogen, bis zwischen Stahl und Beton ein vollkommener Verbund zustandekommt.

Voraussetzungen

1. Die Bruchbedingung des Betons bei gleichzeitigem Druck und Schub wird aus der Bruchhypothese von Tresca-Mohr bestimmt.

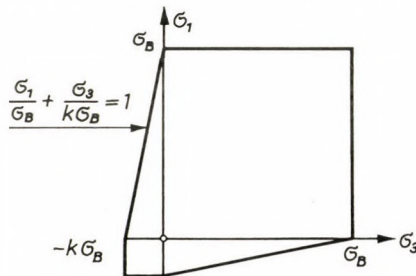


Bild 1. Festigkeitsbereich des Betons nach der Tresca-Mohrschen Bruchtheorie

Der Zusammenhang zwischen Hauptdruck- und Hauptzugspannungen aus dem Trescaschen Spannungsdiagramm (Bild 1) kann in der linearisierten Form

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_B} + \frac{\sigma_3}{k\sigma_B} = 1 \quad (1)$$

angegeben werden (7), wo

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xb}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{xb}^2 + 4\tau_{xb}^2}, \quad (2)$$

$$\sigma_3 = -\frac{\sigma_{xb}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{xb}^2 + 4\tau_{xb}^2} \quad (3)$$

die Hauptspannungen sind, und

$$\begin{aligned} \sigma_B & \text{ die Druckfestigkeit des Betons,} \\ \sigma_{zB} & \text{ die Zugfestigkeit des Betons,} \\ \sigma_{xb} & \text{ die Betondruckspannung,} \\ \tau_{xb} & \text{ die Betonschubspannung,} \\ k & = \frac{\sigma_{zB}}{\sigma_B} \end{aligned}$$

bedeuten.

Aus der Gleichung (1), (2) und (3) kann man die Schubspannung im Bruchzustand mit

$$\tau_{xb} = \frac{k}{1+k} \sigma_B \sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B} - \frac{1}{k} \frac{\sigma_{xb}^2}{\sigma_B^2}} \quad (4)$$

in die Rechnung stellen. Gleichung (4) drückt die Bruchbedingung des Betons bei gleichzeitiger Druck- und Schubbeanspruchung aus.

2. Der Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie des Betons wird auf Grund der schweizerischen Versuche (Roš, EMPA) [6], [9] genügend genau mit der Hyperbel-Gleichung angegeben,

$$\varepsilon_{xb} = \frac{\sigma_{xb}}{E_0} + 0,1 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B - \sigma_{xb}}, \quad (5)$$

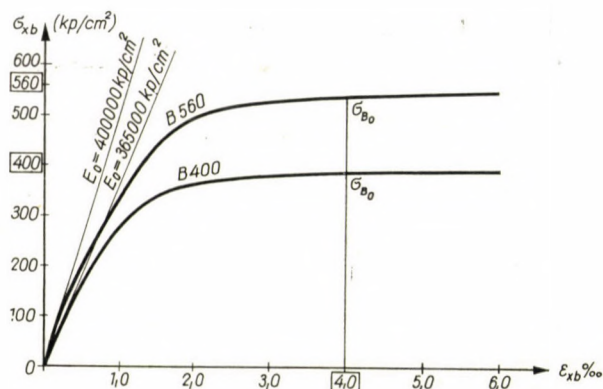


Bild 2. Spannungs-Dehnungslinie des Betons nach den schweizerischen (EMPA) Versuchsergebnissen

worin

ε_{xb} die Betonstauchung und
 E_0 den dynamischen Elastizitätsmodul des Betons

bedeuten. Die Spannungs-Dehnungslinie des Betons nach der Gl (5) ist im Bild 2 dargestellt.

3. Zwischen Spannstahl und Beton wird ein vollkommener Verbund vorausgesetzt. In diesem Falle wird die Dehnung des Spannstahls und des Betons gleich sein [1], [5],

$$\varepsilon_{xb} = \varepsilon_{xz}, \quad (6)$$

(ε_{xz} Dehnung des Spannstahls). Die Bedingung 5. ist mit der Hyperbel-Gleichung (5) erfüllt. Die Bruchstauchung des Betons ist in Wirklichkeit kleiner als die plastische Dehnung des Spanndrahtes. Die Bewertung der relativen Verschiebung zwischen Stahl und Beton wird nachstehend angegeben.

4. Das Spannglied wird als Spannstab untersucht. Zwischen der Schubkraft (Haftkraft) an der Oberfläche des Spannstabes und der Spannkraft besteht die Gleichgewichtsbedingung (Bild 3)

$$\tau_{xb} = \frac{1}{U_z} \frac{dP_{xz}}{dx} \quad (7)$$

mit den Bezeichnungen:

U_z der Umfang des Drahtes und
 P_{xz} die Spannkraft im Abstand x vom Balkenende.

5. Der Spannungszustand des Betons außerhalb der Verbundfläche wird nicht in Betracht gezogen.

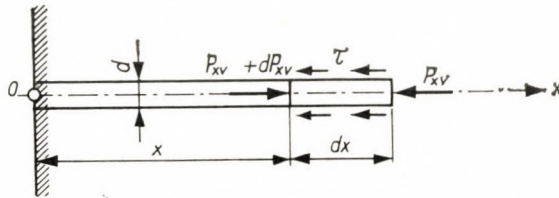


Bild 3. Gleichgewicht der auf den Spanndraht wirkenden Kräfte

Spannungszustand an der Oberfläche des Spanndrahtes

Die Druckspannungsverteilung kann am Balkenende, — bei der Einleitung der Vorspannkraft — durch die Beziehungen (7) und (4) aus der Differenzialgleichung

$$\frac{k}{1+k} \sigma_B \sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B} - \frac{1}{k} \frac{\sigma_{xb}^2}{\sigma_B^2}} = \frac{1}{U_z} \frac{dP_{xz}}{dx} = \frac{F_z}{U_z} \frac{d\sigma_{xz}}{dx} \quad (8)$$

bestimmt werden. Die Spannung des Spanndrahtes wird auf Grund der Voraussetzungen 2 und 3 erhalten:

$$\sigma_{xz} = n\sigma_{xb} + 0,1 \cdot 10^{-3} \frac{E_v \sigma_{xb}}{\sigma_B - \sigma_{xb}}, \quad (9)$$

dabei ist

$n = E/E_0$ die Elastizitätsverhältniszahl,
 $E_v = 1,9 \cdot 10^6$ kp/cm², der Elastizitätsmodul des Spannstahls,
 σ_{xz} = die Stahlspannung in Abstand x vom Balkenende.

Differenziert man die Gleichung (9) nach x

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dx} = \frac{d\sigma_{xb}}{dx} \left[n + 0,19 \cdot 10^3 \frac{\sigma_B}{(\sigma_B - \sigma_{xb})^2} \right], \quad (10)$$

so erhält man mit der Gl. (8) die Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{1+k} \sigma_B \sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B} - \frac{1}{k} \frac{\sigma_{xb}^2}{\sigma_B^2}} = \\ & = \frac{F_z}{U_z} \left[n + 0,19 \cdot 10^3 \frac{\sigma_B}{(\sigma_B - \sigma_{xb})^2} \right] \frac{d\sigma_{xb}}{dx}. \end{aligned} \quad (11)$$

Nach der Trennung der Veränderlichen und nach der Integration bekommt man den Ausdruck

$$\begin{aligned} x = & \frac{F_z}{U_z} \left\{ n \frac{1-k}{k} \arcsin \left(\frac{2}{1+k} \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B} - \frac{1-k}{1+k} \right) + \right. \\ & + \frac{2}{3} 0,19 \cdot 10^3 \frac{1}{\sigma_B} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right)^2} + \frac{2k}{1+k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right)} \right] \times \\ & \left. \times \sqrt{\frac{1+k}{k} \left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right) - \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right)^2} \right\} + c, \end{aligned} \quad (12)$$

wo die Integrationskonstante aus der Randbedingung $(\sigma_{xb})_{x=0} = 0$ bestimmt wird. Somit ist

$$\begin{aligned} x = & \frac{F_z}{U_z} n \frac{1-k}{k} \left[\arcsin \left(\frac{2}{1+k} \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B} - \frac{1-k}{1+k} \right) + \arcsin \frac{1-k}{1+k} \right] + \\ & + 0,19 \cdot 10^3 \frac{F_z}{U_z \sigma_B} \left\{ \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right)^2} + \frac{2}{1+k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right)} \right] \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{\frac{1+k}{k} \left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right) - \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_B}\right)^2} - \frac{3+k}{1+k} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Es ist zu bemerken, daß die verwickelte Form der Gl. (11) läßt die Betonspannung in der Funktion des Abstandes x [z. B. $\sigma_{xb} = f(x)$] nicht ausdrücken, folglich wird dieselbe als unabhängige Veränderliche in Betracht gezogen.

Die Funktion (13) stellt wegen der Umkehrung der Grundbedingung die Verminderung der Betonspannung dar.

Da die Betondruckspannung bei der Einleitung der Spannkraft den Bruchwert (σ_B) erreicht [8], wird die Betonspannung an der Oberfläche des Drahtes

$$\sigma'_{xb} = \sigma_B - \sigma_{xb}.$$

Die Druck- und Schubspannungsverteilung entlang des Spanndrahtes ist im Bild 4 dargestellt.

Auf Grund der vorausgesetzten idealen Eigenschaft des Betons nimmt die Betonstauchung in der Nähe der Bruchspannung über alle Grenzen zu.

Die durchgeführten Bruchversuche (Roš, EMPA) haben bestätigt, daß der Beton eine bestimmte Bruchdehnung annimmt [6], [9], [10]. Bei den Spannbetongüten B 400 und B 560 kann man durchschnittlich mit einer Bruchdehnung von

$$\varepsilon_B = 4\text{‰}$$

rechnen [6]. In der nachfolgenden Rechnung wird die zur Bruchstauchung (ε_B) gehörige Spannung mit σ_{B0} bezeichnet und als Bruchspannung in Betracht

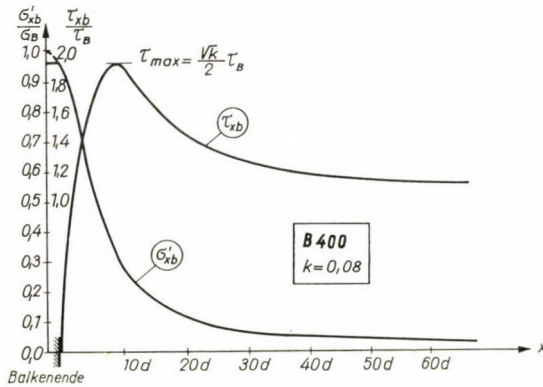


Bild 4. Druck- und Schubspannungsverteilung bei der Einleitung der Vorspannkraft am Ende des Balkens im Bruchzustand

gezogen. Der Wert von σ_{B0} kann aus der Gl. (5) bestimmt werden und beträgt

$$\sigma_{B0} \cong 0,97 \sigma_B - 0,96 \sigma_B,$$

das heißt etwa 3‰—4‰ kleiner als die Bruchfestigkeit des untersuchten Betons. Dementsprechend sind die Dehnungen des Betons und Stahls nur von einer Stahldehnung

$$\varepsilon_{xz} \leq \varepsilon_B = 4\text{‰}$$

mit einander gleich, in allen anderen Fällen,

$$\varepsilon_{xz} > \varepsilon_B,$$

entstehen zwischen Beton und Spanndraht Schlüpfungen [3], [4]. Das Maß des Stahlgleitens kann auch rechnerisch bestimmt werden. Im Besitz der anfänglichen Spannkraft P_{0v} wird die Stahldehnung innerhalb der Proportionalitätsgrenze

$$\varepsilon_{0z} = \frac{P_{0v}}{E_v F_z} > \varepsilon_B \quad (14)$$

(darüber hinaus ist E_v aus der Spannungs-Dehnungslinie zu entnehmen), und die zu diesem Wert geordnete Betonspannung ($\sigma_{Bv} < \sigma_B$) ist am Bild 2 abzulesen.

Die Gleichung (13) liefert mit $\sigma_{B0} < \sigma_{Bv} < \sigma_B$ zwei Abstände:

$$x_1 = f(\sigma_{Bv}) \quad \text{und} \quad x_2 = f(\sigma_{B0}),$$

und schließlich erhält man den Wert der Schlüpfung aus

$$\vartheta = x_2 - x_1.$$

Dabei entsteht ein teilweiser Verbund am Balkenende, der für einige Bauteile als ausreichend bezeichnet werden kann. Diese Ergebnisse führen zur Folgerung, daß das Gleiten der Spannseile erst dann vorkommt, wenn die Stahldehnung beim Vorspannen größer als die Bruchstauchung des Betons ist.

Bestimmung der Übertragungslänge im Bruchzustand

Aus der Druckspannungsverteilung kann auf Grund der Bruchbedingung (4) die Schubspannungsverteilung am Umfang des Spanndrahtes abgeleitet

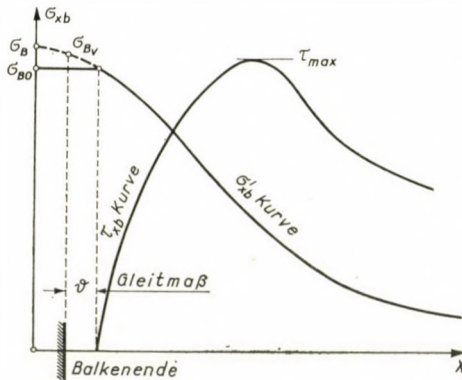


Bild 5. Das Gleitmaß des Spanndrahtes am Ende des Balkens bei der Verankerung durch Haftung und Reibung

werden (Bild 4). Die Spannkraft beträgt aus Gl. (7) innerhalb der Übertragungslänge

$$P_{xv} = U_z \int_0^x \tau_{xb} dx. \quad (15)$$

Die volle Übertragungslänge kann im Bruchzustand aus

$$P_{0v} = U_z \int_0^{\bar{u}} \tau_{xb} dx \quad (16)$$

bestimmt werden, wo \bar{u} die Übertragungslänge bedeutet.

Die Ergebnisse der Gl. (16) sind in den Bildern 6 dargestellt. Aus der Bruchbedingung kann man feststellen, daß die günstigste Übertragungslänge dann erreicht wird, wenn die Verankerung durch Haftung bei den maximalen Schubspannungen zustande kommt, bzw. wenn der Stahl mit der Spannung

$$\sigma_{0v} \leq E_v \varepsilon_B$$

gespannt wird. Diese Bedingung entspricht bei den ungarischen Spannstählen einer Anfangsspannung von

$$7000 \text{ kp/cm}^2 \leq \sigma_{0v} \leq 5000 \text{ kp/cm}^2$$

und kann unter der Bezeichnung »partielle Vorspannung« behandelt werden.

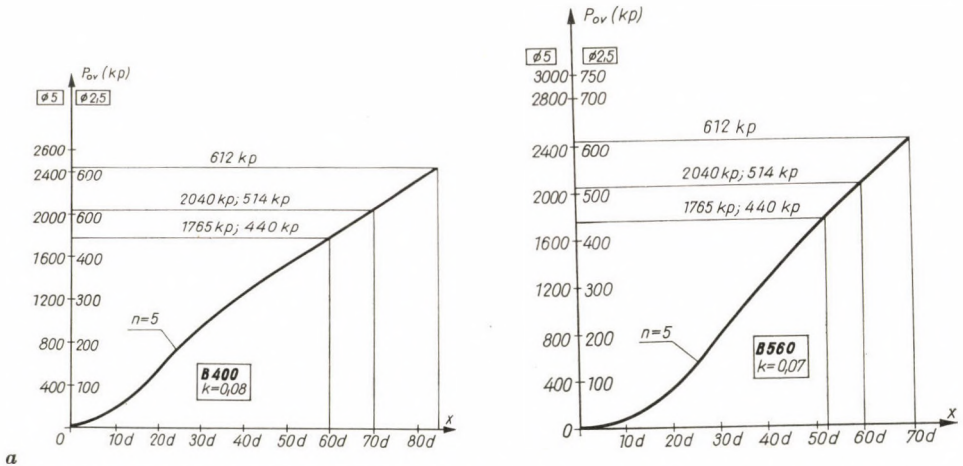


Bild 6. Verlauf der Spannkraft am Ende des Balkens im Stahl im Bruchzustand bei der Vorspannung im Spannbett

Das Verhältnis der Zug- und Druckfestigkeit des Betons ist von der Güteklasse abhängig. Die ausländischen Versuche [11] haben gezeigt, daß Verhältniszahl k beträgt:

- für Betongüte B 400 $k = 0,07 \div 0,08$
- für Betongüte B 560 $k = 0,06 \div 0,07$.

Tafel I

σ_{0v} (kp/cm ²)	Kraftübertragungslänge	
	B 400	B 560
12 500	85 d	60 d
10 500	70 d	50 d
9 000	60 d	45 d

Die aus der Bruchbedingung bestimmten Übertragungslängen sind in Tafel I zusammengefaßt, in der die Güteklasse des Betons, die Spannstahlorte, der Durchmesser und die Anfangsvorspannung angegeben sind. Diese Werte können für die Praxis nur mit einem bestimmten Sicherheitsbeiwert gegen Bruch [9] in Rechnung gestellt werden.

SCHRIFTTUM

1. SCHWERTNER, A.: Versuche zur Bestimmung der Haftkräfte bei Eisenbetoneinlagen. *Acta Techn. Hung.*, **2** (1952), 303—344.
2. MOHAY, K.: Feszítőhuzalok erőátadási hosszának meghatározása (Bestimmung der Übertragungslänge der Spannseile) *ÉKME Tud. Közlemények* (1957) 2.
3. TASSI, G.: Végleges hosszon való lehorgonyzódás lehetősége előfeszített betonban (Verankerungsmöglichkeit über endliche Länge im Spannbeton) *ÉKME Tud. Közlemények* **3** (1957) No. 4, 13—22.
4. TASSI, G.: A feszített betét betonban való lehorgonyzódásának elmélete. (Theorie der Verankerung der Spanndrähte im Beton). *Ép. és Közlekedéstudományi Közlemények* (1959) 1—2, 217—218.
5. SZMODITS, K.: Tapadófézültségek az előfeszített vasbeton tartóban (Haftspannungen in Spannbetonträgern) *ÉTI Tud. Közlemények* (1955) 7., 1—9.
6. GYENGŐ, T.—MENYHÁRD, I.: Vasbeton szerkezetek (Stahlbetonkonstruktionen) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.
7. GOSCHY, B.—BALÁZS, GY.: Berechnung der Schubsicherheit von Spannbetonbalken. *Acta Techn. Hung.* **33** (1961), 275—300.
8. BASE, G. D.: Előfeszített huzal lehorgonyzási hosszának tanulmányozása (Prüfung der Übertragungslänge beim Vorspannen mit Verbund) *Cement and Concrete* (1959), 4.
9. LEONHARDT, F.: Spannbeton für die Praxis. W. Ernst und Sohn, Berlin, 1956.
10. RITTER, M.—LARDY, P.: Vorgespannter Beton. Leemann V. Zürich, 1950.
11. WEIGLER, H.—BECKER, G.: Über das Bruch- und Verformungsverhalten von Beton. *Beton und Stahlbetonbau*, **36** (1961), 390—396.

CALCULATION OF THE TRANSMISSION LENGTH OF PRE-TENSIONED WIRES USING THE ULTIMATE LOAD THEORY

B. GOSCHY

SUMMARY

This paper is concerned with the calculation of transmission length (bond length) of pre-tensioned wires having pre-stressed members, based on the ultimate load theory.

Tresca-Mohr's failure criterium is assumed to be valid for the combined effect of compression and shear.

From failure, deformation and equilibrium conditions, shear (bond) stress distribution on the wire surface and tensile force variation at the end of the pre-stressed beam can be deduced.

Consideration is given to the wire slip problem. Theoretical ultimate anchorage lengths obtained by the suggested method are tabulated for various concrete and steel grades and degrees of pre-tensioning.

CALCUL DE LA LONGUEUR DE BLOCAGE DES FILS PRÉCONTRAINTS, D'APRÈS LA THÉORIE DE LA RUPTURE

B. GOSCHY

RÉSUMÉ

L'auteur présente une méthode de calcul basée sur la théorie de la plasticité, pour déterminer la longueur de blocage des fils prétendus adhérents au béton (cas de mise en tension avant coulage).

La condition de rupture du béton sollicité en même temps à la compression et au cisaillement était déduite de l'hypothèse de Tresca-Mohr. A l'aide des conditions de rupture, de déformation et d'équilibre, on peut déterminer la distribution des contraintes de cisaillement à la surface de l'acier et l'effort de tension dans la zone d'about des poutres précontraintes.

L'auteur fait également l'analyse du problème du glissement des câbles.

Les valeurs théoriques de la longueur de blocage en état de rupture sont indiquées dans un tableau pour différentes qualités de béton, d'acier, et pour différents taux de précontrainte.

РАСЧЕТ ДЛИНЫ ПЕРЕДАЧИ УСИЛИЯ

Б. ГОШИ

РЕЗЮМЕ

В работе излагается определение длины передачи усилия натяжных элементов с липкой прокладкой на основе принципов теории пластичности.

В случае одновременных сжатия и сдвига условие излома бетона может быть выведено на основе теории излома Треска—Мора.

С помощью условий излома, деформации и равновесия можно определить распределение напряжения сдвига, образующегося вдоль натяжного троса, и на основе этого усилие троса на конечном участке балки.

В работе анализируется также вопрос скольжения арматуры.

Результаты расчетов сведены в таблицу; на основе их можно определить длину передачи усилия для различных бетонов и марок стали в соответствии со степенью напряжения.

A POSSIBLE EXPLANATION FOR THE INFLUENCE OF TEMPERATURE ON ABSORPTION

GY. VAJDA

CAND. OF TECHN. SC.

INSTITUTE FOR ELECTRICAL POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received November 2, 1961]

According to experiences, the absorption current often takes up local extreme values in function of temperature. The cause of the anomaly is generally looked for in chemical processes. The absorption current characterizes the formation of processes with polarization character in function of time, taking into consideration the temperature dependence of the polarization gives a physical explanation for the anomalies.

In some scientific publications [1, 2] reference is made to the circumstance, that in connecting the D. C. voltage, the absorption current formed in the insulations depends considerably on the temperature and in certain characteristics irregularities appear. To elucidate the conditions, detailed investigations were made on different rotary machine insulations and samples by WICHMANN [3]. In most of the cases irregularities could be found, the characteristics of which can be seen in Fig. 1. In the figure the temperature dependence of charging currents i_{t1} and i_{t10} , respectively, is illustrated, measured in 1 and 10 minutes after the connection of the voltage. The capacitive component can surely be neglected after 1 minute [4], consequently the charging current is the sum of the leakage current and the absorption current. The leakage current generally increases exponentially with the temperature rise, the increase always being a monotonic one [5], so the local extreme values may be introduced exclusively by the absorption current.

The experiences, besides being theoretically interesting, are also of practical importance. The insulation conditions are often verified by measuring the absorption and charging current, respectively. In case the measurements are effected within the temperature range the local extreme values arise in, it may occur that the measurement shows an incorrect picture, as a consequence of which an insulation of bad condition is classified as a good one, or on the contrary, on the basis of the measurement an insulation of suitable quality is regarded as being deteriorated.

WICHMANN attributes the phenomenon to chemical changes. In most cases he explains the local extreme values by the binding material becoming softened in that range. This explanation does not seem to be absolutely reassuring. On the one hand, the softening of the binding materials cannot be strong at such a low temperature, and, on the other hand, the softening is no ex-

planation for the circumstance, that above and below the critical range the run of the curves is similar to each other.

For the above anomalies a physical explanation may also be found, given in detail below.

On the effect of an electrical field the insulating materials become polarized, electrical dipoles are formed in the insulation. One part of the dipoles is established due to the deformation of the atoms, or molecules (displacement polarization), or to the orientation of the polar particles (orientational polarization). These processes take place rapidly, the dipole moment corresponding

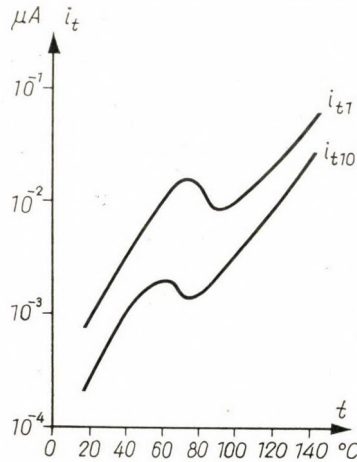


Fig. 1. Temperature dependence of the 1- and 10-minute charging current with asphalt-micafolium sample [3]

to the equilibrium is quickly established. Another part of the dipoles is formed as function of the insulation construction, through rearrangement of the space charges, charging of the boundary surfaces, etc. These processes run off slowly as compared with the above one, the equilibrium ensues slowly.

In the course of polarization, charge carriers are displaced, meaning a current. If the effect of a field strength E a dipole of m electric moment appears, in state of equilibrium

$$m_0 = aE = qd, \quad (1)$$

where q is the dipole charge, d the distance between the charges. The arm of the dipole increases continuously from the initial state $x = 0$ up to the state of equilibrium $x = d$, according to the motion-function depending on the forces affecting the charges, e. g. in analogy to relation

$$m(\tau) = qx = qd[1 - e^{-\frac{\tau}{\theta}}], \quad (2)$$

where τ is the time and Θ the time constant of the process. The elementary current accompanying the moment formation in the above case

$$i_e = q\dot{\vartheta} = q \frac{\partial x}{\partial \tau} = qd \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\tau}{\Theta}} = m_0 \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\tau}{\Theta}}. \quad (3)$$

When connecting a D. C. voltage, the current flowing on the insulation decreases in function of time, it may be reduced to a constant leakage and a variable component. The variable component is nothing else but the sum of the above elementary currents. The variable component may be reduced to

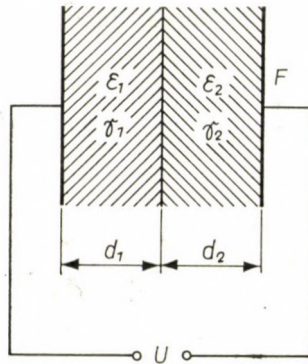


Fig. 2. Two-layer insulation

capacitive components corresponding to the rapid processes and to absorption ones, with slow processes.

In formula (3) m_0 and Θ depend finally on the movement of the elementary particles [5]. As this movement may be significantly influenced by temperature, the value of m_0 and Θ is temperature-dependent. This permits in certain cases, the explanation of the anomalies shown in Fig. 1.

If the current is examined at fixed instants τ , the extreme value of the amplitude i_e in function of temperature will appear there, where

$$\frac{\partial i_e}{\partial T} = \frac{1}{\Theta} \left[\frac{\partial m_0}{\partial T} - \frac{m_0}{\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial T} \left(1 - \frac{\tau}{\Theta} \right) \right] e^{-\frac{\tau}{\Theta}} = 0. \quad (4)$$

With some kinds of polarization [5] $m_0 = a/T$ and $\Theta = be^{\frac{c}{T}}$, at that times, resolving equation (4), the place of the extreme value is at a temperature

$$T = c \left(1 - \frac{\tau}{\Theta} \right).$$

Generally among the slow polarizations the interfacial polarization is considered as the most effective. In a plain capacitor filled with a two-layer

insulation, as illustrated in Fig. 2, the interfacial surfaces are charged, if the ratio of dielectric constants is not in conformity with the conductivity ratio

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right).$$

The effect of the interfacial surfaces charge is equivalent to polarization. The relations are relatively easy to follow; adapting SKANA VI's calculations [5], the moment of capacitor in the state of equilibrium increases by

$$\Delta M = \Delta Q (d_1 + d_2) = \frac{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1)^2 d_1 d_2 F (d_1 + d_2) \varepsilon_0}{(\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1)^2 (\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)} U. \quad (5)$$

The charge is accompanied by the absorption current

$$i_a = \frac{\Delta M}{d_1 + d_2} \cdot \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{\tau}{\Theta}} = \frac{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1)^2 d_1 d_2 F U}{(\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1) (\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)^2} e^{-\frac{\tau}{\Theta}} \quad (6)$$

the time constant of which is

$$\Theta = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}. \quad (7)$$

The conductivity is greatly dependent on the temperature, generally being

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{b}{T}}. \quad (8)$$

In analogy to formula (6) the relation between current and conductivity is given by a fractional function, while the conductivity is a function of temperature: at a fixed instant τ the function as per formula (6) becomes similar to Fig. 1. The place of extreme values is given by the zeros

$$\frac{\partial i_a}{\partial T} \Big|_{\tau=\text{const}} = \frac{1}{\Theta} \left[\frac{\partial \Delta M}{\partial T} - \frac{\Delta M}{\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial T} \left(1 - \frac{\tau}{\Theta} \right) \right] e^{-\frac{\tau}{\Theta}} = 0 \quad (9)$$

of the differentialquotient. Assuming, that the thermal expansion and the temperature dependence of the dielectric constants may be neglected, taking into consideration formulae (5)—(8), the place of extreme values is furnished by the solutions of the equation system

$$\begin{aligned} & 2 (d_2 \gamma_1 + d_1 \gamma_2)^4 [(d_2 \gamma_1 + d_1 \gamma_2) (\varepsilon_1 b_2 \gamma_2 - \varepsilon_2 b_1 \gamma_1) - \\ & \quad - (\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1) (d_2 b_1 \gamma_1 + d_1 b_2 \gamma_2)] + \\ & \quad + (\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1) (d_2 b_1 \gamma_1 + d_1 b_2 \gamma_2) \left[1 - \frac{\tau}{\Theta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

As appears from the formula, the place of extreme values also depends on the instant τ , this being in accordance with experience.

REFERENCES

1. ASKEY, J. S.—JOHNSON, J. S.: Insulation Resistance and Dielectric Absorption Characteristics of Large A.C. Stator Windings. *Trans. AIEE* **64** (1945), 347.
2. DUKE, A. C.—ROSS, C. W.—JOHNSON, J. S.: Report of Dielectric Tests on a Large Hydro-generator. *Trans. AIEE Part. I.* **74** (1955), 673.
3. WICHMANN, A.: Der Temperatureinfluss bei Isolationsprüfungen mit Gleichspannung an elektrischen Maschinen. *ETZ-B* **12** (1960), 237.
4. VAJDA, GY.: The Influence of the Capacitive Component by Absorption Tests. *Acta Techn. Hung.* **40** (1962), 237.
5. SKANA VI, G. I.: A dielektrikumok fizikája (gyenge terek tartománya). Akadémiai Kiadó, Budapest 1953. (SKANA VI, G. I.: The Physic of Dielectrics).

EINE MÖGLICHE ERKLÄRUNG FÜR DIE ABHÄNGIGKEIT DER ABSORPTION VON DER TEMPERATUR

GY. VAJDA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Erfahrung zeigt, daß der Absorptionsstrom oft in Abhängigkeit von der Temperatur lokale Extremwerte annimmt. Die Ursache der Anomalie wird gewöhnlich in chemischen Vorgängen gesucht. Der Absorptionsstrom wird durch die Entwicklung von Vorgängen mit Polarisationscharakter gekennzeichnet; Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Größen, die die Polarisation bestimmen, ermöglicht eine physikalische Erklärung der Anomalien.

UNE EXPLICATION POSSIBLE DE L'INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR L'ABSORPTION

G. VAJDA

RÉSUMÉ

L'expérience montre que le courant d'absorption accuse souvent des valeurs extrêmes locales en fonction de la température. La cause de cette anomalie est cherchée d'ordinaire dans des phénomènes chimiques. Le courant d'absorption caractérise la formation dans le temps de processus ayant un caractère de polarisation; en tenant compte de l'influence de la température sur les quantités déterminant la polarisation, on peut trouver une explication physique des anomalies.

ВОЗМОЖНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ АБСОРБЦИИ

Д. ВАЙДА

РЕЗЮМЕ

Согласно опыту, абсорбционный ток часто в зависимости от температуры принимает местные крайние значения. Причину аномалии, как правило, ищут в химических явлениях. Характеризуется образование во времени явлений поляризационного типа. Абсорбционный ток характеризует формирование во времени процессов поляризационного характера; принятие во внимание температурной зависимости величин, определяющих поляризацию, дает возможность толковать физическое обоснование аномалий.

ONE-DIMENSIONAL RESPONSE AND COEFFICIENT OF THERMAL EXPANSION IN TIME-SENSITIVE MATERIALS

A. M. FREUDENTHAL

COLUMBIA UNIVERSITY NEW YORK, N. Y.

[Manuscript received March 5, 1962]

In the analysis of visco-elastic problems as well as in the experimental observation of the visco-elastic response of materials in bending or extensional oscillations the one dimensional response is of considerable importance, as it seems to provide an expedient analogy to the elastic response on which the theoretical treatment of visco-elastic behaviour can be based. However, it is not generally recognized that in the case of real, and therefore elastically or visco-elastically compressible materials the analogy is much less simple than that arising from the usually assumed incompressibility. An attempt is therefore made to analyse the one-dimensional visco-elastic response under various assumptions concerning the material response in volume-constant distortion and volumetric strain in order to illustrate the complexity of the resulting one-dimensional behaviour, in particular the frequency dependence of the generalized Hooke modulus E and Poisson ratio ν — The interrelation of this ratio and the coefficient of thermal expansion is also discussed in order to demonstrate the limitation of the theoretically expedient but physically dubious assumption of incompressibility of the material.

1. Introduction

The drastic simplification of the analysis of linear visco-elastic media resulting from the common assumption of incompressibility provides a strong motivation for this assumption, in spite of its physical shortcomings. The analytical advantage of a constant value $\nu = 0.5$ of Poisson's ratio in the solution of visco-elastic problems is frequently considered sufficient justification for its use; little effort is made to assess the resulting deviations from physical reality characteristic of these approximate solutions. Particularly in the solution of visco-elastic thermal stress problems, the effect of the assumption of incompressibility is drastic: it actually eliminates the problem because an infinite value of the bulk modulus K implies a vanishing value of the coefficient of thermal expansion α such that the product $(K\alpha) = \text{const.}$ tends towards a finite value, the specific temperature pressure per degree under 3-dimensional restraint. This fact is not reflected in the conventional thermo-elastic and thermo-visco-elastic equations in which K and α are erroneously considered to be independent physical parameters.

Among the alternative pairs of elastic constants (E, ν or K, G or μ, λ) by which the isothermal elastic behavior of materials can be described within the range of small strains, the bulk and shear moduli (K, G) are preferable on physical grounds (separation of volume change and volume-constant distortion), Hooke's modulus and Poisson's ratio (E, ν) are the most easily meas-

ured, while the Lamé constants (μ, λ) are expedient for analytical purposes. Within a limited range of temperature variation the associated variation in the elastic parameters is small enough to be neglected; the temperature effects thus appear only in the form of volume changes or of stresses induced by their restraint, and are governed by the coefficient of linear thermal expansion α and the elastic constants. The coefficient α is usually observed as an independent parameter and introduced as such in the thermo-elastic analysis.

The fact that for numerous materials the constants E and ν have been determined in uni-axial tension or compression tests with tolerable accuracy, while methods of measurement of the bulk-modulus are of problematic reliability, has caused an understandable preference for these parameters not only in testing laboratories but also in engineering analysis. This preference has automatically been extended to time- and temperature-sensitive materials for which E and ν can no longer be simply defined, with the result that considerable effort has been and is still being wasted in many attempts to measure Poisson's ratio of time- and temperature-sensitive materials, as if this ratio were a uniquely defined material parameter.

A considerable responsibility for the unsuccessful efforts to measure this "constant" ν even where it has ceased to be one is borne by stress-analysts and designers, whose indiscriminate demand for values of Poisson's ratio as a necessary design parameter results from their lack of understanding that the usual methods of elastic stress analysis are only applicable to elastic materials within the range of small strains and that, under most circumstances, the assumption of elasticity of the material represents not more than a first approximation of reality. Even for such common engineering materials as concrete under sustained stress, elastic behavior cannot generally be considered a valid first approximation. Under less common conditions, such as service at elevated temperatures, metals or structural plastics show quite pronounced time-sensitivity and deviations from elastic behavior. Methods of analysis involving constant values of ν are nevertheless widely applied and laboratories continue to provide such values disregarding the inherent dependence, in time-sensitive materials, of Poisson's ratio on the momentary values of stress, strain and their time-derivatives.

The difficulties of interpreting the measurements of the ratio ν of lateral and longitudinal strain under uni-axial tension (or compression) are, however, not only the result of the time-sensitive behavior of materials. Specific problems arise even for elastic materials when the assumption of small strains is no longer justified, as in tests of elastomeric materials under forces producing finite strain. Defining the "stretch" λ of an initial length L to $(L + \Delta L)$ by

$$\lambda_L = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{L + \Delta L}{L}, \quad (1.1)$$

its "extension" δ_L by

$$\delta_L = \lambda_L - 1, \quad (1.2)$$

its "deformation" C_L by (1)

$$C_L = \lambda_L^2 = (1 + \delta_L)^2 = 1 + 2\delta_L + \delta_L^2, \quad (1.3)$$

and its "strain" ε_L by

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2}(C_L - 1) = \frac{1}{2}(2\delta_L + \delta_L^2), \quad (1.4)$$

these "deformation"- and "strain"-measures are consistent with the general theory of finite strain in the continuum. For the homogeneous state of uniaxial extension $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3$ of an incompressible bar for which

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2^2 = 1 \quad \text{or} \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}} = \lambda^{-\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

represents the condition of incompressibility, the extensions

$$\delta_1 = \lambda - 1 \quad \text{and} \quad \delta_2 = \lambda^{-\frac{1}{2}} - 1 = \delta_3, \quad (1.6)$$

the deformations

$$c_1 = \lambda^2 \quad \text{and} \quad C_2 = \lambda^{-1} = C_3, \quad (1.8)$$

and the strains

$$2\varepsilon_1 = \lambda^2 - 1 \quad \text{and} \quad 2\varepsilon_2 = \lambda^{-1} - 1. \quad (1.8)$$

For small strains δ^2 in Eq. (1.3) can be neglected, so that

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(C_1 - 1) = \frac{1}{2}(1 + 2\delta_1 - 1) = \delta_1$$

and

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(C_2 - 1) = \frac{1}{2}[(1 + 2\delta_1)^{-\frac{1}{2}} - 1] \doteq -\frac{1}{2}\delta_1$$

producing the constant value of Poisson's ratio $\nu = -(\varepsilon_2/\varepsilon_1) = 0,5$ as required.

For finite strains, however, this ratio can be defined alternatively by

$$\nu' = -(\delta_2/\delta_1) \quad \text{or} \quad \nu'' = -(\varepsilon_2/\varepsilon_1) \quad (1.9)$$

with the result that

$$\nu' = \frac{1 - \lambda^{-\frac{1}{2}}}{\lambda - 1}, \quad (1.10a)$$

and

$$\nu'' = \frac{1 - \lambda^{-1}}{\lambda^2 - 1}. \quad (1.10b)$$

For $\delta = 0$ and $\lambda = 1$ both ratios necessarily tend towards $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \nu' = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \nu'' = 0,5$; for $\lambda > 1$: $\nu'' \neq \nu' < 0,50$. Thus, for instance, for $\lambda = 1,15$: $\nu' = 0,467$, $\nu'' = 0,424$; for $\lambda = 1,25$: $\nu' = 0,42$, $\nu'' = 0,36$, while for $\lambda = 2$: $\nu' = 0,29$ and $\nu'' = 0,17$. Hence values of $\nu < 0,5$ do not indicate compressibility of the medium as they would under conditions of small strains, a fact that is not always remembered in the interpretation of measurements of Poisson's ratio of elastomers within the range of moderate strains.

2. Poisson's ratio in linear visco-elastic media under quasi-static conditions

For linear visco-elastic media represented by the operator equations

$$P(D) s_{ij} = 2GQ(D) e_{ij} \quad (2.1a)$$

and

$$P'(D) p = 3K Q'(D) \varepsilon_v \quad (2.1b)$$

between the components of the stress-deviations $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}p$ and of the strain deviations $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_v$ and the hydrostatic pressure p and volume change ε_v , where the constants of the operators [1]

$$\begin{aligned} P(D) &= a_0 + a_1 D + \dots + a_m D^m, \\ Q(D) &= b_0 + b_1 D + \dots + b_n D^n, \\ P'(D) &= a'_0 + a'_1 D + \dots + a'_r D^r, \\ Q'(D) &= b'_0 + b'_1 D + \dots + b'_s D^s \end{aligned} \quad (2.2)$$

with $D = \partial/\partial t$, are combinations of relaxation times, retardation times and shear moduli. Poisson's ratio which in the elastic medium is defined by

$$\nu = [(3K - 2G)/(6K + 2G)]$$

is easily transformed into the operator equation:

$$\nu(D) = \frac{\frac{1}{6G} \frac{P(D)}{Q(D)} - \frac{1}{9K} \frac{P'(D)}{Q'(D)}}{\frac{1}{3G} \frac{P(D)}{Q(D)} + \frac{1}{9K} \frac{P'(D)}{Q'(D)}}, \quad (2.3)$$

where $\nu(D)$ defines a function of time $\nu(t)$ when loads and displacements are time-dependent (quasi-static problems) or a function of frequency $\nu(\omega)$ when loads and displacements are frequency dependent.

For the simplest uni-axial testing conditions under which Poisson's ratio is usually measured and in which either the uni-axial stress is controlled $\sigma_{11} = \sigma(t)$ or $\sigma_{11} = \sigma(\omega)$ while $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, or the uni-axial strain is controlled

$\varepsilon_{11} = \varepsilon(t)$ or $\varepsilon_{11} = \varepsilon(\omega)$ and $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, Poisson's ratio can therefore be evaluated by solving the differential operator equation

$$\nu = \frac{\left[\frac{1}{6G} \frac{P(D)}{Q(D)} - \frac{1}{9K} \frac{P'(D)}{Q'(D)} \right] \sigma}{\left[\frac{1}{3G} \frac{P(D)}{Q(D)} + \frac{1}{9K} \frac{P'(D)}{Q'(D)} \right] \sigma} \quad (2.4)$$

when $\sigma(t)$ or $\sigma(\omega)$ is controlled, or

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[\frac{\frac{1}{6G} \frac{P(D)}{Q(D)} - \frac{1}{9K} \frac{P'(D)}{Q'(D)}}{\frac{1}{3G} \frac{P(D)}{Q(D)} + \frac{1}{9K} \frac{P'(D)}{Q'(D)}} \right] \varepsilon \right\} \quad (2.5)$$

when $\varepsilon(t)$ or $\varepsilon(\omega)$ is controlled.

It is obvious that in time-sensitive materials $\nu(i\omega) = \nu_1 - i\nu_2$ has a real and imaginary part, because the lateral contraction (or expansion) will be partly in phase (ν_1) and partly out of phase (ν_2) with the imposed longitudinal extension (or compression), while $\nu(t)$ is a real time-function. Conventional methods of measurement of Poisson's ratio can therefore serve no useful purpose, since a single observation of the lateral contraction produces not more than a single point of the function $\nu(t)$ or of one part ν_1 of the function $\nu(i\omega)$. Considering that all polymeric substances, glass, concrete, ice and metals at elevated temperature are time-sensitive, though not necessarily linearly visco-elastic, conventional Poisson ratio measurements for those materials cannot produce results that would be useful in engineering analysis. This fact can be illustrated by evaluating the Poisson ratio functions for some simple linear visco-elastic materials, such as an elastically compressible Maxwell medium or a Standard or Anelastic Solid medium in shear under different conditions of straining, such as $\sigma = \text{const.}$ (creep), $\varepsilon = \text{const.}$ (relaxation), $\sigma = \dot{\sigma}t$ (constant stress rate) or $\varepsilon = \dot{\varepsilon}t$ (constant strain-rate).

It can also be demonstrated that the time dependence of $\nu(t)$ very significantly affects the results of engineering analysis of phenomena that depend on Poisson's ratio as, for instance, the lateral pressure exerted by a visco-elastic material under longitudinal pressure on a cylindrical container that has to be designed to resist this pressure [2].

In Fig. 1 the four simplest linear visco-elastic shear models, the Kelvin (a), Maxwell (b), Standard Solid (c) and Four Parameter (Burgers) (d) medium are illustrated.

Eqs. (2.4) and (2.5) are easily solved by expressing the loading conditions with the aid of the Heaviside unit-step function $H(t)$ in the form $\sigma = cH(t)$ (creep), $\varepsilon = c'H(t)$ (relaxation), $\sigma = \dot{\sigma}tH(t)$ (constant stress-rate) and $\varepsilon =$

$= \dot{\varepsilon} tH(t)$ (constant strain-rate), and applying Laplace transformation to those conditions and to the differential operators. This produces the transforms $\bar{\sigma} = c/p$ (creep), $\bar{\varepsilon} = c'/p$ (relaxation), $\bar{\sigma} = \dot{\sigma}/p^2$ (constant stress-rate) and $\bar{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}/p^2$ (constant strain-rate) and

$$P(p) = \sum_1^m a_k p^k, \quad Q(p) = \sum_1^n b_k p^k, \quad (2.6)$$

$$P'(p) = \sum_1^r a_{k'} p^{k'}, \quad Q'(p) = \sum_1^s b_{k'} p^{k'}.$$

The inversion of the Eqs. (2.4) and (2.5) for \bar{v} transformed with the aid of the above expressions produces the functions $v(t)$.

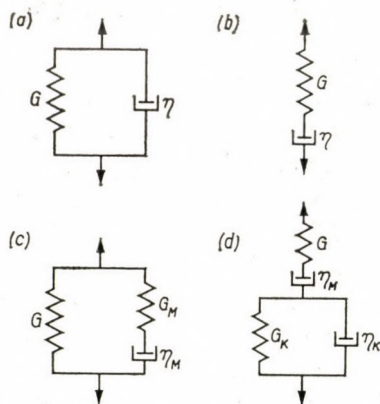


Fig. 1

The outlined operation has been performed for the elastically compressible visco-elastic media illustrated in Fig. 1, under the assumptions $K = (8/3)G$, $G_M = G$, $\tau = \tau_M/G_M$, $\tau' = \tau(1 + G_M/G)$, (standard solid) and $G_K = G$, $\eta_K = \eta_M$, $\tau = \eta_M/G$ (Burgers body). In Figs. 2 and 3 the functions $v(t)$ under creep and relaxation test conditions are compared for the four different materials.

It is obvious that the assumption of elastic compressibility is an oversimplification of the mechanical response of real visco-elastic media. It is widely used because it conveniently reduces the number of material parameters and thus the order of the differential operators. However, it is this reduction of the order of the equations that necessarily changes the character of the solutions. The additional reduction arising from the frequently made assumption of incompressibility changes this character still further. The considerable number of existing solutions of incompressible visco-elastic and plastic boun-

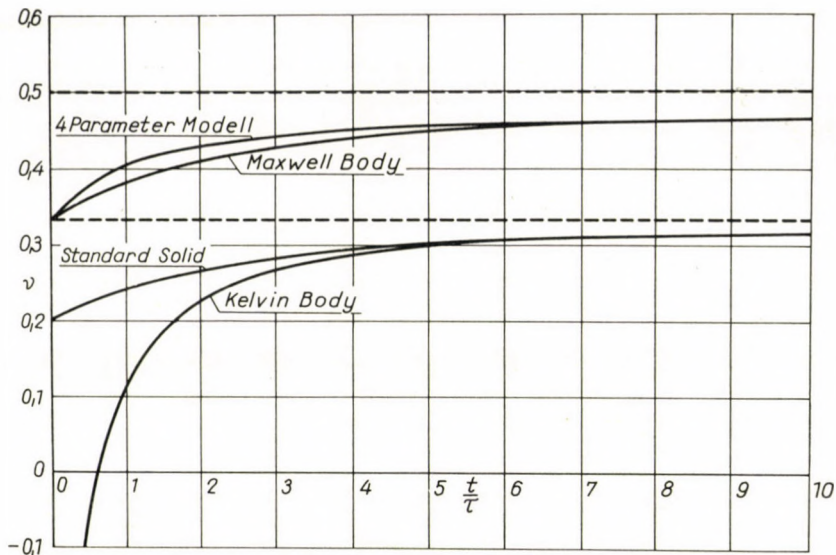


Fig. 2

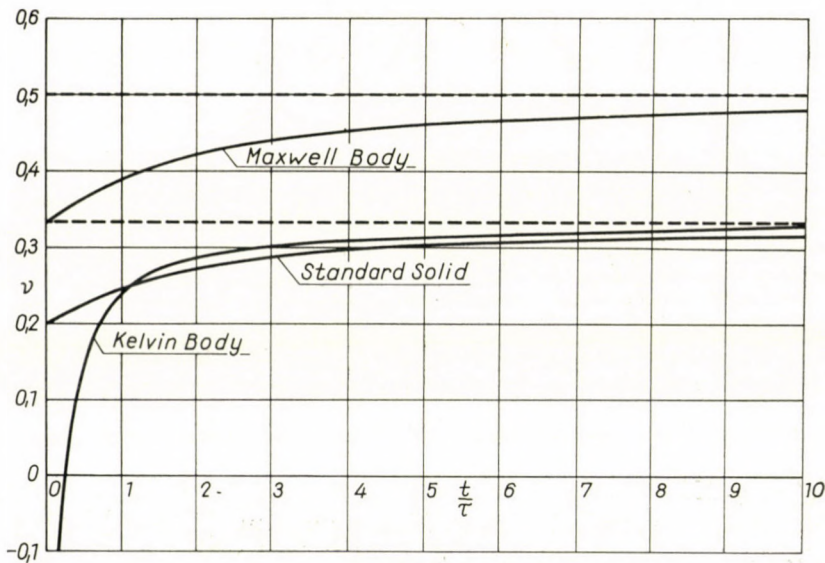


Fig. 3

dary-value problems are therefore of dubious physical validity; those that involve thermal gradients and associated stresses are meaningless.

While the assumption of elastic compressibility of media that are inelastic in shear can be justified as a first approximation, particularly for quasi-

static conditions, dynamic volume viscosity is significant. FRENKEL [3] has discussed the necessity of considering the "structural" volume-viscosity that is responsible for the observed difference between bulk moduli at low and high frequencies; it can be reproduced by the introduction of a "standard solid" response under hydrostatic pressure characterized by the operators

$$P'(D) = 1 + \tau' D \quad \text{and} \quad Q'(D) = 1 + \tau'_u D, \quad (2.7)$$

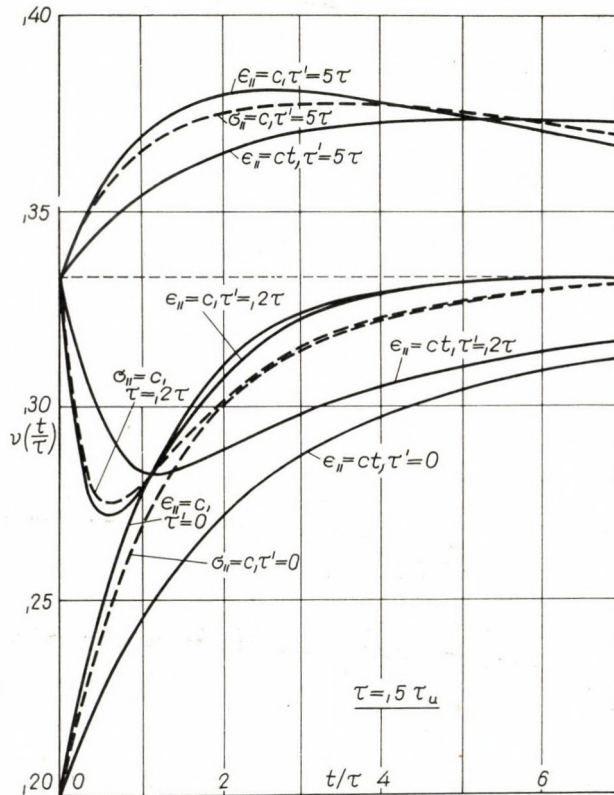


Fig. 4

where $\tau' = \eta_v/K$ is the volume stress relaxation time, $\tau'_u = \tau' (1 + K_M/K) > \tau'$ the volume strain retardation time, K the long-time ("static") bulk modulus and $(K_M + K)$ the instantaneous ("dynamic") bulk modulus.

REINER [4] has postulated the existence of viscous volume flow on the basis of the results of Trouton's experiments; its consideration appears to necessitate the introduction of a three-parameter (Oldroyd) fluid which, for long times, can be replaced by the Maxwell fluid characterized by the operators

$$P'(D) = D + 1/\tau' \quad \text{and} \quad Q'(D) = D \quad (2.8)$$

where $\tau' = \eta_v/K$ is the volume stress relaxation time.

The influence of volume-viscosity on the over-all visco-elastic response can thus be studied by combining the various linear visco-elastic shear operators with the operators defined by Eqs. (2.7) or (2.8) in the evaluation of Eqs. (2.4) and (2.5) for the various conditions of quasi-static uni-axial testing. It will be shown later that even the concept of the Newtonian fluid is dynamically a dubious oversimplification since it implies incompressibility, which is admissible only for slow stationary flow. Elastic compressibility transforms the Newtonian fluid into a Maxwell fluid, visco-elastic compressibility according to Eq. (2.7) into a four parameter (Burgers) medium, the response of which differs significantly from that of a simple Newtonian fluid, particularly under dynamic conditions.

To illustrate the effect of volume viscosity on Poisson's ratio $\nu(t)$ Eqs. (2.4) and (2.5) have been evaluated for standard solid response in shear and volumetric deformation under the following assumptions: $K = 8G/3$, $\tau = 0.5\tau_u$, $\tau' = 0.5\tau'_u$, and $\tau = 5\tau'$ or $\tau' = 5\tau$. The functions $\nu(t)$ for various testing conditions have been presented in Fig. 4. For the purpose of comparison with elastically compressible media the functions for standard solid volumetric response have been added in broken lines. The diagrams illustrate the significant effect of volume viscosity for short times and the complex form this effect may take in the shapes of the functions $\nu(t)$.

3. One-dimensional response under stationary vibration

The response of compressible linear visco-elastic media under a stationary state of small-amplitude oscillation is now analysed with the help of complex moduli and compliances as well as of the complex Poisson ratio functions. It is easily shown that the relatively sharp differentiation between the simple types of visco-elastic response in shear vanishes as soon as the assumption of incompressibility is abandoned. Thus, for instance, even the viscous (Newtonian) fluid which, as any other fluid, is compressible with bulk modulus K , responds to sufficiently high frequencies as a Maxwell medium with relaxation time $\tau = \eta/3K$. Similarly, an elastically compressible Kelvin body shows a response similar to that of a standard solid (compressible or incompressible) provided the frequency ranges of the induced oscillation are suitable selected. An observed compliance-frequency relation can therefore not be directly associated with a specific visco-elastic mechanism, unless this relation has been obtained either under conditions of volume-constant distortion or of pure volume-change. This fact interferes with the simple interpretation of the results of the common dynamic tests using vibrating reeds, longitudinal oscillations or wave propagation, because in all such tests the volume- and shear-responses cannot be separated.

The temperature-sensitivity of the viscous dissipation mechanisms in visco-elastic media is reflected by the temperature dependence of the shear- and bulk-compliances or moduli and of Poisson's ratio. Observation of the continuous functions $G(T)$ and $K(T)$ at several discrete frequencies is usually simpler than the determination of the functions $G(\omega)$ and $K(\omega)$ by the usual devices operating only at resonant frequencies. From such observations the latter function can be deduced on the basis of the usual relaxation-time-temperature relation applied to both shear- and volumetric dissipation, with different activation energies. Reliable observations of $G(T)$ and $K(T)$ are very rare. Recent observations within the ultrasonic range [5] are used to demonstrate the fitting of standard-solid visco-elastic response functions to the observed diagrams.

(a) *Volume-constant distortion*

A linear visco-elastic medium under conditions of volume-constant distortion can be described by the operator equation (2.1a) between stress- and strain deviation.

For stationary oscillations

$$s_{ij} = s_{ij}^0 \exp(i\omega t) \quad \text{and} \quad e_{ij} = e_{ij}^0 \exp(i\omega t),$$

so that

$$s_{ij}^0 = [2GQ(i\omega)/P(i\omega)] e_{ij}^0 = G^* e_{ij}^0 \quad (3.1)$$

where

$$G^* = G_1 + iG_2 = 2GQ(i\omega)/P(i\omega) \quad (3.2)$$

denotes the complex shear modulus. Its inverse $(1/G^*) = J^*$ denotes the associated compliance:

$$J^* = J_1 - iJ_2 = P(i\omega)/2GQ(i\omega). \quad (3.3)$$

For the Maxwell medium with $P(D) = (\tau^{-1} + D)$ and $Q(D) = D$,

$$G^* = G \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} = G_1 + iG_2 \quad (3.4)$$

where

$$G_1 = G \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad G_2 = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad G_2/G_1 = (\omega\tau)^{-1}$$

and

$$J_1 = G^{-1}; \quad J_2 = (G\omega\tau)^{-1}. \quad (3.5)$$

Diagrams of the functions $[G_1(\omega\tau)/G]$, $[G_2(\omega\tau)/G]$, $[J_1(\omega\tau)G]$ and $[J_2(\omega\tau)G]$ are presented in Fig. 5.

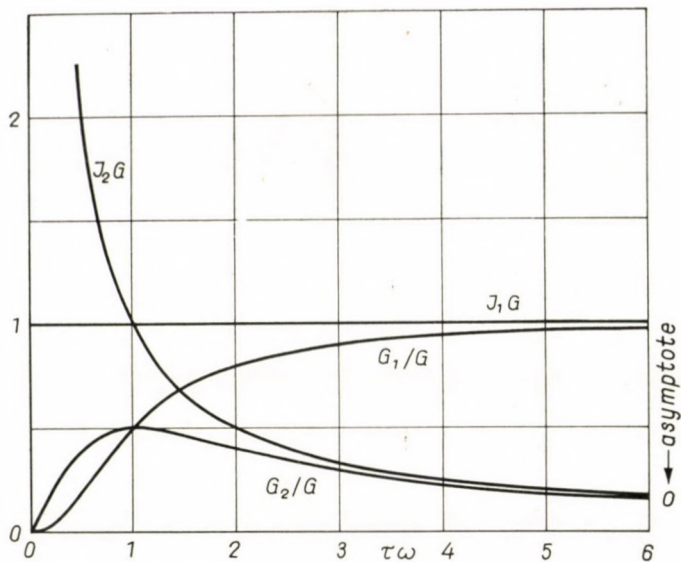


Fig. 5

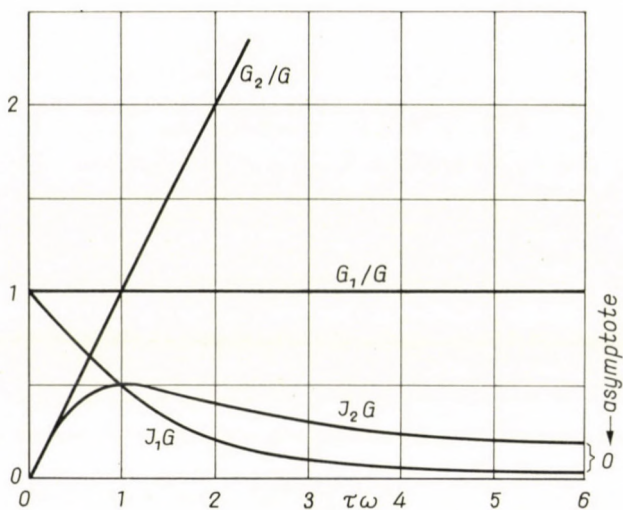


Fig. 6

For the Kelvin medium with $P(D) = 1$ and $Q(D) = 1 + \tau D$ where the retardation time $\tau = \eta/G$

$$G^* = G(1 + i\omega\tau) = G_1 + iG_2 \tag{3.6}$$

with

$$G_1 = G; \quad G_2 = G\omega\tau; \quad G_2/G_1 = \omega\tau$$

and

$$J_1 = G^{-1} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad J_2 = G^{-1} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (3.7)$$

Diagrams of the functions $[G_1(\omega\tau)/G]$, $[G_2(\omega\tau)/G]$, $[J_1(\omega\tau)G]$ and $[J_2(\omega\tau)G]$ are presented in Fig. 6.

For the Standard Solid with $G = G(O)$, $P(D) = (1 + \tau D)$ and $Q(D) = (1 + \tau_u D)$, where the stress-relaxation time $\tau = \eta_M/G_M$ and the strain-relaxation time $\tau_u = \tau(1 + G_M/G) > \tau$,

$$G^* = \frac{(G + G_M) i \omega \tau + G}{1 + i \omega \tau} = G_1 + i G_2 \quad (3.8)$$

with

$$G_1 = G \frac{(1 + G_M/G) \omega^2 \tau^2 + 1}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad G_2 = G \frac{(G_M/G) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

and therefore

$$G_2/G_1 = \frac{(G_M/G) \omega \tau}{1 + (1 + G_M/G) \omega^2 \tau^2} \frac{\tau_u - \tau}{\bar{\tau}} \frac{\omega \bar{\tau}}{1 + \omega^2 \bar{\tau}^2},$$

where

$$\bar{\tau} = \sqrt{\tau_u \tau^{-1}} = \sqrt{(1 + G_M/G)}, \quad (\tau_u - \tau) \bar{\tau}^{-1} = G_M/\bar{G}, \quad \bar{G} = \sqrt{G(G + G_M)}.$$

The associated compliance

$$J^* = \frac{1 + i \omega \tau}{(G + G_M) i \omega \tau + G} = J_1 - i J_2 \quad (3.9)$$

with

$$J_1 = G^{-1} \frac{(1 + G_M/G) \omega^2 \tau^2 + 1}{(1 + G_M/G)^2 \omega^2 \tau^2 + 1}, \quad J_2 = G^{-1} \frac{(G_M/G) \omega \tau}{(1 + G_M/G)^2 \omega^2 \tau^2 + 1}.$$

The functions $[G_1(\omega\tau)/G]$, $[G_2(\omega\tau)/G]$, $[GJ_1(\omega\tau)]$ and $[GJ_2(\omega\tau)]$ are presented in Fig. 7 for $G_M/G = 1$.

For the Burgers (four-parameter) medium with $G = G(\infty) = G_a + G_b$, $P(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2$ and $Q(D) = b_1 D + b_2 D^2$, where

$$\tau_a = \eta_a/G_a, \quad \tau_b = \eta_b/G_b,$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \tau_a + \tau_b, \quad a_2 = \tau_a \tau_b,$$

$$b_1 = \tau_a, \quad b_2 = a_2 = \tau_a \tau_b,$$

the modulus

$$G^* = \frac{i\omega\tau_a}{1 + i\omega\tau_a} G_a + \frac{i\omega\tau_b}{1 + i\omega\tau_b} G_b = G_1 + iG_2 \quad (3.10)$$

where

$$G_1 = G_a \frac{\omega^2 \tau_a^2 + \omega^2 \tau_b^2 (G_b/G_a) [(1 + \omega^2 \tau_a^2)/(1 + \omega^2 \tau_b^2)]}{(1 + \omega^2 \tau_a^2)},$$

$$G_2 = G_a \frac{\omega\tau_a + \omega\tau_b (G_b/G_a) [(1 + \omega^2 \tau_a^2)/(1 + \omega^2 \tau_b^2)]}{[1 + \omega^2 \tau_a^2]},$$

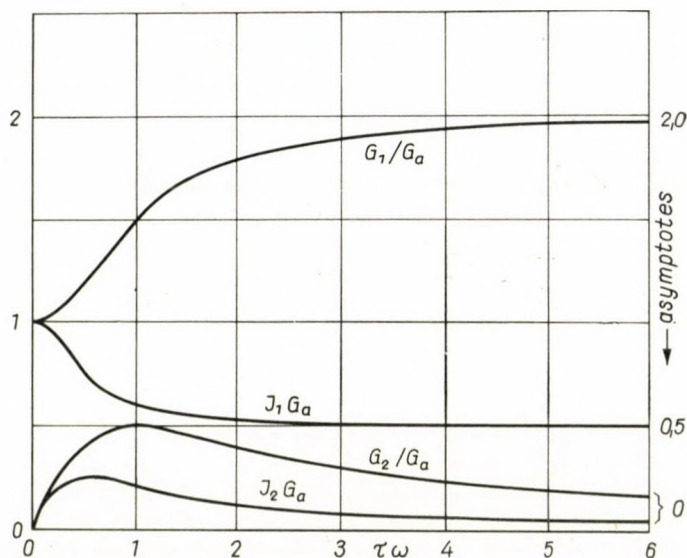


Fig. 7

and the compliance

$$J^* = [(G_1 - iG_2)/(G_1^2 + G_2^2)] = J_1 - iJ_2 \quad (3.11)$$

where

$$J_1 = [G_1/(G_1^2 + G_2^2)], \quad J_2 = [G_2/(G_1^2 + G_2^2)].$$

The function $G_1(\omega\tau_a)$ and $G_2(\omega\tau_b)$ are presented in Fig. 8 for the two assumptions:

$$(I) G_a = G_b: \quad \tau_a = 0,1 \tau_b \quad \text{and} \quad (II) G_a = 10G_b, \quad \tau_a = 0,1 \tau_b.$$

For a medium consisting of n Maxwell responses coupled in parallel Eq. (3.10) can be expanded

$$G^* = \frac{i\omega\tau_a}{1 + i\omega\tau_a} G_a + \dots + \frac{i\omega\tau_n}{1 + i\omega\tau_n} G_n = G_1 + iG_2 \quad (3.12)$$

where the moduli of the units can be added

$$G_1 = G_{1a} + G_{1b} + \dots + G_{1n}; \quad G_2 = G_{2a} + G_{2b} + \dots + G_{2r}.$$

The compliances are obtained from Eqs. (3.11).

As the number $n \rightarrow \infty$ the finite sum in Eq. (3.12) can be replaced by the integral

$$G^* = G \int_0^{\infty} \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} F(\tau) d\tau = G_1 + iG_2, \quad (3.13)$$

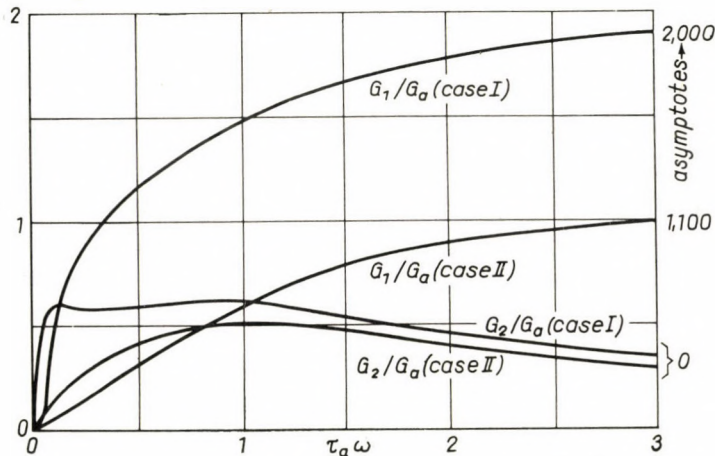


Fig. 8

where $F(\tau)$ denotes the (normalized) distribution function of relaxation times.

For the limited uniform (rectangular) distribution function $F(\tau) = \text{const.}$ between τ_a and τ_b , the following expressions for the moduli are obtained from Eq. (3.13):

$$G^* = (iG/\omega\tau_c) [\ln(1 + i\omega\tau_b) - \ln(1 + i\omega\tau_a) - i\omega(\tau_b - \tau_a)] \quad (3.14)$$

with

$$G_1 = G [(\tau_b - \tau_a)/\tau_c - (\text{arc tan } \omega\tau_b - \text{arc tan } \omega\tau_a)/\omega\tau_c],$$

$$G_2 = G [(\ln \sqrt{1 + \omega^2\tau_b^2} - \ln \sqrt{1 + \omega^2\tau_a^2})/\omega\tau_c],$$

where

$$\tau_c = [(\tau_b - \tau_a)/\ln(\tau_b/\tau_a)].$$

The compliances are obtained from Eqs. (3.11).

The functions $[G_1(\omega\tau_a)/G]$ and $[G_2(\omega\tau_a)/G]$ and the functions $[J_1(\omega\tau_a)G]$ and $[J_2(\omega\tau_a)G]$ are presented in Fig. 9. The loss factors $(G_2/G_1) = \tan \delta$ as function of $(\omega\tau)$ for the Kelvin, Maxwell and Standard Solid media are presented in Fig. 10.

In the (complex) planes (G_1, G_2) or (J_1, J_2) the relations $G^*(i\omega\tau)$ and $J^*(i\omega\tau)$ can be presented in parametric form, by eliminating $(\omega\tau)$ from G_1 and G_2 or J_1 and J_2 , every point G^* or J^* being associated with a particular

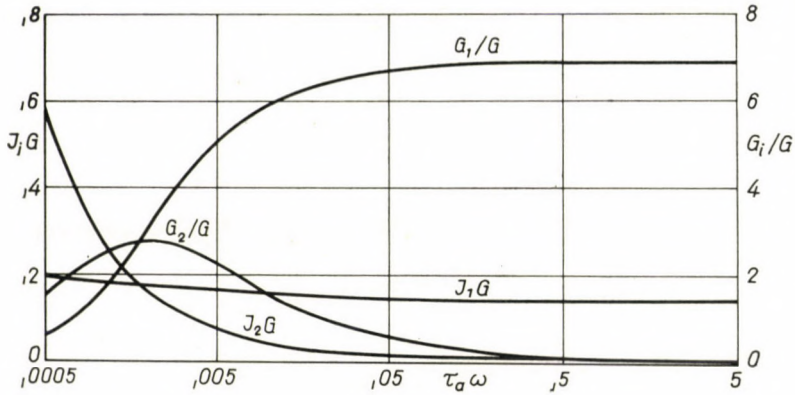


Fig. 9

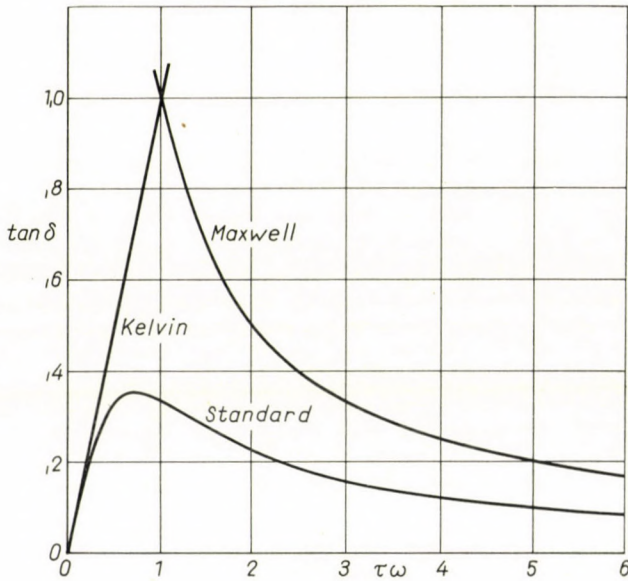


Fig. 10

frequency of oscillation. It is easily shown that for the Standard Solid both in the (G_1, G_2) plane and in the (J_1, J_2) plane the relations are semi-circles of radius

$$\frac{1}{2} [G_1(\infty) - G_1(0)] \quad \text{and} \quad \frac{1}{2} [J_1(0) - J_1(\infty)]$$

while the Maxwell medium is a semi-circle in the (G_1, G_2) -plane, the Kelvin medium in the (J_1, J_2) -plane only. Thus, for instance, for the Maxwell medium elimination of $(\omega\tau)$ from Eqs. (3.4) produces the relation

$$G_1^2 - GG_1 + G_2^2 = 0$$

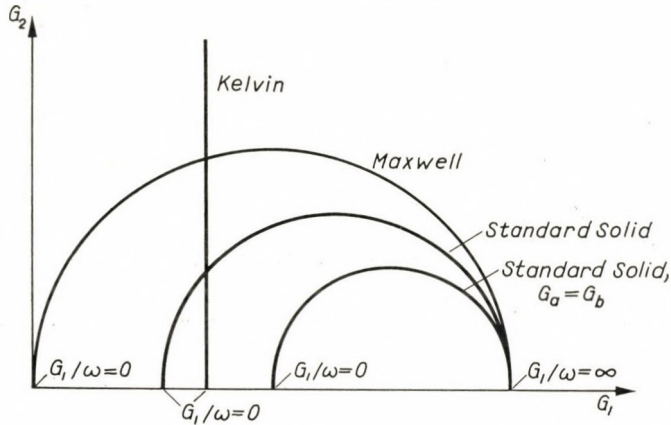


Fig. 11

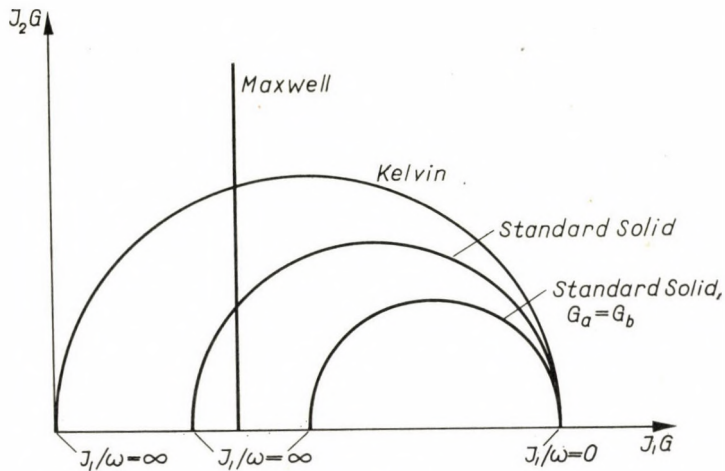


Fig. 12

which is the equation of a semi-circle of diameter G with center located at $G_1 = G/2$. In Figs. 11 and 12 the G_1 - G_2 and J_1 - J_2 relations for the various simple visco-elastic media are presented.

Obviously, for any other but the simple media referred to above the relations are no longer circles. Fig. 13 illustrates this fact by comparison between the relations for the Maxwell medium with those for the various types of con-

tinuous distributions of relaxation times. The uniform distribution of relaxation times produces an ellipse-like fluttering of the G_1 - G_2 -function with respect to the circular function associated with the single-relaxation-time Maxwell response. It is also interesting to note [6] that bell-shaped distributions of relaxation-times produce a family of G_1 - G_2 -relations in the form of circular segments through the points $G_1(0)$ and $G_1(\infty)$; in this case the knowledge of three points (G_1, G_2) at three frequencies determines the complete G_1 - G_2 -relation. The form of the G_1 - G_2 -relation thus provides a direct indication of

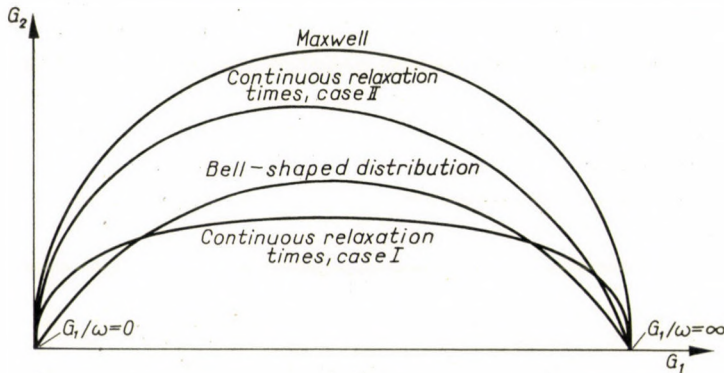


Fig. 13

the concentration of the associated distribution function of relaxation-times and of its symmetry.

(b) *Volumetric deformation*

The linear visco-elastic response to hydrostatic pressure

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{KK}$$

can be described by operator equations of similar form as those of volume constant distortion. Hence

$$P'(D) \sigma_{KK} = 3KQ'(D) \varepsilon_{KK}, \quad (3.15)$$

where

$$P'(D) = a'_0 + a'_1 D + a'_2 D^2 \dots; \quad Q'(D) = b'_0 + b'_1 D + b'_2 D^2 + \dots$$

so that for stationary volumetric oscillations

$$\begin{aligned} \sigma_{KK} &= \sigma_{KK}^0 \exp(i\omega t) & \text{or} & & \varepsilon_{KK} &= \varepsilon_{KK}^0 \exp(i\omega t) \\ \sigma_{KK}^0 &= 3K^* \varepsilon_{KK}^0 & \text{and} & & \varepsilon_{KK}^0 &= 3L^* \sigma_{KK}^0 \end{aligned}$$

where the complex bulk modulus K^* or compliance L^*

$$K^* = KQ'(i\omega)/P'(i\omega) = K_1 + iK_2 \quad (3.16)$$

and

$$L^* = (1/K^*) = P'(i\omega)/KQ'(i\omega) = L_1 - iL_2 \quad (3.17)$$

with

$$L_1 = K_1/(K_1^2 + K_2^2) \quad \text{and} \quad L_2 = K_2/(K_1^2 + K_2^2).$$

The assumption of elastic compressibility of media that are linear visco-elastic in volume-constant distortion can, for quasi-static conditions, be justified as a first approximation. Under dynamic conditions the bulk viscosity may become significant at high enough frequencies, necessitating the introduction of the standard-solid response (2.7) into Eq. (3.15).

Since the standard solid response can be approximated by a Kelvin response with

$$\bar{\tau}' = \sqrt{\tau' \tau''}$$

for low frequencies and a Maxwell response for high frequencies, these two simplified responses can be used over suitably limited frequency ranges whenever the use of standard solid type volume-viscosity leads to computational difficulties.

(c) *Uni-axial State of Stress*

Consideration of the compliances and moduli in a uni-axial state of stress

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_2 \neq 0$$

is of practical importance because of the necessity to interpret the results of tests of thin visco-elastic rods in stationary longitudinal and bending oscillation. The usual interpretation on the basis of assumed incompressibility of the medium will frequently lead to physically significant errors.

Because of the relation

$$\sigma_1 = E^* \varepsilon_1 \quad (3.18)$$

where the complex Hooke's modulus

$$E^* = (9G^*K^*)/(3K^* + G^*) = E_1 + iE_2 \quad (3.19)$$

this modulus is uniquely determined for any given pair of moduli G^* and K^* . However the inverse is not true, since a given modulus E^* can be associated with several combinations of G^* and K^* .

For instance an elastically compressible viscous fluid of viscosity η with $E^* = 3K\tau_v D/(1 + \tau_v D)$ where $\tau_v = \eta/3K$ under uni-axial stationary oscillation responds as a Maxwell medium with

$$E^* = 3K \frac{i\omega\tau_v}{1 + i\omega\tau_v} = E_1 + iE_2, \quad (3.20)$$

where

$$E_1 = 3K \frac{\omega^2 \tau_v^2}{1 + \omega^2 \tau_v^2}; \quad E_2 = 3K \frac{\omega\tau_v}{1 + \omega^2 \tau_v^2}; \quad E_2/E_1 = (\omega\tau_v)^{-1}.$$

The relations $[E_1(\omega\tau_v)/3K]$ and $[E_2(\omega\tau_v)/3K]$ are identical with those for the shear moduli of an incompressible Maxwell medium for which $E^* = 3G^*$. Similar relations are obtained for the elastically compressible Maxwell medium with shear stress relaxation time τ and $E^* = 3G\tau D/[1 + (1 + G/3K)]$ so that for uni-axial stationary oscillations

$$E^* = \frac{3G}{(1 + G/3K)} \frac{i\omega\tau''}{1 + i\omega\tau''} = E_1 + iE_2, \quad (3.21)$$

where

$$\tau'' = \tau(1 + G/3K) > \tau.$$

A typical standard solid response for the distortion of the incompressible medium and expressed by the operator equation $E^* = [(B_0 + B_1 D)/(A_0 + A_1 D)]$ for a uni-axial state of stress can be obtained in several ways. Thus an elastic medium in shear with Kelvin type volume visco-elasticity, an elastically compressible Kelvin medium or Standard Solid or a standard solid type volume viscosity combined with elastic deformation in shear produces, in stationary oscillation, the uni-axial standard solid modulus

$$E^* = \frac{B_0 + i\omega B_1}{A_0 + i\omega A_1} = E_1 + iE_2 \quad (3.22)$$

with

$$E_1 = \frac{B_0}{A_0} \frac{1 + \omega^2 \tau^2 (A_0 B_1/A_1 B_0)}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad E_2 = \frac{B_0}{A_0} \frac{\omega\tau [(A_0 B_1/A_1 B_0) - 1]}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

where $\tau = (A_1/A_0)$. The specific damping

$$\tan \delta = E_2/E_1 = \frac{\omega\tau [(A_0 B_1/A_1 B_0) - 1]}{[1 + \omega^2 \tau^2 (A_0 B_1/A_1 B_0)]}$$

has a maximum at

$$\bar{\tau} = \tau \sqrt{A_0 B_1/A_1 B_0} = \sqrt{A_1 B_1/A_0 B_0}.$$

The following values of the parameters A_0 , A_1 , B_0 , B_1 are obtained:

I. Elastic medium in shear, Kelvin volume visco-elasticity with

$$\tau'_u = \eta_v/K \quad \tau' = \tau'_u/(1 + G/3K)$$

and

$$E = 9KG/(3K + G)$$

$$A_0 = 1, A_1 = \tau', B_0 = E, B_1 = E\tau'_u = 3G\tau'.$$

II. Elastically compressible Kelvin medium with

$$\tau = \eta/G, \tau' = \tau/(1 + 3K/G) \quad \text{and} \quad E = 9KG/(3K + G),$$

$$A_0 = 1, A_1 = \tau', B_0 = E, B_1 = E\tau'.$$

III. Elastically compressible Standard Solid with

$$\tau = \eta_M/G_M, \tau_u = \tau(1 + G_M/G),$$

$$\tau'_u = \tau_u [1 + 3K/(G + G_M)]/(1 + 3K/G) \quad \text{and} \quad E = 9KG/(3K + G),$$

$$A_0 = 1, A_1 = \tau'_u, B_0 = E, B_1 = E\tau_u.$$

IV. Elastic medium in shear, standard solid type volume visco-elasticity with

$$\tau' = \eta_v/K, \tau'_u = \tau'(1 + K_M/K),$$

$$\tau''_u = \tau'_u [3K/G + K/(K + K_M)]/(3K/G + 1),$$

and

$$E = 9KG/(3K + G),$$

$$A_0 = 1, A_1 = \tau''_u, B_0 = E, B_1 = E\tau'_u.$$

From an observed standard solid frequency dependence of the complex modulus E^* of a visco-elastic medium of unknown character, the visco-elastic character of the medium *can therefore not be uniquely determined*, unless the complex modulus G^* is known from separate observations under conditions of volume constant distortion. Thus, for instance, the location

$$\bar{\tau} = \sqrt{A_1 B_1 / A_0 B_0}$$

of the damping maximum has a different significance for each possible combination of shear and volume visco-elasticity. Considering that specifically

$$\bar{\tau}_I = \sqrt{\tau' \tau'_u} = \eta_v/K \sqrt{1 + G/3K}; \quad \bar{\tau}_{II} = \sqrt{\tau' \tau} = \eta/G \sqrt{1 + 3K/G};$$

$$\bar{\tau}_{III} = \sqrt{\tau_u \tau'_u} = (\eta_M/G_M) (1 + G_M/G) \sqrt{\frac{1 + 3K/(G + G_M)}{1 + 3K/G}};$$

$$\bar{\tau}_{IV} = \sqrt{\tau'_u \tau''_u} = (\eta_v/K) (1 + K_M/K) \sqrt{[3K/G + K/(K + K_M)]/(3K/G + 1)},$$

while for the incompressible standard solid

$$\bar{\tau}_0 = (\eta_M/G_M) \sqrt{1 + G_M/G};$$

it is obvious that the shape of the uni-axial damping-frequency relation alone provides no clue to the character of the visco-elastic response of the tested medium.

The difficulties of interpretation of uni-axial oscillation tests of visco-elastic media increase with increasing complexity of the dynamic response. A four-parameter (Burgers) medium response under a uni-axial state of stress of the form

$$E^* = \frac{i\omega B_1 + (i\omega)^2 B_2}{A_0 + i\omega A_1 + (i\omega)^2 A_2} \quad (3.23)$$

can be obtained by many more different combinations of shear and volume visco-elasticity than the standard solid response discussed above. Thus a Newtonian fluid with standard solid volume visco-elasticity, a Maxwell medium in shear with Kelvin type volume visco-elasticity, a standard solid medium in shear with Maxwell type volume visco-elasticity and several other combinations will produce a Burgers medium response under uni-axial conditions. Thus, for instance, for the viscous fluid of viscosity η with standard solid volume visco-elasticity with bulk moduli $K_1(0) = K_a$ and $K_1(\infty) = (K_a + K_b)$

$$\tau' = \eta_v/K_b, \quad \tau'_u = \tau'(1 + K_b/K_a) \quad \text{and} \quad \tau = \eta/3K_a;$$

$$A_0 = 1; \quad A_1 = \tau'_u + \tau; \quad A_2 = \tau\tau';$$

$$B_1 = 3K_a\tau; \quad B_2 = 3(K_a + K_b)\tau\tau'.$$

For the Maxwell medium in shear with Kelvin type volume visco-elasticity

$$A_0 = 1; \quad A_1 = \tau' + \tau(1 + G/3K); \quad A_2 = \tau\tau'$$

$$B_1 = 3G\tau; \quad B_2 = 3G\tau\tau'$$

where

$$\tau = \eta/G \quad \text{and} \quad \tau' = \eta_v/K.$$

The deduction of the parameters of the medium from the observed frequency dependence of E_1 and E_2 or J_1 and J_2 alone under the assumption of incompressibility will necessarily lead to uncertain conclusions concerning the visco-elastic character of the tested material.

4. Frequency dependence of Poisson's ratio

The operator equation of the Poisson ratio

$$\nu(D) = \frac{3KP(D)Q'(D) - 2GQ(D)P'(D)}{2[3KP(D)Q'(D) + GQ(D)P'(D)]} \quad (4.1)$$

under stationary oscillations has a real (in-phase) component and an imaginary (out-of-phase) component, since for $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$ and $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ Eq. (4.1) is transformed into

$$\nu^* = \nu_1(\omega) - i\nu_2(\omega). \quad (4.2)$$

This is, however, not the only possible definition of v , although it appears to be the most logical one. Instead of defining $v_1(\omega)$ as the real part of v^* it is possible to obtain it from Eq. (4.1) by using the real parts $G_1(\omega)$ and $K_1(\omega)$ of the complex moduli G^* and K^* . Particularly where $G_1(\omega)$ and $K_1(\omega)$ or $E_1(\omega)$ are directly observed, this procedure seems more expedient, though less rigorous. Fortunately the differences in $v_1(\omega)$ obtained by either procedure are not significant enough to merit closer consideration.

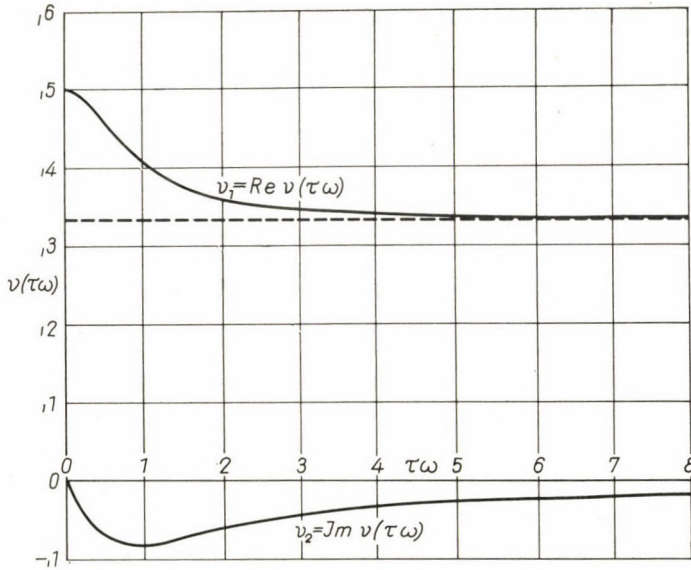


Fig. 14

For stationary oscillation of elastically compressible media with $P'(D) = Q'(D) = 1$ Eq. (4.1) takes the simplified form

$$v(i\omega) = \frac{1}{2} \frac{P(i\omega) - 2GQ(i\omega)/3K}{P(i\omega) + gQ(i\omega)/3K} \tag{4.3}$$

Eq. (4.3) has been evaluated under the assumption $(G/K) = 3/8$, for which it is transformed into

$$v(i\omega) = \frac{1}{2} \frac{P(i\omega) - Q(i\omega)/4}{P(i\omega) + Q(i\omega)/8}$$

For the Maxwell medium in shear with $P(i\omega) = \tau^{-1} + i\omega$ and $Q(i\omega) = i\omega$

$$v(i\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + 2(9\omega\tau/8)^2/3}{1 + (9\omega\tau/8)^2} - \frac{1}{3} i \frac{(9\omega\tau/8)}{1 + (9\omega\tau/8)^2} \right]$$

which encloses the range between $\nu_1(0) = 1/2$ and $\nu_1(\infty) = 1/3$. Fig. 14 presents $\nu_1(\omega\tau) = \text{Re } \nu^*$ and $\nu_2(\omega\tau) = \text{Im } \nu^*$ according to this equation.

For the Kelvin medium in shear with $P(i\omega) = 1$ and $Q(i\omega) = 1 + i\omega\tau$

$$\nu(i\omega) = \frac{1}{3} \left[\frac{1 - 3(\omega\tau/9)^2}{1 + (\omega\tau/9)^2} - 4i \frac{(\omega\tau/9)}{1 + (\omega\tau/9)^2} \right]$$

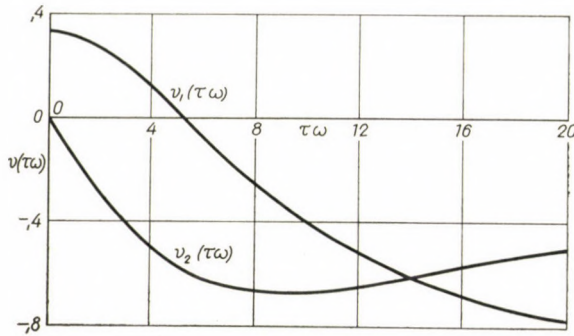


Fig. 15

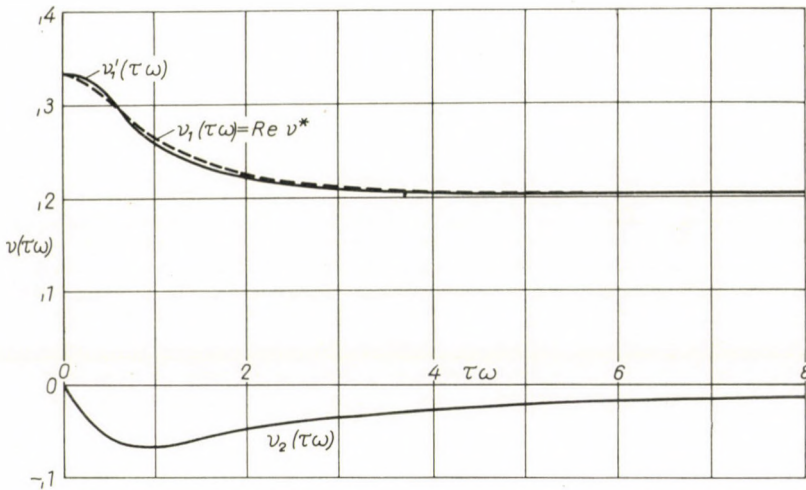


Fig. 16

which encloses the range between $\nu_1(0) = 1/3$ and $\nu_1(\infty) = -1$, Fig. 15 presents $\nu_1(\omega\tau)$ and $\nu_2(\omega\tau)$ for this medium.

For Standard Solid response in shear with $P(i\omega) = 1 + i\omega\tau$ and $Q(i\omega) = 1 + i\omega\tau_u$ under the assumption $\tau_u = 2\tau$

$$\nu(i\omega) = \frac{1}{3} \left[\frac{1 + 3(10\omega\tau/9)^2/5}{1 + (10\omega\tau/9)^2} - 0,4i \frac{(10\omega\tau/9)}{1 + (10\omega\tau/9)^2} \right]$$

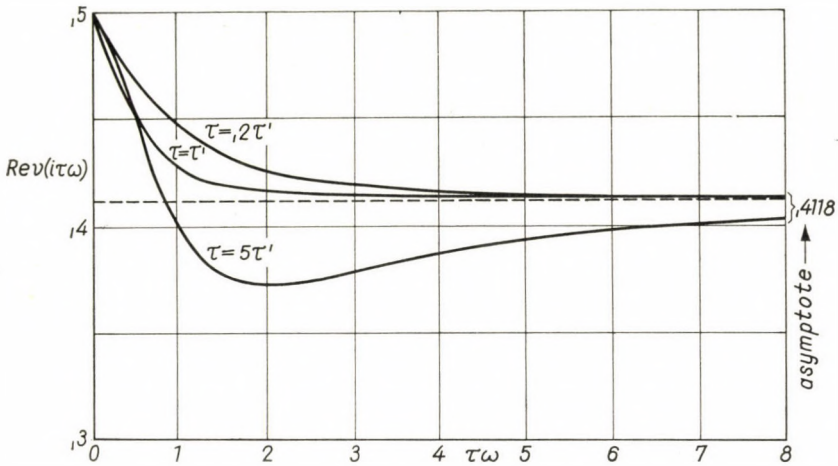


Fig. 17a

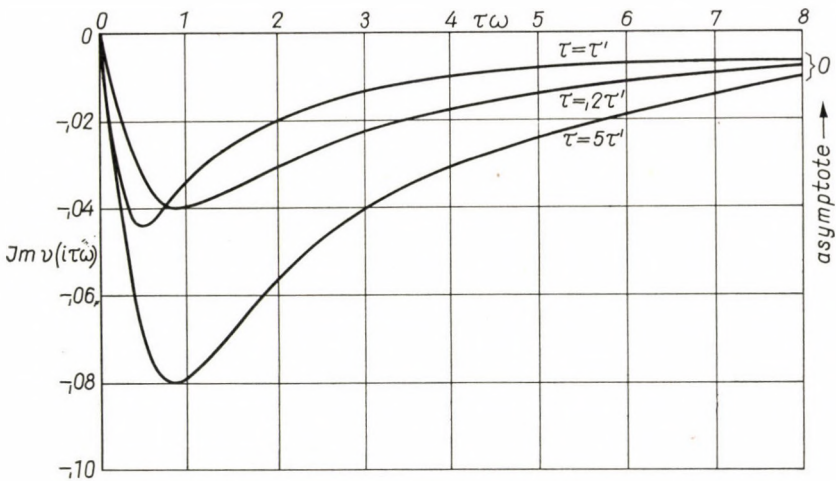


Fig. 17b

which encloses the range between $v_1(0) = 1/3$ and $v_1(\infty) = 1/5$ as indicated in Fig. 16 which represents $v_1(\omega\tau) = \text{Re } v^*$ and $v_2(\omega\tau)$. For this medium the ratio $v_1(\omega\tau)$ has also been computed by taking directly the real parts of G^* and K^* . The resulting equation

$$v_1(\omega\tau) = \frac{1}{3} \left[\frac{1 + 0,54(10\omega\tau/9)^2}{1 + 0,9(10\omega\tau/9)^2} \right]$$

encloses the same range $1/5 \leq v \leq 1/3$ and differs only very slightly from $v_1(\omega\tau)$ as shown by the broken line in Fig. 16.

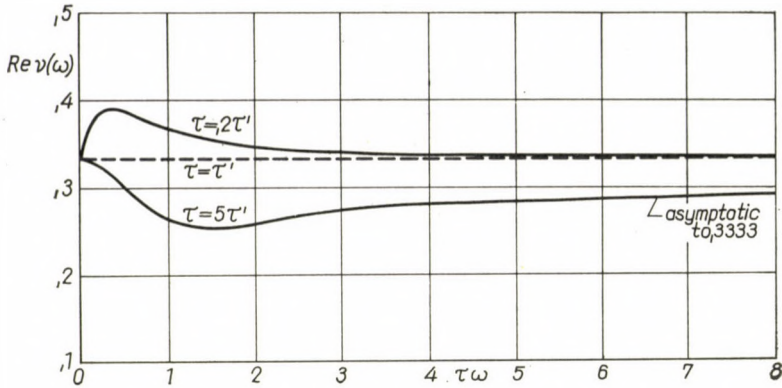


Fig. 18a

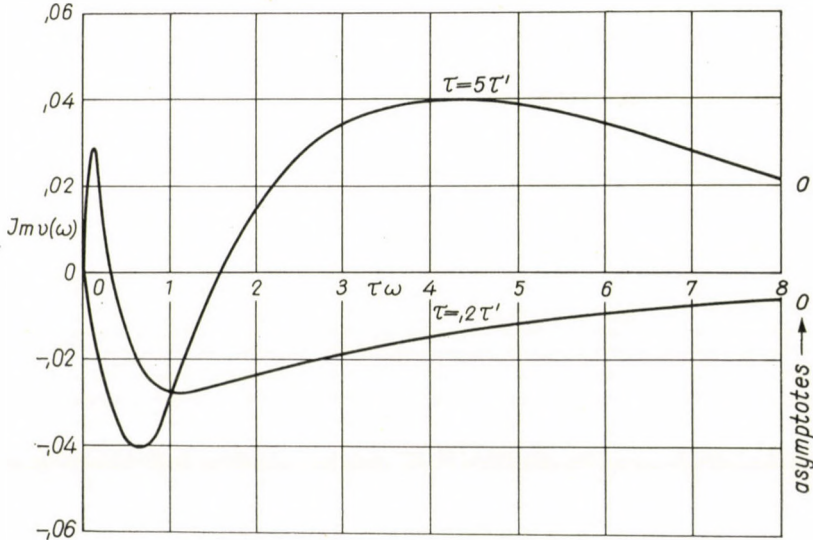


Fig. 18b

Under the assumption of standard solid type of volume visco-elasticity with $P'(i\omega) = 1 + i\omega\tau'$, $Q'(i\omega) = 1 + i\omega\tau'_u$, $K = 8G/3$ and $\tau'_u = 2\tau'$ the complex functions $v^*(i\omega)$ have been computed for a Maxwell medium, and a Standard Solid medium in shear for the three representative ratios $\tau = \tau'$, $\tau = 5\tau'$ and $\tau = \tau'/5$ and presented in Figs. 17 and 18. Obviously, for the standard solid the assumption $\tau' = \tau$ produces a constant value $v_1 = 1/3$ with $v_2 = 0$ since for $P(i\omega) = P'(i\omega)$ and $Q(i\omega) = Q'(i\omega)$ Eq. (3.1) degenerates in the elastic relation between v , G and K .

5. Temperature dependence of Poissons's ratio

It has been the common experience that it is much simpler to perform vibrations tests at constant frequency and varying temperature than at constant temperature and varying frequency, particularly since the range of frequency variation that can be attained with a certain type of testing equipment is rather limited. The basis of the conversion of frequency dependence into temperature dependence is the well known expression for the temperature dependence of the relaxation time

$$\tau = \tau_0 \exp [Q/RT_0(1 - T_0/T)], \quad (5.1)$$

where τ_0 is the relaxation time at the (absolute) reference temperature T_0 (in $^{\circ}K$) τ the relaxation time at temperature T (in $^{\circ}K$) and Q the activation energy of the dissipation process.

It can be assumed that both the shear and the volume viscosity η_S and η_v are governed by similar relations, differing only in the parameters so that the relaxation times of the associated visco-elastic responses are governed by equations of the form of Eq. (5.1), with different values τ_0 , τ'_0 and Q_S , Q_v for shear and volume visco-elasticity respectively.

The simplest assumption of visco-elasticity of a medium that can reproduce the observed behavior of real solid or pseudo-solid materials under conditions of stationary oscillation over a reasonable frequency range is that of a standard solid response in shear and volumetric deformation

$$G^*(i\omega) = G \frac{1 + i\omega\tau_u}{1 + i\omega\tau} \quad (5.2a)$$

and

$$K^*(i\omega) = K \frac{1 + i\omega\tau'_u}{1 + i\omega\tau'}, \quad (5.2b)$$

where G and K denote the equilibrium ($\omega \rightarrow 0$) moduli. Combining Eqs. (5.2) with (5.1) the following expressions are obtained for the real parts of the moduli G^* and K^* :

$$G_1(\omega, T) = G \frac{1 + \omega^2 \bar{\tau}_0^2 \exp [-2Q_S(1 - T_0/T)/RT_0]}{1 + \omega^2 \tau_0^2 \exp [-2Q_S(1 - T_0/T)/RT_0]} \quad (5.3a)$$

and

$$K_1(\omega, T) = K \frac{1 + \omega^2 \bar{\tau}'_0{}^2 \exp [-2Q_v(1 - T_0/T)/RT_0]}{1 + \omega^2 \tau_0'^2 \exp [-2Q_v(1 - T_0/T)/RT_0]}, \quad (5.3b)$$

where $\bar{\tau}_0 = \sqrt{\tau_{0u} \tau_0}$ and $\bar{\tau}'_0 = \sqrt{\tau'_{0u} \tau'_0}$.

Recent experimental results [5] on polypropylene excited at the ultrasonic frequency $\omega = 10^7 \text{ sec}^{-1}$ have been fitted with the aid of Eqs. (5.3) within a temperature range of -50°C to $+90^\circ \text{C}$, with the following constants:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0,35 \times 10^{-7} \text{ sec}; & \tau_{u0} &= 74,65 \times 10^{-7} \\ \tau'_0 &= 0,29 \times 10^{-7} \text{ sec}; & \tau'_{u0} &= 0,90 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad \text{at } T_0 = 313^\circ \text{K}$$

and

$$\begin{aligned} G &= 1450 \text{ psi}, & K &= 250\,000 \text{ psi}, \\ Q_S/R &= 2242 \text{ cal/mole}; & Q_V/R &= 1492 \text{ cal/mole} \end{aligned}$$

which, at the reference temperature T_0 , produce the moduli $G_1 = 170\,000 \text{ psi}$ and $K_1 = 490\,000 \text{ psi}$. In Fig. 19 the test results (broken line) and the fitted

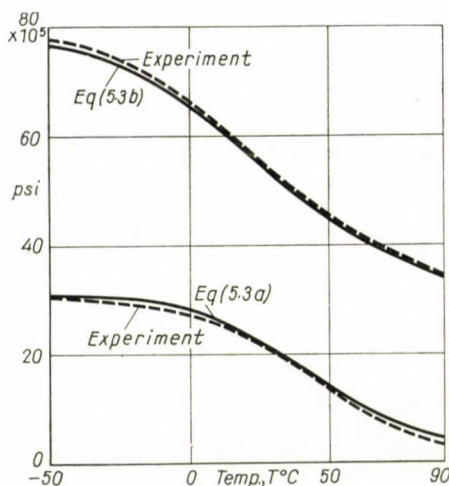


Fig. 19

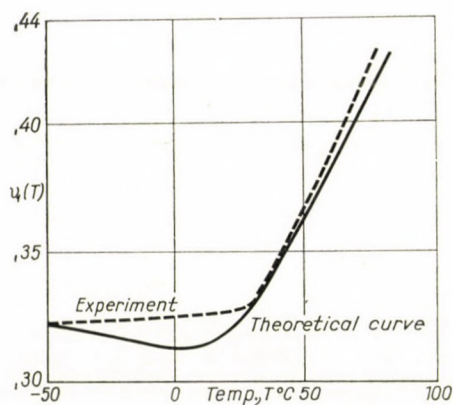


Fig. 20

Eqs. (5.3) have been presented; the agreement is quite fair considering the simplicity of the assumed visco-elastic response.

These results have been used to compute the function $\nu_1(T)$ on the basis of the equation

$$\nu_1(T) = \frac{3K_1(T) - 2G_1(T)}{6K_1(T) + 2G_1(T)}$$

This function has been plotted in Fig. 20 and compared with the same function computed directly with the experimental values of $G_1(T)$ and $K_1(T)$. The comparison illustrates the sensitivity of the function $\nu_1(T)$; the discrepancy within the range of low temperatures, although relatively small, suggests the necessity of still closer fit of the functions $G_1(T)$ and $K_1(T)$ if the derived function $\nu_1(T)$ is to be reliable over the whole range.

It should be remembered that the use of Eqs. (5.3) for prediction of the dynamic response within a significantly different frequency range is not justified, since such use would imply that no other dissipation mechanisms exist in different frequency ranges, a conclusion that is usually contradicted by observations in other frequency ranges.

6. Poisson's ratio and coefficient of thermal expansion in the elastic medium

It should be noted that the dependence on ν of several significant phenomena in the elastic medium is quite pronounced; relatively small errors in the estimate of this parameter produce large differences in the results. Thus, the local stress-intensities at spherical or ellipsoidal cavities, the stresses in thick-walled cylinders under pressure and external boundary restraints, the lateral pressure exerted by contained media, the intensity of thermal stresses, the ratios of the velocities of longitudinal and, of surface (RAYLEIGH) waves to shear waves vary strongly with the numerical value of Poisson's ratio. In all these cases relatively small errors in the assumed values of ν produce quite significant differences in the resulting stress-intensities, particularly when ν is close to its limiting value of 0,5. Thus the use in the analysis of a value of ν obtained by a single measurement under vaguely defined conditions may lead to considerably discrepancies between analysis and reality.

With respect to the intensity of thermal stresses the introduction of ν and α as independent material parameters produces a basic inconsistency which invalidates the standard form of the equation of thermoelasticity in the vicinity of values of $\nu \rightarrow 0,5$. In these equations the temperature gradient or the temperature difference T are multiplied by a combination of the physical parameters in either of the forms αE (one-dimensional restraint), $\alpha E/(1 - \nu)$ (two-dimensional restraint) or $\alpha E/(1 - 2\nu)$ (three-dimensional restraint). Thus, for instance, the Airy stress function Φ for plane strain is the solution of the biharmonic equation

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} [\alpha E / (1 - \nu)] \nabla^2 T. \quad (6.1)$$

Since the right-hand side of this equation is different from zero for all possible values $\nu \leq 0,5$, including the limiting case of incompressibility $\nu = 0,5$, solutions of Eq. (2.1) can be obtained for any value of $\nu \leq 0,5$, including the limit. On the other hand, the "hydrostatic" pressure p resulting from full three-dimensional restraint of the value change ε_v associated with the local temperature change T is obtained by setting $\varepsilon_v = 0$ in the standard elastic equation of volume-change

$$\varepsilon_v - 3\alpha T = p/K = 3p(1 - 2\nu)/E \quad (6.2)$$

where $E = 3K(1 - 2\nu)$ and therefore

$$p = -aET/(1 - 2\nu). \quad (6.3)$$

Hence for an incompressible medium $p \rightarrow \infty$ as $\nu \rightarrow 0,5$.

The physical inconsistency of the existence of thermal stresses involving partly restrained volume expansion or contraction in an incompressible medium defined by the limiting value $\nu = 0,5$ can be removed by considering the existing relation between the elastic bulk modulus K (and thus of ν which depends on K) and the coefficient of thermal expansion a .

This relation which invalidates the assumption that ν and a are independent physical constants, has been established by GRÜNEISEN in 1908 but has not been noted in the theory of elasticity until recently [7] in spite of its relevance to thermoelastic problems. The "Grüneisen equation" [8] derived for solids bound by central action of primary (atomic) valence forces, is of the form

$$3aK/\rho c_v = \gamma, \quad (6.4)$$

where ρ denotes the mass density, c_v the heat capacity per unit mass and γ is the dimensionless "Grüneisen" constant. This constant above the Debye temperature is roughly independent of temperature and varies for different materials within rather narrow limits. Thus, for instance, for cubic metals the following values have been obtained

Body centered cubic					
Metal	Li	Ca	W	Fe	Mo
$\gamma =$	1,17	1,29	1,62	1,60	1,57
Face centered cubic					
Metal		Ni	Cu	Pt	Pb
$\gamma =$	2,17	1,88	1,96	2,54	2,73

Obviously, Grüneisen's relation (6.4), having been obtained on the basis of the assumption of central-force interaction of atoms, is only an approximation since atomic interaction is far from central. However, its consideration provides a much better approach to real behaviour than the conventional introduction of a as an independent material parameter.

Defining an alternative truly independent material parameter $\beta = \rho c_v \gamma$, Eq. (6.2) in the form

$$p = K\varepsilon_v - 3aKT = K\varepsilon_v - \beta T \quad (6.5)$$

shows that β provides a direct measure of the intensity of hydrostatic thermal pressure induced in a three-dimensionally fully constrained ($\varepsilon_v = 0$) volume

element by a temperature change of one degree. This pressure intensity is as temperature dependent as $\rho c_v = C_v/V$, where C_v denotes the specific heat at constant volume and V the molecular volume of the substance. However, it remains constant for any value of K ; for the incompressible medium $K \rightarrow \infty$ as $\alpha \rightarrow 0$ while $\beta = 3\alpha K$ remains finite.

Assuming that over a rather wide range K is temperature-independent, the temperature dependence of α should parallel that of C_v , a conclusion confirmed by experiment. The order of magnitude of the intensity of the "specific thermal pressure" $\beta = \rho c_v \gamma = C_v \gamma/V$ varies rather moderately as the heat capacity per unit volume for the different elements varies essentially between 1 and 3,5 Joule per cm^3 , with only a small number of exceptions, such as the alkali metals, at the lower side ($0,4 < \rho c_v < 1,4$) and the manganides on the upper side ($3,5 < \rho c_v < 4,5$). Thus, for instance, for iron around room temperature with $\rho c_v = 3,6$ Joule per cm^3 and $\gamma = 1,6$: $\beta = 5,8$ Joule per cm^3 which is equivalent to 59 kg per cm^2 per $^\circ\text{C}$ (840 psi per $^\circ\text{C}$): at 500 $^\circ\text{C}$ the pressure increases to 1220 psi per $^\circ\text{C}$. Similarly for tungsten with $\rho c_v = 1,95$ Joule per cm^3 and $\gamma = 1,62$: $\beta = 3,2$ Joule per cm^3 or 32,5 kg per cm^2 per $^\circ\text{C}$ (450 psi per $^\circ\text{C}$), for aluminium with $\rho c_v = 2,6$ Joule per cm^3 and $\gamma = 2,17$, $\beta = 5,7$ Joule per cm^3 or 57 kg per cm^2 per $^\circ\text{C}$ (800 psi per $^\circ\text{C}$), for copper with $\rho c_v = 3,4$ Joule per cm^3 and $\gamma = 1,96$ $\beta = 6,6$ Joule per cm^3 or 67 kg per cm^2 per $^\circ\text{C}$. Thus, except for tungsten, the specific thermal pressure β shows only a moderate variation, in spite of the much wider variation of α and of the elastic constants. Under three-dimensional full restraint the thermal pressure thus remains finite even in the incompressible medium for which the conventional theory produces an infinite pressure.

The relation (6.5) between α and K implies a unique relation between α and ν in the elastic medium for which

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} = \frac{E}{2G} - 1 \quad (6.6)$$

of the alternative forms

$$2G\alpha = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \beta \quad (6.7)$$

or

$$2\nu = \frac{\beta - 2G\alpha}{\beta + G} = 1 - \frac{\alpha E}{\beta}, \quad (6.8)$$

where G denotes the shear modulus. Eq. (6.8) might be considered to provide an alternative approach to the determination of ν . Also the relation between E , ν and α is obtained

$$\alpha E = 3K\alpha(1 - 2\nu) = \beta(1 - 2\nu), \quad (6.9)$$

so that Eq. (6.1) can now be written for plane strain in the physically consistent form

$$\nabla^4 \Phi = - \left[\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right] \beta \nabla^2 T \quad (6.10)$$

for plane stress

$$\nabla^4 \bar{\Phi} = - (1 - 2\nu) \beta \nabla^2 T. \quad (6.11)$$

The plane thermo-elastic problem thus vanishes for $\nu \rightarrow 0.5$, as required.

Combining the stress-strain relations with the equilibrium conditions without body forces and introducing a displacement function ψ in the usual way, the differential equation for this function

$$\nabla^2 \psi = \left[\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right] \frac{\beta}{2G} T \quad (6.12)$$

replaces the conventional form

$$\nabla^2 \psi = \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right] \alpha T. \quad (6.13)$$

The right side of Eq. (6.12) vanishes automatically for $\nu = 0.5$ while that of Eq. (6.13) does not, unless $\alpha = 0$ is specifically introduced.

The consideration of the Grüneisen relation also resolves an apparent inconsistency arising in the conventional approach to thermo-elastic problems in which the heat-transfer equations are solved independently of the elastic equations of motion, instead of solving the coupled equations of thermo-elasticity

$$k \nabla^2 T = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (6.14a)$$

$$\left(K + \frac{4}{3} G \right) \nabla^2 \varepsilon_v = \rho \frac{\partial \varepsilon_v^2}{\partial t^2} + \beta \nabla^2 T, \quad (6.14b)$$

where ε_v denotes the volumetric strain, k the thermal conductivity and T_0 the (absolute) reference temperature. Eliminating $\nabla^2 T$, the following relation is obtained:

$$\nabla^2 \varepsilon_v = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t^2} + \frac{1}{\kappa (1 + 4G/3K)} \frac{\beta T_0}{K} \left[\frac{1}{T_0} \frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right], \quad (6.15)$$

where $c^2 = \left(K + \frac{4}{3} G \right) / \rho$ and the diffusivity $\kappa = k / \rho c_v$. Introducing the volume strain-pressure relation (6.5), Eq. (6.15) can be written in the form

$$\kappa \nabla^2 \varepsilon_v = \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t^2} + \frac{1}{[1 + 4G/3K]} \left[\left(1 + \gamma \frac{\beta T_0}{K} \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \quad (6.16)$$

The apparent inconsistency arises from the fact that the conventional (uncoupled) heat transfer equation (6.14a) with $\partial \varepsilon_v / \partial t = 0$ ("diffusion-equation") does not reflect the fact that the local increase in the average kinetic particle energy that is necessarily associated with local temperature increase can only be accommodated by local (elastic) volume expansion in the array of inharmonic oscillator particles that is introduced as the simplest discontinuous idealization of a compressible elastic medium. Since volume expansion in the elastic medium is propagated with acoustic velocities, the (infinite) velocity of heat conduction associated with the uncoupled diffusion equation does not seem physically admissible, since the ability of the medium to conduct heat cannot be independent of its ability to propagate the associated density changes.

Eq. (6.16) is satisfied when the temperature pressure p and the temperature T satisfy, respectively, the equations:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{1}{\kappa'} \frac{\beta T_0}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6.17)$$

and

$$\nabla^2 T = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\kappa'} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (6.18)$$

where $\kappa' = \kappa(1 + 4G/3K)$. These are the standard forms of the "telegraph equation" governing the propagation of damped harmonic waves. For frequencies $\omega \ll c^2/\kappa'$ only the conduction term is significant, while for $\omega \gg c^2/\kappa'$ the wave character of the equations predominates and p and T propagate with the acoustic velocity c . Since under normal conditions $\omega \ll c^2/\kappa'$, the first term on the right-hand side of Eqs. (6.17) and (6.18) can be disregarded, so that p and T are governed by diffusion equations. For the incompressible medium with $K \rightarrow \infty$ and therefore $c \rightarrow \infty$ these become the rigorous equations, while Eq. (6.16) vanishes.

A relation similar to the Grüneisen relation has been derived on the basis of thermodynamic theory for certain polymers in the form [9]

$$3Ka = \rho R/M, \quad (6.19)$$

where M denotes the molecular mass and R the gas constant, so that the validity of the conclusions arrived at for solids bound by primary valence forces might be extended to polymers. However Eq. (6.19) has, so far, not been confirmed by experiment. It appears, that an experimental investigation of the limits of validity of this relation for polymers would be useful; this might also provide an experimental procedure for the determination of the bulk-modulus.

Written in the proposed form, with β as an independent constant rather than α the inconsistencies inherent in the conventional formulation of the thermal stress problem with respect to incompressibility are removed; the fact

is clearly established that the assumption of incompressibility is associated with vanishing thermal stresses, except in the limiting case of complete three-dimensional restraint. This conclusion may be of importance in connection with the admissibility, in thermal stress-analysis, of inelastic stress-strain relations implying elastic incompressibility, such as the approximation of the Prandtl—Reuss relations by the Mises—Levy relations. It would therefore appear that inelastic thermal stress problems cannot be dealt with on the basis of arbitrary assumptions concerning the constitutive equations, implying incompressibility. The assumption of a rigid plastic or work-hardening solid, for instance, precludes the (apparently independent) assumption of a unique infinitesimal change of strain produced by infinitesimal changes of temperature.

The inter-relation between ν , K and α in the elastic medium and the inter-relations arising from the interaction of shear and bulk operators in linear visco-elastic media are of more than theoretical interest. They are of considerable practical importance to the experimenter concerned with testing and observation of time-sensitive materials. The direct measurements of bulk-parameters (compressibility, volume-viscosity) are among the most difficult and the least reliable measurements in the field of solid mechanics; on the other hand a knowledge of those parameters is of considerable importance, particularly under dynamic conditions. Thus any method by which the direct measurement can be circumvented is most valuable. Measurement of Poisson's ratio seems to be such a method, although direct observation requires extremely high sensitivity of lateral strain-measurement. A more accessible method is the combination of observations in tension and in shear of the parameters E and G from which ν and K in the elastic medium can be obtained. In any time sensitive material the simple conversion is no longer valid and the experimenter has to rely on the shape of the observed time- or frequency-functions E and G to predict the associated functions ν and K from which the type of visco-elasticity present in the investigated material can be deduced.

This is, by no means, a simple matter. Various procedures have been proposed [10] for the determination, from observations of the frequency-dependence of the compliance in stationary longitudinal oscillations of a thin bar, of the parameters of a Standard Solid or of a four-parameter (Burgers) solid that would adequately reproduce the observed function. However, such methods are based on the assumption that a characteristic standard-solid or four-parameter visco-elastic response arises from the existence of mechanisms producing only shear-elasticity and shear viscosity. However, the existence of a standard-solid type of volume-viscosity in a viscous fluid or in a Maxwell medium produces visco-elastic responses of a similar (Burgers) type and so does the existence of a Kelvin type volume-viscosity in a Maxwell medium. Thus, the observation of the visco-elastic response in a single type of test hardly ever provides sufficient information concerning the visco-elastic character of the

material, as the derived parameters will usually not reflect visco-elastic response in shear alone but combined volume and shear responses of different types.

It is easy to write the separate visco-elastic equations for distortion and for volume change, but it is extremely difficult to obtain experimentally the parameters for this separated form. Since in tests that produce fairly reliable results, such as longitudinal or bending oscillation experiments the material parameter $E(i\omega) = E_1 + iE_2$ represents a combination of shear and bulk parameters, it is necessary to supplement such tests at least by a torsion test from which $G(i\omega)$ could be determined and the volume visco-elasticity separated in the expression for $E(i\omega)$. An improved technique of observation of $\nu(t)$ in "static" tests will provide additional methods for the resolution of the long-time viscous dissipation-mechanisms in time-sensitive materials.

REFERENCES

1. FREUDENTHAL, A. M. — GEIRINGER, H.: *Mathem. Theories of the Inelastic Continuum, Handb. d. Physik*, **6**, Springer, Berlin 1958.
2. FREUDENTHAL, A. M.—HENRY, L.: *Solid Propellant Rocket Research*, vol. 1, Acad. Press., New York, p. 33.
3. FRENKEL, J.: *Kinetic Theory of Liquids, Dover Publ.* (1955), 208 ff.
4. REINER, M.: *Proc. 8th Int. Congress Appl. Mech.*, Istanbul, 1952.
5. STAVERMAN, A. J.—HEIJBOER, J.: *Physikalische Methoden in der Kunststoffprüfung, Kunststoffe*, **50** (1960), 23—26.
6. COLE, K. S.—COLE, R. H.: *J. Chem. Physics*, **9** (1941), 341.
7. FREUDENTHAL, A. M.: *J. Appl. Phys.*, **31** (1960), 434.
8. GRÜNEISEN, E.: *Ann. d. Physik*, **26** (1908), 393.
9. ZAWADSKI, J.: *Zft. f. Ang. Math. u. Mech.*, **38** (1958), 339.
10. BLAND, D. R.: *Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, London, 1960, 113—124.

£.

DAS EIN-DIMENSIONALE VERHALTEN UND DER KOEFFIZIENT DER WÄRMEAUSDEHNUNG ZEIT-EMPFINDLICHER MATERIALIEN

A. M. FREUDENTHAL

ZUSAMMENFASSUNG

In der Analyse visko-elastischer Probleme sowie in der Beobachtung des visko-elastischen Verhaltens der Materiale in Biegungs- und Dehnungsschwingungsversuchen ist das ein-dimensionale Verhalten von wesentlicher Bedeutung, da es anscheinend eine brauchbare Analogie liefert, die eine theoretische Behandlung des visko-elastischen Verhaltens ermöglicht. Es ist jedoch nicht allgemein bekannt, daß im Falle wirklicher, und daher elastisch oder visko-elastisch kompressiblen Materialien die Analogie viel weniger einfach ist als im Falle der gewöhnlich eingeführten Annahme der Inkompressibilität. Es wird daher ein Versuch gemacht, das ein-dimensionale visko-elastische Verhalten unter verschiedenen Annahmen bezüglich des Verhaltens des Materials in seinem Schub und seiner Volumsverformung zu analysieren, um die Verschiedenheit des resultierenden ein-dimensionalen Verhaltens zu illustrieren, im besonderen die Frequenzabhängigkeit des verallgemeinerten Hookeschen Moduls E und der Poissonzahl ν . — Der Zusammenhang dieser Zahl mit dem Koeffizienten der Wärmeausdehnung wird auch diskutiert, um zu zeigen, daß die theoretisch vereinfachende, jedoch physikalisch zweifelhafte Annahme der Inkompressibilität des Materials von sehr beschränkter Gültigkeit ist.

COMPORTEMENT UNIDIMENSIONNEL DU COEFFICIENT
DE DILATATION THERMIQUE DES MATÉRIAUX VISCO-ÉLASTIQUES

A. M. FREUDENTHAL

RÉSUMÉ

Dans l'analyse des problèmes visco-élastiques aussi bien que dans l'observation du comportement visco-élastique des matériaux sous flexion ou extension oscillatoires, le comportement unidimensionnel des matériaux est d'une importance considérable, vu qu'il fournit à l'étude du comportement visco-élastique une analogie élastique convenable. Cependant, il n'est pas suffisamment reconnu que dans le cas de matériaux visco-élastiques réels, donc élastiquement ou visco-élastiquement compressibles, l'analogie est bien plus complexe que dans le cas d'incompressibilité généralement considéré. Aussi l'auteur a-t-il essayé d'analyser le comportement visco-élastique unidimensionnel en introduisant différents comportements pour la déformation équivoluminale et pour la compressibilité. Cette analyse démontre les différences du comportement visco-élastique résultant, et en particulier la dépendance du module de Hooke (E) généralisé, et de la constante de Poisson ν . La relation de ν et du coefficient de dilatation thermique est également examinée par l'auteur, qui démontre que l'hypothèse de l'incompressibilité n'est valable que dans des limites très étroites.

ОДНОРАЗМЕРНОСТЬ ТЕПЛООВОГО КОЭФФИЦИЕНТА РАСШИРЕНИЯ ВИСКО-
ЭЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. М. ФРЕЙДЕНТАЛЬ

РЕЗЮМЕ

При теоретическом исследовании проблем вискоэластичности, а также при опытном наблюдении за материалами, подверженными загибочным или вытяжным колебаниям, большое значение имеет одноразмерность в поведении материала, так как явление, аналогичное проявлению упругости материала, может служить основой для теоретического обсуждения вискоэластичности материала. Однако, не всем известно, что у действительно сжимаемых, то есть сжимаемых эластически или пластически материалов, эта аналогия гораздо более сложна, чем у материалов, принятых за несжимаемые. Так что данная работа пытается исследовать одноразмерность вискоэластичности материала на основании различных предположений, касающихся деформации без изменения объема, и показать, какие расхождения наблюдаются в данном случае главным образом при наличии модуля Хока (E) и числа Пуассона (ν). Работа рассматривает зависимость между числом Пуассона и тепловым коэффициентом расширения, подтверждая тем самым, что предположение о несжимаемости материала, которое в теоретическом отношении приводит к упрощению, но в физическом отношении довольно оспоримо, может быть действительным только в очень узких пределах.

ERGÄNZUNGEN ZUR LÖSUNG EINIGER PROBLEME DER WETTERKÜHLUNG TIEFER GRUBEN

T. BOLDIZSÁR

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC (UNGARN)

[Eingegangen am 5. Oktober 1961]

Einleitung

Die Erwärmung der Grubenwetter in einer noch nicht aufgeschlossenen tiefen Sohle kann man, die Aufgaben der gegenwärtigen Verhältnisse als Ausgangspunkt nehmend, nach gewissen geothermischen Überlegungen vorausberechnen. So kann jene Wettermenge vorausbestimmt werden, welche in den tieferen Sohlen allenfalls erst nach Jahrzehnten zur Sicherung der gewünschten klimatischen Verhältnisse notwendig sein wird, in Anbetracht dessen, daß in den tieferen Sohlen die Gesteinstemperatur beziehungsweise die den Grubenstollen zuströmende Gesteinswärme größer sein wird. Die Anwendung des Verfahrens wird mittels eines praktischen Beispiels illustriert.

Verfasser veröffentlichte in seiner in den Freiburger Forschungsheften [1] erschienenen Abhandlung zwei Methoden, deren Zweck gewesen war, in den noch nicht aufgeschlossenen tieferen Sohlen der mit klimatischen Schwierigkeiten kämpfenden Gruben die zur künftigen Bewetterung notwendige größere Luftmenge zu berechnen. Die Ausgangsbasis bildete die augenblickliche Betriebslage, die durch den Ventilator geförderte durchschnittliche Wettermenge, die Erwärmung der Wetter und die Wärmeleitfähigkeit der Gesteine. Die grundlegende Voraussetzung für die Berechnung war, daß an der Hauptstrecke für ausziehende Wetter vor dem Wetterschacht die Temperatur der Grubenwetter nicht höher steige als die gegenwärtige Temperatur, das heißt, die gegenwärtigen klimatischen Verhältnisse auch auf der tieferen Sohle nicht ungünstiger seien. Für Lösung der Aufgabe mußte angenommen werden, daß in den betreffenden tieferen Sohlen die Struktur des Bergwerks, das Bewetterungssystem, die Wärmeleitfähigkeit der Gesteine unverändert bleiben, und nur die Gesteintemperatur wächst.

Die Lösung des Problems ging folgendermaßen vor sich:

Die in die horizontalen Grubenstollen mit kreisförmigem Querschnitt einströmende Gebirgswärme beträgt pro laufendes Meter

$$q = \lambda \cdot F(\psi) \cdot \tau, \quad (1)$$

worin λ die Wärmeleitfähigkeit der Gesteine, $\tau = T_G - T_0$ den Unterschied zwischen der ungestörten Gesteins- und der Lufttemperatur bedeutet. Der Faktor $F(\psi)$ konnte aus dem Ausdruck

$$F(\psi) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\psi\beta^2}}{J_0^2(\beta) + Y_0^2(\beta)} \frac{d\beta}{\beta} \quad (2)$$

berechnet werden und ist mit $\varphi = at/R^2$ bereits aus Tabellen bzw. Diagrammen ablesbar [2]. Die Größe a bedeutet die Temperaturleitfähigkeitszahl, t die Zeit und R den Radius des Kreisquerschnittes. J_0 und Y_0 sind Besselsche Funktionen, β ist die Veränderliche des Integrals. Es ist zu bemerken, daß der Begriff »Zeit« die Länge der Zeitperiode bedeutet, während welcher die Bewetterung der Grubenstollen bereits vor sich ging.

Mit Hilfe der Gleichung (1) kann die Erwärmung der Wetter berechnet werden. Die Differenz τ zwischen der Temperatur des natürlichen Gesteins und der Temperatur der von Beginn der Strecke in z Meter Abstand strömenden Luft erhalten wir aus der Gleichung

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{\lambda \cdot F(\varphi) \cdot Z}{V \cdot c_p}\right), \quad (3)$$

worin τ_0 und τ die Temperaturdifferenzen, V die Wettermenge, c_p die spezifische Wärme der Luft ist.

Für vertikale Schächte von der Teufe y ist

$$\tau = \left[\tau_0 - \frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\varphi)} \cdot \left(\frac{q}{\lambda} - \frac{A\gamma}{c_p} \right) \right] \exp\left(-\frac{\lambda \cdot F(\varphi) y}{V \cdot c_p}\right) + \frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\varphi)} \left(\frac{q}{\lambda} - \frac{A\gamma}{c_p} \right). \quad (4)$$

Darin bedeutet q den Wärmefluß vom Inneren der Erde zur Oberfläche, λ die Wärmeleitfähigkeit der Gesteine, A das Wärmeäquivalent der mechanischen Arbeit und γ das spezifische Gewicht der Luft. q/λ kann man mit dem Reziprokwert der geothermischen Tiefenstufe ersetzen.

In der Folge wurde der Begriff des von geothermischem Gesichtspunkt aus mit der Grube gleichwertigen Zylinders eingeführt. Dieser gleichwertige Zylinder, eingebettet in das Gestein oder in das geothermische Temperaturfeld der Grube, ist geothermisch gleichwertig mit dem komplizierten Grubengebäude. Dieser Zylinder hat einen bestimmten Durchmesser und eine bestimmte Länge; es ist aber nicht unbedingt nötig, diese Werte zu ermitteln. Diesbezüglich wurden zwei grundlegende Zusammenhänge bewiesen:

Erster Satz : Das Verhältnis der in den gleichwertigen Zylinder einströmenden Wärmemenge in demselben Gestein und in verschiedener Tiefe hängt nur von der Temperaturdifferenz zwischen Gestein und Wetter ab.

Zweiter Satz : Die Proportion der durch den gleichwertigen Zylinder strömenden Wärmemenge in verschiedenen Tiefen bei verschiedenen Gesteinen hängt durchweg von der aus dem Erdinnern gegen die Oberfläche strömenden Wärme sowie von der räumlichen Lagerung und den Wärmeleitfähigkeitszahlen der Gesteine ab.

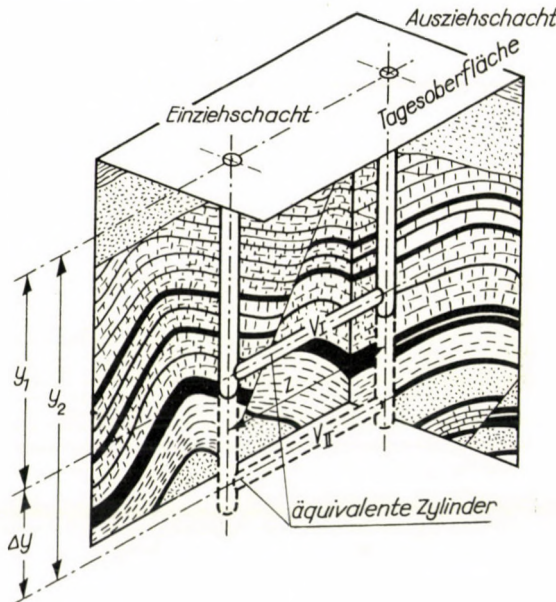
Durch Anwendung dieser Sätze konnte die gesuchte Wettermenge (V_{II}) auf Grund der Ausgangswettermenge (V_I) bestimmt werden:

$$\frac{V_{II}}{V_I} = \frac{\lambda_{II} \ln \frac{\tau_{ZI}}{\tau_{OI}}}{\lambda_I \ln \frac{\tau_{ZII}}{\tau_{OII}}} = \frac{\lambda_{II} \ln \frac{T_{GI} - T_{ZI}}{T_{GI} - T_{OI}}}{\lambda_I \ln \frac{T_{GII} - T_{ZII}}{T_{GII} - T_{OII}}} \quad (5)$$

und der die Gleichung

$$\frac{e^{-\sigma_{II}Z} - e^{-\sigma_{II}(y_2+Z)}}{\sigma_{II}} = \frac{q}{\lambda \delta} (y_2 - y_1) \frac{e^{-\sigma_I Z} - e^{-\sigma_I(y_1+Z)}}{\sigma_I} \quad (6)$$

erfüllende Wert σ_{II} liefert die erforderliche Wettermenge V_{II} .



In Gleichungen (5) und (6) bedeutet V_{II} die durch die tieferliegenden Grubengebäude künftig strömende Wettermenge, deren Bestimmung das Ziel unserer Aufgabe ist, τ_{OI} und τ_{OII} bzw. τ_{ZI} und τ_{ZII} die Temperaturunterschiede zwischen dem thermisch ungestörten Gestein und der Wetter im Anfangszustand bzw. im Abstand z der oberen bzw. unteren gleichwertigen Zylinder. T_{OI} bzw. T_{OII} sind die Wassertemperaturen am Anfang und T_{ZI} bzw. T_{ZII} dieselben im Abstand z im gleichwertigen Zylinder, dagegen T_{GI} bzw. T_{GII} die Gesteinstemperaturen in dem oberen beziehungsweise unteren gleichwertigen Zylinder. λ_I bzw. λ_{II} ist die Wärmeleitfähigkeit des Gesteins in den

beiden Sohlen. y_1 bzw. y_2 bedeuten die Tiefe der zwei Sohlen,

$$\sigma_I = \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V_I \cdot c_p} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{II} = \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V_{II} \cdot c_p}$$

und

$$\delta = \left(\frac{q}{\lambda} - \frac{A\gamma}{c_p} \right), \quad \text{oder} \quad \delta = \left(\frac{1}{gg} - \frac{A \cdot \gamma}{c_p} \right),$$

wo gg den Mittelwert der geothermischen Tiefenstufe bedeutet.

Die zwei Methoden ergaben in einem im Jahre 1941 aufgetretenen Fall im Andreas-Schacht bei Pécs (Ungarn) nach der ersten Methode (4100 m³/min) nach der zweiten Methode (2530 m³/min) Wettermenge in den tieferen Sohlen [3].

Der Unterschied ist verhältnismäßig groß, weshalb Verfasser für notwendig hielt, die Frage weiter zu untersuchen. Auf Grund eingehender Prüfung hatte sich auch erwiesen, daß beide Rechnungsverfahren richtig sind, es wurde jedoch bei Anwendung der Gleichung (6) [in der ursprünglichen Fassung (15)] die Bestimmung des Wertes von ε und Z_I willkürlich vorgenommen.

Es ist nämlich $\varepsilon = \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{c_p}$, mit $F(\psi) = F\left(\frac{at}{R^2}\right)$. Im Zahlenbeispiel wurden λ und a sowie t und R , weiter der Wert von Z_I willkürlich angenommen, obwohl man die Werte λ und a im Besitze der Meßergebnisse des derzeitigen Grubenfeldes ganz einfach bestimmen kann. Leider waren 1941 noch keine Meßergebnisse vorhanden, aber im Jahre 1958 haben wir Gelegenheit gehabt, geothermische Messungen vorzunehmen und die Werte von λ und a zu bestimmen.

Was die maßgebenden (nicht durchschnittlichen!) Größen t , R und Z_i betrifft, wurde das Zahlenbeispiel auch mit willkürlich angenommenen Werten ausgewertet.

In der Praxis ist jedoch das Ausgangsstadium immer bekannt und gut meßbar. Es kann gemessen werden die Temperatur der Luft an der Stelle des Eintrittes aus dem Schacht in das Streckensystem (selbstverständlich die Jahresdurchschnittstemperatur). Mit Hilfe dieses Kunstgriffes kann aus der Beziehung $\tau_{Z_I} = \tau_0 \exp\left(-\frac{\lambda \cdot F(\psi) Z_I}{V_I c_p}\right)$ τ und τ_0 und auf Grund des gemessenen Wertes V_I das Produkt $\lambda \cdot F(\psi) Z_I$ errechnet werden. Hieraus kann bei bekanntem λ das Produkt $F(\psi) \cdot Z_I$ und mit einem geschätzten Wert von ψ bzw. R die Länge, z. B. Z_I , berechnet werden.

In einem anderen Fall kann die Länge des gleichwertigen Zylinders Z_I bekannt sein, und ψ bzw. R berechnet werden. Diese Werte sind jedoch nicht unbedingt notwendig.

Da nach unserer grundlegenden Voraussetzung in den tiefer gelegenen Sohlen

$$Z_{II} = Z_I = Z$$

und $\varepsilon_{II} = \varepsilon_I = \varepsilon$ ist, wird offenbar, daß wir

$$\tau_{ZII} + \frac{q}{\lambda} (y_2 - y_1) = \frac{V_{II} \cdot \delta}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\varepsilon \cdot z}{V_{II}}} - e^{-\frac{\varepsilon(y_2+z)}{V_{II}}} \right),$$

beziehungsweise

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \left(\tau_{ZII} + \frac{q}{\lambda} (y_2 - y_1) \right) = V_{II} \left(e^{-\frac{\varepsilon \cdot z}{V_{II}}} - e^{-\frac{\varepsilon(y_2+z)}{V_{II}}} \right) \quad (7)$$

erhalten. Es ist nämlich

$$\tau_{ZII} - \tau_{ZI} = \frac{q}{\lambda} (y_2 - y_1) = \frac{1}{gg} (y_2 - y_1)$$

und

$$\tau_{ZII} = \frac{\delta}{\sigma_{II}} (e^{-\sigma_{II} z} - e^{-\sigma_{II}(y_2+z)}),$$

wobei

$$\sigma = \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot c_p}$$

bedeutet. Aus Gl. (7) folgt, genau so wie in der ursprünglichen Publikation [1],

$$x \left(e^{-\frac{A}{x}} + e^{-\frac{B}{x}} \right) = C, \quad (8)$$

worin

$$x = V_{II},$$

ist, aber die Werte

$$A = \varepsilon \cdot Z,$$

$$B = \varepsilon (y_2 + z),$$

$$C = \frac{\varepsilon}{\delta} \left[\tau_{ZII} + \frac{q}{\lambda} (y_2 - y_1) \right]$$

von den Werten A , B und C der Originallösung abweichen. ε , Z , y , τ_{ZI} , q , λ , y_1 und δ sind aus dem Anfangszustand bekannt, y_2 ist die Teufe, in welcher die Wettermenge V_{II} zu bestimmen ist.

Durch das Zahlenbeispiel aus der Originalveröffentlichung wird die Berechnungsmethode besser erklärt.

In Südgarn ist bei dem nächst Pécs befindlichen Andreas-Schacht im Jahre 1940/41 die Errichtung einer Bewetterungsanlage von hoher Leistung notwendig geworden. Aufgabe dieser Maschinenanlage war, die verhältnismäßig ertragbaren Wassertemperaturen an den Arbeitsorten auch für die Zukunft zu sichern; d. h. in jenem Zeitabschnitt, in dem die durchschnittliche Tiefe der Grube von 360 m auf 570 m, das heißt um 210 m zunehmen wird [3]. Im ungarischen Teil des Karpathen-Beckens ist der irdische Wärmestrom groß; sein Wert beträgt ca. $3 \cdot 10^{-6}$ cal/cm² sec, somit das 2,5fache des an der Oberfläche der Erde beobachteten durchschnittlichen Wertes. Da die Wärmeleitfähigkeit normal ist, zeigt der geothermische Gradient ungewöhnlich geringe Werte, nämlich 16—22 m/°C. Deshalb war in 570 m Tiefe schon eine ursprüngliche Gesteinstemperatur von wenigstens 35,7° C zu erwarten; nach neueren Messungen steigt die Temperatur sogar über 40° C. Eine so hohe Gesteinstemperatur zeigt sich in anderen Kohlengruben erst in 1000—1200 m Tiefe.

Die Aufgabe war, die zur Bewetterung der um 210 m tieferen Grube notwendige Wettermenge zu ermitteln, welche die Forderung erfüllt, daß in der ausziehenden Sohle die Lufttemperatur nicht höher werde als die ursprüngliche, die im Jahre 1940/41 herrschte, das heißt, daß die Klimaverhältnisse während der Vertiefung der Grube unverändert bleiben.

Ausgangswerte waren:

Gesteinstemperatur auf Sohle 360 m $T_{GI} = 26,3^\circ \text{C}$

Gesteinstemperatur auf Sohle 570 m $T_{GII} = 35,7^\circ \text{C}$

Der Jahresdurchschnitt der Lufttemperatur betrug

zu Tage $T_{00} = 11,0^\circ \text{C}$
 auf Sohle 360 m $T_{ZI} = 23,9^\circ \text{C}$ (am Ausziehschacht)
 auf Sohle 570 m $T_{ZII} = T_{ZI} = 23,9^\circ \text{C}$ (Bedingung)
 Wettermenge $V_I = 1634 \text{ m}^3/\text{min}$

Der Jahresdurchschnitt der Temperatur der auf Sohle 360 m einziehenden Wetter ist auf Grund von Beobachtungen

wovon $T_{0I} = 15,0^\circ \text{C}$,

$$\begin{aligned} \tau_{ZI} &= 26,3 - 23,9 = 2,4^\circ \text{C}, \\ \tau_{0I} &= 26,3 - 15,0 = 11,3^\circ \text{C} \end{aligned}$$

ist. Aus Gleichung (3) ist

$$\frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot c_p} = -\ln \frac{\tau_{ZI}}{\tau_{0I}}$$

und hieraus

$$\lambda \cdot F(\psi) \cdot Z = 45550.$$

Da $\lambda = 2,16 \text{ kcal/m h }^\circ\text{C}$, $a = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$ ist, und den Halbmesser des gleichwärtigen Zylinders mit $R = 1,5 \text{ m}$ angenommen, wenn $t = 10^3$ Stunden (geschätzt) ist,

$$\psi = \frac{at}{R^2} = 1,82 \text{ ist,}$$

wird die zugehörige

$$F(\psi) = 5,2,$$

und daraus

$$z = 4160 \text{ m.}$$

Da

$$\varepsilon = \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{c_p} = 37,4$$

und mit $gg = 20 \text{ m}/^\circ\text{C}$

$$\delta = \left(\frac{1}{gg} + \frac{A \cdot \gamma}{c_p} \right) = 0,0407$$

ist, finden wir die Werte von A , B und C mit $(y_2 - y_1) = 210 \text{ m}$ wie folgt:

$$A = 37,4 \cdot 4160 = 15558,4$$

$$B = 37,4 \cdot (4160 + 570) = 17690,2$$

$$C = \frac{37,4}{0,0407} \left(2,4 - \frac{210}{20} \right) = 11855,1.$$

Werden all diese Werte in Gleichung

$$x \left(e^{-\frac{A}{x}} - e^{-\frac{B}{x}} \right) = C$$

eingesetzt, so erhalten wir durch ein Näherungsverfahren $x = V_{II}$, das heißt

$$V_{II} = 283,000 \text{ m}^3/\text{h} = 4716,6 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Näher als das auf Seite 31 der angegebenen Studie erhaltene Resultat ($2530 \text{ m}^3/\text{min}$) liegt der verbesserte Wert jenem Wert $4100 \text{ m}^3/\text{min}$, den wir nach dem im Sinne der Gleichung (4) angewendeten Verfahren gewonnen haben. Letzterer Wert ist nicht so genau, weil die Ausgangsbedingungen einfacher sind, und die Erwärmung der Grubenwetter im Schacht nicht berücksichtigt wurde.

SCHRIFTTUM

1. BOLDIZSÁR, T.: Lösung einiger Probleme der Wetterkühlung tiefer Gruben. *Freiberger Forschungshefte A 84* (1958), S. 25—31.
2. INGERSOLL, L. R.—ZOBEL, O. J.—INGERSOLL, A. C.: *Heat Conduction*, Madison 1954. S. 248.
3. BOLDIZSÁR, T.: Berechnung eines Grubenventilators usw. *Glückauf 77* (1942) S. 613.

COMPLEMENTS ON THE SOLUTION OF SOME PROBLEMS FOR THE COOLING OF DEEP MINES

T. BOLDIZSÁR

SUMMARY

The warming-up of mine air at a level which has not yet been opened up can be calculated on the basis of certain geothermal considerations, if the present basic data were known. Thus, the quantity of ventilating air necessary after decades can also be determined, which will be necessary for establishing suitable climatic surroundings, taking into consideration the fact that on the lower levels the temperature of the rock will increase and, thus, the quantity of heat flowing into the galleries will increase, too. The method is illustrated by a practical numerical example.

CONTRIBUTION A LA SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES DE VENTILATION DANS LES MINES PROFONDES

T. BOLDIZSÁR

RÉSUMÉ

L'échauffement de l'air de mine à un niveau profond non ouvert peut être calculé d'après certaines considérations géothermiques, si les données de base présentes sont connues. Ainsi, on peut aussi déterminer la quantité d'air nécessaire des dizaines d'années plus tard, pour créer une ambiance climatique convenable, indépendamment du fait qu'aux niveaux profonds, la température des minerais, et concurrentement la quantité de chaleur transmise aux galeries augmente. La méthode est illustrée par un exemple numérique.

ДОПОЛНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ОХЛАЖДЕНИЯ ВОЗДУХА ГЛУБОКИХ ШАХТ

Т. БОЛЬДИЖАР

РЕЗЮМЕ

Нагрев воздуха на еще не вскрытой глубине шахты можно вычислить на основе определенных геометрических соображений, если известны основные исходные данные. Следовательно, можно установить необходимое даже через десять лет количество вентиляционного воздуха, которое потребуется для создания соответствующих климатических условий, независимо от того, что на большей глубине температура пород и, таким образом, количество движущегося в штреках потока тепла будет больше. Метод иллюстрируется практическим числовым примером.

GENERAL EQUATIONS OF SHELL ANALYSIS

K. SZMODITS

D. OF ENG. SC.

HUNGARIAN INSTITUTE FOR BUILDING RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received January 16, 1961]

The differential equations of bent shells are used in different forms. This paper deals with the problem of using a system of orthogonal surface co-ordinates without applying the fundamental quantities of Surface Theory. The equations of shallow and circular cylindrical shells are deduced from universal equations as particular cases of the latter. In addition, the consequences of the applied neglects, as well as the reasons for the contradictions arising from these neglects and their effects are also investigated.

I. Introduction

The determination of the internal forces of shells requires the solution of differential equations comprising conditions of equilibrium and deformation of the investigated shell with regard to boundary conditions.

It is expedient to set up these equations using a system of co-ordinates by the application of which the equations in question can be solved in a relatively simple way. Therefore, the investigations referring to domes and barrel vaults are performed, in general, by using a system of surface co-ordinates according to the lines of principal curvatures of the shell surface. For the investigation of shells over a rectangular plan, on the other hand, a system of orthogonal co-ordinates should be used. By so doing, for the individual shell forms in contents identical, but formally different equations are arrived at. To make the setting up of these equations easier universal shell equations are established; these are valid for any shell form and are set up using a system of co-ordinates which is independent of the form of the shell surface.

Among the equations referring to a universal shell surface PUCHER's equations [1] of the Membrane Theory set up in a system of orthogonal co-ordinates, BÖLCSKEI's equations [2] of bent shells, furthermore, LOVE's and WLASSOW's equations [3] set up in a system of surface co-ordinates according to the lines of principal curvatures can be mentioned. GREEN—ZERNA, PARKUS and others set up universal shell equations using tensors invariant in respect to the system of co-ordinates. But, as the last-mentioned equations have a symbolic character, they cannot directly be used for the solution of the individual problems.

The aim of this paper is to set up the fundamental equations of Shell Theory using as the sought for functions displacements u, v, w which are to be measured in the directions of the axes of co-ordinates. By choosing the displacements as functions sought for, the number of equations to be solved can be reduced to three, and this can be said to be the advantage of this method.

2. Approximate assumptions

The equations will be set up by using a system of surface co-ordinates determined by the lines of principal curvature of the shell surface. The surface co-ordinates are $s_1 = \int R_1 d\varphi_1$ and $s_2 = \int R_2 d\varphi_2$, where R_1 and R_2 are the

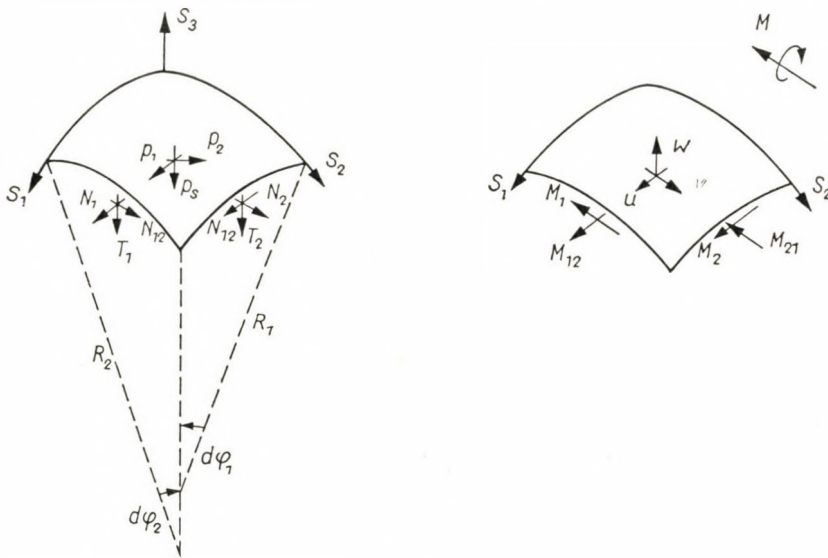


Fig. 1

principal radii of curvature, while $d\varphi_1$ and $d\varphi_2$ denote the infinitesimal angles pertaining to the surface normals situated along the lines of curvatures.

When deducing these equations, an approximation usual in Shell Analysis is applied, i. e., the shell being in the triaxial stress state is reduced to the biaxial one, in such a way that the stresses developing in the shell are replaced by the internal forces which result from the integration of the afore-mentioned stresses along the surface normals. Thus, functions determining the internal forces comprise the surface co-ordinates as independent variables only. In compliance with the approximate assumptions used in the elementary Theory of Strength of Materials, linearly varying deformations are assumed. This is equivalent to the assumption that the surface normals, which shift due to

deformation, remain perpendicular to the surface even after deformation. By proceeding in this way, along the surface normals relations of the elementary Theory of Strength of Materials, along the shell surface, on the other hand, those of the mathematical Elasticity Theory are taken as bases of the calculations. This assumption conduces — as will be seen in the following — to certain contradictions.

3. Internal forces as the functions of stresses

The internal forces shown in Fig. 1 and taken as positive are defined by the following well-known formulae:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_{1z} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz; & N_2 &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_{2z} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz. \\ N_{12} &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{12,z} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz; & N_{21} &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{21,z} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz. \\ M_1 &= - \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_{1z} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz; & M_2 &= - \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sigma_{2z} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz. \\ M_{12} &= - \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{12,z} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz; & M_{21} &= - \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{21,z} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz. \end{aligned} \right\} (1)$$

Here d is the thickness of the shell wall, while the foot-indices of stresses σ and τ denote that these terms are the functions of the variable $s_3 = z$. Terms $\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)$ and $\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)$ figuring in the above formulae express the fact that the integration is performed along the annular segment-formed surface normal sections. Owing to the substitution of stresses by internal forces, the edges of the infinitesimal shell element are subjected to normal forces N_1, N_2 and shear forces N_{12}, N_{21} which result from the integration of stresses σ and τ ; furthermore, to bending moments M_1 and M_2 and twisting moments M_{12}

and M_{21} , all these moments resulting from the integration of same caused by the afore-mentioned stresses σ and τ , respectively. In compliance with the elementary Bending Theory stresses τ_{13} , τ_{23} acting along the surface normals are replaced by shear forces T_1 and T_2 , these being obtained from the integration of stresses τ_{13} , τ_{23} . But, as in the following shear forces T_1 and T_2 are eliminated from the equations, so the setting up of the integrals defining these forces is disregarded.

4. Equations of equilibrium

The equilibrium of forces acting on the shell element is expressed by the following equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N'_1}{R_1} + \frac{N^*_{21}}{R_2} - \frac{1}{r_2} (N_1 - N_2) - \frac{1}{r_1} (N_{12} + N_{21}) - \frac{T_1}{R_1} + p_1 &= 0 \\ \frac{N^*_2}{R_2} + \frac{N'_{12}}{R_1} - \frac{1}{r_1} (N_2 - N_1) - \frac{1}{r_2} (N_{12} + N_{21}) - \frac{T_2}{R_2} + p_2 &= 0 \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + \left(\frac{T'_1}{R_1} + \frac{T^*_2}{R_2} \right) - \left(\frac{T_1}{r_2} + \frac{T_2}{r_1} \right) + p_3 &= 0 \\ \frac{M'_{12}}{R_1} + \frac{M^*_2}{R_2} - \frac{1}{r_2} (M_{12} + M_{21}) + \frac{1}{r_1} (M_1 - M_2) - T_2 &= 0 \\ \frac{M^*_{21}}{R_2} + \frac{M'_1}{R_1} - \frac{1}{r_1} (M_{21} + M_{12}) + \frac{1}{r_2} (M_2 - M_1) - T_1 &= 0 \\ (N_{12} - N_{21}) - \left(\frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Here, the upper comma-indices denote differentiations according to φ_1 , while the upper full stop-indices denote the same according to φ_2 . The first three equations express the equilibrium of the projections of internal forces s_1, s_2, s_3 on the axes of co-ordinates, the second three equations, on the other hand, the equilibrium of moments turning round one and the same axes. In the above formulae R_1 and R_2 are the principal radii of curvature, while $1/r_1$ and $1/r_2$ denote the geodetic curvatures of the lines of principal curvatures:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{R_1 R_2} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial \varphi_2}; \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{1}{R_1 R_2} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial \varphi_1}.$$

The sixth equation in equation-group (2) expresses the equilibrium of moments turning round the surface normals. If the shell element is divided by,

to the surface normal perpendicular surfaces into layers the thickness of which is dz , then stresses $\tau_{12} = \tau_{21}$ acting on the edges of the so obtained elements — the thickness of which is in the direction of the surface normal infinitesimal too — satisfy the sixth equation. Thus, internal forces N_{12} , N_{21} , M_{12} , M_{21} resulting from the integration of stresses $\tau_{12} = \tau_{21}$ according to (1), also satisfy this equation. Therefore, the sixth equation identically disappears, independent of the value of τ . This fact can easily be verified by replacing the formulae of integration given in (1) into the sixth equation.

By solving, from the remaining five equations the fourth and the fifth according to T_1 and T_2 , these two terms can be eliminated from the first two equations. The so obtained three equations comprise six internal forces, these can be expressed as functions of displacements u, v, w , by measuring the latter in the directions of the axes s_1, s_2, s_3 . Therefore, the three equations of equilibrium determine the displacements unambiguously.

The previous deductions are based on the unspoken assumption that the equations of equilibrium (2) set up by internal forces (1) are invariant in respect to the choice of the system of co-ordinates. The well-known equations of equilibrium set up by the stresses always satisfy this condition, therefore, a separate verification of this circumstance is unnecessary. However, in the present case the conditions of equilibrium are not set up on the base of the stresses but on the base of the internal forces defined in (1). The sixth equation can be satisfied by these internal forces only in a system of surface co-ordinates of the lines of principal curvatures, for any other system of co-ordinates the sixth equation represents, in addition to the three equations which determine displacements u, v, w unambiguously, a redundant equation which cannot be satisfied. Except for a system of surface co-ordinates of the lines of principal curvatures, the twist of the axes of co-ordinates κ is for any other system of surface co-ordinates not equal to zero; therefore, the sixth equation has to be enlarged by the term $-\kappa(M_1 - M_2)$. According to (1) this term is a function of $\sigma_{1,z}$, $\sigma_{2,z}$. The term in question cannot disappear independently of the values of $\sigma_{1,z}$, and $\sigma_{2,z}$, as the other terms of the sixth equation disappear independently of the values of $\tau_{12} = \tau_{21}$; consequently, the sixth equation cannot disappear identically either.

Thus, the conditions of equilibrium cannot be satisfied precisely by using relations (1) and (2). The very reasons for this are the approximations which are introduced when reducing the triaxial stress state to the biaxial one. The apparent satisfaction of the conditions of equilibrium for a system of surface co-ordinates referring to the lines of principal curvatures, and the fact that they cannot be satisfied for any other system of co-ordinates, does not mean that in the first case the solution is exact, while inexact in the second one. Namely, the fundamental condition for the possibility of satisfying the equations of equilibrium is that they should be invariant in respect to the choice

of the system of co-ordinates. As the afore-mentioned fundamental condition cannot be satisfied, the exact solution of the equations of equilibrium is, independent of the system of co-ordinates in which they are set up, also impossible. However, the error belongs to the same range of magnitude as the neglected deformations caused by shear forces developing due to moments, therefore, the sixth equation can be disregarded [6].

5. Deformations

For expressing the internal forces as functions of the displacements u, v, w , first the stresses should be set up as functions of strains $\varepsilon_{1,z}, \varepsilon_{2,z}, \gamma_{1,2,z}$ by using the following well-known relations:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,z} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{1,z} + \nu \varepsilon_{2,z}), \\ \sigma_{2,z} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{2,z} + \nu \varepsilon_{1,z}), \\ \tau_{12,z} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_{12,z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Here, E is the modulus of elasticity of the shell wall and ν is Poisson's ration.

According to Fig. 2, between strains and displacements the following relations hold:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1,z} &= \frac{u'_z + w}{R_1 + z} - \frac{v_z}{r_2}; & \varepsilon_{2,z} &= \frac{v_z + w}{R_2 + z} - \frac{u_z}{r_2}; \\ \gamma_{1,2,z} &= \frac{u_z}{R_2 + z} + \frac{v'_z}{R_1 + z} + \frac{u_2}{r_1} + \frac{v_z}{r_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

The displacement u_z of a point, which due to deformation shifted from position A into position A' , can be read from Fig. 3; its displacement v_z , on the other hand, can be determined from a similar figure which is to be drawn in the plane of the normal section touching the line of curvature s_2 . According to the above:

$$u_z = \frac{R_1 + z}{R_1} u - \frac{z}{R_1} w'; \quad v_z = \frac{R_2 + z}{R_2} v - \frac{z}{R_2} w'. \quad (5)$$

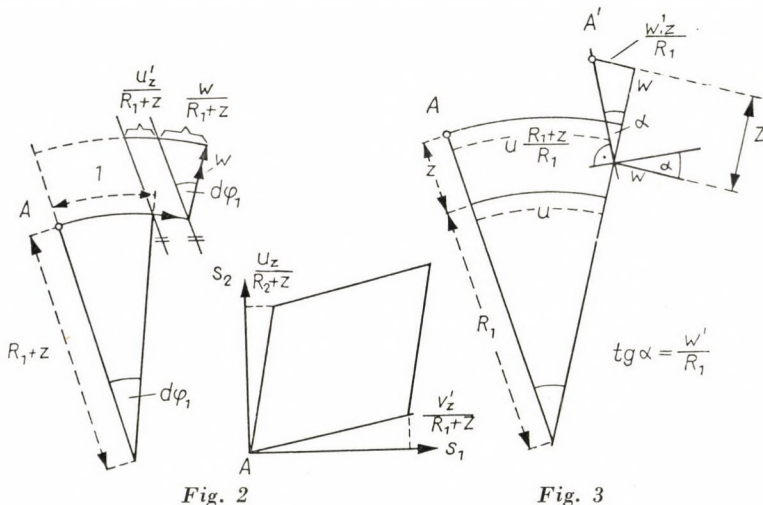
Substituting relations (5) into (4), then, the so obtained formulae into (3), furthermore, replacing the stresses resulting from the precedent substitution into (1), finally integrating and neglecting terms which contain z of a higher power than the fourth, and omitting members containing geodetic curvatures $1/r_1, 1/r_2$, the following formulae are arrived at:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{D}{R_1} \left[u' + w + \nu \frac{R_1}{R_2} (v' + w) \right] + \frac{K}{R_1^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)' (u - w') - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{w''}{R_1} \right] \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) + \frac{w}{R_1} - \frac{w}{R_2} \right\} - \dots \\
 N_2 &= \frac{D}{R_2} \left[v' + w + \nu \frac{R_2}{R_1} (u' + w) \right] + \frac{K}{R_2^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_2} \right)' (v - w'') - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{w''}{R_2} \right] \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) + \frac{w}{R_2} - \frac{w}{R_1} \right\} - \dots \\
 N_{12} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\frac{u'}{R_2} + \frac{v'}{R_1} \right] + \frac{K(1-\nu)}{2R_1^2} \left\{ \left(\frac{v'}{R_1} - \frac{v'}{R_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{R_2} (v' - w'') - \left(\frac{1}{R_2} \right)' (v - w') \right] \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \right\} + \dots \\
 N_{21} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\frac{v'}{R_1} + \frac{u'}{R_2} \right] + \frac{K(1-\nu)}{2R_2^2} \left\{ \left(\frac{u'}{R_2} - \frac{u'}{R_1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{R_1} (u' - w'') - \left(\frac{1}{R_1} \right)' (u - w') \right] \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \right\} + \dots \\
 M_1 &= -\frac{K}{R_1^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)' (u - w') - \frac{w''}{R_1} \right] R_1 + w \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) + u' \frac{R_1}{R_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \frac{R_1^2}{R_2^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_2} \right)' (v - w'') - \frac{w''}{R_2} \right] R_2 + v' \right\} \right\} + \dots \\
 M_2 &= -\frac{K}{R_2^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_2} \right)' (v - w'') - \frac{w''}{R_2} \right] R_2 + w \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) + v' \frac{R_2}{R_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \frac{R_2^2}{R_1^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)' (u - w') - \frac{w''}{R_1} \right] R_1 + u' \right\} \right\} + \dots \\
 M_{12} &= -\frac{K(1-\nu)}{2R_1^2} \left\{ v' \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) + \left[\frac{1}{R_1} (u' - w'') - \left(\frac{1}{R_1} \right)' (u - w') \right] \frac{R_1^2}{R_2^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{R_2} (v' - w'') - \left(\frac{1}{R_2} \right)' (v - w') \right] R_1 \right\} + \dots \\
 M_{21} &= -\frac{K(1-\nu)}{2R_2^2} \left\{ u' \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) + \left[\frac{1}{R_1} (u' - w'') - \left(\frac{1}{R_1} \right)' (u - w') \right] R_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{R_2} (v' - w'') - \left(\frac{1}{R_2} \right)' (v - w') \right] \frac{R_2^2}{R_1} \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

In the above formulae (6) $D = \frac{E \cdot d}{1 - \nu^2}$ is the stiffness factor of compression

and $K = \frac{E \cdot d^3}{12(1 - \nu^2)}$ is the stiffness factor of bending. Formulae (6) were also

deduced by WLASSOV but using another form. The difference between WLASSOV's equations and those given in (6) is that for maintaining the connection to a fixed system of orthogonal co-ordinates $O(x, y, z)$, in WLASSOV's equations GAUSS's fundamental quantities — which are well-known from the Surface Theory — expressed by the parameters $A = \overline{E}$ and $B = \overline{G}$ also appear.



Substituting formulae (6) into the group of the equations of equilibrium (2), the sixth equation of this equation-group disappears for reasons which have already been dealt with. Thereafter, eliminating terms T_1 and T_2 from the first two equations with the aid of the fourth and the fifth one, the first three equations remain only, which can unambiguously be solved for the displacements u, v, w . As these equations are very complicated, their writing is disregarded.

For a circular cylindrical shell, where $R_2 = a$ and $R_1 = \infty$, equations (6) turn into FLÜGGE's equations [4]. To demonstrate the identity of these two kinds of equations, it should be taken into consideration that between the differential quotients figuring in FLÜGGE's equations, which are marked by the foot-index F , and the differential equations without foot-indices appearing in equations (6) the following relations hold:

$$(\dots)'_F = \frac{R_2}{R_1} (\dots)' \quad \text{and} \quad (\dots)_{\cdot F} = (\dots)_{\cdot}$$

6. Applications

When using the complicated equations (6) in practice, they might be to a considerable degree simplified. This can be attained by omitting those terms of lower value which might be disregarded in comparison to those of higher value. This simplification is all the more justified because the equations in question are — as has already been shown — theoretically inexact too, thus, the attainable accuracy is limited from the very first. As $D \gg \frac{K}{R_1 R_2}$ and $\frac{K}{R_2^2}$, respectively, terms multiplied with K might be neglected in comparison with those multiplied with D ; furthermore, the assumption $\nu = 0$ might also be introduced, similarly, as is usual when dimensioning reinforced concrete structures. In respect to the first three equations of equilibrium, the statical sense of the assumption $K = 0$ is that the neutral surface developing in the shell wall during bending, does not pass through the centroids of the individual circular segment-formed infinitesimal cross sections, but is identical to the middle surface of the shell, thus, the non-linear stress distribution resulting on the base of equations (3), (4), (5) is replaced by a linear one.

Owing to the introduced neglects many terms figuring in the equations of the bending and twisting moments also disappear. While, for the first three equations of equilibrium the unimportance of the neglected terms is directly conceivable, for the second three, although the ranges of magnitude referring to the neglected and retained terms are not perceptible directly, the omission of the disregarded terms can be justified on the basis of statical interpretations referring to these terms. Here, according to the undetailed above-mentioned deliberations, when the introduced neglects are used, then only the underlined terms to be found in equations (6) have to be taken into consideration. For the sake of simplicity, in the following the upper comma-indices should denote differentiations according to s_1 , while the upper full stop-indices the same according to s_2 . Furthermore, it should be assumed that the change of R_1 according to φ_1 , as well as the change of R_2 according to φ_2 might be disregarded. Finally, contrary to the positive direction of w as indicated in Fig. 1, the opposite direction of w should be regarded as positive. By using the above enumerated modifications the simplified equations consisting merely of those terms which are underlined in equations (6) will take the following form:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= D \left(u' - \frac{w}{R_1} \right); & N_2 &= D \left(v' - \frac{w}{R_2} \right); \\ N_{12} &= N_{21} = \frac{D}{2} (u' + v'); \\ M_1 &= -K w''; & M_2 &= -K w''; \\ M_{12} &= M_{21} = -K w' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

By disregarding terms $\frac{T_1}{R_1}$ and $\frac{T_2}{R_2}$ which are unimportant in comparison to the other terms, the equations of equilibrium can also be simplified. In addition, for shallow shells the geodetic curvature of the lines of curvature can also be neglected, i. e., it can be assumed that $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = 0$; which assumption is for barrel vaults precisely satisfied. By the appli-ance of the above-mentioned approximations and by the elimination of terms T_1 and T_2 with the aid of the fourth and fifth equation, the equations of equilibrium (2) can be written as follows:

$$\left. \begin{aligned} N'_1 + N'_{12} + p_1 &= 0, \\ N'_2 + N'_{12} + p_2 &= 0, \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + M'_1 + 2M'_{12} + M'_2 + p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Substituting relations (7) into equations (8) the following equations are arrived at:

$$\left. \begin{aligned} D \left(u'' - \frac{w'}{R_1} \right) + \frac{D}{2} (u'' + v'') + p_1 &= 0, \\ D \left(v'' - \frac{w'}{R_1} \right) + \frac{D}{2} (u'' + v'') + p_2 &= 0, \\ \frac{D}{R_1} \left[u' - \frac{w}{R_1} \right] + \frac{D}{R_2} \left[v' - \frac{w}{R_2} \right] - K\Delta w + p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Substituting the values $R_2 = a$ and $R_1 = \infty$ into equations (9) these turn into FLÜGGE's simplified equations of the circular cylindrical shell, taking into consideration that in FLÜGGE's equations w is regarded as positive in the opposite direction.

Introducing relations

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= F'' - \int p_1 ds_1, \\ N_2 &= F'' - \int p_2 ds_2, \\ N_{12} &= F'' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

which define the stress function F , equations (8) can be still further simplified. Namely, replacing equations (10) into equations (8), the first two equations of the equation-group (8) identically disappear, the third equation, on the other hand, expressing M_1 , M_2 and M_{12} as functions of w turns into the following form:

$$K\Delta w = \frac{F''}{R_1} + \frac{F''}{R_2} + p_3 - \frac{1}{R_1} \int p_1 ds_1 - \frac{1}{R_2} \int p_2 ds_2. \quad (11)$$

As equation (11) itself is insufficient for the determination of functions F and w sought for, an additional relation, expressing the compatibility of deformations, should be set up.

Summarizing the following expressions set up on the base of equations (7) and (10), and neglecting the differential quotients of the curvatures, the following result is obtained:

$$\begin{aligned}
 N_1^{\bullet\bullet} &= F^{\bullet\bullet} - \int p_1^{\bullet\bullet} ds_1 = D \left[u^{\bullet\bullet} - \frac{w^{\bullet\bullet}}{R_1} \right] \\
 N_2^{\bullet\bullet} &= F^{\bullet\bullet\bullet\bullet} - \int p_2^{\bullet\bullet} ds_2 = D \left[v^{\bullet\bullet} - \frac{w^{\bullet\bullet}}{R_2} \right] \\
 2N_{12}^{\bullet\bullet} &= 2F^{\bullet\bullet\bullet\bullet} = -D[u^{\bullet\bullet} - v^{\bullet\bullet}] \\
 \hline
 \Delta\Delta F - \int p_1^{\bullet\bullet} ds_1 - \int p_2^{\bullet\bullet} ds_2 &= -D \left[\frac{w^{\bullet\bullet}}{R_1} + \frac{w^{\bullet\bullet}}{R_2} \right]. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Substituting the values $R_2 = a$ and $R_1 = \infty$ into equations (11) and (12) these turn into the following equations:

$$\left. \begin{aligned}
 K\Delta\Delta w &= \frac{F''}{a} - \frac{1}{a} \left(\int p_2 ds_2 + p_3 a \right), \\
 \Delta\Delta F &= -\frac{D}{a} w'' + \int p_1^{\bullet\bullet} ds_1 + \int p_2^{\bullet\bullet} ds_2.
 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

These equations are, apart from differences in marking, identical with RÜDIGER—URBAN's [5] equations of the circular cylindrical shell.

If $p_1 = p_2 = 0$, then equations (11) and (12) turn into WŁASSOW's equations of shallow shells:

$$\left. \begin{aligned}
 K\Delta\Delta w &= \frac{F^{\bullet\bullet}}{R_1} + \frac{F''}{R_2} + p, \\
 \Delta\Delta F &= -D \left(\frac{w^{\bullet\bullet}}{R_1} + \frac{w''}{R_2} \right).
 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Equations (14) can also be written by using a system of orthogonal co-ordinates $\theta(x, y, z)$. The equation of the shell surface should be $Z(x, y)$, and u, v, w the displacements measured in the directions of the axes of co-ordinates, furthermore, $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{yx}$ should denote the internal forces acting in the directions of the same axes. Then, proceeding similarly to the method which had been used when deducing equations (7) and applying the

there employed neglects for the internal forces, the following relations expressed as functions of the displacements, are arrived at [2]:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= D(u' + w' z'), & N_y &= D(v' + w' z'), \\ N_{xy} &= N_{yx} = \frac{D}{2} (u' + v' + w' z' + w' z'), \\ M_x &= -Kw'', & M_y &= -Kw'', \\ M_{xy} &= M_{yx} = -Kw''; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

where the upper comma-indices denote differentiations according to x , the upper full stop-indices, on the other hand, the same according to y . Introducing the stress function F which is defined by the expressions $N_x = F''$, $N_y = F''$ and $N_{xy} = -F''$, and deducing a similar condition of compatibility as that deduced in (12), the following relations are obtained:

$$\left. \begin{aligned} K\Delta\Delta w &= z'' F'' - 2z' F'' + z'' F'' + p, \\ \Delta\Delta F &= -D[z'' w'' - 2z' w'' + z'' w'']. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Equations (16) deviate from equations (14), having the same physical sense but written using a system of surface co-ordinates referring to the lines of curvatures, by the terms $2z' F''$ and $2z' w''$. For a surface of translation $z' = 0$, using approximations $z'' \cong \frac{1}{R_1}$ and $z'' \cong \frac{1}{R_2}$, equations (16) turn into equations (14), while for $w = 0$ they turn into PUCHER's equations of Membrane Theory.

Equations (16) can also be set up taking the membrane forces as sought for functions. Taking into consideration relations

$$\Delta\Delta F = N_y'' - 2N_{xy}' + N_x'' \text{ and } K\Delta\Delta w = M_x'' + 2M_{xy}' + M_y''$$

the equations of equilibrium referring to the membrane forces and moments, furthermore, the condition of compatibility can be expressed by the membrane forces as follows:

$$\left. \begin{aligned} N_x' + N_{xy}'' + p_x &= 0, & N_y' + N_{xy}'' + p_y &= 0, \\ M_x' + M_{xy}'' &= 0, & M_y' + M_{xy}'' &= 0 \\ M_x'' + 2M_{xy}' + M_y'' &= z'' N_x + 2z' N_{xy} + z'' N_y + p_z, \\ N_y'' - 2N_{xy}' + N_x'' &= -\frac{D}{K} (z'' M_y + 2z' M_{xy} + z'' M_x). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Here, p_x , p_y and p_z denote the load components falling into the directions of the axes of co-ordinates. Relation (17) consisting of six equations determines the six internal forces unambiguously.

REFERENCES

1. PUCHER, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen. *Beton und Eisen*, **33**, pp. 298 (1934).
2. BÖLCSKEI, E.: Hajlított héjak általános elmélete (Universal Theory of Bent Shells, in Hungarian). *Magyar Építőipar*, 1959.
3. WLASSOV, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Berlin, Akademischer Verlag, 1956.
4. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. II. Auflage. Berlin, Springer Verlag, 1957.
5. RÜDIGER—URBAN: Kreiszyklinderschalen, Dresden, Teubner Verlag, 1954.
6. RÜDIGER: Zur Theorie elastischer Schalen. *Ingenieur Archiv* **28** (1959)

ÜBER DIE ALLGEMEINEN GLEICHUNGEN DER SCHALENSTATIK

K. SZMODITS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Differentialgleichungen der auf Biegung beanspruchten Schalen sind in verschiedenen Formen bekannt. Die obengenannten Gleichungen werden ein orthogonales Flächenkoordinatensystem benützend behandelt, die Fundamentalgrößen der Flächentheorie werden nicht angewendet. Als Sonderfälle werden die Gleichungen der flachen und der Tonnenschalen aus den allgemeinen Gleichungen abgeleitet. Außerdem werden die Folgen der Vernachlässigungen sowie die Gründe und die Auswirkungen der hieraus entstehenden Widersprüche untersucht.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA STATIQUE DES VOILES

K. SZMODITS

RÉSUMÉ

Les équations différentielles des voiles soumis à la flexion sont connues sous différentes formes. L'étude les examine dans un système de coordonnées orthogonales, sans utiliser les quantités fondamentales de la théorie des surfaces. A partir d'équations générales, l'auteur déduit, comme des cas particuliers, les équations des voiles plats et des voûtes en berceau. Il examine, en outre, les conséquences des omissions habituelles, ainsi que la cause et l'effet des contradictions qui en résultent.

ОБ ОБЩЕМ УРАВНЕНИИ СТАТИКИ ОБОЛОЧЕК

К. СМОДИЧ

РЕЗЮМЕ

Дифференциальные уравнения изогнутых оболочек известны в различных формах. В данной работе таковые трактуются в системе поверхностных ортогональных координат, без применения фундаментальных количеств теории поверхности, и из общих уравнений выводятся как специальные случаи — уравнения плоских оболочек и бочарных сводов. Кроме того, исследуются последствия пренебрежений, а также причины и последствия происходящих от этого противоречий.

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. XI. 23. — Terjedelem: 18,75 (A/5) ív, 89 ábra

63.56330 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

- Veres, I.* : The Extraction of the Vanadium Contents of Bauxite in the Course of Alumina Production Using the Bayer Process — Die Gewinnung des Vanadiums aus Bauxit bei der Tonerdegewinnung nach dem Bayer-Verfahren — Extraction du contenu de vanadium de la bauxite au cours de la fabrication d'alumine selon le procédé Bayer — *Вереш, И.*: Извлечение ванадия из боксита в процессе производства глинозема по Байеру 259
- Lovass-Nagy, V.* — *Szendy, K.* : Investigation of Transient Phenomena of Electrical Networks by Means of Matrix Calculus — Untersuchung der transienten Vorgänge in elektrischen Netzen mit Hilfe der Matrizenrechnung — Étude mathématique des phénomènes transitoires dans les réseaux électriques par calcul matriciel — *Ловаш-Надь В.* и *Сенди, К.*: Исследование переходных явлений электрических сетей с помощью матриц 269
- Winter, E.* : Long-Life Oxide Coated Cathodes on Tungsten-Cores — Oxydkathoden auf Wolframbasis mit langer Lebensdauer — Cathodes à oxydes de longue durée de vie sur support en tungstène — *Винтер, Э.*: Оксидные катоды высокого срока службы из вольфрама 279
- Éliás, E.* : Berechnung der Wirkungen des Kriechens mit Hilfe der Laplaceschen Transformation — Calculation of Creep by Using Laplace's Transformation — Calcul des effets du fluage à l'aide de la transformation de Laplace — *Элиаш, Э.*: Вычисление влияния ползучести с помощью трансформации Лапласа 305
- Helm, L.* : Statische Eigenschaften von relaisartigen pneumatischen Kraftschaltern — Static Characteristics of a Relay-Type Pneumatic Signal Converter — Les caractéristiques statiques d'un convertisseur de signaux de type relais — *Хельм, Л.*: Статические свойства релейных пневматических преобразователей сигналов 335
- Nagy, I.* : Theory of Three-Phase Bridge Self-Saturating Magnetic Amplifiers. II. — Theorie der dreiphasigen, selbstsättigenden Magnetverstärker in Brückenschaltung. II. — Théorie de l'amplificateur magnétique auto-saturant triphasé, monté en pont. II. — *Надь, И.*: Теория трехфазного самонасыщающегося магнитного усилителя мостовой схемы 345
- Rózsa, L.* — *Kovács, G.* — *Kohlmann, L.* : Stresses and Deformations due to Tangential Forces Acting along the Perimeter of a Circular Cut Set in an Elastic Plane — Spannungen und Deformationen infolge von Tangentialkräften an dem Umfange eines Kreisabschnittes in einer elastischen Ebene — Contraintes et déformations sous l'effet de charges tangentielles agissant sur le contour d'une ouverture circulaire située dans un plan élastique — *Рожса, Л.*, *Ковач, Г.* и *Колманн, Л.*: Напряжения и деформации кругового выреза в упругой плоскости от касательных сил, действующих вдоль контура 369
- Böloni, I.* : Some Functional Regularities of the Comminution Process in Hammer Mills — Einige Regelmässigkeiten des Mahlvorganges in Hammermühlen — Quelques régularités dans le régime de broyage des moulins à marteaux — *Бёлёни, И.*: Некоторые закономерности процесса измельчения молотковой дробилки 381

- Goschy, B.* : Berechnung der Übertragungslänge der Spannkraft nach der Bruchtheorie — Calculation of the Transmission Length of Pre-tensioned Wires Using the Ultimate Load Theory — Calcul de la longueur de blocage des fils précontraints d'après la théorie de la rupture — *Гоши, Б.* : Расчет длины передачи усилия 399
- Vajda, Gy.* : A Possible Explanation for the Influence of Temperature on Absorption — Eine mögliche Erklärung für die Abhängigkeit der Absorption von der Temperatur — Une explication possible de l'influence de la température sur l'absorption — *Вайда, Д.* : Возможное объяснение температурной зависимости абсорбции 409
- Freudenthal, A. M.* : One-Dimensional Response and Coefficient of Thermal Expansion in Time-Sensitive Materials — Das ein-dimensionale Verhalten und der Koeffizient der Wärmeausdehnung zeit-empfindlicher Materialien — Comportement unidimensionnel du coefficient de dilatation thermique des matériaux visco-élastiques — *Фрейденталь, А. М.* : Одноразмерность теплового коэффициента расширения вискоэластичных материалов 415
- Boldizsár, T.* : Ergänzungen zur Lösung einiger Probleme der Wetterkühlung tiefer Gruben — Complements on the Solution of some Problems for the Cooling of Deep Mines — Contribution à la solution de quelques problèmes de ventilation dans les mines profondes — *Больдижар, Т.* : Дополнение к решению проблемы охлаждения воздуха глубоких шахт 451
- Szmodits, K.* : General Equations of Shell Analysis — Über die allgemeinen Gleichungen der Schalenstatik — Les équations générales de la statique des voiles — *Смодич, К.* : Об общем уравнении статки оболочек 459

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

54, - Ft

Index: 26.025