

2157

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XL

FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

TOMUS XL

I N D E X

- Anop, K.*: Система кривых регулирования русла рек. Часть 2. Гипертангентоид —
Apor, K.: Das System der Flussbettregulierungskurven. II. Die Hypertangente
 — The System of River-Bed Regulation Curves II. The Hypertangentoid — Le
 système des courbes de régularisation des lits de rivière II. L'hypertangente. 301
- Balogh, A.*: Einige spezielle Formen der charakteristischen Gleichung bei Torsions-
 schwingungen — Special Form of the Torsional Vibration Frequency Equation
 — Quelques formes spéciales de l'équation caractéristique des oscillations de
 torsion — *Балог, А.*: Некоторые специальные формы характеристических урав-
 нений торсионных колебаний 105
- Bardócz, Á.*: Neues System hoher Präzision zur zeitlich aufgelösten Spektroskopie —
 A New High Precision System for Time Resolved Spectroscopy — Une nouvelle
 méthode de haute précision pour produire des spectres résolus dans le temps —
Бардоц, А.: Новая особо точная система для разложенной во времени спек-
 троскопии 179
- Barta, J.*: Theorems on the oscillations of systems with finite degrees of freedom — Sätze
 über die Schwingungen der Systeme von endlichen Freiheitsgraden — Théorèmes
 sur les vibrations d'un système de degré de liberté fini — *Барта, Й.*: К колеба-
 ниям систем с конечной степенью свободы 441
- Berceli, T.*: Travelling-Wave Amplifiers for Microwave Measurements — Wanderfeld-
 verstärker für Mikrowellen-Messungen — Amplificateurs à onde progressive pour
 mesures aux hyperfréquences — *Берцели, Т.*: Усилители с бегущей волной
 для микроволновых измерений 169
- Brozák, F.*: The Limit Height of Capillary Rise in Capillary Tubes of Variable Sections
 — Der Grenzwert der Kapillarszension in Kapillarröhren von verschiedenem
 Querschnitt — La valeur limite de l'ascension capillaire dans les tubes capillaires
 de section variable — *Брозак, Ф.*: Предельное значение повышения уровня
 в капиллярных трубках переменного профиля 413
- Csonka, P.*: Membrane Shells with Perfectly Free Edges — Membranschalen mit einem
 vollkommen freien Rand — Voiles minces à rive sans appui — *Чонка, П.*:
 Мембранные оболочки с совершенно свободным краем 151
- Dékány, S.*: Deux nouvelles méthodes pour susciter la vision des couleurs, et examen
 de leur possibilité d'emploi dans la technique cinématographique et la télévision
 — Untersuchung von zwei neueren Farbenseheneffekten und ihrer Anwendungs-
 möglichkeit in der Filmtechnik, beziehungsweise in der Television — Two New
 Methods to Produce Colour Vision and an Investigation on the Possibility of Using
 Them in Film Technics and TV — *Декань, Ш.*: Два новых метода, создающих
 различение цветов, и исследование их применимости для киносъеомок и для
 телевидения 47

- Halmos, K., Lipovetz, I. und Proszk, J.* : Versuche zur Herstellung von mit Silikon hydrophobisierten Dampfkondensatoroberflächen und die Untersuchung deren Wärmeübertragungsverhältnisse — Tests on Steam-Condenser Surfaces Hydrophobized with Silicones and the Investigation of their Heat Transfer Conditions — Essais de préparation de surfaces de condenseurs de vapeur hydrophobisées par silicone, et étude de leur transmission de chaleur — Хальмош, К., Липовец, И. и Прост, И. : Опыты по получению пароконденсаторных поверхностей, гидрофобизированных силиконом и исследование условий теплопередачи этих поверхностей 143
- Hevesi, Ю.* : Вопросы режима работы и использования основных фондов производства с точки зрения перспективного планирования развития промышленности — Hevesi, Gy. : Über die Fragen der Arbeitsordnung und Kapazitätsausnutzung der Betriebsanlagen im Hinblick auf die Perspektivplanung unserer Industrieförderung — On the Rational Utilization of Work Force and of the Plant Capacity in our Long-Range Planning of Industrial Development — Les problèmes d'organisation du travail et d'exploitation du fonds fixe, du point de vue de la planification perspective de notre développement industriel 3
- Hoffmann, A.* : Anwärmen zylindrischer Körper entsprechender Länge bei veränderlicher Ofentemperatur — Heating of a Long Cylinder in a Furnace with Changing Temperature — Chauffage d'un cylindre long dans un four à température variable — Хоффманн, А. : Нагрев длинного цилиндра при переменной температуре печи 73
- Hoffmann, A.* : Untersuchung des Heizvorganges an zylindrischen Körpern bei veränderlicher Ofentemperatur und veränderlichem Wärmeübergangskoeffizienten — Research on the Heating of a Long Cylindric Body in an Oven with Changing Temperature and on the Condition of a Variable Coefficient of Heat Transfer — Examen du processus d'échauffement de corps cylindriques longs, à température de four et coefficient de transmission variables — Хоффманн, А. : Исследование процесса накаливания длинных цилиндрических тел при переменных температуре печи и коэффициенте теплопередачи 285
- Horváth, Z. and Weber, J.* : The Parkes Process with Zinc Addition in Two Stages Granting Minimum Zinc Consumption — Eine Arbeitsmethode mit zweimaligem Zinkzusatz und minimalem Zinkverbrauch beim Parkes-Verfahren — Méthode de travail à deux additions de zinc, assurant une consommation minimum de zinc dans le procédé de Parkes — Хорват, З. и Вебер, Й. : Способ двойного оцинкования при минимальном использовании цинка методом Паркеса 263
- Kollár, L.* : Torsional Buckling of Thin-Walled Curved Bars (Shell-Arches) — Die Drillknickung von Schalenbögen — Flambage à torsion des voiles en arc — Коллар, Л. : Скручивающий прогиб оболочечных арок 337
- Lykow, A. W.* : Die Kenntnis des Wärme- und Stoffüberganges als Grundlage der Trocknungstheorie — The Heat and Mass Transfer, Bases for the Theory of Drying — L'échange de chaleur et de matière, base de la théorie du séchage — Лыков, А. В. : Тепло- и массообмен как основа теории сушки 201
- Nagy, G. Á.* : Influence de la distance entre l'objet essayé et le générateur, dans les essais au choc — Berücksichtigung des Einflusses der Entfernung zwischen Prüfling und Generator bei Stoßversuchen — Consideration of the Distance between the Test Object and the Shock Generator in Shock Wave Tests — Надь, Г. А. : Учет влияния расстояния между испытуемым предметом и генератором импульсного напряжения при испытаниях импульсным напряжением 383
- Paczolay, Gy.* : On the Unevenness of Current Distribution among the Stubs of Aluminium Electrolytic Cells — Ungleichmäßigkeit der Stromverteilung in den Anoden mit vertikalen Stromzuführungs-Bolzen der Aluminium-Elektrolyseöfen — L'inégalité de la répartition du courant aux anodes à goujons verticaux des cuves d'électrolyse à aluminium — Пацолай, Д. : Неравномерность анодного распределения тока алюминиевых электролизных ванн с вертикальными штырями 323

- Strach, L., Korger, M. und Choc, M.* : Trocknungsforschung des Tschechoslowakischen Staatlichen Forschungsinstitutes für Wärmetechnik — The Investigations on Drying of the Czechoslovak Research Institute of Heat — Recherches sur le séchage à l'Institut de la Chaleur Tchécoslovaque — *Страх, Л., Коргер, М. и Хоч, М.* : Исследования Чехословацкого теплотехнического исследовательского института в области теории сушки 355
- Szendy, Ch.* : Basic Equations of the M. H. D. Generator — Grundgleichung des M. H. D. Generators — Équations de base du générateur M. H. D. — *Сенди, К.* : Основные уравнения генератора МНД 431
- Szidarovszky, J.* : Examination of Accuracy of the Engesser—Vianello Method and the Rayleigh Quotient — Eine Untersuchung der Genauigkeit der Methode von Engesser—Vianello und des Quotienten von Rayleigh — L'exactitude de la méthode d'Engesser—Vianello et du coefficient de Rayleigh, utilisés pour la détermination de la force critique — *Сидаровски, Я.* : Метод Энгессер—Вианелло для определения критической силы и проверки точности производной Реле 25
- Tóth, G.* : Oscillographic Study of the Breaking of Leather Fibres — Untersuchung des Reißens von Lederfasern mit Hilfe des Oszillographen — Étude de la rupture des fibres de cuir au moyen de l'oscillographe — *Тот, Г.* : Исследование разрыва кожных волокон с помощью осциллографа 225
- Vajda, Gy.* : The Part Played by the Capacitive Component in the Measurement of Absorption Current — Die Rolle der kapazitiven Komponente bei der Untersuchung der Absorption — Le rôle de la composante capacitive dans l'étude de l'absorption — *Вайда, Д.* : Роль емкостного компонента при исследовании абсорбции . 237
- Winter, E., Budincsevičs, A. and Frigyes, B. Eva* : Formation of Solid Solutions of Alkaline Earth Metal Carbonates — Bildung von festen Lösungen der Erdalkalimetall-Carbonate — Recherches sur la formation des solutions solides des carbonates de métaux alcalino-terreux — *Винтер, Э., Будинчевич, А. и Фригеш, Б. Е.* : Исследования процесса образования твердых растворов земельно-щелочных карбонатов 127
- Замбо, Я.* : О выборе производственной мощности горных предприятий — *Zambó, J.* : Wahl der Produktionskapazität von Bergbaubetrieben — Selection of the Production Capacity of Mining Plants — Le choix de la capacité de production des mines 423

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XL



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962

ACTA TECHN. HUNG.

ВОПРОСЫ РЕЖИМА РАБОТЫ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОСНОВНЫХ ФОНДОВ ПРОИЗВОДСТВА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

академик Ю. ХЕВЕШИ

ДИРЕКТОР НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ГРУППЫ ПО ЭКОНОМИКЕ
ПРОМЫШЛЕННОСТИ А. Н. В.

I

Страны, строящие социализм, в большой мере заинтересованы в максимальном экстенсивном использовании основных средств производства, в пределах возможностей, определяемых всеми остальными экономическими условиями — потребностями, сырьем, обеспеченностью рабочей силой, требованиями планомерных пропорций и т. д. Это имеет весьма значительные и, в основном, общеизвестные преимущества, как например: рост производства без значительных капитальных вложений, связанное с этим снижение себестоимости, приведение в ближайшее соответствие физического и морального износа оборудования и тем самым ускорение технического прогресса, значительная экономия капитальных вложений при строительстве новых сооружений и т. п.

Очевидно также и то, что социалистическое плановое хозяйство имеет гораздо больше возможностей для наиболее экономичного, максимального использования основных средств производства, чем капиталистическое хозяйство.

Несмотря на эти бесспорные преимущества и возможности, использование основных фондов, одним из основных показателей которого является число смен, в среднем по народному хозяйству стоит на сравнительно низком уровне; в нашей стране это число приблизительно 1,4. Несмотря на многие, принятые особенно за последнее время, важные решения этот показатель растет чрезвычайно медленно. Подобное положение сложилось и в других странах народной демократии и даже в СССР. Это объясняется прежде всего тем, что такое увеличение числа смен, которое ощущалось бы и в среднем по всему народному хозяйству, представляет собой весьма сложную и трудную задачу.

Трудности эти — экономического и организационного порядка — достаточно известны; здесь я хочу указать только на то, что увеличение количества смен или вообще изменение режима работы во времени (напр. переход к непрерывному производству) в значительной мере влияет на условия работы и жизни трудящихся. Многосменная работа и непрерывный режим работы, несомненно, влечет за собой больше трудностей для трудящихся,

чем односменная работа и нормальная календарная организация работы. Принятие на себя трудящимися таких трудностей добровольно и без проявления особого недовольства возможно только в том случае, если и при многосменной работе будут обеспечены необходимые социальные условия труда и более сложный режим работы так компенсируется либо сокращением рабочего времени, либо оплатой, либо прочими льготами, что трудящиеся осознают выгодность такого режима работы. Это касается и инженерно-технического и административного персонала, так как многосменная и непрерывная работа требует более сложной организации производства.

До сих пор на практике это требование учитывалось далеко недостаточно, что, на мой взгляд, является одним из основных причин тех затруднений, которыми сопровождалось до настоящего времени повышение экстенсивного использования основных средств производства путем введения соответствующего режима работы.

II

Все вышеуказанные затруднения, включая сюда и затруднения социального характера, могут быть преодолены при проектировании новых сооружений, так как в этом случае заранее могут быть учтены все требования режима работы, признанного как с технической и экономической, так и с социальной точек зрения наиболее целесообразным. Наряду с этим значение определения наиболее целесообразного режима работы новых сооружений возрастает при перспективном планировании на ближайшие два десятилетия особенно в связи с необходимостью значительного снижения за этот же период дневного, недельного и годового рабочего времени трудящихся. Ближайшим этапом сокращения рабочего времени в нашей стране должен быть переход в период третьего пятилетнего плана с восьмичасового рабочего дня на семичасовой, т. е. снижение 48-часовой рабочей недели до 42 или даже 40-часовой, а за время следующих четвертой и пятой пятилеток предполагаем перейти на шестичасовой рабочий день.

Однако, насколько важным и желательным представляется в интересах повышения уровня жизни сокращение средней продолжительности рабочего дня и годового времени работы, настолько нежелательным, даже недопустимым является одновременное снижение времени использования средств производства. Между тем, как бы не повышалась производительность труда, тем более нужно также стараться достигнуть технически и экономически оптимального экстенсивного использования основных средств, так как в этом случае достигается большая эффективность. Ни в коем случае нельзя противопоставлять, как альтернативы, вопросы повышения интенсивного и так называемого экстенсивного, т. е. использования во времени средств производства. При современных темпах развития техники и ожи-

даемых в двадцатилетний плановый период еще более быстрых темпах очень важным является и то, что повышенная экстенсивность использования средств производства позволяет быстрее заменить их более высокопроизводительными и совершенными.

Наряду с сокращением рабочего времени чрезвычайно важным требованием является улучшение условий труда рабочих, способствующее существенному улучшению их личных жизненных условий. С этой точки зрения наибольшее значение имело бы прекращение или избежание ночной работы на всех тех участках производства, где этого по технологическим или по особо важным экономическим причинам не требуется.

Прекращение ночных смен необходимо компенсировать, хотя бы отчасти, в неполностью или вовсе неиспользованные промежутки времени в неночные часы.

На мой взгляд сокращение рабочего времени должно непременно сопровождаться повышением экстенсивности использования основных средств, повышением числа смен, или — где это представляется более целесообразным — введением непрерывной работы, или же одновременным применением обоих режимов. Вытекающие из этого весьма значительные экономические выгоды (повышенная доходность, снижение себестоимости, экономия капиталовложений и т. п.) позволят сократить рабочее время много быстрее, чем это было бы возможным при неизменности «традиционного» режима работы. Это обстоятельство облегчает изменение режима работы, т. к. в этом случае сокращение рабочего времени представляет собой не только кажущуюся, но и эффективную компенсацию за взятые на себя трудности, связанные с более сложным режимом работы.

Экономические выгоды такого режима могут обеспечить не только сохранение уровня заработной платы при сокращенном рабочем времени, но и дают возможность для достижения и других значительных выгод социального характера.

На основании вышеприведенных соображений и сравнения нижеизложенных многочисленных вариантов, для *новых сооружений*, вводимых в эксплуатацию в третьей и четвертой, а возможно даже частично, уже и во второй пятилетке (1960—1965 гг.), в качестве метода перехода на 42-часовую неделю, считаем целесообразным рассмотреть в первую очередь такого двухсменного, непрерывного, т. е. включающего и воскресенья, режима работы при котором первая смена 8 часовая, вторая — 7 часовая, и трудящиеся кроме общегосударственных праздничных дней (8 в году) получают после каждых четырех рабочих дней один выходной день (система 4 + 1). Ввиду того, что экономические, а также прямые и косвенные социальные выгоды непрерывного режима работы не общеизвестны, и, вопрос о работе в воскресенье представляется, в большинстве случаев, только со своей невыгодной стороны, хочу уже здесь указать на то, что такой режим работы

Таблица I
Режим работы

Смены:	1-ый день		2 день		3 день		4 день		5 день		6 день													
I	a	b	f	g	e	b	j	g	a	e	f	j	a	b	f	g	a	b	f	g	c	d	h	i
II	c	d	h	i	c	d	h	i	c	d	h	i	e	d	j	i	c	e	h	j	a	b	f	g
От- дых	e		j		a		f		b		g		c		h		d		i		e		j	

развития техники во все большей мере требует, чтобы как можно больше рабочих могли обслуживать несколько рабочих мест. Правда, данный рабочий меняет смену через каждые 3 дня, но т. к. обе смены дневные, то частота сменности не имеет существенного значения.

Ниже приводятся для сравнения данные годового режимного фонда времени по различным режимам:

1. Одна 8-часовая смена (прерывное производство) $(6 + 1) 48 \times 52 = 2496$;
— $64 (8 \times 8) = 2432$ часа
2. Две 8-часовые смены (прерывное производство) $(6 + 1) 96 \times 52 = 128$
часов = 4864 часа
3. Одна 7-часовая смена (прерывное производство) $(6 + 1) 42 \times 52 = 2184$ —
— $7 \times 8 = 2128$ часов
4. Две 7-часовые смены (прерывное производство) = 4256 час.
5. Одна 8-часовая смена (непрерывное производство) $(365 - 8) = 357 \times$
 $\times 8 = 2856$ часов.
6. Две 8-часовые смены (непрерывное производство) = 5712 часов.
7. Одна 7-часовая смена (непрерывное производство) $(365 - 8) = 357 \times$
 $\times 7 = 2499$ часов.
8. Две 7-часовые смены (непрерывное производство) = 4998 часов.
9. Одна 8-часовая + одна 7-часовая смена
непрерывное производство = 2856
2499
= 5355

Сопоставляя балансы времени отдельных вариантов получаем:

$$\begin{aligned} 9/4 &= 126\% \\ 8/4 &= 117\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9/2 &= 111\% \\ 6/4 &= 134\% \end{aligned}$$

Такое сравнение результатов очень показательно; оно наглядно выявляет неправильность такого частого и поверхностного взгляда, в соответствии с которым переход с 6-ти дневной работы на 7-дневную, т. е. прерыв-

ную работу может дать увеличение выпуска продукции лишь на 17%. Как видно из приведенных цифр, при предлагаемом методе с одновременным сокращением продолжительности рабочей недели эта разница составит не 17, а 26%; а если не укоротить вторую смену, то она может достигнуть и 34%. Рассмотрение последнего варианта представляется особо целесообразным и потому, что на заводах, работающих в настоящее время по прерывному режиму три 8-часовые смены, при переходе к среднему 7-часовому рабочему времени, он позволил бы одновременно прекратить 3-ю, ночную смену, при практически ничтожном уменьшении годового режимного фонда времени предприятия. Этому соответствовала бы четырехдневная «рабочая неделя», при условии, что после каждых трех 8-часовых рабочих дней следует один выходной день, что может осуществляться, конечно, и в виде $6 + 2$, если это представляется более выгодным для рабочих. Годовой фонд рабочего времени трудящихся в этом случае следующий:

10. $(365:4 = 91,2) \times 3 \times 8 = 2188,8$ и после вычета 8 праздничных дней (64 часа) — 2124,8 часа, что всего на 4,8 часа в год (т. е. пренебрегаемо) меньше, чем в случае 42-часовой рабочей недели.

Наиболее целесообразно организация работы может осуществляться следующим образом:

Таблица II

Смена	1-ый день	2-ой день	3-й день	4-й день	5-й день*	Примечание
I	$a_1 b_1 c_1$	$a_1 d_1 d_2$	$a_2 d_1 d_2$	$b_2 d_1 d_2$	$a_2 b_2 c_2$	* смена
II	$a_2 b_2 c_2$	$a_2 b_2 c_2$	$a_1 b_1 c_1$	$c_2 b_1 c_1$	$a_1 b_1 c_1$	
Отдых	$d_1 d_2$	$b_1 c_1$	$b_2 c_2$	$a_1 a_2$	$d_1 d_2$	

При таком режиме работы из 8 рабочих двое (b_2 и c_2) в течение каждых трех дней один раз меняют рабочее место.

Как это уже указывалось выше, может быть желательным в некоторых случаях, хотя бы временно, увеличить количество выходных дней, происходящих на воскресенья. Такое увеличение может быть достигнуто отчасти за счет прекращения в воскресные дни вторых смен. При 8-часовом ($4 + 1$) режиме работы (6-ой номер по порядку в сводной 3-ей таблице) в этом случае по воскресеньям из 10 рабочих 6 имеют выходной день, следовательно число воскресных выходных дней составляет $52 \times 0,6 = 31,2$ в год по сравнению с 10,4 в варианте, по которому и в воскресные дни работают в 2 смены. Число часов работы одного рабочего в год сокращается на

$20.8 \times 8 = 166.4$ часа, т. е. среднее число часов работы в неделю падает с 44,9 до 41,5, что практически соответствует 7-часовому рабочему дню.

Режимный фонд времени сокращается на $52 \times 8 = 416$ часов, т. е. до 5.296 часов в год. Если при режиме работы (4 + 1) вторая смена 7-часовая (11-ый номер п. п. в таблице), то при прекращении второй смены в воскресные дни, число часов работы одного рабочего в год сокращается на $20.8 \times 7 = 145.6$ часа, а среднедельное рабочее время его — на 2.8 часа, т. е. с 42.1 до 39.3 часа, что практически соответствует рабочему времени, равному 6 1/2 часов. Режимный фонд времени сокращается на $52 \times 7 = 364$ часа в год, т. е. до 4.991 часа.

При 8-часовом (3 + 1) рабочем режиме (8-ой номер п. п. в сводной таблице), опуская вторую смену по воскресеньям, количество выходных дней, приходящихся на воскресные дни, повышается с 13 до 32.5. (по воскресеньям из 8 рабочих работают 3.) Годовое время работы одного рабочего сокращается на 156 часов, а среднедельное — на 3 часа, т. е. с 42 до 39 часов. Режимный фонд времени сокращается на $52 \times 8 = 416$ часов до 5.296 часов.

Возможны, конечно, и промежуточные решения, как например, прекращение в каждое второе воскресенье второй смены, или раз в месяц прекращение второй или обеих смен, и т. д.

В таблице 3-й приведены характерные данные 18 различных вариантов режимов работы, которые представляют собой легко сопоставимые исходные данные для расчетов экономичности применения какого-либо из них.

*

В своей речи, произнесенной 10. V. с. г. на всесоюзном совещании советских железнодорожников, товарищ Хрущев указал на недопустимость того обстоятельства, что подавляющая часть машиностроительных заводов работает в одну смену. Он одновременно обратил внимание Партии и хозяйственных организаций, а также и широких масс трудящихся на необходимость немедленного тщательного обсуждения и подготовки вопроса о переходе в среднем на двухсменную работу. В связи с этим я хочу указать на то, что — как это явно видно и из таблицы 3 — *в качестве первого шага на пути к значительному повышению экстенсивного использования основных средств легче всего осуществить переход к непрерывной работе.* Это объясняется не только тем, что 15—30%-ое расширение производства обеспечить рабочей силой, материалами, заказами и т. п., сравнительно гораздо легче, чем при скачке в 80—100%, необходимом в случае введения новой смены, но и главным образом тем, что удлинение недели работы предприятия на один день, даже если одновременно удлиняется на один час и рабочий день, не требует никаких изменений существующего технического режима производства. В этом случае дополнительные капиталовложения могут потребоваться

Таблица III

Сравнение режимов работы
(без учета годовых отпусков)

№ п/п	Характеристика периода работы					Число часов работы одного рабочего		Число выходных дней одного рабочего		Число дней работы одного рабочего в год 1)	Режимный фонд времени в днях	Режимный фонд времени в часах	Степень использования мощности по сравнению			Примечания
	число часов работы в сутки	число рабочих дней	число выходных дней	Количество смен в сутки		средне годовое 1)	средне недельное 2)	всего в год 1)	в т. ч. воскрес. 2)				с 2. в %	с 4. в ‰	с 15. в ‰	
				в будние дни	в воскресные дни											
1	8	6	1	1	—	2432	48	60	52	305	305	2432				
+ 2	8+8	6	1	2	—	4864	48	60	52	305	305	4884				
3	7	6	1	1	—	2128	42	60	52	305	305	2128				
+ 4	7+7	6	1	2	—	2128	42	60	52	305	305	4256				
5	8	4	1	1	1	2272	44,9	81	10,4	284	257	2856				
+ 6	8+8	4	1	2	2	2272	44,9	81	10,4	284	357	5712				
7	8	3/6	1/2	1	1	2125	42	99,2	13	266	357	2856				
+ 8	8+8	3/6	1/2	2	2	2125	42	99,2	13	266	267	5712	117	134	95	
9	7	4	1	1	1	1988	39,4	81	10,4	284	357	2499				
10	7+7	4	1	2	2	1988	39	81	10,4	284	367	4998				
+11	8+7	4	1	2	2	2130	42,1	81	10,4	284	357	5355	110	126		
+12	8+8	4	1	2	1	2105	41,5	101	31	264	357	5296	108,3	124		В воскресенье работает только первая смена
13	8+7	4	1	2	1	1984	39,3	101	31	264	357	4991	102	117		«
14	8+8	3	1	2	1	1969	39,0	117	32,6	247	357	5296	108,3	124	87,5	«
15	7+7+7	6	1	2,2/3	—	2016	40,0	77	52	288	305	6041				В субботу только 2 смены
16	8+8	4	1	2	1 1/2	2189	43,0	91,4	20,8	274	267	5504	113	129	91,5	В каждое второе воскресенье только одна смена
17	8+7	4	1	2	1 1/2	2057	40,7	91,4	20,8	274	357	5173	106	112	85,5	«
18	8+8	3	1	2	1 1/2	2087,4	41,6	103,9	17,7	261,1	357	5504	113	129	91,5	«

только в связи со специальными мероприятиями, связанными с работой в воскресенье (питание, дежурство в яслях и т. п.). При переходе на много-сменную работу это может иметь место только в редких случаях.

III.

Для изучения социальных вопросов, связанных с увеличением числа смен и непрерывностью производства, в рамках нашей Исследовательской группы были начаты специальные социологические исследования, о которых будет сообщено в дальнейших работах. Однако, я считаю необходимым осветить уже здесь некоторые особенно важные вопросы социального характера, связанные с вышеизложенным.

Сюда относится, в первую очередь, вопрос о сокращенном рабочем времени или сокращенной рабочей неделе, связанный с переходом на 7-часовое рабочее время. При 8-часовой продолжительности рабочего дня, естественно, о сокращенной неделе не может быть и речи. В отдельных местах, где у нас введена 5-дневная рабочая неделя при 9-ти часовой продолжительности рабочего дня, желательно как можно скорее ликвидировать такой порядок, так как опыт показывает, что рабочий день свыше 8 часов является вредным как с точки зрения здравоохранения, так и с точки зрения производительности труда. Однако, при среднем 7-часовом рабочем времени подавляющее большинство трудящихся, несомненно, предпочтет укорочение рабочей недели. Так например, в СССР на территории Свердловского Совнархоза при опросе общественного мнения, организованном в связи с сокращением рабочего времени, из опрошенных 3411 рабочих 52,9% высказалось за 5-дневную рабочую неделю, а 38,4% — за продление отпуска. За сокращение ежедневного рабочего времени высказалось лишь 3,7% рабочих. Инженерно-технические работники высказались примерно таким же образом. Из 800 инженерно-технических работников 526 предложило сократить количество рабочих дней, 189 — продлить годовой отпуск, и только 85 из них были за сокращение ежедневного рабочего времени.* Точно такой же опыт имеется у нас на некоторых заводах, где переход на 7-часовой рабочий день при одновременном введении непрерывного производства частично уже завершился.

Одним из наибольших затруднений при введении непрерывного производства, несомненно, является серьезная приверженность трудящихся масс к привычной форме работы и жизни. Так например, по мнению руководства Профсоюза рабочих текстильной промышленности необеспечение совместного отдыха всех членов семьи в каждое воскресенье может вызвать разлад в семейной жизни. На их взгляд такой минус, даже если речь идет только

* Труд и заработная плата, 1961 г. № 9.

о каждом втором воскресеньи (об этом и шла речь), не компенсируется ни сокращением рабочего времени, ни повышением заработка, никакими бы то ни было другими социальными льготами. В то же время нашими расчетами, принятыми и руководителями текстильной промышленности, было показано, что при непрерывном производстве работницы имели бы после 6-дневной работы не один, а два дня отдыха, при сохранении теперешней продолжительности их рабочего дня и их заработка. Они получили бы таким образом дополнительно 35 полных дней свободного времени, которое могли бы использовать для значительного улучшения семейной и культурной жизни, для самообразования и т. п. Примерно на 10% уменьшился бы объем их ночной работы, причем народному хозяйству это принесло бы также значительную пользу.

В связи с этим считаем необходимым уже здесь указать на следующие факты и соображения:

а) В Венгрии, из количества, примерно, в 2.6 миллиона человек, занятых в социалистическом секторе, имеется около 400 000 трудящихся, работа которых, в пределах законного недельного рабочего времени, распространяется и на воскресные и прочие нерабочие дни.

Количество таких трудящихся составляет:

в промышленности	70—80 тыс. чел.
на транспорте	120—130 «
в торговле	50—60 «
в сельском хозяйстве	40—50 «
в области здравоохранения	30—40 «
в области просвещения	20—30 «
в области коммунального обслуживания	10 «
на сторожевой службе	50 «
(без вооруженных сил)	

Всего: 390—450 тыс. чел.

Определенная часть указанного количества трудящихся работает на таком режиме по технологическим причинам, а именно:

Название	Общая численность	В том числе на непр. режиме работают	Примечания
I. Государств. промышлен.			
1. Металлургия	75 000	26 000	
домны		5 000	
мартеновск. цехи		5 000	
прокатные цехи		8 000	
прочее		8 000	
2. Электроэнергия	33 600	4 000	
3. Химич. промышлен.	44 000	15 000	
В том числе:			
алюминиев. промыш.		2 000	

Название	Общая численность	Б том числе на непр. режиме работают	Примечания
4. Пром. стройматериалов	65 200	4 000	Печи кирпичной, цементной, керамической и стекольной промышленности, стеклодувные заводы
5. Пищевая промыш.	111 000	22 000	
В том числе:			
производство сахара		13 000	в сезоне
производство пива		2 500	
молочная пром.		1 000	
II. Сельское хозяйство			
животноводство	50 000	45 000	Уход за животными, откорм.

Следовательно, по технологическим причинам по непрерывному режиму работает в народном хозяйстве 100—120 тыс. чел. Учитывая задачи, стоящие перед народным хозяйством по развитию указанных областей, а также и перспективное сокращение рабочего времени, общее количество работающих на этих участках трудящихся в дальнейшем будет еще увеличиваться.

Удовлетворением материальных, культурных, санитарных и т. п. потребностей населения в воскресные и нерабочие дни занимаются следующие категории:

Название	Общая численность	Трудящиеся, работающие и в воскр. и нераб. дни	Примечания
I. Гос. промышленность			
1. Печатная пром.	13 000	1 000	печатники
2. Пищевая пром.		3 000	приемщики молочной продукции
II. Санитарная служба	108 000	38 000	
В том числе:			
врачи	6 000	6 000	
сестры, операционный персонал и т. п.		21 000	
спец. педагоги		2 500	
III. Транспорт	306 000	130 000	
В том числе:			
железнодорожный		60 000	машинисты, кондукторы, персонал ж/д. станций и ремонтные бригады

Название	Общая численность	Трудящиеся, работающие и в воскр. и нераб. дни	Примечания
городской транспорт	24 000		
паровозная служба	15 000		
		15 000	доставка почты, инструментальщики, персонал телефонной службы
IV. Торговля	186 000	55 000	
В том числе:			
трест ресторанов		50 000	
V. Культурное обслужив.			
В том числе:			
воспитательн. дома		3 200	
общезития, театры, кино и т. п.		4 000	
дома отдыха, журналисты, продавцы газет		15 000	
VI. Прочее обслуживание		10 000	водо-, газо-, электроснабжение, бани и т. п.
VII. Швейцары, сторожи, дворники ..		50 000	

400—500 000 трудящихся — это означает по крайней мере 250—300 000 семей. Мы не располагаем сведениями о том, что условия жизни этих семей в какой бы то ни было степени менее упорядоченные, чем семейств трудящихся, выходные дни которых всегда приходится на воскресенья. Этот установленный опытом факт уже сам по себе опровергает необоснованное утверждение, по которому переход к непрерывному производству приводит к массовому разрушению семейной жизни. Жизнь трудящихся, работающих по такому режиму, несомненно, имеет некоторые неудобства по сравнению с теми, у которых все члены семьи вместе отдыхают по воскресеньям. Однако, эти недостатки ни в коем случае не являются настолько значительными, чтобы противопоставляемые им такие существенные преимущества, как сокращение рабочего времени и косвенное значение для трудящихся пользы, приносимой народному хозяйству непрерывным производством, можно было бы отвергнуть одним взмахом руки. В то же время непрерывное производство, комбинированное с сокращенной рабочей неделей, обладает и специфическими социальными преимуществами. Таковыми являются например: весьма значительная часть трудящихся — в столице около 20% — ездит на работу из провинции и ежедневно проводит около 2—3 часов на поезде. Им небезразлично, не приезжают они в город один раз после 6-дневной работы, или же два раза. И в пределах больших городов имеются настолько

большие расстояния, что даже для городских жителей это связано со значительной экономией времени. То обстоятельство, что часть выходных дней приходится на будни, дает возможность трудящимся устраивать свои дела, из-за которых в противном случае они, возможно, были бы вынуждены отсутствовать с работы. Легче делать также и покупки в будние дни. Несомненно снизится и количество рабочих дней, пропускаемых по болезни, причем, по всей вероятности, это снижение будет большим по сравнению с увеличением выходных дней. Гораздо проще в этом случае и посещение мест развлечения, культурных заведений и организация экскурсий. В семейной жизни неопределимо большое значение имеют для матери семейства два выходных дня. Наконец, следует отметить, что если в воскресные дни работа ведется только в одну смену, или же рабочий в воскресенье работает как раз в первую смену, то кроме выходных дней, приходящихся периодически на воскресенья, вторую половину всех остальных воскресных дней он может проводить вместе с семьей.

В то же время следует подчеркнуть, что ни в коем случае нельзя упускать из вида, а наоборот, особое внимание должно уделяться оптимальному удовлетворению потребностей социального характера, связанных с многоменной работой и непрерывным производством (как например питание, дежурство в яслях, медицинская служба и т. п.) еще до осуществления перехода к новому режиму работы.

IV.

Мне хотелось бы сказать еще несколько слов об опыте всеобщего введения непрерывного производства в СССР в 1929—1931 гг., безуспешность которого, и главным образом, неправильное объяснение причин ее до настоящего времени затрудняет установление режимов работы, способствующих наиболее быстрому развитию промышленности.

Видные советские экономисты по праву указывают на то, что истории развития советского народного хозяйства и критическому обсуждению отдельных его фаз до настоящего времени не уделялось должного внимания. Так например, С. Первушин, в своей статье «Политэкономия и экономическая политика» пишет: «Недооценкой общих проблем объясняется и то, что у нас почти не исследуется история экономической науки за советский период, слабо обобщается богатейший опыт социалистического хозяйствования. Например анализ истории планирования не продвинулся дальше истории плана Гозлро.»*

Подобные исследования являются особенно желательными и потому, что ряд организационных форм прошлого, исходивших из принципиально

* «Коммунист», 9, 1961 г.

правильных соображений, но оказавшихся в свое время при господствовавших исторических условиях безуспешными или даже вредными, могли бы быть применены сейчас в изменившихся и гораздо более развитых условиях с большим успехом. Сюда относится несомненно и период перехода к непрерывному производству и непрерывной рабочей неделе 1929—1932 гг., опыт которого как раз в настоящее время, в период перехода к коммунизму, заслуживает все больший интерес экономистов. Анализ этого примерно двухлетнего периода особенно интересен как для экономистов, так и для историков потому, что этот период перехода к непрерывной рабочей неделе и непрерывному производству был таким охватывающим промышленность всей страны социологическим и экономическим экспериментом, подобного которому по объему, размерам и многосторонности не знала история. Подобная попытка могла быть сделана только осуществившим Октябрьскую Революцию русским народом в героическую эпоху заложения основ социалистической промышленности, в начале первого пятилетнего плана, казавшегося тогда невероятно грандиозным. Ниже попытаюсь дать анализ этого эксперимента, так как в то время я принимал участие в проведении в жизнь этого мероприятия.

Предложение по переходу к непрерывной рабочей неделе в промышленности было принято сессией всесоюзного съезда Советов 1929 года при обсуждении грандиозных задач первого пятилетнего плана с огромным воодушевлением, поскольку делегаты видели в нем одну из гарантий успеха пятилетнего плана.

Вся общественность страны была мобилизована Партией для введения нового режима работы, осуществляемого не только в промышленности, но и во всех отраслях народного хозяйства, во всех областях культурной и социальной жизни, одним словом во всей жизни страны.

Пленарным заседанием Центрального комитета, состоявшимся в ноябре 1929 г. было принято решение до конца хозяйственного 1929/30 года перейти к непрерывному производству в 2/3 части всей промышленности, а местным партийным организациям было поручено строго требовать от хозяйственных руководителей выполнения этого решения в пределах их компетентности.

Таким образом, каждый пятый день рабочих стал выходным, благодаря чему в глазах рабочих эта переорганизация стала популярной и желательной. Этим объясняется, что приверженность к воскресенью, вытекающая из привычки и из религиозных предрассудков не сыграла значительной роли и не вызвала особого сопротивления против нового режима работы.

С меньшим воодушевлением приняли это решение инженерно-технические и административные работники, так как новый режим работы не только требовал от них решения более сложных организационных задач, но при тогдашнем недостатке специалистов означал и фактическое увеличение их рабочего времени. Однако, подъем периода начала пятилетки рас-

пространившийся на всю страну, захватил и их, и они делали всё возможное, чтобы преодолеть начальные трудности реорганизации. В этот начальный период трудности эти не были слишком большие, т. к. новые сооружения пятилетки были еще в стадии строительства, а на старых заводах только началось приобретение и установка современного нового оборудования. Поэтому, несмотря на организацию по самым простым схемам, т. е. создание таких бригад, которые ежедневно заменяют выходных рабочих, уже через несколько месяцев были достигнуты значительные успехи в увеличении выпуска продукции. Значительным оказалось также и снижение себестоимости, так как накладные расходы остались почти неизменными, а благодаря использованию внутренних резервов, не было необходимым повысить численность рабочих пропорционально увеличенному фонду времени. На основании опыта первого года, XVI съезд Партии в июне 1930 года решил:

«Учитывая, что введением непрерывной рабочей недели и увеличением числа смен в значительной степени повышается возможность использования оборудования, увеличивается мощность предприятий, ускоряется оборачиваемость средств, растет валовое производство и снижается себестоимость; учитывая далее, что, как показали результаты введения непрерывной рабочей недели за истекший период, непрерывная рабочая неделя сыграла большую роль в выполнении промышленного и финансового плана 1929—30 г., съезд принимает решение перейти в следующем году к непрерывной рабочей неделе во всех основных отраслях промышленности и в то же время приложить все усилия в интересах увеличения числа смен.»¹

В связи с выполнением этого решения декабрьским пленумом Центрального комитета и Центральной контрольной комиссии было высказано, что:

«В 1931 году необходимо обеспечить переход к пятидневной непрерывной рабочей неделе 98% работников всех отраслей промышленности, входящих в Высший Совет Народного Хозяйства, за исключением текстильной промышленности и всех отраслей промышленности, относящихся к Народному Комиссариату Общественного питания.»¹

Однако, первая пятилетка выполнялась более быстрыми темпами, чем это было предусмотрено. Во все большем количестве вводились в эксплуатацию новые цехи и новые заводы с совершенно новым машинным оборудованием. В связи с этим быстро росла численность вновь принимаемых рабочих. Места у машин, требовавших более высокой квалификации и культуры, заняли в основном рабочие, пришедшие из деревень и до тех пор никогда не видевшие машин. В таких условиях наносился все больший ущерб за счет того, что не всегда один и тот же рабочий обслуживал одну и ту же машину или работал на одном и том же рабочем месте. Это рождало обез-

¹ За неимением оригинала приводится перевод с венгерского текста.

личку. Конечно, не только новый режим работы был единственной причиной частых повреждений машин и брака; значительную роль сыграли в этом неопытность рабочих и инженерно-технических работников, неправильная оплата труда и связанная с этим исключительно высокая текучесть рабочей силы, достигшая на многих заводах 30—40% в год. Безответственность за рабочее место, рожденная системой сменных рабочих, усложняла преодоление этих трудностей. Поэтому на XVII Конференции, состоявшейся в феврале 1932 года, Партией было изменено вышеизложенное решение:

«Необходимо положить конец обезличке. К каждому станку, к каждой машине, к каждой группе машин, на каждое рабочее место необходимо поставить постоянного и отвечающего за работу рабочего. Энергичными мерами положить конец сложившемуся положению, при котором никто лично не отвечает за брак и за внутриводской транспорт.»¹

На основании этого решения был прекращен режим непрерывной рабочей недели. Однако, тогда не возвратились к 7-дневной неделе с воскресными выходными, а после каждых пяти дней шестой день стал общим выходным днем, что было, несомненно, огромным завоеванием советских трудящихся, несмотря на то, что при этом на воскресные дни приходилось в год всего 9 выходных дней. Этот режим работы был изменен только в начале войны, когда стало необходимым увеличить рабочее время трудящихся. Но на многих заводах, даже в отдельных отраслях промышленности, как например, в стекольной, где непрерывная рабочая неделя была и технологически выгодна, режим непрерывной работы сохранился и несмотря на переход к 6-дневной рабочей неделе. Между прочим, с того времени до сего дня этот режим работы обеспечивает ежедневный выпуск Правды без прежних перерывов по понедельникам, ввиду того, что в полиграфической промышленности культурно-технические требования, связанные с непрерывным производством могли быть также сравнительно легко выполнены.

К сожалению, у меня нет в распоряжении и поэтому я не могу дословно цитировать ту часть решения Партии, вынесенного относительно возвращения к прерывной рабочей неделе, в которой указывалось, что это решение временное и в будущем основным режимом работы социалистического производства следует считать непрерывную работу, к которой необходимо будет возвратиться, когда уже будут созданы остальные необходимые для этого условия. Не случайно, что именно теперь в период подготовки перехода к коммунизму в советской экономической литературе начинают вспоминать этот режим работы, оцененный в свое время безуспешным; правда, и сейчас дается скорее отрицательная, чем положительная оценка его. На мой взгляд это все еще является, в основном, следствием тогдашнего отрицательного, опыта и односторонней оценки его. Поэтому считаю необходимым, чтобы в

¹ За неимением оригинала приводится перевод с венгерского текста.

странах социалистического лагеря, всюду в соответствии с местными условиями, этот вопрос тщательно изучался экономистами, так как в нашем соревновании с капиталистическим миром и с точки зрения темпов нашего продвижения к коммунизму он имеет исключительно важное значение. Мои выводы из этого грандиозного «промышленно-экономического эксперимента» следующие:

1. Советский опыт 1929—1931 гг., по-моему, прежде всего доказывает, что календарно-непрерывная работа может широко осуществляться и принести большие выгоды народному хозяйству и на тех заводах, где технология не требует непрерывности. И если эту попытку все же пришлось признать безуспешной, то причиной этого был не принципиальный, влекущий за собой неприменную неудачу, недостаток предлагаемой системы, а скорее всего нижеизложенные обстоятельства:

а) Сроки, предназначенные для подготовки перехода к работе по измененному режиму, оказались совершенно недостаточными для обеспечения возможности правильного учета специфических особенностей различных отраслей промышленности, отдельных заводов или даже цехов. Конечно, эта спешка объясняется политическими обстоятельствами того времени, когда как внутреннее, так и внешнее положение страны требовало быстрейших темпов прогресса. В связи с этим я считаю обоснованным мое мнение, что если бы данная реформа была осуществлена уже в 1926 или 1927 г.; когда она была впервые предложена автором этих строк и когда и среди квалифицированных рабочих имела место большая безработица, то она не оказалась бы неудачной. Обезличку можно было бы избежать, подменные рабочие, которым при работе в одну смену приходилось бы обслуживать 4, а в 2 смены — 2 рабочих места, выбирались бы из числа лучших квалифицированных рабочих, у которых, как у бригадиров данных рабочих мест, повысилась бы ответственность за них. Осуществить этот переход удалось бы легче и потому, что тогда еще речь шла о лучшем использовании имевшегося оборудования, а не об одновременном освоении совершенно новой техники, при том еще с необученными рабочими, с небольшим количеством и недостаточно квалифицированных специалистов, с неопытными руководителями. Если бы введение этого режима работы началось уже тогда, то к началу пятилетки этот метод, будучи уже изученным и освоенным, мог бы применяться гораздо легче и в выполнении пятилетнего плана. В настоящее время необходимые для введения такого режима условия имеются, или могут быть созданы во всех странах социалистического лагеря.

б) Большой ошибкой было и то, что переход к непрерывной рабочей неделе распространялся не только на промышленность, а был осуществлен одновременно во всех областях государственной, культурной и социальной жизни, там, где в этом не было никакой необходимости и где вместо пользы он мог нанести только ущерб. Введение непрерывной рабочей недели

в министерствах и других учреждениях в значительной мере дезорганизовало административное руководство. В результате этого режим непрерывной работы стал непопулярным.

в) Критиковать ошибки «на ходу», даже если в отдельных местах они выявлялись очень резко, или же осуществлять переход медленнее, но с лучшей подготовкой, оказалось почти невозможным. Тот, кто пробовал делать это, легко мог попасть (часто и попадал) в общий лагерь с правой оппозицией, которая была принципиально против быстрой индустриализации страны, а в то время последняя была вопросом жизни Советского Союза. Объективная критика позволила бы своевременно устранить большие ошибки и тем самым, несомненно, при целесообразном и необходимом замедлении перехода, обеспечить хотя бы частичное претворение в жизнь самого существенного преимущества непрерывной системы работы — повышенного использования производственных мощностей.

Всеобщее одновременное прекращение режима непрерывной работы, подавившее во многих местах полезную инициативу, было, по-моему такой же ошибкой, как предписание слишком быстрого всеобщего обязательного введения его.

Как можно использовать опыт грандиозного советского эксперимента 1929—1931 гг. в решении задач, стоящих перед нами в Венгрии и в других странах, строящих социализм?

По-моему, следующим образом:

1. Во всех отраслях промышленности и даже на каждом заводе и цехе необходимо отдельно взвесить все условия осуществления режима работы, представляющегося как в экономическом, так и в социальном отношении наиболее целесообразным. Непрерывное производство должно вводиться там, где при правильной организации работы оно дает действительно реальный экономический эффект. При проектировании новых сооружений условия наиболее экономичного и социально выгодного режима работы заранее могут быть полностью обеспечены. Само собой разумеется, что проектировать можно только с учетом такого режима работы, возможность осуществления которого представляется проектировщикам обеспеченной. Что касается имеющихся заводов, в первую очередь нужно принимать во внимание заводы, уже работающие в три смены, а также и сравнительно перегруженные участки и цехи заводов, введение непрерывной работы на которых означает ликвидацию «узких мест». Также в первую очередь следует иметь в виду цеха, оборудованные дорогостоящими машинами в интересах ускорения возмещения капитальных вложений; затем особенно быстро развивающиеся и подлежащие развитию отрасли промышленности, где скорость морального износа машин делает необходимой и целесообразной быструю амортизацию оборудования и возможность замены его.

2. Планомерное сокращение рабочего времени необходимо непременно связать с повышением использования основных средств либо путем увеличения числа смен, либо переходом к непрерывному производству, или же введением обоих мероприятий. Это же можно сказать и в обратном порядке: увеличить сменность и ввести непрерывку действительно успешно можно тогда, когда это может быть увязано с сокращением рабочего времени трудящихся. Увеличение сменности и введение непрерывки следует поощрять и соответствующей политикой заработной платы. При общем сокращении рабочего времени обеспечение сохранения уровня заработной платы трудящихся наиболее целесообразно осуществить путем повышения расценок за работу в воскресенье, во вторую или — если есть — в третью смену.

3. Организовать непрерывную работу нужно так, чтобы как можно меньшему количеству рабочих приходилось работать на разных — и никоим образом не больше, чем на двух разных местах.

4. В случае увеличения числа смен или введения непрерывного производства, необходимо соответствующим образом обеспечить материальную заинтересованность инженерно-технического и административного персонала, так как такой режим работы означает для них не только больше трудностей, но практически и больше работы. В случае достижения экономии капиталовложений, целесообразно предоставлять им значительную премию, пропорционально величине достигнутой экономии. Также целесообразно хотя бы в первые годы, использовать значительную часть дополнительных доходов, получаемых благодаря повышенному экстенсивному использованию оборудования, как для премирования, так и для заводских социальных и культурных целей.

5. Переход как к многосменности, так и к непрерывному производству, требует тщательной технической, организационной и политической подготовки, осуществлять его нужно постепенно, и в такой степени, в какой претворяются в жизнь все необходимые условия подготовки.

РЕЗЮМЕ

При проектировании новых сооружений заранее могут быть приняты во внимание и устранены все те условия, которые затрудняют переход к непрерывному способу производства и повышению числа смен на существующих предприятиях. При разработке перспективного двадцатилетнего плана особенно важно определение для новых сооружений технически, экономически и социально оптимальных режимов работы. Главным образом, нужно избегать того, чтобы снижение продолжительности рабочего дня не сопровождалось бы уменьшением времени использования основных средств производства. В статье рассматривается и сравнивается несколько вариантов различных режимов работы, в первую очередь, с социальной и организационной точек зрения. В заключительной части статьи приводится подробный анализ опыта, полученного в Советском Союзе при введении в 1929—1932 гг. непрерывного способа производства и показывается, что безуспешность этого эксперимента объясняется такими условиями, которые в настоящее время отсутствуют или могут быть полностью устранены. Влияние режимов работы на размер капиталовложений и на формирование себестоимости на примерах отечественного опыта и анализа осуществляемых в настоящее время проектных работ будет рассмотрено автором в дальнейших его работах.

ÜBER DIE FRAGEN DER ARBEITSORDNUNG UND KAPAZITÄTSAUSNUTZUNG
DER BETRIEBSANLAGEN IM HINBLICK AUF DIE PERSPEKTIVPLANUNG
UNSERER INDUSTRIEFÖRDERUNG

GY. HEVESI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Umstände, die bei den bereits existierenden Unternehmen die Erhöhung der Schichtzahl oder den Übergang zur kontinuierlichen Produktion erschweren, können bei der Planung von neuen Anlagen von vornherein in Rechnung gezogen und eliminiert werden. In der Entwicklung des Zwanzigjahresplanes kommt der Ermittlung der technisch, wirtschaftlich und sozial optimalen Arbeitsordnung für jede neue Anlage eine besondere Bedeutung zu. Vor allem muß vermieden werden, daß die Verkürzung der Arbeitszeit der Werkstätigen zugleich eine Verringerung der Ausnutzungszeit der Betriebsanlagen nach sich ziehe. Es werden in dem Aufsatz zahlreiche Varianten der Arbeitsordnung untersucht und miteinander verglichen.

Im abschließenden Teil des Aufsatzes wird eine ausführliche Analyse der Erfahrungen über die in der Sowjetunion in den Jahren von 1929—1932 eingeführte kontinuierliche Produktion geboten. Es wird nachgewiesen, daß der Fehlschlag des damaligen Versuches im Landesmaßstab solchen Verhältnissen und Schwierigkeiten zugeschrieben werden kann, die zur Zeit nicht bestehen, beziehungsweise in vollem Maße vermieden werden können.

Die Auswirkungen der Arbeitsordnung auf die Größe der Investitionen sowie auf die Gestaltung der Selbstkosten werden auf Grund der neuesten inländischen Erfahrungen sowie auf Grund einer Analyse von zahlreichen im Gange befindlichen Planungsarbeiten in weiteren Studien des Autors beschrieben.

ON THE RATIONAL UTILIZATION OF WORK FORCE AND OF THE PLANT
CAPACITY IN OUR LONG-RANGE PLANNING OF INDUSTRIAL DEVELOPMENT

GY. HEVESI

SUMMARY

The circumstances hampering the increase of the number of shifts for the changeover to continuous production, can be calculated and eliminated already at the stage of planning new projects. In working out the 20 year plan, finding the optimum solution for the organization of the work force both in economic-technical and social respect is of particular importance. What has to be avoided at all costs is that the reduction in the working time should at the same time result in a reduction of the utilization of capacity. The paper examines and compares a number of possible choices with regard to arranging and organizing the work force in the most efficient way. In the concluding part of the paper the author analyses at length the experiences gained in the Soviet-Union in the years 1929—32 with the introduction of continuous production. He shows that the failure of experiments at that time was due to circumstances and difficulties which at present do not exist, or could completely be averted. In a series of further articles the author intends to show — on the basis of an analysis of our latest practical experiences as well as of numerous current planning projects — the effect of plant layout and work organization on the magnitude of investments and on production costs.

LES PROBLÈMES D'ORGANISATION DU TRAVAIL ET D'EXPLOITATION DU FONDS
FIXE, DU POINT DE VUE DE LA PLANIFICATION PERSPECTIVE DE NOTRE
DÉVELOPPEMENT INDUSTRIEL

GY. HEVESI

RÉSUMÉ

Les circonstances qui, dans les entreprises déjà existantes rendent difficile l'augmentation du nombre d'équipes ou le passage au régime de production continue, peuvent être prévues et éliminées lors de la rédaction des projets d'établissements nouveaux. Dans l'élaboration du plan de vingt ans, une place à part doit être réservée à la détermination, pour chaque

nouvel établissement, de l'organisation du travail optimum du triple point de vue technique, économique et social. Il importe surtout d'éviter que la réduction des horaires du travail n'entraîne aussi celle de la durée d'exploitation du fonds fixe. L'article étudie et compare entre elles de nombreuses variantes du plan de travail, envisagées surtout sous le rapport de l'organisation du travail, et du point de vue social. La partie terminale de l'étude offre une analyse détaillée des expériences de production continue adoptée en Union soviétique aux années 1929—1932. L'auteur démontre que l'insuccès de cette expérience peut être attribué à certaines conditions et difficultés n'existant plus aujourd'hui ou pouvant être entièrement éliminées.

L'effet de l'organisation du travail sur le volume des investissements et la formation du prix de revient, examiné sur la base des expériences récemment réalisées en Hongrie et de l'analyse de nombreux projets en cours fera l'objet d'une étude ultérieure.

EXAMINATION OF ACCURACY OF THE ENGESSER— VIANELLO METHOD AND THE RAYLEIGH QUOTIENT

J. SZIDAROVSKY

"UVATERV" HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE BUDAPEST

[Manuscript received August 31, 1959]

1. Introduction

The ENGESSER—VIANELLO method and the Rayleigh quotient are mostly applied for determining critical load in engineering practice.

This paper examines the accuracy of these procedures when the boundary conditions are homogeneous, furthermore, a combination derived from them, and finally presents a practical method for its application.

1.1. Engesser—Vianello method

The ENGESSER—VIANELLO method is based on the supposition that a bar under critical compressive force is in equilibrium when it takes up a certain buckled shape.

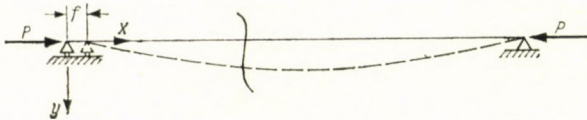


Fig. 1

In this case according to Fig. 1

$$M = P_i y.$$

But

$$M = -EIy''.$$

Therefore

$$EIy'' + P_i y = 0.$$

The critical load is given by the

$$y'' + \frac{P_i}{EI} y = 0 \quad (1,1)$$

linear differential equation of which P_i is the eigenvalue of order i .

For determining the first critical load, the y_1 trial-function satisfying boundary conditions is substituted into (1,1) and is twice integrated.

In this case

$$y_1 + P \iint \frac{y_1}{EI} dx dx = 0. \quad (1,2)$$

The quotient

$$P = - \frac{y_1}{\iint \frac{y_1}{EI} dx dx} \quad (1,3)$$

gives the first assessment for the first critical load if the two integration constants are chosen in such a way, that

$$\iint \frac{y_1}{EI} dx dx$$

should satisfy the two boundary conditions.

In case the quotient under (1,3) is the same along the domain $a - b$ for different x abscissas, this quotient is then the accurate value of the first critical load.

In case the values of quotient for different x abscissas is not the same, so

$$\iint \frac{y_1}{EI} dx dx$$

must be chosen for the second trial-function. This procedure is to be repeated until the values of quotient for different abscissas are within limits of the required accuracy.

This is a method of successive approximation by the way of integral-equation.

It is customary to integrate Equ. (1,2) within the domain $a - b$ so the critical load is

$$P = \frac{\int_a^b y_1 dx}{\int_a^b \left[\iint \frac{y_1}{EI} dx dx \right] dx}.$$

1.2. The Rayleigh quotient

The starting point of the quotient for determining the critical load is, the works of internal forces and those of the external compressive force are equal, in a buckled shape. In these works the work of pure compression is to be neglected as this work occurs in both works having the same values. In other words, when the critical load acts, the internal and external works relating to a buckled shape, are the same.

The external work is (Fig. 1)

$$W_e = f P_{cr} \sim \frac{P_{cr}}{2} \int_a^b y'^2 dx \quad (1,5)$$

as

$$f = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx - \int_a^b dx \sim \frac{1}{2} \int_a^b y'^2 dx. \quad (1,6)$$

Based on Eqs. (1,5) and (1,6)

$$P_{cr} = \frac{\int_a^b EI y''^2 dx}{\int_a^b y'^2 dx}. \quad (1,7)$$

It is to be written in another form, as

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P_{cr} y}{EI}$$

this substituted into Equ. (1,6), the internal work is

$$W_i = \frac{P_{cr}^2}{2} \int_a^b \frac{y^2}{EI} dx, \quad (1,8)$$

Equ. (1,5) and (1,8) are equal, thus the transformed RAYLEIGH quotient is

$$P_{cr} = \frac{\int_a^b y'^2 dx}{\int_a^b \frac{y^2}{EI} dx}. \quad (1,9)$$

The determination of an approximate value of critical load is performed in such a way that first the y trial function satisfying boundary conditions is chosen, and Equ. (1,7) or (1,1) gives the result.

2.0. Auxiliary theorems

In the following a few mathematical theorem will be needed.

1. Let

$$P_1 \leq P_2 \leq \dots \quad (2,1)$$

be the compressive forces as critical loads (eigenvalues) of the

$$y'' + P \frac{1}{EI} y = 0$$

differential equation when the non-trivial solutions as deflections are the

$$\varphi_1; \varphi_2; \dots \quad (2,2)$$

eigenfunctions.

2. The φ_n eigenfunction is normalized when

$$\int_a^b \varphi_n^2 \frac{1}{EI} dx = 1 \quad (2,3)$$

in which $\frac{1}{EI}$ is the weight-function.

In the following every eigenfunction is supposed to be normalized.

3. The φ_n eigenfunction has $n - 1$ zero points along the $a - b$ domain.

4.

$$\int_0^b \frac{1}{EI} \varphi_k \varphi_n dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n. \end{cases} \quad (2,4)$$

5. In case when an $f(x)$ function meets the boundary conditions, it may be developed into series of eigenfunctions, thus

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n \quad (2,5)$$

in which

$$C_n = \int_a^b \frac{1}{EI} \varphi_n f(x) dx. \quad (2,51)$$

6. When P is fixed in the inhomogeneous form of the linear differential equation under (1,1), the principle of superposition is valid.

7. If a bar under compressive force has a small η_i initial curvature, its increased value will be determined after Deri's deduction, as follows.

The differential equation is

$$y'' + \frac{P}{EI} y = -\frac{P}{EI} \eta_i. \quad (2,6)$$

In case the η_i initial curvature is proportional to the eigenfunction No. i , to say

$$\eta_i = C_i^* \varphi_i, \quad (2,61)$$

so after substitution, it results in

$$y'' + \frac{P}{EI} (y + C_i^* \varphi_i) = 0$$

which compared to Equ. (1,1), the relation

$$P_i y = P (y + C_i^* \varphi_i)$$

is obtained. From this the deflection is

$$y = \frac{P}{P_i - P} C_i^* \varphi_i = C_i \varphi_i. \quad (2,7)$$

8. From Equ. (1,1)

$$\varphi_i'' = -\frac{P_i}{EI} \varphi_i. \quad (2,8)$$

3.0. Critical examination of the Engesser-Vianello method

After twice integrating the differential equations under (2,6), and the integration constants are chosen in such a way that y and $\iint \frac{y}{EI} dx dx$ should meet the boundary conditions, the relation

$$y + P \iint \frac{y}{EI} dx dx = -P \iint \frac{\eta}{EI} dx dx \quad (3,1)$$

is obtained. Let

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i$$

so based on Equ. (2,8) that

$$Y = \iint \frac{y}{EI} dx dx = \iint \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i \varphi_i}{EI} dx dx = - \iint \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i \varphi_i''}{P_i} dx dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{P_i} \varphi_i. \quad (3,2)$$

Or using another symbol

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_i \varphi_i \quad (3,3)$$

where

$$\bar{C}_i = \frac{C_i}{P_i}. \quad (3,4)$$

In the expression of Y under Equ. (3,3) based on equation (3,4) the coefficients of eigenfunctions of higher order decreases compared to that of the first eigenfunction considering Equ. (2,1). When Y is chosen for a second trial-function it is nearer to the first eigenvalue than y , that is to say the successive approximation of Engesser—Vianello results in a function approaching the first eigenfunction.

This statement is not valid when the trial function is chosen in such a way that the coefficient of the first eigenfunction, when the trial-function chosen is expended into series, should be zero. In this case Y approaches the eigenfunction of the smallest order. The statement as above is not valid if the trial-function is proportional to any eigenfunction.

Let be

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^* \varphi_i \quad (3,41)$$

using Equ. (3,2)

$$\iint \frac{\eta}{EI} dx dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{P_i} \varphi_i$$

but based on Equ. (2,7)

$$\iint \frac{\eta}{EI} dx dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i - P}{P_i P} C_i \varphi_i. \quad (3,5)$$

The twice integrated Equ. (1,1) results in the fact that in case the trial function is proportional to any of the eigenfunction of order i , the Equ. (1,3) presents the exact value of the critical load of order i .

In case the trial-function is not in proportion to any of the eigenfunctions, and Eqs. (1,3) and (3,5) are substituted into Equ. (3,1) the relation

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i - P}{P_i P} C_i \varphi_i = 0 \quad (3,6)$$

is obtained. From this the difference between the smallest eigenfunction (it is of order one) and the force given by Equ. (1,3) is

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_1}{P_i} \frac{C_i \varphi_i}{C_1 \varphi_i}. \quad (3,71)$$

If the trial-function in its series does not contain the first trial-function, the above mentioned refers to the second critical load (when it is not contained either, to the third critical load, etc.).

When not the first but the second critical load is needed, according to the above, this successive approximation fails. In this case, after determining the first eigenfunction, a trial-function similar to the second eigenfunction is chosen, and the first eigenfunction is separated, unless the successive approximation should approach the first.

Let Equ. (3,1) be integrated within the $a - b$ domain:

$$\int_a^b y dx - P \int_a^b \left(\iiint \frac{y}{EI} dx dx \right) dx = \int_a^b \left(\iiint \frac{\eta}{EI} dx dx \right) dx. \quad (3,7)$$

In case the critical load is reckoned by equation

$$P = \frac{\int_a^b y dx}{\int_a^b \left(\iiint \frac{y}{EI} dx \right)} \quad (3,8)$$

using Eqs. (3,7) and (3,5) the relation

$$\int_a^b \left(\iiint \frac{\eta}{EI} dx dx \right) dx = - \sum \frac{P_i - P}{P_i P} C_i \int_a^b \varphi_i dx = 0 \quad (3,9)$$

is obtained. From this

$$\frac{P - P_1}{P_1 P} C_1 \int_a^b \varphi_1 dx = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_i - P}{P_i P} C_i \int_a^b \varphi_i dx$$

and thus

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_1}{P_i} \frac{C_i \int_a^b \varphi_i dx}{C_1 \int_a^b \varphi_1 dx}. \quad (3,91)$$

According to theorem 3 of Article 2

$$\int_a^b \varphi_1 dx \gg \int_a^b \varphi_i dx$$

as the sign of the first eigenfunction is the same in the domain, and those of the successive ones are alternating. Therefore, in general, the right side of Equ. (3,91) is smaller than that of Equ. (3,71), in consequence of this the value of the critical load reckoned by Equ. (3,8) is usually more reliable than an average value reckoned by Equ. (3,6).

It is to be remarked that in the infinite series the values of P forces differ from each other as they are reckoned by different equations. But this difference is small and the quantity of the comparison is given by the factors.

In case the functions under (3,2) is chosen for the second trial-function, so the difference between the force given by Equ. (1,3) and the critical load, is

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_1^2}{P_i^2} \frac{C_i \varphi_i}{C_1 \varphi_1} \quad (3,92)$$

which compared to Equ. (3,71) shows the convergence.

Summarizing the above mentioned results:

1. When the trial-function chosen is proportional to any eigenvalue of order i , so Eqs. (3,6) and (3,8) give the exact value for the critical load of order i . In this case the successive integration does not rectify the result.

2. The Engesser—Vianello's successive approximation approaches the first critical load, in case the form of the trial-function expended into series contains the first eigenfunction. The more the first eigenfunction dominates, the more it approaches the force given by Equ. (3,6).

4,0. Critical examination of Rayleigh quotient

4,1. The original quotient

Equ. (2,6) is multiplied with EIy'' and integrated within a and b boundaries. Thus

$$\int_a^b EI y''^2 dx + P \int_a^b y'' y dx = -P \int_a^b y'' \eta dx. \quad (4,1)$$

As

$$\int_a^b y'' y dx = [y' y]_a^b - \int_a^b y'^2 dx$$

but the boundary conditions are supposed to be homogeneous (see point 2,1) and so

$$[y' y]_a^b = 0.$$

Therefore

$$\int_a^b y'' y' dx = - \int_a^b y'^2 dx.$$

This, substituted into Equ. (4,1)

$$P = \frac{\int_a^b EI y''^2 dx}{\int_a^b y'^2 dx - \int_a^b \eta y'' dx}. \quad (4,11)$$

Or if

$$\int_a^b \eta y'' dx = 0. \quad (4,12)$$

so

$$P = \frac{\int_a^b EI y''^2 dx}{\int_a^b y'^2 dx}. \quad (4,13)$$

But based on Eqs. (3,41), and (2,7), (2,8) and making use of Eqs. (2,3) and (2,4)

$$\int_a^b \eta y'' dx = - \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i - P}{P} C_i \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{EI} C_i \varphi_i \right) dx = \sum_1^{\infty} \frac{(P_i - P) P_i}{P} C_i^2.$$

If the critical load of order k is to be determined, after being based on Equ. (4,13)

$$P - P_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(P_i - P) P_i}{P} \frac{C_i^2}{C_k^2} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_i}{P} \frac{C_i^2}{C_k^2}. \quad (4,14)$$

When the y trial-function is proportional to the eigenfunction of order k , so

$$C_i = 0 \quad i \neq k$$

and therefore

$$P_k = P$$

so to say, Equ. (4,13) gives the correct value for the critical load of order k .

In case the trial-function is not proportional to the eigenfunction k , but only similar to it, that is to say, c_k dominates among the c_i factors, so Equ. (4,13) only gives an approximative value according to Equ. (4,14).

If the first, to say, the smallest critical load is to be determined

$$P = P_1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_i}{P_1} \frac{C_i^2}{C_1^2}. \quad (4,15)$$

If $P < P_2 < P_3 < \dots$ so the sign of the right side of Equ. (4,15) is positive, thus the value given by Equ. (4,13) is larger than the smallest critical load. If $P > P_2$, then $P > P_2 > P_1$. Thus the RAYLEIGH quotient is larger than the smallest (first) critical load, or — in case the trial-function is proportional to the first eigenfunction — it is equal to it. Namely

$$P \geq P_1. \quad (4,16)$$

4.2. The quotient transformed

If Equ. (2,6) is multiplied by y , in a similar way to that dealt with in point 4.1., if

$$\int_a^b \frac{y\eta}{EI} dx = 0 \quad (4,21)$$

so

$$P = \frac{\int_a^b y'^2 dx}{\int_a^b \frac{y^2}{EI} dx}. \quad (4,22)$$

After using Eqs. (3,41), (2,7), (2,3) and (2,4)

$$\int_a^b \frac{y\eta}{EI} dx = \int_a^b \left[\frac{1}{EI} \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i - P}{P} C_i \varphi_i \right] dx = \sum_1^{\infty} \frac{(P_i - P)}{P} C_i^2.$$

But, if the critical load of order k is to be determined

$$P - P_k = \sum_{i=1}^{k-1} (P_i - P) \frac{C_i^2}{C_k^2} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (P_i - P) \frac{C_i^2}{C_k^2}. \quad (4,23)$$

In this case it is also verified, that when the trial-function is proportional to the eigenfunction of order k , Equ. (4,22) gives an exact value for the critical load of order k . On the other hand, if the first eigenfunction merely dominates, it gives an approximative value only.

In case the trial-function is not proportional to the first eigenvalue, it can be seen, after Equ. (4,24) has been compared with Equ. (4,15), that the right side of Equ. (4,24) is smaller than that of Equ. (4,15). Thus Equ. (4,22) gives a more precise approximation than Equ. (4,13).

5. Combination of the Engesser-Vianello method and the Rayleigh quotient

As $\iint \frac{y}{EI} dx dx$ is nearer to the first eigenfunction, that is to say, the factors of eigenfunctions of higher order relatively decrease, the

$$y^* = \iint \frac{y}{EI} dx dx$$

function does good as a trial-function.

In this case y^* steps into the place of y , therefore, based on Equ. (2,8)

$$y^* = \iint \frac{y}{EI} dx dx = \sum_1^{\infty} \frac{C_i}{P_i} \varphi_i = \sum_1^{\infty} C_i^* \varphi_i$$

in which

$$C_i^* = \frac{C_i}{P_i}. \quad (5,1)$$

So the relation

$$P = \frac{\int_a^b EI y^{*''2} dx}{\int_a^b y^{*''2} dx} = \frac{\int_a^b \frac{y^2}{EI} dx}{\int_a^b \left[\int \frac{y}{EI} dx \right]^2 dx} \quad (5,2)$$

takes the place of Equ. (4,13) and thus

$$\int_a^b \eta^* y^{*''} dx = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_i}{P} C_i^{*2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i - P}{P_i P} C_i^2.$$

In this case the

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_1}{P_i} \frac{C_i^2}{C_1^2} \quad (5,3)$$

equality is valid instead of Equ. (4,15)

Similarly

$$\int_a^b \frac{y^* \eta^*}{EI} dx = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i - P}{P} C_i^{*2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i - P}{P_i^2 P} C_i^2$$

and

$$P = \frac{\int_a^b y^{*'} dx}{\int_a^b \frac{y^{*'} dx}{EI}} = \frac{\int_a^b \frac{y}{EI} \left[\iint \frac{y}{EI} dx dx \right] dx}{\int_a^b \frac{1}{EI} \left[\iint \frac{y}{EI} dx dx \right]^2 dx} \quad (5,4)$$

are substituted for Eqs. (4,21) and (4,22).

For the smallest critical load, the formula

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(P_i - P) P_1^2}{P_i^2} \frac{C_i^2}{C_1^2} \quad (5,5)$$

is valid instead of Equ. (4,23).

The comparison of Eqs. (4,15), (4,23), (5,3) and (5,5) shows that the accuracy increases into a sequence of equations, as above.

6. Comparative example

The critical load of a two hinged bar of l length is to be determined. The flexural rigidity along one half of its length is EI , along the other half it is infinitely large (Fig. 2).

The critical load can exactly be determined for this bar.

The buckling shape along the first section is

$$\psi_1 = \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right).$$

At $x = \frac{l}{2}$

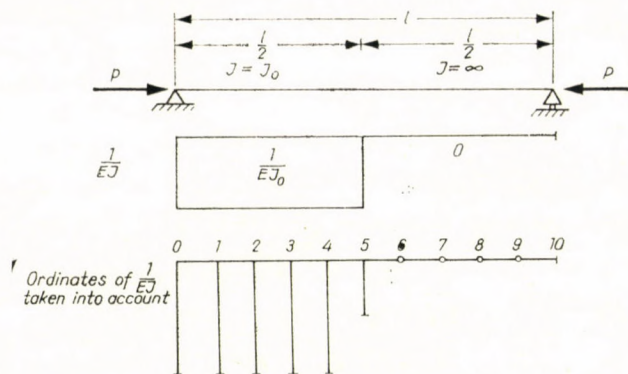


Fig. 2

$$\psi_1 \left(\frac{l}{2} \right) = \sin \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

and

$$\psi_1' \left(\frac{l}{2} \right) = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right).$$

Along the second section the bar has no curvature, but the deflection and slope at $x = \frac{l}{2}$ are known from the above. Thus

$$\psi_1 \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{l}{2} \psi_1' \left(\frac{l}{2} \right)$$

from which

$$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = \sin \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

or

$$-\operatorname{tg} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

The smallest root of this transcendental equation is

$$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P_1}{EI}} = 2,0288.$$

Thus

$$P_1 = \frac{16,46 EI}{l^2}.$$

6.1. Engesser—Vianello method

When the Engesser—Vianello method is used, the function

$$y = x(l - x)$$

is chosen as a trial-function.

The integral, meeting boundary conditions at $x = 0$ and $x = l$, is

$$\iint \frac{y}{EI} dx dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{11 l^3 x}{192} \right] \quad x \leq \frac{l}{2} \quad (6,11)$$

$$\iint \frac{y}{EI} dx dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5 l^3 x}{192} - \frac{5 l^4}{192} \right]. \quad x \geq \frac{l}{2} \quad (6,12)$$

The smallest critical load as per Equ. (3,6) is

$$P = \frac{y}{\iint \frac{y}{EI} dx dx}.$$

As y as well as $\iint \frac{y}{EI} dx dx$ are functions, this quotient results in different values at different places. This will be determined at three places.

The quotient is determined at $x = 0$ based on the l'Hospital rule:

$$P_{1(0)} = - \frac{l}{\frac{11 l^3}{192 EI}} = \frac{17,45 EI}{l^2}. \quad (6,13)$$

The percentage error from the exact value is 6%.

$$\text{At } x = \frac{l}{2}$$

$$P_{1(\frac{l}{2})} = - \frac{\frac{l^2}{4}}{\frac{2,5 l^4}{192 EI}} = \frac{19,2 EI}{l^2}. \quad (6,14)$$

The deviation from the exact value is 17%.

$$\text{At } x = l$$

$$P_{1(l)} = - \frac{-l}{\frac{5 l^3}{192 EI}} = \frac{39,4 EI}{l^2}. \quad (6,15)$$

The percentage error is 139%.

And finally the integration along the domain that is to say, the ratio of areas as per Equ. (3,8), is

$$P_{1(T)} = - \frac{\frac{l^3}{6}}{\frac{64 l^5}{7680 EI}} = \frac{20 EI}{l^2}. \quad (6,16)$$

The error is 21%.

6.2. Rayleigh quotient

The trial function and its second derivate is also required to satisfy the boundary conditions, therefore,

$$y = \iint x(l-x) dx dx = \frac{lx^3}{6} = \frac{x^4}{12} - \frac{l^3 x}{12}$$

function is chosen for trial-function. As

$$y' = \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12},$$

the original quotient as per Equ. (4,12), is

$$P_{1(1)} = \frac{\int_0^l EJy''^2 dx}{\int_0^l g'^2 dx} = \infty \quad (6,21)$$

because $EI = \infty$ along the second section of the bar.

The quotient transformed as per Equ. (4,21), is

$$P_{1(2)} = \frac{\int_0^l y'^2 dx}{\int_0^l \frac{y^2}{EI} dx} = \frac{\frac{3,4 l^7}{1008}}{\frac{15,5 l^9}{90720 EI}} = \frac{19,74 EI}{l^2}. \quad (6,22)$$

The error from the exact value is 12% in percentage.

6.3. The quotient combined

Let the trial-function be

$$y = x(l - x).$$

Based on (5,2)

$$P_{1(3)} = \frac{\int_0^l \frac{y^2}{EI} dx}{\int_0^l \left[\int \frac{y}{EI} dx \right]^2 dx} = \frac{0,01667 \frac{l^5}{EI}}{0,0010039 \frac{l^7}{(EI)^2}} = \frac{16,6 EI}{l^2}. \quad (6,31)$$

The error is 1%.

Finally reckoned with Equ. (5,4)

$$P_{1(4)} = \frac{\int_0^l \frac{y}{EI} \left[\int \int \frac{y}{EI} dx dx \right] dx}{\int_0^l \frac{1}{EI} \left[\int \int \frac{y}{EI} dx dx \right]^2 dx} = \frac{0,00100834 \frac{l^7}{(EI)^2}}{0,00006122 \frac{l^9}{EI}} = \frac{16,47 EI}{l^2}. \quad (6,32)$$

The deviation from the exact value is less than 1‰.

This example proves that all the four values obtained by the Engesser—Vianello method are larger than the critical load, the errors are: 6%, 17%, 139% and in case it is reckoned by quotient of areas, it is 21%.

Referring to the Rayleigh quotient, Equ. (6,21) results in a value of ∞ , the quotient transformed gives a value having 12% error. In this the second integral of the original function served as a trial-function.

The quotients combined are nearer the exact value, their errors are under 1% and 1‰, respectively.

This example and also the comparison at the end of chapter 5 show that it is reasonable to apply the last procedure. But in this case reckoning according to Equ. (5,4) is not an easy one.

In the next chapter a practical but approximative execution of the reckoning will be presented.

7. A practical execution of reckoning the combined quotient

The critical load of a bar was analytically determined by different methods.

In most cases the analytical method can not be applied as the integrations can not be written down as tabulated functions, or if they can, the execution requires a lot of time.

The determination of the critical load will be performed with a practical and not an exact method. The reckoning steps are indicated on the table and every step will be explained in the following.

Let the bar of l in length be divided into n sections. A parabola of second order is chosen for trial-function.

$$y = x (l - x).$$

In the example $n = 10$ is chosen. On the Table the second line indicates the values of y .

If the arrangement of the sections is uniform so to say, the length of each section is equal, this line indicates the

$$s_2^* = \eta = \frac{y}{a^2} = 10h - h^2$$

values. In this h is the series number of a section. In the third line the

$$s_3^* = \tau = \frac{EI_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{dx}{EI(x)}$$

values are shown. In this the value EI_0 is chosen at random. In the example the flexural rigidity of the left side of the bar was chosen for EI_0 . If the average value of

$$\frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{dx}{EI(x)} = \frac{1}{EI_a},$$

so to say, the reciprocal of the flexural rigidity is $\frac{1}{EI_a}$ along the lengths $\frac{a}{2}$ measured from the joining point of two sections, both to the right and to the left,

$$\tau = \frac{EI_0}{EI_a}.$$

In the fourth line the values of τy are indicated. When the arrangement is uniform, the values of

$$s_4^* = \tau \eta = \tau \frac{y}{a^2}$$

are contained.

Table

Point	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
s_2	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0	
s_3	1	1	1	1	1	0,5	0	0	0	0	0	
s_4	0	9	16	21	24	12,5	0	0	0	0	0	
s_5	0	9	34	71	116	152,5	152,5	152,5	152,5	152,5	152,5	
s_6												
s_7	0	9	52	157	344	612,5	917,5	1 222,5	1 527,5	1 832,5	2 137,5	
s_8	0	-214	-428	-641	-855	-1 069	-1 283	-1 496	-1 710	-1 924	-2 138	
s_9	0	-205	-376	-484	-511	-456	-365	-274	-183	-91	0	
s_{10}	0	-1 843	-6 008	-10 169	-12 264	-5 703	0	0	0	0	0	
s_{11}												-71 974
s_{12}	0	42 025	141 376	234 256	261 121	207 936	0	0	0	0	0	
s_{13}	0	42 025	141 376	234 256	261 121	207 936	0	0	0	0	0	
s_{14}												1 773 428

The fifth line indicates the values of integrals

$$\int \tau y$$

referring to the joining points of sections. This integral, reckoned by ordinates y_i referring to the boundaries of each section, is

$$s_5 = \int \tau y dx \sim \frac{1}{2} a_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k-1} a_i y_i + \frac{1}{2} a_k y_k.$$

This is the slope multiplied by EI_0 .

When the arrangement is uniform, line 5 shows the values of

$$s_5^* = \frac{2}{a^3} s_5 = \frac{2}{a^3} \int \tau y dx \sim s_{41}^* + \sum_{i=2}^{k-1} 2 s_{4i}^* + s_{4k}^*.$$

In case the boundary conditions require a zero value for slope at joining point n , the sixth line indicates the corrected slopes so, to say, the slope reckoned in line 5 for the joining point n is to be subtracted from each value of line 5.

The seventh line presents the

$$\int (\int \tau y dx) dx = \int s_6 dx$$

integral which is the value of deflections multiplied by EI_0 . (The value of $\int \tau y dx$ is taken from the fifth — or if it occurs, from the sixth-line.) This integral is

$$s_7 = \int (\int \tau y dx) dx.$$

When it is an uniform arrangement

$$s_7^* = \int \frac{2}{a} \left(\frac{2}{a^3} \int \tau y dx \right) dx = s_{61}^* + \sum_{i=2}^{k-1} 2 s_{6i}^* + s_{6k} = \frac{4}{a^4} s_7.$$

In case the boundary conditions require that the deflections should be zero at the first and at the n -th joining points such a slope is to be raised at the first joining point which results in a deflection $-s_7$ at the n -th joining point. This reduced slope is

$$\bar{\varphi} = -\frac{s_7}{l}.$$

And the deflection due to this slope is

$$s_8 = \bar{\varphi} x = -\frac{s_7}{l} x.$$

In the example

$$\bar{\varphi} = -\frac{2137,5}{10}$$

and the additional deflection is

$$w_k^* = -\frac{2137,5}{10a}ka = -\frac{2137,5}{10}k = -213,75k.$$

The eighth line indicates this correction, the ninth the

$$s_9 = s_7 + s_8$$

corrected values.

The tenth line contains the

$$(EI_0)^2 s_{10} = \frac{y}{EI} \left(\iint \frac{y}{EI} dx dx \right)$$

values. This is the product of the fourth and ninth lines. When the arrangement is uniform, this product is

$$s_{10}^* = \frac{4s_{10}}{a^6}.$$

The eleventh line is the integral of the tenth, which value should be reckoned for the end of the beam. Thus

$$s_{11} = (EI_0)^2 \int \frac{y}{EI} \left(\iint \frac{y}{EI} dx dx \right) dx.$$

If the arrangement is uniform

$$s_{11}^* = \frac{8s_{11}}{a^7}.$$

In the example its value is 71974.

The twelfth line indicates the values of

$$s_{12} = [EI_0]^2 \left[\iint \frac{y}{EI} dx dx \right]^2.$$

This is the second power of the ninth line. If the arrangement is uniform

$$s_{12}^* = \frac{16s_{12}}{a^8}.$$

The thirteenth line shows the values of τs_{12} . It is the product of lines 3 and 12. If the arrangement is uniform

$$s_{13}^* = \frac{16 s_{13}}{a^8}.$$

The fourteenth line contains the integral of line 13 for the end of the bar:

$$s_{14} = (EI_0)^3 \left[\int_0^l \frac{1}{EI} \left(\iint \frac{y}{EI} dx dx \right) dx \right].$$

When the arrangement is uniform,

$$s_{14}^* = \frac{32 s_{14}}{a^9}.$$

In the example this value is 1773428.

The approximative value of the first critical load based on Equ. (5,4), is

$$P_1 = - \frac{s_{11}}{s_{14}} EI_0.$$

The arrangement being uniform

$$P_1 = - \frac{\frac{a^7}{8} s_{14}^* EI_0}{\frac{a^9}{32} s_{11}^*} = 4 a^2 EI_0 \frac{s_{14}^*}{s_{11}^*}.$$

In the example $a = \frac{l}{10}$, thus the critical load is

$$P_1 = - \frac{71974 \cdot 400}{1773428 l^2} EI_0 = \frac{16,23 EI_0}{l^2}.$$

The deviation from the analytical value is only $-1,4\%$.

REFERENCES

1. TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability (Mc. Graw-Hill, New-York, 1936).
2. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949).

SUMMARY

This study examines the accuracy of two practical methods for determining the critical load of an axially compressed bar of variable flexural rigidity when the boundary conditions are homogeneous.

The convergence of the Engesser—Vianello method, the accuracy of the different Rayleigh quotients, finally the accuracy of the combined method derived from these, are examined, and for the latter a practical method is presented.

EINE UNTERSUCHUNG DER GENAUIGKEIT DER METHODE VON ENGESSER—
VIANELLO UND DES QUOTIENTEN VON RAYLEIGH

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz untersucht die Genauigkeit zweier praktischen Methoden für die Bestimmung der kritischen Kraft eines zentrischen gedrückten Stabes mit nicht konstantem Querschnitt und mit homogenen Randwerten.

Er untersucht die Konvergenz bei der Engesser—Vianello Methode, die Genauigkeit der verschiedenen Rayleigh-Quotienten, schließlich analysiert er die Genauigkeit der kombinierten Anwendung der zwei obigen Methoden und führt eine praktische Methode für die Anwendung der letzteren Methode vor.

L'EXACTITUDE DE LA MÉTHODE D'ENGESSER—VIANELLO ET DU COEFFICIENT
DE RAYLEIGH, UTILISÉS POUR LA DÉTERMINATION DE LA FORCE CRITIQUE

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

L'auteur examine l'exactitude des deux méthodes pratiques utilisées pour déterminer la force critique des barres de rigidité variable comprimées concentriquement, et caractérisées par des conditions aux limites homogènes.

L'étude analyse la convergence chez la méthode d'Engesser—Vianello, l'exactitude des différents coefficients de Rayleigh, ainsi que l'exactitude offerte par l'application simultanée des deux méthodes. L'auteur présente enfin un exemple pratique d'application de cette la seconde dernière méthode.

МЕТОД ЭНГЕССЕР—ВИАНЕЛЛО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ
И ПРОВЕРКИ ТОЧНОСТИ ПРОИЗВОДНОЙ РЕЛЕ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется два практических метода для определения критической силы характеризуемого гомогенными периметрическими условиями центрально сжатого прутка с переменной жесткостью.

Анализируется конвергенция при методе Энгессер—Вианелло, точность различных производных в связи с производной Реле, наконец, точность комбинированного применения этих двух методов, и демонстрируется практический способ применения этого последнего метода.

DEUX NOUVELLES MÉTHODES POUR SUSCITER LA VISION DES COULEURS, ET EXAMEN DE LEUR POSSIBILITÉ D'EMPLOI DANS LA TECHNIQUE CINÉMATOGRAPHIQUE ET LA TÉLÉVISION

S. DÉKÁNY

DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

INSTITUT DES SCIENCES DU FILM ET CINÉMATHÈQUE HONGROISE, BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 9 novembre 1960]

I. Aperçu général

Des communications relatives à l'effet de couleur obtenu à la projection d'une diapositive noir et blanc, faites en 1959 par le Dr. LAND, ont suscité dans le monde entier un grand intérêt parmi les spécialistes de l'optique, de la télévision et de la technique cinématographique. La presse surtout les a accueillies comme une véritable découverte révolutionnaire.

Entretemps, la presse scientifique [10, 17], [20, 21], etc. a publié à ce sujet des communications plus détaillées, dans l'une desquelles, due à NEIDHARDT [20], on peut lire: «Jedes Lehrbuch über Farben muß neu gefaßt werden».

Dans un ordre de recherches analogue, quelques publications d'auteurs étrangers [7, 30], parues également ces dernières années, ont rendu compte d'un autre phénomène d'après lequel la répétition, à fréquence convenable, de formes uniquement noires et blanches peut susciter, chez les spectateurs, une vision multicolore.

Bien que ces deux phénomènes présentent des différences considérables, ils s'accordent cependant en ce qu'ils sont, du moins à première vue, en contradiction flagrante avec la théorie des couleurs admise par la physique classique, aussi bien qu'avec les explications actuellement connues de l'ophtalmologie, concernant la perception des couleurs.

De plus, les deux phénomènes permettent de penser à une utilisation dans la technique cinématographique et dans la télévision. L'examen des processus de vision ne saurait être utilement effectué sur la seule base de l'optique physique, du fait que celle-ci n'est même pas capable, le plus souvent, de les expliquer. Les processus de la vision sont inséparables de l'optique physiologique. A l'époque de la première guerre mondiale, les spécialistes des sciences physiques et médicales admettaient, pour la plupart, l'idée que l'optique physiologique constituait une branche désormais fermée de la science, où ne pourrait se poser aucun nouveau problème fondamental. Mais à partir des années trente, le développement rapide de la technique de l'éclairage, de la photographie et de la cinématographie, de la photométrie, de la colorimétrie,

et les progrès de l'électro-physiologie, de l'histologie, de la psychologie expérimentale, de la télévision, de la théorie de l'information et de la cybernétique, etc. ont prouvé que cette opinion était erronée. D'ores et déjà on peut affirmer [28] que tous les essais relatifs aux processus de la vision qui essaieraient de séparer de façon exacte les effets physiques, physiologiques et psychologiques, sont voués d'avance à l'échec.

Compte tenu de ce fait, MÜTZE [19] a défini la notion d'«optique biologique» de la façon suivante: «Par optique biologique, on entend la science relative aux processus se déroulant dans celui de nos sens, qui réagit aux excitations physiques suscitées par des ondes électro-magnétiques d'une longueur d'onde allant de 300 $m\mu$ à 750 $m\mu$ env., par une sensation de lumière et de couleurs, alors que les processus conduisent des excitations physiques à la sensation psychologique et à la perception, en passant par l'excitation physiologique.» L'optique biologique comprend donc, à elle seule, l'optique physique, physiologique et psychologique. Par cette définition, MÜTZE a voulu souligner l'inséparabilité de ces trois branches scientifiques, sans prétendre toutefois que les recherches spéciales effectuées dans l'une de ces branches seraient superflues on perdrait par là leur valeur. Il fait remarquer seulement qu'elles doivent être considérées dans leurs rapports mutuels, et replacées dans le cadre de l'optique biologique. On doit tenir pour indiscutable cette affirmation de MÜTZE: «Unter Berücksichtigung einer ganzheitlichen Betrachtung des Sehvorganges sind wir weit davon entfernt, die auftretenden Probleme gelöst zu haben».

Notre étude analysera les deux phénomènes mentionnés de la perception des couleurs sur la base de l'optique biologique. Pour un examen plus approfondi des phénomènes, il nous faudra partir des principes de la théorie de la perception des couleurs déjà admis dans la littérature.

OSTWALD a divisé la théorie des couleurs en cinq parties principales, suivant les branches scientifiques intéressées:

1. Théorie mathématique des couleurs, systématologie des couleurs.
2. Théorie physique des couleurs, traitant des propriétés physiques des rayonnements visibles.
3. Théorie chimique des couleurs, cherchant à découvrir les rapports mutuels entre la structure chimique des corps et leurs couleurs.
4. Théorie physiologique des couleurs, examinant les relations entre l'excitation extérieure et la sensation interne. L'énergie rayonnante de la lumière provoque dans la conscience (dans l'écorce cérébrale) une sensation déterminée (un état de conscience). Cette détermination donne également la définition, souvent discutée, de la couleur. La couleur serait donc un *état de conscience*, le reflet, dans notre conscience, de l'une des propriétés physiques de l'objet perçu. L'oeil, premier système de signalisation d'après PAVLOV, perçoit et transmet vers la conscience cette propriété des objets du monde extérieur, par

laquelle ils absorbent, laissent passer ou réfléchissent certaines quantités et qualités de longueurs d'ondes sélectionnées parmi les rayonnements des sources de lumière. Cette propriété objective apparaît dans notre conscience en tant que couleur des objets.

5. Théorie psychologique des couleurs recherchant les effets que provoque la sensation colorée dans les parties corticales exécutant des fonctions supérieures.

La vision des couleurs est provoquée par l'énergie de la lumière arrivant dans l'oeil. Les rapports entre l'énergie et la longueur d'onde émise à différentes

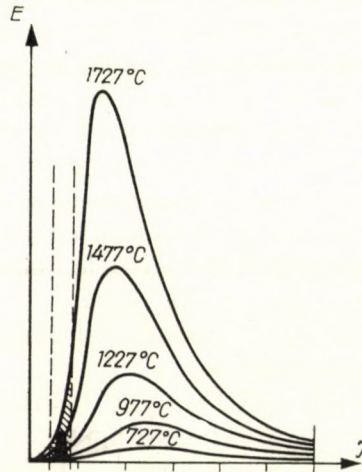


Fig. 1

températures considérées comme constantes pendant la durée de l'examen, ont été surtout examinés pour les corps absolument noirs. Ce rapport est représenté sur la figure 1. Dans le domaine de la lumière visible, c'est seulement une faible fraction de l'énergie totale qui entre en jeu, et encore notre oeil n'en perçoit que la partie marquée en noir sur la figure. Les relations des longueurs d'onde et de l'énergie rayonnée par un corps absolument noir ont été exprimées par la loi de répartition spectrale de PLANCK:

$$E_{(\lambda,t)} = \frac{hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

Dans cette équation

E = énergie rayonnée
 λ = longueur d'onde,
 t = température ($^{\circ}\text{C}$),

T = température absolue
 h, c, k = constantes

Mais cette loi n'explique pas, comme il serait désirable, la distribution de l'énergie des rayons de lumière qui sont reflétés par l'écran de projection, après avoir traversé les différents filtres colorés et les couches plus ou moins absorbantes, lors des expériences de Land.

D'après la théorie des quanta, l'énergie du quantum de lumière (du photon):

$$E = \nu h$$

où ν = fréquence, et h = constante de PLANCK. Il s'ensuit que l'énergie des quanta de lumière d'une fréquence plus élevée est plus grande, fait qui présente une importance particulière dans l'examen de la vision des couleurs, vu que notre oeil ne perçoit pas les ondes, mais les quanta de lumière [26].

Le phénomène de BRÜCKE—BEZOLD nous est déjà plus utile pour l'explication des phénomènes examinés. En vertu de ce phénomène, si l'on augmente progressivement la brillance du spectre du blanc à partir du seuil inférieur de la vision des couleurs, l'oeil humain ne distinguera d'abord, parmi les différentes couleurs, qu le bleu, le vert et le rouge, qui placés l'un à côté de l'autre, occupent toute la largeur du spectre.

Les phénomènes de *contraste simultané* et de *contraste successif de couleurs* doivent également jouer un grand rôle.

Quant au premier, il convient d'attirer l'attention sur trois lois importantes. Par *contraste simultané* peuvent aussi apparaître, sur des surfaces blanches ou grises, des couleurs non existantes. La couleur produite par le contraste n'est pas exactement la couleur complémentaire de la couleur excitatrice.

Les phénomènes du contraste simultané des couleurs peuvent également se produire, quand la couleur excitatrice de contraste est si faible, qu'elle reste au-dessous du seuil de perception colorée.

Le contraste successif est considéré généralement comme un phénomène d'adaptation locale, qui trouverait son explication en ce que la partie de la surface rétinienne, exposée au rayonnement prolongé qui produit l'effet de contraste, devient passagèrement insensible à l'effet de lumière de cette longueur d'onde. Néanmoins SCHÖBER [27] suppose, que le phénomène de fatigue joue dans ce cas un rôle important. S. V. KRAVKOV [14] explique par là que les couleurs de contraste ne sont pas identiques aux couleurs complémentaires. Le tableau ci-dessous de KRAVKOV [15] contient les couleurs de contraste successif pour le cas, où le spectateur, après avoir fixé la couleur excitatrice, regarde des plages de couleurs différentes.

La couleur et la clareté des images consécutives dépendent de la brillance et de la durée de l'excitation lumineuse, de l'état d'adaptation de l'oeil, et de la position de la surface intéressée sur la rétine.

Tableau 1

Couleur excitatrice de contraste	Couleur de la surface regardée après					
	rouge	jaune	vert	indigo	violet	blanc
rouge	rouge trouble	jaune verdâtre	vert saturé	bleu	indigo	vert émeraude
jaune	pourpre	jaune grisâtre	bleu-vert	indigo saturé	indigo-violet saturé	violet
vert	rouge saturé	orange	gris-vert	violet	pourpre	rouge pourpre
indigo	orange	jaune d'or saturé	vert jaunâtre	gris bleu	pourpre	orange
violet	orange	jaune citron saturé	vert jaunâtre	indigo bleuâtre	violet grisâtre	jaune verdâtre

Couleurs de contrastes successifs après vision successive de deux plages colorées, d'après KRAVCOV

2. Théories de la perception des couleurs

On ne connaît, à l'heure actuelle, aucune théorie universellement admise et expliquant clairement et sans conteste le phénomène de la vision des couleurs. Les deux phénomènes examinés dans cette étude sont susceptibles de corroborer ou d'affaiblir l'une ou l'autre des théories actuellement connues.

En grandes lignes, les différentes hypothèses peuvent être rangées en deux groupes. L'un est représenté par l'hypothèse de YOUNG—HELMHOLTZ, connue aussi sous le nom de théorie des trois récepteurs, qui est la plus répandue et paraît aussi la plus évidente. D'après les constatations expérimentales et l'application pratique bien éprouvée du principe de la sélection trichrome (trichromie, photographie en couleurs, etc.), l'hypothèse s'impose que l'œil humain posséderait trois sortes différentes de récepteurs, probablement trois sortes de cônes, dont chacune serait sensible à l'une des couleurs fondamentales.

La première conception de ce genre se rattache au nom de M. B. LOMONOSOV, ayant publié, dès 1756, une étude sur la lumière et la théorie de la formation des couleurs. Selon lui, les trois couleurs fondamentales sont le rouge, le jaune, et le bleu.

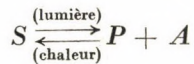
Les partisans du deuxième groupe acceptent la théorie de HERING, d'après laquelle l'œil percevrait les couleurs grâce à six sensibilités fondamentales, et c'est l'excitation de trois paires de récepteurs séparés, ou de substances visuelles, qui causerait la sensation colorée. Chacune de ces théories comporte des points vulnérables.

A côté de ces deux grandes théories, on en a vu apparaître de nombreuses autres, exposées dans le détail par SCHÖBER [27], mais la plupart de celles-ci ont eu une vie éphémère. Il faut, cependant, mentionner à part les théories de TALBOT, de MÜLLER, et surtout celle de CIBIS, qui offrent un grand intérêt.

D'après TALBOT, les hommes jouissant d'une perception normale (trichrome) des couleurs n'ont besoin que de 6 combinaisons des trois processus indépendants de la vue. D'après les recherches exécutées sur les daltoniens, la sensibilité chromatique et la sensibilité à la lumière blanche doivent avoir deux organes centraux distincts. Pour expliquer le fonctionnement des trois récepteurs, TALBOT suppose deux sortes de substances visuelles, la rhodopsine et la jodopsine, déjà découvertes dans la pratique. Celles-ci réagissent différemment aux excitations lumineuses agissant sur les différentes sortes de cônes.

MÜLLER suppose l'existence de trois sortes de cônes possédant chacune des substances visuelles différentes, qu'il nomme respectivement protéine, deutérine et tritine. Celles-ci se décomposeraient sous l'effet de l'excitation lumineuse. De celles-ci, l'excitation se transmettrait aux substances intermédiaires, où elle se présente déjà sous forme de valence de couleur, mais non pas encore comme couleur.

CIBIS essaie d'expliquer les phénomènes de la perception des couleurs par des processus purement électrochimiques. Il a construit les courbes d'absorption de ses récepteurs de couleurs conformément aux courbes de valence normale établies par la Commission Internationale (I. B.). En outre, cette théorie s'accorde bien avec la théorie photochimique classique de la perception des couleurs. Selon cette dernière théorie, la concentration du produit de dissociation lumineuse P de la substance visuelle S augmenterait, en effet, jusqu'à atteindre le seuil nécessaire pour la production de l'impression lumineuse, ce que l'organe de vue signale par une sensation de lumière. Ainsi, le processus photochimique de la vue serait caractérisé par la formule:



où S est le nombre des molécules de la substance visuelle, P le nombre de molécules protéiques dégagées, et A le nombre d'autres molécules caractéristiques, par exemple de celles de la vitamine A , pour le pourpre rétinien. Sous l'effet de la lumière, la substance visuelle S se décompose donc, et peut produire une sensation visuelle. Après la suppression de la lumière se déclenche un processus chimique contraire, au cours duquel une énergie thermique se dégage. *Cependant le rétablissement de l'équilibre nécessite un certain temps*, ce qui peut expliquer de nombreux phénomènes.

CIBIS suppose que trois différents photorécepteurs se trouvent sur la rétine: X_s , Y_s , Z_s , dont les maxima d'adsorption s'observent respectivement aux longueurs d'onde de 600, 555 et 445 $m\mu$. Le schéma de la sensation colorée, établi par CIBIS, est représenté sur la figure 2.

Si, sous l'effet d'une radiation lumineuse quelconque, une excitation vient affecter un cône, il s'y produit une réaction chimique et par suite une précipitation d'ions. Il en résulte un champ d'excitation électrique. La réaction

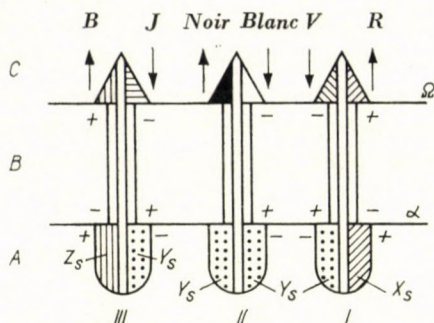


Fig. 2

chimique provoque un changement de la concentration ionique, se transmettant à travers le nerf optique, jusqu'à l'écorce cérébrale. Les cations se meuvent vers les surfaces limites ayant une charge négative, et les anions en direction de celles pourvues d'une charge positive.

3. Expériences de Land

Les expériences de LAND ont été amplement commentées par la littérature étrangère, et décrites en partie par la presse scientifique hongroise. En outre, une conférence faite à la Société Scientifique d'Optique et de Technique Cinématographique a été consacrée spécialement à ce sujet. Aussi n'exposerons-nous ici que l'essentiel des expériences les plus importantes.

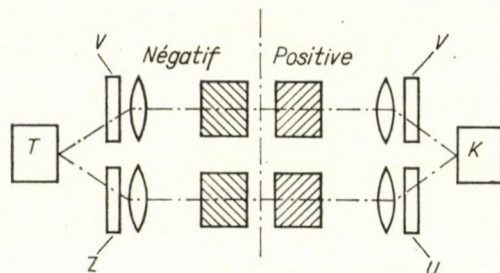


Fig. 3

Les communications de LAND comportent, en tout, la description de 27 expériences. Cet auteur a trouvé qu'en abandonnant complètement la prise de vues et la projection à filtre bleu, lors de la projection classique en trois couleurs de MAXWELL, les images, prises à filtres rouge et vert, une fois projetées avec ces mêmes filtres donnaient une image aux couleurs originales, correspondant à la projection en trois couleurs, sans différence appréciable. Le schéma de principe de cette expérience est donné sur la figure 3.

Par la suite, LAND abandonnant le projecteur à ondes courtes (vert), projeta à travers un filtre rouge la diapositive noir et blanc prise par un filtre de grandes longueurs d'ondes (rouge), puis supprima le filtre vert du projecteur de la diapositive faite avec un filtre vert, et fit une projection sur l'image précédente. Il reçut ainsi sur l'écran une image en couleurs naturelles.

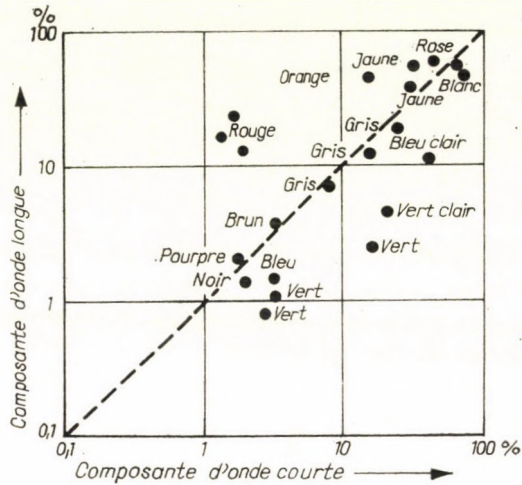


Fig. 4

Il pouvait faire la constatation surprenante, que les intervalles entre les ondes courtes et longues utilisées pour la projection de l'image colorée pouvaient être relativement faibles.

Les images projetées par la méthode de LAND pouvaient être photographiées et projetées avec la méthode normale de la photographie en couleurs [17, 21].

LAND pense avoir réussi à établir la règle qui permet de prévoir, pour un point quelconque de l'image, la couleur visible lors de la projection. D'après lui, les couleurs des images naturelles sont déterminées par le rapport relatif des ondes longues et courtes, distribuées dans l'image entière. Les relations sont indiquées sur le diagramme de la figure 4.

4. Recherche d'une explication des expériences de Land, d'après les théories de la perception des couleurs

En considérant les données publiées sur les expériences de LAND, les résultats de quelques-unes de ses expériences répétées en Hongrie, l'explication donnée par LAND lui-même et les lois actuellement connues de la théorie et de la vision des couleurs, on peut établir ce qui suit.

Les phénomènes peuvent être divisés en deux groupes caractéristiques. Les phénomènes qui peuvent être fixés par le procédé normal des films en cou-

leurs ont un caractère objectif. Ceux-ci ne sauraient être expliqués par la constitution et le comportement spéciaux de l'oeil humain, comme le fait LAND. Il est en effet inimaginable que les émulsions sensibles à la couleur se comportent de la même façon subjective que l'oeil. D'autre part, sur l'image obtenue de la manière décrite, ainsi que sur sa photographie en couleurs, les couleurs selon les *contrastes simultanés* peuvent également se produire, en fonction naturellement de la distribution des différentes taches de couleurs. C'est déjà là un effet subjectif.

Il est également possible que les spectateurs voient des images secondaires négatives en couleurs, sous l'effet du *contraste successif*. Un contraste successif et une image secondaire se produisent si la couleur d'une surface regardée change successivement dans le temps, ou encore si l'oeil regarde successivement des champs d'images de couleurs différentes. Ceux-ci peuvent se produire lors des expériences de LAND, où l'intensité et la durée de l'effet d'excitation et l'état d'adaptation de l'oeil jouent également un certain rôle. Quant à l'affirmation, d'après laquelle les résultats de ces essais seraient en contradiction avec les constatations de NEWTON et «par là, les hypothèses séculaires de la science se sont écroulées» [20], elle ne repose sur aucune preuve. En effet, les deux composantes absolument nécessaires ne sont pas rigoureusement monochromatiques. En outre, il est indispensable d'employer pour chaque projection unicolore, la lumière blanche [17] qui, d'après les constatations mêmes de NEWTON, représente la totalité du spectre solaire.

Il est toutefois incontestable que LAND expérimenta une méthode permettant de créer des conditions très favorables pour la vision subjective des couleurs par l'oeil humain.

5. L'effet de couleur selon Helmholtz—Benham

En 1957, HEMARDINQUER [7] a signalé que des amateurs anglais remarquaient des effets de couleur sur l'écran du téléviseur pendant les émissions, bien que celles-ci aient été données exclusivement en noir et blanc. Dans certains laboratoires, on essaie également de réaliser des images colorées à l'aide d'objets ou de taches noirs et blancs.

La première observation de ce genre a été faite par HELMHOLTZ, par la rotation du disque représenté sur la figure 5. D'après sa publication, aux points indiqués par les flèches sont apparues les couleurs marquées sur la figure.

Récemment, on a fait des expériences avec les disques de BENHAM. Sur un disque blanc ont été points des champs, c'est-à-dire des arcs de cercle noirs, de la façon représentée sur la figure 6. En faisant tourner un tel disque en direction de la flèche, et en l'éclairant par une lumière monochromatique appar-

tenant à la zone médiane du spectre visible, on observe des couleurs différentes dans chaque couronne.

Étant donné que la publication n'indique pas les détails (nombre de tours, etc.), et comme d'autre part, le phénomène présente un intérêt pratique, il nous a paru utile de faire nous-mêmes des expériences.

Avec le disque de HELMHOLTZ, on n'a réussi à produire un effet de couleur à aucune vitesse de rotation et à aucun éclairage.

Par contre, les premières expériences faites avec le disque de BENHAM ont démontré qu'avec un éclairage et une vitesse convenables, des effets de

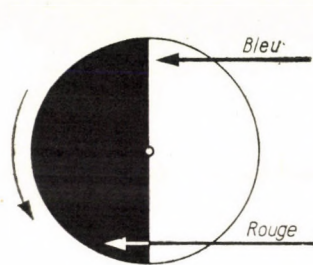


Fig. 5

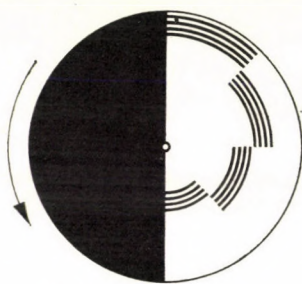


Fig. 6

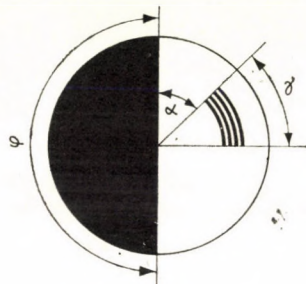


Fig. 7

couleur sont suscités chez presque tous les spectateurs. Les couleurs ainsi perçues peuvent être différentes pour chaque individu, mais les sujets ayant une vue normale (trichrome), voient à peu près les mêmes couleurs quand les conditions sont identiques. Les résultats d'essais indiqués ci-après sont les résultats moyens d'essais faits sur des personnes ayant une vision de couleurs impeccable, et répétés 5 à 10 fois à des occasions différentes. Les symboles employés sont indiqués sur la figure 7.

Pour éviter l'incertitude due à l'effet simultané de plusieurs paramètres, on a exécuté cinq séries d'essais. Dans chacun des essais particuliers, on n'a chaque fois varié qu'un seul paramètre.

La 1^{ère} série d'essais avait pour but de déterminer l'éclairage le plus avantageux. Les essais suivants ont été déjà exécutés avec cet éclairage (à la lumière d'une lampe à incandescence blanche Tungram de 100 W). L'éclairage monochromatique n'était pas satisfaisant. La lampe à arc du projecteur normal et la lampe à xenon ont suscité un meilleur effet de couleur que l'éclairage du jour, mais moins bon que la lampe à incandescence blanche.

Par la 2^e série d'essais, on a déterminé la vitesse de rotation la plus avantageuse. Les mesures stroboscopiques ont démontré que les effets de couleur les plus avantageux commencent à une vitesse de 12 à 13 tours/sec et subsistent jusqu'à 3 à 6 tours/sec environ. Au-dessus d'une vitesse de 12 à 13 tours, la teneur en gris des couleurs vues augmente, et les tons deviennent de moins en moins saturés. Au-dessus d'une fréquence de 50, il ne se produit plus

aucun effet de couleur, et les différentes nuances de gris sont seules visibles dans les couronnes, selon les règles de la théorie physique de la lumière.

La III^e série d'essais servait à prouver la nature subjective du phénomène. Des disques de différents types tournés à des vitesses différentes, on a fait des photographies en couleurs chaque fois qu'ils ont provoqué dans l'oeil un effet de couleur défini. Or, on n'a trouvé aucun effet de couleur sur les films en couleurs développés, tandis que les couleurs de la table des couleurs, placée à côté des disques, ont apparu parfaitement.

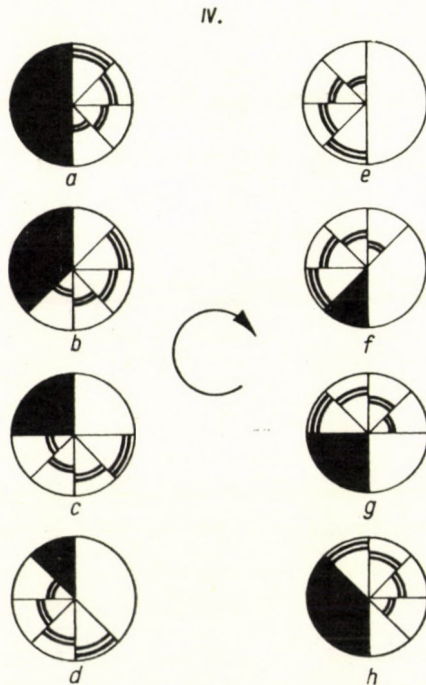


Fig. 8

La IV^e série d'essais s'est proposée l'examen approfondi de l'impression colorée due aux segments noirs et blancs et des segments excitateurs, avec $\gamma = 45^\circ$. En partant des disques de BENHAM, on a exécuté huit essais partiels avec les disques, selon la figure 8. L'examen du procès-verbal détaillé a prouvé que l'apparition des couleurs se produit selon des règles bien définies. Celles-ci ont été résumées par le tableau 2.

La V^e série d'essais comportait les mêmes examens, mais avec $\gamma = 90^\circ$, et comparait en même temps l'excitation par lignes en arc avec l'excitation par un gris moyen. Les sept disques utilisés sont représentés sur la figure 9.

Des résultats des séries d'essais N^{os} IV et V, on peut établir plusieurs règles, dont voici les principales:

Tableau 2

Règles établies pour $(\varphi + \alpha)$ d'après les résultats de la série d'essais N° IV ($\gamma = \text{Constante} = 45^\circ$)

Symbole Notation	φ (degré)	Couleurs apparaissant à $(\varphi + \alpha)$ degrés							
		$\alpha \rightarrow$	0	45	90	135	180	225	270
a	180	$\varphi + \alpha$ v_1	180 bleu	225 bleu violet	270 gris brun	315 rouge foncé			
		v_2	bleu foncé	bleu	vert	vert brun			
b	135	$\varphi + \alpha$ v_1		180 bleu	225 vert bleu	270 brun vert	315 rouge		
		v_2		bleu clair	bleu foncé	vert	rouge		
c	90	$\varphi + \alpha$ v_1			180 bleu clair	225 vert bleu	270 vert	315 rouge violet foncé	
		v_2			bleu clair	bleu foncé	vert	rouge	
d	45	$\varphi + \alpha$ v_1				180 bleu gris	225 verdâtre	270 brunâtre verdâtre	315 brunâtre
		v_2				bleu violet	verdâtre	vert	rougeâtre
e	0	$\varphi + \alpha$ v_1	0 —	45 —	90 —	135 —	180 —	225 —	270 —
		v_2	—	—	—	—	—	—	—
f	45	$\varphi + \alpha$ v_1	45 —	90 bleu violet clair	135 — verdâtre	180 — bleuâtre			
		v_2	—	bleu violet clair	verdâtre	bleuâtre			
g	90	$\varphi + \alpha$ v_1	90 bleu foncé	135 bleu clair	180 gris bleu	225 vert brun			
		v_2	bleu	bleu violet	bleu	vert brun			
h	135	$\varphi + \alpha$ v_1	135 bleu foncé	180 bleu gris	225 gris- vert	270 brun verdâtre			
		v_2	bleu	bleu- violet	bleu				

$v_1 = 12-6$ tours/sec; $v_2 = 6-2$ tours/sec.

a) A la valeur de $(\varphi + \alpha) = 180^\circ$, et indépendamment de la valeur de φ , il apparaît chaque fois une couleur bleue.

b) A la valeur de $(\varphi + \alpha) = 270^\circ$ et à basse fréquence, indépendamment de la valeur de φ , une couleur verte est visible.

c) A la valeur de $(\varphi + \alpha) = 315^\circ$ et indépendamment de la valeur de φ , c'est toujours la couleur rouge, ou sa nuance violacée qui apparaît.

On peut établir, en outre, que:

k.

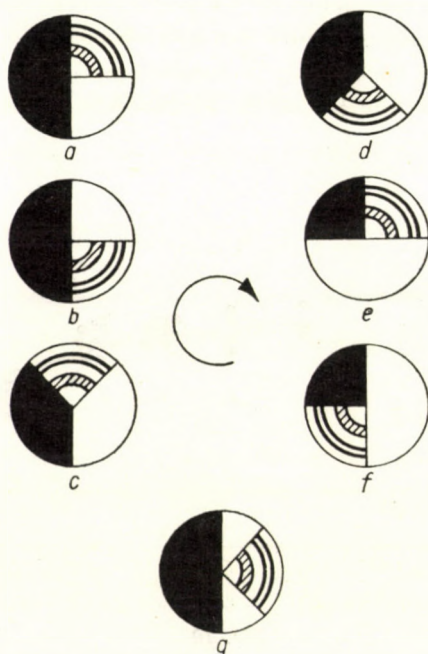


Fig. 9

d) Sous l'influence du segment exciteur γ précédant immédiatement le segment noir φ , et indépendamment de la valeur de γ , il apparaît toujours une couleur bleue (IVa1, IVg1, IVh1, Va, Vc, Ve).

e) Sous l'influence du segment exciteur succédant immédiatement au segment noir φ , et indépendamment de la valeur de l'angle γ , on voit toujours apparaître une couleur rouge (IVa4, IVb4, IVc4, Vb, Vd, Vf).

f) Le segment exciteur γ succédant au segment noir φ après une période blanche d'env. 45° , suscite toujours une couleur verte, indépendamment de la valeur de φ et de γ (IVa3, IVb3, IVc3, IVd3, IVh4).

g) La valeur d'angle du segment exciteur γ n'influence pas le ton de la couleur suscitée, excepté teneur en blanc. Les constatations des points a, b, et c ci-dessus, sont donc indépendantes de la valeur de γ .

h) A une vitesse de rotation décroissante, il apparaît, dans la plupart des cas (IVa3, a4, b2, c2, d1, d3, g2, g3, h2, h3, h4; a2, c4, d4) une couleur de longueur d'onde plus petite.

6. Recherche d'une explication de l'effet de couleurs de Benham, d'après nos expériences et les théories de la vision des couleurs

Examen d'après les expériences de l'auteur.

Les résultats de l'expérience N° IV peuvent être inscrits dans un système de coordonnées. Choisissons comme axe des abscisses $(\varphi + \alpha)$, et mettons sur l'axe des ordonnées le spectre de la lumière blanche, suivant la figure 10. La figure montre bien que les effets de couleurs apparaissant à différentes

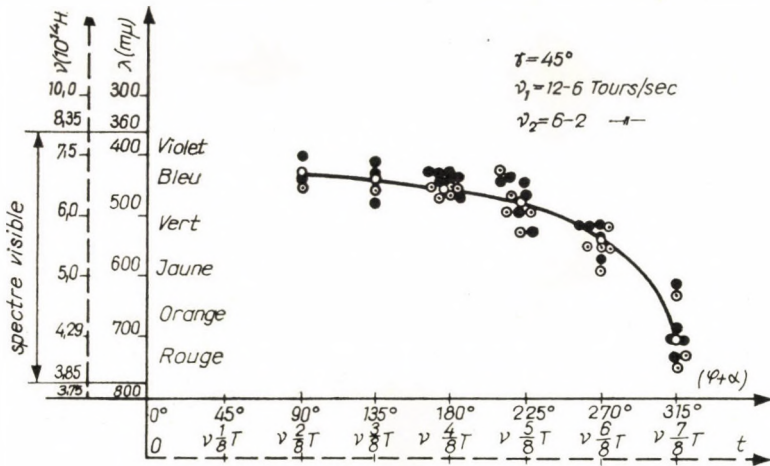


Fig. 10

valeurs de $(\varphi + \alpha)$ se groupent autour de certains tons de couleur. En reliant par une courbe continue les centres de gravité de ces groupes, on reçoit une courbe parabolique. Cela veut dire que la longueur d'onde de la couleur apparue augmente de plus en plus, en fonction de la valeur d'angle (et du temps correspondant) valable du début du segment excitateur jusqu'à la fin du segment noir.

On peut ainsi énoncer la loi suivante:

1. Le ton de la couleur apparue est déterminé par la valeur $(\varphi + \alpha)$, la valeur du segment excitateur étant constante. Plus $(\varphi + \alpha)$ est grand, plus la longueur d'onde de la couleur apparue augmente.

Étant donné que l'énergie du photon est proportionnelle à la fréquence, la thèse ci-dessus peut être aussi définie de la façon suivante:

2. L'énergie de la couleur de l'image secondaire, apparue sous l'effet d'un même segment excitateur, est d'autant plus faible que le temps écoulé

depuis l'arrêt de l'excitation [correspondant au déplacement angulaire $(\varphi + \alpha)$] est plus long.

La probabilité de l'effet de l'image secondaire est bien démontrée par la courbe visible sur la figure 11. Celle-ci montre les couleurs apparaissant lors des expériences Nos IVa1 et IVa4 en fonction de α , γ et φ étant constants. A un nombre de tours constant, la durée de temps nécessaire pour susciter une image secondaire est définie uniquement par la durée du déplacement angulaire α .

En connaissance du caractère régulier observé lors des expériences, et des lois qui en peuvent être déduites, on peut admettre l'hypothèse suivante.

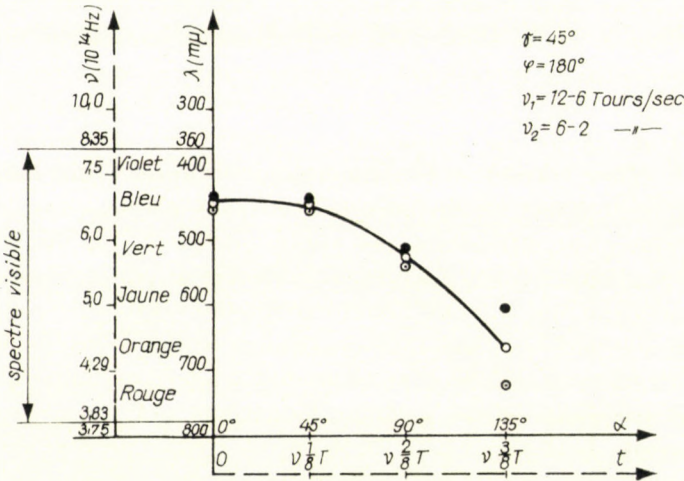


Fig. 11

Hypothèse

La vision subjective des couleurs qui se produit lors de la rotation du disque de BENHAM ou d'autres disques en noir et blanc construits selon un principe analogue, se réalise suivant les phases ci-après:

- a) Excitation par un segment exciteur lorsque les photorécepteurs absorbent de l'énergie.
- b) Si cette énergie est suffisamment grande, elle suscite une couleur latente probablement violette ou blanche (valence) dans le centre visuel.
- c) L'énergie diminue en fonction du temps.
- d) Le ton de la couleur latente varie d'une façon continue du violet au rouge, conformément à la diminution de l'énergie du quantum de lumière.
- e) Pour rendre visible la couleur latente, il est nécessaire de produire un changement d'excitation en noir et blanc, sous l'effet duquel on verra la couleur latente correspondant précisément à la diminution d'énergie.

f) Si la disparition de la période noire est suivie par une nouvelle période excitatrice après un court segment blanc, ce segment blanc suscite — en vertu de la loi du contraste successif — la couleur complémentaire de celle qui apparaîtrait normalement.

7. Recherches basées sur les théories des couleurs

Les phénomènes ci-dessus décrits peuvent être le mieux expliqués par la théorie moderne de CIBIS. On peut supposer que sous l'effet du segment excitateur, il se produit, dans les cônes, une réaction chimique et une précipitation d'ions, créant dans la zone initiale *A* de la figure 2, un champ d'excitation électrique. Comme l'effet d'excitation du segment excitateur est provoqué par les limites entre les surfaces élémentaires noires et blanches, on peut supposer que l'effet d'excitation s'étend uniformément sur les trois types de photorécepteurs. Dans ce cas, les composantes négatives Y_s , se retrouvant dans les trois types de cônes, entrent en fonctionnement. D'après CIBIS, leur activation est due nettement à une action nerveuse, et les sensations des couleurs produites provoqueraient différentes perceptions de couleurs, suivant les types de cônes. La production de cet effet de couleur est réglé par la durée des périodes en noir ou en blanc, qui suivent l'effet excitateur.

D'après l'hypothèse, l'atteinte du seuil ne suffirait pas, à elle seule, à provoquer l'impression colorée. Il ne se produit d'abord qu'une couleur latente, disparaissant progressivement pendant la période noire qui suit l'effet excitateur, par suite de la disparition du champ électrique produit sur les photorécepteurs, et du recommencement du mélange des cathions et des anions. Suivant le temps qui s'écoule entre le passage de la zone noire et l'apparition de la limite suivante entre zones noires et blanches, l'effet d'excitation dépassera plus tôt ou plus tard le seuil de la sensation de couleur. C'est alors que naîtra, dans le cerveau, la sensation réelle de la couleur latente, correspondant à ce moment précis à la valeur d'énergie diminuant d'une façon continue.

Le fait que les couleurs apparaissant lors des expériences décrites sont perçues à des degrés divers par les différents sujets examinés, s'explique par la variabilité individuelle de la valeur limite de la brillance, soulignée par HERING. Quant à cet autre fait que le rouge, le vert et le bleu sont généralement les seules couleurs apparaissant avec netteté, celui-ci pourrait trouver son explication dans le phénomène de BRÜCKE—BEZOLD, mentionné plus haut.

On peut, à juste raison, se poser encore la question de savoir, que si le ton de la couleur vue dépend du temps qui s'écoule entre l'effet excitateur et la nouvelle excitation en noir et blanc, qui lui succède, pourquoi alors le ton de la couleur obtenue n'est-il pas mieux influencé par la vitesse des disques. Cela peut s'expliquer par le fait, qu'à une vitesse plus petite, il y a augmentation de la durée non seulement de l'absorption, mais aussi la diminution de l'énergie.

Si le ton de la couleur perçue n'est pourtant pas tout à fait indépendant du nombre de tours, c'est que l'absorption, resp. le dégagement d'énergie en fonction du temps ne s'effectue pas suivant une relation identique.

8. Conceptions relatives à l'utilisation des effets de couleur dans la technique cinématographique et la télévision

a) *Emploi dans la technique cinématographique.* Les expériences de LAND ont été exécutées en utilisant la photographie en noir et blanc et la projection de diapositives. Leur emploi dans la cinématographie ne présente donc, en principe, aucune difficulté. La solution pratique est cependant moins simple qu'on ne pourrait le croire. Il faut d'abord utiliser deux caméras en marche synchrone, dont l'une nécessite l'emploi d'un filtre coloré à ondes courtes, et l'autre l'emploi d'un filtre à ondes longues, ce qui ne cause encore aucun problème. La vraie difficulté consiste à faire des images coïncidentes. Si, en effet, les appareils sont juxtaposés, ils feront une série d'images stéréoscopiques qui, projetées les unes sur les autres, formeront sur l'écran une image trouble et vague. Si les objectifs de prises de vue sont superposés en hauteur, alors l'erreur est bien moins apparente, car l'oeil est moins sensible aux erreurs parallaxiques en hauteur. Mais ce défaut ne doit pas non plus dépasser une certaine valeur. Or, avec deux caméras placées l'une au-dessus de l'autre, on dépasse déjà considérablement cette limite, de sorte qu'il faut soit construire une caméra spéciale à deux objectifs, placés très près l'un au-dessus de l'autre, soit travailler avec deux appareils distincts, où les rayons incidents amenés de deux points directement superposés sont transmis aux objectifs par un système de miroirs ou de prismes. Cette déviation des rayons de lumière rend la prise de vue très compliquée, tout comme dans les solutions bien connues des appareils stéréoscopiques. Des difficultés encore plus grandes empêchent de trouver une solution simple pour la projection, avec ou sans filtre, qui doit être effectuée simultanément sur le même endroit; ici l'emploi de deux projecteurs en marche synchrone est indispensable. Si seulement la prise de vue était plus compliquée et plus onéreuse, mais non la projection, ce système pourrait encore espérer avoir du succès. Mais en raison des difficultés déjà indiquées, et vu aussi la faible tonalité de l'image obtenue, la méthode de LAND ne semble pas pratiquement utilisable pour la projection des films cinématographiques.

Dans l'application, pour la projection cinématographique, des phénomènes observés chez les disques BENHAM et d'autres disques analogues, la difficulté est due surtout au mouvement périodique du film. Il faut donc examiner, comment les résultats acquis avec les disques de mouvement continu et de vitesse variable, peuvent être utilisés pour le film de mouvement périodique et ayant une fréquence fixe de 24 images/sec.

L'effet de couleur le plus avantageux s'étant présenté à la vitesse de disque de six tours par seconde, celle-ci serait à imiter à la projection normale des films. Comme le déplacement correspondant à une hauteur d'image du film s'effectue en $1/24$ sec, y compris la période obscure, l'appareil normal projette 4 images en $1/6$ seconde. Le disque fait un tour complet en $T = 1/6$ sec, c'est-à-dire

$$T = 4 \frac{1}{24} \text{ sec, correspondant à } 360^\circ.$$

Ainsi, à chaque champ d'image du film appartient un segment de disque de $360/4 = 90^\circ$. Un disque sur lequel un quelconque des segments n'est pas de 90° ou son multiple entier, ne se prêterait pas à la projection normale. Les relations sont illustrées par la figure 12.

Les expériences décrites avaient prouvé que les effets de couleur les plus favorables se réalisent lorsque l'angle γ est de 45° à 60° , ou lorsque les valeurs

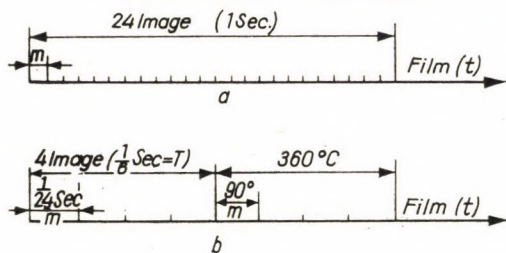


Fig. 12

des angles a et φ ne sont pas divisibles par 90° . Les couleurs *bleue* et *rouge* peuvent encore être relativement bien obtenues avec un angle γ de 90° et avec le valeur de $a = 0$, resp. 90° . Mais la difficulté est insurmontable quand on veut obtenir la couleur *verte*.

À la transmission des signes de disque sur le film, il faut, en outre, considérer deux autres problèmes importants:

1. Les signes marqués sur le disque se confondant le long de cercles concentriques, par suite de la rotation continue, les points semblent être des segments d'arc. Par contre, les images projetées du film apparaissent comme des séries d'images fixes, de sorte que les points conservent leur apparence de points après la projection.

2. Dans les méthodes de projection cinématographique ordinaires, il se produit, pendant la durée de chaque changement d'image, une période obscure due à l'obturateur. Chez les appareils de projection utilisant une croix de Malte à quatre branches par ex., la durée de cette période est le quart d'une période entière, c'est-à-dire $1/96$ de seconde. L'influence que ces périodes

obscurées répétées ont sur l'effet de couleur, a pu être expérimentalement démontré par le disque représenté sur la figure 13.

On peut établir que ces périodes obscures n'ont pas d'influence sur le ton des couleurs produites, mais diminuent leur degré de saturation.

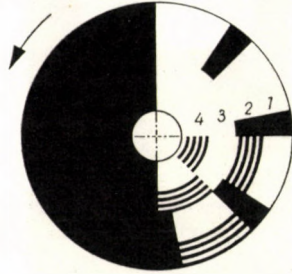


Fig. 13

Pour obtenir les couleurs *bleue* et *rouge*, nous avons utilisé respectivement les disques d'essai Va et Vb. Vu qu'à chaque période d'image correspondent 90° sur le disque, la transmission des résultats sur le film, suivant la figure 14 n'a pas présenté de difficultés. Pour obtenir la couleur *verte* (pour laquelle il faut avoir un segment de 45° sur le disque), on a établi le montage 3, visible sur la figure 14. La série d'images ainsi projetée correspond au disque tournant à la vitesse de 3 tours/sec.

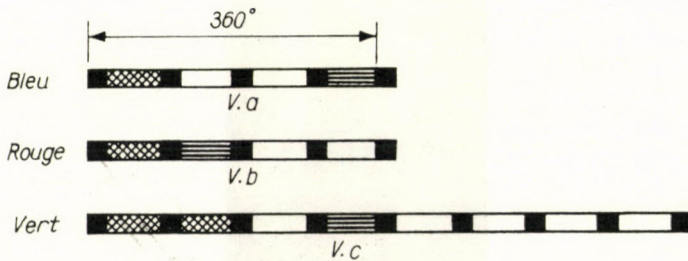


Fig. 14

Il restait encore à éclaircir les questions suivantes:

- a) Comment utiliser le système de points mentionné dans la littérature [7], comme champ excitateur?
- b) Peut-on remplacer le système de points par une surface grise?
- c) Quelle est l'importance de la densité des lignes, lors de la production d'une couleur grise par des lignes longitudinales?

C'est pour éclaircir toutes ces questions qu'on a eu recours au film expérimental, visible sur la figure 15.

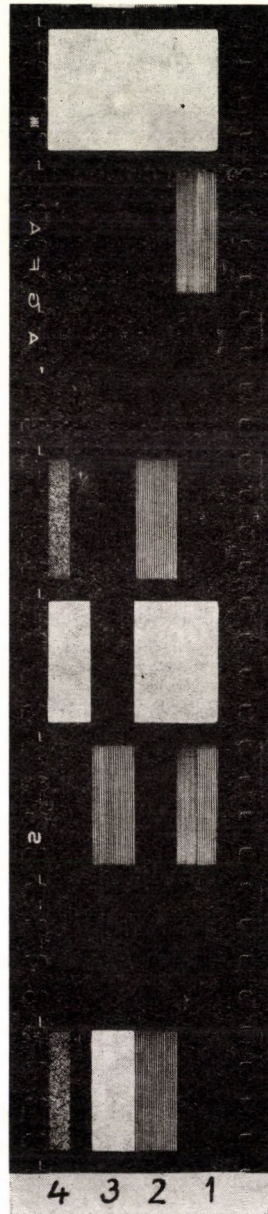


Fig. 15

Résultats des expériences

Les résultats des expériences de projection exécutées en juin 1960 sont les suivants:

1. Les résultats concordent généralement avec ceux obtenus avec le disque représenté figure 13.
2. La colonne 1 montre nettement le ton bleu, et la colonne 2 le ton rouge, mais avec une forte teneur en gris.
3. L'effet de la couleur verte ne se présente pas dans la colonne 3.
4. En cas d'excitation linéaire, le ton de couleur est indiqué par les lignes, mais non par leurs intervalles.
5. Les deux densités de lignes produisent un effet de couleur identique.
6. Les deux moitiés de la colonne 4 montrent une couleur rouille à l'endroit des signes noirs.
7. Les images cinématographiques d'un contraste plus accusé donnent un meilleur effet de couleur.
8. L'effet de couleur des images nettes est supérieur à celui des images floues.

Considérations basées sur les résultats d'expériences

Par une application convenable du phénomène décrit, on peut obtenir des effets de couleurs avec un simple film en noir et blanc. Les couleurs subjectives ainsi obtenues ne sont pas équivalentes au coloris des films produits par la méthode actuelle, mais en raison du prix élevé de ces derniers, la cinématographie subjective peut avoir son mot à dire. Lors de l'application, il faut penser surtout à l'effet de couleur psychologique. Par les premières expériences décrites, on a déjà réussi à obtenir un effet de couleur froid (bleuâtre) et un effet de couleur chaud (rouge). Mais l'application pratique nécessite des expériences supplémentaires.

Il serait souhaitable d'augmenter la fréquence d'images, ce qui pourrait se faire le plus facilement par l'augmentation de la vitesse de déroulement du film. Mais cette solution est à rejeter, parce qu'elle entraînerait une plus grande consommation de film, et exigerait en outre une transformation des appareils de projection. Un autre moyen d'augmenter la fréquence des images serait l'emploi de deux projecteurs en marche synchrone, ce qui est encore moins désirable. Il faut donc chercher une autre méthode pour améliorer l'effet de couleur subjectif.

Une solution possible serait celle, où les éléments excitateurs n'occuperaient pas la même position sur les images successives du film. Ils apparaîtraient donc, lors de la projection, comme des points en mouvement ou des lignes, et se rapprocheraient mieux ainsi des effets perçus sur les disques.

Quant à l'application pratique de l'effet de couleur subjectif examiné, nous pouvons conclure:

Les signes excitateurs noirs et blancs peuvent être d'ores et déjà appliqués, sans difficulté, aux dessins animés, selon la règle déjà établie.

Une autre question se pose pour l'emploi des films exécutés avec un appareil de prise de vues normal. Ici, il pourrait se concevoir que la transmission sur le film des signes excitateurs ne s'effectuerait qu'ultérieurement, aux laboratoires. La technologie de ce procédé devra être élaborée en fonction des expériences ultérieures.

b) *Application à la télévision*

La publication des expériences de LAND, en 1959, a suscité un grand intérêt parmi les spécialistes de la télévision. La télévision en couleur est bien plus compliquée que la télévision unicolore. Aujourd'hui encore, il n'y a guère que des émetteurs d'essai qui fonctionnent en Europe. Les téléviseurs normaux ne peuvent pas être utilisés pour la réception en couleur. Il serait donc très intéressant de trouver une méthode simple permettant de prendre des émissions en couleurs plus ou moins parfaites, avec les appareils de télévision en noir et blanc actuels.

Il y a plusieurs solutions possibles pour l'application des expériences de LAND dans la télévision. L'imitation exacte conduirait cependant à une méthode compliquée. Il faudrait en tout cas travailler simultanément avec deux caméras de télévision à filtres colorés pour ondes courtes, resp. longues, compte tenu des difficultés déjà décrites pour les caméras cinématographiques. Il faudrait ensuite assurer que le récepteur reçoive les deux images séparément. Au récepteur, les images prises avec un filtre coloré «court» doivent apparaître en vert sur l'écran. En même temps, l'image prise à travers un filtre «long» devrait être projetée sans effet de filtrage, sur le même écran. On peut aussi imaginer une autre solution, laquelle, au prix d'une certaine incommodité — emploi de lunettes uni- ou bicolores, par exemple — permettrait d'obtenir plus simplement les effets de couleur que nous avons examinés.

On ne dispose pas de données exactes sur l'emploi du disque BENHAM dans la télévision. D'après HEMARDINQUER [7], on présente en Amérique, depuis 1953, des images subjectives de télévision en couleurs. Le fait que cette solution ne s'est pas répandue, permet de conclure que les résultats ne sont pas encore satisfaisants. Comme les expériences de LAND n'ont été publiées qu'en 1959, on peut supposer que la méthode mentionnée produit les couleurs subjectives selon le principe des expériences de BENHAM.

D'après les résultats d'expériences décrits dans cette étude, on pourrait imaginer que le faisceau de balayage du tube de prise de vues soit réglé par un dispositif central de commande à programme, de façon telle que sur l'écran

du tube cathodique regardé par les spectateurs, les périodes obscures et claires varient selon un programme correspondant à l'effet de couleur désiré. Cette solution est simple, si le ton de couleur désiré peut être appliqué uniformément, sur toute la surface de l'écran. La tâche est beaucoup plus compliquée si la surface à colorer représente des êtres vivants ou des objets en mouvement.

Pour l'application pratique, de nouvelles expériences seront nécessaires.

BIBLIOGRAPHIE

1. AUBER, L.: A színérzékelés fizioiógiája (Physiologie de la sensation des couleurs). A gyógy-szerész 10. 1955. pp. 123—126.
2. BERTY, J.: Szín—színkeverés—színmérés. (Couleurs—Mélange de couleurs—Colorimétrie). Kép és Hangtechnika 2. 1956. pp. 133—135 et 3. 1957. pp. 77—80.
3. BOLLER—BRINKMANN—WALTER: Einführung in die Farbenlehre. Bern. Francke V. 1947. p. 134.
4. GRANIT, R.: Electrophysiological Analysis of the Fundamental Problem of Colour Reception. Proc. Phys. Soc. Amer. 57. 1945. pp. 447—463.
5. GRANIT, R.: Physiological Theory of Colour Perception. Nature. 151. 1943. pp. 11—44.
6. GRIMSEHL: Lehrbuch der Physik III. Optik. Leipzig. Teubner V. 1955. p. 343.
7. HEMARDINQUER, P.: Peut-on voir des images en couleurs, avec des films en noir et blanc? La Technique Cinématographique 26. 1957. No 181. pp. 283—284. Filmtechnikai és Gazd. Táj. 35/4—5—61. 1958.
8. HRUSKA, R.: Általános színtan és színmérés. (Théorie générale des couleurs et colorimétrie). Budapest. Közg. és jogi könyvk. 1956. p. 330.
9. IVÁNYI, J.: Fény és szín, színlátás, színmérés. Budapest. (Lumière et couleur, perception des couleurs, colorimétrie). Budapest, Könnyűip. Könyvk. 1950. p. 116.
10. JUDD, D. B.: Appraisal of Lands Work on Two-Primary Colour Projections. The Journal of Photographic Science. 8. 1960. pp. 125—139.
11. KAHÁN Á.: A fényézés. (L'impression lumineuse). Szemészet. 90. 1953. p. 35—40.
12. K. E.: Meglepetés az optikában: színes vetítés vörös és szürke színekből. (Une nouveauté surprenante en optique: projection multicolore avec les couleurs rouge et grise). Népszerű Technika 9. 1960. pp. 52—53.
13. KETTESY A.: Színlátás. (La vision des couleurs). Szemészet. 90. 1953. pp. 9—33.
14. Кравков, С. В.: Цветовое зрение. Москва, Академия Наук СССР, 1951. p. 175.
15. — Das Farbsehen. Berlin. Akademie Verlag. 1955.
16. LAND, E. H.: Color vision and the natural image I. Proc. Nat. Acad. Sci. 45. 1959. pp. 115—129. No. 1., II. Proc. Nat. Acad. Sci. 45. 1959. pp. 636—644. No. 4.
17. LAND, E. H.: Experiments in color vision. Scient. American 200. 1959. 5. p. 84—99.
18. LUKÁCS, GY.: Színmérés (Colorimétrie). BÁRÁNY N.: Optikai műszerek (Instruments optiques), p. 661—685. Budapest. Nehézipari Könyvk. 1952.
19. MÜTZE K.: Ist die Forschung in der biologischen Optik noch heute aktuell? Optik aller Wellenlängen pp. 150—162. Akademie Verlag. Berlin. 1959. p. 395.
20. NEIDHARDT, P.: Farbfernsehen — mit zwei Grundfarben? Radio und Fernsehen. 9. 1960. pp. 103—106.
21. Neue Theorie des Farbsehens: Angewandte Chemie. 71. No. 7. 1959. p. 291.
22. POHL P. W.: Optik. Berlin. Springer V. 1943. p. 324.
23. POLYAK S. L.: The retina. Chicago. University Press. 1948.
24. Рутман, Г. Н.: Пороги цветоразличения. Москва, ДАН. 1953. 92, 5, 943—947.
25. RICHTER M.: Neue Technik der Farbproduktion oder neue Theorie des Farbsehens? Photo-Technik und Wirtschaft 10. 1959. pp. 559—560.
26. RÜCHARDT E.: Sichtbares und unsichtbares Licht. Springer. Berlin. Göttingen. Heidelberg. 1952. p. 168.
27. SCHÖBER H.: Das Sehen. II. Leipzig. Fachb. V. 1954. p. 614.
28. SCHÖBER H.: Über den gegenwärtigen Stand der physiologischen Optik. Optik aller Wellenlängen. pp. 132—149. Akademie Verlag. Berlin. 1959. p. 395.
29. SCHULZE A. R.: Lexikon der Kinotechnik. Halle. W. Knapp. V. 1956. p. 508.
30. SCHULZE A. R.: Színes film fekete-fehér negatívról. (Film en couleurs, fait à partir d'un négatif en noir et blanc. Popular Mechanics. Vol. 110. No. 7. 1958. p. 82.

RÉSUMÉ

L'explication physique, physiologique et psychologique du phénomène de la vision des couleurs comporte encore de nombreuses lacunes. Cette constatation est également valable pour les deux nouveaux phénomènes de perception des couleurs décrits ci-dessus, qui n'ont été publiés qu'au cours des deux dernières années.

Parmi les nombreuses explications, souvent contradictoires, que nous connaissons actuellement l'étude se basant sur l'optique biologique a tenté de choisir objectivement la plus acceptable. Quant aux phénomènes sur lesquels on ne possède encore aucune théorie, nous avons essayé de donner une explication acceptable basée sur des considérations scientifiques modernes.

L'effet de couleur réalisé par les expériences de LAND a un caractère en partie objectif, et en partie subjectif. Son application dans la projection des films exige une solution fort compliquée, ce qui lui retire tout avantage sur la projection habituelle des films trichromes.

L'effet de couleur subjectif du système de BENHAM et d'autres systèmes analogues promet de plus grands avantages pour la cinématographie, car ils permettent de réaliser des effets de couleur variés avec un film normal en noir et blanc, sans aucune transformation de l'appareil projecteur. Il est vrai que, par ce système, on n'atteint pas le coloris des films en couleurs habituels, mais étant donné sa simplicité et son prix peu élevé, il mérite de faire l'objet de nouvelles expériences en vue de son application pratique.

La possibilité d'application dans la télévision est également offerte par les deux méthodes examinées.

UNTERSUCHUNG VON ZWEI NEUEREN FARBENSEHENEFFEKTEN
UND IHRER ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT IN DER FILMTECHNIK,
BEZIEHUNGSWEISE IN DER TELEVISION

S. DÉKÁNY

ZUSAMMENFASSUNG

In der physikalischen, physiologischen und psychologischen Erläuterung des Farbensehens herrschen heute noch viele Unsicherheiten. Diese Feststellung gilt auch bei den oben besprochenen und erst in den letzten zwei Jahren publizierten zweierlei, neueren Farbenseneffekte.

Dieser Aufsatz trachtet auf Grund der biologischen Optik aus den mannigfachen, öfter sich widersprechenden Erklärungen objektiv die meistannehmbare zu finden, für die Erscheinungen aber, welche bis jetzt noch keine theoretische Lösung haben, womöglich eine moderne auf Grund von wissenschaftlichen Erwägungen akzeptable Auslegung zu geben.

Die mit den LANDSchen Experimenten erreichte Farbenwirkung ist teilweise von objektiver, teilweise aber von subjektiver Eigenart. Ihre Anwendung bei der Filmprojektion erfordert eine sehr komplizierte Lösung. Deshalb fällt ihr Vorteil gegenüber der üblichen trichromen Farbfilmprojektion weg.

Die BENHAMschen und eine andere subjektive Farbenwirkung ähnlichen Charakters verspricht größere Vorteile auf dem Gebiete der Filmprojektion, da man mit dem gewöhnlichen schwarz-weißen Filme auch verschiedene Farbeneffekte erreichen kann, ohne Umformung der Projektionsapparate. Wenn auch letztere die Farbenwirkung der gewöhnlichen farbigen Filme nicht erreichen kann, es lohnt sich aber wegen ihrer Einfachheit und Billigkeit zwecks praktischer Anwendung damit weiter zu experimentieren.

Beide Methoden versprechen verschiedene Möglichkeiten bei ihren Verwendungen auch in der Television.

TWO NEW METHODS TO PRODUCE COLOUR VISION AND AN INVESTIGATION
ON THE POSSIBILITY OF USING THEM IN FILM TECHNICS AND TV

S. DÉKÁNY

SUMMARY

Many uncertainties exist in regard to physical, physiological and psychological explanations of colour vision. This is true even for the two latest types of colour vision phenomena published in the last two years.

The study tries to find on the basis of biological optics the most acceptable explanation among an amazing variety of, sometimes, contradictory explanations. For those phenomenon having no theory yet it tried to give acceptable explanations using up-to-date scientific methods.

The colour effect reached by the LAND experiments is partly objective, partly subjective. Its use for projecting films needs intricate technical measures, thus it presents no advantages against the known trichrome colour films.

The subjective colour effect of the BENHAM method or the likes, may give some advantages on projecting films, as different colour effects may be reached as by using ordinary black and white films with projectors having no modifications. In spite of the fact that this method does not yield the colour effects of normal colour films further experiments seem to be indicated in support of its practical uses, as this method is very simple and not expensive at all.

Both methods may offer some possibilities to be used in TV.

ДВА НОВЫХ МЕТОДА, СОЗДАЮЩИХ РАЗЛИЧИЕНИЕ ЦВЕТОВ, И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ПРИМЕНИМОСТИ ДЛЯ КИНОСЪЕМОК И ДЛЯ ТЕЛЕВИДЕНИЯ

Ш. ДЕКАНЬ

РЕЗЮМЕ

В физическом, физиологическом и психологическом объяснении различения цветов господствует еще ряд неопределенностей. Этот факт действителен и для рассматриваемых здесь опубликованных только за последние два года двух различных новых явлений различения цветов.

Работа на основе биологической оптики стремится объективно найти среди самых разнообразных и часто противоречивых объяснений наиболее приемлемое объяснение, а для тех явлений, для которых до сих пор еще нет никаких теорий, дать по возможности современное объяснение, которое можно принять на основе научных соображений.

Цветовой эффект, достигнутый при помощи опытов Ланда, по своему характеру является частично объективным, и частично субъективным. Применение в случае кинематографии требует очень сложного решения, вследствие чего отпадает преимущество по сравнению с обычной трихроматической кинопроекцией.

Субъективный цветовой эффект Бенгама и аналогичные по характеру решения обещают дать большие преимущества в области кинопроекции, так как с помощью обычной черно-белой киноплёнки и без переделки кинопроекторных аппаратов можно добиться различных цветовых эффектов. Если это последнее и не достигает цветового эффекта обычных цветных пленок, вследствие простоты и дешевизны все-таки интересно проводить дальнейшие опыты в целях практического применения.

Оба метода обещают дать определенные возможности для их применения в телевидении.

ANWÄRMEN ZYLINDRISCHER KÖRPER ENTSPRECHENDER LÄNGE BEI VERÄNDERLICHER OFENTEMPERATUR

UNTERSUCHUNG DES VORGANGES DER WÄRMEÜBERTRAGUNG
IN EINER ENTSPRECHEND LANGER STANGE MIT KREISZYLINDRISCHEM
QUERSCHNITT BEI IN DER ZEIT VERÄNDERLICHER OFENTEMPERATUR
AUF GRUND DER NEWTONSCHEN BEDINGUNG DER WÄRMEÜBERTRAGUNG

A. HOFFMANN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST, AKADEMISCHE ARBEITSGEMEINSCHAFT FÜR STRÖMUNGSLEHRE

[Eingegangen am 27. Januar 1961]

§ 1. Der Fall konstanter thermischer Parameter

Bei Vorgängen ohne Freiwerden und ohne Bindung von Wärmemengen hat die Differentialgleichung

$$\operatorname{div} [k(\vartheta) \operatorname{grad} \vartheta] = \gamma c(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

in isotropen festen Körpern eine bestimmte Lösung, falls die Bedingung des Anfangszustandes $\vartheta(P, 0) = f(P)$ und die Newtonsche Bedingung der Randwerte

$$k(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_F = h(\vartheta) [\vartheta_K(t) - \vartheta]_F$$

erfüllt sind.

Die Temperatur ϑ [°C] ist im gegebenen Körper eine Funktion des Ortes und der Zeit:

$$\vartheta = \vartheta(P, t)$$

Ferner ist

γ [kg/m ³]	das spezifische Gewicht,
c [kcal/kg °C]	die spezifische Wärme,
h [kcal/m ² h °C]	der Koeffizient der Wärmeübertragung;* ,
k [kcal/mh °C]	ist der Koeffizient der Wärmeleitung;
$\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$	ist die Ableitung der Funktion ϑ entlang der Normalen;
$\vartheta_K(t)$ [°C]	ist die Temperatur der Umgebung (des Ofens) als Funktion der Zeit.

* In der Fachliteratur wird meistens an Stelle von h das Zeichen α , und an Stelle von k das Zeichen λ gebraucht. Wir werden hier die Zeichen der bereits vorangegangenen Mitteilungen (siehe [4, 5, 6, 7, 8, 9]) verwenden.

Der Index F bedeutet, daß der Funktionswert zur Oberfläche des Körpers gehört (Oberflächentemperatur). In unseren Betrachtungen halten wir uns den Fall eines axialsymmetrischen Körpers vor Augen.

Durch Übergehen zu Zylinderkoordinaten und unter der Voraussetzung, daß die thermischen Parameter konstant sind, erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

mit der anfänglichen Temperaturverteilung $\vartheta(r, 0) = f(r)$ und der Randwertbedingung $\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{h}{k} [\vartheta_K(t) - \vartheta(R, t)]$

Mit Hilfe der Transformation $R\rho = r$ ($0 \leq \rho \leq 1$) und mit dem Ansatz $\vartheta[^\circ\text{C}] = \vartheta_0 \vartheta$, $\vartheta_0 = 1[^\circ\text{C}]$ wird die Differentialgleichung dimensionslos:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} = R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

Für den Anfangszustand und die Randwertbedingung gilt also die Formel

$$\vartheta(\rho, 0) = f(\rho); \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = R \frac{h}{k} [\vartheta_K(t) - \vartheta(1, t)]$$

Im folgenden wollen wir eine Lösung des Problems zeigen, die eine leicht ausführbare (numerische) Berechnung ermöglicht; anschließend werden wir den Vorgang von Anfang bis Ende auf Grund von konkreten Ursprungsangaben durchrechnen; dies wird uns gute Hilfe leisten, um einige mit dem Ablauf der Wärmeübertragung zusammenhängende physikalische Konsequenzen zu ziehen.

Unter Anwendung der DÜHAMELSchen Integrallösung soll die zu lösende Funktion ϑ als Summe aus zwei Funktionen formuliert werden:*

$$\vartheta(\rho, t) = \vartheta_1(\rho, t) + \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \vartheta_2(\rho, t - \tau) d\tau$$

(Die Hilfsfunktion $\varphi(t)$ ist noch nicht bekannt; sie soll zielentsprechend später bestimmt werden.)

* Ähnliche Lösungen finden wir in den Arbeiten von verschiedenen Autoren. Siehe [1, 2, 3].

Die neue Formulierung soll nun in die Differentialgleichung eingesetzt und der Wert $\vartheta_2(\varrho, 0)$ soll gleich Null gesetzt werden. Es wird der Gleichung und auch der Anfangsbedingung genügt, falls die Werte ϑ_1 und ϑ_2 den hier folgenden Gleichungen und Anfangsbedingungen entsprechen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} = R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} \quad \vartheta_1(\varrho, 0) = f(\varrho)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} = R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} \quad \vartheta_2(\varrho, 0) = 0.$$

Die ursprüngliche Randwertbedingung

$$\left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} + \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} d\tau \Big|_{\varrho=1} =$$

$$= R \frac{h}{k} \left[\vartheta_k(t) - \vartheta_1(1, t) - \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \vartheta_2(1, t - \tau) d\tau \right]$$

soll folgenderweise aufgeteilt werden:

$$\left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = -R \frac{h}{k} \vartheta_1(1, t) \quad \text{und}$$

$$\int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} d\tau \Big|_{\varrho=1} = R \frac{h}{k} \left[\vartheta_k(t) - \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \vartheta_2(1, t - \tau) d\tau \right]$$

Es sei:

$$\left. \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = R \frac{h}{k} (\vartheta'_K - \vartheta_2)|_{\varrho=1}$$

mit der beliebigen Konstanten $\vartheta'_K \neq 0$ angenommen. Daraus ergibt sich für $\varphi(t)$ die Gleichung:

$$\vartheta'_K \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau = \vartheta_K(t), \quad (t > 0).$$

Für die erste Differentialgleichung gelten folgende Anfangs- und Randwertbedingungen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} = R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}$$

$$\vartheta_1(\varrho, 0) = f(\varrho)$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = -R \frac{h}{k} \vartheta_1(1, t).$$

Durch Anwendung der Methode BERNOULLI—FOURIER ergibt sich die Lösung:

$$\vartheta_1(\varrho, t) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}.$$

Aus der Randwertbedingung erhalten wir für v_p die Eigenwertgleichung:

$$v_p J_1(v_p) = R \frac{h}{k} J_0(v_p).$$

Durch Verwendung der orthogonalen Relationen der BESSELSchen Funktionen kann die Anfangsbedingung erfüllt und a_p bestimmt werden; es gilt nämlich

$$\vartheta_1(\varrho, 0) = f(\varrho) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p J_0(v_p \varrho)$$

$$\int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho = a_p \int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0^2(v_p \varrho) d\varrho =$$

$$= \frac{a_p}{2} [J_0^2(v_p) + J_1^2(v_p)] = \frac{a_p}{2} J_0^2(v_p) \left[1 + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right]$$

$$a_p = \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{J_0^2(v_p) \left[1 + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right]},$$

und für das erste Glied der Lösung:

$$\vartheta_1(\varrho, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{J_0^2(v_p) \left[1 + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right]} J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}.$$

Nun folgt die zweite Differentialgleichung mit den gegebenen Anfangs- und Randwertbedingungen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} = R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t}$$

$$\vartheta_2(\varrho, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = R \frac{h}{k} [\vartheta'_k - \vartheta_2(1, t)].$$

In analoger Weise wie oben ergibt sich die Lösung:

$$\vartheta_2(\varrho, t) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}$$

und für den Eigenwert:

$$-\sum_{p=0}^{\infty} b_p v_p J_1(v_p) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} = R \frac{h}{k} \left[\vartheta'_k - \sum_{p=0}^{\infty} b_p J_0(v_p) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right].$$

Es sei noch: $v_0 = 0$ und daher $b_0 = \vartheta'_k$. Bei $p \geq 1$ ist die Eigenwertgleichung:

$$v_p J_1(v_p) = R \frac{h}{k} J_0(v_p)$$

und daher die Lösung:

$$\vartheta_2(\varrho, t) = \vartheta'_k + \sum_{p=1}^{\infty} b_p J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}.$$

Es gilt im Sinne der Anfangsbedingung:

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p J_0(v_p \varrho) = -\vartheta'_k$$

und wie zuvor, durch Anwendung der Orthogonalität der BESSELSchen Funktionen:

$$\begin{aligned} b_p &= \frac{-\vartheta'_k \int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0^2(v_p \varrho) d\varrho} = \frac{-\vartheta'_k \frac{J_1(v_p)}{v_p}}{\frac{1}{2} [J_0^2(v_p) + J_1^2(v_p)]} = \\ &= \frac{-2\vartheta'_k R \frac{h}{k} J_0(v_p)}{v_p^2 \left[J_0^2(v_p) + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 J_0^2(v_p) \right]} = -\frac{2\vartheta'_k R \frac{h}{k}}{J_0(v_p) \left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right]} \quad (p \geq 1) \end{aligned}$$

und folglich:

$$\vartheta_2(\varrho, t) = \vartheta'_k \left[1 - 2R \frac{h}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_p)} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right].$$

Also ergibt sich als Lösung der untersuchten Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \vartheta(\varrho, t) &= \vartheta_1(\varrho, t) + \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \vartheta_2(\varrho, t - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(\nu_p \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{\nu_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p \varrho) e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} + \\ &+ \vartheta'_k \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \left[1 - 2R \frac{h}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{\left[\nu_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Um ϑ'_k zu eliminieren, wollen wir die folgende Transformation einführen:

$$\vartheta_2(\varrho, t) = \vartheta'_k \vartheta_2^*(\varrho, t) \quad \vartheta'_k \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi^*}{d\tau}$$

und daher:

$$\vartheta(\varrho, t) = \vartheta_1(\varrho, t) + \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi^*}{d\tau} \vartheta_2^*(\varrho, t - \tau) d\tau.$$

Nun wollen wir die Umgebungs- (Ofen-) -Temperatur, d. h. die Funktion $\vartheta_k(t)$, in zwei Glieder aufteilen:

$$\vartheta_K(t) = \vartheta_K(0) + \Delta(t),$$

d. h. $\vartheta_k(t)$ ist gleich der Summe aus dem Wert im Zeitpunkt $t = 0$ und der relativ zu diesem Wert bestimmten Änderung. Hierzu ist $\Delta(0) = 0$. Von $\Delta(t)$ wird vorausgesetzt, stetig und abschnittsweise glatt zu verlaufen.

Wie bereits erwähnt, gilt:

$$\int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi^*}{d\tau} d\tau = \vartheta_K(0) + \Delta(t) \quad (t > 0).$$

Es sei, mit der DIRACschen Delta-Funktion:

$$\frac{d\varphi^*}{dt} = \vartheta_K(0) \delta(\tau) + \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \quad (\tau > 0),$$

wobei folgende Integrale gelten:

$$\int_{\tau=0}^t \delta(\tau) d\tau = 1, \quad \int_{\tau=0}^t \delta(\tau) f(\tau) d\tau = f(0).$$

Daher ist die gesuchte Lösung:

$$\vartheta(\varrho, t) = \vartheta_1(\varrho, t) + \vartheta_k(0) \vartheta_2^*(\varrho, t) + \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \vartheta_2^*(\varrho, t - \tau) d\tau.$$

Hier erblicken wir in den ersten zwei Gliedern die Lösung des klassischen Falls mit $\vartheta_k(t) = \vartheta_k(0) = \text{Konstant}$; das dritte Glied als Korrektion ist eben die Temperaturänderung des Körpers, hervorgerufen durch die Temperaturänderung des Ofens. Die Ofentemperatur im Zeitpunkt $t = 0$ ist allgemein beträchtlich höher als 0, u. zw.

$$\vartheta_k(0) > C > 0, \quad \text{wo } C = \text{konst.}$$

Anschließend fällt aber der Wert von $\vartheta_k(t)$ rapid ab, so daß der Anfangswert mit viel größerem Gewicht in Rechnung gezogen werden muß. Dieser Umstand erfordert eben die Einführung der Funktion $\delta(t)$. Meistens ist es möglich, die Änderung der Ofentemperatur in der Zeit empirisch mit entsprechender Genauigkeit zu messen. Man führt eine stetige und glatt verlaufende Kurve durch die gewonnenen Meßpunkte, die als die Darstellung der mathematischen Änderung der Ofentemperatur betrachtet werden kann, und im weiteren Verlauf unserer Untersuchung gibt diese Kurve zu unserem Rechnungsgang die Temperatur des Ofens an.

Nun setzen wir in die oben erhaltene Lösung die errechneten Funktionen ein:

$$\begin{aligned} \vartheta(\varrho, t) = & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(\nu_p \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{\nu_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p \varrho) e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} + \\ & + \vartheta_k(0) \left[1 - 2R \frac{h}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{\left[\nu_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right] + \\ & + \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \left[1 - 2R \frac{h}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{\left[\nu_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vartheta_k(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k}\right)^2\right] J_0^2(v_p)} J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \dots \\
&\quad - 2R \frac{h}{k} \vartheta_k(0) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k}\right)^2\right] J_0^2(v_p)} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \dots \\
&\quad - 2R \frac{h}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k}\right)^2\right] J_0^2(v_p)} \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

Es läßt sich unschwer nachweisen, daß durch diese Lösung sowohl der untersuchten Differentialgleichung, wie auch den Anfangs- und Randwertbedingungen genügt wird.

§ 2. Der Fall veränderlicher thermischer Parameter

Bisher wurden die Wärmeleitungsparameter (h , k , γ , c) als konstant angenommen, obwohl diese in Wirklichkeit von der Temperatur des Körpers und auch von den Eigenheiten des erwärmten Stoffes stark abhängig sind. Die Veränderlichkeit der in der Differentialgleichung vorkommenden Wärmeleitungsparameter verursacht im Anfangsabschnitt der Erwärmung (beiläufig 300°C) eine beträchtliche Abweichung von der berechneten Temperaturverteilung des Körpers. Diese durch die sprungweise Änderung der Wärmeleitungsparameter verursachte relative (prozentuale) Abweichung ist in der unmittelbaren Nähe des Beginns der Anwärmeperiode am größten und sinkt nachher allmählich bis sie im Bereiche oberhalb 500°C meistens praktisch unbedeutend ist.

Wenn wir aber — wenn auch nur in grober Annäherung — die Veränderung der Wärmeleitungsparameter in der Differentialgleichung zum Ausdruck bringen und — um zu einer möglichst einfachen Lösung zu kommen — die Differentialgleichung in linearer Form beibehalten wollen, so können wir an Stelle der aus Erfahrung erhaltenen Kurven $\frac{h}{k}$, $\frac{\gamma c}{k}$ eine andere aus geraden Strecken zusammengesetzte Kurve setzen, wobei die einzelnen Strecken je einen konstanten Wert representieren. Die Werte dieser Konstanten werden mittels Flächenausgleich bestimmt.*

* Die approximative Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung mit veränderlichen Wärmeleitungsparametern wurde von der Wärmeleitungsarbeitsgemeinschaft unter Leitung von Prof. Dr. Ing. S. BORBÉLY ausgearbeitet. Bisher wurden — in den Mitteilungen der Abteilung für Technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften — sechs Arbeiten veröffentlicht. (Siehe [4, 5, 6, 7, 8, 9]).

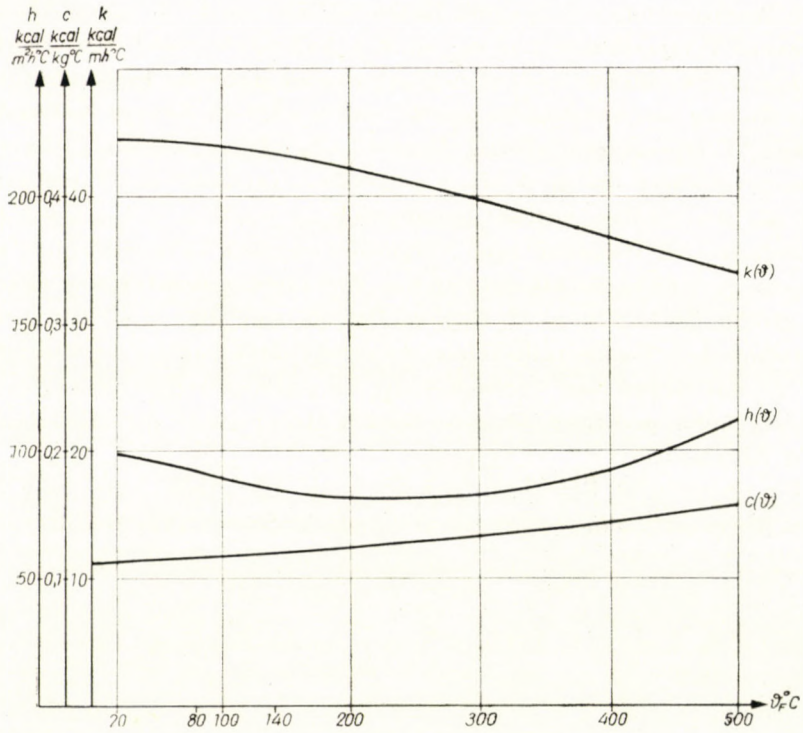


Abb. 1

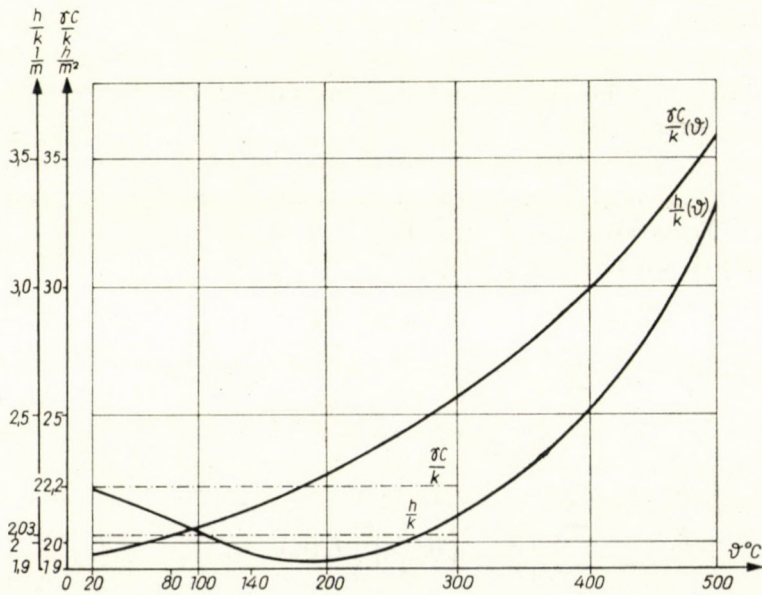


Abb. 2

In Ausarbeitung der Lösung lassen wir die am Ende eines Abschnittes beobachtete Temperaturverteilung an den Anfang des nächsten Abschnittes anschließen; mit anderen Worten, wir nehmen an, daß eine Erwärmung eigentlich am Anfang des Abschnittes auf Grund der bis zu diesem Zeitpunkt entstandenen Temperaturverteilung beginnt. In dem Bestreben, durch das Rechnungsverfahren die im Körper gemessene (tatsächliche) Temperaturverteilung mit der möglich besten Annäherung zu erhalten, müssen die Längen der Abschnitte in Richtung zur Anfangstemperatur immer kleiner, aber in der entgegengesetzten Richtung, von der Ausgangstemperatur sich entfernend, immer größer gewählt werden. In dem Bereich von 500° C bis zur kritischen Temperatur der Umkristallisation (gegebenenfalls auch darüber hinaus) genügt — auf Grund von versuchsweise ausgeführten Berechnungen — zur Erreichung einer praktisch entsprechenden Genauigkeit die Annahme eines einzigen Abschnittes.

Die numerische Berechnung kann man mit einer Aufteilung in drei einzelne Abschnitte ohne rechnerisch-technische Schwierigkeiten durchführen, z. B.

$$\vartheta_a < \vartheta < 200; \quad 200 \leq \vartheta < 500; \quad 500 \leq \vartheta$$

(ϑ_a bedeutet die konstante Anfangstemperatur des Körpers). Probeberechnungen zeigten, daß man im Abschnitt $\vartheta \geq 300$ praktisch hinreichend genaue Werte erhält; im Gebiet $\vartheta < 300$ ist die Ungenauigkeit des Ergebnisses um so größer, je näher sich ϑ zu ϑ_a befindet.* Diese Erfahrung macht es eben notwendig, die Lösung der nicht linearen Differentialgleichung zu suchen, die mit Hilfe der Substitution der Kurven durch einzelne lineare Abschnitte mit praktisch hinreichender Genauigkeit gefunden werden kann. Selbstverständlich führt diese Lösung mit der oben angeführten Einteilung in Abschnitte zu Ergebnissen von höherer Genauigkeit.

Es soll die Lösung der linearen Differentialgleichung im ersten Abschnitt als $\vartheta = \vartheta^{(a)}(\varrho, t)$ bezeichnet werden; wir nehmen an, daß die Anfangsverteilung der Temperatur im Zeitpunkt $t = 0$ $\vartheta(\varrho, 0) = f(\varrho) = \vartheta_a = \text{konstant}$ sei; so erhalten wir folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(a)}(\varrho, t) = & \vartheta_k(t) + 2\vartheta_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(v_n)}{v_n} \frac{J_0(v_n \varrho) e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}}{\left[1 + \frac{R^2}{v_n^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0^2(v_n)} - \\ & - 2R \frac{h}{k} \vartheta_k(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \end{aligned}$$

* Siehe: S. BORBÉLY, Über Untersuchungen etc. [4].

$$\begin{aligned}
 & - 2R \frac{h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{\left[\nu_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_n)} \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau = \\
 & = \vartheta_k(t) + 2R \frac{h}{k} \vartheta_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{\left[\nu_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_n)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \dots \\
 \vartheta^{(a)}(\varrho, t) & = \vartheta_k(t) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{\left[\nu_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_n)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\
 & - 2R \frac{h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{\left[\nu_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_n)} \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Es sei ϑ_1 — im Zeitpunkt t_1 — die obere Temperaturgrenze im ersten Abschnitt in einem richtig gewählten Punkt des Körpers. In diesem Abschnitt gilt für die Temperatur $\vartheta_a \leq \vartheta < \vartheta_1$ in dem entsprechenden Punkt des Körpers.

In dem zur Temperatur ϑ_1 koordinierten Zeitpunkt t_1 ist die Temperaturverteilung im Körper:

$$\begin{aligned}
 \vartheta(\varrho, t_1) & = \vartheta_k(t_1) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{\left[\nu_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_n)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} - \\
 & - 2R \frac{h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{\left[\nu_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(\nu_n)} \int_{\tau=0}^{t_1} \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_1-\tau)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Bei der Behandlung der Lösung des zweiten Abschnittes wird diese Temperaturverteilung als Ausgangspunkt betrachtet:

$$\vartheta(\varrho, t_1) = f(\varrho).$$

Dies soll in die erste (von den Abschnitten unabhängige) Lösung der Differentialgleichung eingesetzt werden. Vorerst wollen wir den folgenden Ausdruck errechnen:

$$\int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho = \vartheta_k(t_1) \int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho -$$

$$- 2R \frac{h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\vartheta_k(0) - \vartheta_n) e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau=0}^{t_1} \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_1 - \tau)} d\tau \right] \frac{\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_n \varrho) J_0(v_p \varrho) d\varrho}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)}.$$

Nun ändern sich im zweiten Abschnitt die Wärmeleitungsparameter.

Wir wollen die Werte $\frac{h}{k}$ und $\frac{\gamma c}{k}$ für diesen Abschnitt mit dem Index

»1« bezeichnen: $\left(\frac{h}{k} \right)_1, \left(\frac{\gamma c}{k} \right)_1$.

Mit Hilfe der Eigenwertgleichung

$$v_p J_1(v_p) = R \left(\frac{h}{k} \right)_1 J_0(v_p),$$

erhalten wir

$$\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho = \frac{J_1(v_p)}{v_p} = R \left(\frac{h}{k} \right)_1 \frac{J_0(v_p)}{v_p^2}.$$

Ferner ergibt sich:

$$\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_n \varrho) J_0(v_p \varrho) d\varrho = \frac{1}{v_n^2 - v_p^2} [v_n J_0(v_p) J_1(v_n) - v_p J_0(v_n) J_1(v_p)] =$$

$$= \frac{R}{v_n^2 - v_p^2} \left[\frac{h}{k} J_0(v_n) J_0(v_p) - \left(\frac{h}{k} \right)_1 J_0(v_n) J_0(v_p) \right] =$$

$$= \frac{R J_0(v_n) J_0(v_p)}{v_n^2 - v_p^2} \left[\frac{h}{k} - \left(\frac{h}{k} \right)_1 \right].$$

(Es soll bemerkt werden, daß also bei der Bildung der Eigenwertreihe $\{v_p\}$ aus einer neuen Gleichung die orthogonalen Beziehungen nicht mehr gelten).

Folglich:

$$\int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho = \vartheta_k(t_1) R \left(\frac{h}{k} \right)_1 \frac{J_0(v_p)}{v_p^2} -$$

$$- 2R^2 \frac{h}{k} \left[\frac{h}{k} - \left(\frac{h}{k} \right)_1 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left[\vartheta_k(0) - \vartheta_a \right] e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} +$$

$$+ \int_{\tau=0}^{t_1} \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_1 - \tau)} d\tau \left] \frac{J_0(v_p)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] (v_n^2 - v_p^2)} .$$

Daher ist die Lösung für den zweiten Abschnitt:

$$\vartheta^{(\beta)}(\varrho, t) = \vartheta_k(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)_1^2 \right] J_0^2(v_p)} J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \left(\frac{k}{\gamma c} \right)_1 (t-t_1)} -$$

$$- 2R \left(\frac{h}{k} \right)_1 \vartheta_k(t_1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + R^2 \left(\frac{h}{k} \right)_1^2 \right] J_0(v_p)} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \left(\frac{k}{\gamma c} \right)_1 (t-t_1)} -$$

$$- 2R \left(\frac{h}{k} \right)_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + R^2 \left(\frac{h}{k} \right)_1^2 \right] J_0(v_p)} \int_{\tau=t_1}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \left(\frac{k}{\gamma c} \right)_1 (t-\tau)} d\tau, \quad (t \geq t_1).$$

Nach erfolgter Integration und entsprechender Umordnung ist die Lösung für den zweiten Abschnitt:

$$\vartheta^{(\beta)}(\varrho, t) = \vartheta_k(t) - 4R^2 \frac{h}{k} \left[\frac{h}{k} - \left(\frac{h}{k} \right)_1 \right] \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\vartheta_k(0) - \vartheta_a \right] e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} +$$

$$+ \int_{\tau=0}^{t_1} \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_1 - \tau)} d\tau \left] \times$$

$$\times \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)_1^2 \right] (v_n^2 - v_p^2) J_0(v_p)} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \left(\frac{k}{\gamma c} \right)_1 (t-t_1)} -$$

$$- 2R \left(\frac{h}{k} \right)_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + R^2 \left(\frac{h}{k} \right)_1^2 \right] J_0(v_p)} \int_{\tau=t_1}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \left(\frac{k}{\gamma c} \right)_1 (t-\tau)} d\tau .$$

Für einen Zeitpunkt $t \geq t_1$ genügt diese Lösung der Differentialgleichung und auch den Anfangs- und Randwertbedingungen, wobei sie sich bei $t = t_1$ an die erste Lösung $\vartheta = \vartheta^{(a)}(\varrho, t)$ anschließt. Die numerische Berechnung ist dadurch etwas erleichtert, daß wir für die Doppelsummation die Innere («n») bereits bei der Ausarbeitung der Lösung des ersten Abschnittes errechnet haben. Auf eine ähnliche Weise können wir auch die übrigen Anschlüsse errechnen, doch ist es ratsam, mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten der numerischen Berechnung, nicht mehr als drei Abschnitte aufzustellen.

§ 3. Annäherung der Ofentemperatur mit Hilfe von Parabeln

Im folgenden wollen wir den Einfluß untersuchen, den die Änderungen der Ofentemperatur auf die Temperaturverteilung des Körpers ausüben. Wir setzen eine Ofentemperatur voraus, bei welcher die Integrale

$$\int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} d\tau \quad \text{und} \quad \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau,$$

nicht nur bestehen, sondern auch jeweils praktisch berechnet werden können, und stellen noch die Bedingung, daß diese Funktionen in geschlossener Form integriert werden können.

Da $\vartheta_k(t) = \vartheta_k(0) + \Delta(t)$,

so erhalten wir bei unveränderlicher Ofentemperatur [d. h. $\vartheta_k(t) = \vartheta_k(0) + \Delta(0) = \vartheta_k(0)$ oder unveränderlicher Temperatur in je einem Abschnitt, d. h. $\vartheta_{ki}(t) = \vartheta_k(0) + \Delta(t_i)$, ($t_i \leq t < t_{i+1}$)] einen besonderen Fall unserer Lösung, nämlich die klassische Lösung (bedingt durch eine homogene Randwertbedingung). Nun soll die Temperaturverteilung im Körper für drei typische Fälle der zeitabhängigen Veränderlichkeit der Ofentemperatur errechnet werden:

1. $\Delta(t) = at$ lineare Funktion;
2. $\Delta(t) = a_2 t^2 + a_1 t$ parabolische Funktion;
3. $\Delta(t) = a \sin \omega t$ periodische Funktion.

$$1. \quad \vartheta(\varrho, t) = \vartheta_k(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{v_p^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0^2(v_p)} J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ - 2R \frac{h}{k} \vartheta_k(0) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_p)} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}$$

$$- 2a R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{v_p^2 \left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_p)} \left[1 - e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right],$$

Wir wollen das Korrektionsglied (das als additives Glied zum Glied der klassischen Lösung hinzukommt) mit $\vartheta_c(\varrho, t)$ bezeichnen, d. h.

$$\vartheta_c(\varrho, t) = at - 2a R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{v_p^2 \left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_p)} \left[1 - e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right],$$

wobei

$$\vartheta_c(\varrho, 0) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta(t)}{\vartheta_c(\varrho, t)} = 1.$$

Man sieht es klar, daß die Änderung der Ofentemperatur sozusagen die Temperaturverteilung des Körpers steuert. Im folgenden soll nur das Korrektionsglied entwickelt werden:

$$2. \quad \vartheta_c(\varrho, t) = a_2 t^2 + a_1 t - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{v_p^2 \left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_p)} \left[2a_2 t + \left(a_1 - 2a_2 \frac{R^2}{v_p^2} \frac{\gamma c}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right) \right].$$

$$3. \quad \vartheta_c(\varrho, t) = a \sin \omega t - 2R^3 \frac{h}{k} a \omega \frac{\gamma c}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{\left[v_p^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_p)} \times \\ \times \frac{v_p^2 \left(\cos \omega t - e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right) + \omega R^2 \frac{\gamma c}{k} \sin \omega t}{v_p^4 + \omega^2 R^4 \left(\frac{\gamma c}{k} \right)^2}.$$

Aus allen drei Formeln erhellt sich, daß sich die durch die Änderung der Ofentemperatur bedingte Korrektur der Temperaturverteilung im Körper jeweils aus zwei Gliedern zusammensetzt, wobei das erste Glied selbst die Temperaturänderung des Ofens, das zweite aber ein Glied mit entgegengesetzten Vorzeichen ist, das auch die Materialkonstanten enthält. Dieses zweite Glied (Summationsglied) ist für den betreffenden Stoff kennzeichnend und

stellt den »Widerstand« dieses Stoffes gegenüber der auf den Stoff wirkenden Temperaturänderung dar.

Allgemein kann man die Ofentemperatur — mit praktisch hinreichender Genauigkeit — mit Hilfe von einander anschließenden Parabeln 2^{ten} Grades darstellen. Man könnte noch ein Interpolationspolynom oder eine ausgleichende GAUSSsche Parabel anwenden. Bei dem ersten ist die Integration langwierig, bei dem letzteren besteht in den einzelnen Punkten eine große Abweichung von dem gemessenen Werten.

Es sei nun:

$$\vartheta_k(t) = \begin{cases} \vartheta_k^{(0)}(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 & \text{wenn } 0 \leq t \leq t_1 \\ \vartheta_k^{(1)}(t) = a_{21} t^2 + a_{11} t + a_{01} & \text{,, } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ \vartheta_k^{(i)}(t) = a_{2i} t^2 + a_{1i} t + a_{0i} & \text{,, } t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_k(0) &= \vartheta_k^{(0)}(0) = a_0 \\ \vartheta_k(t_1) &= \vartheta_k^{(0)}(t_1) = \vartheta_k^{(1)}(t_1) \\ \vdots \\ \vartheta_k(t_i) &= \vartheta_k^{(i-1)}(t_i) = \vartheta_k^{(i)}(t_i). \end{aligned}$$

Die Anfangstemperaturverteilung im Körper sei $\vartheta(\varrho, 0) = \vartheta_a$. Die gesuchte Lösung sei als folgende Funktion ausgedrückt:

$$\vartheta(\varrho, t) = \begin{cases} \vartheta^{(0)}(\varrho, t) & \text{wenn } 0 \leq t \leq t_1 \\ \vartheta^{(1)}(\varrho, t) & \text{,, } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ \vartheta^{(i)}(\varrho, t) & \text{,, } t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

und nun ist die Temperaturverteilung:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(0)}(\varrho, t) &= \vartheta_k^{(0)}(t) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ &- 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left[2a_2 t + \right. \\ &\left. + \left(a_1 - 2a_2 \frac{R^2}{v_n^2} \frac{\gamma c}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Verteilung im Körper sei zum Zeitpunkt t_1

$$\vartheta^{(0)}(\varrho, t_1) = f_1(\varrho) = \vartheta_k^{(0)}(t_1) -$$

$$\begin{aligned}
& - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} - \\
& - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \times \\
& \times \left[2a_2 t_1 + \left(a_1 - 2a_2 \frac{R^2}{v_n^2} \frac{\gamma c}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} \right) \right]^{(0)}.
\end{aligned}$$

(Das Zeichen (0) ist hier wegen der später notwendigen Unterscheidung angebracht.)

An diese »Anfangs-Verteilung« lassen wir die zum Zeitpunkt t_1 durch die Ofentemperatur $\vartheta_k^{(1)}(t)$ bestimmte Lösung anschließen.

$$\begin{aligned}
\vartheta^{(1)}(\varrho, t) &= \vartheta_k^{(1)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \int_0^1 f_1(\varrho) \varrho J_0(v_m \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{v_m^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0^2(v_m)} J_0(v_m \varrho) e^{-\frac{v_m^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} - \\
& - 2\vartheta_k(t_1) R \frac{h}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(v_m \varrho)}{\left[v_m^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_m)} e^{-\frac{v_m^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} - \\
& - 2R \frac{h}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(v_m \varrho)}{\left[v_m^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_m)} \int_{\tau=t_1}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_m^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau = \\
& = \vartheta_k^{(1)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \int_0^1 f_1(\varrho) \varrho J_0(v_m \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{v_m^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0^2(v_m)} J_0(v_m \varrho) e^{-\frac{v_m^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} - \\
& - 2\vartheta_k(t_1) R \frac{h}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(v_m \varrho)}{\left[v_m^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_m)} e^{-\frac{v_m^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} - \\
& - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(v_m \varrho)}{v_m^2 \left[v_m^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_m)} \left[2a_{21} t + a_{11} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2a_{21} \frac{R^2}{v_m^2} \frac{\gamma c}{k} - e^{-\frac{v_m^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} \left(2a_{21} t_1 + a_{11} - 2a_{21} \frac{R^2}{v_m^2} \frac{\gamma c}{k} \right) \Bigg]^{(1)}; \\
 & \qquad \qquad \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \\
 & \int_{\varrho=0}^1 f_1(\varrho) \varrho J_0(v_m \varrho) d\varrho = \vartheta_k^{(1)}(t_1) \int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_m \varrho) d\varrho - \\
 & - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_n \varrho) J_0(v_m \varrho) d\varrho}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} - \\
 & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_n \varrho) J_0(v_m \varrho) d\varrho}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} [\dots]^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation und der Eigenwertgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & m = n \\
 & \int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(v_n \varrho) d\varrho = \frac{J_1(v_n)}{v_n} = R \frac{h}{k} \frac{J_0(v_n)}{v_n^2} \\
 & \int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0^2(v_n \varrho) d\varrho = \frac{1}{2} [J_0^2(v_n) + J_1^2(v_n)] = \frac{1}{2} J_0^2(v_n) \left[1 + \frac{R^2}{v_n^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] \\
 & \int_{\varrho=0}^1 f_1(\varrho) \varrho J_0(v_m \varrho) d\varrho = \vartheta_k^{(1)}(t_1) R \frac{h}{k} \frac{J_0(v_n)}{v_n^2} - \\
 & - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \frac{\frac{1}{2} J_0^2(v_n) \left[1 + \frac{R^2}{v_n^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right]}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} - \\
 & - R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \frac{J_0(v_n)}{v_n^4} [\dots]^{(0)} = \vartheta_k^{(1)}(t_1) R \frac{h}{k} \frac{J_0(v_n)}{v_n^2} - \\
 & - R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \frac{J_0(v_n)}{v_n^2} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} - R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \frac{J_0(v_n)}{v_n^4} [\dots]^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Daher ist die Lösung der Differentialgleichung bei gegebener Anfangs- und Randwertbedingung im zweiten Abschnitt ($t_1 \leq t \leq t_2$):

$$\begin{aligned} \vartheta^{(1)}(\varrho, t) &= \vartheta_k^{(1)}(t) + 2R \frac{h}{k} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_k^{(1)}(t_1) - [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} - \frac{R^2}{v_n^2} \frac{\gamma c}{k} [\dots]^{(0)}}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} J_0(v_n \varrho) e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} - \\ &- 2\vartheta_k(t_1) R \frac{h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} - \\ &- 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left[2a_{21} t + a_{11} - 2a_{21} \frac{R^2}{v_n^2} \frac{\gamma c}{k} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} \left(2a_{21} t_1 + a_{11} - 2a_{21} \frac{R^2}{v_n^2} \frac{\gamma c}{k} \right) \right]^{(1)} \\ &\quad [\dots]^{(1)} = \left[2a_{21} (t - t_1) + A_n^{(1)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} \right) \right]^{(1)} \\ &\quad A_n^{(1)} = 2a_{21} t_1 + a_{11} - 2a_{21} \frac{R^2}{v_n^2} \frac{\gamma c}{k} \end{aligned}$$

$$\vartheta^{(1)}(\varrho, t) =$$

$$\begin{aligned} &= \vartheta_k^{(1)}(t) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ &- 2R^3 \frac{k}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ [\dots]^{(0)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} + [\dots]^{(1)} \right\} \\ &\quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Die Temperaturverteilung im Körper am Ende des zweiten Abschnittes ist:

$$\vartheta^{(1)}(\varrho, t_2) = \vartheta_k^{(1)}(t_2) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_2} -$$

$$\begin{aligned}
 & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ [\dots]^{(0)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_2 - t_1)} + \right. \\
 & \left. + \left[2a_{21}(t_2 - t_1) + A_n^{(1)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_2 - t_1)} \right) \right]^{(1)} \right\} = f_2(\varrho).
 \end{aligned}$$

Jetzt gilt diese Verteilung als »Anfangsverteilung« für den dritten Abschnitt. Durch das gleiche Verfahren (Orthogonalität und Eigenwert) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\varrho=0}^1 f_2(\varrho) \varrho J_0(v_n \varrho) d\varrho &= 2\vartheta_k^{(1)}(t_2) R \frac{h}{k} \frac{J_0(v_n)}{v_n^2} - \\
 & - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n)}{v_n^2} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_2} - \\
 & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n)}{v_n^4} \left\{ [\dots]^{(0)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_2 - t_1)} + \right. \\
 & \left. + \left[2a_{21}(t_2 - t_1) + A_n^{(1)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_2 - t_1)} \right) \right]^{(1)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Also ist die Lösung im dritten Abschnitt ($t_2 \leq t \leq t_3$):

$$\begin{aligned}
 \vartheta^{(2)}(\varrho, t) &= \vartheta_k^{(2)}(t) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\
 & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ [\dots]^{(0)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t - t_1)} + \right. \\
 & \left. + [\dots]^{(1)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t - t_2)} + \left[2a_{22}(t - t_2) + A_n^{(2)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t - t_2)} \right) \right]^{(2)} \right\} \\
 A_n^{(2)} &= 2a_{22} t_2 + a_{12} - 2a_{22} \frac{R^2 \gamma c}{v_n^2 k}.
 \end{aligned}$$

Durch das gleiche Verfahren ergibt sich die Lösung für den $(i + 1)$ -ten Abschnitt

$$\begin{aligned} \vartheta^{(i)}(\varrho, t) = & \vartheta^{(i)}(t) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ [\dots]^{(0)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} + \right. \\ & + [\dots]^{(1)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_2)} + \dots + [\dots]^{(i-1)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_i)} + \\ & \left. + \left[2a_{2i}(t-t_i) + A_n^{(i)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_i)} \right) \right]^{(0)} \right\} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ & A_n^{(i)} = 2a_{2i} t_i + a_{1i} - 2a_{2i} \frac{R^2 \gamma c}{v_n^2 k} . \end{aligned}$$

Im Vergleich zur klassischen Lösung (mit homogener Randwertbedingung) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(i)}(\varrho, t) = & \vartheta_k(0) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} + \\ & \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{die klassische Lösung } (\vartheta_k(t) = \vartheta_k(0))} \\ & + \Delta(t) - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ [\dots]^{(0)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} + \right. \\ & \left. + [\dots]^{(1)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_2)} + \dots + [\dots]^{(i-1)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_i)} + [\dots]^{(0)} \right\} \\ & t_i \leq t \leq t_{i+1} . \end{aligned}$$

Die Funktion $\Delta(t)$ kann noch in folgender Weise zerlegt werden

$$\begin{aligned} \Delta(t) = & \Delta^{(0)}(t_1) + (\Delta^{(1)}(t_2) - \Delta^{(1)}(t_1)) + (\Delta^{(2)}(t_3) - \Delta^{(2)}(t_2)) + \\ & + \dots + (\Delta^{(i-1)}(t) - \Delta^{(i-1)}(t_{i-1})) . \end{aligned}$$

Es ist z. B. der »Beitrag« des »j«-ten Abschnittes zur Temperaturverteilung im Körper:

$$\begin{aligned} & (\Delta^{(j-1)}(t_j) - \Delta^{(j-1)}(t_{j-1})) - \\ & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} [\dots]^{(j-1)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_j)} = \\ & = a_{2,j-1} (t_j^2 - t_{j-1}^2) + a_{1,j-1} (t_j - t_{j-1}) - \\ & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} [\dots]^{(j-1)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_j)} \\ & t_j \leq t \leq t_{j+1}. \end{aligned}$$

Das Glied mit der Funktion $\Delta(t)$ und das Glied mit der Summation haben entgegengesetzte Vorzeichen (für $\vartheta_k(t)$ gelten die obigen Einschränkungen), d. h., das Summationsglied hat innerhalb der einzelnen Zeitabschnitte dieselbe retardierende Bedeutung als zuvor. Es ist auch zu ersehen, daß mit zunehmender Zeit t der »Beitrag« im Abschnitt immer mehr der Änderung der Ofentemperatur innerhalb des »Abschnittes« zustrebt, d. h., das Summationsglied konvergiert gegen Null. Diese Erkenntnis, bezogen auf die Temperaturverteilung der gesamten Anheizperiode, bedeutet, daß bei Annahme — nach einem bestimmten Zeitpunkt t_i — einer unveränderlichen Ofentemperatur — die übrigens den praktischen Fällen allgemein entspricht — und bei $t \rightarrow \infty$ die Temperaturverteilung im Körper ausgeglichen wird und zugleich asymptotisch gegen die Ofentemperatur konvergiert, was auch physikalisch als plausibel erscheint.

Zusammenfassend ist die Lösung für den $(i+1)$ -ten Zeitabschnitt:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(i)}(\varrho, t) = & \vartheta_k^{(i)}(t) - 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ & - 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ \sum_{j=1}^i \left[2a_{2,j-1} (t_j - t_{j-1}) + \right. \right. \\ & + A_n^{(j-1)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_j - t_{j-1})} \right) \left. \right] e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_j)} + \left[2a_{2i} (t - t_i) + \right. \\ & \left. \left. + A_n^{(i)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_i)} \right) \right] \right\}; t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{aligned}$$

$$A_n^{(i)} = 2a_{2i} t_i + a_{1i} - 2a_{2i} \frac{R^2 \gamma c}{v_n^2 k}.$$

Erfahrungsgemäß ist die Änderung der Ofentemperatur nach Ablauf eines bestimmten Zeitabschnittes kaum bemerkbar, man kann dann also die Ofentemperatur als konstant betrachten. Wenn wir also die Temperaturverteilung im Körper für den letzten, den $(i + 2)$ -ten Zeitabschnitt berechnen, so ist das Berechnungsverfahren mit dem klassischen identisch. Für den Anfangszeitpunkt des Abschnittes lassen wir die bisher entwickelte Temperaturverteilung als »Anfangs«-Verteilung gelten, d. h. wir schließen sie an die zum Zeitpunkt t_{i+1} bestehende Temperaturverteilung an.

$$\begin{aligned} \vartheta^{(i+1)}(\varrho, t) &= \vartheta_k^{(i+1)}(t_{i+1}) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f_{i+1}(\varrho) \varrho J_0(v_m \varrho) d\varrho}{\left[1 + \frac{R^2}{v_m^2} \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0^2(v_m)} J_0(v_m \varrho) e^{-\frac{v_m^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_{i+1})} - \\ &- 2\vartheta_k^{(i+1)}(t_{i+1}) R \frac{h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_{i+1})} \\ & \quad t \geq t_{i+1} \\ f_{i+1}(\varrho) &= \vartheta^{(i)}(\varrho, t_{i+1}). \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Ofentemperatur im Zeitpunkt des Anschlusses als stetig annehmen, d. h. $\vartheta_k^{(i)}(t_{i+1}) = \vartheta_k^{(i+1)}(t_{i+1})$, so ist die Temperaturverteilung im Körper:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(i+1)}(\varrho, t) &= \vartheta_k^{(i+1)}(t_{i+1}) - \\ &- 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ &- 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ \sum_{j=1}^{i+1} \left[2a_{2, j-1} (t_j - t_{j-1}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_n^{(j-1)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_j - t_{j-1})} \right) \right] e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_j)} \right\}; \quad t \geq t_{i+1}. \end{aligned}$$

Wenn wir aber die Ofentemperatur $\vartheta_K(t)$ im Zeitpunkt des Anschlusses nicht als stetig annehmen, d. h.

$$\vartheta_k^{(i)}(t_{i+1}) \neq \vartheta_k^{(i+1)}(t_{i+1}),$$

und dies kann zu einem besseren Ausgleich der Ofentemperatur notwendig sein, so ist die Temperaturverteilung im Körper:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(i+1)}(\varrho, t) &= \vartheta_k^{(i+1)}(t_{i+1}) - \\ &- 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k(0) - \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ &- 2R \frac{h}{k} [\vartheta_k^{(i+1)}(t_{i+1}) - \vartheta_k^{(i)}(t_{i+1})] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_{i+1})} - \\ &- 2R^3 \frac{h}{k} \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 \left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} \left\{ \sum_{j=1}^{i+1} \left[2a_{2, j-1} (t_j - t_{j-1}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + A_n^{(j-1)} \left(1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t_j - t_{j-1})} \right) \right] e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_j)} \right\}; \quad t \geq t_{i+1} \end{aligned}$$

§ 4. Verwendungen und Folgerungen

Der Gegenstand unserer Untersuchung sei ein Stahlkörper von gerader, kreiszylindrischer Form, mit dem Durchmesser von 10 cm, der bezüglich der Erwärmung als unendlich lang betrachtet werden kann, und den wir in einem Ofen mit elektrischer Widerstandheizung erwärmen wollen. Die chemische Zusammensetzung des Stahles sei 0,20 % C; 0,18% Cr; 0,28% Ni; 0,42% Mn; und 0,10% Si. Oberflächenzustand des Körpers: rohgewalzte Oberfläche. Anfangstemperatur: $\vartheta(\varrho, 0) = \vartheta_a = \text{konst} = 20^\circ \text{ C}$ (siehe Fachliteratur [9]).

Die Daten der Wärmeleitung stammen von der zitierten Arbeit [9]. Davon sind $k(\vartheta)$, $c(\vartheta)$ und γ Angaben der Literatur, und ich habe zur Bestimmung von $h(\vartheta)$ die Rechnungsergebnisse von MASCHKE [9] übernommen. Um die Differentialgleichung linear zu halten, werden die erhaltenen Kurven von 20° bis 300° C mit Hilfe des Flächenausgleiches durch gerade Strecken (als Konstanten) ersetzt (Abb. 2).

$$\gamma = 7700 \text{ [kg/m}^3\text{]}; \quad \frac{\gamma c}{k} = 22,2 \text{ [h/m}^2\text{]} = 1332 \text{ [Min./m}^2\text{]}$$

$$\frac{h}{k} = 2,03 \text{ [1/m]}; \quad \frac{k}{\gamma c} = 0,000750 \text{ [m}^2\text{/Min.]}$$

Als Meßwerte der in der Zeit veränderlichen Ofentemperatur haben wir auf Grund der durch MASCHKEK durchgeführten Messungen erhaltenen Angaben gelten lassen, die wir als eine praktisch mögliche Punktreihe der Änderung der Ofentemperatur betrachten. Die Errechnung erfolgte in dem Intervall $0 \leq t \leq 120$, das wir in 4 Abschnitte aufteilen. In den ersten drei Abschnitten ($0 \leq t \leq 4$, $4 \leq t \leq 18$, $18 \leq t \leq 60$) ließen wir Parabeln 2^{ten} Grades aneinander anschließend als Annäherung des effektiven Verlaufes der Ofentemperatur gelten; im vierten Abschnitt ($60 \leq t \leq 120$) haben wir die Ofentemperatur als unveränderlich angenommen, da den ausgeführten Messungen gemäß die Erhöhung der Temperatur in diesem Abschnitt nicht mehr als 9°C ($770-779$) beträgt. Über die 120^{ste} Minute hinaus ist die Ofentempera-

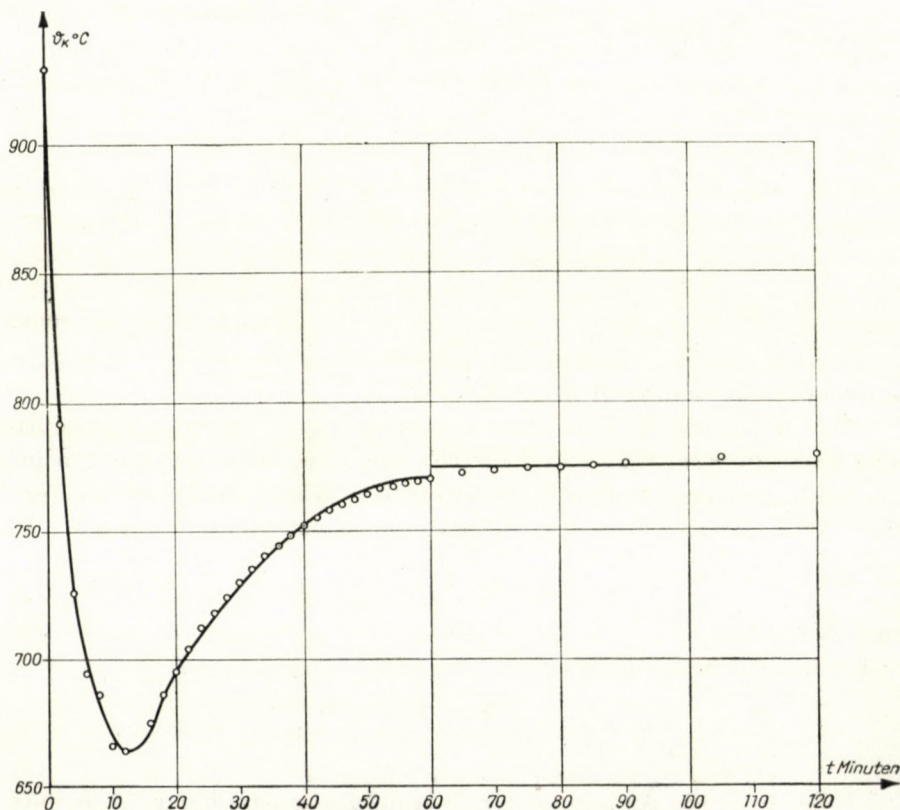


Abb. 3

tur praktisch konstant. Deshalb haben wir für den letzten Abschnitt im Wege des Flächenausgleiches den Wert 775°C angenommen. (Der Wert $\vartheta_k(t)$ springt bei $t = 60$ Min. von 770 auf 775 .) (Siehe Tabelle 1)

Die Änderung der Ofentemperatur in den einzelnen Abschnitten läßt sich mathematisch folgenderweise ausdrücken:

$$\begin{aligned}\vartheta_k^{(0)}(t) &= 8,875 t^2 - 86,25 t + 929 & (0 \leq t \leq 4) \\ \vartheta_k^{(1)}(t) &= 0,8155 t^2 - 20,8 t + 796,1 & (4 \leq t \leq 18) \\ \vartheta_k^{(2)}(t) &= -0,05 t^2 + 5,9 t + 596 & (18 \leq t \leq 60) \\ \vartheta_k^{(3)}(t) &= 775 & (60 < t \leq 120)\end{aligned}$$

Die errechneten Werte der Temperaturverteilung im Körper sind in der zweiten Tabelle angeführt.

Aus Abb. 4 ist ersichtlich, wie weit infolge des plötzlichen Sinkens der Ofentemperatur in den ersten Minuten und des nachfolgenden langsamen Ansteigens das Bild der errechneten Kurven der Temperaturverteilung geändert wird. Es wurden für den hier behandelten Fall eines, praktisch als unendlich lang angenommenen geraden Kreiszyinders ($R = 10$ cm) noch keine Versuchsmessungen durchgeführt; hingegen hatte MASCHKE [9] für einen kleineren Zylinder ($R = 4$ cm) die Messungen ausgeführt. Mit Ausnahme der ersten 10—15 Minuten ist der Verlauf der mit veränderlicher Temperatur hier errechneten Kurve dem der von MASCHKE gemessenen Kurve dem Wesen nach ziemlich gleich. Die Abweichung in der angedeuteten Periode ist wahrscheinlich als die Folge des großen Einflusses der veränderlichen Wärmeleitungsparameter in der Anfangsperiode und der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärme zu betrachten; letztere wird von der hier ausgearbeiteten Lösung nicht erfaßt (siehe Fachliteratur [4]). Die Verallgemeinerung und Erstreckung der hier gezeigten Lösungsmethode auf die nichtlineare Differentialgleichung scheint zur Klärung weiterer Fragen geeignet zu sein. Diese Untersuchungen sind noch nicht beendet.

Wir schließen mit einer numerischen Versuchsrechnung, um die Abweichung nachzuweisen, die in den errechneten Temperaturverteilungen in verschiedenen Zeitpunkten durch Änderung der Wärmeleitungsparameter entsteht. Nach Herabsetzen des Wärmeleitungskoeffizienten auf die Hälfte bzw. auf ein Viertel des vorigen Wertes ($k' = \frac{k}{2}$; $k'' = \frac{k}{4}$) haben wir für einige Zeitpunkte die Temperatur des inneren Kernes sowie der Oberfläche errechnet. Demzufolge haben wir

$$\frac{h}{k'} = 2 \frac{h}{k}; \quad \frac{\gamma c}{k'} = 2 \frac{\gamma c}{k}; \quad \frac{h}{k''} = 4 \frac{h}{k}; \quad \frac{\gamma c}{k''} = 4 \frac{\gamma c}{k}.$$

Eine derartige Änderung der Wärmeleitungsparameter ist bereits im ersten Fall größer als die höchste Änderung in den Intervall zwischen $20^{\circ} \leq$

Tabelle I

t/min	ϑ_{km}	$\vartheta_k(t)$	t/min	ϑ_{km}	$\vartheta_k(t)$	t/min	ϑ_{km}	$\vartheta_k(t)$
0	929	929	26	718	716	52	766	768
2	792	792	28	724	722	54	767	769
4	726	726	30	730	728	56	768	770
6	694	701	32	735	734	58	769	770
8	686	682	34	740	739	60	770	770
10	666	670	36	744	744	65	772	775
12	664	664	38	748	748	70	773	775
14	666	665	40	752	752	75	774	775
16	675	672	42	755	756	80	774	775
18	686	686	44	758	759	85	775	775
20	695	694	46	760	762	90	776	775
22	704	702	48	762	764	105	778	775
24	712	709	50	764	766	120	779	775

ϑ_{km} bedeutet die gemessene, $\vartheta_k(t)$ die durch eine Parabel (bzw. Gerade) substituierte Ofentemperatur

Tabelle II

t/min	$\vartheta_k = 929$		$\vartheta_k = \vartheta_k(t)$		$\vartheta_k = 775$		$\vartheta_k = 740$ $0 \leq t \leq 60$ $\vartheta_k = 775$ $60 < t \leq 120$	
	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$
1	21,65	81,93	21,62	78,42	21,37	71,44	21,31	69,05
2	35,4	111,4	34,8	102,1	32,8	95,6	32,2	92,4
3	56,9	136,4	54,2	120,5	50,6	116,7	49,2	112,2
4	80,5	159,6	74,2	137,0	70,2	135,9	67,9	130,6
5	104,3	181,7	93,5	152,9	90,0	154,3	86,8	148,1
6	127,7	203,1	111,7	168,1				
7	150,6	223,9	128,9	182,6				
8	172,8	244,0	145,3	196,6				
9	194,4	263,6	160,9	209,9				
10	215,4	282,6	175,9	222,9	182,3	238,1	174,8	228,0
11	235,8	301,1	190,2	235,3				
12	255,6	319,0	203,9	246,0				
14	293,5	353,4	230,0	270,9				
16	329,3	385,8	254,5	293,5				
18	363,1	416,4	277,9	315,8	305,0	349,2	291,8	334,0
19	379,3	431,0	289,3	326,7				
20	395,0	445,3	300,6	337,3				
22	425,0	472,5	322,6	358,0				
26	480,2	522,5	364,2	397,1				
30	529,3	567,0	402,8	433,2	443,0	474,3	423,4	453,0
34	573,1	606,6	438,5	466,6				
38	612,1	641,9	471,5	497,4				
40	629,9	658,1	487,0	511,8				
42	646,7	673,3	501,8	525,6				
44	662,6	687,7	516,1	538,8				
48	691,8	714,2	542,6	563,4	578,0	596,6	552,1	569,8
52	717,8	737,7	567,0	585,8				
56	740,9	758,6	588,9	605,9				
60	761,5	777,3	608,7	623,9	635,9	649,0	607,3	619,8
64	779,8	793,9	626,7	640,7	651,1	662,8	624,2	638,4
70	803,6	815,5	650,4	662,1	670,9	680,7	648,2	660,2
80	835,2	844,0	681,7	690,5	697,1	704,4	680,1	689,1
100	876,5	881,4	722,8	727,7	731,4	735,5	721,9	726,9
120	899,6	902,3	745,8	748,5	750,6	752,9	745,2	748,0

Tabelle III

t/min.	$\vartheta_k = 929$						$\vartheta_k = \vartheta_k(t)$					
	k		k'		k''		k		k'		k''	
	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$	$\vartheta(0, t)$	$\vartheta(1, t)$
5	104,3	181,7	68,8	211,9	34,21	257,3	93,5	152,9	63,6	176,3	33,1	212,2
10	215,4	282,6	174,4	306,4	108,5	349,3	175,9	222,9	145,4	239,1	93,9	269,4
18	363,1	416,4	323,6	429,8	250,1	457,6	277,9	315,8	249,8	324,8	197,1	343,8
30	529,3	567,0	494,2	570,5	425,9	580,4	402,8	433,2	375,8	436,8	324,2	445,5
48	691,8	714,2	664,4	710,8	608,6	707,0	542,6	563,4	519,6	562,2	473,6	561,6
60	761,5	777,3	739,0	772,3	691,9	764,7	608,7	623,9	589,1	620,8	548,8	616,5
64	779,8	793,9	758,8	788,7	714,5	780,4	626,7	640,7	608,1	637,4	570,2	631,7
70	803,6	815,5	784,8	810,1	744,5	801,2	650,4	662,1	633,6	658,4	598,8	651,7
80	835,2	844,0	819,6	838,8	785,4	829,5	681,7	690,5	667,7	686,5	637,9	679,1
100	876,5	881,4	866,0	877,0	842,1	868,8	722,8	727,7	713,2	724,0	692,0	716,9
120	899,6	902,3	892,7	899,1	876,3	892,5	745,8	748,5	739,4	745,6	724,7	739,8

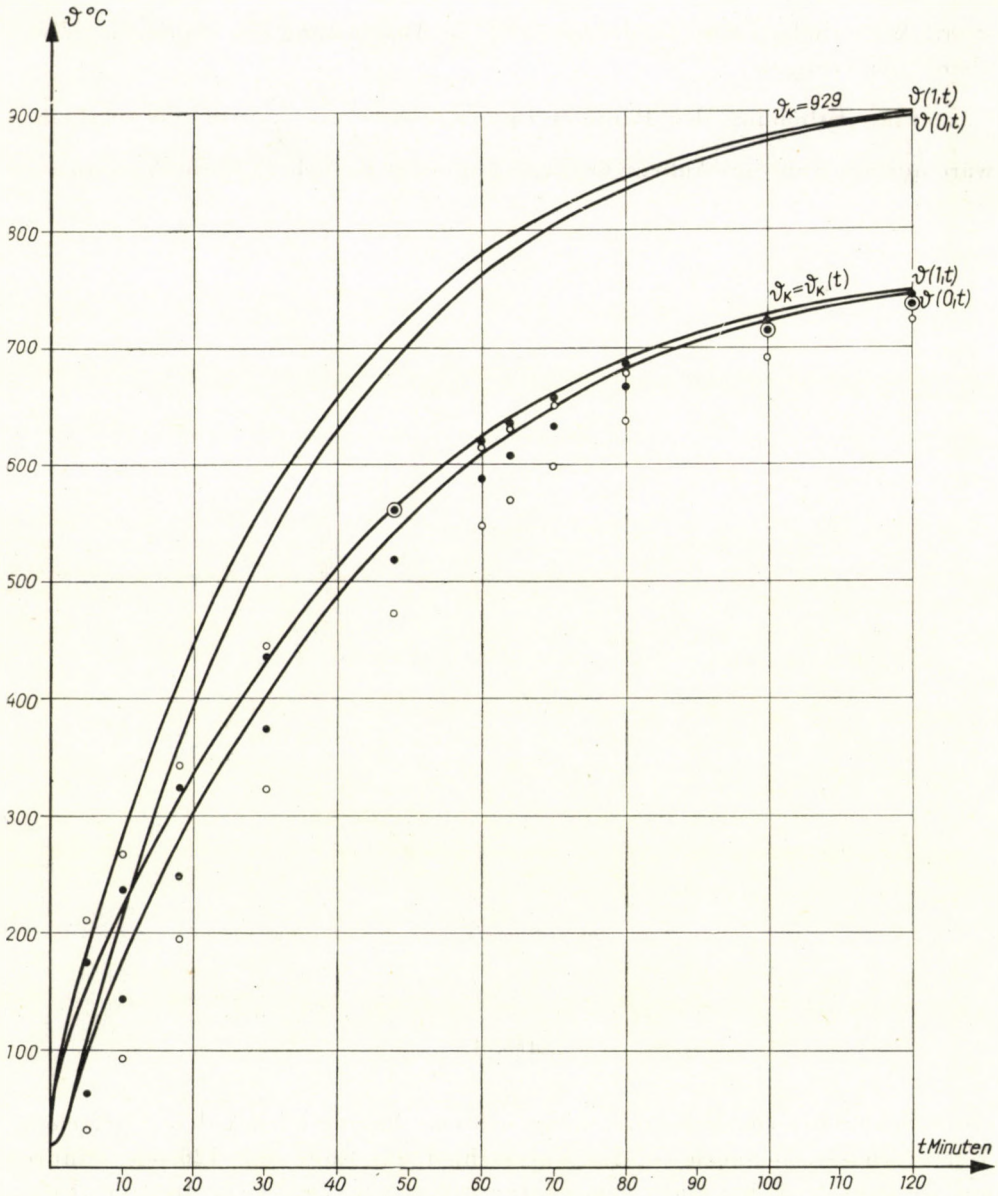


Abb. 4

$\leq \vartheta \leq 500^\circ \text{ C}$ (Abb. 5). Mit anderen Worten, wenn wir vom Anheizbeginn mit k' rechnen, so wird die Abweichung zwischen den Ergebnissen mit k und mit k' größer, als die Abweichung, die zwischen den Resultaten der Rechnung mit k und mit veränderlichen Wärmeleitungsparametern $\left(\frac{h}{k}(\vartheta), \frac{\gamma c}{k}(\vartheta) \right)$ ent-

steht. Wir erhalten also für die tatsächliche Abweichung eine ziemlich grobe, obere Schätzung.

Eine Erhöhung der Parameterquotienten $\left(\frac{h}{k}, \frac{\gamma c}{k}\right)$ auf das vierfache wäre nur am Ende des Anheizvorganges angezeigt (s. Abb. 5), deshalb ist unsere

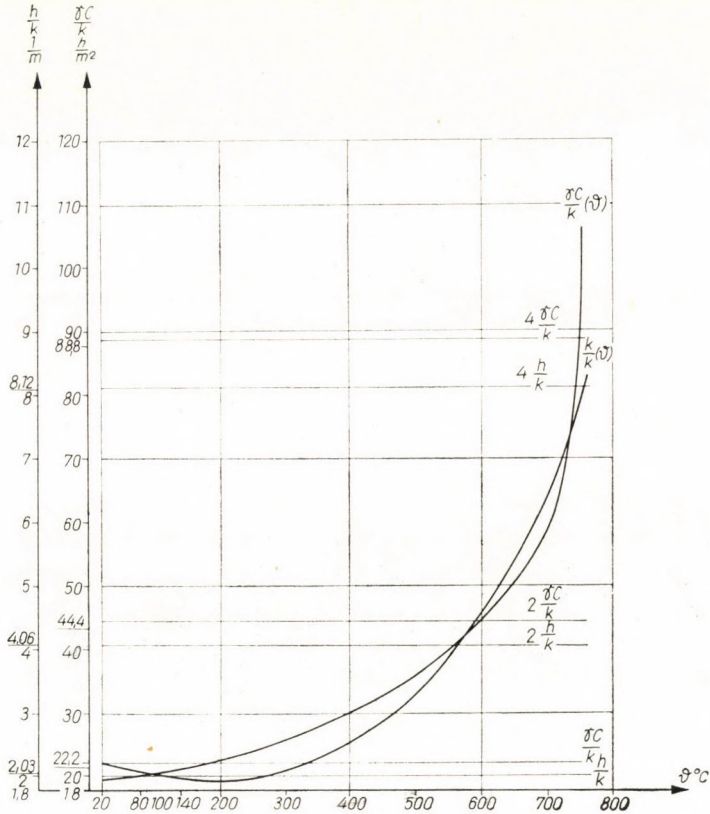


Abb. 5

obere Schätzung ziemlich grob, wenn wir von Anfang an mit dem vierfachen Wert rechnen. Dennoch ist der Unterschied am Ende der 120sten Minute nur 21 bzw. 9° C bei einer Temperatur $\vartheta(0, t)$ von 746° C im Inneren bzw. 748° C an der Oberfläche $[\vartheta(1, t)]$. Also erfährt die Anheizperiode praktisch keine Änderung.

In Tabelle III ist die auf diese Weise errechnete Temperaturverteilung mit der vorherigen verglichen.

Diese Berechnung zeigt, daß die im Körper entstandene Temperaturverteilung nur in der Anfangsperiode des Anheizvorganges empfindlich von den Wärmeleitungsparametern beeinflusst wird; im ersten Fall (mit k') wird

die Abweichung nach ungefähr 30, im zweiten Fall (mit k'') nach 60 Minuten praktisch unbedeutend. Es fragt sich noch, wie groß der Einfluß der spezifischen Wärme in der Periode der kritischen Änderung (cca 750°C) der spezifischen Wärme ist.

Die errechnete Temperaturverteilung wird dadurch stark beeinflusst, daß man die Änderung der Ofentemperatur nicht außer acht läßt (s. Tabelle II). Es folgt also aus dem obigen Rechnungsgang, daß es vor allem wichtig ist, die Änderung der Ofentemperatur im Laufe der gesamten Anheizperiode in die Rechnung einzubeziehen, während die Einbeziehung der Änderung der Wärmeleitungsparameter in derselben Zeit nur in zweiter Reihe von Belang ist.* Für die Anfangsperiode gilt dieser Aussage nicht. Man kann aber nicht wissen, wie sich diese Umstände bei ganz verschiedenen Änderungen der Ofentemperatur und der Wärmeleitungsparameter gestalten würden. Doch gehört ein wichtiger Teil der in der Praxis vorkommenden Fälle zu diesem Typ. Wenn also unsere Behauptung wahr ist, so ist die Lösung der linearen Differentialgleichung der Wärmeleitung mit der inhomogenen Randwertbedingung für die industrielle Praxis viel wichtiger und zugleich auch viel einfacher als die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung.

Bei im Laboratorium ausgeführten Messungen, die selbstredend bedeutend genauer sein müssen, ist es unbedingt notwendig, außer der Änderung der Ofentemperatur in der Zeit auch die von der Temperatur abhängige Änderung der Wärmeleitungsparameter mit in Betracht zu ziehen, obwohl hiedurch die Lösung stark erschwert wird, da man eine nicht-lineare Differentialgleichung erhält. Sind doch die genauen Zusammenhänge in der Anfangsperiode des Anheizens nicht einmal in dem vorigen Fall geklärt. Der Vorteil der gegenwärtigen Methode besteht in der Möglichkeit, den veränderlichen Koeffizienten der Wärmeübergabe, $h(\vartheta)$, derart in der Randbedingung gelten zu lassen, daß die Linearität gewahrt bleibt, ohne den Rechnungsgang komplizierter zu gestalten. Selbstredend werden die übrigen Koeffizienten der Wärmeleitung (k , γ , c) als unveränderlich behandelt. Die Ausarbeitung einer solchen Methode ist im Gange.

Es wäre noch die Frage zu beantworten, mit welcher Genauigkeit man an Stelle der mit Hilfe der in der Zeit veränderlichen Ofentemperatur berechneten Temperaturverteilung im Körper die approximative Berechnung mit einer — entsprechend gewählten — konstanten Ofentemperatur ϑ_k ersetzen könnte. Der Vorgang mit Hilfe des Flächenausgleichs ergibt im ersten Fall für die gesamte Anheizperiode den Wert von $\vartheta_k = 775^\circ \text{C}$. Im Besitze der vorigen Berechnungsergebnisse kann man leicht das gesuchte Resultat erhalten:

* Es soll mir erlaubt sein, Herrn Prof. Dr. Ing. S. BORBÉLY an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank für die Hilfe auszusprechen, die er mir durch Weisungen, kritischen Bemerkungen und auch damit angedeihen ließ, daß er meine Aufmerksamkeit auf obige Anmerkung gelenkt hatte.

das Summationsglied muß mit einem neuen Koeffizienten multipliziert werden. Im zweiten Fall haben wir das ganze Anheizintervall in zwei Abschnitte geteilt: $0 \leq t \leq 60$, und $60 < t \leq 120$; durch Flächenausgleich ergab sich im ersten Abschnitt der Wert $\vartheta_k = 740^\circ \text{C}$, im zweiten $\vartheta_{k1} = 775^\circ \text{C}$. Bei Anschluß an den zweiten Abschnitt ist die Lösung:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(1)}(\varrho, t) = & \vartheta_{k1} - 2R \frac{h}{k} (\vartheta_k - \vartheta_a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2 k}{R^2 \gamma c} t} + \\ & + 2R \frac{h}{k} (\vartheta_k - \vartheta_{k1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{\left[v_n^2 + \left(R \frac{h}{k} \right)^2 \right] J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2 k}{R^2 \gamma c} (t-60)}. \end{aligned}$$

In unserem Beispiel liegt natürlich die mit konstantem Durchschnittswert der Ofentemperatur berechnete Temperaturverteilung der mit in der Zeit veränderlicher Ofentemperatur berechneten Verteilung näher als im Falle eines Rechnungsganges in dem die im Zeitpunkt 0 herrschende Ofentemperatur bis zu Ende beibehalten wird (s. Tabelle II); die Kurven aber zeigen hier (im Abschnitt $0 \leq t \leq 60$) ein anderes Bild; nicht gesprochen davon, daß bei gewissen möglichen zeitlichen Änderungen der Ofentemperatur sich dennoch bedeutende Abweichungen zwischen den Ergebnissen dieser zwei Methoden ergeben können.

SCHRIFTTUM

1. KNESCHKE, A.: Über gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge bei festen Körpern. Ing. Arch. XXIV. B. 1956. S. 77–80.
2. JÄCKEL, H.: Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge. Ing. Arch. XXVI. 1958. S. 146–156.
3. JUNG, H.: Zur Theorie der gesteuerten Anheizvorgänge. ZAMM. 38. 1958. S. 56–59.
4. BORBÉLY, S.: Nemlineáris hővezetési kapcsolatos vizsgálatokról. (Untersuchungen über nichtlineare Wärmeleitung) — Mitteilungen der Klasse für technische Wissenschaften der Ung. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXIII. Heft 3–4, S. 261–286.
5. BORBÉLY, S.: Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. I. Hengerszimmetrikus nemlineáris hőátadási folyamat közelítő vizsgálata a NEWTON-féle hőátadási feltétel alapján. (Über das Anwärmen zylindrisch-symmetrischer Blöcke. I. Approximative Untersuchung eines zylindrisch-symmetrischen nicht-linearen Wärmeleitungsvorganges auf Grund der NEWTONschen Bedingung für Wärmeübertragung). a. a. O. Bd. XXIV. Heft 1–4, S. 7–22.
6. CZIBERE, T.: Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. II. Hengerszimmetrikus nemlineáris hővezetési folyamat közelítő vizsgálata az első peremfeltétel alapján. — (Über das Anwärmen zylindrisch-symmetrischer Blöcke. II. Approximative Untersuchung eines zylindrisch-symmetrischen nicht-linearen Wärmeleitungsvorganges auf Grund der ersten Randwertbedingung.) a. a. O. Bd. XXIV. Heft 1–4, S. 23–32.
7. CZIBERE, T.: Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. III. Nemlineáris hővezetési folyamat meghatározása eléggé hosszú körkeresztmetszetű rúdban, a harmadik peremfeltétel alapján. — (Über das Anwärmen zylindrisch-symmetrischer Blöcke. III. Bestimmung eines nicht-linearen Wärmeleitungsvorganges in einem Stab mit kreisrundem Querschnitt und genügender Länge auf Grund der dritten Randwertbedingung.) a. a. O. Bd. XXIV. Heft 1–4. S. 33–42.

8. BORBÉLY, S.: Hengerszimetrikus bugák felhevítéséről. IV. Hengerszimetrikus hőátadási folyamat vizsgálata hőmérséklettől függő paraméterekkel. — (Über das Anwärmen zylindrisch-symmetrischer Blöcke. IV. Untersuchung eines zylindrisch-symmetrischen Wärmeverganges mit temperaturabhängigen Parametern.) a. a. O. Bd. XXV. Heft 1—4, S. 187—197.
9. MASCHEK, T.: Hengerszimetrikus bugák felhevítéséről. V. Hengerszimetrikus testek hevítése változó hőmérsékletű kemencében. — (Über das Anwärmen zylindrisch-symmetrischer Blöcke. V. Anwärmen zylindrisch-symmetrischer Körper in einem Ofen veränderlicher Temperatur.) a. a. O. Bd. XXV. Heft 1—4, S. 199—228.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser liefert die Lösung der Wärmeleitungsdifferentialgleichung mit inhomogener Randwertbedingung für den Fall eines (zylindrisch-symmetrischen) unendlich langen, geraden Kreiszylinders. Die Inhomogenität ist durch die zeitlich veränderliche Außentemperatur (im Ofen) gegeben. Die Lösung ist exakt dargestellt als die Summe aus einem ersten Glied (als Lösung des klassischen Falles mit konstanter Ofentemperatur) und einem Korrektionsglied. Dieses Korrektionsglied zeigt die Beeinflussung der Temperaturverteilung im Körper durch die Veränderlichkeit der Ofentemperatur. Die Lösung ergibt sich durch eine spezielle Zerlegung der Randwertbedingung und durch Einführung der DIRACschen δ Funktion zur Bestimmung der unbekanntenen Integralkernfunktion. Die Methode bleibt gültig für alle praktisch möglichen Funktionen der Ofentemperatur.

Die Differentialgleichung wird erst mit konstanten thermischen Parametern und beliebig veränderlicher Ofentemperatur gelöst und nachher werden die Parameter mit einer gestuften Kurve ersetzt. In der Fortsetzung wird die Kurve der Ofentemperatur (zwecks Erleichterung der Integration) abschnittsweise mit je einer Parabel zweiten Grades ersetzt und an die zu Anfang eines Abschnittes herrschende Temperaturverteilung des Körpers die vorherige Verteilung angeschlossen. Anschließend wird ein konkreter Fall als Rechnungsbeispiel behandelt.

Schließlich folgt eine Proberechnung bei Erhöhung der thermischen Parameter um 100% bzw. 300%, und es wird festgestellt, daß es zur Berechnung wesentlicher ist, die Änderung der Ofentemperatur (mit Ausnahme der Anfangsperiode des Anheizens) als die Änderung der thermischen Parameter zu berücksichtigen. Auf diese Weise bleibt die Differentialgleichung linear.

HEATING OF A LONG CYLINDER IN A FURNACE WITH CHANGING TEMPERATURE

A. HOFFMANN

SUMMARY

The author elaborates the solution of the differential equation relating to heat conduction on the basis of an inhomogeneous condition for marginal values in the case of a straight round cylindrical body having an infinite length. This inhomogeneity is determined by the ambience temperature (in the furnace) variable in time. The solution is presented by adding, to the first member which represents the result of the classical solution relating to the condition of a constant furnace-temperature, as correction a second member representing the influence of the varying furnace-temperature on the distribution of temperature in the body. The solution is found by a special dissolution of the equation referring to the marginal values by introducing the DIRAC function δ which determines the unknown function of the integration core. The method proves satisfactory for practically all possible functions representing the furnace temperature.

First of all, the differential equation is solved on the basis of constant thermic parameters and on variable furnace temperature, and then the parameters are substituted by a curve composed of steps; in the next phase — in order to facilitate the integration — the furnace temperature curve is substituted, section by section by second grade parabolae with the assumption that the temperature distribution in the body at the beginning of some section coincides with that one at the end of the preceding section. This sequence of computing is closed by giving a numerical example.

Finally, the author makes a tentative calculation, in order to examine the effect of increasing parameter values by 100% and 300%, respectively; the result of this reasoning is the statement, that it is far more important to take into consideration the variability of the furnace temperature than the variability of the thermic parameter; so the differential equation continues being linear.

CHAUFFAGE D'UN CYLINDRE LONG DANS UN FOUR À TEMPÉRATURE VARIABLE

A. HOFFMANN

RÉSUMÉ

L'auteur résout l'équation différentielle de la conduction de chaleur, à condition marginale inhomogène, pour un corps cylindrique circulaire de longueur infinie. L'inhomogénéité est déterminée par la température ambiante (dans le four), variable dans le temps. La solution exacte se présente comme la somme du premier terme exprimant le résultat classique (température constante du four), et d'un terme de correction indiquant l'effet de la variation de température du four sur la répartition de température dans le corps. La solution est obtenue par décomposition spéciale de l'équation relative aux valeurs marginales, et par introduction de la fonction δ de DIRAC, en vue de la détermination de la fonction du noyau d'intégration. La méthode demeure applicable à toutes les fonctions pratiquement possibles de la température du four.

L'équation différentielle est d'abord résolue en utilisant des paramètres thermiques constants et une température de four variable, puis les paramètres sont remplacés par une courbe échelonnée. A la fonction de la température du four, l'auteur substitue ensuite, dans chaque zone, des paraboles du second degré, en supposant que la répartition de température du commencement d'une zone coïncide avec celle de la fin de la zone précédente. Le calcul d'un exemple concret illustre l'application du procédé.

L'auteur présente enfin un calcul en augmentant la valeur des paramètres de 100%, resp. de 300%. Il constate que lors de la détermination de la répartition de température du corps, les variations de la température du four sont plus importantes à considérer — excepté la phase initiale du chauffage d'une durée de 15 à 20 minutes — que les variations des paramètres thermiques.

НАГРЕВ ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ПЕЧИ

A. ХОФМАН

РЕЗЮМЕ

Автор в своей работе решает дифференциальное уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями для случая бесконечно длинного прямого цилиндра. Неоднородность происходит от изменяющейся во времени внешней (печевой) температуры. Выводится строгое решение, как сумма решения классического случая (постоянная температура печи) и некоторого коррекционного члена. Коррекционный член показывает влияние изменения температуры печи на распределение температуры тела. Решение производится при помощи специального разложения краевого условия, и введением функции δ Дирака для определения неизвестной интегральной функции. Метод действителен для всех практически возможных функций температуры печи.

Дифференциальное уравнение сначала решается с постоянными термическими параметрами и при произвольной переменной температуре печи, затем параметры замещаются ступенчатой кривой. В следующей части функцию температуры печи автор замещает параболлами второго порядка (для облегчения интегрирования) и при переходах соединяет предыдущие данные. После этого для демонстрации приводится пример вычисления.

Затем автор производит пробные вычисления при 100, а затем 300%-ном увеличении термических параметров и устанавливает, что при определении распределения температуры тела (за исключением начального периода нагрева (15—20 мин)) первоначально важным является учет изменений температуры печи с включением изменений термических параметров. Таким образом дифференциальное уравнение остается еще линейным.

EINIGE SPEZIELLE FORMEN DER CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG BEI TORSIONSSCHWINGUNGEN

Dr. A. BALOGH

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 12 April 1961]

Die Eigenschwingungszahlen der Torsionschwingung werden aus der charakteristischen Determinantengleichung als Wurzel der aus dieser abgeleiteten algebraischen Gleichung berechnet. Wird die hier vorkommende Determinante in bekannter Weise entwickelt, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$c_k c_{k+1} \dots c_{n-1} \frac{I_k I_{k+1} + \dots + I_n}{I_k I_{k+1} \dots + I_n}. \quad (1)$$

Die algebraische Gleichung bzw. deren Beiwerte bestehen aus der Addition und Multiplikation solcher Ausdrücke. Unter solchen Umständen kann die charakteristische Gleichung wegen deren Ausdehnung, besonders bei größeren Massenzahlen, kaum angeschrieben, noch gelöst werden. Durch Einführung von entsprechenden Bezeichnungen können aber diese Schwierigkeiten überwunden werden.

Das eine Verfahren besteht darin, daß für den unter (1) angegebenen Ausdruck eine besondere Bezeichnung eingeführt wird. Die hierzu notwendigen Berechnungen wurden in den Mitteilungen der Klasse für technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei) in Band XXVII, No. 3—4 veröffentlicht.

Ein zweites Verfahren für den in (1) angegebenen Ausdruck besteht darin, daß man die dort angegebenen Grundrechnungen durchführt und die folgende Bezeichnung benützt:

$$u_{kn} = \frac{c_k}{I_n} \quad (2)$$

wo c den Steifigkeitswert und I das Massenträgheitsmoment bedeutet. Auf diese Weise ist man ebenfalls in der Lage, die charakteristische Gleichung auch für eine größere Massenzahl anzuschreiben, und die damit verbundenen Rechnungen wurden in den schon oben angegebenen Mitteilungen, Band XV, Heft 1—4, veröffentlicht. Dieses Material wurde in den Mitteilungen ergänzt.

In der Praxis findet man aber oft solche spezielle Fälle, wo die Massen des Systems in besonderer, evtl. sogar in vorteilhafter Weise angeordnet werden. Nützt man diese Vorteile bei diesen speziellen Fällen aus, so kann die charakteristische Gleichung weiter vereinfacht werden. So z. B. sind die zu den Motorenzylindern gehörenden Massenträgheitsmomente und die entsprechenden Steifigkeitswerte untereinander gleich. Bei solchen Systemen sind aber noch weitere, sogenannte unabhängige Massen vorhanden, wie Schwungräder, Generatoren, Kupplungen, Schiffschrauben etc. Diese unabhängigen Massen können entweder auf der einen, oder auf beiden Seiten des Motors angeordnet werden.

In dem soeben erwähnten Aufsatz haben wir den einfachsten Fall einer unabhängigen Masse behandelt und hierbei haben wir das Pascalsche Dreieck und hiermit die Binominalkoeffizienten zur Hilfe genommen. Nun werden wir im folgenden jene Fälle behandeln, wo die Zahl der unabhängigen Massen mehr als 1 ist.

Bei der Herstellung von Motoren werden besondere Typen entwickelt, wobei die Zahl der unabhängigen Massen und deren Anordnung ein für allemal festgelegt wird. Die allgemeine Berechnung solcher Fälle kann in der schon mitgeteilten Weise ohne Schwierigkeit durchgeführt werden, aber für solche spezielle Fälle können — wie es später gezeigt wird — entsprechende Vereinfachungen eingeführt werden, wodurch die charakteristische Gleichung bedeutend vereinfacht und somit mit weniger Rechenarbeit sofort angeschrieben werden kann.

Im folgenden werden einige bedeutende Beispiele vorgeführt und zugleich wird auf Gesetzmäßigkeiten hingewiesen, die man in ähnlichen und anderen Fällen erfolgreich verwenden kann.

In dem schon zitierten Aufsatz, veröffentlicht in den Mitteilungen, Band XV, Heft 1—4, wurde die charakteristische Gleichung für n Massen angegeben, und zugleich als Beispiel diese Gleichung für 5 und 8 Massen angeschrieben. Hieran knüpfen sich die folgenden Ausführungen.

In der Zahlentafel I ist unter (3) die charakteristische Gleichung für 5 Massen angeführt, für den Fall, wenn die Zahl der unabhängigen Massen gleich 1 ist. Die Beiwerte wurden in Form der Binominalkoeffizienten angeschrieben, die schon in der Acta Technica, Band XXXII, Heft 3—4, veröffentlicht wurden. Zur Ermittlung dieser Gleichung genügt es, folgende Änderungen durchzuführen:

$$u = u_{22} = u_{23} = \dots = u_{45}.$$

In der Zahlentafel I ist unter (4) ebenfalls die charakteristische Gleichung für ein System von 5 Massen angeschrieben, aber mit dem Unterschiede, daß unter den 5 Massen die Zahl der unabhängigen Massen gleich 2 ist, und zwar sind diese 2 Massen einseitig angeordnet. Dieser Fall entspricht einem

solchen 3zylindrigen Motor, bei dem das Schwungrad und der Generator einseitig angeordnet wurden. Die hierzu notwendigen und durchzuführenden Änderungen sind die folgenden:

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45}.$$

An Stelle der Beiwerte wurden ebenfalls die Binominalkoeffizienten geschrieben.

Betrachtet man in der Zahlentafel I die unter (3) und (4) angeführten Gleichungen und verfolgt man die Entstehung der Binominalkoeffizienten, so ist man in der Lage, auf Grund der vorhandenen Gesetzmäßigkeit, die charakteristische Gleichung auch für den Fall anzuschreiben, wenn die Zahl der unabhängigen Massen größer als 2 ist. Es wird im folgenden gezeigt, daß hierbei die Pascalschen Dreiecke gute Hilfe leisten.

In der Zahlentafel II wurde ein numerisches Beispiel ausgearbeitet, wobei die Gleichung (4) aus Zahlentafel I benützt wurde.

Wie schon angegeben, wurde in dem bereits öfters zitierten Aufsatz auch die charakteristische Gleichung für 8 Massen angeschrieben und zwar in allgemeiner Form. Insofern die Zahl der unabhängigen Massen gleich 1 ist, sind folgende Änderungen durchzuführen:

$$u = u_{22} = u_{23} = \dots = u_{78}.$$

Das Ergebnis ist in der Zahlentafel III angegeben. Es soll noch bemerkt werden, daß über die Binominalkoeffizienten die Zahlenwerte derselben mit kleinen Buchstaben angegeben wurden.

Zahlentafel I

$$\begin{aligned}
 w^8 - \left[u_{11} \binom{8-1}{0} + u_{12} \binom{8-2}{0} + u \binom{8-2}{1} \right] w^6 + u \left[u_{11} \binom{8-2}{1} + u_{12} \binom{8-3}{1} + \right. \\
 \left. + u \binom{8-3}{2} \right] w^4 - u^2 \left[u_{11} \binom{8-3}{2} + u_{12} \binom{8-4}{2} + u \binom{8-4}{3} \right] w^2 + \\
 \left. + u^3 \left[u_{11} \binom{8-4}{3} + u_{12} \binom{8-4}{4} \right] = 0 \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w^8 - \left[u_{11} \binom{8-1}{0} + u_{12} \binom{8-2}{0} + u_{22} \binom{8-3}{0} + u_{23} \binom{8-4}{0} + u \binom{8-4}{1} \right] w^6 + \\
 \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{8-3}{0} + u_{23} \binom{8-4}{0} + u \binom{8-4}{1} \right) + u_{12} \left(u_{23} \binom{8-4}{0} + u \binom{8-4}{1} \right) + \right. \\
 \left. + u \left(u_{22} \binom{8-4}{1} + u_{23} \binom{8-5}{1} + u \binom{8-5}{2} \right) \right] w^4 - \\
 - \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{8-4}{1} + u_{23} \binom{8-5}{1} + u \binom{8-5}{2} \right) u + u_{12} \left(u_{23} \binom{8-5}{1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + u \binom{8-5}{2} \right) u + \left(u_{22} \binom{8-5}{2} + u_{23} \binom{8-5}{3} \right) u^2 \right] w^2 + \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{8-5}{2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + u_{23} \binom{8-5}{3} \right) u^2 + u_{12} u_{23} u^2 \right] = 0 \tag{4}
 \end{aligned}$$

Zahrentafel II

$$u_{11} = 0,87 \cdot 10^3, u_{12} = 1,03 \cdot 10^3, u_{22} = 1,33 \cdot 10^3, u_{23} = 1,32 \cdot 10^5 \\ u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = 1,73 \cdot 10^5$$

Der Beiwert von w^6 :

$$u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 4u = 0,87 \cdot 10^3 + 1,03 \cdot 10^3 + 1,33 \cdot 10^3 + 1,32 \cdot 10^5 + \\ + 4 \cdot 1,73 \cdot 10^5 = 82,74 \cdot 10^4$$

Der Beiwert von w^4 :

$$u_{11}(u_{22} + u_{23} + 4u) = 0,87 \cdot 10^3 (1,33 \cdot 10^3 + 1,32 \cdot 10^5 + 6,92 \cdot 10^5) = 718\,037\,100 \\ u_{12}(u_{23} + 4u) = 1,03 \cdot 10^3 (1,32 \cdot 10^5 + 6,92 \cdot 10^5) = 848\,720\,000 \\ u(4u_{22} + 3u_{23} + 3u) = 1,73 \cdot 10^5 (4 \cdot 1,33 \cdot 10^3 + 3 \cdot 1,32 \cdot 10^5 + 3 \cdot 1,73 \cdot 10^5) = \\ = 159\,211,900\,000$$

Nach Summierung und Abrundung ist das Ergebnis:

$$1607 \cdot 10^8$$

Der Beiwert von w^2 :

$$uu_{11}(4u_{22} + 3u_{23} + 3u) = 0,87 \cdot 10^3 \cdot 1\,592\,119 \cdot 10^5 = 13\,851\,43\,530 \cdot 10^5 \\ uu_{12}(3u_{23} + 3u) = 1,03 \cdot 10^3 (3,96 \cdot 10^5 + 5,19 \cdot 10^5) 1,73 \cdot 10^5 = 1\,630\,438\,500 \cdot 10^5 \\ (3u_{22} + u_{23})u^2 = (3 \cdot 1,33 \cdot 10^3 + 1,32 \cdot 10^6) 1,73^2 \cdot 10^{10} = 406\,170 \cdot 10^{10}$$

Nach Summierung und Abrundung ist das Ergebnis:

$$4364,10^{12}$$

Der Beiwert von w^0 :

$$u_{11}(3u_{22} + u_{23})u^2 = 406\,170 \cdot 10^{10} \cdot 0,87 \cdot 10^3 = 353\,367\,900 \cdot 10^{10} \\ u_{12}u_{23}u^2 = 1,03 \cdot 10^3 \cdot 1,32 \cdot 10^5 \cdot 1,73^2 \cdot 10^{10} = 406\,880\,000 \cdot 10^{10}$$

Nach Summierung und Abrundung ist das Ergebnis:

$$760 \cdot 10^{16}$$

Die Gleichung lautet:

$$w^8 - 82,74 \cdot 10^4 \cdot w^6 + 1607 \cdot 10^8 \cdot w^4 - 4364 \cdot 10^{12} \cdot w^2 + 760 \cdot 10^{16} = 0$$

Zahrentafel III

$$u = u_{22} = u_{23} = \dots = u_{78}$$

$$w^{14} - \left[u_{11} \binom{14-1}{0} + u_{12} \binom{14-2}{0} + u \binom{12}{1} \right] w^{12} + \\ + u \left[u_{11} \binom{12}{1} + u_{12} \binom{11}{1} + u \binom{55}{2} \right] w^{10} - \\ - u^2 \left[u_{11} \binom{55}{2} + u_{12} \binom{45}{2} + u \binom{120}{3} \right] w^8 +$$

$$\begin{aligned}
 &+ u^3 \left[u_{11} \binom{120}{14-4} + u_{12} \binom{84}{14-5} + u \binom{126}{14-5} \right] w^6 - \\
 &- u^4 \left[u_{11} \binom{126}{14-5} + u_{12} \binom{70}{14-6} + u \binom{56}{14-6} \right] w^4 + \\
 &+ u^5 \left[u_{11} \binom{56}{14-6} + u_{12} \binom{21}{14-7} + u \binom{7}{14-7} \right] w^2 - \\
 &- u^6 \left[u_{11} \binom{7}{14-7} + u_{12} \binom{1}{14-7} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Zahlentafel IV

$$u = u_{33} = u_{34} = \dots = u_{78}$$

$$\begin{aligned}
 &2w^{14} - \left[u_{11} \binom{14-1}{0} + u_{12} \binom{14-2}{0} + u_{22} \binom{14-3}{0} + u_{23} \binom{14-4}{0} + u \binom{10}{14-4} \right] w^{12} + \\
 &+ \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{14-3}{0} + u_{23} \binom{14-4}{0} + u \binom{10}{14-4} \right) + u_{12} \left(u_{23} \binom{14-4}{0} + u \binom{10}{14-4} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(u_{22} \binom{10}{14-4} + u_{23} \binom{9}{14-5} + u \binom{36}{14-5} \right) u \right] w^{10} - \\
 &- \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{10}{14-4} + u_{23} \binom{9}{14-5} + u \binom{36}{14-5} \right) u + u_{12} \left(u_{23} \binom{9}{14-5} + u \binom{36}{14-5} \right) u + \right. \\
 &\quad \left. + \left(u_{22} \binom{36}{14-5} + u_{23} \binom{28}{14-6} + u \binom{56}{14-6} \right) u^2 \right] w^8 + \\
 &+ \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{36}{14-5} + u_{23} \binom{28}{14-6} + u \binom{56}{14-6} \right) u^2 + u_{12} \left(u_{23} \binom{28}{14-6} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + u \binom{56}{14-6} \right) u^2 + \left(u_{32} \binom{56}{14-6} + u_{23} \binom{35}{14-7} + u \binom{35}{14-7} \right) u^3 \right] w^6 - \\
 &- \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{56}{14-6} + u_{23} \binom{35}{14-7} + \binom{35}{14-7} u \right) u^3 + u_{12} \left(u_{23} \binom{35}{14-7} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + u \binom{35}{14-7} \right) + \left(u_{22} \binom{35}{14-7} + u_{23} \binom{15}{14-8} + u \binom{6}{14-8} \right) u^4 \right] w^4 + \\
 &+ \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{35}{14-7} + u_{23} \binom{15}{14-8} + u \binom{6}{14-8} \right) u^4 + u_{12} \left(u_{23} \binom{15}{14-8} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + u \binom{6}{14-8} \right) u^4 + \left(u_{22} \binom{6}{14-8} + u_{23} \binom{1}{14-9} \right) u^5 \right] w^2 - \\
 &- \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{6}{14-8} + u \binom{1}{14-9} \right) u^5 + u_{12} u_{23} u^5 \right] = 0
 \end{aligned}$$

In der Zahlentafel IV haben wir die charakteristische Gleichung für ein System von 8 Massen, mit Hilfe der Binominalkoeffizienten, angeschrieben für den Fall, daß die Zahl der unabhängigen Massen — einseitig angeordnet — gleich 2 ist. Diese Gleichung kann mittels entsprechender Bezeichnungen vereinfacht werden. Die Bezeichnung wurde derart gewählt, daß hierdurch eine Vorrechnung Vereinfachungen zuläßt und zugleich die Vorteile des Pascalschen Dreiecks auszunützen ermöglicht. Die Bezeichnungen wurden in zwei Gruppen eingeteilt:

Die erste Gruppe:

$$u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 10u = K_{11-3} = u_{11} + K_{12-3}$$

$$u_{12} + u_{22} + u_{23} + 10u = K_{123} = u_{12} + K_{223}$$

$$u_{22} + u_{23} + 10u = K_{223} = u_{22} + K_{23}$$

$$u_{23} + 10u = K_{23}$$

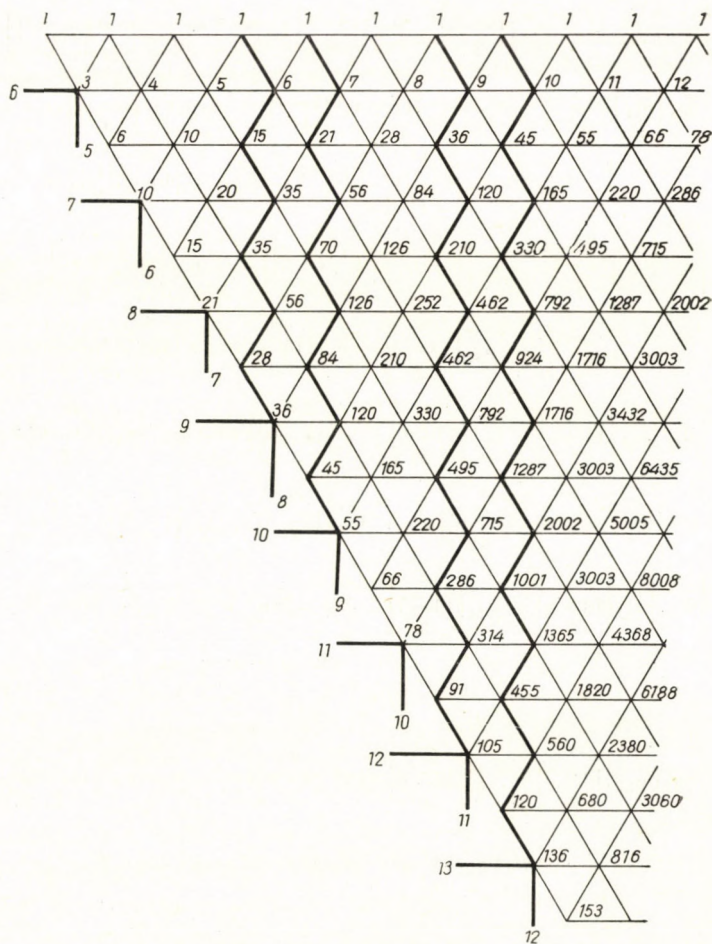


Bild 1

Die zweite Gruppe:

$$\begin{aligned}
 (10u_{22} + 9u_{23} + 36u) u &= U_{10} & (9u_{23} + 36u) u &= U_9 \\
 (36u_{22} + 28u_{23} + 56u) u^2 &= U_{36} & (28u_{23} + 56u) u^2 &= U_{28} \\
 (56u_{22} + 35u_{23} + 35u) u^3 &= U_{56} & (35u_{23} + 35u) u^2 &= U_{35} \\
 (35u_{22} + 15u_{23} + 6u) u^4 &= U_{35} & (15u_{23} + 6u) u^4 &= U_{15} \\
 (6u_{22} + u_{23}) u^5 &= U_6 & &
 \end{aligned}$$

Die linke Seite der zweiten Gruppe ist dem Pascalschen Dreieck, Bild 1, zu entnehmen. Es ist sofort zu ersehen, daß die in den beiden Gruppen angegebenen Ausdrücke aus den zur Berechnung angegebenen Daten zu ermitteln sind. In ähnlichen Fällen kann daher die charakteristische Gleichung in dieser vereinfachten Form angeschrieben werden.

Mit den angegebenen Bezeichnungen nimmt die in der Zahlentafel IV angeführte charakteristische Gleichung die folgende einfachere Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 w^{14} - K_{11-3} w^{12} + (u_{11} K_{223} + u_{12} K_{23} + U_{10}) w^{10} + \\
 + (u_{11} U_{10} + u_{12} U_9 + U_{36}) w^8 - (u_{11} U_{36} + u_{12} U_{28} + U_{56}) w^6 + \\
 + (u_{11} U_{56} + u_{12} U_{35} + U_{35}) w^4 - (u_{11} U_{35} + u_{12} U_{15} + U_6) w^2 + \\
 + (u_{11} U_{15} + u_{12} u_{23} u^5) = 0
 \end{aligned}$$

Zahlentafel V

$$u = u_{44} = u_{45} = \dots = u_{78}$$

$$\begin{aligned}
 w^{14} - \left\{ u_{11} \binom{14-1}{0} + u_{12} \binom{14-2}{0} + u_{22} \binom{14-3}{0} + u_{23} \binom{14-4}{0} + u_{33} \binom{14-5}{0} + \right. \\
 + u_{34} \binom{14-6}{0} + u \binom{8}{14-6} \left. \right\} w^{12} + \left\{ u_{11} \left[u_{22} \binom{14-3}{0} + u_{23} \binom{14-4}{0} + u_{33} \binom{14-5}{0} \right] + \right. \\
 + u_{34} \binom{14-6}{0} + u \binom{8}{14-6} \left. \right] + u_{12} \left[u_{23} \binom{14-4}{0} + u_{33} \binom{14-5}{0} + u_{34} \binom{14-6}{0} + \right. \\
 + u \binom{8}{14-6} \left. \right] + u_{22} \left[u_{33} \binom{14-5}{0} + u_{34} \binom{14-6}{0} + u \binom{8}{14-6} \right] + u_{23} \left[u_{34} \binom{14-6}{0} + \right. \\
 + u \binom{8}{14-6} \left. \right] + u \left[u_{33} \binom{8}{14-6} + u_{34} \binom{7}{14-7} + u \binom{21}{14-7} \right] \left. \right\} w^{10} - \\
 - \left\{ u_{11} \left[u_{22} \left(\left(u_{33} \binom{14-5}{0} + u_{34} \binom{14-6}{0} + u \binom{8}{14-6} \right) \right) + u_{23} \left(\left(u_{34} \binom{14-6}{0} + u \binom{8}{14-6} \right) \right) \right] + \right. \\
 + u \left(\left(u_{33} \binom{8}{14-6} + u_{34} \binom{7}{14-7} + u \binom{21}{14-7} \right) \right) \left. \right] + u_{12} \left[u_{23} \left(\left(u_{34} \binom{14-6}{0} + \right. \right. \right. \\
 + u \binom{8}{14-6} \left. \left. \left. \right) \right) + u \left(\left(u_{33} \binom{8}{14-6} + u_{34} \binom{7}{14-7} + u \binom{21}{14-7} \right) \right) \right] + \\
 + u_{22} \left[u_{33} \binom{8}{14-6} u_{34} \binom{7}{14-7} + u \binom{21}{14-7} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_{23} \left[u_{34} \binom{7}{14-7} + u \binom{21}{14-7} \right] + u^2 \left[u_{33} \binom{21}{14-7} + u_{34} \binom{15}{14-8} + u \binom{20}{14-8} \right] \Big\} w^8 + \\
& + \left\{ u_{11} \left[u_{22} \left(\left(u_{33} \binom{8}{14-6} + u_{34} \binom{7}{14-7} + u \binom{21}{14-7} \right) \right) u + u_{23} \left(\left(u_{34} \binom{7}{14-7} + u \binom{21}{14-7} \right) \right) u + \right. \right. \\
& + u^2 \left(\left(u_{33} \binom{21}{14-7} + u_{34} \binom{15}{14-8} + u \binom{20}{14-8} \right) \right) \Big] + u_{12} \left[u_{23} \left(\left(\binom{7}{14-7} \right) u_{33} + \right. \right. \\
& + u \left. \left. \binom{21}{14-7} \right) \right) u + \left(\left(u_{33} \binom{21}{14-7} + u_{34} \binom{15}{14-8} + u \binom{20}{14-8} \right) \right) u^2 \Big] + \\
& + u_{22} \left[u_{33} \binom{21}{14-7} + u_{34} \binom{15}{14-8} + u \binom{20}{10-8} \right] u^2 + u_{23} \left[u_{34} \binom{15}{14-8} + \right. \\
& + u \left. \binom{20}{14-8} \right] u^2 + \left[u_{33} \binom{20}{14-8} + u_{34} \binom{10}{14-9} + u \binom{5}{14-9} \right] u^3 \Big\} w^6 - \\
& - \left\{ u_{11} \left[u_{22} \left(\left(u_{33} \binom{21}{14-7} + u_{34} \binom{15}{14-8} + u \binom{20}{14-8} \right) \right) u^2 + u_{23} \left(\left(u_{34} \binom{15}{14-8} + \right. \right. \right. \\
& + u \left. \left. \binom{20}{14-8} \right) \right) u^2 + \left(\left(u_{33} \binom{20}{14-8} + u \binom{10}{14-9} + u \binom{5}{14-9} \right) \right) u^3 \Big] + \\
& + u_{12} \left[u_{23} \left(\left(u_{34} \binom{10}{14-9} + u \binom{5}{14-9} \right) \right) u^2 + \left(\left(u_{33} \binom{20}{14-8} + u_{34} \binom{10}{14-9} + \right. \right. \right. \\
& + u \left. \left. \binom{5}{14-9} \right) \right) u^3 \Big] + \\
& + u_{22} \left[u_{33} \binom{20}{14-8} + u_{34} \binom{10}{14-9} + u \binom{5}{14-9} \right] u^3 + u_{23} \left[u_{34} \binom{10}{10-9} + \right. \\
& + u \left. \binom{5}{14-9} \right] u^3 + \left[u_{33} \binom{5}{14-9} + u \binom{1}{14-9} \right] u^4 \Big\} w^4 + \\
& + \left\{ u_{11} \left[u_{22} \left(\left(u_{33} \binom{20}{14-8} + u_{34} \binom{10}{14-9} + u \binom{5}{14-9} \right) \right) u^3 + u_{23} \left(\left(u_{34} \binom{10}{14-9} + \right. \right. \right. \\
& + u \left. \left. \binom{5}{14-9} \right) \right) u^3 + \left(\left(u_{33} \binom{5}{14-9} + u \binom{1}{14-9} \right) \right) u^4 \Big] + \\
& + u_{12} \left[u_{23} \left(\left(u_{34} \binom{10}{14-9} + u \binom{5}{14-9} \right) \right) u^3 + \left(\left(u_{33} \binom{5}{14-9} + u_{34} \binom{1}{14-9} \right) \right) \right] + \\
& + u_{22} \left[u_{33} \binom{5}{14-9} + u \binom{1}{14-9} \right] u^4 + u_{23} u_{34} u^4 \Big\} w^2 - \\
& - \left\{ u_{11} \left[u_{22} \left(\left(u_{33} \binom{5}{14-9} + u \binom{1}{14-9} \right) \right) u^4 + u_{23} u_{34} u^4 \right] + u_{12} u_{23} u_{34} u^4 \right\} = 0
\end{aligned}$$

In der Zahlentafel V ist die charakteristische Gleichung für 8 Massen mit einseitig angeordneten 3 Massen angeschrieben. Diese Gleichung wird, wie dies schon vorgeführt wurde, durch Bezeichnungen vereinfacht, welche in zwei Gruppen eingeteilt werden:

Erste Gruppe:

$$\begin{aligned}
 u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{11-4} = u_{11} + K_{12-4} \\
 u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{12-4} = u_{12} + K_{22-4} \\
 u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{22-4} = u_{22} + K_{234} \\
 u_{23} + u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{234} = u_{23} + K_{334} \\
 u_{33} + u_{34} + 8u &= K_{334} = u_{33} + K_{34} \\
 u_{34} + 8u &= K_{34}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Die K Werte sind einfach zu berechnen, weil man hierzu die auf der rechten Seite befindlichen Ausdrücke benützen kann.

Zweite Gruppe:

$$\begin{aligned}
 (8u_{33} + 7u_{34} + 21u) u &= U_8 & (7u_{34} + 21u) u &= U_7 \\
 (21u_{33} + 15u_{34} + 20u) u^2 &= U_{21} & (15u_{34} + 20u) u^2 &= U_{15} \\
 (20u_{33} + 10u_{34} + 5u) u^3 &= U_{20} & (10u_{34} + 5u) u^3 &= U_{10} \\
 (5u_{33} + u) u^4 &= U_5
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke auf der linken Seiten der zweiten Gruppe sind dem Pascalschen Dreieck, Bild 1, zu entnehmen (horizontale Gerade). Mit Hilfe dieser Bezeichnungen hat die charakteristische Gleichung die folgende vereinfachte Form:

$$\begin{aligned}
 w^{14} - K_{11-4} w^{12} + [u_{11} K_{22-4} + u_{12} K_{23-4} + u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + \\
 + U_8] u_{10} - [u_{11}(u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_8) + u_{12}(u_{23} K_{34} + U_8) + \\
 + u_{22} U_8 + u_{23} U_7 + U_{21}] w^8 + [u_{11}(u_{22} U_8 + u_{23} U_7 + U_{21}) + \\
 + u_{12}(u_{23} U_7 + U_{21}) + u_{22} U_{21} + u_{23} U_{15} + U_{20}] w^6 - \\
 - [u_{11}(u_{22} U_{21} + u_{23} U_{15} + U_{20}) + u_{12}(u_{23} U_{15} + U_{20}) + u_{22} U_{20} + \\
 + u_{23} U_{10} + U_5] w^4 + [u_{11}(u_{22} U_{20} + u_{23} U_{10} + U_5) + \\
 + u_{12}(u_{23} U_{10} + U_5) + u_{22} U_5 + u_{23} u_{34} u^4] w^2 - \\
 - [u_{11}(u_{22} U_5 + u_{23} u_{34} u^4) + u_{12} u_{23} u_{34} u^4] = 0
 \end{aligned}$$

Betrachtet man diesen Ausdruck, so sieht man sofort, daß hier Wiederholungen zu finden sind. Mit dieser Erkenntnis ist man in der Lage, die Berechnungen zu beschleunigen. Hierzu sind weitere Bezeichnungen einzuführen, die wir der Übersichtlichkeit halber fortließen, doch haben wir es für wichtig gehalten, hierauf hinzuweisen.

Bild 1 zeigt das Pascalsche Dreieck in der Form, wie wir es benützen werden. Der Aufbau eines solchen Dreiecks ist bekannt. In diesem Bilde haben wir den Ausgangspunkt für die einzelnen Massensysteme eingezeichnet, und zwar in einer Ausdehnung, die für die weitere Behandlung notwendig ist, aber deren Ergänzung bereitet keine Schwierigkeiten.

Im Bild 1 sind bei den Ausgangspunkten horizontale und vertikale Geraden eingezeichnet. Die auf den Horizontalen angegebenen Zahlen gelten für ein System mit 3 unabhängigen, die auf den Vertikalen dagegen für 2 unabhängige Massen, und zwar bei einseitiger Anordnung.

Im folgenden sollen noch an einigen Beispielen die Vorteile der bisher durchgeführten Vereinfachungen gezeigt werden.

Beispiel: Für ein System von 9 Massen soll die charakteristische Gleichung angeschrieben werden, wenn die Zahl der unabhängigen Massen gleich 2 ist. Die Bezeichnungen sind die folgenden: $2/9m/0$.

Die erste Gruppe:

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 12u &= K_{11-3} \\ u_{12} + u_{22} + u_{23} + 12u &= K_{123} \\ u_{22} + u_{23} + 12u &= K_{223} \\ u_{23} + 12u &= K_{23} \end{aligned}$$

Die Daten der zweiten Gruppe werden nunmehr dem Pascalschen Dreieck entnommen, wobei wir die bisherigen Bezeichnungen benutzen. In diesem Falle wird die mit 9 bezeichnete vertikale Gerade den Ausgangspunkt angeben.

$$\begin{aligned} (12u_{22} + 11u_{23} + 55u)u &= U_{12} & (11u_{23} + 55u)u &= U_{11} \\ (55u_{22} + 45u_{23} + 120u)u^2 &= U_{55} & (45u_{23} + 120u)u^2 &= U_{45} \\ (120u_{22} + 84u_{23} + 126u)u^3 &= U_{120} & (84u_{23} + 126u)u^3 &= U_{84} \\ (126u_{22} + 70u_{23} + 56u)u^4 &= U_{126} & (70u_{23} + 56u)u^4 &= U_{70} \\ (56u_{22} + 21u_{23} + 7u)u^5 &= U_{56} & (21u_{23} + 7u)u^5 &= U_{21} \\ (7u_{23} + u_{23})u^6 &= U_7 & & \end{aligned}$$

Unter Benützung der angegebenen Bezeichnungen hat die charakteristische Gleichung die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} w^{16} - K_{11-3} w^{14} + [u_{11} K_{223} + u_{12} K_{23} + U_{12}] w^{12} - [u_{11} U_{12} + u_{12} U_{11} + U_{55}] w^{10} + \\ + [u_{12} U_{55} + u_{12} U_{45} + U_{120}] w^8 - [u_{11} U_{120} + u_{12} U_{84} + U_{126}] w^6 + \\ + [u_{11} U_{126} + u_{12} U_{70} + U_{56}] w^4 - [u_{11} U_{56} + u_{12} U_{21} + U_7] w^2 + \\ + [u_{11} U_7 + u_{12} u_{23} u^6] = 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Für ein System von 9 Massen soll die charakteristische Gleichung angeschrieben werden, wenn die Zahl der unabhängigen Massen gleich 3 ist. $3/9m/0$.

Die erste Gruppe der Bezeichnungen ist:

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 10u &= K_{11-4} = u_{11} + K_{12-4} \\ u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 10u &= K_{12-4} = u_{12} + K_{22-4} \\ u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 10u &= K_{22-4} = u_{22} + K_{234} \\ u_{23} + u_{33} + u_{34} + 10u &= K_{23-4} = u_{23} + K_{334} \\ u_{33} + u_{34} + 10u &= K_{33-4} = u_{33} + K_{34} \\ u_{34} + 10u &= K_{34} \end{aligned}$$

Die Daten für die zweite Gruppe werden dem Pascalschen Dreieck entnommen (horizontale Gerade) und mit den Bezeichnungen erhält man:

$$\begin{aligned} (10u_{33} + 9u_{34} + 36u)u &= U_{10} & (9u_{34} + 36u)u &= U_9 \\ (36u_{33} + 28u_{34} + 56u)u^2 &= U_{36} & (28u_{34} + 56u)u^2 &= U_{28} \\ (56u_{33} + 35u_{34} + 35u)u^3 &= U_{56} & (35u_{34} + 35u)u^3 &= U_{35} \\ (35u_{33} + 15u_{34} + 6u)u^4 &= U_{35} & (15u_{34} + 6u)u^4 &= U_{15} \\ (6u_{33} + u_{34})u^5 &= U_6 & & \end{aligned}$$

Bei Benützung dieser Bezeichnungen hat die charakteristische Gleichung die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 w^{16} - K_{11-4} w^{14} + [u_{11} K_{22-4} + u_{12} K_{234} + u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_{10}] w^{12} - \\
 - [u_{11} (u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_{10}) + u_{12} (u_{23} K_{34} + U_{10}) + u_{22} U_{10} + u_{23} U_9 + U_{34}] w^{10} + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_{10} + u_{23} U_9 + U_{36}) + u_{12} (u_{23} U_9 + U_{36}) + u_{22} U_{36} + u_{23} U_{28} + U_{56}] w^8 - \\
 - [u_{11} (u_{22} U_{36} + u_{23} U_{28} + U_{56}) + u_{12} (u_{23} U_{28} + U_{56}) + u_{22} U_{56} + u_{23} \overline{U}_{35} + U_{35}] w^6 + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_{56} + u_{23} \overline{U}_{35} + U_{35}) + u_{12} (u_{23} \overline{U}_{35} + U_{35}) + u_{22} U_{35} + u_{23} U_{15} + U_6] w^4 - \\
 - [u_{12} (u_{22} U_{35} + u_{23} U_{15} + U_6) + u_{12} (u_{23} U_{35} + U_6) + u_{22} U_6 + u_{23} u_{34} u^5] w^2 + \\
 + u_{11} [u_{22} U_6 + u_{23} u_{34} u^5] + u_{12} u_{23} u_{34} u^5 = 0
 \end{aligned}$$

Wir wollen hierbei auf die Wiederholungen aufmerksam machen, deren Berücksichtigung die Berechnungen wesentlich beschleunigt.

Beispiel: Für ein System von 12 Massen soll die charakteristische Gleichung angeschrieben werden, wenn die Zahl der unabhängigen Massen gleich 2 ist. $2/12m/0$.

Die erste Gruppe der Bezeichnungen ist:

$$\begin{aligned}
 u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 18u &= K_{11-3} \\
 u_{12} + u_{22} + u_{23} + 18u &= K_{12-3} \\
 u_{22} + u_{23} + 18u &= K_{22-3} \\
 u_{23} + 18u &= K_{23}
 \end{aligned}$$

Die Angaben für die zweite Gruppe werden dem Pascalschen Dreieck entnommen (vertikale Gerade) und mit den Bezeichnungen erhält man:

$$\begin{aligned}
 (13u_{22} + 17u_{23} + 136u)u &= U_{18} & (17u_{23} + 136u)u &= U_{17} \\
 (136u_{22} + 120u_{11} + 560u)u^2 &= U_{136} & (126u_{23} + 560u)u^2 &= U_{126} \\
 (560u_{22} + 455u_{23} + 1365u)u^3 &= U_{560} & (455u_{23} + 1365u)u^3 &= U_{555} \\
 (1365u_{22} + 1001u_{23} + 2002u)u^4 &= U_{1365} & (1001u_{23} + 1002u)u^4 &= U_{1001} \\
 (2002u_{22} + 1287u_{23} + 1716u)u^5 &= U_{2002} & (1287u_{23} + 1716u)u^5 &= U_{1287} \\
 (1716u_{22} + 924u_{23} + 792u)u^6 &= U_{1716} & (924u_{23} + 792u)u^6 &= U_{924} \\
 (792u_{22} + 330u_{23} + 165u)u^7 &= U_{792} & (330u_{23} + 165u)u^7 &= U_{330} \\
 (165u_{22} + 45u_{23} + 10u)u^8 &= U_{165} & (45u_{23} + 10u)u^8 &= U_{45} \\
 (10u_{22} + u_{23})u^9 &= U_{10} & &
 \end{aligned}$$

Bei Benützung dieser Bezeichnungen hat die charakteristische Gleichung die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 w^{22} - K_{11-3} w^{20} + [u_{11} K_{223} + u_{12} K_{23} + U_{18}] w^{18} - \\
 - (u_{11} U_{18} + u_{12} U_{17} + U_{136}) w^{16} + [u_{11} U_{136} + u_{12} U_{126} + U_{560}] w^{14} - \\
 - [u_{11} U_{560} + u_{12} U_{555} + U_{1365}] w^{12} + [u_{11} U_{1365} + u_{12} U_{1001} + U_{2202}] w^{10} - \\
 - [u_{11} U_{2202} + u_{12} U_{1287} + U_{1716}] w^8 + [u_{11} U_{1716} + u_{12} U_{924} + U_{792}] w^6 - \\
 - [u_{11} U_{792} + u_{12} U_{330} + U_{165}] w^4 + [u_{11} U_{165} + u_{12} U_{45} + U_{10}] w^2 - \\
 - [u_{11} U_{10} + u_{12} u_{23} u^9] = 0
 \end{aligned}$$

Beispiel: Für ein System von 12 Massen soll die charakteristische Gleichung angeschrieben werden, wenn die Zahl der unabhängigen Massen gleich 3 ist. $3/12m/0$.

Die erste Gruppe der Bezeichnungen ist:

$$\begin{aligned}
 u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 16u &= K_{11-4} \\
 u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 16u &= K_{12-4} \\
 u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 16u &= K_{22-4} \\
 u_{23} + u_{33} + u_{34} + 16u &= K_{234} \\
 u_{33} + u_{34} + 16u &= K_{334} \\
 u_{34} + 16u &= K_{34}
 \end{aligned}$$

Die Angaben für die zweite Gruppe werden dem Pascalschen Dreieck entnommen (horizontale Gerade) und mit den Bezeichnungen erhält man:

$$\begin{aligned}
 u(16u_{33} + 15u_{34} + 105u) &= U_{16} \\
 u^2(105u_{33} + 91u_{34} + 364u) &= U_{105} \\
 u^3(364u_{33} + 286u_{34} + 715u) &= U_{364} \\
 u^4(715u_{33} + 495u_{34} + 792u) &= U_{715} \\
 u^5(792u_{33} + 462u_{34} + 462u) &= U_{792} \\
 u^6(462u_{33} + 210u_{34} + 120u) &= U_{462} \\
 u_7(120u_{33} + 36u_{34} + 9u) &= U_{120} \\
 u_8(9u_{33} + u) &= U_9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(15u_{34} + 105u) &= U_{15} \\
 u^2(91u_{34} + 364u) &= U_{91} \\
 u^2(286u_{34} + 715u) &= U_{286} \\
 u^4(495u_{34} + 792u) &= U_{495} \\
 u^5(462u_{34} + 462u) &= U_{462} \\
 u^6(210u_{34} + 120u) &= U_{210} \\
 u^7(36u_{34} + 9u) &= U_{36}
 \end{aligned}$$

Bei Benützung dieser Bezeichnungen hat die charakteristische Gleichung die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 w^{22} - K_{11-4} w^{20} + [u_{11} K_{22-4} + u_{12} K_{234} + u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_{16}] w^{18} - \\
 - [u_{11} (u_{22} K_{334} + u_{23} K_{34} + U_{16}) + u_{12} (u_{23} K_{34} + U_{16}) + u_{22} U_{16} + u_{23} U_{15} + U_{105}] w^{16} + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_{16} + u_{23} U_{15} + U_{105}) + u_{12} (u_{23} U_{15} + U_{105}) + u_{22} U_{105} + u_{23} (U_{91} + U_{364})] w^{14} - \\
 - [u_{11} (u_{22} U_{105} + u_{23} U_{91} + U_{364}) + u_{12} (u_{23} U_{91} + U_{364}) + u_{22} U_{364} + u_{23} (U_{364} + U_{715})] w^{12} + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_{364} + u_{23} U_{286} + U_{715}) + u_{12} (u_{23} U_{286} + U_{715}) + u_{22} U_{715} + u_{23} (U_{495} + U_{792})] w^{10} - \\
 - [u_{11} (u_{22} U_{715} + u_{23} U_{495} + U_{792}) + u_{12} (u_{23} U_{462} + U_{792}) + u_{22} U_{792} + u_{23} (U_{462} + U_{462})] w^8 + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_{792} + u_{23} U_{462} + U_{462}) + u_{12} (u_{23} U_{462} + U_{462}) + u_{22} U_{462} + u_{23} (U_{210} + U_{120})] w^6 - \\
 - [u_{11} (u_{22} U_{462} + u_{23} U_{210} + U_{120}) + u_{12} (u_{23} U_{210} + U_{120}) + u_{22} U_{120} + u_{23} (U_{36} + U_{9})] w^4 + \\
 + [u_{11} (u_{22} U_{120} + u_{23} U_{36} + U_9) + u_{12} (u_{23} U_{36} + U_9) + u_{22} U_9 + u_{23} u_{34} u^9] w^2 - \\
 - [u_{11} (u_{22} U_9 + u_{23} u_{34} u^9) + u_{12} u_{23} u_{34} u^9] = 0
 \end{aligned}$$

Bisher haben wir jene Fälle behandelt, wo bei den Massensystemen die unabhängigen Massen einseitig und nebeneinander angeordnet waren. Dieser Umstand ist auch aus den gleichen Werten von u feststellbar. Nun übergehen wir zur Untersuchung jener Fälle, wo die unabhängigen Massen beiderseitig des Motors angeordnet sind.

Prinzipiell bedeutet dies nichts Neues. Wie bisher, werden in die allgemeinen Gleichungen die entsprechenden u Werte eingesetzt und sodann die notwendigen Zusammenfassungen vorgenommen. Hierbei sind die Ausdrücke, die mit k und mit den großen Buchstaben bezeichnet sind, durch Benützung der u Werte berechnet, und die so erhaltenen Ergebnisse sodann in die allgemeine charakteristische Gleichung eingesetzt.

In der Zahlentafel VI beschäftigen wir uns mit einem System von 8 Massen mit zwei unabhängigen Massen, die aber auf je eine Seite des Motors angeordnet sind. Für diesen Fall ist:

$$u = u_{22} = u_{23} = \dots = u_{67}.$$

Nun werden hiermit die Ausdrücke von k, A, B, C, D berechnet, und in die allgemeine Form der charakteristischen Gleichung eingesetzt. Ordnet man den so ermittelten Ausdruck, so kann das Ergebnis in 3 Gruppen eingeteilt werden:

Die erste Gruppe entbehrt die Werte u_{77} bzw. u_{78} , aber diese Gruppe entspricht einem solchen System von 7 Massen mit einer unabhängigen Masse, nur müssen die Potenzen von w um zwei erhöht werden.

Die zweite Gruppe enthält die zu u_{77} gehörenden Glieder, deren Anschreiben mit Hilfe der Binominalkoeffizienten keine Schwierigkeit bereitet.

Die dritte Gruppe enthält die zu u_{78} gehörenden Glieder und die Ausdrücke in den Klammern sind jenen der ersten Gruppe gleich.

In der Zahlentafel VII ist wiederum der Fall von 8 Massen behandelt, aber — wie aus den dort angegebenen u Werten zu ersehen ist — von den drei unabhängigen Massen sind auf der einen Seite des Motors 2, auf der anderen Seite 1 angebracht. Für diesen Fall wurden ebenfalls die Werte k, A, B, C, D berechnet und in die allgemeine charakteristische Gleichung eingesetzt. Wird das Ergebnis geordnet, so können die Glieder dieses Ausdruckes in 3 Gruppen eingereiht werden, und zwar:

Die erste Gruppe entspricht einem System von 7 Massen, wobei aber einseitig 2 Massen angebracht sind, nur müssen die Potenzen von w um 2 vergrößert werden.

Die zweite Gruppe enthält die zu u_{77} gehörenden Glieder, und wir haben die Variation mit den Binominalkoeffizienten angeführt, und, wie zu ersehen ist, sind die Gesetzmäßigkeiten hierbei den schon angeführten Fällen gleich.

Die dritte Gruppe enthält die zu u_{78} gehörenden Glieder und die Ausdrücke in den Klammern sind hier jenen der ersten Gruppe gleich.

In der Zahlentafel VIII ist bei einem System von 9 Massen die Zahl der unabhängigen Massen gleich 3, und zwar sind auf der einen Seite des Motors 2, auf der anderen Seite 1 unabhängige Masse angebracht, wie dies übrigens aus den in der Zahlentafel angegebenen u Werten zu ersehen ist. In gleicher Weise wie bisher, werden zu den u Werten die Ausdrücke k, A, B, C, D, E berechnet und das Ergebnis in die allgemeine charakteristische Gleichung eingesetzt. Die so ermittelte Gleichung wird geordnet und das Ergebnis kann wieder in 3 Gruppen eingeteilt werden und zwar:

Die erste Gruppe entspricht einem System von 8 Massen, wobei auf der einen Seite 2 unabhängige Massen angebracht werden. Dieser Fall wurde schon früher behandelt. Die Potenzen von w müssen um 2 erhöht werden.

Die dritte Gruppe enthält die zu u_{89} gehörenden Glieder und die Ausdrücke hier in den Klammern sind jenen der ersten Gruppe gleich.

Die zweite Gruppe enthält die zu u_{88} gehörenden Glieder und wir haben die Variation mit den Binominalkoeffizienten vorgeführt.

Die Reihe der Gruppen wurde diesmal umgetauscht, da wir anknüpfend an die zweite Gruppe eine Bemerkung hinzufügen wollen.

Wenn nämlich auf jeder Seite des Motors eine unabhängige Masse angebracht wird, so kann für die erste Reihe folgendes festgestellt werden:

- z. B. bei 8 Massen beginnen die Binominalkoeffizienten mit $\binom{14-4}{0}$
 und beenden mit $\binom{14-5}{1}$
 bei 9 Massen beginnen die Binominalkoeffizienten mit $\binom{16-4}{0}$
 und beenden mit $\binom{16-5}{1}$.

Hieraus ist zu ersehen, daß bei der Aufstellung der Binominalkoeffizienten als Ausgangszahl immer die höchste Potenz der Gleichung gilt. In den folgenden Reihen können diese Koeffizienten zu den einzelnen Gliedern nach der schon angegebenen Gesetzmäßigkeit, fortsetzungsweise angeschrieben werden, bis nach Abzug aus der größten Potenz der Wert dieser Koeffizienten auf 1 reduziert wird.

Sind aber auf der einen Seite des Motors 2, auf der anderen Seite 1 unabhängige Masse angebracht, so gilt für die erste Reihe:

- z. B. bei 8 Massen beginnen die Binominalkoeffizienten mit $\binom{14-4}{0}$
 und beenden mit $\binom{14-7}{1}$
 bei 9 Massen ist der Beginn mit $\binom{16-4}{0}$ und beenden mit $\binom{16-7}{1}$.

Zahlentafel VI

System von 8 Massen mit zwei unabhängigen Massen: $1/8m/1$.

$$u = u_{22} = u_{23} = \dots = u_{67}$$

$$\begin{aligned} k_{78} &= u_{78} \\ k_{778} &= u_{77} + u_{78} \\ k_{678} &= u_{77} + u_{78} + u \\ k_{66-8} &= u_{77} + u_{78} + 2u \\ k_{56-8} &= u_{77} + u_{78} + 3u \\ k_{55-8} &= u_{77} + u_{78} + 4u \\ k_{45-8} &= u_{77} + u_{78} + 5u \\ k_{44-8} &= u_{77} + u_{78} + 6u \\ k_{34-8} &= u_{77} + u_{78} + 7u \\ k_{33-8} &= u_{77} + u_{78} + 8u \\ k_{23-8} &= u_{77} + u_{78} + 9u \\ k_{22-8} &= u_{77} + u_{78} + 10u \\ k_{12-8} &= u_{77} + u_{78} + 10u + u_{12} \\ k_{12-8} &= u_{77} + u_{78} + 10u + u_{12} + u_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{678} &= u_{78} u \\ A_{66-8} &= (u_{77} + 2u_{78}) u \\ A_{56-8} &= (2u_{77} + 3u_{78}) u + u^2 \\ A_{55-8} &= (3u_{77} + 4u_{78}) u + 3u^2 \\ A_{45-8} &= (4u_{77} + 5u_{78}) u + 6u^2 \\ A_{44-8} &= (5u_{77} + 6u_{78}) u + 10u^2 \\ A_{34-8} &= (6u_{77} + 7u_{78}) u + 15u^2 \\ A_{33-8} &= (7u_{77} + 8u_{78}) u + 21u^2 \\ A_{23-8} &= (8u_{77} + 9u_{78}) u + 28u^2 \\ A_{22-8} &= (9u_{77} + 10u_{78}) u + 36u^2 \\ B_{56-8} &= u_{78} u^2 \\ B_{55-8} &= (u_{77} + 3u_{78}) u^2 \\ B_{45-8} &= (3u_{77} + 6u_{78}) u^2 + u^3 \\ B_{44-8} &= (6u_{77} + 10u_{78}) u^2 + 4u^3 \\ B_{34-8} &= (10u_{77} + 15u_{78}) u^2 + 10u^3 \\ B_{33-8} &= (15u_{77} + 21u_{78}) u^2 + 20u^3 \\ B_{23-8} &= (21u_{77} + 28u_{78}) u^2 + 25u^3 \\ B_{22-8} &= (28u_{77} + 36u_{78}) u^2 + 56u^3 \\ C_{45-8} &= u_{78} u^3 \\ C_{44-8} &= (u_{77} + 4u_{78}) u^3 \\ C_{34-8} &= (4u_{77} + 10u_{78}) u^3 + u^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{33-8} &= (10u_{77} + 20u_{78})u^3 + 5u^4 \\
 C_{23-8} &= (20u_{77} + 35u_{78})u^3 + 15u^4 \\
 C_{22-8} &= (35u_{77} + 56u_{78})u^3 + 35u^4 \\
 D_{34-8} &= u_{78}u^4 \\
 D_{33-8} &= (u_{77} + 5u_{78})u^4 \\
 D_{23-8} &= (5u_{77} + 15u_{78})u^4 + u^5 \\
 D_{22-8} &= (15u_{77} + 35u_{78})u^4 + 6u^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w^{14} &- [u_{11} + u_{12} + 10u]w^{12} + u[10u_{11} + 9u_{12} + 36u]w^{10} - \\
 &- u^2 [36u_{11} + 28u_{12} + 56u]w^8 + u^3 [56u_{11} + 35u_{12} + 35u]w^6 - \\
 &- u^3 [35u_{11} + 15u_{12} + 6u]w^4 + u^5 [6u_{11} + u_{12}]w^2 \\
 &+ u_{77}w^{12} + u_{77}[u_{11} + u_{12} + 9u]w^{10} + u_{78}w^{12} + [u_{11} + u_{12} + 10u]w^{10} \\
 &- u_{77}[9u_{11} + 8u_{12} + 28u]w^8 - u_{78}[10u_{11} + 9u_{12} + 36u]w^8 \\
 &+ u_{77}[28u_{11} + 21u_{12} + 35u]u^2w^6 + u_{78}[36u_{11} + 28u_{12} + 56u]u^2w^6 \\
 &- u_{77}[35u_{11} + 20u_{12} + 15u]u^3w^4 - u_{78}[56u_{11} + 35u_{12} + 35u]u^3w^4 \\
 &+ u_{77}[15u_{11} + 5u_{12} + u]u^4w^2 + u_{78}[35u_{11} + 15u_{12} + 6u]u^4w^2 \\
 &- u_{77}u_{11}u^5 - u_{78}[6u_{11} + u_{12}]u^5
 \end{aligned}$$

Der Faktor für $u_{77} = + \left(u_{11} \binom{14-4}{0} + u_{12} \binom{14-5}{0} + u \binom{9}{1} \right) -$

$$\begin{aligned}
 &- \left(u_{11} \binom{14-5}{1} + u_{12} \binom{14-6}{1} + u \binom{28}{2} \right) u + \\
 &+ \left(u_{11} \binom{28}{2} + u_{12} \binom{21}{2} + u \binom{35}{3} \right) u^2 - \\
 &- \left(u_{11} \binom{35}{3} + u_{12} \binom{20}{3} + u \binom{15}{4} \right) u^3 + \\
 &+ \left(u_{11} \binom{15}{4} + u_{12} \binom{5}{4} + u \binom{1}{5} \right) u^4 - \\
 &- u_{11} \binom{1}{5} u^5
 \end{aligned}$$

Zahlentafel VII

System von 8 Massen mit drei unabhängigen Massen: 2/8m/1.

$$u = u_{33} = u_{34} = \dots = u_{66} = u_{67}$$

$$\begin{aligned}
 k_{78} &= u_{78} \\
 k_{778} &= u_{77} + u_{78} \\
 k_{678} &= u_{77} + u_{78} + u \\
 k_{66-8} &= u_{77} + u_{78} + 2u \\
 k_{56-8} &= u_{77} + u_{78} + 3u \\
 k_{55-8} &= u_{77} + u_{78} + 4u \\
 k_{45-8} &= u_{77} + u_{78} + 5u \\
 k_{44-8} &= u_{77} + u_{78} + 6u \\
 k_{34-8} &= u_{77} + u_{78} + 7u \\
 k_{33-8} &= u_{77} + u_{78} + 8u \\
 k_{23-8} &= u_{77} + u_{78} + 8u + u_{23} \\
 k_{22-8} &= u_{77} + u_{78} + 8u + u_{22} + u_{23} \\
 k_{12-8} &= u_{77} + u_{78} + 8u + u_{22} + u_{23} + u_{12} \\
 k_{11-8} &= u_{77} + u_{78} + 8u + u_{12} + u_{22} + \\
 &+ u_{23} + u_{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{678} &= u_{78}u \\
 A_{66-8} &= (u_{77} + u_{78})u \\
 A_{56-8} &= (2u_{77} + 3u_{78})u + u^2 \\
 A_{55-8} &= (3u_{77} + 4u_{78})u + 3u^2 \\
 A_{45-8} &= (4u_{77} + 5u_{78})u + 6u^2 \\
 A_{44-8} &= (5u_{77} + 6u_{78})u + 10u^2 \\
 A_{34-8} &= (6u_{77} + 7u_{78})u + 15u^2 \\
 A_{33-8} &= (7u_{77} + 8u_{78})u + 21u^2 \\
 A_{23-8} &= (7u_{77} + 8u_{78})u + 21u^2 + \\
 &+ (u_{77} + u_{78} + 7u)u_{23} \\
 A_{22-8} &= (7u_{77} + 8u_{78})u + 21u^2 + \\
 &+ (u_{77} + u_{78} + 7u)u_{23} + \\
 &+ (u_{77} + u_{78} + 8u)u_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{56-3} &= u_{78} u^2 \\
B_{55-8} &= [u_{77} + 3u_{78}]u^2 \\
B_{45-8} &= [3u_{77} + 6u_{78}]u^2 + u^3 \\
B_{44-8} &= [6u_{77} + 10u_{78}]u^2 + 4u^3 \\
B_{34-8} &= [10u_{77} + 15u_{78}]u^2 + 10u^3 \\
B_{33-8} &= [15u_{77} + 21u_{78}]u^2 + 20u^3 \\
B_{23-8} &= [15u_{77} + 21u_{78}]u^2 + 20u^3 + [(6u_{77} + 7u_{78})u + 15u^2]u_{23} \\
B_{22-8} &= [15u_{77} + 21u_{78}]u^2 + 20u^3 + [(6u_{77} + 7u_{78})u + 15u^2]u_{23} + [(7u_{77} + 8u_{78})u + 21u^2]u_{22} \\
C_{45-8} &= u_{78} u^3 \\
C_{44-8} &= [u_{77} + 4u_{78}]u^3 \\
C_{34-8} &= [4u_{77} + 10u_{78}]u^3 + u^4 \\
C_{33-8} &= [10u_{77} + 20u_{78}]u^3 + 5u^4 \\
C_{23-8} &= [10u_{77} + 20u_{78}]u^3 + 5u^4 + [(10u_{77} + 15u_{78})u^2 + 10u^3]u_{23} \\
C_{22-8} &= [10u_{77} + 20u_{78}]u^3 + 5u^4 + [(10u_{77} + 15u_{78})u^2 + 10u^3]u_{23} + \\
&\quad + [(15u_{77} + 21u_{78})u^2 + 20u^3]u_{22} \\
D_{31-8} &= u_{78} u^4 \\
D_{33-8} &= [u_{77} + 5u_{78}]u^4 \\
D_{23-8} &= [u_{77} + 5u_{78}]u^4 + [(4u_{77} + 10u_{78})u^3 + u^4]u_{23} \\
D_{22-8} &= [u_{77} + 5u_{78}]u^4 + [(4u_{77} + 10u_{78})u^3 + u^4]u_{23} + [(10u_{77} + 20u_{78})u^3 + 5u^4]u_{22} \\
w^{14} &= [u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 8u]w^{12} + \\
&\quad + [u_{11}(u_{22} + u_{23} + 8u) + u_{12}(u_{23} + 8u) + (8u_{22} + 7u_{23} + 21u)u]w^{10} - \\
&\quad - [u_{11}(8u_{22} + 7u_{23} + 21u)u + u_{12}(7u_{23} + 21u)u + (21u_{22} + 15u_{23} + 20u)u^2]w^8 + \\
&\quad + [u_{11}(21u_{22} + 15u_{23} + 20u)u^2 + u_{12}(15u_{23} + 20u)u^2 + (20u_{22} + 10u_{23} + 5u)u^3]w^6 - \\
&\quad - [u_{11}(20u_{22} + 10u_{23} + 5u)u^3 + u_{12}(10u_{23} + 5u)u^3 + (5u_{22} + u_{23})u^4]w^4 + \\
&\quad + [u_{11}(5u_{22} + u_{23})u^4 + u_{12}u_{23}u^4]w^2 - \\
&\quad - u_{77}w^{12} \\
&\quad + u_{77}[u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 7u]w^{10} - \\
&\quad - u_{77}[u_{11}(u_{22} + u_{23} + 7u) + u_{12}(u_{23} + 7u) + (7u_{22} + 6u_{23} + 15u)u]w^8 + \\
&\quad + u_{77}[u_{11}(7u_{22} + 6u_{23} + 15u)u + u_{12}(6u_{23} + 15u)u + (15u_{22} + 10u_{23} + 10u)u^2]w^6 - \\
&\quad - u_{77}[u_{11}(15u_{22} + 10u_{23} + 10u)u^2 + u_{12}(10u_{23} + 10u)u^2 + (10u_{23} + 4u_{23} + u)u^3]w^4 + \\
&\quad + u_{77}[u_{11}(10u_{22} + 4u_{23} + u)u^3 + u_{12}(4u_{23} + u)u^3 + u_{22}u^4]w^2 - \\
&\quad - u_{77}u_{11}u_{22}u^4 \\
&\quad - u_{78}w^{12} \\
&\quad + u_{78}[u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 8u]w^{10} - \\
&\quad - u_{78}[u_{11}(u_{22} + u_{23} + 8u) + u_{12}(u_{23} + 8u) + (8u_{22} + 7u_{23} + 21u)u]w^8 + \\
&\quad + u_{78}[u_{11}(8u_{22} + 7u_{23} + 21u)u + u_{12}(7u_{23} + 21u)u + (21u_{22} + 15u_{23} + 20u)u^2]w^6 - \\
&\quad - u_{78}[u_{11}(21u_{22} + 15u_{23} + 20u)u^2 + u_{12}(15u_{23} + 20u)u^3 + (20u_{22} + 10u_{23} + \\
&\quad\quad\quad + 5u)u^3]w^4 + \\
&\quad + u_{78}[20u_{22} + 10u_{23} + 5u]u^3 + u_{12}(10u_{23} + 5u)u^3 + (5u_{22} + u_{23})u^4]w^2 - \\
&\quad - u_{78}[(5u_{22} + u_{23})u^4 + u_{12}u_{23}u^4]
\end{aligned}$$

Der Faktor für $u_{77} =$

$$\begin{aligned}
&= + \left[u_{11} \binom{14-4}{0} + u_{12} \binom{14-5}{0} + u_{22} \binom{14-6}{0} + u_{23} \binom{14-7}{0} + u \binom{7}{1} \right] w^{10} - \\
&\quad - \left[u_{11} \left(\binom{14-6}{0} + u_{23} \binom{14-7}{0} + u \binom{7}{1} \right) \right] + \\
&\quad\quad + u_{12} \left(\binom{14-7}{0} + u \binom{7}{1} \right) + \\
&\quad\quad + \left(\binom{7}{1} u_{22} \binom{14-7}{1} + u_{23} \binom{6}{1} \binom{14-8}{1} + u \binom{15}{2} \binom{14-8}{2} \right) w^8 + \\
&\quad + \left[u_{11} \left(\binom{7}{1} u_{22} \binom{14-7}{1} + u_{23} \binom{6}{1} \binom{14-8}{1} + u \binom{15}{2} \binom{14-8}{2} \right) \right] u +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + u_{12} \left[\left(u_{23} \binom{6}{1} \binom{14-8}{1} + u \binom{15}{2} \binom{14-8}{2} \right) u + \right. \\
 & \left. + \left(\left(u_{22} \binom{15}{2} \binom{14-8}{2} + u_{23} \binom{10}{2} \binom{14-9}{2} + u \binom{10}{3} \binom{14-9}{3} \right) u^2 \right] w^6 + \right. \\
 & - \left[u_{11} \left(\left(u_{22} \binom{15}{2} \binom{14-8}{2} + u_{23} \binom{10}{2} \binom{14-9}{2} + u \binom{10}{3} \binom{14-9}{3} \right) u^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + u_{12} \left(\left(u_{23} \binom{10}{2} \binom{14-9}{2} + u \binom{10}{3} \binom{14-9}{3} \right) u^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\left(u_{22} \binom{10}{3} \binom{14-9}{3} + u_{23} \binom{4}{3} \binom{14-10}{3} + u \binom{1}{4} \binom{14-10}{4} \right) u^3 \right) w^4 + \right. \\
 & \left. + \left[u_{11} \left(\left(u_{22} \binom{10}{3} \binom{14-9}{3} + u_{23} \binom{4}{3} \binom{14-10}{3} + u \binom{1}{4} \binom{14-10}{4} \right) u^3 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + u_{12} \left(\left(u_{23} \binom{4}{3} \binom{14-10}{3} + u \binom{1}{4} \binom{14-10}{4} \right) u^3 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + u_{22} u^4 \right] w^2 - \right. \\
 & \left. - u_{11} u_{22} u^4 \right.
 \end{aligned}$$

Zahlentafel VIII

System von 9 Massen mit drei unabhängigen Massen: 2/9m/1.

$$u = u_{33} = u_{34} = \dots u_{78}$$

$k_{89} = u_{89}$	$A_{789} = u_{89} u$
$k_{889} = u_{88} + u_{89}$	$A_{77-9} = (u_{88} + 2u_{89})u$
$k_{789} = u_{88} + u_{89} + u$	$A_{67-9} = (2u_{88} + 3u_{89})u^2$
$k_{77-9} = u_{88} + u_{89} + 2u$	$A_{66-9} = (3u_{88} + 4u_{89})3u^3$
$k_{67-9} = u_{88} + u_{89} + 3u$	$A_{56-9} = (4u_{88} + 5u_{89})6u^2$
$k_{66-9} = u_{88} + u_{89} + 4u$	$A_{55-9} = (5u_{88} + 6u_{89})10u^2$
$k_{56-9} = u_{88} + u_{89} + 5u$	$A_{45-9} = (6u_{88} + 7u_{89})15u^2$
$k_{55-9} = u_{88} + u_{89} + 6u$	$A_{44-9} = (7u_{88} + 8u_{89})21u^2$
$k_{45-9} = u_{88} + u_{89} + 7u$	$A_{34-9} = (8u_{88} + 9u_{89})28u^2$
$k_{44-9} = u_{88} + u_{89} + 8u$	$A_{33-9} = (9u_{88} + 10u_{89})36u^2$
$k_{34-9} = u_{88} + u_{89} + 9u$	$A_{23-9} = (9u_{88} + 10u_{89})36u^2 +$
$k_{33-9} = u_{88} + u_{89} + 10u$	$\quad + (u_{88} + u_{89} + 9u)u_{23}$
$k_{23-9} = u_{88} + u_{89} + 10u + u_{23}$	$A_{22-9} = (9u_{88} + 10u_{89})36u^2 +$
$k_{22-9} = u_{88} + u_{89} + 10u + u_{22} + u_{23}$	$\quad + (u_{88} + u_{89} + 9u)u_{23} +$
$k_{12-9} = u_{88} + u_{89} + 10u + u_{12} + u_{22} + u_{23}$	$\quad + (u_{88} + u_{89} + 10u)u_{22}$
$k_{11-9} = u_{88} + u_{89} + 10u + u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23}$	
$B_{67-9} = u_{89} u^2$	
$B_{66-9} = [u_{88} + 3u_{89}]u^2$	
$B_{56-9} = [3u_{88} + 6u_{89}]u^2 + u^3$	
$B_{55-9} = [6u_{88} + 10u_{89}]u^2 + 4u^3$	
$B_{45-9} = [10u_{88} + 15u_{89}]u^2 + 10u^3$	
$B_{44-9} = [15u_{88} + 21u_{89}]u^2 + 20u^3$	
$B_{34-9} = [21u_{88} + 28u_{89}]u^2 + 35u^3$	
$B_{33-9} = [28u_{88} + 36u_{89}]u^2 + 56u^3$	

$$\begin{aligned}
B_{23-9} &= [28u_{88} + 36u_{89}]u^2 + 56u^3 + [(8u_{88} + 9u_{89})u + 28u^2]u_{23} \\
B_{22-9} &= [28u_{88} + 36u_{89}]u^2 + 56u^3 + [(8u_{88} + 9u_{89})u + 28u^2]u_{23} + [(9u_{88} + 10u_{89})36u^2]u_{22} \\
C_{56-9} &= u_{89} u^3 \\
C_{55-9} &= [u_{88} + 4u_{89}]u^3 \\
C_{45-9} &= [4u_{88} + 10u_{89}]u^3 + u^4 \\
C_{44-9} &= [10u_{88} + 20u_{89}]u^3 + 5u^4 \\
C_{34-9} &= [20u_{88} + 35u_{89}]u^3 + 15u^4 \\
C_{33-9} &= [35u_{88} + 56u_{89}]u^3 + 35u^4 \\
C_{23-9} &= [35u_{88} + 56u_{89}]u^3 + 35u^4 + [(21u_{88} + 28u_{89})u^2 + 35u^3]u_{23} \\
C_{22-9} &= [35u_{88} + 56u_{89}]u^3 + 35u^4 + [(21u_{88} + 28u_{89})u^2 + 35u^3]u_{23} + [(28u_{88} + 36u_{89})u^2 + \\
&\quad + 56u^3]u_{22} \\
D_{45-9} &= u_{89} u \\
D_{44-9} &= [u_{88} + 5u_{89}]u^4 \\
D_{34-9} &= [5u_{88} + 15u_{89}]u^4 + u^5 \\
D_{33-9} &= [15u_{88} + 35u_{89}]u^4 + 6u^5 \\
D_{23-9} &= [15u_{88} + 35u_{89}]u^4 + 6u^5 + [(20u_{88} + 35u_{89})u^3 + 15u^4]u_{23} \\
D_{22-9} &= [15u_{88} + 35u_{89}]u^4 + 6u^5 + [(20u_{88} + 35u_{89})u^3 + 15u^4]u_{23} + [(35u_{88} + 56u_{89})u^3 + \\
&\quad + 35u^4] \\
E_{34-9} &= u_{89} u^5 \\
E_{33-9} &= [u_{88} + 6u_{89}]u^5 \\
E_{23-9} &= [u_{88} + 6u_{89}]u^5 + [(5u_{88} + 15u_{89})u^4]u_{23} + u^5 u_{23} \\
E_{22-9} &= [u_{88} + 6u_{89}]u^5 + [(5u_{88} + 15u_{89})u^4]u_{23} + u^5 u_{23} + [(15u_{88} + 35u_{89})u^4 + 6u^5]u_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{16} &- [u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 10u]w^{14} + \\
&+ [u_{11}(u_{22} + u_{23} + 10u) + u_{12}(u_{23} + 10u) + (10u_{22} + 9u_{23} + 36u)u]w^{12} - \\
&- [u_{11}(10u_{22} + 9u_{23} + 36u)u + u_{12}(9u_{23} + 36u)u + (36u_{22} + 28u_{23} + 56u)u^2]w^{10} + \\
&+ [u_{11}(36u_{22} + 28u_{23} + 56u)u^2 + u_{12}(28u_{23} + 56u)u^2 + (56u_{22} + 35u_{23} + 35u)u^3]w^8 - \\
&- [u_{11}(56u_{22} + 35u_{23} + 35u)u^3 + u_{12}(35u_{23} + 35u)u^3 + (35u_{22} + 15u_{23} + 6u)u^4]w^6 + \\
&+ [u_{11}(35u_{22} + 15u_{23} + 6u)u^4 + u_{12}(15u_{23} + 6u)u^4 + (6u_{22} + u_{23})u^5]w^4 - \\
&- [u_{11}(6u_{22} + u_{23})u^5 + u_{12}u_{23}u^5]w^2 - \\
&- u_{88}w^{14} + u_{88}[u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 9u]w^{12} - \\
&- u_{88}[u_{11}(u_{22} + u_{23} + 9u) + u_{12}(u_{23} + 9u) + (9u_{22} + 8u_{23} + 28u)u]w^{10} + \\
&+ u_{88}[u_{11}(9u_{22} + 8u_{23} + 28u)u + u_{12}(8u_{23} + 28u)u + (28u_{22} + 21u_{23} + 35u)u^2]w^8 - \\
&- u_{88}[u_{11}(28u_{22} + 21u_{23} + 35u)u^2 + u_{12}(21u_{23} + 35u)u^2 + (35u_{22} + 20u_{23} + 15u)u^3]w^6 + \\
&+ u_{88}[u_{11}(35u_{22} + 20u_{23} + 15u)u^3 + u_{12}(20u_{23} + 15u)u^3 + (15u_{22} + 5u_{23} + u)u^4]w^4 - \\
&+ u_{88}[u_{11}(15u_{22} + 5u_{23} + u)u^4 + u_{12}(5u_{23} + u)u^4 + u_{22}u^5]w^2 + \\
&+ u_{88}u_{11}u_{22}u^5 \\
&- u_{89}w^{14} + u_{89}[u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 10u]w^{12} - \\
&- u_{89}[u_{11}(u_{22} + u_{23} + 10u) + u_{12}(u_{23} + 10u) + (10u_{22} + 9u_{23} + 36u)u]w^{10} + \\
&+ u_{89}[u_{11}(10u_{22} + 9u_{23} + 36u)u + u_{12}(9u_{23} + 36u)u + (36u_{22} + 28u_{23} + 56u)u^2]w^8 - \\
&- u_{89}[u_{11}(36u_{22} + 28u_{23} + 56u)u^2 + u_{12}(28u_{23} + 56u)u^2 + (56u_{22} + 35u_{23} + 35u)u^3]w^6 + \\
&+ u_{89}[u_{11}(56u_{22} + 35u_{23} + 35u)u^3 + u_{12}(35u_{23} + 35u)u^3 + (35u_{22} + 15u_{23} + 6u)u^4]w^4 - \\
&- u_{89}[u_{11}(35u_{22} + 15u_{23} + 6u)u^4 + u_{12}(15u_{23} + u)u^4 + (6u_{22} + u_{23})u^5]w^2 + \\
&+ u_{89}[u_{11}(6u_{22} + u_{23})u^5 + u_{12}u_{23}u^5]
\end{aligned}$$

Der Faktor für $u_{88} =$

$$\begin{aligned}
&= + \left[u_{11} \binom{16-4}{0} + u_{12} \binom{16-5}{0} + u_{22} \binom{16-6}{0} + u_{23} \binom{16-7}{0} + u \binom{9}{1} \right] w^{12} - \\
&- \left[u_{11} \binom{16-6}{0} + u_{23} \binom{16-7}{0} + u \binom{16-7}{1} \right] + u_{12} \binom{16-7}{0} + u \binom{9}{1} + \\
&\quad + \left[u_{22} \binom{9}{1} + u_{23} \binom{8}{1} + u \binom{28}{2} \right] u w^{10} + \\
&+ \left[u_{11} \binom{9}{1} + u_{23} \binom{8}{1} + u \binom{28}{2} \right] u + u_{12} \binom{8}{1} + u \binom{28}{2} u +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[u_{22} \binom{28}{2} + u_{23} \binom{21}{2} + u \binom{35}{3} \right] u^2 - \\
 = & \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{28}{2} + u_{23} \binom{21}{2} + u \binom{35}{3} \right) u^2 + u_{12} \left(u_{23} \binom{21}{2} + u \binom{35}{3} \right) u^2 + \right. \\
 & \left. + \left(u_{22} \binom{35}{3} + u_{23} \binom{20}{3} + u \binom{15}{4} \right) u^3 \right] w^6 + \\
 & + \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{35}{3} + u_{23} \binom{20}{3} + u \binom{15}{4} \right) u^3 + u_{12} \left(u_{23} \binom{20}{3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \binom{15}{4} u \right) u^3 + \left(u_{22} \binom{15}{4} + u_{23} \binom{5}{4} + u \binom{1}{5} \right) u^4 \right] w^4 - \\
 & - \left[u_{11} \left(u_{22} \binom{15}{4} + u_{23} \binom{5}{4} + u \binom{1}{5} \right) u^4 + \right. \\
 & \left. + u_{12} \left(u_{23} \binom{5}{4} + u \binom{1}{5} \right) u^4 + u_{22} u^5 \right] w^2 + u_{11} u_{22} u^5
 \end{aligned}$$

Nach den bisherigen Ergebnissen ist man nun in der Lage, ohne weiteres ähnliche Aufgaben zu lösen und — um Wiederholungen zu vermeiden — werden wir nur den Gang einer solchen Rechnung an einem Beispiel vorführen.

Beispiel: In einem System von 9 Massen soll die Zahl der unabhängigen Massen gleich 4 sein, und zwar auf der einen Seite des Motors sollen 3, auf der anderen Seite 1 unabhängige Masse angebracht werden. Folglich ist:

$$u = u_{44} = u_{45} = \dots = u_{78}.$$

Es soll die charakteristische Gleichung angeschrieben werden.

Wie bereits aus den früheren Aufgaben zu ersehen ist, besteht die charakteristische Gleichung aus 3 Gruppen, und zwar:

Die erste Gruppe enthält nicht die Werte u_{88} und u_{89} , aber diese Gruppe entspricht einem 8-Massensystem mit 3 unabhängigen Massen auf der einen Seite des Motors. Für diesen Fall ist das Ergebnis auf Seite 114 angegeben. Die Potenzen von w sind um 2 zu erhöhen.

Die dritte Gruppe enthält die zu u_{89} gehörenden Glieder und die Ausdrücke in den Klammern sind jenen gleich, die wir bei der ersten Gruppe vorfanden.

Die zweite Gruppe haben wir zuletzt gelassen, da wir uns damit etwas ausführlicher befassen wollen. Aus den bisherigen Ausführungen folgt, daß diese Gruppe die zu u_{88} gehörenden Glieder enthält, die wir im folgenden bis zu w^8 angeben werden.

$$\begin{aligned}
& \left\{ u_{11} \binom{16-4}{4} + u_{12} \binom{16-5}{0} + u_{22} \binom{16-6}{0} + u_{23} \binom{16-7}{0} + u_{33} \binom{16-8}{0} + \right. \\
& \quad \left. + u_{34} \binom{16-9}{0} + u \binom{16-9}{1} \right\} w^{12} - \\
& - \left\{ u_{11} \left(\binom{16-6}{0} + u_{23} \binom{16-7}{0} + u_{33} \binom{16-8}{0} + u_{34} \binom{16-9}{0} + u \binom{16-9}{1} \right) \right\} + \\
& \quad + u_{12} \left(\binom{16-7}{0} + u_{33} \binom{16-8}{0} + u_{34} \binom{16-9}{0} + u \binom{16-9}{1} \right) + \\
& \quad + u_{22} \left(\binom{16-0}{0} + u_{34} \binom{16-9}{0} + u \binom{16-9}{1} \right) + \\
& \quad + u_{23} \left(\binom{16-9}{0} + u \binom{16-9}{1} \right) + \\
& \quad + \left(\binom{16-9}{1} + u_{34} \binom{16-10}{1} + u \binom{16-10}{2} \right) u \Big\} w^{10} + \dots
\end{aligned}$$

Statt des bisherigen Verfahrens, um den zu den u_{88} gehörenden, ansonsten sehr ausgedehnten Ausdruck zu vermeiden, empfiehlt es sich, die Bezeichnungen einzuführen, die wir bereits verwendet haben, und zwar unter (5). Unter Berücksichtigung dieses Umstandes werden wir die zu den u_{88} gehörenden Glieder anschreiben, mit der Bemerkung, daß in dem so entstandenen Ausdruck eine gewisse Regelmäßigkeit mit Wiederholungen feststellbar ist, bei deren Berücksichtigung die Rechnung bedeutend vereinfacht werden kann.

$$\begin{aligned}
& + \varkappa_{11-4} w^{12} - [u_{11} \varkappa_{22-4} + u_{12} \varkappa_{234} + u_{22} \varkappa_{334} + u_{23} \varkappa_{34} + U_7] w^{10} + \\
& \quad + [u_{11}(u_{22} \varkappa_{334} + u_{23} \varkappa_{34} + U_7) + u_{12}(u_{23} \varkappa_{34} + U_7) + \\
& \quad + u_{22} U_7 + u_{23} U_6 + U_{15}] w^8 - \\
& \quad - [u_{11}(u_{22} U_7 + u_{23} U_6 + U_{15}) + u_{12}(u_{23} U_6 + U_{15}) + \\
& \quad + u_{22} U_{15} + u_{23} \overline{U}_{10} + U_{10}] w^6 + \\
& \quad + [u_{11}(u_{22} U_{15} + u_{23} \overline{U}_{10} + U_{10}) + u_{12}(u_{23} \overline{U}_{10} + U_{10}) + \\
& \quad + u_{22} \overline{U}_{10} + u_{23} U_4 + u_{33} u^4] w^4 - \\
& \quad - [u_{11}(u_{22} U_{10} + u_{23} U_4) + u_{12}(u_{23} U_4 + u_{33} u^4)] w^2 + u_{11} u_{22} u_{33} u^4 w^0 \\
& \quad u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 7u = \varkappa_{11-4} \\
& \quad \quad u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 7u = \varkappa_{12-4} \\
& \quad \quad \quad u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34} + 7u = \varkappa_{22-4} \\
& \quad \quad \quad \quad u_{23} + u_{33} + u_{34} + 7u = \varkappa_{234} \\
& \quad \quad \quad \quad \quad u_{33} + u_{34} + 7u = \varkappa_{334} \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_{34} + 7u = \varkappa_{34}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
(7u_{33} + 6u_{34} + 15u) u &= U_7 & (6u_{34} + 15u) u &= U_6 \\
(15u_{33} + 10u_{34} + 10u) u^2 &= U_{15} & (10u_{34} + 10u) u^2 &= \overline{U}_{10} \\
(10u_{33} + 4u_{34} + u) u^3 &= U_{10} & (4u_{34} + u) u^3 &= U_4
\end{aligned}$$

$$\binom{16-9}{1} = 7, \quad \binom{16-10}{1} = 6, \quad \binom{16-10}{2} = 15$$

$$\binom{16-10}{2} = 15, \quad \binom{16-11}{2} = 10, \quad \binom{16-11}{3} = 10$$

$$\binom{16-11}{3} = 10, \binom{16-12}{3} = 4, \binom{16-12}{4} = 1.$$

Die Anwendung der

ergänzenden (Ersatz) Massen

soll an Hand des letzten Beispiels vorgeführt werden.

Die charakteristische Gleichung besteht aus 3 Gruppen:

$$f_1(w) + u_{88}f_2(w) + u_{89}f_3(w) = 0, \quad (6)$$

wo f_1 und f_3 nur in den Potenzen und Vorzeichen von w voneinander abweichen. In dieser Gleichung ist:

$$u_{88} = \frac{c_8}{I_8}, u_{89} = \frac{c_8}{I_9} \text{ und } f_1(w) = -w^2 f_3(w). \quad (7)$$

Als ein konkreter Fall soll ein 5-zyllindriger Motor mit einseitig angebrachten 3 unabhängigen Massen behandelt werden. Dies entspricht einem 8-Massensystem. Bei der Betriebsumlaufzahl tritt eine Resonanz ein, womit in (6) $f_1 = 0$ ist. Da an diesem Maschinentyp eine grundlegende Änderung nicht lohnenswert ist, um aber diese schwierige Lage zu vermeiden, empfiehlt es sich, eine weitere Masse an die andere Seite des Motors anzubringen. Somit haben wir mit einem System von 9 Massen zu rechnen. Es werden die Werte c_8 und I_9 gewählt, in (6) eingesetzt und es wird auf diese Weise die Eigenschwingungszahl ermittelt. Diese Rechnung kann evtl., insofern dies notwendig wäre, mit mehreren Werten von c_8 und I_9 durchgeführt werden.

Im Falle, daß die Eigenschwingungszahl anzunehmen ist, so wird — eingesetzt in (6) — c_8 oder I_9 zu berechnen sein.

Ähnliche Aufgaben können sodann unter Benützung der bisherigen Ergebnisse gelöst werden.

ZUSAMMENFASSUNG

In den Mitteilungen der Klasse für technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Band XV, Heft 1—4, wurde die Aufstellung der charakteristischen Gleichung bei Torsionsschwingungen, und zwar für den allgemeinen Fall, angegeben. In der Praxis aber, besonders in der Motorentechnik, wo bei den Zylindern mit gleichen Trägheitsmomenten und Steifigkeitswerten gerechnet werden kann, können gewisse Vereinfachungen eingeführt werden. Es wurden zwei Fälle behandelt. Im ersten Falle wurden die unabhängigen Massen auf der einen Seite, im zweiten Falle auf beiden Seiten des Motors angebracht. Für diese Fälle wurden Gesetzmäßigkeiten aufgestellt, durch deren Benützung in ähnlichen Fällen die charakteristische Gleichung sofort angeschrieben werden kann.

SPECIAL FORM OF THE TORSIONAL VIBRATION FREQUENCY EQUATION

A. BALOGH

SUMMARY

In the Periodical of the Section of Technical Sciences of the Hungarian Academy of Sciences, Volume XV, No. 1—4 the method of developing the frequency equation in a general case was published. But, in practice, especially in the motor technic such special cases are met with, where the moments of inertia and spring constant are equal for every cylinder of the motor. In such cases it is possible to introduce some simplification in the calculation. Two cases are discussed here. In the first case there are the independent masses situated on the one side and in the second, on both sides of the motor. It shall be pointed out in this discussion, that the rules developed are sufficient in equal cases to set up the frequency equation at once.

QUELQUES FORMES SPÉCIALES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE
DES OSCILLATIONS DE TORSION

A. BALOGH

RÉSUMÉ

Dans les Nos 1 à 4, T. XV, des »Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei« (Publications de la Section des Sciences Techniques de l'Académie des Sciences de Hongrie), l'auteur avait établi l'équation caractéristique des oscillations de torsion sous une forme générale. Mais dans la pratique, et surtout dans la technique des moteurs où l'on trouve, à l'endroit des cylindres, des moments d'inertie et des coefficients de rigidité égaux, il y a lieu de faire certaines simplifications. L'auteur considère deux cas: dans le premier, les masses indépendantes présentes en plus des masses appartenant au moteur sont situées d'un seul côté, et dans le second cas, des deux côtés du moteur. Pour ces cas, l'auteur établit des régularités permettant d'écrire directement l'équation caractéristique des oscillations de torsion.

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. БАЛОГ

РЕЗЮМЕ

В 1—4 номере XV тома журнала Доклады Отделения технических наук Академии наук Венгрии излагается вывод характеристических уравнений торсионных колебаний, а именно в общей его форме. Однако на практике и в особенности в области техники двигателей, где вместо цилиндров мы встречаемся с равными моментами инерции и коэффициентами жесткости, можно применять упрощения. Рассматриваются два случая. В одном случае присутствующие сверх масс, относящихся к двигателю, независимые массы располагаются с одной стороны двигателя, а в другом случае с обеих сторон двигателя. Для этих случаев выведены такие закономерности, вследствие которых в других схожих случаях можно немедленно вывести характеристическое уравнение.

FORMATION OF SOLID SOLUTIONS OF ALKALINE EARTH METAL CARBONATES

E. WINTER, A. BUDINCSEVITS and B. EVA FRIGYES

RESEARCH INSTITUTE FOR TECHNICAL PHYSICS OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received May 12, 1961]

I. Introduction

The emissive layer of oxide-coated cathodes is prepared from the solid solution of the carbonates of two or more alkaline earth metals. The first step in the production of oxide-coated cathodes involves, therefore, the preparation of a solid solution of appropriate composition of the alkaline earth metal carbonates. This is usually performed by the precipitation of the carbonates of the same metals from a solution containing a mixture of the nitrates of two (Ba and Sr) or three (Ba, Sr and Ca) alkaline earth metals with a solution of soluble carbonates. Due to the isomorphism of the individual alkaline earth metal carbonates, a solid solution of their crystals is formed during precipitation.

According to experiences on electron emission, it is advantageous to use for the preparation of alkaline earth metal carbonates as precipitant sodium carbonate in less than the stoichiometric quantity [1,2]. We have found that on the surface of the crystals thus obtained an adsorbed layer of alkaline earth metal nitrates is formed, which prevents the adsorption of other impurities from the solution.

Both the internal and external structure of the solid solution of alkaline earth metal carbonates, as well as its chemical composition, have an effect on the electron emission properties and service life of oxide-coated cathodes [3]. As the carbonates of the alkaline earth metals were precipitated with a less than stoichiometric amount of soluble carbonate, it appeared necessary to investigate whether the relative proportion of the alkaline earth metals in the precipitated carbonates is affected by their proportion in the nitrate mixture. This question is justified because the various alkaline earth metal carbonates have different solubilities and thus it can be expected that their proportion as they are precipitated from the solution will not be the same as the relative proportion of the alkaline earth metals in the nitrate solution. Therefore experiments were carried out to determine the composition of the precipitated solid solutions of the alkaline earth metal carbonates when different fractions of the stoichiometric amount of sodium carbonate are applied as precipitant.

II. Experimental

To settle this problem six solutions of alkaline earth metal nitrates of different compositions were chosen. The relative proportions of the weighed Ba, Sr and Ca quantities are given in the second column of Table II.

Experiments were carried out to determine

1. the correlation between the composition of the precipitated alkaline earth metal carbonates and the relative quantity of the sodium carbonate precipitant, and
2. whether the composition of the precipitate changes during the time it is allowed to stay in the mother lye.

Table I

Water solubility and solubility product of alkaline earth metal carbonates (5)

	Solubility g/l	Solubility mole/l	Solubility product at 25° C
CaCO ₃	0.0153	$1.5 \cdot 10^{-4}$ (25° C)	$0.87 \cdot 10^{-8}$
BaCO ₃	0.020	$1.01 \cdot 10^{-4}$ (20° C)	$0.81 \cdot 10^{-8}$
SrCO ₃	0.011	$0.7 \cdot 10^{-4}$ (18° C)	$0.16 \cdot 10^{-8}$

Table II

Composition of the initial mixed nitrate solutions

No	Mole proportions of Ba, Sr, Ca (approx.)	Results of analysis					
		weight %			mole %		
		Ba	Sr	Ca	Ba	Sr	Ca
1	1 : 1 : 1	53.2	32.1	14.7	34.6	32.6	32.8
2	2 : 1 : 2	66	18.7	15.3	44.3	20.3	35.4
3	2 : 1 : 3	57	18.5	24.5	33.5	16.5	50.0
4	1 : 1	62.5	37.5	—	51.6	48.4	—
5	1 : 1	76.3	—	24.7	48.4	—	51.6
6	3 : 1	90	—	10	75	—	25

Description of the preparation of alkaline earth metal carbonates. Precipitation conditions, such as temperature and pH value of the solution, duration of stirring time of addition of each component, volume of the applied solution of sodium carbonate were strictly identical in each experiment.

Table II shows six solutions of alkaline earth metal nitrates of different composition, precipitated with sodium carbonate solutions of four different concentrations. The concentration of the sodium carbonate solution is given in Table III.

Table III

Composition of sodium carbonate solutions used for precipitation vs. fraction in per cent of the stoichiometric quantity

	30%	60%	80%	100%
NaCO ₃	21.5	42.9	57.3	71.5
Water	500 ml	500 ml	500 ml	500 ml
NaOH, approx.	10 g	10 g	10 g	10 g

The concentration of the nitrate solution relative to the alkaline earth metals was 0.34 mole/litre. In each case 2000 ml of solution was used for precipitation. The composition of the nitrate solutions used in each series of experiments was determined by the flame photometric method [6]. The difference between the photometrically determined composition and that computed from the weighed quantities is due to the various amounts of water in the alkaline earth metal nitrates. Therefore, the sum of four portions required for four parallel precipitations in each series of experiments were weighed and mixed and divided into four equal parts only after solution, filtration and determination of the alkaline earth metal content of the solution. The analytically determined composition of the initial solution of the alkaline earth metal nitrates, expressed in weight and mole percentages of the metal, is given in the second and third columns of Table II.

The pH value of the sodium carbonate solutions was adjusted by the addition of sodium hydroxide to 9.5. During precipitation the temperature of the nitrate solution was 95° C and that of the sodium carbonate solution 70° C. In each case the solution of sodium carbonate was poured into the nitrate solution. Stirring was achieved by bubbling air intensively through the mixture. Addition lasted 2—4 sec, after which stirring was continued for 5 min. The liquor was then allowed to cool, the precipitate in the mother lye was left to settle, and the liquor finally decanted.

The salt mixtures were prepared from analytically pure chemicals and ion exchanger treated water having a resistivity of $3 \cdot 10^5$ Ohm cm.

Analysis of the carbonate mixtures

The composition of the alkaline earth metal carbonates precipitates was determined with the flame photometer [6].

For flame photometric analysis a few milligrams of the alkaline earth metal carbonate were placed in a quartz crucible, dissolved in 0.5 ml of 0.5 n HNO₃, and evaporated to dryness under infrared lamps. To get rid of free acids, evaporation was repeated three times by the addition of 3 ml distilled

water to the dry salt in each case. After the third evaporation the quantity of the samples was adjusted to 3 ml by the addition of distilled water, and the Ba, Sr and Ca content of the solutions was determined flame photometrically.

Flame photometric analysis was performed by the method described in reference [6].

The determination was carried out
for Ba at 4954 Å,
for Sr at 4607 Å,
for Ca at 4226 Å.

By flame photometric analysis the quantity of each component was obtained in micrograms of the metal. Per cents were reduced to mole ratios.

The sensitivity of analysis was such that 1 $\mu\text{g/ml}$ of barium, 0.2 $\mu\text{g/ml}$ of strontium and 0.1 $\mu\text{g/ml}$ of calcium could be determined with an error of $\pm 5\%$. In our case, where relative percentages instead of the absolute quantities of the materials had to be determined, the possibility of an analytical error was greater than this, because an error in the determination of one of the components affected the values obtained for the percentages of the other two components.

III. Experimental results

To illustrate the way in which the composition of the, from a mixed solution of Ba, Sr and Ca nitrates of a given composition precipitated alkaline earth metal carbonates depends on the amount of sodium carbonate used for precipitation, the analytical results are represented graphically. The composition of the carbonate precipitates obtained from nitrate solution of the same composition are given vs. the quantity of the sodium carbonate used for precipitation, *i. e.* the fraction of the total alkaline earth metal converted into carbonate in one diagram. The percentage of the components in the carbonate precipitate are plotted as ordinates, the abscissae representing the sodium carbonate content of the precipitating solution. In all Figures the solid lines represent weight percentages, dashed lines mole percentages.

The points in small circles on the ordinate represent the composition of the initial nitrate solution in per cent. The relative amount of components in the carbonate precipitates is plotted in the mole and weight percentage of the metal, and the quantity of sodium carbonate is given as a fraction of the quantity equivalent with the alkaline earth metal nitrates.

The composition of the triple carbonates made from nitrate mixture No. 1, in which the proportion of the three alkaline earth metals was 1 mole barium to 1 mole strontium to 1 mole calcium (further referred to as 1 : 1 : 1), is represented in weight and mole percentages, in Fig. 1. The composition of the triple carbonates prepared from nitrate mixture No. 2, with a 2 : 1 : 2 mole composition, is given in Fig. 2. Fig. 3 shows the composition of and the



Ba

Sr

Ca

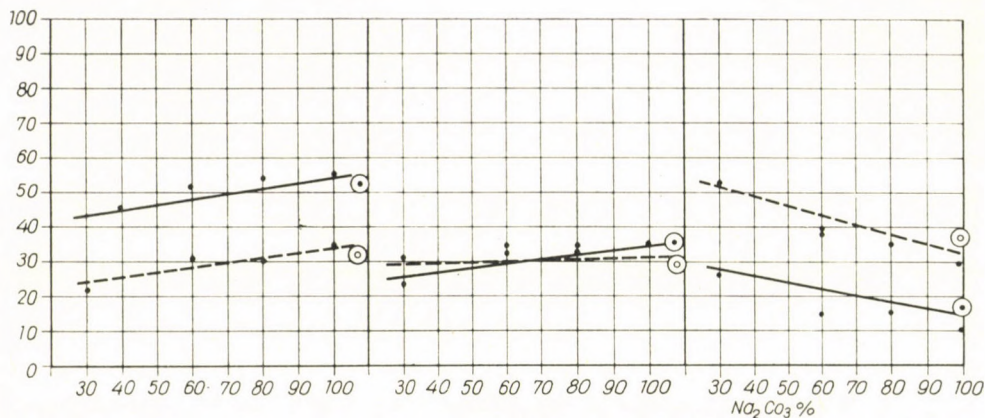
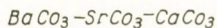


Fig. 1. Composition of alkaline earth metal carbonates precipitated from a nitrate solution containing barium, strontium and calcium in a mole proportion of 1 : 1 : 1, vs. the relative amount of sodium carbonate used for precipitation

relative amount of components in carbonate precipitates prepared from a 2 : 1 : 3 salt mixture. The values are given vs. the amount of sodium carbonate used as precipitant.

From these figures it can be firstly seen, that up to the equivalent quantity (precipitation conditions being otherwise the same) the proportion of the



Ba

Sr

Ca

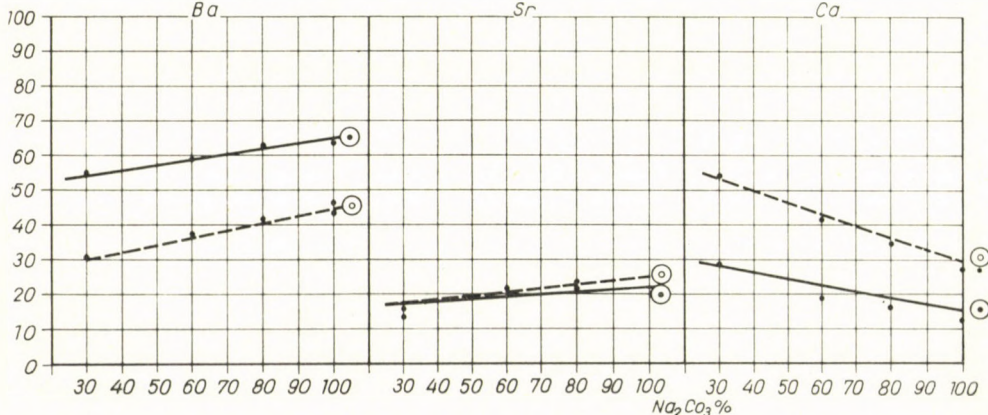


Fig. 2. Composition of alkaline earth metal carbonates precipitated from a nitrate solution containing barium, strontium and calcium in a mole proportion of 2 : 1 : 2, vs. the relative amount of sodium carbonate used for precipitation

components is equivocally determined by the amount of sodium carbonate. Among the precipitates obtained from either of the three nitrate solutions of different composition that, which was precipitated by less than the stoichiometric amount of sodium carbonate, has a considerably different composition compared to the nitrate solution. The percentage of calcium is much higher and that of barium is much lower in the precipitate than in the initial nitrate solution. The percentage of strontium, too, depends on the relative amount of the sodium carbonate, but to a much smaller degree. When the quantity of sodium carbonate used for precipitation is increased, the relative proportion of the components approaches linearly the composition of the initial nitrate solution, the amount of calcium being greatly decreased and that of the barium being greatly increased. When the quantity of sodium carbonate used for precipitation becomes equal to the stoichiometric, the relative proportion of the metals in the carbonate precipitate becomes equal to that in the solution.

Fig. 4 shows variations in the composition of the double carbonates of barium and strontium, in weight and mole percentages, as a function of the relative amount of sodium carbonate. In this case the composition of the carbonate precipitation is hardly affected by the relative amount of sodium carbonate. In the carbonate precipitated with less than the amount of sodium carbonate, the amount of strontium is slightly greater and that of the barium is slightly smaller than in the initial nitrate solution.

Fig. 5 shows the proportion of components in a 1 : 1 mole ratio double carbonate of a barium and calcium as a function of the relative amount of sodium carbonate. These graphs have the same character as those in Figs. 1 and 2 showing the composition of the triple carbonates containing calcium. However, the dependence of the composition of the amount of sodium carbonate is much more explicit than in the previous cases. The composition of the carbonate precipitate prepared from a 3 : 1 mole ratio mixture of barium and calcium nitrates thus containing a very great excess of barium, as a function of the relative quantity of sodium carbonate used for precipitation is shown in Fig. 6. According to this figure, when an amount of sodium carbonate much less than the equivalent quantity is used, the calcium content of the carbonate precipitate will be much higher than that of the solution, even when the nitrate solution contains a great excess of barium. The proportion of the components in the precipitate approaches the weighed in composition only when the sodium carbonate is nearly equal to the equivalent quantity. As shown by the graph in this case the relation is not linear. The composition of the carbonate precipitate obtained with the stoichiometric amount of sodium carbonate is always the same — within experimental errors — as in the initial nitrate solution. According to the above-given experimental results, the different alkaline earth metal components have different relative precipitation tendencies. This can be most readily studied for an equimolar initial nitrate solution. This is the case

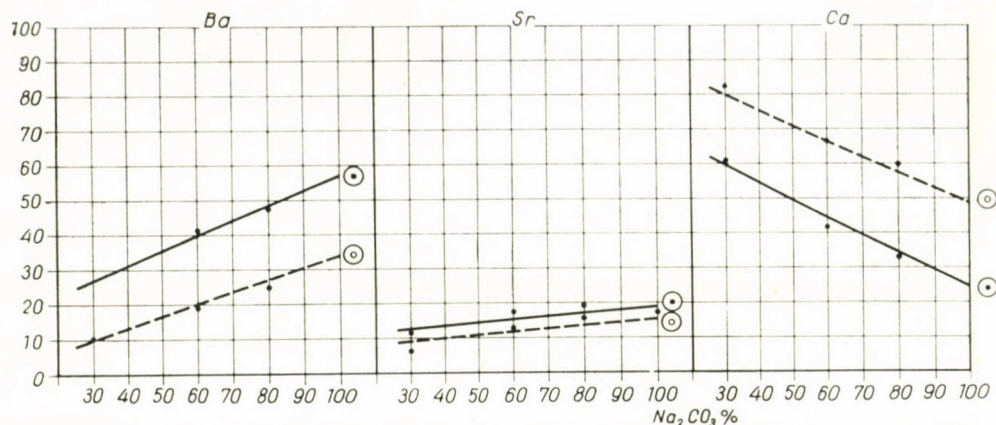


Fig. 3. Composition of alkaline earth metal carbonates precipitated from a nitrate solution containing barium, strontium and calcium in a mole proportion of 2 : 1 : 3, vs. the relative amount of sodium carbonate used for precipitation

in the series of experiments 1, 4 and 5 where components of the same molar quantities were present in the solution and, therefore, the sequence of their precipitation was determined only by their specific precipitation tendencies and not by they being present relative to each other in excess or not, in the solution.

“Precipitation tendency” can be considered as a resultant of the different physico-chemical properties of the alkaline earth metal carbonates.

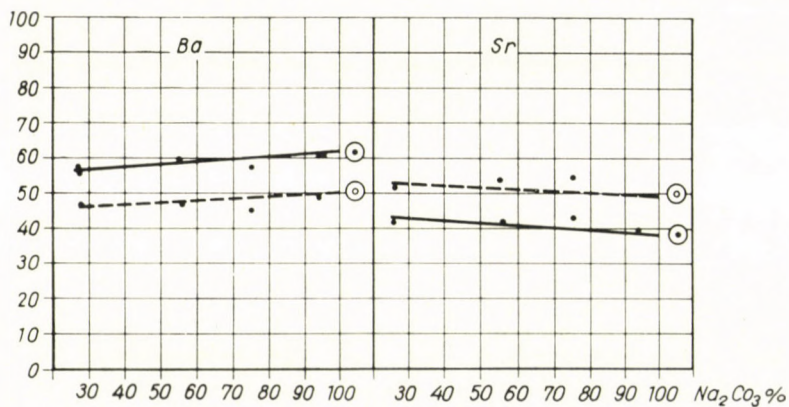
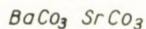


Fig. 4. Composition of alkaline earth metal carbonates precipitated from a nitrate solution containing barium and strontium in a proportion of 1 : 1, vs. the relative amount of sodium carbonate used for precipitation

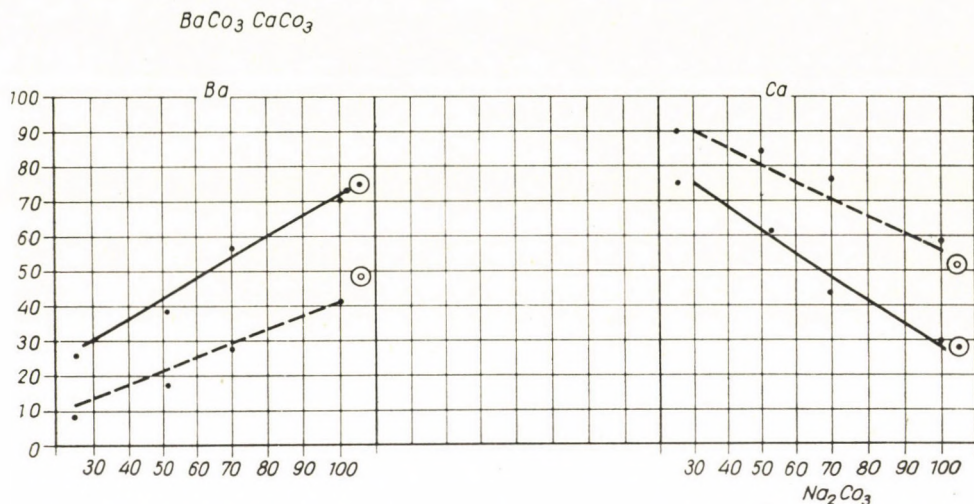


Fig. 5. Composition of alkaline earth metal carbonates precipitated from a nitrate solution containing barium and calcium in a ratio of 1 : 1, vs. the relative amount of sodium carbonate used for precipitation

Such properties are the solubility product and the rate of nucleation and the rate of growth of alkaline earth metal carbonate crystals. According to our experiments, the precipitation tendency of the alkaline earth metal carbonates decreases when passing from Ca to Sr and finally to Ba. There is no essential difference between barium and strontium, but a very essential difference is observed between barium and calcium (see Table 2). In the case of the nitrate

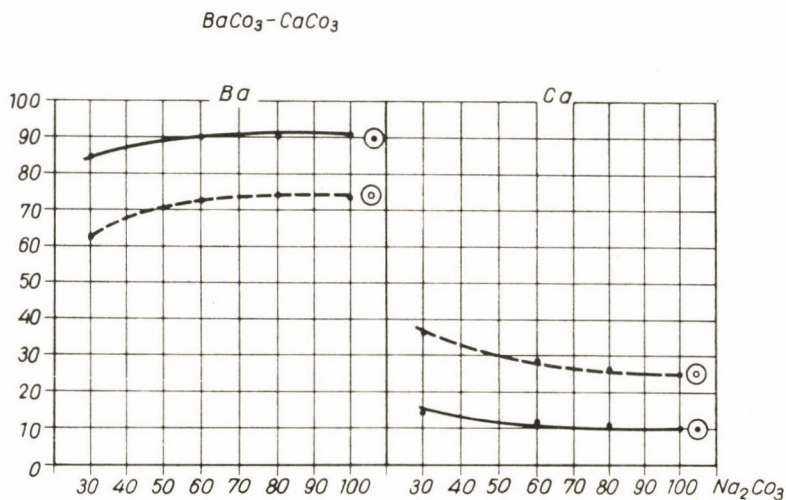


Fig. 6. Composition of alkaline earth metal carbonates precipitated from a nitrate solution containing barium and calcium in a ratio of 3 : 1, vs. the relative amount of sodium carbonate used for precipitation

solutions investigated by us, the precipitate contained more calcium and less barium than the initial solution. The discrepancy was the greater the more calcium was contained in the initial nitrate solution and the less sodium nitrate — as compared to the stoichiometric quantity — was used for precipitation.

Table IV

Composition of the precipitate obtained from a nitrate mixture containing Ba, Sr and Ca in a proportion of 2 : 1 : 3, with 41.5% sodium carbonate as a precipitant and the composition of the mother lye

	Ba 10^{-2} mole	Sr 10^{-2} mole	Ca 10^{-2} mole
Nitrate mixture	17.42	9.9	7.6
Carbonate mixture	3.06	1.85	17.82
Mother lye	14.4	7.91	9.61
	17.48	9.77	27.43

Table IV shows the Ba, Sr and Ca content of the carbonate precipitate obtained from a 2 : 1 : 3 mole composition Ba—Sr—Ca nitrate solution when the precipitant was 41 per cent of the equivalent Na_2CO_3 solution, and the analytically determined Ba, Sr and Ca content in moles of the residual mother lye.

The first row of this table gives the amounts of alkaline earth metals present in the nitrate mixture, the second row the alkaline earth metal contents of the carbonate precipitate, the third row the amounts left in the mother lye, and the fourth row the sums of the amount of alkaline earth metals in the precipitate and mother lye, in moles. Each sum in the fourth row must be equal to the alkaline earth metal content of the nitrate solution. It can be seen that the analytical error is less than 2%.

It can be further noted from the results of Table IV that when 41 per cent of the total amount of the alkaline earth metal is precipitated, 65 per cent of calcium precipitates and about $9 \cdot 10^{-2}$ moles of Ca remains in solution, while only 17 per cent barium precipitates so that $14 \cdot 10^{-2}$ moles are left in the solution.

Changes in the composition of the carbonate precipitate in the mother lye

The experiments described above referred to the analysis of precipitates which were allowed to stand for 24 hours in the mother lye.

Experiments were carried out to establish whether the composition of the precipitate changes during the period it is allowed to stand in the mother lye or whether — after mixing the solutions — crystals are formed already in the final composition.

These experiments were carried out by starting from a given composition mixture of the three nitrate solutions and preparing, as above, alkaline earth metal carbonates with 30, 60, 80 and 100 per cent of the equivalent sodium carbonate. After the two solutions had been poured together, a sample was taken from the precipitate for immediate analysis. Compared to the total precipitate the quantity of this sample was small. Then mother lye and precipitate were divided into two equal parts, one of which was allowed to cool and samples were taken from the occasionally stirred precipitate every two

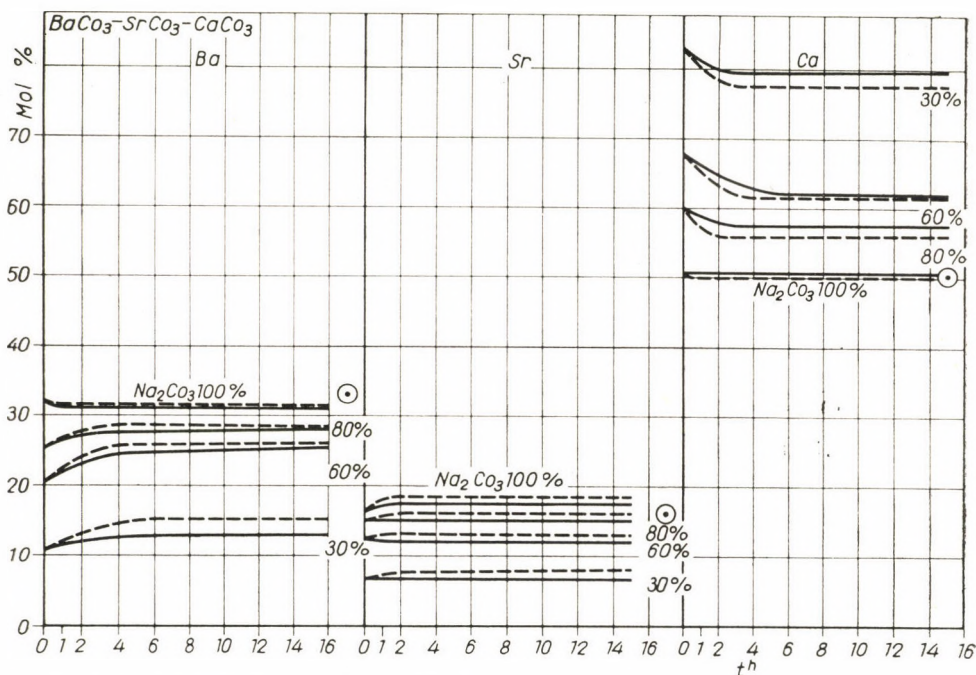


Fig. 7. Variation in the composition of alkaline earth metal carbonates precipitated from a nitrate solution containing barium, strontium and calcium in a mole proportion of 2 : 1 : 3, vs. the time for which the precipitate was allowed to stand in the mother lye

- Solution "a" was allowed to stand for 8 hours at room temperature
 - - - - Solution "b" was allowed to stand for 8 hours at 95° C

hours. The other part was kept at 90° C for 9 hours and samples were taken from it under the same conditions. These samples were analysed.

The composition of the precipitate against the time it was allowed to stand in the mother lye is given in Fig. 7. The point in the small circle at the end of each curve represents the composition of the initial nitrate solution.

The composition of the precipitate at room temperature is shown by the solid line and that of the precipitate in the warm mother lye by the dashed line.

As can be seen, a small variation amounting to about 5 per cent in the composition of the precipitate was observed during the time it was allowed to stand in the mother lye. The greatest departure from the composition of the initial nitrate solution was obtained in the sample taken immediately after mixing the solutions, and the composition of the precipitate in the mother lye gradually approaches that of the initial nitrate solution. The change is accomplished in two hours after mixing after which the composition of the precipitate remains constant. The greatest change in composition was observed in precipitates standing in warm mother lyes.

IV. Conclusions

1. From the results of these investigations some conclusions, which are of importance from the point of view of the preparation and structure of oxide-coated cathodes can be drawn.

It has been established that the proportion of the metals in the alkaline earth metal carbonate precipitates, prepared from a mixed solution of alkaline earth metal nitrates by the use of a sodium carbonate solution, agrees with the proportion of the metals in the solution of alkaline earth metal nitrates only when a stoichiometric amount of sodium carbonate is used as precipitant.

When in order to obtain the alkaline earth metal carbonates a less than stoichiometric amount of sodium carbonate is used for precipitation the composition of the precipitate depends not only on the composition of the nitrate solution, but also on the amount of the sodium carbonate.

Since the properties of the oxide-coated cathodes depend considerably on the composition of the coating, it is important to be in a position to prepare of alkaline earth metal carbonates of known and desired composition. This cannot be done without the above information.

2. It has been shown that in the investigated range of composition (between 33 and 75 mole percentage for Ba and between 25 and 52 mole percentage for Ca) the ratio of calcium and barium in the precipitate will always be higher than in the initial nitrate solution, provided that the composition of the barium and calcium containing solid solutions of alkaline earth metal carbonates differs from that of the initial nitrate solution. The departure from the composition of the initial nitrate solution is the greater the smaller fraction of the equivalent quantity of sodium carbonate is applied as precipitant and the higher the calcium content in the initial mixed nitrate solution.

It is known that the thermionic emission of emissive layers can be attributed mainly to their barium oxide content, as of the three alkaline earth metals barium has the lowest work function. Oxides of strontium and calcium

improve the temperature resistance of oxide-coated cathodes, ensure the possibility of activation at high temperatures, decrease the evaporation of the coating and also slightly decrease the value of the work-function. Therefore, according to the afore-said, the conditions must be chosen so that the barium content in the obtained alkaline earth metal carbonates should not fall below a minimum level, mainly when mixed crystals of the alkaline earth metal carbonates with a relatively high calcium content are being prepared. When preparing alkaline earth metal carbonates of a new composition, the proper concentration of the precipitate must be determined in each case by analysis.

3. From the above described investigations certain conclusions can be drawn as to the structure of the solid solution of alkaline earth metal carbonates.

In each case the average composition of the crystals was determined by analysing the precipitate. The distribution of the alkaline earth metal ions within the crystals, *i. e.* the homogeneity of the individual crystals, cannot be established from the analytical results. In this respect only assumptions can be made.

It is an established fact that crystals of the alkaline earth metal carbonates, precipitated from a mixture of barium, strontium and calcium salts, do not crystallize separately, but form a solid solution.

OSTAPCHENKO carried out a [1] detailed X-ray study of the structure of mixed alkaline earth metal carbonate crystals and showed that they form aragonite-type solid solutions, in which the lattice parameters vary monotonously with the composition, from pure strontium carbonate to pure barium carbonate. In the whole range of component-proportions a solid solution of the carbonates is obtained, even when the barium and calcium carbonates are precipitated simultaneously. With a high percentage of barium content, between 80 and 100%, a solid solution with aragonite crystal lattice is formed; with a barium content less than 55 per cent, a solid solution with calcite crystal lattice is obtained. When the calcium content is between 80 and 55 per cent, two solid solutions are present: one with a calcite structure and one with an aragonite structure. When carbonates of barium, strontium and calcium are precipitated simultaneously and the calcium content is low, not more than 20 to 40 per cent, a solid solution with an aragonite-type crystal lattice is likewise formed, while in the case of a calcium content higher than 45 to 50 per cent, the obtained solid solution has a calcite crystal structure.

OSTAPCHENKO [1] carried out his investigations on carbonates precipitated with sodium carbonate.

With the method used by us it is very difficult to determine directly whether the mixed crystals formed have a uniform composition over their cross sections. When the nitrates of the alkaline earth metals and the sodium carbonate solution are mixed due to the considerable oversaturation of the solution the crystals are instantaneously precipitated so that it is impossible

to follow the process of crystal growth by sampling or analysis. In our investigations the mean composition of the carbonate precipitates has been determined, as mentioned. The mean composition found may be explained by the assumption that at the beginning of precipitation crystal nuclei of a certain composition are formed and later, with the precipitation process proceeding, layers of different composition are deposited on these nuclei, but it is also possible that new crystal nuclei of a composition different from that of the crystal nuclei produced in the first phase of precipitation are formed. Neither of these assumptions can be excluded. Both cases involve some inhomogeneities. In the first case the composition of the individual crystals is inhomogeneous because in the centre and around it layers with higher calcium content are present. In the second case the crystals formed at different moments present different compositions.

Inhomogeneities in crystal composition are most likely to occur in the solid solutions of double and triple carbonates containing barium and calcium, because the difference between the precipitation tendencies of these components is the greatest. Assuming the first explanation to be correct for the initial nitrate solutions of the composition range investigated, the centres of the alkaline earth metal carbonate crystals formed contain always more calcium and the layers nearer to their surface have a higher concentration particularly in barium as compared to the mean composition.

When an equivalent amount of sodium carbonate is used as precipitant, the bulk of the barium precipitates at the end of the mixing process, so that the surface layers become particularly rich in barium. With less sodium carbonate a certain part of the alkaline earth metals, containing strontium and particularly barium, remains in the mother lye.

When the obtained crystals, with a relatively high percentage of calcium, were allowed to stand in the mother lye, a change in the crystal composition was observed (Fig. 7). The percentage of the calcium decreased and that of the barium increased in the precipitate.

According to the foregoing considerations and the first assumption, it can be stated that the composition of the thus obtained solid solution of alkaline earth metal carbonates varies over the cross section. In the case of the initial nitrate solutions investigated by us, the double and triple carbonates of barium and calcium contain on their surface more barium than the mean composition of the precipitate. The mixed-crystallites are not formed simultaneously, because, after the two solutions had been mixed, on the one hand the first crystal nuclei continue to grow while on the other hand, new crystal nuclei are continuously formed. It is possible, therefore, that the composition varies not only inside the crystallites, but also from one crystallite to the other. The mean composition of the individual crystallites may differ from one another and from that of the precipitate.

Oxide-coated cathodes are made by the thermal decomposition of the alkaline earth metal carbonates in vacuum. In this way the inhomogeneity of the carbonates determines also the structure of the oxide crystals obtained from them. When the oxide-coated cathode is heated, an inhomogeneous oxide layer is formed from the inhomogeneous carbonates. The aim of activation (heat treatment at 1000 to 1100° C) [1] is to accelerate diffusion at the high temperature and to obtain an emissive layer of a throughout uniform composition and with a definite work function. With this point in mind the two possible explanations, which were previously given for the inhomogeneity (depending on the relative amount of sodium carbonate applied as a precipitant) of the carbonate crystals are equivalent from the viewpoint of the oxide-coated cathodes.

The high barium content of the surface layer may be one of the reasons for the more intense evaporation of barium during and immediately after decomposition in the course of preparing oxide-coated cathodes, than the evaporation of barium from activated oxide cathodes [3].

The aim of these investigations was to throw light on some of the questions raised in connection with the preparation and application of alkaline earth metal carbonates, the basic materials of oxide-coated cathodes. The physico-chemical processes taking place during the preparation and the final elucidation of the structure of the individual crystallites will be dealt with in a subsequent publication.

Finally, the authors wish to thank Mr. J. ÁDÁM for his help in carrying out the flame-photometric measurements. Thanks are also due to Mr. L. EGRI for the assistance given in the chemical work and Mrs. V. VÁRALJAI for the evaluation of the measurements.

REFERENCES

- HERMANN u. WAGENER: Die Oxydkathode. II. Teil. Barth Verlag. 1950. pp. 27, 31, 62—70.
OSTOPCHENKO, F. P.: Izv. Akad. Nauk SSSR. Vol. 20 (1956), p. 1105.
- WINTER, ERNŐ: Vákuumtechnika. (Vacuum Engineering) II. Budapest, Nehézipari Könyvkiadó. 1954. p. 59.
- HERMANN u. WAGENER: Die Oxydkathode. II. Teil. 1950. Barth Verlag. pp. 197—207.
WINTER, ERNŐ: A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztálya Osztályközleményei. Vol. 25. (1960). p. 39.
- BENJAMIN, M., ROOKSBY, H. P.: Philosophical Magazine. Vol. 15 (1933), p. 81. Vol. 61 (1933) p. 519.
BENJAMIN, M., HUCK, R. J., JENKINS, R. O.: Proc. Phys. Soc. Vol. 5 (1938) p. 345.
BIGUENET, CH., MANO, C.: Le Vide. Vol. 1. (1946) p. 137.
AMAKASU, K., FUKASE, M., SEKIRE, E., TAKAHASHI, M., NOAKI, H., HIROZA, S.: Le Vide. Vol. 51 (1954) p. 43.
- HODGMAN, CH. D.: Handbook of Chemistry and Physics (Chem. Rubber Publ. Co. 1952—53). pp. 460, 473, 583, 1558—59.
- GERGELY, GY., VÁRADI F. P.: Acta Physica. Vol. 5 (1955). p. 51.
ÁDÁM, J., ETTRE, K., GERGELY, GY., VÁRADI F. P.: Magyar Kémiai Folyóirat. Vol. 62 (1956). p. 223.

SUMMARY

Emissive layers of oxide-coated cathodes are prepared by the use of a solid solution of two or three alkaline earth metal carbonates. The solid solution of the carbonates is precipitated with soluble carbonates from a solution of soluble alkaline earth metal salts.

To obtain a high emission it has been found advantageous to use less than the stoichiometric amount for the preparation of alkaline earth metal carbonates. It has been established that in this case the percentage of the alkaline earth metals in the precipitate differs from that of the metals in the solution.

It has been further established that in the case of triple carbonates, *i. e.* when the solid solution contains calcium too, the calcium content of the precipitate is much higher and its barium content is much lower than of the initial solution. Similar conditions are found in the case of the double carbonates of barium and strontium. A specified composition can therefore be obtained only when the composition of the initial solution is suitably chosen.

According to the experimental results, solid solutions of alkaline earth metal carbonates with essentially different composition are, therefore, obtained by adding different amounts of sodium carbonate as precipitant. Consequently

1. either the individual crystallites have a non uniform composition (for example the crystallites contain more calcium in their centre and more barium at the surface),

2. or the subsequent fractions of the soluble carbonate precipitates solid solutions of varying composition, which add up to the determined mean composition.

Since activation of the oxid-coated cathodes is accomplished when the components of the emissive layer form a homogeneous solid solution, the described phenomena must be taken into account during the activation of the cathodes.

BILDUNG VON FESTEN LÖSUNGEN DER ERDALKALIMETALL-CARBONATE

E. WINTER, A. BUDINCSEVITS und B. EVA FRIGYES

ZUSAMMENFASSUNG

Die emittierende Schicht der Oxydkathode wird aus einer festen Lösung zweier oder dreier Erdalkalimetalloxyde hergestellt. Die feste Lösung der Carbonate wird aus einer Lösung der löslichen Salzen der Erdalkalimetalle mit Hilfe löslicher Carbonate gewonnen.

Aus Emissionsgründen erwies sich als vorteilhaft bei der Herstellung von Erdalkalicarbonaten eine, im Vergleich mit der stöchiometrischen Menge kleinere Quantität von löslichen Carbonaten anzuwenden. Der Prozentanteil der Erdalkalimetalle im Niederschlag unterscheidet sich in diesem Falle — wie unsere Erfahrungen zeigten — vom Prozentanteil der Metalle in der Lösung.

Es wurde festgestellt, daß im Falle von Dreifachcarbonaten, die auch Calcium enthalten, der Niederschlag viel mehr Calcium und viel weniger Barium enthält als die Ausgangslösung wenn das angewandte Natriumcarbonat weniger als die stöchiometrische Menge ist. Ähnlich sind die Verhältnisse auch im Falle der Doppelcarbonate von Barium und Strontium. Die vorgeschriebene Zusammensetzung wird also nur durch eine entsprechende Wahl der Zusammensetzung der Ausgangslösung erreicht.

Die Versuche führten zum Resultat, daß durch Hinzufügung verschiedener Mengen des zur Ausfällung angewandten Natriumcarbonats feste Lösungen der Erdalkalicarbonate mit sehr verschiedenen Zusammensetzungen entstehen. Es folgt daraus, daß entweder

1. die einzelnen Kristallkörner inhomogen in ihrer Zusammensetzung sind (z. B. die Mitte der Körner mehr Calcium, ihre Oberfläche mehr Barium enthält), oder

2. die verschiedenen Mengen der zur Ausfällung angewandten löslichen Carbonate feste Lösungen mit verschiedenen Zusammensetzungen ausfällen, wobei diese zusammen die von uns bestimmte mittlere Zusammensetzung ergeben.

Da die Aktivierung der Oxydkathoden nur dann vollendet ist, wenn die Komponenten des Emissionsbelages eine feste Lösung mit homogener Zusammensetzung bilden, muß man die beschriebenen Vorgänge bei der Aktivierung von Oxydkathoden berücksichtigen.

RECHERCHES SUR LA FORMATION DES SOLUTIONS SOLIDES DES CARBONATES DE MÉTAUX ALCALINO-TERREUX

E. WINTER, A. BUDINCSEVITS et Mme É. B. FRIGYES

RÉSUMÉ

La couche d'émission des cathodes d'oxydes se prépare par utilisation de la solution solide de deux ou trois carbonates de métaux alcalino-terreux. La solution solide se fait à partir de la solution des sels solubles des métaux alcalino-terreux, à l'aide de carbonates solubles.

Pour des causes d'émission, on a trouvé avantageux d'employer moins de carbonates solubles que la quantité stoechiométrique nécessaire pour la préparation des carbonates des métaux alcalino-terreux. Les auteurs ont constaté, au cours des essais, que dans ce cas-là, la composition en pourcentage du précipité, rapportée aux métaux alcalino-terreux, ne correspond pas à la composition de la solution rapportée aux métaux.

On a constaté qu'en cas de tri-carbonates, c'est-à-dire de solutions solides contenant également du calcium, et avec utilisation de moins de carbonate de sodium que la quantité stoechiométrique, la teneur en calcium du précipité sera essentiellement plus grande, et la teneur en barium sensiblement plus petite que celles de la solution originale. La situation sera analogue dans le cas des bicarbonates de barium et de strontium. La composition prescrite ne peut donc être atteinte que par le choix convenable de la composition de la solution originale.

Les essais ont eu comme résultat, que par addition de quantités différentes de carbonate de sodium provoquant la précipitation, on obtient des solutions solides de carbonates alcalino-terreux d'une composition essentiellement différente. Il s'ensuit que

1. les grains de cristaux ne sont pas homogènes du point de vue de la composition (par ex., le milieu du grain contient plus de calcium, et la surface plus de barium), ou bien
2. les différentes doses successives de carbonate soluble servant à la précipitation précipitent des solutions solides de composition différente qui donnent ensemble la composition moyenne déterminée.

L'activation des cathodes d'oxydes n'étant terminée que lorsque les composés de la couche d'émission forment une solution solide de composition homogène, les phénomènes décrits doivent être pris en considération lors de l'activation des cathodes d'oxydes.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ЗЕ МЕЛЬНО-ЩЕЛОЧНЫХ КАРБОНАТОВ

Э. ВИНТЕР, А. БУДИНЧЕВИЧ и Е. ФРИДЬЕШ

РЕЗЮМЕ

Эмиссионный слой окисных катодов изготавливается с использованием твердых растворов двух или трех щелочно-земельных карбонатов. Твердый раствор карбонатов получают из раствора растворимых солей щелочно-земельных металлов с помощью растворимых карбонатов.

В процессе опытов установлено, что процентный состав щелочно-земельных карбонатов (осажденных растворимыми карбонатами) отнесенный к металлам, совпадает с составом раствора, отнесенным к металлам, только в том случае, если для осаждения используется стехиометрически необходимое количество растворимого карбоната.

Установлено, что в случае тройных карбонатов, т. е. в случае твердых растворов, содержащих также кальций, при использовании карбоната натрия в количестве меньшем чем стехиометрическое количество, содержание кальция в осадке значительно выше, а содержание бария значительно ниже чем в исходном растворе. Схожее положение имеет место и в случае двойных карбонатов бария и стронция. Следовательно, предписанного состава можно добиться только путем соответствующего выбора состава исходного раствора.

Следовательно, в результате проведенных опытов установлено, что путем добавления различных количеств карбоната натрия, вызывающего осаждение, образуются сильно отличающиеся по составу твердые растворы мелко-щелочных карбонатов. Из этого следует, что

1. Либо отдельные кристаллические зерна неоднородны с точки зрения состава (например, сердцевина зерна содержит больше кальция, а поверхность больше бария),

2. либо же следующие друг за другом различные дробные части используемого для осаждения растворимого карбоната отдают различные по составу твердые растворы и эти совместно дают средний определенный нами состав.

Вследствие того, что активность окисных катодов завершена тогда, когда окисные компоненты эмиссионного слоя образуют твердый раствор равномерного состава, описанные явления необходимо учитывать при активации окисных катодов.

VERSUCHE ZUR HERSTELLUNG VON MIT SILIKON HYDROPHOBISIERTEN DAMPFKONDENSATOROBER- FLÄCHEN UND DIE UNTERSUCHUNG DEREN WÄRMEÜBERTRAGUNGSVERHÄLTNISSE

Dr. K. HALMOS, I. LIPOVETZ,
und Dr. J. PROSZT

KORRESP. MITGL. D. UNGAR, AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

LEHRSTUHL FÜR ANORGANISCHE CHEMIE DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 16. Mai 1961]

Es wurde bereits im Jahre 1914 von POCKELS [1] und später von SCHMIDT, SCHURIG und SELLSCHOPP [2] in ihrem im Jahre 1930 erschienenem Arbeit die Aufmerksamkeit auf die zwei möglichen Arten der Dampfkondensation gelenkt, wonach die Oberfläche von der kondensierenden Flüssigkeit entweder benetzt wird, wobei auf der Oberfläche eine Kondensationsschicht entsteht, oder aber wird die Oberfläche von der Flüssigkeit nicht benetzt, und die Flüssigkeit hebt sich von der Oberfläche in Tropfen ab. Nach GRÖBER, ERK und GRIGULL [3] wiesen die Versuche eindeutig darauf hin, daß die Dämpfe der untersuchten reinen Flüssigkeiten, an den untersuchten reinen Metalloberflächen, in Form eines zusammenhängenden Flüssigkeitsfilms niedergeschlagen werden.

Im Laufe der Versuche wurde auch festgestellt, daß sich die Wärmeübertragungsverhältnisse günstiger gestalten, wenn der Wasserdampf in Form von Tropfen niedergeschlagen wird. Während nämlich bei der Bildung eines Flüssigkeitsfilms sich die Wärmeübergangszahl im allgemeinen zu $a = 10\,000$ — $18\,000 \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{C}^\circ$ ergibt, beträgt nach HAMPSSON [4] bei Bildung von Kondensationstropfen die Wärmeübergangszahl $130\,000$ — $140\,000 \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{C}^\circ$. Von SHEA und KRASE [5] wurde sogar bei einer Dampfgeschwindigkeit von $6,1 \text{ m/s}$ ein Wert der Wärmeübergangszahl von $350\,000 \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{C}^\circ$ gemessen.

Mit den Beziehungen, die zwischen der Wärmeübergangszahl und der Art der Dampfkondensation bestehen, befaßten sich EUCKEN [6], EMMONS [7] bzw. FATICA [8]. Es wurde jedoch noch keine befriedigende Theorie geschaffen, die die Frage beantworten sollte, warum die Tropfenkondensation eine bessere Wärmeübergangszahl als die laminare Kondensation liefert.

Nach der allgemeinsten Auffassung ist die Tropfenkondensation aus dem Grunde vorteilhaft, weil sich hierbei zwischen der gekühlten Wand und dem Dampfraum keine zusammenhängende Wasserschicht ausbildet, wodurch die Wärmeübertragung beeinträchtigt wird.

Die Verwirklichung der Tropfenkondensation gestaltet sich unter Laboratoriumsverhältnissen äußerst einfach. Früher wurden die Versuche meistens

mit Fettsäuren (Stearinsäure, Ölsäure) und später mit Merkaptanen (Benzylmerktan) durchgeführt.

Von DEVAUX [9] wurde es experimentell nachgewiesen, daß bereits $2-3 \cdot 10^{-8}$ g/cm² Wachs oder Olivenöl genügen, um die Dampfkondensation an der Oberfläche in Form von Wassertropfen herbeizuführen. Eine hydrophobe Schicht dieser Art ist jedoch nicht dauerhaft.

Nach einigen Autoren soll die Tropfenkondensation durch entsprechende Zusätze zu dem Wasserdampf herbeigeführt werden können (W. N. NAGLE [10]), wobei die Zusatzstoffe entweder kontinuierlich oder periodisch zugeführt werden. In der Praxis haben sich indes diese Zusatzstoffe nicht bewährt, vorwiegend aus dem Grunde, da sich die Kühlrohre letzten Endes mit einer allzu dicken Schicht Wachs oder Öl bedeckten, wodurch die Wärmeübertragung sprunghaft herabgesetzt wurde.

Da die Kondensation in Tropfen betriebsmäßig bis zur Zeit nicht gesichert werden konnte, werden die Kondensatoren auch weiterhin für die laminare Kondensation dimensioniert.

In der Praxis ist nämlich zur Hydrophobisierung der Kondensatoren nur ein Filmbildner geeignet, der eine gute Haftfähigkeit besitzt und der in äußerst dünner Schicht aufgetragen werden kann. Dabei muß der aufgetragene Film gegen Schwingungen Widerstand leisten, ferner soll er in Wasserdampf nicht quellen, seine Hydrophobie nicht verlieren, abriebfest sein und einen allgemeinen Korrosionsschutz sichern.

Die für diese Bedingungen meistgeeigneten Stoffe wurden unter den Silikonharzlacken gefunden. Die Auswahl des geeignetsten Stoffes konnte dabei am zweckmäßigsten durch die Untersuchung der Wasserbeständigkeit (Quellung) und des Randwinkels getroffen werden.

Die Auswahl der für die Hydrophobisierung der Kühlflächen von Kondensatoren geeigneten Silikonlacke

Es ist bekannt, daß die Polysiloxanharze *an sich allein* keine guten Filmbildner darstellen. Durch die Silizium- und Sauerstoffatome werden nämlich, infolge des Unterschiedes zwischen ihren Bindungswinkeln, im Laufe der Kondensationsvorgänge äußerst leicht zyklische Oligomere gebildet, die quellungsfähige, thermoplastische Inseln bilden und aus dem Silikonfilm leicht ausgelöst werden [11—13].

Die kombinierten Silikonharze können dagegen auf den meisten Gebieten des Schutzes gegen die Feuchtigkeit mit Erfolg eingesetzt werden, wobei sie auch die Verhinderung der in der Gegenwart von Feuchtigkeit stattfindenden chemischen oder elektrochemischen Korrosion, ferner den Schutz der höheren Temperaturen ausgesetzten Oberflächen sichern [14—17].

Auf Grund des vorgehenden ist es einleuchtend, daß wir das für unsere Zwecke geeignetste Silikonharz unter den kombinierten Silikonharzen aufgefunden haben.

Die Auswahl des zum Überzug der Kondensatorrohre dienenden Silikonharzes wurde mit Hilfe der folgenden Versuche durchgeführt.

Für die Zwecke der Untersuchung wurde auf eine 0,5 mm dicke Messingplatte durch Eintauchen ein 20—30 Mikron dicker Silikonfilm aufgetragen.

Kurze Beschreibung der im Laufe der Untersuchung ausgewählten Harzlacke:

1. Eine Kombination aus Äthylsilikon und Alkylphenylharz, in Lackbenzin gelöst. Einbrenntemperatur: 170° C.

2. Eine Kombination aus Phenylsilikon und Alkylphenylharz, in Lackbenzin gelöst. Einbrenntemperatur: 170° C.

3. Eine Kombination aus Äthylphenylsilikon und Alkidharz, zur Raumbildung mit einem Zusatz von 1% tetrafunktionalen Silans. Lösung in Toluol-Xylol. Einbrenntemperatur: 200° C.

4. Eine Kombination aus Methylphenylsilikon und Alkidharz; Lösung in Toluol-Xylol. Einbrenntemperatur: 220° C [18].

Unter den mechanischen Eigenschaften der Filme wurden die Härte [19] und das Haftvermögen [20] untersucht. Beide entsprachen den Vorschriften.

Zum Vergleiche der Güte der einzelnen Überzüge 1. bis 4. wurde die Messung ihrer elektrischen Widerstände herangezogen. Zu diesem Zwecke wurden die überzogenen Probeplatten 96 Stunden lang in einer bei 30° C gehaltenen 3%igen Kochsalzlösung gewässert, wobei der Widerstand des Films in Intervallen von je 12 Stunden gemessen wurde.

Das Prinzip der Messung besteht im folgenden: mit der Wasseraufnahme des Films nimmt auch seine elektrische Leitfähigkeit zu. Durch die Messung der Änderung des elektrischen Widerstandes kann somit auch die Quellung des Lackfilms in Wasser verfolgt werden.

Der in Wasser quellende Lackfilm verliert nämlich nicht nur seine hydrophobe Eigenschaft, vielmehr nimmt er auch eine schwammige Struktur an und bildet eine Wärmedämmschicht.

Zur Messung des Widerstandes wurde ein Apparat Typ Oripions verwendet, dessen obere Meßgrenze 10 Megohm beträgt. Die eine Anschlußleitung des Apparates wurde an die zu prüfende Platte angeschlossen, während die Leitung des anderen Pols an ein 100-g-Belastungsgewicht mit 10 cm² Grundfläche von Rundprofil befestigt und der Anschluß mit Hilfe eines in einer 3%igen Natriumchloridlösung getränkten untergelegten Filterpapiers herbeigeführt.

Aus den Zeitdiagrammen, die die Widerstandsänderungen der in der Tafel 1 angeführten Silikonharzlacke zusammenfassen (Abb. 1), geht es deutlich hervor, daß bezüglich der Wasserbeständigkeit *Probe 4, ein Kombinationslack*

Tafel I
Der in den einzelnen Zeitpunkten gemessene Widerstand in Ohm

Nummer der Probe	1 Stunde	12 Stunden	24 Stunden	36 Stunden	48 Stunden	60 Stunden	72 Stunden	84 Stunden	96 Stunden
1	10^7	$4 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
2	10^7	$1,5 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$
3	10^7	$6 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$
4	10^7	10^7	10^7	10^7	10^7	10^7	10^7	$9 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$

aus Methylphenylsilikon und Alkidharz, der geeignetste ist, während Probe 3, die auch tetrafunktionelles Silan enthält, dem Zwecke am wenigsten entspricht.

Der Randwinkel des Silikonüberzugs Nr. 4 betrug beim Eintauchen in das Wasser 110° und stellte sich während der Wässerung in zwei Tagen stufenweise auf 98° ein.

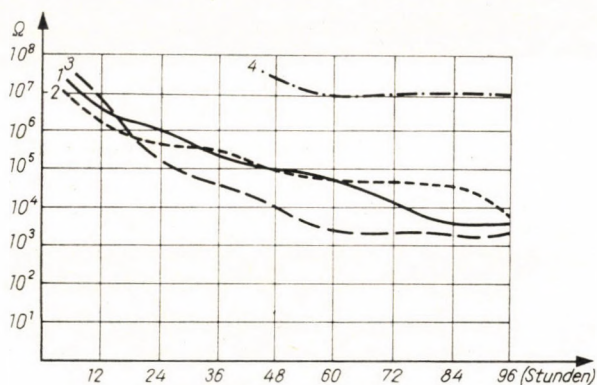


Abb. 1

Die Randwinkelmessungen wurden mit Hilfe eines Gerätes System ADAM—JESSOP [21, 22] durchgeführt. Der Apparat wurde dabei in der Weise modifiziert, daß die Messungen auch bei erniedrigten Drücken durchgeführt werden konnten.

Mit Rücksicht darauf, daß auch die mechanischen Eigenschaften der Probe 4 ausgezeichnet sind, wurde als Überzugslack für die Kondensatorröhren dieser Lack gewählt.

Durchführung der Silikonierung von Kühlrohren und Untersuchung der Dauerhaftigkeit unter Betriebsbedingungen

Bei den Versuchen wurden um die Betriebsverhältnisse je mehr anzunähern, die bei den technischen Dampfkondensatoren üblichen Messingkühlrohre angewendet. Der äußere Durchmesser der Rohre betrug 25 mm, ihre Wanddicke war 1 mm.

Zum Überziehen der Kondensatorrohre mit Silikonlack diente ein mit Gummidichtung — deren Kaliberöffnung dem äußeren Querprofil des Rohres entsprach — an das Rohr gepaßte ringförmige Lackiergefäß und die angeschlossene Schlitten-Zugvorrichtung. Die Lackierung wurde in der Weise durchgeführt, daß das Lackiergefäß am oberen Teil des *vertikal gestellten Rohres* angebracht und mit einem Lack geeigneter Viskosität gefüllt wurde. Das Lackiergefäß wurde dann mit Hilfe der Schlittenvorrichtung mit gleichmäßiger Geschwindigkeit abwärts bewegt. Die Geschwindigkeit des Lackbehälters wurde derart eingestellt, daß kein Nachfluß des Lackes an dem Rohre erfolge. Nach dieser Methode konnte das Rohr in seiner vollen Länge mit einem gleichmäßigen Lacküberzug versehen werden. Anschließend wurde dann der Überzug auf einem elektrisch geheizten Dorn ausgehärtet.

Die derart hergestellten Silikonüberzüge wurden dann unter Annäherung der Betriebsverhältnisse der Dauerhaftigkeitsprüfung unterzogen. Zur Beurteilung der Güte bzw. der Brauchbarkeit der Überzüge wurden zweckmäßigerweise die Wärmeübertragungsverhältnisse der blanken bzw. der mit Silikon hydrophobisierten Oberflächen miteinander verglichen.

Zu den Vorversuchen wurde ein Apparat zusammengestellt, der mit einem vertikal gestellten Kühlrohr von 1 m Länge versehen wurde. Obwohl während des Versuches das Kühlrohr nach unserer Beobachtung keine Einbuße an seinem Wasserabstoßungsvermögen erlitt, zeigte sich in den Wärmeübergangszahlen der beiden Rohre — innerhalb der Meßfehler — kein Unterschied [3].

Da das an den vertikal angeordneten Kühlrohren entlangrieselnde Kondenswasser die durch die Hydrophobie der Kühlflächen bedingten günstigeren Wärmeübertragungsverhältnisse — bei einer Rohrlänge von nur 1 m — nur wenig zur Geltung kommen läßt, wurde für die Zwecke unserer weiteren Versuche eine Vorrichtung mit horizontaler Anordnung zusammengestellt (Abb. 2).

Tafel 2

	Dampf			Kondenswasser		Kühlwasser			$k = \frac{Q}{F \cdot t}$
	Druck, mm Hg	Temperatur t_D °C	Wärmeinhalt kcal/kg	Menge kg	Temperatur t_k °C	Geschwindigkeit m/s	Temperatur °C		
							Eintritt t_1	Austritt t_2	
Unbehandeltes Rohr	30	28,6	609	7,330	17,6	1	12,20	15,10	1440
Rohr mit Silikonüberzug, nach 10 St	27	27,1	609	8,160	22,7	1	12,10	15,26	1790
Rohr mit Silikonüberzug nach 100 St	27	26,3	608,5	7,060	22,5	0,9	13,10	13,05	1790

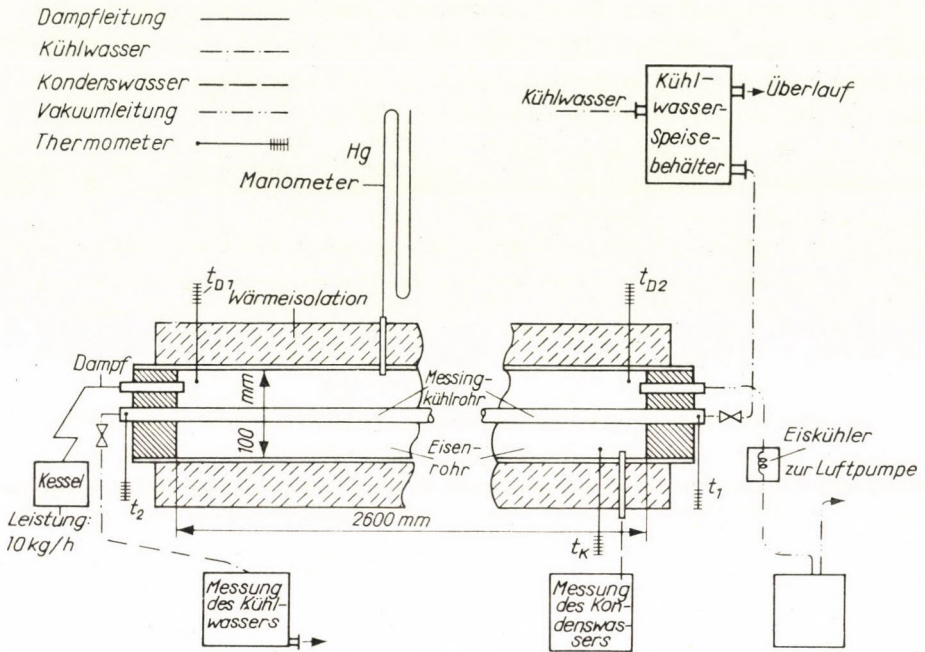


Abb. 2

Bei dem Versuch wurde ein elektrisch geheizter Kessel mit der Dampfleistung von 10 kg/h verwendet. Die vergleichenden Messungen wurden bei einem erniedrigten Dampfdruck von 0,03—0,08 ata durchgeführt. Die Menge des Kühlwassers wurde auf 1500—1600 l/h eingestellt, was einer Strömungsgeschwindigkeit von 0,9—1,0 m/s entspricht.

Die Messungen wurden in einer horizontal angeordneten Vorrichtung von 2,6 m Länge und 0,2 m² Kühlfläche an einem unbehandelten, sodann an einem mit Silikon überzogenen Rohr vorgenommen. Die Meßergebnisse, die nach der 10. und 100. Betriebsstunde erhalten wurden, sind in Tafel 2. zusammengefaßt, deren letzte Kolonne die im Laufe der einzelnen Versuche gemessenen Wärmedurchgangszahlen enthält.

Q stellt den Wärmeinhalt des kondensierten Dampfes in kcal dar;
 $F = \text{Kühlfläche} = 0,2 \text{ m}^2$;

$$\Delta t = t_D - \frac{t_2 - t_1}{2} \text{ } ^\circ\text{C.}$$

Nach unseren Meßergebnissen sicherte das Rohr mit Silikon hydrophobisierter Oberfläche gegenüber dem unbehandelten, noch nach einer Betriebszeit von 100 Stunden, einen 20%igen Vorteil, d. h., die Überzüge blieben bei Beanspruchungen, die den Betriebsverhältnissen nahekamen, unverändert.

Die Zunahme von k (Wärmedurchgangszahl) weist darauf hin, daß auch die Wärmeleitfähigkeit des untersuchten Silikonüberzuges entsprechen dürfte. Gleichwohl können wir unsere Versuche noch nicht als abgeschlossen betrachten, da die spezifischen Werte unserer Laboratoriumsvorrichtung hinter den spezifischen Werten der technischen Kondensatoren ähnlicher Anordnung ziemlich weit zurückblieben, obschon es uns gelang, in einigen Punkten die Betriebsverhältnisse anzunähern. Aus unseren Meßergebnissen kann immerhin über allen Zweifel festgestellt werden, daß durch die Anwendung des Silikonüberzuges nach dem ungarischen Patent Nr. 145.638 [23] die Wärmedurchgangsverhältnisse beträchtlich verbessert werden können.

Der Silikonüberzug der Kondensatorrohre beläuft sich nach unseren präliminären Berechnungen auf etwa 2% der Beschaffungskosten der Messingrohre. Die Kosten des Silikonüberzuges — mit den zu erwartenden Vorteilen — sind somit, bereits nach unseren vorläufigen Meßergebnissen unbedeutend.

Es sei an dieser Stelle unseren Mitarbeitern Oberwerkmeister M. TÓTH, und Laborantin Frau J. PAULIK, unser Dank ausgesprochen für die sorgfältige Zusammenstellung der Apparate und ihre fachgemäße Hilfe bei der Durchführung der Versuche.

SCHRIFTTUM

1. POCKELS, AGNES: Phys. Z. **15**, 39 (1914)
2. SCHMIDT, SCHURIG, SELLSCHOPP: Techn. Mech. Thermodyn. **1**, 53 (1930).
3. GRÖBER, ERK, GRIGULL: Wärmeübertragung. Spinger Verl. Berlin. (1955).
4. HAMPSON: Engineering. **172**, 4464, 221 (1951).
5. SHEA and KRASE: Trans. Amer. Inst. Chem. Engrs. **36**, 463 (1940).
6. EUCKEN: Naturwissenschaft. **25**, 209 (1937).
7. EMMONS: Trans. Amer. Inst. Chem. Engrs. **35**, 109 (1939).
8. FATICA and KATZ: Chem. Engng. Progr. **45**, 661 (1949).
9. DEVAUX: J. Phys. Radium. **6**, 4, 293 (1923).
10. NAGLE, BAYS, BLENDERMAN, DREW: Trans. Amer. Inst. Engr. **31**, 593 (1934).
11. PROSZT, J., LIPOVETZ, I., NAGY, J.: Magy. Kém. Lapja **11**, 347; **12**, 373 (1952)
12. К. А. Андрианов: Кремный органические соединения (1955).
13. К. А. Андрианов: Докл. Акад. Наук. **82**, 6, 909 (1952).
14. MC. GREGOR R. R.: Ind. and Eng. Chem. **46**, 11, 2323 (1954).
15. COOK, G. S.—KENNEDY, P. W.: Canadian Paint and Varnish Mag. **12**, 34 (1951).
16. NASINA, A.—OSTACOLI, C.: L'industria della vernice **5**, 148 (1951).
17. RIEDLE R.: Jahrbuch der Oberflächentechnik **419** (1958).
18. PROSZT, J., BORBÉLY, A., LIPOVETZ, I., NAGY, J.: Magyar szab. **147**. 714. „Eljárás szilikon-alapú hőálló szigetelő és korrózióvédő lakkok előállítására” (Verfahren zur Herstellung von wärme- und korrosionsfesten isolierenden Lacken auf Silikonbasis).
19. MNOSZ 9630—52.
20. MNOSZ 9645—52.
21. ADAM and JESSOP: J. Chem. Soc. 1856 (1925).
22. HARKINS and FOWKES: J. Am. Chem. Soc. **62**. 3377 (1940).
23. PROSZT, J., NYUL, GY., LIPOVETZ, I., HALMOS GY., HALMOS, K.: Magyar szab. 145.638. lajstrsz. „Vizetasztító bevonat hőközlő falakra lecsapódó gőzök hőátadásának növelésére.” (Ung. Patent Nr. 145.638. „Hydrophober Überzug zur Erhöhung der Wärmeübertragung von an wärmeleitenden Wänden kondensierenden Dämpfen.”).

ZUSAMMENFASSUNG

Wie bekannt, gestalten sich die Wärmeübertragungsverhältnisse bei der Kondensation in Tropfenform günstiger als bei der laminaren Kondensation. Zur praktischen Verwirklichung der Kondensation in Tropfenform eignen sich am meisten die Lacküberzüge auf Silikonbasis. Der für die Zwecke des Überzuges geeignete, nicht quellende Silikonlack wurde mit Hilfe von Standardprüfverfahren und auf Grund von Messung der elektrischen Leitfähigkeit und des Randwinkels ausgewählt. Die Brauchbarkeit der mit Silikon überzogenen Rohre wurde in einer die Betriebsverhältnisse annähernden Vorrichtung mit den gleichen, doch nicht hydrophobisierten Rohren verglichen. Durch den Silikonüberzug konnte die Wärmedurchgangszahl um 20% erhöht werden.

TESTS ON STEAM-CONDENSER SURFACES HYDROPHOBIZED WITH SILICONES AND THE INVESTIGATION OF THEIR HEAT TRANSFER CONDITIONS

K. HALMOS, I. LIPOVETZ, J. PROSZT

SUMMARY

It is known that the conditions of heat transfer are more favourable with drop condensation than in film condensation. For the practical realization of drop condensation, silicone-based varnishes are the most suitable. The non-swelling silicone varnish suitable for the coatings was chosen on the base of standard tests, of conductivity measurements and of rim angle measurements. An installation approximating service conditions served to compare cooling tubes covered with silicone to identical, but not hydrophobized tubes. The silicone coating improved the heat transmission coefficient by 20%.

ESSAIS DE PRÉPARATION DE SURFACES DE CONDENSEURS DE VAPEUR HYDROPHOBISÉES PAR SILICONE, ET ÉTUDE DE LEUR TRANSMISSION DE CHALEUR

K. HALMOS, I. LIPOVETZ, J. PROSZT

RÉSUMÉ

Il est connu que les conditions de transmission de chaleur sont plus favorables en cas de condensation par gouttes qu'en cas de condensation par film. Pour la réalisation pratique de la condensation sous forme de goutelettes, les couches de vernis à base de silicone conviennent le mieux. Les vernis à silicone non gonflants, convenant pour ces couches, ont été choisis à la suite d'essais normalisés, d'essais de conductibilité électrique et de mesures de l'angle de raccordement. L'utilité des tuyaux recouverts de silicone a été comparée à celle des tuyaux similaires non hydrophobisés, dans une installation approchant les conditions de service. Le film de silicone a augmenté le coefficient de transmission de chaleur de 20%.

ОПЫТЫ ПО ПОЛУЧЕНИЮ ПАРОКОНДЕНСАТОРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ГИДРОФОБИЗИРОВАННЫХ СИЛИКОНОМ, И ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЭТИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К. ХАЛЬМОШ, И. ЛИПОВЕЦ и Й. ПРОСТ

РЕЗЮМЕ

Как известно, условия теплопередачи более выгодно формируются при капельной конденсации, чем в случае пленчатого осаждения. Для практического осуществления капельной конденсации лучше всего подходят покрытия из лака на силиконовой основе. Ненабухающие силиконовые лаки, пригодные для изготовления покрытий, были выбраны с помощью стандартных испытаний, на основе измерений электрической проводимости и угла кромки. Применимость холодильных трубок, покрытых силиконовым лаком, была сравнена в аппарате, в котором условия приближаются к рабочим, с идентичными, но не гидрофобизированными трубками. Силиконовое покрытие увеличивало коэффициент теплопередачи на 20%.

MEMBRANE SHELLS WITH PERFECTLY FREE EDGES

P. CSONKA

D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY
OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received June 16, 1961]

1. Introduction

The following discussions refer to membrane shells, the edge of which has at least one section not buttressed by any supporting structure (wall, rib). The edge sections not supported at all are to be called *perfectly free edge sections*, contrary to those supported by an edge rib, the latter being called by PELIKÁN J. [1] *free edge sections*.

In the investigations the loads acting on the shell, are assumed as being solely vertical distributed forces. The aim of the considerations is to determine the boundary conditions characterizing the perfectly free edge sections, and to present some examples for which these boundary conditions are satisfied.

The investigations do not extend to the problem of an accidental rippling or buckling of the perfectly free shell-edge. Therefore, conclusions to be drawn from the following discussions can be applied without an extensive investigation of the stability, only for shells of smaller dimensions or affected by smaller loads, as are penthouses, butterfly roofs, etc.

2. Fundamentals

The investigations will be carried out using an orthogonal system of co-ordinates $0(x, y, z)$, the z axis of which is vertical, while its positive branch points downwards.

In this system of co-ordinates the stress state of the shell is characterized by PUCHER's *stress function*

$$F = F(x, y). \quad (1)$$

This function has to satisfy — as is well known — the differential equation

$$f_{xx} F_{yy} - 2f_{xy} F_{xy} + f_{yy} F_{xx} + Z = 0, \quad (2)$$

that is to say, if

$$z = f(x, y) \quad (3)$$

means the ordinates of the shell's middle surface, and

$$Z = Z(x, y) \quad (4)$$

denotes the so-called projective load, *i. e.*, the specific value of the load affecting the shell related to the area of its planar projection.

The stress function $F = F(x, y)$ can be described in the orthogonal system of co-ordinates $0(x, y, z)$ by a surface — the *stress surface*. Knowing this or the stress function, respectively, the so-called *projected membrane forces* of the shell can be computed using formulae:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

3. Boundary conditions of the perfectly free edge

In the following boundary conditions referring to the perfectly free shell-edge will be presented in different formulations.

a) On the perfectly free edge section of the shell no normal or shear force can act, consequently, the specific value of the normal or of the shear force must be zero there. Denoting the normal of the planar projection of the edge line by u and the tangent of the projected edge line by v (Fig. 1), the boundary conditions characterizing the perfectly free edge section can be formulated as follows:

$$n_u = 0, \quad n_{uv} = 0. \quad (6)$$

b) In many cases it might be expedient to express the membrane forces figuring in formulae (6) by the x, y directed projected membrane forces. In this case boundary conditions appear in the following form:

$$\begin{aligned} n_x \cos^2 a + n_y \sin^2 a + 2n_{xy} \cos a \cdot \sin a &= 0, \\ (n_y - n_x) \cos a \cdot \sin a + n_{xy} (\cos^2 a - \sin^2 a) &= 0. \end{aligned}$$

Taking into consideration relations (5), the same conditions can be so formulated:

$$F_{yy} \cos^2 a + F_{xx} \sin^2 a - 2F_{xy} \cos a \cdot \sin a = 0, \quad (7)$$

$$(F_{xx} - F_{yy}) \cos a \cdot \sin a - F_{xy} (\cos^2 a - \sin^2 a) = 0. \quad (8)$$

c) Eliminating F_{xy} from formulae (7) and (8), the boundary condition

$$F_{yy} \cos^2 \alpha - F_{xx} \sin^2 \alpha = 0$$

can be deduced, which, on the other hand, after some transformation can be written in the form

$$\frac{F_{yy}}{F_{xx}} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (9)$$

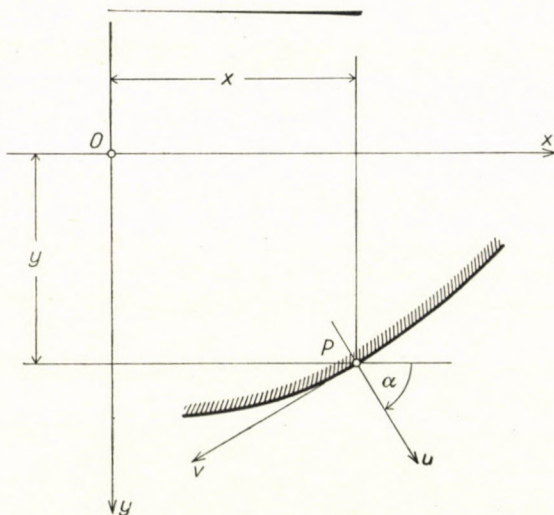


Fig. 1. Planar projection of the edge line

At the same time equation (8) can be brought to the following form:

$$\frac{2F_{xy}}{F_{xx} - F_{yy}} = \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (10)$$

From equations (9) and (10) simple procedures lead to the following relation:

$$F_{xx} \cdot F_{yy} = F_{xy}^2. \quad (11)$$

If, among the latter three conditions two are satisfied at each point of a section of the shell edge, this ensures the perfectly free character of the respective edge section.

d) An investigation of the conditions of equilibrium of the shell portion P_0QP_1 , bordered by the section P_0P_1 of the edge line, conduces to interesting statements concerning the perfectly free shell edge.

First of all the projective equations expressing the existence of the equilibrium should be set up:

$$\left. \begin{aligned} \left[\int n_y dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} + \left[\int n_{xy} dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} &= 0, \\ \left[\int n_x dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} + \left[\int n_{yx} dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Using relations (5) the values of the above figuring terms of integration can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \left[\int n_y dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} &= \left[\int F_{xx} dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} = \left[F_x \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} = F_x(x_0, y_0) - F_x(x_1, y_0); \\ \left[\int n_{xy} dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} &= - \left[\int F_{xy} dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} = - \left[F_x \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} = - F_x(x_1, y_1) + F_x(x_1, y_0); \\ \left[\int n_x dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} &= \left[\int F_{yy} dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} = \left[F_y \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} = F_y(x_1, y_1) - F_y(x_1, y_0); \\ \left[\int n_{yx} dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} &= - \left[\int F_{xy} dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} = - \left[F_y \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} = - F_y(x_0, y_0) + F_y(x_1, y_0). \end{aligned}$$

Replacing the above values into projective equations (12), the following boundary conditions are obtained:

$$\left. \begin{aligned} F_x(x_1, y_1) - F_x(x_0, y_0) &= 0, \\ F_y(x_1, y_1) - F_y(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Thereafter, the *moment equations* expressing the existence of equilibrium referring to the point marked in Fig. 2 by the letter symbol Q , should be set up:

$$\left[\int (y - y_0) n_x dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} - \left[\int (x - x_1) n_y dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} = 0. \quad (14)$$

The values of the two terms of integration figuring here are:

$$\begin{aligned} \left[\int (y - y_0) n_x dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} &= \left[\int (y - y_0) F_{yy} dy \right]_{y_1, y_1}^{x_1, y_1} = \\ &= \left[(y - y_0) F_y \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} - \left[\int F_y dy \right]_{x_1, y_0}^{x_1, y_1} = \\ &= (y_1 - y_0) F_y(x_1, y_1) - F(x_1, y_1) + F(x_1, y_0); \\ - \left[\int (x - x_1) n_y dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} &= - \left[\int (x - x_1) F_{xx} dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} = \\ &= - \left[(x - x_1) F_x \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} + \left[\int F_x dx \right]_{x_1, y_0}^{x_0, y_0} = \\ &= - (x_0 - x_1) F_x(x_0, y_0) + F(x_0, y_0) - F(x_1, y_0). \end{aligned}$$

When the above expressions are replaced into projective equation (14), the following boundary condition is arrived at:

$$(y_1 - y_0) F_y(x_1, y_1) - (x_0 - x_1) F_x(x_0, y_0) - F(x_1, y_1) + F(x_0, y_0) = 0. \quad (15)$$

It is obvious, that equations (13) and (15) must also be satisfied, if they are set

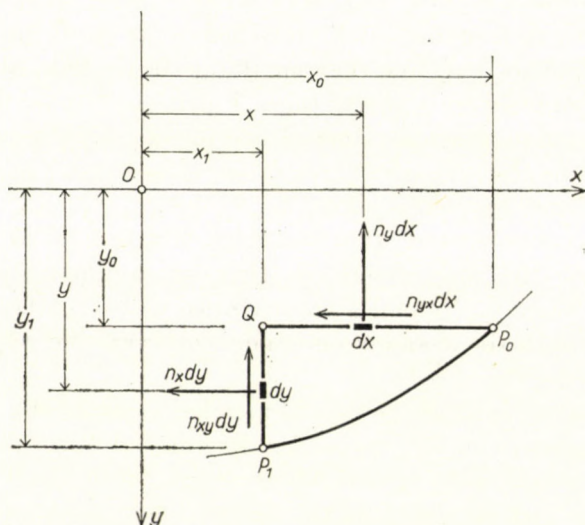


Fig. 2. Part of the shell marked for the purpose of investigation of equilibrium

up instead of referring to the edge section P_0P_1 , for an intermediate section P_0P of the latter. When during this procedure the point $P_0(x_0, y_0)$ is regarded as being a fixed point, $P(x, y)$, on the other hand, as being a running point of the edge section P_0P_1 , the conditions of equilibrium (13) will take the form

$$F_x(x, y) = A, \quad (16)$$

$$F_y(x, y) = B,$$

where

$$A = F_x(x_0, y_0) = \text{const}, \quad (17)$$

$$B = F_y(x_0, y_0) = \text{const}.$$

Proceeding similarly with condition of equilibrium (15), and utilizing (16) and (17), for the points of the edge line the relation

$$F(x, y) = Ax + By + C, \quad (18)$$

is arrived at, where

$$C = -Ax_0 - By_0 + F(x_0, y_0) = \text{const}.$$

When deducing equations (16) and (18) it was assumed that the area P_0QP_1 is a part of the projected area of the shell, *i. e.*, that the broken line P_0QP_1 leading from point P_0 to point P_1 is placed fully and completely within the area of the planar projection of the shell's middle surface. But it can be realized by simple considerations [2], that the deduced formulae are generally valid — independently of the above mentioned assumption.

Boundary conditions (16) and (18) comprise interesting conditions with regards to the *stress surface* that can be attached to the stress function. Namely, equation (18) expresses the fact that on the perfectly free edge section the stress surface is bordered by a *planar curve*. Equations (16) on the other hand, state the fact that along the above mentioned planar curve the gradient of the stress surface equals zero, *i. e.* the stress surface possesses at each point of this planar curve *the same tangential plane*.

It should be pointed out, that condition (18) is implied from the very first in conditions (16), thus, condition (18) does not mean any more than conditions (16). Namely, if along a curve drawn onto a surface, the slope of the surface is in both the x and y directions constant, the respective curved line can be a planar curve only.

e) In formulae (5) of the projected membrane forces the stress function itself does not appear, but only its second derivatives. Accordingly, the stress function can be completed by optional linear terms, or optional linear terms of it can be omitted, without changing the stress state itself characterized by the stress function by these procedures. Consequently, if the shell possesses only one single perfectly free edge section, instead of boundary conditions (16), conditions

$$F_x = 0, F_y = 0,$$

or if it would be convenient, condition

$$F_u = 0 \tag{19}$$

can be written, while boundary condition (18) can be brought to the form

$$F = 0. \tag{20}$$

Thus, in such cases the boundary conditions referring to a perfectly free edge section can be formulated so that along this edge section the value of the stress function and the value of its gradient must equal zero.

f) Points *d)* and *e)* of this paragraph have referred to the determination of boundary conditions to be satisfied by the stress function on a perfectly free edge section. Now, it is to be proved, that the conditions in question are not only the *necessary* but at the same time also the *sufficient* conditions of the perfectly free being of the shell's edge.

To verify this statement a point P_0 on the edge of the shell should be chosen, in the surroundings of which conditions d) and e) are satisfied along the edge line, i. e. the values of the first derivatives of the stress function equal zero. For the simplification of the treatment the centre of the system of co-ordinates is to be put in to this point P_0 so that its x axis should be the tangent of the planar projection of the edge line in point P_0 .

Due to the particular location of the system of co-ordinates, the first derivatives of the stress functions can be expanded in the surroundings of point P_0 into the following Mac-Laurin series:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = F_{10} + \frac{1}{1!} (F_{20}x + F_{11}y) + \\ + \frac{1}{2!} (F_{30}x^2 + 2F_{21}xy + F_{12}y^2) + \dots,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_{01} + \frac{1}{1!} (F_{11}x + F_{02}y) + \\ + \frac{1}{2!} (F_{21}x^2 + 2F_{12}xy + F_{03}y^2) + \dots$$

In these formulae

$$F_{mn} = \frac{\partial^{m+n} F(0, 0)}{\partial x^m \cdot \partial y^n}.$$

The above formulae express the value of the first derivatives of the stress function for an *optional* point $P(x, y)$ situated in the surroundings of point P_0 . Applying these formulae to a point $P(x, y)$ situated on the edge line, and taking into consideration that in compliance with conditions (16) in the case of points lying on the edge line relations

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial x} = F_{10},$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial y} = F_{01}$$

hold, the following relations are arrived at:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1!} (F_{20}x + F_{11}y) + \frac{1}{2!} (F_{30}x^2 + 2F_{21}xy + F_{12}y^2) + \dots = 0, \\ \frac{1}{1!} (F_{11}x + F_{02}y) + \frac{1}{2!} (F_{21}x^2 + 2F_{12}xy + F_{03}y^2) + \dots = 0. \end{aligned} \right\} (20a)$$

In the latter formulae x and y denote the related co-ordinates belonging to the points of the edge line. The relation between these co-ordinates is determined by the equation of the edge line. Due to the particular location of the system of co-ordinates in the surroundings of point P_0 , the relation in question can be expressed by the formula

$$y(x) = 0 + 0 + \frac{y_2}{2!} x^2 + \frac{y_3}{3!} x^3 + \dots, \quad (20b)$$

where

$$y_n = \frac{d^n y(0,0)}{dx^n} = \text{const.}$$

Replacing expression (20b) into expression (20a) and eliminating terms x of a higher power — which for $x \rightarrow 0$ can be made optionally small in comparison to terms x of the first power — the following formulae are arrived at:

$$\frac{1}{1!} F_{20} x = 0, \quad \frac{1}{1!} F_{11} x = 0.$$

According to these formulae at point P_0

$$F_{20} = 0, \quad F_{11} = 0,$$

and so

$$\frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Herefrom, taking into consideration relations (5), conclusions

$$n_y = 0, \quad n_{xy} = 0$$

are to be drawn, these prove, however, that in the case dealt with the edge of the shell does not need any support at point P_0 .

Of course, the above consideration can be repeated with respect to another point of the edge line at which conditions $d)$ and $e)$ are satisfied. This means that the fulfilment of conditions $d)$ and $e)$ is not only *necessary* but at the same time also *sufficient* to assure the perfectly free being of the shell's edge.

4. Circular symmetrically loaded shells of revolution having a perfectly free edge

In the following shells of revolution are to be dealt with, the load and the stress function of which are circularly symmetrical and the edge of which is along the internal edge line $r = r_0 > 0$ perfectly free.

In the case mentioned relations

$$z = f(r), \quad Z = Z(r), \quad F = F(r)$$

hold, and so differential equation (2) of the stress function takes the following simple form:

$$f_r F_{rr} + f_{rr} F_r + Z r = 0. \quad (21)$$

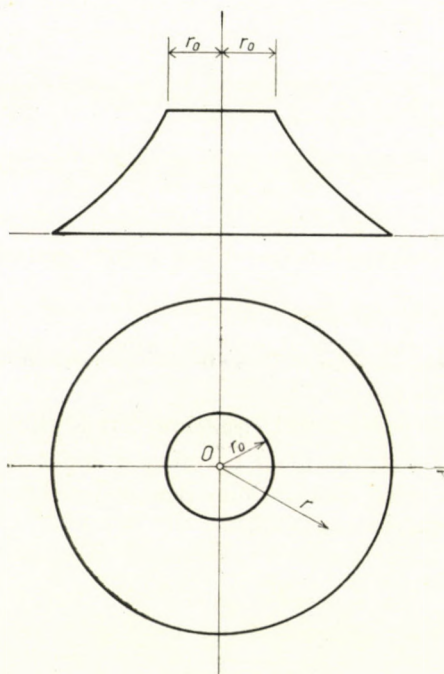


Fig. 3. Shell of revolution perfectly free along its internal edge with the radius $r = r_0 > 0$; the meridian curve of the shell is a logarithmic curve

Considering that along the internal edge the value of F is from the very first constant only the boundary condition

$$F_r = 0$$

has to be satisfied.

a) *The meridian curve of the shell of revolution is a logarithmic curve*

(Fig. 3). The equation of the middle surface of the shell should be

$$z = A \ln r + B, \quad (22)$$

while the load function should have the form

$$Z = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots + c_n r^n. \quad (23)$$

In this case differential equation (21) appears in the form:

$$r F_{rr} - F_r + \frac{1}{A} (c_0 r^3 + c_1 r^4 + c_2 r^5 + \dots + c_n r^{n+3}) = 0. \quad (24)$$

The general solution of the homogeneous differential equation attached to the above differential equation has the form

$$F = ar^2 + b, \quad (25)$$

while one of the particular solutions of the inhomogeneous equation is:

$$F = -\frac{1}{A} \left[\frac{c_0 r^4}{2 \cdot 4} + \frac{c_1 r^5}{3 \cdot 5} + \frac{c_2 r^6}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{c_n r^{n+4}}{(n+2)(n+4)} \right]. \quad (26)$$

The general solution of differential equation (24) is the sum of solutions (25) and (26). Among the constants of integration a and b figuring in the general solution, b as a linear term can be omitted, while the constant a should be determined from boundary condition

$$[F_r]_{r=r_0} = 0.$$

By so doing, the value

$$a = \frac{1}{2A} \left(\frac{c_0 r_0^2}{2} + \frac{c_1 r_0^3}{3} + \frac{c_2 r_0^4}{4} + \dots + \frac{c_n r_0^{n+2}}{n+2} \right) \quad (27)$$

is arrived at.

b) *The meridian curve of the shell of revolution is a parabolic arc (Fig. 4).*

The middle surface of the shell should be characterized by the equation

$$z = f(r) = \frac{A}{2} r^2 + Br + C, \quad A > 0; \quad B > -Ar_0, \quad (28)$$

while the load function should be:

$$Z = 2c_0 + 3c_1 r + 4c_2 r^2 + \dots + (n+2)c_n r^n. \quad (29)$$

In the present case differential equation (21) takes the following simple form:

$$(Ar + B) F_{rr} + AF_r + \frac{1}{B} \left[2c_0 r + 3c_1 r^2 + 4c_2 r^3 + \dots + (n + 2) c_n r^{n+1} \right] = 0. \quad (30)$$

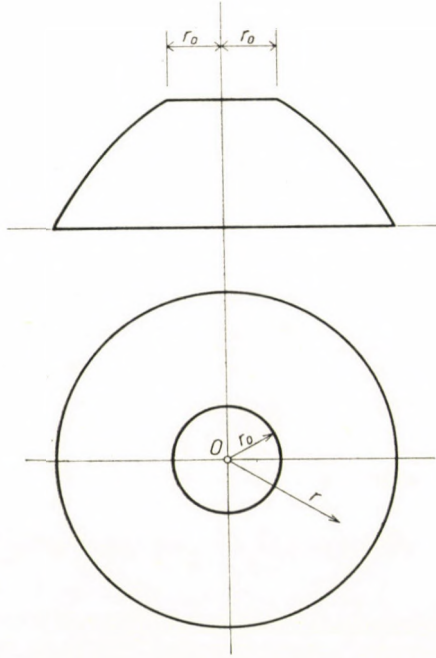


Fig. 4. Shell of revolution perfectly free along its internal edge with the radius $r = r_0 > 0$; the meridian curve of the shell a parabola

The general solution of the homogeneous differential equation attached to the above differential equation has the form

$$F = a \ln (Ar + B) + b, \quad (31)$$

while one of the particular solutions of the inhomogeneous equation is

$$F = -\frac{1}{A} \left(a_0 r + a_1 \frac{r^2}{2} + a_2 \frac{r^3}{3} + \dots + a_{n+1} \frac{r^{n+2}}{n+2} \right). \quad (32)$$

The values of the constants figuring in the latter equation are in turn:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c_n, \\ a_n &= c_{n-1} - \frac{B}{A} a_{n+1}, \\ a_{n-1} &= c_{n-2} - \frac{B}{A} a_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_1 &= c_0 - \frac{B}{A} a_2, \\ a_0 &= -\frac{B}{A} a_1. \end{aligned}$$

The general solution of differential equation (30) is arrived at by summarizing solutions (31) and (32). Among the unknown constants a and b figuring in the so obtained expression, b , being a constant term, can be omitted, while the value of a can be determined from the boundary condition

$$[F_r]_{r=r_0} = 0,$$

and is given by the expression

$$a = \frac{Ar_0 + B}{A^2} (a_0 + a_1 r_0 + a_2 r_0^2 + \dots + a_{n+1} r_0^{n+1}).$$

When the projective load is constant, *i. e.*, if

$$Z = 2 c_0 = \text{const}, \quad (33)$$

the value of the previously mentioned coefficients a_i is the following:

$$a_0 = -\frac{Bc_0}{A}, \quad a_1 = c_0, \quad a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1} = 0,$$

while the value of the constant a is:

$$a = \frac{c_0}{A^3} (A^2 r_0^2 - B^2).$$

And so the stress function of the problem is:

$$F = \frac{c_0}{A^3} (A^2 r_0^2 - B^2) \ln (Ar + B) + \frac{Bc_0 r}{A^2} - \frac{c_0 r^2}{2A}. \quad (34)$$

5. Cylindrical shells with a perfectly free edge

The subjects of the following discussion are cylindrical shells the generating lines of which are parallel to the plane of co-ordinates xz , while their edge is along the edge line

$$x = g(y)$$

perfectly free. This kind of shell can be applied among others for penthouses butterfly roofs etc.

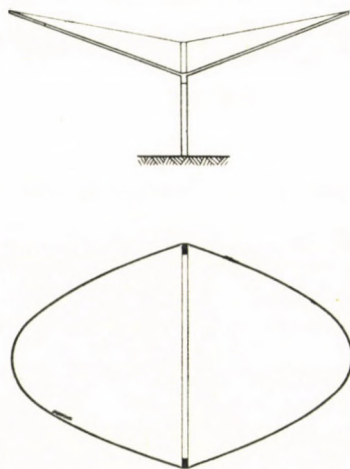


Fig. 5. Butterfly roof having a cylindrical surface the generatrix of which is a parabola; the edge of the shell is perfectly free and bordered by a parabola

As in the case to be dealt with

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 0,$$

differential equation (2) takes the following simple form:

$$f_{yy} F_{xx} + Z = 0. \quad (35)$$

a) *The generatrix of the cylindrical shell is a parabola* (Fig. 5). The equation of the middle surface of the shell should be

$$z = f(x, y) = Ax + \frac{By^2}{2}, \quad (36)$$

while the projective load on the shell should be expressed by the function

$$Z = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n. \quad (37)$$

Replacing the above values into differential equation (35), the latter can be written as follows:

$$B F_{xx} + c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n = 0. \quad (38)$$

The general solution of this differential equation is

$$F = k_1(y) \cdot x + k_2(y) - \frac{1}{2B} (c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n) x^2. \quad (39)$$

Indefinite functions $k_1(y)$, $k_2(y)$ figuring in the above equation can be determined from boundary conditions. First of all boundary condition

$$[F_x]_{x=g(y)} = 0$$

is to be set up. Herefrom

$$k_1(y) = \frac{1}{B} (c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n) g(y).$$

Thereafter function $k_2(y)$ is to be determined with the aid of boundary condition

$$[F]_{x=g(y)} = 0.$$

This conduces to the result

$$k_2(y) = -\frac{1}{2B} (c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n) g^2(y).$$

Putting functions $k_1(y)$ and $k_2(y)$ into (39), the stress function will take the form:

$$F = -\frac{1}{2B} (c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_n y^n) [x - g(y)]^2. \quad (40)$$

It can be verified by a simple trial that this function satisfies at the same time also boundary condition

$$[F_y]_{x=g(y)} = 0.$$

Consequently, the edge line $x = g(y)$ is perfectly free.

In the example shown in Fig. 5 the planar projection of the bordering line of the perfectly free edge is a parabola.

b) *The generatrix of the cylindrical shell is a catenary* (Fig. 6). The middle surface of the shell should be characterized by the equation

$$z = f(y) = \cosh y, \quad (41)$$

and the specific value of the load on the shell related to the surface unit of the middle surface should be

$$p = \text{const.}$$

So, the specific value of the load related to the area of the planar projection is

$$Z = p(1 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} = p(1 + \sinh^2 y)^{\frac{1}{2}} = p \cosh y. \quad (42)$$

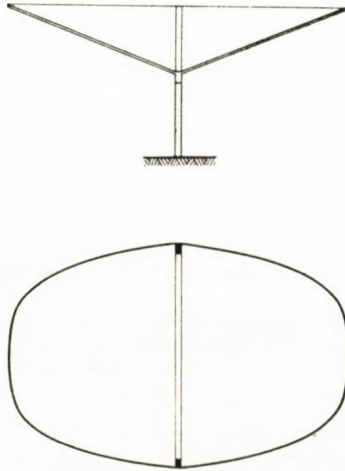


Fig. 6. Butterfly roof having a cylindrical surface the generatrix of which is a catenary, the edge of the shell is perfectly free and bordered by a catenary

Taking into consideration the above statements, in the present case differential equation (35) will take the form

$$F_{xx} + p = 0. \quad (43)$$

The solution of this differential equation satisfying the boundary conditions can be determined in the same way as was shown in a). The result of the calculation is

$$F = -\frac{p}{2} [x - g(y)]^2. \quad (44)$$

In the example presented in Fig. 6 the planar projection of the perfectly free bordering line is a catenary.

REFERENCES

1. PELIKÁN, J.: Tartószerkezetek (in Hungarian) Budapest, 1959. Tankönyvkiadó.
2. CSONKA, P.: On the Annular Edge Beam of Membrane Shells. Acta Technica Ac. Sc. Hung. (1961) Tom. XXXIII, Fasc. 3-4, pp. 413-430.
3. CSONKA, P.: Membrane Shells with Vertically Supported Edge Beams. International Colloquium on Simplified Calculation Methods, Brussels, September 4-6, 1961, Report II/6, pp. 1.-25

SUMMARY

The paper deals with membrane shells the edge of which — or at least a section of it — is not buttressed by any structure (wall, rib). Such an edge section not being supported at all is named in the paper *perfectly free edge section*.

As loads only vertical distributed forces are taken into consideration. The stress state of the shell is characterized by the projected membrane forces and by Pucher's stress function.

The aim of the considerations published in the paper is the determination of the boundary conditions referring to perfectly free edge sections. These conditions are presented in different variations. It is proved that on the perfectly free edge sections the stress surface attached to Pucher's stress function, is bordered by a planar curve, and that the tangential planes of the stress surface at the points of this curve are identical. These conditions are not only the necessary but simultaneously also the sufficient conditions of the perfectly free being of the shell's edge.

The paper presents several examples of shells with perfectly free edges. In these examples the writer deals only with the determination of the stress function without investigating the problem of the danger of buckling. Therefore, these solutions can be applied without an extensive examination of the possibility of buckling, only for smaller structures (penthouses, butterfly roofs, etc.).

MEMBRANSCHALEN MIT EINEM VOLLKOMMEN FREIEN RAND

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der vorliegende Aufsatz befaßt sich mit Membranschalen, deren Rand — bzw. wenigstens irgendein Abschnitt des Randes — durch keinerlei Konstruktion (Wand, Rippe) gestützt ist. Solche Randabschnitte ohne jegliche Stützung werden im Aufsätze *vollkommen freie Randabschnitte* genannt.

Im Aufsätze werden nur vertikal verteilte Lasten in Betracht gezogen. Der Spannungszustand der Schale wird durch die Schnittkraftprojektionen bzw. durch die Puchersche Spannungsfunktion gekennzeichnet.

Der Zweck der Erörterungen ist die Bestimmung der für die vollkommen freien Randabschnitte gültigen Randbedingungen. Diese Bedingungen werden im Beitrage in verschiedenen Variationen vorgeführt. Es wird nachgewiesen, daß an den freien Randabschnitten die Spannungsfläche, die der Pucherschen Spannungsfunktion beigeordnet werden kann, durch eine ebene Kurve begrenzt ist, und daß in den Punkten dieser Kurve die Tangentialebenen der Spannungsfläche gemeinsam sind. Diese Bedingungen sind nicht nur die notwendigen, sondern gleichzeitig auch die hinreichenden Bedingungen für die vollkommene Freiheit des Schalenrandes.

Im Beitrage werden einige Beispiele der Schalen mit freiem Rande vorgeführt. In den Beispielen wird bloß die Spannungsfunktion bestimmt, das Problem der Ausbeulungsgefahr wird nicht untersucht. Aus diesem Grunde sind die beschriebenen Lösungen, ohne eine eingehende Untersuchung der Möglichkeit der Ausbeulung bzw. Knickung, bloß für kleinere Bauwerke (Vordächer, Schmetterlingsdächer usw.) verwendbar.

VOILES MINCES À RIVE SANS APPUI

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'auteur étudie des voiles minces dont la rive, ou du moins une section de rive ne repose sur aucun soutènement (mur, nervure). Une telle section de rive est appelée *section de rive libre* ou *sans appui* par l'auteur.

En tant que charge, l'étude ne considère que des charges réparties verticales. L'état de tension du voile est caractérisé par les forces projetées, c'est-à-dire par la fonction de tension de Pucher.

Dans son étude, l'auteur se propose de déterminer les conditions au contour relatives aux sections de rives sans appui. Ces conditions sont considérées sous différentes formes. L'auteur démontre que, sur la section de rive libre, la surface tensionnelle correspondant à la fonction de tension de Pucher est limitée par une courbe plane, et que dans les points de cette courbe, les plans tangents de la surface tensionnelle sont communs. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour définir les rives libres.

L'étude offre plusieurs exemples de rives sans appui, où l'auteur ne détermine que la fonction de tension du problème, sans considérer le risque de flambage. Ainsi, sans examen approfondi du risque de flambage, les solutions présentées ne sauraient être appliquées qu'en cas de constructions peu importants (avant-toit simple ou à contour brisé, etc. . .).

МЕМБРАННЫЕ ОБОЛОЧКИ С СОВЕРШЕННО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Данная работа занимается такими мембранными оболочками, край которых хотя бы на каком-либо участке не подпирается никакой конструкцией (стеной и т. п.). Такой участок края без какой-либо опоры работа называет совершенно свободным участком края.

В работе в качестве нагрузки учитывается лишь перпендикулярная распределяющаяся нагрузка. Напряженное состояние оболочки характеризуется с помощью проекционных сил и соответственно функций напряжения Пухера.

Целью приводимого в работе анализа является определение граничных условий для совершенно свободных краевых участков. Эти условия трактуются в различной формулировке. Показано, что на совершенно свободных участках края уравнение напряжения, которое можно отнести к функции напряжения Пухера, ограничивается плоской кривой, и в точках этой кривой касательные плоскости поверхности напряжения являются общими. Эти условия являются не только необходимыми, но одновременно и достаточными условиями существования совершенно свободного края оболочки.

В работе излагается ряд примеров оболочек с совершенно свободным краем. В приведенных примерах определяются лишь функции напряжения задачи, опасность же прогиба не анализируется. Поэтому изложенные решения без глубокого анализа возможности прогиба могут быть применены только для небольших сооружений.

TRAVELLING-WAVE AMPLIFIERS FOR MICROWAVE MEASUREMENTS*

T. BERCELI

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received July 15, 1961]

1. Introduction

A problem often met with in microwave measurements is signal amplification. The most suitable means for this purpose is afforded by a travelling-wave measuring amplifier having as principle advantages a very wide transmission band and a considerably high gain.

In this paper, first of all, design considerations of the travelling-wave measuring amplifiers will be dealt with and an account will be given concerning the development of two types of travelling-wave measuring amplifiers. Then, general characteristics of them will be considered and the results of investigations on two particular characteristics, the AM-to-PM conversion and frequency noise will be given. Finally, application fields of measuring amplifiers will be discussed.

The measuring amplifiers were developed at the Microwave Department, Research Institute for Telecommunication, and the travelling-wave tubes used in these amplifiers had been designed by the scientific workers of the Vacuum Tube Laboratory of the same institute.

2. Design considerations

The requirements to be met in a measuring amplifier differ from those which are taken into account when amplifier stages for a microwave radio link are to be designed. The reason for this is that in the case of a measuring amplifier a wide band is of vital importance, while an exact matching is not required because a standing-wave ratio lower than 3 will be satisfactory.

Bandwidth and matching of an amplifier are mainly determined by the applied coupling. Therefore, a few remarks will be made on the choice of the coupling to the travelling-wave tube in a measuring amplifier. Basically, two

* This paper is based on the second part of a lecture on "Microwave Design Problems of Travelling-Wave Amplifiers" held at the "Colloquium on Microwave Communications" in Budapest, November 11, 1959.

types of couplers, namely waveguide or helix couplers can be used. Both of them have their advantages and disadvantages. As compared with a waveguide coupler, the helix coupler has the advantage of having a very wide transmission band, hence it requires no retuning when the frequency is changed. Another advantage is that its dimensions are small so that thin cables can be used for microwave power transmission. Accordingly, the transmission lines to the input and output couplers of the travelling-wave tube do not take up much space, which is particularly favourable when permanent magnets are used. However, one disadvantage of helix couplers is that standing-wave ratio and losses in them are rather high.

With these points in mind travelling-wave tubes, type HO1 and HO2 have been chosen to be used in the measuring amplifiers. The coupling of these tubes is achieved by helix couplers. The use of helix couplers makes it possible to take full advantage of the great inner bandwidth offered by a travelling-wave tube. In this way the measuring amplifiers can be used over a very wide band without any readjustment.

Another requirement in designing measuring amplifiers is to have an instrument the operation of which is independent of mains fluctuations. Therefore, stabilized supply voltages are needed. Also, the instrument must be provided with automatic circuits to protect the travelling-wave tube. Finally, the instrument must be portable.

3. Construction of the measuring amplifiers

The measuring amplifiers were mounted in portable cases. Fig. 1 shows their front views. The signal to be amplified is applied to a coaxial input connector on the front panel, and the amplified signal appears on the coaxial output connector which is placed above the input connector. In addition, control knobs for adjustments of the measuring amplifier and a meter measuring the electrode currents of the travelling-wave tube are mounted on this panel. Adjustment of the measuring amplifiers is achieved by adjusting the required collector current with the knobs that control the voltage of the accelerating anode and by obtaining a maximum output with the control knobs of the helix voltage.

a) *Measuring amplifier for the 1500—3000 Mc/s band*

The measuring amplifier gives an output power of at least 1 W and at the same time a gain of at least 25 dB over the entire band. With lower output levels the gain is higher. Standing-wave ratio at the input and output connectors is below 3. In this measuring amplifier a travelling-wave tube type HO1 is used.

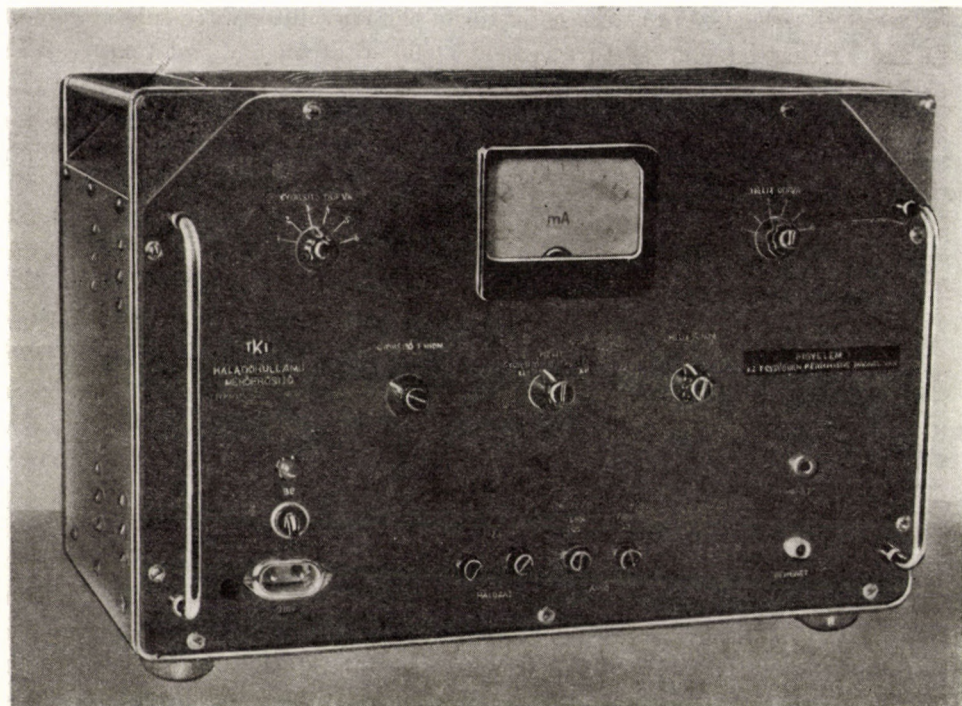


Fig. 1. Front view of a measuring amplifier

A voltage of about 1000 V for the helix and collector electrodes of the travelling-wave tube is supplied by a common stabilizing stage. The voltages of the two electrodes are controlled together, in such a way as to have a collector voltage 150 V higher than helix voltage. This is necessary in order to prevent secondary electrons emitted by the collector, from entering the helix space. A voltage of about 500 V for the accelerating anode of the travelling wave tube is furnished by a separate stabilizing stage, which can be controlled independently of the voltages already mentioned.

Focussing of the electron beam requires a magnetic field strength of 700 oersteds, which is produced by an electromagnet. The coil of this magnet is made of copper wire with a heat-resistant silicone insulation. Operating temperature inside the coil is 150° C. Outside, the electromagnet is covered by a soft-iron screen to minimize leakage. On both sides of the electromagnet three adjusting screws are placed at 120° to each other, by means of which the travelling-wave tube can be adjusted and fixed in the desired position in the magnet.

After the measuring amplifier has been switched on, high voltage is applied by a delay circuit with a delay time of 1.5 min., primarily to protect the travelling-wave tube. The protecting circuit switches off the high voltage if

helix current exceeds 3 mA. The collector of the travelling-wave tube is cooled by a fan so that its temperature is kept at 80° C at an ambient temperature of 20° C and a power dissipation of 25 W.

The travelling-wave tube type HO1 used in this amplifier is a long-life tube. This is achieved by using a so-called dispenser cathode which has a high resistance to ion bombardment.

b) Measuring amplifier for the 3000—4500 Mc/s band

This measuring amplifier gives an output power of at least 1 W and at the same time a gain of at least 25 dB over the entire band. With lower output levels its gain is higher. Standing-wave ratio at the input and output connectors is below 3. In this measuring amplifier a travelling-wave tube type HO2 is used.

The direct-current adjustment of the travelling-wave tube type HO2 was made in such a way as to have the maximum voltage on the accelerating anode, the helix voltage being lower. In this way a so-called ion trap is formed between accelerating anode and helix. Ions produced by the high-velocity electron beam inside the helix cannot, therefore, reach the cathode, which results in a considerably longer cathode life time. Besides, the voltage on the collector is essentially lower than that on the helix. Hereby, direct-current efficiency of the tube is considerably improved and collector dissipation is decreased, which is advantageous from the point of view of cooling. At the same time the cavity-like form of the collector prevents secondary electrons from leaving the collector space.

A high-voltage power supply provides means for achieving the above-described direct-current adjustment. Collector voltage is neither stabilized, nor efficiently filtered as it does not affect interaction between the electron beam and high-frequency field. Voltages to accelerating anode and helix are supplied by a common, high-stability power supply. However, the two voltages can be controlled separately. The circuits are designed in such a way that the voltages having been adjusted to any desired value, the voltage on the accelerating anode is always higher than that on the helix, and the formation of an ion trap is thus ensured always.

The electron beam is focussed by a permanent magnet, which consists of AlNiCo-5 magnet bars and produces a magnetic field intensity of 550 oersteds along a length of 210 mm. Focussing of the beam requires a homogeneous axial magnetic field. Our experiments have shown that in the vicinity of the axis the radial magnetic field component along the length of 210 mm should not exceed a maximum value of 3 oersteds. To meet this requirement a series of homogenizing disks is placed in the magnet. The magnet has a considerably strong outer stray field. Therefore it is forbidden to approach iron objects of large dimensions to the measuring amplifier. On both ends of the magnet

there is an adjusting device, by means of which the travelling-wave tube can be adjusted and fixed to the desired position in the magnet.

Primarily to protect the travelling-wave tube, a delay circuit is provided which applies high voltage to the tube with a delay time of 1.5 min. after the measuring amplifier has been switched on. In the case when the helix current exceeds 2.5 mA or cooling fails, the high voltage is switched off by the protecting circuits. The collector of the travelling-wave tube is cooled by a fan which keeps its temperature at 100° C at an ambient temperature of 20° C and a power dissipation of 70 W.

The travelling-wave tube used in this amplifier has a long life. This is due to the use of the ion trap, by means of which the ion bombardment of the cathode is decreased.

4. General characteristics

An essential characteristic is the relation between input and output powers. The dependence of the measuring-amplifier output power on input power is shown in Fig. 2. A typical feature of travelling-wave amplifiers is

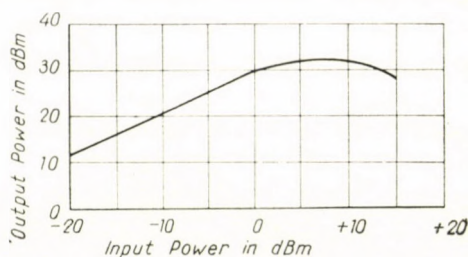


Fig. 2. Output power as a function of input power

that linearity between output and input powers is achieved only at low levels. At higher levels this relation is no longer linear as is seen in Fig. 2. When input power is increased, output power increases ever slower and slower and finally it attains a level above which it cannot be increased whatsoever high input power be applied. Thus, a saturation value is obtained.

When measurements are made these circumstances must be taken into account, *i. e.* one must bear in mind that linearity is only obtained at a low input. With higher inputs the signal measured at the output of the measuring amplifier must be taken as a reference level.

An advantageous property of the travelling-wave amplifier is that it acts as an efficient buffer between the units connected to its input and output, because it has an attenuation of 50–70 dB in the direction opposite to that of amplification.

The gain of a travelling-wave amplifier depends on the beam current. For this reason gain is controllable by altering the accelerating voltage (or beam forming voltage). With an appropriate AGC circuit, therefore, output level can be kept at a constant value.

When using a travelling-wave amplifier microwave signals can be amplified and modulated simultaneously. By changing the accelerating voltage (or beam forming voltage) amplitude modulation, and by altering the helix voltage phase modulation is achieved.

5. AM-to-PM conversion

When an amplitude modulated signal is amplified, a slight phase modulation takes place in the measuring amplifier. This is due to the fact that a change in the amplitude of the input signal gives rise to a change in the phase of the output signal. This phenomenon is called AM-to-PM conversion.

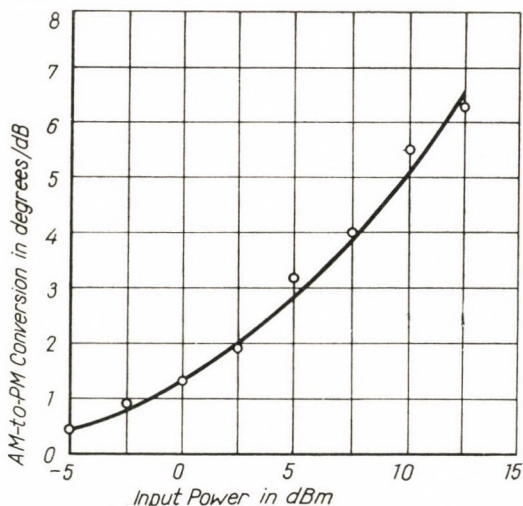


Fig. 3. AM-to-PM conversion as a function of input power

AM-to-PM conversion was investigated by intermodulation measurements. Two signals were applied to the amplifier input simultaneously. These two signals had a level difference of 30 dB and a frequency difference of 100 Mc/s. Owing to the AM-to-PM conversion three signals were obtained at the output. Knowing their levels AM-to-PM conversion is given by

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta P} = 13.2 \left[S_1^2 - \frac{1}{4} (1 + S_1^2 - S_2^2)^2 \right]^{1/2} \text{ degrees/dB}$$

where S_1 is the relative amplitude at the output of the signal which was at a

level 30 dB lower, and S_2 is the relative amplitude of the new signal obtained at the output.

The results of the AM-to-PM conversion measurements are shown in Fig. 3. Measurements were made with the measuring amplifier operating in the 3000—4500 Mc/s band. Fig. 3 shows that AM-to-PM conversion factor depends on the input level applied to the amplifier.

6. Frequency noise

Frequency noise measurements of the measuring amplifiers were made in an arrangement shown in Fig. 4. From the oscillator a signal at 3600 Mc/s and at a level of a few mW was applied to the input of the measuring amplifier.

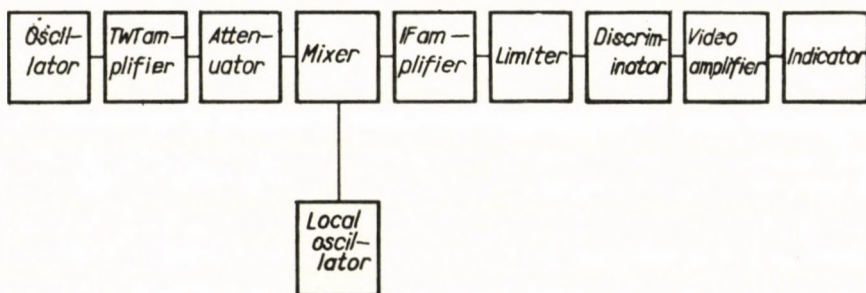


Fig. 4. Block diagram of an arrangement for measuring frequency noise

The signal at the output of the amplifier was at a level of 1 W and was applied using an appropriate attenuation to a mixer, from which — after this signal having been mixed with the signal of the local oscillator — a 70 Mc/s signal was obtained. This signal was amplified in an IF stage of a ± 10 Mc/s bandwidth, and applied through a limiter to the frequency discriminator. The video-frequency signal was amplified and passed to the indicator. The indicator consisted of a high-sensitivity quadratic vacuum-tube voltmeter (a visometer made in the Research Institute for Telecommunication) having a basic sensitivity of $30 \mu\text{V}$ over the band from 10 kc/s to 6 Mc/s.

Frequency noise of the measuring amplifier was measured as follows. First, the amplifier was not inserted into the arrangement and thus noise of the measuring arrangement was measured. Then the amplifier was inserted and the level at the mixer input was adjusted, by means of the attenuator, to the previously obtained value. Noise level was measured again, and from the two measured data the frequency noise of the measuring amplifier was calculated.

According to our experiences measuring amplifiers can be adjusted to a minimum noise from the point of view of the concerned frequency noise. For

doing this, primarily the position of the travelling-wave tube in the magnet must be changed. A further improvement in noise can be achieved by an appropriate adjustment of the beam forming and helix voltages. Moreover, it was observed that ageing of the travelling-wave tubes yields a considerable decrease in noise in the first period of the ageing process.

After the noise had been minimized according to the foregoing, frequency noise of the measuring amplifier for the 3000—4500 Mc/s band was measured and an effective frequency deviation of max. 1 kc/s was obtained. Therefore, frequency noise is so low that in most cases it does not disturb measurements.

7. Application fields

Travelling-wave measuring amplifiers can favourably be used in many fields of microwave measurements, principally in cases when power amplification is required. Such fields of application are: attenuator measurements, investigations on the stop ranges of filters, antenna measurements, small-signal frequency measurements, directivity measurements on directional couplers, leakage measurements on switches, etc.

Measuring amplifiers can also be used for level control as they have regulable gains. Level control by a travelling-wave amplifier has the advantage of being accompanied by amplification, the instrument has a wide transmission band and is capable of compensating fast changes, *i. e.* high control frequencies (several Mc/s) can be attained. When a measuring amplifier is used for level control its large bandwidth makes at the same time the performance for example of level amplification of wideband microwave wobblers and of stabilization of their output level possible. It should be noted, however, that the developed types of measuring amplifiers can only be used for level control when appropriate AGC circuits are added.

Measuring amplifiers can be used to modulate microwave measuring signals; either amplitude or phase modulation can be achieved. In these cases, however, the measuring amplifiers should be supplemented by adding a suitable outer driving stage.

When measurements are to be performed with measuring amplifiers, the fact should be taken into account that the inner conductors of the input and output connectors in the measuring amplifier have no metal-to-metal contact with the outer conductors, as helix couplers are used on the travelling-wave tube for energy coupling. Therefore, when measurements are performed using a coaxial crystal holder, special provision must be made for closing the direct current circuit of the crystal.

It is worth mentioning that in measurements, when one intends to amplify a narrow-band signal by a travelling-wave measuring amplifier having a very broad transmission band, and the indicator, too, has a very

broad band (for example it is a coaxial power-meter with a thermistor) it can be advisable to restrict the transmission band by inserting other circuit elements such as a microwave cavity for lowering the noise level on the indicator.

To sum up, travelling-wave measuring amplifiers are important units in microwave instrumentation and they belong to the accessories required in all microwave laboratories.

REFERENCES

1. LACY, P. D.: Helix Coupled Traveling-Wave Tube. *Electronics*, November 1954, pp. 132—135
2. LAICO, J. P., MCDOWELL, H. L., MOSTER, C. R.: A Medium Power Traveling-Wave Tube for 6000-Mc Radio Relay. *Bell System Technical Journal*, November 1956, pp. 1285—1346.
3. VALKÓ, I. P., GÁL, J.: Haladóhullámú csövek. (Travelling-Wave Tubes) *Magyar Híradástechnika*, 1959, No. 4, pp. 138—142.

SUMMARY

In this paper, first of all, design considerations for the travelling-wave measuring amplifiers are dealt with and an account is given which concerns the development of two types of travelling-wave measuring amplifiers. Then, general characteristics of the measuring amplifiers and the investigations of two particular characteristics, the AM-to-PM conversion and frequency noise are discussed. Finally, application fields for measuring amplifiers are given.

WANDERFELDVERSTÄRKER FÜR MIKROWELLEN-MESSUNGEN

T. BERCELI

ZUSAMMENFASSUNG

Einleitend werden die Konstruktionsprinzipien der Wanderfeld-Meßverstärker behandelt, und dann einige Einzelheiten über die Entwicklung von zwei Typen der Wanderfeld-Meßverstärker gegeben. Nach einer Betrachtung über die allgemeinen Kennzeichen der Meßverstärker folgt die Untersuchung von zwei speziellen Kenndaten, der AM—PM Konversion und des Frequenzrausches. Schließlich wird eine Darlegung der Anwendungsgebiete von Meßverstärker gegeben.

AMPLIFICATEURS À ONDE PROGRESSIVE POUR MESURES AUX HYPERFRÉQUENCES

T. BERCELI

RÉSUMÉ

L'article examine d'abord les problèmes des amplificateurs de mesure à onde progressive, puis relate les étapes du développement de deux types d'amplificateurs de mesure à onde progressive. Par la suite, l'auteur examine les caractéristiques générales des amplificateurs de mesure, et étudie deux caractéristiques spéciales: la conversion MA—MP et le bruit de fréquence. Il fait connaître enfin les champs d'application des amplificateurs de mesure.

УСИЛИТЕЛИ С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ ДЛЯ МИКРОВОЛНОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Т. БЕРЦЕЛИ

РЕЗЮМЕ

В данной статье сначала рассматриваются принципы проектирования усилителей бегущей волны, после чего описывается разработка двух типов измерительных усилителей бегущей волны. Затем рассматриваются общие характеристики измерительных усилителей, далее исследование двух специальных показателей: преобразования АМ—РМ и частотного-шума. Наконец, рассматриваются области применения измерительных усилителей.

NEUES SYSTEM HOHER PRÄZISION ZUR ZEITLICH AUFGELÖSTEN SPEKTROSKOPIE

Á. BARDÓCZ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST, LEHRSTUHL FÜR FEINMECHANIK UND OPTIK

[Eingegangen am 2. August 1961]

Einleitung

Die Untersuchung des von transienten elektrischen Entladungen ausgestrahlten Lichtes ist nur so ausführbar, wenn man die zeitliche Änderung des Lichtes verfolgt. Unter transienten elektrischen Entladungen sind solche zu verstehen, deren Stromstärke sich zeitlich bedeutend ändert. Eine solche Entladung ist der elektrische Funke, aber eine transiente Entladung ist z. B. auch der Wechselstrom-Abreißbogen. In elektrischen Funken fällt die Anregungsenergie von einem Höchstwert bis auf Null und kann inzwischen alle möglichen Werte annehmen, dementsprechend wird sich in Funken die Temperatur, d. h. die Anregungsenergie, ändern und diesen Änderungen folgend auch das ausgestrahlte Licht. Solche Funkenspektren, welche über diese zeitlichen Änderungen keinen Aufschluß geben, haben physikalisch nur einen begrenzten Wert und geben die in Funken verlaufenden Vorgänge nur begrenzt wieder. Dies bezieht sich natürlich auch auf die vom Funken abweichenden allen transienten Entladungen.

In den vergangenen Jahrzehnten wurde die Klärung der in den transienten Entladungen verlaufenden spektroskopischen Vorgänge oft versucht. Der Ausführung traten aber hauptsächlich technische Hindernisse entgegen. Um dies zu verstehen, muß man wissen, daß die Zeitdauer einer transienten Entladung insgesamt einige Mikrosekunden oder noch kürzer sein kann, und binnen einer Mikrosekunde können im Funkenkanal schon sehr große Änderungen verlaufen. Aus diesem Grunde ist eine zeitliche Auflösung von mindestens 1 Mikrosekunde oder noch weniger nötig, außerdem müssen die Entladung, die zeitliche Auflösung und auch die Beobachtung synchronisiert werden. Hinsichtlich der Synchronisierung ist es nicht indifferent, ob von solchen einzelnen Entladungen hoher Energie die Rede ist, deren Lichtertrag allein zur Herstellung eines Spektrums genügt, oder von solchen Entladungen verhältnismäßig niedriger Energie ein zeitlich aufgelöstes Spektrum herzustellen ist, von welchen mehrere Hundert, oder mehrere Tausend aufeinander photographiert werden müssen, um ein brauchbares Spektrum zu erhalten. Entladungen letzterer Art sind hauptsächlich zur Herstellung von Linienspektren notwendig.

Zeitlich aufgelöste Spektren können mit drehendem, spiegelndem Drehprisma, Drehspiegel, rotierender Scheibe, laufendem Film, Kerr-Zelle, Kathodenstrahlenrohr, oder Registriervorrichtung hergestellt werden. Jedes Verfahren hat seine eigenen Vor- und Nachteile. In der Tabelle I sind die zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren verwendeten Geräte und ihre kennzeichnenden Eigenschaften zusammengefaßt.

Zu den ersten erfolgreichen Versuchen zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren gehören die von SMITH [1] und von ANDERSON und SMITH [2] ausgeführten. Das Wesentliche ihrer Anordnung ist ein rotierendes Prisma, dessen spiegelnde Flächen so eingestellt sind, daß das Lichtbündel nach Durchlaufen des Spektrographen und Zerlegung nach Wellenlängen auf die Seitenflächen des rotierenden Prismas fällt, welche das Licht auf die fokale Fläche des Apparates projizieren. Der zur Aufnahme des Spektrums dienende photographische Film ist auf einem Viertelkreis der fokalen Fläche des Spektrographen angebracht. Die von ANDERSON [32] neuestens benützte Vorrichtung weicht von der obigen insofern ab, daß das in der fokalen Fläche des Spektrographen erscheinende Spektrum, mittels Linse und rotierendem Prisma zeitlich aufgelöst, an einem auf einem Viertelkreis angebrachten Film wieder abgebildet wird. Bei diesen Vorrichtungen ist die Synchronisierung der Funkenentladung und des prismatischen Drehspiegels unnötig. Wenn nämlich das von einer Spiegelfläche reflektierte Licht nicht auf den Film fällt, erscheint auf dem Film das von der nächsten Prismafläche reflektierte Licht. Es entsteht somit auf dem Film bei jeder Stellung des Prismas ein Bild. Das Wesentliche ähnlicher Einrichtungen besteht darin, daß ohne Anwendung einer besonderen Vorrichtung zur Synchronisierung, mittels eines vielseitigen prismatischen Spiegels, von einer verhältnismäßig kurz andauernden Funkenentladung auf dem photographischen Film stets ein zeitlich aufgelöstes Spektrum erscheint. Ein ähnliches Gerät benützte RIMBERT [3] zum Studium zeitlich aufgelöster Spektren von sehr langen Funken.

Das vorangehend beschriebene Verfahren eignet sich zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren solcher Funkenentladungen hoher Energie, wo eine einzige Entladung zur Herstellung des Spektrums genügt. Eine Überlagerung mehrerer zeitlich aufgelöster Spektren ist wegen Mangel an Synchronisierung des Systems unmöglich. Zur Ausübung des Verfahrens ist eine Lichtquelle hoher Anlaßgenauigkeit nicht nötig, jedoch ein Spektrograph besonderen Aufbaus. Der Vorteil der photographischen Schicht zur Wahrnehmung eines Spektrums ist, daß diese das Spektrum eines größeren Wellenlängengebietes auf einmal annimmt. Die übrigen Eigenheiten der drehprismatischen und anderer zeitauflösender Vorrichtungen sind in Tabelle I zusammengefaßt.

Der Drehspiegel ist das am verbreitetsten verwendete Gerät zur Herstellung zeitlich aufgelöster Spektren. VAN CALKER verwendet statt des Dreh-

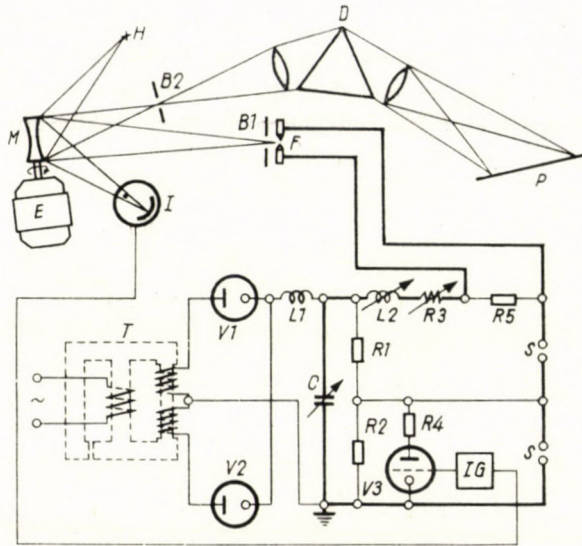


Abb. 1

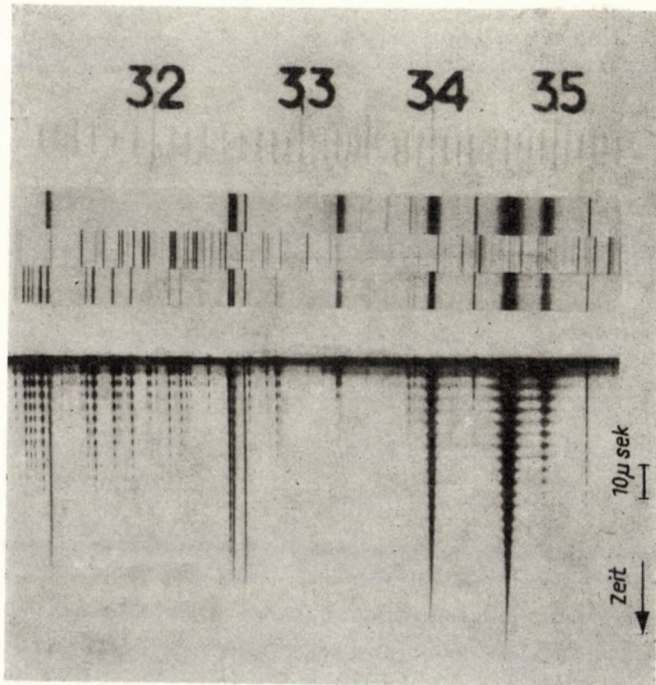


Abb. 2

spiegels ein total reflektierendes rotierendes Prisma [10]. Die optische Anordnung ist die laut Abbildung 1, 3, 4 und 6. Bei kontinuierlicher Zeitauflösung wird das zeitlich aufgelöste Bild der Lichtquelle auf den Spalt des Spektrographen, mit diesem parallel abgebildet, wodurch auf der fokalen Ebene des Spektrographen das zeitlich aufgelöste Spektrum erscheint. Der Drehspiegel ist zur Herstellung von zeitlich aufgelöstem Spektrum einer ein-

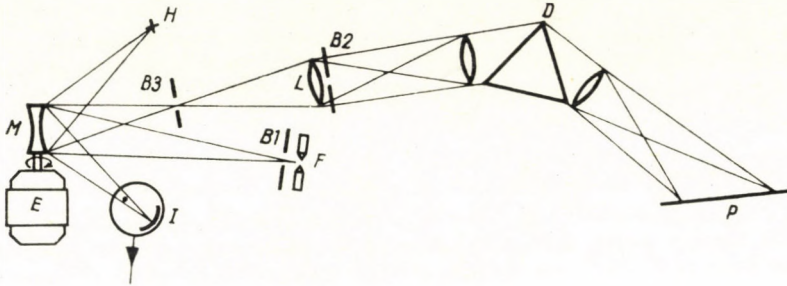


Abb. 3

zigen Entladung hoher Energie [4—7] wie auch zur Überlagerung des Spektrums vieler Entladungen niedriger Energie geeignet. Im letzteren Fall wird ein Funkenerzeuger hoher Präzision benötigt. Ist eine kontinuierliche Zeitauflösung erwünscht, und wird zur Aufnahme des Spektrums ein Film verwendet, so ist ein stigmatischer Spektrograph notwendig, zur periodischen Zeitauf-

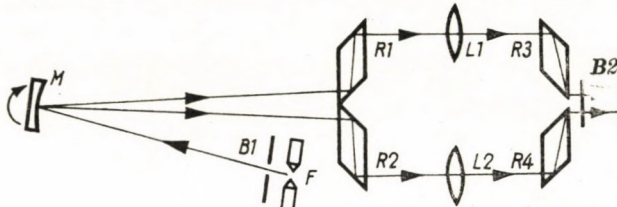


Abb. 4

lösung genügt ein astigmatischer Spektrograph. Die Synchronisierung kann mechanisch [7, 8], oder photoelektrisch erfolgen [4—9]. Bei mechanischer Synchronisierung ist die Betriebsgenauigkeit und die Zeitauflösung begrenzt. Wenn viele zeitlich aufgelöste Spektren überlagert werden sollen, ist eine große Genauigkeit notwendig. Zu einer angegebenen Zeitauflösung muß die zeitliche Betriebsgenauigkeit ein Zehntel oder weniger der gewünschten Zeitauflösung sein. Bei der Untersuchung einer einzigen Entladung genügt eine solche Betriebsgenauigkeit, daß das Bild des zeitlich auseinandergezogenen Funkens noch auf den Spalt des Spektrographen falle. Die Wahrnehmung des Spektrums kann mit einer photographischen Platte oder Photozelle erfolgen.

Das gleichzeitig wahrnehmbare Spektralgebiet ist unbegrenzt. Manchmal gibt der Drehspiegel eine zu große Auflösung, in solchen Fällen kann die Drehscheibe verwendet werden. Eine verminderte Anforderung betreffs zeitlicher Auflösung bringt natürlich eine Verminderung der Anforderung die Synchronisation betreffend mit sich.

Eine in dem Lichtweg angebrachte und unmittelbar vor dem Spalt des Spektrographen mit Einschnitten versehene, rotierende Scheibe, wurde bisher zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren verwendet [11, 12]. Wenn die Öffnung der Scheibe mit dem Spalt des Spektrographen parallel ist, kann das aus einzelnen Zeitabschnitten kommende Licht abgeschattet werden. Wenn die Öffnung der Scheibe mit dem Spalt des Spektrographen einen Winkel einschließt, ist sie zur kontinuierlichen Zeitauflösung geeignet. Die kennzeichnenden Eigenheiten der Zeitauflösung mit der Drehscheibe betreffend, weisen wir auf die Tabelle I.

Ein in der fokalen Ebene laufender Film ist auch zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren geeignet [13]. Diese Methode ist nur zur Wahrnehmung einer einzigen Entladung verhältnismäßig hoher Energie geeignet. Es kann ein beliebiges Anregungsgerät verwendet werden, wenn das zeitlich aufgelöste Spektrum von eng nacheinander folgenden Entladungen photographiert werden soll, weil man in diesem Falle während der Entladungen ohne jegliche Synchronisierung den Film laufen läßt. Zu großer Zeitauflösung ist eine große Filmgeschwindigkeit notwendig. Mit gutem Leistungsgrad ist nur ein stigmatischer Spektrograph brauchbar. Das gleichzeitig wahrnehmbare Spektralgebiet ist durch die Filmbreite bzw. Krümmung der fokalen Fläche des Spektrographen gegeben.

Die Kerr-Zelle wurde in vielen Fällen zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren verwendet [14, 15]. Der prinzipiellen Wirkungsweise entsprechend ist diese nur zur Wahrnehmung von aus einzelnen Zeitabschnitten stammendem Licht geeignet. Es kann jedes beliebige Anregungsgerät verwendet werden, weil die Betätigung der Zelle mit der Entladung erfolgen kann. Jeder Spektrograph ist geeignet, aber die gleichzeitig wahrnehmbaren Spektralgebiete sind mit der Durchlässigkeit der Zelle gegeben. Demzufolge ist sie im ultravioletten Spektralgebiet nicht brauchbar.

Zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren ist auch das Oszilloskop und die Registriervorrichtung brauchbar. Bei diesem Verfahren ist das Spektrum wahrnehmende Element immer eine Photozelle. Diese Methode beschrieben CROSSWHITE, STEINHAUS und DIEKE [16] und STEINHAUS, CROSSWHITE und DIEKE [17, 18], dann TSUI-FANG, CUNDALL und CRAGGS [19]. Bei der Anwendung eines Oszilloskops wird der Strom der das Spektrum wahrnehmenden Photozelle auf das senkrechte Plattenpaar geschaltet, der Kathodenstrahl in der Zeitachse auseinander gezogen, und so kann die sich in dem Funken zeitlich abspielende Lichtausstrahlung beobachtet werden. Die außer-

Tabelle I

Die zur Herstellung von zeitlich aufgelösten

Das zeitauflösende Element	Art der zeitlich aufzulösenden Entladung	Art des erwünschten Anregers	Synchronisierung	Synchronisierungsmittel
Spiegelndes Drehprisma	Einzige Entladung hoher Energie	Beliebig	Unnötig	Unnötig
Drehspiegel	Einzige Entladung hoher Energie	Hohe Präzision	Nötig	Mechanischer Schalter Photozelle
	Viele Entladungen geringer Energie			Photozelle
Drehscheibe	Einzige Entladung hoher Energie	Hohe Präzision	Nötig	Mechanischer Schalter Photozelle
	Viele Entladungen geringer Energie			Photozelle
Laufender Film	Einzige Entladung hoher Energie	Beliebig	Quasi-Synchronisierung	Mechanisch
Kerr-Zelle	Einzige Entladung hoher Energie	Beliebig	Nötig	Elektrisches Signal
	Viele Entladungen geringer Energie			
Oszilloskop oder Registriervorrichtung	Einzige Entladung hoher Energie	Beliebig	Nötig	Elektrisches Signal
	Viele Entladungen geringer Energie			

ordentliche Beschränktheit dieser Methode besteht darin, daß sie nur das Spektrum von einem einzigen, schmalen, einer vor der empfangenden Photozelle angebrachten sekundären Spaltbreite entsprechenden Spektralgebiet gibt. Auf diese Weise ist sie nur zur Wahrnehmung einer einzigen sehr dünnen Spektrallinie geeignet. Zur Wahrnehmung von breiten Spektrallinien oder Banden muß man die Linie zeitlich an mehreren Stellen abtasten. Bei Anwendung einer Registriervorrichtung kann in Richtung der Dispersion das in einem Zeitabschnitt ausgestrahlte Licht in der ganzen Länge des Spektrums wahrgenommen werden. Das während der ganzen Strahlungszeit ausgestrahlte Licht erhält man nur durch mehrfaches Abtasten in Richtung der Zeitachse des Spektrums. Der Nachteil des Oszilloskops wie auch der Registriervorrichtung bei ihrer Anwendung zur Zeitauflösung besteht darin, daß die über-

Spektren verwendeten Geräte und deren Charakteristik

Spektrograph	Aufbau des Spektrographen	Wahrnehmung	Wahrnehmen- des Element	Gleichzeitig beobachtbares Spektralgebiet
Stigmatisch oder astigmatisch	Spezial	Kontinuierlich	Film	Begrenzt
Zur kontinuierlichen Auflösung stigmatischer, zur abschnittweisen Auflösung stigmatischer oder astigmatischer	Üblich	Kontinuierlich und abschnittweise	Film oder Photozelle	Unbegrenzt
Zur kontinuierlichen Auflösung stigmatischer, zur abschnittweisen Auflösung stigmatischer oder astigmatischer	Üblich	Kontinuierlich und abschnittweise	Film oder Photozelle	Unbegrenzt
Stigmatisch oder astigmatisch	Spezial	Kontinuierlich	Film	Begrenzt
Stigmatisch oder astigmatisch	Üblich	Abschnittweise	Film oder Photozelle	Begrenzt
Stigmatisch oder astigmatisch	Spezial	Kontinuierlich und abschnittweise	Photozelle	Mit feststehenden Photozellen stark begrenzt. Bei Abtasten unbegrenzt in einem kurzen Zeitgebiet

sichtliche Darstellung des ganzen Spektrums auf Grund der erhaltenen Daten unmöglich ist. Vorteilhaft ist die Anwendung stigmatischer wie auch astigmatischer Spektrographen bei der Ausführung dieses Verfahrens. Sie ist zur zeitlichen Auflösung des von einzelnen Entladungen hoher Energie, wie auch Entladungen kleiner Energie ausgestrahlten Lichtes geeignet. Die Synchronisierung kann bei Anwendung eines Funkenerzeugers hoher Präzision mit dem den Funkenerzeuger betätigenden Synchronisierungssignal oder bei üblichen Funkenerzeugern mit dem Beginn der Funkenentladung gleichzeitig aufgenommenem und verstärktem Signal erfolgen.

Selbstredend ist zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren von den verschiedenen Verfahren dasjenige am zweckmäßigsten, welches im ganzen Wellengebiet des Spektrums ein zeitlich aufgelöstes Spektrum liefert, zur

kontinuierlichen wie auch abschnittweisen Zeitauflösung geeignet ist, das Spektrum photographisch oder mittels Photozelle wahrnehmbar ist, keinen Spektrographen besonderen Aufbau beansprucht, stigmatische und astigmatische Spektrographen gleichermaßen anwendbar sind, und schließlich zur zeitlichen Auflösung von Spektren einzelner Entladungen hoher Energie wie auch vieler Entladungen kleiner Energie geeignet ist. Diese Bedingung erfüllen laut Tabelle I zwei Systeme, jene wo das zeitauflösende Element ein Drehspiegel bzw. eine Drehscheibe ist. Die einzige Besonderheit, welche bei der Anwendung dieser zwei Arten hervortritt, bezieht sich auf das Anregungsgerät, das mit hoher zeitlicher Genauigkeit arbeiten muß. Der Mangel an mit hoher Genauigkeit arbeitenden und eine Zeitauflösung von einer Mikrosekunde sichernden Anregungsgeräten hinderte bisher die Entwicklung eines allgemein anwendbaren Verfahrens zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren. Die erwünschte hohe Betriebsgenauigkeit ist nur mit elektronisch gesteuerten spektroskopischen Anregungsgeräten erreichbar. Die Leistung der heute gebräuchlichen elektronischen Schaltelemente (Röhren) genügen allein nicht zur ständigen Steuerung der Anregungsenergie solcher Leistung, wie sie in der spektroskopischen Praxis nötig ist. Elektronisch gesteuerte Anregungsgeräte mit erwünschter hoher Präzision konnten durch Vereinigung von Elektronenröhren und Steuerfunkenstrecken herausgebracht werden. Diese Vorrichtungen sind, ohne die Schaltelemente zu überlasten, prinzipiell unbegrenzte Energien mit der erwünschten zeitlichen Genauigkeit zu steuern fähig.

In vorliegender Arbeit gibt Verfasser einen zusammenfassenden Bericht über das an seiner Arbeitsstätte ausgearbeitete System hoher Präzision für die zeitlich aufgelöste Spektroskopie.

Der elektronisch gesteuerte Hochspannungs-Funkenerzeuger hoher Präzision

Das grundsätzliche elektrische Schaltschema des zu dem hier beschriebenen Verfahren verwendeten elektronisch gesteuerten spektroskopischen Funkenerzeugers hoher Präzision ist aus dem unteren Teil der Abb. 1 ersichtlich. Dies ist eine vervollkommnete Ausführung früher beschriebener [20—24] Einrichtungen. In der Abb. 1 ist C der Arbeitskondensator, links davon befindet sich der Ladestromkreis, rechts der Entladungsstromkreis. Der Transformator T ist von speziellem Aufbau und liefert infolgedessen Spannungswellen kurzer Dauer. Nach den Gleichrichter-Dioden $V1$ und $V2$ erhält man gleichgerichtete Spannungswellen kurzer Dauer, welche den Arbeitskondensator C aufladen. $L1$ ist ein Hochfrequenz-Filterelement, F ist die Analysenfunkenstrecke, S die Doppel-Steuerfunkenstrecke, $R5$ ein die Analysenfunkenstrecke überbrückender gebräuchlicher ohmscher Widerstand. $L2$ und $R3$ sind die zur Einstellung der Betriebsverhältnisse des Entladungsstromkreises nötige Selbstinduktion bzw. ohmscher Widerstand. $R1$ und $R2$ sind

spannungsteilende ohmische Widerstände, R_4 ist der Anodenwiderstand der Thyatronröhre V_3 . Über die Wirkungsweise der Schaltung verweisen wir auf die früheren Mitteilungen [20—24].

In der Abb. 1 kann der vom Kondensator C rechts liegende Teil, der Entladungsstromkreis, zwei sehr wichtige Aufgaben lösen. Die Lösung der einen Aufgabe ist, daß das System mittels Signalen kleiner Energie und Spannung gesteuert werden kann. Dies ermöglicht die Steuerung des Systems mit Anlaßsignalgeneratoren, letztere geben die Möglichkeit zur Steuerung mit Lichtsignalen. Die Steuerung mit Lichtsignalen ist für die zeitlich aufgelöste Spektroskopie von entscheidender Bedeutung. Die zweite Aufgabe, welche die Schaltung zu lösen vermag, ist die große zeitliche Genauigkeit, weil der Durchschlag der Analysenfunkstrecke F im Verhältnis zu dem auf das Gitter der Elektronenröhre V_3 gegebene elektrische Steuersignal mit kleiner Zeitstreuung erfolgt. Der Hauptvorteil des in Abbildung 1 dargestellten Funkenerzeugers ist, daß die Zeitstreuung des Durchschlages der Analysenstrecke F im Verhältnis zu dem auf das Gitter der Röhre V_3 gegebenen elektrischen Steuersignal 0,1 Mikrosekunde beträgt.

Kontinuierliche Zeitauflösung mit dem Drehspiegel

Der obere Teil der Abb. 1 stellt ein einen Drehspiegel enthaltendes optisches System dar, welches zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Funkenspektren mit einer Zeitauflösung von weniger als eine Mikrosekunde besonders geeignet ist [25—28]. Die Wirkungsweise des optischen Systems ist die folgende. Das aus der Funkenstrecke F kommende Licht fällt auf einen an der Achse des Synchronmotors E befestigten Drehspiegel M . Vor der Funkenstrecke F ist ein Spalt B_1 angebracht, parallel zur Zeichenfläche. Die Symmetrieachse der Elektroden der Funkenstrecke F ist zur Zeichenfläche vertikal. Auf diese Weise kann erreicht werden, daß nur von einer bestimmten Stelle der Funkenstrecke Licht auf den Drehspiegel M falle. Der Drehspiegel bildet die Funkenstrecke F bzw. einen Teil davon auf den Spalt B_2 des Spektrographen ab und zieht es in dessen Länge zeitlich auseinander. Das zeitlich aufgelöste Spektrum erscheint auf der photographischen Platte P , nachdem das Prisma D das Licht nach Wellenlängen zerlegt.

Laut Abb. 1 stellt die Verbindung zwischen Funkenerzeuger und optischem System die Photozelle I her. Das von der Hilfslichtquelle H kommende Licht fällt auf den Drehspiegel M und dieser projiziert es auf die Photozelle I . Den von der Photozelle I gelieferten Photostrom verstärkt IG , und das so erhaltene Spannungssignal steuert die Thyatronröhre V_3 .

Bei der in der Abb. 1 dargestellten Anordnung ist das zeitauflösende Vermögen jene Zeit, während welcher das Bild der Lichtquelle in ihrer ganzen Breite am Spalt B_2 des Spektrographen weitergeleitet wird. Demzufolge ist

im Falle eines einzigen Funkens das zeitliche Auflösungsvermögen um so größer, je kleiner die Abmessung der Lichtquelle in der Längsrichtung des Spaltes und je größer die Bewegungsgeschwindigkeit des Bildes entlang des Spaltes ist. Zwecks Steigerung der Auflösung wird die Lichtquelle F auf den Spalt $B2$ des Spektrographen verkleinert abgebildet. Wenn von der zeitlichen Auflösung von zeitlich aufgelösten und aufeinander gesetzten Bildern mehrerer Funken bzw. deren zeitlich aufgelöstem und aufeinander gesetztem Spektrum die Rede ist, ist die Zeitstreuung der Aufeinanderfolge der einzelnen Funken im Verhältnis zu den auf das Gitter der Röhre $V3$ gegebenen Signale ein wichtiger Faktor in Hinsicht auf die Auflösung. Grundsätzlich steht dem nichts im Wege, daß man das Bild der Lichtquelle auf dem Spalt des Spektrographen beliebig vermindere und die Laufgeschwindigkeit des Bildes am Spalt des Spektrographen beliebig vergrößere und so eine beliebige Auflösung erreiche, aber die Zeitstreuung der Aufeinanderfolge der einzelnen Funken hängt von den Eigenschaften des Funkenerzeugers ab. Diese Eigenschaft bedingt, daß zu einer großen Zeitauflösung ein Funkenerzeuger hoher Präzision notwendig ist.

Zur Veranschaulichung der Wirkungsweise des Systems geben wir in der Abb. 2 einen Teil des zeitlich aufgelösten Spektrums vom Zink. Im oberen Teil der Abbildung ist von den drei Spektren das mittlere das des Eisens, das obere und untere sind Spektren des Zinks in üblicher Weise aufgenommen. Das obere Spektrum stammt aus der Mitte einer Funkenstrecke von 8 mm, das untere aus der Nähe der Kathode. Der untere Teil der Abbildung ist das gleiche Spektrum wie von den oberen Spektren das untere, jedoch zeitlich aufgelöst. Aus dem an der Seite der Abbildung angebrachten Zeitmaß kann man feststellen, daß der Zeitabstand von zwei Strahlungsmaxima oder -minima im Spektrum 2 Mikrosekunden beträgt, mithin ist die Zeitauflösung tatsächlich von der Größenordnung einer Mikrosekunde.

Wenn die Drehachse des Spiegels M der Abb. 1 parallel dem Spalt $B2$ ist, wird das Bild der Funkenstrecke F in der Ebene des Spaltes $B2$ auf diesen senkrecht auseinandergezogen. Man kann so das aus verschiedenen Momenten des Funkens kommende Spektrum photographieren. Diese Spektren geben gleichzeitig Aufschluß über die Strahlungsverhältnisse an den Rändern des Funkenkanals.

Bei dem Betrieb der Einrichtung laut Abb. 1 bestehen bezüglich der Phasenstellung Anforderungen, welchen Genüge geleistet werden muß. Die erste Anforderung besteht darin, daß die Entladung des Kondensators C in der Nähe des Nullwertes des den Kondensator aufladenden abfallenden Spannungstoßes liege. Diese Phasenstellung, eine ziemlich grobe Einstellung, kann mit der Verdrehung des Stators des Motors E erreicht werden. Die Phasenstellung des Drehspiegels M muß so gestellt werden, daß das zeitlich aufgelöste Bild der Funkenstrecke F auf den Spalt $B2$ fällt. Die Phasenstellung des Drehspiegels

M im Verhältnis zum Rotor des Motors *E* muß so eingestellt werden, daß diese Bedingung erfüllt sei. Aus diesem Grunde ist der Spiegel *M* an der Achse des Rotors des Motors *E* verdrehbar befestigt. Eine weitere noch feinere Einstellung der Phase ist nötig, damit das zeitlich aufgelöste Bild der Lichtquelle *F* auf den Spalt *B2* des Spektrographen in die erwünschte Stellung komme. Diese Einstellung der Phase kann durch Veränderung der relativen Höhenstellung der Hilfslichtquelle *H* oder der Photozelle *I* erfolgen, oder angenehmer, mittels einer in den Anlaßsignal-Generator *IG* eingebauten elektronischen Phasenscheibenvorrichtung.

Abchnittweise Zeitauflösung mit dem Drehspiegel

In der wissenschaftlichen und praktischen Spektroskopie kommt es häufig vor, daß das Ziel die Beobachtung einer aus einem bestimmten Zeitabschnitt der Funkenentladung stammenden Strahlung ist. Zu diesem Zweck ist die optische Vorrichtung laut Abb. 3 brauchbar [27, 28]. Die Abb. 3 weicht von der Abb. 1 nur insofern ab, daß zwischen dem Spalt *B2* des Spektrographen und dem Drehspiegel *M* noch ein Spalt *B3* und eine Abbildungslinse *L* angebracht sind. Die Öffnung des Spaltes *B3* ist mit der Ebene der Abbildung parallel. Wenn bei dieser optischen Vorrichtung der Funke bzw. der davor angebrachte Spalt *B1* zeitlich aufgelöst in der Ebene des Spaltes *B3* und die Breite des Spaltes *B3* in der erwünschten Weise eingestellt wird, erscheint auf der photographischen Platte *F* das Spektrum aus dem erwünschten Zeitabschnitt.

Gleichzeitige Herstellung der Spektren aus mehreren Zeitabschnitten der Funkenentladung

Mit der Anwendung der optischen Vorrichtung laut Abb. 4 ist die Möglichkeit zur gleichzeitigen Aufnahme von Spektren aus den anfänglichen und späteren Zeitabschnitten der Funkenentladung gegeben. In der Abb. 4 ist *F* die Lichtquelle mit dem davor stehenden Spalt *B1*. Der Drehspiegel *M* bildet die Funkenstrecke *F* bzw. den davor angebrachten Spalt *B1* zeitlich aufgelöst auf die dem Drehspiegel zugekehrten Flächen der Rhomben *R1* und *R2* ab. Die Phasenlage des Drehspiegels ist so eingestellt, daß die aus der Anfangsperiode der Funkenentladung stammende Strahlung auf den Rhombus *R1*, die aus einem späteren Zeitabschnitt stammende auf den Rhombus *R2* falle. Auf diese Weise ist die Strahlung der Lichtquelle in zwei Bündel geteilt. Die beiden Bündel werden mittels der Linsen *L1* und *L2* auf die Kollimatorlinse des Spektrographen abgebildet. Die Aufgabe der Rhomben *R3* und *R4* ist, die Strahlenbündel einander nahe zu bringen. *B2* ist der Spalt des Spektrographen.

Die mit der Vorrichtung laut Abb. 4 aufgenommene Spektrengruppe zeigt Abb. 5. Im oberen Spektrum der Doppelspektren sind der Untergrund

die Funken- und Luftlinien, in den unteren Spektren nur die Bogenlinien sichtbar. Die Spektren der Abbildung 5 wurden mit Verunreinigungen enthaltenden Aluminium-Elektroden zwecks Reproduzierbarkeitsuntersuchungen aufgenommen.

Die Trennung der aus dem anfänglichen und späteren Zeitabschnitte der Funkenentladung stammenden Strahlungen kann auch mit der in Abb.

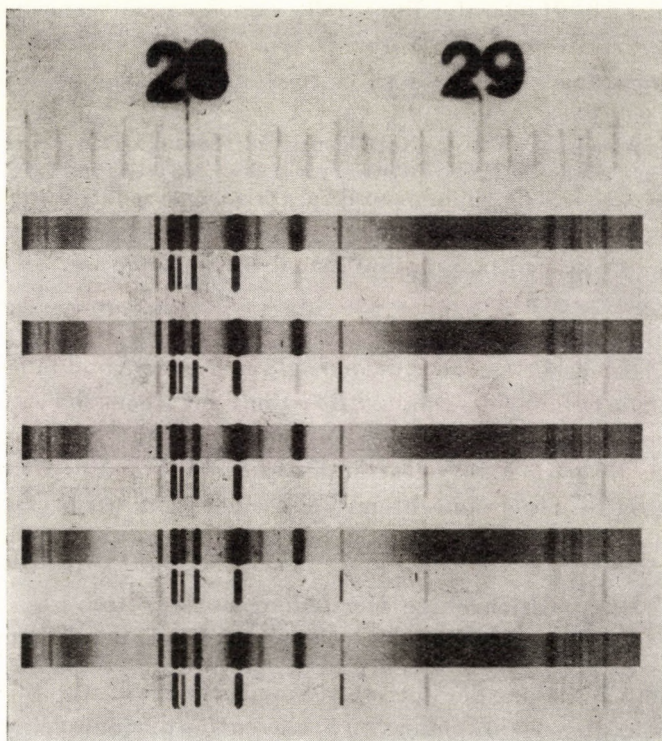


Abb. 5

6 dargestellten optischen Vorrichtung erfolgen. Hier sind die Bezeichnungen der Bestandteile denen der Abb. 4 gleich, mit dem Unterschiede, daß die Spiegel $T1$, $T2$, $T3$ und $T4$ die Rolle der Rhomben $R1$, $R2$, $R3$ und $R4$ übernehmen, bzw. stehen an Stelle der Linsen $L1$ und $L2$ der Abb. 4 in der Abb. 6 die konkaven Spiegel $L1$ und $L2$. Die Wirkungsweise der Vorrichtung der Abb. 6 ist die folgende.

Der Drehspegel M bildet die Funkenstrecke F bzw. den davor stehenden Spalt $B1$ zeitlich aufgelöst in der Ebene der Schnittlinie der Spiegel $T1$ und $T2$ oder etwas dahinter ab. Die durch die Spiegel $T1$ und $T2$ gebrochenen Lichtstrahlen bilden die konkaven Spiegel $L1$ und $L2$ auf die Kollimatorlinse des Spektrographen ab. Zweck der Spiegel $T3$ und $T4$ ist nur Strahlenablenkung.

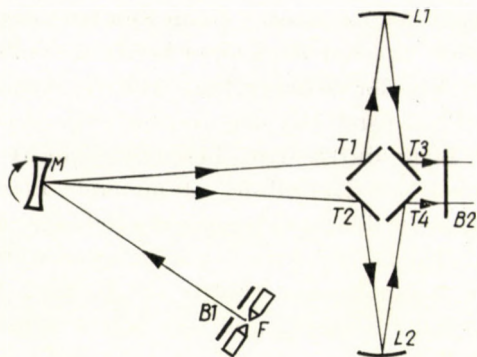


Abb. 6

Herstellung zeitlich aufgelöster Spektren mit der Drehscheibe

Zur Aufnahme zeitlich aufgelöster Spektren transienter Entladungen können auch laut Abb. 7 ausgebildete Drehscheiben verwendet werden. Die Drehscheiben sind vor dem Spalt des Spektrographen aufzustellen. Im Falle lang andauernder transienter Entladungen erfüllt die Scheibe laut Abb. 7a dieselbe Aufgabe wie die optische Vorrichtung laut Abb. 1 im Falle großer Auflösung. Der Vorrichtung der Abb. 3 entspricht die Scheibe in Abb. 7b, und den optischen Einrichtungen der Abb. 4 und 6 entspricht die Scheibe in Abb. 7c. Die in der Abb. 7 dargestellten Scheiben sind der besseren Auswuchtung wegen symmetrisch ausgebildet.

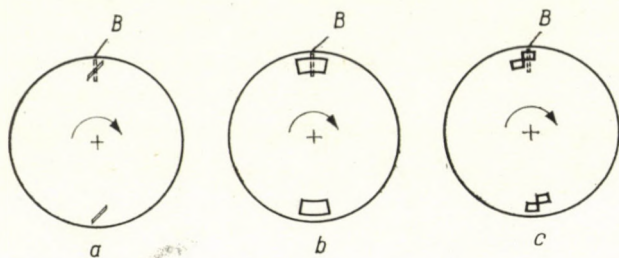


Abb. 7

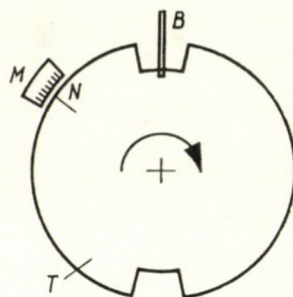


Abb. 8

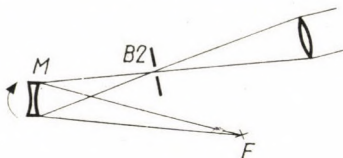
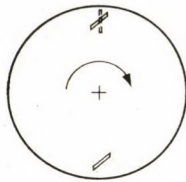

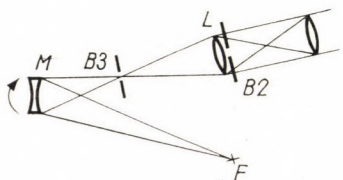
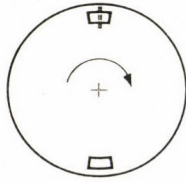

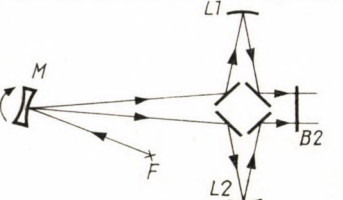
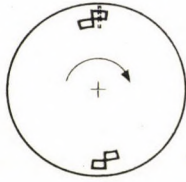

Die laut Abb. 7a, b und c ausgebildeten Drehscheiben führen die Zeitauflösung in folgender Weise durch.

Beim Vorbeilaufen des schiefen Spaltes der Scheibe laut Abb. 7a vor dem Spalt *B* fällt in den Spektrographen zeitlich stets eine andere Strahlung, und man erhält auf der photographischen Platte ein zeitlich aufgelöstes Spektrum. Die Drehphase der laut Abb. 7b ausgebildeten Scheibe kann so eingestellt

werden, daß zu Beginn der Entladung einige Zeit lang der Spalt *B* des Spektrographen verdeckt wird, und nur nach einer bestimmten Zeit Licht in den Spektrographen gelangt. Mit der Scheibe laut Abb. 7c kann man erreichen, daß bei entsprechender Phasenstellung das aus der anfänglichen Periode der Entladung stammende Licht durch den oberen Ausschnitt der Scheibe, das aus einer späteren Periode der Entladung stammende Licht durch den unteren Ausschnitt der Scheibe in den Spektrographen gelange. Auf diese Weise erhält man übereinander stehende Spektren, wie mit den optischen Vorrichtungen in den Abb. 4 und 6. Wenn die Ausschnitte auf der nach Abb. 7b ausgebildeten Scheibe bis an den Rand reichen, und eine solche Scheibe so vor dem Spalt *B* angebracht wird, daß dieser nur teilweise verdeckt wird (Abb. 8), gelangt durch den unbedeckten Teil des Spaltes das volle Licht des Funkens, an der Stelle der Öffnung aber das der Drehphasen-Einstellung entsprechende Licht in den Spektrographen.

Die Verbindung zwischen der Drehscheibe und dem elektronisch gesteuertem Anregungsgerät bildet auch hier eine Photozelle. Die periodische Belichtung der Photozelle kann durch die an der Scheibe befindliche oder besonders zu diesem Zweck bereitete Öffnung erfolgen. In diesem Fall ist hinter der Öffnung eine Beleuchtungslampe, vor der Öffnung eine Photozelle angebracht.

Tabelle II

 <p>1</p>	 <p>7_a</p>	
 <p>3</p>	 <p>7_b</p>	
 <p>6</p>	 <p>7_c</p>	

Die Belichtung der Photozelle kann auch mit einem Drehspiegel erfolgen, in diesem Fall ist der Drehspiegel auf der Achse des die Scheibe drehenden Motors befestigt.

In der Tabelle II sind die Dreh- und Schwingspiegel, die Drehscheiben und unmittelbaren Lichtmessungs-Varianten zur Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren verglichen.

Einstellung der Zeitabschnitte

Wegen der Reproduzierbarkeit der aus einzelnen Zeitabschnitten der Funkenentladung stammenden Spektren ist es wichtig, daß in jedes Spektrum eine stets von demselben Zeitabschnitte stammende Strahlung gelange. Es ist daher außerordentlich wichtig, daß der Spalt *B3* der Abb. 3 stets die aus demselben Zeitabschnitte stammende Strahlung durchlasse. Von ähnlicher Wichtigkeit ist, daß von dem auf die Rhomben *R1* und *R2* der Abb. 4 oder Spiegel *T1* und *T2* der Abb. 6 fallenden zeitlich aufgelösten Funkenbild auf je einen Rhombus bzw. Spiegel stets derselbe Zeitabschnitt falle. Wenn dies nicht so wäre, wären die Intensität und die Intensitätsverhältnisse der Spektrallinien in den einzelnen Zeitabschnitten nicht konstant. Von ähnlicher Wichtigkeit ist auch, daß die Dreh-Phasenstellung der Öffnungen der in Abb. 7 und 8 dargestellten Drehscheiben in bezug auf den Zeitpunkt der Funkenentladung und den Spalt des Spektrographen richtig und reproduzierbar gesichert sei.

Die besprochene Anforderung kann in den Abbildungen 3, 4 und 6 dadurch verwirklicht werden, daß das zeitlich aufgelöste Bild des Funkens oder das Bild des vor der Funkenstrecke angebrachten Spaltes auf dem Schirm *B3* bzw. Rhomben *R1* und *R2*, oder Spiegel *T1* und *T2* stets auf dieselbe Stelle falle. Zwecks Einstellung stellt man einen mit Einteilung versehenen Schirm vor den Schirm *B3* bzw. Rhomben *R1* und *R2*, oder Spiegel *T1* und *T2*, welcher bei der Aufnahme entfernt wird. Die Verschiebung des zeitlich aufgelösten Bildes der Lichtquelle auf *B3* bzw. Rhomben *R1* und *R2*, oder Spiegeln *T1* und *T2*, erfolgt nach dem früher beschriebenen Verfahren, wodurch es möglich wird, die in die einzelnen Zeitabschnitte gelangende Strahlung zu verändern.

Die Einstellung der Dreh-Phasenstellung der Drehscheibe im Verhältnis zum Zeitpunkt der Funkenentladung und dem Spalt des Spektrographen erfolgt laut Abb. 8. Das Licht der Lichtquelle belichtet die Scheibe *T*, an welcher eine Marke *N* angebracht ist, unmittelbar oder durch Vermittlung einer Linse. Der elektronisch gesteuerte Funkenerzeuger wird auf die eine Weise mit Spannungssignalen gesteuert, die auf die eine Weise mit Hilfe eines Drehspiegels und einer Photozelle in der Weise erzeugt werden, daß die Photozelle durch den Spiegel periodisch belichtet wird. Die andere Art der Erzeugung der erforderlichen Steuersignale besteht darin, daß die Photozelle mit dem durch

die Drehscheibe unterbrochenen Licht belichtet wird, wobei die derart erzeugten Spannungssignale zur Steuerung dienen. Da hierdurch zwischen der Drehscheibe T und der erfolgten Funkenentladung Synchronismus besteht, bleibt die Marke N auf der Scheibe T während des Betriebs scheinbar unbewegt. Die Zeit zwischen dem von der Photozelle erzeugten Signal und dem Beginn der Funkenentladung kann mit einem elektronischen Phasenschieber geändert werden. Wird die Zeit zwischen dem Anlaßsignal der Photozelle und dem Beginn der Funkenentladung mit elektronischer Verzögerung verändert, so wird der scheinbare Stand des Zeichens N auf dem Umfang der Scheibe T wegwandern. Dem Zeichen N gegenüber ist ein Maßstab M befestigt, auf welchem der scheinbare relative Stand des Zeichens N und das Maß seiner Verschiebung abgelesen werden kann. Die Kalibrierung dieses Systems wird so ausgeführt, daß man in verschiedenen relativen Stellungen der Marke N zum Maßstab M Spektralaufnahmen bereitet und so den zu dem dem Ziel entsprechenden Spektrum gehörigen relativen Stand von N zu M einstellt, stets das gewünschte Spektrum aufnehmen kann.

Sehr wichtig ist die Bestimmung der Null-Stellung der in Abbildungen 7 und 8 dargestellten Drehscheiben. Dies ist jene Stellung, wo der Spalt des Spektrographen durch die Kante der Drehscheibe eben noch nicht bedeckt ist, und diese kann mit freiem Auge annähernd auf folgende Weise eingestellt werden. Auf der zur optischen Achse des Spektrographen parallelen optischen Bank stellt man einen Schirm mit kleiner Öffnung auf. Die Öffnung des Schirmes fällt mit der durch den Spalt des Spektrographen laufenden optischen Achse zusammen. Stellt man diesen Schirm genügend weit auf und sieht hindurch auf den Spalt des Spektrographen, so kann man mit sehr guter Annäherung jene Stellung der Drehscheibe bestimmen, wo die Kante ihrer Öffnung mit dem Spalt des Spektrographen zusammenfällt. Wenn diese Stellung Nullstellung benannt wird, kann die Kalibrierung in bezug auf diese Nullstellung ausgeführt werden.

Am einfachsten kann die Nullstellung der Drehscheiben der Abbildungen 7 und 8 mit einer in dem Spektrographen angebrachten Photozelle bestimmt werden. In diesem Fall, z. B. bei der langsamen Verdrehung der Drehscheibe nach Abb. 7b, kann mit der im Spektrographen befindlichen Photozelle und am Maßstabe M diejenige Drehstellung der Scheibe festgestellt werden, bei welcher eben die Überdeckung des Spaltes beginnt. Bei unmittelbaren Lichtmessungsvorrichtungen ist diese Einstellungsmöglichkeit von selbst gegeben.

Spektrochemische Beziehungen

Das in Abb. 2 sichtbare Teilspektrum beweist, daß die durch transiente Entladungen hervorgerufenen und in üblicher Weise hergestellten Spektren über ihre Entstehung nur wenig Aufschluß geben. Die Abb. 2 zeigt auch

deutlich, daß man von der Strahlung transientser Entladungen nur aus zeitlich aufgelösten Spektren für alle Details Aufschluß bekommt. Die Ergebnisse einiger Beobachtungen wurden schon mitgeteilt [27], und in der Folge werden die Ergebnisse ähnlicher Beobachtungen mitgeteilt. Hier sollen einige Bemerkungen spektrochemischer Beziehung angegeben werden.

Momentan sieht die Sache so aus, daß die spektrochemische Anwendung zeitlich aufgelöster Spektren in erster Linie wegen der Steigerung der Empfindlichkeit interessant ist. Bekanntlich vermindert die Empfindlichkeit der spektrochemischen Analyse mit Funkenspektren der Umstand, daß das Spektrum von Funkenentladungen einen starken Untergrund hat, in welchem die Linien der in geringer Menge anwesenden Verunreinigungen oder Legierungselemente verschwinden. Außerdem werden die Arbeitskurven bei prozentuell geringen Mengen wegen des Untergrundes so flach, daß sie unbrauchbar werden. Die zeitlich aufgelösten Spektren zeigen, daß der Untergrund in erster Linie zu Beginn der Entladung entsteht. Der Untergrund von Funkenspektren setzt sich in erster Annäherung aus drei Komponenten zusammen. Eine Komponente stammt von der Luft und ist von den Elektroden der Funkenstrecke unabhängig. Die zweite Komponente des Untergrundes ist die Folge des zu Beginn der Funkenentladung herrschenden hohen Druckes. Dieser hohe Druck verursacht die starke Ausbreitung einiger Linien und ihre Wellenlängenverschiebung, welche aber nur einige Mikrosekunden dauert. Die dritte Komponente des Untergrundes stammt von der außerordentlich starken Ausbreitung der Spektrallinien. Die Ausbreitung ist zu Beginn der Funkenentladung am größten, und wie die Temperatur der Entladung sinkt, vermindert sich auch die Linienbreite. Die Ausbreitung kann von der Größenordnung 100 Å sein. Diese Erscheinung ist in der Abb. 2 gut sichtbar. Das Wesentliche ist momentan, daß die drei Untergrundbildungsarten hauptsächlich zu Beginn der Funkenentladung bestehen.

Das hier beschriebene Verfahren ermöglicht die Abtrennung des Untergrundes vom Funkenspektrum. Die Abtrennung kann mit dem Drehspiegel oder mit der Drehscheibe erfolgen.

Wird in der optischen Vorrichtung laut Abb. 3 das zeitlich aufgelöste Bild der Lichtquelle auf dem den Spalt *B3* enthaltenden Schirm so eingestellt, daß die Strahlung des anfänglichen Zeitabschnittes der Funkenentladung nicht in den Spektrographen gelangt, so erhält man auf der photographischen Platte *P* ein untergrundfreies Spektrum. Das so erhaltene untergrundfreie Spektrum wird zur spektrochemischen Analyse in der üblichen Weise verwendet.

Das mit den optischen Vorrichtungen nach Abbildungen 4 und 6 bereitete Doppelspektrum kann zur spektrochemischen Analyse in zweierlei Arten verwendet werden. Eine Methode besteht darin, daß man aus den einem späteren Zeitabschnitt der Funkenentladung stammenden Spektren die Intensitätsverhältnisse der Spektrallinien in üblicher Weise bestimmt, und diese mit dem

prozentuellen Gehalt an den verunreinigenden Elementen in ein Koordinatensystem aufrägt. Nach der zweiten Methode wird als innere Vergleichsbasis der Untergrund des aus dem anfänglichen Zeitabschnitt stammenden Spektrums benützt. Die Erfahrung ergab nämlich, daß dieser Untergrund eine gut reproduzierbare, verlässliche Basis ist.

In allen solchen Fällen, wo das zeitauflösende Element der Drehspiegel ist, ist das Maß der Zeitauflösung auf dem Spalt *B3* der Abb. 3 und auf den Rhomben bzw. Spiegeln der Abbildungen 4 und 6 um so kleiner, je größer die Abmessung der Lichtquelle ist. Bei der spektrochemischen Analyse ist die Länge der Funkenstrecke durch andere Anforderungen bestimmt und beträgt meistens mehrere mm. Bei der Arbeit mit Zeitauflösung ist eine so große Funkenstrecke nicht brauchbar, weil die Zeitauflösung praktisch verloren geht. Um eine Zeitauflösung entsprechenden Maßes zu erhalten, muß vor der Funkenstrecke ein schmaler Spalt eingesetzt werden. Man verwendet zur Herstellung der Spektren das durch diesen Spalt austretende Licht, womit ein bedeutender Lichtverlust verbunden ist, was nicht in allen Fällen erlaubt ist.

Der im vorigen Absatz erwähnte Nachteil bei der Verwendung eines Drehspiegels fällt weg, wenn zur zeitlich aufgelösten spektrochemischen Analyse die Drehscheiben laut Abbildungen 7b, 7c oder 8 benützt werden, weil bei Anwendung von Drehscheiben die zeitliche Auflösung vom Maß der Funkenstrecke unabhängig ist.

Was man in der zeitlich aufgelösten spektrochemischen Analyse unter Anwendung der Drehscheibe erreichen kann, ist aus der in der Abb. 9 abgebildeten Spektrenreihe ersichtlich, wo der Untergrund stufenweise abgetrennt wurde. Bei der obersten Spektralaufnahme war die Drehphasenstellung der Drehscheibe nach Abb. 8 so eingestellt, daß das während der ganzen Zeit der Funkenentladungen ausgestrahlte Licht in den Spektrographen gelangte. Bei den darauf folgenden Spektren wurden von Spektrum zu Spektrum schreitend stets ungefähr 4 Mikrosekunden vom anfänglichen Zeitgebiet der Funkenentladung abgeschnitten. Bei den Aufnahmen bedeckt die Drehscheibe nur die Hälfte des Spaltes. In den Doppelspektren sind die oberen Spektren mit dem obersten Spektrum identisch. Aus der Abb. 9 kann festgestellt werden, daß je länger das anfängliche Zeitgebiet der Funkenentladung ausgeblendet wird, der Untergrund um so mehr verschwindet.

In der Abb. 10 sind solche spektrochemischen Arbeitskurven dargestellt, welche teils bei üblichen Verhältnissen, teils mittels zeitlich aufgelöster Spektren bereitet wurden. Die Kurven beziehen sich auf die Bestimmung von Titan in Aluminium. Von den drei Kurven der Abb. 10 ist die mittlere aus den Intensitätsverhältnissen der Linien im untergrundfreiem zeitlich aufgelöstem Spektrum bestimmt. Die zweite, untere gibt die in üblicher Weise aus zeitlich nicht aufgelöstem Spektrum konstruierte Arbeitskurve. Die dritte, oberste

Kurve wurde so konstruiert, daß die Analysenlinien aus dem zeitlich aufgelösten untergrundfreien Spektrum mit dem in der Nähe der Linien liegenden Unteground des den Untergrund enthaltenden Spektrums verglichen wurden. Die Bezeichnung + Bg in der Abb. 10 bedeutet das Spektrum mit Untergrund, --Bg das Spektrum ohne Untergrund; Bg bezeichnet den Vergleich mit dem Untergrund. Bei der Aufnahme dieser Spektren wurde vom Beginn der Funkenentladung ein Zeitgebiet von ungefähr 14 Mikrosekunden abgeschnitten.

Die Abb. 10 bezeugt eindeutig, daß die mit Hilfe von zeitlich aufgelösten Spektren bereiteten Arbeitskurven besser sind als die in üblicher Weise bereiteten. Die beste ist diejenige, welche durch Vergleich des Untergrundes des zeit-

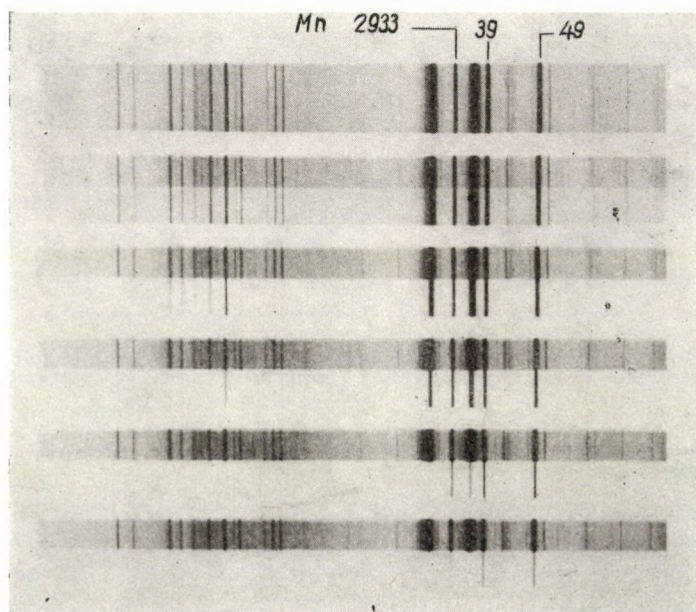


Abb. 9

lich aufgelösten Spektrums mit den Linien der verunreinigenden Elemente bereitete wurde. Die in üblicher Weise bereitete Arbeitskurve in der Abb. 10 ist unterhalb 0,01% praktisch unbrauchbar, die mit zeitlich aufgelöstem Spektrum bereitete ist hingegen auch noch zur Bestimmung von geringeren Prozentgehalten anwendbar. Außerdem ist bei der Anwendung von zeitlich aufgelösten Spektren die Untegroundkorrektur an den Arbeitskurven für geringe Prozentgehalte überflüssig.

Bei der spektrochemischen Analyse ist es bekannt, daß je funkenähnlicher die Entladung ist, um so geringer der Einfluß der metallurgischen Vorgeschichte und der Änderung der Legierungselemente auf die Analysenergeb-

nisse ist. Eine starke funkenähnliche Entladung ist aber mit der Bildung eines starken Untergrundes verbunden. Will man bei dem üblichen Verfahren den Untergrund schwächen und gleichzeitig die Empfindlichkeit erhöhen, so muß die Selbstinduktion des Entladungskreises erhöht werden. Erhöhung der Selbstinduktion ergibt eine bogenähnliche Entladung mit den obenerwähnten Nachteilen. Eine bogenähnliche Entladung ist mit Kraterbildung und unregelmäßiger Verdampfung verbunden, wodurch wieder die Reproduzierbarkeit leidet. Die Anwendung funkenähnlicher Entladungen unter gleichzeitigem Abtrennen des Untergrundes vom zeitlich aufgelösten Spektrum ist eine ideale Lösung der Aufgabe.

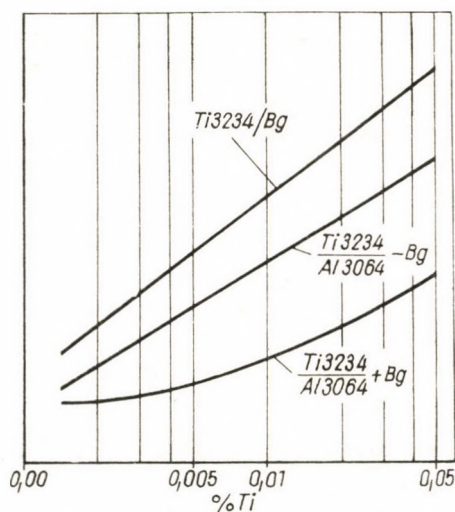


Abb. 10

Bei der Aufnahme der Spektren in den Abbildungen 2, 5 und 9 betrug die Kapazität des Kondensators C der Abb. 1 0,01 Mikrofarad, die Ladespannung 20 000 Volt. Der Entladungskreis enthielt nur die Rest-Selbstinduktion und den Widerstand der Leitungen. Unter diesen Umständen war die Schwingungszahl des Entladungsstromkreises ungefähr 0,5 Mherz, und die Gesamtdauer einer Entladung ungefähr 45 Mikrosekunden.

Wird der Funkenerzeuger der Abb. 1 zur Zündung von Abreißbögen oder niederspannungskondensierten Funken benützt, so erhält man Abreißbögen bzw. niederspannungskondensierte Funken hoher Präzision [20, 29, 30, 31]. Die hier beschriebenen zeitauflösenden Vorrichtungen sind selbstredend zur Untersuchung des zeitlichen Verlaufes von mit diesen Vorrichtungen angeregtem Licht anwendbar.

SCHRIFTTUM

1. SMITH, S., *Astrophys. J.*, **61**, 186, 1925.
2. ANDERSON, J. A. und SMITH, S., *Astrophys. J.*, **64**, 295, 1926.
3. RIMBERT, F., *J. Phys. Radium*, **14**, 1, 1953.
4. GORDON, G. und CADY, W. M., *J. Opt. Soc. Amer.*, **40**, 852, 1950.
5. BLITZER, L. und CADY, W. M., *J. Opt. Soc. Amer.*, **41**, 440, 1951.
6. BLITZER, L., *J. Opt. Soc. Amer.*, **45**, 564, 1955.
7. GLASER, G., *Optik*, **7**, 33 und 61, 1950.
8. EULER, J., *Z. angew. Phys.*, **4**, 82, 1952.
9. FUCHS, R., *Z. Physik*, **130**, 69, 1951.
10. VAN CALKER, J., *Z. Naturforsch.*, **42**, 573, 1949.
11. DEINUM, H. W. und DE BOER, F., *Spectrochim. Acta*, **2**, 318, 1943.
12. VAN CALKER, J., *Naturwiss.*, **40**, 434, 1953.
13. LEBEDEWA, V. V. und MILOWIDOWA, R. A., *Optyka i Spektroskopia*, **2**, 150, 1957.
14. LAWRENCE, F. O. und DUNNINGTON, F. G., *Phys. Rev.*, **35**, 396, 1930.
15. BEAMS, J. W., *Phys. Rev.*, **35**, 24, 1930.
16. CROSSWHITE, H. M., STEINHAUS, D. W. und DIEKE, G. H., *J. Opt. Soc. Amer.*, **41**, 299, 1951.
17. STEINHAUS, D. W., CROSSWHITE, H. M. und DIEKE, G. H., *Spectrochim. Acta*, **5**, 436, 1953.
18. STEINHAUS, D. W., CROSSWHITE, H. M. und DIEKE, G. H., *J. Opt. Soc. Amer.*, **43**, 257, 1953.
19. TSUI-FANG, CUNDALL, C. M. und GRAGGS, J. D., *Spectrochim. Acta*, **5**, 452, 1953.
20. BARDÓCZ, Á., *Nature*, **171**, 1156, 1953.
21. BARDÓCZ, Á., *Acta Physica Hungarica*, **4**, 91, 1954.
22. BARDÓCZ, Á., *Spectrochim. Acta*, **7**, 307, 1955.
23. BARDÓCZ, Á., *Acta Technica Hungarica*, **8**, 99, 1954.
24. BARDÓCZ, Á., *Applied Spectroscopy*, **10**, 183, 1956.
25. BARDÓCZ, Á. und VARSÁNYI, F., *Z. Naturforschung*, **10a**, 1031, 1955.
26. BARDÓCZ, Á., *Z. angew. Physik*, **9**, 82, 1957.
27. BARDÓCZ, Á., *Applied Spectroscopy*, **11**, 167, 1957.
28. BARDÓCZ, Á. und VARSÁNYI, F., *Nature*, **177**, 222, 1956.
29. BARDÓCZ, Á., *Acta Technica Hungarica*, **13**, 3, 1955.
30. BARDÓCZ, Á., *Spectrochim. Acta*, **7**, 238, 1955.
31. BARDÓCZ, Á., *Spectrochim. Acta*, **8**, 152, 1956.
32. ANDERSON, J. A., *Astrophys. J.*, **75**, 394, 1932.

ZUSAMMENFASSUNG

Beschreibung eines hochpräzisen Systems, welches in Mikrosekunden-Zeitauflösung die Herstellung von zeitlich aufgelösten Spektren ermöglicht. Das System besteht aus einer mit hoher zeitlicher Genauigkeit arbeitenden Lichtquelle und aus der die Zeitauflösung ausführenden Vorrichtung. Die Zeitauflösung kann ein Drehspiegel, eine Drehscheibe oder Photozelle bewerkstelligen. Durch entsprechende Ausbildung der zeitauflösenden Vorrichtung ist eine kontinuierliche oder abschnittsweise Zeitauflösung möglich. Das System ermöglicht die gleichzeitige Beobachtung von Spektren aus verschiedenen Zeitabschnitten transientser Entladungen. Die mit diesem System bereiteten Spektren sind zur Beobachtung der in den transienten Entladungen verlaufenden optischen Vorgänge außerordentlich geeignet. Zeitlich aufgelöste Spektren sind auch in der spektrochemischen Analyse vorteilhaft anwendbar. Wird aus den zeitlich aufgelösten Spektren der zu Beginn der Funkenentladung entstehende Untergrund abgetrennt, so nimmt die Empfindlichkeit zu. Außerdem erhält man bei prozentuell in geringen Mengen anwesenden Verunreinigungs- oder Legierungselementen eine gerade Arbeitskurve.

A NEW HIGH PRECISION SYSTEM FOR TIME RESOLVED SPECTROSCOPY

Á. BARDÓCZ

SUMMARY

The paper is concerned with the description of a high precision system by which the production of in time resolved spectra is possible in a time resolution of microsecond. The system consists of a light source operating with high precision in time and an arrangement performing the time resolution. The time resolution may be carried out by a rotating mirror, rotating disc or photocell. With an adequate build up of the time resolving device the possibility is given for continuous or periodic time resolution. The simultaneous detection of spectra arising from different time ranges of a transient discharge is also made possible by the system. The spectra produced by the system are exceedingly suitable for the observation of optical processes taking place in time in transient discharges. In time resolved spectra can be favourably used also in spectrochemical analyses. By separating the background arising at the beginning of the spark discharge from the in time resolved spectrum the sensitivity of the spectrochemical method is increased. Moreover, straight working curves are obtained at impurities or alloying elements present in small quantities only.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE HAUTE PRÉCISION
POUR PRODUIRE DES SPECTRES RÉTOLUS DANS LE TEMPS

Á. BARDÓCZ

RÉSUMÉ

L'auteur présente une méthode de haute précision permettant la résolution dans le temps des spectres, de l'ordre de grandeur d'une micro-seconde. Le système est composé d'une source de lumière travaillant avec une très grande précision dans le temps, et d'un appareillage effectuant la résolution. Celle-ci peut être faite par un miroir tournant, un disque rotatif ou une cellule photo-électrique. Par une adaptation convenable de l'appareillage, il est possible d'assurer une résolution dans le temps continue ou périodique. Le système permet aussi l'observation simultanée des spectres provenant de différentes périodes d'une décharge de caractère transitoire. Les spectres produits par cette méthode se prêtent bien à l'observation des processus optiques se produisant au cours d'une décharge transitoire. Les spectres résolus dans le temps peuvent également s'utiliser avec avantage pour l'analyse spectro-chimique. La sensibilité du procédé spectro-chimique est augmentée si, des spectres résolus dans le temps, on sépare le fond produit au commencement d'une décharge d'étincelles. En outre, au cas de la présence d'un faible pourcentage d'éléments d'alliage ou d'impuretés, on obtient des courbes de dosage rectilignes.

НОВАЯ ОСОБО ТОЧНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ РАЗЛОЖЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ СПЕК-
ТРОСКОПИИ

А. БАРДОЦ

РЕЗЮМЕ

Дается описание особо точной системы, которая позволяет получать разложенные во времени спектры с разложением порядка микросекунд. Система состоит из источника света, работающего с очень большой по времени точностью, и устройства, производящего разложение во времени. Разложение во времени может производиться вращающееся зеркало, колеблющееся зеркало, вращающийся диск или фотоэлемент. Соответствующая конструкция устройства разложения во времени позволяет производить непрерывное или прерывное разложение во времени. Система позволяет осуществить одновременное наблюдение спектров, происходящих от различных диапазонов времени переходных разрядов. Полученные системой спектры отлично подходят для наблюдения оптических процессов, происходящих при переходных разрядах. Разложенные во времени спектры могут быть выгодно использованы также при спектрохимических анализах. Если от разложенного во времени спектра отделить фон, образующийся в начале искрового разряда, возрастает чувствительность спектрохимического метода. Кроме того, в случае легирующих или примесных элементов, присутствующих в небольших количествах, представляется возможным получить прямые рабочие графики.

DIE KENNTNIS DES WÄRME- UND STOFFÜBERGANGES ALS GRUNDLAGE DER TROCKNUNGSTHEORIE*

A. W. LYKOW

MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER BELORUSSISCHEN SOZIALIST. SOW JETREPUBLIC

Bezeichnungen:

- t und τ — Temperatur ($^{\circ}\text{C}$) bzw. Zeit (Stunde)
 Θ, θ — Massenübertragungspotential ($^{\circ}\text{M}$ — Massenübergangsgrad)
 P — Gesamtdruck (mm Quecksilbersäule)
 γ_0 — Die Dichte des absolut trockenen Körpers (Kg/m^3)
 r — Spezifische Verdampfungswärme (kcal/kg)
 C_m — Spezifische Massenkapazität des Körpers ($\text{kg}/\text{kg } ^{\circ}\text{M}$)
 C_q — Spezifische Massenkapazität des feuchten Körpers ($\text{kg}/^{\circ}\text{C kg}$ Trockenkörper)
 λ_q — Wärmeleitzahl des Stoffes ($\text{kcal}/\text{m, Stunde } ^{\circ}\text{C}$)
 λ_m — Massenleitzahl des feuchten Körpers ($\text{kg}/\text{m Stunde } ^{\circ}\text{M}$)
 a_q und a_m — Potentialleitzahl der Wärme- und Feuchtigkeitsübertragung

$$(\text{m}^2/\text{Stunde, } a_q = \lambda_q/c_q \cdot \gamma_0; \quad a_m = \lambda_m/c_m \cdot \gamma_0)$$

- C' — Spezifische Wärmekapazität des Dampf-Gasgemisches ($\text{kcal}/\text{kg } ^{\circ}\text{C}$)
 K_p — Durchdringungskoeffizient der feuchten Luft ($\text{kg}/\text{m Stunde mm}$ Quecksilbersäule)
 ε — Das Kriterium der Phasenumwandlung
 δ — Koeffizient des thermischen Gradienten ($^{\circ}\text{M}/^{\circ}\text{C}$)
 δ'' — Verhältnis der Dampfleitungs- und Massenleitungskoeffizienten
 C_p — Kapazität des kapillar-porösen Körpers des Dampf-Gasgemisches bezüglich ($\text{kg}/\text{kg mm}$ Quecksilbersäule)
 a_p — Potentialleitungskoeffizient der Filtrationsmassenübertragung
 a_q und a_m — Wärme- bzw. Stoffübergangszahl ($\text{kcal}/\text{m}^2 \text{ Stunde } ^{\circ}\text{C}$ und $\text{kg}/\text{m}^2 \text{ Stunde } ^{\circ}\text{M}$)
 U — Feuchtigkeitsgehalt des Stoffes (kg/kg)
 R — Charakteristisches Maß, bei endloser Platte die Hälfte der Plattendicke (m)
 q_i — Von der Fläche aufgenommene strahlende Wärme ($\text{kcal}/\text{m}^2 \text{ Stunde}$)

I n d i z e s

- w — Oberfläche
 a — umgebende Luft
 o — Anfangszustand vor der Trocknung
 e — Gleichgewichtszustand des Körpers und der umgebenden Luft
 q und m — die Parameter oder Kriterien des Wärme- und Massenüberganges
 p — Filtrationscharakteristiken
 Die Striche oberhalb der Zeichen bedeuten Durchschnittswerte, auf das Volumen des Körpers bezogen
 Ähnlichkeitskriterien oder allgemeine Funktionen und Argumente

* Vortrag, gehalten am 22. November 1960 auf der Trocknungskonferenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest.

$$T = \frac{t - t_0}{t_a - t_0}; \quad \Theta = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 - \theta_e}; \quad P = \frac{P - P_0}{P_0},$$

F_0 und F_{0m} — FOURIERSches Kriterium der Wärme- bzw. der Massenübertragung $F_0 = \alpha_q \tau / R^2$; $F_{0m} = a_m \tau / R^2$

Lu und Lu_q — Trägheitskriterien: $Lu = a_m / a_q$; $Lu_p = a_p / a_q$

Bi_q und Bi_m — Wärme- bzw. Massenaustauschkriterien:

$$Bi_q = \alpha_q R / \lambda_q; \quad Bi_m = a_m R / \lambda_m,$$

P_n — POSNOWSches Kriterium: $P_n = \delta(t_a - t_0) / (\theta_0 - \theta_e)$

Ko — KOSSOWITSSches Kriterium:

$$Ko = r c_m (\theta_0 - \theta_e) / c_q (t_a - t_0).$$

Bu — BULYGINsches Kriterium:

$$Bu = r c_p P_0 / C_q (t_a - t_0)$$

Die Kenntnis der Trocknung von feuchten Gütern ist verhältnismäßig neu und hat sich in drei Grundrichtungen entwickelt. Anfangs wurde das größte Gewicht auf die Konstruktion der Trockenanlagen gelegt, mit besonderem Augenmerk auf ihre mechanische und wärmeenergetische Wirtschaftlichkeit. Dementsprechend entwickelten sich die wärmetechnischen Berechnungsmethoden der Trockenanlagen, diejenigen der Wahl der Betriebsparameter der Wärmeträger, und diejenigen der Lüftungsanlagen. Gleichzeitig wurde angenommen, daß die Trocknung von feuchten Gütern dem Prozeß des Verdampfens von Flüssigkeiten mit freier Oberfläche gleiche.

Weitere Forschungen haben bewiesen, daß der Trocknungsvorgang nicht mit dem stationären Prozeß der Erwärmung feuchter Güter identisch ist, und daß er wesentlich vom Verdampfungsprozeß freier Flüssigkeitsoberflächen abweicht. Der Feuchtigkeitsgehalt der Güter ändert sich ständig, und ebenso ändert sich auch die Temperatur derselben in Funktion der Zeit. Als Ergebnis der in dieser Richtung durchgeführten Forschungen entstand ein neues Kapitel der Trocknungswissenschaft: die Kinetik des Trocknungsvorganges, deren grundlegende Aufgabe die Feststellung des Zusammenhanges zwischen dem Feuchtigkeitsgrade der durch verschiedene Methoden getrockneten Güter, deren Temperatur und der entsprechenden Trocknungszeit war. Bezüglich der Entwicklung der Kinetik der Trocknung waren die Werke von G. K. FILO-NENKO, SHERWOOD, LEWIS und anderen von großer Bedeutung.

Diese Entwicklungsperiode der Trocknungstheorie behandelte die Technologie der Trocknung sorgfältig. Im Grunde wurde angestrebt, die technologischen Eigenschaften der zu trocknenden Güter soweit als möglich zu erhalten, da sich diese gelegentlich des Trocknungsvorganges meistens in ungünstiger Richtung veränderten.

Die strukturellen, mechanischen, physikalisch-chemischen und biologischen Charakteristiken veränderten sich ständig, da der Trocknungsvorgang selbst nicht bloß ein wärmetechnischer, sondern in erster Reihe ein technologi-

scher Vorgang ist. Den praktischen Forderungen entsprechend, stellten die Gelehrten das Studium der Technologie des Trocknens in den Vordergrund.

Vom physikalisch-chemischen Standpunkt aus betrachtet, sind die feuchten Güter kapillar-poröse kolloide Stoffe, deren Beschaffenheit durch die Beziehung zwischen Gut und Feuchtigkeit charakterisiert wird. Die Akademiker P. A. REBINDER, S. M. LIPATOW und Prof. JU. L. KAWKASOW haben in ihren Werken die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten zwischen der Feuchtigkeit und den kolloid-kapillar-porösen Stoffen festgestellt, und die für die Beschaffenheit der Verbindung der Feuchtigkeit und der feuchten Güter charakteristischen Gesetzmäßigkeiten beschrieben. Als Ergebnis ihrer Forschungen haben sie festgestellt, daß der Wärme- und Stoffübergang in den Gütern durch die Beschaffenheit der Verbindung des Gutes und der Feuchtigkeit bestimmt wird. Hiervon wird später die Rede sein.

Die Erklärung der Mechanik der Übertragung bildet eine zeitgemäße Aufgabe der Untersuchung der Dynamik des Trocknungsprozesses. Die Bewegung der Feuchtigkeit in flüssiger Form wird von der Bewegung der wasserlöslichen Stoffe begleitet (Tannide, Vitamine, Salze etc.), was eine entscheidende Auswirkung auf die während des Trocknungsprozesses entstehende Veränderung der technologischen Qualitätseigenschaften der Güter ausübt. Zur Lösung dieser Frage der Technologie des Trocknens muß nicht nur die Änderung des durchschnittlichen Feuchtigkeitsgehaltes des Gutes, oder die Kinetik der Änderung des Feuchtigkeitsgehaltes an einer gewissen Stelle des Gutes geprüft werden, sondern es muß auch die Gänze der sich im Innern des Gutes binnen eines gegebenen Zeitraumes abspielenden Änderung des Feuchtigkeitsgehaltes bekannt sein, das heißt, es müssen die nicht stationären Gebiete des Feuchtigkeitsgehaltes des Körpers bekannt sein.

Die gleichen Forderungen können auch an die Feststellung der Temperatur des zu trocknenden Gutes gestellt werden. Folglich bildet die Feststellung der Veränderungen des Wärme- und Feuchtigkeitsgehaltes beim Trocknungsvorgang eine grundlegende Aufgabe der Dynamik der Trocknung. Im Wesentlichen entsteht zufolge der ungleichmäßigen Verteilung des Wärme- und Feuchtigkeitsgehaltes des zu trocknenden Gutes ein rauminhaltlicher Spannungszustand in demselben. Das ist das Ergebnis der unzulässigen Schrumpfung, wodurch Risse (lokale Lösung der Struktur), Entstehung von Poren und die Veränderung sonstiger struktureller und mechanischer Eigenschaften hervorgerufen werden.

Um die instationären Bereiche der Temperatur und des Feuchtigkeitsgehaltes bestimmen zu können, müssen wir die Gesetze des inneren Wärme- und Stoffaustausches, ferner die Gesetze der Wechselwirkung zwischen der Oberfläche des Körpers und seiner Umgebung oder den den Körper umgebenden Körpersystemen (äußere Wärme- und Stoffübertragung) kennen. Heutzutage sind diese Gesetze nicht nur festgelegt, sondern es wurden auch, im

Wege der veränderten Art des Trocknungsprozesses und durch Prüfung der Verfahren der Wärmezufuhr an das zu trocknende Gut, die Methoden der Steuerung der Wärme- und Feuchtigkeitsübertragung festgestellt.

Demzufolge bleiben die technologischen Eigenschaften der unter Trocknung stehenden Güter nicht nur unverändert, sondern können auch in der gewünschten Richtung verbessert werden. Zum Beispiel können, bei Anwendung entsprechender Technologie des Trocknens, die Eigenschaften des Saatkornes durch das Trocknen verbessert werden. Auf diese Weise kann die Keimfähigkeit, die Keimenergie des Saatkornes, im Vergleich zu dem bei natürlichen Verhältnissen getrockneten Saatkorn, vergrößert werden (Trocknen und Lagerung bei Zimmertemperatur, konditionierte Luft etc.).

Ein anderes Beispiel bildet das Trocknungsverfahren im Autoklaven unter Druckverminderung von feuerbeständigen Baumaterialien (auf Basis von Kieselgur-Bindemittel). Bei derartigen Trocknungsverfahren steigt die Festigkeit der Erzeugnisse auf das Fünf-, Siebenfache, bei gleichzeitiger Verbesserung der Wärmeisolationseigenschaften. Durch diesen Trocknungsprozeß erhalten wir neue, bisher unbekannte strukturelle und mechanische Eigenschaften der feuerbeständigen Materialien. Es ist zu bemerken, daß bei diesem Trocknungsverfahren der anfängliche Feuchtigkeitsgehalt der Güter bedeutend erhöht werden muß, d. h. der Stoff soll vor dem Trocknen einer weiteren Befeuchtung unterworfen werden.

Das Entwickeln einer modernen Technologie des Trocknens bildet einen zeitgemäßen Abschnitt seiner Technik. Der grundlegende Umstand ist hier die Verbesserung der technologischen Eigenschaften des unter Trocknung stehenden Gutes. In dieser Hinsicht bedeutet das Trocknen auch eine neue Methode des Verbesserns der technologischen Eigenschaften der feuchten Güter.

Diese Aufgabe kann nur gelöst werden, wenn die Wärme- und Stoffübertragung in den kapillar-porösen kolloiden Körpern in der Gegenwart von Phasenumwandlungen untersucht wird. In derartigen Körpern hat der Wärme- und Stoffübergang spezifische Eigenschaften, unter denen eine die gegenseitige Beziehung der Übergangsvorgänge darstellt. Der in dem zu trocknenden Körper verlaufende Wärmeübergang wirkt auf den Stoffübergang aus, und umgekehrt.

In den kapillar-porösen Körpern stellt die Wärme- und Stoffübertragung einen einheitlichen komplexen Vorgang dar, der in ständiger Beziehung mit der äußeren Wärme- und Stoffübertragung steht. Der Zusammenhang zwischen dem im Inneren des Körpers vor sich gehenden Wärme- und Stoffaustausch und der äußeren Wärme- und Stoffübertragung bildet die zweite spezifische Eigenschaft des während der Trocknung stattfindenden Wärme- und Stoffübergangsmechanismus.

Dies ist ein außerordentlich wichtiger Umstand, der eine gehörige Beachtung erfordert. Meistens wird der sich beim Trocknen abspielende Wärme-

übergang vom Stoffübergang gesondert geprüft. Bei festen Körpern wird der Wärmeübergang mittels des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes geprüft, wobei die Flüssigkeits- und Dampfbewegung als Diffusionsvorgang betrachtet wird. Beispielsweise wird in der baugewerblichen Wärmetechnik die sich im Inneren der Güter und der Baukonstruktionen abspielende Flüssigkeitsbewegung als eine Dampfdiffusion in einer dampfabSORBierenden Umgebung betrachtet. Dagegen ist beim Trocknen die Dampfbewegung in den kapillarporigen Stoffen nicht bloß eine Diffusion, sondern sie erfolgt durch Effusion in Form einer filtrationsartigen hydrodynamischen Bewegung unter Einwirkung des Druckgradienten. Gleicherweise kommt die Flüssigkeitsbewegung ebenfalls unter Einwirkung von diversen Bewegungskräften zustande.

Die Gravitation und die Kapillar-Potentiale rufen eine molekulare und hydrodynamische Bewegung, die diffusions- und osmotischen Potentiale aber eine molekulare Übertragung hervor. Auch der Temperaturgradient hat einen großen Einfluß auf die Feuchtigkeitsbewegung des Dampfes und der Flüssigkeit. Die Wärmeübergabe erfolgt nicht nur durch Wärmeleitung, sondern, infolge der Feuchtigkeitsbewegung, auch durch Konvektion.

Der Wärme- und Flüssigkeitstransport stehen also in gegenseitigem Zusammenhang, und sie müssen, als ein einheitlicher Vorgang, auf neuen Grundlagen untersucht werden. Das gleiche Bild des gegenseitigen Zusammenhanges kann für die Durchdringung der Wärme und der Flüssigkeit durch die Oberfläche des zu trocknenden Körpers festgestellt werden.

Die Schaffung einer neuen Theorie dieses Problems kann auf zweierlei Art gelöst werden. Erstens wird der molekulare Mechanismus des Wärme- und Stoffüberganges auf Grund von Modellen erforscht (Methoden der molekular-kinetischen und hydrodynamischen Theorien). Es gibt vielerlei derartige Modelle, welche sich jedoch bloß in einzelnen, bestimmten Fällen als richtig erwiesen haben. Bei Veränderung der Bedingungen im Körper und seiner Umgebung bleiben die Gesetzmäßigkeiten der Übertragung nicht mehr richtig. Meistens wird bei der Ableitung der Gesetze der Übertragung die Wirkung der Wärmeübertragung auf die Flüssigkeitsbewegung nicht in Betracht gezogen.

Diese Lage ist kein Zufall, vielmehr kann sie durch die Komplexität des molekularen Mechanismus der Übertragung erklärt werden. Für den Energie-, Wärme- und Stofftransport muß also eine derartige Theorie geschaffen werden, durch welche, ohne den molekularen Mechanismus des Vorganges aufzuschließen, und ähnlich der klassischen Thermodynamik, die grundlegenden Gesetze der Übertragung streng bestimmt werden können. Die brennenden Fragen der neuen Technik, unter anderen die Technik der Strahlentriebflugzeuge, haben die Physiker gezwungen, auf diesem Gebiet weitere Anstrengungen zu machen. Auf Grund der Forschungen belgischer und niederländischer Physiker (ONSAGER, PRIGOGINE, DE GROOT) wurde eine streng thermo-

dynamische Methode zur Prüfung der irreversiblen physikalischen und chemischen Vorgänge ausgearbeitet. Diese Methode wird die Thermodynamik der irreversiblen Vorgänge genannt. Die wichtigste Eigenschaft dieser Methode ist, daß sie die Wärme- und Flüssigkeitstransporterscheinungen in ihrem gegenseitigen Zusammenhang prüft. Anstatt der dieselben separat behandelnden Gesetze (Fourier-Gesetz, Fick-Gesetz) erhalten wir lineare Gleichungssysteme, in denen die Antriebskräfte der Wärme- und Stoffübertragung Glieder in einer jeden Gleichung sind.

Im Laufe unserer auf die Thermodynamik der Flüssigkeitsbewegung gerichteten Arbeit wurde bewiesen, daß das Potential der Flüssigkeitsbewegung nicht durch den U kg/kg Feuchtigkeitsgehalt des Gutes, sondern durch das Potential θ der Flüssigkeitsbewegung bestimmt wird, dessen Messung auf Grund des Wertes in bezug auf den Feuchtigkeitsgehalt eines Etalonkörpers erfolgt. Im hygroskopischen Bereich bildet dieses charakteristische Potential eine vom Feuchtigkeitsgehalt des Materials oder vom partiellen Druck der äußeren Luftfeuchtigkeit φ abhängige eindeutige Funktion.

Auf dem Gebiete des feuchten Zustandes des Körpers stellt das Stoffübertragungspotential θ eine Funktion des Feuchtigkeitsgehaltes und der Temperatur des Körpers dar. Der Feuchtigkeitsgehalt des Stoffes und das Potential θ weisen ein ähnliches Verhältnis auf, wie Wärmeinhalt und Temperatur:

$$C_m = (\partial U / \partial \theta)_T$$

wo C_m die spezifische isothermische Massenkapazität (kg/kg °M) des Körpers bedeutet.

Die in den kapillar-porösen Körpern vor sich gehende Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung kann durch Differentialgleichungssysteme beschrieben werden, deren allgemeinste Form die folgende ist:

$$C_q \gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda_q \nabla t) + \varepsilon \gamma_0 C_m \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + C' K_p \nabla P \nabla t + I_q \quad (1)$$

$$C_m \gamma_0 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda_m \nabla \theta + \lambda_m \delta \nabla t + \lambda_m \delta'' \nabla P) \quad (2)$$

$$C_p \gamma_0 \frac{\partial P}{\partial \tau} = \operatorname{div} (K_p \nabla P) - \varepsilon \gamma_0 C_m \frac{\partial \theta}{\partial \tau}. \quad (3)$$

Die erste Differentialgleichung ist die der Wärmeübertragung. Die konvektive Komponente des Wärmeüberganges ist $C' K_p \nabla P \nabla t$, welche die Filtrationsbewegung des Dampf-Gasgemisches zeigt; diese ist bei den klassischen Trocknungsbedingungen recht niedrig und im Falle $Re < 1$ kann

dieser Wert vernachlässigt werden. Die innere Wärmequelle I_q wird bei Trocknung mit Hochfrequenzstrom oder mit infraroten Strahlen in der Gleichung benötigt, wenn die infraroten Strahlen tief in den Körper eindringen. Bei konvektiver Trocknung unter traditionellen Bedingungen ist $I_q = 0$. Die Randbedingungen der Wechselwirkung des Körpers und seiner Umgebung können wie folgt ausgedrückt werden:

$$-\lambda_q(\nabla t)_w + \alpha_q(t_0 - t_w) - r\gamma(1 - \varepsilon)\alpha_m(\theta_w - \theta_e) = 0 \quad (4)$$

$$\lambda_m[\nabla\theta + \delta\nabla t + \delta''\nabla P]_w + \alpha_m(\theta_w - \theta_e) = 0 \quad (5)$$

$$P_w = P_0 = \text{const.} \quad (6)$$

Durch die Bedingung $P_w = P_0 = \text{const.}$ wird die Tatsache ausgedrückt, daß die Relaxation des vollen Druckgradienten ∇P_w an der Oberfläche des Körpers mit außerordentlich großer Geschwindigkeit (mit Schallgeschwindigkeit) erfolgt.

Das Differentialgleichungssystem (1—3) wurde für die gleichmäßige Anfangsverteilung ($\theta(0, x_i) = \text{const.}$; $t(0, x_i) = \text{const.}$) der Wärme- und Stoffübertragungspotentiale des symmetrischen Wärme- und Stoffüberganges der endlosen Platte, des unbegrenzten Zylinders und der Kugel gelöst, bei parabolischer Anfangsverteilung.

Die Lösung kann auch für den Fall gefunden werden, wenn die umgebende Temperatur t_a die Funktion der Zeit ist.

Diese Lösungen enthält die Monographie [2]. Da die Lösungen recht kompliziert sind, werden dieselben hier nicht behandelt. Demgegenüber geben wir die Lösungen bezüglich unendlicher Platten für den Fall, daß die Intensität der Trocknung gering ist ($P = \text{const.}$), weiter wenn die Trocknung mit großer Intensität vor sich geht und daher im porösen Stoff ein veränderlicher Druckgradient zugegen ist ($P = \text{var.}$).

a) *Wirkung der Ähnlichkeits-Kriterien des Wärme- und Stoffüberganges auf die Kinetik des Trocknungsprozesses, im Falle $P = \text{const.}$*

Die analytische Lösung des Gleichungssystems (1—2) für die Grenzfälle (4—5) zeigt, daß die Relativtemperatur T und das Stoffübertragungspotential θ von einer ziemlich großen Anzahl Ähnlichkeits-Kriterien abhängen:

$$T = \frac{t - t_0}{t_e - t_0} = f_1\left(\frac{x}{R}, \text{Fo}, \text{Lu}, \text{Bi}_q, \text{Bi}_m, \varepsilon, \text{Ko}, \text{Pn}\right) \quad (7)$$

$$\theta = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 - \theta_e} = f_2\left(\frac{x}{R}, \text{Fo}, \text{Lu}, \text{Bi}_q, \text{Bi}_m, \varepsilon, \text{Ko}, \text{Pn}\right) \quad (8)$$

Diese wirken jedoch nicht in gleichem Maße auf den Vorgang aus. Die Lösungsergebnisse der Gleichungen (1—2) zeigen, daß die größte Wirkung auf die Feuchtigkeitsbewegung die Kriterien Bi_m , P_n und auf die Wärmeübertragung die Kriterien Bi_q , ε , K_o ausüben.

Die entscheidendste Wirkung auf die Wärme- und Feuchtigkeitsübertragung hat das Kriterium Lu ($Lu = \frac{a_m}{a_q}$), welches als das Kriterium des gegenseitigen Zusammenhanges des Wärme- und Stoffüberganges bezeichnet

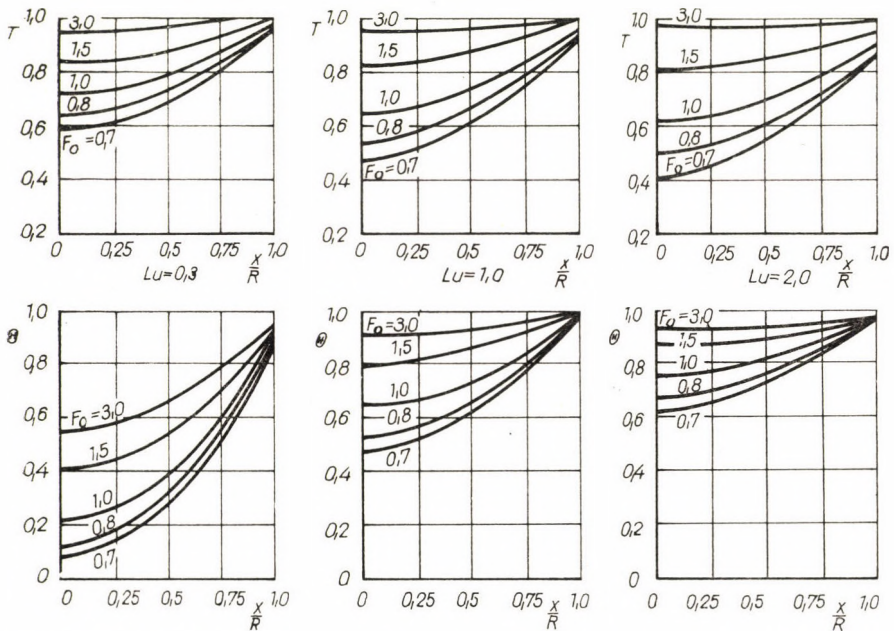


Abb. 1. Die Verteilung der Potentiale der Wärme- und Stoffübertragung im Inneren des Körpers, in Abhängigkeit von Lu

werden kann. Durch das Kriterium Lu wird die relative Trägheit des Stoffübertragungspotentials im Vergleich zu dem Wärmeübertragungspotential (der Temperatur) gekennzeichnet.

Aus Abb. 1 ist ersichtlich, daß bei geringen Werten von Lu die Temperatur eine höhere Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Stoffe besitzt als das Stoffleitungspotential. Für $Lu = 1$ sind die Fortpflanzungen der Wärme- und Stoffleitungspotentiale nahe identisch, und für $Lu > 1$ liegt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Stoffes höher als die der Wärme.

In den Kennzahlen der Übertragung kann jedoch in bezug auf $Lu = 1$ keine volle Symmetrie beobachtet werden.

Zum Vergleiche wurden zwei Fälle untersucht. Den Fall von $Lu = 0,5$ und $Lu = 2,0$, das heißt, den Fall, wo die Temperaturleitzahl a_q (die Potentialleitzahl der Wärmeübertragung) das Zweifache bzw. die Hälfte der Potentialleitzahl der Stoffübertragung a_m beträgt. Aus Abb. 2 ist ersichtlich, daß der Unterschied zwischen den beiden dimensionslosen, mittleren Potentialen $\pm 12\%$ beträgt. Ähnliche Berechnungen bezüglich der Verhältnisse

$$\frac{d\bar{T}}{dFo} : \frac{d\bar{\Theta}}{dFo}$$

haben bewiesen, daß deren Abweichung eine Größenordnung von 200% aufweist (Abb. 3), und demzufolge ist es vom technologischen Standpunkt

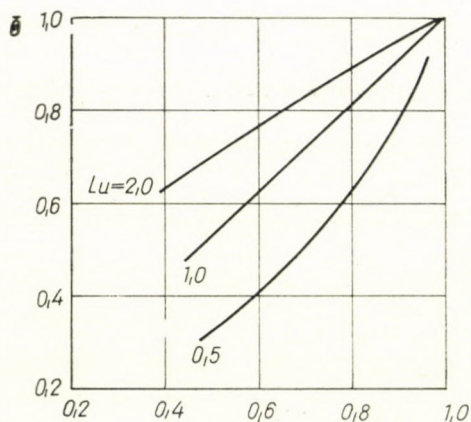


Abb. 2. Das Verhältnis der durchschnittlichen Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges in Abhängigkeit von Lu

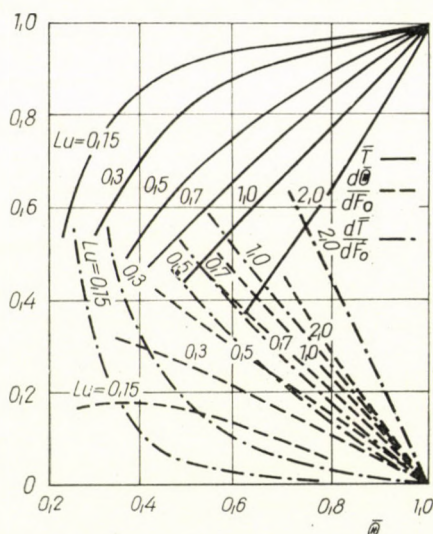


Abb. 3. Die durchschnittlichen Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges und deren Geschwindigkeit in Abhängigkeit von Lu

aus zweckmäßig, eine derartige Betriebsart der Trocknung zu wählen, bei welcher die Zahl Lu ihren Maximalwert annimmt. Die Kriterien Bi_q und Bi_m haben ebenfalls eine große Bedeutung. Bei geringen Werten der Biot-Kriterien sind die Gradienten der Wärme- und Stoffübertragungspotentiale gering. Die Erhöhung der Zahlen Bi_q und Bi_m ist für die Intensität des Vorganges charakteristisch und gleichzeitig steigen auch die Werte von ∇t und $\nabla \theta$. Bei den auf natürlichem Wege erreichbaren Werten der Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung, bei welchen $Fo > 0,3$ (im Falle von Platten) und $Fo > 0,4$ (im Falle einer Kugel) betragen, beginnt das Kriterium Bi_q nur auf die Wärmeübertragung, $(\bar{T}, d\bar{T}/dFo)$, jedoch nicht auf die Feuchtigkeitsbewegung $(\bar{\Theta}, d\bar{\Theta}/dFo)$ einzuwirken. Demgegenüber ist das Kriterium Bi_m nur für die

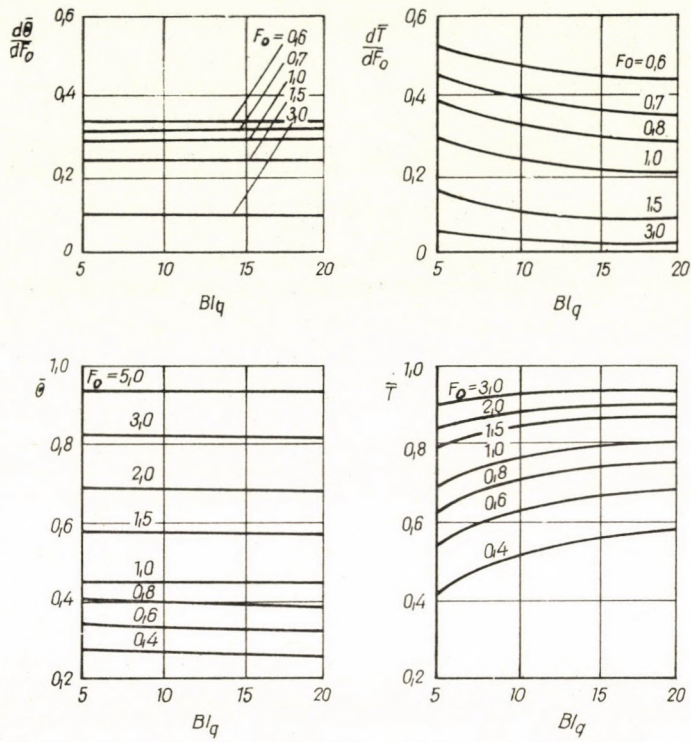


Abb. 4. Die durchschnittlichen Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges in Abhängigkeit von Bi_q

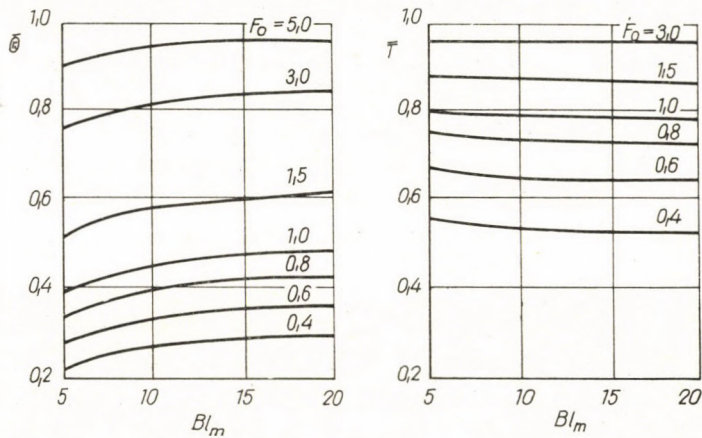


Abb. 5. Die durchschnittlichen Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges in Abhängigkeit von Bi_m

Feuchtigkeitsbewegung charakteristisch (Abb. 4 und 5), deshalb hängt die Trocknungsgeschwindigkeit $d\bar{\theta}/dF_0$ nicht vom Kriterium des Wärmeaustausches Bi_q ab (siehe Abb. 6).

Die Biot-Kriterien der Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung befinden sich, in einem reellen Vorgang, in gegenseitigem Zusammenhang, bei Veränderung von Bi_m verändert sich auch Bi_q . In diesem Falle haben die numerischen Werte der Kriterien eine annähernd gleiche Größenordnung.

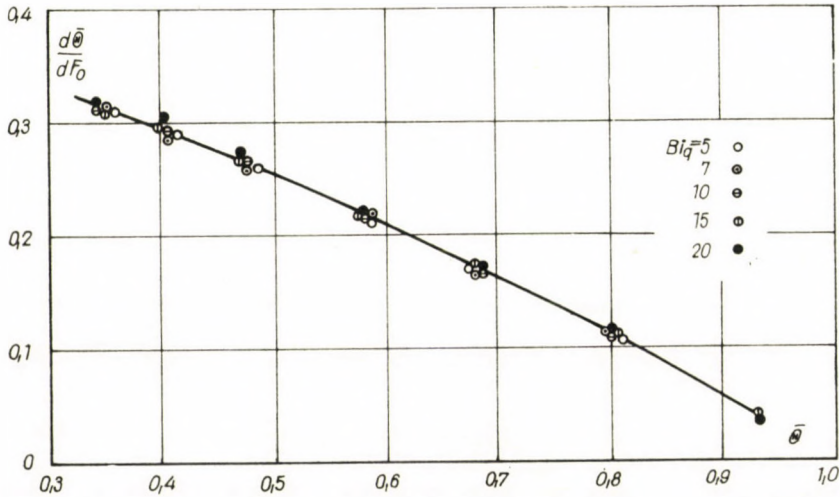


Abb. 6. Die Wirkung des Kriteriums Bi_q auf die Trocknungsgeschwindigkeit

Zu den Kriterien der Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung sind auch die Kriterien Ko und Pn zu rechnen. Bezüglich ihres Charakters erinnern dieselben an die Kriterien Bi_q und Bi_m , sie beziehen sich jedoch, abweichend von den früheren, auf die Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung im Inneren des Stoffes. Das Pn -Kriterium kennzeichnet nur das Potential der Stoffbewegung, während das Ko -Kriterium die Temperaturverteilung (siehe Abb. 7).

Die durchschnittlichen und lokalen Gradienten der Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung vermindern sich linear, dem Erhöhen der numerischen Werte von Pn und Ko entsprechend. Mit der Verminderung des Kriteriums Pn verbessern sich, bei gleichzeitiger Beschleunigung des Trocknungsprozesses, auch die thermischen Bedingungen. Die Berechnungen haben bewiesen, daß bei Verminderung des Feuchtigkeitsbewegungspotentials θ oder des Feuchtigkeitsgehaltes U , auch das Kriterium Pn bedeutend abnimmt. Dies wurde auch durch Versuche bewiesen.

Das Kriterium ε des Phasenüberganges wirkt auf die Kinetik der Trocknung in demselben Sinne wie Ko aus, jedoch ist die Wirkung des Kriteriums ε bedeutend geringer im Vergleich zum Werte von Ko .

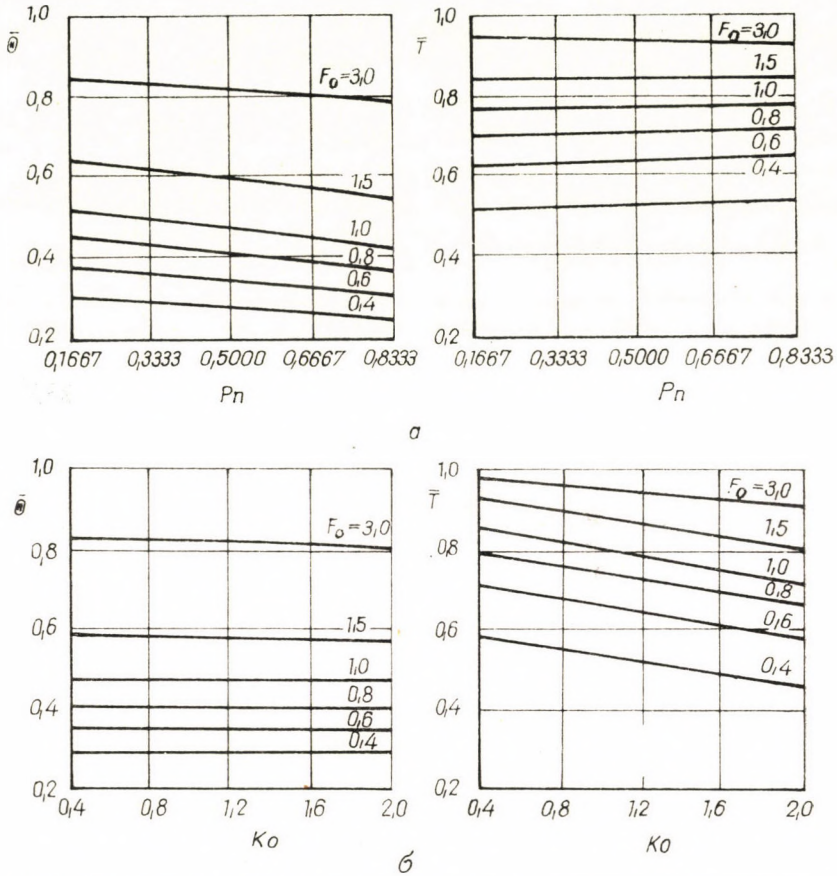


Abb. 7. Die durchschnittlichen Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges in Abhängigkeit von K_o

Es wurde ausgewertet, welche Wirkung der Wert

$$\varepsilon r \frac{C_m}{C_q} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

auf die Veränderung des Wärme- und Feuchtigkeitsbewegungspotentials und auf die Geschwindigkeit dieser Veränderung ausübt. Zu diesem Zweck haben wir die erhaltenen Lösungen für die positiven und negativen Werte der Wärmequelle verglichen. In diesem Falle entspricht die Differenz der Resultate einer zweifachen Erhöhung der Wärmequelle.

Die Berechnungen haben erwiesen, daß die Zunahme der mit den Phasenübertragungen verbundenen Wirkung der Wärmequelle auf die Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung 10—20% ausmacht (siehe Tabelle I).

Tabelle I

In Funktion der Kriterien	Die Änderung des arithmetischen Mittelwertes in %			
	\bar{T}	$\bar{\theta}$	$d\bar{T}/dFo$	$d\bar{\theta}/dFo$
Lu	20	4	2	10
Bi_q	15	4	5	9
Bi_m	20	4	8	9
Pn	21	4	6	11
Ko	21	3	6	12
Durchschnittswerte	19,4	3,8	5,4	10,2

Nach den von J. N. KUPRIC durchgeführten Forschungen muß z. B. der optimale Betrieb der Kornmahlung mit der vorangehenden Konditionierung des Korns verbunden werden, wobei in dem letzteren Vorgang der Wärme- und Stoffübertragung eine entscheidende Rolle zukommt.

Demzufolge wirkt die Wärmequelle am allerbedeutendsten auf den Wärmebereich (in voller Bilanz ist die Wirkung 10%), und hat dabei fast gar keine Wirkung auf das Potential der Feuchtigkeitsleitung (2%), und auf die Geschwindigkeit der Erwärmung des Stoffes (3%). Auch die innere Verdunstung hat bloß eine unbedeutende Wirkung auf die Geschwindigkeit der Trocknung (insgesamt ca. 5%). Die analytischen Data der Ähnlichkeitskriterien (der allgemeinen Veränderlichen) bezüglich der während des Trocknens sich abspielenden Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung zeigen, daß mehrere Kriterien weggelassen, und hierdurch die Zusammenhänge folgenderweise vereinfacht werden können:

$$\bar{T} = f_1 \left(Fo, Lu, \frac{Bi_q}{Ko}, \varepsilon \right) \quad (9)$$

$$\bar{\theta} = f_2 \left(Fo, Lu, \frac{Bi_m}{Pn} \right). \quad (10)$$

Demzufolge wird bei solchem Wärmeübergang, welcher mit Feuchtigkeitsbewegung verbunden ist, die Zahl der allgemeinen Argumente bloß 4 sein: $Fo, Lu, \frac{Bi_q}{Ko}, \varepsilon$. Bei dem Wärmeübergang ohne Feuchtigkeitsbewegung (reiner Wärmeübergang) ist, wie bekannt, die Zahl der allgemeinen Argumente, bei ähnlichen Bedingungen bloß zwei (Fo, Bi_q). Die Tatsache der Feuchtigkeitsbewegung erhöht die Zahl der allgemeinen Argumente um zwei.

Im Falle einer isothermischen Feuchtigkeitsbewegung ist $\bar{\theta}$ die Funktion von zwei Argumenten: Bi_m und $Fo_m (Fo_m = Lu \cdot Fo)$, im Falle von Feuchtig-

keitsbewegung und Wärmeaustausch ist die Anzahl der allgemeinen Argumente ebenfalls zwei: Fo_m und Bi_m/P_n , womit Gl. (10) wie folgt angeschrieben werden kann:

$$\bar{\theta} = f_2 \left(Fo_m, \frac{Bi_m}{P_n} \right). \quad (10a)$$

Die Versuche haben diesen Zusammenhang bestätigt. Demgemäß zeigen wir in Abb. 8 den Zusammenhang der Geschwindigkeit des Trocknens

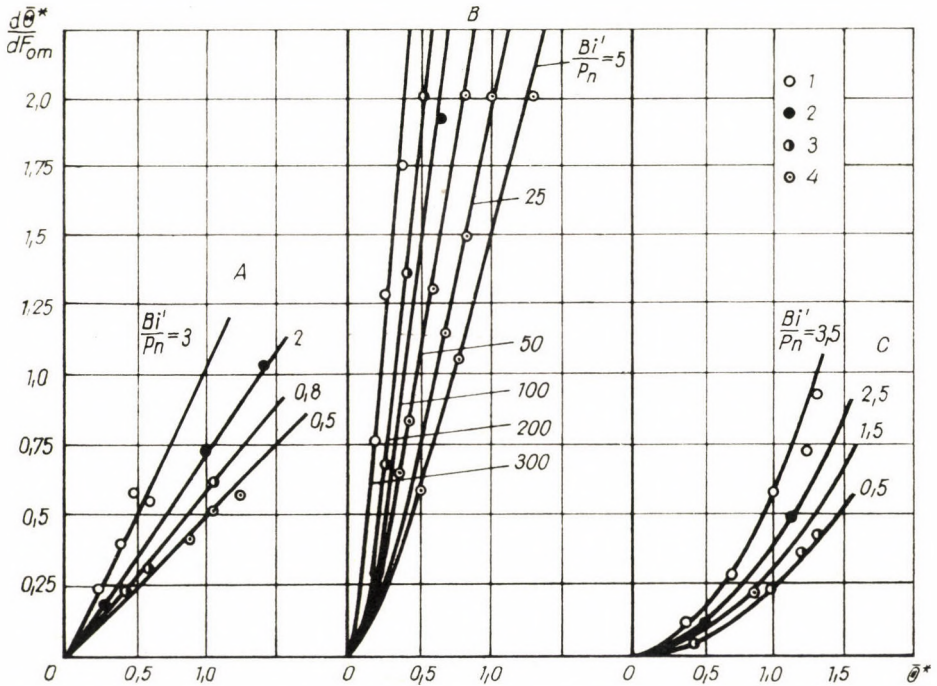


Abb. 8. Die Trocknungsgeschwindigkeit $d\bar{\theta}^*/dFo_m$ in Abhängigkeit von \bar{U}^* , $\bar{U}^* = (\bar{U} - \bar{U}_e)/(\bar{U}_0 - \bar{U}_e)$ (relativer Feuchtigkeitsgehalt) und von dem Komplexkriterium Bi_m/P_n : A — für Quarzsand, B — für Lehm und C — für Fichtenholz, nach den empirischen Daten von P. D. LEBEDEW und A. A. LISEKOW (1)

Angewandte Bezeichnungen: 1 — Trocknung im Gebiete der Hochfrequenz, 2 — Trocknung mit infraroten Strahlen, 3 — Trocknung mit warmer Luft, 4 — Kontakttrocknung

$d\bar{U}^*/dFo_m$ als Funktion des relativen Feuchtigkeitsgehaltes \bar{U}^* [$\bar{U}^* = (\bar{U} - \bar{U}_e)/(\bar{U}_0 - \bar{U}_e)$], wo \bar{U}_0 den Feuchtigkeitsgehalt für die verschiedenen einzelnen Werte des komplexen Kriteriums Bi_m/P_n bedeutet. Aus Abb. 8 ist ersichtlich, daß die Gruppierung der Versuchsergebnisse, welche durch die verschiedenen Trocknungsprozesse erhalten wurden, dem Verhältnis Bi_m/P_n entsprechend erfolgt. Hieraus folgt, daß im Inneren des Körpers der Mechanismus der Feuchtigkeitsübertragung bei den verschiedenen Methoden der Trocknung der gleiche ist.

b) *Wärme- und Stoffübergang bei Trocknungsvorgängen hoher Intensität*

Bei intensiven Erwärmungsprozessen kommt die Feuchtigkeitsbewegung im Inneren des Stoffes nicht nur durch die infolge der Kapillar- und Diffusionskräfte ausgeübte Wirkung zustande, sondern auch in Form der molekularen Bewegung gemäß dem Druckgradienten des Dampf-Gasgemisches. (Bei intensiver Erhitzung wird der Druck des Dampf-Gasgemisches im Inneren des kapillarporigen Körpers den von dem Manometer angezeigten Druck übertreffen.)

Die Ergänzung des Diffusions- und kapillaren Feuchtigkeitstransportes durch diese molekulare Bewegung des Dampfes zieht eine Umwandlung des Mechanismus der Übertragung und damit auch eine Intensivierung des Trocknungsprozesses nach sich. Z. B. bei der Trocknung eines Holzmaterials durch Hochfrequenzstrom und infrarote Bestrahlung bewegt sich etwa 50% der Feuchtigkeit, infolge des Überdruckes, in Dampfform gegen die Oberfläche des Körpers. Derartige Vorgänge der Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung werden in dem — den (4—5) Randbedingungen entsprechenden — Differenzialgleichungssystem (1—3) beschrieben, dessen Lösung in der Monographie [2] und der Abhandlung von J. A. MIHAJLOV [3] bekanntgegeben wird.

In den Lösungen bezüglich der Potentiale T , Θ , P sollen, außer den oben ausgeführten Ähnlichkeitskriterien, weitere zwei neue Kriterien Lu_p , ($Lu_p = a_p/a_q$), und das Kriterium Bu von BULYGIN eingeführt werden.

Die Umwandlung des Transportmechanismus der Feuchtigkeit beeinflusst auch die Auswirkung der Ähnlichkeitskriterien auf T und Θ . Die Wärme- und Stoffübergangskriterien P_n und K_o stellen bezüglich der Bereiche der Übertragungspotentiale keine automatischen Modelle dar. Die Kriterien Bi_q und Bi_m behalten im Sinne des vorangehenden ihre auf die Wärme- und Stoffübertragung ausgeübte Wirkung bei.

Nach Einstellung der regelrechten Betriebsführung ($F_o > 1$) übt das Kriterium Bi_q nur auf den Wärmeübergang und das Kriterium Bi_m nur auf den Stoffübergang eine Wirkung aus (siehe Abb. 9 und 10). Der Potentialbereich \bar{P} des Stoffübergangs wird im Vergleich zu den Kriterien Bi_q und Bi_m ein automatisches Modell.

Aus den Abb. 9 und 10 ist ersichtlich, daß der Bereich Θ nur in geringerem Maße von dem Kriterium Bi_m als der Bereich \bar{T} von dem Kriterium Bi_q abhängt. Der letztere Umstand wird dadurch bedingt, daß der Körper im Vergleich zu der Entwicklung des Bereiches $\bar{\Theta}$ eine größere Trägheit als im Vergleich zu der Entwicklung des Bereiches \bar{T} aufweist, für den Fall von $Lu < 1$.

Im dreidimensionalen Koordinatensystem (\bar{T} , $\bar{\Theta}$, \bar{P}) werden die intensiven Wärme- und Feuchtigkeitsbewegungsvorgänge durch eine Fläche gekenn-

zeichnet, deren jeder Punkt der angegebenen Fo -Zahl entspricht. Wird das eine Ähnlichkeitskriterium fortgelassen, so wird die den Vorgang darstellende Kurve verschoben und bildet die Fläche des Veränderungsvorganges des Kriteriums. Die Linien, welche durch die Schnitte der den gesamten Vorgang

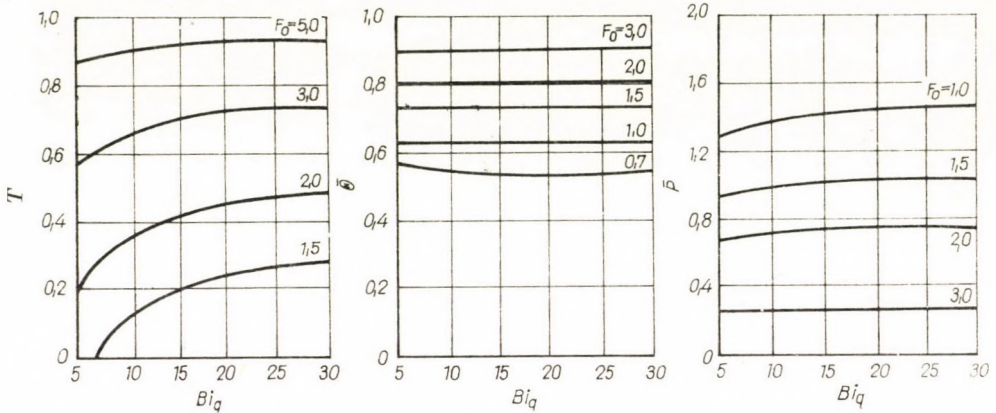


Abb. 9. Durchschnittliche Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges in Abhängigkeit von Bi_q bei intensiver Trocknung

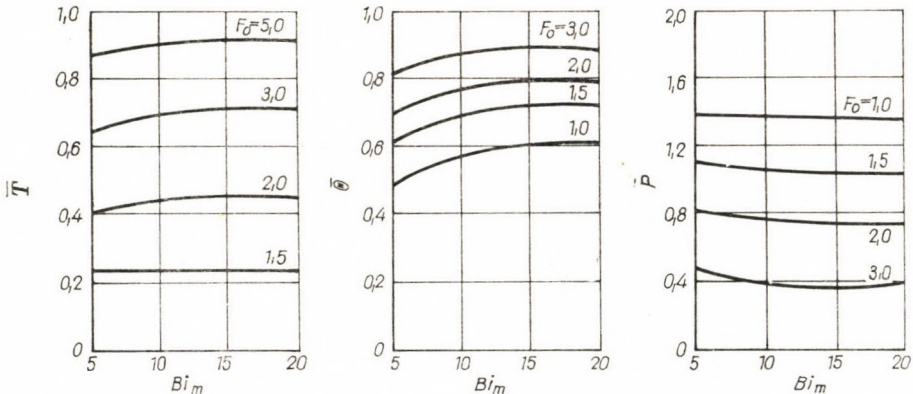


Abb. 10. Durchschnittliche Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges bei intensiver Trocknung, in Abhängigkeit von Bi_m

kennzeichnenden Flächen und Koordinaten erhalten werden, geben an, in welchem Maß die einzelnen Potentiale, bei Beständigkeit der übrigen Potentiale, von den angegebenen Kriterien abhängen. Die derart erhaltenen Gesetzmäßigkeiten wurden durch die Versuchsergebnisse bestätigt.

In dem vorherigen Kapitel haben wir die Veränderungen und die Abhängigkeit des Kriteriums P_n besprochen. Hier gestaltet sich der Temperaturbereich in der Funktion von P_n in einer verschiedenen Weise (Abb. 11). Die Temperatur des Stoffes steigt bei niedrigem Werte von Fo , und nimmt, wenn

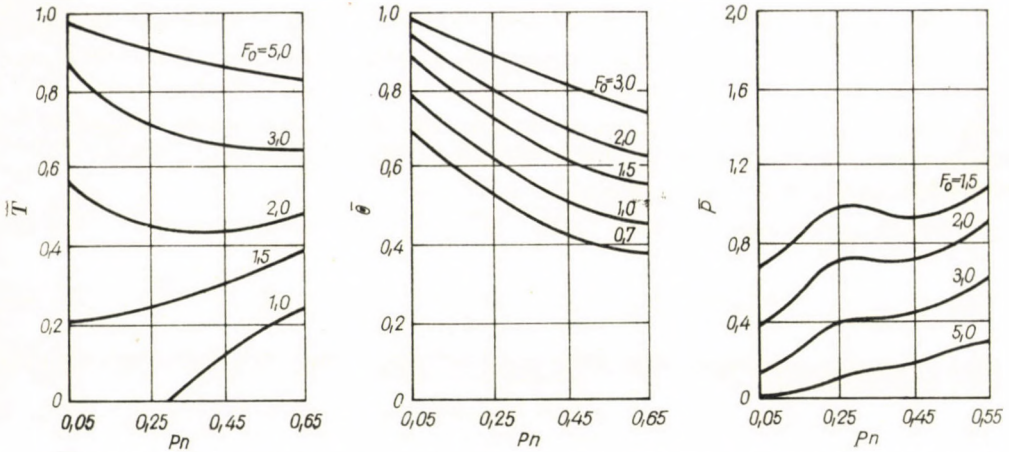


Abb. 11. Durchschnittliche Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges bei intensiver Trocknung, in Abhängigkeit von P_n

$F_0 > 2$, ein entgegengesetztes Vorzeichen an. Dieselbe Folgerung kann auch bezüglich der Wirkung des Kriteriums K_0 auf die Temperaturbereiche gezogen werden. Abweichend vom Kriterium K_0 , ist das Kriterium B_u von jener Wärmemenge abhängig, welche zur Verdampfung jenes Teiles der Flüssigkeit benötigt wird, deren Dämpfe am Molekularübergang beteiligt sind.

Das Kriterium B_u ist nur mit \bar{P} in Beziehung und ist von \bar{T} und $\bar{\theta}$ unabhängig. Abb. 12 zeigt den Zusammenhang von \bar{P} mit dem Kriterium B_u .

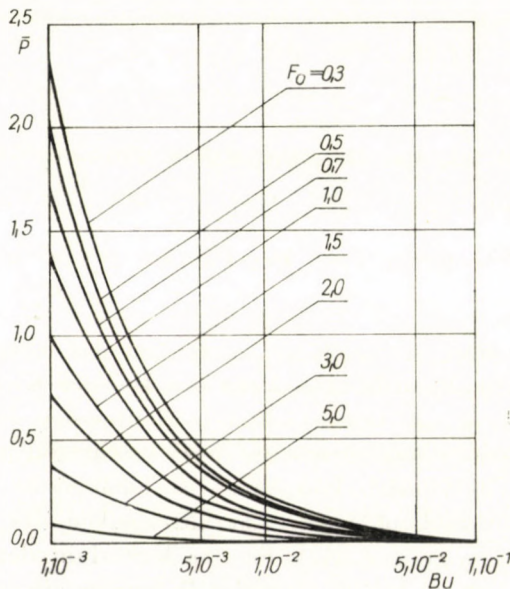


Abb. 12. Das Filterpotential in Abhängigkeit von dem Kriterium B_u

Das Kriterium Lu_p charakterisiert den gegenseitigen Zusammenhang zwischen der molekularen Feuchtigkeitsbewegung und der Wärmeübertragung im Innereren des Stoffes. Abb. 13 zeigt, daß die Zahl Lu_p auch bei Veränderungen von \bar{T} und $\bar{\Theta}$ gut brauchbar ist. Dieses Kriterium verändert sich in äußerst weitem Bereich, bei konvektiver Trocknung ist der Wert der Veränderung von der Größenordnung von Hunderten und kann bei Trocknung mit Hochfrequenzstrom auch die Größenordnung von Tausenden haben.

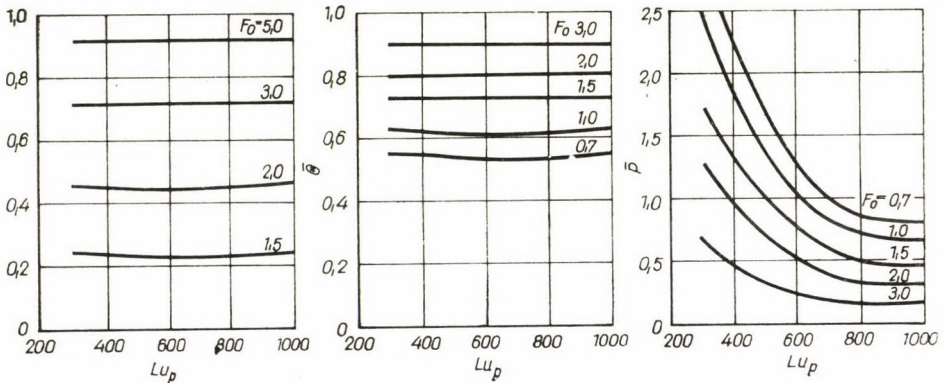


Abb. 13. Durchschnittliche Potentiale des Wärme- und Stoffüberganges, in Abhängigkeit von Lu_p

Auf Grund der Ausführungen kann die Anwendung folgender Kriterien empfohlen werden:

$$T = f_1 \left(Lu, Bi_q, Pn, Ko, \varepsilon, Fo, \frac{x}{R} \right) \tag{11}$$

$$\Theta = f_2 \left(Lu, Bi_m, Pn, Ko, \varepsilon, Fo, \frac{x}{R} \right) \tag{12}$$

$$P = f_3 \left(Lu, Lu_p, Bu, Pn, Ko, \varepsilon, Fo, \frac{x}{R} \right). \tag{13}$$

Von der Trocknungstechnologie sowie von den thermophysikalischen Eigenschaften des Stoffes abhängig, kann ein Teil der Kriterien außer acht gelassen werden. Bei diesen vereinfachten Verhältnissen der Kriterien kann die Zahl der allgemeinen Argumente auf 4—5 beschränkt werden.

Die Ähnlichkeitskriterien können als technologische Kriterien dienen, d. h. sie können als technologische Charakteristiken des unter Trocknung stehenden Stoffes figurieren. Z. B. kann das Kriterium der Feuchtigkeitsbewegung von KIRPITSCHEW als Kriterium der Rißerzeugung angewendet werden

(als Kriterium der lokalen Zersetzung des Stoffes). Das Kriterium der Phasenänderung kann auch als Kriterium des Überganges bei unter Trocknung stehenden wasserlöslichen Stoffen dienen.

Wenn Kriterium ε gleich 1 ist, erfolgt bei wasserlöslichen Stoffen kein Übergang, bei $\varepsilon = 0$ wird der Übergang dieser Stoffe ein maximaler sein.

Die beschriebenen Forschungsmethoden der Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung dienen nicht bloß für die Theorie des Trocknungsprozesses als wissenschaftliche Grundlage, sondern auch für die Theorien der Konditionierung, der Lagerung und der sonstigen Vorgänge mechanischer und thermischer Behandlung von feuchten Stoffen.

In unseren Tagen arbeitet G. A. MAXIMOW an einem Verfahren zur Zertrümmerung der Gesteine, wobei die Zerlegung durch die rasche Erhöhung des Innendruckes durch intensive Erhitzung mit Hochfrequenzstrom erzielt wird. Die Kenntnis der obigen Zusammenhänge trägt stark zur Lösung der Probleme bei.

Auch die Forschungen von E. B. KASAKOW beweisen, daß die Lagerung von feuchten Gütern mit Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung verbunden ist. Deshalb werden die optimalen Lagerungsbedingungen den Gesetzen des Wärme- und Stoffübergangs entsprechend gewählt. Selbst derartige biochemische Vorgänge, wie das Quellen des Korns, sind mit Wärme- und Stoffübergang verbunden. Wenn das Korn Feuchtigkeit absorbiert, entweicht Sorptionswärme, und als Ergebnis des äußeren Wärmeverlustes und der Verdampfung sinkt die Innentemperatur des Korns.

SCHRIFTTUM

1. LYKOW, A. W.: Transporterscheinungen in den kapillar-porösen Körpern (Staatl. Technischer Verlag, 1954).
2. LYKOW, A. W.—JU. A. MICHAILOW: Theorie der Energie- und Stoffübergabe (Akademie der Wissenschaften der BSSR, Minsk, 1959).
3. MICHAILOW, Y.: Intern. Journ. Heat and Mass Transfer (Vol. 1, 37, 1960).
4. LEBEDEV, D. P.: Trocknen mit infraroten Strahlen (Staatl. Energetischer Bücherverlag, 1955).
5. LYKOW, A. W.: Wärme- und Stoffübergang bei Trocknungsprozessen (Staatlicher Energetischer Bücherverlag, 1956).
6. Wissenschaftlich-technische Behauptungen der Konferenz für Steigerung der Intensität des Trocknungsvorganges (Profisdat, 1958).

ZUSAMMENFASSUNG

Die Ergebnisse der Forschungen bezüglich der in den Gütern stattfindenden Wärme- und Feuchtigkeitsbewegungen bilden einen irreversiblen Vorgang. Deshalb wird durch die Untersuchung der während der Trocknung ablaufenden Wärme- und Feuchtigkeitsbewegung die weitere Entwicklung der Thermodynamik der irreversiblen Vorgänge begünstigt, d. h. ein Zweig der Forschung, dem eine außerordentlich wichtige Rolle in der modernen Wissenschaft zukommt.

Das Problem der in den kapillar-porösen Gütern sich abspielenden Vorgänge ist eine zentrale Frage für die Forschungen, die sich mit der Bearbeitung von feuchten Stoffen und in erster Linie mit der Trocknung befassen.

Ohne die Kenntnis dieser Vorgänge ist es unmöglich, den Trocknungsprozeß wesentlich intensiver zu gestalten, die optimalen Möglichkeiten für den Ablauf des Trocknungsprozesses zu wählen, und die besten strukturellen, mechanischen, physikalisch-chemischen und biologischen Eigenschaften der getrockneten Güter zu erzielen.

DISKUSSION

I. FÉNYES

In der Thermodynamik der irreversiblen Vorgänge bildet das Kapitel der instationären Vorgänge ein ziemlich vernachlässigtes Gebiet.

Innerhalb dieses Gebietes stellen die Trocknungsvorgänge irreversible Vorgänge dar, die mit verhältnismäßig geringer Geschwindigkeit vor sich gehen.

Ein charakteristischer Zug der Thermodynamik der irreversiblen Vorgänge ist die Interferenz der verschiedenen Transportprozesse. Dies bedeutet, daß beim gleichzeitigen Verlauf von mehreren Transporterscheinungen unterschiedlicher Art diese voneinander in eigentümlicher Weise beeinflußt werden. Zur Beschreibung dieses Effektes war bis zur Zeit nur die Onsagersche Strömungsgleichung geeignet. Das Wesen dieser Gleichung besteht im folgenden: Die Onsagerschen Kreuzeffekte stellen die Folgen des Umstandes dar, daß die Leitungsmatrix keine diagonale Matrix ist. Eine andere Gruppe der Interferenz tritt dann in Erscheinung, wenn das Produkt aus der Entropie-Matrix und der Leitungsmatrix nicht diagonal ist. Dieses Produkt ist auch dann nicht unbedingt diagonal, wenn die Leitungsmatrix selbst diagonal sein sollte.

Es folgt aus dem vorangehenden, daß die Erscheinungen, die ihren Ursprung in dem nicht diagonalen Charakter des Produktes haben, von den ursprünglichen offenbar unabhängig sind. Durch die Lösung des Eigenwertproblems der Produktmatrix konnten einige interessante Eigenschaften des zeitlichen Verlaufs der in den Vorgängen vorkommenden Affinitäten (allgemeinen Kräfte) aufgeklärt werden.

Der Transport der hier vorkommenden Größen hängt von den Affinitäten ab. Dies stellt eine Eigenschaft der Kreuzeffektinterferenzen dar. Einer anderen Eigentümlichkeit begegnen wir, als sich die Homogenität einzustellen beginnt, wobei die Affinitäten einige Male ihr Vorzeichen wechseln können. Wir haben die Berechnungen für Systeme, die aus homogenen Einheiten bestanden, durchgeführt. Es sind unsere Untersuchungen auch für Kontinua im Gange. Es war dabei die Feststellung interessant, daß durch die geeignete Verallgemeinerung der Lösungen der klassischen Leitungsgleichungen die Lösung der Onsagerschen Leitungsgleichung erhalten werden konnte.

S. ENDRÉNYI

Die allgemein bekannte Entwicklung der Trocknungstheorie führte von den Belüftungsmodellen durch die Kinetik der Trocknung, durch die Klärung der Rolle der technologischen und physikalisch-chemischen Elemente, durch die Dynamik der Trocknung, wo bereits auch die verschiedenen Transporterscheinungen eine Rolle spielen, zur Theorie über das wahre Bild der Feuchtigkeits- und Temperaturverteilung, wobei wir bemerken wollen, daß diese Theorien noch immer mit Hilfe der Mittel der klassischen Thermodynamik aufgebaut worden sind. Dieser Theorie folgte dann die sogenannte Theorie der Wechselwirkungen und der Kreuzeffekte bzw. die Anwendung dieser Theorie auf den Trocknungsprozeß, wobei bereits die Mittel der irreversiblen Thermodynamik verwendet wurden.

Es bleibt jedoch nach meiner Meinung eine offene Frage, ob — ausgehend von den phänomenologischen Gleichungen der klassischen Thermodynamik, z. B. durch Verwendung der Prinzipien der statistischen Mechanik — nicht etwa ähnliche Ergebnisse hätten erhalten werden können. Es dürfte vielleicht eine Möglichkeit bestehen, das Prinzip der Wechselwirkungen und Kreuzeffekte durch entsprechende Transformationen in den Rahmen der klassischen Thermodynamik einzubauen.

A. W. LYKOW

Bei der Anwendung der Methoden der irreversiblen Thermodynamik, in Zusammenhang mit der Lösung verschiedener Aufgaben, begegnete ich selber den in den Diskussionsbeiträgen erwähnten Schwierigkeiten, so z. B. bei den Problemen der Trennung von Gasen und Isotopen. Immerhin sind die theoretischen Ergebnisse, die auf diesem Gebiete erhalten wurden, durch die Versuche vollauf bestätigt.

Die Existenzberechtigung der von Prof. ENDRÉNYI angeführten Methoden — in erster Linie in theoretischer Relation — liegt außer Zweifel. Die von uns erhaltenen zahlreichen Ergebnisse weisen jedoch darauf hin, daß die Methoden der irreversiblen Thermodynamik auf dem theoretischen Gebiete der Trocknung in künftiger Zeit wesentlich bessere Ergebnisse zeitigen werden.

THE HEAT AND MASS TRANSFER BASES FOR THE THEORY OF DRYING

A. W. LYKOW

SUMMARY

The investigation of heat and mass transfer, in capillary and porous bodies, deals with an irreversible phenomenon. For this reason, the examination of heat and mass exchange during drying will in the future aid the further development of thermodynamics of irreversible phenomena, i. e. the development of that branch of science which is of essential importance in the field of modern scientific knowledge.

The problem of heat and mass exchange in the porous and capillary bodies, is the central problem when examining production methods concerned with processing first of all with the drying of wet materials. Without the solution of this problem it is impossible to make the drying processes more intensive, to choose the optimum method of conducting the drying process and of obtaining the best mechanical and structural, physical, chemical and biological qualities in the dried materials.

L'ÉCHANGE DE CHALEUR ET DE MATIÈRE, BASE DE LA THÉORIE DU SÉCHAGE

A. W. LYKOW

RÉSUMÉ

L'étude des phénomènes de transmission de la chaleur et de la matière dans les corps poreux et capillaires, a pour objet un phénomène irréversible. C'est pourquoi l'étude de l'échange de chaleur et de matière au cours du séchage, contribue au développement de la thermodynamique des processus irréversibles, c'est-à-dire au développement d'une branche d'études extrêmement importantes du point de vue des connaissances scientifiques modernes.

Le problème de l'échange de chaleur et de masse dans les corps capillaires et poreux constitue un problème central de l'étude des méthodes de travail des matières humides, et tout particulièrement de leur séchage. Sans la solution de ce problème, il est impossible d'intensifier le séchage, de choisir les méthodes optima de conduite du procédé de séchage, et d'obtenir les meilleures qualités mécaniques, physiques, chimiques et biologiques des matières séchées.

ТЕПЛО- И МАССОБМЕН КАК ОСНОВА ТЕОРИИ СУШКИ

А. В. ЛЫКОВ

РЕЗЮМЕ

Исследования по переносу тепла и вещества в капиллярнопористых телах являются одним из разделов термодинамики необратимых процессов. Поэтому изучение тепло- и массообмена в процессе сушки будет способствовать дальнейшему развитию термодинамики необратимых процессов — этой важнейшей области знаний современной науки.

Проблема тепло- и массообмена в капиллярно-пористых телах является центральной проблемой в изучении технологических процессов обработки влажных материалов и в первую очередь процесса сушки.

Без решения этой проблемы невозможно существенно интенсифицировать процесс сушки, выбрать оптимальный режим протекания его и получить наилучшие структурно-механические, физико-химические и биологические свойства высушенных материалов.

SUPPLÉMENT

à l'étude

SOARE, M. et NICULESCU, D. D.: Observations sur la distribution des efforts dans les voiles minces prismatiques et cylindriques111
parue au fasc. 1—2, T. XXXVIII de l'*Acta Technica*

Bibliographie

1. AGENT, R.: L'utilisation de la méthode de Cross dans le calcul des coques cylindriques et prismatiques, d'après la théorie de Vlassov (en langue roumaine). Rev. «*Industria Construcțiilor*» No. 2—3 (1957).
2. ASHDOWN, A. I.: The Design of Prismatic Structures. Concrete Publications Limited, London, 1951.
3. CARELLI, R.: Una applicazione delle volte scatolari in zona sismica. *Giornale del Genio Civile*, 4—5, p. 283—288 (1957).
4. CISMIGIU, AL. I.: Une classification technique des poutres et des coques cylindriques (en langue roumaine). Rev. *Industria Construcțiilor* No. 6 (1955).
5. CISMIGIU, AL. I., VERNESCU, P. V.: Quelques applications de la théorie de l'élasticité dans les constructions. Plaques courbes et planes (en langue roumaine) E. S. A. C. — Bucarest (1955).
6. CRAEMER, H.: Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente im Eisenbetonbau. *Beton und Eisen*, 13, 14 (1929).
7. DEHOUSSE, N.: Les couvertures en voile mince de forme cylindrique et de section circulaire, *Bulletin CERES VII*, 3—118, 1955.
8. EHLERS, G.: Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken. *Beton und Eisen*, 15, 16 (1930).
9. GAAFAR, I.: Hipped plate analysis considering joint displacements. *Proceedings ASCE*, Paper 182, Apr. 1953.
10. GIANGRECO, E.: Sur l'instabilité de l'équilibre des voûtes minces. *Association Internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires XVI*, Zürich 1956, p. 225—274.
11. GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer-Verlag, Wien, 1946 (4^{ème} ed. en 1956).
12. GOLDENBERG, J. E., LEVE, H. L.: Theory of Prismatic Folded Plate Structures. *International Association for Bridge and Structural Engineering, Memories, X*, 1957, 59—86.
13. GOLDENBLATT, J., RATZ, E.: Berechnung von Faltwerken, welche aus Scheiben und verschiedenen statischen Systemen bestehen. *Beton und Eisen*, 23, p. 369—371 (1934).
14. HRUBAN, K.: Lange parabolische Zylinderschalen. *Cinquième Congrès, Lisboa Porto*, Publication Préliminaire. *Association Internationale des Ponts et Charpentes* 1956, p. 347—353.
15. JAKOBSEN, A. A.: Zylinderschalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser und veränderlicher Schalenstärke. *Der Bauingenieur* 18, p. 418—1937.
16. JAKOBSEN, A. A.: Die Berechnung der Zylinderschalen. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
17. RABICH, R.: Einführung in die Schalenstatik. *Bauplanung—Bautechnik*, 9, p. 381—395 (1954).
18. RABICH, R.: Die Statik der Schalenträger. Die Berechnung der Randstörung an Randträgern. *Bauplanung—Bautechnik*, 1, p. 4—15 (1956).
19. RÜDIGER, D., URBAN, J.: *Kreiszyinderschalen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.

20. SCHMAUSSER, G.: Berechnung zylindrischer Schalendächer unter Längsspannung nach der Methode der »stellvertretenden Faltwerke«. Die Bautechnik, 2—5 (1957).
21. SOARE, M.: L'application des équations aux différences finies au calcul des coques (en langue roumaine), Ed. de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 1959.
22. TETZLAFF, W.: Die praktischen Berechnungsverfahren für tonnen- und tragartige Schalen. VEB Verlag Technik, Berlin, 1953.
23. ВЛАСОВ, В. З. Перечрыгтя типа оболочек. Промстройпрект. Справочник инженера-проектировщика. Промсооружений, IV. Железобетонные конструкции, ОНТУ, 1935.
24. ВЛАСОВ, В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, Москва, 1949.
25. WERFEL, A.: Die genaue Theorie der prismatischen Faltwerke und ihre praktische Anwendung. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Abhandlungen, XIV, Zürich, 1954.
26. WERFEL, A.: Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs. ASCE — Manual of Engineering Practice — No. 31, New York, 1956.

INDEX

- Hevesi, Ю.*: Вопросы режима работы и использования основных фондов производства с точки зрения перспективного планирования развития промышленности. — *Hevesi, Gy.*: Über die Fragen der Arbeitsordnung und Kapazitätsausnutzung der Betriebsanlagen im Hinblick auf die Perspektivplanung unserer Industrieförderung. — On the Rational Utilization of Work Force and of the Plant Capacity in Our Long-Range Planning of Industrial Development. — Les problèmes d'organisation du travail et d'exploitation du fonds fixe, du point de vue de la planification perspective de notre développement industriel. 3
- Szidarovszky, J.*: Examination of Accuracy of the Engesser—Vianello Method and the Rayleigh Quotient — Eine Untersuchung der Genauigkeit der Methode von Engesser—Vianello und des Quotienten von Rayleigh — L'exactitude de la méthode d'Engesser—Vianello et du coefficient de Rayleigh, utilisés pour la détermination de la force critique — *Сидаровски, Я.*: Метод Энгессер—Вианелло для определения критической силы и проверки точности производной Реле 25
- Dékány, S.*: Deux nouvelles méthodes pour susciter la vision des couleurs, et examen de leur possibilité d'emploi dans la technique cinématographique et la télévision — Untersuchung von zwei neueren Farbenseheneffekten und ihrer Anwendungsmöglichkeit in der Filmtechnik, beziehungsweise in der Television — Two New Methods to Produce Colour Vision and an Investigation on the Possibility of Using Them in Film Technics and TV — *Декань, Ш.*: Два новых метода, создающих различие цветов, и исследование их применимости для киносьемок и для телевидения 47
- Hoffmann, A.*: Anwärmen zylindrischer Körper entsprechender Länge bei veränderlicher Ofentemperatur — Heating of a Long Cylinder in a Furnace with Changing Temperature — Chauffage d'un cylindre long dans un four à température variable — *Хоффманн, А.*: Нагрев длинного цилиндра при переменной температуре печи 73
- Balogh, A.*: Einige spezielle Formen der charakteristischen Gleichung bei Torsionsschwingungen — Special Form of the Torsional Vibration Frequency Equation — Quelques formes spéciales de l'équation caractéristique des oscillations de torsion — *Балог, А.*: Некоторые специальные формы характеристических уравнений торсионных колебаний. 105
- Winter, E., Budincsevičs, A. and Frigyes, B. Eva*: Formation of Solid Solutions of Alkaline Earth Metal Carbonates — Bildung von festen Lösungen der Erdalkalimetall-Carbonate — Recherches sur la formation des solutions solides des carbonates de métaux alcalino-terreux — *Винтер, Э., Будинчевич, А. и Фридеш, Б. Е.*: Исследования процесса образования твердых растворов земельно-щелочных карбонатов 127
- Halmos, K., Lipovetz, I. und Proszk, J.*: Versuche zur Herstellung von mit Silikon hydrophobisierten Dampfkondensatoroberflächen und die Untersuchung deren Wärmeübertragungsverhältnisse — Tests on Steam-Condenser Surfaces Hydrophobized with Silicones and the Investigation of their Heat Transfer Conditions — Essais

de préparation de surfaces de condenseurs de vapeur hydrophobisées par silicone, et étude de leur transmission de chaleur — Хальмош, К., Липовец, И. и Прост, И.: Опыты по получению пароконденсаторных поверхностей, гидрофобизированных силиконом, и исследование условий теплопередачи этих поверхностей	143
<i>Csonka, P.</i> : Membrane Shells with Perfectly Free Edges — Membranschalen mit einem vollkommen freien Rand — Voiles minces à rive sans appui — Чонка П.: Мембранные оболочки с совершенно свободным краем	151
<i>Berceli, T.</i> : Travelling-Wave Amplifiers for Microwave Measurements — Wanderfeldverstärker für Mikrowellen-Messungen — Amplificateurs à onde progressive pour mesures aux hyperfréquences — Берцели, Т.: Усилители с бегущей волной для микроволновых измерений	169
<i>Bardócz, Á.</i> : Neues System hoher Präzision zur zeitlich aufgelösten Spektroskopie — A New High Precision System for Time Resolved Spectroscopy — Une nouvelle méthode de haute précision pour produire des spectres résolus dans le temps — Бардоц, А.: Новая особо точная система для разложенной во времени спектроскопии	179
<i>Lykow, A. W.</i> : Die Kenntnis des Wärme- und Stoffüberganges als Grundlage der Trocknungstheorie — The Heat and Mass Transfer, Bases for the Theory of Drying — L'échange de chaleur et de matière, base de la théorie du séchage — Лыков, А. В.: Тепло- и массообмен как основа теории сушки	201

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. V. 31. — Terjedelem: 19,75 (A/5) ív, 66 ábra, 1 melléklet

62.55466 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его зарубежные представительства и уполномоченные.

215

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XL

FASCICULI 3—4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

OSCILLOGRAPHIC STUDY OF THE BREAKING OF LEATHER FIBRES

G. TÓTH

DOCTOR OF CHEMICAL SCIENCES
LEATHER WORKS OF PÉCS, HUNGARY

[Manuscript received December 23, 1960]

In our previous communications [1, 2, 3] an acoustic method for the study of the breaking process of leather fibres was described and data were published with respect to the fibre cross-section breaking per minute as a function of the load in driving belts. These investigations were continued with an oscillograph (manufactured by Orion, AF industrial 9916 type) and the displacements of the beam, corresponding to ten thousand times amplified crackling noises, were photographed by the attached Photo Recorder. The sensitivity of the whole apparatus was increased by a metal plate resonance box placed between the microphone and the leather investigated (Fig. 1).

A 35 mm long and 180 mm wide leather sample, tapered off on a 10 mm stretch to 50 to 100 sq. mm cross-section, was loaded between the jaws of the tenter described in a previous communication (4). The leather may be loaded by any dynamometer, provided that with the help of a suitable transmission the load can be changed noiselessly. The resonance box (r) clamped to the leather (b) receives the sound on an area of approximately 20 sq. cm, while the microphone used in the previous experiments was placed directly on the leather and had a contact area of a few square millimetres only. The leather-tenter, the resonance box and the microphone (m) were placed in a "silent chamber" covered by thick, sound-insulating plates, preventing the outside noises from reaching the microphone. The handle of the tenter was covered with soft sheepskin, so that the noise of the slow turning of the pulley during the test is not unpleasant for the human ear. The crackling noises received by the microphone are 10,000 times amplified by the amplifier (e) and transmitted to the oscillograph. The displacements of the beam appearing on the screen of the oscillograph were photographed by the Photo Recorder to a moving film. The amplified crackling noises were audible through an earphone (H) during filming.

All these modifications added to a considerable improvement in the sensitivity of the entire apparatus and the single crackling noises became more clearly audible.

The breaking of about one hundred oxhides were filmed and evaluated with this apparatus. It is comparatively easy to count the beam displacements

of the oscillograph by placing under the developed reel of film a celluloid plate, the parallel scratches on which correspond to the 10 mm divisions on the oscillograph screen (see Fig. 2).

Under the influence of "louder" crackling noises of greater sound intensity (5) the resonance box gives a somewhat drawn sound and the image of damped beam displacements appears on the film. Fig. 3 shows the oscillographic picture of the ticking of a stop watch; the sounds following maximum deviation are clearly visible. Hence, such a group of beam displacements — called in the following a light signal — was evaluated as representing a single crackling noise. In the case of smaller crackling noises only one displacement of the beam could be observed. The light signals on Fig. 2 represent 38 breaks of different strengths.

The film in the Photo Recorder can be turned with two speeds, namely with 3.7 and 10.8 cm/sec speeds. As it is possible to discern on the film light signals at 1 mm distance from each other, there is a possibility of counting: at least 2000 and 6000 crackling noises, respectively, per minute, which proved to be sufficient for evaluation purposes, provided breaking lasted for some time. To confirm this supposition a film was made of the hum of a loud-speaker switched into the power supply and the film was turned with 3.7 cm/sec speed. The 50 periods per second can be quite clearly counted in Fig. 4.

No too great accuracy should be expected from these counts. Table I, however, proves that the tests are reproducible and the order of magnitude of measurements carried out at different times is in good agreement. Tests with loads in the vicinity of the tensile strength are the least accurate, as only a few crackling noises of great intensity are produced and they either follow each other at very short intervals or blend into one single noise. In these cases the resonance box becomes superfluous and even the amplifier must be tuned down.

Sixty millimetres is the largest beam displacement which the Photo Recorder is still capable of recording. Thus the amplification of the oscillograph must keep the displacements of the beam within this limit. The Orion AF^r industrial oscillograph, Type 9916, has two vertical amplifications. For the amplifications of 1/10, 1/20, 1/30 ... 1/90 dB the ratio of two subsequent divisions of the scale is 3.16 : 1. These amplifications served to regulate the displacements of the beam in such a way that they should be less than 60 mm, i.e. that there shall be room for them on the film. The second amplification with a division from 1 to 9 served to set the smallest observed displacement of the beam at 2 mm. In general the smallest displacements amounted to a few millimetres when the amplification was 1/40 dB, corresponding to division 9 on the scale.

The accuracy of the photographs depends also on the method by which the load is applied. In the first experiments the load was gradually increased

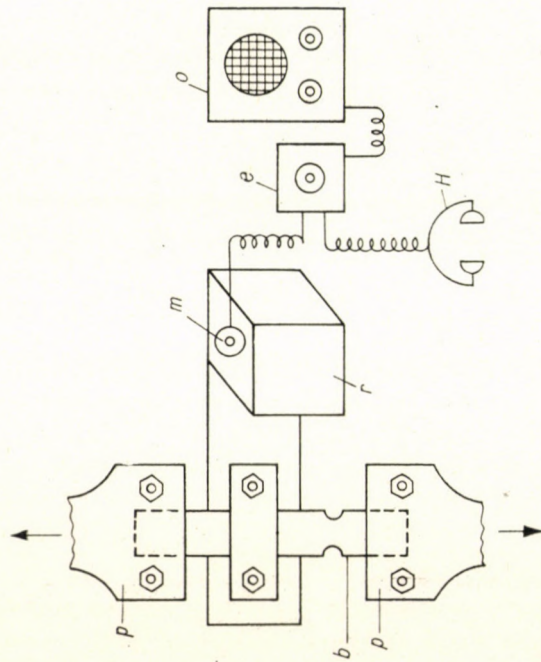


Fig. 1

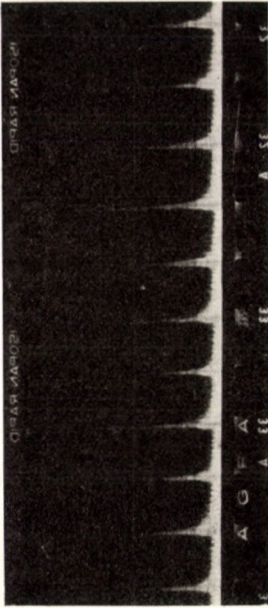


Fig. 3

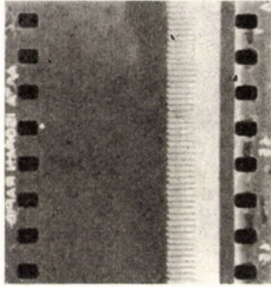


Fig. 4

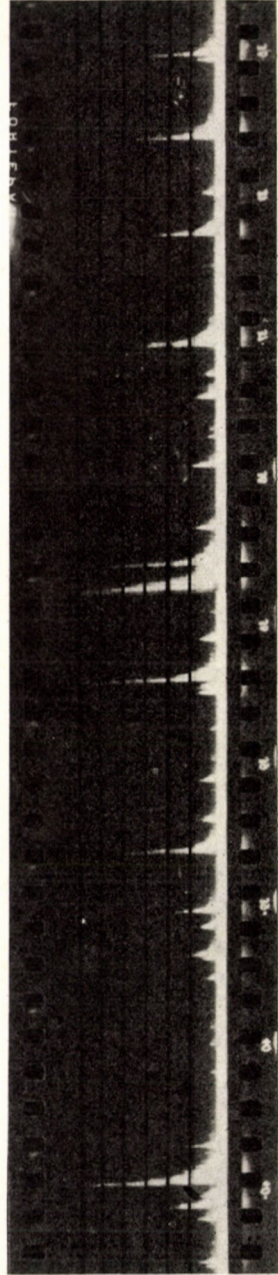


Fig. 2

Table I
Oscillographic count of broken fibres in various oxhides

No.	Experiment		Description of leather	Cross-section of leather in sq cm	Average cross-section of fibres broken in 1 min.	Breaking time min.	Number of broken fibres in 1 sq. cm
	Method of loading	Date					
1	a	7. 11. 1959	veg. tanned driving	0.90	875 000	1	980 000
2	a	19. 12. 1959	belt	0.90	32 200	16	880 000
3	a	19. 12. 1959	„	0.90	48 600	13	700 000
4	a	1. 2. 1960	„	0.82	46 000	15	840 000
5	a	12. 2. 1960	„	0.77	600 000	1	780 000
6	b	20. 2. 1960	„	0.75	273 000	2	725 000
7	a	22. 2. 1960	„	0.75	120 000	6	960 000
8	a	24. 2. 1960	„	0.78	130 000	4.5	750 000
9	a	5. 3. 1960	„	0.78	161 000	3.5	727 000
10	a	5. 3. 1960	chrome driving belt	0.78	140 000	3.5	628 000
11	a	25. 3. 1960	veg. tan. „ „	0.77	455 000	2.5	1 480 000
12	a	25. 3. 1960	„ „ „ „	0.77	5900 000	0.2	1 170 000
13	c	2. 4. 1960	fat. chrome leather	0.72	184 000	6	1 450 000
14	c	2. 4. 1960	„ „ „	0.72	46 000	24	1 200 000
15	c	20. 6. 1960	„ „ „	0.52	3 400	205	1 350 000
16	c	2. 7. 1960	veg. tan. driving belt	0.90	1 600	607	1 122 000
17	c	12. 7. 1960	washed sole leather	0.75	4 900	169	1 100 000
18	c	7. 9. 1960	„ „ „	0.74	17 500	35	840 000
19	c	9. 9. 1960	driv. belt	0.91	12 700	80	1 100 000
20	c	10. 9. 1960	fat. chrome leather	0.53	10 000	90	1 700 000

Average 1 020 000

a = gradually increased load
b = constant load
c = decreasing load (isophone load)

and the breaking of the fibres was periodically filmed. Later films were made of breaks by constant loads. Data of the experiment with increasing load are contained in Table II.

In the case of both methods inaccuracy entered through the circumstance that in the last few seconds of the breaking process, when nearly half a million fibres broke, it was not possible to change quickly enough the amplification of the oscillograph and therefore the displacements of the beam were over 60 mm, the maximum which could be measured. Later it was possible to eliminate this inaccuracy by gradually reducing the load during the test, so that the intensity of the crackling noises accompanying the breaking of the fibres should be nearly of the same order. With sufficient care it can be achieved that at the end the leather is broken already by 20 to 30 kg/sq. cm

Table II
Oscillographic film of fibre breaks in a cold fattened crup butt of 0.77 sq. cm cross-section at increasing load

Load		Number of light signals per min. n	Amplitude of beam displacements (amplification accounted for) A	Average fibre cross-section broken per min.*	$\frac{m\Sigma A}{A_1}$
kg/sq. cm	Duration min. m				
123	1	6	2 (A_1)	6	6
170	1	510	47	12 000	12 000
199	1	180	315	28 400	28 400
226	1	900	415	186 000	186 000
250	0.5	1600	610	485 000	242 000
270	0.2	2820	1720	2 330 000	545 000
Total					1 013 400

Calculated for 1 sq. cm : 1.32×10^6

$$* \frac{\Sigma A}{A_1} = \frac{nA}{A_1}$$

loads, so that the crackling noise at the moment of the break is far less loud. Loading or fatiguing of the leather in this manner shall be called isophone fatigue, or a fatigue of constant sound intensity. The data in Table III and experiments 13 to 20 in Table I refer to such isophone fatigue.

In our previous communication ΣA stood for the cross-section of fibres broken in one minute; this expressed in terms of the smallest observable cross-section of broken fibres is $\frac{\Sigma A}{A_1}$. In the experiments reported here the breaking process lasted sometimes several hours, so that it was not always practicable to film all the breaks and in most cases shots lasting 5 to 10 seconds were taken at random. As this test method is as yet unusual for the laboratories of the leather industry, the following example shall illustrate the details of the method of evaluation.

The 16.5 cm long section of the film in Fig. 2 shows breaks of the fibres over a period of 4.5 sec at 1/50 dB amplification. (Table II filmed in the second minute.) The amplitude of the beam displacement corresponding to the least audible break was set with the help of the second amplification scale at 1/40 dB amplification to 2 mm. It can be seen that

the number of	< 10 mm signals,	taken in average as	5 mm long (j_1)	was	24
"	"	"	10—20 "	"	15 "
"	"	"	20—30 "	"	25 "
"	"	"	30—40 "	"	35 "
"	"	"	40—50 "	"	45 "
"	"	"	50—60 "	"	55 "
total					38

Table III

Oscillographic film of fibre breaks of cold fattened driving belt crup butt of 0.90 sq. cm cross-section at isophone loading. Speed of film : 3.7 cm/sec

No.	Film		Initial load kg/sq. cm	Length of film cm h	Light signals on film		Factor due to ampli- fication	Average fibre cross-section broken per min. $\frac{\Sigma A}{A_1}$
	Time of shoot- ing mins after start				Number j	Average height mm		
—	0		113	—	—	2 (A_1)	1	—
1	2		165	7	3	10	3.16	1500
2	10		175	21	10	14	3.16	2350
3	45		189	22	16	16	1	1300
4	75		189	12	6	5	1	280
5	110		184	7	2	20	1	640
6	140		180	25	13	21	1	1220
7	170		172	10	4	7	3.16	980
8	200		162	10	8	9	1	800
9	240		156	5	2	10	3.16	1400
10	300		147	8.5	10	11	1	1440
11	320		133	8.5	5	5	1	325
12	370		117	7.5	4	15	3.16	2800
13	420		97	15	19	24	1	3380
14	460		82	6	6	22	1	2450
15	550		58	17	17	28	1	3120
16	600		30	39	16	13	3.16	1670
—	607		20	—	—	—	—	—
Average								1610

$$\text{Number of broken fibres per 1 sq. cm} = \frac{1610 \times 607}{0.90} = 1.08 \times 10^6$$

The value of the fibre cross-section broken in one minute and expressed in terms of the smallest break which can still be registered is 12,000, calculated from the following formula:

$$\frac{\Sigma A}{A_1} = [5j_1 + 15j_2 + 25j_3 + 35j_4 + 45j_5 + 55j_6] \frac{60ve}{lA_1}$$

where j = the number of light signals visible on the film after suitable amplification,

l = the length of the film, in the present case 16.5 cm,

v = the speed with which the film is turned, in the present case 3.7 cm sec⁻¹,

e = amplification, in the present case 3.16,

A_1 = amplitude of the smallest beam displacement registered, in the present case 2 mm.

Table II contains the average number of crackling noises per minute (n), which for the example quoted is

$$n = \frac{60v}{l} (j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6) = 510$$

The average amplitude of beam displacements for the example quoted when amplification is taken into consideration (as compared to A_1 amplification) is

$$A = \left[\frac{5 \cdot 24 + 15 \cdot 5 + 25 \cdot 2 + 35 \cdot 2 + 45 \cdot 2 + 55 \cdot 3}{38} \right] \cdot 3.16 = 47 \text{ mm.}$$

As can be seen from Table I the addition of the ΣA values measured at different times of the breaking process and related to 1 sq. cm leather cross-section is between 0.7×10^6 and 1.7×10^6 for various types of leather. Calculating from MIHAILOV's data (6) the number of fibres passing through a 1 sq. cm area of the leather produces a result of a similar order of magnitude. Thus we have succeeded in increasing the sensitivity of the test to such a degree that at small loads, corresponding to 40 to 50 per cent of the tensile strength, the smallest crackling noises audible register the break of a cross-section which has the same order of magnitude as a single fibre. Therefore, no great error is involved when the values in the last column of Table I are taken for the number of broken fibres.

Column 5 of Table IV shows the total number of light signals (crackling noises) $\sum_{n=0}^{n=t} n$ registered during the break of the entire cross-section. As according to the aforesaid A_1 is the amplitude of the beam displacement registered when a cross-section of the order of one fibre breaks, the division of the number of all broken fibres (column 4) by the number of all the light signals will result in the number of fibres broken per light signal (crackling noise) (Table IV, column 6).

The number of fibres broken per light signal will depend on the load, that is to say on the period of fatigue. Table IV and Fig. 5 show the correlation between the breaking time and the average number of fibres at each single crackling noise. It can be seen that if breaking lasts for about one minute then each crackling noise corresponds to the breaking of 500 to 2000 fibres, or whole fibre bundles, while at smaller loads, with a fatigue lasting for hours, only 10 to 20 fibres break simultaneously. It is difficult to count the number of crackling noises when breaking lasts only a few seconds, as the noises merge into each other, but the number of fibres broken during one crackling noise of this type might be estimated at about 10,000 to 20,000. On the other hand when fatigue is slow, cross-sections of the order of the single fibre break gradually one after the other. Hence dynamic stress of the leather over several

Table IV

Correlation between the load, breaking time and the number of fibres broken at each crackling noise

1.	2.	3.	4.	5.	6.		
Description of leather	Breaking time mins	Load expressed in percentage tensile strength	Total number of fibres broken $\frac{\tau}{A_1} \int \Sigma A$	Total number of light signals $\sum_{n=0}^{n=t} n$	Number of fibres broken at each crackling noise (light signal) 4 : 5		
Veg. tan. driv. belt crup butt	0.2	100	1170 000	600	1950		
	0.2	100	750 000	1080	700		
	0.3	100	750 000	460	1630		
	0.3	100	475 000	610	780		
	0.5	100	800 000	1200	670		
	0.7	100	780 000	1820	430		
	1.0	100	780 000	1800	435		
Average	0.5	100	790 000	1080	940		
Veg. tan. driv. belt crup butt	1.7	96	931 000	2120	440		
	2.0	95	725 000	3500	206		
	2.5	91	1 480 000	3000	495		
	3.5	85	727 000	10100	72		
Chrome driv. belt crup butt	3.5	90	628 000	10300	61		
Veg. tan. driv belt crup butt	4.5	86	750 000	9600	78		
	4.5	86	660 000	15000	44		
	6.2	82	710 000	13300	54		
Average	3.5	88	830 000	8500	181		
Fat. chrome leather Veg. tan. driv. belt crup butt	8	81	1 120 000	19000	59		
	13	82	700 000	4540	155		
	15	82	840 000	41000	21		
	15	82	840 000	33600	25		
	16	80	880 000	7850	112		
Fat. chrome leather	24	74	1 530 000	74000	21		
	Average	15	81	985 000	28000	64	
Washed sole l. crup butt Veg. tan. driv. belt crup butt Fat. chrome leather	35	70	840 000	30000	28		
	80	65	1 100 000	44000	25		
	84	66	790 000	110000	7		
	90	67	1 700 000	92000	18		
	169	62	1 100 000	82000	13		
	205	70	1 350 000	150000	9		
	Veg. tan. driv. belt crup butt	607	64	1 122 000	83000	13	
		Average	181	66	1 140 000	85000	16

hours approximates the conception of fatigue and might be used for judging the quality of the leather.

Isophone fatigue is thus suitable for forming a judgement on the quality of the leather. A far greater difference was found between the areas of the isophone diagrams of poor and good quality leathers than between the tensile strengths of the same.

Wear and fatigue of the leather are determined by the correlation between the extent and duration of the load and the fibre cross-sections broken. It would be easiest to present the three factors by a space diagram. Taking one of the three factors as constant, either the isophone diagram or the correlation between the number of fibres broken and time or the correlation between the number of fibres broken and the load

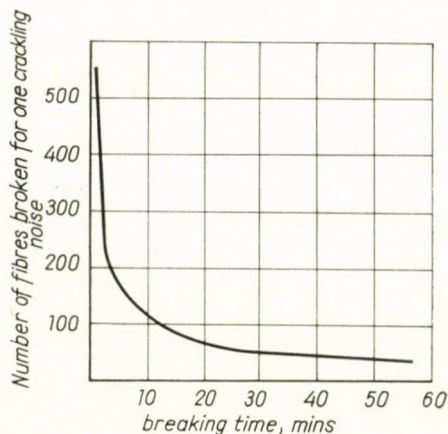


Fig. 5

can be presented along the two coordinates. The latter two correlations can only be studied on oscillograph films, thus their determination is cumbersome, while the isophone diagram can be easily constructed by auditive or oscillographic control without filming.

Fig. 6 shows the isophone breaking diagram of a destroyed and a good quality sole leather. The destroyed leather was prepared by wetting a good quality sole leather with a 10 per cent sulphuric acid solution, followed by the drying and thorough washing of the leather (pH 3.4); the tensile strength of this leather was 140 kg/sq. cm. The tensile strength of a leather sample taken from the vicinity of the destroyed was measured without sulphuric acid destruction after having been washed with water. The result was 202 kg/sq. m.

Both samples were loaded by 85 to 90 per cent of their tensile strength and the load was gradually decreased so that the microphone on the resonance box should always register an approximately identically loud noise. The load was registered every minute. The loudness of the noise was simultaneously judged by earphone and by the observation on the screen of the oscillograph.

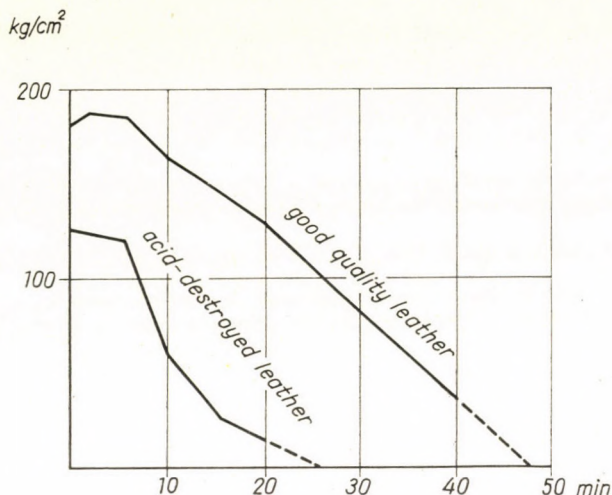


Fig. 6

The ratio between the tensile strengths of the samples was 1 : 1.50, but the ratio of the areas of the isophone diagrams was nearly 1 : 4.

Crackling noises due to the breaking of the fibres can be easily observed when the leather is torn. As smaller loads are needed for continuing the tearing of the leather, taking of isophone diagrams does not require quite as much care. Some further experiments of this type are now in progress.

Acknowledgement

The author wishes to express his thanks to the Instrument Service of the Hungarian Academy of Sciences for the loan of the oscillograph, to Dr. J. ÖRKÉNYI for his valuable advice and to Mr. J. ELTER and Mrs. I. BÓDI for developing the films.

REFERENCES

1. G. TÓTH and J. ÖRKÉNYI: *Bőr- és Cipőtechnika*, 1960, 1.
2. G. TÓTH: *Leder und Häutemarkt*, 1959, 348.
3. G. TÓTH and J. ÖRKÉNYI: *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.*, 1960, 369.
4. G. TÓTH and F. WAIGAND: *Bőr- és Cipőtechnika*, 1957, 104.
5. Nomenclature in accordance with Hung. Stand. 3391-51 and 3392-54.
6. A. MIHAILOV: *Physico-chemical bases of leather manufacture* (In Hungarian), Budapest, 1951, Vol. 1, p. 61.

SUMMARY

The crackling noises which are audible when leather breaks were photographed with the help of an oscillograph and the strength and frequency of the light signals were determined. During the breaking of various oxhides of 1 sq. cm cross-section the break of 0.6×10^6 to 1.7×10^6 fibres could be observed. The experiments indicate that the small noises audible when the load corresponds to 40 to 50 per cent of the tensile strength signal the break of cross-sections of approximately the same order of magnitude as the single fibres. The area of the isophone break diagrams taken at equal sound intensity might be used for forming a judgement on the quality of the leather.

UNTERSUCHUNG DES REISSENS VON LEDERFASERN MIT HILFE DES OSZILLOGRAPHEN

G. TÓTH

ZUSAMMENFASSUNG

Die beim Zerreißen von Leder hörbaren Knälle wurden mit Hilfe eines Oszillographen fotografiert und die Stärke und Häufigkeit der Lichtsignale wurden bestimmt. Beim Zerreißen von 1 cm² Querschnitt von verschiedenen Rindsledern wurde das Reißen von $0,6 \cdot 10^6$. . . $1,7 \cdot 10^6$ Fasern beobachtet. Die Versuche weisen darauf hin, daß die bei einer 40—50% der Zugfestigkeit entsprechenden Belastung hörbaren kleinen Knälle schon das Reißen von Querschnitten anzeigen, die den Dimensionen der einzelnen Fasern entsprechen. Die Fläche der bei gleicher Schallintensität aufgenommenen Zerreißdiagramme dient zur Kennzeichnung der Qualität der Ledersorten.

ÉTUDE DE LA RUPTURE DES FIBRES DE CUIR AU MOYEN DE L'OSCILLOGRAPHE

G. TÓTH

RÉSUMÉ

La crépitation perceptible à l'essai de traction des cuirs a été photographiée à l'aide d'un oscillographe, et on a déterminé l'intensité et la fréquence des signaux lumineux. Aux essais de traction des différents cuirs de boeuf, on observe des ruptures de $0,6 \cdot 10^6$ à $1,7 \cdot 10^6$ fibres. Les essais montrent que les faibles crépitations perceptibles en cas de charges correspondant à 40—50% de la résistance à la rupture, signalent déjà la rupture de sections correspondant aux dimensions des fibres individuelles. L'aire des diagrammes de traction isophones, relevés à intensités sonores égales, sert à caractériser la qualité des cuirs.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЫВА КОЖЕВЕННЫХ ВОЛОКОН С ПОМОЩЬЮ ОСЦИЛЛОГРАФА

Г. ТОТ

РЕЗЮМЕ

Треск, слышимый при разрыве кож, был сфотографирован с помощью осциллографа и была определена сила световых сигналов, а также их частота. При разрыве различных яловок сечением 1 см² можно было наблюдать разрыв волокон в количестве $0,6 \cdot 10^6$ — $1,7 \cdot 10^6$. Опыты показали, что при нагрузке порядка 40—50% сопротивления разрыву слышимо потрескивание, уже сигнализирующее разрыв сечений, соответствующих размерам отдельных волокон. Изофонные диаграммы разрыва, снятые при идентичных звуковых интенсивностях, служат для характеристики качества кож.

THE PART PLAYED BY THE CAPACITIVE COMPONENT IN THE MEASUREMENT OF ABSORPTION CURRENT

GY. VAJDA

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES

ELECTRIC POWER RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received January 13, 1961]

1. Absorption at constant voltage

The phenomena of an absorption current may be observed in a large part of the solid insulation. If a capacitor isolated with such a material is connected to a DC voltage (Fig. 1), additional charges will be stored within the insulation, which will again be released when the capacitor is discharged. The variation of current is shown as a function of time in Fig. 2.

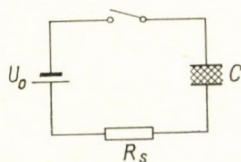


Fig. 1

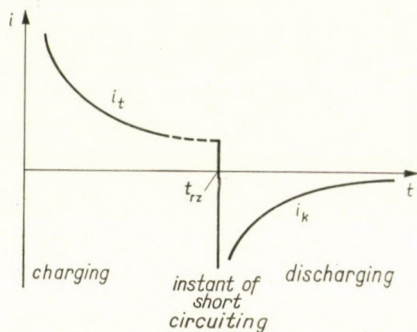


Fig. 2

The time required for a steady state to be established, differs greatly with the material used and may vary in order of magnitude from μ secs. to weeks. In the case of an oil-impregnated paper it is a matter of minutes, with mica-based laminated insulation, of a few hours.

From the practical point of view, absorption currents are interesting not only because, in the case of DC voltages, they exercise a substantial influence

on the time needed for a steady state to develop in capacitors, but also because measurements of absorption currents are used to check the insulation of electrical machines, equipments, etc., since the magnitude of the absorption current is, to a certain extent, characteristic of the inhomogeneity of the insulation [1].

According to the view generally held at present, the charging current i_t may be resolved into several components,

$$i_t = I_e + i_c + i_a + i_{a\text{ irr}}. \quad (1)$$

The steady-state leakage current

$$I_e = \frac{U}{R_e} \quad (2)$$

is determined by the ratio of the voltage to insulation resistance. In the expression

$$i_c = \frac{U}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) \quad (3)$$

for the capacitive component, R_s is the resultant of all the series resistances, the time constant $\Theta_s = R_s C$ is the product of the same series resistance and of the resultant parallel capacitance C , the capacitance C is a value measured by convention at an industrial or other audio-frequency. The absorption component is generally approximated by expression

$$i_a = kCU t^{-n}, \quad (4),$$

due to Curie, where the storage factor n has generally a value smaller than 1 and k is a constant, characteristic of the material. The irreversible absorption $i_{a\text{ irr}}$ is the part of the charging current over the calculable components, which may, however, not always be observed. In the following this component will be neglected.

When discharge takes place, only the components due to absorption and capacity appear, i. e.

$$i_k = i'_c + i'_a. \quad (5)$$

The resistance and time constant in the capacitive component depend on the circuit values, while the absorption current is a mirror image of that observed during charging, so that

$$i'_a = -i_a(t - t_{r2}) \quad (6)$$

and the fully absorbed charge $\int_0^{t_{r2}} i_a dt$, is discharged.

In the formulae 1—6 discussed so far — which are in general use in the literature on the subject — it has been presumed that the voltage U across the capacity is constant. In actual fact the voltage U cannot always be regarded as constant, for the components due to capacity and the absorption current cause a changing voltage drop across the resistance R_s and the voltage across the condenser will change correspondingly.

2. Absorption at voltage which varies with time

In the case of a varying voltage only the leakage component may be directly determined, the capacitive and absorption components being subject to the principle of superposition. The latter may be determined with the aid of Duhamel's integral. The capacitive component is

$$i_c(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{U(\tau)}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) \cdot \exp\left(\frac{\tau}{\Theta_s}\right) d\tau, \quad (7)$$

while the absorption component is

$$i_a(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t k C \cdot U(\tau) (t - \tau)^{-n} d\tau. \quad (8)$$

The integrals may, however, not be determined directly, for $U(\tau)$ is itself a function of the capacitive and absorption components.

It is therefore useful, with the methods of the operator calculus, to determine the resultant charging current $i_t(t)$, whence the voltage will be

$$U(t) = U_0 - R_s \cdot i_t(t), \quad (9)$$

where U_0 is the internal voltage of the voltage source. Knowing the voltage, the individual components of the current may also be calculated without the application of Duhamel's integral, for

$$I_c(t) = \frac{U(t)}{R_e} = \frac{U_0}{R_e} - \frac{R_s}{R_e} i_t, \quad (10)$$

and

$$i_c(t) = C \frac{dU(t)}{dt} = -R_s C \frac{di_t}{dt}, \quad (11)$$

whence also considering (1),

$$i_a = i_t - I_e - i_c = \Theta_\varepsilon \frac{di_t}{dt} + \frac{R_e + R_s}{R_e} i_t - \frac{U_0}{R_e}. \quad (12)$$

Formula (12) furnishes a direct relation between the absorption component and the charging current.

The relations involved may be discussed with the aid of the equivalent circuit of Fig. 3, if a voltage step U_0 is connected to the input terminals of the circuit shown there. R_s in this figure is the resultant of the series resistances,

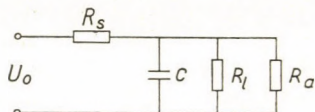


Fig. 3

C is the capacitance of the insulation being investigated, R_e is its insulation resistance, while $R_a = \frac{U}{i_a}$ is the operator form

$$R_a(p) = \frac{1}{Ap^n} \quad (13)$$

of the resistance incorporating the absorption (Appendix, Section 1, expression 1.1), where $A = kC \Gamma(1-n)$. According to the mode of calculation presented in the Appendix (expression 1.4), the operator expression for the current is

$$i_t(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1 + pR_e C + p^n R_e A}{(R_s + R_e) + pR_s R_e C + p^n R_s R_e A}. \quad (14)$$

The determination of the inversely transformed $i_t(t)$ of the Laplace transformation function $i_t(p)$ for the cases of $n = 0$ and $n = \infty$ does not present any particular difficulty. The transformation is not meant for the case of $n = 1$, but the difficulty may be overcome if the absorption current is written in the form

$$i_a = kCU(t + t_0)^{-n}. \quad (15)$$

This is, moreover, justified from the physical point of view, for at the time $t = 0$, the current cannot be infinite. Calculation with the expression (15) is, however, fairly complicated and the retransformed form has not been successfully expressed with familiar functions. The determination of the inverse function for values of n other than the above, requires considerable work,

while it has only been possible to derive it in a closed form, with known functions, in exceptional cases.

The case of an insulation with no absorption current is where $n = \infty$. In this case $R_a = \infty$ and the requisite calculations are contained in Section 2. of the Appendix.

The current will then be

$$i_t = U_0 \frac{R_e}{R_s + R_e} \left[\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_s} \exp \left(- \frac{t}{\Theta_t} \right) \right], \quad (16)$$

and the voltage

$$U = U_0 \frac{R_e}{R_s + R_e} \left[1 - \exp \left(- \frac{t}{\Theta_t} \right) \right], \quad (17)$$

while the time constant is $\Theta_t = \frac{R_s R_e C}{R_s + R_e} = \frac{C}{\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_e}}$.

The same relations are valid if the absorption current is small, i. e. $i_a \ll i_c$ and $i_a \ll I_e$. The course of the voltage in time is then determined solely by the capacitive component. The relations may be applied as good approximations if the absorption component is not small, but the only desired is to determine the part played by the capacitive component.

According to expression (17), the voltage approaches its steady-state value in pursuance of the relation

$$\frac{U}{U_{\text{const.}}} = 1 - \exp \left(- \frac{t}{\Theta_t} \right), \quad (18)$$

and reaches a $(1 - h)$ ratio of the ultimate value at time

$$T_1 = \Theta_t \cdot \ln \frac{1}{h}, \quad (19)$$

as set out in formula (2.8).

Another interesting feature from the practical point of view is the ratio of the capacitive component to the leakage current, which may be determined from the equation

$$\frac{i_c}{I_e} = \frac{\Theta_0}{\Theta_t} \cdot \frac{1}{\exp \left(\frac{t}{\Theta_t} \right) - 1} \quad (20)$$

(c. f. expression 2.7), the set of curves obtained being shown in Fig. 4. The value $\Theta_0 = R_e C$ which occurs in the expression is the time constant characteristic of the self-discharge of the insulation.

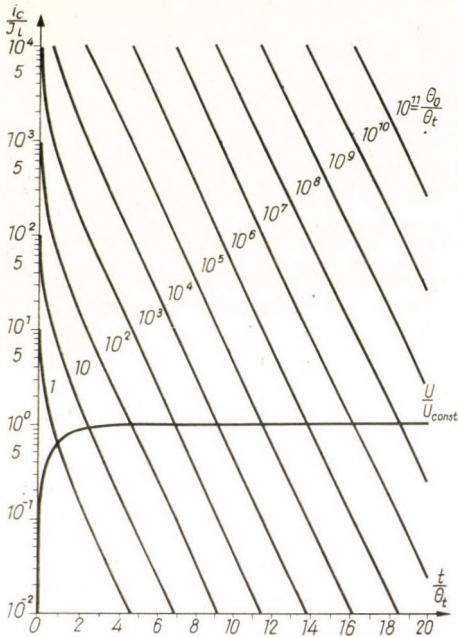


Fig. 4a

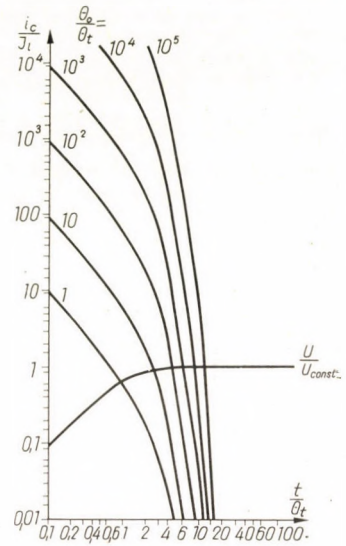


Fig. 4b

According to the calculations set out in the Appendix (equation 2.10), the capacitive component decreases to 100 h percent of the leakage current, in time T_2 , where

$$T_2 = T_1 + \theta_t \ln \frac{\theta_0}{\theta_t}. \tag{21}$$

The time T_2 is always greater than T_1 , the difference being the greater, as the ratio $\frac{\theta_0}{\theta_t}$ is greater (Fig. 5).

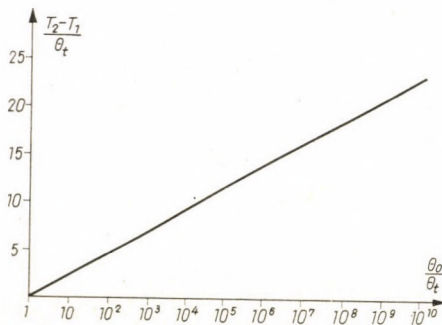


Fig. 5

The development of the relations in time, is especially important in the case of the measurement of absorption currents in insulations. The procedure in making measurements of this type is to register the pattern of the charging or discharging current in time, and obtain the absorption component by subtracting the steady-state value. The resolution into components may only be carried out thus, if the capacitive component is negligible and does not substantially influence the process, for if this is not the case, false conclusions could be drawn. The condition of the insulation only affects the absorption component, the value of the capacitive component being mainly influenced by the magnitude of the circuit parameters. With the help of Fig. 4, it is possible to estimate the time after which the capacitive component may be neglected. In the case of large capacitances, this time may be quite considerable. In practice an error of 1—2 percent is generally permitted in the measured value, with the aim of 1 percent ($h = 0,01$) the voltage may be regarded as constant after a time $T_1 = 4,6 \Theta_t$, while from the point of view of the negligibility of the capacitive component the time T_2 , calculable from formula (21), is to be considered.

The role of the relations in time — the importance of correctly determining the experimental times in agreement with the circumstances of measurement — is well illustrated by the following example. The desire is to examine the condition of the insulation of a turbo-alternator by means of a measurement of the absorption current. The capacitance C , of the insulation is $1 \mu\text{F}$, the insulation resistance $R_e = 200\text{M}\Omega$, the time constant of the insulation $\Theta_0 = R_e C = 200$ secs. The internal resistance R_s of one voltage source, that is available for the measurements, is $1\text{M}\Omega$, the time constant Θ_t of the charging current 1 sec. The voltage reaches 99 percent of its ultimate value after a time $T_1 = 4,6 \Theta_t = 4,6$ secs, at the same time the capacitive current only falls below 1 percent of the leakage current after a time $T_2 = T_1 + \Theta_t \ln 200 = 9,9$ secs. If the same test is carried out with an insulation tester with an internal resistance R_s of $10\text{M}\Omega$, $\Theta_t = 9,5$ secs and the voltage can be regarded as steady after $T_1 = 4,6 \Theta_t = 44$ secs, while the capacitive component drops to 1 percent of the leakage current after the passage of $T_2 = 7,64 \Theta_t \approx 72$ secs.

In classifying insulation, it is a frequent practice to refer the measured values to those determined at 15 secs. In the above example this will present no difficulty in the first case (with $R_s = 1\text{M}\Omega$), but in the second case ($R_s = 10\text{M}\Omega$), it will give completely false results, for after 15 secs the voltage will be 79 percent of the ultimate value, and the capacitive component is 5,47 times the leakage current. It is obvious that in the second case either the 15 sec. reference basis must be abandoned, or else — and this is the preferable course — a voltage source with an internal resistance of $10\text{M}\Omega$ must not be used. Unfortunately efforts are frequently made, to determine the absorption current with insulation testers or meggers of such an internal resistance.

If the experimental apparatus is correctly chosen, the condition $R_e \gg R_s$ is fulfilled and the expressions 16—21 may then be simplified. Since

$$\Theta_t = \frac{R_e}{R_e + R_s} \Theta_s \simeq \Theta_s,$$

it is possible to use the time constant Θ_s instead of Θ_t .

The case of $n = 0$ corresponds to a constant resistance connected parallel to the insulation resistance. The treatment is identical to the case for $n = \infty$, only in place of R_e the expressions have $\frac{R_e R_a}{R_e + R_a}$. This condition is fulfilled in the case of absorption current measurements carried out with certain specific voltage programs [1].

The Research Institute for Mathematics has calculated the inverse transformed functions for the cases of $n = \frac{1}{2}$ and $n = \frac{2}{3}$, while the functions $i_t(t)$ are the expressions 3.9, 3.11 and 3.14 which appear in Section 3 of the Appendix. The formulae are — even in their simplified form — fairly complicated and not particularly suited to practical calculations, so that it is advisable to use an approximate method of treatment, that will lead to simpler relations.

3. Approximate method for investigating absorption currents with varying voltage

The complexity of the calculations is caused by the Curie expression (4) for the absorption current. The mathematical treatment is considerably simpler, if the currents may be approximately represented by exponential functions. The curve for the absorption current may be approximately replaced by the sum of exponentially decreasing components

$$i_a = U \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_i}\right), \quad (22)$$

where $\Theta_i = R_i C_i$ and Fig. 3 may be changed to Fig. 6, in which the effect of absorption is represented by the sum of series relaxation terms $R_i - C_i$.

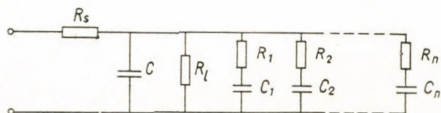


Fig. 6

According to the derivation in Section 4 of the Appendix, the current obeys the expression (4.6). It is apparent from the formula that the characteristic equation will have $(m + 1)$ roots, i. e. the charging current can be composed of the sum of this number of exponentially decreasing components, where m is the number of relaxation terms necessary to produce the absorption component. In a great majority of cases the absorption curve may be produced

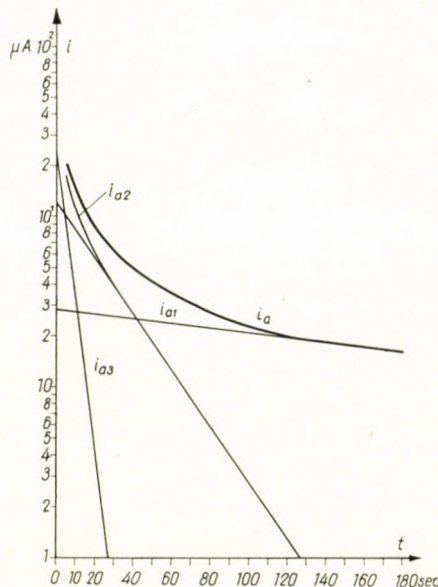


Fig. 7

from 2 or 3 components [2], beyond a certain duration even one component will furnish a good approximate value.

If desired one can find when the voltage may be regarded as steady, it is sufficient to consider only the component with the largest time constant.

By way of an example, Fig. 7 shows the resolution into components of the absorption current curve obtained with the insulation of a turbo-alternator. The construction shows that an excellent approximation to the curve may be obtained with three components. The approximate expression for the absorption is

$$i_a = U \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{3320} \exp\left(-\frac{t}{313}\right) + \frac{1}{845} \exp\left(-\frac{t}{26,3}\right) + \frac{1}{411} \exp\left(-\frac{t}{5,1}\right) \right].$$

The results of construction are summed up in Table 1.

The values taken for the calculation of the specific values were: $C = 0.1 \mu F$, $R_e = 1400 M\Omega$, $R_s = 1 M\Omega$ (the measuring resistance during discharge). The characteristic time constants were: $\Theta_s = R_s C = 0,1$ sec., $\Theta_0 = R_e C = 140$ secs., the ratio of the series resistance to the insulation resistance was $\frac{R_s}{R_e} = 7.15 \cdot 10^{-4}$.

Table 1

Number of Component	$\frac{U}{R_i}$ μA	Θ_i secs.	R_i $\text{M}\Omega$	C_i μF	k_i	$\frac{R_s}{R_i}$	$\frac{R_i}{R_e}$
1	2.85	313	3320	0.0938	0.938	$3.02 \cdot 10^{-4}$	2.37
2	12.2	26.3	845	0.031	0.31	$1.28 \cdot 10^{-3}$	0.605
3	23	5.1	411	0.0124	0.124	$2.43 \cdot 10^{-3}$	0.294

The formula (4.6) in the Appendix, theoretically enables the currents to be determined for any number of relaxation components. However, the many exponential terms render the calculation awkward and it is frequently sufficient to consider only one time constant, i. e. one relaxation component. In the case of a single relaxation component it is enough to treat the equivalent circuit

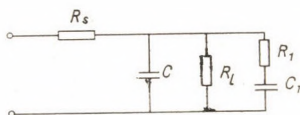


Fig. 8

of Fig. 8. According to the determination of Section 5 of the Appendix, the charging current is

$$i_t = U_0 \left\{ \frac{1}{R_s + R_e} + \frac{1}{R_s} [A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t)] \right\}, \quad (23)$$

while the decaying conduction component is

$$i_a = U_0 \left[\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_e} + C\alpha_1 \right) A_1 \exp(\alpha_1 t) + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_e} + C\alpha_2 \right) A_2 \exp(\alpha_2 t) \right]. \quad (24)$$

Thus, though the process of absorption has only one relaxation time constant Θ_1 , the absorption current is — because of the change in voltage — the resultant of two components, the time constant of which is $-\frac{1}{\alpha_1}$ and $-\frac{1}{\alpha_2}$. The currents and the various relative ratios may be calculated from the expressions (5.5)—(5.18).

The change of voltage with time, may be described by the function

$$U = U_0 \left[\frac{R_e}{R_s + R_e} - A_1 \exp(a_1 t) - A_2 \exp(a_2 t) \right]. \quad (25)$$

According to expression (5.18), the ratio of the capacitive component to the other components is

$$\frac{i_c}{I_e + i_a} = \frac{1}{\frac{R_s}{R_s + R_e} + A_1 \exp\left(-m_1 \frac{t}{\Theta_s}\right) + A_2 \exp\left(-m_2^x \frac{t}{\Theta_s}\right) - 1}, \quad (26)$$

$$m_1 A_1 \exp\left(-m_1 \frac{t}{\Theta_s}\right) + m_2^x A_2 \exp\left(-m_2^x \frac{t}{\Theta_s}\right)$$

where

$$m_1 = -a_1 \Theta_s [a + \sqrt{a^2 - c}] \Theta_s \quad (27)$$

$$m_2^x = -a_2 \Theta_s [a - \sqrt{a^2 - c}] \Theta_s$$

and

$$a = \frac{1}{\Theta_s} \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \frac{R_s}{R_1} \left(1 + \frac{C}{C_1} \right) + \frac{R_s}{R_e} \right] \quad (28)$$

$$c = \frac{1}{\Theta_s^2} \cdot \frac{C}{C_1} \cdot \frac{R_s}{R_1} \left[1 + \frac{R_s}{R_e} \right].$$

The ratios calculated by means of equation (26) are shown on Fig. 9.

The figures show, that the condition $R_s \ll R_e$ does not always mean that the capacitive component will decay rapidly. In some cases the capacitive component may only be neglected after a fairly long period of time, even if the value of $\frac{R_s}{R_e}$ is small. For instance, in the case of the curves of Fig. 9/d, if $k = \frac{C_1}{C} = 0,1$; $\frac{R_s}{R_e} = 10^{-3}$ and $\frac{R_s}{R_1} = 10^{-2}$, at a value of 20 for $\frac{t}{\Theta_s}$, $\frac{i_c}{I_e + i_a} \approx 0,07$. For one of the curves of Fig. 9/b, if $k = 1$; $\frac{R_s}{R_e} = 10^{-3}$; $\frac{R_a}{R_1} = 1$, at a value of 20 for $\frac{t}{\Theta_s}$, $\frac{i_c}{I_e + i_a} \approx 0,1$. This may mean that for the testing of an alternator with an insulation resistance R_e of 1000 M Ω and a capacitance C of 1 μ F, if a voltage source with an internal resistance R_s of 1 M Ω is used, the capacitive component after 20 secs. has a value around 10 percent of the other two components.

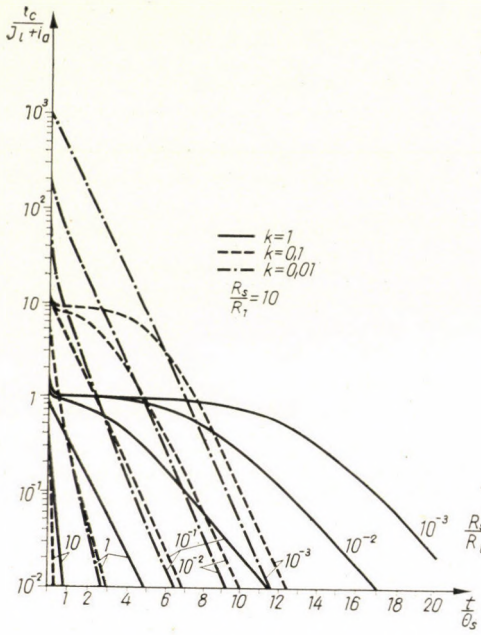


Fig. 9a

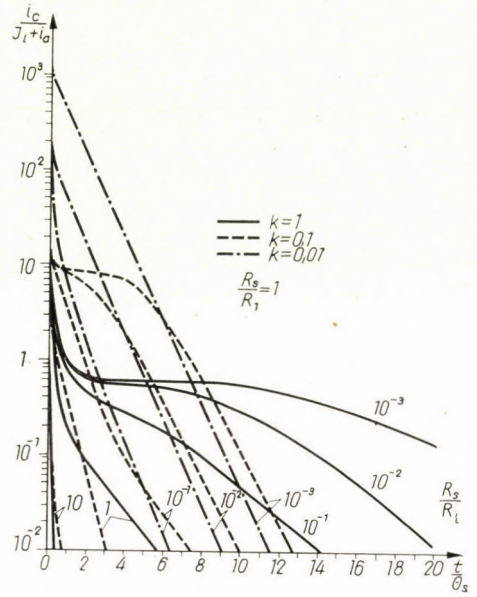


Fig. 9b

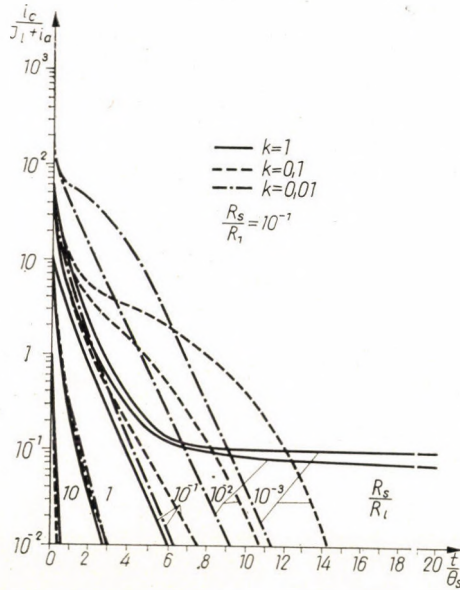


Fig. 9c

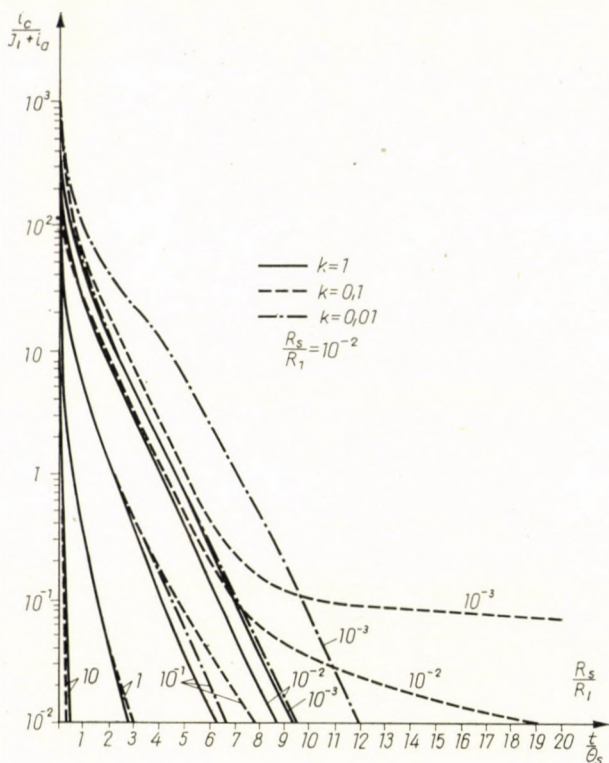


Fig. 9d

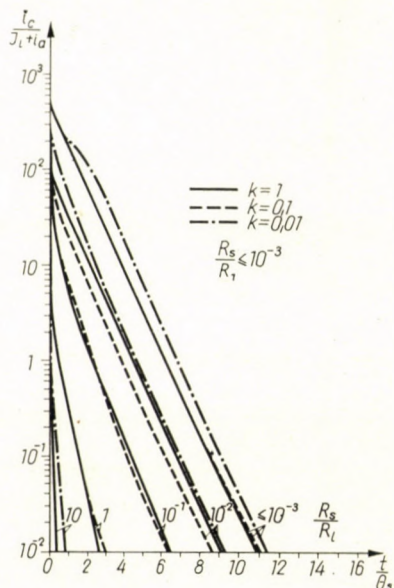


Fig. 9e

The graphs of Fig. 9 are somewhat difficult to peruse and their application requires a certain amount of computing. In practice the charging resistance R_s is usually small, in which case the conditions $R_s \ll R_e$ and $R_s \ll R_1$ are fulfilled.

According to the calculations in the Appendix, we then have

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\Theta_s} \text{ and } \alpha_2 = -\frac{1}{\Theta_1}, \quad (29)$$

moreover

$$A_1 = 1 \text{ and } A_2 = \frac{R_s C_1}{\Theta_1 - \Theta_s}, \quad (30)$$

while the ratio of the capacitive current on the basis of (5.28) is

$$h = \frac{i_c}{I_e + i_a} = \frac{\frac{R_e}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) + \frac{R_e}{R_1} \cdot \frac{\Theta_s}{\Theta_1 - \Theta_s} \exp\left(-\frac{\Theta_s}{\Theta_1} \cdot \frac{t}{\Theta_s}\right)}{1 + \frac{R_e}{R_1} \exp\left(-\frac{\Theta_s}{\Theta_1} \cdot \frac{t}{\Theta_s}\right)}. \quad (31)$$

This enables a much simpler family of curves to be constructed. Graphical representation is easier if (31) is rewritten in the normalised form

$$\frac{h}{\frac{R_e}{R_s}} = \frac{\exp\left(-\frac{t}{\theta_s}\right) + \frac{R_s}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{\theta_1}{\theta_s} - 1} \exp\left(-\frac{\theta_s}{\theta_1} \cdot \frac{t}{\theta_s}\right)}{1 + \frac{R_e}{R_1} \exp\left(-\frac{\theta_s}{\theta_1} \cdot \frac{t}{\theta_s}\right)} \quad (32)$$

The corresponding family of curves is shown in Fig. 10. For the sake of completeness, the figure also shows the curve corresponding to the normalised form of expression (20), which reads

$$\frac{h}{\frac{R_e}{R_s}} = \frac{\exp\left(-\frac{t}{\theta_s}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_s}\right)}, \quad (33)$$

where $h = \frac{i_c}{I_e}$, $i_a = 0$ and $R_s \gg R_e$. The curves have only been shown for the cases of $\frac{\theta_1}{\theta_s} = 10$ and 100. If $\theta_1 \gg \theta_s$

$$\begin{aligned} \frac{h}{\frac{R_e}{R_s}} &= \frac{\exp\left(-\frac{t}{\theta_s}\right) + \frac{R_s}{R_1} \cdot \frac{\theta_s}{\theta_1} \exp\left(-\frac{\theta_s}{\theta_1} \cdot \frac{t}{\theta_s}\right)}{1 + \frac{R_e}{R_1} \exp\left(-\frac{\theta_s}{\theta_1} \cdot \frac{t}{\theta_s}\right)} \approx \\ &\approx \frac{\exp\left(-\frac{t}{\theta_s}\right) + \frac{R_s}{R_1} \cdot \frac{\theta_s}{\theta_1}}{1 + \frac{R_e}{R_1}} \end{aligned} \quad (34)$$

An increase by one order of magnitude in the ratio $\frac{\theta_1}{\theta_s}$ is then equivalent to an increase by one order of magnitude in $\frac{R_1}{R_s}$. In the set of curves of Fig. 10 it was more suitable to allow $\frac{R_1}{R_s}$ be the parameter, for the indexing of the graphs is thus more simple. In order to use the graphs it is necessary to know certain characteristic values. The resistance R_s is determined by the voltage source and other series resistances that may be present. Its value may be regarded as

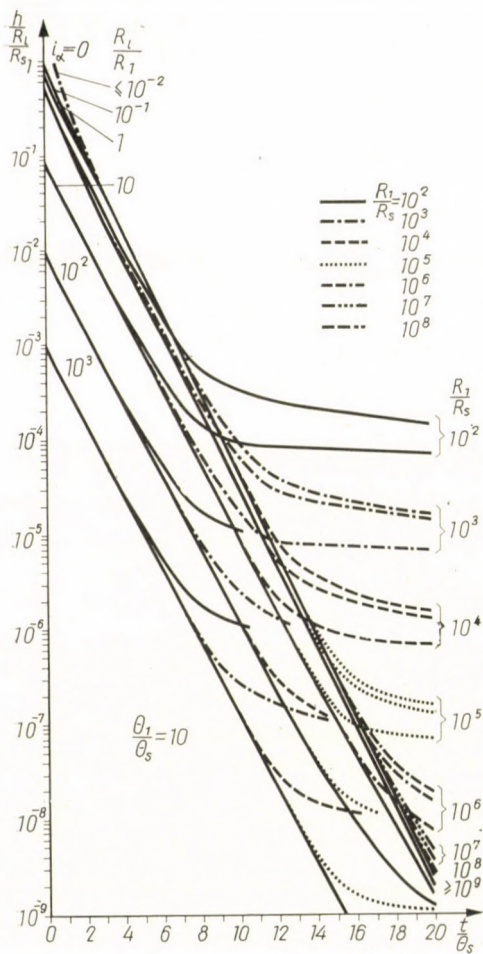


Fig. 10a

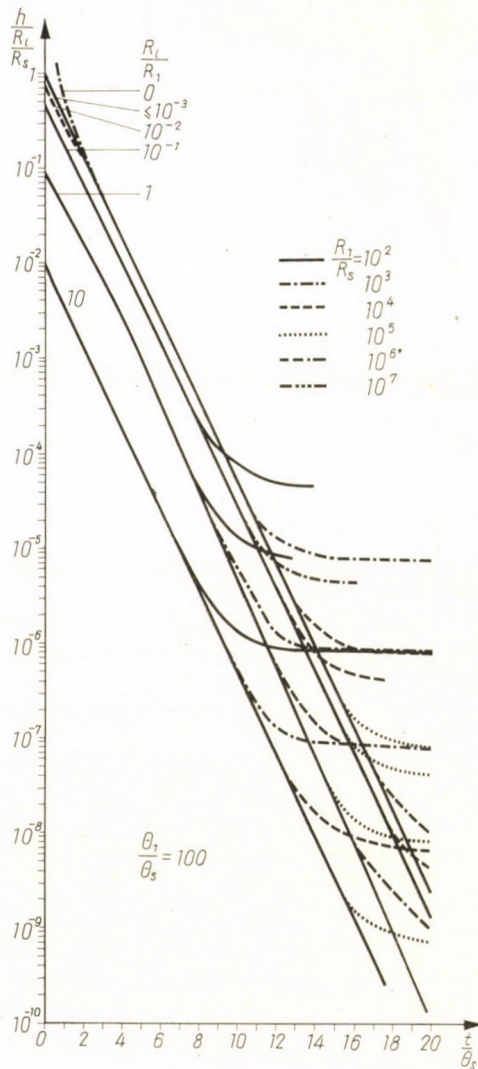


Fig. 10b

known, and if it is not known it may be measured with relative ease. The order of magnitude of the insulation resistance R_e of the insulation and of its capacity C is also generally known, or if not, they can be determined by means of simple measurements. There are usually good average values available for the order of magnitude of the time constant θ_1 of the absorption current for each particular insulation. If this is not the case, a graph of the absorption current taken in the course of a preliminary test will permit it to be estimated, or else it may be obtained by construction, using the procedure shown in Fig. 7. The

time constant θ_s is easy to calculate if R_s and C are known. The only problem is that involved in determining the resistance R_1 . As a rule $R_1 \gg R_e$ and it is frequently unnecessary to find it, for the graphs coincide over a considerable stretch. If nevertheless it is necessary to know R_1 , the best is to find the part of the capacity, C_1 , that corresponds to absorption. This may be measured as the difference between the static capacity (C_s) and the capacity C measured with AC ($C_1 \simeq C_s - C$), or else the method of Alexeyev may be applied [3].

If the capacity C_1 is known, $R_1 = \frac{\theta_1}{C_1}$ can be calculated. The graphs on Fig. 10, if the order of magnitude of $\frac{\theta_1}{\theta_s}$, $\frac{R_e}{R_s}$ and $\frac{R_1}{R_s}$ is known, enable an estimate to be made of the multiple of the time constant θ_s , at which the capacitive component will fall below the desired ratio. The value of $\frac{R_e}{R_1}$ which appears on the figures may be calculated with the help of $\frac{R_e}{R_1} = \frac{R_e}{R_s} \cdot \frac{R_s}{R_1}$.

If, moreover, beside the above, the condition $R_e \ll R_1$ is also fulfilled, the expression (33) will provide an approximation that is sufficient for practical purposes.

Conclusions

When measuring absorption currents, it is important to make sure that the capacitive component should not falsify the results. This may generally be achieved, if all the resistances joined in series with the insulation to be tested, including the internal resistance of the source of voltage, are sufficiently small.

In practice, the investigation of the part played by the capacitive component is frequently not undertaken, which may in some cases be a source of considerable error. This is why it is advisable separately to make certain, that the capacitive current does not influence the results of measurement within the range being examined. If the absorption current is small, it is possible with the help of the set of curves in Fig. 4 to estimate beyond which point of time the capacitive component may be neglected from the point of view of the examination in hand. If the absorption current is relatively large, this estimate may be made with the help of the set of curves in Fig. 9, while if the charging resistance is sufficiently small, the graphs of Fig. 10 may also be used to obtain a good approximation. The formulae set out in the paper also provide an opportunity for undertaking any subsequent correction of the results of measurement, that may prove necessary. The expressions here published also make it possible to estimate the time when the voltage across the terminals of the insulation may be regarded as steady.

The method set out in the paper may be applied not only for an investigation of absorption current, but also for all relaxation processes in which, while a constant voltage is acting, the current flowing in the insulation decreases in the course of time. It should be mentioned, that due to the change of voltage with time, absorption current can itself not always be treated in the manner usual in the literature. The method of calculation presented in this paper, however, makes it possible to carry out any corrections that may prove necessary.

Appendix

1. Determination of the Laplace transform of the charging current

The operator form of the absorption resistance is

$$\begin{aligned} R_a(p) &= \frac{U_1(p)}{i_{a1}(p)} = \frac{U_1(p)}{kC \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-n} dt} = \frac{\frac{1}{p}}{kC \frac{\Gamma(1-n)}{p^{1-n}}} = \\ &= \frac{1}{kC \Gamma(1-n)} \cdot \frac{1}{p^n} = \frac{1}{Ap^n}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

The resultant admittance of the three components connected in parallel in fig. 3. is

$$\frac{1}{Z_1(p)} = pC + \frac{1}{R_e} + Ap^n = \frac{1 + pR_e C + p^n R_e A}{R_e}, \quad (1.2)$$

the resultant impedance of the whole system is

$$Z_e(p) = R_s + Z_1(p) = \frac{(R_s + R_e) + pR_s R_e C + p^n R_s R_e A}{1 + pR_e C + p^n R_e A}. \quad (1.3)$$

When a voltage U_0 is connected, a current

$$\begin{aligned} i_t(p) &= \frac{U_0(p)}{Z_e(p)} = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1 + pR_e C + p^n R_e A}{(R_s + R_e) + pR_s R_e C + p^n R_s R_e A} = \\ &= \frac{U_0}{c} [d \cdot f(p) + e \cdot g(p) + h(p)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

will flow, where

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{p + ap^n + b}, \\ g(p) &= \frac{p^n}{p(p + ap^n + b)}, \\ h(p) &= \frac{1}{p(p + ap^n + b)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

and the various symbols signify as follows:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{C} = k\Gamma(1-n), \quad b = \frac{R_s + R_e}{R_s R_e C} = \frac{1}{\Theta_t}, \quad c = R_s R_e C, \\ d &= R_e C, \quad e = R_e A. \end{aligned}$$

2. *Determination of the charging current if the absorption current is negligible*

If the storage factor $n = \infty$, according to expression (4) $i_a = 0$, therefore $R_a = \infty$. The problem is simplified to that of charging an RC circuit. The current is

$$i_t(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1 + pR_e C}{(R_s + R_e) + pR_s R_e C} \quad (2.1)$$

which may be transformed back to

$$i_t(t) = U_0 \frac{R_e}{R_s + R_e} \left[\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_t}\right) \right] \quad (2.2)$$

$$\text{where } \Theta_t = \frac{R_s R_e C}{R_s + R_e} = \frac{R_e}{R_s + R_e} \Theta_s = \frac{R_s}{R_s + R_e} \Theta_0.$$

Θ_0 is the time constant $R_e C$ of the insulation itself, Θ_s the series time constant $R_s C$. The voltage is

$$U = U_0 - R_s i_t = U_0 \frac{R_e}{R_s + R_e} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\Theta_t}\right) \right], \quad (2.3)$$

the leakage current

$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{U_0}{R_s + R_e} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\Theta_t}\right) \right], \quad (2.4)$$

and the capacitive component of the current

$$i_c = C \frac{dU}{dt} = i_t - I_e = \frac{U_0}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_t}\right). \quad (2.5)$$

The value of the voltage, referring to the steady-state value is

$$\frac{U}{U_{\text{const}}} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\Theta_t}\right), \quad (2.6)$$

while the ratio of the capacitive component to the leakage current is

$$\frac{i_c}{I_e} = \frac{R_s + R_e}{R_s} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{t}{\Theta_t}\right) - 1} = \frac{\Theta_0}{\Theta_t} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{t}{\Theta_t}\right) - 1}. \quad (2.7)$$

If the values may be permitted an error of 100 h percent, the voltage will reach the proportion $(1 - h)$ of the steady-state value at a time T_1 , where according to (2.6),

$$\frac{T_1}{\Theta_t} = \ln \frac{1}{h} = -\ln h. \quad (2.8)$$

The capacitive component will decrease to 100 h percent of the leakage current at a time T_2 , where according to (2.7),

$$\frac{T_2}{\Theta_t} = \ln \left[1 + \frac{1}{h} \frac{\Theta_0}{\Theta_t} \right] \simeq \ln \frac{\Theta_0}{\Theta_t} \cdot \frac{1}{h}, \quad (2.9)$$

since $\frac{\Theta_0}{\Theta_t} > 1$ and $h \ll 1$. Combining the expressions (2.8) and (2.9),

$$T_2 = T_1 + \Theta_t \ln \frac{\Theta_0}{\Theta_t}. \quad (2.10)$$

3. *The determination of the charging current if n is a proper fraction*

If $n = \frac{\rho}{\lambda}$ is a proper fraction (ρ and λ are whole numbers), the expressions (1.5) may be resolved into partial fractions, such as

$$\begin{aligned}
 f(p) &= \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{A_i}{p^{\frac{1}{\lambda}} - a_i}, \\
 g(p) &= \frac{B_0}{p^{\frac{1}{\lambda}}} + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{B_i}{p^{\frac{1}{\lambda}} - a_i}, \\
 h(p) &= \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{C_i}{p^{\frac{1}{\lambda}}} + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{D_i}{p^{\frac{1}{\lambda}} - a_i},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

where the roots a_i may be determined from the characteristic equation

$$x^\lambda = ax^{n\lambda} + b = 0. \tag{3.2}$$

The coefficients $A_i \dots D_i$ may be calculated in the usual manner. The inverse transformation of the function

$$e_\lambda(p) = \frac{1}{p^{\frac{1}{\lambda}} - a} \tag{3.3}$$

which occurs in the partial fractions is, using the Riemann-Mellin formula,

$$E_\lambda(t, a) = \lambda a^{\lambda-1} \exp(a^\lambda t) + \lambda \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda}}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^\lambda e^{-z^\lambda t} dz}{z^2 - 2az \cos \frac{\pi}{\lambda} + 2}, \tag{3.4}$$

which may in some cases also be expressed in known functions.

In the case of $n = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$, the expression (3.4) becomes

$$E_2(t, a) = 2a \exp(a^2 t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} - a [1 - \Phi(a\sqrt{t})] \exp(a^2 t), \tag{3.5}$$

as a result of which the transformation of the functions (1.5) are

$$\left. \begin{aligned}
 F(t) &= A_1 a_1 [1 + \Phi(a_1 \sqrt{t})] \exp(a_1^2 t) + A_2 a_2 [1 + \Phi(a_2 \sqrt{t})] \exp(a_2^2 t) \\
 G(t) &= B_1 a_1 [1 + \Phi(a_1 \sqrt{t})] \exp(a_1^2 t) + B_2 a_2 [1 + \Phi(a_2 \sqrt{t})] \exp(a_2^2 t) \\
 H(t) &= C_0 + D_1 a_1 [1 + \Phi(a_1 \sqrt{t})] \exp(a_1^2 t) + D_2 a_2 [1 + \Phi(a_2 \sqrt{t})] \exp(a_2^2 t).
 \end{aligned} \right\} \tag{3.6}$$

The values of the coefficients are

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{a_1 - a_2}, \quad A_2 = \frac{1}{a_2 - a_1}, \\
 B_1 &= \frac{1}{a_1(a_1 - a_2)}, \quad B_2 = \frac{1}{a_2(a_2 - a_1)}, \\
 C_0 &= \frac{1}{a_1 a_2}, \quad D_1 = \frac{1}{a_1^2(a_1 - a_2)}, \quad D_2 = \frac{1}{a_2^2(a_2 - a_1)}.
 \end{aligned}$$

The roots may be found from the equation

$$a^2 + aa + b = 0. \tag{3.7}$$

Considering the symbols of (1.4), moreover, since

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) &= 1.77, \\
 a_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = -0.885k \pm \sqrt{0.785k^2 - \frac{1}{\theta_1}}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Performing the possible contractions and substitutions

$$i_t(t) = U_0 \left\{ \frac{1}{R_s + R_{sz}} + \frac{\alpha_1^2 + 1,77 k \alpha_1 + \frac{1}{\Theta_0}}{R_s \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_2)} [1 + \Phi(\alpha_1 \sqrt{t})] \exp(\alpha_1^2 t) + \frac{\alpha_2^2 + 1,77 k \alpha_2 + \frac{1}{\Theta_0}}{R_s \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)} [1 + \Phi(\alpha_2 \sqrt{t})] \exp(\alpha_2^2 t) \right\}, \quad (3.9)$$

where $\Theta_0 = R_e C$.

Under certain conditions, the expressions may be simplified. If

$$k^2 \Theta_t \leq 10^{-4}, \quad \alpha_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{\Theta_t}};$$

moreover, if

$$k^2 \Theta_t \leq 10^{-2}, \quad \alpha_{1,2} = -0,885 k \pm \frac{i}{\sqrt{\Theta_t}};$$

while, if $k^2 \Theta_t \geq 10^2$, $\alpha_1 = 0$ and $\alpha_2 = -a = -1,77 k$.

In the latter case, when $\alpha_1 = 0$ and $\alpha_2 = -a$, the boundary transitions for $\alpha_1 \rightarrow 0$ of the functions $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ must be determined. If this is done,

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= [1 - \Phi(a\sqrt{t})] \exp(a^2 t) \\ G(t) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} [1 - \Phi(a\sqrt{t})] \exp(a^2 t) \\ H(t) &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \frac{1}{a^2} [1 - \Phi(a\sqrt{t})] \exp(a^2 t) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

and the more simple expression

$$i_t(t) = U_0 \left\{ \frac{\exp(a^2 t)}{R_e \Theta_s a^2} [1 - \Phi(a\sqrt{t})] + \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_e \Theta_s a^2} - \frac{1,13}{R_e \Theta_s a} \sqrt{t} \right\} \quad (3.11)$$

may be obtained for the charging current.

In the cases $n = \frac{1}{3}$ and $n = \frac{2}{3}$, $\lambda = 3$ and the roots α_i may be determined from the equation

$$\alpha^3 + a\alpha + b \neq 0 \quad (3.12)$$

in the first case, and

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b = 0 \quad (3.13)$$

in the second. The function $E_3(t, a)$ can not be determined in a closed form by known functions. With considerations similar to those above, the expression

$$\begin{aligned} i_t &= \frac{U_0}{R_s R_e C} \left\{ \sum_{j=1}^3 (R_e C A_j + k R_e C \Gamma [1 - n] B_j + D_j) \cdot \right. \\ &\cdot \left[3 \alpha_j^2 \exp(\alpha_j^2 t) + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{z^3 \exp(-z^2 t)}{z^2 - \alpha_j z + \alpha_j^2} dz \right] + \frac{C_1}{1,36} \cdot \frac{1}{3\sqrt{t}} + \\ &\left. + \frac{k R_e C \Gamma (1 - n) B_0 + C_2}{2,68} \cdot \frac{1}{3\sqrt{t^2}} + C_0 \right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

for the current is obtained.

4. The determination of the current for the case of many relaxation terms

The time constant of the relaxation terms (fig. 6) is $\Theta_i = R_i C_i$. The specific ratio of the individual capacitive elements is $k_i = \frac{C_i}{C}$. The impedance of a single relaxation term is

$$Z_i(p) = R_i + \frac{1}{p C_i} = \frac{1 + p R_i C_i}{p C_i} = \frac{1 + p \Theta_i}{p C_i}, \quad (4.1)$$

the resultant admittance of the relaxation members connected in parallel is

$$\frac{1}{Z_1(p)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{Z_i(p)} = \sum_{i=1}^m \frac{p C_i}{1 + p \Theta_i} = \frac{\sum_{l=1}^m p C_l \prod_{i=1}^m (1 + p \Theta_i)}{\prod_{i=1}^m (1 + p \Theta_i)} \quad l \neq i. \quad (4.2)$$

The admittance of all components connected in parallel is

$$\frac{1}{Z_1(p)} = pC + \frac{1}{R_e} + \sum_{i=1}^m \frac{p C_i}{1 + p \Theta_i} = \frac{1}{R_e} + pC \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{1 + p \Theta_i} \right], \quad (4.3)$$

from which the resultant impedance of the circuit is

$$Z_e(p) = R_s + Z_1(p) = R_s + \frac{R_e}{1 + p R_e C \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{1 + p \Theta_i} \right]}. \quad (4.4)$$

Rearranging and introducing the notation $R_e C = \Theta_0$, expression (4.4) may be written in the form

$$Z_e(p) = \frac{R_s \prod_{l=0}^m (1 + p \Theta_l) + R_e \prod_{l=1}^m (1 + p \Theta_l) + p R_s \Theta_0 \sum_{j=1}^m k_j \prod_{i=1}^m (1 + p \Theta_i)}{\prod_{l=0}^m (1 + p \Theta_l) + p \Theta_0 \sum_{j=1}^m k_j \prod_{i=1}^m (1 + p \Theta_i)} \quad i \neq j \quad (4.5)$$

and the current is

$$i_i(p) = \frac{U_0(p)}{Z_e(p)} = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1}{Z_e(p)} = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{\prod_{l=0}^m (1 + p \Theta_l) + p \Theta_0 \sum_{j=1}^m k_j \prod_{i=1}^m (1 + p \Theta_i)}{R_s \prod_{l=0}^m (1 + p \Theta_l) + R_e \prod_{l=1}^m (1 + p \Theta_l) + p R_s \Theta_0 \sum_{j=1}^m k_j (1 + p \Theta_i)} \quad i \neq j \quad (4.6)$$

5. The determination of the current for the case of one relaxation term

Using the symbols of fig. 8, the resultant resistance is

$$Z_e(p) = \frac{R_s(1 + p \Theta_0)(1 + p \Theta_1) + R_e(1 + p \Theta_1) + p R_s \Theta_2}{(1 + p \Theta_0)(1 + p \Theta_1) + p \Theta_2}, \quad (5.1)$$

where $\Theta_0 = R_{s2} C$, $\Theta_1 = R_1 C_1$ and $\Theta_2 = R_e C_1 = \Theta_0 k_1$.

The current, considering (4.6), is

$$i_i(p) = \frac{U_0}{p \Theta_0 \Theta_1 R_s} \cdot \frac{\Theta_0 \Theta_1 p^2 + (\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2) p + 1}{p^2 + \frac{R_s(\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2) + R_e \Theta_1}{\Theta_0 \Theta_1 R_s} p + \frac{R_s + R_e}{\Theta_0 \Theta_1 R_s}} \quad (5.2)$$

when the evolution theorem is applied, the current is

$$i_t(t) = \frac{U_0}{\Theta_0 \Theta_1 R_s} \left[\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{a_1 \Theta_0 \Theta_1 + \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \frac{1}{a_1}}{a_1 - a_2} \exp(a_1 t) + \frac{a_2 \Theta_0 \Theta_1 + \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \frac{1}{a_2}}{a_2 - a_1} \exp(a_2 t) \right]. \quad (5.3)$$

The roots of the characteristic equation are

$$a_{1,2} = - \frac{R_s(\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2) + R_e \Theta_1}{2R_s \Theta_0 \Theta_1} \mp \frac{1}{2R_s \Theta_0 \Theta_1} \sqrt{[R_s(\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2) + R_e \Theta_1]^2 - 4(R_s + R_e) R_s \Theta_0 \Theta_1}. \quad (5.4)$$

Since $a_1 a_2 = \frac{R_s + R_e}{R_s \Theta_0 \Theta_1}$, the charging current is

$$i_t = U_0 \left[\frac{1}{R_s + R_e} + \frac{a_1 \Theta_0 \Theta_1 + \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \frac{1}{a_1}}{(a_1 - a_2) R_s \Theta_0 \Theta_1} \exp(a_1 t) + \frac{a_2 \Theta_0 \Theta_1 + \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \frac{1}{a_2}}{(a_2 - a_1) R_s \Theta_0 \Theta_1} \exp(a_2 t) \right] = U_0 \left[\frac{1}{R_s + R_e} + \frac{1}{R_s} [A_1 \exp(a_1 t) + A_2 \exp(a_2 t)] \right], \quad (5.5)$$

if the notations

$$A_1 = \frac{a_1 \Theta_0 \Theta_1 + \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \frac{1}{a_1}}{(a_1 - a_2) \Theta_0 \Theta_1},$$

$$A_2 = \frac{a_2 \Theta_0 \Theta_1 + \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \frac{1}{a_2}}{(a_2 - a_1) \Theta_0 \Theta_1}$$

are used. Hence the voltage is

$$U = U_0 - R_s i_t = U_0 \left[\frac{R_e}{R_s + R_e} - A_1 \exp(a_1 t) - A_2 \exp(a_2 t) \right], \quad (5.6)$$

the leakage current

$$I_e = \frac{U}{R_e} = U_0 \left[\frac{1}{R_s + R_e} - \frac{1}{R_e} [A_1 \exp(a_1 t) + A_2 \exp(a_2 t)] \right], \quad (5.7)$$

the capacitive component

$$i_c = C \frac{dU}{dt} = - U_0 C [a_1 A_1 \exp(a_1 t) + a_2 A_2 \exp(a_2 t)], \quad (5.8)$$

and finally the absorption component

$$i_a = i_t - I_e - i_c = U_0 \left[\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_e} + C a_1 \right) A_1 \exp(a_1 t) + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_e} + C a_2 \right) A_2 \exp(a_2 t) \right]. \quad (5.9)$$

The ratio of the momentary and steady-state values of the voltage is

$$\frac{U}{U_{\text{const}}} = 1 - \frac{R_s + R_e}{R_e} [A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t)]. \quad (5.10)$$

The relation of the capacitive component to the other components is given by

$$\begin{aligned} \frac{i_c}{I_e + i_a} &= \frac{i_c}{i_t - i_c} = \frac{1}{\frac{i_t}{i_c} - 1} = \\ &= \frac{-1}{\frac{R_s}{R_s + R_e} + A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t)} \cdot \\ &\quad \frac{\Theta_s [a_1 A_1 \exp(\alpha_1 t) + a_2 A_2 \exp(\alpha_2 t)] + 1}{1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

For the purposes of calculation it is best to write the roots of the characteristic equation in the form

$$\alpha_{1,2} = -a \mp b = -a \mp \sqrt{a^2 - c}, \quad (5.12)$$

where, due to the rearrangement of (5.4)

$$a = \frac{1}{\Theta_s} \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \frac{R_s}{R_1} \left(1 + \frac{C}{C_1} \right) + \frac{R_s}{R_e} \right] \quad (5.13)$$

$$c = \frac{1}{\Theta_s^2} \cdot \frac{C}{C_1} \cdot \frac{R_s}{R_1} \left[1 + \frac{R_s}{R_e} \right]. \quad (5.14)$$

To facilitate a later phase, it is advisable to introduce the notations

$$\begin{aligned} m_1 &= -a_1 \Theta_s = (a + b) \Theta_s \\ m_2 &= -a_2 \Theta_1 = (a - b) \Theta_1 \\ m_2^x &= -a_2 \Theta_s = m_2 \frac{\Theta_s}{\Theta_1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

In accordance with the expressions (5.15), the coefficients A are

$$A_1 = \frac{1}{m_2^x - m_1} \left[\frac{R_s}{R_1} \left(\frac{C}{C_1} + 1 - \frac{1}{m_1} \cdot \frac{C}{C_1} \cdot \frac{R_s}{R_e} \right) + \frac{R_s}{R_e} - m_1 \right] \quad (5.16)$$

$$A_2 = \frac{1}{m_1 - m_2^x} \left[\frac{R_s}{R_1} \left(\frac{C}{C_1} + 1 - \frac{1}{m_2^x} \cdot \frac{C}{C_1} \cdot \frac{R_s}{R_e} \right) + \frac{R_s}{R_e} - m_2^x \right] \quad (5.17)$$

and expression (5.11) may be rewritten in the form

$$\frac{i_c}{I_e - i_a} = \frac{1}{\frac{R_s}{R_s + R_e} + A_1 \exp\left(-m_1 \frac{t}{\Theta_s}\right) + A_2 \exp\left(-m_2^x \frac{t}{\Theta_2}\right) - 1} \cdot \frac{m_1 A_1 \exp\left(-m_1 \frac{t}{\Theta_s}\right) + m_2^x A_2 \exp\left(-m_2^x \frac{t}{\Theta_s}\right)}{1}. \quad (5.18)$$

If the resistance R_s of the charging circuit is small, i. e. if $R_s \ll R_e$ and $R_s \ll R_1$, the expressions are much more simple and the roots are

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Theta_s} + \frac{1}{\Theta_1} \right) \mp \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Theta_s} - \frac{1}{\Theta_1} \right), \quad (5.19)$$

so that

$$\alpha_1 \simeq \frac{1}{\Theta_s}, \alpha_2 \simeq -\frac{1}{\Theta_1}, \quad (5.20)$$

where $\Theta_s = R_s C_1$ is, in compliance with the earlier notations, the time constant of the series capacitive circuit (in this case $m_1 = m_2 = 1$). The simplified values of the coefficients are

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{R_s C_1}{\Theta_1 - \Theta_s} \quad (5.21)$$

and the formulae (5.5)–(5.11), after the small quantities have been neglected, become the following:

$$U = U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) - \frac{R_s C_1}{\Theta_1 - \Theta_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \right] \quad (5.22)$$

$$i_t = U_0 \left[\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) + \frac{C_1}{\Theta_1 - \Theta_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \right] \quad (5.23)$$

$$I_e = U_0 \left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_e} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) - \frac{1}{R_e} \frac{R_s C_1}{\Theta_1 - \Theta_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \right] \quad (5.24)$$

$$i_c = U_0 \left[\frac{1}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) + \frac{1}{R_1} \frac{\Theta_s}{\Theta_1 - \Theta_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \right] \quad (5.25)$$

$$i_a = U_0 \left[\frac{1}{R_e} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) + \frac{1}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \right] \quad (5.26)$$

$$\frac{U}{U_{\text{const}}} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) - \frac{R_s C_1}{\Theta_1 - \Theta_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \quad (5.27)$$

$$\frac{i_c}{I_e + i_a} = \frac{\frac{R_1}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) + \frac{\Theta_s}{\Theta_1 - \Theta_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right)}{\frac{R_1}{R_e} + \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right)} \quad (5.28)$$

Frequently $\Theta_1 \gg \Theta_s$. This makes it possible to carry out further simplifications, as follows:

$$U \simeq U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) \right] \quad (5.29)$$

$$i_t \simeq U_0 \left[\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) + \frac{1}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \right] \quad (5.30)$$

$$I_e \simeq \frac{U_0}{R_e} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) \right] \quad (5.31)$$

$$i_c \simeq \frac{U_0}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) \quad (5.32)$$

$$i_a \simeq U_0 \left[\frac{1}{R_e} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right) + \frac{1}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right) \right] \quad (5.33)$$

In expressions (5.30) and (5.33), first the terms with time constants of Θ_1 may be neglected near the equilibrium state those of time constants Θ_s . The current ratio examined is

$$\frac{i_c}{I_e + i_a} \simeq \frac{\exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right)}{\frac{R_s}{R_e} + \frac{R_s}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_1}\right)} \simeq \frac{R_e}{R_s} \frac{\exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right)}{1 + \frac{R_e}{R_1}} \quad (5.35)$$

The expressions (5.29)–(5.35) are very similar to those of (2.1)–(2.7), in the case where $\Theta_t = \Theta_s$, which is fulfilled if the voltage ratios are those postulated. This is a further corroboration of the fact that the case discussed in Section 2 of the Appendix — if R_s is a sufficiently small value — may be regarded as a fair approximation.

Finally, if $R_e \ll R_1$, the terms containing Θ_1 may be completely neglected and the part of the capacitive component may be represented by the expression

$$\frac{i_c}{I_e + i_a} \approx \frac{R_e}{R_s} \exp\left(-\frac{t}{\Theta_s}\right). \quad (5.36)$$

REFERENCES

1. VAJDA, GY.: Szigetelések vizsgálata egyenárammal. (The DC testing of insulation.) *Elektrotechnika* 53. 402 (1960)
2. WHITEHEAD, J. B., BANOS, A.: Predetermination of the A-C characteristics of dielectrics. *Trans. AIEE.* 51. 392. (1932)
3. Алексеев В. А.: Новый метод определения влажности изоляции обмоток трансформаторов. *Электричество* (2) p. 28. (1956).

SUMMARY

Recently papers have frequently appeared on the absorption currents measured in insulations. In the course of these measurements it is generally presumed that the voltage across the terminals of the insulation is constant and that the capacitive charging current decays so rapidly, that it does not influence the results of the measurement. These conditions are not, however, always fulfilled. The paper investigates methods for checking the extent to which changes in the voltage or the effect of the capacitive component influence the measurement.

DIE ROLLE DER KAPAZITIVEN KOMPONENTE BEI DER UNTERSUCHUNG DER ABSORPTION

GY. VAJDA

ZUSAMMENFASSUNG

In letzterer Zeit erscheinen öfters Arbeiten über die in Isolationen gemeßenen Absorptionsströme. Bei den Untersuchungen wird meistens konstante Klemmenspannung an der Isolation vorausgesetzt sowie ein derart rasches Abklingen des kapazitiven Ladestromes, daß derselbe die Meßergebnisse nicht beeinflußt. Diese Voraussetzungen sind jedoch nicht immer erfüllt. Die Arbeit untersucht, wie es zu kontrollieren ist, in welchem Maße die Änderung der Spannung oder der Einfluß der kapazitiven Komponente die Untersuchungen beeinflußt.

LE RÔLE DE LA COMPOSANTE CAPACITIVE DANS L'ÉTUDE DE L'ABSORPTION

GY. VAJDA

RÉSUMÉ

Un certain nombre d'études, publiées ces derniers temps, ont été consacrées aux courants d'absorption mesurés dans les isolants. Les auteurs supposent, pour la plupart, que la tension est constante aux bornes de l'isolement, et que le courant de charge capacitif décroît si vite, qu'il n'influence pas les résultats des mesures. Cependant, ces conditions ne sont pas toujours remplies. L'étude examine les moyens d'analyser l'influence, que la variation de la tension ou l'action de la composante capacitive peuvent avoir sur les résultats.

РОЛЬ ЕМКОСТНОГО КОМПОНЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ АБСОРБЦИИ

Д. ВАЙДА

РЕЗЮМЕ

В последнее время часто появляются публикации по абсорбционным токам, измеренным в изоляциях. При исследовании в большинстве случаев исходят из предположения, что на зажимах изоляции напряжение является неизменным и что емкостной зарядный ток спадает так быстро, что не влияет на результаты измерений. Однако эти условия не всегда удовлетворяются. Работа ставит целью изучить, каким образом можно проверить, что в какой мере влияет изменение напряжения или же действие емкостного компонента на измерения.

THE PARKES PROCESS WITH ZINC ADDITION IN TWO STAGES GRANTING MINIMUM ZINC CONSUMPTION

Z. HORVÁTH
D. OF ENG. SC.

and

J. WÉBER

METALLURGICAL DEPARTMENT OF THE UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRY, MISKOLC

[Manuscript received: February 2, 1961]

1. Introduction

In the Parkes process zinc or an intermediate product containing free zinc is added to the lead which had already been purified from copper, tin, arsenic and antimony; the working temperature is so adjusted that the added zinc could dissolve and then the whole is allowed to cool down. First an alloy consisting of zinc, precious metal and a small amount of lead crystallizes. Its specific weight is smaller than that of the lead which remains in a liquid state so that it can ascend to the surface of the bath where it can easily be skimmed off.

The theoretical fundamentals of the process have been investigated by several workers [1—11]. The ternary system of lead—zinc—silver was first studied by KREMAN and HOFMEIER [1] also by HENGLEIN and KÖSTER [4] as well as DAVEY [10] have recently subjected it to a thorough investigation. WILLIAMS [2] determined the change of the silver and zinc solution power of lead in relationship to temperature. On basis of the tests performed JOHANSEN and LANGE-EICHHOLZ [6] have come to the conclusion that with the drop of temperature the silver solution power of lead decreases to such an extent which becomes the higher the more zinc is alloyed to it before cooling. It was found that from the point of view of the Parkes process it is the section between the eutectic curve and the liquid miscibility gap boundary of the ternary diagram which is the most significant. LANGE-EICHHOLZ and WASOW [9] proved that desilverizing with zinc addition could be performed at a permanent temperature too, and that in such cases it was practical to work at the lowest possible temperature in order to economize with zinc. DAVEY [10] found that close to the lead corner there was a ternary eutectic containing a small amount of silver. He investigated the composition of the solid phases which are at equilibrium with the liquid phase and investigated the condition under which the operation could be performed most favourably. Later DAVEY gave an account of his further investigations [11]. From tests performed under very well-defined conditions he came to the conclusion that

the position of the cooling curves depended to a great extent on the rate of cooling and therefore suggested, that the cooling curves should be determined in every plant in accordance with the particular conditions prevailing there, and that in the course of subsequent calculations the so plotted diagrams should be applied. In the paper quoted, DAVEY also investigated the change of zinc requirement in relationship to the silver contents of the lead to be desilverized and to the working method.

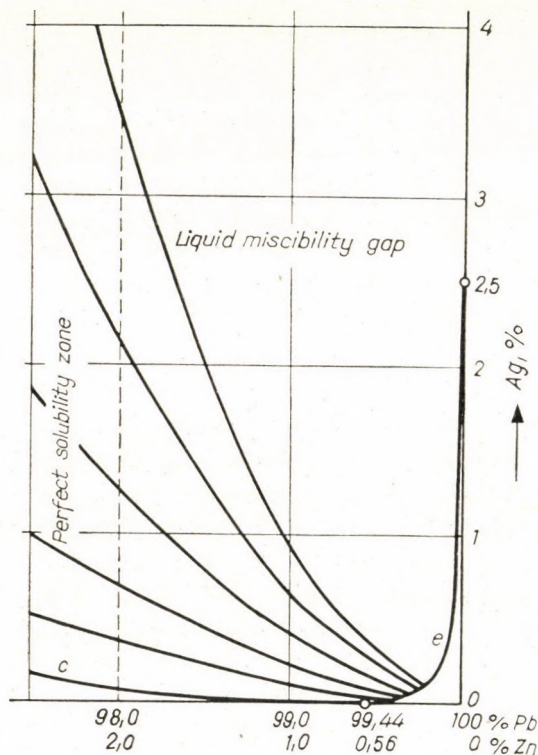


Fig. 1. The phase diagram of the Pb—Ag—Zn system (12, p. 99.)

It has also become apparent from the aforementioned publications that theoretical investigations may to a large extent contribute to the refining of the Parkes process and to its more economical application. This is why it was decided to thoroughly investigate the changes of zinc consumption, the quantity of the obtained product and its composition in relationship to the working method and to the silver content of the initial lead.

As the basis of our calculations the *Williams-diagram* was selected since it is the one which contains the highest number of particulars. It is presented in Figures 1 and 2 (12, p. 99—100).

Both diagrams show that part of the lead—zinc—silver ternary system which is close to the lead corner. Fig. 1 illustrates it in a smaller, Fig. 2 in a considerably greater enlargement. On both figures we can see the eutectic curve (*e*-curve) which starts from the eutectic point of the lead—zinc binary system at a silver contents of 2,5% and 304°C and which enters the eutectic point of the lead-zinc alloy system corresponding to 0.56% zinc contents and 318° C temperature.

On Fig. 1 can be seen the liquid miscibility gap boundary too, which starts from the lead—zinc side. As is obvious from the figure, this starts out from the point which corresponds to a zinc contents of 2%, and is — at the silver contents occurring in our case — parallel to the lead—silver side.

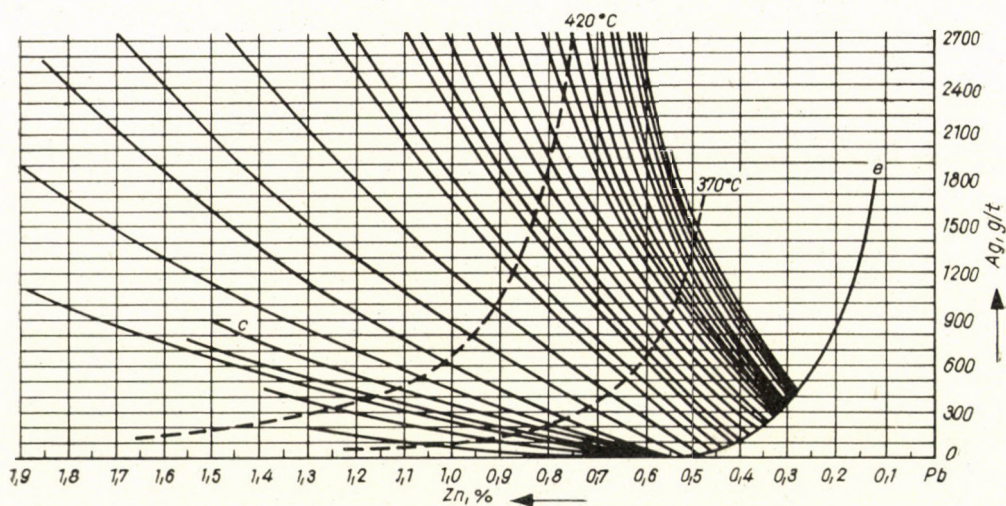


Fig. 2. The phase diagram of the Pb—Ag—Zn system (12, p. 100)

Both diagrams indicate those curves too, which, entering the eutectic curve, respectively the lead—zinc side, indicate the composition of the liquid phase at the cooling of lead containing zinc and silver. Out of these curves, particularly curve *c* is of great importance since it enters the eutectic point containing 0,56% zinc. This is just the reason why at cooling the part remaining the liquid will be free of precious metal if we start from an alloy the composition of which corresponds to one of the points of curve *c*.

Fig. 2 also includes the isotherms of 370 and 420°C and from there it is apparent that the isotherms in question are approximately parallel to the eutectic curve. It can further be determined by means of these isotherms what working temperature has to be chosen after the addition of zinc in order to ensure the complete dissolution of the added zinc.

Here the symbols used in the present study are presented:

B	=	the quantity of the bullion to be softened, t
Ag _k	=	the silver contents of the bullion to be softened, g/t
Zn _k	=	the zinc contents of the bullion to be softened, %
Pb _k	=	the lead contents of the bullion to be softened, %
X ₁	=	the quantity of the first zinc addition, t/B t lead
L	=	the quantity of the bullion after the first zinc addition, t/B t lead
Ag _L	=	the silver contents of the bullion after the first zinc addition, g/t
Zn _L	=	the zinc contents of the bullion after the first zinc addition, %
Pb _L	=	the lead contents of the bullion after the first zinc addition, %
D	=	the quantity of the rich crust, t/B t lead
Ag _D	=	the silver contents of the rich crust, g/t
Zn _D	=	the zinc contents of the rich crust, %
Pb _D	=	the lead contents of the rich crust, %
m	=	the quantity of the remaining bullion, t/B t lead
Ag _m	=	the silver contents of the remaining bullion, g/t
Zn _m	=	the zinc contents of the remaining bullion, %
Pb _m	=	the lead contents of the remaining bullion, %
X ₂	=	the quantity of the second zinc addition, t/B t lead
C	=	the quantity of the bullion before complete desilverizing, t/B t lead
Ag _c	=	the silver contents of the bullion before complete desilverizing, g/t
Zn _c	=	the zinc contents of the bullion before complete desilverizing, %
Pb _c	=	the lead contents of the bullion before complete desilverizing, %
H	=	the quantity of the zinc crust, t/B t lead
Ag _H	=	the silver contents of the zinc crust, g/t
Zn _H	=	the zinc contents of the zinc crust, %
Pb _H	=	the lead contents of the zinc crust, %
O	=	the quantity of the softened bullion, t/B t lead
Ag _O	=	the silver contents of the softened bullion, g/t
Zn _O	=	the zinc contents of the softened bullion, %
Pb _O	=	the lead contents of the softened bullion, %
ΣX	=	the quantity of the total zinc addition, t/B t lead.

2. The determination of isotherms in the lead—silver—zinc system

As the particulars to be read from Figs. 1 and 2 proved to be insufficient for our investigations, the additional points of the isotherms referring to 370 and 420°C had to be determined first. Then the experimental particulars required for the construction of the isotherms for 470 and 520°C had to be established.

First of all such a type of lead had to be produced for these experiments which was free of impurity and contained silver in the required quantity. For this purpose an electric furnace as per Fig. 3 was constructed. As is to be seen from the figure, this furnace consists of an iron crucible placed in the heated room. In the central line of this crucible there is an iron tube for accommodating the thermocouple of the temperature controller. In the space between the two iron tubes the mixer can be moved perpendicularly and at the same point also the temperature of the bath can be measured by means of a mercury thermometer.

Approximately 150 kg of lead was refined in the furnace in 10—16 kg lots. Tin (arsenic) and antimony were removed by smelting during stirring

in the presence of NaNO_3 , NaOH and NaCl according to the Harris method; copper, gold and a part of the silver were removed with zinc during, stirring in accordance with the Parkes process; the zinc which had found its way into the lead during the operation was also removed by stirring, by means of NaOH and NaCl salt bath according to the Harris method. The obtained lead contained 1000 g silver per ton.

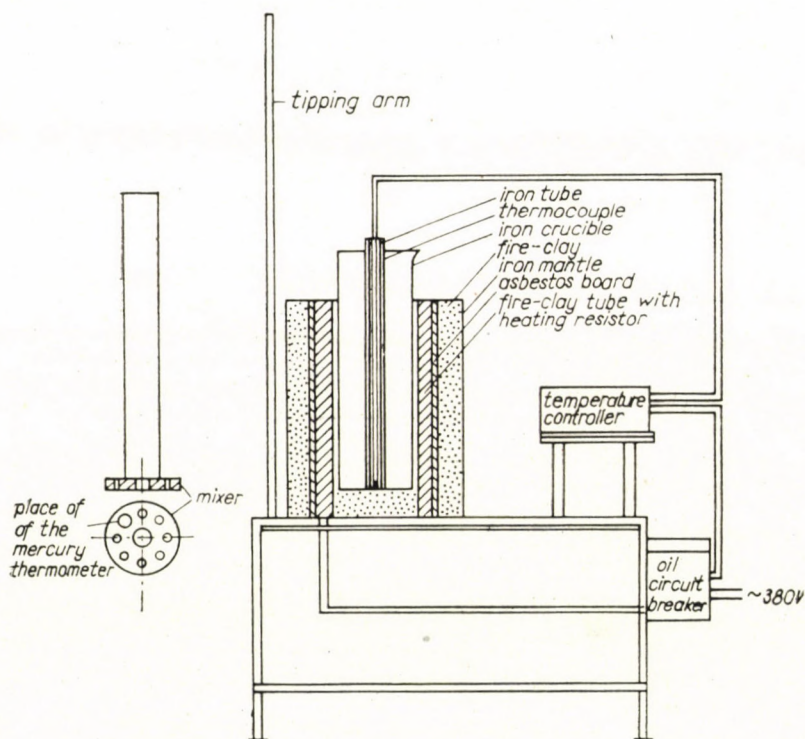


Fig. 3. Drawing of the furnace used for the tests

Both in this case and in the subsequent ones silver was partly determined by the usual methods of fire assaying (cupellation, respectively cupellation after rescorification) partly by the ditson method (14, II/2, p. 26).

The lead with the required silver contents was produced partly by alloying fine silver and partly by reducing the lead contents of the existing silver-containing lead by means of an oxidizing smelting process. The latter operation was performed with a fire-clay dish which had been placed into a furnace heated with silicon carbide.

For determining the points of the isotherm, 0,5—1 kg of lead containing different amounts of silver was smelted. The temperature of the bullion was so set that it should correspond to the isotherm. This was followed by

saturation of the bullion with zinc during stirring. Maintaining the working temperature samplings were taken and in this way these zinc and silver contents of the lead which belonged to the selected isotherms were determined. The zinc content was established, partly by the Galetti—Fahlberg method (14, II/2, p. 162) and partly by the complexometric method (15, p. 127

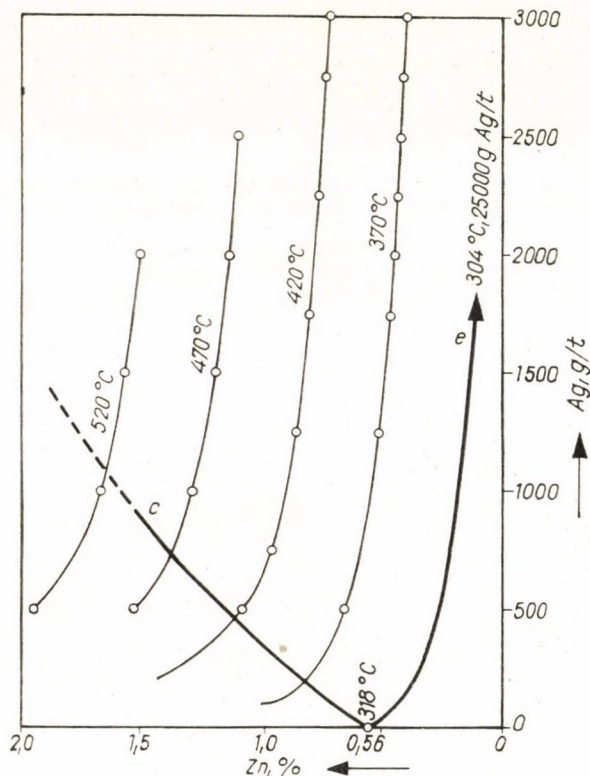


Fig. 4. Isotherms in the Pb—Ag—Zn system

The results of the measurements are summed up in Table 1. Fig. 4 was plotted on basis of the data seen in this table. The nought-circles to be found in the latter illustrate the points of measurement.

Fig. 5 compares the 370 and 420° C isotherms as determined by us and with those found by other authors (11, p. 54, Fig. 3). As is to be seen, our values show a marked coincidence with those found by WILLIAMS.

Table 1

The change of the percentual quantity of the zinc dissolved in lead over the silver contents of the lead and over the temperature. The values in brackets were read from Fig. 2 (12, p. 100)

Ag, g/t	Temperature, °C			
	370	420	470	520
500	0,640	1,083	1,520	1,948
750	(0,58)	0,961		
1000	(0,54)	(0,905)	1,287	1,657
1250	0,512	0,865		
1500	(0,487)	(0,834)	1,194	1,561
1750	0,467	0,809		
2000	0,449	(0,788)	1,141	1,496
2250	0,434	0,769		
2500	0,420	(0,753)	1,107	
2750	0,406	0,739		
3000	0,396	0,725		

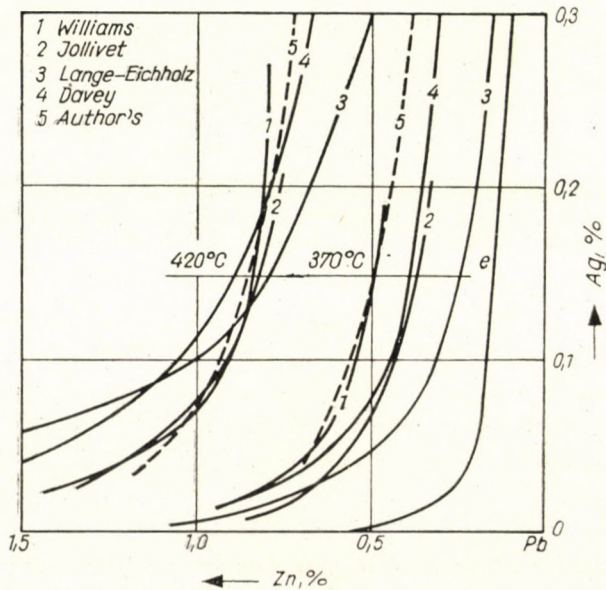


Fig. 5. Comparison of the isotherms as determined by different authors (11, p. 54.)

3. The determination of the quantities of zinc additions and of rich crust

In our subsequent investigations the working method illustrated in Fig. 6 was followed, *i. e.* the working temperature was first adjusted to a value corresponding to one of the isotherms then so much zinc was added to the lead, which contained different amounts of silver as was necessary for one of the points of the chosen isotherm to illustrate the composition of the alloy (*L*). The working temperature was maintained until the zinc had

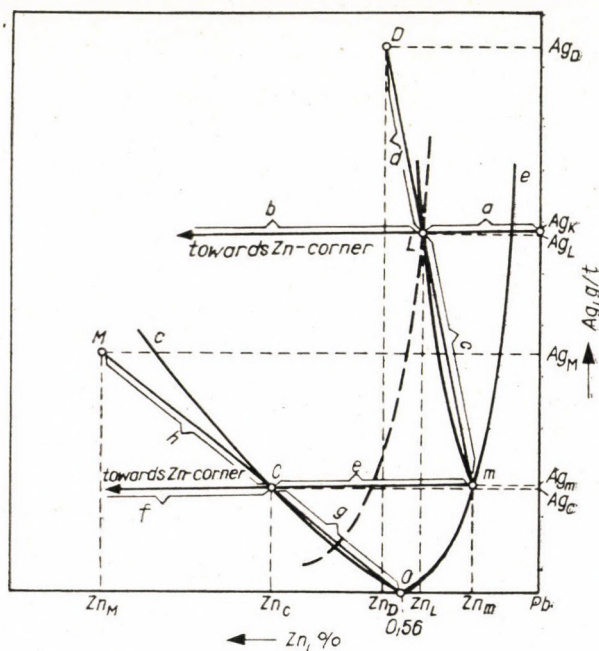


Fig. 6. Explanatory figure of the desilverization performed in two stages with zinc additions and by changing the temperature of the first zinc addition

completely dissolved. Then the temperature was reduced to the value belonging to the corresponding point of the *e*-curve (*m*). Having skimmed the crust which had formed during the cooling, the working temperature was adjusted to the proper value (*C*) according to the suitable point of the curve *c* and so much zinc was added as to make the corresponding point of the curve *c* also illustrate the composition of the alloy. After the complete dissolution of the second zinc addition the system was cooled down to 318°C along the curve *c* (*O*). The crust having been separated during cooling was skimmed. The remaining lead contained practically no precious metal: its zinc contents amounted to $0,56\%$.

The quantity of the zinc to be added in the first stage, the quantity of the rich crust being formed as well as the second and total zinc additions were determined in such a way that in accordance with the scheme illustrated by Fig. 6 we started out from a lead containing 500—3000 g/t silver and in the first addition of zinc, arrived at the isotherms of 370, 420, 470 and 520 °C as indicated by Fig. 4. The calculations and control measurements were performed on the presumption that the initial lead contained no zinc.

Taking into consideration the symbols already indicated and on basis of the material balances, the following equations can be set up:

$$B + X_1 = L = D + m \quad (1)$$

$$m + X_2 = C = H + O \quad (2)$$

$$B \text{ Ag}_k = D \text{ Ag}_D + m \text{ Ag}_m \quad (3)$$

$$m \text{ Ag}_m = H \text{ Ag}_H \quad (4)$$

$$B \text{ Pb}_k = D \text{ Pb}_D + m \text{ Pb}_m \quad (5)$$

$$m \text{ Pb}_m = H \text{ Pb}_H + 0,99 \cdot 44 \quad (6)$$

$$10^{-2} \cdot B \text{ Zn}_k + X_1 = 10^{-2} \cdot D \text{ Zn}_D + 10^{-2} \cdot m \text{ Zn}_m \quad (7)$$

$$10^{-2} \cdot m \text{ Zn}_m + X_2 = 10^{-2} \cdot H \text{ Zn}_H + 10^{-2} \cdot O \cdot 0,56 \quad (8)$$

$$1 = \text{Ag}_k \cdot 10^{-6} + \text{Pb}_k \cdot 10^{-2} + \text{Zn}_k \cdot 10^{-2} \quad (9)$$

$$1 = \text{Ag}_D \cdot 10^{-6} + \text{Pb}_D \cdot 10^{-2} + \text{Zn}_D \cdot 10^{-2} \quad (10)$$

$$1 = \text{Ag}_m \cdot 10^{-6} + \text{Pb}_m \cdot 10^{-2} + \text{Zn}_m \cdot 10^{-2} \quad (11)$$

$$1 = \text{Ag}_H \cdot 10^{-6} + \text{Pb}_H \cdot 10^{-2} + \text{Zn}_H \cdot 10^{-2} \quad (12)$$

With the aid of the zinc contents to be applied after the first and second zinc additions the following two equations are to be obtained:

$$B \text{ Zn}_k \cdot 10^{-2} + X_1 = (B + X_1) \text{ Zn}_L \cdot 10^{-2} \quad (13)$$

$$m \text{ Zn}_m \cdot 10^{-2} + X_2 = (m + X_2) \text{ Zn}_C \cdot 10^{-2} \quad (14)$$

If one expresses from (1) the value of m and substitutes it into (3), the

$$B \text{ Ag}_k = D \text{ Ag}_D + (B + X_1 - D) \text{ Ag}_m$$

wherefrom

$$D = \frac{B(\text{Ag}_k - \text{Ag}_m) - X_1 \text{ Ag}_m}{\text{Ag}_D - \text{Ag}_m} \quad (15)$$

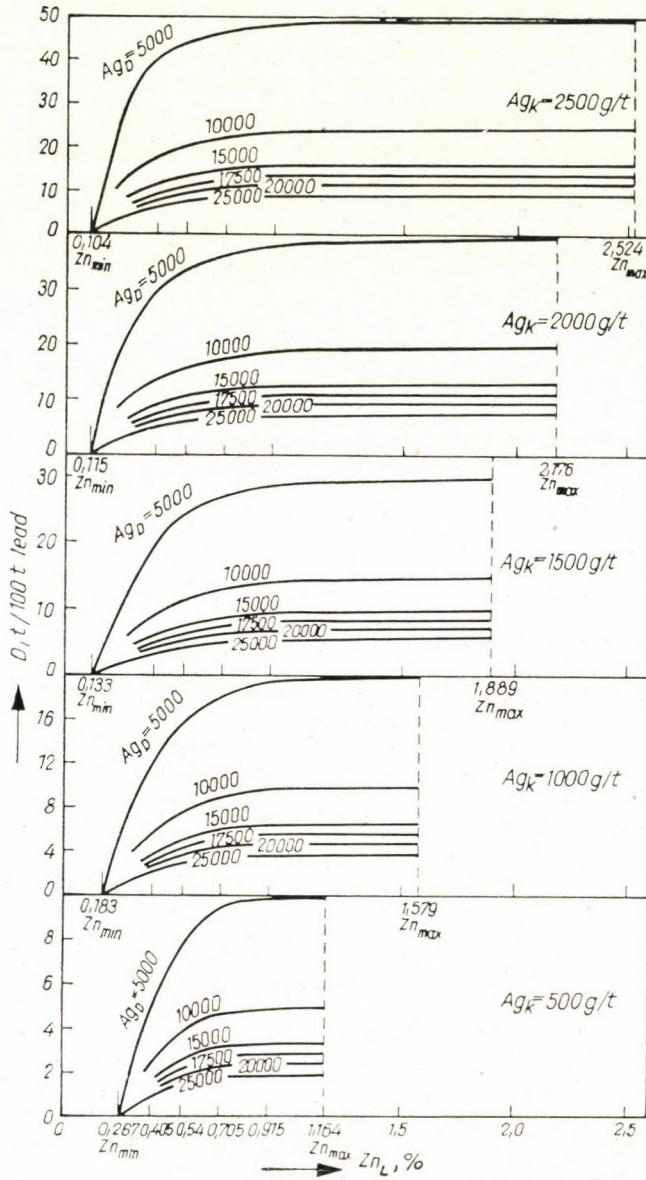


Fig. 7. The change of the quantity of the rich crust (D) over the zinc contents to be achieved on the first zinc addition, over the silver contents of the bullion to be softened (Ag_k) and over the silver contents of the rich crust (Ag_D) at a desilverization performed with zinc additions in two stages

The amount of the first zinc addition as determined from (13):

$$X_1 = B \frac{Zn_L - Zn_k}{100 - Zn_L} \quad (16)$$

The second zinc addition as calculated from (1) and (14):

$$X_2 = (B + X_1 - D) \frac{Zn_C - Zn_m}{100 - Zn_C} \quad (17)$$

The percentual zinc contents of the rich crust from the combination of (1) and (7):

$$Zn_D = Zn_m + \frac{B(Zn_k - Zn_m) - X_1(Zn_m - 100)}{D} \quad (18)$$

and the percentual lead contents of the same product from (10):

$$Pb_D = 100 - Ag_D \cdot 10^{-4} - Zn_D \quad (19)$$

With the above relations and starting out with leads containing different amounts of silver we have calculated the quantity of the first zinc addition and that of the rich crust as well as, the quantity of the second zinc addition and that of the total zinc addition. Figs. 7 and 8—12 were plotted on the basis of the calculated values.

Out of these figures, Fig. 7 illustrates the change of the quantity of the rich crust in relation to the silver contents of the initial lead and the rich crust as well as to the zinc contents found after the first zinc addition. It can be stated that the higher are Ag_k and Zn_L and the lower is Ag_D , the larger will be the quantity of the rich crust formed.

Figs. 8—12 illustrate the changes of the first, second and total zinc additions with Zn_L and with the silver contents of the rich crust in the case of different initial silver contents.

The figures refer to initial silver contents of 500, 1000, 1500, 2000 and 2500 g/t.

From the figures it is to be seen that the quantities of both the rich crust and the zinc addition were illustrated between certain maximum and minimum values of Zn_L . To the lead to be softened at least as much zinc (Zn_{min}) has to be added as corresponds to the *e*-curve so as to be able to promote the formation of the rich crust. During the softening process, however, it is not economical to exceed the *c*-curve after the first zinc addition, because desilverizing is assured by the zinc contents (Zn_{max}) corresponding to the *c*-curve. In accordance with the curve *e*, the value of Zn_{min} drops to the same extent as the silver contents of the initial lead increases, while that of Zn_{max} in accordance with curve *c* is at the same time also growing. Until Zn_L is lower

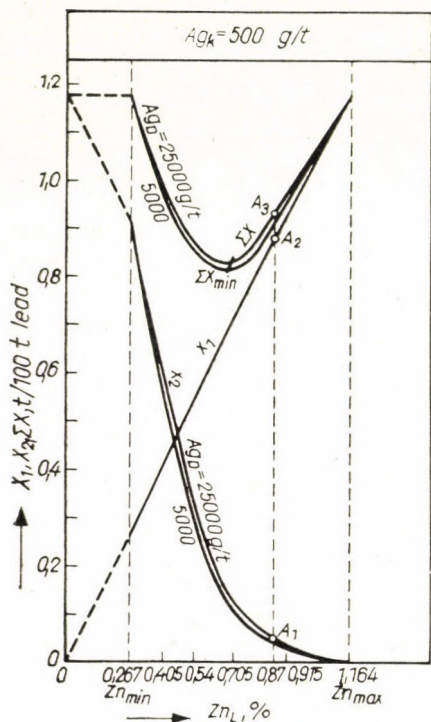


Fig. 8. The change of the quantity of the first, second and total zinc additions (X_1 , X_2 and ΣX) over the zinc contents adjusted after the first zinc addition (Zn_L) and over the silver contents (Ag_D) of the rich crust in case of an initial lead containing 500 g silver per ton at a desilverization performed with zinc additions in two stages

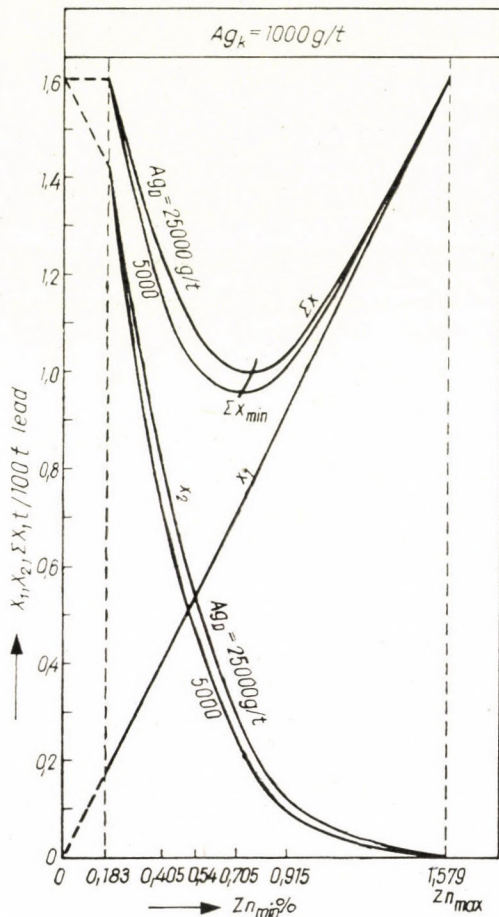


Fig. 9. The change of the quantity of the first, second and total zinc additions (X_1 , X_2 , ΣX) over the zinc contents adjusted after the first zinc addition (Zn_L) and over the silver contents (Ag_D) of the rich crust in case of an initial lead containing 1000 g silver per ton at a desilverization performed with zinc additions in two stages

than Zn_{min} , no rich crust forms, when however, at the first zinc addition as much zinc is added as corresponds to Zn_{max} , the second zinc addition will make out zero and the total zinc addition will be equal to the first one.

The figures also point out the fact, that with the increase of Zn_L also X_1 is — almost in each of the cases, increasing linearly, whereas X_2 is rapidly decreasing, and ΣX is changing in accordance with a minimum curve. It is apparent from the diagrams that also the values of X_2 and ΣX are the higher the greater is the silver contents of the rich crust. The influence of the latter

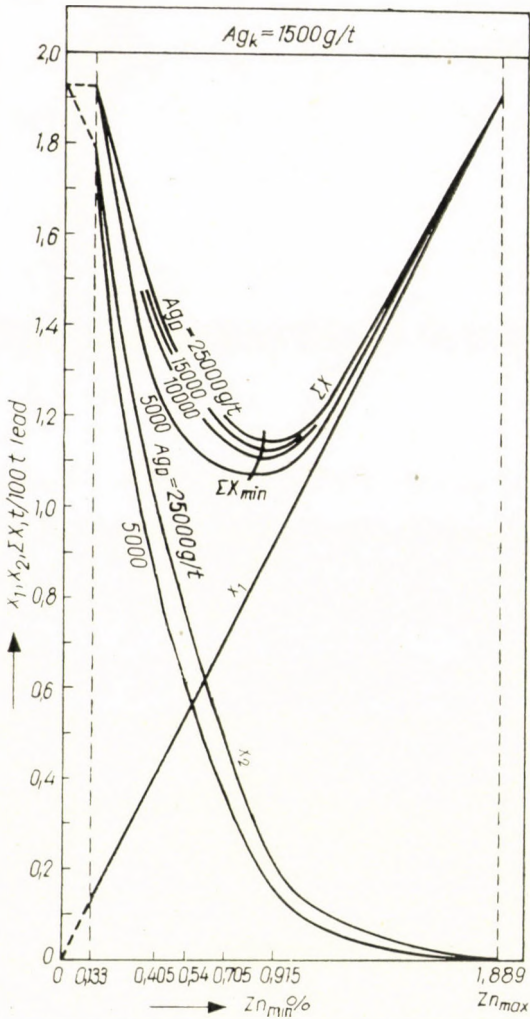


Fig. 10. The change of the quantity of the first, second and total zinc additions (X_1 , X_2 and ΣX) over the zinc contents adjusted after the first zinc addition (Zn_L) and over the silver contents of the rich crust in case of an initial lead containing 1500 g silver per ton at a desilverization performed with zinc additions in two stages.

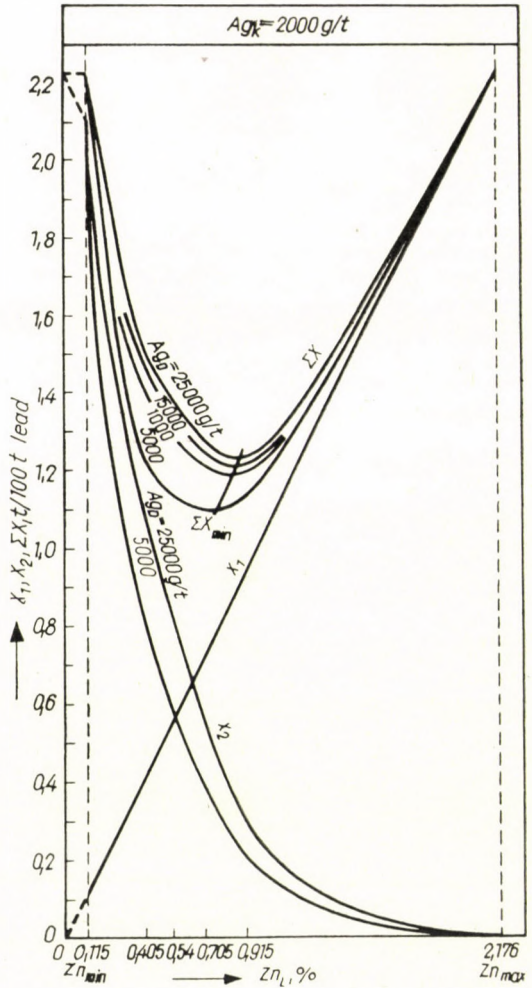


Fig. 11. The change of the quantity of the first, second and total zinc additions (X_1 , X_2 and ΣX) over the zinc contents (Zn_L) adjusted after the first zinc addition and over the silver contents (Ag_D) of the rich crust in the case of an initial lead containing 2000 g silver per ton at a desilverization performed with zinc additions in two stages.

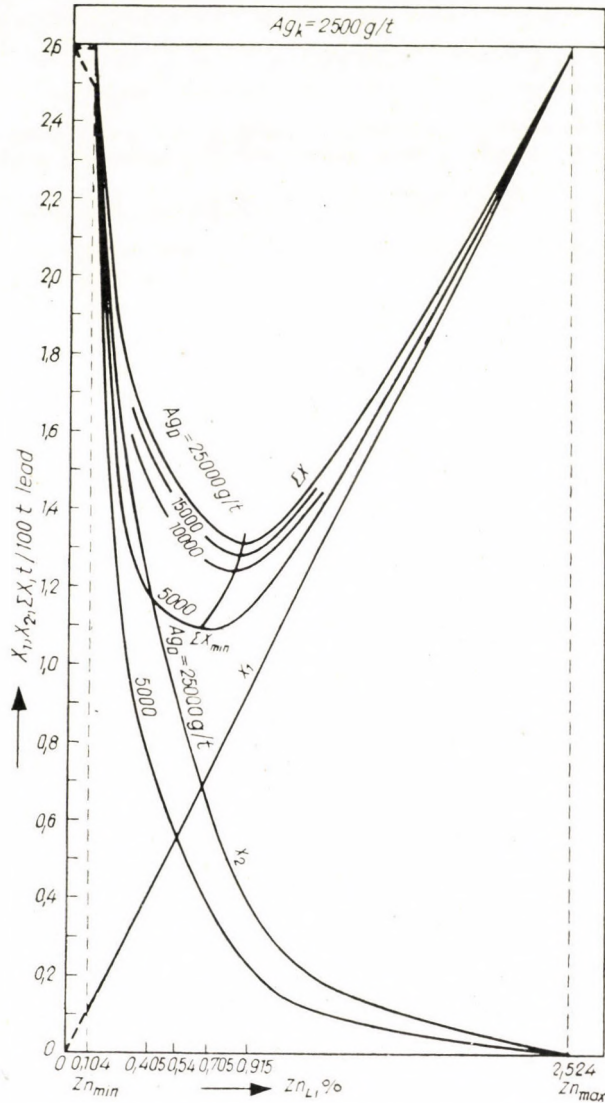


Fig. 12. The change of the quantity of the first, second and total zinc additions (X_1 , X_2 and ΣX) over the zinc contents (Zn_L) adjusted after the first zinc addition and over the silver contents of the rich crust in case of an initial lead containing 2500 g silver per ton at a desilverization performed with zinc additions in two stages

on zinc consumption is the more marked the higher is the silver contents of the bullion to be softened. Under identical conditions, however, the consumption of zinc increases with the simultaneous increase of the silver contents of the initial lead. The minimum of ΣX is at 0,7—0,9% Zn_L where

Zn_L belonging to ΣX_{\min} will first increase with the increase of Ag_k and then will drop.

Fig. 13 which illustrates Zn_L according to the minimum total zinc consumption at a given silver contents of the rich crust as plotted against the initial silver contents — proves to be the same. From this figure it can be stated in addition, that the maximum of the Zn_L which belongs to ΣX_{\min}

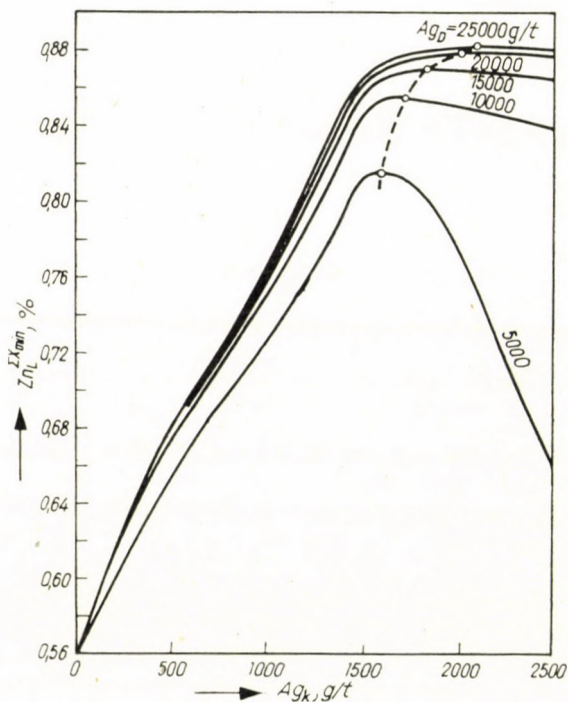


Fig. 13. The changes of Zn_L belonging to the minimum total zinc consumption ($Zn_L^{\Sigma X_{\min}}$) over the silver contents of the bullion to be softened and of the rich crust (Ag_k and Ag_D), at a desilverization performed with zinc additions in two stages

is to be found at such an initial silver contents which is the higher, the higher the silver contents of the rich crust is.

Fig. 14 represents those values of temperature which are to be adjusted to the first zinc addition determined on basis of Fig. 4.

The changes of the total zinc consumption and of the working temperature to be adjusted after the first zinc addition with the initial silver contents and with the silver contents of the rich crust at a minimum zinc consumption are illustrated in Fig. 15.

It can be stated, therefrom, that at a given silver contents of the rich crust both the zinc contents to be obtained at the first zinc addition and

the minimum zinc consumption simultaneously increase with the initial silver contents and that at a given silver contents of the initial lead both the total zinc consumption and the working temperature to be adjusted at the first zinc addition change in the similar way, simultaneously with the increase of the silver contents of the rich crust.

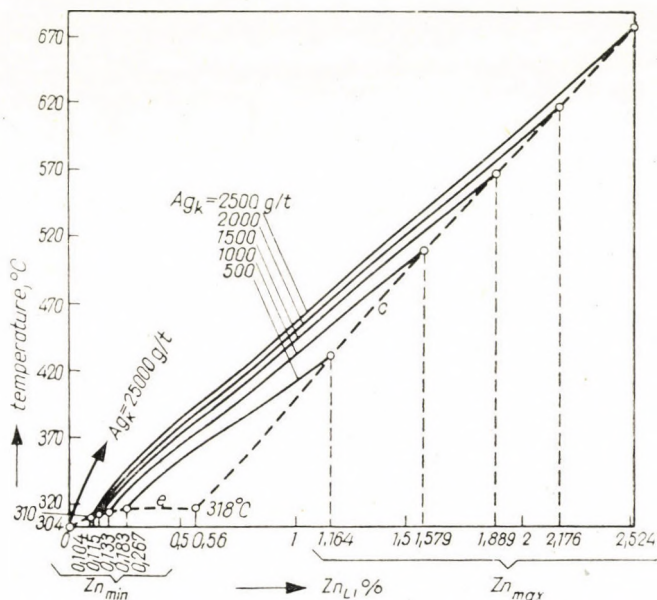


Fig. 14. The changes of the temperature to be adjusted at the first zinc addition over the zinc contents after the first zinc addition (Zn_L) and over the silver contents of the bullion to be softened (Ag_k)

Plotting the $Zn_L^{\Sigma X_{min}}$ curves of Fig. 15 into Fig. 2, we shall get Fig. 16. From this the optimal working method in the different cases can be followed.

4. Graphical method

On desilverizing with zinc additions in two stages, the quantity of zinc additions, as well as the quantity and composition of the products obtained can be determined in a graphical way, too. Namely, if zinc is added to the lead the composition of which was illustrated on Fig. 17 (point k) the composition of the bullion will be altered along the straight connecting point k and the Zn-corner. In order to economize with zinc, it seems to be practical to first add only as much zinc as is required by a previously assumed silver contents of the rich crust to come to the $L^{\Sigma X_{min}}$ curve (point L) which ensures

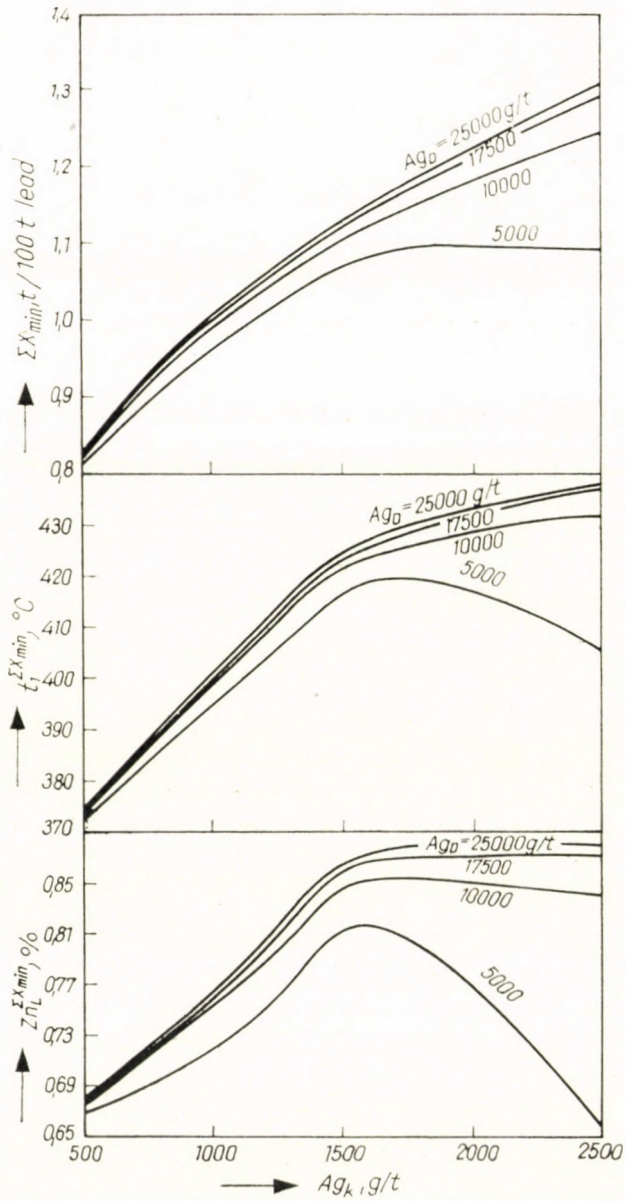


Fig. 15. The changes of the total zinc consumption at minimum zinc consumption and of the working temperature to be adjusted after the first zinc addition over the initial silver contents and over the silver contents of the rich crust

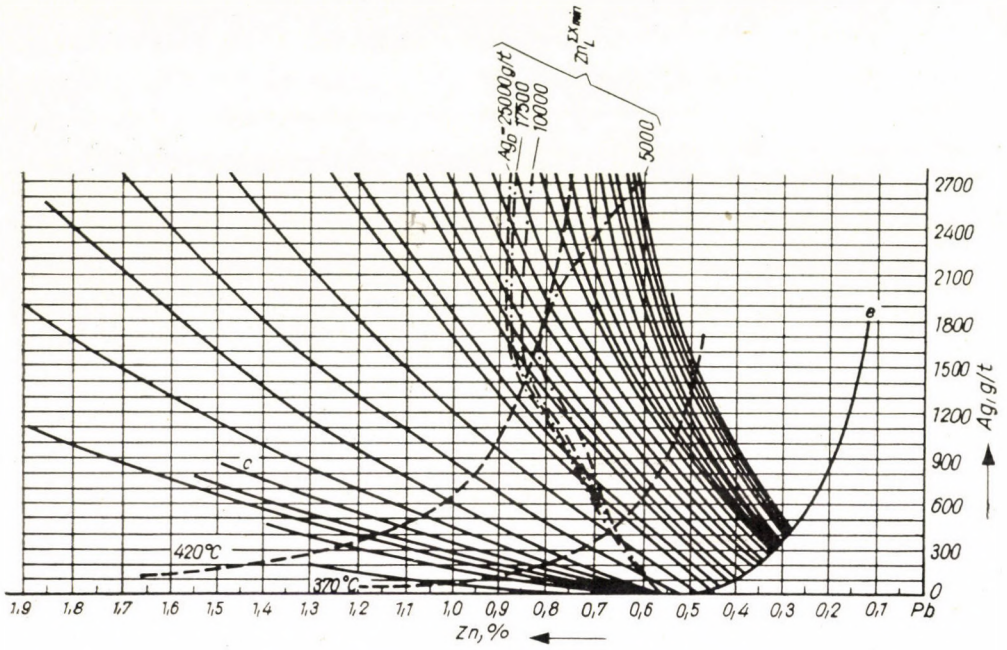


Fig. 16. The curve $Zn_L^{\Sigma X \min}$ in the Pb-Ag-Zn system

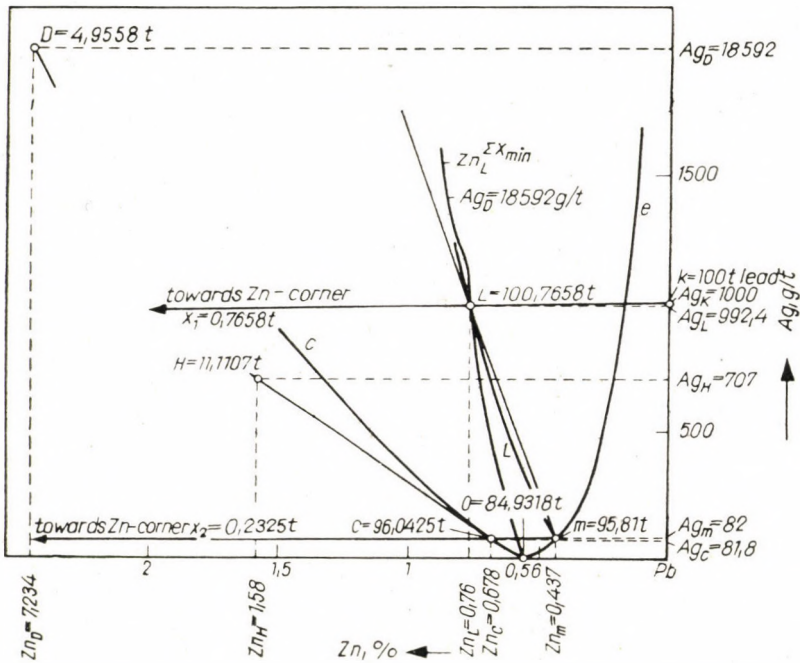


Fig. 17. Explanatory figure of the graphical method applied on desilverization with zinc additions in two stages

the minimum total zinc consumption. According to the lever law, the quantity of the zinc to be added to 100 t lead is:

$$X_1 = 100 \frac{Zn_L}{100 - Zn_L} = 100 \frac{Ag_L - Ag_G}{Ag_L} \quad (20)$$

During cooling to a temperature corresponding to point m , from the bullion $(100 + X_1)$ t a rich crust D t will precipitate which will be in conformity with the assumed silver contents of the rich crust and will have a composition as illustrated by point D to be found on the straight parallel to the lead-zinc side. There will be a remanent bullion of m t, so that according to the material balance

$$100 + X_1 = m + D, \quad (21)$$

and according to the lever law

$$D = m \frac{Zn_L - Zn_m}{Zn_D - Zn_L} = m \frac{Ag_L - Ag_m}{Ag_D - Ag_L} \quad (22)$$

i. e.

$$D = (100 + X_1) \frac{Zn_L - Zn_m}{Zn_D - Zn_m} = (100 + X_1) \frac{Ag_L - Ag_m}{Ag_D - Ag_m} \quad (23)$$

In possession of X_1 and D , also m can be determined from (21). The second time only so much zinc has to be added to the m t bullion as to make the composition of the alloy correspond to point C on the c -curve. According to the lever law this second zinc addition will be the following:

$$X_2 = (100 + X_1 - D) \frac{Zn_C - Zn_m}{100 - Zn_C} = (100 - X_1 - D) \frac{Ag_m - Ag_C}{Ag_C} \quad (24)$$

During cooling to O point, from the

$$C = 100 + X_1 - D + X_2 = 100 + \Sigma X - D$$

t bullion H t zinc crust will precipitate and there will remain O t lead which is completely free of precious metal. Thus, the following equations can be set up on basis of the material balance and the lever law, respectively:

$$100 + \Sigma X - D = H + O \quad (25)$$

$$H = O \frac{Zn_C - 0,56}{Zn_H - Zn_C} = O \frac{Ag_C}{Ag_H - Ag_C} \quad (26)$$

respectively,

$$H = (100 + \Sigma X - D) \frac{Zn_C - 0,56}{Zn_H - 0,56} =$$

$$= (100 + \Sigma X - D) \frac{Ag_C}{Ag_H} \quad (27)$$

From the above relations it can be obviated that apart from the quantities of the zinc additions, the quantity of the rich crust and its composition, also the quantities and compositions of all the intermediate and final products can be determined by means of the graphical method.

In the case illustrated by Fig. 17, the quantities of the zinc additions as well as their composition were calculated with the aid of the above relations in Table 2. Both the latter and a more thorough investigation of equations

Table 2

The determination of the quantities and compositions of the products working with a minimum zinc consumption and with zinc additions in two stages
(Calculated on basis of the relations No. (20)–(27) and of Fig. 16)

$$Ag_D = 18,592 \text{ g/t}$$

		Ag		Zn	
		g/t	kg	%	kg
B	100,0000	1000	100,00	—	—
X ₁	0,7658	—	—	100	765,8
L	100,7658	992,4	100,00	0,760	765,8
D	4,9558	18592	92,14	7,004	347,1
m	95,8100	82	7,86	0,437	418,7
X ₂	0,2325	—	—	100	232,5
C	96,0425	81,8	7,86	0,678	651,2
H	11,1107	707	7,86	1,58	175,6
O	84,9318	—	—	0,56	475,6
ΣX	0,9983	—	—	—	998,3

(20)—(27) point to the fact that at a given initial silver contents the quantities of the rich crust and of the second crust are definite after having been taken up by the silver contents of the rich crust, whereas the quantity and composition of the crust having been precipitated after the second zinc addition and that of the remaining bullion can only then be determined if the quantity of either of the products, respectively, the composition of the zinc crust are taken up. From Fig. 17 one can state that the composition of the zinc crust can not be freely chosen since point *H* indicating its composition must be situated on the straight which connects points *O* and *C*.

REFERENCES

1. KREMAN-HOFMEIER: Das ternäre System Silber-Zink-Blei. Sitzungsberichte der Preussischer Akademie der Wissenschaften, 1911. (120) p. 283.
2. WILLIAMS: The Determination of Certain Curves and their Application to the Desilverization of Lead by the Parkes Process. Proceedings Australasian Institute of Mining and Metallurgy, 1925, (58) p. 47.
The Development and Application of the Continuous Lead Refining Process. Thesis. McCarron, Bird, & Co. Melbourne 1932.
3. WILLIAMS: Descriptions of Continuous Lead Refinery at the Works of the Broken Hill Associated Smelters Proprietary Ltd., Port Pirie, South Australia. Proceedings Australasian Institute of Mining and Metallurgy, 1932. (87) p. 75.
4. HENGLEIN-KÖSTER: Zur Kenntniss der dem Parkes Verfahren zugrunde liegenden Systeme. Zeitschrift für Metallkunde. 1948 (39) p. 390., Erzmetall, 1949 (2) p. 184.
5. HENGLEIN-NOVOTNY: Über die Grundlage des Parkes Prozesses. Monatshefte für Chemie und verwandte Teile anderer Wissenschaften. 1948. (79) p. 629.
6. JOHANSEN-LANGE-EICHHOLZ: Ein Beitrag zur Metallurgie des Parkes-Prozesses. Erzmetall 1950 (3) p. 397.
7. DAVEY-KRYSKO: Bemerkungen zu dem Aufsatz von Johansen und Lange-Eichholz: Ein Beitrag zur Metallurgie des Parkes-Prozesses. Erzmetall, 1951 (4) p. 423.
8. ROSS-PEABODY: Monterrey refinery uses continuous lead softening and desilverizing process. Journal of Metals, 1952 (4) p. 915.
9. LANGE-EICHHOLZ-WASOW: Die isotherme Werkblei-Entsilberung, Erzmetall, 1953 (6) p. 20.
10. DAVEY: Desilverizing of Lead Bullion. Journal of Metals, Transactions AIME Metals Branch, 1954 (200) p. 838.
11. DAVEY: Entsilberung und Entwismutierung von Blei. Erzmetall 1957 (10) p. 53.
12. TAFEL: Lehrbuch der Metallhüttenkunde. I. Hirzel Verlagsbuchhandlung, Leipzig, 1951, p. 97.
13. GYURICZA, J.: Diploma-Work. Metallurgical Department of the Technical University of the Heavy Industry, Miskolc. 1958.
14. Analyse der Metalle — Betriebsanalysen. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953.
15. MIKA, J.: Metallurgical Analysis I. University Notes Corporation, (Felsőoktatási Jegyzet-ellátó Vállalat) Budapest, 1957.
16. Андреев-Ложкутов: К теории о бессеребривания свинца. Цветная Metallургия 1961. (4)2. p. 58-64.

SUMMARY

In this study after having experimentally determined the isotherms of 370, 420, 470 and 520 °C and investigated both mathematically and graphically the changes of the quantities and compositions of the different products, in relation to the working method in such a case when the softening process had been performed in two stages with zinc additions. In the course of our investigations special attention was paid to the trends of zinc consumption and an endeavour was made to determine those conditions under which a minimum zinc consumption could be obtained.

By introducing the graphical method, we succeeded in working out a novel, demonstrative method to determine the quantities and compositions of the substances involved in the Parkes process.

EINE ARBEITSMETHODE MIT ZWEIMALIGEM ZINKZUSATZ UND MINIMALEM ZINKVERBRAUCH BEIM PARKES-VERFAHREN

Z. HORVÁTH und J. WÉBER

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wurde nach Beschreibung der experimentellen Bestimmung der Isothermen für 370, 420, 470 und 520 °C bei der Raffination von edelmetallhaltigem Blei mit zweimaligem Zinkzusatz mathematisch und grafisch die Veränderung der Menge und der Zusammensetzung der verschiedenen Produkte in Abhängigkeit vom Arbeitsverfahren ver-

folgt. Bei den Untersuchungen wurde besonders der Verlauf des Zinkverbrauchs beobachtet, und die Verfasser waren bestrebt, die Bedingungen für den minimalen Zinkverbrauch festzustellen.

Mit der grafischen Methode wurde ein neues und anschauliches Verfahren zur Bestimmung der Menge und der Zusammensetzung der beim Parkes-Verfahren beteiligten Stoffe eingeführt.

MÉTHODE DE TRAVAIL À DEUX ADDITIONS DE ZINC, ASSURANT UNE CONSOMMATION MINIMUM DE ZINC DANS LE PROCÉDÉ DE PARKES

Z. HORVÁTH et J. WÉBER

RÉSUMÉ

Après relevé des isothermes de 370, 420, 470 et 520° C, les auteurs étudient graphiquement et par le calcul, la quantité et la composition des différents produits lors de l'élimination des métaux nobles, en fonction de la méthode de travail utilisée. Pendant les recherches, les auteurs ont suivi avec un soin particulier la consommation de zinc, et se sont efforcés de déterminer les conditions correspondant à son utilisation minimum.

Par introduction de la méthode graphique, les auteurs ont élaboré un nouveau moyen pour la détermination de la quantité et de la composition des matériaux utilisés dans le procédé de Parkes.

СПОСОБ ДВОЙНОГО ОЦИНКОВАНИЯ ПРИ МИНИМАЛЬНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЦИНКА МЕТОДОМ ПАРКЕСА

З. ХОРВАТ и Й. ВЕБЕР

РЕЗЮМЕ

В этой работе после опытного определения изотермы при 370, 420, 470 и 520° C математически и графически было выведено изменение количества и состава различных продуктов по методу отделения благородных металлов при двойном оцинковании. В процессе исследований авторы уделили особое внимание расходу цинка и стремились установить условия минимального расхода цинка.

Введением графического метода был разработан новый и наглядный способ определения количества и состава фигурирующих в методе Паркеса веществ.

UNTERSUCHUNG DES HEIZVORGANGES AN ZYLINDRISCHEN KÖRPERN BEI VERÄNDERLICHER OFENTEMPERATUR UND VERÄNDERLICHEM WÄRMEÜBERGANGSKOEFFIZIENTEN

A. HOFFMANN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST, AKADEMISCHE ARBEITSGEMEINSCHAFT FÜR STRÖMUNGSLEHRE
LEHRSTUHL NR. 5 FÜR MATHEMATIK

[Eingegangen am 30. März 1961]

Einleitung

In diesem Aufsatz wollen wir den Vorgang des Wärmeüberganges an einem kreiszylindrischen Körper genügender Länge auf Grund der NEWTONschen Bedingung der Wärmeabgabe, u. zw. bei zeitveränderlicher Ofentemperatur und temperaturbedingtem Wert des Wärmeübergangskoeffizienten untersuchen.

In einem früheren Aufsatz wurde für den ähnlichen Fall die praktisch verwendbare Lösung der Differentialgleichung der Wärmeleitung bei zeitveränderlicher Ofentemperatur veröffentlicht, nur wurden dabei die thermischen Parameter ($h, k, \gamma c$) als konstante Werte angenommen (bzw. wurde das Funktionsdiagramm durch eine gestufte Kurve ersetzt). Es ging aus dem Rechnungsgang klar hervor, daß es wichtiger ist — zur Bestimmung der Temperaturverteilung im Körper — in der Mehrzahl der praktischen Aufgaben (Hüttentechnik) nach Ablauf der Anfangsperiode (von cca 15—20 Min.) der Anheizung die Änderung der Ofentemperatur als die Änderungen der thermischen Parameter in Rechnung zu ziehen. Doch kann man für die Anfangsperiode des Anheizens eine ähnliche Vereinfachung nicht annehmen, da die Veränderlichkeit der thermischen Parameter in empfindlicher Weise die als Lösung gewonnene Funktion beeinflußt; mit anderen Worten, man erhält mit Hilfe der gestuften Kurve nur eine grobe Annäherung, oder aber wird der Rechnungsgang — bei Vermehrung der Stufen — allzu schwerfällig. In diesem Aufsatz soll eine Methode zur Bestimmung der Temperaturverteilung im Körper in der Anfangsperiode für den Fall angegeben werden, daß der Wärmeübergangskoeffizient als Funktion der Temperatur [$h = h(\vartheta)$] und die Ofentemperatur — wie früher — als Funktion der Zeit [$\vartheta_k = \vartheta_k(t)$] betrachtet wird.

Praktisch läßt sich der Wärmeübergangskoeffizient aus zwei Funktionen zusammenstellen: die erste hiervon beruht auf dem Strahlungssatz (s. die später angeführte Behandlung), die zweite beruht auf dem Konvektions-

wärmeübergangskoeffizienten, wofür die folgende Formel als Exponentialfunktion gilt:

$$Nu = CGr^n,$$

wo die dimensionslose, GRASSHOF'sche Zahl Gr folgenderweise ausgedrückt wird:

$$Gr = \frac{gl^3 \Delta\theta \beta}{\nu^2}$$

Hier bedeutet

- l — die für die Wärmeströmung entscheidende Dimension (hier den Durchmesser als Weglänge),
- ν — die kinematische Viskosität,
- $\beta = \frac{1}{T}$ — den Wärmeausdehnungskoeffizienten, und
- $\Delta\theta$ — die Temperaturdifferenz zwischen Stab und Umgebung.

Nach entsprechender Vereinfachung erhält man für die behandelten Fälle einen Ausdruck folgenden Charakters:

$$a_c = a \Delta\theta^{1,3},$$

wo

$$a \approx 1,7$$

ist.

In den meisten, praktisch wichtigen Fällen (Wärmebehandlung, Hüttenwesen) wird das Stück gewöhnlicher Temperatur in einen Ofen besonders hoher Temperatur gelegt. Der hier zu erwartende Vorgang ist größtenteils eine Wärmeübergabe durch Strahlung, auch in der Anfangsperiode; z. B. ist bei einer Temperaturdifferenz von 1000°C:

$$a_c \approx 17 \text{ [kcal/m}^2 \text{ h}^\circ\text{C]}$$

und

$$h \approx 110 \text{ [kcal/m}^2 \text{ h}^\circ\text{C]}.$$

Nachher nimmt der Wert von a_c monoton ab, und der Wert von h — nach einer übergangsweisen Abnahme infolge der plötzlichen Senkung der Ofentemperatur — steigt monoton an (Abb. 3). Also kann bei solchen Heizvorgängen der Konvektions-Wärmeübergangskoeffizient gegenüber dem Strahlungskoeffizienten praktisch vernachlässigt werden. Wenn aber der Vorgang einer genaueren Analyse unterworfen wird, oder auch bei Heizvorgängen anderer Art, muß der Konvektions-Wärmeübergangskoeffizient unbedingt in Betracht gezogen werden.*

* Ich verdanke diesen Hinweis Herrn Prof. Árpád MACSKÁSY. In einer späteren Arbeit möchte ich die Untersuchung der gleichzeitigen Auswirkung beider Koeffizienten mitteilen.

1. Lösung des Problems

Die dimensionslose Form der Differentialgleichung ist — in Zylinderkoordinaten — die folgende:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} = R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \tag{1}$$

Es gilt die Anfangsbedingung:

$$\vartheta(\varrho, 0) = f(\varrho) \tag{2}$$

und die NEWTONSche Randwertbedingung:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = R \frac{h(\vartheta_F)}{k} [\vartheta_k(t) - \vartheta(1, t)] \tag{3}$$

Wenn wir den Wärmeübergangskoeffizienten auf Grund des Strahlungssatzes berechnen, so können wir uns auf die oben abgeleiteten Überlegungen stützen. Eine weitere Begründung für die Richtigkeit der Anwendung des Strahlungssatzes bietet uns die technische Praxis, da die Wärmeübergabe bei durch elektrische Heizwiderstände hervorgerufenen Vorgängen größtenteils durch Strahlung erfolgt [9].

Auf Grund des Strahlungssatzes gilt:

$$h(\vartheta_F) = \varepsilon C_s \frac{\left[\left(\frac{\vartheta_k(t) + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{\vartheta_F + 273}{100} \right)^4 \right]}{\vartheta_k(t) - \vartheta_F},$$

wo $C_s = 4,96$ den Strahlungskoeffizienten des absolut schwarzen Körpers bedeutet; ε ist eine von den Strahlungskoeffizienten ($\varepsilon_1; \varepsilon_2$) der wärmeaufnehmenden bzw. wärmeabgebenden Fläche und von der Größe ($F_1; F_2$) dieser Flächen abhängige Konstante. Durch Einsetzen obigen Ausdrucks in die Formel (3) der Randwertbedingung erhalten wir

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = \varepsilon C_s \frac{R}{k} \left[\left(\frac{\vartheta_k(t) + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{\vartheta(1, t) + 273}{100} \right)^4 \right]$$

Nun wollen wir die Ausdrücke

$$\varepsilon C_s \frac{R}{k} \left(\frac{\vartheta_k(t) + 273}{100} \right)^4 \quad \text{und} \quad \varepsilon C_s \frac{R}{k} \left(\frac{\vartheta(1, t) + 273}{100} \right)^4$$

kurz als $\vartheta_{ka}(t)$ bzw. $g(\vartheta_F)$ bezeichnen. Es soll der Ausdruck von $g(\vartheta_F)$ — für

ein bestimmtes Intervall — auf lineare Form gebracht werden, wie folgt:

$$g(\vartheta_F) \approx c_1 \vartheta_F + c_0,$$

und soll weiterhin an Stelle von $g(\vartheta_F)$ diese lineare Funktion treten.

So erhalten wir für die Randwertbedingung (3)

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = \vartheta_{k\alpha}(t) - c_1 \vartheta(1, t) - c_0 = \vartheta_{k\alpha}(0) + \Delta(t) - c_1 \vartheta(1, t) - c_0, \quad (4)$$

indem wir an Stelle von $\vartheta_{k\alpha}(t)$ den Ausdruck $\vartheta_{k\alpha}(0) + \Delta t$ gesetzt haben, in welchem $\Delta(0) = 0$, Δt eine kontinuierliche, und abschnittsweise glatte Kurve darstellt.

Wir wollen als Lösung die Summe aus diesen zwei Funktionen wählen, usw. unter der Bedingung, daß die Hilfsfunktionen $\vartheta_1(\varrho, t)$ und $\vartheta_2(\varrho, t)$ auch einzeln der Differentialgleichung (1) genügen:

$$\vartheta = \vartheta_1(\varrho, t) + \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \vartheta_2(\varrho, t - \tau) d\tau \quad (5)$$

So gelten für ϑ_1 und ϑ_2 die folgenden Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} &= R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} & \vartheta_1(\varrho, 0) &= f(\varrho) \\ \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} &= R^2 \frac{\gamma c}{k} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} & \vartheta_2(\varrho, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Für die ursprüngliche Differentialgleichung erhalten wir folgende Randwertbedingung:

$$\left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} + \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \left. \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} d\tau \right|_{\varrho=1} = \vartheta_{k\alpha}(t) - c_1 \vartheta_1(1, t) - c_1 \int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} \vartheta_2(1, t - \tau) d\tau - c_0 \quad (7)$$

Dies kann in folgende zwei Bedingungen zerlegt werden:

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} &= -c_1 \vartheta_1(1, t) \\ \left. \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} &= 1 - c_1 \vartheta_2(1, t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ferner haben wir aus (7) für die Funktion $\varphi(t)$ die folgende Bedingung:

$$\int_{\tau=0}^t \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau = \vartheta_{k\alpha}(t) - c_0 = \vartheta_{k\alpha}(0) + \Delta(t) - c_0$$

Nun soll

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \delta(\tau) [\vartheta_{k\alpha}(0) - c_0] + \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \quad (\tau > 0) \quad (9)$$

sein, wo $\delta(t)$ die Dirac'sche Delta-Funktion darstellt, wofür

$$\int_{\tau=0}^t \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\tau=0}^t \delta(\tau) f(\tau) d\tau = f(0)$$

gelten. So ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung (1):

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(\varrho, t) &= \vartheta_1(\varrho, t) + \int_{\tau=0}^t \delta(\tau) [\vartheta_{k\alpha}(0) - c_0] \vartheta_2(\varrho, t - \tau) d\tau + \\ &+ \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \vartheta_2(\varrho, t - \tau) d\tau = \vartheta_1(\varrho, t) + [\vartheta_{k\alpha}(0) - c_0] \vartheta_2(\varrho, t) + \\ &+ \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \vartheta_2(\varrho, t - \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Nach Lösung der Gl. (6₁) und mit Rücksicht auf die Anfangs und Randwertbedingung erhalten wir:

$$\vartheta_1(\varrho, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{\left[1 + \left(\frac{c_1}{v_p} \right)^2 \right] J_0^2(v_p)} J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}$$

Für v_p gilt die Eigenwertgleichung

$$v_p J_1(v_p) = c_1 J_0(v_p). \quad (p \geq 1)$$

Gleichfalls gilt als Lösung der Funktion ϑ_2

$$\vartheta_2(\varrho, t) = \frac{1}{c_1} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{(v_p^2 + c_1^2) J_0(v_p)} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t}$$

mit den oben angeführten Eigenwerten.

Auf Grund von (10) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \vartheta(\varrho, t) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(\nu_p \varrho) d\varrho}{\left(1 + \frac{c_1^2}{\nu_p^2}\right) J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p \varrho) e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} + \\
 &+ [\vartheta_{ka}(0) - c_0] \left[\frac{1}{c_1} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{(\nu_p^2 + c_1^2) J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right] + \\
 &+ \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \left[\frac{1}{c_1} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{(\nu_p^2 + c_1^2) J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} \right] d\tau = \\
 &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f(\varrho) \varrho J_0(\nu_p \varrho) d\varrho}{\left(1 + \frac{c_1^2}{\nu_p^2}\right) J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p \varrho) e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} + \frac{1}{c_1} \vartheta_{ka}(t) - \frac{c_0}{c_1} - \\
 &- 2[\vartheta_{ka}(0) - c_0] \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{(\nu_p^2 + c_1^2) J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\
 &- 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p)}{(\nu_p^2 + c_1^2) J_0(\nu_p)} \int_{\tau=0}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau
 \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn wir auf die praktisch erwünschte Genauigkeit nicht verzichten wollen, können wir an Stelle der Funktion $g(\vartheta_F)$ im Bereiche des untersuchten Abschnittes nicht eine Gerade setzen; wir sind gezwungen, um den Fehler auf das Minimum herabzusetzen, mehrere — womöglich aber wenige — Geraden aneinander anschließen zu lassen. So ergibt sich:

$$g(\vartheta_F) \approx \begin{cases} c_1 \vartheta_F + c_0 & (0 \leq t \leq t_{j1}) \\ c_1^{(1)} \vartheta_F + c_0^{(1)} & (t_{j1} \leq t \leq t_{j2}) \\ \vdots & \vdots \\ c_1^{(j-1)} \vartheta_F + c_0^{(j-1)} & (t_{js-1} \leq t \leq t_{js}) \end{cases}$$

In unserem Fall haben wir die Geraden derart angenommen, daß für den gegebenen Funktionsabschnitt das Integral des Quadrats der Funktionsdifferenzen ein Minimum sei; mit anderen Worten, wir stellen die Bedingung auf, daß für den j -ten Abschnitt ($\vartheta_F^{(j-1)} \leq \vartheta_F \leq \vartheta_F^{(j)}$) die Funktion:

$$\int_{\vartheta_F^{(j-1)}}^{\vartheta_F^{(j)}} [g(\vartheta_F) - c_1^{(j-1)} \vartheta_F - c_0^{(j-1)}]^2 d\vartheta_F = \Omega(c_1^{(j-1)}, c_0^{(j-1)})$$

ein Minimum erreichen soll. Die derart bestimmten Geraden schließen sich einander an (Abb. 1).

Wollen wir die Funktion $\vartheta_{ka}(t)$ annäherungsweise durch an einander anschließende Parabeln darstellen, so ergibt sich die allgemeine Formel für den i -ten Abschnitt ($t_{i-1} \leq t \leq t_i$):

$$\vartheta_{ka}(t) \approx a_{2,i-1} t^2 + a_{1,i-1} t + a_{0,i-1}$$

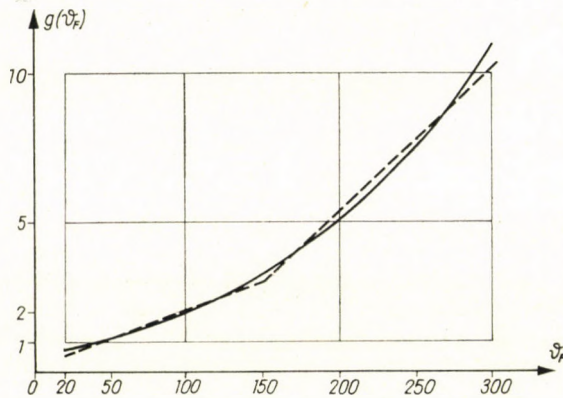


Abb. 1

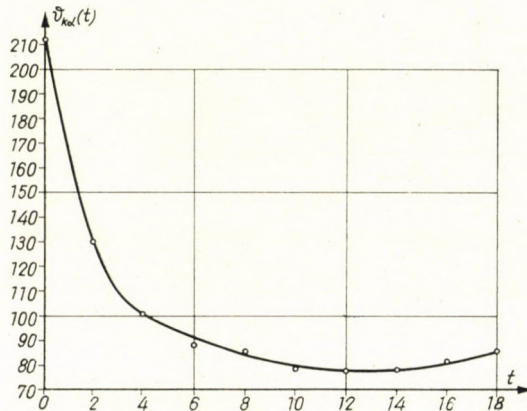


Abb. 2

Um bessere Resultate zu erzielen, ist es ratsam, die Parabel — anstatt des GAUSSschen Ausgleichs — abschnittsweise durch gewisse exakte Punkte der Funktion $\vartheta_{ka}(t)$ zu führen. Auch diese Parabel schließen sich einander an (Abb. 2).

Die Lösung ist nun durch zweierlei Anschlußbedingungen gekennzeichnet: es wird verlangt, daß sich die Geraden, die ausgleichsweise die Funktion

$g(\vartheta_F)$ ersetzen, einander anschließen, und daß sich auch die zur Annäherung der Funktion $\vartheta_{ka}(t)$ angelegten Parabeln gleichfalls aneinander anschließen. Die Reihenfolge ist natürlich von der Natur des gegebenen Vorganges abhängig.

Die Temperaturverteilung im Körper kann für den Anfangszeitpunkt des Anheizens als konstant angenommen werden:

$$\vartheta(\varrho, 0) = f(\varrho) = \vartheta_a.$$

Durch Verwendung der Eigenwertgleichung

$$J_1(\nu_n) = \frac{c_1}{\nu_n} J_0(\nu_n)$$

ergibt sich für den ersten Abschnitt die folgende Lösung:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^{(0)}(\varrho, t) = & \frac{1}{c_1} [\vartheta_{ka}(t) - c_0] - 2[\vartheta_{ka}(0) - c_0 - 2c_1 \vartheta_a] \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{(\nu_n^2 + c_1^2) J_0(\nu_n)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{(\nu_n^2 + c_1^2) J_0(\nu_n)} \int_{\tau=0}^t \frac{dA(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Im Sinne des vorangehenden haben wir:

$$\vartheta_{ka}(t) = \begin{cases} a_2 t^2 + a_1 t + a_0 & (0 \leq t \leq t_{i_1}) \\ a_{21} t^2 + a_{11} t + a_{01} & (t_{i_1} \leq t \leq t_{i_2}) \\ \vdots & \vdots \\ a_{2, i-1} t^2 + a_{1, i-1} t + a_{0, i-1} & (t_{i_{r-1}} \leq t \leq t_{i_r}) \end{cases}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (12) ergibt sich die Lösung für den ersten Abschnitt: ($0 \leq t \leq t_1$)

$$\begin{aligned} \vartheta^{(0)}(\varrho, t) = & \frac{1}{c_1} [\vartheta_{ka}(t) - c_0] - 2 [\vartheta_{ka}(0) - c_0 - 2c_1 \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{(\nu_n^2 + c_1^2) J_0(\nu_n)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ & - 2R^2 \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{\nu_n^2 (\nu_n^2 + c_1^2) J_0(\nu_n)} \left[2a_2 t + A_n^{(0)} \left(1 - e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} \right) \right], \end{aligned}$$

wo

$$A_n^{(0)} = a_1 - 2a_2 \frac{R^2}{\nu_n^2} \frac{\gamma c}{k}.$$

Es zeigt sich auch hier, daß das Vorzeichen des dritten Gliedes dem von $\Delta(t)$ entgegengesetzt ist, daß also dieses Glied sozusagen den Widerstand des Materials gegen die Änderung der Temperatur $\vartheta_{ka}(t)$ darstellt.

Im nächsten Abschnitt kann $\vartheta_{ka}(t)$ mit guter Annäherung der zweiten Parabel gleichgesetzt werden. Es muß hier also eine neue Lösung gefunden werden, wobei die »Anfangs«-Temperaturverteilung im Körper gleichgestellt werden soll mit der bis zum Zeitpunkt t_1 entstandenen Temperaturverteilung:

$$f_1(\varrho) = \vartheta^{(0)}(\varrho, t_1).$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (11) und unter Einbeziehung der Eigenwertgleichung und durch Heranziehen der Orthogonal-Relationen der BESSEL'schen Funktionen erhalten wir die Lösung für den zweiten Abschnitt ($t_1 \leq t \leq t_2$):

$$\begin{aligned} \vartheta^{(1)}(\varrho, t) = & \frac{1}{c_1} [\vartheta_{ka}^{(1)}(t) - c_0] - 2[\vartheta_{ka}(0) - c_0 - 2c_1 \vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{(v_n^2 + c_1^2) J_0(v_n)} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t} - \\ & - 2R^2 \frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \varrho)}{v_n^2 (v_n^2 + c_1^2) J_0(v_n)} \left\{ \left[2a_{21} t_1 + A_n^{(0)} \right] 1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_1} \right\} e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} + \\ & + \left[2a_{21}(t - t_1) + A_n^{(1)} \right] 1 - e^{-\frac{v_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} \left. \right\}, \end{aligned}$$

wo

$$A_n^{(1)} = 2a_{21} t_1 + a_{11} - 2a_{21} \frac{R^2}{v_n^2} \frac{\gamma c}{k} \text{ ist.}$$

Im nächsten Abschnitt ändert sich die ausgleichende Gerade der Funktion $g(\vartheta_F)$:

$$g(\vartheta_F) \approx c_1^{(1)} \vartheta_F + c_0^{(1)} \quad (t_2 \leq t \leq t_3)$$

Wir müssen also auf die ursprüngliche Lösung (11) zurückgreifen. In unserem Verfahren betrachten wir den Heizvorgang mit dem Anfangszeitpunkt t_2 und nehmen die bisher entstandene Temperaturverteilung als Anfangszustand an:

$$f_2(\varrho) = \vartheta^{(1)}(\varrho, t_2)$$

Daher ergibt sich die Lösung für den dritten Abschnitt ($t_2 \leq t \leq t_3$):

$$\begin{aligned} \vartheta^{(2)}(\varrho, t) = & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \int_{\varrho=0}^1 f_2(\varrho) \varrho J_0(v_p \varrho) d\varrho}{\left(1 + \frac{c_1^{(1)2}}{v_p^2} \right) J_0^2(v_p)} J_0(v_p \varrho) e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_1)} + \frac{1}{c_1^{(1)}} [\vartheta_{ka}(t) - c_0^{(1)}] - \\ & - 2[\vartheta_{ka}(t_2) - c_0^{(1)}] \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{(v_p^2 + c_1^{(1)2}) J_0(v_p)} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_2)} - \\ & - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(v_p \varrho)}{(v_p^2 + c_1^{(1)2}) J_0(v_p)} \int_{\tau=t_2}^t \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{v_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

Die Funktion $g(\vartheta_F)$ erhält in dem eben behandelten Abschnitt eine neue lineare Form, und daher nimmt die Eigenwertsgleichung folgende Form an:

$$\nu_p J_1(\nu_p) = c_1^{(1)} J_0(\nu_p),$$

woraus man für $\{\nu_p\}$ eine neue Eigenwertserie erhält. So kann man die Orthogonalitäts-Relationen für das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(\nu_n \varrho) J_0(\nu_p \varrho) d\varrho &= \frac{1}{\nu_n^2 - \nu_p^2} [\nu_n J_0(\nu_p) J_1(\nu_n) - \nu_p J_0(\nu_n) J_1(\nu_p)] = \\ &= \frac{c_1 - c_1^{(1)}}{\nu_n^2 - \nu_p^2} J_0(\nu_n) J_0(\nu_p) \end{aligned}$$

nicht mehr gelten lassen, und nur die Eigenwertsgleichung kann ausgenutzt werden. So erhalten wir für das Integral im ersten Glied der Lösung (11):

$$\begin{aligned} 2 \int_{\varrho=0}^1 f_2(\varrho) \varrho J_0(\nu_p \varrho) d\varrho &= \frac{2}{c_1} [\vartheta_{ka}(t_2) - c_0] \frac{c_1^{(1)}}{\nu_p^2} J_0(\nu_p) - \\ &- 4[\vartheta_{ka}(0) - c_0 - 2c_1 \vartheta_a] (c_1 - c_1^{(1)}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p)}{(\nu_n^2 - \nu_p^2)(\nu_n^2 + c_1^2)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_2} - \\ &- 4R^2 \frac{\gamma c}{k} (c_1 - c_1^{(1)}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p)}{\nu_n^2(\nu_n^2 - \nu_p^2)(\nu_n^2 + c_1^2)} \{ \dots \}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (11):

$$\begin{aligned} \vartheta^{(2)}(\varrho, t) &= \frac{1}{c_1^{(1)}} [\vartheta_{ka}(t) - c_0^{(1)}] + \\ &+ 2 \left[\left(\frac{c_1^{(1)}}{c_1} - 1 \right) \vartheta_{ka}(t_2) - \frac{c_1^{(1)}}{c_1} c_0 + c_0^{(1)} \right] \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{(\nu_p^2 + c_1^{(1)2}) J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_2)} - \\ &- 2R^2 \frac{\gamma c}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho)}{\nu_p^2(\nu_p^2 + c_1^{(1)2}) J_0(\nu_p)} \left[2a_{21}(t-t_2) + A_p(1 - e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_2)}) \right] - \\ &- 4[\vartheta_{ka}(0) - c_0 - \\ &- 2c_1 \vartheta_a] (c_1 - c_1^{(1)}) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p \varrho) e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} t_2}}{(\nu_n^2 + c_1^2)(\nu_n^2 - \nu_p^2) \left(1 + \frac{c_1^{(1)2}}{\nu_p^2} \right) J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_2)} - \\ &- 4R^2 \frac{\gamma c}{k} (c_1 - c_1^{(1)}) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ \dots \}}{\nu_n^2(\nu_n^2 + c_1^2) (\nu_n^2 - \nu_p^2) \left(1 + \frac{c_1^{(1)2}}{\nu_p^2} \right) J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2} \frac{k}{\gamma c} (t-t_2)}, \end{aligned}$$

wo

$$A_p = 2a_{21} t_2 + a_{11} - 2a_{21} \frac{R^2}{\nu_p^2} \frac{\gamma c}{k}$$

ist.

Der Einfluß der Ofentemperatur auf die Temperaturverteilung im Körper wird durch das erste, das dritte und das fünfte Glied der Gleichung ausgedrückt. Das erste Glied enthält die modifizierte Ofentemperatur

$$\vartheta_{ka}(t) = \vartheta_{ka}(t_2) + \Delta t, \quad (t_2 \leq t \leq t_3),$$

wogegen das dritte und das fünfte Glied sozusagen den gegen diese Ofentemperatur auftretenden Körperwiderstand darstellen. Die Änderung von $h(\vartheta)$ wurde in die Lösung der Differentialgleichung teils mit Hilfe der Koeffizienten $c_1, c_0, c_1^{(1)}, c_1^{(1)}$, teils durch die modifizierte Ofentemperatur eingebaut.

Trotz des Anscheins ist die numerische Errechnung nicht kompliziert; wir können nämlich bei den zweifachen Summationen die innere (die auf n bezogene) bereits in dem Resultat, das wir im vorhergehenden Abschnitt gewonnen haben, als fertig vorfinden.

2. Anwendungen und Folgerungen

Es soll das Anheizen eines langen, geraden, kreiszylindrischen Stahlkörpers mit dem Halbmesser von 10 cm und der gleichen Zusammensetzung wie die des in dem ersten Aufsatz behandelten Stahlstücks näher untersuchen, u. zw. unter Beibehaltung derselben Voraussetzungen wie dort, mit der Ausnahme, daß der Wärmeübergangskoeffizient der oben beschriebenen Änderungen unterliegt.

Die Grunddaten sind die folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma c}{k} &= 1332 \left[\frac{\text{Min}}{\text{m}^2} \right] & \varepsilon &= 0,87 & R &= 0,1 [m] \\ c_1 &= 0,0189 & c_0 &= 0,1623 \\ c_1^{(1)} &= 0,0477 & c_0^{(1)} &= -4,1518 \\ a_2 &= 6,457; & a_1 &= -53,434; & a_0 &= 211,201 \\ a_{21} &= 0,294; & a_{11} &= -7,548; & a_{01} &= 126,262 \\ \vartheta_a &= 20 [^\circ\text{C}]; & t_1 &= 4; & t_2 &= 6; & t_3 &= 18. \end{aligned}$$

Die Werte $g_e(\vartheta_F)$ in Tabelle I bedeuten die an Stelle der Funktion $g(\vartheta_F)$ tretende Ausgleichsgerade.

In Tabelle II bedeutet ϑ_{km} die gemessene Ofentemperatur, $\vartheta_{kam}(t)$ ist die aus dem gemessenen Wert berechnete modifizierte Ofentemperatur, und

Tabelle I

ϑ_F	20	50	75	100	125	150
$g(\vartheta_F)$	0,745672	1,101254	1,483865	1,958452	2,538691	3,239209
$g_c(\vartheta_F)$	0,540999	1,109085	1,582490	2,055895	2,529300	3,002705

ϑ_F	175	200	225	250	275	300
$g(\vartheta_F)$	4,075581	5,064331	6,222929	7,569797	9,124304	10,906766
$g_c(\vartheta_F)$	4,195121	5,387537	6,579953	7,772368	8,964784	10,157200

Tabelle II

t	0	2	4	6	8	10
ϑ_{km}	929	792	726	694	686	666
$\vartheta_{ka,m}(t)$	211,2007	130,1595	100,7719	88,4674	85,5760	78,6574
$\vartheta_{ka}(t)$	211,2007	130,1595	100,7719	91,5515	84,6809	80,1603

t	12	14	16	18
ϑ_{km}	664	666	675	686
$\vartheta_{ka,m}(t)$	77,9895	78,6575	81,7167	85,5760
$\vartheta_{ka}(t)$	77,9894	78,1684	80,6972	85,5761

$\vartheta_{ka}(t)$ stellt die zur praktisch annehmbaren Annäherung der letzteren berechnete Parabel zweiten Grades dar.

In Abb. 4 bedeutet die punktierte Linie die Temperatur der Oberfläche bzw. jene der inneren Linie; bei konstanter Ofentemperatur und unveränderlichen Parametern; die gestrichelte Linie zeigt die Temperaturverteilung bei zeitabhängiger Ofentemperatur und unveränderten thermischen Parametern; die volle Linie stellt die Temperaturverteilung bei veränderlicher Ofentemperatur und veränderlichem Wärmeübergangskoeffizienten dar (wobei die übrigen Koeffizienten als konstant angenommen sind). Von der letzteren kann festgestellt werden, daß sie zu der empirischen, aus Messungen erhaltenen Kurve ihrem Charakter nach am nächsten verläuft [10, 11]. (Ein genauer Vergleich ist hier nicht möglich, da die Messungen an einem Zylinder mit dem Halbmesser von 4 cm durchgeführt worden sind.)

In der Anfangsperiode des Anheizens in unserem Beispiel zeigen die Werte der Tabelle III und die Kurven der Abb. 4 deutlich den Einfluß der

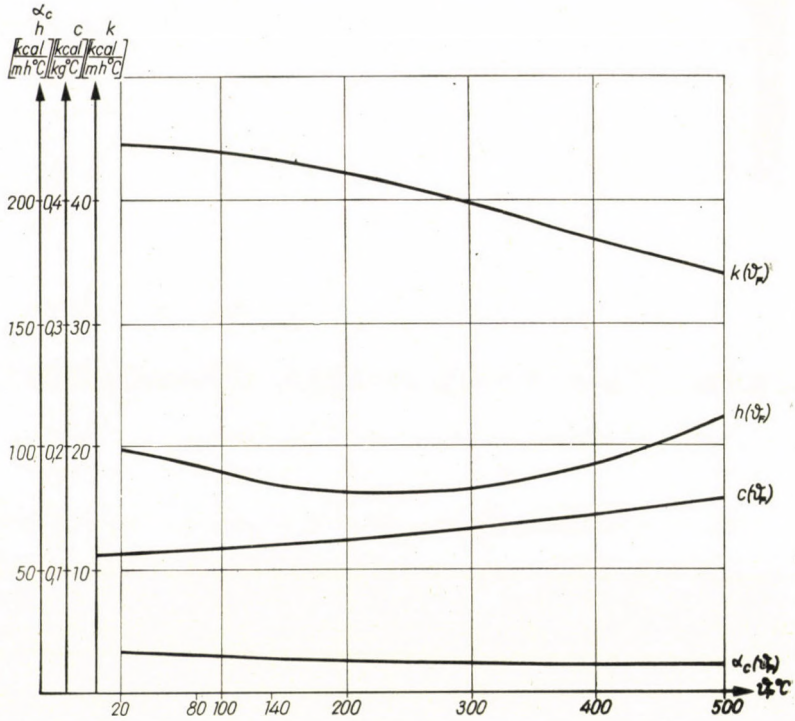


Abb. 3

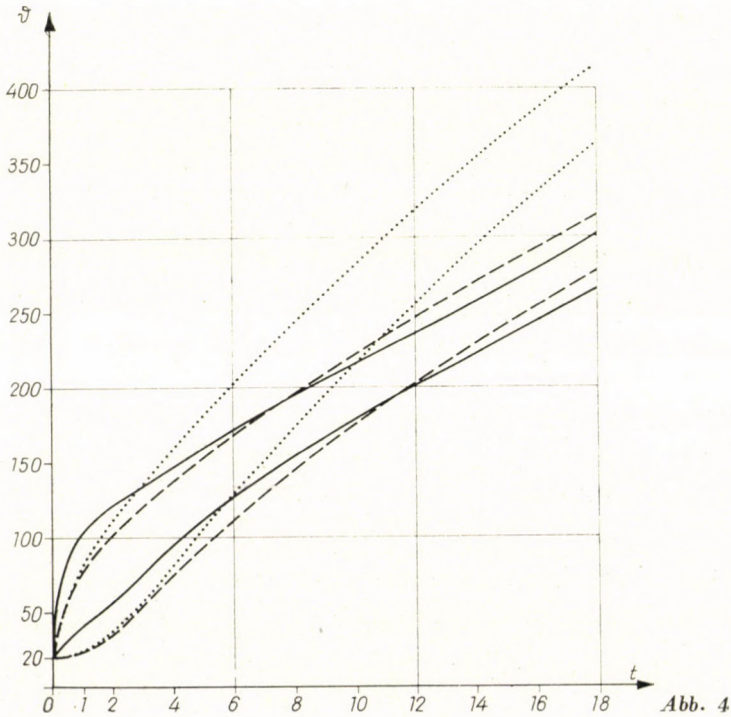


Tabelle III

t	$\hat{v}_k = \text{const.}, h = \text{const.}$		$\hat{v}_k = \hat{v}_k(t), h = \text{const.}$		$\hat{v}_k = \hat{v}_k(t), h = h(\hat{v})$	
	$\hat{\vartheta}(0, t)$	$\hat{\vartheta}(1, t)$	$\hat{\vartheta}(0, t)$	$\hat{\vartheta}(1, t)$	$\hat{\vartheta}(0, t)$	$\hat{\vartheta}(1, t)$
1	21,649	81,932	21,626	78,417	41,509	102,744
2	35,4	111,4	34,8	102,1	56,0	122,3
3	56,9	136,4	54,2	120,5	75,4	135,1
4	80,5	159,6	74,2	137,0	94,5	147,6
5	104,3	181,7	93,5	152,9	111,0	160,2
6	127,7	203,1	111,7	168,1	126,2	172,4
7	150,6	223,9	128,9	182,6	140,3	183,9
8	172,8	244,0	145,3	196,6	153,7	195,2
10	215,4	282,6	175,9	222,9	178,4	216,5
12	255,6	319,0	203,9	246,0	201,2	237,3
14	293,5	353,4	230,0	270,9	222,8	258,0
16	329,3	385,8	254,5	293,5	244,0	279,4
18	363,1	416,4	277,9	315,8	265,4	302,2

Änderung des Wärmeübergangskoeffizienten h auf die Temperaturverteilung im Körper. Dasselbe gilt aber auch für die Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle, da die Hauptangaben, die den Heizvorgang bestimmen, wesentlich nicht variieren. Es ist ein Vorteil unserer Methode, daß die Linearität der Differentialgleichung beibehalten wurde, und daher auch die numerische Errechnung verhältnißmäßig einfach ist. Wenn aber auch die anderen thermischen Parameter (k , γc) als Funktion der Temperatur aufgefaßt werden sollten, so müßte man auf die Linearität der Differentialgleichung verzichten, wodurch nur eine kompliziertere Lösung denkbar wäre.

SCHRIFTTUM

1. COURANT—HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. Bd. II. 1937. Berlin.
2. SMIRNOW, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Bd. II. 1955. Berlin. — Bd. IV. 1958. Berlin.
3. TYICHONOV—SAMARSKIJ: (Die Differentialgleichungen der mathematischen Physik). Ung. Übersetzung aus dem russischen Original. 1956. Budapest. Akadémiai Kiadó.
4. TOLSTOW, G. P.: Fourier-Reihen. 1955. Berlin.
5. RELTON, F. E.: Applied Bessel Functions. London and Glasgow. 1949.
6. McLACHLAN: Bessel Functions for Engineers. London. 1941.
7. GRÖBER—ERK—GRIGULL: Wärmeübertragung. Berlin—Göttingen—Heidelberg. 1957. Springer.
8. JAKOB, M.: Heat Transfer. Vol. I. New York—London. 1958. Vol. II. New York—London 1957.
9. HEILIGENSTAEDT, W.: Wärmetechnische Rechnungen von Industrie-Öfen 3. Auflage. 1951. Düsseldorf.

10. BORBÉLY, S.: Nem lineáris hővezetési kapcsolatos vizsgálatokról. (Über gewisse Untersuchungen, die lineare Wärmeleitung betreffend). MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXIII. 3—4.
11. MASCHKE, TH.: Hengerszimetrikus bugák felhevítéséről. V. Hengerszimetrikus testek hevítése változó hőmérsékletű kemencében. (Über das Anheizen zylindersymmetrischer Blöcke. V. Das Anheizen zylindersymmetrischer Körper in einem Ofen veränderlicher Temperatur). MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXV. 1—4.
12. KNESCHKE, A.: Über gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge bei festen Körpern. Ing. Arch. XXIV. B. 1956.
13. JÄCKEL, H.: Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge. Ing. Arch. XXVI. 1958.
14. JUNG, H.: Zur Theorie der gesteuerten Anheizvorgänge. ZAMM 38. 1958.
15. HOFFMANN, A.: Anwärmern zylindrischer Körper entsprechender Länge bei veränderlicher Ofentemperatur. Acta Technica Ac. Sc. Hung. Band XL, Heft 1—2.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser gibt in diesem Aufsatz die Lösung der Differentialgleichung der Wärmeleitung für den Fall eines zylindersymmetrischen Körpers auf Grund der dritten Randwertbedingung, wenn nämlich die Ofentemperatur eine Funktion der Zeit, und der Wärmeübergangskoeffizient eine Funktion der Temperatur ist. Der Wärmeübergangskoeffizient wird aus dem Strahlungssatz errechnet und wird dies für die Mehrzahl der Anheizvorgänge als begründet erwiesen.

Die Lösung ergibt sich mit Hilfe der richtigen Wahl der entsprechenden Hilfsfunktionen $[g(\vartheta_F), \vartheta_{ka}(t)]$ mittels einer geeigneten Vereinfachung, u. wz. durch Anwendung der bereits vom Verfasser früher ausgearbeiteten Methode. Der Fall des als konstant angenommenen Wärmeübergangskoeffizienten gilt als Spezialfall der Differentialgleichung bzw. der Randwertbedingung, wofür die im ersten Aufsatz publizierte Lösung gegeben ist.

Die am Ende des Aufsatzes gezeigte konkrete Verwendung zeigt, daß die mittels des neuen Rechenganges errechnete Temperaturverteilung den bisher empirisch festgestellten Daten näher kommt als die in der technischen Praxis bisher angewandten Methoden.

RESEARCH ON THE HEATING OF A LONG CYLINDRIC BODY IN AN OVEN WITH CHANGING TEMPERATURE AND ON THE CONDITION OF A VARIABLE COEFFICIENT OF HEAT TRANSFER

A. HOFFMANN

SUMMARY

A solution is given of the differential equation relating to heat conductance of a cylindrical symmetric body on the basis of the third condition of marginal values *i. e.* when the temperature of the furnace is considered as a function of time and the coefficient of heat transfer as a function of the temperature. This coefficient is calculated on the basis of the radiation theorem that is proved to be applicable for most of the cases occurring in technical practice.

The solution is found by means of well chosen auxiliary functions $[g(\vartheta), \vartheta_{ka}(t)]$ and by making a reasonable simplification by using a method previously developed by the author [15]. The assumption of a constant coefficient is the special case of the differential equation and the condition of marginal values, the solution of which is presented in the authors former paper are mentioned.

Finally, the practical application proves that the distribution values as calculated by the present method, represent a better approximation to empirically found results than those obtained by other usual methods.

EXAMEN DU PROCESSUS D'ÉCHAUFFEMENT DE CORPS CYLINDRIQUES
LONGS, À TEMPÉRATURE DE FOUR ET COEFFICIENT DE
TRANSMISSION VARIABLES

A. HOFFMANN

RÉSUMÉ

Avec la troisième condition de limite, l'auteur résout l'équation différentielle de la conduction de chaleur en cas de symétrie de révolution, quand la température du four est fonction du temps, et le coefficient de transmission est fonction de la température. L'auteur calcule ce coefficient sur la base de la loi du rayonnement, ce qu'il justifie pour la majorité des processus d'échauffement.

La solution s'obtient par le choix et la simplification des fonctions auxiliaires appropriées, à l'aide d'une méthode exposée par l'auteur dans une étude précédente [15]. Un cas spécial de l'équation différentielle et de la condition de limite consiste à considérer le coefficient de transmission comme constant; pour ce cas, c'est la solution donnée dans l'étude précédente qui est valable.

L'application pratique présentée à la fin de l'étude permet de constater que la répartition de la température, calculée à l'aide de la nouvelle méthode, est plus proche des données empiriques que les résultats obtenus par les méthodes usuelles.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАКАЛИВАНИЯ ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ТЕЛ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРЕ ПЕЧИ И КОЭФФИЦИЕНТЕ
ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

A. ХОФМАНН

РЕЗЮМЕ

Автор решает в работе дифференциальное уравнение теплопроводности для цилиндрической симметрии с помощью третьего предельного условия в том случае, когда температура печи является функцией времени, а коэффициент теплопередачи — функцией температуры. Коэффициент теплопередачи выводится по закону лучеиспускания, и для значительного числа процессов накаливания обосновывается его применимость.

Расчет проводится выбором соответствующих вспомогательных функций $[g(\vartheta_F), \vartheta_{ка}(t)]$, их допустимым упрощением, а затем используется разработанный в предыдущей публикации [15] автора метод. Приводится частный случай дифференциального уравнения или предельного условия, когда коэффициент теплопередачи принимаем постоянным, тогда получается опубликованное в предыдущей работе решение.

Разработанное в конце статьи конкретное применение показывает, что рассчитанное по новому расчетному методу распределение температуры лучше приближает замеренные на опыте данные, чем примененные до сих пор в технической практике методы.

СИСТЕМА КРИВЫХ РЕГУЛИРОВАНИЯ РУСЛА РЕК

ЧАСТЬ 2. ГИПЕРТАНГЕНТОИД

К. АПОР

[Поступило 13 апреля 1961 г.]

VII. Тангенсная кривая и гипертангенстоид

Тангенсная кривая, а также гипертангенстоид в их полной мере не нашли применения в качестве кривых для регулирования рек, но тем более необходимо использование отдельных их частей в основном при проектировании из-за условий рек.

Построенный на рис. 1 тангенстоид, собственно говоря, представляет собою такой эллипс, ось a и директриса которого также имеет бесконечную длину. Директриса в бесконечности сечет ось X на расстоянии $a = \infty$. Естественно, расстояние до оси X является постоянным. Единица деления директрисы, размещающейся на расстоянии b , равна единице стационарирования разбивки тангенстоидной кривой, то есть $s_d = s_t = 0,50$.

Эта параллельная директриса одновременно является также асимптотной касательной распространяющегося в бесконечность тангенстоида, так как располагающиеся на нем точки деления при соединении с проекционной точкой дают косые прямые, и измеренная на них единица стационарирования из-за равенства в бесконечности касается директрисы.

Фокус тангенстоида пропорционально росту оси a все больше и больше приближается к вершине тангенстоида, которая идентична инфлекссионной точке, но в случае симметричного построения может быть принята также в качестве сурфлекссионной точки, — и в случае когда $a = \infty$, тогда $f = 0$, так как находится в вершине.

Тангенстоид с этой распространяющейся в бесконечность осью a и в бесконечности касающейся асимптоты называю гипертангенстоидом, так как аналогично гиперболе имеет асимптоты, но с той лишь разницей, что и они в бесконечности секут друг друга как параллельные прямые.

Гипертангенстоид одновременно представляет собою генетрису тангенсной кривой. На рис. 1 изображена тангенсная кривая, построенная на основе гипертангенстоида, это видно в правой части рис. 1. Естественно, директриса этой тангенсной кривой не может быть идентична директрисе гипертангенстоида уже из-за косои касательной тангенсной кривой. Однако для построения тангенстоида, имеющего общую касательную с тангенсной кривой, можно использовать директрису и построенный здесь же танген-

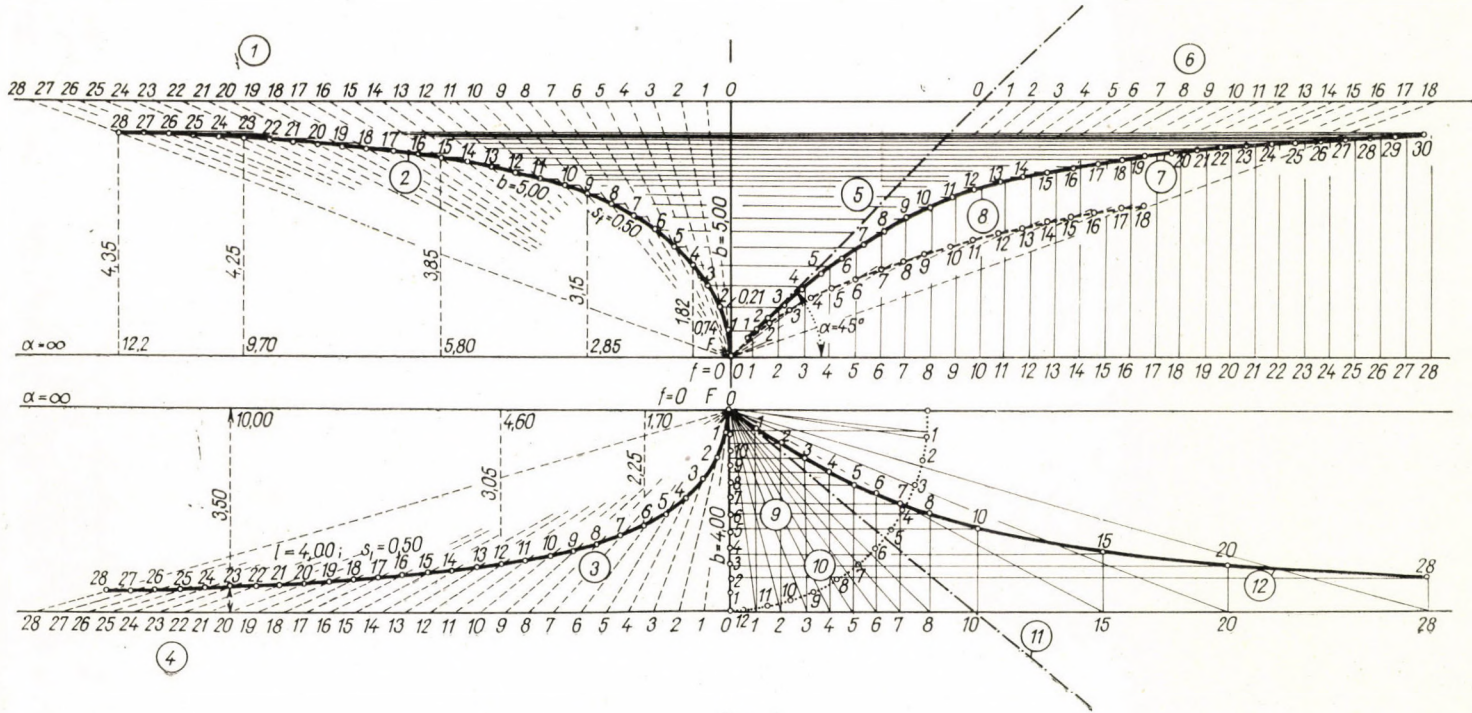


Рис. 1

тоид представляет собою координированный к тангенсной кривой тангентоид.

В левой нижней части рис. 1 построенный тангентоид имеет постоянную малую ось $b = 4,00$, а единица стационарирования равна $s_t = 0,50$.

VIII. Уравнение гипертангентоида

Уравнение гипертангентоида с расстоянием асимптоты $b = 5,00$, построенное в левой части рис. 2, можно трактовать так, как такой искаженный эллиптический тангентоид, большая ось которого, обозначенная буквой a , простирается в бесконечность, то есть $a = \infty$; b постоянная, поэтому

$$y = b - \frac{b}{1 + x \cdot t},$$

где y — ордината;

x — абсцисса;

t — постоянный коэффициент, характерный для гипертангентоида, вычисление которого будет рассматриваться позднее.

В крайнем случае, когда $x = 0$ имеем

$$y = b - \frac{b}{1 + 0} = b - b = 0.$$

А если же $x = \infty$, тогда имеем

$$y_t = b - \frac{b}{1 + \infty} = b - 0 = b.$$

Промежуточные случаи

$$y_t = b - \frac{b}{1 + x_t \cdot t} = b \left(1 - \frac{1}{1 + x_t \cdot t} \right) \quad (6)$$

уже известно, но с другой стороны

$$\frac{b}{n \cdot s_t} = \frac{y_{tn}}{x_t} \quad (7)$$

где n — порядковый номер округленного числа точки стационарирования;

s_t — округленная единица стационарирования.

Последнее уравнение выражает тот факт, что постоянное расстояние b асимптоты (считая от оси X) относится к округленному многократному n единицы стационарирования, как ордината y_t точки n порядкового номера, находящегося на гипертангентоиде, к абсциссе X_t .

Из уравнения

$$A \frac{b}{n \cdot s_t} = \frac{y_t}{x_t}$$

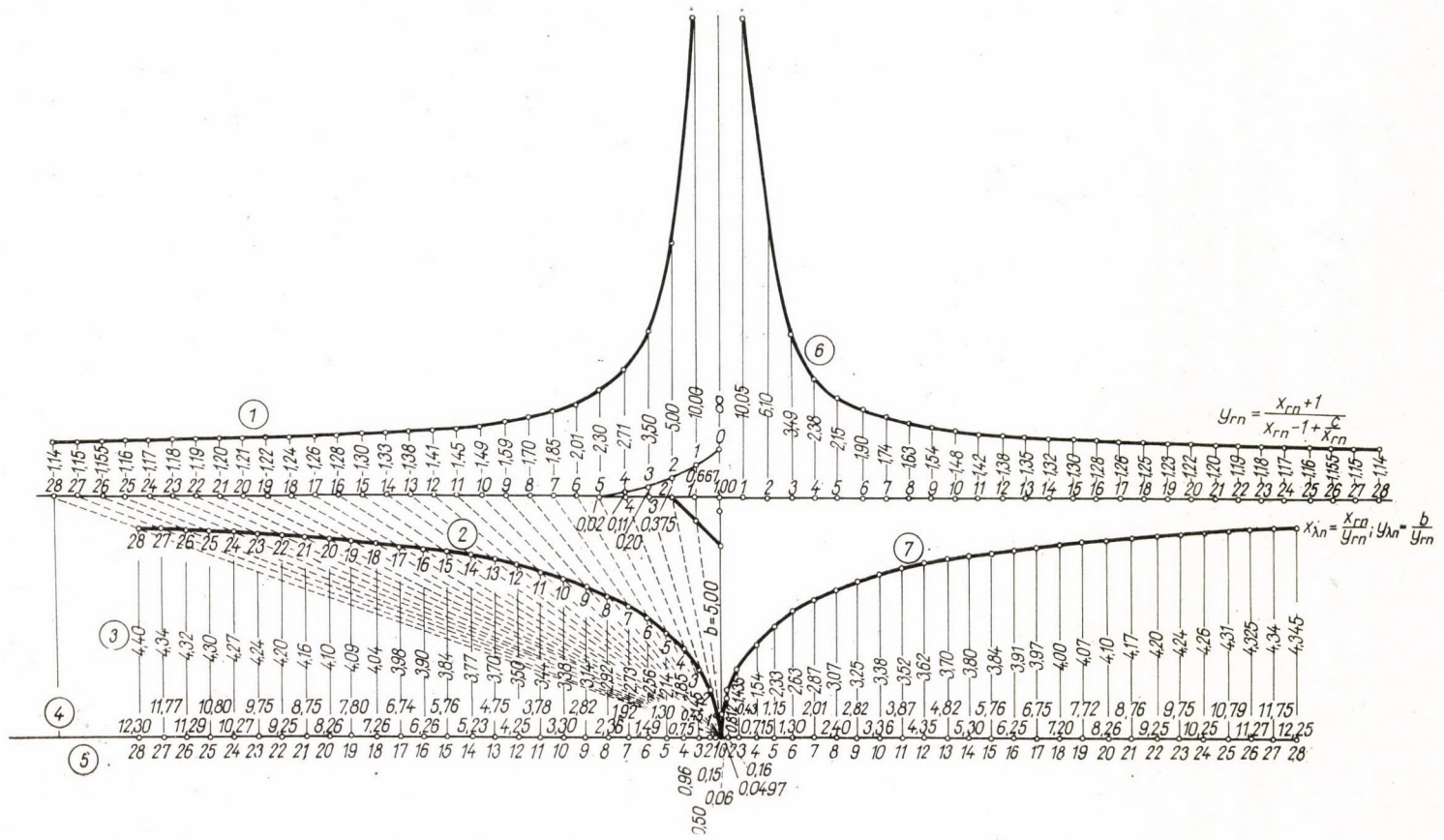


Рис. 2

имеем

$$y_t = \frac{x_t \cdot b}{n \cdot s_t}$$

Так как вследствие приведенных выше

$$y_t = b \left(1 - \frac{1}{1 + x_t \cdot t} \right),$$

можно определить коэффициент t , так как

$$\frac{x_t \cdot b}{n \cdot s_t} = b \left(1 - \frac{1}{1 + x_t \cdot t} \right),$$

то есть

$$\frac{x_t}{n \cdot s_t} = 1 - \frac{1}{1 + x_t \cdot t}$$

$$n \cdot s_t = \frac{x_t}{1 - \frac{1}{1 + x_t \cdot t}}; \quad x_t = n \cdot s_t - \frac{n \cdot s_t}{1 + x_t \cdot t}; \quad n \cdot s_t - x_t = \frac{n \cdot s_t}{1 + x_t \cdot t}$$

$$n \cdot s_t(1 - x_t) - x_t(1 + x_t \cdot t) = n \cdot s_t$$

$$1 + x_t t - \frac{x_t(1 + x_t \cdot t)}{n \cdot s_t} = \frac{n s_t}{n s_t}; \quad x_t \cdot t - \frac{x_t + x_t^2 \cdot t}{n \cdot s_t} = 0;$$

$$\frac{x_t^2 + x_t}{n \cdot s_t} - x_t \cdot t = 0,$$

$$\frac{x_t^2 t}{n s_t} + \frac{x_t}{n s_t} - x_t t = 0; \quad \frac{t}{n s_t} \cdot x_t^2 + \left(\frac{1}{n \cdot s_t} - t \right) x_t = 0;$$

$$\frac{x_t^2 t}{n s_t} - x_t \cdot t + \frac{x_t}{n s_t} = 0$$

и решив по t получим

$$t \left(\frac{x_t^2}{n \cdot s_t} - x_t \right) + \frac{x_t}{n \cdot s_t} = 0;$$

$$t = \frac{-\frac{x_t}{n \cdot s_t}}{\frac{x_t^2}{n \cdot s_t} - x_t} = \frac{\frac{x_t}{n \cdot s_t}}{x_t - \frac{x_t^2}{n \cdot s_t}} = \frac{\frac{1}{n \cdot s_t}}{1 - \frac{x_t^2}{n \cdot s_t}} = \frac{1}{n \cdot s_t - x_t} \quad (8)$$

Демонстрируя на числовом примере, рис. 2 имеет расстояние асимптоты $b = 5,00$, то есть вычисления, относящиеся к некоторой произвольной

по порядковому номеру $n = 12$ точки левостороннего гипертангента, сначала для $n \cdot s_t = 12 \cdot 0,5 = 6,00$, в то же время $x = 4,26$.

$$t = \frac{1}{6,00 - 4,26} = 0,575,$$

но в качестве контроля для точки $n = 15$, для которой $n \cdot s_t = 15 \cdot 0,50 = 7,5$, в то же время $x = 5,76$.

$$t = \frac{1}{7,5 - 5,76} = \frac{1}{1,74} = 0,575.$$

Это доказывает правильность вычислений и измерений.

По измерению имеем $y_{12} = 3,55$, а по вычислению $y = b \left(1 - \frac{1}{1 + x_t \cdot t} \right)$.

$$\begin{aligned} y_{12} &= 5,00 \left(1 - \frac{1}{1 + 4,24 \cdot 0,575} \right) = 5,00 \left(1 - \frac{1}{1 + 2,44} \right) = \\ &= 5,00(1 - 0,291) = 5,00 \cdot 0,709 = 3,54. \end{aligned}$$

Также по измерению имеем $y_{15} = 3,84$, а по вычислению имеем

$$\begin{aligned} y_{15} &= 5,00 \left(1 - \frac{1}{1 + 5,76 \cdot 0,575} \right) = 5,00 \left(1 - \frac{1}{1 + 3,81} \right) = \\ &= 5,00 \left(1 - \frac{1}{4,81} \right) = 5,00(1 - 0,232) = 5,00 \cdot 0,768 = 3,84. \end{aligned}$$

Данные измерений и в этом случае совпадают с данными вычислений.

IX. Данные измерений и вычислений гипертангента

Данные измерений и вычислений гипертангентов сведены в приведенной ниже таблице. Данные измерений приведены также в левой части рис. 2 на гипертангента с расстоянием асимптоты $b = 5,00$.

t_1 — вычисляемое по формуле (8)

$$t_1 = \frac{1}{n \cdot s_t - x_{t_1}}$$

значение коэффициента точки 1.

В случае точки 1 как y_{t_1} , так и x_{t_1} можно вычислить каждый в отдельности на основе простой пропорциональности. Обозначим через q_{t_1} расстояние от точки 0 до точки 1 асимптоты.

$$q_{t_1} = \sqrt{b^2 + s_{t_1}^2} = \sqrt{5^2 + 0,5^2} = \sqrt{25,25} = 5,025$$

На этом радиусе длиной ϱ_{t_1} размещается дистанция $s_{t_1} = 0,5$, тогда имеем $\varrho_{t_1} = r_{t_1} = 5,025 : 5$, и поэтому имеем

$$y_{t_1} = \frac{b}{\varrho_{t_1}} \cdot s_{t_1} = \frac{5}{5,025} \cdot 0,5 = 0,995 \cdot 5 = 0,497.$$

Можно отдельно определить также значение n по

$$s_{tn} : b = x_{tn} \cdot n s_{tn},$$

таким образом получаем

$$x_{t_1} = \frac{1 s_{t_1}}{b} = \frac{0,25}{5} = 0,05.$$

Исходя из этих данных можно вычислить

$$t_1 = \frac{1}{0,5 - 0,05} = \frac{1}{0,45} = 2,22,$$

следовательно

$$\begin{aligned} y_{t_1} &= b \left(1 - \frac{1}{1 + x_{t_1} \cdot t} \right) = 5 \left(1 - \frac{1}{1 + 0,05 \cdot 2,22} \right) = \\ &= 5 \left(1 - \frac{1}{1 + 0,11} \right) = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{1,11} \right) = 5(1 - 0,9025) = \\ &= 5 \cdot 0,0975 = 0,487 \end{aligned}$$

$$x_{t_1} = \frac{y_{t_1}}{(b - y_{t_1})t_1} = \frac{0,487}{(5 - 0,487) \cdot 2,22} = \frac{0,487}{4,513 \cdot 2,22} = \frac{0,487}{10} = 0,0487.$$

и

$$y_{pn} = \frac{-(1 + x_{pn})}{1 + x_{pn}} = \frac{1 + x_{pn}}{x_{pn} - 1}$$

действительно приближенно только в случае $x_{rn} > 1$. Следовательно, в знаменателе необходимо убрать отрицательный знак таким слагаемым, который с уменьшением x_{rn} дает большое значение, так как в противном случае прерывается непрерывность уравнения и получаются мнимые значения, которые практически непригодны. Чтобы избежать этого, уравнение необходимо преобразовать в уравнение вида

$$y_{rn} = \frac{1 + x_{rn}}{x_{rn} - 1 + \frac{c}{x_{rn}}}. \quad (11)$$

После этого уточненное уравнение редукционной гиперболы гипертангента с упущением промежуточных обратных трансформаций можно выразить в следующем виде

$$\frac{1}{x_{rn}} + \frac{1}{y_{rn}} + \frac{1}{x_{rn} \cdot y_{rn}} - \frac{c}{x_{rn}^2} - 1 = 0. \quad (12)$$

Коэффициент c можно принять в качестве постоянной и определить его на основе того случая, когда x_{rn} имеет наименьшее значение, то есть

$$x_{rn} = x_{r1} = s,$$

где s — единица стационарирования.

Для устранения недоразумений необходимо повторить, что возрастает по $x_{rn} = n \cdot s$, n — означает порядковый номер данной точки, то есть $n = 1, 2, 3, \dots \infty$.

Из таблицы видно, что отклонение между расчетными и измеренными данными очень незначительно. Результаты измерений y , приняв в колонке 7, значение x в нескольких местах в колонке 8 необходимо было незначительно поправить. Еще одна дополнительная проверка поправленных таким образом значений y и x состоит в том, что данное постоянное значение величины b , то есть в данном случае разделяя на 5,00 на ординату y_n точки порядкового номера n округленного стационарирования, получается то же частное или коэффициент, как и при разделении расстояния d_n , измеренного на директрисе, на абсциссу x_n точки порядкового номера n . Это, естественно, следует из того факта, что

$$\frac{b}{d_n} = \frac{y_n}{x_n}.$$

На рис. 2, например, при $n = 16$ имеем $d_n = 8 \cdot 0,5 = 4,00$; $y_n = y_8 = 2,92$; $x_n = x_8 = 2,36$; контролируя, получаем $\frac{5}{2,92} = 1,71$ и $\frac{4}{2,36} = 1,70$ — отклонение погрешности измерения.

Х. Редукционная гипербола гипертангента

Если длины d_n таблицы трактовать в качестве значений абсциссы, разделенной на расстояния $d_n = x_{rn}$, и для них в качестве y_{rn} записать частные

$$\frac{b}{y_n} = \frac{d_n}{x_n} = y_{rn},$$

Таблица

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
№ п. п.	Длина директрисы d_n	Результаты измерений		Числовые значения $\frac{b}{d_n}$	Данные измерений $\frac{y_n}{x_n}$	С поправкой		Частное		Числовые значения по уравнениям		
		y_n	x_n			y_n	x_n	$y_l = \frac{b}{y_n}$	$y_l = \frac{d_n}{x_n}$	y_r	$y_n = \frac{b}{y_r}$	$x_n = \frac{d_n}{y_r}$
1	0,5	0,50	0,06	10,00	8,62	0,50	0,05	10	10	10,05	0,497	0,0497
2	1,0	0,96	0,18	5,00	5,32	0,96	0,19	5,23	5,26	6,16	0,812	0,1628
3	1,5	1,43	0,45	3,33	3,18	1,43	0,43	3,50	3,49	3,49	1,435	0,43
4	2,0	1,85	0,75	2,50	2,46	1,85	0,74	2,70	2,71	2,58	1,94	0,775
5	2,5	2,14	1,10	2,00	1,98	2,14	1,10	2,34	2,28	2,15	2,33	1,16
6	3,0	2,50	1,44	1,67	1,68	2,50	1,49	2,00	2,01	1,90	2,63	1,58
7	3,5	2,73	1,92	1,43	1,42	2,73	1,92	1,84	1,82	1,74	2,87	2,01
8	4,0	2,92	2,36	1,25	1,24	2,92	2,34	1,71	1,70	1,63	3,07	2,45
9	4,5	3,14	2,82	1,11	1,11	3,14	2,82	1,59	1,59	1,54	3,25	2,92
10	5,0	3,36	3,36	1,00	1,00	3,36	3,36	1,49	1,49	1,48	3,38	3,38
11	5,5	3,44	3,78	0,91	0,91	3,44	3,78	1,45	1,45	1,42	3,52	3,87
12	6,0	3,55	4,25	0,83	0,835	3,55	4,24	1,41	1,41	1,38	3,62	4,35
13	6,5	3,65	4,77	0,77	0,780	3,65	4,77	1,38	1,36	1,35	3,70	4,82
14	7,0	3,77	5,28	0,715	0,714	3,77	5,28	1,33	1,33	1,32	3,80	5,30
15	7,5	3,84	5,76	0,667	0,666	3,84	5,76	1,30	1,30	1,30	3,84	5,76
16	8,0	3,90	6,26	0,625	0,624	3,90	6,26	1,28	1,28	1,28	3,91	6,25
17	8,5	3,98	6,74	0,589	0,589	3,98	6,74	1,26	1,26	1,26	3,97	6,75
18	9,0	4,04	7,26	0,556	0,556	4,04	7,26	1,24	1,24	1,25	4,00	7,20
19	9,5	4,09	7,80	0,526	0,524	4,09	7,80	1,22	1,22	1,23	4,07	7,72
20	10,0	4,12	8,26	0,500	0,499	4,12	8,26	1,21	1,21	1,22	4,10	8,20
21	10,5	4,16	8,75	0,475	0,475	4,16	8,75	1,20	1,20	1,20	4,17	8,76
22	11,0	4,20	9,25	0,454	0,453	4,20	9,25	1,19	1,19	1,19	4,20	9,25
23	11,5	4,24	9,75	0,425	0,425	4,24	9,75	1,18	1,18	1,18	4,24	9,75
24	12,0	4,27	10,27	0,416	0,416	4,27	10,27	1,17	1,17	1,17	4,26	10,25
25	12,5	4,30	10,80	0,400	0,398	4,30	10,74	1,16	1,16	1,16	4,31	10,75
26	13,0	4,32	11,29	0,384	0,383	4,32	11,29	1,155	1,153	1,155	4,325	11,27
27	13,5	4,34	11,77	0,370	0,369	4,34	11,70	1,151	1,148	1,15	4,34	11,75
28	14,0	4,40	12,30	0,357	0,357	4,40	12,30	1,135	1,138	1,145	4,36	12,35

вычисленные в колонках 9 и 10 таблицы 3, в качестве ординат, и соединить конечные точки, (как это видно на верхней левой кривой рис. 2), тогда получим асимметрическую гиперболу, разделяя на ординаты y_m которого расстояние асимптоты b , получаем ординаты y_n точек n округленных стационаризований на самом гипертангентоиде, а если разделить измеренное на директрисе расстояние d_n на y_m , тогда вычисляется абсцисса x_n .

Значение $t = 0,575$ двух вычислений, сообщенных в конце 8 главы, без изменений можно было использовать для вычисления y_{12} и y_{15} , где гипертангентоид уплощается, но существенно другое положение имеет место в случае y_1 и т. д., когда ординаты и абсциссы точек сильно отличаются друг от друга. В таких случаях необходимо отдельно вычислить значение коэффициента t для каждой отдельной точки. Например, используя формулу (6), ордината точки порядкового номера $n = 1$ гипертангентоида получается

$$y_{t1} = b \left(1 - \frac{1}{1 + x_{t1} \cdot t_1} \right),$$

где x_{t1} — вычисляемая абсцисса точки (поскольку предполагается проверить результаты измерений);

Теперь сравним полученные результаты:

	Данные измерения	Вычисление пропорциональности	По коэффициенту t
y_{t1}	0,50	0,497	0,487
x_{t1}	0,05	0,05	0,0487

Проще поступить, если ординатой y_m редуционной гиперболы редуцируем расстояние асимптоты b и получим ординату y_t , т. е.

$$y_{t1} = \frac{b}{y_{r1}} = \frac{5,0}{10} = 0,5$$

и длину x_{rn}

$$x_{t1} = \frac{x_{r1}}{y_{r1}} = \frac{0,5}{10} = 0,05,$$

используя данные измерений.

Вследствие того, что при отложении на левой верхней части рис. 2 редуционной гиперболы, вычисленной на основе данных измерений, показывает выраженную закономерность, то необходимо, используя закономерность, построить самостоятельное уравнение редуционной гиперболы.

Асимптоты редукционной гиперболы гипертангента не параллельны, а секут друг друга под прямым углом, и поэтому основное уравнение в форме $\frac{1}{x_{rn}} + \frac{1}{y_{rn}} + \frac{1}{x_{rn} + y_{rn}} = 1$ основы при вычислении по данным измерений дает приближение только для небольших значений y_{rn} и больших значений x_{rn} , повторяя, что на прямой асимптоты x_{rn} , использованной в качестве оси абсциссы точки порядкового номера n обозначают длины абсциссы x_{rn} , а y_{rn} ординаты абсциссы редукционной гиперболы. Следовательно, если известны x_{rn} и y_{rn} , тогда абсцисса x_{tn} гипертангента может быть вычислена по формуле

$$x_{tn} = \frac{x_{rn}}{y_{rn}} \quad (9)$$

путем деления редукционной абсциссы x_{rn} на редукционный коэффициент y_{rn} (идентичен ординате редукционной гиперболы).

Ординаты y_{tn} гипертангента получаются по формуле:

$$y_{tn} = \frac{b}{y_{rn}} \quad (10)$$

Вычисление точек гипертангента с использованием этого посредственного метода осуществляется проще, чем значения x_t и y_t , вычисленных по формуле гипертангента, в котором случае коэффициенты t необходимо вычислять от случая к случаю отдельно.

Решая основное приведенное выше уравнение редукционной гиперболы по y , получаем

$$x_{rn} + y_{rn} - x_{rn} + 1 = 0$$

т. е.

$$y_{rn}(1 - x_{rn}) + 1 + x_{rn} = 0$$

во всех случаях — положительное целое число именно из-за округленного стационарирования.

Следовательно уравнение

$$y_{rn} = \frac{x_{rn} + 1}{x_{rn} - 1 + \frac{c}{x_{rn}}}$$

в случае $x_{rn} = s$ может быть записано в виде

$$y_{rn} = \frac{s + 1}{s - 1 + \frac{c}{s}} \quad (13)$$

Однако y_{rn} , когда x имеет наименьшее значение, тогда принимает значение $x_{rn} = s$, по рис. 2 получается значение

$$y_{rn} = \frac{\sqrt{b^2 + s^2}}{s} \quad (14)$$

то есть

$$y_{rn} = \frac{\sqrt{b^2 + s^2}}{s} = \frac{s + 1}{s - 1 + \frac{c_b}{s}}, \quad \frac{1}{y_{rn}} = \frac{s - 1 + \frac{c_b}{s}}{s + 1} = \frac{s}{\sqrt{b^2 + s^2}}$$

и упуская $\frac{1}{y_{rn}}$, получаем

$$s - 1 + \frac{c_b}{s} = \frac{s(s - 1)}{\sqrt{b^2 + s^2}}$$

и поэтому

$$c_b = s \left(\frac{s(s + 1)}{\sqrt{b^2 + s^2}} - s + 1 \right). \quad (15)$$

Так как единица стационарирования s является более постоянным значением (0,5; 1,0 и т. д.) чем b , которая величина может принять любое данное значение, поэтому, приняв значение s в качестве переменной функции длины, b необходимо было записать в виде c_b .

С использованием формул производим практическое вычисление для данного значения $b = 5,0$ для всех точек. Вычисляются значения для каждой точки по порядку $n = 1; 2$ и т. д.

Точка 1: $n = 1; x_{r1} = s = 0,5$ является наименьшим значением

$$s + 1 = 1,5; \sqrt{b^2 + s^2} = 5,25; -s + 1 = -0,5 + 1 = 0,5$$

$$\begin{aligned} c_{5,0} &= 0,5 \left(\frac{0,5 \cdot 1,5}{5,25} + 0,5 \right) = 0,5 \left(\frac{0,75}{5,25} + 0,5 \right) = \\ &= 0,5(0,149 + 0,5) = 0,5 \cdot 0,649 = 0,3245. \end{aligned}$$

Продолжая в точке 0 построение $1/4$ гипертангента с вертикальной осью $b = 5,00$, b будет размещаться под осью абсциссы, $2b = 2 \cdot 5,0 = 10,0$, и с этим половина гипертангента принимается с размером $b = 5,0$ нормальной.

Принимая постоянной $c_{5,0} = 0,3245$, можно использовать редуционную гиперболу для вычисления редуционных значений y_r .

Точка 1. $n = 1$; $x_{r1} = 0,5$; $c_{b2} = c_5 = 0,3245$;

$$y_{r1} = \frac{x_{r1} + 1}{x_{r1} - 1} = \frac{0,5 + 1}{0,5 - 1 + \frac{0,3245}{0,5}} = \frac{1,5}{-0,5 + 0,649} = \frac{1,5}{0,149} = 10,05$$

а по измерению имеем 10,00.

Точка 2. $n = 2$; $x_{r2} = 1,0$;

$$y_{r2} = \frac{1 + 1}{1 - 1 + \frac{0,3245}{1}} = \frac{2}{0,3245} = 6,16,$$

а по измерению имеем 5,05.

Точка 3. $n = 3$; $x_{r3} = 1,5$;

$$y_{r3} = \frac{1,5 + 1}{1,5 - 1 + \frac{0,3245}{1,5}} = \frac{2,5}{0,5 + 0,216} = \frac{2,5}{0,715} = 3,49,$$

а по измерению имеем 3,50.

Точка 4. $n = 4$; $x_{r4} = 2$;

$$y_{r4} = \frac{2 + 1}{2 - 1 + \frac{0,3245}{2}} = \frac{3}{1 + 0,16225} = \frac{3}{1,162} = 2,58,$$

а по измерению имеем 2,71.

Точка 5. $n = 5$; $x_{r5} = 2,5$;

$$y_{r5} = \frac{2,5 + 1}{2,5 - 1 + \frac{0,3245}{2,5}} = \frac{3,5}{1,5 + 0,1295} = \frac{3,5}{1,63} = 2,15,$$

а по измерению имеем 2,30.

Продолжая такую схему вычислений вплоть до точки 28 и занося полученные данные в колонки 11, 12 и 13 таблицы 3 и далее сравнивая с данными измерений в колонках 7, 8, 9 и 10, до точки 14 наблюдаются отклонения. Наибольшее отклонение имеет место в точке 2. Если для точки 2 значение c вычислить отдельно, тогда имеем:

Точка 2:

$$s_{r2} = 1,0 \sqrt{b^2 + s^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} = 5,1$$

$$c_{b2} = 1 \left(\frac{1 \cdot 2}{5,1} - 1 + 1 \right) = \frac{2}{5,1} = 0,392$$

$$y_{rn} = \frac{x_{rn} + 1}{x_{rn} - 1 + \frac{c}{x}}$$

$$y_{r2} = \frac{1 + 1}{1 - 1 + \frac{0,392}{1}} = \frac{2}{0,392} = 5,1,$$

а по измерению имеем 5,05.

Если $y_{r2} = 5,1$ и $c_{b2} = 0,392$, тогда

$$y_{i2} = \frac{b}{y_{p2}} = \frac{5}{5,1} = 0,982.$$

а по измерению имеем 0,96;

$$y_{i2} = \frac{1}{5,1} = 0,196,$$

а по измерению имеем 0,19.

Такое решение несомненно лучше приближается к данным измерений, чем значение 0,812 в 12 колонке таблицы.

Нельзя добиться точного совпадения результатов двух описанных методов, так как начало округленного стационарирования не учитывает то, что в вершине длину дуги нельзя заменить длиной хорды. Построение теоретически является отличным. К первой длине дуги относится некоторая более длинная дуга. Формула же дает в качестве результата равные длины дуг, и соответствующие им хорды являются более короткими, чем округленная единица стационарирования. Отклонение в вершине не имеет практическое значение, так как это видно будет в дальнейшем, гипертангентоид используется для быстрого изготовления планов, где вообще не фигурируют точки вблизи вершины.

Округленные стационарирования гипертангентоида, вычисленные по формуле, не совпадают, но при проектировании они также не потребуются, так как проектированная линия будет построена по совершенно другому стационарированию. Для проектирования полностью достаточна линия гипертангентоида без стационарирования. Проектировочное стационарирование следует русловому стационарированию и на плане местности будет отмечено таким же образом.

XI. Графические изображения гипертангента и редукционной гиперболы

Гипертангенттоид и редукционная гипербола, изображенные ниже, даны только в $1/4$ части, так как при проектировании только $1/4$ часть любой кривой может быть расположена между инфлексией точки русла и ее сурфлексией.

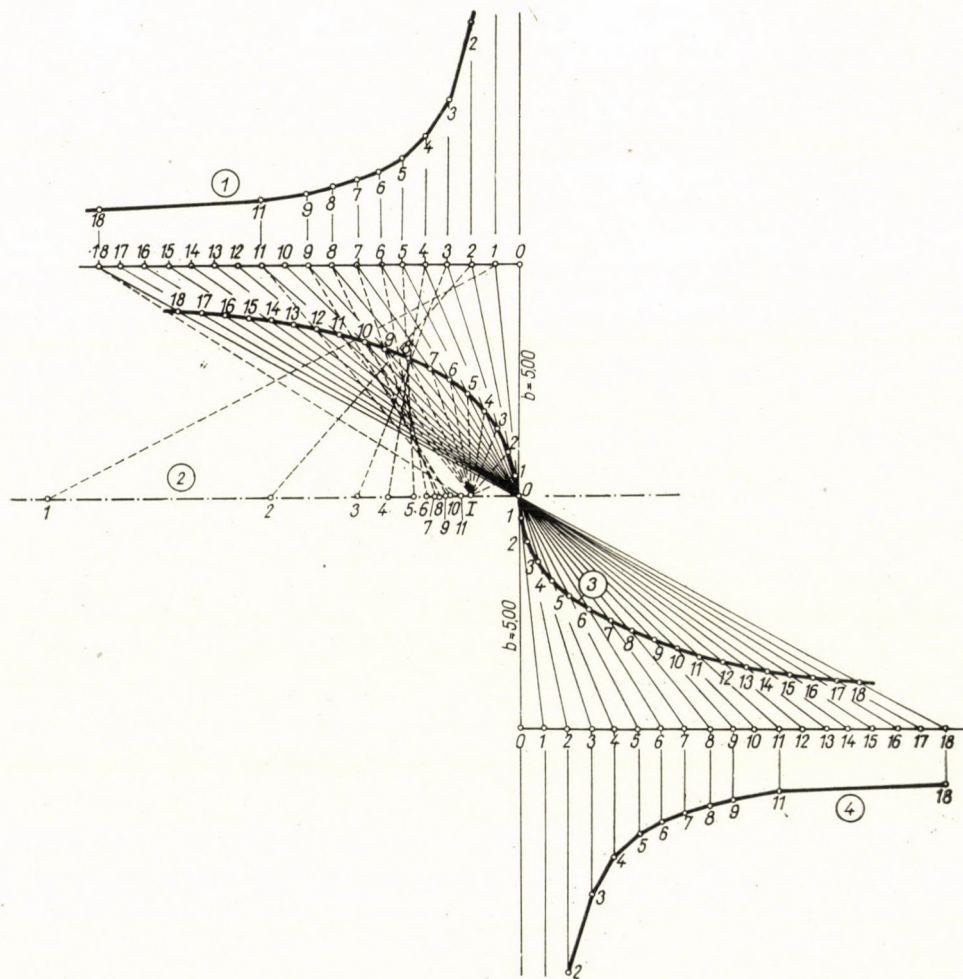


Рис. 3

Эта длина участка русла является переменной на всех реках, и поэтому кривую регулирования необходимо построить соответственно этому изменению. Однако, гипертангенттоид, как это видно на рис. 3, с удлинением проекционных радиусов продолжается дальше точки 0, и продолжается округ-

ленное стационарирование из первого сектора в третий сектор. Это является половиной гипертангента. Если же проекционные радиусы продолжать дальше вокруг точки O , тогда зеркальные изображения получаем во втором и четвертом секторах, с которыми получается полная картина гипертангента. На рис. 3 изображение этого я упустил, с одной стороны, для лучшей обзримости, а с другой стороны, потому что не имеет практической роли. Однако, необходимо было на рис. 3 изобразить линейную связь между ординатами редукционной гиперболы и точками асимптоты гипертангента, точками стационарирования. Как известно, если определенные вычислением ординаты редукционной гиперболы отложить на оси гипертангента с длинами $O-1$, $O-2$, ... $O-n$ и эти конечные точки соединить с точками идентичного обозначения $1, 2, \dots, n$ на асимптоте, тогда получим линии направления $1-1, 2-2, \dots, n-n$, с которыми построив параллельные из точек $1, 2, \dots, n$ идентичного обозначения на гипертангенте, все они без исключения на оси секут друг друга в одной общей точке I . Построение является обратимым, так как если, в свою очередь, дана точка I , то, соединяя ее с любой точкой n гипертангента, параллельная, построенная из точки n асимптоты, сечет ось на расстоянии $O-n = y_m$. Ни при каких условиях нельзя смешивать расстояние $O-I$ с фокусом F , ведь фокус на гипертангенте совпадает с точкой O , которая кроме этого на полутангенте представляет собою инфлексивную точку, а на полной тангенте сурфлексивную точку, а ордината точки редукционной гиперболы, лежащей против вершины в бесконечности сектора дуги гипертангента, представляет собою длину $O-I$.

Ординаты точек редукционной гиперболы 11, 18 на рис. наглядно близко лежат к ординате редукционной гиперболы, относящейся к вершине в бесконечности. Для практических целей точка, лежащая за точкой 10, может быть использована в качестве инфлексивной точки, и вообще точка O не подходит для целей регулирования рек, ведь поворот на 180° или же в противном направлении $\varrho = \pi$ здесь по существу никогда не фигурирует.

ХII. Применение гипертангента для регулирования рек

На рис. 4 изображена серия гипертангента.

Характер гипертангента определяется расстоянием b , далее расстоянием асимптоты от линии оси, таким же образом как радиус круга дает размеры круга. Чем больше расстояние асимптот гипертангента от линии оси, тем больше также радиус кривизны в вершине.

Однако, гипертангент обладает еще одним другим очень интересным, более того, ценным свойством, и это свойство заключается в размещении гипертангентов друг в друге.

Изображенные на рис. 4 кривые характера $b = 7$; $b = 6$; $b = 5$; $b = 4$ и $b = 3$ отсчитав с левой верхней части рисунка и отложив на нижней правой части того же рисунка, отклоняются друг от друга только в изображенной пунктирной линии части. Отклонение имеет место в вершине, а разность в длине. Наибольшая разность, естественно, имеет место на длине между $b = 7$ и $b = 3$, и на рис. же это изображено пунктирной линией.

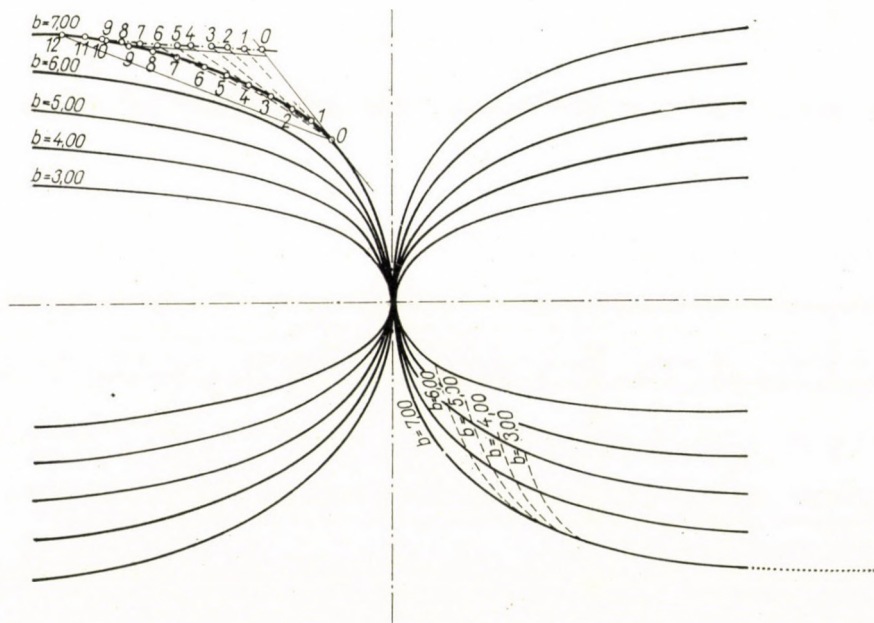


Рис. 4

Я это называю разностью и не отклонением потому, что эта продолженная линия является нормальным продолжением гипертангента с асимптотой $b = 7,00$.

После этого полностью соответствует действительности и практически выгоднее выражать кривизну в радианах, характеризованную через ρ между касательными инфлекссионных точек.

На рис. 5 изображено два идентичных участка русла. Для характеристики извилин участка русла, изображенного в левой части рисунка, служат длины радиусов дуг, которые уже давно используются. Таким образом от инфлекссионной точки до сурфлекссионной точки получаем корзиночную кривую, преимущество которой заключается в том, что эта корзиночная кривая может быть использована в большей или меньшей мере в качестве опорной линии для создаваемых регулирующих сооружений.

Ранее нельзя было обходиться без дуг кругов, так как для разбивки правильных кривых не имелось в распоряжении другого метода. Для разбивки кругов в нашем распоряжении имелись подсобные средства. Затруднение начиналось только там, где по экономическим причинам необходимо было иметь такие необычные по размерам дуги, которые нельзя было найти в справочниках.

Интерполяция данных, приведенных в справочниках, потребовала много времени.

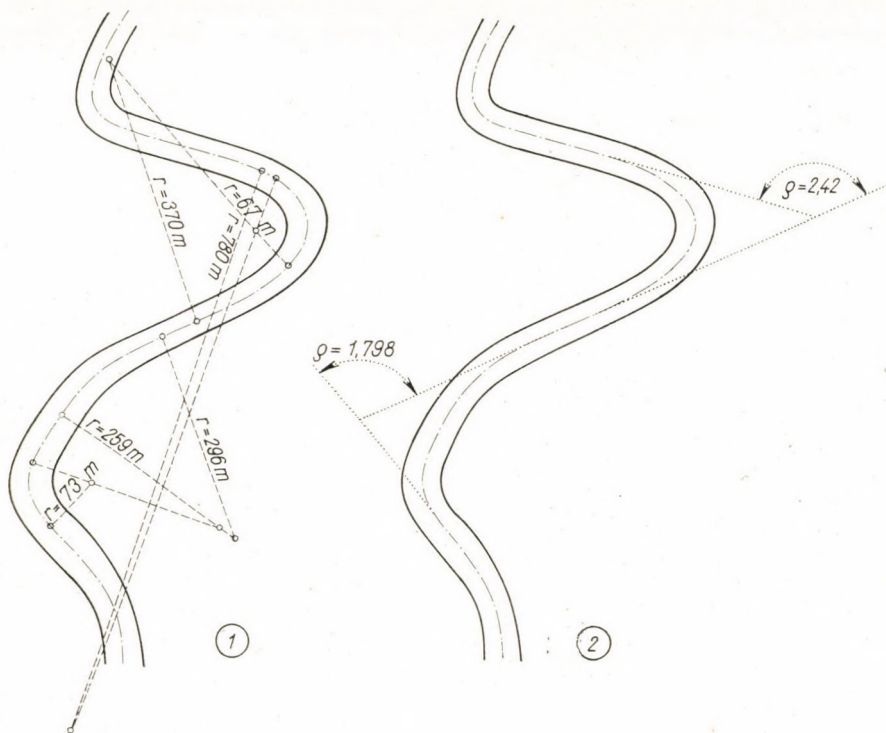


Рис. 5

Это меня заставило разработать упрощенный метод разбивки кругов без справочника (*Acta Technica*, т. 18, № 3—4 за 1957 г.). Этот метод значительно облегчает разбивку на местности. Построение же коробочной кривой тормозилось, и она пока работа перешла в стадию исполнения стала уже непригодной из-за изменения русла.

Для регулирования горных рек лучше подходит синусоид, разбивку которого с полным упрощением я также разработал (*Acta Technica*, т. 25, № 3—4, за 1959 г.). Это тоже относится к методу, который можно осуществить на местности.

При проектировании же характеристика условий кривизны в полной мере соответствует углу ρ между инфлекссионными касательными, как я об этом уже упоминал выше.

Для уравнивания осевой линии реки на бумаге необходимо было бы строить не дугу, а синусоид, но и им можно полностью пренебречь, так как гипертангентиод, поскольку его длина превышает пятикратную длины ординаты, измеренной на асимптоте, становится столь пологой, что может быть использован также для инфлекссионной связи. Построение гипертангентиода является очень простым, как это было видно выше, но на бумаге не обязательно строить от случая к случаю, и вполне удовлетворяет изготовление нескольких шаблонных линеек для масштабов гипертангентиода $b = 7$ и $b = 3$ из картона и с этим осевая линия может быть преобразована в правильную.

На гипертангентиоде в любом месте за исключением вершины и вблизи ее между хордой гипертангентиода и его касательными можно построить синусоид, который в обычном чертежном масштабе нельзя отличить от гипертангентиода (см. с левой стороны рис. 10, на $b = 7,00$ гипертангентиоде построение между точками 0—12).

Решительным преимуществом гипертангентиода является отсутствие фокуса. Гипертангентиод представляет собой растянутый в бесконечность эллипс, среди вершин которого одна его вершина на большой оси остается в конечной области и представляет собою единственную вершину гипертангентиода. Эта вершина на всех рисунках обозначена через 0. Вторая вершина аналогично гиперболе возвращается обратно из бесконечности. Как это в случае гипертангентиода один фокус увеличивающегося эллипса удаляется в бесконечность, то таким же образом второй фокус приближается к вершине и этот фокус образовавшегося гипертангентиода совпадает с вершиной гипертангентиода, и с фокусом, возвратившимся из бесконечности. Малая ось эллипса совместно с располагающимися на ней точками 0 остается на месте. Размер малой оси сохраняется размером b , обозначенный на рисунках перпендикулярно к большой оси в бесконечной области. С этим размером b бывшие вершины аналогично гиперболе из положительной бесконечности переходят в отрицательную бесконечность и наоборот. Вершины, переходящие из положительной бесконечности в отрицательную бесконечность, из противоположного направления приближаются к вершине 0 в бесконечной области тангентиода, касаются ее и с продолжением построения отсюда удаляются в бесконечность, аналогично кривой тангенсной функции. Поэтому вершина тангентиода в конечности одновременно представляет собою также инфлекссионную точку, так как здесь кривая переходит на противоположную сторону. Кратко подведя итог вышесказанному, трактовка тангентиода может исходить также из сравнения с лемнискатой, поскольку асимптоты, находящиеся на большой оси на расстоянии b , являются касательными четырех

вершин. Гипертангентоид при приближении к асимптотам становится столь плоским, что аналогично синусоиду, так что уже десятая точка стационарирования его может быть использована в качестве инфлекссионной точки регулирования рек. Это показывает также построение в верхней левой части рис. 4. В интересах ускорения проектирования можно полностью упустить уравнивание нейтрали русла по синусоидам, так как на длины стационарирования русла они не могут влиять значительно.

Проектированные технические сооружения могут быть начерчены при помощи шаблонной линейки, но при разбивке на местности по возможности необходимо произвести разбивку синусоида или заменяющего его тангентоида.

Гипертангентоид, во всяком случае, лучше соответствует целям регулирования рек, чем лемниската, единственная инфлекссионная точка которой находится в ее центре, и сюда же из вершин кривая возвращается обратно вместо того, чтобы аналогично синусоиду и гипертангентоиду удаляться от центра.

Заключение

В данной моей работе я занимался глубоко с построенным мною гипертангентоидом потому, что он может быть лучше использован в качестве так называемой универсальной кривой для регулирования рек, чем лемниската. В работе я указал преимущества гипертангентоида, которые, кратко повторяя, будут следующими.

Построение гипертангентоида с помощью использованного мною впервые директрисного метода является очень простым. Директрисами гипертангентоида являются асимптоты параллели, параллельной простирающейся в бесконечность оси a на расстоянии малой оси b , на которых единица деления равна единице стационарирования самой кривой, следовательно пересчета не требуется из-за редукации. Гипертангентоид в зависимости от малой оси b может быть вмещен друг в друга. Отклонение может иметь место лишь вблизи точки O , а удлинение наблюдается на концах. Точка O , собственно говоря, представляет собою инфлекссионную точку гипертангентоида, а четыре точки в бесконечности касаются асимптот. Для регулирования рек эти возможности являются незаменимыми. Точка O будет вершиной, хотя сама точка O опускается и вместо нее выбирается лежащая вблизи нее точка, которая берется в качестве вершины или же сурфлекссионной точки. Роль инфлекссионных точек на соответствующем расстоянии от точки O (находящейся на 10 единиц стационарирования) перенимают точки на сплюснутых сторонах. Это во всяком случае дает большее множество точек, чем количество точек, которое можно выбрать на лемнискате. Гипертангентоид можно вычислить также на основе уравнения. Вычисление существенно

упрощается использованием редуцированной гиперболы, так как по ее данным на основе простой пропорциональности можно вычислить ординаты и абсциссы гипертангента.

Преимуществом расчетных координат является то, что их можно связать с государственной координатной сетью.

Можно построить также его одну часть с помощью директрисы, разбитой на редуцированные единицы, но этот метод используется только в целях разбивки на местности, если разбивку предполагается произвести быстро.

Укорочение, наблюдающееся по длине расчетного и построенного гипертангента, невозможно уравнять, так как в случае гипертангента с расчетной координатой уравнение исходит из равных единиц длины. Им возле точки O соответствует более короткие хорды. Наоборот, при построении длину дуги возле точки O берем равной хорде, ведь длина дуги значительно превышает длину хорды. С точки зрения регулирования реки это не мешает, так как имеющиеся вблизи точки O точки не используются.

Поскольку гипертангент замещает синусную кривую, тогда его точка O будет вершиной, и приблизительно десятые точки стационарирования, считая от точки O , перенимают роль инфлекссионных точек.

ЛИТЕРАТУРА

- Альтюнин, С. Ф.: Регулирование русла рек, 1956.
Богданфи, Э.: Гидрология естественных водотоков, т. II.
Апор, К.: Построение на местности и разбивка извилин, Acta Technica, т. XVIII, № 3—4.
Апор, К.: Упрощенная разбивка спиральной волюты Фарга при регулировании горных рек. Acta Technica, т. XXV, № 3—4.
Апор, К.: Роль лемнискаты при разбивке извилин при регулировании рек. Acta Technica, т. XXXI, № 1—2.

РЕЗЮМЕ

Построение гипертангента весьма просто. Асимптоты гипертангента расположены параллельно большой оси книзу и вверх на расстоянии малой оси b от нее, и одновременно могут быть использованы в качестве директрис для применения оригинальных единиц стационарирования кривой без пересчета. Точки гипертангента, однако, можно определить и численно. Вычисление значительно упрощается редуцированной гиперболой используемой в качестве вспомогательной функции, что дает возможность вычислить точки гипертангента на основе простой пропорциональности. Проектирование упрощается и ускоряется использованием гипертангентной шаблонной линейки. Гипертангент можно сравнить с лемнискатной и тангенсной кривой. Путем замены роли его точек, гипертангентом можно заменить также кривую синуса. Гипертангент может успешно использоваться в качестве универсальной кривой регулирования рек, не исключая и случаев часто встречающихся неблагоприятных природных условий.

DAS SYSTEM DER FLUSSBETTREGULIERUNGSKURVEN

II. Die hypertangente

K. APOR †

ZUSAMMENFASSUNG

Die Konstruktion der Hypertangente ist sehr einfach. Ihre Asymptoten sind parallel zur großen Achse, sie verlaufen über und unter derselben in einem Abstand, gleich der kleinen Achse. Die Asymptoten können zugleich als Leitlinien benützt werden, unter Benützung der ursprünglichen Stationierungseinheiten der Kurve ohne Umrechnung. Die Punkte der Hypertangente können jedoch auch numerisch berechnet werden. Die Berechnung wird wesentlich vereinfacht durch Benützung der Reduktionshyperbel als Hilfsfunktion, wodurch die Punkte der Hypertangente auf Grund einer einfachen Proportion berechnet werden können. Die Projektierung wird durch Benützung des Hypertangenten-Kurvenlineals erleichtert und beschleunigt. Die Hypertangente kann mit den Kegelschnitten der Lemniskate und der Tangenskurve verglichen werden. Mittels Vertauschung der Rolle ihrer Punkte kann sie auch die Sinuskurve ersetzen. Als universelle Flußregulierungskurve kann sie oft auch unter von der Natur gegebenen ungünstigen Umständen erfolgreich verwendet werden.

THE SYSTEM OF RIVER-BED REGULATION CURVES

II. The hypertangentoid

K. APOR †

SUMMARY

The construction of the hypertangentoid is very simple. Its asymptotes are parallel to the large axis, above and below this latter at a distance equal to the small axis. The asymptotes can also be used as directrices without recalculating the original stationing distances of the curve. The points of the hypertangentoid can also be calculated numerically. The calculation is essentially simplified by the use of the reduction hyperbola as an auxiliary function, and by this the points of the hypertangentoid can be calculated on the base of a simple proportion. The design is aided by the use of a hypertangentoid curve template. The hypertangentoid can be compared to the conic sections, the lemniscate and the tangent curve. By interchanging its points it can also replace the sinusoid. As an universal curve for river bed regulations it can also be used successfully under unfavourable conditions, frequently presented by nature.

LE SYSTÈME DES COURBES DE RÉGULARISATION DES LITS
DE RIVIÈRE

II. L'hypertangente

K. APOR †

RÉSUMÉ

L'hypertangente est d'une construction très simple. Ses asymptotes, parallèles au grand axe, se situent au-dessus et au-dessous de celui-ci à une distance égale au petit axe. Ils peuvent en même temps être utilisés comme directrices, sans nécessiter un nouveau calcul des unités de stationnement originales de la courbe. Mais les points de l'hypertangente peuvent être calculés aussi numériquement. Le calcul est bien simplifié par l'utilisation de l'hyperbole de réduction comme fonction auxiliaire, ce qui permet de calculer les points de l'hypertangente sur la base d'une simple proportionnalité. L'établissement des projets est facilité et rendu plus rapide par l'emploi d'un gabarit pour le tracé de l'hypertangente. Celle-ci peut être comparée aux sections coniques, à la lemniscate et à la tangente. Après interversion du rôle de ses points, elle peut aussi remplacer la sinusoid. Comme courbe universelle de régularisation des rivières, elle peut être utilisée avec succès dans des conditions même défavorables, se présentant fréquemment dans la nature.

ON THE UNEVENNESS OF CURRENT DISTRIBUTION AMONG THE STUBS OF ALUMINIUM ELECTROLYTIC CELLS

GY. PACZOLAY

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH INST. FOR NON-FERROUS METALS, BUDAPEST

[Manuscript received May 3, 1961]

Irregularities and serious unevenness in the current distribution (abbr.: c. d.) among the stubs of the self-baking anodes of aluminium electrolytic cells are inconvenient phenomena in the reduction plants, as they may result in disturbing normal operation, loss in electrical energy and production.

In general it is conceded that this c. d. cannot be entirely uniform and scattered data can be found in the corresponding literature telling of its existence and sometimes about some forms of its appearance [1—4]. A comprehensive study of the relationships and changes of this characteristic has, however, so far not been reported.

In a preceding paper [5] it was indicated that the relative standard deviation, or variation coefficient (the standard deviation divided by the average value) can be used to characterize the unevenness of c. d. and a short analysis of the regular and irregular factors bringing about the actual c. d. was given. It was concluded that the position of the stubs relative to the baking zone, to the face of the anode and to each other are the most important "regular" factors. As the positions of all the stubs cannot be the same in these respects, this inevitably leads to some degree of permanent unevenness of the c. d.

Further studies of c. d. based on several thousands of voltage measurements made on the stubs or on the leads to the stubs on different types of Söderberg anodes have considerably broadened these basic aspects and they have revealed some important inter-relations.

The measure of the unevenness of c. d.

The literature of mathematical statistics offers several measures of unevenness such as, e. g. range, average absolute difference, relative absolute difference, standard deviation and relative standard deviation (variation coefficient). As our objects included the comparison of unevenness on cells

having rather different amperage, as a fundamental measure of the unevenness the average relative standard deviation, designated ψ was selected.

In our terms the following three different ψ -values can be distinguished in each case, the most important being the first, ψ_I :

$$\psi_I = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \psi_t = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_{i,t} - I_{av})^2}{n}}}{I_{av}} \quad (1)$$

$$\psi_{II} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^m (I_{t,i} - I_{av,i})^2}{m}}}{I_{av,i}} \quad (2)$$

$$\psi_{III} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_{av,i} - I_{av})^2}{n}}}{I_{av}}, \quad (3)$$

where

n = the number of stubs in a given cell (or in a selected group of stubs),

m = the number of complete sets of c. d. measurements over the full period of a stub changing cycle,

$I_{i,t} = I_{t,i}$ = the current load of stub i at t time,

I_{av} = the computed average load of the stubs assuming uniform c. d. = I/n .

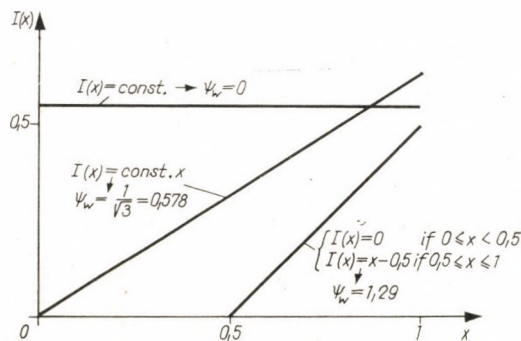


Fig. 1. Three model distributions and the corresponding ψ_w -values calculated from equation (4)

$I_{av,i}$ = the actual average load on stub i over a complete stub changing cycle.

In order to see the scale of numerical values to be expected, tentative calculations can be made based on distribution models assuming linear and continuous series of data. Summation in equ. (1) and (2) can then be replaced by integration, and in order to simplify the arithmetics m (or n) can arbitrarily

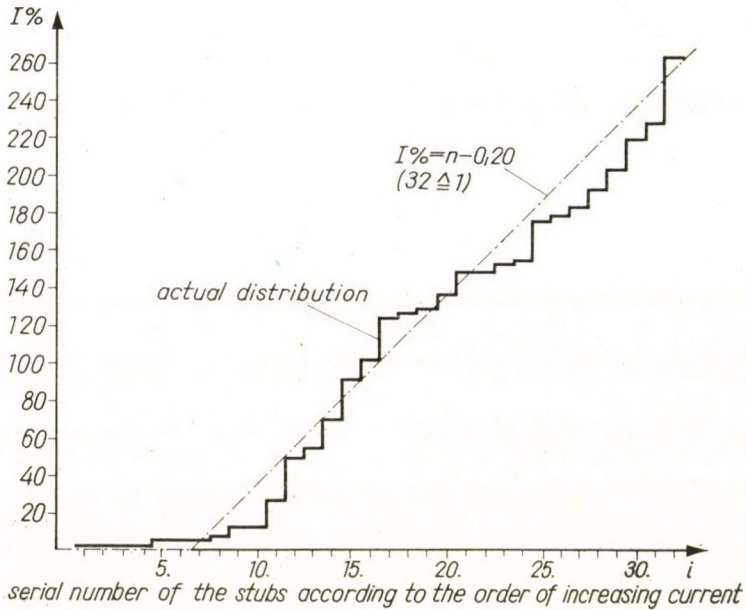


Fig. 2. Example of an $I(i)$ -distribution. $\psi_t = 0.81$. Tatabánya, 50 KA cell, 21st Apr. 1960

be set equal to one. For example from equation (1), or (2) for ψ_t or ψ_i , resp. we get the following expression:

$$\psi_w = \frac{\sqrt{\int_0^1 [I(x) - \int_0^1 I(x) dx]^2 dx}}{\int_0^1 I(x) dx}, \tag{4}$$

where if $x = t$, then $w = i$; and if $x = i$, then $w = t$.

The results of these calculations for three model-distributions are indicated in Fig. 1, while some actual distributions with the corresponding ψ -values are presented on Figs. 2—3.

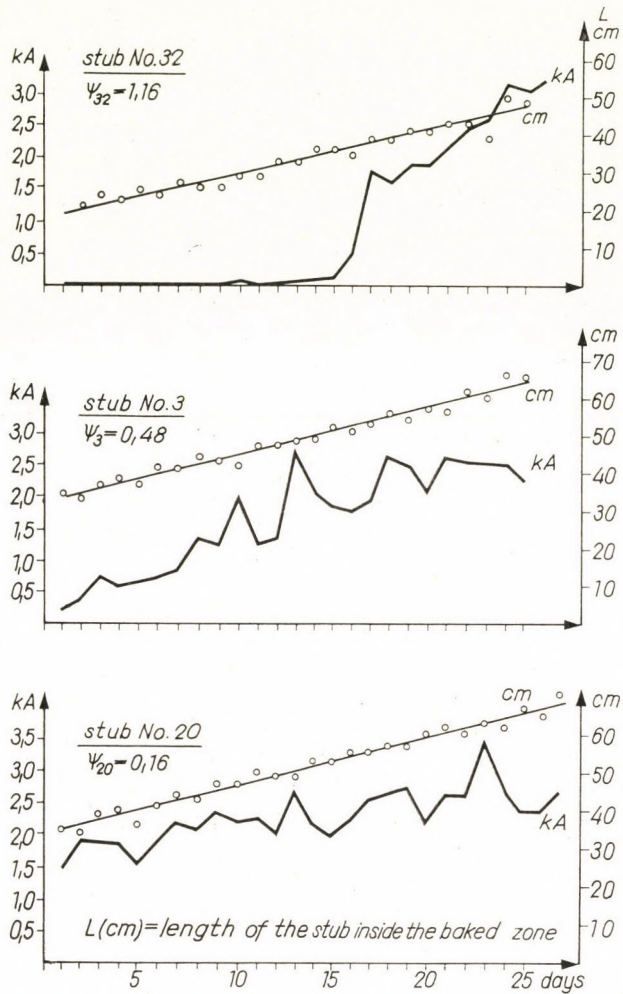


Fig. 3. Examples of $I(t)$ distributions and the corresponding ψ_i -values. Inota, 59 KA cell

The ψ_1 -value as a characteristic

It was referred to above that some degree of unevenness of c. d. distinct from zero is permanently present at the industrial electrolytic cells. Assuming normal plant conditions the regular factors affecting the c. d. undergo a regular, continuous and periodic change. Continuous changes are brought about by the gradual baking of the anode, while abrupt, periodic changes result from the extraction of the stubs and the attainment of the conducting zone, which is according to our measurements about 20—30 cm below the baking zone.

In the course of the continuous gradual baking of the anode the degree of unevenness decreases, which is in turn compensated by the sudden increase caused by the periodic extraction of the stubs as the newly inserted ones in the beginning do not take their share in the c. d. as we shall see later, more detailed.

If the effect of the regular factors is decisive, then as they all undergo a regular change, each anode construction jointly with the stub pulling system practised on it, can be characterized by an average degree of unevenness of c. d., that is a ψ_I (or ψ_{II}) value.

The data presented in Table 1 indicate this to be true. The ψ_I -values belonging to the same type of anodes are in agreement within the error computed on the basis of 95% probability (using Student's *t*-function and weighed averages).

Table 1

ψ_I -values of electrolytic cells with the same type of anode and stub changing system

Type of the cell									
39 KA horizontal contact type					50 KA vertical contact type				
Mark of the cell	<i>n</i>	<i>n'</i>	<i>m</i>	ψ_I	Mark of the cell	<i>n</i>	<i>n'</i>	<i>m</i>	ψ_I
316	40	20	10	0.79 ± 0.15	F-1	32	32^b	26	0.82 ± 0.03
318	40	20	10	0.67 ± 0.10	F-2	32	16^c	14	0.81 ± 0.03
319	40	20	10	0.69 ± 0.12	E-20	32	16^c	10	0.78 ± 0.05
419	40	20	10	0.74 ± 0.10	F-20	32	16^c	19	0.80 ± 0.03
					F-1	32	16^c	14	0.81 ± 0.04
Average	40	20	10^a	0.72 ± 0.09	Average	32	—	—	0.81 ± 0.02

Notes : *n* number of stubs, *n'* number of stubs extracted during the test period, *m* number of complete c. d. measurement during the test period. *a* : complete contact shifting cycle equal to one half of the stub changing cycle, *b* : complete stub changing cycle, *c* : one symmetrical half of the stub changing cycle. The variation of *m* values for the extraction of 16 stubs indicates irregularities in the stub changing system.

The change of the unevenness of c. d.

Any change in the factors affecting c. d. is to be reflected in the alteration of the degree of unevenness, i. e. the ψ -values. There are two aspects of the change of the unevenness of c. d. of aluminium electrolytic cells. The first is the change of unevenness of c. d. [(of ψ_t in equ. (1))] in time on any type of electrolytic cell and secondly if anodes with different construction, or the same construction but with different stub changing systems are compared, then different average i. e. ψ_I and ψ_{II} values can be expected.

1. On every type of cell a *variation of the ψ_t -values in time* results from the gradual and periodic changes of the factors affecting the c. d. If we consider these one by one then we get the following picture:

a) The position of the stub relative to the baked region in the anode may change abruptly if it is extracted and the new stub is set above the

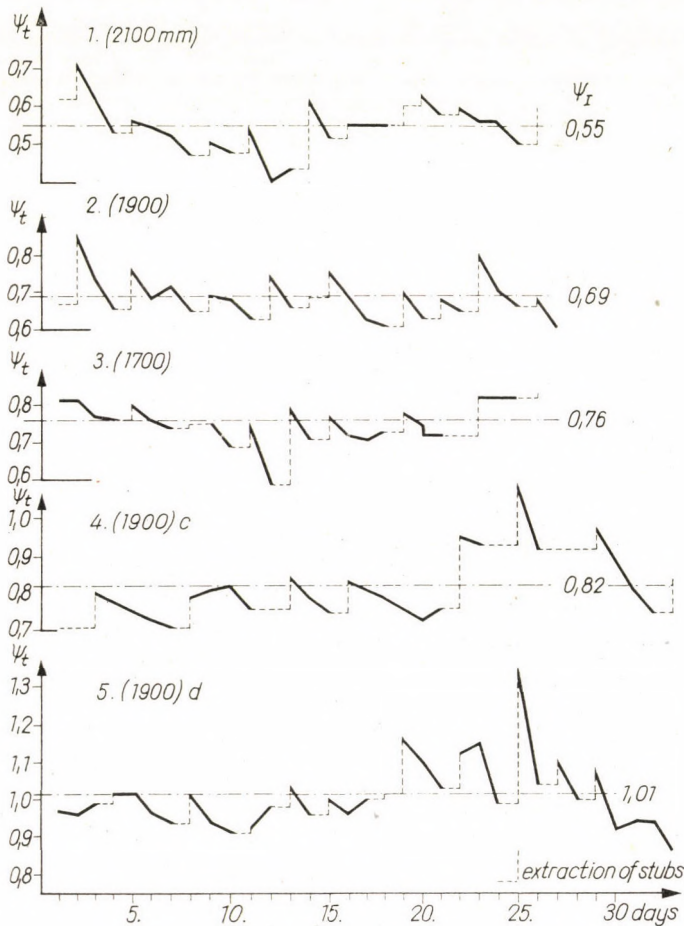


Fig. 4. The change of ψ_t in time on cells with vertical stubs. (In brackets the width of the anode in mm. *c* and *d* are the same as in Table 2.)

baking zone. Afterwards, its position gradually and evenly changes in this respect, thus lessening the relative differences among the loads of the stubs.

b) The position of the stubs relative to the face of the anode changes evenly and continuously between two extractions. This in itself would gradually increase the relative differences among the loads of the stubs. But this effect is counteracted by the decreasing slope of the increase in the

conductivity of the anode from top to the face and a possible increase in the electrolytic "wear" of the anode surface belonging to the respective stub resulting there in a slightly increased interpolar distance.

c) The position of the stubs relative to each other changes abruptly if any stub of the anode under examination is extracted. As the current intensity of the cell line is the same and the current density at the face of the anode tends to be even (apart from small periodic variations referred to in the preceding paragraph), the load of the to be extracted stubs is at most taken

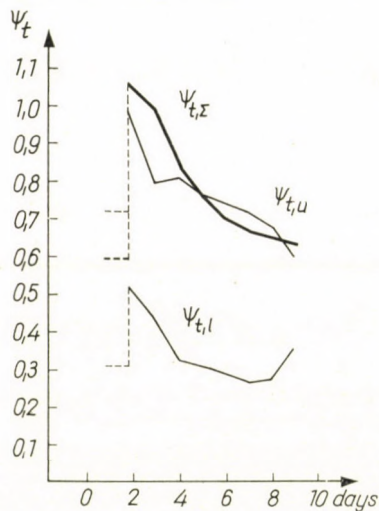


Fig. 5. The change of ψ_t in time on a cell with horizontal stubs. $\psi_{t,u}$ is the ψ_t -value for the upper row of stubs, while $\psi_{t,l}$ is that for the lower row. Ajka, 39 KA cell

over abruptly by their neighbours, as the measurement data have confirmed it.

According to the above considerations assuming normal conditions a gradual decrease in the unevenness of c. d. may be expected in the period between two extractions of stubs or shifting of contacts (for cells with lateral contact stubs), while the extraction of stubs or shifting of contacts results in an increase in the unevenness of c. d.

This change is bound to be more marked on cells with horizontal (lateral) contact stubs where many more stubs (16—20) are extracted at the same time, while with the other type this number is only 2—4 out of 32. Figures 4—5 represent some examples of the change of ψ_t with time for cells having vertical and horizontal contact stubs where it can clearly be seen. The average increase of unevenness ($\Delta\psi_t$)¹ when extracting the stubs on cells with vertical

¹ $\Delta\psi_t$ is the difference of the ψ_t -values characterizing the unevenness of c. d. just before and after the extraction of stubs.

contact stubs was 0.06 (an average of 55 data) while for cells with horizontal contact stubs an average of 0.45 was found which confirm our expectations.

2. *Changes in constructional variables and the stub changing system* (especially the frequency and the difference in the heights of the to be extracted and the newly inserted stubs) too, do affect the average unevenness of c. d., i. e. the ψ_I -values.

Fig. 4 also shows the ψ_I -values for anodes of different constructions. The first three curves refer to anodes of the same arrangements of stubs and stub changing systems but increasing anode width, where as expected (a detailed explanation follows in the next chapter) a gradual decrease of ψ_I can be found. The cells belonging to curve four and five excel in an increased stub changing cycle corresponding to an increased distance between the heights of the to be extracted and the newly inserted stubs, leading to an increase of the ψ_I -values.

Characteristic sets of stubs and the corresponding unevenness of current (ψ_{II} -values)

According to the present plant practice on all cells with vertical contact stubs, the positions of the newly inserted stubs relative to the face (or top) of the anode is always the same irrespective to the level of the baked region in the anode at that place.

Fig. 6 shows a view from above with the positions of the stubs and the measurement points for determining the height (or more exactly the depth) of the baked zone in the anode. Figs. 7 and 8 show an example of the trend

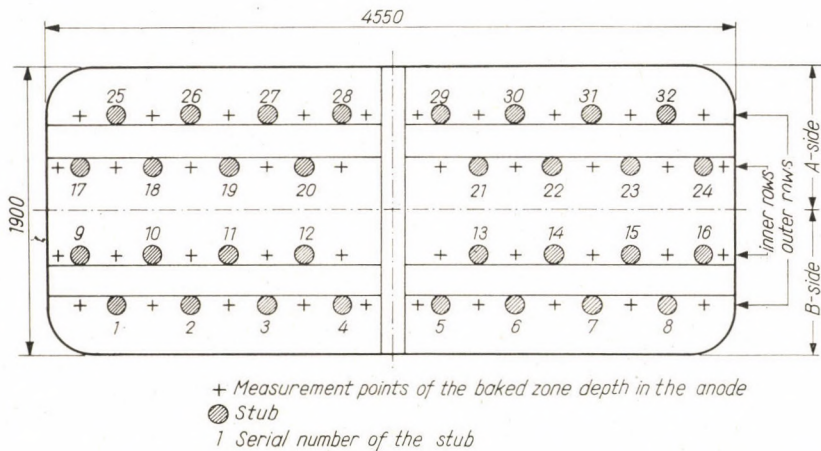


Fig. 6. Positions of the stubs and the measurement points of the baked zone depth in the anode. Inota, 59 KA cell

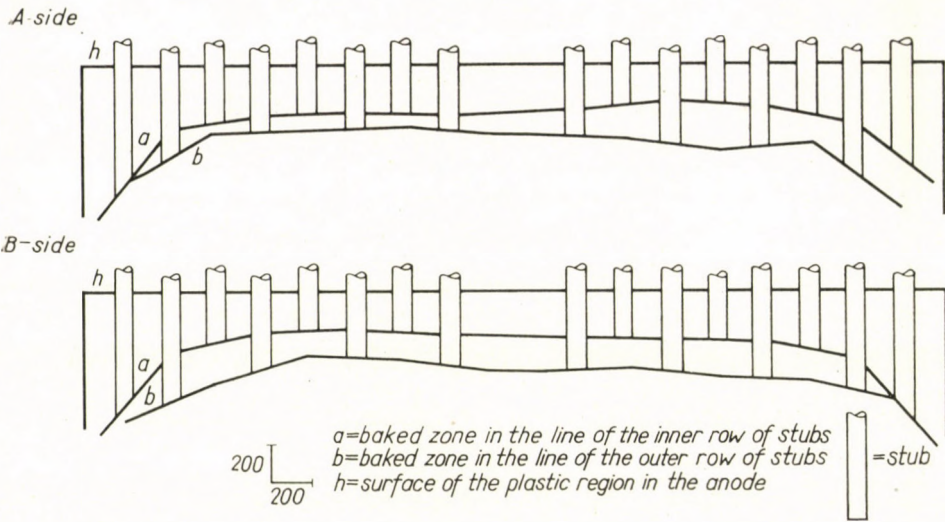


Fig. 7. Example in the trend of the baked zone line on a 1700 mm wide anode. Inota, 59 KA cell

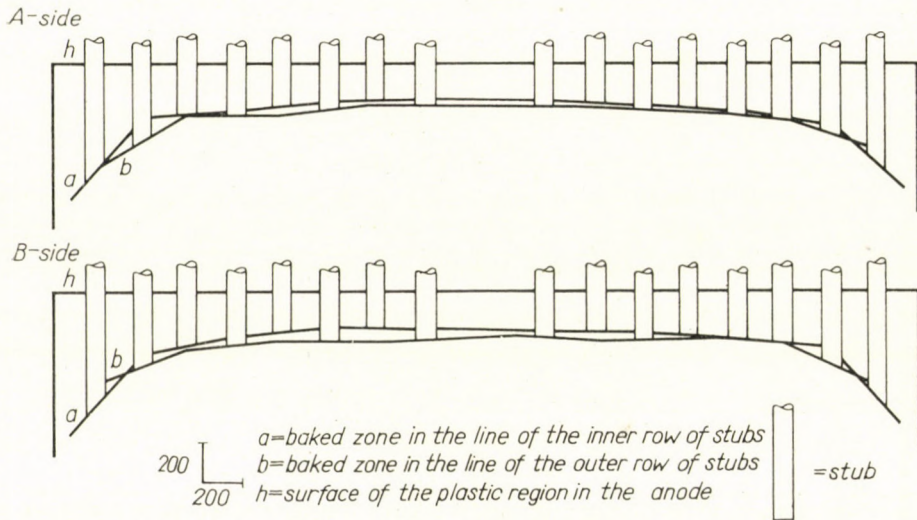


Fig. 8. Example in the trend of the baked zone line on a 2100 mm wide anode. Inota, 59 KA cell

of the baked zone line relative to the inner and outer rows of stubs for an anode of 1700 and one of 2100 mm width resp. where the positions of the stubs relative to each other have remained unchanged.

It can be seen that there is an average difference in the level of the baking zone between the inner and the outer rows of stubs which decreases

as the width of the anode is increased, and in the same row the stubs at the ends of the rows (stubs numbers 1, 8, 9, 16, 17, 24, 25, 32 on Fig. 6) are in a different position, the baking zone being deeper there. These characteristic groups of stubs (end stubs and "other" stubs in the inner and outer rows, see Fig. 6) may be expected to differ in the degree of an average unevenness of current (ψ_{II}). The respective ψ_{II} -values are summarized in Table 2, which

Table 2
Average unevenness of current of characteristic groups of stubs

Type of the anode	Degree of unevenness of current				
	ψ_{II}	$\psi_{II, ORE}$	$\psi_{II, ORO}$	$\psi_{II, IRE}$	$\psi_{II, IRO}$
2100 mm wide anode, Inota	0.57	0.90	0.32	1.96	0.27
1900 mm wide anode, Inota	0.67	1.06	0.65	1.21	0.37
1700 mm wide anode, Inota	0.76	1.23	0.86	1.13	0.38
1900 mm wide anode, Tatabánya ^c	0.83	1.25	0.83	0.99	0.62
1900 mm wide anode, Inota ^d	1.06	1.82	1.19	1.33	0.67

Notes :

- $\psi_{II, ORE}$ = ψ_{II} , relative to the stubs at the ends of the outer rows (stub numbers 1, 8, 25, 32 on Fig. 6). In equation (2), $n = 4$.
- $\psi_{II, ORO}$ = ψ_{II} , relative to other stubs of the outer row. In equation (2), $n = 12$; for the last row (d), $n = 16$.
- $\psi_{II, IRE}$ = ψ_{II} , relative to the stubs at the ends of the inner row. In equation (2), $n = 4$. (Stub numbers 9, 16, 17, 24 in Fig. 6.)
- $\psi_{II, IRO}$ = ψ_{II} relative to the other stubs of the inner row. In equation (2) $n = 12$ and for the last row (d), $n = 16$.
- ^c = with an increased difference between the heights of the to be extracted and the newly inserted stubs.
- ^d = the same as ^c but with 40 stubs instead of 32.

fully justify this assumption and the decrease in unevenness on increasing the width of the anode can also be seen. Incidentally it is now to be mentioned that each of the stubs represented with its current-time relation in Fig. 3 is, in a different characteristic position which is also reflected by the corresponding ψ_i -values indicated on the graph.

The relation of ψ_I with other characteristics of unevenness of c. d.

The ψ_I -value is a general characteristic of the unevenness of c. d. and as such it is affected by and embodies all variations, however big or small, covered by the measurement data. Besides this *general* characteristic other *particular* characteristics of unevenness can also be selected which are related to one or another aspect of unevenness of current-relationships. Such particular characteristics may be the percentage of stubs carrying a too small or too

heavy load, the rate of increase of the load on the stubs, the average maximum current or the average current just before the extraction of the stubs (this is nearly always less than the latter for vertical contact stubs, too).

These particular characteristics are not directly related to the ψ_1 -values but great variations in their values (also they are averages) may be expected to correspond to a shift in the ψ_1 -values in the same sense and not to contradict it.

These data relative to anodes with vertical contact stubs are summed up in Table 3. It can be seen that there is no contradiction between the trend of the change of the general characteristic (ψ_1) and the above referred particular characteristics which adds one more proof to the reliability of the ψ_1 -values.

Table 3

Correlation of the general characteristic of unevenness of c. d. (ψ_1) with some particular characteristics of the same

Type of the anode	Characteristics of unevenness of c. d.						
	General characteristic ψ_1^*	Particular characteristics					
		$N_{I < 10\%}$ %	$N_{I > 200\%}$ %	$D_I = 5\%$ (days)		$I_{max. av.}$ %	$I_{b., ext.}$ %
			a	b			
2100 mm wide anode, Inota	0.55	13.8	1.5	8.0	1.1	148	130
1900 mm wide anode, Inota	0.69	22.1	3.9	11.0	4.9	176	148
1700 mm wide anode, Inota	0.76	25.5	10.6	13.2	8.6	209	173
1900 mm wide anode, Tatabánya ^c	0.81	24.6	10.3	18.0	8.3	211	134
1900 mm wide anode, Inota ^d	1.01	38.2	20.2	20.0	15.1	240	189

Notes :

- * The ψ_1 -values correspond to a complete stub changing cycle. (Uncertainty: ± 0.03)
- $N_{I < 10\%}$ = percentage of stubs with a current load less than 10% of the average (average = I/n)
- $N_{I > 200\%}$ = percentage of stubs with a current load exceeding 200% of the average.
- $D_{I=5\%}$ = time counted in days till 5% of the above referred average load is attained.
 - a for stubs at the ends of the outer row (stub numbers 1, 8, 25, 32 on Fig. 6).
 - b for other stubs in the outer row.
- $I_{max., av.}$ = the average of the maximum load of the stubs during a stub changing cycle (per cent of the average load).
- $I_{b., ext.}$ = the average of the load before the extraction of the stubs. (Per cent of the average load.)
 - c = with an increased difference between the heights of the to be extracted and the newly inserted stubs.
 - d = the same as c but with 40 stubs instead of 32.

REFERENCES

1. SZAKÁL, P.: Unpublished report of 16th Dec. 1950.
2. BOUCHARD, J.: Bull. Soc. Franc. Élec. 7/2, 101. (1952.)
3. Догрмаджи, М. Ф.: Цветные металлы 31, № 5. 50. (1958).
4. Коробов, М. А.: Цветные металлы 30, № 1. 49. (1957).
5. PACZOLAY, GY.: A Fémipari Kutató Intézet Közleményei (Communications of the Research Institute for Non-Ferrous Metals) 4, 141. (1960.)

SUMMARY

The average relative standard deviation (ψ_1) is an appropriate general characteristic of the unevenness of anodic current distribution of aluminium electrolytic cells. Each anode construction jointly with the stub changing system applied on it, can be characterized by a corresponding ψ_1 -value. The extraction of 2—4 stubs out of 32 from anodes with vertical stubs results in an average increase of unevenness by 6—8% while an increase of about 60% is observed if half of the set of stubs is extracted from anodes having horizontal stubs. Between two extractions a corresponding decrease of ψ_1 can be observed. Constructional changes of the anode or of the stub changing system result in a corresponding change of ψ_1 . If the unevenness of current load on the separate stubs (ψ_i) is investigated, characteristic groups of stubs can be distinguished which differ in their positions relative to the conducting zone in the anode. The order of different types of aluminium electrolytic cells according to the corresponding ψ_1 -values is in agreement with the trend in the change of the particular characteristics of unevenness in current distribution.

UNGLEICHMÄSSIGKEIT DER STROMVERTEILUNG IN DEN ANODEN MIT VERTIKALEN STROMZUFÜHRUNGS-BOLZEN DER ALUMINIUM-ELEKTROLYSEÖFEN

GY. PACZOLAY

ZUSAMMENFASSUNG

In einem Aluminiumelektrolyseofen wird die Ungleichmäßigkeit der Stromverteilung an der Anode mit Hilfe des Variationsfaktors (ψ_1 , relative Streuung) angegeben. Eine jede Anodenbauart und ihr Bolzenwechselsystem werden durch einen zugehörigen ψ_1 -Wert gekennzeichnet. Werden aus einer Anode mit 32 vertikalen Bolzen 2 bis 4 Bolzen ausgezogen, so wächst die Ungleichmäßigkeit durchschnittlich um 6...8%. Wird, aus einer Anode mit seitlichen Bolzen die Hälfte der Bolzen gezogen, so ergibt sich eine 60%-ige Erhöhung der Ungleichmäßigkeit. Im Zeitraum zwischen zwei Bolzenwechseln kann in der Ungleichmäßigkeit eine Besserung, entsprechend den obigen Angaben, beobachtet werden. Werden Konstruktions-Änderungen durchgeführt, oder wird das System des Bolzenwechsels geändert, so ändert sich auch ψ_1 . Wird die Ungleichmäßigkeit der Stromstärke in den einzelnen Bolzen (ψ_i) untersucht, so können charakteristische Gruppen gebildet werden, die sich durch ihrer Lage zu den stromführenden Zonen der Anode unterscheiden. Wird eine Reihenfolge der verschiedenen Typen der Aluminium-Elektrolyseöfen auf Grund der Werte von ψ_1 festgelegt, so wird sie mit derjenigen übereinstimmen, die auf Grund der Änderung der speziellen Kenngrößen der Stromverteilung festgelegt wurde.

L'INÉGALITÉ DE LA RÉPARTITION DU COURANT AUX ANODES À GOUJONS VERTICAUX DES CUVES D'ÉLECTROLYSE À ALUMINIUM

GY. PACZOLAY

RÉSUMÉ

L'inégalité de la répartition du courant anodique des cuves d'électrolyse à aluminium est caractérisée par la dispersion relative moyenne ψ_1 . Chaque construction d'anode, avec son système d'extraction des goujons, peut être caractérisée par une valeur ψ_1 correspondante. L'inégalité de la répartition du courant s'augmente en moyenne de 6 à 8%, si 2 à 4 goujons sur 32 sont retirés sur des anodes à goujons verticaux, tandis qu'une augmentation de 60%

se produit si la moitié des goujons est extraite sur les anodes à goujons obliques. Entre deux replacements de goujons, on observe une diminution de l'inégalité de la répartition du courant, qui correspond aux valeurs ci-dessus. Des modifications de la construction, ou le changement du système d'extraction des goujons modifient aussi la valeur de ψ_i . Si on étudie l'inégalité de l'intensité du courant amené par chaque goujon, on peut discerner des groupes de goujons caractéristiques différant par leur position relative à la zone de conduction de l'anode. L'ordre de succession des différents types de cuves d'électrolyse à aluminium, établi à la base des valeurs de ψ_1 , concorde avec celui déterminé suivant la variation des caractéristiques spéciales de la répartition du courant.

НЕРАВНОМЕРНОСТЬ АНОДНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА АЛЮМИНИЕВЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗНЫХ ВАНН С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ШТЫРЯМИ

Д. ПАЦОЛАИ

РЕЗЮМЕ

Средний вариационный коэффициент (относительная дисперсия) (ψ_1) является соответствующим параметром неравномерности анодного распределения тока алюминиевых электролизных ванн. Каждая конструкция анода совместно с применяемой системой перестановки штырей характеризуется соответствующей величиной ψ_1 . Если из 32 штырей на анодах с верхним подводом вытянуть 2—4 штыря, то неравномерность распределения тока в среднем возрастает на 6—8%, в то же время наблюдается 65%-й рост, если в случае ванн боковыми штырями вытянуть половину штырей. В период между двумя перестановками штырей в неравномерности распределения тока наблюдается уменьшение, соответствующее указанной выше величине. Конструкционные изменения, или же изменение системы перестановки штырей связаны с изменением ψ_1 . Если неравномерность силы тока отдельных штырей исследовать с помощью ψ_i , тогда можно отличить характерные группы штырей, которые отличаются по своему положению к проводящей зоне анода. Порядок различных по типу алюминиевых электролизных ванн, определенный на основе значения величины ψ_1 , совпадает с порядком, определенным на основе характера изменения специальных характеристик распределения тока.

TORSIONAL BUCKLING OF THIN-WALLED CURVED BARS (SHELL-ARCHES)

L. KOLLÁR

PLANNING OFFICE FOR INDUSTRIAL AND AGRICULTURAL BUILDINGS

[Manuscript received on May 12, 1961]

1. Introduction

The aim of this paper is the investigation of a certain question on the stability of thin-walled bars having a curved axis and an open cross section, named in the following *shell-arches*. In the succeeding deduction those shell-

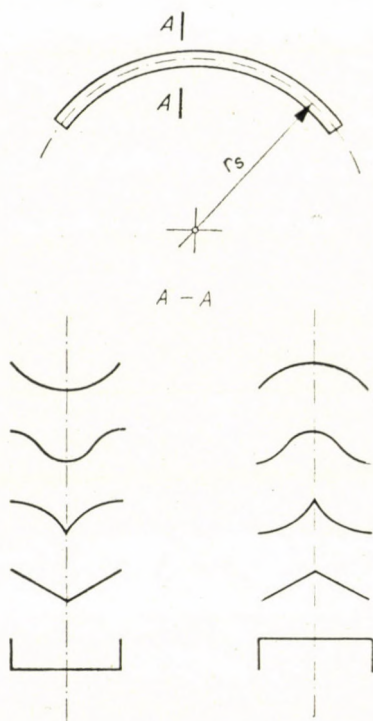


Fig. 1

arches will be dealt with the longitudinal axis of which is a circular arc, the cross section being constant along the whole length of the axis, and having an axis of symmetry lying in the plane of the arch axis (Fig. 1). The material of the shell-arch is assumed to be perfectly elastic.

The shell-arch should be subjected to a uniformly distributed load q , acting at the centroids of the cross sections, and previously to buckling directed towards the centre of curvature of the arch axis (Fig. 2). Thus, the arch is previous to buckling subjected to a uniform centric compression. The loading forces are fixed to the centroids of the cross sections, their directions remain unchanged even after buckling.

Similarly to all centrically compressed bars, the shell-arch in question might lose its stability by three different kinds of buckling (disregarding the local buckling of the shell plate), namely, it might buckle in its own plane, perpendicularly to this plane, and finally, it might undergo a torsional buckling. The buckling in the own plane of the arch had already been dealt with by the author in a previous paper [3]; this kind of buckling is due to the aforementioned symmetry independent of the two other buckling phenomena. The buckling perpendicular to the own plane of the arch and the torsional buckling, on the other hand, are connected to each other, partly, because the axis of the arch is curved, and partly, as the shear-centre T of the cross section does not coincide with its centroid S (Fig. 1). In the following the combined lateral and torsional buckling will be dealt with, and the critical load intensity which is necessary to cause this phenomenon will be determined.

In the investigation the circumstance that the shell plate might undergo a local buckling is not taken into consideration. In addition, it is assumed that during the lateral and torsional buckling of the bar, the cross sections maintain their original form and could warp only perpendicular to their own plane. (This last assumption cannot be applied to deformations caused by bending moments and taking place in the *own plane of the arch*; these however, during the following deductions are automatically eliminated, respective details are to be found in [3]).

The problem referring to the lateral and torsional buckling of curved bars caused by a uniformly distributed load had already been solved in 1923 by TIMOSHENKO [5]. His solution refers, however, to bars having a rectangular cross section and cannot be directly applied to thin-walled bars because he did not take their peculiarities into consideration (see in the present paper equations (15) and (19) and the comments added.)

The torsional buckling of thin-walled, curved bars was dealt with by FEDERHOFER [2]. He deduced the magnitude of the critical load intensity using the energy method. However, for a straight bar axis his final result does not turn into the well known expression to be found in [7].

2. Equations of equilibrium referring to a bar having a curved axis

The centre of the system of co-ordinates to be used in the following investigations should be placed into the centroid S of the cross section (see

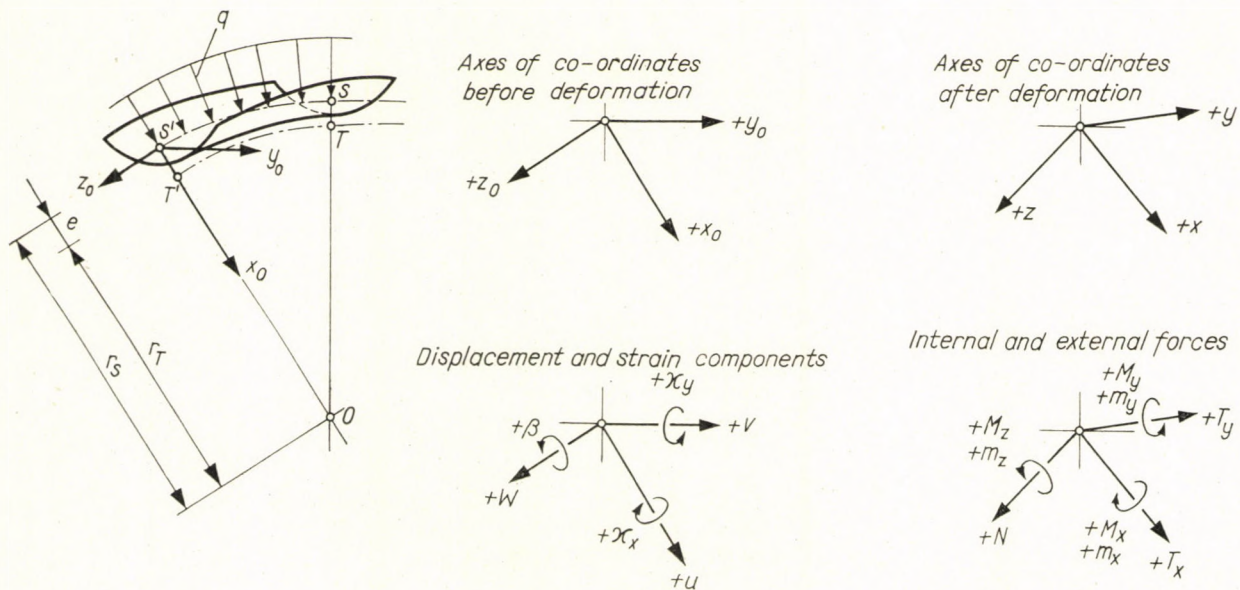


Fig. 2

Fig. 2). Previous to buckling the axis of co-ordinates are marked by o indices; x_0 points towards the centre of curvature O of the arch axis. The system of co-ordinates is a "moving" one, i.e., the axis z_0 touches the arch-axis running through the centroids (called in the following arch-axis) at each cross section. Therefore, derivations along the arch-axis are denoted by $\frac{d}{ds}$.

r_T and r_s denote the radii of curvature of the circular arcs running through the shear-centres and the centroids, respectively, these are always positive. The distance between shear-centre T and centroid S is marked by e , this is positive in the case outlined in Fig. 2, thus

$$r_s = r_T + e \quad (1)$$

(If the shear-centre is situated on the opposite side of the centroid, i.e., if $r_T > r_s$, then e is negative.)

The displacement components u, v, w are parallel to the original directions of the axes of co-ordinates, their interpretation is also shown in Fig. 2. Displacement components without indices always denote displacements of the shear-centre; to distinguish these from displacements of the centroid the latter are always marked by the index s .

The deduction is based on the condition that the *radius of curvature of the arch should be great* in comparison to the distance between the centroid and the shear-centre, thus:

$$\frac{e}{r_s} \ll 1 \quad (2a)$$

i.e.,

$$r_T \approx r_s = r \quad (2b)$$

Thus the radius of curvature r can be taken as valid for each point of the cross section. Consequently, between the displacements of shear-centre and those of centroid the following relations hold:

$$u_s = u \quad (3a)$$

$$v_s = v - e \cdot \beta \quad (3b)$$

$$w_s \approx w \quad (3c)$$

By reason of (2b) the internal moments can be computed simply from the curvatures and the twist of the shear-centre axis.

After buckling the axes of co-ordinates also shift together with the centroid and rotate together with the investigated cross section. The new directions of the axes of co-ordinates are marked simply by x, y, z without

any indices. The equations expressing the equilibrium of moments referring to the already spatially curved bar, are set up according to *Love* [4] as follows:

$$\frac{dM_x}{ds} - M_y \cdot \vartheta_1^s + M_z \cdot \kappa_{y1}^s - T_y + m_x = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dM_y}{ds} - M_z \cdot \kappa_{x1}^s + M_x \cdot \vartheta_1^s + T_x + m_y = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dM_z}{ds} - M_x \cdot \kappa_{y1}^s + M_y \cdot \kappa_{x1}^s + m_z = 0. \quad (6)$$

The letter symbols figuring in the above equations as well as in Fig. 2 denote:

T_x, T_y	internal shear forces acting in the x, y directions,
M_x, M_y, M_z	internal moments (two bending, one torsional) turning around the x, y, z axes,
m_x, m_y, m_z	specific moment components of the external load,
$\kappa_{x1}^s, \kappa_{y1}^s, \vartheta_1^s$	curvatures and twist of the arch-axis <i>after</i> buckling (therefore the index $_1$),
β	twist of the cross section around the z_0 axis,
$\kappa_{x_0}^s, \kappa_{y_0}^s, \vartheta_0^s$	curvatures and twist of the arch-axis in the <i>undeformed</i> state (therefore the index $_0$).

In the examined case:

$$\kappa_{x0}^s = \vartheta_0^s = 0 \quad (7a)$$

and

$$\kappa_{y0}^s = \frac{1}{r}. \quad (7b)$$

The removal of the shear-centre from the centroid displaces only the axis of reference of the torsional moment from the centroid, therefore, the torsional moment always denotes a moment turning around an axis going through the shear-centre and parallel to the z direction; the axes of reference of the two bending moments, on the other hand, are always the centroidal axes x, y . The line of action of the normal force coincides with the centroidal axis, while the two shear forces act at the shear-centre, parallel to the x, y directions.

Equations (4)—(6) should be written precisely in such a way, that M_z and m_z are moments turning around the centroidal axis z . So M_z would not be identical with the internal twisting moment (19), but would differ from it by $e \cdot T_y$. By so doing and taking (2) into consideration the very equations (23)—(24) are arrived at.

3. Expression of strains and forces by displacement components

According to LOVE [4], in the examined case deformations can be expressed with the aid of the displacement components by the following equations:

$$\kappa_{x1}^s = \frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v_s}{ds^2} = \frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2} + e \frac{d^2 \beta}{ds^2}, \quad (8)$$

$$\kappa_{y1}^s = \frac{1}{r} + \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{ds} = \frac{1}{r} + \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} \quad (9)$$

because the condition for the inextensional deformation of the arch-axis is:

$$\frac{dw}{ds} = \frac{u}{r}; \quad (10)$$

and

$$\vartheta_1^s = \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv_s}{ds} = \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} - \frac{e}{r} \frac{d\beta}{ds}. \quad (11)$$

Here, in respect to condition (2) the last term can be omitted in comparison to the first one.

The internal shear force components are (compare with [5]):

$$T_x = + q \cdot r \cdot \frac{du}{ds} \quad (12)$$

$$T_y = + q \cdot r \cdot \frac{dv_s}{ds} = qr \left(\frac{dv}{ds} - e \frac{d\beta}{ds} \right) \quad (13)$$

The specific moment components of the external load are:

$$m_x = m_y = 0, \quad (14)$$

$$m_z = + q \cdot e \cdot \beta + q \cdot r \cdot e \frac{d^2 v}{ds^2} - qr p^2 \frac{d^2 \beta}{ds^2} - qe\beta - \frac{i_x^2}{r^2} qr\beta. \quad (15)$$

Here

$$p^2 = e^2 + \frac{J_x + J_y}{F} = e^2 + i_x^2 + i_y^2 \quad (16)$$

In the above expression:

J_x, J_y are the moments of inertia of the cross section referring to centroidal axes x, y , and

F is the area of the cross section.

The first term on the right-hand side of equation (15) expresses the fact that the load does not act at the shear-centre. The last four terms denote

the following effect. The bar is a thin-walled one, consequently, if the cross section undergoes a rotation, then the arch-directed compressive stresses also rotate because they must remain parallel to the thin wall. Owing to the twist the lines of action of these stresses become curved. Thus, the compressive stresses will have a resultant perpendicular to the shear-centre axis, and this resultant will exert a torsional moment. A detailed discussion referring to this latter effect is the following:

The displacements of the elementary fibers P expressed by the displacements of the shear-centre are the following:

$$u_P = u - y \cdot \beta; \quad (a)$$

$$v_P = v - (e - x) \beta. \quad (b)$$

The changes in curvature of the elementary fibers are [cf. (8)–(9)]:

$$\kappa_x^P = \frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v_P}{ds^2} = \frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2} + (e - x) \frac{d^2 \beta}{ds^2}; \quad (c)$$

$$\kappa_y^P = \frac{d^2 u_P}{ds^2} + \frac{u_P}{r} = \frac{d^2 u}{ds^2} - y \frac{d^2 \beta}{ds^2} + \frac{u}{r^2} - y \frac{\beta}{r^2}. \quad (d)$$

The torque of the compressive stresses σ acting in one elementary fiber P , referring to the shear-centre axis is:

$$\frac{r-x}{r} \cdot (\sigma dF) \kappa_y^P \cdot y - \frac{r-x}{r} (\sigma dF) \kappa_x^P \cdot (e-x). \quad (e)$$

Substituting (c) and (d) into (e) and integrating over the whole cross section, the last four members of (15) are obtained.

The *internal moment components* have to be calculated from curvatures κ_x^T , κ_y^T and twist ϑ^T of the shear-centre axis:

$$M_x = B_x \cdot \kappa_{x1}^T = B_x \left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2 v}{ds^2} \right) \quad (17)$$

$$M_y = B_y \cdot f \cdot (\kappa_{y1}^T - \kappa_{y0}^T) = B_y \cdot f \cdot \left(\frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (18)$$

(function f is to be found in [3] in detail), and

$$M_z = C \cdot \vartheta_1^T - C_1 \cdot \frac{d^2 \vartheta^T}{ds^2} = C \left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} \right) - C_1 \left(\frac{d^3 \beta}{ds^3} + \frac{1}{r} \frac{d^3 v}{ds^3} \right) \quad (19)$$

Here:

$B_x = EJ_x$ is the bending stiffness of the arch's cross section referring to the x axis,

$B_y = EJ_y$ is the same, but referring to the y axis,

$C = GJ_t$ is the torsional stiffness of the bar; J_t is the torsional moment of inertia,

$C_1 = EF \equiv EJ_\omega$ is the warping rigidity of the bar; $\Gamma \equiv J_\omega$ is the warping constant of the cross section [1].

If the radius of curvature r of the arch is small, then quantities J_x , J_y , J_t and J_ω should be computed using a correction [8], but in respect to condition (2) this correction can be disregarded.

4. Solution of the equations for a "fork-like" support (see Fig. 3)

Substituting relations (8)—(15) into equations of equilibrium (4)—(6) the following equations are arrived at:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{ds} - M_y \left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{ds} \right) + M_z \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} \right) - \\ - q \cdot r \cdot \frac{dv}{ds} + q \cdot r \cdot e \frac{d\beta}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{dM_y}{ds} - M_z \left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2v}{ds^2} + e \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) + M_x \left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{ds} \right) + q \cdot r \cdot \frac{du}{ds} = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{ds} - M_x \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} \right) + M_y \left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2v}{ds^2} + e \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) + \\ + q \cdot r \cdot e \frac{d^2v}{ds^2} - q \cdot r \cdot p^2 \cdot \frac{d^2\beta}{ds^2} - q \cdot r \cdot \frac{i_x^2}{r^2} \beta = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

The equation system (20)—(22) contains in addition to displacement expressions of the first order, also those of the second order — compare to formulae (17)—(19). In discussions on buckling the investigations refer to displacements of an infinitesimal magnitude. Thus, terms of the second order are by one range of magnitude smaller than those of the first order, therefore, these terms have to be omitted [4, 5]. By so doing the above system of equations disintegrates, partly, into equation (21) containing only the displacement component u , and partly, into equations (20) and (22) in which displacement components v and β appear only. By substituting expressions (17)—(19) into the latter two equations these obtain the following form:

$$\begin{aligned} B_x \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d\beta}{ds} - \frac{d^3v}{ds^3} \right) + \frac{C}{r} \left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{ds} \right) - \\ - \frac{C_1}{r} \left(\frac{d^3\beta}{ds^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^3v}{ds^3} \right) - q \cdot r \cdot \frac{dv}{ds} + q \cdot r \cdot e \frac{d\beta}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} C \left(\frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2v}{ds^2} \right) - C_1 \left(\frac{d^4\beta}{ds^4} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^4v}{ds^4} \right) - \frac{B_x}{r} \left(\frac{\beta}{r} - \frac{d^2v}{ds^2} \right) + \\ + q \cdot r \cdot e \frac{d^2v}{ds^2} - q \cdot r \cdot p^2 \cdot \frac{d^2\beta}{ds^2} - q \cdot r \cdot \frac{i_x^2}{r^2} \beta = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

The characteristic functions and characteristic values of the above homogeneous, linear, simultaneous differential equations with constant coefficients have to be determined. The succeeding discussion refers to the following particular case: the shell-arch with the centric angle $2\alpha < \pi$ is "fork-like" supported (see Fig. 3), i.e., at its both ends $\beta = 0$, $v = 0$ and $M_x = 0$, but

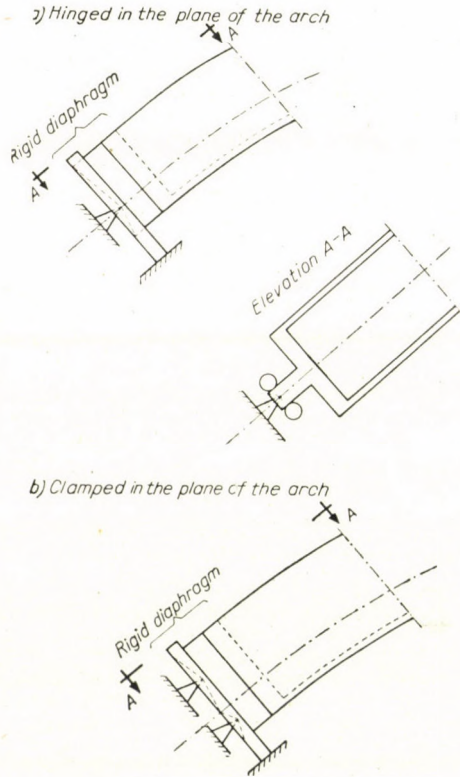


Fig. 3. „Fork-like” supports

the arch axis might rotate in the yz plane. For these boundary conditions the two unknown displacement functions can be set up in the following form:

$$\beta = A_1 \cdot \sin(\lambda \cdot s), \quad (25)$$

and

$$v = A_2 \cdot \sin(\lambda \cdot s). \quad (26)$$

Here

$$\lambda = \frac{\pi}{2\alpha \cdot r} \quad (27)$$

and s should be measured from the outermost cross section of the arch. Substituting these expressions into equations (23) and (24), furthermore, setting the determinant belonging to the simultaneous equations for A_1, A_2 equal to zero; for the critical compressive force $(q \cdot r)_{cr} = N_{cr}$ the following equation of the second order is arrived at:

$$a \cdot N_{cr}^2 + b \cdot N_{cr} + c = 0 \quad (28)$$

Between the two roots the smaller one gives the critical load. Constants a, b, c are determined by the following formulae:

$$a = + (p^2 - e^2) \cdot \lambda^2 - \frac{i_x^2}{r^2}, \quad (29)$$

$$b = - B_x \left[\frac{1}{r^2} + \lambda^2 \left(2 \frac{e}{r} - \frac{i_x^2}{r^2} \right) + p^2 \lambda^4 \right] - (C + C_1 \lambda^2) \cdot \left[\lambda^2 \left(1 + \frac{p^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{i_x^2}{r^2} \right] \quad (30)$$

$$c = B_x \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 \cdot (C + C_1 \lambda^2). \quad (31)$$

5. Evaluation of the obtained result

If $r = \infty$, then using the notation $2 a \cdot r = l$, equation (28) goes over into the formula of the compressive force which causes the torsional buckling of a thin-walled, straight bar having a symmetric open cross section; this formula can be found in [7]. Another possibility for controlling is given by the formula for the critical compressive force causing the lateral buckling of a curved bar of a narrow rectangular cross section; see [5] or [6]. Thus, if $e = 0$, $i_x^2/r^2 = 0$ and $C_1 = 0$, then equation (28) should turn into the well-known formula

$$N_{cr} = \frac{B_x}{r^2} \cdot \frac{(\pi^2 - 4\alpha^2)^2}{4\alpha^2 \left(\pi^2 + 4\alpha^2 \frac{B_x}{C} \right)}. \quad (32)$$

This however, would only occur if in addition to the above conditions p were also equal to zero ($i_y^2 = 0$), and this is not plausible for a rectangular cross section. On the other hand, it is well known from the previous discussions that terms containing p represent the torsional effect of the compressive stresses, which is due to their twisting together with the thin wall of the bar. For bars of *thin* rectangular cross section this effect also exists. The deduction of formula (32), to be found in [5], neglects this effect. Thus, the usual

definition that formula (32) is valid for "bars of narrow rectangular cross section" is not sufficiently precise. More exactly speaking formula (32) is valid for those bars the cross section of which is *not so thin* that the twisting of the compressive forces should have to be taken into consideration. In other cases the critical compressive force has to be determined from equation (28).

6. Practical applications

The introduced calculation might expediently be applied when investigating the stability of shell-arches used for the roofing of halls. Although the longitudinal axis of these shell-arches is for the most part not a circular arc, and their cross section might also vary, furthermore, the load acting on the arch is not a radial but a vertical one; the critical compressive force might in spite of these circumstances be estimated on the base of the described method in the following way, assuming the actual support is also "fork-like".

1. A critical force N_1 of the arch is to be determined on the base of the real form of the arch, the mode of its support and the load acting on it according to the usual theory of arches (disregarding that the structure is thin-walled and that the shear-centre does not coincide with the centroid).

2. On the basis of a characteristic cross section and radius of curvature of the arch, another critical compressive force N_2 is to be determined using formula (32); as if the axis of the arch were a circular arc and its cross section were constant.

3. Taking into consideration the same data as in 2, a third critical compressive force N_3 is to be determined from equation (28), i.e., now taking into consideration conditions which were disregarded in points 1 and 2.

4. Assuming that the thin-walled structure of the arch, together with the fact that the shear-centre and the centroid do not coincide with each other, will change N_1 to the real critical force N_4 in the same relation as these circumstances change N_2 to N_3 , the following relation is arrived at:

$$N_4 = N_1 \cdot \frac{N_3}{N_2}. \quad (33)$$

For safety it might be expedient to perform the calculation on the base of several cross sections and radii of curvature.

If the shell-arch is not supported fork-like, then the following method should be used:

A good approximation of the critical force valid for an ordinary curved bar can be obtained according to TIMOSHENKO [5] — provided the central angle of the bar is $2a < \frac{\pi}{2}$ — in such a way as in formula (32) which refers

to a "fork-like" supported bar $2a$ is replaced by a , because the arch buckles approximately according to a whole wave instead of a half. In other words, a clamped arch the central angle of which is $2a$ can be replaced by a "fork-like" supported arch with the central angle a . In the case of a "fork-like" support the buckled shape of the investigated shell-arch coincides with that of an ordinary curved bar. Thus, it might be assumed that the aforementioned coincidence also holds for a shell-arch clamped at both ends. Consequently, the critical load valid for a shell-arch clamped at both ends, the central angle of which is $2a < \frac{\pi}{2}$ can be obtained with good approximation, if in the formula (27) of λ , $2a$ is replaced by a .

If the stiffness of the support ranges between those of a "fork-like" support and of a full end-fixity, then $2a$ should be replaced by an intermediate value falling between $2a$ and a .

The radius of curvature pertaining to shell-arches used in hall roofing is, in general, so great that condition (2) holds. In addition, the bending stiffness B_x is mostly very great. Thus, dividing equation (28) by B_x and taking approximately $B_x \approx \infty$, coefficients (29)–(31) become simplified as follows:

$$\frac{a}{B_x} \approx a^* = 0, \quad (34)$$

$$\frac{b}{B_x} \approx b^* = - \left[\frac{1}{r^2} + \lambda^2 \left(2 \frac{e}{r} - \frac{i_x^2}{r^2} \right) + p^2 \lambda^4 \right], \quad (35)$$

$$\frac{C}{B_x} \approx c^* = \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 \cdot (C + C_1 \cdot \lambda^2). \quad (36)$$

Thus, the critical force can be computed from the following simple formula:

$$N_{cr} = - \frac{c^*}{b^*}. \quad (37)$$

The physical sense of this simplification is that the shell-arch does not become curved in the lateral direction. If the axis of the arch is *straight*, this means that the shear-centre axis does not shift laterally, thus the cross sections perform a pure torsion around the shear-centres. For a straight bar ($r = \infty$) formula (37) turns indeed into formula

$$P_3 = \frac{1}{p^2} (C + C_1 \cdot \lambda^2), \quad (38)$$

to be found in [7], which gives the critical force pertaining to pure torsional buckling.

Formula (37) is valid if the neglected terms are small. This can be proved by the following inequalities:

$$\frac{(C + C_1 \lambda^2) \left[\lambda^2 \left(1 + \frac{p^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{i_x^2}{r^2} \right]}{B_x} \ll -b^*; \quad (39)$$

$$\frac{\lambda^2(p^2 - e^2) - \frac{i_x^2}{r^2}}{B_x} N^* \ll -b^*. \quad (40)$$

To make practical calculations easier Fig 4 presents the shear-centres and warping constants of three kinds of cross sections, which were not dealt with in the literature so far. These quantities were computed assuming *flat* cross sections, i.e., that the infinitesimal arch elements of the cross sections could be replaced by their horizontal projections.

7. Numerical example

The critical radial load causing the torsional buckling of the shell-arch shown in Fig. 5 should be determined. The longitudinal section of the arch is a circular arc, its cross section is constant, and the arch is supported "fork-like" at both ends (Fig. 3).

a) First N_3 has to be determined, taking the thickness of the wall and the actual position of the shear-centre into consideration; thereafter

b) N_2 has to be determined, disregarding the above mentioned two circumstances.

When determining the characteristics of the cross section, it is regarded as being *flat*.

On the base of Fig. 4a:

$e = 21.3$ cm, is in the present case *positive*.

$\frac{e}{r} = 0.0151 \ll 1$, thus condition (2) is satisfied,

$B_x = 3.24 \cdot 10^9$ tcm²,

$C = 9.60 \cdot 10^5$ tcm²,

$C_1 = 3.96 \cdot 10^{10}$ tcm⁴,

(16): $p^2 = 8105$ cm²,

(27): $\lambda^2 = 2.00 \cdot 10^{-6}$ cm⁻²,

(35): $b^* = -5.85 \cdot 10^{-7}$,

(36): $c^* = 23.35 \cdot 10^{-7}$,

(37): $N_{cr}^* = N_3^* = 3.99$ t.

The accurate equation (28), on the other hand is the following:

$$0.01155 \cdot N^2 - 1900 \cdot N + 7560 = 0,$$

and herefrom

$$N_{cr} = N_3 = 3.98 \text{ t,}$$

i.e., in the present example the approximate value approaches the precise one within the accuracy of the slide-rule computation.

On the other hand, from equation (32) the value

$$N_2 = 4.32 \text{ t}$$

is obtained.

Thus, in the present case the facts that the bar is thin-walled and the shear-centre does not coincide with the centroid, cause a lessening of the critical force the amount of which is about 8%.

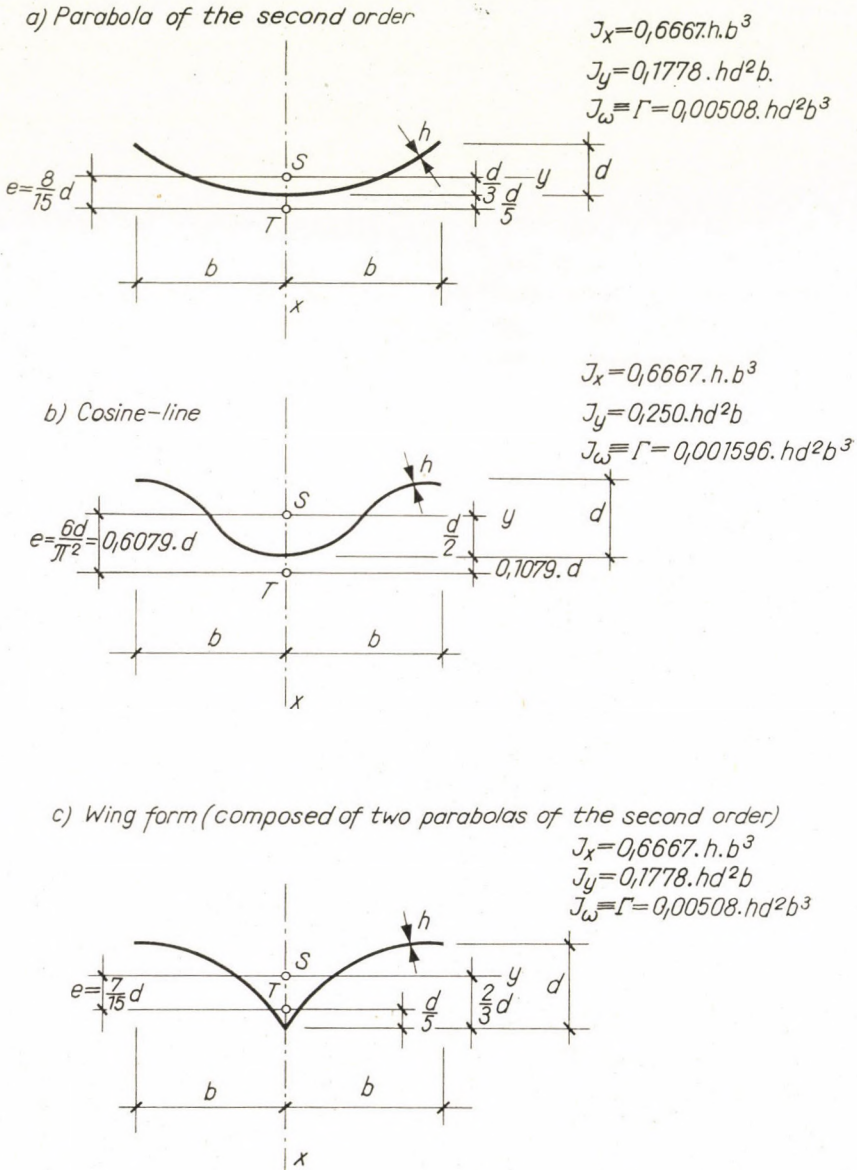


Fig. 4

If the *shell-arch is clamped at both ends*, then replacing in formula (27) $2a$ by a , the following results are obtained:

From formula (32):

$$N_{2 \text{ clamped}} = 107.1 \text{ t.}$$

From formula (37), on the other hand:

$$N_{\text{cr clamped}}^* = 58.1 \text{ t,}$$

thus, in this case the thin-walled structure and the removal of the shear-centre from the centroid *reduces the magnitude of the critical force to approximately a half.*

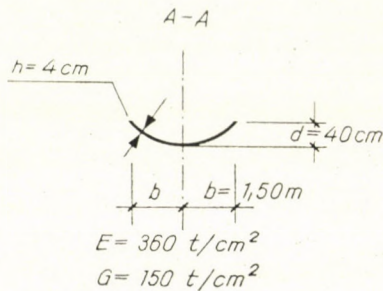
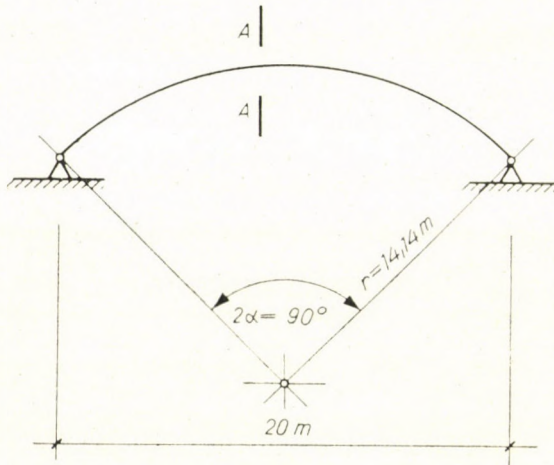


Fig. 5

REFERENCES

1. BLEICH, F.: *Buckling Strength of Metal Structures*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.
2. FEDERHOFER, K.: Die Kippsicherheit des kreisförmig gekrümmten Trägers mit einfachsymmetrischem, dünnwandigem und offenem Querschnitte bei gleichmäßiger Radialbelastung. *Österr. Ing. Archiv* IV. (1950) pp. 27-44.

3. KOLLÁR, L.: Stability of Centrally Compressed Shell-Arches. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tom. XXXII. (1960) Fasc. 1—2, pp. 11—38.
Stability of Bent Shell-Arches. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tom. XXXII, Fasc. 3—4, pp. 267—297.
4. LOVE, A. E. H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. Dover Publ., New York, 1944.
5. TIMOSHENKO, S.: Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie. *Zeitschrift f. angew. Math. und Mech.* Bd. 3., (1923), pp. 358—362.
6. TIMOSHENKO, S.: *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill Book Co. New York, 1936.
7. TIMOSHENKO, S.: Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-walled Members of Open Cross Section. *Journ. of The Franklin Institute*, Vol. 239, (1945), pp. 201—219, 249—268, 343—361.
8. WANSLEBEN, F.: Die Theorie der Drillfestigkeit von Stahlbauteilen. *Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaues*, Heft 11, Stahlbau-Verlag, Köln, 1956.

SUMMARY

Elastic, thin-walled, curved bars of open cross section (shell-arches) subjected to compression might buckle laterally (torsional buckling). The paper deals with the investigation of a shell-arch the axis of which is a circular arc. The cross section of the shell-arch is one-fold symmetric and constant; the arch is supported "fork-like" at both ends. It is subjected to centric compression caused by radially directed uniformly distributed forces acting at the centroids of the cross sections. The aim of the investigation is the determination of the critical load intensity which causes lateral torsional buckling. In the deduction the facts are taken into consideration that the arch is thin-walled and the shear-centres do not coincide with the centroids. The final result is compared with formulae, which are well known from the literature and refer to similar cases. The reasons for the apparent deviations are also pointed out. The application of the obtained results to shell-arches the longitudinal axis of which is not a circular arc, having varying cross sections, loaded by vertical forces and which are optionally supported, is also shown. Finally, a numerical example is given.

DIE DRILLKNICKUNG VON SCHALENBÖGEN

L. KOLLÁR

ZUSAMMENFASSUNG

Elastische, dünnwandige Stäbe mit offenem Querschnitt (Schalenbögen) können, wenn auf Druck beansprucht, seitlich ausknicken (Drillknickung). Der Aufsatz befaßt sich mit der Untersuchung von Schalenbögen, deren Längsachse ein Kreisbogen ist, die an beiden Enden gabelartig gestützt sind, einen einfach-symmetrischen konstanten Querschnitt haben und durch eine radial gerichtete, gleichförmig verteilte, in den Querschnitts-Schwerpunkten angreifende Last auf mittigen Druck beansprucht sind. Es wurde die kritische Lastintensität, die eine seitliche Drillknickung verursacht, bestimmt. In der Ableitung wurde berücksichtigt, daß der Querschnitt dünnwandig ist, und daß der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt nicht zusammenfällt. Das Endergebnis wurde mit den für ähnliche Fälle, in der Literatur abgeleiteten Formeln verglichen und auf die Gründe der Abweichungen hingewiesen. Die Anwendung der Ergebnisse auf Schalenbögen deren Längsachse kein Kreisbogen ist, die veränderlichen Querschnitt haben, durch vertikale Kräfte belastet und beliebig gestützt sind, ist ebenfalls beschrieben. Die praktische Anwendung ist durch ein Zahlenbeispiel erläutert.

FLAMBAGE À TORSION DES VOILES EN ARC

L. KOLLÁR

RÉSUMÉ

Des barres courbes élastiques de section ouverte et à parois minces (voiles en arc) peuvent flamber normalement au plan de l'arc en subissant une déformation torsionnelle, à la suite d'une compression simple. L'auteur étudie des voiles en arc de section constante simplement symétrique avec appuis en fourche aux deux extrémités, dont l'axe longitudinal présente une forme en arc de cercle. Une charge radiale uniforme agissant au centre de gravité

des sections provoque une compression simple, dont on détermine l'intensité critique. Au cours de la déduction, l'auteur tient compte de ce que la paroi de l'arc est mince, et que le centre de cisaillement ne coïncide pas avec le centre de gravité. Le résultat obtenu étant comparé avec les formules valables pour les cas rapprochés connus de la littérature, l'auteur démontre les causes de leurs différences. Il indique aussi les possibilités d'application des résultats à des voiles en arc de section variable, à appuis quelconques, chargés par des forces verticales et ayant une axe longitudinal non circulaire. Un exemple numérique termine l'étude.

СКРУЧИВАЮЩИЙ ПРОГИБ ОБОЛОЧЕЧНЫХ АРОК

Л. КОЛЛАП

РЕЗЮМЕ

Упругие, тонкостенные, кривые стержни открытого оболочечного сечения (оболочечные арки) вследствие давления могут прогибаться, отклоняясь от плоскости арки. Работа исследует оболочечную арку однократно симметричного неизменного сечения, опирающуюся вилкообразно, подверженную концентрированному давлению, создаваемому радиально действующей равномерной нагрузкой, приложенной в точках центра тяжести сечений, и определяется критическая интенсивность нагрузки. При выводе учитывается, что сечение является тонкостенным и что центр среза не совпадает с центром тяжести. Конечный результат сравнивается с известными из литературы и действительными для подобных случаев формулами и делается указание на причины отклонений. Демонстрируется применение результатов для оболочечных арок произвольного опирания, нагруженных вертикально действующими силами. Наконец, приводятся числовые примеры.

TROCKNUNGSFORSCHUNG DES TSCHECHOSLOWAKISCHEN STAATLICHEN FORSCHUNGSINSTITUTES FÜR WÄRMETECHNIK*

L. STRACH, M. KORGER und M. CHOC

STAATLICHES FORSCHUNGSINSTITUT FÜR WÄRMETECHNIK, PRAHA

1. Einleitung

In der Tschechoslowakischen Republik führt das Staatliche Forschungsinstitut für Wärmetechnik (SVUTT, Praha) auf dem Gebiete der Trocknungsforschung eine leitende Rolle. Das Institut bildet eines der wissenschaftlichen Forschungsinstitute des Ministeriums für die Schwerindustrie. In seinen Aufgabenkreis gehören alle wichtigeren Forschungsthemen der Wärmetechnik und der Energieübertragung, die mit den Erzeugnissen der Maschinenfabriken verbunden sind.

Die mit der Trocknung verbundenen Forschungsarbeiten begannen im SVUTT im Jahre 1952, als unter dem dringenden Druck der Fertigungsunternehmen das Institut gezwungen war, einige einschlägige Forschungsthemen in seinen Arbeitsplan aufzunehmen. Der ständige Zuwachs der Arbeiten dieser Art sowie die wirtschaftliche Bedeutung der Trocknungstechnik hatten zur Folge daß seit 1954 für das Forschungsgebiet »Wärmeübertragung und Stoffaustausch« ein Trocknungslaboratorium als Spezialabteilung für die Grundlagenforschungen des Trocknungsprozesses errichtet wurde.

Ursprünglich hatten die Arbeiten des Trocknungslaboratoriums den Charakter der angewandten Forschung, indem sie das Ziel verfolgten, die bereits ausgeführten Trocknungsanlagen zu vervollkommen und weiterzuentwickeln, ferner die fehlenden Betriebsvorschriften auszuarbeiten. Die Ausgangsdaten für diese Arbeiten wurden durch Messungen an den bereits im Betriebe befindlichen Trockenanlagen gewonnen.

Der Schwerpunkt der gegenwärtigen Arbeiten im Trocknungslaboratorium des SVUTT liegt in der Grundlagenforschung des Trocknungsprozesses. Die rapide Entwicklung der Trocknungstechnik macht eine Erweiterung der Grundlagenforschungen erforderlich. Nur auf diese Weise können wir Kenntnisse über die Eigenschaften der einzelnen Stoffe im Laufe des Trocknungsprozesses erwerben und nur auf diese Weise können wir die optimalen Trocknungstechnologien entwickeln, abgesehen davon, daß die Grundlagenforschungen auch für die weiteren Detailforschungen unerlässlich sind.

* Vortrag, gehalten auf der Trocknungskonferenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 23. November 1960.

Auf diese Weise wurde im SVUTT eine unentbehrliche experimentelle Basis ausgebaut und die Arbeitsmethoden der wissenschaftlichen Forschung der Trocknungs-technik entwickelt. Gegenüber dem halbbetrieblichen Experimentieren — denn zu Beginn machte sich auch diese Tendenz geltend — erwiesen sich die Versuche in speziellen Ziellanlagen als vorteilhafter. Auf diese Weise können viel genauere Ergebnisse erzielt werden, wobei auch die Forschungskosten herabgesetzt werden können.

Die bisher ausgearbeiteten Forschungsthemen können in die nachstehenden drei Gruppen eingereiht werden:

1. Theoretische und experimentelle Klärung der Grundfragen des Trocknungsprozesses.

2. Grundlagenforschung in Zusammenhang mit der Wirtschaftlichkeit der Trocknungsprozesse der einzelnen Industriezweige.

3. Theoretische und experimentelle Untersuchung spezieller Trocknungsmethoden.

Unser Aufsatz verfolgt das Ziel, über die bedeutenderen Ergebnisse der letzten Jahre zu berichten.

2. Trocknungsversuche und Forschung auf Grund der Düsenstrahlung

(Milan KORGER, wissenschaftlicher Mitarbeiter)

[L 1]

2.1. Bedeutung und Anwendung der Düsenbelüftung

Die gegenwärtige Entwicklung der Konvektionslufttrockner wird durch die Tendenz nach höheren spezifischen Leistungen und Parametern des Trockenmittels gekennzeichnet. Im Falle der in der Textilindustrie verwendeten Lufttrockner beeinflusst die Steigerung der Parameter des trocknenden Mediums die Wirtschaftlichkeit ungünstig und es ergeben sich Betriebsschwierigkeiten. Aus diesem Grunde sucht man nach neuen Wegen um die Trockenleistung zu erhöhen.

Unter den in Frage kommenden Verfahren kommt die größte Bedeutung der Düsentrocknung zu, wo das Trockenmittel aus einem Düsenystem mit hoher Geschwindigkeit (10—30 m/s) senkrecht auf die Oberfläche des Trockengutes geblasen wird.

Die Einführung der Düsen-Trockenanlagen in der Textilindustrie ergab im Vergleiche zu den bisher angewendeten Typen eine wesentliche Erhöhung der spezifischen Leistung. In der bezüglichen Fachliteratur wird über 3—4fache spezifische Verdampfungen berichtet. Aus diesem Grunde hat sich die Düsentrocknung bei allen Trocknertypen der Textilindustrie rapid verbreitet (Spann- und Trocknungsrahmen, Schlichttrockner, Trommeltrockner, Druckmansarden, Hängetrockner und Trockner für loses Gut, usw.).

Die rapide Verbreitung des Systems ist auch in anderen Industriezweigen zu erwarten, wo es sich um die Trocknung von Gütern ähnlichen Charakters handelt, wie z. B. in der Holzindustrie bei der Trocknung von Furnieren, in den Blechwalzwerken bei der Kühlung von Blechen, in der chemischen Industrie bei der Erzeugung von Filmen und Folien, in der Papierindustrie bei der Erzeugung von Kartonpappen, und sogar in der keramischen Industrie bei der Fabrikation von Keramik und Porzellan.

Obschon sich die von den namhaften ausländischen Firmen erzeugten Düsen-Trockenanlagen in der Textilindustrie weit verbreiteten, und über die Vorteile dieser Anlagen eine reiche Literatur vorliegt, doch fehlen in der Literatur die grundlegenden Beziehungen und Angaben, die den physikalischen Vorgang der Düsentrocknung beschreiben. Aus diesem Grunde hat sich unser Institut die Aufgabe gestellt, den Stoffübergang bei der Düsentrocknung als ein Thema der Grundlagenforschung zu behandeln.

2.2. *Experimentelle Forschung des Stoffüberganges bei der Düsenstrahlung des Mediums*

Wegen der Schwierigkeiten, die sich bei der genauen Bestimmung der Diffusionserscheinungen ergeben, wurde zur Lösung der gestellten Aufgabe die experimentelle Methode angewendet. Für die Praxis sowie zur Bestimmung der optimalen Konstruktionsdaten der Düsen-Trockenanlagen genügt die Kenntnis des mittleren Stoffübertragungskoeffizienten unter den verschiedenen Bedingungen (Strömungsgeschwindigkeit, Düsenabstand von der zu trocknenden Oberfläche, usw.) bei weitem nicht, vielmehr müssen auch die lokalen Werte des Stoffüberganges bestimmt werden. Mit Rücksicht auf den Charakter der Düsentrocknung — unmittelbar unter den Düsenöffnungen tritt nämlich eine äußerst intensive Verdampfung statt — wurde, entsprechend den Ähnlichkeitsgesetzen die Flüssigkeitsverdampfung bei den Versuchen durch Naphthalin-Sublimation ersetzt. Dieses Verfahren wurde bereits auch von zahlreichen anderen Forschern angewendet, da die thermophysikalischen Eigenschaften des Naphthalins zu diesem Zwecke mehrmals und mit großer Genauigkeit bestimmt wurden. Durch den Gebrauch einer aus dünnen Prismen zusammengestellten Naphthalinplatte wird eine genaue Messung der lokalen Werte der Stoffübergangszahl ermöglicht.

Den eigentlichen Versuchen über die Düsenstrahlung des Trockenmittels gingen Kontrollproben voraus, die den Nachweis der Eignung der gewählten Versuchsmethode bezweckten. Gleichzeitig wurden auch die Modellversuche ausgewertet. Zur Kontrolle wurden die nachfolgenden Versuche durchgeführt:

1. Verdampfung von der Oberfläche der einer parallelen Strömung ausgesetzten Naphthalin-Probepatte,

2. Bestimmung der lokalen Stoffübergangszahlen an der Oberfläche der einer parallelen Strömung ausgesetzten geteilten Naphthalin-Probeplatte.

Die obigen Fälle wurden bereits früher von mehreren Forschern aufgearbeitet, und so bestand die Möglichkeit, die Versuchsergebnisse mit den in der Literatur mitgeteilten zahlreichen Angaben und Beziehungen zu vergleichen.

Die bei der parallelen Luftströmung angewendete Naphthalin-Probeplatte wurde in einer Stahlform ausgegossen. Breite und Dicke der Platten

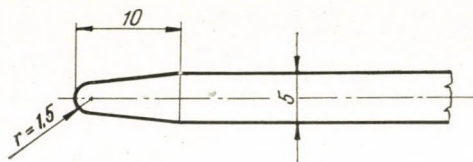


Abb. 1. Stirnkante der Versuchsplatte

waren bei allen Versuchen identisch und betrugen 100 bzw. 5 mm. Die Länge der Platten variierte zwischen 50 und 300 mm. Die Vorderkante der Probeplatte wurde stromlinienartig ausgebildet (siehe Abb. 1) und in der Versuchsanlage einer parallelen Luftströmung bei Geschwindigkeiten von 1—11 m/s ausgesetzt.

Die Intensität der Sublimation wurde aus dem Gewichtsverlust der Probeplatte bestimmt. Zur Vergleichbarkeit der einzelnen Versuchsergebnisse wurden die dimensionslosen Kennzahlen bestimmt, die mit den in der Fachliteratur mitgeteilten Angaben und Beziehungen verglichen werden können.

Die Versuchsergebnisse wurden mit den bedeutenderen Werten der Literatur in Abb. 2 verglichen.

Wie aus dieser Abb. ersichtlich, stimmen die Versuchsergebnisse, die im SVUTT in Bezug auf die Wärme- und Stoffübergangszahl der der parallelen Strömung ausgesetzten Platte erhalten wurden, mit den Angaben der angeführten Autoren gut überein. Im Bereiche für $Re < 2 \cdot 10^4$ stimmen sie mit den Angaben von E. Eckert [L 2], O. Krischer [L 3] und H. Gröber—S. Erk [L 4], während im Bereiche für $Re > 2 \cdot 10^4$ mit den Ergebnissen von E. Eckert [L 2], T. H. Chilton—A. P. Coburn [L 5] und S. S. Kutateladze—V. M. Borisansky [L 6] überein.

Im Besitze der zufriedenstellenden Ergebnisse, die bei den Verdampfungsversuchen von der Oberfläche der der parallelen Strömung ausgesetzten Naphthalinplatte erhalten worden sind, führten wir eine neue Versuchsserie durch, um die Gestaltung der lokalen Werte des Stoffüberganges untersuchen zu können. Bei diesem Versuch wurde die der parallelen Strömung ausgesetzte Naphthalinplatte aus 5—7 mm breiten Prismen zusammengestellt, die in

einen in der Richtung der Strömung 40 mm breiten, mit einer stromlinienförmig ausgebildeten Plexit-Stirnfläche versehenen und mit einem 480 mm langen geraden Abschnitt ausgebildeten Plexit-Rahmen eingesetzt wurden. Die für die mittleren Stoffübergangszahlen erhaltenen Ergebnisse stimmten mit den Versuchsergebnissen der nicht unterteilten Naphthalinplatte überein.

Bei dem Vergleich mit den ausländischen Angaben mußte der Umstand berücksichtigt werden, daß bei der gegebenen Anordnung der Stirnteil aus

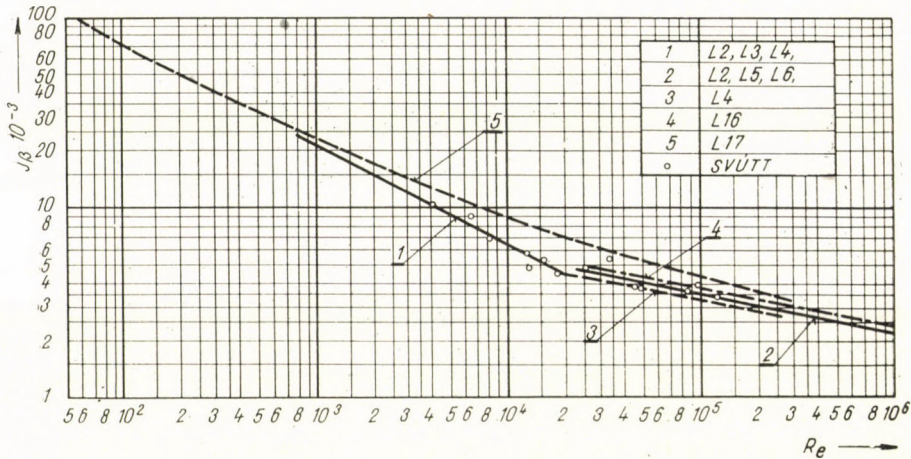


Abb. 2. Die Versuchsergebnisse der Naphthalinsublimation und Vergleich mit den Angaben der Literatur bei einer Platte, die einer Strömung in der Längsrichtung ausgesetzt worden ist

Plexit an dem Stoffübergang nicht beteiligt war, und so setzte die Ausbildung der Diffusionsgrenzschicht erst oberhalb des ersten Naphthalinprismas ein.

Der Wert des Konzentrationsgradienten über dem ersten Prisma lag somit höher, als er der Dicke der hydrodynamischen Grenzschicht entsprochen hätte.

Aus diesem Grunde konnten die erhaltenen Ergebnisse lediglich mit Fällen verglichen werden, bei denen der Effekt der an dem Stoffübergang unbeteiligten Stirnfläche in Betracht gezogen wurde. Derartige Beziehungen wurden von D. S. Maisel und T. K. Sherwood [L7] ermittelt, auf Grund der mit befeuchteten keramischen Blöcken durchgeführten Verdampfungsversuche, die in einer parallelen Luftströmung vorgenommen wurden. Die Form des Verdampfungsgesetzes lautet:

$$\text{Sh} = 0,0415 \cdot \text{Re}^{0,8} \left[1 - \frac{l_1^{0,8}}{x + l_1} \right]^{-0,11} \cdot \text{Sc}^{1/3}, \quad (1)$$

wo l_1 die in der Strömungsrichtung gemessene Länge der an dem Wärmeübergang unbeteiligten Stirnfläche bedeutet. Wegen der leichteren Hand-

habung wurde Gl. (1) in eine Form umgeschrieben, die mit den dimensionslosen Faktoren der Feuchtigkeitskonvektion ausgedrückt ist:

$$j\beta = \frac{Sh}{Re \cdot Sc^{1/3}} = 0,0415 \cdot Re^{-0,2} \left[1 - \frac{l_1}{x + l_1} \right]^{0,8} \quad (2)$$

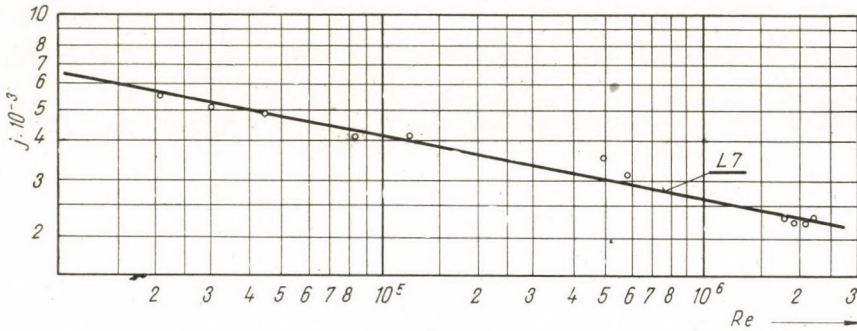


Abb. 3. Vergleich der Werte der durch die Versuche aufgenommenen lokalen Stoffübergangszahlen mit der Beziehung [L 7]

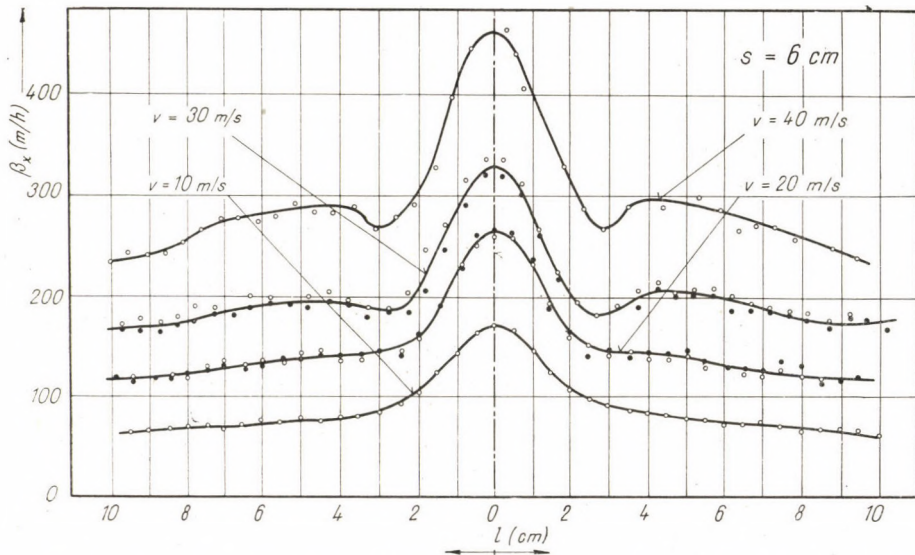


Abb. 4. Die Gestaltung der lokalen Werte des Stoffübertragungskoeffizienten bei 60 mm Abstand der Düsenmündung von der Platte

Die Versuchsergebnisse wurden mit Gl. (2) in Abb. 3 verglichen. Wie aus der Abb. ersichtlich, stimmen die Ergebnisse gut überein.

Nach den vergleichenden Proben wurden die Versuche zur Bestimmung der lokalen Werte der Stoffübergangszahl an den unterteilten Naphthalin-

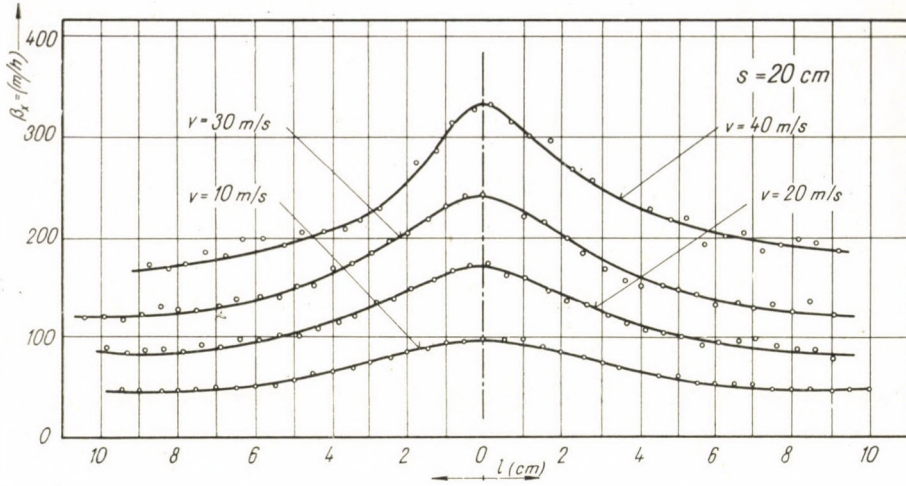


Abb. 5. Die Gestaltung der lokalen Werte der Stoffübergangszahl bei 200 mm Abstand der Düsenmündung von der Platte

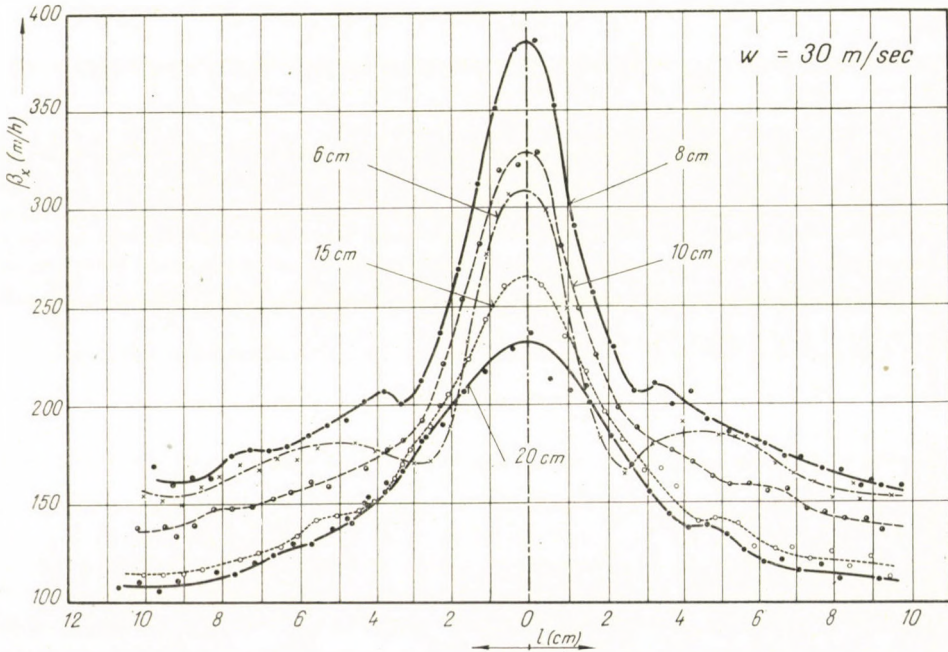


Abb. 6. Die Gestaltung der lokalen Werte der Stoffübergangszahl bei verschiedenen Abständen der Düsenmündung von der Platte, bei einer Ausblasegeschwindigkeit von 30 m/s, gemessen in der Düsenöffnung

Probepplatten unter einer 10 mm breiten Düse durchgeführt. Die Abmessungen der Naphthalinplatte betragen 200×110 mm. Die Messungen wurden bei Ausblasegeschwindigkeiten von 10–40 m/s durchgeführt. Der Abstand der Düsenmündung von der Oberfläche der Probeplatte variierte sich zwischen 20 und 200 mm.

Nach der Auswertung der Messungen wurden die Werte der lokalen Stoffübergangszahl in verschiedenen Abständen von der Achse des Luftstromes ermittelt.

In den Abb. 4 und 5 wurden die lokalen Werte von β_x bei konstantem Abstände der Düsenmündung in Abhängigkeit von der Ausblasegeschwindigkeit

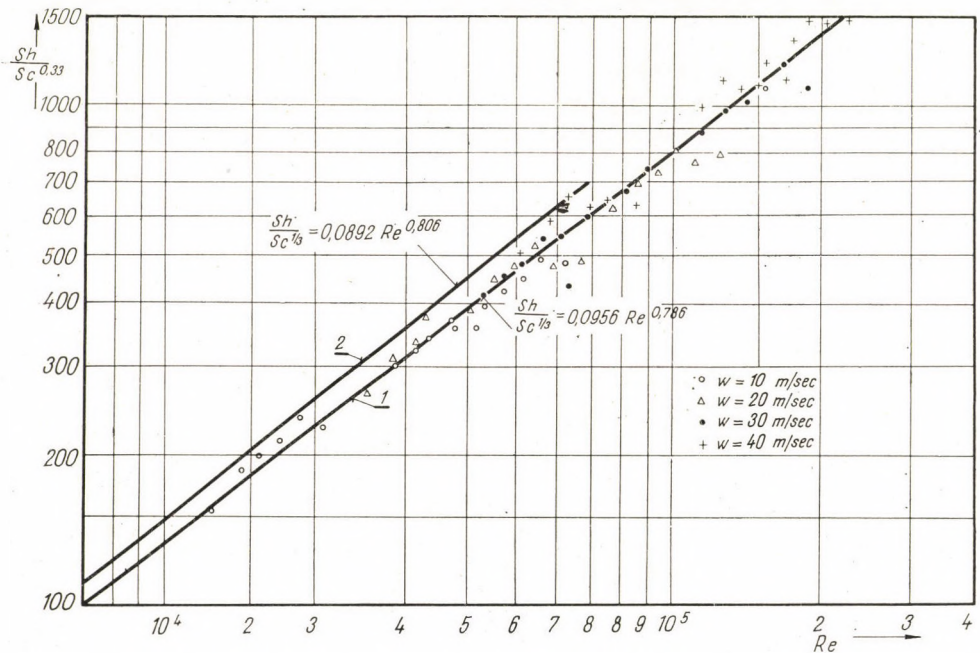


Abb. 7. Resultierende Sh-Werte bei der Düsenstrahlung des Mediums

keit angeführt. Die Wirkung des Düsenabstandes auf die lokalen Werte der Stoffübergangszahl wurden bei einer konstanten Ausblasegeschwindigkeit von 30 m/s in Abb. 6 dargestellt.

Die Zahl Sh, die die mittlere Stoffübergangszahl β_L bestimmt, wurde für die Zonenbreiten von $L = 0,05, 0,1$ und $0,15$ m in Abhängigkeit von der Re-Zahl im Diagramm 7 dargestellt.

Die Gleichung der durch die Punkte gelegten Geraden lautet:

$$\text{Sh} = 0,0956 \cdot \text{Re}^{0,786} \cdot \text{Sc}^{1/3}. \quad (3)$$

Die Re-Zahl wurde mit dem quadratischem Mittelwert der in der Zone von der Breite L gemessenen Geschwindigkeiten gebildet [L 9]. Die Streuung der erhaltenen Punkte von der durch Gl. (3) bestimmten Geraden ist größer, als sie bei den Vorversuchen war, woraus gefolgert werden kann, daß der Versuch auch durch Faktoren beeinflusst wurde, deren Wirkung bei der Auswertung nicht genügend berücksichtigt wurde.

Zum Vergleiche wurde in Abb. 7 auch die Gleichung von A. V. Lykov [L 8] dargestellt (Linie 2), der bei seinen Verdampfungsversuchen mit feuchten Emulsionsschichten die nachstehende Gleichung erhielt:

$$\text{Sh} = 0,0892 \cdot \text{Re}^{0,806} \cdot \text{Sc}^{0,33}. \quad (4)$$

Werden die Gl. (3) und (4) miteinander verglichen, so geht es hervor, daß die über der Oberfläche gemessenen quadratischen Mittelwerte der Geschwindigkeiten in beiden Beziehungen mit nahe identischen Exponenten berücksichtigt werden, und daß sich eine wesentlichere Abweichung nur in den Konstanten der beiden Gleichungen ergibt.

Der Grund für die Abweichung der beiden Beziehungen muß in den verschiedenen Faktoren gesucht werden, die in den Gleichungen (3) und (4) unberücksichtigt blieben. Darunter sind der Grad der Turbulenz in dem Luftstrom, die Wirkung der in der Querrichtung stattfindenden Stoffströmung auf die Grenzschichtverhältnisse zu erwähnen, usw. Eine weitere, in Vorbereitung befindliche Versuchserie bezweckt die Aufklärung dieser Effekte. Bei diesen Versuchen sollen die Auswirkungen der weiteren Parameter, so z. B. die der Düsenbreite, des Turbulenzgrades, der veränderlichen partialen Druckunterschiede, des Temperaturgradienten, usw., untersucht werden.

3. Versuche und Forschungen über die Vibrationstrocknung granulierter Stoffe

(Miroslav CHOC, wissenschaftlicher Mitarbeiter)

[L 10] und [L 11]

3.1. Bedeutung und Anwendung der Vibrationstrocknung

Eine häufig vorkommende Form des zu trocknenden Gutes ist das Schüttgut. Es wird in der chemischen Industrie, in der pharmazeutischen Industrie, Lebensmittelindustrie und auf zahlreichen anderen Gebieten vorgefunden. Bei der Ausbildung der Schüttguttrockner wird eine je größere Verdampfungsfläche angestrebt, d. h., es werden die Möglichkeiten gesucht, daß die Oberfläche des Granulats mit dem Trocknungsmittel je besser in Berührung komme. Dies wird am häufigsten durch Umschütten des Granulats, durch eine intensive Strömung des Trockenmittels durch die Schüttgutschicht und durch die Fluidisation der Körner in einem intensiven Luftstrom erreicht.

Diesen Zwecke dient auch die Auflockerung der Schüttgutschichten durch Vibration.

Die Vibrationstrocknung bildet eine der neuesten Entwicklungsrichtungen der Trocknungstechnik. Die Vibration bezweckt nicht allein die Sicherung des Stofftransportes, vielmehr bezweckt sie darüber hinaus auch eine günstige Beeinflussung des Trockenprozesses. Wegen ihrer Vorteile im Betrieb zählen die Vibrationstrockenanlagen endgültig zu den anerkannten Trocknertypen.

Bis zur Zeit befaßten sich nur äußerst wenige wissenschaftliche Arbeiten mit der Aufklärung der bei der Vibrationstrocknung stattfindenden physikalischen Vorgänge. Aus diesem Grunde wurde die Forschung auch dieser Trocknungsmethode in den Forschungsplan des SVUTT aufgenommen.

3.2. Vergleichende Versuche mit Vibrationstrocknung granulierter Stoffe.

[L 10] und [L 11]

Als erster Schritt zur Lösung der gestellten Aufgabe wurden vergleichende Versuche durchgeführt, die die Bestimmung der spezifischen Kennzahlen bezweckten, auf deren Grund der Vibrationstrockenprozeß mit der Trocknung der im Ruhezustand befindlichen Schichten verglichen werden kann. Die vergleichenden Versuche wurden in einer speziellen Laboratoriumsanlage durchgeführt, dessen Hauptelement aus einer mit einem mechanischen Schwingungserreger zusammengebauten Vibrationsförderschnecke bestand.

Durch die Änderung der Umdrehungszahl des Schwingungserreger-Elektromotors sowie durch die Einstellung der Größe und Lage eines exzentrisch angebrachten Gewichtes konnte die Frequenz der Vibrationsbewegung auf max. 905/min und die mittlere Amplitude auf 3 mm eingestellt werden. Gleichzeitig konnte auch das Verhältnis der Translationskomponente zur Torsionskomponente der Schwingung eingestellt werden. Die Vibrationsvorrichtung wurde in einem Versuchstrockner angebracht, wo die Geschwindigkeit der Luft auf max. 9 m/s und die Temperatur auf max. 90° C eingestellt werden konnte.

In der obigen Vorrichtung wurden die vergleichenden Versuche sowohl mit Vibration wie auch in ruhender Schicht, bei gleichen Parametern des Trockenmediums, durchgeführt. Zu den Versuchen wurde präzipitiertes Polyvinylchlorid mit einem Anfangsfeuchtigkeitsgehalt von 160% und einem Schüttgewicht von 540 kg/m³ verwendet. Außerdem wurden Versuche mit einem granulierten Trägerstoff für Arzneien durchgeführt. Die Zusammensetzung dieses Granulats war: 70,5% Milchzucker, 26,3% Talk und 3,2% Stärke. Der Anfangsfeuchtigkeitsgehalt des Granulats betrug 40%, sein Schüttgewicht 622 kg/m³. Die bei diesen Versuchen ermittelten Trocknungsgeschwindigkeitskurven wurden in den Abb. 8 und 9 dargestellt.

Durch einen Vergleich der Trocknungskurven, einer der Vibration ausgesetzten und einer ruhenden Schüttgutschicht, die in Ruhe Befindliche Korn

wurden die nachstehenden Effekte als Folge der Vibrationsbewegung festgestellt:

1. Die Trocknungsgeschwindigkeit nimmt im Abschnitt konstanter Geschwindigkeit der Trocknung zu.

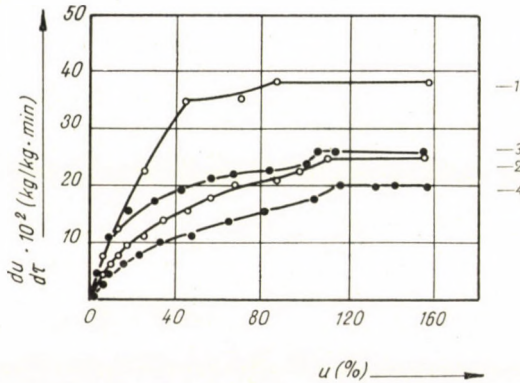


Abb. 8. Vergleich der Trocknungsgeschwindigkeit eines PVC-Koagulats in ruhender Schicht und bei Vibration ($t_L = 60^\circ \text{C}$, $L = 0,1$; $h = 10 \text{ mm}$; $A = 2,2 \text{ mm}$, $f = 820 \frac{1}{\text{min}}$). 1 — Durch Vibration aufgerührte Schicht $V_L = 1,6 \text{ m/s}$. 2 — Durch Vibration aufgerührte Schicht $V_L = 1,0 \text{ m/s}$. 3 — In Ruhe befindliche Schicht $V_L = 1,6 \text{ m/s}$. 4 — In Ruhe befindliche Schicht $V_L = 1,0 \text{ m/s}$

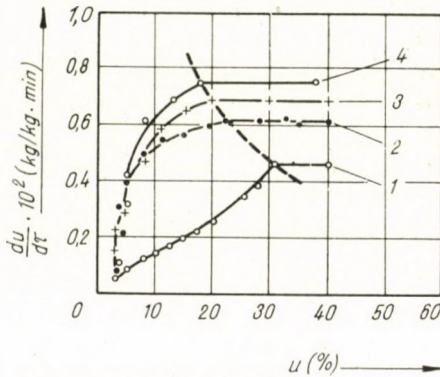


Abb. 9. Wirkung der Frequenz auf die Trocknungsgeschwindigkeit des Schüttgutes ($t_2 = 60^\circ \text{C}$; $\psi_g = 0,1$; $V_L = 1,5 \text{ m/s}$; $h = 20 \text{ mm}$; $A = 2,2 \text{ mm}$). 1 — In Ruhe befindliche Schicht. 2 — Durch Vibration aufgerührte Schicht $f = 740 \text{ l/min}$. 3 — Durch Vibration aufgerührte Schicht $f = 820 \text{ l/min}$. 4 — Durch Vibration aufgerührte Schicht $f = 905 \text{ l/min}$

2. Der Abschnitt konstanter Trocknungsgeschwindigkeit verlängert sich, und der kritische Punkt wird gegen die niedrigeren Feuchtigkeitsgehalte verschoben.
3. Im Abschnitt abnehmender Trocknungsgeschwindigkeit nimmt die Geschwindigkeitskurve eine konvexe Form an.

Der resultierende Effekt der oben angeführten Erscheinungen besteht darin, daß die mittlere Trocknungsleistung im Vergleiche zu der der in Ruhe befindlichen Schicht auf das Zwei- bis Dreifache erhöht wird.

Dieser hochgradig günstige Einfluß der Vibration auf den Trocknungsprozeß kann allein auf die abweichende Orientierung der Kornschicht zurückgeführt werden. Infolge der Vibrationsbewegung nimmt nämlich die Porosität der Kornschicht zu, wodurch auch der Kontakt zwischen dem Korn und dem Trocknungsmedium verbessert wird. Da die Porosität der Kornschicht mit der Frequenz zunimmt, wurde die Beziehung zwischen der Trocknungsgeschwindigkeit und der Schwingungsfrequenz untersucht. Durch die ständige Wirbelbewegung der Teilchen im Inneren der Kornschicht wird der Wert der Stoffübergangszahl ebenfalls erhöht. In der Oberflächenschicht stehen nämlich die Teilchen im Vergleich zu den in Ruhe befindlichen inneren Schichten unter der Wirkung von erhöhtem Wärme- und Stoffübergang, wobei ein Ausgleich des Feuchtigkeits- und Wärmegradienten stattfinden kann.

3.3. Experimentelle Forschung über den Konvektions-Stoffübergang der Granulate unter der Wirkung der Vibration [L 11]

Den erwähnten vergleichenden Versuchen folgte eine Versuchsserie, die das Ziel verfolgte, die Wirkung der Vibration auf den Konvektionsstoffübergang bei gekörnten Stoffen näher aufzuklären. Als Versuchsmaterial wurde wiederum Naphthalin verwendet, das zu diesem Zwecke in Körner von 2—4 mm Durchmesser zerlegt wurde. Die verwendete Versuchsanordnung war der bei den vergleichenden Versuchen verwendeten Vorrichtung ähnlich, nur einzelne Teile der Vorrichtung wurden modifiziert, um sie den Versuchen besser anzupassen. So wurde der mechanische Erreger auf Amplituden von 0—1 mm und Frequenzen von 1300—3000/min umgestellt, und bei dem lufttechnischen Teil wurde die Konstanz der Parameter des strömenden Mediums gesichert. Die Intensität der Sublimation wurde aus der Gewichts-differenz der ein- und austretenden Körner ermittelt.

Den eigentlichen Versuchen gingen vergleichende Versuche voraus, die die Ausprobierung und die Eichung der Versuchsmethode zum Ziele hatten. Diese Versuche wurden mit ruhender Kornschicht durchgeführt, und die Ergebnisse wurden mit den auf die Naphthalinplatte bzw. auf die ruhende Kornschicht bezüglichen Daten der Literatur verglichen [L 11].

Nach den beruhigenden Eichungsergebnissen wurde mit den eigentlichen Versuchen begonnen. Diese Versuche verfolgten das Ziel, die Wirkung der Vibrationsbewegung auf die Stoffübergangszahl in den Kornschichten zu bestimmen. Die Ergebnisse wurden in Abb. 10 dargestellt.

Bei dieser Darstellung wurden die Stoffübergangszahlen in einfachster Form, in linearen Koordinaten, in Abhängigkeit von der Frequenz der Vibra-

tion bei verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten und bei den Amplituden von 0,4 bzw. 0,8 mm aufgetragen. Bei den Versuchen wurde mit Schichtdicken von 25 bzw. 50 mm gearbeitet, wobei jedoch die Auswirkung der unterschiedlichen Schichtdicken nicht nachgewiesen werden konnte, da die einzelnen Punkte des Diagramms keine Abweichung voneinander aufwiesen.

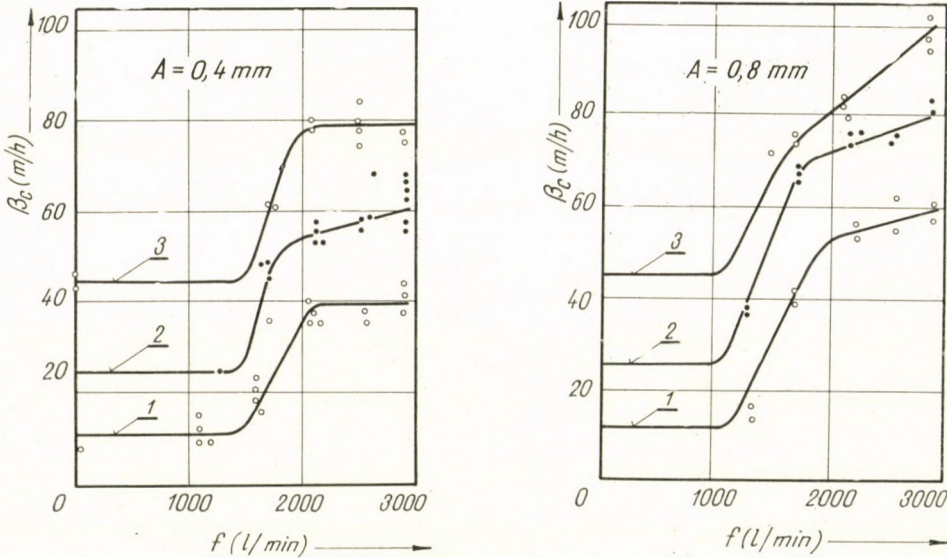


Abb. 10. Wirkung der Vibration auf die Stoffübergangszahl (1 — $V_L = 1 \text{ m/s}$; 2 — $V_L = 2 \text{ m/s}$; 3 — $V_L = 3 \text{ m/s}$)

Werden die aufgenommenen Kurven nach der Frequenz der Vibrationsbewegung ausgewertet, so geht es deutlich hervor, daß in den Kurven drei Abschnitte scharf unterschieden werden können, in denen sich die Wirkung der Vibration auf den Stoffübergang in unterschiedlicher Weise offenbart:

- In dem ersten Abschnitt ist die Stoffübergangszahl von der Frequenz der Schwingung unabhängig.
- Der zweite Abschnitt wird durch die rapide Zunahme des Stoffüberganges gekennzeichnet.
- In dem dritten Abschnitt nimmt die Stoffübergangszahl mit Erhöhung der Frequenz nur in äußerst geringem Maße zu und bleibt praktisch konstant.

Zusammenfassend kann es behauptet werden, daß die Frequenzabhängigkeit der Stoffübergangszahl durch zwei kritische Punkte charakterisiert wird. Um die gleichzeitige Wirkung der Frequenz f und der Amplitude unter-

suchen zu können, wurde die Stoffübergangszahl β_c in Abhängigkeit von der Beschleunigung

$$a = A(2\pi f)^2$$

dargestellt (siehe Abb. 11).

In diesem Falle tritt der erste kritische Punkt, eindeutig in Erscheinung der der Beschleunigung der Schwingung von $a = 10 \text{ m/s}^2$ entspricht. Der zweite

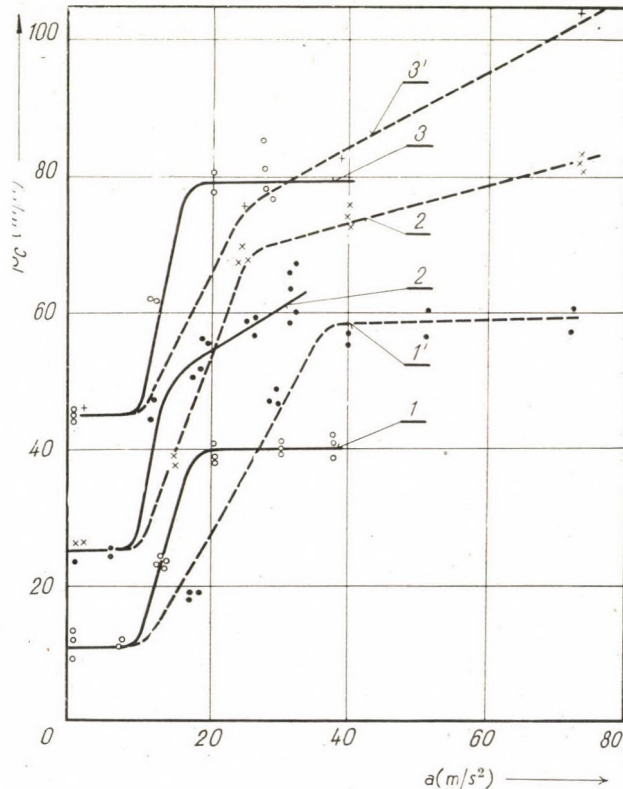


Abb. 11. Abhängigkeit der Stoffübergangszahl von der Beschleunigung der Vibration. 1 — $V_L = 1 \text{ m/s}$, $A = 0,4 \text{ mm}$, 2' — $V_L = 2 \text{ m/s}$, $A = 0,8 \text{ mm}$; 1' — $V_L = 1 \text{ m/s}$, $A = 0,8 \text{ mm}$; 3 — $V_L = 3 \text{ m/s}$, $A = 0,4 \text{ mm}$; 2 — $V_L = 2 \text{ m/s}$, $A = 0,4 \text{ mm}$; 3' — $V_L = 3 \text{ m/s}$, $A = 0,8 \text{ mm}$

kritische Punkt ist nicht mehr so ausgeprägt und liegt zwischen den Beschleunigungsgrenzen von etwa $17\text{--}36 \text{ m/s}^2$.

Die obigen kritischen Punkte sind im Einklang mit den Erscheinungen, die im Verhalten der einzelnen Körner während der Schwingungsbewegung beobachtet werden konnten. Auch hier war es zwischen der Existenz der drei Abschnitte scharf zu unterscheiden. Während die Frequenz der Schwingung vom Werte 0 graduell erhöht wurde, konnte zu Beginn eine Auflockerung

der Oberflächenschicht nicht beobachtet werden. Die einzelnen Körner gruppieren sich in einer Weise, um die dichteste Packung zu erreichen. Von einer Frequenz an, die einer Beschleunigung von 10 m/s^2 entsprach, begann die Auflockerung (Tanzbewegung) der Oberflächenschicht, die sich mit zunehmender Frequenz verstärkte, bis schließlich eine intensive Wirbelung der Körner einsetzte. Bei den höchsten Frequenzen ($2\,500$ — $2\,900$ 1/min) konnte eine rhythmische Beruhigung bzw. kräftige Tanzbewegung der Oberflächenschicht beobachtet werden.

Die Existenz der beiden kritischen Punkte kann auch durch die theoretische Analyse der Schwingungseffekte erklärt werden [L 12]. Mit steigender Frequenz richten sich die Teilchen so aus, daß dadurch die dichteste Packung erreicht werde. Hierdurch nimmt die Porosität der Schicht ab. Für ideale Teilchen kann es nachgewiesen werden, daß eine qualitative Änderung in der Anordnung der Teilchen nur erfolgt, wenn die Resultante der Gravitationskraft und der aus der Schwingungsbewegung stammenden Trägheitskraft der Graviation entgegengerichtet sein wird. Hieraus folgt aber, daß der kritische Punkt dann in Erscheinung tritt, wenn die Beschleunigung der Schwingungsbewegung den Wert der Gravitationsbeschleunigung, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, erreicht hat. Von hier an verursacht die Erhöhung der Beschleunigung der Schwingungsbewegung eine Ausdehnung der Schichten, das heißt, die Porosität der Schichten nimmt zu. Die schnelle Bewegung der Körner an der Oberfläche setzt ein, die immer mehr der Oberfläche einer siedenden Flüssigkeit ähnlich wird. Mit weiterer Erhöhung der Beschleunigung der Schwingungsbewegung nimmt die Berührungszeit zwischen den Schichten und der Bodenplatte ständig ab. Der nächste kritische Zustand der Schicht tritt dann ein, wenn die Körner beim Aufprallen auf die schwingende Platte von ihr unmittelbar zurückgestoßen werden. Nach den Gesetzen der harmonischen Schwingung tritt diese Erscheinung bei idealen Teilchen bei einer Beschleunigung $a = 18,3 \text{ m/s}^2$ ein.

Die angeführten Folgerungen aus der theoretischen Analyse stimmen mit den Versuchsergebnissen gut überein. Es existieren nach den letzteren zwei kritische Punkte, wobei der erste bei der Beschleunigung von $a = 10 \text{ m/s}^2$, der andere bei der Beschleunigung von $a = 17$ — 36 m/s^2 liegt.

Um die Wirkung der Schwingungsbewegung auf die Zunahme der Stoffübergangszahl im Vergleich zu der ruhenden Schicht auswerten zu können wurde der Koeffizient κ der relativen Zunahme der Stoffübergangszahl eingeführt. κ stellt somit den Quotienten der bei der Vibrationsbewegung auftretenden Stoffübergangszahl β_{cv} und der Stoffübergangszahl β_{co} der ruhenden Schicht dar.

Die Gestaltung der relativen Stoffübergangszahl $\kappa = \beta_{cv}/\beta_{co}$ wurde in Abhängigkeit von der Frequenz, bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten, in Abb. 12 dargestellt.

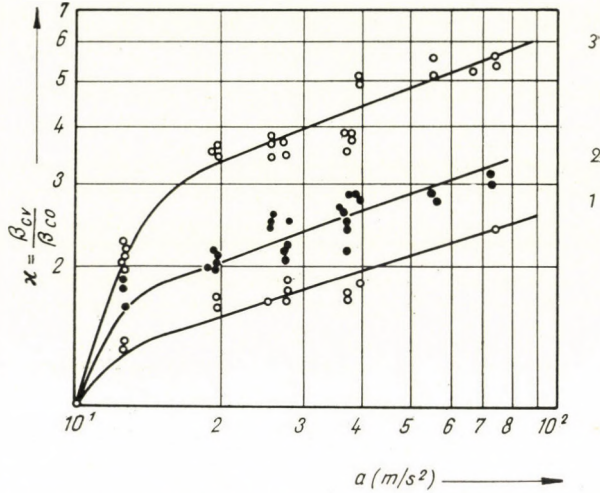


Abb. 12. Die Zunahme der relativen Stoffübergangszahl α in Abhängigkeit von der Beschleunigung der Schwingungsbewegung (1 - $V_L = 1$ m/s; 2 - $V_L = 2$ m/s; 3 - $V_L = 3$ m/s)

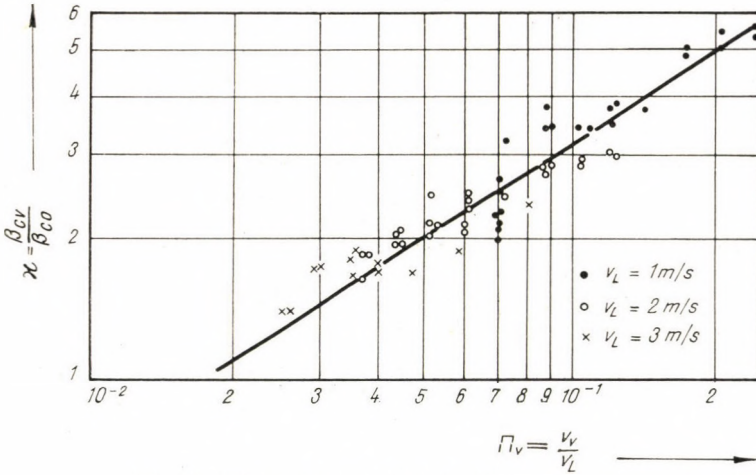


Abb. 13. Werte der relativen Stoffübergangszahl

In Abb. 13 wurden die Werte der relativen Stoffübergangszahl α in einem logarithmischen Koordinatensystem in Abhängigkeit von dem dimensionslosen Faktor $\Pi_v = V_v/V_L$ dargestellt, wobei $V_v = 2\pi fA$ die Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung und V_L die Strömungsgeschwindigkeit der Luft bedeutet.

Die experimentell aufgenommenen Kurven schmiegen sich an die Gerade mit der Gleichung

$$\alpha = \frac{\beta_{cv}}{\beta_{c0}} = 14,0 \cdot \Pi_v^{0,65}$$

gut an.

Die obige Beziehung, die nur in dem Bereich zwischen den beiden kritischen Punkten gilt, kann als das Endergebnis der Laboratoriumsversuche betrachtet werden. Näherungsweise drückt sie aus, daß sich die relative Stoffübergangszahl bei der Vibration proportional der Quadratwurzel aus dem Kriterium Π_0 ändert.

4. Die Bestimmung der Trocknungsprozesse durch Berechnungsmethoden bei einigen Trocknertypen

4.1. *Trocknungsprozesse von inbetriebgehaltenen Trocknern bei veränderlichen äußeren Parametern [L 13]*

Einige Arbeiten im SVUTT befassen sich mit den Berechnungsmethoden der Trocknungsprozesse von inbetriebgehaltenen Trockenanlagen bei veränderlichen äußeren Parametern. Infolge der Wechselwirkung zwischen dem zu trocknenden Gut und dem Trocknungsmedium ändern sich die äußeren Parameter in den inbetriebgehaltenen Trocknern von Ort zu Ort. Die Parameter werden durch die aus dem Gut verdampfende Feuchtigkeit beeinflusst.

Die Theorie des Trocknungsprozesses bei konstanten Parametern ist bereits entwickelt worden, die Erscheinungen können gut verfolgt werden, und der Mechanismus des Trocknungsprozesses ist geklärt. Mit dem Studium des Trocknungsprozesses der inbetriebgehaltenen Trockner befassen sich nur wenige Arbeiten [L 14, L 15], wobei die äußeren Parameter sich von Stelle zu Stelle ändern, obschon in der Praxis der letztere Fall öfters vorkommt als die Trocknung bei konstanten äußeren Parametern.

Der Projektingenieur und der Konstrukteur muß die zur Verdampfung des erwünschten Feuchtigkeitsgehaltes erforderliche Trocknungszeit stets bestimmen, und zwar mit solchen Trocknungsparametern, die in der Anlage bei Inbetriebhaltung auftreten.

In der Folge wollen wir zwei Methoden zur Bestimmung der Trocknungsprozesse in den inbetriebgehaltenen Anlagen mitteilen, die im SVUTT ausgearbeitet wurden.

4.2. *Graphische Bestimmungsmethode des Trocknungsprozesses in den Tunnel-trocknern [L 13]*

Durch die erste Methode kann der Trocknungsprozeß in den Tunnel-trocknern bestimmt werden. Als Ausgangspunkt wollen wir die durch Laboratoriumsversuche aufgenommenen Trocknungsgeschwindigkeitskurven bei konstanten äußeren Parametern betrachten.

Diese Kurven stellen das Produkt $N \cdot h$ (Trocknungsgeschwindigkeit \times Trockengutdicke) in Abhängigkeit von dem jeweiligen Feuchtigkeitsgehalt dar. In eine solche Kurvenschar können die den veränderlichen äußeren

Parametern der Tunneltrockner entsprechenden Geschwindigkeitskurven näherungsweise graphisch eingezeichnet werden, aus denen dann die gesuchten Trocknungszeiten bestimmt und die Hauptabmessungen der Anlage berechnet werden können.

Den Rechengang wollen wir in Verbindung mit einem Gegenstromtrockner einmal für einen isothermen, zum anderen für einen adiabatischen Trocknungsprozeß vorführen.

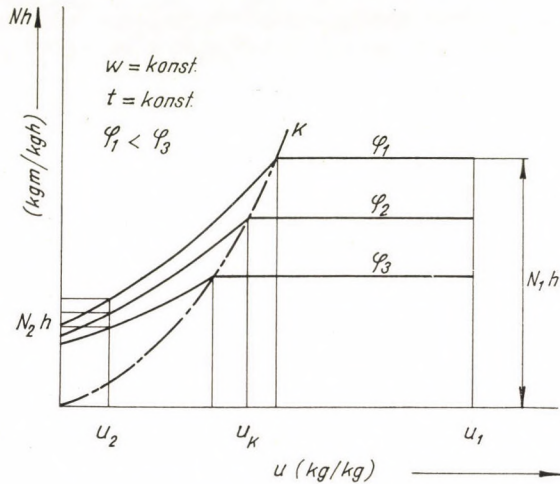


Abb. 14. Trocknungsgeschwindigkeitskurve des Tunneltrockners

4.21. Gegenstromtrockner mit isothermen Trocknungsprozeß

Unter der Leistung M_{MS} der Anlage verstehen wir das absolute Trockengewicht des in den Trockner eintretenden Gutes, dessen ursprünglicher Feuchtigkeitsgehalt u_1 , austretender Feuchtigkeitsgehalt u_2 beträgt. Der Luftdurchsatz der Anlage beträgt M_{LS} , der Anfangsfeuchtigkeitsgehalt der Luft X_1 , der Feuchtigkeitsgehalt der Luft beim Austritt X_2 , der auf Grund des Gesetzes der Erhaltung der Materie bestimmt werden kann. Bei einem isothermen Vorgang kann der relative Feuchtigkeitsgehalt der Luft, φ_2 , leicht ermittelt werden, und so können wir auf der entsprechenden Trocknungsgeschwindigkeitskurve Punkt 1 einzeichnen, der die Anfangstrocknungsgeschwindigkeit des in den Trockner eintretenden Gutes bestimmt.

Bei Gegenstromtrocknern werden die weiteren Punkte der Trocknungsgeschwindigkeitskurve in der Weise bestimmt, daß wir für einen beliebigen Trocknungsabschnitt »a« das Gesetz der Erhaltung der Materie anschreiben (siehe Abb. 15b):

$$u_a - u_2 = \frac{M_{LS}}{M_{MS}} (X_a - X_1). \quad (6)$$

Aus Gleichung (6) kann der Feuchtigkeitsgehalt X_a des Trocknungsmediums zu jedem Feuchtigkeitsgehalt u_a des Trockengutes bestimmt werden. Dem Wert X_a entspricht wieder ein relativer Feuchtigkeitsgehalt φ_a , der den Punkt »a« in Abb. 15a bestimmt.

Durch die Verbindung mehrerer solcher Punkte wird die Verdampfungsgeschwindigkeitskurve der freien Feuchtigkeit erhalten, die im Falle der kon-

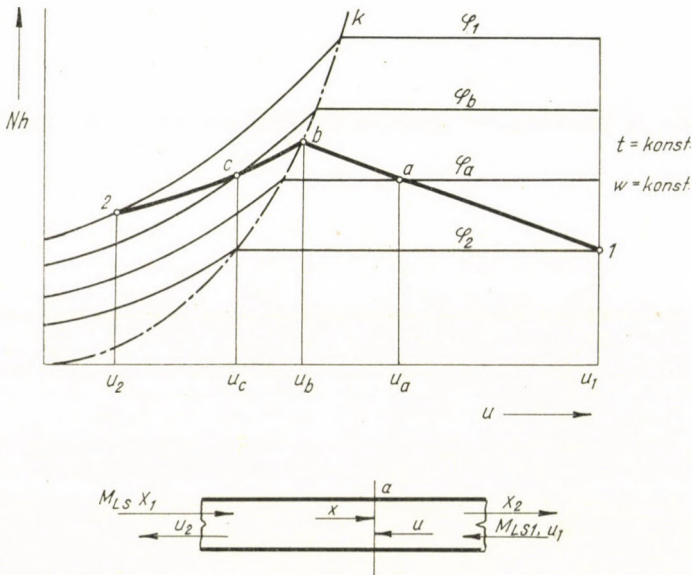


Abb. 15. Trocknungsgeschwindigkeitskurve eines mit isothermem Trocknungsprozess arbeitenden Gegenstromtrockners

stanten äußeren Parameter dem Bereiche der konstanten Trocknungsgeschwindigkeit entspricht. Diese Kurve endet im Punkte »b«, der als der Schnittpunkt der Kurve K und der entsprechenden Trocknungsgeschwindigkeitskurve erhalten wird. Die Kurve K stellt den veränderlichen äußeren Parametern entsprechenden kritischen Feuchtigkeitsgehalt des Gutes dar.

In ähnlicher Weise verfahren wir auch in dem nächsten Abschnitt der Trocknung, in dem die Feuchtigkeit vorwiegend aus dem Inneren des Gutes verdunstet und in Dampfform auf die Oberfläche wandert. Aus Gleichung (6) bestimmen wir die zu den Feuchtigkeitsgehalten $u_c \dots u_2$ des Gutes gehörigen Luftfeuchtigkeitsgehalte $X_c \dots X_2$ bzw. relativen Luftfeuchtigkeiten $\varphi_c \dots \varphi_2$, auf Grund deren die Punkte $c \dots 2$ in die Abb. 15a eingezeichnet werden können. Die durch die Punkte 1-a-b-c-2 bestimmte Kurve gibt die zu den veränderlichen äußeren Parametern gehörigen Trocknungsgeschwindigkeiten und dem entsprechend auch die zu erwartende Gestaltung des Trocknungsprozesses an.

Die Trocknungszeit wird durch die Integration der inversen Kurve der Trocknungsgeschwindigkeitskurve erhalten.

4.22. Gegenstromtrockner mit adiabatischen Trocknungsprozess

Zur Konstruktion der Trocknungsgeschwindigkeitskurven der mit adiabatischem Prozeß arbeitenden Gegenstromtrockner muß wiederum zunächst die bei konstanten äußeren Parametern aufgenommene Geschwindigkeitskurvenschar bei verschiedenen Temperaturen t des Trockenmediums und bei verschiedenen relativen Feuchtigkeitsgehalten φ bekannt sein. Bei gegebener Leistung des Trockners (M_{MS} , u_1 , u_2) sowie bei bekanntem Feuchtigkeits-

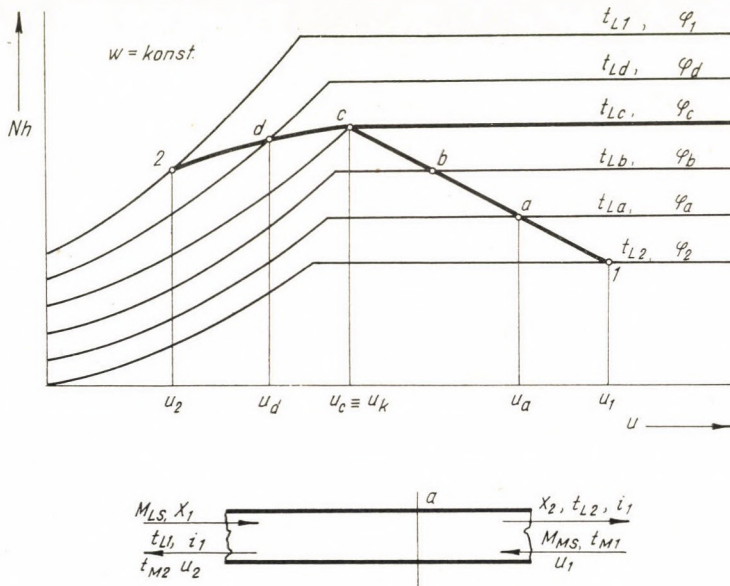


Abb. 16. Trocknungsgeschwindigkeitskurve eines mit adiabatischem Trocknungsprozeß arbeitenden Gegenstromtrockners

gehalt X_1 der eintretenden Luft können der erforderliche Luftdurchsatz bzw. die Temperatur t_{L1} der eintretenden Luft aus der Stoff- und Wärmebilanz bestimmt werden, wobei die letzteren für die Werte der austretenden Luft (t_{12} , X_2) sowie die geschätzte Temperatur t_{M2} der den Trockner verlassenden Luft angeschrieben werden.

Zu Beginn des Trocknungsprozesses, im Bereiche der freien Feuchtigkeit, treffen das Trockenmittel mit Temperatur t_{L2} , absolutem Feuchtigkeitsgehalt X_2 und relativem Feuchtigkeitsgehalt φ_2 und das zu trocknende Gut mit dem Feuchtigkeitsgehalt u_1 zusammen. Hieraus kann der erste Punkt der Trocknungsgeschwindigkeitskurve bestimmt werden (Abb. 16a).

Weitere Punkte der Trocknungsgeschwindigkeitskurve der inbetriebgehaltenen Anlage können aus der für einen beliebigen Abschnitt »a« des

Trockners angeschriebenen Stoff- und Wärmebilanz erhalten werden (Abb. 16b).

$$u_a - u_2 = \frac{M_{LS}}{M_{MS}} (X_a - X_1), \quad (7)$$

$$M_{LS} \cdot i_2 + M_{MS}(C_S + u_a) t_{Ma} = M_{LS} [C_{LS} \cdot t_{La} + X_a(r_0 + C_p t_{La})] + M_{MS}(C_S + U_1) t_{M1}. \quad (8)$$

Aus Gleichung (7) können wir den Feuchtigkeitsgehalt X_a des Trockenmittels bestimmen, der zu dem beliebigen Feuchtigkeitsgehalt u_a des zu trocknenden Gutes gehört. Die Temperatur t_{La} der Luft wird durch Schätzung der Differenzen der Temperaturen t_{Ma} und t_{ML} des zu trocknenden Gutes aus Gl. (8) ermittelt. Erforderlichenfalls können wir die Genauigkeit der Berechnung dadurch erhöhen, daß wir kontrollieren, ob die Punkte t_{La} und X_a in der Tat auf der zu der feuchten Temperatur t_{Ma} gehörigen Adiabate liegen.

Nach erfolgter Bestimmung von t_{La} ist der Zustand des Trockenmittels, der zu dem Feuchtigkeitsgehalt u_a des zu trocknenden Gutes gehört, vollkommen bekannt (t_{La} , X_a , φ_a), und damit können wir den nächstfolgenden Punkt »a« in das Diagramm einzeichnen.

Die Bestimmung des kritischen Feuchtigkeitsgehaltes $u_k = u_c$ gestaltet sich bei einem adiabatischen Prozeß nicht so einfach wie bei einem isothermen Prozeß. Die weiteren Punkte »b« nähern sich immer mehr dem kritischen Feuchtigkeitsgehalt der Trocknungsgeschwindigkeitskurven. Der gesuchte kritische Punkt »c« ergibt sich dadurch, daß der gezeichnete Punkt mit dem kritischen Punkt der Trocknungsgeschwindigkeitskurve zusammenfällt.

Nach dem kritischen Zustand nähert sich die Temperatur des zu trocknenden Gutes der Temperatur des Trockenmittels. Der nächstfolgende Punkt »d« wird in der gleichen Weise wie der Punkt »a« bestimmt, nach welchem die Temperatur t_{Md} des Gutes durch Schätzung angenommen wird, wobei auch der Charakter des Gutes und die Gestaltung des Trocknungsprozesses selbst zu berücksichtigen sind. Sollte ein genaueres Verfahren erwünscht sein, so muß im zweiten Trocknungsabschnitt die Abhängigkeit der Temperatur des Gutes von dem jeweiligen Feuchtigkeitsgehalte berücksichtigt werden, was durch den Vergleich des $i-x$ Diagramms mit den Gleichgewichtsisothermen des Gutes erreicht wird [L 18].

Durch die Kurve 1-a-b-c-d-2 wird im gegebenen Fall der Trocknungsprozeß bei veränderlichen äußeren Parametern bestimmen.

4.23. Die Anwendung der Methode in sonstigen Fällen

Die mitgeteilte graphische Berechnungsmethode kann auch in anderen Fällen angewendet werden, wenn der Gegenstromprozeß keinen ausgeprägten adiabatischen oder isothermen Charakter besitzt.

Bei den adiabatischen und isothermen Prozessen der Gleichstromtrockner sind die Abweichungen von dem im vorangehenden beschriebenen Fall nur formell.

Der theoretische isotherme Prozeß wird am engsten durch die Tunnel-trockner angenähert, die je Zone mit Zwischenheizung versehen sind. Sollte der tatsächliche Prozeß bei diesen Trocknern von dem isothermen Prozeß abweichen, so wird sich die Temperatur beim Übergang von einer Zone zu der anderen ändern. In diesem Fall werden die Trocknungsgeschwindigkeitskurven — entsprechend den betreffenden Zonenparametern und auf Grund der Geschwindigkeitskurvenscharen der betreffenden konstanten äußeren Parameter — für jede Zone gesondert bestimmt.

Der adiabatische Trocknungsprozeß wird am engsten von den Tunnel-trocknern angenähert, die mit einmal vorgeheizter Luft arbeiten. Bei diesen Trocknern wird eine geringe Abweichung von dem theoretischen adiabatischen Prozeß nur durch die Transmissionswärmeverluste bedingt. Diese Abweichung kann jedoch durch die Berücksichtigung des entsprechenden Gliedes der Wärmebilanz korrigiert werden.

4.3. Die Bedeutung des Dehydratationskoeffizienten im Trocknungsabschnitt abnehmender Geschwindigkeit

Bei veränderlichen äußeren Parametern, in dem Abschnitt abnehmender Geschwindigkeit der Trocknung, kann in einigen Fällen der Dehydratationskoeffizient, der bei der Verdampfung der gebundenen Feuchtigkeit für das zu trocknende Gut charakteristisch ist, mit Vorteil angewendet werden.

Es ist bekannt, daß bei dem Großteil der Güter, in dem Abschnitt abnehmender Geschwindigkeit, unter gewissen vereinfachenden Bedingungen, die Dehydratationskurve durch eine exponentielle Kurve ersetzt werden kann, die folgende Gleichung hat (Abb. 17):

$$\frac{u_1 - u_R}{u_2 - u_R} = e^{K\tau}, \quad (9)$$

wo u_1 und u_2 den Anfangs- bzw. Endfeuchtigkeitsgehalt des Gutes in dem Abschnitt abnehmender Geschwindigkeit, u_R den Gleichgewichtsfeuchtigkeitsgehalt des Gutes, τ die Zeit und K den Dehydratationskoeffizienten bedeuten. Der Dehydratationsfaktor kann leicht bestimmt werden, wenn die experimentell aufgenommenen Dehydratationskurven in einem halblogarithmischen Koordinatensystem dargestellt werden. Der Dehydratationskoeffizient K erscheint in dieser Darstellung als die Richtungstangente von Geraden (Abb. 18) oder formelmäßig ausgedrückt:

$$k = \frac{\lg \frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_R}}{\tau}.$$

Der Dehydratationskoeffizient stellt eine Funktion der äußeren Parameter dar, und diese Abhängigkeit kann bei veränderlichen äußeren Parametern zu Bestimmung des Trocknungsprozesses verwendet werden.

Das im SVUTT entwickelte Verfahren soll am Beispiel eines Mehrzonen-Hopfentrockners vorgeführt werden. Durch die Auswertung der einzelnen

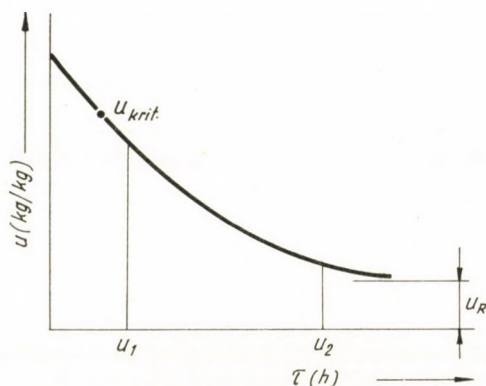


Abb. 17. Dehydratationskurve im Trocknungsabschnitt abnehmender Trocknungsgeschwindigkeit

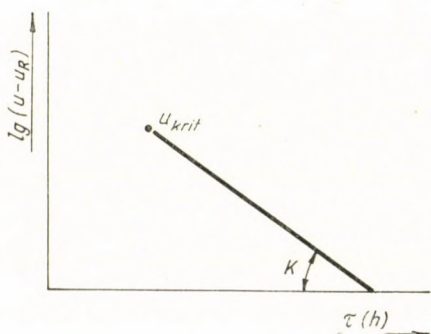


Abb. 18. Dehydratationskurve in halb-logarithmischem Koordinatensystem

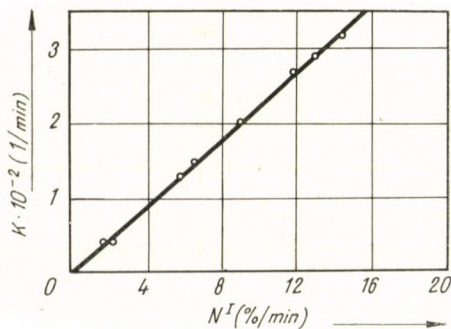


Abb. 19. Dehydratationskoeffizient in Abhängigkeit von der Trocknungsgeschwindigkeit

Dehydratationskurven wurden die Dehydratationskoeffiziente K ermittelt. Diese wurden in Abb. 19 in Abhängigkeit von der Trocknungsgeschwindigkeit N^I des Abschnittes konstanter Geschwindigkeit aufgetragen. Der Anfangsfeuchtigkeitsgehalt des im Versuch verwendeten Probestückes betrug $u_0 = 455\%$. Zu der gegebenen Aufgabe beabsichtigten wir einen Mehrband-Schichtendurchlüftungstrockner zu entwerfen, der durch vertikale Scheidewände in gleiche Zonen eingeteilt wurde (Abb. 20).

In unserem Beispiel betrug die Anzahl der Zonen 15. Für die einzelnen Zonen wurden die elementaren Berechnungen auf Grund der Stoff- und Wärmebilanz durchgeführt. Als äußere Parameter wurden die Mittelwerte der einzelnen Zonen eingesetzt. Die Abnahme des Feuchtigkeitsgehaltes des Gutes wurde aus der Gleichung (9) ermittelt, während die entsprechenden X -Werte aus dem Diagramm der Abb. 19 eingesetzt wurden.

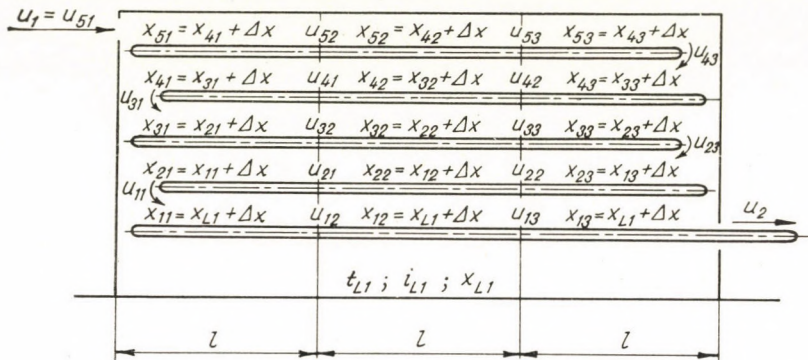


Abb. 20. Schema eines Mehrbandtrockners mit Schichtendurchlüftung

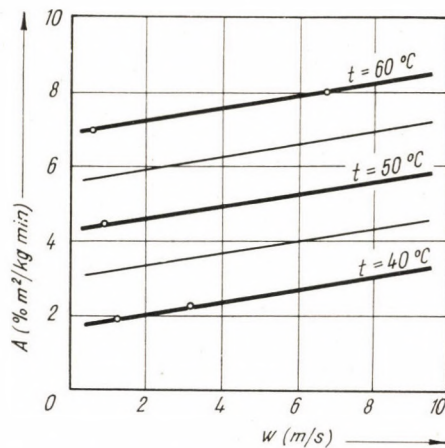


Abb. 21. Der Faktor A in Abhängigkeit von der Temperatur und der Luftgeschwindigkeit

Bei den Berechnungen mußten die Änderungen der verschiedenen Stellen der Anlage herrschenden Partialdampfdrücke sowie die Wirkung der Unterschiede der Partialdampfdrücke an der Oberfläche des Gutes bzw. im Trockenmittel auf die Trocknungsgeschwindigkeit berücksichtigt werden. Dies wurde durch die Einführung einer Hilfsgleichung erreicht.

$$A = \frac{N^1}{P_{pv}'' - P_{po}}, \quad (11)$$

wo P''_{pv} den Partialdampfdruck an der Oberfläche des Gutes und P_{p0} den Partialdampfdruck im Trockenmittel bedeutet.

Wenn wir die Grundgleichung der Trocknung für ein einziges Hopfenkätzchen anschreiben (g_s = Gewicht des Hopfenkätzchens, f = Gesamtfläche der Verdampfung):

$$g_s N^I = f \cdot \frac{\beta_c}{RT} (P''_{pv} - P_{p0}), \quad (12)$$

so geht daraus hervor, daß der Wert von A dem Ausdruck $\frac{\beta_c}{RT}$ proportional ist.

In Gleichung (12) stellt β_c die auf ein Konzentrationsunterschied bezogene Stoffübergangszahl R die Gaskonstante und T die mittlere absolute Temperatur dar.

Durch die Aufarbeitung der Versuchsergebnisse wurde für den Faktor A in Abhängigkeit von der Temperatur und der Luftgeschwindigkeit die in Abb. 21 dargestellte Kurve erhalten.

Mit Hilfe der beiden Diagramme (Abb. 19 und 21) konnte nun der Wert des zu den gegebenen äußeren Parametern gehörigen Dehydratationsfaktors K für die einzelnen Zonen bestimmt werden. Für die gegebene Luftgeschwindigkeit wurde aus Abb. 21 der Wert von A bestimmt, und durch Einsetzung

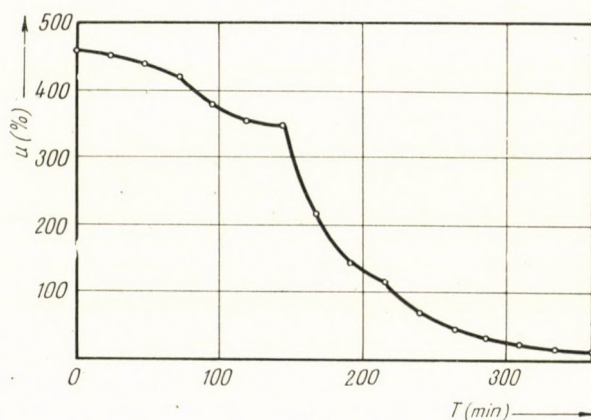


Abb. 22. Dehydrationskurve der Trocknungsanlage

dieses Wertes in Formel (11) wurde die entsprechende Trocknungsgeschwindigkeit N^I berechnet. In Formel (11) wurden die zu den durchschnittlichen Schichthöhen der einzelnen Zonen gehörigen mittleren partialen Dampfdruckdifferenzen eingesetzt.

Zu der berechneten Trocknungsgeschwindigkeit N^I wurde aus Diagramm 19 der Dehydrationskoeffizient K ermittelt, der dann in Gl. (9) eingesetzt wurde.

Mit Hilfe dieses Verfahrens kann von Schritt zu Schritt die Dehydrationskurve der einzelnen Zonen bestimmt werden, (siehe Abb. 22) und damit auch die zu erwartende Trocknungszeit, die die Hauptabmessungen der Anlage bedingt.

SCHRIFTTUM

- L 1. Trocknungsversuche und Forschung auf Grund der Düsenstrahlung — Bericht SVUTT 60—05003.
- L 2. Einführung in die Wärme- und Stoff-Austausch, Berlin, 1949.
- L 3. Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik, Berlin, 1956.
- L 4. Основа учения о теплообмене, Москва, 1958.
- L 5. Industrial and Engineering Chemistry, 1950.
- L 6. Справочник по теплопередаче, Москва, 1958.
- L 7. Chemical Engineering Progress, 1950.
- L 8. Тепло и массообмен в процессах сушки, Москва, 1956.
- L 9. АВРОВОМІС, G. M.: Aplikovana dynamika plynu, Praha, 1952.
- L 10. Vibrationstrocknung von Schüttgut — Bericht SVUTT 57—05011.
- L 11. Wirkung der Vibration auf den Wärme- und Stoffübergang in Kornschichten — Bericht SVUTT 59—05031.
- L 12. Heizung — Trocknung, Sammelwerk ČSAV, 1959.
- L 13. Heizung — Trocknung, Sammelwerk ČSAV, 1957.
- L 14. КАМЕЛ, S., ТОЕЛ, R.: Chemie Ing. Technik, 1954.
- L 15. BROUGHTON, O. B., MICKLEY, H. S.: Chemical Engineering Progress, 1953.
- L 16. Industrial and Engineering Chemistry, 1950, Sherwood, T. K.
- L 17. Loos, F.: Dissertation, TH Darmstadt.
- L 18. Луріс, М. И.: Сушильное дело, Москва, 1948.

ZUSAMMENFASSUNG

Im obgenannten Institut werden seit dem Jahre 1952 systematische Untersuchungen und Versuche durchgeführt, die die theoretischen Grundfragen des Trockenprozesses, die Trocknungsprobleme der einzelnen Industriezweige sowie die neueren speziellen Trocknungsmethoden betreffen.

Es wurde — insbesondere bei den Trocknern der Textilindustrie — ein bedeutendes praktisches Ergebnis erzielt durch die Einführung der Düsentrocknung, bei welcher das Trocknungsmedium, senkrecht zu dem zu trocknenden Material, aus einer Düse aufgeblasen wird. Die Verdampfung der Flüssigkeit wurde unter Berücksichtigung der Ähnlichkeitsgesetze durch die Sublimation des Naphthalins ersetzt. Die erhaltenen Ergebnisse werden sowohl in Diagrammen wie auch in analytischer Form mitgeteilt und mit den Angaben der Literatur verglichen.

Bezüglich der Vibrationstrocknung von körnigem Material zeigten dabei die Versuche, daß die Intensität der Trocknung durch die Vibration auf das Zwei- bis Dreifache erhöht werden kann. Es kann ferner nachgewiesen werden, daß durch die Frequenz der Vibration der Stoffübergangsfaktor in hohem Maße beeinflusst wird. Sobald die der Frequenz entsprechende Beschleunigung die Schwerebeschleunigung erreicht, oder gar übersteigt, wird die aufgeschüttete Schicht aufgelockert, wobei der Stoffübergangsfaktor rapid zunimmt.

Zum Schluß wird eine graphische Berechnungsmethode mitgeteilt, deren Anwendung an der Dimensionierung einer Kanal-Trocknungsanlage vorgeführt wird.

THE INVESTIGATIONS ON DRYING OF THE CZECHOSLOVAK RESEARCH
INSTITUTE OF HEAT

L. STRACH, M. KORGER and M. CHOC

SUMMARY

In the Institute mentioned above, since 1952 systematic research and development is carried out on the fundamental theoretic questions of drying, on drying problems in the various branches of industry and on new, special methods of drying.

The introduction of the new impact flow, where the drying medium is blown from nozzles at high velocity at right angles toward the dried material, has lead to important practical results chiefly in textile dryers. The evaporation of liquid was replaced, taking into account the model laws, by the sublimation of naphthalene. The results are presented in the form of diagrams as well as in analytical form and are compared with other sources.

As far as the vibration drying of granular material is concerned, the experiments showed that the intensity of drying can be increased from 2 to 3 fold by vibration. It can also be shown that the frequency of vibration has a considerable influence on the coefficient of material exchange. As soon as the acceleration corresponding to the frequency attains or exceeds the acceleration of gravity, the layer is loosened and in consequence the coefficient of material exchange rises rapidly.

Finally a graphical method of calculation is described, the application of which is shown in the dimensioning of a channel-type drying installation.

RECHERCHES SUR LE SÉCHAGE À L'INSTITUT DE LA CHALEUR
TCHÉCOSLOVAQUE

L. STRACH, M. KORGER et M. CHOC

RÉSUMÉ

Depuis 1952, l'institut poursuit systématiquement des recherches et essais concernant les questions théoriques fondamentales du séchage, les problèmes du séchage dans les différentes branches d'industrie, et l'application de méthodes de séchage spéciales.

L'écoulement par choc, où le milieu séchant est soufflé à grande vitesse, normalement au matériau à sécher, a conduit à des résultats pratiques très importants, surtout chez les sècheuses utilisées dans l'industrie textile. L'évaporation du liquide a été remplacée par sublimation de naphthaline, compte tenu des lois de similitude. Les résultats obtenus, communiqués en diagrammes et sous forme d'analyse, sont comparés aux données puisées dans la littérature.

Des essais comparatifs de séchage par vibration des matières granuleuses ont montré, que l'intensité du séchage peut être augmentée de 2 à 3 fois par vibration. Il a été démontré, en outre, que la fréquence de la vibration influence considérablement le taux d'échange de la matière. Dès que l'accélération correspondant à la fréquence atteint ou dépasse l'accélération de la pesanteur, la couche de matière est désentassée et le taux d'échange de la matière augmente rapidement.

Les auteurs présentent finalement une méthode graphique, qu'ils appliquent au calcul d'une installation de séchage à canaux.

ИССЛЕДОВАНИЯ ЧЕХОСЛОВАЦКОГО ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКОГО
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ СУШКИ

Л. СТРАХ, М. КОРГЕР и М. ХОЦ

РЕЗЮМЕ

В упомянутом выше институте начиная с 1962 года производятся систематические исследования по основным вопросам теории сушки, по проблемам сушки в отдельных отраслях промышленности, а также по новым специальным методам сушки.

Очень важные с практической точки зрения результаты получены при введении метода сталкивающейся циркуляции сушильного агента (в основном для сушилок текстильной промышленности), при котором сушильный агент с высокой скоростью подается на высушиваемый материал. Испарение жидкости с учетом закона подобия замещено сублимацией нафталина. Полученные результаты сообщаются как в виде диаграмм, так и в аналитической форме и дается сравнение этих данных с прочими литературными данными.

В отношении вибрационной сушки зернистых материалов опыты показали, что интенсивность сушки при вибрации возрастает в 2—3 раза. Далее можно показать, что частота вибрации значительно влияет на коэффициент обмена материалов. Как только ускорение, соответствующее частоте, достигает или начинает превышать ускорение силы тяжести, нанесенный слой разрыхляется и вместе с тем круто возрастает коэффициент обмена материала.

Наконец, излагается графический метод вычисления, применение которого иллюстрируется на расчете сушильного устройства.

INFLUENCE DE LA DISTANCE ENTRE L'OBJET ESSAYÉ ET LE GÉNÉRATEUR DANS LES ESSAIS AU CHOC

G. Á. NAGY

TRUST DES CENTRALES ÉLECTRIQUES, BUDAPEST

[Manuscrit présenté 13 Juin, 1961]

Avant-propos

Lors des mesures effectuées en laboratoire à haute tension, il arrive souvent que le générateur de chocs se trouve relié aux bornes de l'objet en essai non pas directement, mais par un conducteur de 5, 10 ou 15 mètres de long. Dans les essais au choc effectués sur place au moyen de voitures de mesures, cette distance peut atteindre plusieurs dizaines de mètres, surtout si le sol accidenté rend l'accès trop difficile. Dans ces cas, l'exactitude des mesures est fortement influencée par les réflexions qui se produisent sur le front d'onde. Dans ce qui suit, nous présentons une méthode pour le calcul et la construction graphique des tensions de réflexion, ainsi que pour le choix des procédés de mesure à suivre dans de tels cas.

A. Introduction

Quand une onde mobile transitoire est répercutée entre deux impédances éloignées l'une de l'autre à une distance L m, avec une vitesse v m/ μ s, il se produit des oscillations.

$$\text{La durée du parcours d'une oscillation } \Delta t = \frac{L}{v} \mu\text{s.} \quad (1)$$

$$\text{La période d'une oscillation: } T = 4\Delta t = 4 \frac{L}{v} \mu\text{s.} \quad (2)$$

$$\text{La fréquence d'une oscillation: } f = \frac{1}{T} = \frac{v}{4L} \text{ MHz.} \quad (3)$$

Or, la connaissance soit graphique, soit analytique de la fonction de temps d'une impulsion de tension, appliquée dans l'un des points de réflexion, permet de construire ou de calculer la fonction de temps de la tension aux bornes de l'objet essayé. L'article *B* ci-dessous offre la solution générale de ce problème.

B. Solution générale

Dans le schéma examiné (Figure 1), le générateur de chocs ayant une impédance intérieure Z_A est relié à l'objet en essai d'une impédance Z_B , par un conducteur d'impédance Z de longueur Lm . Les facteurs de réflexion en direction du conducteur seront, dans les points A et B :

$$\alpha_A = \frac{Z_A - Z}{Z_A + Z}, \quad \alpha_B = \frac{Z_B - Z}{Z_B + Z}. \quad (4)$$

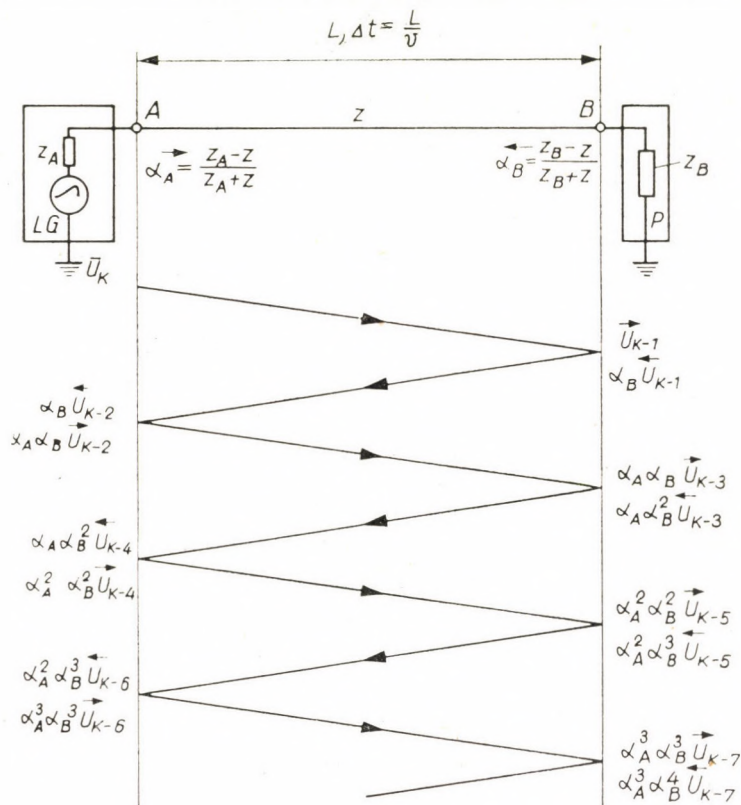


Fig. 1

Pour résoudre le problème, on peut utiliser la méthode de Bewley [1], avec sa variante ci-dessous. La courbe de tension de sortie du générateur doit être divisée en intervalles Δt définis par la relation (1), de la manière indiquée sur la figure 2. Le point 0 de l'échelle des temps ($t = 0$) soit l'instant où le point de départ de la tension de sortie apparaît au point A . Examinons le phénomène à l'instant de la $K^{\text{ième}}$ réflexion, quand la valeur de la tension

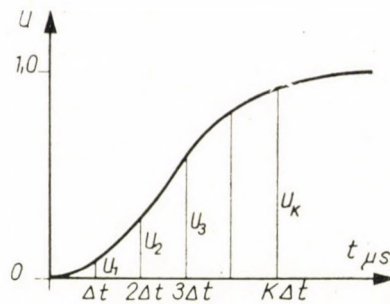


Fig. 2

d'entrée est U_K au point A. A cet instant, au point B, sera réfléchi U_{K-1} une valeur de tension antérieure d'un instant Δt , au point A U_{K-2} , une valeur de tension antérieure d'un instant $2 \Delta t$, et ainsi de suite. D'après la figure 1, la tension aux points A et B sera donc, au moment de la $K^{\text{ième}}$ réflexion:

$$U_{AK} = U_K + a_B U_{K-2} + \alpha_A \alpha_B^2 U_{K-2} + \alpha_A \alpha_B^2 U_{K-4} + \alpha_A^2 \alpha_B^2 U_{K-4} + \alpha_A^2 \alpha_B^3 U_{K-6} + \dots + \alpha_A^3 \alpha_B^3 U_{K-6} \dots$$

$$U_{AK} = U_K + (1 + \alpha_A) a_B [U_{K-2} + \alpha_A \alpha_B U_{K-4} + \alpha_A^2 \alpha_B^2 U_{K-6} + \dots + \alpha_A^x \alpha_B^x U_{K-(2x+2)} + \dots]$$

où

$$2x + 2 \leq K$$

$$U_{BK} = U_{K-1} + a_B U_{K-1} + \alpha_A \alpha_B U_{K-3} + \alpha_A \alpha_B^2 U_{K-3} + \alpha_A^2 \alpha_B^2 U_{K-5} + \dots + \alpha_A^2 \alpha_B^3 U_{K-5} + \alpha_A^3 \alpha_B^3 U_{K-7}$$

$$U_{BK} = (1 + \alpha_B) [U_{K-1} + \alpha_A \alpha_B U_{K-3} + \alpha_A^2 \alpha_B^2 U_{K-5} + \alpha_A^3 \alpha_B^3 U_{K-7} + \dots + \alpha_A^x \alpha_B^x U_{K-(2x+1)} + \dots] \quad (6)$$

où

$$2x + 1 \leq K.$$

Le fait d'avoir négligé l'amortissement du conducteur L , déterminable d'ailleurs par des mesures quand il s'agit de cas concrets, est à l'avantage de la sécurité.

De même, la sécurité se trouve augmentée du fait qu'on a négligé la résistance intérieure du générateur, ce qui est admissible avec l'impédance de quelques centaines d'Ohms du conducteur de liaison. Si par contre $Z_A = 0$, alors suivant (4), $\alpha_A = -1$, et d'après la relation (5)

$$U_{AK} = U_K \quad (7)$$

conformément à la loi générale, en vertu de laquelle la tension aux bornes d'une source de tension se rapproche d'autant plus de la tension à vide, que son impédance intérieure est plus petite.

L'impédance de l'objet en essai peut être considérée comme infinie pendant la courte durée du front d'onde. (La capacité remplaçant le transformateur sera examinée par la suite.) Ainsi, $Z_B = \infty$ et $a_B = +1$.

Avec les omissions ci-dessus, la tension approximative — légèrement supérieure à la tension réelle de l'objet essayé — sera:

$$U_{BK} = 2 [U_{K-1} - U_{K-3} + U_{K-5} - U_{K-7} + U_{K-9} \dots]. \quad (8)$$

La série alternante simple constitue la solution générale de notre problème. Si les conditions d'impédance sont différentes de celles ci-dessus, il faut revenir à la relation (6) servant de point de départ.

C. Fronts d'ondes à examiner

La tension aux bornes de l'objet essayé est examinée pour des fronts d'ondes linéaires, exponentiels et cosinusoïdaux. Les formules des trois fronts d'ondes sont:

Linéaire: $U_{\text{lin}} = C \cdot t.$

Exponentiel: $U_{\text{ex}} = \frac{1}{\eta'} \left[e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right], \quad (9)$

Cosinusoïdal: $U_{\text{cos}} = \frac{1}{2} (1 - \cos \omega t).$

En vue de la comparaison, on choisit les trois courbes de sorte que leur amplitude soit unitaire (c'est-à-dire 100%), et que leur temps de front construit suivant la norme [2] soit égal à 1 μs . Les équations des fronts répondant à ces conditions sont:

$$U_L = t, \quad (10)$$

$$U_{\text{ex}} = \frac{1}{0,975} \left[e^{-\frac{t}{68,5}} - e^{-\frac{t}{0,4}} \right] \quad (11)$$

et comme

$$\omega = 132,8^\circ \mu\text{s}^{-1} = \frac{\pi}{1,356} \mu\text{s}^{-1}, \quad (12)$$

$$t_m = 1,356 \mu\text{s}$$

donc, enfin

$$U_{\text{cos}} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi}{1,356} t \right]. \quad (13)$$

L'équation (10) apparaît comme évidente sur la base de la figure 3, les constantes de l'équation (11) sont données dans la littérature [3], enfin les

constantes de la relation (13) peuvent se calculer aisément sur la base des définitions de la norme déjà citée.

Les fronts d'ondes dessinés d'après les équations sont visibles sur la figure 4. La courbe 1 représente le front linéaire, la courbe 2 le front exponentiel, et la courbe 3 le front cosinusoidal. La courbe 4 correspond au front d'onde

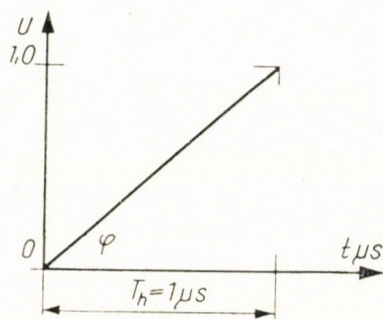


Fig. 3

du générateur de chocs utilisé pour les mesures, c'est le dessin agrandi de l'oscillogramme No 1. La courbe 2' en traits discontinus représente la fonction exponentielle

$$U_{ex} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (14)$$

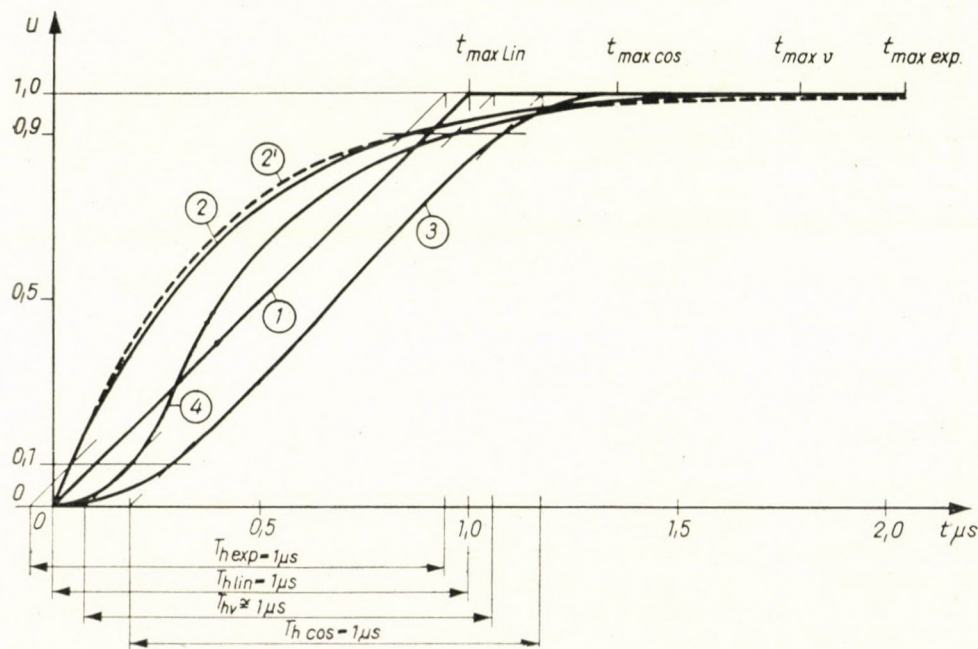


Fig. 4

On voit qu'elle diffère à peine de la courbe exponentielle de la formule (11). Elle s'en sépare à 0,1 μ s, et après 1 μ s elle présente, à nouveau, pratiquement la même allure jusqu'au sommet. Du point de vue du front d'onde, la courbe 14 remplace pratiquement la courbe 11, c'est donc elle que nous considérerons par la suite.

Avec les constantes répondant à la norme, la courbe 14 prend la forme:

$$U_e = 1 - e^{-\frac{t}{0,365}}. \quad (15)$$

Le temps de front construit est pratiquement 1 μ s pour chacune des cinq ondes représentées.

D. Tension de l'objet essayé en cas de différents fronts d'ondes

A. Front linéaire. La formule (10) du front est ici légèrement modifiée. Avec l'introduction du numéro d'ordre K de la réflexion, on obtient, d'après la relation (1):

$$t = K \cdot \Delta t = K \frac{L}{v} \quad (16)$$

Ainsi

$$U_L = U_{AKL} = \frac{v}{H} \cdot K \cdot \frac{L}{v} = \frac{L}{H} K \quad (17)$$

Introduisons la notation

$$\frac{a}{2} = \frac{L}{H} \quad (18a)$$

alors

$$U_{AKL} = \frac{a}{2} K \quad (18)$$

La tension de l'objet en essai sera, d'après la relation (8):

$$U_{BKL} = 2 [U_{K-1} - U_{K-3} + U_{K-5} - \dots] = a[(K-1) - (K-3) + (K-5) - \dots].$$

Pour effectuer la sommation de la série alternative ainsi produite, il faudrait séparer les cas de K pair et K impair, autrement ni la valeur (0 ou 1), ni le signe du dernier terme de la série ne seraient connus, et la sommation ne pourrait pas être effectuée. Ce procédé nous donnerait plusieurs solutions particulières, au lieu de la solution générale. Pour arriver à cette dernière, il faut

supprimer le caractère alternatif de la série et la compléter. Pour ce faire, la série

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}1\right) = 1; \sin\left(\frac{\pi}{2}2\right) = 0; \sin\left(\frac{\pi}{2}3\right) = -1; \sin\left(\frac{\pi}{2}4\right) = 0; \sin\left(\frac{\pi}{2}5\right) = 1; \dots$$

est la appropriée. Avec elle, la série prendra la nouvelle forme:

$$U_{BKL} = a \left[(K-1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}1\right) + (K-2) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}2\right) + \dots + (K-x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \dots + (K-K) \sin\left(\frac{\pi}{2}K\right) \right].$$

Le signe alternant est contenu dans $\sin\frac{\pi}{2}K$. Les termes pairs de $\sin\frac{\pi}{2}K$ étant égaux à zéro, notre série a été complétée, en définitive, par une série de valeur égale à zéro, c'est-à-dire sa valeur n'a pas changé. Après arrangement, on obtient:

$$U_{BKL} = a \left[K \sum_{x=0}^{x=K} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - \sum_{x=0}^{x=K} x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \right].$$

En substituant les deux sommes par les relations (40), resp. (46) de l'annexe, on a

$$U_{BKL} = a \left[\frac{K + K \sin\left(\frac{\pi}{2}K\right) - K \sin\left(\frac{\pi}{2}(K+1)\right)}{2} - \frac{(K+1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}K\right) - K \sin\left(\frac{\pi}{2}(K+1)\right)}{2} \right]$$

et après simplification:

$$U_{BKL} = \frac{a}{2} \left[K - \sin\left(\frac{\pi}{2}K\right) \right]. \tag{19}$$

B. Front exponentiel. Dans la suite, le front exponentiel sera exprimé à l'aide de la relation (14). Introduisons, ici encore, le numéro d'ordre K de la réflexion à la place du temps considéré comme variable indépendante [voir relation (16)], alors:

$$U_{AK \text{ exp}} = 1 - e^{-\frac{L}{vT}K}.$$

Si l'on introduit la notation

$$\frac{a}{2} = \frac{L}{vT}. \tag{20}$$

alors le front exponentiel sera décrit par la relation

$$U_{AK\text{exp}} = 1 - e^{-\frac{a}{2}K} \quad (21)$$

où l'indice A désigne le point d'alimentation, l'indice K montre que la variable indépendante est le numéro d'ordre de la réflexion, tandis que l'indice exp. signifie le front exponentiel.

Avec l'utilisation de l'équation (8), l'introduction de la série $\sin\left(\frac{\pi}{2}K\right)$ permet aussi d'obtenir deux sommes qui, sur la base des relations (40) et (45) de l'annexe, donnent la relation ci-dessous exprimant la tension de l'objet essayé:

$$U_{BK\text{exp}} = 1 - \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \sin\left(\frac{\pi}{2}K\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) - \frac{2e^{+\frac{a}{2}}}{e^a + 1} \left[e^{-\frac{a}{2}K} - \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) \right] \quad (22)$$

C. Front cosinusoidal. En transformant la formule (9) du front comme nous l'avons fait pour les courbes linéaire et exponentielle, la nouvelle fonction prendra la forme

$$U_{AK\text{cos}} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{a}{2}K\right) \right] \quad (23)$$

où

$$\frac{a}{2} = \frac{\omega L}{v} \quad (24)$$

D'après (8), la tension de l'objet essayé sera, après substitution de l'équation (23):

$$U_{BK\text{cos}} = \left\{ 1 - \cos\left[\frac{a}{2}(K-1)\right] \right\} - \left\{ 1 - \cos\left[\frac{a}{2}(K-3)\right] \right\} + \\ + \left\{ 1 - \cos\left[(K-5)\frac{a}{2}\right] \right\} \dots$$

Ici, la série doit être complétée par $\cos\left(\frac{\pi}{2}K\right)$.

Après transformations, la tension de l'objet pourra s'écrire sous la forme suivante:

$$U_{BK\text{cos}} = \sum_{x=0}^{x=K-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{x=K-1} \cos(A_1x + b) - \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{x=K-1} \cos(A_2x - b).$$

A l'aide des formules (43), resp. (41) de l'annexe, la relation ci-dessus prendra, après des transformations trigonométriques assez longues, la forme plus simple:

$$U_{BK \cos} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} K \right) + \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} K \right) - \cos \left(\frac{\alpha}{2} K \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right]. \quad (25)$$

On se proposait de comparer la tension de l'objet en cas de fronts d'ondes différents. Avant de donner la solution générale de ce problème, illustrons les différences par un exemple numérique.

Exemple numérique. Soit $L = 27$ m, alors d'après les relations (18a), (20) et (24):

$$\left. \begin{aligned} \text{front lin.: } \frac{a}{2} = \frac{L}{H} = \frac{L}{300} &= 0,0033 \cdot L = 0,0033 \cdot 27 = 0,09 \\ \text{front exp.: } \frac{a}{2} = \frac{L}{v \cdot T} = \frac{L}{300 \cdot 0,365} &= 0,00915 L = 0,00915 \cdot 27 = 0,247 \\ \text{front cos.: } \frac{a}{2} = \frac{\omega L}{v} = \frac{\pi \cdot L}{1,356 \cdot 300} = \frac{\pi}{408} L &= \frac{\pi}{408} 27 = 0,208 = (11,9^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Et les fonctions à représenter:

$$\begin{aligned} U_{BK \text{ lin}} &= 0,09 \left[K - \sin \left(\frac{\pi}{2} K \right) \right] \\ U_{BK \text{ exp}} &= 1 - \frac{e^{0,494} - 1}{e^{0,494} + 1} \sin \left(\frac{\pi}{2} K \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} K \right) - \frac{2 \cdot e^{0,247}}{e^{0,494} + 1} \left[e^{-0,247 \cdot K} - \cos \left(\frac{\pi}{2} K \right) \right] \\ U_{BK \cos} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} K \right) + \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} K \right) - \cos (11,9^\circ K)}{\cos 11,9^\circ} \right]. \end{aligned}$$

La tension de l'objet en fonction du temps est représentée, pour les différents fronts d'ondes, sur la figure 5. La courbe 1 montre la tension de l'objet en cas de front linéaire, la courbe 2 en cas de front exponentiel, et la courbe 3 en cas de front cosinusoidal. La courbe 4, construite d'après la tension de sortie du générateur de chocs, se rapporte également à 27 m. Cette dernière courbe a été construite à l'aide de la formule générale (8). Comme point de départ, on utilise la courbe 4 de la figure 4, agrandie d'après l'oscillogramme 1. La figure 6 montre la marche de la construction, dont nous reparlerons plus loin.

D'après la relation (3), la fréquence de l'oscillation est, dans chaque cas:

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{300}{4 \cdot 27} = 2,78 \text{ MHz}$$

et la durée d'un parcours:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f} = \frac{1}{4 \cdot 2,78} = 0,09 \mu s.$$

Les valeurs maxima des amplitudes d'oscillations sont données par le tableau I ci-dessous:

Tableau I

Onde	Erreur max h %
lin.	9,0
exp.	25,6
cos.	2,0
réelle	9,0

Il ressort déjà de ce tableau que le front réel ne saurait être remplacé par la courbe exponentielle, car celle-ci conduirait à une surestimation considérable de l'erreur. La construction des courbes fait également voir qu'à l'exception du front cosinusoidal, l'erreur maximum se produit généralement à la première crête de l'oscillation. D'autres conclusions pourront être tirées après la construction de courbes d'erreur complètes.

Quant à la courbe construite d'après la tension aux bornes du générateur (figure 5, courbe 4), nous ne l'avons représentée sur la figure 5 que pour être plus complet. La marche de la construction a été la suivante. La tension aux bornes du générateur a été agrandie sur la figure 6, suivant l'oscillogramme 1. Sur la base de $\Delta t = 0,09 \mu s$, nous avons inscrit les ordonnées $K \cdot \Delta t$, qui sont, successivement, $U_0, U_1, U_2 \dots U_K$.

En mesurant les ordonnées, on aura la tension correspondant par ex. à la valeur d'abscisse de $K = 7$, d'après la formule (8):

$$U_{B7} = 2[U_6 - U_4 + U_2 - U_0] = 2[67 - 44 + 11] = 68.$$

De même, en calculant pour chaque valeur de K , la valeur correspondante de U_{BK} , on obtient l'oscillogramme de la figure 6.

Confrontons-le à présent avec les résultats (oscillogrammes 1, 2 et 3) des mesures effectuées de la même distance (27 m). On voit que la courbe construite et l'oscillogramme montrent une concordance absolue, ce qui justifie entièrement le procédé de calcul et de construction graphique utilisé pour la figure 6. Le point de départ de la construction (oscillogramme 1) était la courbe du générateur chargé du conducteur. On voit donc que l'erreur produite par l'omission de l'impédance intérieure du générateur ($Z_1 = 0$) peut être éliminée, si l'on part de la courbe du générateur ayant une charge moyenne.

E. Détermination de la limite d'erreur

La différence entre la tension du générateur et celle de l'objet en essai, c'est-à-dire l'erreur due aux réflexions, nous est fournie par la relation ci-dessous:

$$h\% = \frac{U_{AK} - U_{BK}}{U_{AK\max}} 100\%.$$

Étant donné que l'amplitude de la tension — $U_{AK\max}$ — a été, jusqu'à présent, considérée comme unitaire, la formule d'erreur sera:

$$h\% = (U_{AK} - U_{BK}) 100. \quad (27)$$

En cas de front linéaire, d'après les relations (18) et (19):

$$\left. \begin{aligned} h_{\text{lin}} &= \frac{\alpha}{2} K - \frac{\alpha}{2} \left[K - \sin^2 \frac{\pi}{2} K \right] = \frac{\alpha}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} K \right) \\ h_{\text{lin}}^{\circ} &= \frac{\alpha}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} K \right) \cdot 100 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

En cas de front exponentiel et cosinusoidal, la formule d'erreur sera, d'après^s les relations (21) et (22), resp. (23) et (25):

$$h_{\text{exp}}^{\circ} = \left\{ \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} + 1} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} K \right) + \frac{1 - 2^{\frac{\alpha}{2}} + e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} K \right) - e^{-\frac{\alpha}{2} K} \right] \right\} 100 \quad (29)$$

$$h_{\text{cos}}^{\circ} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} K \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} K \right) \right] 100\% . \quad (30)$$

Sous limite d'erreur, on entend la valeur à laquelle l'erreur donnée par les formules (28), (29) et (30) reste inférieure, ou qu'elle atteint tout au plus.

Pour le front linéaire, l'erreur maximum est évidemment fournie par la limite d'erreur

$$HK_{\text{lin}}' = \frac{\alpha}{2} \cdot 100 \quad (31)$$

correspondant aux réflexions en nombre pair $\left[K = 2n; \sin \left(\frac{\pi}{2} K \right) = \pm 1 \right]$.

C'est l'erreur maximum sur le front. Cependant, une erreur plus grande peut se produire sur la queue d'onde. Lors de la construction de la courbe de correction — dont nous reparlerons bientôt, — il devient visible que l'erreur sur la queue peut être le double de celle exprimée par la relation (31). La limite d'erreur du front linéaire sera, par conséquent:

$$HK_{\text{lin}} = \alpha \cdot 100\% . \quad (32)$$

Ce phénomène s'explique par le fait, que le front est décrit par la courbe $U = c \cdot t$, et la queue par la courbe $U = K$, de sorte qu'au point T_h la courbe présente une brisure. A cause de celle-ci, l'erreur sur le front peut doubler sur la queue de l'onde.

Pour le front exponentiel, l'erreur est décrite par la relation (29). Ici, l'équation (29) devra être distinguée selon que K est pair ou impair, de la façon suivante:

$$\left. \begin{array}{l}
 1. K = 2n \quad n = 2m \quad K = 0, 4, 8, 12 \dots \\
 2. K = 2n + 1 \quad n = 2m \quad K = 1, 5, 9, 13 \dots \\
 3. K = 2n \quad n = 2m + 1 \quad K = 2, 6, 10, 14 \dots \\
 4. K = 2n + 1 \quad n = 2m + 1 \quad K = 3, 7, 11, 15 \dots
 \end{array} \right\} (33)$$

Les formules d'erreur, décomposées en vertu de ce qui précède, sont contenues dans le Tableau II ci-dessous:

Tableau II

No d'ordre	K	n	h_{exp}
1	2n	2m	$\frac{1 - 2e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}K}\right)$
2	2n + 1		$\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} + 1} - \frac{1 - 2e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} e^{-\frac{\alpha}{2}K}$
3	2n	2m + 1	$-\frac{1 - 2e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} \left(1 + e^{-\frac{\alpha}{2}K}\right)$
4	2n + 1		$-\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} + 1} - \frac{1 - 2e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} e^{-\frac{\alpha}{2}K}$

Pour les valeurs positives de α , les coefficients des formules sont des nombres réels positifs. Si l'on en tient compte, il est facile de démontrer que l'erreur maximum, c'est-à-dire la limite d'erreur est donnée par la relation (4). Comme dans ce cas, la plus petite valeur de $K=3, 5, 7 \dots$ est $K = 3$, après sa substitution on obtient la limite d'erreur:

$$HK_{exp}^{\%} = \left(1 - 2e^{-\alpha} + e^{-\frac{3}{2}\alpha}\right) 100\%. \quad (34)$$

En décomposant de même la formule (30) du front cosinusoidal d'après les relations (33), on reçoit les formules d'erreur résumées au Tableau III.

Suivant ce tableau, la formule 2 donnera évidemment la valeur d'erreur maximum. De là, après substitution de $K = 0$, la limite d'erreur sera:

$$HK_{\cos 1} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} 100\%. \quad (35a)$$

Tableau III

No. d'ordre K	K	n	h_{\cos}
1	2n	2m	$\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} K \right) - 1 \right]$
2		2m + 1	$\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} K \right) + 1 \right]$
3	2n + 1	$\frac{2m}{2m + 1}$	$\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \cos \left(\frac{\alpha}{2} K \right)$

La limite d'erreur ainsi déduite suit bien, jusqu'à la valeur $\alpha/2 = \frac{\pi}{4}$ les valeurs d'erreur réelles. A partir de là, la formule

$$HK_{\cos 2} = \left[2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right] \cdot 100\% \quad (35b)$$

déduite empiriquement, peut servir de limite d'erreur. Au point $\alpha/2 = \frac{\pi}{4}$, celle-ci joint tangentiellement la courbe $HK_{\cos 1}$, et au point $\pi/2$, elle possède — quand l'amplitude est unitaire — une tangente horizontale.

Comme distance, la valeur $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$ signifie, d'après la relation (26) :

$$L = \frac{\alpha}{2} \frac{408}{\pi} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{408}{\pi} = 102 \text{ m.}$$

Les limites d'erreurs sont valables pour la longueur de front entière. Avec un temps de 1 μs pour le front linéaire, de 1,356 μs pour le front cosinusoidal, et de 2,04 μs pour le front exponentiel (après la figure 4), la longueur du front sera, d'après la formule $H = T_h \cdot v$, dans les trois cas :

$$H = 1 \cdot 300 = 300 \text{ m}; H_{\cos} = 1,356 \cdot 300 = 408 \text{ m};$$

$$H_{xp} = 2,04 \cdot 300 = 612 \text{ m}$$

Après substitution des valeurs de $\alpha/2$ des relations (26), on obtient les valeurs numériques des limites d'erreurs, synthétisées dans le Tableau IV.

Tableau IV

Forme du front	HK%	Remarques
Linéaire	$\frac{L}{1,5}$	
exponentielle	$100 - 200 e^{-0,0183L} + 100 e^{-0,02745L}$	
cosinusoidal	$\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{408}L\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{408}L\right)} 100\%$	$L \leq 102 m$
	$\left[2 \sin\left(\frac{\pi}{408}L\right) - 1\right] 100\%$	$L \geq 102 m$

Contrôlons les données de notre exemple numérique, avec les limites d'erreurs ci-dessus. Dans l'exemple, $L = 27 m$, ainsi

$$HK_{\text{lin}} = \frac{L}{1,5} = \frac{27}{1,5} = 18\%,$$

$$HK_{\text{exp}} = 100 - 200 e^{-0,494} + 100 \cdot e^{-0,74} = 100 - 122 + 47,8 = 25,8\%,$$

$$HK_{\text{cos}} = \frac{1 - \cos 0,208}{\cos 0,208} 100 = 2,2\%.$$

En confrontant ces résultats avec les données du Tableau I, on voit que les erreurs sont, dans chaque cas, inférieures à la limite.

Les courbes des limites d'erreurs selon le Tableau IV, sont représentées sur la figure 7. La courbe 1 montre la limite d'erreur du front linéaire, la courbe 2 celle du front exponentiel, et la courbe 3 celle du front cosinusoidal. A distance égale, on reçoit la plus grande erreur pour le front exponentiel. Avec le front linéaire, l'erreur devient moindre, et se montre la plus petite pour le front cosinusoidal. Par ex., à $L = 50 m$, $HK_{\text{xp}} = 45\%$, $HK_{\text{lin}} = 32,5\%$ et $HK_{\text{cos}} = 7,5\%$. La courbe 4 de la figure est celle de la limite d'erreur du générateur de chocs. Pour construire la courbe nous avons calculé, pour les différentes distances L , la fonction de tension-temps du point B (de la manière décrite à propos de l'exemple numérique du point D , où le calcul a été effectué pour $L = 27 m$), et représenté sur la figure 7 l'amplitude maximum sur la queue en fonction de la distance. La limite d'erreur du générateur de chocs se place, comme on voit, entre les courbes des fronts linéaire et cosinusoidal. Tout comme le front d'onde lui-même, la courbe d'erreur suit d'abord la courbe

d'erreur cosinusoidale, pour se rapprocher, aux plus grandes distances, de la courbe d'erreur exponentielle.

En comparaison, à $L = 50$ m, la limite d'erreur réelle donne une erreur de 27%.

Le front d'onde exponentiel présente donc une tension d'oscillation superposée excessive, même si l'onde mobile est d'ailleurs produite par un

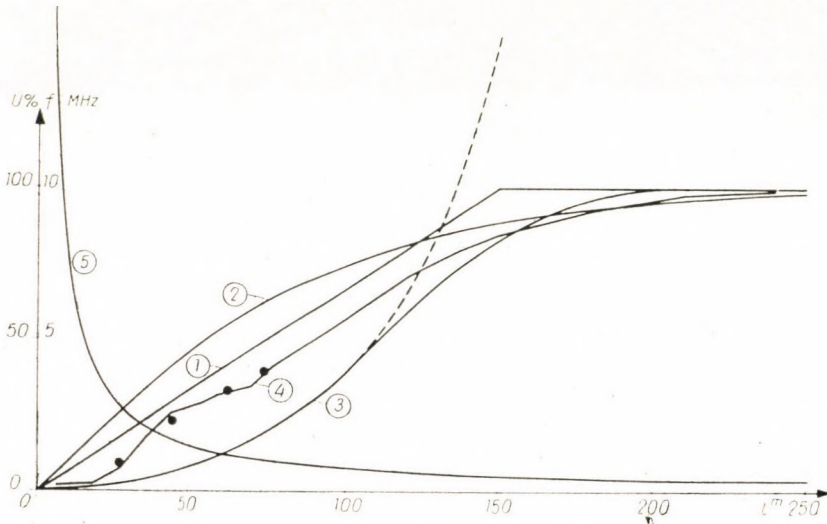


Fig. 7

générateur fournissant théoriquement une onde exponentielle de forme $U_L = U_0 \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$. Cela s'explique si l'on considère, que l'inductivité de la résistance de décharge et de la résistance d'amortissement du générateur — comme on le sait d'ailleurs de la littérature [4] — diminue fortement la raideur initiale de l'onde de choc et ajoute à la courbe exponentielle, concave par en dessous, une courte section convexe de faible raideur.

La courbe d'erreur du générateur réel suit d'autant plus fidèlement celle du front d'onde cosinusoidal, que la partie initiale de la courbe de tension de sortie est moins raide. La courbe 5 de la figure 7 représente la fréquence des ondes de tension de réflexion en MHz, en fonction de la distance L , sur la base de la relation (3).

F. Courbes de correction

Les limites d'erreurs exponentielles, linéaires et cosinusoidales que nous avons obtenues, sont contrôlées par les courbes de correction, tandis que la courbe d'erreur du front du générateur est contrôlée par des mesures. Sous

courbes de correction, on entend les erreurs se produisant effectivement en fonction de la distance, et atteignant tout au plus la limite d'erreur.

Les formules (28), (29) et (30) donnent les erreurs sur le front, tandis que les limites d'erreurs qui en sont déduites (Tableau IV) sont les enveloppes des erreurs maxima sur le front. Mais ce sont les erreurs maxima sur la queue d'onde qui nous intéressent. Celles-ci diffèrent des erreurs sur le front, parce que nous remplaçons la queue d'onde par la droite $U = 1$, de sorte qu'au

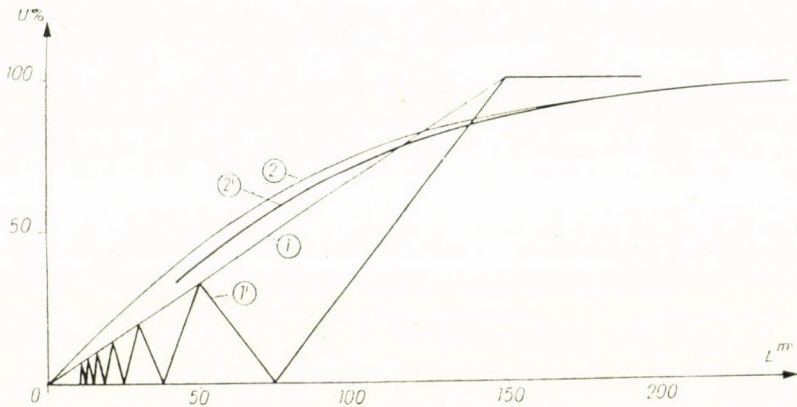


Fig. 8

point de jonction du front et de la queue, l'équation de la courbe présente une discontinuité mathématique. Aussi, l'erreur se produisant sur la queue ne saurait-elle être décrite par les équations déduites pour le front. Pour calculer l'erreur maximum sur la queue, nous reviendrons donc à l'équation fondamentale (8), valable pour une forme d'onde quelconque. Sur la queue d'onde, on remplace les ordonnées par une valeur 1, on calcule l'erreur maximum sur la queue pour plusieurs valeurs de L , et on la représente, de même, en fonction de L . Les courbes de correction ainsi calculées sont visibles sur les figures 8 et 9. La courbe de correction (figure 8, courbe 2') de la courbe exponentielle s'écarte à peine de la limite d'erreur (courbe 2). La différence entre les deux courbes tient à ce que la limite d'erreur a été construite d'après l'onde

$$U = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \text{ et la courbe de correction d'après l'onde } U = \frac{1}{\eta'} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

La courbe de correction du front linéaire (Figure 8, courbe 1') varie entre la limite d'erreur (ligne 1) et la valeur zéro. Si le nombre des réflexions contenues dans le front (300 m) est de 2, 6, 10, 14... (c'est-à-dire $L = 150, 50, 30, 21,4 \dots$ m), l'erreur sur la queue est égale à la valeur fournie par la limite d'erreur. Si le nombre des réflexions contenues dans le front est de 4, 8, 12, 16... (c'est-à-dire $L = 75, 37,5, 25, 18,75 \dots$ m), alors la valeur de l'erreur est zéro, c'est-à-dire l'oscillation ne se transmet pas à la queue d'onde.

La courbe de correction du front cosinusoidal est représentée sur la figure 9 (courbe 3'). Celle-ci varie encore entre la limite d'erreur et l'axe des abscisses. Elle rejoint la limite d'erreur (courbe 3) aux réflexions 4, 8, 12, 16... (rapporté à la longueur de front de 408 m, $L = 102, 51, 34,4, 25,5 \dots$ m), et l'axe des abscisses aux réflexions 6, 10, 14, 18... ($L = 68, 408, 29,1, 22,6 \dots$ m).

Les limites d'erreurs sont, en réalité, les enveloppes des courbes de correction des fronts linéaire et cosinusoidal. L'alternance des courbes de correc-

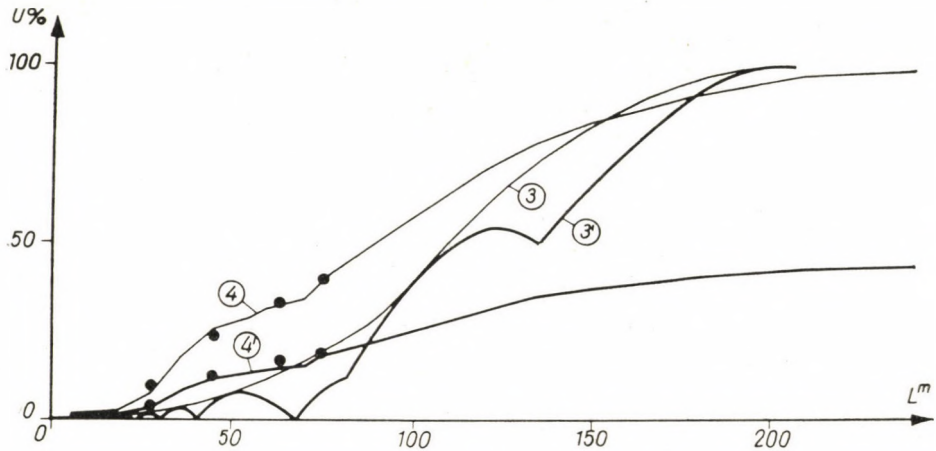


Fig. 9

tion entre la limite et l'axe des abscisses vient — comme nous l'avons déjà dit — de la discontinuité mathématique de l'équation analytique de l'onde et de la queue. Mais dans la réalité, une telle discontinuité mathématique est impossible, à cause des paramètres du circuit (inductivité, capacité). Le caractère alternant des courbes ne vient que de l'insuffisance de l'étude mathématique, de sorte que chez les fronts de *caractère* exponentiel, linéaire et cosinusoidal, les courbes de limite (Figure 7) donnent même les erreurs réelles avec une très bonne approximation, quand l'amortissement du conducteur est négligeable. Si l'amortissement n'est pas négligeable, les limites d'erreurs n'offrent une exactitude suffisante que pour les erreurs sur le front. Dans ce cas — si le facteur d'amortissement est connu ou estimable — la détermination suffisamment exacte des erreurs sur la queue nécessite une transformation des limites d'erreur, de la manière décrite à l'article *G* ci-dessous.

G. Interprétation des résultats de mesures

Le générateur de chocs utilisé était un générateur produisant des ondes d'une amplitude de 600 V, répétées à la fréquence de 50 ondes par seconde. La mesure des réflexions a été effectuée à l'extrémité d'un fil de 3 mm de diamètre, disposé à 1 m de hauteur au-dessus du sol, et à 27, 45, 63,5 et 75 m de distance du générateur de chocs. L'impédance d'onde du conducteur, obtenue par mesure et par calcul, avait une valeur allant de 400 à 500 Ohms.

Les résultats des mesures sont fixés par les tables d'oscillogrammes I et II. Les oscillogrammes se succèdent, pour toutes les distances, dans l'ordre suivant : tension de sortie du générateur, tension de réflexion à l'extrémité du conducteur (tension de l'objet en essai), et courbe superposée des deux tensions précédentes.

La courbe ayant servi de départ pour la construction de la courbe d'erreur du générateur est l'onde de tension — obtenue avec un conducteur long de 27 m — visible sur l'oscillogramme 1. Le mode d'interprétation des oscillogrammes est illustré par la construction de l'oscillogramme 9.

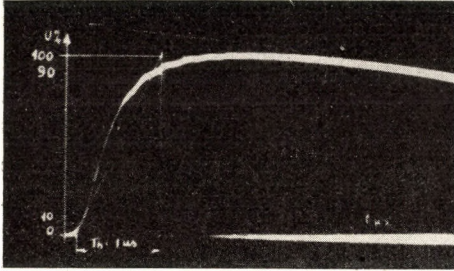
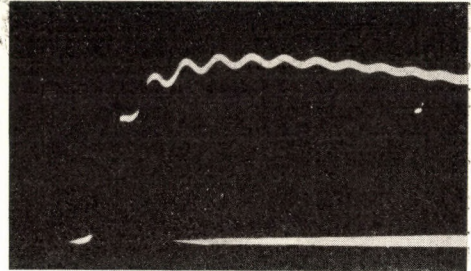
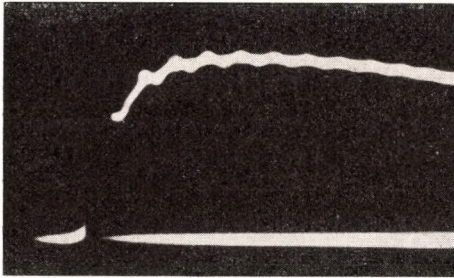
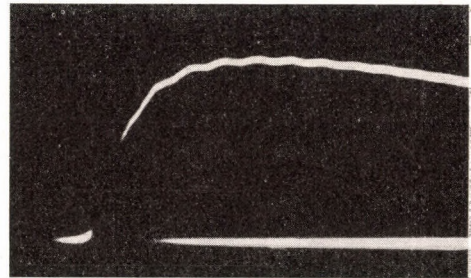
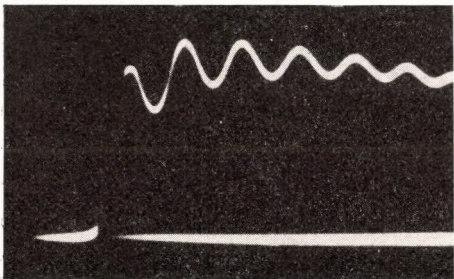
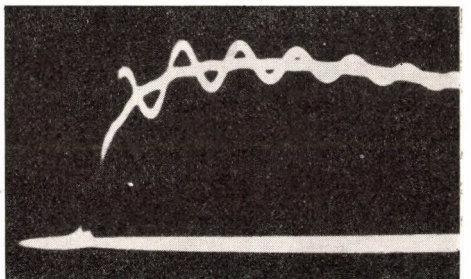
Les résultats des mesures sont résumés par le Tableau V.

Tableau V

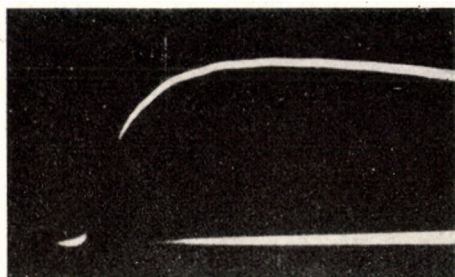
L^m	Erreur maximum, h%		Facteur d'amortissement
	sur le front	sur la queue	
27	9	3,5	0,39
45	23,2	11,3	0,485
63,5	32,5	16,0	0,49
75	39	18,6	0,475

La première colonne du tableau donne la longueur du conducteur, la seconde renseigne sur l'erreur maximum sur le front, la troisième donne l'erreur maximum sur la queue. L'erreur max. sur le front est donnée chaque fois par la première crête de l'oscillation. La dernière colonne fournit enfin le rapport des erreurs sur la queue et sur le front, c'est-à-dire l'amortissement du conducteur. Le facteur d'amortissement dépend peu de la longueur du conducteur, parce qu'en cas de conducteurs courts, l'onde parcourt plusieurs fois la ligne avant d'arriver à la crête, tandis que chez des conducteurs plus longs, le nombre des parcours est moindre, de sorte que le trajet effectué par l'onde (longueur du conducteur \times nombre des réflexions) sera, à peu de différences près, identique. Le facteur d'amortissement contient également l'amortissement du générateur de chocs. Le facteur d'amortissement moyen $\beta = 0,46$.

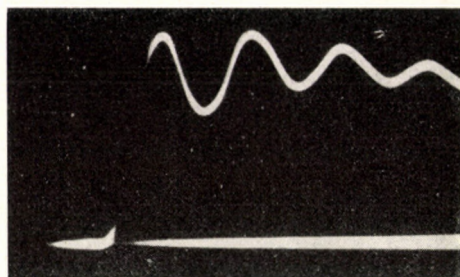
Oscillogrammes I

1. Tension de sortie, $L = 27$ m2. Tension de l'objet essayé, $L = 27$ m3. Tension de l'objet essayé superposée à la tension de sortie, $L = 27$ m4. Tension de sortie, $L = 45$ m5. Tension de l'objet essayé, $L = 45$ m6. Tension de l'objet essayé superposée à la tension de sortie, $L = 45$ m

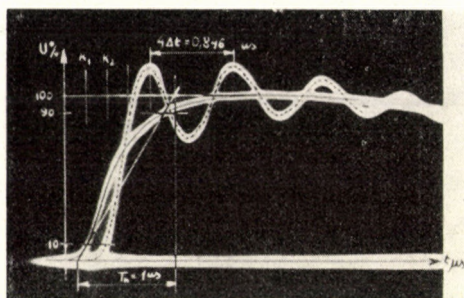
Oscillogrammes II



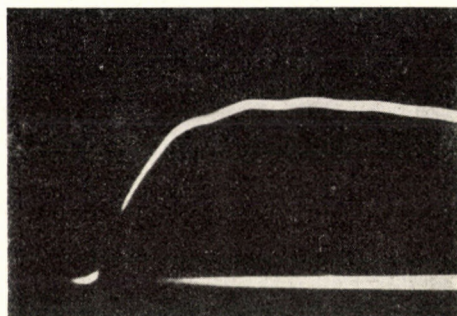
7. Tension de sortie, $L = 63,5 \frac{1}{2} \text{ m}$



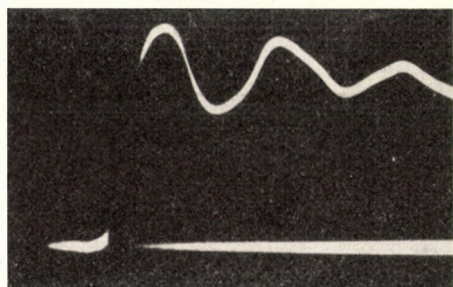
8. Tension de l'objet essayé, $L = 63,5 \text{ m}$



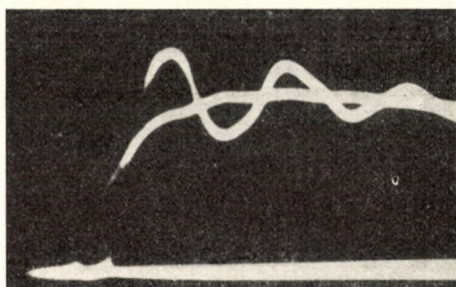
9. Tension de l'objet essayé superposée à la tension de sortie, $L = 63,5 \text{ m}$



10. Tension de sortie, $L = 75 \text{ m}$



11. Tension de sortie, $L = 75 \text{ m}$



12. Tension de l'objet essayé superposée à la tension de sortie, $L = 75 \text{ m}$

La limite d'erreur du générateur, construite sur la base de l'oscillogramme 1 (Figures 7 et 9, courbe 4) ne tient pas compte de l'amortissement du conducteur, il faut donc la comparer à l'erreur sur le front déterminée par nos mesures. En marquant, le long de la limite d'erreur, les quatre endroits de mesures (désignés par des points noirs sur les figures), on constate une concordance satisfaisante. Si on multiplie les ordonnées de la limite d'erreur par le facteur d'amortissement β , on obtient la courbe de correction de l'unité générateur-conducteur (Figure 9, courbe 4'), pleinement vérifiée par les erreurs maxima sur la queue (données par le tableau V), marquées par des points noirs sur la figure 9.

En définitive, dans un cas concret donné, le procédé à suivre est le suivant. En chargeant le générateur utilisé pour les mesures d'un conducteur de liaison à l'extrémité ouverte (fil, câble nu, câble ou tube métallique flexible), on relève la courbe de tension de sortie du générateur. Sur la base de l'oscillogramme on construit, à l'aide de la relation (8), la limite d'erreur du générateur en fonction de la distance. En déterminant de quelques mesures de réflexions le facteur d'amortissement, la limite d'erreur multipliée par ce dernier donne la courbe de correction, qui fournit déjà, avec une exactitude suffisante, l'erreur en fonction de la distance entre l'objet et le générateur de chocs, c'est-à-dire l'amplitude de l'oscillation superposée — produite par les réflexions — sur les bornes de l'objet essayé.

Si le facteur d'amortissement est connu, alors en le multipliant par les limites représentées sur la figure 7, on obtient des courbes fournissant l'erreur avec une exactitude suffisante même pour des fronts linéaires, exponentiels et cosinusoidaux, quand à défaut d'autres données, le front d'onde doit être remplacé par l'un des fronts mentionnés.

Une autre série de mesures se proposait d'examiner l'influence des objets en essai sur l'amplitude des réflexions à l'extrémité du conducteur. En appliquant, à l'extrémité d'un conducteur de 27 m, un sectionneur, un transformateur de courant et un parafoudre, les réflexions n'ont pas changé par rapport à l'extrémité ouverte. Le premier objet ayant modifié la réflexion, originellement de 4%, était un transformateur de tension de 10/0,4 kV et 80 kVA. Sous son influence, l'amplitude de la réflexion a augmenté à 5,2%; la fréquence n'a pas changé.

Étant donné que, pendant la durée de front, les objets essayés (même le transformateur) peuvent être remplacés par une seule capacité, nous avons par la suite relié à l'extrémité du conducteur une boîte de capacités en décade, et examiné les réflexions avec réglage continu de la capacité. Les résultats de nos mesures sont contenus dans le Tableau VI.

Tableau VI

C pF	Erreur, h % sur la queue	f MHz
0	4,00	2,68
100	5,55	2,68
200	6,60	2,60
500	8,60	2,40
700	9,40	2,20
1000	10,00	1,90
2000	11,00	1,20
5000	4,00	1,20
10000	3,30	1,20
20000	0	0
50000	0	0
100000	0	0

Selon le témoignage de ce tableau, la charge capacitive augmente d'abord la tension de réflexion (ce qui concorde avec les données connues de la littérature [5]). En cas de conducteurs d'une impédance d'onde $Z = 400-500$ Ohms, la charge capacitive est négligeable jusqu'à 100 pF env., et augmente l'erreur jusqu'à 2000 pF — où elle triple l'amplitude de l'oscillation superposée. A partir de 5000 pF, la charge capacitive commence déjà à diminuer l'amplitude de l'oscillation superposée, pour absorber complètement l'oscillation due à la réflexion au-dessus de 20 000 pF. La fréquence de l'oscillation est diminuée progressivement par la capacité.

Les mesures permettent de constater qu'à l'exception des transformateurs (y compris aussi les transformateurs de tension), la capacité des objets essayés est négligeable, et que l'on peut ne pas tenir compte de la contrainte supplémentaire qui en résulte. D'après Wellauer [6], la capacité remplaçant le transformateur est, pendant la durée de front des ondes mobiles transitoires:

$$C_H = \sqrt{CK}$$

où K est la capacité en série, et C la capacité en dérivation du transformateur. La valeur de C_H pouvant être considérée du point de vue du front d'onde, varie, toujours selon les données de Wellauer, de 50 à 200 pF, entre les limites de tension 15—220 kV et de puissance 5—50 MVA. Ces données montrent que les transformateurs eux-mêmes peuvent bien être considérés comme des impédances infinies, parce que même 200 pF augmentent peu la contrainte.

H. Conclusion

En cas de fronts d'ondes linéaires, exponentiel et cosinusoidal, le procédé présenté par l'auteur permet de déterminer l'amplitude et la fréquence de l'oscillation de tension — due à la réflexion — qui se produit sur les bornes de l'objet d'installation. L'amplitude et la fréquence sont déterminées en fonction de la distance entre la source de tension et l'objet essayé. Le procédé peut s'appliquer indifféremment aux ondes de tension produites par un générateur de chocs ou par un coup de foudre. Le remplacement du front par une courbe exponentielle donne des contraintes excessives par rapport à la réalité, de sorte que pour des coups de foudre proches, c'est le front linéaire, et pour des coups de foudre éloignés — en cas d'ondes mobiles transitoires arrivant par la ligne — c'est le front cosinusoidal qui fournit des résultats plus proches de la réalité. (Le choix judicieux du facteur de réflexion α_A rend également applicable le procédé à la solution d'autres problèmes. Par exemple, le choix $\alpha_A = 0$ nous met en présence du cas d'ondes mobiles transitoires arrivant de loin.)

A distance égale, l'oscillation est d'une amplitude d'autant plus faible que la raideur initiale de l'onde est plus petite.

Si la forme de l'onde mobile transitoire est connue, on peut partir du front réel au lieu des fronts linéaire ou exponentiel approchés, déterminer avec exactitude les oscillations, et construire la courbe de la limite d'erreur de l'installation.

Si on connaît l'amortissement du conducteur, on peut, en multipliant la limite d'erreur des fronts linéaire, exponentiel, cosinusoidal et réel par le facteur d'amortissement (équivalent essentiellement à l'amortissement sur la longueur de ligne correspondant au front d'onde), obtenir pour chaque front une courbe de correction, d'exactitude suffisante.

La capacité des objets essayés peut être négligée dans la plupart des cas, quant à leur effet produit sur l'oscillation.

L'impédance d'onde des fils en aluminium utilisés ordinairement comme conducteurs de liaison, varie entre 350 et 500 Ohms, et ne diffère donc pas sensiblement de celle des câbles aériens. Mais étant donné leur plus grande résistance (leur section plus petite), leur amortissement est bien plus grand que celui des câbles aériens.

ANNEXE

Pour résoudre le problème, il est nécessaire de connaître la somme de quelques séries trigonométriques. A l'aide du théorème d'Euler, ces séries peuvent être transformées en séries géométriques, et alors la sommation se fait au moyen des séries géométriques bien connues:

$$\sum_{x=0}^{x=K-1} q^x = 1 + q + q^2 + \dots + q^{K-1} = \frac{1 - q^K}{1 - q} \quad (36)$$

$$\sum_{x=0}^{x=K-1} x \cdot q^x = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + (K-1)q^{K-1} = \frac{q - K \cdot q^K + (K-1) \cdot q^{K+1}}{(1-q)^2} \quad (37)$$

Procédons d'abord à l'addition de la série

$$\sum_{x=0}^{x=K} \sin(ax + b) :$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=K} \sin(ax + b) &= \frac{1}{2i} \left[\sum_0^K e^{i(ax+b)} - e^{-i(ax+b)} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[e^{ib} \sum_0^K (e^{ia})^x - e^{-ib} \sum_0^K (e^{-ia})^x \right] \end{aligned}$$

compte tenu de l'équation (36):

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i} \left[e^{ib} \frac{1 - e^{ia(K+1)}}{1 - e^{ia}} - e^{-ib} \frac{1 - e^{-ia(K+1)}}{1 - e^{-ia}} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{(e^{ib} - e^{-ib}) - (e^{i(b-a)} - e^{-i(b-a)}) + (e^{i(aK+b)} - e^{-i(aK+b)})}{(1 - e^{ia}) \cdot (1 - e^{-ia})} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2i} \left[\frac{(e^{i[a(K+1)+b]} - e^{-i[a(K+1)+b]})}{(1 - e^{ia}) \cdot (1 - e^{-ia})} \right] = \\ &= \frac{\sin b - \sin(b-a) + \sin(aK+b) - \sin[a(K+1)+b]}{2(1 - \cos a)} \quad (38) \end{aligned}$$

Si $b = 0$

$$\sum_0^K \sin(ax) = \frac{\sin a + \sin(aK) - \sin[a \cdot (K+1)]}{2(1 - \cos a)} \quad (39)$$

Si $b = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_0^K \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) &= \frac{\sin \frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} K\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} (K+1)\right]}{2\left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} K\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} (K+1)\right]}{2} \quad (40) \end{aligned}$$

Étant donné que $\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(ax)$, les séries à cosinus peuvent s'écrire directement, par substitution de $b = c + \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum_0^K \sin\left(ax + c + \frac{\pi}{2}\right) &= \sum_0^K \cos(ax + c) = \\ &= \frac{\sin\left(c + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(c + \frac{\pi}{2} - a\right) + \sin\left(aK + c + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left[a(K+1) + c + \frac{\pi}{2}\right]}{2(1 - \cos a)} = \\ &= \frac{\cos c - \cos(c - a) + \cos(aK + c) - \cos[a(K+1) + c]}{2(1 - \cos a)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Si $c = 0$

$$\sum_0^K \cos(ax) = \frac{1 - \cos a + \cos(aK) - \cos[a(K+1)]}{2(1 - \cos a)}. \quad (42)$$

Si $c = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_0^K \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) - \cos \frac{\pi}{2}(K+1)}{2\left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) - \cos\left[\frac{\pi}{2}(K+1)\right]}{2}. \end{aligned} \quad (43)$$

La somme suivante est celle de la série à termes $e^{(bx-c)} \cdot \sin(ax)$

$$\begin{aligned} \sum_0^K e^{(bx+c)} \cdot \sin(ax) &= \frac{e^c}{2i} \left[\sum_0^K e^{x(ia+b)} - e^{-x(ia-b)} \right] = \\ &= \frac{e^c}{2i} \left[\sum_0^K \left[e^{(ia+b)x} - (e^{-(ia-b)})^x \right] \right] = \\ &= \frac{e^c}{2i} \left[\frac{1 - e^{(ia+b) \cdot (K+1)}}{1 - e^{(ia+b)}} - \frac{1 - e^{-(ia-b) \cdot (K+1)}}{1 - e^{-(ia-b)}} \right] = \\ &= \frac{e^c e^b \cdot (e^{ia} - e^{-ia}) + e^{b(K+2)} \cdot (e^{iaK} - e^{-iaK}) - e^{b(K+1)} \cdot (e^{ia(K+1)} - e^{-ia(K+1)})}{2i \left(1 - e^b(e^{ia} + e^{-ia}) + e^{2b} \right)} \\ \sum_0^K e^{(bx+c)} \sin(ax) &= \frac{\sin a + e^{b(K+1)} \cdot \sin(aK) - e^{bK} \sin[a(K+1)]}{1 - 2e^b \cos a + e^{2b}} e^{(b+c)} \end{aligned} \quad (44)$$

Si $a = \frac{\pi}{2}$; $b = \frac{a}{2}$; $c = -\frac{a}{2}K$, alors

$$\sum_0^K e^{-\frac{a}{2}(K-x)} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2} + e^{a/2 \cdot (K+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}K\right) - e^{a/2K} \sin\left[\frac{\pi}{2}(K+1)\right]}{1 - 2e^{a/2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + e^a} e^{-\frac{a}{2}(K-1)} = \frac{e^{-\frac{a}{2}(K-1)} + e^a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}K\right) - e^{a/2} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(K+1)\right]}{1 + e^a} \quad (45)$$

Enfin, formons encore la somme de la série à termes $x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

$$\sum_0^K x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2i} \sum_0^K \left(x \cdot e^{i\frac{\pi}{2}x} - x e^{-i\frac{\pi}{2}x}\right) = \frac{1}{2i} \left[\sum_0^K x \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^x - \sum_0^K x \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^x \right]$$

D'après la relation (37):

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - (K+1)e^{i\frac{\pi}{2}(K+1)} + Ke^{i\frac{\pi}{2}(K+2)}}{(1 - e^{i\frac{\pi}{2}})^2} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}} - (K+1)e^{-i\frac{\pi}{2}(K+1)} + Ke^{-i\frac{\pi}{2}(K+2)}}{(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}})^2} \right]$$

et, comme

$$\left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1 - 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\pi} = -2e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ comme } e^{i\pi} = -1, \text{ ainsi}$$

$$= \frac{1 - 2 + 2(K+1)e^{i\frac{\pi}{2}K} - 2Ke^{i\frac{\pi}{2}(K+1)} + 2 - 2(K+1)e^{-i\frac{\pi}{2}K} + 2K \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}(K+1)}}{4}$$

Donc:

$$\sum_0^K x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{(K+1) \sin\frac{\pi}{2}K - K \sin\left[\frac{\pi}{2}(K+1)\right]}{2} \quad (46)$$

L'auteur tient ici à exprimer ses remerciements aux dirigeants du Trust des Centrales Électriques, le directeur Gyula Hámor et l'ingénieur en chef dr. Elemér Hajdu, qui ont rendu possible l'achèvement et la publication du présent travail, ainsi qu'à son cher collègue István Hámos, ingénieur chef de groupe au Service de Protection contre les surtensions et de Contrôle de l'isolement, qui lui a prêté une aide précieuse lors du relevé des mesures.

LITTÉRATURE

1. BEWLEY, L. V.: *Traveling Waves on Transmission Systems*, New-York, John Wiley and Sons, 1951.
2. MSZ 4822-51: Lökésfeszültségvizsgálat (L'essai au choc. Norme hongroise.)
3. NAGY, G. Á.: A feszültséglökőhullámok, jellemzőik és leképzésük exponenciális görbékkel (Les ondes de tension de choc, leurs caractéristique et leur représentation par des courbes exponentielles.) *Elektrotechnika*, Budapest. T. LII, 1959. No 7.
4. HORVÁTH, T.: Lökésgerjesztők tervezésének elméleti és gyakorlati kérdései (Problèmes théoriques et pratiques du calcul des générateurs de chocs.) *Elektrotechnika*, Budapest. LI, 1958. No 3.
5. WITZKE, R. L.—BLISS, T. J.: Coordination of Lightning Arrester Location with Transformer Insulation Level. *A. I. E. E. Transactions* 69. He p., 1950.
6. WELLAUER, M.: *Einführung in die Hochspannungstechnik*. Verlag Birkhäuser. Basel—Stuttgart. 1954. pp. 214—239.
7. MSZ 4823-51. Feszültségmérés gömbszikraközzel. (Mesure de tension par éclateurs à sphères. Norme hongroise.)
8. MSZ 9249-56. Túlfeszültségevezető (Les parafoudres. Norme hongroise.)

RÉSUMÉ

On sait que lors des essais au choc, il se produit des réflexions sur le conducteur reliant le générateur de chocs à l'objet essayé. L'auteur présente une méthode permettant de suivre par le calcul, et par construction graphique, les oscillations dues aux réflexions pour les fronts d'ondes habituels (linéaire, exponentiel et cosinusoidal). La méthode graphique peut être généralisée pour n'importe quel front d'onde, donc aussi pour le front de l'onde produite par un générateur de chocs. L'auteur étudie aussi les erreurs de mesure produites par la partie étudiée du conducteur en fonction de la longueur de celui-ci, et fait connaître le mode d'établissement des corrections nécessaires. La méthode généralisée permet également la solution d'autres problèmes.

BERÜCKSICHTIGUNG DES EINFLUSSES DER ENTFERNUNG ZWISCHEN PRÜFLING UND GENERATOR BEI STOSSVERSUCHEN

G. Á. NAGY

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist bekannt, daß bei Stoßprüfungen im Leitungsabschnitt zwischen dem Stoßwellengenerator und dem Prüfling Reflexionen auftreten. Der Verfasser hat ein Verfahren ausgearbeitet, mit dessen Hilfe die zufolge der Reflexionen auftretenden Schwingungen für die üblichen Wellenstirnen (linear, exponentiell und cosinus-Form) rechnerisch und zeichnerisch verfolgt werden können. Die grafische Methode kann für beliebige Wellenstirnform — daher für irgendeine von einem Stoßwellengenerator ausgesendete Wellenstirn — verallgemeinert werden. Die Arbeit untersucht auch, wie groß die durch den Leitungsabschnitt verursachten Meßfehler in Abhängigkeit von der Leitungslänge sind und teilt das Verfahren für die Bestimmung der notwendigen Korrekturen mit.

Schließlich wird darauf hingewiesen, daß mittels Verallgemeinerung der Methode auch andere Probleme gelöst werden können.

CONSIDERATION OF THE DISTANCE BETWEEN THE TEST OBJECT
AND THE SHOCK GENERATOR IN SHOCK WAVE TESTS

G. Á. NAGY

SUMMARY

It is known that in shock wave measurements, reflexions occur in the line section between the shock generator and the test object. The author has worked out a method by which the oscillation arising with the usual wave fronts (linear, exponential and cosine fronts) in consequence of the reflexions can be traced by computation and also graphically. The graphical method can be generalized for any arbitrary form of wave front, thus for the wave front emitted by any shock generator. The paper also deals with the question of the measuring errors, as a function of line length, caused by the line section, and indicates the method for determining the necessary corrections.

Finally the author points out that with this method other problems can be solved too.

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ РАСТОЯНИЯ МЕЖДУ ИСПЫТУЕМЫМ ПРЕДМЕТОМ
И ГЕНЕРАТОРОМ ИМПУЛЬСНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ
ИМПУЛЬСНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ

Г. А. НАДЬ

РЕЗЮМЕ

Известно, что при измерениях импульсным напряжением на участке между генератором импульсных напряжений и испытуемым предметом возникают рефлексии. Автором разработан метод, при котором для обычной восходящей части волны (линейные, экспоненциальные и косинусные восходящие части) колебания, возникающие вследствие рефлекса, можно проследить математически или же графически. Графический метод может быть обобщен для любой восходящей части, следовательно и для восходящей части волны от некоторого генератора импульсного напряжения. В работе рассматривается также величина ошибок измерения от участка проводки в функции длины проводки, далее описывается метод определения необходимых коррекций.

Наконец, говорится о том, что обобщив метод, можно применять его также и для решения других проблем.

THE LIMIT HEIGHT OF CAPILLARY RISE IN CAPILLARY TUBES OF VARIABLE SECTIONS

(WITH REFERENCE TO MULTI-LAYER SOIL AND OTHER SUBSTANCES OF CAPILLARY CHARACTER)

F. BROZÁK

HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received June 28, 1961]

Hereunder will be discussed the derivation from the rule of maximum theoretical water level rise occurring in capillary tubes of variable sections.

On basis of the analogy, however, the conclusions drawn could also be extended to superimposed substances of different capillary absorbtivity and could be applied to soils of mixed stratification as well.

The employment of the physical rule is particularly useful in the case of the latter, for when frost testing pavements and on the application of reclaiming layers, or, for instance, in case of foundations of embankments on groundwater terrain, it is one of the most important tasks of the designer to determine the extent of the full rise from the open water surface in the case of multi-layer soils.

Without the physical rule, this task cannot be solved economically or with the required certitude. Nor could a uniform practice in this line be established: the designers had made their decisions on basis of practical experience or had employed functions, plotted from experimental results. These, however, were valid within certain limits only.

Thus, for instance, the following relation was used for determining the rise in 1000 hours:

$$H = a \cdot t^b$$

where H is the rise, a and b are the constants, depending from the substance and representing a value lower than the unit, and t standing for the time of the rise. Theoretically, this formula is incorrect, because on basis of same, during an infinite time the rise must also be infinite.

The aim of the present study is not to investigate either the essence of capillary action or the time process of the rise, nor does it intend studying all the factors influencing them: it deals solely with the difference prevailing between the play of forces in capillary tubes of constant and variable sections. For the sake of simplicity, only forces working in the closed capillary zone, are going to be discussed.

By way of an introduction, let a brief account be given on some of the known characteristics of the capillary phenomenon.

The main factors of capillary rise are the following: the substance of the liquid, the behaviour of the gases absorbed in it depending on temperature and pressure, the size of the capillary tube, its material, rate of impurity, etc.

The ultimate reason of the capillary rise is unknown. Only one thing can be taken for granted, namely that the rise is called forth by the two-way stress acting on that surface of the liquids which is in contact with the air. The surface of the liquid acts as if it were an elastic film; its thickness is very slight, in the case of water, for instance, it is but 10^{-7} cm. The stress acts perpendicularly upon the sectional area of the film.

The rising surface of the liquid in the capillary tube takes on a meniscus shape which inclines towards the wall of the tube at an angle of α . (The value of the angle depends on the material, respectively, substance of the tube wall and of the liquid, as well as on the rate of impurity in the tube.)

The upward perpendicular resultant of the two-way stresses "n" working on the surface of the meniscus, is:

$$V = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n \cdot \cos \alpha.$$

Contrary to this force, actuating upward, works the weight of the water column which is suspended onto the meniscus acting as an elastic film, and there is evenly distributed. Its value is:

$$P = r \cdot \pi \cdot \gamma \cdot h.$$

The capillary rise lasts until the lifting force "V" is counterbalanced by the force of gravity "P". The state of equilibrium is achieved at "h" height:

$$V = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n \cdot \cos \alpha = P = r^2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot h.$$

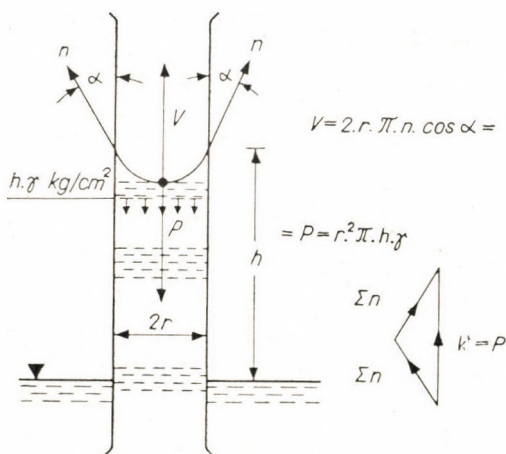


Fig. 1

From this equality the value of "h" rise can be easily computed: $h = 2 \cdot n \cdot \cos \alpha / r$.

It is to be pointed out, however, that the above refers to theoretical conditions only.

The equilibrium of the forces working in a capillary tube of variable section

What is the state of equilibrium in the case of a tube composed of pipe lengths of different sections like, where the weight of the water column changes in each pipe length?

According to Fig. 2 the forces acting upon the cross section of identical "F" area of the two different vessels, are of the same magnitude: $P = p \cdot F =$

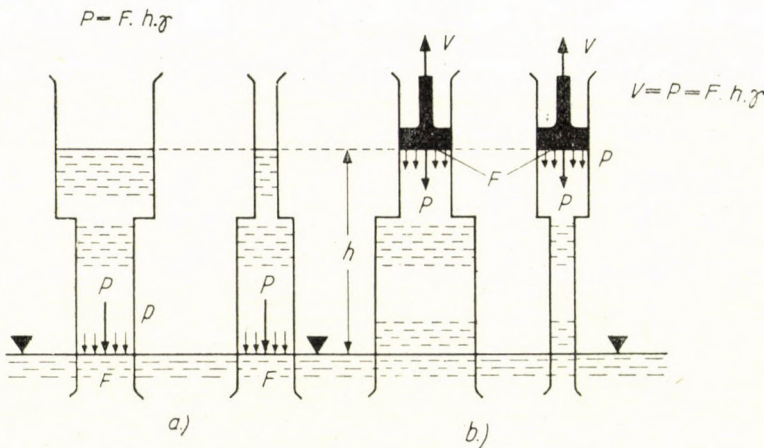


Fig.2

$= h \cdot F \cdot \gamma$, because, as it is generally known from the basic rule of hydraulics, the force "p" acting on the surface unit is a function of the height and not that of the full water weight.

If, according to Fig. 2 the tension is subjected to investigation instead of the compressive force, the same result will be arrived at: the full tension acting downward upon the plunger is: $P = p \cdot F = h \cdot F \cdot \gamma$. At rest, this force is counterbalanced by the upward force $V = P$. Force "P" shows no change whatsoever by a tube having two different lower pipe-length.

If, in the steps to follow, the plunger and the "V" force acting on same, are substituted by the elastic film and by the "V" upward perpendicular resultant of the two-way stresses prevailing on it, an explanation for the equilibrium of those forces will be got, which are also present in a capillary tube of intermittently variable sections.

In view of the fact that the force $P = F \cdot h \cdot \gamma$ having come into existence through the water column of "h" height at rest, does not change even if the tube cross section changes regularly or irregularly below the section of "2r" diameter, the state of equilibrium $P = V$ will not change either, so that there is no reason why "h" height should be changed.

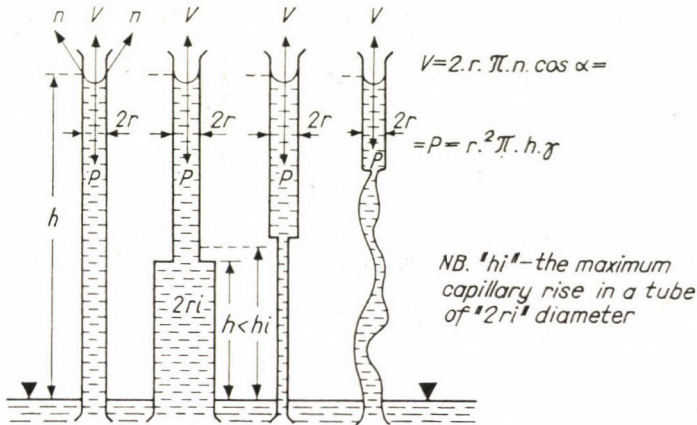


Fig. 3

The maximum capillary rise in stratified soils

It is a known fact, that the capillary ducts of granular soils are created by the gaps of the grains which are in contact with each other through punctual surfaces. In this case, capillary tube diameters are substituted by the distances between the adjacent contact points. Their dimensions form a statistical set with varying limits, according to the type of the soil.

From among the gap sizes, it is obvious that the group of the largest ones which form a proper coherent chain would determine the capillary rise. The sizes of this gap group are determined by the following factors:

1. The grain sizes of those smallest fractions of the soil which are present in a quantity great enough to form a consistent structure. In the case of closely graded soils, the capillary structure is established by several fractions; with soils of uneven grain size distribution, as for instance, in the case of quicksand, it is developed by one or two groups only.

An extremely distorted example may give an idea on the development of the consistent structure:

In the loosest set of regular spheres of 1 mm diameter, i.e. by spheres arranged in rows of 90° orientation, the distance of the contact points, at the same time representing the maximum standard group of gaps, has a

characteristic size of 1 mm. In the case of the most compact set of spheres, arranged in rows of 60° setting, this size is 0.5 mm.

This situation remains unchanged from the capillary point of view even in that case when, for instance, 1 piece 10 mm \varnothing and 10 pieces 0.1 mm \varnothing spheres are going to be embedded between each tenthousand spheres of 1 mm diameter, nor will there be any change if the 1 mm spheres providing a consistent structure are *within* the set of the 10 mm spheres.

In fact, the number of grain arrangement combinations are infinite, but the gap sizes determining the height of the capillary rise develop according to statistical averages, in accordance with the rule of the large numbers and observing the rule of central limit distribution. This is, among others, proved by the deviations to be seen in capillary rise tests.

2. The second factor in the development of the standard group of gaps is the same substance degree of compactness. On the effect of compaction it is not only the average of the gaps which is reduced; the number of the contact points will also be increased.

3. The third factor responsible for developing the gap average is the specific shape factor of the grains:

$$v = F/V,$$

i.e. the grain surface for the unit of the grain volume. By the sphere this is the smallest. The higher is the “ v ” factor, the lower is the gap size average. (The grain volume and gap factor of the compared substances are identical.)

Summing up the aforementioned: the size range of the grain gaps determining the extent of the capillary rise is the function of the grain diameters, of the compactness and of the specific shape factor.

$$d_m = f_1(d) \cdot f_2(e) \cdot f_3(v).$$

Every homogenous type soil has a characteristic “ d_m ” gap size group of its own, which — taking all the other factors into consideration influencing capillarity with “ η ” collective factor — determines the total “ h ” capillary rise:

$$h = f(\eta \cdot d_m).$$

For each soil type we can find an “ideal” capillary tube of “ δ_m ” diameter and having a constant cross section, which results in the same “ h ” rise:

$$\delta_m = \varphi(\eta \cdot d_m).$$

The “ δ_m ” size of the substituting capillary tube varies according to soil types, and thus the theoretical, simplified model of stratified soils can be assumed as a capillary tube composed of pipe length of variable sections. Since, in principle on basis of the prevailing analogy, the conclusions of the

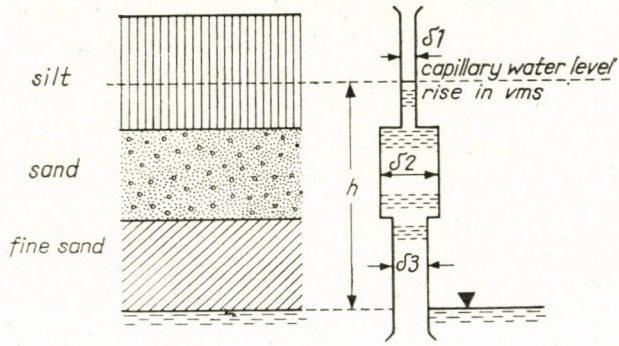


Fig. 4

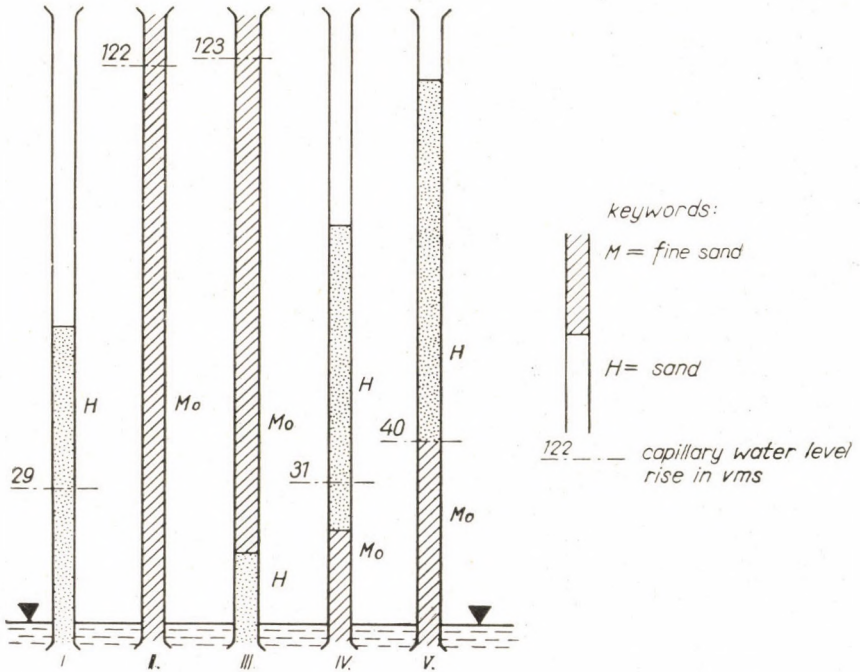


Fig. 5

former chapter on capillary tubes of variable sections apply to this case too, the final conclusion can be simply and easily drawn:

If layers of different capillary qualities are inserted into a homogenous layer, the original maximum capillary water level remains unchanged, provided, of course, that the own “ h_i ” maximum capillary rise of all the lower layers reaches the layer above it, i.e. the rise is not discontinued in any of the layers.

In other words:

In the case of soils of variable stratification, the theoretical maximum capillary rise is identical with the maximum capillary rise in the topmost layer, provided the maximum (own) capillary rise of all the lower layers reaches the layer above it.

To demonstrate the above conclusions, laboratory experiments were carried out with desilted sand and with fine sand. Apart from some unavoidable deviations, the tests have proved the above conclusions as being correct.

In the tube numbered I filled with sand only, the rise was 29 cm. In tube No. II, filled with fine sand, the rise was 122 cm. In the upper fine sand layer of tube III, the rise amounted to 123 cm, i.e. it was identical with the rise of the pure fine sand. In tube IV, the water level stopped at 31 cm. in the upper sand layer, i.e. at the same height as in tube I. In tube V, which was filled with fine sand up to 40 cm. and had sand placed above it, the water level stopped at the border-line of the two substances with a sharp edge and though the selected 40 cm limit hardly exceeding the maximum (30—36 cm.) absorbing power of the sand, not the slightest wetting could be seen among the lowest grains of the sand layer. (The figure illustrates such values as correspond to a 1000 hour rise.)

REFERENCES

- BENDEL: *Ingenieurgeologie*, Springer Verlag, Wien, 1948.
JÁKY, J.: *Talajmechanika (Soil Mechanics)* Kir. M. Egyetemi Nyomda, Budapest, 1944.
KÉZDI, Á.: *Talajmechanika (Soil Mechanics)* Tankönyvkiadó Vállalat, 1960, 1, Budapest.
SCHULTZE—MUHS: *Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten*, Springer Verlag, Berlin, 1950.
SZÉCHY, K.: *Alapozás (Foundation)* T. I. M. No. 6. Budapest, 1961.

SUMMARY

On frost tests made on pavements as well as on the foundation works of embankments or buildings, it is of paramount importance that the maximum theoretical water level rise in multi-layer soils should be precisely determined.

When investigating the physical rule, the first stage is, from the point of view of capillary rise, that the soil of different stratification can be substituted by a capillary tube consisting of pipe length of variable sections. The sections have the same raising power as the substance of the layer substituted.

Comparing the state of equilibrium of the capillary forces which is present in a capillary tube of variable section with the plays of forces taking place in a tube of constant section it becomes obvious that the position of the upward resultant of the two-way stresses appearing on the surface of the liquid and the position of the equilibrium of the weight of the liquid — obtained by the achievement of the maximum rise — will by no means be influenced by the fact that the lower section of the tube of constant section is widened or narrowed.

Applying this conclusion, which is based on the fundamental rules of hydraulics to multi-layer soils, it is apparent that in superimposed strata the final height of the capillary rise is determined by the capillary characteristics of that topmost stratum which still has a capillary tension.

The above conclusions have also been confirmed by tests.

DER GRENZWERT DER KAPILLARASZENSION IN KAPILLARRÖHREN VON VERSCHIEDENEM QUERSCHNITT

F. BROZÁK

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Untersuchung der Frostgefährdung von Straßendecken, oft auch bei der Gründung von Dämmen oder Bauwerken ist die Bestimmung der theoretisch größtmöglichen kapillaren Wasserstandserhöhung in mehrschichtigen Böden von entscheidender Bedeutung.

Bei der Untersuchung des physikalischen Gesetzes kann — als erster Schritt — vom Gesichtspunkt der Kapillaraszension aus, der aus verschiedenen Materialien geschichtete Boden durch eine Kapillare ersetzt werden, die aus Abschnitten von verschiedenem Querschnitt besteht, welche einzelnen Abschnitte das gleiche Hubvermögen haben wie das Material der durch sie ersetzten Schicht.

Wenn die Gleichgewichtslage der Kapillarkräfte in einer Kapillare mit wechselndem Querschnitt mit den Kräftespiel in einer Kapillare von konstanten Querschnitt verglichen wird, so stellt sich heraus, daß bei Gleichgewicht zwischen der nach oben gerichteten Resultierenden der auf der Flüssigkeitsoberfläche in zwei Richtungen auftretenden Zugkräfte und dem Flüssigkeitsgewicht — das bei Erreichung der maximalen Steighöhe eintritt — sich nichts ändert, wenn sich der untere Abschnitt der Röhre mit konstantem Querschnitt verengt oder erweitert.

Wenn diese auf den Elementargesetzen der Hydraulik beruhende Feststellung auf mehrschichtige Böden angewendet wird, so folgt, daß das endgültige Ausmaß der kapillaren Steighöhe in übereinandergelagerten Schichten von den kapillaren Eigenschaften der obersten Schicht bestimmt wird, die noch kapillare Hubkraft hat.

Das abgeleitete Gesetz wurde auch durch Versuche bestätigt.

LA VALEUR LIMITE DE L'ASCENSION CAPILLAIRE DANS LES TUBES CAPILLAIRES DE SECTION VARIABLE

F. BROZÁK

RÉSUMÉ

A l'examen du risque de gel des revêtements de la route, et souvent aussi à la fondation des ouvrages et remblais, la détermination de la montée capillaire théorique maximum du niveau d'eau dans les sols stratifiés présente une importance primordiale.

A l'analyse de la loi physique, le sol stratifié composé de matériaux divers peut être remplacé, en première approximation et du point de vue de l'ascension capillaire, par un tube capillaire formé de parties de sections différentes, lesquelles ont le même pouvoir d'élévation que le matériau de la couche remplacée.

La position d'équilibre des forces capillaires dans le tube de section variable est comparée au système de forces dans un tube capillaire de section constante. Il apparaît alors que la position d'équilibre de la résultante, dirigée vers le haut, des forces de traction à deux sens qui se produisent à la surface du liquide, et la position d'équilibre du poids du liquide, correspondant à l'ascension maximum de ce dernier, ne changent aucunement quand la partie inférieure du tube de section constante est rétrécie ou élargie.

Cette constatation repose sur les lois élémentaires de l'hydraulique. De son application aux sols stratifiés il découle, que la hauteur extrême atteinte par l'ascension capillaire dans les couches superposées, sera déterminée par les caractéristiques capillaires de celle des couches, située le plus en haut, qui possède encore des forces de traction capillaire.

La loi déduite a été aussi confirmée par les essais faits par l'auteur.

ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ В КАПИЛЛЯРНЫХ ТРУБКАХ ПЕРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ

Ф. БРОЗАК

РЕЗЮМЕ

При испытании подверженных действиям заморозков дорожных покрытий, далее часто при фундаментировке насыпей или сооружений решающую роль играет определение теоретически наибольшего капиллярного подъема уровня воды, имеющего место в многослойных грунтах.

При исследовании физического закона сначала грунт, напластованный из различных материалов, с точки зрения капиллярного повышения уровня можно заменить капиллярной трубкой, состоящей из участков с различным сечением, отдельные участки которой обладают такой же подъемной способностью, как и материал замещенного слоя.

Сравнивая равновесное положение капиллярных сил, возникающих в капиллярной трубке переменного сечения, с работой сил, имеющей место в капиллярной трубке неизменного сечения, выясняется, что направленная вверх результирующая двухсторонних тяговых усилий, возникающих на поверхности жидкости, и вес жидкости на равновесном положении (что имеет место при достижении максимального повышения) не изменяется, если нижний участок капиллярной трубки неизменного сечения расширяется или же сужается.

Относя определение, основывающееся на элементарных законах гидравлики, к многослойным грунтам, следует, что конечная высота капиллярного повышения в располагающихся друг над другом слоях определяется капиллярными свойствами того расположенного на самом верху слоя, который еще располагает капиллярным тяговым усилием.

Выведенный закон подтверждается также проведенными опытами.

О ВЫБОРЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ МОЩНОСТИ ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Я. ЗАМБО

ЧЛ. КОРР. АН. ВЕНГРИИ, Д-Р ТЕХ. НАУК

[Поступило 29-го августа 1961 года]

При выборе производственной мощности горных предприятий можно использовать методы математического анализа. Исходим из принципа, что производственная мощность оптимальна, если связанные с ней удельные расходы минимальны. Конечно обязательным требованием является то, чтобы формирование этих расходов можно было математически изобразить в функции производственной мощности.

Исходим из предположения, что количество выдаваемых на гора ископаемых (Q) уже определено заранее одним из способов оценки размеров залежи полезных ископаемых. Таким образом, границы разработки залежи также запроектированы заранее.

Заводские производственные расходы можно разбить на две части. Одна часть изменяется пропорционально производственной мощности, а другая часть является относительно постоянной. Первая не влияет на производственную мощность, а удельное значение второй части расходов изменяется по гиперболе в функции производственной мощности.

Капитальные расходы в соответствии с возрастанием мощности также показывают тенденцию возрастания. Поскольку количество выдаваемых на гора ископаемых (Q) задано, удельное значение капитальных расходов также вообще возрастает совместно с мощностью.

На рис. 1 показано, что вследствие двух противоположных воздействий непременно существует такая производственная мощность, при которой расходы получаются минимальными.

Обозначим производственную мощность в тоннах/сутки через q , удельное значение расходов текущего характера в форинтах на тонну через k_1 , а удельное значение капитальных расходов в форинтах/тонну через k_2 .

Пусть текущие расходы на одни сутки будут K_1 , а капитальные расходы пропорционально производственной мощности изменяются по зависимости

$$K_2 = a q + b .$$

Таким образом, связанные с производственной мощностью удельные расходы можно просто выразить следующим образом:

$$k = k_1 + k_2 = \frac{K_1}{q} + \frac{aq + b}{Q}$$

Удельные расходы k имеют минимум при

$$q = \sqrt{\frac{QK_1}{a}}$$

Величина a математически означает тангенс угла, и выражает ту сумму капиталовложений, которая необходима для обеспечения мощности производства, равной одной тонне в сутки (форинт/тонна, сутки).

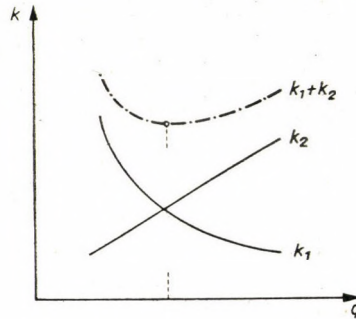


Рис 1

Для данного месторождения или залежи (Q) теоретическая зависимость кажется весьма простой. Однако, практические конкретные и подробные исследования выявляют ряд проблем. К ним следует отнести следующие:

1. Текущие расходы только в определенных границах производственной мощности могут рассматриваться как постоянные.

2. Прямая, определяющая капитальные расходы только в том случае придерживается реальности, если применяется ломанная прямая. Это означает, что величины a и b постоянны лишь в определенных границах производственной мощности.

3. Для расходов, объединенных в одну зависимость, характерно, что рассмотренные в отдельности они проявляются не равномерно, отнесенные же друг к другу возникают не в одно и то же время или период.

Рис. 2 уже показывает границы периодов. По периодам меняется параметр гиперболы расходов постоянного характера, а также тангенс угла прямой капитальных расходов и чистый член уравнения прямой. Для каждого участка может быть вычислена мощность

$$q_x = \sqrt{\frac{QK_{1x}}{a_x}}$$

Подставив эти мощности в уравнение k , получаем различные удельные значения. Мощность, соответствующая наименьшему удельному значению, одновременно будет и оптимальной мощностью. Естественно, реально могут быть приняты во внимание только те значения q_x , которые помещаются на собственном отрезке. Практическое решение может быть и графическим. Это допускается желательной точностью, с другой же стороны, графическое изображение дает быстрое и наглядное решение.

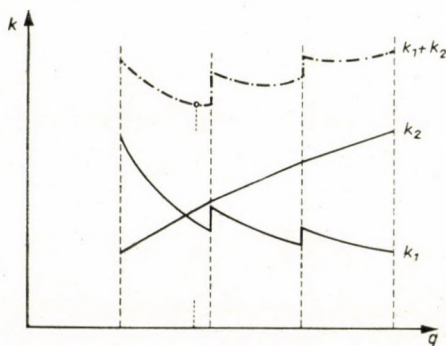


Рис. 2

Уравнение капитальных вложений может быть выведено, опираясь на уже имеющиеся данные. Естественно, всегда следует искать и применять такое уравнение, которое получено по данным предприятий геологически сходных.

На основании сообщений Дудника и Звягина нами составлена таблица, содержащая некоторые данные Донецкого бассейна. Здесь q — суточная производственная мощность, R — сумма капитальных затрат в рублях.

Порядк. №	1	2	3	4	5
q тонн/день	1000	2000	3000	4000	6000
R 10 ⁶ Руб	78,9	146,4	204,3	264,0	318,6

Порядк. №	6	7	8	9	10	11
q тонн/день	1000	2000	3000	4000	5000	6000
R 10 ⁶ Руб	80,7	151,2	201,6	249,6	295,5	338,4

Данные нами отложены также и на прямоугольной системе координат (рис. 3), найдена уравнивательная прямая и, соответственно, ее уравнение.

Уравнение уравнильной прямой приводится нами с учетом того, что сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из точек на уравнильные прямые (e), была бы наименьшей. Самым простым способом достижения цели является применение нормального вида прямой по Гессе.

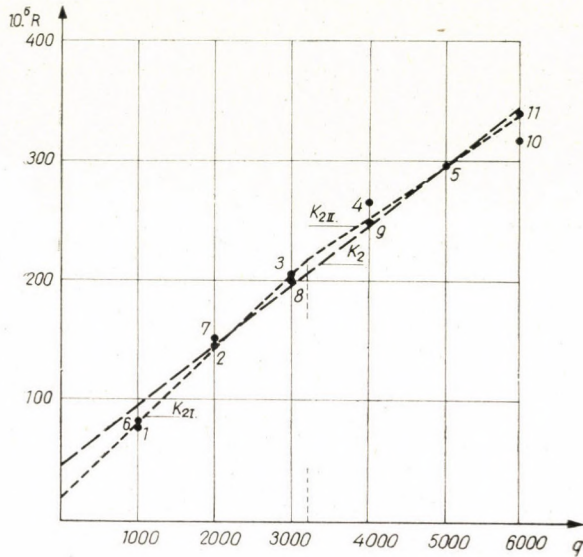


Рис. 3

Таким образом, можно записать:

$$\sum_1^n e^2 = \sum_1^n (q \cos \varphi + R \sin \varphi - P)^2.$$

Запишем частные дифференциальные производные для $\sum_1^n e^2$ сначала по параметру φ , а затем по параметру P и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_1^n e^2}{\partial \varphi} &= \sin 2\varphi \left(\sum_1^n R^2 - \sum_1^n q^2 \right) + 2 \cos 2\varphi \sum_1^n qR + \\ &+ 2P \left(\sin \varphi \sum_1^n q - \cos \varphi \sum_1^n R \right) = 0 \\ \frac{\partial \sum_1^n e^2}{\partial P} &= \cos \varphi \sum_1^n q + \sin \varphi \sum_1^n R - nP = 0 \end{aligned}$$

После чего решение уже найдено:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2 \frac{\sum_1^n q \sum_1^n R - n \sum_1^n qR}{\sum_1^n q \sum_1^n q - n \sum_1^n q^2 - \sum_1^n R \sum_1^n R + n \sum_1^n R^2}$$

и

$$P = \frac{\cos \varphi \sum_1^n q + \sin \varphi \sum_1^n R}{n}$$

Первоначально параметры φ и P определены нами на основе данных 1—11. Исходя из этих параметров, можно записать уравнение прямой K_2 :

$$K_2 = 50\,000 q + 46 \cdot 10^6.$$

Рассмотрим теперь данные точек 1, 6, 2, 7, 8, 3, как принадлежащие одному участку. Попрежнему получаем результат:

$$K_{2I} = 62\,000 q + 19 \cdot 10^6.$$

Если ко второму участку принадлежат данные точек 8, 3, 9, 4, 5, 10, 11, то

$$K_{2II} = 43\,000 q + 80 \cdot 10^6.$$

Следует отметить, что коэффициент q также как и чистый член уравнения даны нами округленно.

При практических решениях от этого строгого способа можно отступить. При построении уравнивающей прямой следует иметь лишь ввиду, что с обеих сторон прямой должно быть, по мере возможности, по равному числу точек.

Значительная доля капитальных затрат падает на предпусковой период, некоторая же доля — на эксплуатационный период. Расходы постоянного характера проявляются более или менее равномерно во все время эксплуатации предприятия. Расходы, падающие на один и тот же период, могут быть выявлены при помощи исчисления сложных процентов, либо применив расчет доходности. Таким образом, целесообразно выбрать начальный период эксплуатации. Относительное значение ежесуточных расходов постоянного характера, таким образом, может быть выражено следующим образом

$$K_{IR} = \frac{K_1}{p^N N} \frac{p^N - 1}{p - 1} = r_{Np} K_1,$$

где p — процентная ставка;
 N — время эксплуатации, в годах.

Поскольку N функция суточной производственной мощности, речь идет о функции от функции. Поэтому наиболее целесообразно и просто решать задачу посредством принципа постепенного приближения. Первым шагом является выбор значения N_1 , к которому принадлежит некоторая мощность q_1 . При помощи q_1 уже можно вычислить более точное N_2 , к которому будет принадлежать q_2 . Следуя постепенно шаг за шагом, в конце концов достигаем практически достаточной точности. Этот метод целесообразен потому, что практически допустимая точность достигается обычно уже на третьей ступени вычислений.

Рис. 4. показывает изменение редуцирующего коэффициента r_{Np} в функции N , в случае процентных коэффициентов $p = 1,05$ и $p = 1,07$.

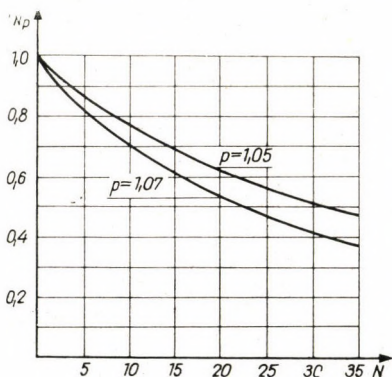


Рис. 4

Естественно, что и капитальные затраты не полностью выявляются в начале эксплуатационного периода. Выявляющуюся до пуска сумму капитальных затрат увеличиваем по зависимости

$$K_{2xr} = K_{2x} q^{t_x}.$$

Выявляющуюся позже сумму, наоборот, редуцируем соответственно зависимости

$$K_{2yr} = K_{2y} \frac{1}{q^{t_y}},$$

t_x и t_y , выражены в годах.

Приведенные выше выкладки включают в себе часть комплекса проблем, хотя бы уже вследствие того, что залежь и максимально вырабатываемое количество ископаемых приняты нами за известные исходные данные. Если возможно свободно выбрать залежь, при неправильных расположениях, необходимо прибегать к графическим методам. При предварительной съемке

нескольких величин залежей, для каждого случая определяется оптимальная производственная мощность и принадлежащие к ней удельные производственные затраты. Эти последние изображаются в системе координат, и таким образом выявляется наивыгоднейшее решение. В случае правильных или рассматриваемых в качестве правильных расположений, оптимальная производственная мощность выразима в математической форме и тогда, если залежь имеет свободу распространения. Совместно с оптимальной мощностью, естественно, может быть выражена и оптимальная величина размера.

ЛИТЕРАТУРА

- П. З. Звягин: Типы шахт. Горное дело. Энциклопедический справочник. Том 5. Углетех издат. Москва, 1958 г.
- П. М. Дудник, Л. А. Стариков, В. В. Нежсицев: Производственные мощности шахт и их использование. Углетехиздат. Москва, 1958 г.
- П. З. Звягин: К вопросу о годовой производительности и сроках службы шахт для типичных условий Кузнецкого бассейна. Совершенствование систем разработки мощных угольных пластов. Углетехиздат. Москва, 1959 г.
- П. З. Звягин: О нормативах годовой производительности и сроках службы угольных шахт. Совершенствование разработки угольных месторождений (Сборник научных докладов и статей). Углетехиздат. Москва, 1959 г.
- П. З. Звягин: Определение наивыгоднейшей производительности шахты и размеров ее поля при разработке свиты пластов. Горняцкие кадры № 1, 1930 г.
- П. З. Звягин: Проектирование и расчеты элементов разработки пластовых месторождений. ОНТИ, 1935 г.
- Д-р. Й. Замбо: Аналитика размещения шахт. Издательство технической книги. Будапешт 1960 г.

РЕЗЮМЕ

Оптимальную производственную мощность горных предприятий можно просто выразить в функции затрат постоянного характера и капитальных затрат. Однако практика предъясняет сложные теоретические проблемы: затраты постоянного характера постоянны лишь периодически, формирование капитальных затрат может быть описано только приближенными прямыми, а появляющиеся в различное время затраты следует отнести к одному и тому же времени. Автор рассматривает решение этих проблем.

WAHL DER PRODUKTIONSKAPAZITÄT VON BERGBAUBETRIEBEN

J. ZAMBÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die optimale Kapazität von Bergbaubetrieben kann in einfacher Weise als Funktion der ständigen Kosten und der Investitionskosten ausgedrückt werden. Die Praxis wirft jedoch schwerwiegende theoretische Probleme auf: die Kosten mit konstantem Charakter sind nur abschnittsweise konstant, die Entwicklung der Investitionskosten kann nur durch Schmiegegeraden beschrieben werden, die zu verschiedenen Zeiten auftretenden Kosten müssen auf dieselbe Zeit bezogen werden. Der Verfasser behandelt die Lösung dieser Probleme.

SELECTION OF THE PRODUCTION CAPACITY OF MINING PLANTS

J. ZAMBÓ

SUMMARY

It is simple to express the optimum production capacity of mining plants as a function of the costs of constant character and of the investment costs. But in practical life, difficult theoretical problems arise: the constant costs are there only constant by sections, the development of the investment costs can be described only by osculatory straight lines and the costs arising at different times must be related to the same time. The author deals with the solution of these problems.

LE CHOIX DE LA CAPACITÉ DE PRODUCTION DES MINES

J. ZAMBÓ

RÉSUMÉ

La capacité de production optimum des mines peut être exprimée sans difficulté en fonction des frais de caractère permanent et des frais d'investissement. Mais la pratique soulève des questions de principe essentiels: les frais de caractère permanent ne sont constants que par période, le développement des frais d'investissement ne peut être décrit que par des droites osculatrices, et les frais apparaissant à des temps différents doivent être rapportés au même moment. L'auteur étudie la solution de ces problèmes.

BASIC EQUATIONS OF THE M.H.D. GENERATOR

CH. SZENDY

D. ENG. SC.

POWER STATIONS ENGINEERING INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received February 16, 1962]

The working material in the M.H.D. generator is ionised gas of temperatures between 2—3000° K. The phenomena of ionised gas plasma are governed by very involved relations used by atom physicists. Instead of investigating the theoretical formulae it is more convenient to express the behaviour of the micro-structure, i.e. that of the electrons and positive ions. The working process in the M.H.D. generator is induced by a magnetic field perpendicular to the plasma stream. The segregation of particles is produced

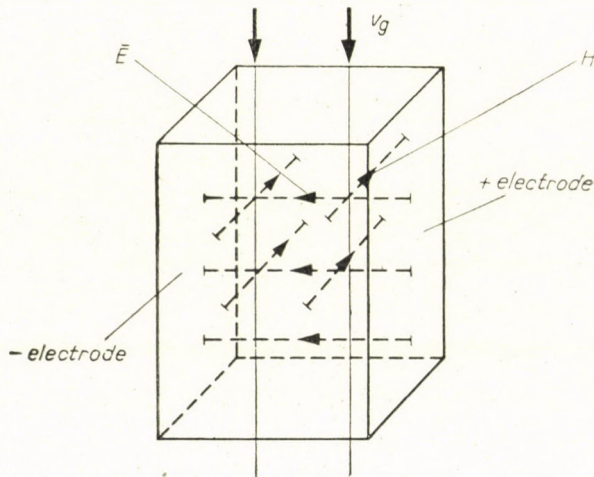


Fig. 1

by this magnetic field. This method of calculation was used by the inventors of the first M.H.D. machine, B. KARLOVITZ and D. HALÁSZ (patent from year 1937). The trials carried out with this machine by Westinghouse El. Co. were interrupted in World War II. A few years ago, a new development of this machine began along the line of a simpler construction. Instead of a radial field in a cylindrical construction and instead using a separate magnetic core, it seems to be more convenient to take a simple channel as shown in Fig. 1.

The electrodes are parallel plates to which the electrons are directed by a magnetic field.

For sake of simplicity the formulae can be expressed in a two-dimensional space. The electric field strength, further the velocities of electron, ion and gas are directed quantities. Therefore the introduction of vector quantities will give a more convenient relation. In this case the complex number may replace the vector quantities. The relations will be very simple with this method, and they might show new ways for a further development of the M.H.D. generator.

It is necessary to introduce the following assumptions.

a) The magnetic field is constant and the influence of the plasma current on it is neglected.

b) The effect of ambipolar diffusion is neglected.

c) The plasma does not contain resultant space charges. Positive and negative space charges are equal. Naturally, the residual space charge may be considered, but in this case the expressions will be more involved.

d) The interaction between positive ions and negative electrons is neglected. The motion of electric particles affects only the neutral gas particles through friction. Friction forces can be expressed by Languévin's equation. The friction forces are, thus, proportional with the particle velocities in weak fields only.

e) Forces accelerating the particles are neglected, so that the equilibrium of forces can be written in a static form (plasma oscillations are disregarded).

f) The thermo-ionization state of the plasma is not further investigated.

g) The co-ordinate system is so chosen that the gas velocity has only one real (direct) component.

h) The magnetic field H is perpendicular to the co-ordinate plane.

i) The number of negative ions can be neglected because of high temperature.

j) One electrode emits the electrons, the other receives them. The emissivity is not limited.

In the co-ordinate system (d, q), the equilibrium of forces acting on an electric particle may be written in the following form, using the units of the c.g.s. system (Fig. 2.):

$$-\frac{H v_q}{c} + E_d + \frac{v_g - v_d}{b} = 0$$

$$\frac{H v_d}{c} + E_q = \frac{v_q}{b} = 0,$$

where E_d and E_q = electric field strength in directions d and q , respectively (in el. stat. unit = 300 V/cm.);

v_g = gas velocity (in cm./sec);

- v_d and v_q = velocity of electric particles in the gas in directions d and q , respectively (in cm./sec);
- c = velocity of light;
- b = mobility of an electric particle in gas (in cm.²/sec × el. stat. potential)

This equation is valid for both the electron and the positive ion. Only the values of mobility b are different. It is well known that the ion mobility is approximately 10^{-3} times less than the electron mobility. The sign of value b is positive

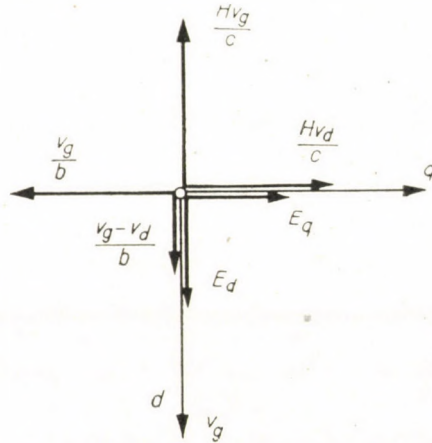


Fig. 2

for the positively charged particles. On the other hand, the negatively charged particle has a negative sign for value b . This expression may be rewritten with complex numbers in the following form:

$$E_d + j E_q + \frac{v_g}{b} = \left(\frac{1}{b} - j \frac{H}{c} \right) (v_d + j v_q) = 0.$$

Introducing the following notations

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E_d + j E_q, \quad \bar{v} = v_d + j v_q, \\ \bar{K} &= 1 + j \frac{bH}{c}, \quad \hat{K} = 1 - j \frac{bH}{c}, \end{aligned}$$

where \hat{K} is the conjugate value of \bar{K} , the equation can be written as follows:

$$b \bar{E} + v_g = \hat{K} \bar{v}. \tag{1}$$

We denote the positive ion particles with index 1, the electrons with index 2. In practice, the coefficient \hat{K}_1 for ion particles is equal with value 1 because

$\frac{b_1 H}{c} \ll 1$. From Eq. (1) we can establish the following form for two electric particles:

$$\begin{aligned} b_1 \bar{E} + v_g &= \bar{v}_1 \\ -b_2 \hat{K}_2^{-1} E + \hat{K}_2^{-1} v_g &= \bar{v}_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

On the basis of assumption *c*, the positive charge density ρ_1 and negative charge density ρ_2 are equal, so $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. The resultant current density can be evaluated from the individual particle velocities:

$$\bar{i} = \rho(\bar{v}_1 - \bar{v}_2). \quad (2.2)$$

From Eq. (2.1) and (2.2)

$$\bar{E} = -(b_1 + b_2 \hat{K}_2^{-1})^{-1} \left[(1 - \hat{K}_2^{-1}) v_g - \frac{\bar{i}}{\rho} \right]. \quad (2.3)$$

The terms of the above equation can be obtained in the following way. In practice, the condition

$$\left| \frac{b_1}{b_2} \hat{K}_2 \right| < 1$$

can be satisfied, hence

$$(b_1 + b_2 \hat{K}_2^{-1})^{-1} = \frac{\hat{K}_2}{b_2} \left(1 - \frac{b_1}{b_2} \hat{K}_2 \right).$$

Substituting the value of \hat{K}_2

$$(b_1 + b_2 \hat{K}_2^{-1})^{-1} (1 - \hat{K}_2) = j \frac{H}{c} \left(1 - \frac{b_1}{b_2} - j \frac{b_1 H}{c} \right), \quad (2.4)$$

where the term $\frac{b_1 H}{c}$ can be neglected.

Further

$$(b_1 + b_2 \hat{K}_2^{-1})^{-1} = \frac{1}{b_2} \left(1 - \frac{b_1}{b_2} \right) + \frac{b_1 H^2}{c^2} + j \frac{H}{c} \left(1 - \frac{2b_1}{b_2} \right). \quad (2.5)$$

Substituting Eq. (2.4) and (2.5) in Eq. (2.3), the electric field strength can be expressed by the basic equation of the M.H.D. generator:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{S} \bar{i}, \quad \text{where} \quad (3.1)$$

$$\bar{E}_0 = -\frac{jH}{c} \left(1 - \frac{b_1}{b_2} \right) v_g, \quad (3.2)$$

$$\bar{S} = S_d + j S_q = \frac{1}{\rho b_2} \left(1 - \frac{b_1}{b_2} \right) + \frac{b_1 H^2}{\rho c^2} + j \frac{H}{\rho c} \left(1 - \frac{2b_1}{b_2} \right). \quad (3.3)$$

In this basic equation, the directed quantity \bar{E}_0 is the electric field strength if the current density is zero (no-load condition); the complex number \bar{S} denotes the displacement coefficient of the current density. The basic relation is represented in Fig. 3. The quantity \bar{E}_0 is perpendicular to gas velocity v_g .

Example. Let us take the following values:

$$H = 20\,000 \text{ Gauss, } v_g = 1500 \text{ m./sec}$$

$$b_1 = 700 \text{ cm.}^2/\text{sec} \times \text{el. stat. potential}$$

$$b_2 = 7 \cdot 10^5 \text{ cm.}^2/\text{sec} \times \text{el. stat. potential}$$

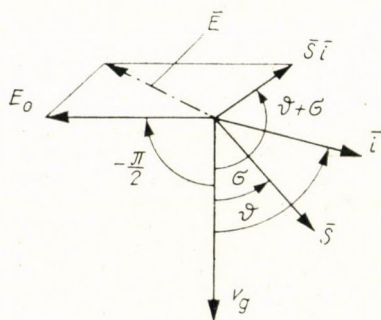


Fig. 3

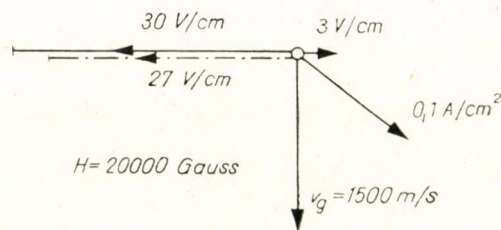


Fig. 4

The thermal ionization will give 10^{14} positive and negative particles per cu. cm.

Substituting these values, we obtain the electric field strength:

$$\bar{E}_{\text{Volt/cm}} = -j 30 + (27 + j 12.6) \bar{i}_{\text{A/cm}^2}.$$

If the arrangement of the electrodes is similar to that shown in Fig. 1, the electric field strength has only a q component. Therefore, the current density i must have a d component too, as shown in Fig. 4 ($i = 0.1 \text{ amp/cm.}^2$).

For a wide zone around the above mentioned values, the electric field strength can be expressed by the following simplified formula:

$$\bar{E} = -j \frac{H}{c} \bar{v}_g + \left(\frac{1}{b_2} + j \frac{H}{c} \right) \frac{\bar{i}}{q}. \tag{4.1}$$

Obviously the specific useful power is obtained as the internal product of vector \bar{E} and \bar{i} , so in complex form

$$p = -\frac{1}{2} (\hat{i} \bar{E} + \bar{i} \hat{E}). \tag{4.2}$$

Substituting Eq. (3.1) and conveniently introducing the polar co-ordinates (see in Fig. 3)

$$p = E_0 i \sin \vartheta - Si^2 \cos \sigma, \quad (4.3)$$

where — from Eq. (4.1) — $E_0 = \frac{H}{c} v_g$,

$$S = \frac{1}{\varrho} \sqrt{\frac{1}{b_2^2} + \left(\frac{H}{c}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{H b_2}{c}, \text{ further}$$

i and ϑ = the absolute value and the displacement angle of current density vector, respectively (displacement is referred to direction of gas velocity).

The specific power loss is determined by the friction between the electric particles and gas atoms (or molecules). In the formula (4.1), the ion mobility was neglected, and so the specific power loss is

$$p_l = Si^2 \cos \sigma = \frac{i^2}{b_2 \varrho}. \quad (4.4)$$

The specific power extracted from the gas, referred to as specific extracted power, in this:

$$p_e = p + p_l = E_0 i \sin \vartheta = \frac{H v_g \sin \vartheta}{c}. \quad (4.5)$$

In the discussion on "Magnetohydrodynamic Generation of Electricity" (v. Proceedings of the IEE, Dec., 1961, p. 491) the ratio of the external and internal resistance of the generator is represented as

$$\frac{R}{r} = \frac{1 - k}{k}, \quad (4.6)$$

from which it follows for a homogenous field that

$$k = \frac{P_l}{P + P_l}.$$

The value k can be defined as a loss factor. Substituting Eq. (4.3) and (4.4),

$$k = \frac{Si \cos \sigma}{E_0 \sin \vartheta}. \quad (4.7)$$

This expression is valid also for inhomogeneous fields. From this loss factor we can derive a new formula for the specific useful power:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{k(1-k)E_0^2 \sin^2 \vartheta}{S \cos \sigma}, \text{ further} \\
 p &= \frac{k(1-k)\rho b_2 H^2 v_g^2 \sin^2 \vartheta}{c^2 \cos \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{H b_2}{c}\right)^2}}. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

In the cross electric field generator, shown in the above example (Figs. 1 and 4),

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

so that the loss factor will be

$$k = \frac{Si}{E_0} \text{ and the specific useful power}$$

$$P = \frac{k(1-k)\rho b_2 H^2 v_g^2}{c^2 \left[1 + \left(\frac{H b_2}{c}\right)^2\right]}. \tag{5}$$

Of course, neither the magnitude nor the direction of the gas velocity can be regarded as constant, and the charge density ρ is also a variable depending on gas temperature. The electric field can be determined by the form of the electrodes. Eq. (4.5) gives the specific extracted power which can be taken from the kinetic energy of the gas. Eq. (4.1) is suitable for investigating the current density which must satisfy the condition of continuity. Therefore, a close co-ordination must be ensured between variables \bar{E} , \bar{i} , \bar{v}_g in the whole operating range of the machine, or else the smooth operation will be spoiled by the occurring resultant space charges, etc.

APPENDIX

Instead of the simplification applied in Eq. (2.1), the general expression of field strength will be

$$E = -(b_1 \hat{K}_1^{-1} + b_2 \hat{K}_2^{-1})^{-1} \left[(\hat{K}_1^{-1} - \hat{K}_2^{-1}) v_g - \frac{\bar{i}}{\rho} \right].$$

Hence

$$\bar{E} = -j \bar{E}_0 + \bar{S} \bar{i},$$

where

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_0 &= -\frac{\hat{K}_1^{-1} - \hat{K}_2^{-1}}{b_1 \hat{K}_1^{-1} + b_2 \hat{K}_2^{-1}} v_g = -j E_0 e^{j\epsilon} \\
 \bar{S} &= \frac{1}{\rho(b_1 \hat{K}_1^{-1} + b_2 \hat{K}_2^{-1})}.
 \end{aligned}$$

The specific extracted power is given by

$$p_e = E_0 i \sin(\theta + \epsilon),$$

further the specific power loss by Eq. (4.4) and the useful power by

$$P = p_e - p_l.$$

SUMMARY

A formula, containing complex quantities of the electric and magnetic field strength, the current density and the gas velocity, has been introduced. If the resultant space charges and the ion slip to gas stream can be neglected, the electric field strength is

$$\bar{E} = -j H \bar{v}_g 10^{-8} + \left(\frac{1}{b_2} + j H 10^{-8} \right) \frac{\bar{i}}{1.59 \cdot 10^{-19} n},$$

where \bar{E} = electric field strength in V/cm. (complex quantity),
 H = magnetic field strength in Gauss,
 \bar{v}_g = gas velocity in cm./sec (complex quantity),
 b_2 = mobility of negatively charged particles in cm.²/V.sec,
 \bar{i} = current density in A/cm.² (complex quantity),
 n = number of ionized particles in cm.³.

The expression can be used for the determination of power output and losses.

GRUNDGLEICHUNG DES M.H.D. GENERATORS

K. SZENDY

ZUSAMMENFASSUNG

Eine Formel wurde entwickelt, in welcher die komplexen Größen der elektrischen und magnetischen Feldstärke, der Stromdichte und der Gasgeschwindigkeit erscheinen. Angenommen, daß die resultierende Raumladung und der Ionenslip zum Gasstrom vernachlässigt werden können, ergibt sich die elektrische Feldstärke zu

$$\bar{E} = -j H \bar{v}_g 10^{-8} + \left(\frac{1}{b_2} + j H 10^{-8} \right) \frac{\bar{i}}{1,59 \cdot 10^{-19} n},$$

wobei

\bar{E} = elektrische Feldstärke, V/cm (komplexe Größe),
 H = magnetische Feldstärke, Gauß,
 \bar{v}_g = Gasgeschwindigkeit, cm/sec (komplexe Größe),
 b_2 = Beweglichkeit der negativ geladenen Raumteilchen, cm²/V.s.,
 \bar{i} = Stromdichte, A/cm² (komplexe Größe),
 n = Anzahl der ionisierten Teilchen je cm³.

Die Gleichung kann sowohl zur Ermittlung der Leistung als auch der Verluste dienen.

ÉQUATIONS DE BASE DU GÉNÉRATEUR M.H.D.

CH. SZENDY

RÉSUMÉ

L'auteur introduit une relation contenant les grandeurs complexes de l'intensité du champ électrique et du champ magnétique, de la densité de courant et de la vitesse du gaz. Si la charge spatiale résultante et l'ionisation par rapport au courant de gaz peuvent être négligés, l'intensité du champ électrique sera

$$\bar{E} = -j H \bar{v}_g 10^{-8} + \left(\frac{1}{b_2} + j H 10^{-8} \right) \frac{\bar{i}}{1,59 \cdot 10^{-19} n},$$

où

 \bar{E} est l'intensité du champ électrique en V/cm (grandeur complexe) H l'intensité du champ magnétique en Gauss \bar{v}_g la vitesse du gaz en cm/s (grandeur complexe) \bar{b}_2 la mobilité des particules à charge négative en $\text{cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ \bar{i} la densité du courant en A/cm^2 (grandeur complexe) n le nombre des particules ionisées par cm^3 .

L'expression peut s'utiliser pour déterminer la puissance débitée et les pertes.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА МНД

К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Автор вводит зависимость, содержащую комплексные количества, она содержит напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля, плотность тока и скорость движения газов. Если результирующей напряженностью поля и ионизацией по отношению к движению газов можно пренебречь, тогда электрическая напряженность поля будет:

$$\bar{E} = -j H \bar{v}_g 10^{-8} + \left(\frac{1}{\bar{b}_2} + j H 10^{-8} \right) \frac{\bar{i}}{1,59 \cdot 10^{-19} n},$$

где \bar{E} — электрическая напряженность поля ($\text{в}/\text{см}$, комплексное количество); H — магнитная напряженность поля (Гаусс); \bar{v}_g — скорость газа ($\text{см}/\text{сек}$, комплексное количество); \bar{b}_2 — подвижность отрицательных частиц ($\text{см}^2/\text{в. сек}$); \bar{i} — плотность тока ($\text{а}/\text{см}^2$, комплексное количество); n — число ионизированных частиц для объема 1 см^3 .

Данное выражение может быть использовано для определения отдаваемой мощности и потерь.

it seems that its justification is not sufficiently pointed out in the text-books. We will supply this lack as follows. Since positive definite matrix

$$\begin{array}{c} m_{11} \dots m_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ m_{n1} \dots m_{nn} \end{array}$$

is assumed, equations (1) can always be solved for $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n$ and so we obtain differential equations of form

$$\left. \begin{array}{l} m_{11} \ddot{q}_1 = -\bar{k}_{11} q_1 - \dots - \bar{k}_{1n} q_n, \\ \dots \dots \dots \\ m_{nn} \ddot{q}_n = -\bar{k}_{n1} q_1 - \dots - \bar{k}_{nn} q_n. \end{array} \right\} \quad (13.1)$$

After eliminating q_2, \dots, q_n from these differential equations, a single differential equation remains for q_1 . It has the form

$$[K_n q_1^{(2n)} + \dots + K_2 q_1^{(4)} + K_1 \ddot{q}_1 + K_0 q_1 = 0 \quad (14)$$

where $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ are constants. The equation

$$K_n \omega^{2n} + \dots + K_2 \omega^4 + K_1 \omega^2 + K_0 = 0 \quad (15)$$

is the characteristic equation belonging to differential equation (14), and the frequency equation of the given oscillation problem too. Differential equation (14) arised from (13.1), \dots , (13.n) by elimination. Of course, the very same differential equation also arises in the case when instead of applying elimination, the determinant standing in the well-known equation (5), will be expanded. Equation (5) is a so-called secular equation, and algebra states that its root ω^2 is always positive. From this, we already see that assumption (4) is correct, provided that equation (5) does not have a multiple root or zero root. Thus, we still have to investigate the cases in which equation (5) has multiple root or zero root.

Let us assume that equation (15) possesses an f -fold root ω_1 . Then, according to the theory of homogeneous linear differential equations, the solution of (14) presents itself in the form

$$q_1 = (A_{11} + A_{12} t + \dots + A_{1f} t^{f-1}) \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \dots \quad (16)$$

(Here, only that term is described in detail, which is due to ω_1 .) As to the given oscillation problem, we see that $q_1(t)$ can have, at most, the form (16). After inserting (16) in (13.1), we find that A_{12}, \dots, A_{1f} must vanish. Hence, we have $q_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \dots$. An analogous reasoning is valid also for q_2, \dots, q_n .

As to the zero root, we shall prove that equations (5) can not possess zero root. For this purpose, we insert $\omega = 0$ in (5). This leads to

$$\begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Since expression (2) is a positive definite quadratic form, we have

$$\begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

This inequality is in contradiction with equation (17). Thus, equation (5) cannot possess zero root.

It should be emphasized that in all the above expositions, symmetrical ($m_{ij} = m_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$) and positive definite matrices

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

were stipulated. If this stipulation is not fulfilled, then the above statements are not always true. E. g., in the differential equations

$$3\ddot{q}_1 - 2\ddot{q}_2 = -12q_1 + 8q_2,$$

$$q_1 + 2\ddot{q}_2 = -12q_1 + 8q_2$$

the parameters

$$\begin{matrix} -12 & 8 \\ -12 & 8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -12 & 8 \\ -12 & 8 \end{matrix}$$

do not form a positive definite matrix, and a solution of these differential equations is

$$q_1 = 10 + 8t + 10 \sin 2t,$$

$$q_2 = 15 + 12t + 5 \sin 2t$$

which has not the form (4).

2. Initial-value theorems

That value which a function assumes at time $t = 0$, will be called initial value. A condition which is satisfied at time $t = 0$, will be called initial condition. In this Section, we wish to treat the following three theorems:

where $g < n - 1$. From (35) and (36), the inequalities

$$\begin{aligned} k_{11} A'_{11} + \dots + k_{1g} A'_{g1} &> m_{11} \omega_1^2 A'_{11}, \\ \dots &\dots \\ k_{g1} A'_{11} + \dots + k_{gg} A'_{g1} &> m_{gg} \omega_1^2 A'_{g1} \end{aligned}$$

i. e.

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - m_{11} \omega_1^2) A'_{11} + k_{12} A'_{21} + \dots + k_{1g} A'_{g1} &> 0, \\ k_{21} A'_{11} + (k_{22} - m_{22} \omega_1^2) A'_{21} + \dots + k_{2g} A'_{g1} &> 0, \\ \dots &\dots \\ k_{g1} A'_{11} + k_{g2} A'_{21} + \dots + (k_{gg} - m_{gg} \omega_1^2) A'_{g1} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

follow. In such a manner as the well-known Cramer's formula $x_\alpha D = \sum_{\alpha=1}^g b_\alpha D_{\alpha\beta}$ can be derived from g linear algebraic equations, the formula

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11} \omega_1^2 & k_{12} & \dots & k_{1g} \\ k_{21} & k_{22} - m_{22} \omega_1^2 & \dots & k_{2g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{g1} & k_{g2} & \dots & k_{gg} - m_{gg} \omega_1^2 \end{vmatrix} > 0 \quad (38)$$

may be derived from the linear inequalities (37). On the other hand, if certain terms will be dropped on the right-hand sides of equations (28), then the inequalities

$$\begin{aligned} k_{11} A_{11} + \dots + k_{1g} A_{g1} &\leq m_{11} \omega_1^2 A_{11}, \\ \dots &\dots \\ k_{g1} A_{11} + \dots + k_{gg} A_{g1} &\leq m_{gg} \omega_1^2 A_{g1} \end{aligned}$$

i. e.

$$\begin{aligned} (k_{11} - m_{11} \omega_1^2) A_{11} + k_{12} A_{21} + \dots + k_{1g} A_{g1} &\leq 0, \\ k_{21} A_{11} + (k_{22} - m_{22} \omega_1^2) A_{21} + \dots + k_{2g} A_{g1} &\leq 0, \\ \dots &\dots \\ k_{g1} A_{11} + k_{g2} A_{21} + \dots + (k_{gg} - m_{gg} \omega_1^2) A_{g1} &\leq 0 \end{aligned}$$

arise. From these,

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11} \omega_1^2 & k_{12} & \dots & k_{1g} \\ k_{21} & k_{22} - m_{22} \omega_1^2 & \dots & k_{2g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{g1} & k_{g2} & \dots & k_{gg} - m_{gg} \omega_1^2 \end{vmatrix} \leq 0 \quad (39)$$

follows. As we see (39) is in contradiction with (38). Therefore, our assumption that $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$ are not of miscellaneous sign and not all zero, cannot hold. The course of reasoning employed to the group $A'_{11}, A'_{21}, \dots, A'_{g1}$, can also be applied to any one group formed from the elements $A'_{11}, A'_{21}, \dots, A'_{n1}$. With this the fourth theorem is proved.

whence

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11} \omega_n^2 & k_{12} & \dots & k_{1h} \\ k_{21} & k_{22} - m_{22} \omega_n^2 & \dots & k_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{h1} & k_{h2} & \dots & k_{hh} - m_{hh} \omega_n^2 \end{vmatrix} \leq 0. \quad (43)$$

On the other hand, by dropping the non-positive terms on the right-hand sides of equations (40), we obtain the inequalities

$$\begin{aligned} k_{11} A_{1n} + \dots + k_{1h} A_{hn} &> m_{11} \omega_n^2 A_{1n}, \\ \dots & \dots \\ k_{h1} A_{1n} + \dots + k_{hh} A_{hn} &> m_{hh} \omega_n^2 A_{1n} \end{aligned}$$

i. e.

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - m_{11} \omega_n^2) A_{1n} + k_{12} A_{2n} + \dots + k_{1h} A_{hn} &> 0, \\ k_{21} A_{1n} + (k_{22} - m_{22} \omega_n^2) A_{2n} + \dots + k_{2h} A_{hn} &> 0, \\ \dots & \dots \\ k_{h1} A_{1n} + k_{h2} A_{2n} + \dots + (k_{hh} - m_{hh} \omega_n^2) A_{hn} &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

From here, in the above manner, the inequality

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11} \omega_n^2 & k_{12} & \dots & k_{1h} \\ k_{21} & k_{22} - m_{22} \omega_n^2 & \dots & k_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{h1} & k_{h2} & \dots & k_{hh} - m_{hh} \omega_n^2 \end{vmatrix} > 0 \quad (45)$$

issues. Since (45) is in contradiction with (43), our assumption that A_{1n} , A_{2n} , \dots , A_{hn} are positive, and $A_{(h+1)n}$, $A_{(h+2)n}$, \dots , A_{nn} are non-positive and not all zero, cannot hold. Also an assumption that A_{1n} , A_{2n} , \dots , A_{hn} are positive, and $A_{(h+1)n}$, $A_{(h+2)n}$, \dots , A_{nn} are all zero, cannot hold, because it does not satisfy the $(h+1)$ -th equation of (40). The course of reasoning which we have just applied to the group A_{1n} , A_{2n} , \dots , A_{hn} , can also be applied to any one group formed from elements A_{1n} , A_{2n} , \dots , A_{nn} . With this the fifth theorem is proved.

4. Dynamically coupled system with positive parameters

Let us consider a dynamically coupled system*. We assume in this Section that the parameters

$$\begin{aligned} m_{11} \dots m_{1n} & k_{11} \\ m_{n1} \dots m_{nn} & k_{nn} \end{aligned}$$

* In this paper, a system is said to be dynamically coupled, if the differential equations have the form (11).

$[1/\omega_1^{(i)^2}]_{\min}$ is the least of quantities (50), $[1/\omega_1^{(i)^2}]_{\max}$ is the greatest of quantities (50)."

The application of the eighth theorem may have the following course. We use the values

$$\left. \begin{matrix} m_{11} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ m_{22} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{nn} & k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{matrix} \right\} \quad (52)$$

standing in differential equations (9), i. e. in that differential equations which do not possess dynamic coupling terms. Values (52) are, according to our assumption, positive. We take arbitrarily-chosen positive values

$$\bar{A}_{1n}, \bar{A}_{2n}, \dots, \bar{A}_{nn} \quad (53)$$

and reckon the quantities $\omega_n^{(1)^2}, \omega_n^{(2)^2}, \dots, \omega_n^{(n)^2}$ by means of formulas (48). Then by virtue of the eighth theorem, $[\omega_n^{(i)^2}]_{\min}$ is a lower bound, $[\omega_n^{(i)^2}]_{\max}$ is an upper bound for ω_n^2 .

The application of the ninth theorem may have the following course. We use the values

$$\left. \begin{matrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} & k_{11} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} & k_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} & k_{nn} \end{matrix} \right\} \quad (54)$$

standing in differential equations (11), i. e. in that differential equations which do not possess static coupling terms. Values (54) are, according to our assumption, positive. We take arbitrarily-chosen positive values

$$\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21}, \dots, \bar{A}_{n1} \quad (55)$$

and reckon the quantities $1/\omega_1^{(1)^2}, \dots, 1/\omega_1^{(n)^2}$ by means of formulas (50). Then, by virtue of the ninth theorem, $[1/\omega_1^{(i)^2}]_{\min}$ is a lower bound, and $[1/\omega_1^{(i)^2}]_{\max}$ is an upper bound for $1/\omega_1^2$. This course of reasoning will be followed in the numerical example of Section 7.

Remark on the positive values (53) and (55). Although the positive values (53) and (55) may be arbitrarily chosen, yet it is convenient to borrow the values (53) and (55) from an approximate computing, e. g., from iteration, as is shown in Section 7.

The proof of the eighth theorem can be carried out as follows. From (10), we obtain the relation

7. First numerical example

The weightless beam (Fig. 1) on two hinged supports, carries five masses m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 . The weights of the masses are $W_1 = W_2 = 2,6$ t, $W_3 = W_4 = W_5 = 1,5$ t. Young's modulus is $E = 2150$ t/cm². The moment of inertia of the cross-section is $I = 41520$ cm⁴. Calculate the circular frequency of the slowest principal oscillation.

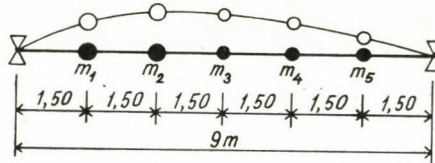


Fig. 1

The elasticity of the beam can be described by the influence numbers. The definition of an influence number δ_{ij} is "the deflection of mass m_i caused by a unit force at the location of mass m_j ". The influence numbers can easily be calculated by using the well-known principles of strength of materials. The calculation yields for δ_{ij} the following values:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0,0525	0,0798	0,0819	0,0651	0,0357
2	0,0798	0,1344	0,1449	0,1176	0,0651
3	0,0819	0,1449	0,1701	0,1449	0,0819
4	0,0651	0,1176	0,1449	0,1344	0,0798
5	0,0357	0,0651	0,0819	0,0798	0,0525

These values are to be understood in cm/t. The masses are

$$m_1 = m_2 = \frac{2,6}{981} = 0,00265 \text{ t cm}^{-1} \text{ sec}^2,$$

$$m_3 = m_4 = m_5 = \frac{1,5}{981} = 0,00153 \text{ t cm}^{-1} \text{ sec}^2.$$

Let us denote the displacements by y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 . Then the accelerations are $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4, \ddot{y}_5$. Since $-m_1\ddot{y}_1, -m_2\ddot{y}_2, -m_3\ddot{y}_3, -m_4\ddot{y}_4, -m_5\ddot{y}_5$ are the inertia forces, by virtue of D'Alembert's principle, we write

$$\begin{aligned} -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} - \dots - m_5\ddot{y}_5\delta_{15} &= y_1 \\ \dots & \\ -m_1\ddot{y}_1\delta_{51} - \dots - m_5\ddot{y}_5\delta_{55} &= y_5. \end{aligned}$$

As second step, for $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21}, \bar{A}_{31}, \bar{A}_{41}, \bar{A}_{51}$, let us take their previous values multiplied by the quantities computed in the first step (for convenience' sake, we take thousandfold values). Thus, in the second step, we start with

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= 5 \cdot 1,24 = 6,2, & \bar{A}_{21} &= 8 \cdot 1,01 = 8,03, & \bar{A}_{31} &= 9 \cdot 0,794 = 7,146, & \bar{A}_{41} &= 8 \cdot 0,533 = \\ & & & & & & & = 4,664, & \bar{A}_{51} &= 5 \cdot 0,715 = 3,575. \end{aligned}$$

Using these values, we compute, as before, quantities (50):

$$\begin{aligned} \frac{0,0525 \cdot 6,2 + 0,0798 \cdot 8,08 + \dots}{6,2/0,00625} &= 0,000851, \\ \dots &= 0,001023, \\ \dots &= 0,000828, \\ \dots &= 0,001082, \\ \dots &= 0,000810. \end{aligned}$$

So, the second step results in

$$0,000810 \leq \frac{1}{\omega_1^2} \leq 0,001082.$$

We proceed in the very same manner also in the third and further steps. Thus, in the third step, we start with

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= 6,2 \cdot 0,851 = 5,27, & \bar{A}_{21} &= 8,08 \cdot 1,023 = 8,28, & \bar{A}_{31} &= 7,146 \cdot 0,828 = 5,92, \\ \bar{A}_{41} &= 4,664 \cdot 1,082 = 5,05, & \bar{A}_{51} &= 3,575 \cdot 0,000810 = 2,89. \end{aligned}$$

Quantities (50) become:

$$\begin{aligned} \frac{0,0525 \cdot 5,27 + 0,0798 \cdot 8,28 + \dots}{5,27/0,00625} &= 0,000932, \\ \dots &= 0,001015, \\ \dots &= 0,000933, \\ \dots &= 0,000928, \\ \dots &= 0,000931 \end{aligned}$$

whence

$$0,000928 \leq \frac{1}{\omega_1^2} \leq 0,001015.$$

As fourth step, the starting values are

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= 5,27 \cdot 0,932 = 4,91, & \bar{A}_{21} &= 8,28 \cdot 1,015 = 8,42, & \bar{A}_{31} &= 5,92 \cdot 0,933 = 5,51, \\ \bar{A}_{41} &= 5,05 \cdot 0,928 = 4,68, & \bar{A}_{51} &= 2,89 \cdot 0,931 = 2,69. \end{aligned}$$

With these, quantities (50) become

$$\begin{aligned} \frac{0,0525 \cdot 4,91 + 0,0798 \cdot 8,42 + \dots}{4,91/0,00265} &= 0,000954, \\ \dots &= 0,000966, \\ \dots &= 0,000960, \\ \dots &= 0,000963, \\ \dots &= 0,000958. \end{aligned}$$

Thus, we have

$$0,000954 \leq \frac{1}{\omega_1^2} \leq 0,000966.$$

Hence, we obtain

$$32,1 \leq \omega_1 \leq 32,5.$$

This inequality expresses the result of the calculation. We conclude from this inequality that the mean value $\frac{32,1 + 32,5}{2} = 32,3$ differs from the exact value of ω_1 by less than 1 per cent.

Of course, the accuracy of the result can be augmented by applying more steps. The result 32,3 means 32,3 radians per second or $32,3/2\pi = 5,14$ cycles per second.

A glance back at the numerical example. In order to apply the ninth theorem, we needed convenient positive values $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21}, \dots, \bar{A}_m$. We procured them by an iteration method which is no other than a modification of the usual iteration method described, e.g., on pp. 197—198 and 313—317 of the book of TH. O. KÁRMÁN and M. A. BLOT [1].

8. Cross-matrices

We introduce the denomination "cross-matrix". A matrix will be called cross-matrix, if it has the form

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{01} + a_{12} & -a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{12} & a_{12} + a_{23} & -a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{23} & a_{23} + a_{34} & -a_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{34} & a_{34} + a_{45} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)n} + a_{n(n+1)} \end{array} \right] \quad (57)$$

where $a_{01}, a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n(n+1)}$ are positive values. E.g.

$$\left[\begin{array}{cccc} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 4 \end{array} \right]$$

is a cross-matrix.

The cross-matrices have a practical significance (see the expositions of Section 9) and belong to a wider class of matrices called continuant matrices.

The denomination "group" will be used in the following sense: A set of real quantities always forms groups which consist alternatively of non-positive and non-negative elements. E.g., the set

$$3, 2/7, 4, -2, -3/4, 0, 0, 1/2, 0, 1/2, -3, 9, -5, 0$$

forms six groups, namely

is employed. For the time being, we assume that all the values $A_1, \dots, A_n, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ are different from zero (assumption S_1).

Let us consider the last fractions on the right-hand sides of equations (62). For proving the twelfth theorem, it is sufficient to demonstrate that among these fractions there are both non-positive and non-negative ones. For this purpose, we assume the contrary, *i.e.* we assume that the fractions are of uniform sign (assumption S_2).

Let us consider the denominators

$$m_{11} A_1 \bar{A}_1, \quad m_{22} A_2 \bar{A}_2, \quad \dots, \quad m_{nn} A_n \bar{A}_n. \tag{64}$$

This set consists of n elements. We denote by g the number of groups formed by set (64). It is easy to see that g is odd. Say, the first group ranges from 1 to α , the second from $\alpha + 1$ to β , the third from $\beta + 1$ to γ , and so on. These groups are visualized in Fig. 2. The limiting zones are denoted by $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma, \dots$

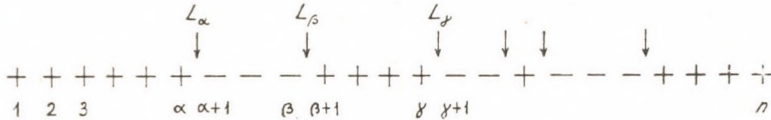


Fig. 2

It follows from the definition of the groups and from assumption S_2 that the numerators

$$Q_{12}, \quad -Q_{12} + Q_{23}, \quad -Q_{23} + Q_{34}, \quad \dots, \quad -Q_{(n-1)n} \tag{65}$$

change their signs from group to group (consequence C). The sum of the numerators is, in the first group:

$$Q_{\alpha(\alpha+1)}$$

in the second group:

$$-Q_{\alpha(\alpha+1)} + Q_{\beta(\beta+1)}$$

in the third group:

and so on. Let us scrutinize the values

$$Q_{\alpha(\alpha+1)}, \quad Q_{\beta(\beta+1)}, \quad Q_{\gamma(\gamma+1)} \dots \tag{66}$$

The set (66) consists of $g-1$ elements.

If two consecutive elements of set (66), say $Q_{\beta(\beta+1)}$ and $Q_{\gamma(\gamma+1)}$ are of the same sign, then A changes its sign in L_β , and \bar{A} changes its sign in L_γ , or else, \bar{A} changes its sign in L_β , and A changes its sign in L_γ ; if two consecutive elements of set (66), say $Q_{\beta(\beta+1)}$ and $Q_{\gamma(\gamma+1)}$, are of the opposite sign, then A

changes its sign both in L_β and in L_γ , or else, \bar{A} changes its sign both in L_β and in L_γ , (rule R). This rule immediately follows from inspecting formula (63).

A limiting zone, say the limiting zone L_γ will be called positive (negative) if $Q_{\gamma(\gamma+1)}$ is positive (negative). Now, instead of symbols $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma, \dots$ let the symbols L_1, L_2, L_3, \dots be used, (Fig. 3).

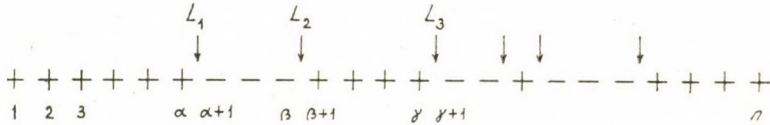
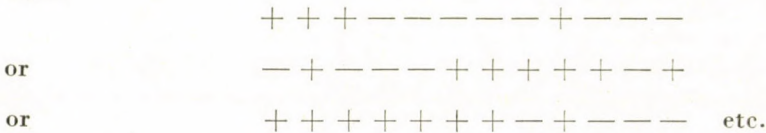
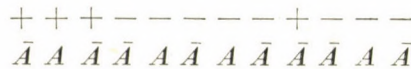


Fig. 3

If $L_{i+1}, L_{i+2}, \dots, L_{i+e}$ are positive (negative), and L_i, L_{i+e+1} are negative (positive), then e is odd, because for even e , the sum of the numerators becomes positive (negative) in the $i + 1$ -th group, and negative (positive) in the $i + e + 1$ -th group, which would be in contradiction to consequence C. This means, in other words, that the set (66) forms parts* each of which consists of an odd number of elements. E.g., if $g = 13$, i.e., the number of the limiting zones is 12, then the elements of set (66) may have the following signs



In the limiting zones belonging to the same part, the values A and \bar{A} change their signs alternatively (this follows from rule R). Thus, in the first and last limiting zones of each part, the same value A or \bar{A} changes its sign, and the same value changes its sign also in first and last limiting zones of the neighbouring part. E.g.,



In this manner, two cases may be imagined. In the one case, one of the values A and \bar{A} changes its sign more times than the other. This case is impossible, because it is in contradiction with the premise of the twelfth theorem. In the other case the value A changes its sign just as many times as the value \bar{A} .

* Here, the word "part" is used, because we do not want to use again the word "group"

This case is also impossible, because in this case, the set (66) forms a single part only, e.g.,

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\
 \bar{A} & A & \bar{A} & A & \bar{A} & A & \bar{A} & A & \bar{A} & A & \bar{A} & A
 \end{array}$$

and so, the first and last numerators are of opposite signs. With this the twelfth theorem is proved for the case in which the assumption S_1 is fulfilled. Now, we can omit assumption S_1 , because by making, e.g., $A_3 \rightarrow 0$, the relation (59) remains valid obviously.

The proof of the thirteenth theorem can be carried out in the very same manner, as the proof of the twelfth theorem.

The proof of the fourteenth theorem will be carried out by means of the twelfth theorem. Let two elements of the set $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ be denoted by ω_i and ω_j . Let us assume that the set $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$ forms as many groups as the set $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$. Introducing

$$\bar{A}_{1j} = A_{1i}, \bar{A}_{2j} = A_{2i}, \dots, \bar{A}_{nj} = A_{ni}$$

into (59), we obtain the relation $\omega_i^2 \leq \omega_j^2 \leq \omega_i^2$, that is $\omega_i^2 = \omega_j^2$. This means the following: If ω_i differs from ω_j , then the number of groups formed by the amplitudes belonging to ω_i , differs from the number of groups formed by the amplitudes belonging to ω_j , (corollary 1).

Since there are n elements, it is easy to see the following: The number of the groups may be 1, 2, ..., n , and each of these numbers belongs to a certain ω_j , (corollary 2).

Let two elements of the set $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ be denoted by ω_j and ω_p . Let us assume that the set $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ belonging to ω_j forms g groups, and the set $A_{1p}, A_{2p}, \dots, A_{np}$ belonging to ω_p forms $g + 1$ groups. From (10), we obtain the expressions

$$\begin{aligned}
 \omega_p^2 &= \frac{(a_{01} + a_{12})A_{1p} - a_{12}A_{2p}}{m_{11}A_{1p}}, \\
 \omega_p^2 &= \frac{-a_{12}A_{1p} + (a_{12} + a_{23})A_{2p} - a_{23}A_{3p}}{m_{22}A_{2p}}, \\
 \omega_p^2 &= \frac{-a_{23}A_{2p} + (a_{23} + a_{34})A_{3p} - a_{34}A_{4p}}{m_{33}A_{3p}}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

The zig-zag line in Fig. 4 visualizes the values $A_{1p}, A_{2p} \dots, A_{np}$. This set forms $g + 1$ groups. Let us straighten out the last group of this set, (the straightening out is visualized by a dotted line in Fig. 4). In this manner, a line arises forming g groups only. The values visualized by this line will be

or, what is the same,

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \left(\frac{I_{12}}{I_{01}} + 1 - \frac{I_{12}}{C_1} \omega^2 \right) A_1, \\ A_3 &= -\frac{I_{23}}{I_{12}} A_1 + \left(\frac{I_{23}}{I_{12}} + 1 - \frac{I_{23}}{C_2} \omega^2 \right) A_2, \\ A_4 &= -\frac{I_{34}}{I_{23}} A_2 + \left(\frac{I_{34}}{I_{23}} + 1 - \frac{I_{34}}{C_3} \omega^2 \right) A_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

where, for the sake of simplicity, the labels j , $(1), \dots, (n)$ and the bars are not written down.

As we see, the coefficients on the right-hand sides of differential equations (68) form a cross-matrix. Therefore, for the treatment of the problem expressed by differential equations (68), the twelfth and fourteenth theorems can be used (see the numerical example elaborated in Section 10).

Remark on the solution of differential equations (67). Let it be assumed that we have found the solution $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ of the differential equations (68). Then, the solution $\varphi_{01}(t), \varphi_{12}(t), \dots, \varphi_{n(n+1)}(t)$ of the differential equations (67) can easily be computed, because e.g., the first of the differential equations (67) becomes $I_{01} \ddot{\varphi}_{01} = q_1$, that is

$$I_{01} \ddot{\varphi}_{01} = A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \dots + A_{n1} \sin(\omega_n t + \psi_n)$$

whence

$$\varphi_{01} = ct d - \frac{A_{11}}{\omega_1^2 I_{01}} \sin(\omega_1 t + \psi_1) - \dots - \frac{A_{n1}}{\omega_n^2 I_{01}} \sin(\omega_n t + \psi_n).$$

In a similar manner, we obtain $\varphi_{12} = ct + d - \dots, \varphi_{23} = ct + d - \dots$ and so on. This is in accordance with our remark made at the end of Section 1. The terms $ct + d$ means a uniform rotation. Thus, the harmonic torsional vibration is superposed on a uniform rotation.

10. Second numerical example

The system is shown in Fig. 6. The non-dimensional data are the following

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 1, \quad C_7 = 0,02,$$

$$I_{01} = I_{12} = I_{23} = I_{34} = I_{45} = I_{56} = 0,256, \quad I_{67} = 7,5, \quad I_{78} = 2,4.$$

(We borrow these non-dimensional data from Section 41 of the book of J. P. DEN HARTOG [5].) Find the circular frequencies of the principal torsional oscillations.

In order to accomplish this task, we shall apply equations (71) and (70), namely five equations according to (71) and two equations according to (70). Thus, using the non-dimensional data, we have the following seven equations:

$$\left. \begin{aligned}
 A_2 &= (2 - 0,256 \omega^2) A_1, \\
 A_3 &= -A_1 + (2 - 0,256 \omega^2) A_2, \\
 A_4 &= -A_2 + (2 - 0,256 \omega^2) A_3, \\
 A_5 &= -A_3 + (2 - 0,256 \omega^2) A_4, \\
 A_6 &= -A_4 + (2 - 0,256 \omega^2) A_5, \\
 \omega^2 &= -3,90625 \frac{A_5}{A_6} + 4,039583333 - 0,133333333 \frac{A_7}{A_6}, \\
 \omega^2 &= -0,002666666 \frac{A_6}{A_7} + 0,011.
 \end{aligned} \right\} \tag{72}$$

The course of calculation is the following. The seven quantities $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \omega^2, \omega^2$ will be computed by means of formulas (72). A_1 and A_7 will be arbitrarily chosen. Also ω^2 -s which

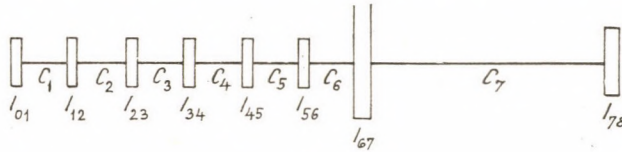


Fig. 6

stand on the right-hand sides of equations (72), will be arbitrarily chosen. E.g., let us choose $\omega^2 = 5$ and $A_1 = 1$. (We notice that it is very convenient to start with $\omega^2 = 0$ and $A_1 = 1$, or with $\omega^2 = +\infty$ and $A_1 = 1$, but in this illustrative example, we will not avail ourselves of this possibility.) Using these starting values, we find

$$\begin{aligned}
 A_2 &= (2 - 0,256 \cdot 5) \cdot 1 = 0,720, \\
 A_3 &= -1 + (2 - 0,256 \cdot 5) \cdot 0,720 = -0,482, \\
 A_4 &= -0,720 + (2 - 0,256 \cdot 5) \cdot (-0,482) = -1,067, \\
 A_5 &= 0,482 + (2 - 0,256 \cdot 5) \cdot (-1,067) = -0,286, \\
 A_6 &= 1,067 + (2 - 0,256 \cdot 5) \cdot (-0,286) = 0,861.
 \end{aligned}$$

Now, a value must be chosen for A_7 . Let it be $+0$. So we obtain

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= -3,90625 \frac{-0,286}{0,861} + 4,039583333 - 0,133333333 \frac{+0}{0,861} = 5,33, \\
 \omega^2 &= -0,002666666 \frac{0,861}{+0} + 0,011 = -\infty.
 \end{aligned}$$

Column I contains these quantities. As it is seen, the quantities A_1, A_2, \dots, A_7 form three groups. From this, the inequality $-\infty \leq \omega_3^2 \leq 5,33$ follows. (This ascertainment is based on the twelfth and fourteenth theorems, because this computation means that the quantities (58) are now the following: 5, 5, 5, 5, 5, 5,33, $-\infty$.) We choose for A_7 the value -0 in column II, and the value $-0,861/1000$ in column III. In column IV, we choose for starting the value $\omega^2 = 5,1$. This choice is suggested by quantities obtained in columns II and III.

To avoid repetitions in writing, we have not written down the terms, which are identical with the corresponding terms of the previous column. The symbol $+0$ denotes a very small positive quantity. The symbol -0 denotes a negative quantity, the absolute value of which is very small. For convenience's sake we choose for A_7 the values $+0, -0, +A_6, -A_6$,

	I	II	III	IV
ω^2	5			5,1
A_1	+ 1			+ 1
A_2	+ 0,720			+ 0,694
A_3	- 0,482			- 0,517
A_4	- 1,067			- 1,053
A_5	- 0,286			- 0,214
A_6	+ 0,861			+ 0,905
A_7	+ 0	- 0	- 0,861/1000	- 0,905
ω^2	5,33	5,33	5,33	5,096
ω^2	- ∞	+ ∞	2,67	0,0136
	$-\infty \leq \omega_3^2 \leq 5,33$	$5 \leq \omega_4^2 \leq +\infty$	$2,67 \leq \omega_4^2 \leq 5,33$	$0,0136 \leq \omega_4^2 \leq 5,1$

	V	VI	VII	VIII
ω^2	10		9	
A_1	+ 1		+ 1	
A_2	- 0,560		- 0,304	
A_3	- 0,686		- 0,908	
A_4	+ 0,944		+ 0,577	
A_5	+ 0,158		+ 0,773	
A_6	- 1,032		- 0,812	
A_7	+ 0	+ 1,032	+ 0	- 0
ω^2	4,63	4,76	7,56	7,56
ω^2	+ ∞	0,0136	+ ∞	- ∞
	$4,63 \leq \omega_5^2 + \infty$	$0,0136 \leq \omega_5^2 \leq 10$	$7,56 \leq \omega_5^2 \leq +\infty$	$-\infty \leq \omega_4^2 \leq 9$

	IX	X	XI	XII
ω^2		8,8		12
A_1		+ 1		+ 1
A_2		- 0,252		- 1,072
A_3		- 0,936		+ 0,149
A_4		+ 0,488		+ 0,912
A_5		+ 0,813		- 1,127
A_6		- 0,693		+ 0,296
A_7	+ 0,812	+ 0	+ 0,693	- 0
ω^2	7,693	8,62	8,75	18,8
ω^2	0,0136	+ ∞	0,0136	+ ∞
	$0,0136 \leq \omega_5^2 \leq 9$	$8,62 \leq \omega_5^2 \leq +\infty$	$0,0136 \leq \omega_5^2 \leq 8,8$	$12 \leq \omega_6^2 \leq +\infty$

	XIII	XIV	XV	XVI
ω^2	12,5	12,3	15	
A_1	+ 1	+ 1	+ 1	
A_2	- 1,200	- 1,149	- 1,840	
A_3	+ 0,440	+ 0,320	+ 2,392	
A_4	+ 0,672	+ 0,781	- 2,553	
A_5	- 1,247	- 1,217	+ 2,312	
A_6	+ 0,825	+ 0,616	- 1,693	
A_7	- 0	- 0,616	+ 0	+ 1,693
ω^2	9,94	11,8	9,8	9,9
ω^2	+ ∞	0,0136	+ ∞	0,0136
	$9,94 \leq \omega_6^2 \leq + \infty$	$0,0136 \leq \omega_6^2 \leq 12,3$	$9,8 \leq \omega_7^2 \leq + \infty$	$0,0136 \leq \omega_7^2 \leq 15$
	XVII	XVIII	XIX	XX
ω^2	14,6	2	1,9	1
A_1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
A_2	- 1,738	+ 1,488	+ 1,514	+ 1,744
A_3	+ 2,019	+ 1,214	+ 1,291	+ 2,042
A_4	- 1,771	+ 0,318	+ 0,440	+ 1,816
A_5	+ 1,058	- 0,740	- 0,624	+ 1,131
A_6	- 0,067	- 1,420	- 1,385	+ 0,154
A_7	+ 0,067/10000	+ 1,420/10	+ 0	+ 0
ω^2	65	2,02	2,28	+ 23,3
ω^2	26,7	0,037	+ ∞	- ∞
	$14,6 \leq \omega_7^2 \leq 65$	$0,037 \leq \omega_3^2 \leq 2,02$	$1,9 \leq \omega_3^2 \leq + \infty$	$-\infty \leq \omega_1^2 \leq 1$
	XXI	XXII	XXIII	XXIV
ω^2		0,3	0,26	0,27
A_1		+ 1	+ 1	+ 1
A_2		+ 1,928	+ 1,933	+ 1,931
A_3		+ 2,718	+ 2,738	+ 2,728
A_4		+ 3,314	+ 3,361	+ 3,331
A_5		+ 3,672	+ 3,759	+ 3,715
A_6		+ 3,766	+ 3,908	+ 3,837
A_7	- 0,154	- 3,766/10	- 0	- 3,837/100
ω^2	- 23,3	0,19	0,282	0,258
ω^2	0,0136	0,037	+ ∞	0,278
	$- 23,2 \leq \omega_2^2 \leq 1$	$0,037 \leq \omega_2^2 \leq 0,3$	$0,26 \leq \omega_2^2 \leq + \infty$	$0,258 \leq \omega_2^2 \leq 0,278$

	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII
ω^2	0,1			
A_1	+ 1			
A_2	+ 1,974			
A_3	+ 2,892			
A_4	+ 3,761			
A_5	+ 4,505			
A_6	+ 5,141			
A_7	+ 0	- 0	+ 5,141	- 5,141/10
ω^2	0,62	0,62	0,583	0,633
ω^2	$-\infty$	$+\infty$	0,0083	0,0376
	$-\infty \leq \omega_1^2 \leq 0,62$	$0,1 \leq \omega_2^2 \leq +\infty$	$0,0083 \leq \omega_1^2 \leq 0,583$	$0,0376 \leq \omega_2^2 \leq 0,633$

	XXIX	XXX	XXXI	XXXII
ω^2	0,01		0,0104	
A_1	+ 1		+ 1	
A_2	+ 1,997		+ 1,997	
A_3	+ 2,990		+ 2,989	
A_4	+ 3,974		+ 3,973	
A_5	+ 4,949		+ 4,947	
A_6	+ 5,911		+ 5,907	
A_7	+ 30	+ 40	+ 30	+ 34
ω^2	0,087	- 0,13	0,096	- 0,002
ω^2	0,01048	0,01071	0,01048	0,01054
	$0,01 \leq \omega_1^2 \leq 0,087$	$-0,13 \leq \omega_1^2 \leq 0,01071$	$0,0104 \leq \omega_1^2 \leq 0,096$	$-0,002 \leq \omega_1^2 \leq 0,01054$

$-A_6/1000$, etc. In this manner, the computation became extremely simple, not only for ω_1^2 , but also for $\omega_2^2, \dots, \omega_7^2$. Scrutinizing the results of the columns, we find

$$\begin{aligned}
 0,0104 &\leq \omega_1^2 \leq 0,01054, \\
 0,26 &\leq \omega_2^2 \leq 0,278, \\
 1,9 &\leq \omega_3^2 \leq 2,02, \\
 5 &\leq \omega_4^2 \leq 5,1, \\
 8,62 &\leq \omega_5^2 \leq 8,8, \\
 12 &\leq \omega_6^2 \leq 12,3, \\
 14,6 &\leq \omega_7^2 \leq 15.
 \end{aligned}$$

Hence, we obtain

$$\left. \begin{aligned} 0,1019 &\leq \omega_1 \leq 0,1027, \\ 0,509 &\leq \omega_2 \leq 0,528, \\ 1,378 &\leq \omega_3 \leq 1,422, \\ 2,23 &\leq \omega_4 \leq 2,26, \\ 2,93 &\leq \omega_5 \leq 2,97, \\ 3,46 &\leq \omega_6 \leq 3,51, \\ 3,82 &\leq \omega_7 \leq 3,88. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

inequalities (73) express the result of the calculation. This result shows, e.g., that the mean value $\frac{3,46 + 3,51}{2} = 3,485$ differs from the exact value of ω_6 by less than 1 per cent. Of course, the accuracy of the result can easily be augmented by applying more columns.

A glance back at the presented method. In this numerical example, we have presented a method for calculating the frequencies of the principal oscillations of the rotating shaft. This method seems to be more advantageous than the various methods found in the literature [3, 4, 5]. Its advantages are the following: The computation can be carried out very easily. The computation consists of columns, and the result of each column expresses an inequality, that is, an error estimation. Thus, the result is not an ordinary approximation with unknown accuracy, but a rigorous error estimation. An incidental numerical mistake has no effect on the result of a following column that begins with a newer starting value of ω^2 . The method yields values not only for ω_1^2 but also for $\omega_2^2, \dots, \omega_n^2$.

11. Related topics, systems with distributed physical constants, future developments

All the theorems treated above, concern systems which have finite numbers of degrees of freedom. It is an obvious thought to extend these theorems to system with distributed physical constants, (string, beam, membrane, plate). Such a system has an infinite number of degrees of freedom. In this domain, attempts were made in earlier papers [6] and [7] of the author. The basic idea of the twelfth theorem already occurred in a previous paper [8]. The formulation and proof of the sixth and seventh theorems for finite number of degrees of freedom were also published in a previous paper [9] by the author.

Recently, a vast literature due to different authors, is concerned with these topics. From among them, we mention a few only: L. COLLATZ [10], [11], J. B. DIAZ [12], R. J. DUFFIN [13], J. HERSCH [14], [15], L. E. PAYNE [16], [17], L. E. PAYNE and H. F. WEINBERGER [18], G. SZEGŐ [19], [20], H. F. WEINBERGER [21], [22], [23], H. WIELANDT [24], [25]. In these works, further references can be found.

Section 9 of Chapter V of the book of TH. v. KÁRMÁN and M. A. BIOT [1] as well as pp. 289—291 of the book of L. COLLATZ [10] and the Section B of Chapter 3 of the book of KING N. TONG [26] refer just to the narrower

topic of the present paper, that is, to the oscillations of systems with finite degrees of freedom. Several theorems concerning this domain are due to G. FROBENIUS (see the book [10]).

The application of the fourth, fifth, sixth, seventh, eighth, ninth, tenth and eleventh theorems involves an interesting question that we shall now shortly outline. In the sixth theorem, e.g., the reservation is made that the parameters $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{nn}$ are positive. Consequently, when we will apply the sixth theorem, we have, first of all, to decide whether the parameters $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{nn}$ are positive. Such a question arises also in the case of systems with distributed physical constants, because the sixth theorem can obviously be extended to systems with distributed physical constants. The question is then equivalent to the following question: is Green's function of the system positive? In other words: are the influence coefficients of the system positive? In some cases, it is already shown that the influence coefficients are positive, e.g., the influence coefficients of the deflections of

simple beam with hinged support,
 simple beam with clamped support,
 cantilever beam,
 membrane with fixed boundary,
 plate with Navier's boundary condition,
 circular plate with clamped boundary.

If the plate with clamped boundary, has other form as a circle, then the coefficients in question are not always positive. This interesting fact is pointed out in the papers of R. J. DUFFIN [27], [28], P. R. GARABEDIAN [29], C. LOEWNER and G. SZEGŐ [30], G. SZEGŐ [31].

As was seen in Section 9 of the present paper, the twelfth and fourteenth theorems are very useful for practical computing of the frequencies of principal oscillations. But they refer only to a particular system that is characterized by cross-matrix. Thus, it is desirable to devise similar theorems referring also to other types of systems, that is, to systems which are characterized by other sorts of matrices. The establishing of these theorems may be the purpose of future researches.

REFERENCES

1. See e.g.: v. KÁRMÁN, TH. and BIOT, M. A.: Mathematical methods in engineering. First edition. Chapter V.
2. COURANT, R. und HILBERT, D.: Methoden der mathematischen Physik. Bd. 1, Aufl. 2, Kap. 5, § 2, Abschn. 2.
3. TIMOSHENKO, S. and YOUNG, D. H.: Vibration problems in engineering. Third edition.
4. SCOTTO LAVINA, G.: Recenti metodi di calcolo delle vibrazioni torsionali degli alberi rotanti. L'Ingegnere, 1961, p. 517.
5. DEN HARTOG, J. P.: Mechanical vibrations. Second edition.

6. BARTA, J.: Sur la vibration fondamentale d'une membrane. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, tome 204, Paris, 1937, p. 472.
7. BARTA, J.: Über die elastische Grundschiwingung eingespannter Stäbe. *Ingenieur-Archiv*, Bd. 8, 1937, p. 35.
8. BARTA, J.: On the eigenvalues of differential equations (in Hungarian with German summary). *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften*, Bd. 57, 1938, p. 434.
9. BARTA, J.: On the oscillations of elastic systems (in Hungarian with German summary). *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften*, Bd. 57, 1938, p. 441.
10. COLLATZ, L.: *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Leipzig, 1949, pp. 289—291.
11. COLLATZ, L.: Einschließungssatz für charakteristische Zahlen von Matrizen. *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 48, 1942, p. 221.
12. DIAZ, J. B.: Upper and lower bounds for eigenvalues. *Proc. of Eighth Symposium in Appl. Mathematics of American Math. Soc.* 1956.
13. DUFFIN, R. J.: Lower bounds for eigenvalues. *The Physical Review*, vol. 71, No. 11, 1947.
14. HERSCH, J.: Un principe de maximum pour la fréquence fondamentale d'une membrane. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, tome 249, Paris, 1959, p. 1074.
15. HERSCH, J.: Une méthode pour l'évaluation par défaut de la première valeur propre de la vibration ou du flambage des plaques encastrees. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, tome 250, Paris, 1960, p. 3943.
16. PAYNE, L. E.: Inequalities for eigenvalues of membranes and plates. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 4, 1955, p. 517.
17. PAYNE, L. E.: Inequalities for eigenvalues of supported and free plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 14, 1958, p. 111.
18. PAYNE, L. E. and WEINBERGER, H. F.: Lower bounds for vibration frequencies of elastically supported membranes and plates. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 5, 1957, p. 171.
19. SZEGŐ, G.: Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 3, 1954, p. 343.
20. SZEGŐ, G.: On membranes and plates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 36, 1950, p. 210.
21. WEINBERGER, H. F.: Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 9, 1956, p. 613.
22. WEINBERGER, H. F.: An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 5, 1956, p. 633.
23. WEINBERGER, H. F.: Lower bounds for higher eigenvalues by finite difference methods. *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 8, 1958, p. 339.
24. WIELANDT, H.: Einschließung von Eigenwerten Hermitescher Matrizen. *Archiv der Mathematik*, vol. 5, 1954, p. 108.
25. WIELANDT, H.: An extremum property of sums of eigenvalues. *Proc. of the American Mathematical Society*, vol. 6, 1955, p. 106.
26. TONG, K. N.: *Theory of mechanical vibration*. John Wiley and Sons, 1960.
27. DUFFIN, R. J.: On a question of Hadamard concerning super-biharmonic functions. *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 28, 1949, p. 253.
28. GARABEDIAN, P. R.: Technical Report, no. 8, O. N. R. Stanford University, 1950.
29. LOEWNER C. and SZEGŐ, G.: Technical Report, no. 3, O. N. R. Stanford University, 1950.
30. DUFFIN, R. J.: Nodal lines of a vibrating plate. *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 31, 1953, p. 294.
31. SZEGŐ, G.: On certain set functions defined by extremum properties in the theory of functions and in mathematical physics. *Proc. Int. Cong. of Math.*, vol. 2, 1950, p. 253.

SUMMARY

The oscillations to which the paper refers, are characterized by the assumption that the generalized coordinates (as functions of time) satisfy certain homogeneous linear differential equations with constant coefficients. Starting from well-known formulas, author derives theorems, a few of which can immediately be applied for practical purposes. In this manner a new method presents itself by means of which the frequencies of the torsional principal oscillations can easily be calculated. This calculation yields not only the frequency of the slowest principal oscillation, but also the frequencies of all principal oscillations.

SÄTZE ÜBER DIE SCHWINGUNGEN DER SYSTEME VON ENDLICHEN
FREIHEITSGRADEN

J. BARTA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Schwingungen, auf die der Aufsatz sich bezieht, sind dadurch charakterisiert, daß die verallgemeinerten Koordinaten (als Funktionen der Zeit) gewissen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genügen. Ausgehend von bekannten Formeln, leitet der Verfasser Sätze ab, von denen einige für praktische Zwecke unmittelbar geeignet sind. In dieser Weise ergibt sich ein neues Verfahren zur Berechnung der Frequenzen der HauptdrehSchwingungen einer Welle. Dieses Verfahren läßt sich überaus leicht anwenden und liefert die Frequenzen nicht nur für die langsamsten HauptdrehSchwingungen, sondern auch für alle HauptdrehSchwingungen.

THÉORÈMES SUR LES VIBRATIONS D'UN SYSTÈME
DE DEGRÉ DE LIBERTÉ FINI

J. BARTA

RÉSUMÉ

Les vibrations examinées par la présente étude sont caractérisées par cette supposition que les coordonnées généralisées (comme fonctions du temps) satisfont à certaines équations différentielles homogènes et linéaires à coefficients constants. A partir de formules bien connues, l'auteur déduit des théorèmes, dont quelques-uns peuvent trouver des applications pratiques immédiates. On obtient ainsi un nouveau procédé permettant de calculer très aisément les fréquences des vibrations principales de rotation d'un arbre, calcul qui fournit les fréquences non seulement de la vibration principale la plus lente, mais aussi de toutes les vibrations principales.

К КОЛЕБАНИЯМ СИСТЕМ С КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

И. БАРТА

РЕЗЮМЕ

Колебания, рассматриваемые в данной работе, характеризуются тем, что обобщенные координаты (как функции времени) удовлетворяют определенные однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянным коэффициентом. Исходя из известных формул, автор выводит математические зависимости, часть которых может быть непосредственно использована для практических целей. Таким образом, получается новый метод, с помощью которого можно очень просто вычислить частоты основных торсионных колебаний осей и валов. Данный метод является не только методом для определения частоты наиболее медленного основного колебания, но, кроме того, дает частоты всех основных колебаний.

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. VII. 26. — Terjedelem: 22,25 (A/5) ív, 119 ábra

62.55742 — Akadémiai Nyomda, V., Gerlőczy-u. 2. — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

- Tóth, G.* : Oscillographic Study of the Breaking of Leather Fibres — Untersuchung des Reißens von Lederfasern mit Hilfe des Oszillographen — Étude de la rupture des fibres de cuir au moyen de l'oscillographe — *Тот, Г.*: Исследование разрыва кожевенных волокон с помощью осциллографа 225
- Vajda, Gy.* : The Part Played by the Capacitive Component in the Measurement of Absorption Current — Die Rolle der kapazitiven Komponente bei der Untersuchung der Absorption — Le rôle de la composante capacitive dans l'étude de l'absorption — *Вайда, Д.*: Роль емкостного компонента при исследовании абсорбции... 237
- Horváth, Z. and Wéber, J.* : The Parkes Process with Zinc Addition in Two Stages Granting Minimum Zinc Consumption — Eine Arbeitsmethode mit zweimaligem Zinkzusatz und minimalem Zinkverbrauch beim Parkes-Verfahren — Méthode de travail à deux additions de zinc, assurant une consommation minimum de zinc dans le procédé de Parkes — *Хорват, З. и Вебер, Й.*: Способ двойного оцинкования при минимальном использовании цинка методом Паркеса 263
- Hoffmann, A.* : Untersuchung des Heizvorganges an zylindrischen Körpern bei veränderlicher Ofentemperatur und veränderlichem Wärmeübergangskoeffizienten — Research on the Heating of a Long Cylindric Body in an Oven with Changing Temperature and on the Condition of a Variable Coefficient of Heat Transfer — Examen du processus d'échauffement de corps cylindriques longs, à température de four et coefficient de transmission variables — *Хоффманн, А.*: Исследование процесса накаливания длинных цилиндрических тел при переменных температуре печи и коэффициенте теплопередачи 285
- Apor, K.* : Система кривых регулирования русла рек. Часть 2. Гипертангентоид — *Apor, K.* : Das System der Flussbettregulierungskurven. II. Die Hypertangenten — The System of River-Bed Regulation Curves. II. The Hypertangentoid — Le système des courbes de régularisation des lits de rivière. II. L'hypertangentoid . 301
- Paczolay, Gy.* : On the Unevenness of Current Distribution among the Stubs of Aluminium Electrolytic Cells — Ungleichmäßigkeit der Stromverteilung in den Anoden mit vertikalen Stromzuführungs-Bolzen der Aluminium-Elektrolyseöfen — L'inégalité de la répartition du courant aux anodes à goujons verticaux des cuves d'électrolyse à aluminium — *Пацолай, Д.*: Неравномерность анодного распределения тока алюминиевых электролизных ванн с вертикальными штырями 323
- Kollár, L.* : Torsional Buckling of Thin-Walled Curved Bars (Shell-Arches) — Die Drillknickung von Schalenbögen — Flambage à torsion des voiles en arc — *Коллар, Л.*: Скручивающий прогиб оболочечных арок 337
- Strach, L., Korger, M. und Choc, M.* : Trocknungsforschung des Tschechoslowakischen Staatlichen Forschungsinstitutes für Wärmetechnik — The Investigations on Drying of the Czechoslovak Research Institute of Heat — Recherches sur le séchage à l'Institut de la Chaleur Tchecoslovaque — *Страх, Л., Коргер, М. и Чоу, М.*: Исследования Чехословацкого теплотехнического исследовательского института в области теории сушки 355
- Nagy, G. Á.* : Influence de la distance entre l'objet essayé et le générateur, dans les essais au choc — Berücksichtigung des Einflusses der Entfernung zwischen Prüfling und Generator bei Stoßversuchen — Consideration of the Distance between the Test

Object and the Shock Generator in Shock Wave Tests — <i>Надь, Г. А.</i> : Учет влияния расстояния между испытуемым предметом и генератором импульсного напряжения при испытаниях импульсным напряжением.....	383
<i>Brozák, F.</i> : The Limit Height of Capillary Rise in Capillary Tubes of Variable Sections — Der Grenzwert der Kapillaraszension in Kapillarröhren von verschiedenem Querschnitt — La valeur limite de l'ascension capillaire dans les tubes capillaires de section variable — <i>Брозак, Ф.</i> : Предельное значение повышения уровня в капиллярных трубках переменного профиля	413
<i>Замбо, Я.</i> : О выборе производственной мощности горных предприятий — <i>Zambó, J.</i> : Wahl der Produktionskapazität von Bergbaubetrieben — Selection of the Production Capacity of Mining Plants — Le choix de la capacité de production des mines	423
<i>Szendy, Ch.</i> : Basic Equations of the M. H. D. Generator — Grundgleichung des M. H. D. Generators — Équations de base du générateur M. H. D. — <i>Сенди, К.</i> : Основные уравнения генератора MHD	431
<i>Barta, J.</i> : Theorems on the oscillations of systems with finite degrees of freedom — Sätze über die Schwingungen der Systeme von endlichen Freiheitsgraden — Théorèmes sur les vibrations d'un système de degré de liberté fini — <i>Барта, Й.</i> : К колебаниям систем с конечной степенью свободы	441

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

